《概率论与数理统计》期末考试卷 （A）

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名________________

题 数	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									

本题得分	

一、填空题〖每小题 5 分，共计 25 分〗

1、设 A,B,C 是三个随机事件，则恰有一个发生的事件可表示为________________。

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。对不全为零的常数 a 和 b，则 $aX+bY\sim$______________。

3、某工厂在含碳量与合金强度关系时，选取 12 个生产小时作样本，测得数据如下：

$$\sum_{i=1}^{12}x_i=1.9,\sum_{i=1}^{12}y_i=589.5,\sum_{i=1}^{12}x_i^2=0.3194,\sum_{i=1}^{12}y_i^2=29304.25,\sum_{i=1}^{12}x_iy_i=95.85。$$

假定合金强度 y 与含碳量 x 间具有近似线性关系，则 y 对 x 的线性回归方程________________。

4、设总体 X 的概率密度为 $p(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 是未知参数，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则 θ 的最大似然估计量__________。

5、概率论与数理统计的基本研究对象是_________；研究手段是___________。

本题得分	

二、〖计 10 分〗设罐中有 b 只黑球、r 只红球，每次随机取出一只球，取出后将原球放回，再加入同色球 c 只。若连续从罐中取球三次，试求所取出的 3 只球是“2 只红球、1 只黑球”事件的概率。

本题得分	

三、〖计 15 分〗设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数是

$$p(x,y)=\begin{cases}kx^2y, & |x|\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

其中 k 为常数，且 $k>0$，试求：

（1）常数 k；〖5 分〗

（2）判断随机变量 X 和 Y 是否独立；〖5 分〗

（3）设 $Z=X+Y$，求 Z 的概率密度函数 $p_Z(z)$。〖5 分〗

考试形式开卷（ ）、闭卷（√），在选项上打（√）

开课教研室__应用数学____ 命题教师__命题组__ 命题时间__2019-12-25__ 使用学期__2019-2020（1）__ 总张数__3__ 教研室主任审核签字 ___________

本题得分	

四、〖10 分〗设 $x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，且

$$\overline{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\quad s_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^2$$

试求常数 C 使得 $t_c=C\dfrac{x_{n+1}-\overline{x}_n}{s_n}$ 服从 t 分布，并指出分布的自由度。

本题得分	

五、〖计 14 分〗为比较两个小麦品种的产量，选择 18 块条件相似的试验田，采用相同的耕作方法做试验，结果播种甲品种的 8 块试验田的平均产量 $\overline{x}_{甲}=569.38$（单位：Kg）和样本方差 $s_{甲}^2=2140.55$，结果播种乙品种的 10 块试验田的平均产量 $\overline{x}_{乙}=487.00$（单位：Kg）和样本方差 $s_{乙}^2=3256.22$，假定每个品种的单位面积产量均服从正态分布，且两个品种单位面积产量的标准差相等。试求

（1）这两个品种平均单位面积产量差的双侧置信区间。〖7 分〗

（2）并判断这两个小麦品种的产量有无显著差异？(取 $\alpha=0.05$) 〖7 分〗

本题得分	

六、〖计 10 分〗设从均值为 μ，方差为 σ^2（>0）的总体中分别抽取容量为 n_1 和 n_2 的两独立样本，$\overline{x}_1$ 和 $\overline{x}_2$ 分别是这两个样本的均值。试证，对于任意常数 a,b（$a+b=1$），$Y=a\overline{x}_1+b\overline{x}_2$ 都是 μ 的无偏估计。并确定常 数 a,b 使 $\mathrm{Var}(Y)$ 达到最小。

本题得分	

七、〖计 10 分〗设随机变量 X 的期望 μ 和方差 σ^2（>0）均存在。$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 X 的一个样本，试利用特征函数证明：

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{L} N(0,1) \text{。}$$

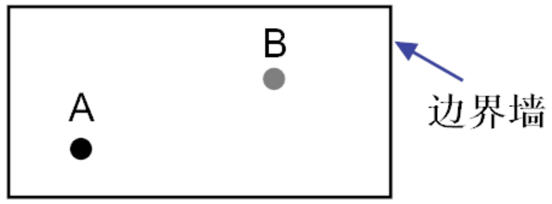
其中“$\xrightarrow{L}$”表示“依分布收敛”。

本题得分	

八、〖计 6 分〗（A）和（B）两题中请任选一题作答。

（A）请比较概率论中的“概率的公理化定义”和假设检验中的“假设（hypothesis）”所体现的思想性异同，并谈谈它们在学科体系架构和科学研究中的地位。

（B）在一个长为 2a、宽为 a 的平面区域内，有两个醉鬼。假设两个醉鬼前进的方向和速度随时都会发生改变，且他们在遇到边界墙后会随机选一个方向继续前进。请设计程序（画出程序流程图即可），模拟醉鬼的运动轨迹，直至两个醉鬼相撞。



附：$u_{0.95} = 1.645$，$u_{0.975} = 1.96$

$F_{0.025}(1,9) = 1/963.28, F_{0.975}(1,9) = 7.21, F_{0.95}(1,9) = 5.12$

$F_{0.025}(1,8) = 1/956.66, F_{0.975}(1,8) = 7.57, F_{0.95}(1,8) = 5.32$

$t_{0.95}(8) = 1.8595, t_{0.95}(9) = 1.8331, t_{0.95}(10) = 1.8125$

$t_{0.975}(8) = 2.3060, t_{0.975}(9) = 2.2622, t_{0.975}(10) = 2.2281$

$t_{0.975}(16) = 2.1199, t_{0.975}(18) = 2.1009$