第五章 解析函数的洛朗展式

§2 孤立奇点及其分类

李太玉、孙海伟

山东大学(威海)
数学与统计学院

Spring Semester, 2022

定义 (单值性孤立奇点).
设点 a 是函数 $f(z)$ 的奇点, 但 $f(z)$ 在 a 的某一去心邻域内解析, 则称 a 为 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**.

- 除单值性孤立奇点外, 还有
  多值性孤立奇点 (即分支点)、及非孤立奇点.
- 例, $f(z) = \csc\frac{1}{z} = 1/\sin\frac{1}{z}$,
  点列 $z_n = \frac{1}{n\pi}$ 中的每个点都是它的孤立奇点,
  而该点列的极限点 $z = 0$ 则是非孤立奇点.
- 提到孤立奇点总是指单值性孤立奇点.
- 由洛朗定理: 若 a 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 则必存在 $R > 0$, 使得 $f(z)$ 在点 a 的去心 R 邻域, 即在圆环 $0 < |z - a| < R$ 内, 展开成洛朗级数.

孤立奇点的分类

设点 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则在点 a 的某去心邻域 $\mathring{K}: 0 < |z-a| < R$ 内, $f(z)$ 可以展开为 $z-a$ 的洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n:$$

- 非负幂部分 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 在圆盘 $K: |z-a| < R$ 内表示一解析函数,

孤立奇点的分类

设点 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则在点 a 的某去心邻域 $\mathring{K}: 0 < |z-a| < R$ 内, $f(z)$ 可以展开为 $z-a$ 的洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n :$$

- 非负幂部分 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在圆盘 $K: |z-a| < R$ 内表示一解析函数, 称之为 $f(z)$ 的**解析部分**, 或**正则部分**;

孤立奇点的分类

设点 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则在点 a 的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}: 0 < |z-a| < R$ 内, $f(z)$ 可以展开为 $z-a$ 的洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n :$$

- 非负幂部分 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 在圆盘 $K: |z-a| < R$ 内表示一解析函数, 称之为 $f(z)$ 的**解析部分**, 或**正则部分**;
- $f(z)$ 在点 a 的奇异性质完全体现在负幂部分 $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ 上,

孤立奇点的分类

设点 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则在点 a 的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}: 0 < |z-a| < R$ 内, $f(z)$ 可以展开为 $z-a$ 的洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n :$$

- 非负幂部分 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 在圆盘 $K: |z-a| < R$ 内表示一解析函数, 称之为 $f(z)$ 的**解析部分**, 或**正则部分**;
- $f(z)$ 在点 a 的奇异性质完全体现在负幂部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ 上, 称之为 $f(z)$ 的**奇异部分**, 或**主要部分**.

孤立奇点的分类

设点 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则在点 a 的某去心邻域 $\mathring{K}: 0 < |z-a| < R$ 内, $f(z)$ 可以展开为 $z-a$ 的洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n :$$

- 非负幂部分 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 在圆盘 $K: |z-a| < R$ 内表示一解析函数, 称之为 $f(z)$ 的**解析部分**, 或**正则部分**;
- $f(z)$ 在点 a 的奇异性质完全体现在负幂部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ 上, 称之为 $f(z)$ 的**奇异部分**, 或**主要部分**.
- 根据不为 0 的负幂次系数的个数, 将孤立奇点进行分类.

孤立奇点的分类 — 定义

设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点.

1) **可去奇点**: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点.

孤立奇点的分类 — 定义

设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点.

1) **可去奇点**: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点. **总视可去奇点为解析点!**

孤立奇点的分类 — 定义

设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点.

1) **可去奇点**: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点. **总视可去奇点为解析点!**

可补充定义: 令 $f(a) = c_0$, 就得到在整个圆盘 $|z-a| < R$ 上解析的函数 $f(z)$. 例, $\frac{\sin z}{z}$.

孤立奇点的分类 — 定义

设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点.

1) **可去奇点**: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点. **总视可去奇点为解析点!**

可补充定义: 令 $f(a) = c_0$, 就得到在整个圆盘 $|z-a| < R$ 上解析的函数 $f(z)$. 例, $\frac{\sin z}{z}$. 道理类似可去间断点.

孤立奇点的分类 — 定义

设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点.

1) **可去奇点**: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点. **总视可去奇点为解析点!**

可补充定义: 令 $f(a) = c_0$, 就得到在整个圆盘 $|z-a| < R$ 上解析的函数 $f(z)$. 例, $\frac{\sin z}{z}$. 道理类似可去间断点.

2) **极点**: 若在点 a 的主要部分为有限项, 设为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a}, \quad (c_{-m} \neq 0),$$

则称 a 为 $f(z)$ 的 m **阶极点**.

孤立奇点的分类 — 定义

设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点.

1) **可去奇点**: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点. **总视可去奇点为解析点!**

可补充定义: 令 $f(a)=c_0$, 就得到在整个圆盘 $|z-a|<R$ 上解析的函数 $f(z)$. 例, $\frac{\sin z}{z}$. 道理类似可去间断点.

2) **极点**: 若在点 a 的主要部分为有限项, 设为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}, \quad (c_{-m}\neq 0),$$

则称 a 为 $f(z)$ 的 m **阶极点**. 一阶极点也称(简)单极点.

回顾: m 阶零点.

孤立奇点的分类 — 定义

设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点.

1) **可去奇点**: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点. **总视可去奇点为解析点!** $\frac{\sin z}{z}$

可补充定义: 令 $f(a) = c_0$, 就得到在整个圆盘 $|z - a| < R$ 上解析的函数 $f(z)$. 例, $\frac{\sin z}{z}$. 道理类似可去间断点.

2) **极点**: 若在点 a 的主要部分为有限项, 设为

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a}, \quad (c_{-m} \neq 0),$$

则称 a 为 $f(z)$ 的 m **阶极点**. 一阶极点也称(简)单极点.

回顾: m 阶零点. $\frac{\sin z}{z^2}$

3) **本性奇点(本质奇点)**: 若在点 a 的主要部分有无穷多项, 则称 a 为 $f(z)$ 的本性奇点或本质奇点. $e^{\frac{1}{z}}$

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),
- 但因是可去奇点, 在该点的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}: 0 < |z-a| < r$ 内, 洛朗展式没有负幂次项

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),
- 但因是可去奇点, 在该点的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}: 0 < |z-a| < r$ 内, 洛朗展式没有负幂次项 —— 故本质上是幂级数:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),
- 但因是可去奇点, 在该点的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}: 0 < |z-a| < r$ 内, 洛朗展式没有负幂次项 —— 故本质上是幂级数:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

故当 $z \to a$ 时, $f(z)$ 的极限一定存在 (即为常数 c_0),

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),
- 但因是可去奇点, 在该点的某去心邻域 $\overset{\circ}{K} : 0 < |z-a| < r$ 内, 洛朗展式没有负幂次项 —— 故本质上是幂级数:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

故当 $z \to a$ 时, $f(z)$ 的极限一定存在 (即为常数 c_0),

- 故可补充 $f(z)$ 在点 a 的定义, 令 $f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0$,

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),
- 但因是可去奇点, 在该点的某去心邻域 $\mathring{K}: 0 < |z-a| < r$ 内, 洛朗展式没有负幂次项 —— 故本质上是幂级数:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

故当 $z \to a$ 时, $f(z)$ 的极限一定存在 (即为常数 c_0),

- 故可补充 $f(z)$ 在点 a 的定义, 令 $f(a) = \lim_{z \to a} f(z) = c_0$,

则 $f(z)$ 就是该幂级数展式在圆盘 $K: |z-a| < r$ 内的和函数,

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),
- 但因是可去奇点, 在该点的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}: 0 < |z-a| < r$ 内, 洛朗展式没有负幂次项 —— 故本质上是幂级数:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

故当 $z \to a$ 时, $f(z)$ 的极限一定存在 (即为常数 c_0),

- 故可补充 $f(z)$ 在点 a 的定义, 令 $f(a) = \lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$,

则 $f(z)$ 就是该幂级数展式在圆盘 $K: |z-a| < r$ 内的和函数,

- 由幂级数和函数的性质可知, $f(z)$ 在 K 内解析,

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),
- 但因是可去奇点, 在该点的某去心邻域 $\mathring{K}: 0 < |z-a| < r$ 内, 洛朗展式没有负幂次项 —— 故本质上是幂级数:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

故当 $z \to a$ 时, $f(z)$ 的极限一定存在 (即为常数 c_0),

- 故可补充 $f(z)$ 在点 a 的定义, 令 $f(a) = \lim_{z\to a} f(z) = c_0$,

则 $f(z)$ 就是该幂级数展式在圆盘 $K: |z-a| < r$ 内的和函数,

- 由幂级数和函数的性质可知, $f(z)$ 在 K 内解析, 从而

$f(z)$ 在点 a 解析.

总视可去奇点为解析点!

设 a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点.

- 作为奇点, $f(z)$ 在 a 不解析 (通常, 在点 a 函数 $f(z)$ 没定义),
- 但因是可去奇点, 在该点的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}: 0 < |z-a| < r$ 内, 洛朗展式没有负幂次项 —— 故本质上是幂级数:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

故当 $z \to a$ 时, $f(z)$ 的极限一定存在 (即为常数 c_0),

- 故可补充 $f(z)$ 在点 a 的定义, 令 $f(a) = \lim\limits_{z \to a} f(z) = c_0$,

则 $f(z)$ 就是该幂级数展式在圆盘 $K: |z-a| < r$ 内的和函数,

- 由幂级数和函数的性质可知, $f(z)$ 在 K 内解析, 从而

$f(z)$ 在点 a 解析.

因此补充函数在可去奇点处的定义, 可将可去奇点当作解析点.

可去奇点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

可去奇点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(2) $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ 存在有限;

可去奇点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在有限;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

可去奇点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在有限;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

证. 来证: $(1)\Rightarrow(2)$、$(2)\Rightarrow(3)$、$(3)\Rightarrow(1)$.

可去奇点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在有限;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

证. 来证: $(1) \Rightarrow (2)$、$(2) \Rightarrow (3)$、$(3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots ,$$

可去奇点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在有限;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

证. 来证: $(1) \Rightarrow (2)$、$(2) \Rightarrow (3)$、$(3) \Rightarrow (1)$.

$(1) \Rightarrow (2)$: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots,$$

于是 $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0 \neq \infty$.

可去奇点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(2) $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在有限;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

证. 来证: $(1)\Rightarrow(2)$、$(2)\Rightarrow(3)$、$(3)\Rightarrow(1)$.

$(1)\Rightarrow(2)$: 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0, 则

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots,$$

于是 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0\neq\infty$.

$(2)\Rightarrow(3)$: 极限的性质 —— 局部有界性.

可去奇点的等价条件

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(3) $\Rightarrow$ (1): 设 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}$ 内以 M 为界.

可去奇点的等价条件

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(3) $\Rightarrow$ (1): 设 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $\mathring{K}$ 内以 M 为界. 令 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta\qquad(n=1,2,\dots).$$

Γ 为含于 K 内的任意圆周: $|\zeta-a|=\rho$, ρ 可以充分小.

可去奇点的等价条件

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(3) $\Rightarrow$ (1): 设 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}$ 内以 M 为界. 令 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta \qquad (n=1,2,\dots).$$

Γ 为含于 K 内的任意圆周: $|\zeta-a|=\rho$, ρ 可以充分小. 于是

$$\begin{aligned}|c_{-n}|&=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{-n+1}}2\pi\rho\\ &= M\rho^n\end{aligned}$$

可去奇点的等价条件

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(3) $\Rightarrow$ (1): 设 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}$ 内以 M 为界. 令 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta \qquad (n=1,2,\dots).$$

Γ 为含于 K 内的任意圆周: $|\zeta-a|=\rho$, ρ 可以充分小. 于是

$$|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{-n+1}}2\pi\rho$$
$$= M\rho^n \to 0 \qquad (\text{as } \rho\to 0),$$

可去奇点的等价条件

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

(1) a 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0;

(3) $\Rightarrow$ (1): 设 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $\overset{\circ}{K}$ 内以 M 为界. 令 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}} d\zeta \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Γ 为含于 K 内的任意圆周: $|\zeta - a| = \rho$, ρ 可以充分小. 于是

$$|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}} d\zeta \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{-n+1}} 2\pi\rho$$

$$= \underline{M\rho^n \to 0} \qquad (\text{as } \rho \to 0),$$

即对 $n > 0$, 有 $c_{-n} = 0$: $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 0. □

m 阶极点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}\qquad (c_{-m}\neq 0);$$

m 阶极点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\left(\neq 0,\infty\text{: 非零复常数!}\right)$;

m 阶极点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\left(\neq 0,\infty\text{: 非零复常数!}\right)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

m 阶极点的等价条件

定理. 设 a 是函数 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 下列条件等价:

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}\qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\left(\neq 0,\infty\text{: 非零复常数!}\right)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

定义 $\frac{1}{f(a)}=0$

m 阶极点的等价条件

注. 定理中第 (4) 条, 对 $\frac{1}{f(z)}$ 来说, 若碰到可去奇点, 则需当作解析点来看待.

m 阶极点的等价条件

注. 定理中第 (4) 条, 对 $\frac{1}{f(z)}$ 来说, 若碰到可去奇点, 则需当作解析点来看待. 例如, $a=0$ 是 $f(z)$ 的单极点:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

m 阶极点的等价条件

注. 定理中第 (4) 条, 对 $\frac{1}{f(z)}$ 来说, 若碰到可去奇点, 则需当作解析点来看待. 例如, $a=0$ 是 $f(z)$ 的单极点:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

但 a 是 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{z^2}{\sin z}$ 的可去奇点:

m 阶极点的等价条件

注. 定理中第 (4) 条, 对 $\frac{1}{f(z)}$ 来说, 若碰到可去奇点, 则需当作解析点来看待. 例如, $a=0$ 是 $f(z)$ 的单极点:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\Big(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\Big)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

但 a 是 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{z^2}{\sin z}$ 的可去奇点:

$$\lim_{z\to a} g(z)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{z}{\sin z}=0,$$

m 阶极点的等价条件

注. 定理中第 (4) 条, 对 $\frac{1}{f(z)}$ 来说, 若碰到可去奇点, 则需当作解析点来看待. 例如, $a=0$ 是 $f(z)$ 的单极点:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\Big(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\Big)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

但 a 是 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{z^2}{\sin z}$ 的可去奇点:

$$\lim_{z\to a}g(z)=\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{z}{\sin z}=0,$$

亦即条件 (4) 失效: a 是 $f(z)$ 的极点, 但不是 $\frac{1}{f(z)}$ 的零点!

m 阶极点的等价条件

注. 定理中第 (4) 条, 对 $\frac{1}{f(z)}$ 来说, 若碰到可去奇点, 则需当作解析点来看待. 例如, $a=0$ 是 $f(z)$ 的单极点:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\Big(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\Big)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

但 a 是 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{z^2}{\sin z}$ 的可去奇点:

$$\lim_{z\to a}g(z)=\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{z}{\sin z}=0,$$

亦即条件 (4) 失效: a 是 $f(z)$ 的极点, 但不是 $\frac{1}{f(z)}$ 的零点!

只需补充 $g(z)$ 在点 a 的定义: 令 $g(a)=0$, 则 $g(z)$ 在 a 解析,

m 阶极点的等价条件

注. 定理中第 (4) 条, 对 $\frac{1}{f(z)}$ 来说, 若碰到可去奇点, 则需当作解析点来看待. 例如, $a=0$ 是 $f(z)$ 的单极点:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\Big(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\Big)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$$

但 a 是 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{z^2}{\sin z}$ 的可去奇点:

$$\lim_{z\to a}g(z)=\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{z}{\sin z}=0,$$

亦即条件 (4) 失效: a 是 $f(z)$ 的极点, 但不是 $\frac{1}{f(z)}$ 的零点!

只需补充 $g(z)$ 在点 a 的定义: 令 $g(a)=0$, 则 $g(z)$ 在 a 解析, 且有

$$f(z) \text{ 以 } a \text{ 为 } m \text{ 阶极点} \iff \frac{1}{f(z)} \text{ 以 } a \text{ 为 } m \text{ 阶零点}.$$

m 阶极点的等价条件之证明

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\left(\neq 0,\infty\text{: 非零复常数!}\right)$;

$(1)\Rightarrow(2)$:

m 阶极点的等价条件之证明

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\,\big(\neq 0,\infty\text{: 非零复常数!}\big)$;

(1) $\Rightarrow$ (2): 由

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots\ ,$$

得

$$(z-a)^m f(z)=c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-a)+\cdots\ ,$$

m 阶极点的等价条件之证明

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\,\big(\neq 0,\infty\text{: 非零复常数!}\big)$;

(1) $\Rightarrow$ (2): 由

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots,$$

得

$$(z-a)^m f(z)=c_{-m}+c_{-(m-1)}(z-a)+\cdots,$$

从而 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=c_{-m}$ 为非零复常数.

m 阶极点的等价条件之证明

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\left(\neq 0,\infty\text{: 非零复常数!}\right)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(2) $\Rightarrow$ (3):

m 阶极点的等价条件之证明

(2) 对正整数 m, 有 $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\,(\neq 0,\infty$: 非零复常数!$)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $F(z)=(z-a)^m f(z)$, a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $F(z)$ 的孤立奇点;

m 阶极点的等价条件之证明

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\ \big(\neq 0,\infty$: 非零复常数!$\big)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $F(z)=(z-a)^m f(z)$, a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $F(z)$ 的孤立奇点; 再由 $\lim\limits_{z\to a}F(z)=\alpha\neq\infty$ 知 a 是 $F(z)$ 的

m 阶极点的等价条件之证明

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\,\big(\neq 0,\infty$: 非零复常数!$\big)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $F(z)=(z-a)^m f(z)$, a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $F(z)$ 的孤立奇点; 再由 $\lim\limits_{z\to a}F(z)=\alpha\neq\infty$ 知 a 是 $F(z)$ 的可去奇点, 从而 $\exists\,\overset{\circ}{N}_\delta(a)$, 使在其内, $F(z)$ 解析,

m 阶极点的等价条件之证明

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\left(\neq 0,\infty\text{: 非零复常数!}\right)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $\quad f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $F(z)=(z-a)^m f(z)$, a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $F(z)$ 的孤立奇点; 再由 $\lim\limits_{z\to a}F(z)=\alpha\neq\infty$ 知 a 是 $F(z)$ 的可去奇点, 从而 $\exists\,\overset{\circ}{N}_\delta(a)$, 使在其内, $F(z)$ 解析, 且

$$F(z)=\alpha+\alpha_1(z-a)+\alpha_2(z-a)^2+\cdots\qquad\left(z\in\overset{\circ}{N}_\delta(a)\right).$$

m 阶极点的等价条件之证明

(2) 对正整数 m, 有 $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\,\big(\neq 0,\infty$: 非零复常数!$\big)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $F(z)=(z-a)^m f(z)$, a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $F(z)$ 的孤立奇点; 再由 $\lim_{z\to a}F(z)=\alpha\neq\infty$ 知 a 是 $F(z)$ 的可去奇点, 从而 $\exists\,\overset{\circ}{N}_\delta(a)$, 使在其内, $F(z)$ 解析, 且

$$F(z)=\alpha+\alpha_1(z-a)+\alpha_2(z-a)^2+\cdots\quad\big(z\in\overset{\circ}{N}_\delta(a)\big).$$

令
$$\varphi(z)=\alpha+\alpha_1(z-a)+\alpha_2(z-a)^2+\cdots\quad\big(z\in N_\delta(a)\big),$$

则 $\varphi(z)$ 在点 a

m 阶极点的等价条件之证明

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\,\big(\neq 0,\infty$: 非零复常数!$\big)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $F(z)=(z-a)^m f(z)$, a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $F(z)$ 的孤立奇点; 再由 $\lim\limits_{z\to a}F(z)=\alpha\neq\infty$ 知 a 是 $F(z)$ 的可去奇点, 从而 $\exists\,\mathring{N}_\delta(a)$, 使在其内, $F(z)$ 解析, 且

$$F(z)=\alpha+\alpha_1(z-a)+\alpha_2(z-a)^2+\cdots\quad\big(z\in\mathring{N}_\delta(a)\big).$$

令 $$\varphi(z)=\alpha+\alpha_1(z-a)+\alpha_2(z-a)^2+\cdots\quad\big(z\in N_\delta(a)\big),$$

则 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)=\alpha\neq 0$;

m 阶极点的等价条件之证明

(2) 对正整数 m, 有 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=\alpha\,(\neq 0,\infty$: 非零复常数!$)$;

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $\quad f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$

其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(2) $\Rightarrow$ (3): 令 $F(z)=(z-a)^m f(z)$, a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $F(z)$ 的孤立奇点; 再由 $\lim\limits_{z\to a}F(z)=\alpha\neq\infty$ 知 a 是 $F(z)$ 的可去奇点, 从而 $\exists\,\mathring{N}_\delta(a)$, 使在其内, $F(z)$ 解析, 且

$$F(z)=\alpha+\alpha_1(z-a)+\alpha_2(z-a)^2+\cdots\qquad\big(z\in\mathring{N}_\delta(a)\big).$$

令 $\quad \varphi(z)=\alpha+\alpha_1(z-a)+\alpha_2(z-a)^2+\cdots\qquad\big(z\in N_\delta(a)\big),$

则 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)=\alpha\neq 0$; 而在去心邻域 $\mathring{N}_\delta(a)$ 内,

$$\varphi(z)=F(z)=(z-a)^m f(z),\quad \text{i.e.}\quad f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}.$$

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4):

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4): $\varphi(z)$ 在点 a 连续, $\varphi(a) \neq 0$, 故 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内不为零,

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4): $\varphi(z)$ 在点 a 连续, $\varphi(a) \neq 0$, 故 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内不为零, 从而在该邻域内 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 有意义并且解析,

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4): $\varphi(z)$ 在点 a 连续, $\varphi(a) \neq 0$, 故 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内不为零, 从而在该邻域内 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 有意义并且解析, 故可展开为带非零常数项的泰勒级数($\alpha_0 = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0$):

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \alpha_0 + \alpha_1(z-a) + \cdots + \alpha_m(z-a)^m + \cdots ;$$

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4): $\varphi(z)$ 在点 a 连续, $\varphi(a)\neq 0$, 故 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内不为零, 从而在该邻域内 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 有意义并且解析, 故可展开为带非零常数项的泰勒级数($\alpha_0=\frac{1}{\varphi(a)}\neq 0$):

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots+\alpha_m(z-a)^m+\cdots;$$

而对 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}=\alpha_0(z-a)^m+\alpha_1(z-a)^{m+1}+\cdots,$

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4): $\varphi(z)$ 在点 a 连续, $\varphi(a)\neq 0$, 故 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内不为零, 从而在该邻域内 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 有意义并且解析, 故可展开为带非零常数项的泰勒级数($\alpha_0=\frac{1}{\varphi(a)}\neq 0$):

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots+\alpha_m(z-a)^m+\cdots;$$

而对 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}=\alpha_0(z-a)^m+\alpha_1(z-a)^{m+1}+\cdots,$

a 是 $f(z)$ 的、从而是 $g(z)$ 的孤立奇点

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4): $\varphi(z)$ 在点 a 连续, $\varphi(a)\neq 0$, 故 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内不为零, 从而在该邻域内 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 有意义并且解析, 故可展开为带非零常数项的泰勒级数($\alpha_0=\frac{1}{\varphi(a)}\neq 0$):

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots+\alpha_m(z-a)^m+\cdots;$$

而对 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}=\alpha_0(z-a)^m+\alpha_1(z-a)^{m+1}+\cdots$,
a 是 $f(z)$ 的、从而是 $g(z)$ 的孤立奇点且为可去奇点,

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4): $\varphi(z)$ 在点 a 连续, $\varphi(a)\neq 0$, 故 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内不为零, 从而在该邻域内 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 有意义并且解析, 故可展开为带非零常数项的泰勒级数($\alpha_0=\frac{1}{\varphi(a)}\neq 0$):

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots+\alpha_m(z-a)^m+\cdots;$$

而对 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}=\alpha_0(z-a)^m+\alpha_1(z-a)^{m+1}+\cdots,$

a 是 $f(z)$ 的、从而是 $g(z)$ 的孤立奇点且为可去奇点, 补充定义令

$$g(a)=\lim_{z\to a}g(z)=0,$$

则 a 为 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 的解析点,

m 阶极点的等价条件之证明

(3) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内可表为 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,
其中 $\varphi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$;

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(3) $\Rightarrow$ (4): $\varphi(z)$ 在点 a 连续, $\varphi(a)\neq 0$, 故 $\varphi(z)$ 在点 a 的某邻域内不为零, 从而在该邻域内 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 有意义并且解析, 故可展开为带非零常数项的泰勒级数($\alpha_0=\frac{1}{\varphi(a)}\neq 0$):

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots+\alpha_m(z-a)^m+\cdots;$$

而对 $g(z):=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}=\alpha_0(z-a)^m+\alpha_1(z-a)^{m+1}+\cdots$,
a 是 $f(z)$ 的、从而是 $g(z)$ 的孤立奇点且为可去奇点, 补充定义令

$$g(a)=\lim_{z\to a}g(z)=0,$$

则 a 为 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 的解析点, 且为 m 阶零点.

m 阶极点的等价条件之证明

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m} \neq 0);$$

$(4) \Rightarrow (1)$:

m 阶极点的等价条件之证明

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(4) $\Rightarrow$ (1): $g(z):=\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点, 故在点 a 的某邻域 K 内, $g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 K 内解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$.

m 阶极点的等价条件之证明

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(4) $\Rightarrow$ (1): $g(z):=\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点, 故在点 a 的某邻域 K 内, $g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 K 内解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$. 于是

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)},$$

而 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 在 K 内解析, 故可

m 阶极点的等价条件之证明

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(4) $\Rightarrow$ (1): $g(z):=\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点, 故在点 a 的某邻域 K 内, $g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 K 内解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$. 于是

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)},$$

而 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 在 K 内解析, 故可泰勒展开, 设为

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots+\alpha_{m-1}(z-a)^{m-1}+\cdots,$$

m 阶极点的等价条件之证明

(4) $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点.

(1) a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 即 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限项:

$$\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a} \qquad (c_{-m}\neq 0);$$

(4) $\Rightarrow$ (1): $g(z):=\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 阶零点, 故在点 a 的某邻域 K 内, $g(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在 K 内解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$. 于是

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{1}{\varphi(z)},$$

而 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 在 K 内解析, 故可泰勒展开, 设为

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\cdots+\alpha_{m-1}(z-a)^{m-1}+\cdots,$$

于是 $f(z)$ 在点 a 的主要部分就是

$$\frac{\alpha_0}{(z-a)^m}+\frac{\alpha_1}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{\alpha_{m-1}}{z-a} \qquad \left(\alpha_0=\frac{1}{\varphi(a)}\neq 0\right). \quad \square$$

极点的判定

下述定理能够判断极点, 但无法指明阶数.

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a \text{ 为极点} \iff \lim_{z\to a} f(z) =$$

极点的判定

下述定理能够判断极点, 但无法指明阶数.

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a \text{ 为极点} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

极点的判定

下述定理能够判断极点, 但无法指明阶数.

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a \text{ 为极点} \iff \lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

证. 必要性: 由极点的定义即得.

极点的判定

下述定理能够判断极点, 但无法指明阶数.

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a\ \text{为极点} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

证. 必要性: 由极点的定义即得.

充分性: 点 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点,

极点的判定

下述定理能够判断极点, 但无法指明阶数.

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a\text{ 为极点} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

证. 必要性: 由极点的定义即得.

充分性: 点 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点,

再由 $\lim\limits_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ 知, a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点:

极点的判定

下述定理能够判断极点, 但无法指明阶数.

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a \text{ 为极点} \iff \lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

证. 必要性: 由极点的定义即得.

充分性: 点 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点,

再由 $\lim\limits_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ 知, a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点: 补充定义

令 $\frac{1}{f(a)} = 0$, 则 a 可视为 $\frac{1}{f(z)}$ 的解析点, 且为零点,

极点的判定

下述定理能够判断极点, 但无法指明阶数.

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a \text{ 为极点} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

$$= \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$$

证. 必要性: 由极点的定义即得.

充分性: 点 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 从而也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点,

再由 $\lim\limits_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ 知, a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点: 补充定义

令 $\frac{1}{f(a)} = 0$, 则 a 可视为 $\frac{1}{f(z)}$ 的解析点, 且为零点,

$$= \frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}$$

从而 a 是 $f(z)$ 的极点. $\square$

本性奇点的判定

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a\ \text{为本性奇点} \iff \text{极限} \lim_{z\to a} f(z)\ \text{不存在}$$

本性奇点的判定

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a \text{ 为本性奇点} \iff \text{极限} \lim_{z\to a} f(z) \text{ 不存在}$$

(不等于常数, 也不等于 ∞).

本性奇点的判定

定理. 设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$a \text{ 为本性奇点} \iff \text{极限 } \lim_{z\to a} f(z) \text{ 不存在}$$

$$(\text{不等于常数, 也不等于 } \infty).$$

小结 (用极限判断奇点类型).

设 a 是 $f(z)$ 的(单值性)孤立奇点, 则

$$\lim_{z\to a} f(z) \begin{cases} \text{存在且有限:} & \text{可去奇点;} \\ \text{存在, 但为 } \infty: & \text{极点;} \\ \text{不存在:} & \text{本性奇点.} \end{cases}$$

本性奇点的判定

定理. 若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内 $f(z)$ 不为零, 则 a 也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

本性奇点的判定

定理. 若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内 $f(z)$ 不为零, 则 a 也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证. 由假设知 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点:

本性奇点的判定

定理. 若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内 $f(z)$ 不为零, 则 a 也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证. 由假设知 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点:

- 若 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点, 则由极限法可知

  a 是 $f(z)$ 的

本性奇点的判定

定理. 若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内 $f(z)$ 不为零, 则 a 也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证. 由假设知 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点:

- 若 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点, 则由极限法可知

  a 是 $f(z)$ 的可去奇点或极点;

本性奇点的判定

定理. 若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内 $f(z)$ 不为零, 则 a 也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证. 由假设知 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点:

- 若 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点, 则由极限法可知

  a 是 $f(z)$ 的可去奇点或极点;

- 若 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的极点, 则 a 是 $f(z)$ 的

本性奇点的判定

定理. 若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内 $f(z)$ 不为零, 则 a 也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证. 由假设知 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点:

- 若 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点, 则由极限法可知

  a 是 $f(z)$ 的可去奇点或极点;

- 若 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的极点, 则 a 是 $f(z)$ 的可去奇点,

这都与假设矛盾.

本性奇点的判定

定理. 若 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内 $f(z)$ 不为零, 则 a 也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证. 由假设知 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点:

- 若 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点, 则由极限法可知

  $$a \text{ 是 } f(z) \text{ 的可去奇点或极点;}$$

- 若 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的极点, 则 a 是 $f(z)$ 的可去奇点,

这都与假设矛盾. 故 a 必为 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点. □

$\frac{1}{f(a)} \neq \infty$

0

const

$\frac{1}{f(a)} = \infty$

作业

第五章习题

(一): $4\,(2), (4), (6), (8)$

4、