第三章 复积分

§1 复积分的概念与性质

李太玉、孙海伟

山东大学(威海)
数学与统计学院

Spring Semester, 2022

回顾两类线积分

- 曲线积分:

  (1) 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

  (2) 对坐标轴的曲线积分(第二类曲线积分)

回顾两类线积分

- 曲线积分:

  (1) 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

  (2) 对坐标轴的曲线积分(第二类曲线积分)

- 复积分 $\longleftrightarrow$ 第二类曲线积分

回顾两类线积分

- 曲线积分:

  (1) 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

  (2) 对坐标轴的曲线积分(第二类曲线积分)

- 复积分 $\longleftrightarrow$ 第二类曲线积分

- 关于曲线的方向:

  1) 开口弧: 只要指出起点与终点即可;

  2) 周线: 逆时针方向规定为正, 顺时针方向为负.

  周线: "逐段光滑的简单闭曲线" (钟玉泉版)

回顾两类线积分

- 曲线积分:

  (1) 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

  (2) 对坐标轴的曲线积分(第二类曲线积分)

- 复积分 $\longleftrightarrow$ 第二类曲线积分

- 关于曲线的方向:

  1) 开口弧: 只要指出起点与终点即可;

  2) 周线: 逆时针方向规定为正, 顺时针方向为负.

  周线: “逐段光滑的简单闭曲线” (钟玉泉版)

  $\longrightarrow$ “可求长的简单闭曲线”.

复积分的定义

设 C 是一条可求长曲线, 方程为$z = z(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, 其方向规定为参数增加的方向$\big($即以 $a = z(\alpha)$ 为起点, $b = z(\beta)$ 为终点$\big)$.
函数 $f(z)$ 在 C 上有定义.

复积分的定义

设 C 是一条可求长曲线, 方程为 $z = z(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, 其方向规定为参数增加的方向(即以 $a = z(\alpha)$ 为起点, $b = z(\beta)$ 为终点). 函数 $f(z)$ 在 C 上有定义.

1) **分割**: 在 C 上从 a 到 b 依次取分点

$$z_0 = a,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = b;$$

复积分的定义

设 C 是一条可求长曲线, 方程为$z = z(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, 其方向规定为参数增加的方向(即以 $a = z(\alpha)$ 为起点, $b = z(\beta)$ 为终点). 函数 $f(z)$ 在 C 上有定义.

1) **分割**: 在 C 上从 a 到 b 依次取分点

$$z_0 = a,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = b;$$

2) **选点**: 在从 z_{k-1} 到 z_k 的每一段弧上任取一点ζ_k;

复积分的定义

设 C 是一条可求长曲线, 方程为$z = z(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, 其方向规定为参数增加的方向(即以 $a = z(\alpha)$ 为起点, $b = z(\beta)$ 为终点). 函数 $f(z)$ 在 C 上有定义.

1) **分割**: 在 C 上从 a 到 b 依次取分点

$$z_0 = a,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = b;$$

2) **选点**: 在从 z_{k-1} 到 z_k 的每一段弧上任取一点ζ_k;

3) **求和**: 记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, 作和

$$S := \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k;$$

复积分的定义

设 C 是一条可求长曲线, 方程为$z = z(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, 其方向规定为参数增加的方向(即以 $a = z(\alpha)$ 为起点, $b = z(\beta)$ 为终点).
函数 $f(z)$ 在 C 上有定义.

1) **分割**: 在 C 上从 a 到 b 依次取分点

$$z_0 = a,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = b;$$

2) **选点**: 在从 z_{k-1} 到 z_k 的每一段弧上任取一点ζ_k;
3) **求和**: 记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, 作和

$$S := \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k;$$

4) **取极限**: 记所有弧段长度的最大值为 σ, 若当 $\sigma \to 0$ 时, 和式 S 的极限存在,

复积分的定义

设 C 是一条可求长曲线, 方程为$z = z(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, 其方向规定为参数增加的方向(即以 $a = z(\alpha)$ 为起点, $b = z(\beta)$ 为终点). 函数 $f(z)$ 在 C 上有定义.

1) **分割**: 在 C 上从 a 到 b 依次取分点

$$z_0 = a,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = b;$$

2) **选点**: 在从 z_{k-1} 到 z_k 的每一段弧上任取一点ζ_k;

3) **求和**: 记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, 作和

$$S := \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k;$$

4) **取极限**: 记所有弧段长度的最大值为 σ, 若当 $\sigma \to 0$ 时, 和式 S 的极限存在, 则这个极限值就称为函数 $f(z)$ 沿有向曲线 C 的积分, 记作

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\sigma\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

复积分的定义

注：复积分一般不能写成 $\int_a^b f(z)dz$ 的形式!

复积分的定义

注: 复积分一般不能写成 $\int_a^b f(z)dz$ 的形式!

因为积分不仅与点 a 和 b 有关, 而且与积分路线有关.

复积分的定义

注: 复积分一般不能写成 $\int_a^b f(z)dz$ 的形式!

因为积分不仅与点 a 和 b 有关, 而且与积分路线有关.

换言之, 复积分对应着实积分中的第二类曲线积分.

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy.$$

$$\parallel$$

$$\int (u+iv)(dx+idy)$$

$$//$$

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+\mathrm{i}\int_C vdx+udy.$$

注: 辅助记忆办法

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy) \\ &= (udx-vdy)+\mathrm{i}(vdx+udy). \end{aligned}$$

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy.$$

证明.

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy.$$

证明. 令 $\Delta z_k = \Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k$, 及

$$\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k, \qquad u(\xi_k, \eta_k) = u_k, \qquad v(\xi_k, \eta_k) = v_k,$$

则有 $f(\zeta_k) = u_k + \mathrm{i}v_k$,

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续，则 $f(z)$ 沿 C 可积，且

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+\mathrm{i}\int_C vdx+udy.$$

证明. 令 $\Delta z_k=\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k$，及

$$\zeta_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k,\qquad u(\xi_k,\eta_k)=u_k,\qquad v(\xi_k,\eta_k)=v_k,$$

则有 $f(\zeta_k)=u_k+\mathrm{i}v_k$，从而和数为

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}$$

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+\mathrm{i}\int_C vdx+udy.$$

证明. 令 $\Delta z_k=\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k$, 及

$$\zeta_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k,\qquad u(\xi_k,\eta_k)=u_k,\qquad v(\xi_k,\eta_k)=v_k,$$

则有 $f(\zeta_k)=u_k+\mathrm{i}v_k$, 从而和数为

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}\big(u_k+\mathrm{i}v_k\big)\big(\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k\big)$$

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy.$$

证明. 令 $\Delta z_k = \Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k$, 及

$$\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k, \qquad u(\xi_k, \eta_k) = u_k, \qquad v(\xi_k, \eta_k) = v_k,$$

则有 $f(\zeta_k) = u_k + \mathrm{i}v_k$, 从而和数为

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + \mathrm{i}v_k)(\Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} (v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k).$$

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy.$$

证明. 和数为

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k\right) + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\left(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k\right).$$

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+\mathrm{i}\int_C vdx+udy.$$

证明. 和数为

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k\right)+\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\left(v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k\right).$$

上式右端的两个和式是两个曲线积分的和式,

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C 可积, 且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy.$$

证明. 和数为

$$S = \sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k).$$

上式右端的两个和式是两个曲线积分的和式, 而在定理的条件下, 必有 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 沿曲线 C 连续,

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 沿曲线 C 连续，则 $f(z)$ 沿 C 可积，且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy.$$

证明. 和数为

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k\right) + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \left(v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k\right).$$

上式右端的两个和式是两个曲线积分的和式，而在定理的条件下，必有 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 沿曲线 C 连续，于是这两个曲线积分都存在，

复积分与实积分的关系

定理. 若函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 沿曲线 C 连续，则 $f(z)$ 沿 C 可积，且

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy.$$

证明. 和数为

$$S = \sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k).$$

上式右端的两个和式是两个曲线积分的和式，而在定理的条件下，必有 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 沿曲线 C 连续，于是这两个曲线积分都存在，从而复积分 $\int_C f(z)dz$ 存在，证毕. $\square$

$x_b^2 - y_b^2 + i\,2x_b y_b$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z\,dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

(1)

$$= \int_C (dx - 0) + i \int_C dy$$

$$= x_b - x_a + i(y_b - y_a)$$

(2) $= \int (x+iy)(dx + i\,dy)$

$$= \int x\,dx - y\,dy + i\int y\,dx + x\,dy$$

$$= \frac{1}{2}(x_b^2 - x_a^2) - \frac{1}{2}(y_b^2 - y_a^2)$$

$$+ i(x_b y_b - x_a y_a)$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1) \int_C dz = b - a; \qquad (2) \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (1) 因 $f(z) = 1$, 故有

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (1) 因 $f(z) = 1$, 故有

$$S = \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) =$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (1) 因 $f(z) = 1$, 故有

$$S = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = b - a,$$

所以

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (1) 因 $f(z) = 1$, 故有

$$S = \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = b - a,$$

所以

$$\lim_{\sigma \to 0} S = b - a, \qquad \text{i.e.}\ \int_C dz = b - a.$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) $f(z) = z$:

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z\,dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) $f(z) = z$: 若选分点 $\zeta_k = z_{k-1}$, 则得

$$\Sigma_1 := \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1});$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) $f(z) = z$: 若选分点 $\zeta_k = z_{k-1}$, 则得

$$\Sigma_1 := \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1});$$

若选分点 $\zeta_k = z_k$, 则得

$$\Sigma_2 := \sum_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}).$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) $f(z) = z$: 若选分点 $\zeta_k = z_{k-1}$, 则得

$$\Sigma_1 := \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1});$$

若选分点 $\zeta_k = z_k$, 则得

$$\Sigma_2 := \sum_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}).$$

由 $f(z) = z$ 在 C 上连续可知, 积分 $\int_C f(z)dz$ 一定存在,

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) $f(z) = z$: 若选分点 $\zeta_k = z_{k-1}$, 则得

$$\Sigma_1 := \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1});$$

若选分点 $\zeta_k = z_k$, 则得

$$\Sigma_2 := \sum_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}).$$

由 $f(z) = z$ 在 C 上连续可知, 积分 $\int_C f(z)dz$ 一定存在, 因而和式 S 的极限存在、且应与 Σ_1 和 Σ_2 的极限相等,

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) $f(z) = z$: 若选分点 $\zeta_k = z_{k-1}$, 则得

$$\Sigma_1 := \sum_{k=1}^{n} z_{k-1}(z_k - z_{k-1});$$

若选分点 $\zeta_k = z_k$, 则得

$$\Sigma_2 := \sum_{k=1}^{n} z_k(z_k - z_{k-1}).$$

由 $f(z) = z$ 在 C 上连续可知, 积分 $\int_C f(z)dz$ 一定存在, 因而和式 S 的极限存在、且应与 Σ_1 和 Σ_2 的极限相等, 从而与 $\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ 的极限相等.

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) 和式 S 的极限与 $\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ 的极限相等. 而

$$\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2) =$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) 和式 S 的极限与 $\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ 的极限相等. 而

$$\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k^2 - z_{k-1}^2) =$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) 和式 S 的极限与 $\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ 的极限相等. 而

$$\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

证明. (2) 和式 S 的极限与 $\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ 的极限相等. 而

$$\frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

故有

$$\int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

□

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

注.

当 C 为闭曲线

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b - a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

注.

当 C 为闭曲线 (即 $a = b$) 时, 有

$$\oint_C dz = 0, \qquad \oint_C z dz = 0.$$

例 3.1. 令 C 表示连接点 a 及 b 的任一可求长曲线, 试证:

$$(1)\ \int_C dz = b-a; \qquad (2)\ \int_C z dz = \frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

注.

当 C 为闭曲线 (即 $a=b$) 时, 有

$$\oint_C dz = 0, \qquad \oint_C z dz = 0.$$

这两个积分后面会多次用到.

复积分的基本性质

假设函数 $f(z), g(z)$ 沿曲线 C 可积.

性质1. 设 C^- 是 C 的反向曲线, 则

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

复积分的基本性质

假设函数 $f(z), g(z)$ 沿曲线 C 可积.

性质1. 设 C^- 是 C 的反向曲线, 则

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

性质2. (线性性) 对任意复常数 α, β, 有

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz.$$

复积分的基本性质

假设函数 $f(z), g(z)$ 沿曲线 C 可积.

性质1. 设 C^- 是 C 的反向曲线, 则

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

性质2. (线性性) 对任意复常数 α, β, 有

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz.$$

性质3. (可加性) 设 $C = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, 则

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

复积分的基本性质 　假设函数 $f(z), g(z)$ 沿曲线 C 可积.

性质4. $\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,|dz| = \int_C |f(z)|\,ds \leq ML,$

其中 $M = \sup\limits_{z\in C} |f(z)|$, $L = \int_C ds$ 为曲线 C 的弧长.

复积分的基本性质　假设函数 $f(z), g(z)$ 沿曲线 C 可积.

性质4. $$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| = \int_C |f(z)|\,ds \le ML,$$

其中 $M = \sup\limits_{z\in C} |f(z)|$, $L = \int_C ds$ 为曲线 C 的弧长.

由于

$$|S| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,|z_k - z_{k-1}| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k,$$

复积分的基本性质

假设函数 $f(z), g(z)$ 沿曲线 C 可积.

性质4. $$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,|dz| = \int_C |f(z)|\,ds \leq ML,$$

其中 $M = \sup_{z\in C} |f(z)|$, $L = \int_C ds$ 为曲线 C 的弧长.

由于

$$|S| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,|z_k - z_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k,$$

令所有弧段长度的最大值 $\sigma \to 0$, 即得

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,ds \leq ML.$$

复积分的计算 —— 参数方程法

设有光滑曲线 C : $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t) \ \ (\alpha \le t \le \beta)$, $f(z)$ 沿 C 连续.

复积分的计算 —— 参数方程法

设有光滑曲线 C： $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t) \ \ (\alpha \le t \le \beta)$, $f(z)$ 沿 C 连续. 令 $f\big(z(t)\big) = u\big(x(t), y(t)\big) + \mathrm{i}\, v\big(x(t), y(t)\big) =: \underline{u(t) + \mathrm{i}\, v(t)}$.

$dz = dx + i dy$

$= (x' + i y')dt$

复积分的计算 —— 参数方程法

设有光滑曲线 $C: \ z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t) \ \ (\alpha \le t \le \beta)$, $f(z)$ 沿 C 连续. 令 $f\big(z(t)\big) = u\big(x(t), y(t)\big) + \mathrm{i}\, v\big(x(t), y(t)\big) =: u(t) + \mathrm{i}\, v(t)$.

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy$$

复积分的计算 —— 参数方程法

设有光滑曲线 $C: \ z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t) \ \ (\alpha \le t \le \beta)$, $f(z)$ 沿 C 连续. 令 $f\big(z(t)\big)=u\big(x(t),y(t)\big)+\mathrm{i}\,v\big(x(t),y(t)\big)=: u(t)+\mathrm{i}\,v(t)$.

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(u(t)x'(t)-v(t)y'(t)\big)dt + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta \big(v(t)x'(t)+u(t)y'(t)\big)dt$$

复积分的计算 —— 参数方程法

设有光滑曲线 C： $z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t)\ \ (\alpha\le t\le\beta)$， $f(z)$ 沿 C 连续. 令 $f\big(z(t)\big)=u\big(x(t),y(t)\big)+\mathrm{i}\,v\big(x(t),y(t)\big)=:u(t)+\mathrm{i}\,v(t)$.

$$\int_C f(z)dz=\int_C(u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy)=\int_C udx-vdy+\mathrm{i}\int_C vdx+udy$$

$$=\int_\alpha^\beta\big(u(t)x'(t)-v(t)y'(t)\big)dt+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta\big(v(t)x'(t)+u(t)y'(t)\big)dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\big(u(t)+\mathrm{i}v(t)\big)\big(x'(t)+\mathrm{i}y'(t)\big)\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)\,z'(t)\,dt.$$

复积分的计算 —— 参数方程法

设有光滑曲线 C： $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t) \ \ (\alpha \le t \le \beta)$， $f(z)$ 沿 C 连续. 令 $f\big(z(t)\big) = u\big(x(t), y(t)\big) + \mathrm{i}\, v\big(x(t), y(t)\big) =: u(t) + \mathrm{i}\, v(t)$.

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(u(t)x'(t) - v(t)y'(t)\big)dt + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta \big(v(t)x'(t) + u(t)y'(t)\big)dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \big(u(t) + \mathrm{i}v(t)\big)\big(x'(t) + \mathrm{i}y'(t)\big)\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt.$$

此即为计算复积分的参数方程法.

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$.

证明. 首先有 $dz = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} dt$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{R^n e^{int}} dt \qquad (n \neq 1)$$

$$= \frac{i}{i(1-n)R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} \, d\, i(1-n)t$$

$$= \frac{1}{(1-n)R^{n-1}} \int_0^{2\pi} d\, e^{i(1-n)t} = 0$$

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

证明. 首先有 $dz = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$.

当 $n = 1$ 时, $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$, 从而

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt =$$

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

证明. 首先有 $dz = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$.

当 $n = 1$ 时, $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$, 从而

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}dt = 2\pi \mathrm{i}.$$

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$.

证明. 首先有 $dz = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$.

当 $n = 1$ 时, $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$, 从而

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}dt = 2\pi\mathrm{i}.$$

注意, 积分值与积分路线的半径 R 的大小和圆心 a 的位置无关.

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & \text{if } \ n = 1; \\ 0, & \text{if } \ n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

证明. 首先有 $dz = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$.

当 $n \neq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ 时, 有

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt =$$

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

证明. 首先有 $dz = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$.

当 $n \neq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ 时, 有

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt = \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)t}dt$$

$$=$$

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$.

证明. 首先有 $dz = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$.

当 $n \neq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ 时, 有

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} dt = \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)t} dt$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}} \left(\int_0^{2\pi} \cos(n-1)t dt - \mathrm{i} \int_0^{2\pi} \sin(n-1)t dt \right)$$

$$=$$

例 3.2 (重要积分). 设 $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

C 为圆周 $|z-a| = R$, 即 $z = z(t) = a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

证明. 首先有 $dz = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} dt$.

当 $n \neq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ 时, 有

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} dt = \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)t} dt$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}} \left(\int_0^{2\pi} \cos(n-1)t dt - \mathrm{i} \int_0^{2\pi} \sin(n-1)t dt \right)$$

$$= 0.$$

例 3.3. 计算 $\int_C zdz$, 其中 C 为从原点到 $3+4i$ 的直线段.

解. $= \int_C d\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}\left((3+4i)^2 - 0\right)$

$= \frac{-7+24i}{2} = -\frac{7}{2}+12i$

例 3.3. 计算 $\int_C z dz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

解.

法1. 由例 3.1 知, $\int_C z dz = \frac{1}{2}\left[(3+4\mathrm{i})^2 - 0\right] = \frac{1}{2}(3+4\mathrm{i})^2$.

例 3.3. 计算 $\int_C z dz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

解.

法1. 由例 3.1 知, $\int_C z dz = \frac{1}{2}\left[(3+4\mathrm{i})^2 - 0\right] = \frac{1}{2}(3+4\mathrm{i})^2$.

法2. 线段 C 的参数方程为 $z(t) = (3+4\mathrm{i})t,\ 0 \leq t \leq 1$,

例 3.3. 计算 $\int_C z dz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

解.

法1. 由例 3.1 知, $\int_C z dz = \frac{1}{2}\left[(3+4\mathrm{i})^2 - 0\right] = \frac{1}{2}(3+4\mathrm{i})^2$.

法2. 线段 C 的参数方程为 $z(t) = (3+4\mathrm{i})t,\ 0 \le t \le 1$,

从而 $dz = (3+4\mathrm{i})dt$, 于是

$$\int_C z dz = \int_0^1 (3+4\mathrm{i})^2 t dt =$$

例 3.3. 计算 $\int_C z dz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

解.

法1. 由例 3.1 知, $\int_C z dz = \frac{1}{2}\left[(3+4\mathrm{i})^2 - 0\right] = \frac{1}{2}(3+4\mathrm{i})^2$.

法2. 线段 C 的参数方程为 $z(t) = (3+4\mathrm{i})t,\ 0 \le t \le 1$,

从而 $dz = (3+4\mathrm{i})dt$, 于是

$$\int_C z dz = \int_0^1 (3+4\mathrm{i})^2 t dt = (3+4\mathrm{i})^2 \left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^1 = \frac{(3+4\mathrm{i})^2}{2}.$$

例 3.3. 计算 $\int_C z dz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

注意, 该例中的复积分与积分路径无关:

例 3.3. 计算 $\int_C zdz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

注意, 该例中的复积分与积分路径无关:

$$\int_C zdz = \int_C (x+\mathrm{i}y)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C xdx - ydy + \mathrm{i}\int_C ydx + xdy,$$

例 3.3. 计算 $\int_C z dz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

注意, 该例中的复积分与积分路径无关:

$$\int_C z dz = \int_C (x+\mathrm{i}y)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C x dx - y dy + \mathrm{i}\int_C y dx + x dy,$$

容易验证, 右端关于实函数的两个线积分都满足

$$\int_C P dx + Q dy :$$

例 3.3. 计算 $\int_C zdz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

注意, 该例中的复积分与积分路径无关:

$$\int_C zdz = \int_C (x+\mathrm{i}y)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C xdx - ydy + \mathrm{i}\int_C ydx + xdy,$$

容易验证, 右端关于实函数的两个线积分都满足

$$\int_C Pdx + Qdy: \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = 0$$

例 3.3. 计算 $\int_C zdz$, 其中 C 为从原点到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段.

注意, 该例中的复积分与积分路径无关:

$$\int_C zdz = \int_C (x+\mathrm{i}y)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C xdx - ydy + \mathrm{i}\int_C ydx + xdy,$$

容易验证, 右端关于实函数的两个线积分都满足

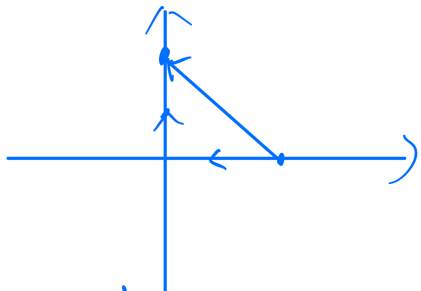
$$\int_C Pdx + Qdy: \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

因此, 对连接点 a 与点 b 的任意曲线, 积分 $\int_C zdz$ 恒等于 $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;　　$z = 1+(i-1)t = 1-t+it$

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.



(1) $I_C = \int_0^1 (1-t-it)(i-1)dt$

$= (i-1)\int_0^1 d\left(t-\frac{t^2}{2}-\frac{i}{2}t^2\right)$

$= i$

(2) $I_C = \int_0^1 (1-t)\,d(-t) + \int_0^1 it \cdot d\,it$

$= \int_0^1 d\left(\frac{1}{2}t^2-t\right) + \int_0^1 d\,\frac{t^2}{2}$

$= 0$

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C: \ z(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, \ \ 0 \le t \le 1,$

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C: \ z(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, \ \ 0 \leq t \leq 1$, 从而 $dz = (\mathrm{i} - 1)dt$,

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C: \ z(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, \ \ 0 \le t \le 1$, 从而 $dz = (\mathrm{i} - 1)dt$,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (1-t-\mathrm{i}t)(\mathrm{i}-1)dt =$$

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C: \ z(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, \ \ 0 \le t \le 1$, 从而 $dz = (\mathrm{i} - 1)dt$,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (1-t-\mathrm{i}t)(\mathrm{i}-1)dt = (\mathrm{i}-1)\left(t-\frac{t^2}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}t^2\right)\Big|_0^1 =$$

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C: \ z(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, \ \ 0 \le t \le 1$, 从而 $dz = (\mathrm{i} - 1)dt$,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (1-t-\mathrm{i}t)(\mathrm{i}-1)dt = (\mathrm{i}-1)\left(t-\frac{t^2}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{(\mathrm{i}-1)^2}{2} = \mathrm{i}.$$

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C: \ z(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, \ \ 0 \leq t \leq 1$, 从而 $dz = (\mathrm{i}-1)dt$,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (1-t-\mathrm{i}t)(\mathrm{i}-1)dt = (\mathrm{i}-1)\left(t-\frac{t^2}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{(\mathrm{i}-1)^2}{2} = \mathrm{i}.$$

(2) 设 $C = C_1 \cup C_2$, 其中 $C_1 : z(t) = 1 - t$, $C_2 : z(t) = \mathrm{i}t$, $0 \leq t \leq 1$.

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C: \ z(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, \ \ 0 \le t \le 1$, 从而 $dz = (\mathrm{i} - 1)dt$,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (1-t-\mathrm{i}t)(\mathrm{i}-1)dt = (\mathrm{i}-1)\left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{(\mathrm{i}-1)^2}{2} = \mathrm{i}.$$

(2) 设 $C = C_1 \cup C_2$, 其中 $C_1 : z(t) = 1 - t$, $C_2 : z(t) = \mathrm{i}t$, $0 \le t \le 1$. 有

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_1} \bar{z}dz + \int_{C_2} \bar{z}dz =$$

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C:\ z(t)=1-t+\mathrm{i}t,\ \ 0\le t\le 1$, 从而 $dz=(\mathrm{i}-1)dt$,

$$\int_C \bar{z}dz=\int_0^1(1-t-\mathrm{i}t)(\mathrm{i}-1)dt=(\mathrm{i}-1)\Big(t-\frac{t^2}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}t^2\Big)\Big|_0^1=-\frac{(\mathrm{i}-1)^2}{2}=\mathrm{i}.$$

(2) 设 $C=C_1\cup C_2$, 其中 $C_1: z(t)=1-t$, $C_2: z(t)=\mathrm{i}t$,

$0\le t\le 1$. 有

$$\int_C \bar{z}dz=\int_{C_1}\bar{z}dz+\int_{C_2}\bar{z}dz=-\int_0^1(1-t)dt+\int_0^1 tdt=$$

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C:\ z(t)=1-t+\mathrm{i}t,\ \ 0\le t\le 1$, 从而 $dz=(\mathrm{i}-1)dt$,

$$\int_C \bar{z}dz=\int_0^1(1-t-\mathrm{i}t)(\mathrm{i}-1)dt=(\mathrm{i}-1)\left(t-\frac{t^2}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}t^2\right)\Big|_0^1=-\frac{(\mathrm{i}-1)^2}{2}=\mathrm{i}.$$

(2) 设 $C=C_1\cup C_2$, 其中 $C_1: z(t)=1-t$, $C_2: z(t)=\mathrm{i}t$, $0\le t\le 1$. 有

$$\int_C \bar{z}dz=\int_{C_1}\bar{z}dz+\int_{C_2}\bar{z}dz=-\int_0^1(1-t)dt+\int_0^1 tdt=0.$$

例 3.4. 计算 $\int_C \bar{z}dz$, 其中 C 为

(1) 从点 1 到 i 的直线段;

(2) 从点 1 到 0 的直线段, 及从 0 到 i 的直线段.

解. (1) $C: \ z(t) = 1 - t + \mathrm{i}t, \ \ 0 \le t \le 1$, 从而 $dz = (\mathrm{i} - 1)dt$,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (1-t-\mathrm{i}t)(\mathrm{i}-1)dt = (\mathrm{i}-1)\left(t-\frac{t^2}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{(\mathrm{i}-1)^2}{2} = \mathrm{i}.$$

(2) 设 $C = C_1 \cup C_2$, 其中 $C_1 : z(t) = 1 - t$, $C_2 : z(t) = \mathrm{i}t$, $0 \le t \le 1$. 有

$$\int_C \bar{z}dz = \int_{C_1} \bar{z}dz + \int_{C_2} \bar{z}dz = -\int_0^1 (1-t)dt + \int_0^1 tdt = 0.$$

对该例来说, 积分路径不一样, 积分值就不同.

复积分 $\int_C \bar{z} dz$ 依赖于积分路径 C！

复积分 $\int_C \bar{z}dz$ 依赖于积分路径 C！

$$\int_C \bar{z}dz = \int_C (x - \mathrm{i}y)(dx + \mathrm{i}dy) = \int_C xdx + ydy + \mathrm{i}\int_C -ydx + xdy,$$

复积分 $\int_C \bar{z}dz$ 依赖于积分路径 C！

$$\int_C \bar{z}dz = \int_C (x-\mathrm{i}y)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C xdx+ydy+\mathrm{i}\int_C -ydx+xdy,$$

显然，右端最后一个关于实函数的线积分不满足下述条件

$$\int_C Pdx+Qdy: \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

复积分 $\int_C \bar{z}dz$ 依赖于积分路径 C !

$$\int_C \bar{z}dz = \int_C (x - \mathrm{i}y)(dx + \mathrm{i}dy) = \int_C xdx + ydy + \mathrm{i}\int_C -ydx + xdy,$$

显然, 右端最后一个关于实函数的线积分不满足下述条件

$$\int_C Pdx + Qdy : \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

从而以 $\bar{z}$ 为被积函数的复积分相应地也会依赖于积分路径.

复积分是否与积分路径无关?

考虑复积分

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy,$$

复积分是否与积分路径无关?

考虑复积分

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy,$$

显然复积分 $\int_C f(z)dz$ 是否与路径 C 无关, 可以考查上式右端关于实函数 $u(x,y), v(x,y)$ 的两个线积分是否满足下述条件

$$\int_C Pdx + Qdy : \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$\Leftrightarrow \nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = 0$ —— 格林定理.

复积分是否与积分路径无关?

考虑复积分

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+\mathrm{i}v)(dx+\mathrm{i}dy) = \int_C udx - vdy + \mathrm{i}\int_C vdx + udy,$$

显然复积分 $\int_C f(z)dz$ 是否与路径 C 无关, 可以考查上式右端关于实函数 $u(x,y), v(x,y)$ 的两个线积分是否满足下述条件

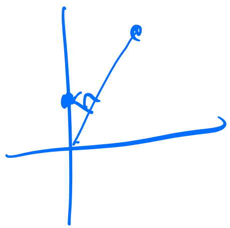
$$\int_C Pdx + Qdy : \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

—— 格林定理.

问题: 有没有纯复变函数的方法判断复积分是否与路径无关?

$z=(3+4i)t$

例 3.5. 设 C 为从点 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段, 试证:



$$\left|\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}}\right| \leq \frac{25}{3}.$$

$$\leq \int \frac{1}{|z-i|}|dz| \leq \int \frac{5}{3}|dz| \leq \frac{25}{3}$$

例 3.5. 设 C 为从点 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段, 试证:

$$\left|\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}}\right| \leq \frac{25}{3}.$$

证. C 的参数方程为 $z(t)=(3+4\mathrm{i})t,\ 0\leq t\leq 1.$

例 3.5. 设 C 为从点 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段, 试证:

$$\left|\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}}\right| \le \frac{25}{3}.$$

证. C 的参数方程为 $z(t)=(3+4\mathrm{i})t,\ 0\le t\le 1$. 则在 C 上,

$$\left|\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right| = \frac{1}{|3t+\mathrm{i}(4t-1)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^2+(4t-1)^2}}$$

例 3.5. 设 C 为从点 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段, 试证:

$$\left|\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}}\right| \le \frac{25}{3}.$$

证. C 的参数方程为 $z(t)=(3+4\mathrm{i})t,\ 0\le t\le 1$. 则在 C 上,

$$\left|\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right| = \frac{1}{|3t+\mathrm{i}(4t-1)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^2+(4t-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{25t^2-8t+1}} =$$

例 3.5. 设 C 为从点 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段, 试证:

$$\left|\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}}\right| \le \frac{25}{3}.$$

证. C 的参数方程为 $z(t)=(3+4\mathrm{i})t,\ 0\le t\le 1$. 则在 C 上,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right| &= \frac{1}{|3t+\mathrm{i}(4t-1)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^2+(4t-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{25t^2-8t+1}} = \frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}} \le \frac{5}{3},\end{aligned}$$

例 3.5. 设 C 为从点 0 到 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段, 试证:

$$\left|\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}}\right| \leq \frac{25}{3}.$$

证. C 的参数方程为 $z(t)=(3+4\mathrm{i})t,\ 0\leq t\leq 1$. 则在 C 上,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right| &= \frac{1}{|3t+\mathrm{i}(4t-1)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^2+(4t-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{25t^2-8t+1}} = \frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}} \leq \frac{5}{3},\end{aligned}$$

而 $\int_C |dz| = 5$, 所以

$$\left|\int_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}}\right| \leq \int_C \left|\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right| |dz| \leq \frac{25}{3}.$$

例 3.6. 试证:

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz=0.$$

$z=re^{i\theta}$ $dz=ire^{i\theta}d\theta$

$$\le\int\frac{|z^3|}{|1+z^2|}|r|d\theta$$

$$\le\int\frac{r^3}{1-r^2}|r|d\theta\to 0$$

例 3.6. 试证:

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz=0.$$

证. 不妨设 $r<1$.

例 3.6. 试证:

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz = 0.$$

证. 不妨设 $r<1$. 在 $|z|=r$ 上,

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz\right| \le \int_{|z|=r}\left|\frac{z^3}{1+z^2}\right| |dz| \le$$

例 3.6. 试证:

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz=0.$$

证. 不妨设 $r<1$. 在 $|z|=r$ 上,

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz\right|\le\int_{|z|=r}\left|\frac{z^3}{1+z^2}\right||dz|\le\frac{r^3}{1-r^2}\cdot 2\pi r,$$

例 3.6. 试证:

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz=0.$$

证. 不妨设 $r<1$. 在 $|z|=r$ 上,

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz\right|\le\int_{|z|=r}\left|\frac{z^3}{1+z^2}\right||dz|\le\frac{r^3}{1-r^2}\cdot 2\pi r,$$

其中最后一步用到了三角不等式.

例 3.6. 试证:

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz=0.$$

证. 不妨设 $r<1$. 在 $|z|=r$ 上,

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz\right|\le\int_{|z|=r}\left|\frac{z^3}{1+z^2}\right||dz|\le\frac{r^3}{1-r^2}\cdot 2\pi r,$$

其中最后一步用到了三角不等式.

上式右端当 $r\to 0$ 时, 极限为 0, 从而命题得证. $\square$

奇点 $z=\pm i$

$r \to 0$ 时 $|z|=r$ 内无奇点

$$\Rightarrow \oint_{|z|=r} f(z)\,dz = 0 \quad (r \to 0)$$