LOGO

第三章 线性方程组

LOGO

§1 消元法

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 3x_1+6x_2-4x_3=7 \\ 2x_1+6x_2-3x_3=2 \end{cases} 。 \tag{1}$$

解 将方程组（1）的第 1 个方程的 -3 倍加到第 2 个方程，再将第 1 个方程的 -2 倍加到第 3 个方程，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_3=4 \\ 2x_2+x_3=0 \end{cases} \tag{2}$$

将方程组（2）中第 3 个方程与第 2 个方程互换，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_2+x_3=0 \\ 2x_3=4 \end{cases} \tag{3}$$

将方程组（3）的第 3 个方程乘以$\frac{1}{2}$，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ \quad\quad 2x_2+x_3=0 \\ \quad\quad\quad\quad x_3=2 \end{cases} \qquad (4)$$

将方程组（4）的第 3 个方程的 2 倍加到第一个方程，再将第 3 个方程的 -1 倍加到第 2 个方程，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \quad\quad =5 \\ \quad\quad 2x_2 \quad =-2 \\ \quad\quad\quad\quad x_3=2 \end{cases} \qquad (5)$$

将方程组（5）的第 2 个方程乘以$\frac{1}{2}$，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \quad\quad =5 \\ \quad\quad x_2 \quad =-1 \\ \quad\quad\quad\quad x_3=2 \end{cases} \qquad (6)$$

将方程组（6）中第 2 个方程的 -2 倍加到第 1 个方程，得

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 7 \\ \qquad x_2 \qquad = -1 \\ \qquad\qquad x_3 = 2 \end{cases} \tag{7}$$

这就是方程组（1）的解。

定义 3.1　以下变换称为方程组的初等变换：

（1）用非零数乘某一方程；

（2）把一个方程的倍数加到另一个方程；

（3）互换两个方程的位置。

注　方程组的初等变换不改变方程组的解。

设有线性方程组 $AX=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}，\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}，\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}。$$

矩阵

$$\overline{A}=(A,b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

称为线性方程组的增广矩阵。

注　对方程组实施方程组的初等变换等价于对方程组的增广矩阵实施矩阵的初等行变换。

以上消元解法的过程可以表现为此方程组的增广矩阵的变化过程，即

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 3 & 6 & -4 & 7\\ 2 & 6 & -3 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}。$$

例 2 求解方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$。

解

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \quad I \qquad\quad F \qquad \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\begin{pmatrix} -F \\ I \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

方程组化为

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 1 + 2x_4 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

令 $x_3 = k_3$， $x_4 = k_4$，得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -k_3 - 3k_4 \\ x_2 = 1 + 2k_4 \\ x_3 = k_3 \\ x_4 = k_4 \end{cases},$$

其中 k_3, k_4 是任意常数。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

例 3　求解方程组 $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4=1 \\ -x_1-2x_2+2x_3+\ \ x_4=2 \\ 3x_1+4x_2\qquad\quad +\ \ x_4=1 \end{cases}$。

解　用初等行变换将方程组的增广矩阵化为阶梯形矩阵，

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

最后一个方程为 $0=1$，所以方程组无解。

由于任一矩阵都可经过初等行变换化成梯形阵，故方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

可经过初等变换（必要时改变未知量的次序）化成

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{rr}x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ 0 = d_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 = 0 \end{cases},$$

其中 $c_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r$ ，

1）若 $d_{r+1} \neq 0$，则原方程组无解。

2）若 $d_{r+1} = 0$，且 $r = n$ 时，方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r = d_r \end{cases},$$

由于

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & c_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

此时原方程组有唯一解。

3）若 $d_{r+1}=0$，且 $r<n$ 时，将方程组化为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ \qquad\ddots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases},$$

此时称 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 为自由未知量（或剩余未知量），任取 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 的一组值 $k_{r+1},\cdots,k_n$，代入方程组的右端得

$$\begin{cases} c_{11}x_1+\cdots+c_{1r}x_r=b_1 \\ \qquad\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r=b_r \end{cases},$$

由于

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & c_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

故方程组有解 $k_1,\cdots,k_r$，从而 $k_1,\cdots,k_r$， $k_{r+1},\cdots,k_n$ 是原方程组的解，这时方程组有无穷解，

$$\begin{cases} x_1 = d_1' - c_{1r+1}' k_{r+1} - \cdots - c_{1n}' k_n \\ \quad\ddots \\ x_r = d_r' - c_{rr+1}' k_{r+1} - \cdots - c_{rn}' k_n \\ x_{r+1} = k_{r+1} \\ \quad\ddots \\ x_n = k_n \end{cases}$$

，其中 $k_{r+1},\cdots,k_n$ 是任意常数，

称为它的一般解。

定理 3.1 在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

中，如果 $s < n$，则方程组有非零解。

LOGO

§2 n维向量空间

定义 3.2 由数域 P 上 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的有序数组称为数域 P 上的 n 维向量，记作

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

或

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

其中 a_i 称为向量 α 的第 i 个分量。

注 数域 P 上 n 维向量的全体记作 P^n。

$P[x]$：数域P上多项式

$P^{s\times n}$：数域P上 s×n 矩阵

表示成

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

的向量也称为行向量，表示成

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

的向量也称为列向量。在以下的讨论中，两种表示法没有本质的区别。

一般用 α, β, γ 等希腊字母来表示向量。

矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的 m 个行可以看作 m 个 n 维行向量

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}) \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

称为矩阵 A 的行向量组，而 A 的 n 个列可以看作 n 个 m 维列向量

$$\beta_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

称为矩阵 A 的列向量组。

分量都是零的向量，称为零向量，记作 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$ 。

对于向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，向量 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 称为向量 α 的负向量，记作 $-\alpha$ 。

定义 3.3 设n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，向量

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

称为向量α与β的和，记作$\alpha+\beta$，即

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)。$$

由向量的加法及负向量可以定义向量的减法：

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)。$$

定义 3.4　设数域 P 的 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\lambda$ 是数域 P 的数，向量

$$(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$$

称为数 λ 与向量 α 的乘积，记作 $\lambda\alpha$，即

$$\lambda\alpha=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)\text{。}$$

向量的加法和数与向量的乘法统称为向量的线性运算。

运算规律：　　线性空间条件

（1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

（2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

（3）$\alpha+0=\alpha$；

（4）$\alpha+(-\alpha)=0$；

（5）$1\alpha=\alpha$；

（6）$\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$；

（7）$(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$；

（8）$\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$。

其中α,β,γ是任意的n维向量，λ,μ是任意的数。

定义 3.5 集合 P^n 考虑到它的加法与数量乘法，称为数域 P 上的 n 维向量空间。

$(P^n, +, \cdot)$

作业：1　2），3），4）。

LOGO

谢谢观赏