第二章 解析函数

§ 6 初等解析函数 – II. 三角函数、双曲函数

李太玉、孙海伟

山东大学(威海)
数学与统计学院

Spring Semester, 2022

正弦函数、余弦函数

当 $x \in \mathbb{R}$ 时，由欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

可得

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

正弦函数、余弦函数

当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 由欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x,$$

可得

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}.$$

当 $z \in \mathbb{C}$ 时, 定义

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

分别称为**正弦函数**和**余弦函数**,

正弦函数、余弦函数

当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 由欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x,$$

可得

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}.$$

当 $z \in \mathbb{C}$ 时, 定义

cosh iz

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

分别称为**正弦函数**和**余弦函数**, 当 $z = x$ 时与实变量的正弦函数和余弦函数是一致的.

正弦函数、余弦函数的性质

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

(1) $\sin z$, $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 且

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z;$$

正弦函数、余弦函数的性质

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

(1) $\sin z$, $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 且

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z;$$

(2) $\sin z$, $\cos z$ 以 2π 为周期, 即

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos z;$$

正弦函数、余弦函数的性质

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

(1) $\sin z$, $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 且

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z;$$

(2) $\sin z$, $\cos z$ 以 2π 为周期, 即

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos z;$$

(3) $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数, 即

$$\sin(-z) = -\sin z, \qquad \cos(-z) = \cos z;$$

正弦函数、余弦函数的性质

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

(4) “和角”公式成立, 即

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

正弦函数、余弦函数的性质

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

(4) “和角”公式成立, 即

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

(5) 基本关系式成立, 即

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z;$$

正弦函数、余弦函数的性质

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

(4) “和角”公式成立, 即

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

(5) 基本关系式成立, 即

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z;$$

(6) $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 在 $\mathbb{C}$ 上无界:

正弦函数、余弦函数的性质

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

(4) “和角”公式成立, 即

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

(5) 基本关系式成立, 即

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z;$$

(6) $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 在 $\mathbb{C}$ 上无界: 取 $z = iy$, 即可看出.

正弦函数、余弦函数的性质

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

(4) “和角”公式成立, 即

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

(5) 基本关系式成立, 即

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z;$$

(6) $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 在 $\mathbb{C}$ 上无界: 取 $z = iy$, 即可看出.

(7) $\sin z$ 仅在 $z = k\pi$ 处为零, $\cos z$ 仅在 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 处为零 $(k \in \mathbb{Z})$.

正切函数、余切函数、正割函数、余割函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

正切函数、余切函数、正割函数、余割函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

(1) 正切函数和余切函数以 π 为周期, 正割函数和余割函数以 2π 为周期;

正切函数、余切函数、正割函数、余割函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

(1) 正切函数和余切函数以 π 为周期, 正割函数和余割函数以 2π 为周期;

(2) 四个函数都在 z 平面上使分母不为零的点处解析, 且

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \qquad (\cot z)' = -\csc^2 z,$$
$$(\sec z)' = \sec z \tan z, \qquad (\csc z)' = -\csc z \cot z.$$

正切函数、余切函数、正割函数、余割函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

(1) 正切函数和余切函数以 π 为周期, 正割函数和余割函数以 2π 为周期;

(2) 四个函数都在 z 平面上使分母不为零的点处解析, 且

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \qquad (\cot z)' = -\csc^2 z,$$
$$(\sec z)' = \sec z \tan z, \qquad (\csc z)' = -\csc z \cot z.$$

- $\tan z$ 在 $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ 的各点处解析,

正切函数、余切函数、正割函数、余割函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

(1) 正切函数和余切函数以 π 为周期, 正割函数和余割函数以 2π 为周期;

(2) 四个函数都在 z 平面上使分母不为零的点处解析, 且

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \qquad (\cot z)' = -\csc^2 z,$$
$$(\sec z)' = \sec z \tan z, \qquad (\csc z)' = -\csc z \cot z.$$

- $\tan z$ 在 $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 的各点处解析,
- $\cot z$ 在 $z \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 的各点处解析.

双曲函数

定义双曲正弦函数、双曲余弦函数、双曲正切函数、双曲余切函数、双曲正割函数、双曲余割函数如下:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$
$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}.$$

它们都是解析函数, 各有其解析区域, 并且都是对应的实双曲函数在复数域上的推广.

$\sinh z = \frac{1}{i} \sin iz$

$\cosh z = \cos iz$

初等解析函数之 —— 儒可夫斯基函数*

$$\frac{z^2+1}{2z}$$

称函数

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

为**儒可夫斯基函数**, 它在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上解析.