§4 矩阵相似的条件

LOGO

$A \sim B \Leftrightarrow \lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价

设 A 是 n 阶方阵，$\lambda E - A$ 称为 A 的特征矩阵，$\lambda E - A$ 的不变因子称为 A 的不变因子。

注　$\lambda E - A$ 是满秩的但不是可逆的，n 阶行列式因子为 $|\lambda E - A|$。

$0 \neq$

$d_0 \neq \lambda^n + (-trA)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|$

$a_k\lambda^{n-k}$　　$a_k = (-1)^k \sum |A_k|$

主子式

$|\lambda E-A|=D_n$

引理 1　设 A,B 是 n 阶数字矩阵，如果有 n 阶数字矩阵 P_0, Q_0，使得

$$\lambda E - A = P_0(\lambda E - B)Q_0$$

那么 $A \sim B$。

证明　由条件有

$$\lambda E - A = \lambda P_0 Q_0 - P_0 B Q_0,$$

进行比较后应有

$$\underline{P_0 Q_0 = E，\ P_0 B Q_0 = A,}$$

由上面第一式得 $Q_0 = P_0^{-1}$，代入第二式得 $P_0 B P_0^{-1} = P_0 B Q_0 = A$，因此 $A \sim B$。证毕。

引理 2　对任何的非零的 $n\times n$ 数字矩阵 A 和 λ－矩阵 $U(\lambda)$ 与 $V(\lambda)$，一定存在 λ－矩阵 $Q(\lambda)$ 与 $R(\lambda)$ 和数字矩阵 U_0 和 V_0，使得

$$U(\lambda)=(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0,\quad V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0 。$$

证明 这里只证第一式，第二式同理可证。设

$$U(\lambda)=D_0\lambda^m+D_1\lambda^{m-1}+\cdots+D_{m-1}\lambda+D_m\ ,$$

其中 $D_0\neq O$，如果 $m=0$ 结论显然成立，下设 $m>0$。令 $\left(U(\lambda)=(\lambda E-A)\cdot Q+U(\lambda)\right)$

$$Q(\lambda)=Q_0\lambda^{m-1}+Q_1\lambda^{m-2}+\cdots+Q_{m-2}\lambda+Q_{m-1}\ ,$$

其中 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{m-1}$ 待定，于是

$$(\lambda E-A)Q(\lambda)=Q_0\lambda^m+(Q_1-AQ_0)\lambda^{m-1}+\cdots+(Q_{m-1}-AQ_{m-2})\lambda-AQ_{m-1}\ ,$$

令 $U(\lambda)=(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0$，得

$$Q_0=D_0,\ Q_1-AQ_0=D_1,\ \cdots,\ Q_{m-1}-AQ_{m-2}=D_{m-1}\ ,\ U_0-AQ_{m-1}=D_m\ ,$$

即

$$Q_0 = D_0,\ Q_1 = D_1 + AQ_0,\ \cdots,\ Q_{m-1} = D_{m-1} + AQ_{m-2}，\ U_0 = D_m + AQ_{m-1}，$$

由 $D_0, D_1, \cdots, D_{m-1}, D_m$ 及上述递推公式可依此求出 $Q_0, Q_1, \cdots, Q_{m-1}$ 以及 U_0。

定理 8.6 设 $A,B\in P^{n\times n}$，则 $A\sim B$ 的充分必要条件是 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价。

证明 必要性。因为 $A\sim B$，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，从而

$$\lambda E-B=\lambda P^{-1}EP-P^{-1}AP=P^{-1}(\lambda E-A)P,$$

所以 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价。

$P_0(\lambda E-B)Q_0$

?

充分性。因为 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价，则存在可逆矩阵 $U(\lambda),V(\lambda)$，使得

$$\lambda E-A=U(\lambda)(\lambda E-B)V(\lambda)。\qquad (1)$$

（a）将（1）式化成 $T(\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_0$。数字阵

由（1）有 $U^{-1}(\lambda)(\lambda E-A)=(\lambda E-B)V(\lambda)$，设 $V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0$，代入得

$$U^{-1}(\lambda)(\lambda E-A)=(\lambda E-B)R(\lambda)(\lambda E-A)+(\lambda E-B)V_0,$$

即

$$[U^{-1}(\lambda)-(\lambda E-B)R(\lambda)](\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_0,$$

令 $T=U^{-1}(\lambda)-(\lambda E-B)R(\lambda)$，则有

$$T(\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_0 \qquad (2)$$

设 $T=(T(\lambda)+T_0)$

$\lambda T(\lambda)(\lambda E-A)+T_0(\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_0$

2次　　1次　　1次

$T(\lambda)=0$

（b）证明 T 是数字矩阵。

比较（2）式两端 λ 的次数得 T 是数字矩阵。

（c）证明 T 是可逆的。

因为 $U(\lambda)T+U(\lambda)(\lambda E-B)R(\lambda)=E$，设 $U(\lambda)=(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0$，则

$$[(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0]T+(\lambda E-A)V^{-1}(\lambda)R(\lambda)=E,$$

或

$$U_0T+(\lambda E-A)[Q(\lambda)T+V^{-1}(\lambda)R(\lambda)]=E,$$

比较上式 λ 的次数可得 $Q(\lambda)T+V^{-1}(\lambda)R(\lambda)=O$，从而 $U_0T=E$，这说明 T 可逆，因此，

$$\lambda E-A=T^{-1}(\lambda E-B)V_0,$$

由引理 1 可知 $A\sim B$。证毕。

推论 设 $A,B\in P^{n\times n}$，则 $A\sim B$ 的充分必要条件是 A 与 B 有相同的不变因子或行列式因子。

$A \sim B \Rightarrow f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$

例 证明：$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$相似。

解 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&\lambda-1&-1\\\lambda-1&0&-1\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&(\lambda-1)^2&-\lambda\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&(\lambda-1)^2&-1\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&(\lambda-1)^2\\0&\lambda-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^3\end{pmatrix},$$

A 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=1,\ d_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$，所以 A 的行列式因子为

$$D_1(\lambda)=1,\ D_2(\lambda)=1,\ D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3。$$

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix},$$

直接求得 B 的行列式因子为

$$D_1(\lambda)=1,\ D_2(\lambda)=1,\ D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3,$$

由于 A 与 B 有相同的行列式因子，所以 $A\sim B$ 。

作业：4。

LOGO


AUSTRALIA
OCEANIA
Northern Territory
Queensland
NEW ZEALAND
VANUATU
TONGA

谢谢观赏

4、

$P(x) = \lambda E - A \qquad Q(x) = \lambda E - A^T = P^T(x)$

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} = P^T$$