LOGO

习题课

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\mathcal{A}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) A$

1 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\mathcal{A}$ 是 V 的线性变换。证明：$\mathcal{A}$ 是可逆变换当且仅当 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关。

$\sum k_i \mathcal{A}\varepsilon_i = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) A \cdot \vec{k}$

证明 因为

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$

所以 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关的充要条件是矩阵 A 可逆，而 A 可逆的充要条件是 $\mathcal{A}$ 可逆，

因此，$\mathcal{A}$ 是可逆变换当且仅当 $\mathcal{A}\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关。

注：$\operatorname{rank}(\varepsilon \cdot A) = \operatorname{rank}(A)$

对 $\forall C$ $\quad A = C^{-1}AC$

$CA = AC$

2 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，证明：如果 $\mathcal{A}$ 在任意一组基下的矩阵都相同，那么 $\mathcal{A}$ 是数乘变换。

证明 设 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})$，只要证明 A 为数量矩阵即可。设 X 为任一可逆矩阵，令

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) X,$$

则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 也是 V 的一组基，且 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵是 $X^{-1}AX$，因此有 $X^{-1}AX = A$，或 $AX = XA$，这说明 A 与一切可逆矩阵都可交换。

$1\ 2\ 3 \cdots n$

$$AX = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array}$$

若取

$$X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix},$$

则由 $AX = XA$ 可得

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

再由 $AP(i,j) = P(i,j)A$ 可得 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$，这就证明了 A 为数量矩阵，从而 $\mathcal{A}$ 为数乘变换。

3 设V是数域P上的n维线性空间，$\mathcal{A}$是V的一个线性变换，证明：

（1）由V的全体线性变换组成的线性空间$L(V)$是n^2维的；$\mathcal{A} \Rightarrow A_{n\times n}$

（2）在$P[x]$中有一次数$\leq n^2$的多项式$f(x)$，使$f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$；

（3）$\mathcal{A}$可逆的充分必要条件是：有一常数项不为零的多项式$g(x)$，使$g(\mathcal{A})=\mathcal{O}$。

证明（1）设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，$\mathcal{A}$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为$A$，定义$L(V)$到$P^{n\times n}$的映射$\sigma$：$\sigma(\mathcal{A})=A$，那么$\sigma$是同构映射，从而$L(V)$与$P^{n\times n}$作为线性空间是同构的，因此它们有相同的维数，即$\dim L(V)=\dim P^{n\times n}=n^2$。

（2）因为$L(V)$是n^2维的，所以n^2+1个线性变换$\mathcal{A}^{n^2},\mathcal{A}^{n^2-1},\cdots,\mathcal{A},\mathcal{E}$一定线性相关，于是存在不全为零的数$a_{n^2},a_{n^2-1},\cdots,a_1,a_0$，使得

$$a_{n^2}\mathcal{A}^{n^2}+a_{n^2-1}\mathcal{A}^{n^2-1}+\cdots+a_1\mathcal{A}+a_0\mathcal{E}=\mathcal{O},$$

令

$$f(x)=a_{n^2}x^{n^2}+a_{n^2-1}x^{n^2-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

则$f(x)$是非零多项式，且$\partial(f(x))\le n^2$，这就是说，在$P[x]$中存在一次数$\le n^2$的多项式$f(x)$，使$f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$。

若$\mathcal{A}$可逆

（3）必要性。由（2）知在$P[x]$中存在一次数$\le n^2$的多项式$f(x)$，使$f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$。设$f(x)=x^k g(x)$，其中$g(x)$的常数项不为零，则$\mathcal{A}^k g(\mathcal{A})=f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$，因为$\mathcal{A}$可逆，所以$g(\mathcal{A})=\mathcal{O}$，$g(x)$即为所求。

$(\mathcal{A}^{-1})^k\cdot(\mathcal{A})^k g(\mathcal{A})=0$

充分性。设有

$$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 ,$$

其中 $a_0\neq 0$，使得 $g(\mathcal{A})=\mathcal{O}$，即

$$g(\mathcal{A})=a_n\mathcal{A}^n+a_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}+\cdots+a_1\mathcal{A}+a_0\mathcal{E}=\mathcal{O} ,$$

重新整理得

$$\mathcal{A}(-\frac{a_n}{a_0}\mathcal{A}^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}\mathcal{A}^{n-2}-\cdots-\frac{a_1}{a_0}\mathcal{E})=\mathcal{E} ,$$

此式即表明 $\mathcal{A}$ 可逆。

$\Downarrow$

$\mathcal{A}^{-1}$

4 设 A,B 都是实数域上的 n 级矩阵，证明：A,B 在实数域上相似当且仅当它们在复数域上相似。

证明 若 A 和 B 在实数域上相似，由定义可知 A 和 B 在复数域上也相似。若 A 和 B 在复数域上相似，则存在可逆的复矩阵 $T=R+iS$，使得 $B=T^{-1}AT$，或 $TB=AT$，比较两端的实部和虚部有 $RB=AR$，$SB=AS$，从而对任意的数 λ 都有 $(R+\lambda S)B=A(R+\lambda S)$。

由于行列式 $|R+iS|\neq 0$，所以 λ 的多项式 $|R+\lambda S|$ 不是零多项式，在复数域仅有有限个根，因此必存在实数 t，使得 $|R+tS|\neq 0$，令 $P=R+tS$，则 $P^{-1}AP=B$，即 A 和 B 在实数域上相似。

$\eta=\varepsilon P$ $\quad$ $\varepsilon A^{*}=\eta B$

$|A|=7 \quad Y=P^{-1}X$

$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

$\lambda_2=7 \quad X_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=1 \quad X_1=\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

5 设矩阵

A: 1、1、7

A^*: 7、7、1

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 3 & 2\\2 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$\eta=\varepsilon\cdot P$

$\eta Y=\varepsilon P Y=\varepsilon\cdot X$

$B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征值和特征向量。

B: 7、7、1

$B+2E$: 9、9、3

$AX=\lambda X$

$P^{-1}AP(P^{-1}X)=P^{-1}AX$

$=\lambda(P^{-1}X)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\| \quad P^{-1}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解 设 A 的特征值为 λ，对应特征向量为 η，即 $A\eta=\lambda\eta$。由于 $|A|=7\neq 0$，所以 $\lambda\neq 0$。

因为 $A^*A=|A|E$，故有 $A^*\eta=\dfrac{|A|}{\lambda}\eta$，于是 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$，特征向量为 η。

因为 $B=P^{-1}A^*P$，所以 B 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$，特征向量为 $P^{-1}\eta$。

$B+2E$ 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}+2$，特征向量为 $P^{-1}\eta$。

因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)\text{，}$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，对应的线性无关特征向量为 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_3 = 7$ 时，对应的一个特征向量为 $\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

由 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，得 $P^{-1}\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$P^{-1}\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$P^{-1}\eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。因此，$B+2E$ 的三个特征值分别为 9，9，3，对应于特征值 9 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应于特征值 3 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

$A\alpha_1 = -\alpha_1$

$A\alpha_2 = \alpha_2$

6 设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$。（1）证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$。

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$-2k_1\alpha_1+k_3\alpha_2=0$

$\Rightarrow k_1=k_3=0$

$\Rightarrow k_2=0$

$AP = PB \qquad B = P^{-1}AP$

$= (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2+\alpha_3)$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解　（1）因为 α_1, α_2 是属于 A 的特征值 -1，1 的特征向量，所以 α_1, α_2 线性无关，且 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = -\alpha_2$，假设存在数 k_1, k_2, k_3，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0,$$

则等式两边乘以 A，可得

$$\begin{aligned} &A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) = k_1A\alpha_1 + Ak_2\alpha_2 + Ak_3\alpha_3 \\ &= -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = -k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \end{aligned},$$

上面两个式子消去 α_3，得 $2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$，因为 α_1, α_2 线性无关，可得 $k_1 = k_3 = 0$，从而可得 $k_2\alpha_2 = 0$，由于 $\alpha_2 \neq 0$，所以 $k_2 = 0$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

（2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆。因为

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}。$$

$b^2+b-2=0$

$(b+2)(b-1)=0$

$3b+b^2=2+2b$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+b\\2+2b\\1+a+b\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$$

$3+b=1+a+b \Rightarrow a=2$

7 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 可逆，向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\underline{A^*}$ 的一个特征向量，λ 是 α 对应

$A^*=|A|A^{-1}$

的特征值，其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，试求 a,b 和 λ 的值。

$\frac{a}{|A|}$

解 由于 A 可逆，故 A^* 可逆，于是 $\lambda\neq 0$。由题意知 $\underline{A^*\alpha=\lambda\alpha}$，两边同时左乘矩阵 A，

得 $\underline{\underbrace{AA^*}_{}^{|A|}\alpha=\lambda A\alpha}$， $A\alpha=\dfrac{|A|}{\lambda}\alpha$，即

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix},$$

由此得方程组

$$\begin{cases} 3+b=\dfrac{|A|}{\lambda} \\ 2+2b=\dfrac{|A|}{\lambda}b, \\ a+b+1=\dfrac{|A|}{\lambda} \end{cases}$$

解得 $b=1$ 或 $b=-2$，以及 $a=2$。由于

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=3a-2=4,$$

所以特征向量 α 所对应的特征值 $\lambda=\dfrac{|A|}{3+b}=\dfrac{4}{3+b}$。

当 $b=1$ 时，$\lambda=1$；当 $b=-2$ 时，$\lambda=4$。

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=6$

$\lambda_1=4$

$\lambda_{2,3}=1$

8 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},$$

又向量

$$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},$$

求 $A^n\beta$。

$A=S\Lambda S^{-1}$

$A^n=S\Lambda^n S^{-1}$

解　因为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

所以 $\beta=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$。因为当 $A\alpha=\lambda\alpha$ 时，有 $A^n\alpha=\lambda^n\alpha$，所以

$$A^n\beta=2\alpha_1-2^{n+1}\alpha_2+3^n\alpha_3=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}。$$

9 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，满足下列条件：

$AX=\lambda X$

（1）$0 \le a_{ij} \le 1$，$\forall i, j$；

（2）$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=1$，$i=1,2,\cdots,n$，

求证：（1）A 的每一个特征值 λ，都有 $|\lambda| \le 1$；（2）$\lambda_0=1$ 为 A 的一个特征值。

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

证明 （1）用反证法。假设A有特征值$|\lambda|\succ 1$，则有非零向量$X^T=(x_1,\cdots,x_n)$，满足$AX=\lambda X$，即$x_1a_{i1}+x_2a_{i2}+\cdots+x_na_{in}=\lambda x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，设$|x_k|=\max(|x_1|,\cdots,|x_n|)$，则由第$k$个方程得

$$|\lambda|=\left|\frac{x_1}{x_k}\right|a_{k1}+\left|\frac{x_2}{x_k}\right|a_{k2}+\cdots+\left|\frac{x_n}{x_k}\right|a_{kn}\le a_{k1}+a_{k2}+\cdots+a_{kn}=1,$$

这与已知条件矛盾。

（2）由条件可知 $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$，这说明 $\lambda_0=1$ 为 A 的一个特征值。

10 设 A,B 都是 n 阶方阵，且 $A\sim\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同，而 $B=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，证明：存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$，使得 $B\sim f(A)$。

证明 由于 $A\sim\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，所以存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

记 $C=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。设 $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 满足 $f(\lambda_i)=\mu_i$，$i=1,2,\cdots,n$，由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互不相同，由克莱默法则可知，这样的 $f(x)$ 一定存在，因此有 $f(C)=B$，代入 $P^{-1}AP=C$ 得到而 $B=f(C)=f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P$，所以 $B\sim f(A)$。

作业：无。

LOGO


Northern
Territory
Queensland
AUSTRALIA
OCEANIA
VANUATU
TONGA
NEW ZEALAND

谢谢观赏