§6 实对称矩阵的标准（续）

由定理可知，对于任意一个实对称矩阵 A，都存在正交矩阵 T，使

$$T^T AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，那么对于实二次型 $f = X^T AX$，如果作非退化线性替换 $X = TY$，可将二次型化为

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 。$$

今后称线性替换 $X = TY$ 为正交线性替换。因为 $|X|^2 = X^T X = Y^T T^T TY = Y^T Y = |Y|^2$，所以正交线性替换是保持长度不变的线性替换。

定理 9.9 任一实二次型 $f = X^T AX$ 都可经过正交线性替换化成标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 ,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值。

推论 实对称矩阵 A 正定（半正定）的充分必要条件是 A 的特征值都 $> 0(\geq 0)$。

$$\begin{matrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & -2 & -4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$-4 \quad -2 \quad 5$

$$\begin{matrix}2 & 1 & 2\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ -\frac{2}{5}\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$$

√**例 3** 用正交线性替换将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-8x_1x_3+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2$$

化为标准形，并写出所作的正交线性替换。

解 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\lambda_1=-4 \quad \lambda_{2,3}=5$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-4 & & \\ & 5 & \\ & & 5\end{pmatrix}$$

$\sqrt{45}$

$\frac{1}{3\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

$A=T\Lambda T^T$

$X^TAX=X^TT\Lambda T^TX$

$Y=T^TX$

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 4 \\ 10-2\lambda & \lambda-4 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 4 \\ 0 & \lambda & 10 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-5)^2 。$$

A 的特征值为 $\lambda_1 = -4$ 和 $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ 。

属于 $\lambda_1=-4$ 的线性无关的特征向量是 $p_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$。属于 $\lambda_2=\lambda_3=5$ 的线性无关的特征向量是 $p_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$。

将 p_2,p_3 正交化，得 $p_3' = p_3 - \dfrac{(p_3,p_2)}{(p_2,p_2)} p_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{5} \\ -\dfrac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$，

再将 p_1,p_2,p_3' 单位化，得 $q_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$，$q_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$，$q_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{\sqrt{45}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{45}} \\ \dfrac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$，

令

$$T=(q_1,\quad q_2,\quad q_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{45}}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix},$$

则 T 是正交矩阵，且 $T^T AT=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$。作正交线性替换 $X=TY$，即

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \dfrac{4}{\sqrt{45}}y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{3}y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y_2 - \dfrac{2}{\sqrt{45}}y_3 \\ x_3 = \dfrac{2}{3}y_1 \qquad\qquad\quad + \dfrac{5}{\sqrt{45}}y_3 \end{cases},$$

得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形为

$$f = -4y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2 。$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y_2 - \dfrac{4}{\sqrt{45}}y_3 \\ x_2 = \dfrac{1}{3}y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y_2 - \dfrac{2}{\sqrt{45}}y_3 \\ x_3 = \dfrac{2}{3}y_1 \qquad\qquad + \dfrac{5}{\sqrt{45}}y_3 \end{cases},$$

得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形为

$$f = -4y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2 。$$

例 3 设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明：当实数 λ 充分大之后，$\lambda E+A$ 是正定矩阵。

证明 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\lambda E+A$ 的特征值为 $\lambda+\lambda_1,\lambda+\lambda_2,\cdots,\lambda+\lambda_n$，所以当实数 λ 充分大之后，$\lambda+\lambda_1,\lambda+\lambda_2,\cdots,\lambda+\lambda_n$ 都大于零，此时 $\lambda E+A$ 是正定矩阵。

A+B正定

$\Uparrow$

$x^TA^TBx = (Ax)^T(Bx)$

例 4　设 A, B 是同阶正定矩阵，证明：AB 的特征值均大于 0。

(实对称)

证明　由于 A 正定，所以存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP=E$，从而

$$P^TAB(P^T)^{-1}=P^TAB(P^{-1})^T=P^TAPP^{-1}B(P^{-1})^T=P^{-1}B(P^{-1})^T,$$

这表明 AB 与 $P^{-1}B(P^{-1})^T$ 相似。

$(P^TAP)\cdot P^{-1}B(P^{-1})^T$

由于 B 正定，而 $P^{-1}B(P^{-1})^T$ 与 B 是合同的，所以 $P^{-1}B(P^{-1})^T$ 正定，从而 $(P^{-1})B(P^{-1})^T$ 的特征值都 >0。又 AB 与 $P^{-1}B(P^{-1})^T$ 相似，它们有相同的特征值，故 AB 的特征值都 >0。

注　由此结论可知，设 A, B 是同阶正定矩阵，则 AB 是正定矩阵当且仅当 $AB=BA$。

$(AB)^T=AB$ $\Leftrightarrow$

例 5　设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 n 阶实对称矩阵，证明：存在可逆矩阵 P，使得 $P^T AP$ 与 $P^T BP$ 同时为对角矩阵。

证明　因为 A 正定，所以 A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 T，使得 $T^T AT = E$，又因为 B 是实对称矩阵，所以 $T^T BT$ 也是实对称矩阵，从而存在正交矩阵 U，使得

$$U^T(T^T BT)U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

令 $P=TU$，则

$$P^T BP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

同时 $P^T AP=U^T T^T ATU=E$。

$|A+B|$

例 6 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶非零半正定矩阵，$n>1$，证明：

$$|A+B|>|A|+|B|。$$

证明 因为 A 是正定矩阵，B 是半正定矩阵，所以存在可逆阵 P，使得

$$P^T AP=E,\ P^T BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1\geq 0,\cdots,\lambda_n\geq 0$ 且存在 $\lambda_i>0$，

上面两个等式两端取行列式，得

$$|P^T||A||P|=1,\ |P^T||B||P|=\lambda_1\cdots\lambda_n,$$

从而

$$|P^T|(|A|+|B|)|P|=1+\lambda_1\cdots\lambda_n,$$

另一方面，

$$|P'(A+B)P| = |P'AP+P'BP| = (1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_n) > 1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+\cdots+\lambda_1\cdots\lambda_n > 1+\lambda_1\cdots\lambda_n \text{ ,}$$

所以$|A+B| > |A|+|B|$。

作业：18　2），3）。

LOGO

谢谢观赏