LOGO

§8 线性空间的同构

1 同构映射

良定性
唯一性

定义 6.10 设U,V是数域P上的线性空间，若存在U到V的双射σ，满足：

（1）$\forall \alpha,\beta \in U$，都有 U中 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ V中；

（2）$\forall k\in P$，$\alpha\in U$，都有$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，

则称σ是U到V的同构映射。

如果线性空间U到V之间存在同构映射，则称U与V同构。

例 设实函数的集合$U=\{f \mid f(x)>0, x\in[a,b]\}$，定义

$$f\oplus g=f.g,\ \forall f,g\in U,\quad k\circ f=f^k,\ \forall k\in R, f\in U,$$

则U按$\oplus$和$\circ$构成R上线性空间。设$V=\{f \mid f\text{是}[a,b]\text{上的实函数}\}$，定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall f,g\in V,\quad (kf)(x)=kf(x),\ \forall k\in R, f\in V,$$

则V按上述运算构成R上的线性空间，证明：U与V同构。

$$\sigma(f_1\oplus f_2)=\sigma(f_1)+\sigma(f_2)$$

$$\sigma(f_1 f_2)=\sigma(f_1)+\sigma(f_2)$$

$\sigma(f) = \ln f$

$\sigma(k \circ f) = k\sigma(f)$

$\sigma(f^k) = k\sigma(f)$

证明 定义U到V的映射σ：

$$\sigma(f) = \ln f\text{，} \forall f = U\text{。}$$

（1）$\forall f, g \in U$，如果$f \neq g$，那么$\ln f \neq \ln g$，所以σ是单射；

$\forall f \in V$，取$e^f \in U$，因为$\sigma e^f = f$，即e^f是f的原像，所以σ是满射；因此，σ是U到V的双射。

（2）$\forall f, g \in U$，

$$\sigma(f \oplus g) = \sigma(fg) = \ln(fg) = \ln f + \ln g = \sigma(f) + \sigma(g)；$$

（3）$\forall k \in R, f \in U$，

$$\sigma(k \circ f) = \sigma(f^k) = \ln f^k = k \ln f = k\sigma(f)，$$

因此，σ 是同构映射，U 与 V 同构。

注 同构作为线性空间之间的关系是等价关系。

（1）因为U上的恒等映射是U到U的同构映射，所以U与U同构，同构关系具有自反性。

（2）如果U与V同构，则存在U到V的同构映射σ，因此，σ^{-1}是V到U双射。对于任意的$\alpha,\beta\in V$，$\sigma(\sigma^{-1}(\alpha)+\sigma^{-1}(\beta))=\alpha+\beta$，所以$\sigma^{-1}(\alpha+\beta)=\sigma^{-1}(\alpha)+\sigma^{-1}(\beta)$。又$\sigma(k\sigma^{-1}(\alpha))=k\alpha$，所以$\sigma^{-1}(k\alpha)=k\sigma^{-1}(\alpha)$，于是$\sigma^{-1}$是$V$到$U$的同构映射，$V$与$U$同构。同构关系具有对称性。

（3）如果U与V同构，V与W同构，则存在U到V的同构映射σ和V到W的同构映射τ，则复合映射$\tau\sigma$是U到W的双射。因为

$$\tau\sigma(\alpha+\beta)=\tau(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))=\tau\sigma(\alpha)+\tau\sigma(\beta),$$

且$\tau\sigma(k\alpha)=\tau(\sigma k\alpha)=k\tau\sigma(\alpha)$，所以$\tau\sigma$是$U$到$W$的同构映射，$U$与$W$同构，同构关系具有传递性。

2 同构的性质

设U与V同构，σ是U到V的同构映射，

（1）$\sigma(\theta)=\theta$，$\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$；

事实上，因为$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，分别取$k=0$和$-1$，可得上述性质。

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 有相同的线性相关性。

事实上，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta,$$

则

$$k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_m\sigma(\alpha_m)=\theta,$$

$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 线性相关。反之，若 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 线性相关，因为 σ^{-1} 也是同构映射，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。

（3）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$U$的一组基，则$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$是$V$的一组基，从而同构的有限维线性空间的维数相同。

事实上，由（2）知，$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$线性无关。$\forall\beta\in V$，设

$$\sigma^{-1}(\beta)=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,$$

则

$$\beta=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_n\sigma(\alpha_n),$$

β可由$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$线性表示，所以$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)$是$V$的基。

（4）若U_1是U的子空间，则$\sigma(U_1)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in U_1\}$是$V$的子空间。

事实上，$\forall\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\in\sigma(U_1)$，其中$\alpha,\beta\in U_1$，则$\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\sigma(\alpha+\beta)$，因为$\alpha+\beta\in U_1$，所以$\sigma(\alpha+\beta)\in\sigma(U_1)$。

$\forall\sigma(\alpha)\in\sigma(U_1)$，$k\in P$，其中$\alpha\in U_1$，那么$k\sigma(\alpha)=\sigma(k\alpha)$，因为$k\alpha\in U_1$，所以$\sigma(k\alpha)\in\sigma(U_1)$。这就证明了$\sigma(U_1)$是$V$的子空间。

$\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)=\sigma(\alpha+\beta)\in\sigma(V_1)$

$k\sigma(\alpha)=\sigma(k\alpha)\in\sigma(V_1)$

3 有限维空间同构的条件

注　数域 P 上的 n 维线性空间 V 都与 P^n 同构。

事实上，设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，定义 V 到 P^n 的映射：

固定

$\forall \alpha\in V$，设 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$，　$\sigma(\alpha)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$。　双射

系数唯一(座标)

显然 σ 是 V 到 P^n 的双射。

$\forall \alpha,\beta\in V$，$\forall k\in P$，设

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,\quad \beta=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n,$$

则

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1)\varepsilon_1+(a_2+b_2)\varepsilon_2+\cdots+(a_n+b_n)\varepsilon_n,$$

$$k\alpha=ka_1\varepsilon_1+ka_2\varepsilon_2+\cdots+ka_n\varepsilon_n,$$

由 σ 的定义可知

$$\sigma(\alpha)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\ \sigma(\beta)=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\ \sigma(\alpha+\beta)=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix},\ \sigma(k\alpha)=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix},$$

根据 P^n 的运算有

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\quad \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha),$$

因此，σ 是 V 到 P^n 的同构映射，V 与 P^n 同构。

若 $V \xleftrightarrow{\sigma} V$ ∵ $\sigma(e_U) = e_V$

维数相同

定理 6.8 两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数。

证明 必要性已证，这里只证充分性。如果两个线性空间的维数都为 n，则它们都与 P^n 同构，根据同构的对称性和传递性可知它们也同构。

$V \longleftrightarrow P^n \longleftrightarrow V'$

作业：无。

LOGO


Northern Territory
Queensland
AUSTRALIA
OCEANIA
VANUATU
TONGA
NEW ZEALAND

谢谢观赏