LOGO

§4 矩阵的秩

1 秩的几何定义

定义 3.11　矩阵的行（列）向量组的秩称为矩阵的行（列）秩。

引理 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的行秩 $r < n$，那么它有非零解。

若只有0解，则 $r \geq n$

证明　设矩阵 A 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，即

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\quad (i=1,\cdots,s)\text{，}$$

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组，且

$$\alpha_i=k_{i1}\alpha_1+k_{i2}\alpha_2+\cdots+k_{ir}\alpha_r\quad (i=r+1,\cdots,s)\text{，}$$

于是将第 1 个方程乘以 $-k_{i1}$ 倍，$\cdots$, 第 r 个方程乘以 $-k_{ir}$ 倍，加到第 i 个方程，方程组（1）化成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \\ \qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad 0=0 \end{cases} \qquad (2)$$

则（1）与（2）同解，而$r < n$，（2）有非零解，从而（1）有非零解。证毕。

定理 3.5 矩阵的行秩与列秩相等。

证明 设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

A 的行秩 $=r$，列秩 $=r_1$。

设 A 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，它的秩为 r，不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是它的一个极大线性无关组，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是线性无关的，所以方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\mathbf{0}$$

只有零解，即齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{r1}x_r = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{r2}x_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{rn}x_r = 0 \end{cases}$$

只有零解。由引理，这个方程组的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

的行秩$\geq r$，因之在它的行向量中可以找到r个是线性无关的向量，不妨设向量组

$$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{r1}),\ (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{r2}),\ \cdots,\ (a_{1r}, a_{2r}, \cdots, a_{rr})$$

线性无关，在这些向量上添上几个分量后所得的向量组

$$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{r1}, \cdots, a_{s1}),\ (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{r2}, \cdots, a_{s2}),\ \cdots,\ (a_{1r}, a_{2r}, \cdots, a_{rr}, \cdots, a_{sr})$$

也线性无关。它们正好是矩阵 A 的 r 个列向量，由它们的线性无关性可知矩阵 A 的列秩 r_1 至少是 r，也就是说 $r_1 \geq r$ 。

同理可证 $r \geq r_1$，最终可得 $r = r_1$。证毕。

定义 3.12 矩阵 A 的行秩与列秩统称为 A 的秩，记作 $r(A)$（或 $rank(A)$）。

例 1　设 A,B 是 $m\times n$ 矩阵，证明：$r(A+B)\le r(A)+r(B)$。

证明　设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，则

$$A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)\text{。}$$

设 $r(A)=r$，$\overset{A_0}{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}}$ 是 A 的列向量组的极大无关组，$r(B)=s$，$\overset{B_0}{\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}}$ 是 B 的列向量组的极大无关组。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 等价，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 与 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$ 等价，所以 $\overset{(A,B)}{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n}$ 与 $\overset{(A_0,B_0)}{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}}$ 等价。又因为 $\overset{(A+B)}{\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n}$ 可由 $\overset{(A,B)}{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n}$ 线性表出，由线性表出的传递性可知，$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}$ 线性表出，因此

$$r(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)\le r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s})\le r+s \text{ ,}$$

即 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$ 。

例 2 设 A,B 分别是 $s\times n$ 和 $n\times m$ 的矩阵，则 $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$ 。

证明 设 $A=(a_{ij})_{s\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ ， $B=(b_{ij})_{n\times m}$ ，则

$$AB=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$=(b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n,\ b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{n2}\alpha_n,\ \cdots,\ b_{1m}\alpha_1+b_{2m}\alpha_2+\cdots+b_{nm}\alpha_n)$$ ，

这说明 AB 的列向量组可由 A 的列向量组线性表出，所以有 $r(AB)\le r(A)$ 。

同理可证， AB 的行向量组可由 B 的行向量组线性表出，可得 $r(AB)\le r(B)$ 。

特别的，如果 A 是 $s\times n$ 矩阵， P,Q 分别是 s 阶和 n 阶可逆矩阵，那么 $r(PA)=r(A)$ ，$r(AQ)=r(A)$ 。

事实上，由上面结果可知 $r(PA)\le r(A)$ 。又因为 P 可逆，所以有 $A=P^{-1}(PA)$，再由上面的结果还有 $r(A)=r(P^{-1}(PA))\le r(PA)$ ，因此，$r(PA)=r(A)$ 。同理可证 $r(AQ)=r(A)$ 。

注 设有向量组

$$\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

它们构成的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

以下三种说法等价：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性相关的；

（2）齐次线性方程组 $AX=0$ 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解；

（3）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的秩小于 n。

由克莱默法则可知如果 $AX=0$ 有非零解（或 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性相关的，或 $r(A)<n$）

那么 $|A|=0$。

$$D_n = \begin{pmatrix} c_1^2 \\ \vdots \\ c_n^2 \end{pmatrix} (1 \cdots 1) + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (s_1^2 \cdots s_n^2)$$

$$= \begin{pmatrix} c_1^2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ c_n^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ s_1^2 & \cdots & s_n^2 \end{pmatrix}$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}。$$

解 当 $n=1$ 时，$D_1=\cos(\alpha_1-\beta_1)$。

当 $n\geq 2$ 时，

$$D_n = \left| \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n \end{pmatrix} \right|。$$

当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos\beta_1 & \cos\beta_2\\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2\end{vmatrix}=\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2)\text{。}$$

当 $n>2$ 时，因为

$$r\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\\ \vdots & \vdots\\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n\\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n\end{pmatrix}\right)\le r\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\\ \vdots & \vdots\\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n\end{pmatrix}\le 2,$$

所以 $D_n=\left|\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\\ \vdots & \vdots\\ \cos\alpha_n & \sin\alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cdots & \cos\beta_n\\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \cdots & \sin\beta_n\end{pmatrix}\right|=0$。

作业：无。

LOGO


AUSTRALIA
OCEANIA
Northern Territory
Queensland
VANUATU
NEW ZEALAND

谢谢观赏