LOGO

§3 线性相关性（续）

3 极大线性无关组

定义 3.9 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$V$的一个部分组，如果满足

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关；

（2）对于V中任意向量β，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$都线性相关，

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V$的一个极大线性无关组，简称为极大无关组。

定理 3.4 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是向量组$V$的一个线性无关向量组，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V$的一个极大线性无关组的充分必要条件是对于$V$中任意向量$\beta$，$\beta$都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示。

极大无 ⟺ 无关组等价 ⟹ 向量个数相同

极大线性无关组有如下的基本性质：

极大线性无关组 不唯一

（1）向量组与其极大线性无关组等价。

事实上，由定理 3.4 可知，向量组可由极大线性无关组线性表出。而极大线性无关组又是向量组的部分组，显然极大线性无关组也可由向量组线性表出。

（2）极大线性无关组所含向量的个数相同。

事实上，对于向量组的任意两个极大线性无关组，因为它们都与向量组等价，所以它们之间也是等价的，而等价的线性无关的向量组所含向量的个数相同。

（3）任一无关组都可扩充为一个极大线性无关组。

事实上，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 V 的一个无关组，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 不是 V 的极大线性无关组，则有 α_{k+1} 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性表示，从而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$ 线性无关，重复上述作法可得 V 的一个极大线性无关组。

极大线性无关组的求法：

我们知道，对方程组的增广矩阵实施初等行变换不改变方程组的解，由此可以证明：如果对矩阵 A 施以初等行变换化为矩阵 B，那么 B 的列向量组与 A 的列向量组有相同的线性相关性。具体的说，就是如果 A 的列向量组的部分组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，则 B 的列向量组中对应的部分组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也线性无关，反之亦然。并且 A 的某个列向量 α 有表达式

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,$$

当且仅当 B 的对应的列向量 β 也有表达式

$$\beta=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r。$$

以上分析说明如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 B 的列向量组的极大线性无关组，那么对应的 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 A 的列向量组的极大线性无关组。因此我们可以用如下的方法求极大线性无关组。

设有列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，作矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，对 A 作初等行变换（必要时可交换向量的次序），化成如下形式的形阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1r+1} & b_{1r+2} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2r+1} & b_{2r+2} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{rr+1} & b_{rr+2} & \cdots & b_{rm} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

显然，在 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 的列向量组中， $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是极大线性无关组，且有

$$\beta_j=b_{1j}\beta_1+b_{2j}\beta_2+\cdots+b_{rj}\beta_r \quad (j=r+1,r+2,\cdots,m),$$

由此得到： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是极大线性无关组，且有

$$\alpha_j=b_{1j}\alpha_1+b_{2j}\alpha_2+\cdots+b_{rj}\alpha_r \quad (j=r+1,r+2,\cdots,m)。$$

(1 3 2 2)   1 3 2 2 α_1 α_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\alpha_4 = \frac{3}{2}\alpha_2 - \frac{5}{2}\alpha_1$

$\alpha_3 = 2\alpha_1$

例 4 求向量组

$$\alpha_1 = (1,\ 3,\ 2),\ \alpha_2 = (3,\ 1,\ 2),\ \alpha_3 = (2,\ 6,\ 4),\ \alpha_4 = (2,\ -6,\ -2)$$

的一个极大线性无关组，并将其他向量用所求极大线性无关组线性表示。

解 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 作为列向量组成矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

对 A 作初等行变换，得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 0 & -12 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{0} & \underline{0} & 0 & \underline{1} & 1 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以α_1,α_2是一个极大线性无关组，且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\frac{5}{2}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 。$$

4 向量组的秩

定义 3.10 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大线性无关组所含向量的个数称为向量组的秩，记作$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$。

向量组的秩有如下的性质：

（1）若向量组 A 可由向量组 B 线性表示，则 $r(A) \le r(B)$。

事实上，设向量组 A 与可由向量组 B 线性表示，

$$A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$$

是向量组 A 的极大线性无关组，

$$B_0: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$$

是向量组 B 的极大线性无关组。由于 A 与 A_0 等价，B 与 B_0 等价，根据线性表示的传递性可

且A_0无关

知，A_0 可由 B_0 线性表示，于是 $s \le r$，即 $r(A) \le r(B)$。

（2）等价的向量组秩相同。

例 5　若向量组 A 的秩为 r，证明（1）A 中的任意 $r+1$ 个向量都线性相关；（2）A 中任意 r 个线性无关的向量都是 A 的极大线性无关组。

证明　（1）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 A 的一个极大线性无关组，$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_{r+1}}$ 是 A 中的任意向量，则 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_{r+1}}$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，由定理 3.3 可知 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_{r+1}}$ 线性相关。

（2）设 $\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\cdots,\alpha_{k_r}$ 是 A 中的一个线性无关的向量组，对于 A 中任一向量 α，由（1）可知 $\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\cdots,\alpha_{k_r},\alpha$ 线性相关，由定义可知 $\alpha_{k_1},\alpha_{k_2},\cdots,\alpha_{k_r}$ 是极大线性无关组。

$r(A)=r(B)$ B_0 $B_0 \Leftrightarrow B$

A_0 AB

$B_0 \to AB \Rightarrow r(AB)=r(A)=r(B)$
$\Rightarrow A_0 \to AB$

例 6 已知两向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出，证明：这两个向量组等价。

证明 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$有相同的秩$r$，$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}^{A}$可被$\overbrace{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t}^{B}$线性表出，不妨设$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}^{A_0}$是$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}^{A}$的极大无关组。因为$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t}^{(A,B)}$与$\overbrace{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t}^{B}$等价，所以$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t}^{(A,B)}$的秩也为$r$，这样$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}^{A_0}$也是向量组$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t}^{(A,B)}$的极大无关组，于是$\overbrace{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t}^{B}$可被$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}^{A_0}$线性表出，从而可被$\overbrace{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s}^{A}$线性表出，这就证明了$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$等价。

$B \to A$

$(AB) \longleftarrow A_0$

$B \to A \Rightarrow B \to AB \Rightarrow r(AB) = r(B) = r(A)$

$\Rightarrow A_0 \leftrightarrow AB \Rightarrow A \to AB$

$\Rightarrow A \leftrightarrow B$

作业： 8，11 1），17。

17、

$$
A_0 \to \beta_1, \ \vdots, \ \beta_r
$$

$$
(\beta_1 \cdots \beta_r) \longrightarrow (\alpha_1 \cdots \alpha_r)
$$

LOGO

谢谢观赏