得分	阅卷人

三（每小题各 15 分，共 30 分）

1. (1) 设 E 是 $[0,1]$ 中的不可测子集.令

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in E \\ -x & x\notin E \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可测? $|f(x)|$ 是否可测?

(2). 证明：$f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是：对任一有理数 r ,集 $E(f>r)$ 恒可测.

2.(1) 设 $f(x), f_n(x)(n\in \mathrm{N})$ 均是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数，并且 $mE(f_n\neq f)<1/2^n\ (n\in \mathrm{N})$,试证 $f_n \xrightarrow{a.e} f(n\to\infty)$.

(2). 设 $f(x)$ 是在 上定义的几乎处处有限的可测函数，证明存在一列多项式几乎处处收敛于 $f(x)$.

Weierstrass 逼近：闭区间上连续函数可

用多项式级数一致逼近

得分	阅卷人

四（每小题 10 分，共 20 分）

1. (1) 求极限： $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,\mathrm{d}x$

(2). 设 $f_n(n=1,2,3\cdots)$、f 均是 E 上的可积函数，$\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_E |f(x)|\mathrm{d}m .$$

则对任意的可测子集 $e\subset E$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_e |f(x)|\mathrm{d}m .$$

2.(1) 证明：如果 $f(x)$ 在 $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ 上可积，$\varepsilon>0$ 为常数，则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m=0$$

(2). 设 $mE<+\infty$，证明序列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 依测度收敛于零的充分与必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{f_n^2(x)}{1+f_n^2(x)}\mathrm{d}m=0 .$$

① 若 $\forall \varepsilon>0$ $\lim\limits_{n\to\infty} m(f_n^2\geq\varepsilon)=0$ 令 $E_0=E(f_n^2\geq\varepsilon)$

$$I=\int_{E_0}+\int_{E\setminus E_0}\frac{f_n^2}{1+f_n^2}dm<\int_{E_0}\frac{f_n^2}{1+f_n^2}dm+\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}mE\to 0$$

② $\int\left|1-\frac{1}{1+f_n^2}\right|dm=0$

$\downarrow \sim 0$

1 0