LOGO

§6 若尔当标准形的理论推导

若尔当块

$$J(\lambda_0,k)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix}$$

和若尔当矩阵

$$J=\begin{pmatrix}J(\lambda_1,k_1) & & & \\ & J(\lambda_2,k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s,k_s)\end{pmatrix}$$

有如下的性质：

性质 1　$J(\lambda_0,k)$ 的特征多项式和最小多项式都是 $(\lambda-\lambda_0)^k$。

事实上，显然 $J(\lambda_0,k)$ 的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^k$，由于

$$\left(J(\lambda_0,k)-\lambda_0 E\right)^{k-1}=\begin{pmatrix} 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix}\neq O,$$

所以 $J(\lambda_0,k)$ 的最小多项式是 $(\lambda-\lambda_0)^k$。

性质 2 $J(\lambda_0,k)$ 的行列式因子和不变因子都是 $1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_0)^k$，初等因子为 $(\lambda-\lambda_0)^k$。

事实上，由于在

$$\lambda E - J(\lambda_0,k) = \begin{pmatrix} \lambda-\lambda_0 & & & \\ -1 & \lambda-\lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & \lambda-\lambda_0 \end{pmatrix}$$

中有 $k-1$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda-\lambda_0 & & \\ & -1 & \lambda-\lambda_0 & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{k-1},$$

所以 $J(\lambda_0,k)$ 行列式因子为 $1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_0)^k$，不变因子为 $1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_0)^k$，从而初等因子为 $(\lambda-\lambda_0)^k$。

性质 3 若尔当矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J(\lambda_1,k_1) & & & \\ & J(\lambda_2,k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s,k_s) \end{pmatrix}$$

的初等因子为$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$。

设 n 阶方阵 A 有初等因子 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$，因为

$$J=\begin{pmatrix} J(\lambda_1,k_1) & & & \\ & J(\lambda_2,k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_s,k_s) \end{pmatrix}$$

的初等因子也是 $(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$，所以 $A\sim J$。由于 A 的初等因子除次序外是唯一的，且由初等因子决定的若尔当块也是唯一的，于是有

定理 8.10 每个 n 阶复矩阵 A 都与一个若尔当矩阵相似，且这个若尔当形矩阵除若尔当块的次序外是唯一的，它称为 A 的若尔当标准形。

定理 8.11 设 $\mathcal{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换，在 V 中一定存在一组基，使 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为若尔当矩阵，且这个若尔当形矩阵除若尔当块的次序外是唯一的。

$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & & \\ & (\lambda-1)(\lambda-2) & \\ & & (\lambda-1)(\lambda-2)\end{pmatrix}$ $\lambda^2-3\lambda+2$

$\begin{pmatrix}0 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$

例 1 设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

求 A 的若尔当标准形。

解

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & \lambda-2 & 0\\ \lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2-4\lambda+3 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-1\\ 0 & \lambda^2-4\lambda+3 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-3)\end{pmatrix}。$$

$$\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} J(1,2) & \\ & J(3,1) \end{pmatrix}$$

A 的初等因子为 $(\lambda-1)^2, \lambda-3$，A 的若尔当标准形为 $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$。

A 初等因子:

$(\lambda-\lambda_1)^{k_1}, \cdots\cdots, (\lambda-\lambda_s)^{k_s}$

$$\begin{array}{ccc} (\lambda-\lambda_1)^{k_1} & \cdots\cdots & (\lambda-\lambda_s)^{k_s} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A_1 & \cdots\cdots & A_s \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ J(\lambda_1,k_1) & & J(\lambda_s,k_s) \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} J & & \\ & \ddots & \\ & & J \end{pmatrix}$$

LOGO

§7 有理标准形

定义 8.8 设有次数大于零的

$$d(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m\in P[x],$$

称

$$C(d)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

为 $d(\lambda)$ 的友矩阵。

companion matrix

性质

（1）$C(d)$ 的特征多项式和最小多项式都为 $d(\lambda)$。

（2）$C(d)$ 的行列式因子和不变因子都为 $1,\cdots,1,d(\lambda)$。

证明　（1）

$$|\lambda E-C(d)|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{vmatrix},$$

从最后一行起，分别将每一行都乘以 λ 后加到其前一行，得

$$|\lambda E - C(d)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{m-1} + a_1\lambda^{m-2} + \cdots + a_{m-2}\lambda + a_{m-1} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{m-2} + a_1\lambda^{m-3} + \cdots + a_{m-3}\lambda + a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m+1}(\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m) \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m ,$$

所以 $C(d)$ 的特征多项式为 $d(\lambda)$ 。

$\mathcal{A}\varepsilon_m = -a_m\varepsilon_1 - a_{m-1}\varepsilon_2 - \cdots - a_1\varepsilon_m$

$= (-a_m - a_{m-1}\mathcal{A} - \cdots - a_1\mathcal{A}^{m-1})\varepsilon_1$

设 V 是 m 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 V 的一组基，$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为 $C(d)$，则有

$$\varepsilon_2 = \mathcal{A}\varepsilon_1,\quad \varepsilon_3 = \mathcal{A}\varepsilon_2 = \mathcal{A}^2\varepsilon_1,\quad \cdots,\quad \varepsilon_m = \mathcal{A}^{m-1}\varepsilon_1。$$

如果 $d(\lambda)$ 不是 $C(d)$ 的最小多项式，则存在多项式

$$g(\lambda) = \lambda^k + b_1\lambda^{k-1} + \cdots + b_{k-1}\lambda + b_k \quad （k < m），$$

使得

$$g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^k + b_1\mathcal{A}^{k-1} + \cdots + b_{k-1}\mathcal{A} + b_k\mathcal{E} = \mathcal{O},$$

从而

$$g(\mathcal{A})\varepsilon_1 = \mathcal{A}^k\varepsilon_1 + b_1\mathcal{A}^{k-1}\varepsilon_1 + \cdots + b_{k-1}\mathcal{A}\varepsilon_1 + b_k\mathcal{E}\varepsilon_1 = \theta,$$

这表明 $\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_1,\cdots\mathcal{A}^{k-1}\varepsilon_1,\mathcal{A}^k\varepsilon_1$ 线性相关，这与 $\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_1,\cdots,\mathcal{A}^{m-1}\varepsilon_1$ 线性无关矛盾。这说明

ε_2 ε_k ε_{k+1}

$g(\lambda)$ 不是最小多项式，因此，特征多项式 $d(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$ 是 $C(d)$ 的最小多项式。

（2）因为$\lambda E-C(d)$左下角的$m-1$阶子式是一常数，所以$\lambda E-C(d)$的$m-1$级行列式因子$D_{m-1}(\lambda)=1$，从而$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{m-2}(\lambda)=1$，$m$级行列式因子

$$D_m(\lambda)=|\lambda E-C(d)|=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m\ ,$$

根据行列式因子与不变因子的关系知$C(d)$的不变因子为$1,\cdots,1,d(\lambda)$。

定义 8.9 设 $d_i(\lambda)$（$i=1,2,\cdots,s$）是首项系数为 1 的次数大于零的多项式，并且满足 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$（$i=1,2,\cdots,s-1$），如下形式的矩阵

$$C=\begin{pmatrix} C(d_1) & & & \\ & C(d_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C(d_s) \end{pmatrix}$$

称为有理标准形矩阵。

性质　有理标准形矩阵 C 的不变因子为 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$。

证明

$$\lambda E - C = \begin{pmatrix} \lambda E - C(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda E - C(d_s) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_1(\lambda) \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s(\lambda) \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

由于 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,s-1$，所以 $\lambda E - C$ 的不变因子为

$$1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)\text{。}$$

设 $A\in P^{n\times n}$， A 的不变因子为 $1,\cdots,1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,d_s(\lambda)$，其中 $d_i(\lambda)$ 是次数大于零的不变因子。由于矩阵

$$C=\begin{pmatrix} C(d_1) & & & \\ & C(d_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C(d_s) \end{pmatrix}$$

Frobenious

的不变因子也是 $1,\cdots,1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,d_s(\lambda)$，所以 $A\sim C$。

定理 8.11 设 $A\in P^{n\times n}$，则 A 一定与一个有理标准形矩阵 $C\in P^{n\times n}$ 相似，且 C 唯一，称 C 是 A 的有理标准形。

$(1+\lambda-2)(1-\lambda+2)$

定理 8.12 设 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，在 V 中一定存在一组基，使 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为有理标准形，且这个有理标准形是唯一的。

$1-(\lambda-2)^2$

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda-2 & 0 \\ \lambda-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\lambda-1) & \\ & & (\lambda-1)(\lambda-3) \end{pmatrix}$$

例 1 求

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的有理标准形。

解 A 的初等因子为 $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-3$，不变因子为 1, $\lambda-1$, $\lambda^2-4\lambda+3$，所以有理标准形为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}。$$

$C_1 = \text{null}$

$C_2 = (1)$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$C_1 = \text{null}$

$C_2 = \text{null}$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

例 2 求

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

的有理标准形。

解

$$\lambda E - A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-3) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 \end{pmatrix},$$

所以有理标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}。$$

例 3 设 $A \in P^{n\times n}$，证明：A 的最小多项式是 A 的次数最高的不变因子。

证明 设 A 的不变因子为 $1,\cdots,1,\ d_1(\lambda),\ \cdots,d_s(\lambda)$，其中 $d_i(\lambda)$ 是次数大于零的不变因子。则

$$A \sim C = \begin{pmatrix} C(d_1) & & & \\ & C(d_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C(d_s) \end{pmatrix},$$

从而 A 的最小多项式等于 C 的最小多项式，而 C 的最小多项式是 $C(d_1),C(d_2),\cdots,C(d_s)$ 最小多项式的最小公倍式，$C(d_i)$ 的最小多项式为 $d_i(\lambda)$，所以 A 的最小多项式

$$g(\lambda)=[d_1(\lambda),\ \cdots,d_s(\lambda)]=d_s(\lambda)\text{。}$$

作业：6　1），3），7　1），2）。

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=D_n$$

$$g(\lambda)=d_n(\lambda)=\frac{D_n}{D_{n-1}}$$

LOGO

谢谢观赏

6、

(1)
$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ \lambda-1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad -\frac{1}{2}(\lambda-1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 & -\frac{1}{2}(\lambda^2-1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 2\lambda+2 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 6 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -(\lambda+3) \\ 0 & 0 & (\lambda^2-1)\left(-\frac{1}{6}(\lambda-2)\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda^2-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-3 & 0 & 16 \\ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 12 \\ 2 & 0 & -2(\lambda+5) \end{pmatrix} \quad -3\lambda - 15$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & -3\lambda-3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7、

(1) $(\lambda E - A) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$

$(\lambda^2-1)(\lambda-2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \lambda-13 & -16 & -16 \\ 5 & \lambda+7 & 6 \\ 6 & 8 & \lambda+7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-13 & -16 & 0 \\ 5 & \lambda+7 & -\lambda-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 6 & 8 & \lambda-1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-13 & -16 & 0 \\ 5 & \lambda+7 & -\lambda-1 \\ 11 & \lambda+15 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-13 & -16 & 0 \\ 12 & 16 & 2(\lambda-1) \\ 11 & \lambda+15 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda-13 & -16 & 0 \\ 11\lambda+1 & \lambda^2+14\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^3+14\lambda^2+\lambda$$
$$-13\lambda^2-182\lambda-13$$
$$+176\lambda+16$$

$$d_3 = \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$