LOGO

§3 唯一性


AUSTRALIA
OCEANIA
Northern Territory
Queensland
VANUATU
TONGA
NEW ZEALAND

1 复数域上的合同标准形

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是一个复系数二次型，由于经过线性替换可以改变变元的次序，所以可选取适当的非退化线性替换 $X=CY$，将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变成标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2,$$

其中 $d_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,r$，因为合同的矩阵有相同的秩，所以 $r=r(A)$。

作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \quad \vdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \quad \vdots \\ y_n = z_n \end{cases},$$

上面的标准形就变成了

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2,$$

称它为复系数二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形。

显然，规范形完全被原二次型的矩阵的秩所决定，因此有

定理 5.2 任一复系数二次型经过非退化线性替换都可以化成规范形

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2,$$

且规范形是唯一的。

此定理也可叙述为：任一复对称矩阵 A 都与形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

的矩阵是合同的。称它为 A 在复数域上的合同标准形。

2 实数域上的合同标准形

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^T AX$ 是一个实系数二次型，它可经过非退化线性替换 $X=CY$ 化成如下的标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2,$$

其中 $d_i>0$，$i=1,2,\cdots,r$。作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \quad\vdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \quad\vdots \\ y_n = z_n \end{cases},$$

则标准形变成 $z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$，称它为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形。

定理 5.3（惯性定理） 任一实系数二次型经过非退化线性替换可以变成规范形

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2,$$

且规范形是唯一的。

证明 这里只需证明规范形是唯一的。设实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过非退化线性替换 $X=BY$ 化成规范形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2, \qquad (1)$$

而经过非退化线性替换 $X=CZ$ 也化成规范形

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2, \qquad (2)$$

用反证法证明 $p=q$。

$X = BY = CZ$

假设 $q > p$，考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \quad \vdots \\ y_p = 0 \\ z_{q+1} = 0 \\ \quad \vdots \\ z_n = 0 \end{cases},$$

因为 $Y = B^{-1}CZ$，所以方程组可看成 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的方程组，方程组的方程个数为

$$p + (n - q) = n - (q - p) < n,$$

所以方程组有非零解

$$Z_0 = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

将 Z_0 和与之对应的

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{y}_{p+1} \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$$

分别代入（2）和（1）得，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-\overline{y}_{p+1}^2-\cdots-\overline{y}_r^2\le 0,\quad f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{z}_1^2+\cdots+\overline{z}_q^2>0,$$

这是一个矛盾，因此，$q\le p$。同理可证 $p\le q$，从而 $p=q$。证毕。

此定理也可叙述为：任一实对称矩阵 A 都与形式为

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵是合同的，且 p 唯一。此矩阵称为 A 在实数域上的合同标准形。

定义 5.4 在实系数二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形中，正系数的平方项的个数 p 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数；负系数的平方项的个数 $r-p$ 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的负惯性指数；正、负惯性指数的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的符号差。

根据定理可知，两个 n 阶实对称矩阵合同的充分必要条件是它们的正、负惯性指数相同。

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}E_1 & \\ & E_2\end{pmatrix}$$

$$Q^T(-A)Q \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-E_1 & \\ & -E_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}E_2 & \\ & E_1\end{pmatrix}$$

例 1　设 A 为 $2n$ 阶实可逆的对称矩阵，且 A 与 $-A$ 合同，证明：

（1） A 的正惯性指数为 n；　　$\Rightarrow E_1=E_2$

（2） A 与 $2n$ 阶方阵 $B=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$ 合同。

证明 （1）设 A 的正惯性指数为 p，则存在可逆矩阵 Q，使得

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{2n-p} \end{pmatrix},$$

从而

$$-Q^T AQ = -\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{2n-p} \end{pmatrix},$$

$$Q^T(-A)Q = \begin{pmatrix} -E_p & \\ & E_{2n-p} \end{pmatrix},$$

因为 A 与 $-A$ 合同，所以 A 与 $-A$ 有相同的正惯性指数，因此得 $p = 2n - p$，即 A 的正惯性指数 $p = n$。

（2） B 所对应的二次型

$$f = X^T BX = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + x_3x_{2n-2} + \cdots + x_nx_{n+1},$$

作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_{2n} \\ x_2 = y_2 + y_{2n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = y_n + y_{n+1} \\ x_{n+1} = y_n - y_{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2n-1} = y_2 - y_{2n-1} \\ x_{2n} = y_1 - y_{2n} \end{cases},$$

得二次型的标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-\cdots-y_{2n-1}^2-y_{2n}^2,$$

这表明 B 的正、负惯性指数都是 n。因为 A 与 B 有相同的惯性指数，所以它们是合同的。

$BX=L$

例 2 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$，其中 $l_i(i=1,2,\cdots,p+q)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐式。证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数 $\le p$，负惯性指数 $\le q$。

证明 设

$$l_i=b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+\cdots+b_{in}x_n \qquad (i=1,2,\cdots,p+q),$$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正惯性指数为 s，秩为 r，于是存在非退化线性替换

$BX=L$

$$y_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\cdots+c_{in}x_n \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

$CX=Y$

使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$$

$$=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2\text{。}$$

下面证明 $s\le p$。用反证法。假设 $s>p$，考虑线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ b_{p1}x_1+\cdots+b_{pn}x_n=0 \\ c_{s+1,1}x_1+\cdots+c_{s+1,n}x_n=0 \\ \vdots \\ c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n=0 \end{cases},$$

该方程组含 $p+n-s$ 个方程，小于未知量的个数 n，故它必有非零解 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，于是

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2=y_1^2+\cdots+y_s^2,$$

上式要成立，必有

$$l_{p+1}=\cdots=l_{p+q}=0,\quad y_1=\cdots=y_s=0,$$

这就是说，对于 $x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots,x_n=a_n$ 这组非零数，有 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$，这与线

性替换 $Y=CX$ 是非退化的条件矛盾，所以 $s \le p$。同理可证负惯性指数 $r-s \le q$。

$$C^2_{3+n-1} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

C_3^n

作业：1（II） 1）， 5。

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$= \lambda(\lambda^2-4) -2-\lambda-(\lambda+2)$

$= \lambda^3-6\lambda+4$ $\lambda=\pm2 \ \pm4 \ \pm1$

$(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-2)$ $\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}$

$1+1+2\times2+3\times3+4\times4$

$+\cdots+n\times n$

$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+1$

$-1\pm\sqrt{3}$

LOGO

谢谢观赏