第六章 留数定理和辐角原理

§1 留数与留数定理

李太玉、孙海伟

山东大学(威海)
数学与统计学院

Spring Semester, 2022

考查积分 $I = \oint_{|z-a|=r} f(z)dz$.

- 当 $f(z)$ 在 $|z-a| \leq r$ 上解析时, 必有 $I = 0$.

考查积分 $I = \oint_{|z-a|=r} f(z)dz.$

- 当 $f(z)$ 在 $|z-a| \leq r$ 上解析时, 必有 $I = 0.$
- 当 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| \leq r$ 上解析、a 是 $f(z)$ 的孤立奇点时, 积分 I 的值不一定为 $0;$

考查积分 $I = \oint_{|z-a|=r} f(z)dz.$

- 当 $f(z)$ 在 $|z-a| \le r$ 上解析时, 必有 $I = 0.$
- 当 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| \le r$ 上解析、a 是 $f(z)$ 的孤立奇点时, 积分 I 的值不一定为 0; 例如:

考查积分 $I=\oint_{|z-a|=r} f(z)dz$.

- 当 $f(z)$ 在 $|z-a|\le r$ 上解析时, 必有 $I=0$.
- 当 $f(z)$ 在 $0<|z-a|\le r$ 上解析、a 是 $f(z)$ 的孤立奇点时, 积分 I 的值不一定为 0; 例如:

  重要积分, 即对 $f(z)=\frac{1}{z-a}$, 就有 $I=2\pi\mathrm{i}\neq 0$.

考查积分 $I=\oint_{|z-a|=r} f(z)dz$.

- 当 $f(z)$ 在 $|z-a|\le r$ 上解析时, 必有 $I=0$.
- 当 $f(z)$ 在 $0<|z-a|\le r$ 上解析、a 是 $f(z)$ 的孤立奇点时, 积分 I 的值不一定为 0; 例如:

  重要积分, 即对 $f(z)=\frac{1}{z-a}$, 就有 $I=2\pi\mathrm{i}\neq 0$.
- 处理有奇点这种情况:

考查积分 $I = \oint_{|z-a|=r} f(z)dz$.

- 当 $f(z)$ 在 $|z-a| \le r$ 上解析时, 必有 $I = 0$.
- 当 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| \le r$ 上解析、a 是 $f(z)$ 的孤立奇点时, 积分 I 的值不一定为 0; 例如:

  重要积分, 即对 $f(z) = \frac{1}{z-a}$, 就有 $I = 2\pi \mathrm{i} \neq 0$.
- 处理有奇点这种情况:

  ☞ 复周线上的柯西积分定理,

考查积分 $I = \oint_{|z-a|=r} f(z)dz.$

- 当 $f(z)$ 在 $|z-a| \le r$ 上解析时, 必有 $I = 0.$
- 当 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| \le r$ 上解析、a 是 $f(z)$ 的孤立奇点时, 积分 I 的值不一定为 0; 例如:

  重要积分, 即对 $f(z) = \frac{1}{z-a}$, 就有 $I = 2\pi\mathrm{i} \neq 0.$
- 处理有奇点这种情况:

  ☞ 复周线上的柯西积分定理,

  ☞ 留数与留数定理.

定义6.1. 设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在某圆环 $0 < |z-a| < r$ 上解析, 称积分

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} f(z)dz \qquad (0 < \rho < r)$$

为函数 $f(z)$ 在点 a 的留数.

定义6.1. 设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在某圆环 $0 < |z-a| < r$ 上解析, 称积分

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} f(z)dz \qquad (0 < \rho < r)$$

为函数 $f(z)$ 在点 a 的留数.

利用 $f(z)$ 在点 a 的洛朗展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \big(0 < |z-a| < r\big),$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

可得

定义6.1. 设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在某圆环 $0 < |z-a| < r$ 上解析, 称积分

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} f(z)dz \qquad (0 < \rho < r)$$

为函数 $f(z)$ 在点 a 的留数.

利用 $f(z)$ 在点 a 的洛朗展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \big(0 < |z-a| < r\big),$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

可得

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

定义6.1. 设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在某圆环 $0<|z-a|<r$ 上解析, 称积分

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz \qquad (0<\rho<r)$$

为函数 $f(z)$ 在点 a 的留数.

利用 $f(z)$ 在点 a 的洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \big(0<|z-a|<r\big),$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

可得

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

显然, 函数在有限可去奇点处的留数为

定义6.1. 设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在某圆环 $0 < |z-a| < r$ 上解析, 称积分

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} f(z)dz \qquad (0 < \rho < r)$$

为函数 $f(z)$ 在点 a 的留数.

利用 $f(z)$ 在点 a 的洛朗展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \big(0 < |z-a| < r\big),$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

可得

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = c_{-1}.$$

显然, 函数在有限可去奇点处的留数为零.

柯西留数定理

定理6.1(柯西留数定理). 设 C 是可求长简单闭曲线或复周线, 函数 $f(z)$ 在 C 所围区域 D 内, 除 $a_1, \ldots, a_n$ 外解析, 在闭区域 $\overline{D}$ 上除 $a_1, \ldots, a_n$ 外连续,

柯西留数定理

定理6.1(柯西留数定理). 设 C 是可求长简单闭曲线或复周线, 函数 $f(z)$ 在 C 所围区域 D 内, 除 $a_1,\ldots,a_n$ 外解析, 在闭区域 $\overline{D}$ 上除 $a_1,\ldots,a_n$ 外连续, 则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

柯西留数定理

定理6.1(柯西留数定理). 设 C 是可求长简单闭曲线或复周线, 函数 $f(z)$ 在 C 所围区域 D 内, 除 $a_1, \ldots, a_n$ 外解析, 在闭区域 $\overline{D}$ 上除 $a_1, \ldots, a_n$ 外连续, 则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

证明. 分别以 $a_1, \ldots, a_n$ 为心作圆周 $C_k : |z - a_k| = \rho_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, 使这些圆周及其内部均含于 D 内, 并且这些闭圆盘彼此无公共点.

柯西留数定理

定理6.1(柯西留数定理). 设 C 是可求长简单闭曲线或复周线, 函数 $f(z)$ 在 C 所围区域 D 内, 除 $a_1,\ldots,a_n$ 外解析, 在闭区域 $\overline{D}$ 上除 $a_1,\ldots,a_n$ 外连续, 则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

证明. 分别以 $a_1,\ldots,a_n$ 为心作圆周 $C_k: |z-a_k| = \rho_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$, 使这些圆周及其内部均含于 D 内, 并且这些闭圆盘彼此无公共点. 应用复周线上的柯西积分定理,

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)dz =$$

柯西留数定理

定理6.1(柯西留数定理). 设 C 是可求长简单闭曲线或复周线, 函数 $f(z)$ 在 C 所围区域 D 内, 除 $a_1, \dots, a_n$ 外解析, 在闭区域 $\overline{D}$ 上除 $a_1, \dots, a_n$ 外连续, 则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

证明. 分别以 $a_1, \dots, a_n$ 为心作圆周 $C_k : |z - a_k| = \rho_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, 使这些圆周及其内部均含于 D 内, 并且这些闭圆盘彼此无公共点. 应用复周线上的柯西积分定理,

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

证毕. $\square$

留数的计算

- 柯西积分定理及柯西积分公式都是留数定理的特殊情形.

留数的计算

- 柯西积分定理及柯西积分公式都是留数定理的特殊情形.
- 留数定理把计算闭曲线积分的整体问题, 转化为计算闭曲线内部各孤立奇点处留数的局部问题.

留数的计算

- 柯西积分定理及柯西积分公式都是留数定理的特殊情形.
- 留数定理把计算闭曲线积分的整体问题, 转化为计算闭曲线内部各孤立奇点处留数的局部问题.
- 问题: 能否用一些较为简单的方法把留数求出来?

留数的计算

- 柯西积分定理及柯西积分公式都是留数定理的特殊情形.
- 留数定理把计算闭曲线积分的整体问题, 转化为计算闭曲线内部各孤立奇点处留数的局部问题.
- 问题: 能否用一些较为简单的方法把留数求出来?
- 设 a 是 $f(z)$ 的有限孤立奇点,

  若 a 是 $f(z)$ 的可去奇点,

留数的计算

- 柯西积分定理及柯西积分公式都是留数定理的特殊情形.
- 留数定理把计算闭曲线积分的整体问题, 转化为计算闭曲线内部各孤立奇点处留数的局部问题.
- 问题: 能否用一些较为简单的方法把留数求出来?
- 设 a 是 $f(z)$ 的有限孤立奇点,

  若 a 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 0$;

留数的计算

- 柯西积分定理及柯西积分公式都是留数定理的特殊情形.
- 留数定理把计算闭曲线积分的整体问题, 转化为计算闭曲线内部各孤立奇点处留数的局部问题.
- 问题: 能否用一些较为简单的方法把留数求出来?
- 设 a 是 $f(z)$ 的有限孤立奇点,

  若 a 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 0$;

  当 a 是 $f(z)$ 的本质奇点:

留数的计算

- 柯西积分定理及柯西积分公式都是留数定理的特殊情形.
- 留数定理把计算闭曲线积分的整体问题, 转化为计算闭曲线内部各孤立奇点处留数的局部问题.
- 问题: 能否用一些较为简单的方法把留数求出来?
- 设 a 是 $f(z)$ 的有限孤立奇点,

  若 a 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 0$;

  当 a 是 $f(z)$ 的本质奇点: 利用洛朗展开求 c_{-1};

留数的计算 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=\mathrm{Res}\,\frac{f(z)}{z-z_0}$

- 柯西积分定理及柯西积分公式都是留数定理的特殊情形.
- 留数定理把计算闭曲线积分的整体问题, 转化为计算闭曲线内部各孤立奇点处留数的局部问题.
- 问题: 能否用一些较为简单的方法把留数求出来?
- 设 a 是 $f(z)$ 的有限孤立奇点,

  若 a 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\,f(z)=0$;

  当 a 是 $f(z)$ 的本质奇点: 利用洛朗展开求 c_{-1};

  当 a 是 $f(z)$ 的极点, 有下面的一些常用法则.

极点处的留数的计算法则

定理6.2. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to a} \Big[(z-a)^m f(z)\Big]^{(m-1)}.$$

极点处的留数的计算法则

定理6.2. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \left[(z-a)^m f(z) \right]^{(m-1)}.$$

证明. 在点 a 的某去心邻域内, 有

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \cdots,$$

极点处的留数的计算法则

定理6.2. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \Big[(z-a)^m f(z)\Big]^{(m-1)}.$$

证明. 在点 a 的某去心邻域内, 有

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \cdots,$$

$$\begin{aligned}(z-a)^m f(z) = c_{-m} &+ c_{-(m-1)}(z-a) + \cdots \\ &+ c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \cdots,\end{aligned}$$

$$\Big[(z-a)^m f(z)\Big]^{(m-1)} =$$

极点处的留数的计算法则

定理6.2. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \Big[(z-a)^m f(z)\Big]^{(m-1)}.$$

证明. 在点 a 的某去心邻域内, 有

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \cdots,$$

$$\begin{aligned}(z-a)^m f(z) = {} & c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-a) + \cdots \\ & + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \cdots,\end{aligned}$$

$$\Big[(z-a)^m f(z)\Big]^{(m-1)} = c_{-1}\cdot(m-1)! + \Big\{(z-a)\ \text{的正幂次项}\Big\} \qquad \square$$

极点处的留数的计算法则

推论6.3. 若 a 是 $f(z)$ 的单极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

极点处的留数的计算法则

推论6.3. 若 a 是 $f(z)$ 的单极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

推论6.4. 若 a 是 $f(z)$ 的二阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}\Big[(z-a)^2 f(z)\Big]'.$$

极点处的留数的计算法则

定理6.5. 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在点 a 解析, 且 $P(a) \neq 0$, $Q(a)=0$, $Q'(a) \neq 0$, 且

极点处的留数的计算法则

定理6.5. 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在点 a 解析, 且 $P(a)\neq 0$, $Q(a)=0$, $Q'(a)\neq 0$, 且 a 是 $f(z)$ 的一阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

极点处的留数的计算法则

定理6.5. 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在点 a 解析, 且 $P(a) \neq 0$, $Q(a)=0$, $Q'(a)\neq 0$, 且 a 是 $f(z)$ 的一阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

证明. 由 $Q(a)=0$ 及 $Q'(a)\neq 0$ 知, a 是 $Q(z)$ 的一阶零点, 从而是 $\frac{1}{f(z)}$ 的一阶零点, 因此是 $f(z)$ 的一阶极点.

极点处的留数的计算法则

定理6.5. 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在点 a 解析, 且 $P(a)\neq 0$, $Q(a)=0$, $Q'(a)\neq 0$, 且 a 是 $f(z)$ 的一阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

证明. 由 $Q(a)=0$ 及 $Q'(a)\neq 0$ 知, a 是 $Q(z)$ 的一阶零点, 从而是 $\frac{1}{f(z)}$ 的一阶零点, 因此是 $f(z)$ 的一阶极点.

由推论6.3,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) =$$

极点处的留数的计算法则

定理6.5. 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$ 及 $Q(z)$ 在点 a 解析，且 $P(a)\neq 0$，$Q(a)=0$，$Q'(a)\neq 0$，且 a 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

证明. 由 $Q(a)=0$ 及 $Q'(a)\neq 0$ 知，a 是 $Q(z)$ 的一阶零点，从而是 $\frac{1}{f(z)}$ 的一阶零点，因此是 $f(z)$ 的一阶极点.

由推论6.3,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} =$$

极点处的留数的计算法则

定理6.5. 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在点 a 解析, 且 $P(a)\neq 0$, $Q(a)=0$, $Q'(a)\neq 0$, 且 a 是 $f(z)$ 的一阶极点, 则

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

证明. 由 $Q(a)=0$ 及 $Q'(a)\neq 0$ 知, a 是 $Q(z)$ 的一阶零点, 从而是 $\frac{1}{f(z)}$ 的一阶零点, 因此是 $f(z)$ 的一阶极点.

由推论6.3,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad \square$$

例. 求 $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \dfrac{\sin z}{z^4}$.

3

$= -\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1}{3!}(\sin z)^{(3)}$

$\dfrac{1}{6}(-\cos z)$

$$= \frac{1}{2!}\left(\frac{\sin z}{z}\right)''$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z\cos z - \sin z}{z^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z^2(\cos z - z\sin z - \cos z) - 2z(z\cos z - \sin z)}{z^4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-z^2\sin z - 2z\cos z + 2\sin z}{z^3}\right) = -\frac{1}{6}$$

$\sin z - z\cos z$

$= \frac{1}{2}(-1-2 \quad \frac{\ }{z^3}$

例. 求 $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z^4}$.

解. $z = 0$ 是三阶极点, 若用法则 III 需计算 $\frac{\sin z}{z}$ 的二阶导数,

例. 求 $\operatorname*{Res}_{z=0} \dfrac{\sin z}{z^4}$.

解. $z = 0$ 是三阶极点, 若用法则 III 需计算 $\dfrac{\sin z}{z}$ 的二阶导数, 还能忍一忍?

例. 求 $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z^4}$.

解. $z = 0$ 是三阶极点, 若用法则 III 需计算 $\frac{\sin z}{z}$ 的二阶导数, 还能忍一忍?

例. 求 $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z^5}$? $\operatorname*{Res}\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z^{2022}}$?

$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots + \frac{z^{2021}}{2021!}$

例. 求 $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4}$.

解. $z = 0$ 是三阶极点, 若用法则 III 需计算 $\frac{\sin z}{z}$ 的二阶导数, 还能忍一忍?

例. 求 $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^5}$? $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^{2022}}$?

用下面的法则定理**6.2'**来算.

$\frac{1}{2021!}(\sin z)^{(2021)}$

极点处的留数的计算法则

定理6.2'. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则对任意整数 $n \geq m$,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to a} \Big[(z-a)^n f(z)\Big]^{(n-1)}.$$

极点处的留数的计算法则

定理6.2'. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则对任意整数 $n \geq m$,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to a} \left[(z-a)^n f(z) \right]^{(n-1)}.$$

证明. 在点 a 的某去心邻域内, 有

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \cdots,$$

极点处的留数的计算法则

定理6.2'. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则对任意整数 $n \geq m$,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \Big[(z-a)^n f(z)\Big]^{(n-1)}.$$

证明. 在点 a 的某去心邻域内, 有

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \cdots ,$$

$$\begin{aligned}(z-a)^n f(z) = c_{-m}(z-a)^{n-m} + c_{-(m-1)}(z-a)^{n-m+1} + \cdots \\ + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \cdots ,\end{aligned}$$

$$\Big[(z-a)^n f(z)\Big]^{(n-1)} =$$

极点处的留数的计算法则

定理6.2'. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则对任意整数 $n \geq m$,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \Big[(z-a)^n f(z)\Big]^{(n-1)}.$$

证明. 在点 a 的某去心邻域内, 有

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \cdots,$$

$$\begin{aligned}(z-a)^n f(z) = c_{-m}(z-a)^{n-m} &+ c_{-(m-1)}(z-a)^{n-m+1} + \cdots \\ &+ c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \cdots,\end{aligned}$$

$$\Big[(z-a)^n f(z)\Big]^{(n-1)} = c_{-1}\cdot(n-1)! + \Big\{(z-a)\text{ 的正幂次项}\Big\} \qquad \square$$

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} =$$

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z\to 0} \left[z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right]^{(3)} =$$

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z \to 0} \left[z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right]^{(3)} = -\frac{1}{6}.$$

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z\to 0} \left[z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right]^{(3)} = -\frac{1}{6}.$$

例. 求留数: $f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z+5)}$, $z = 0, 2, -5.$

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z \to 0} \left[z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right]^{(3)} = -\frac{1}{6}.$$

例. 求留数: $f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z+5)}$, $z = 0, 2, -5.$

—— $-\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{35}$.

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z\to 0} \left[z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right]^{(3)} = -\frac{1}{6}.$$

例. 求留数: $f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z+5)}$, $z = 0, 2, -5$.

—— $-\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{35}$.

例. 求留数: $f(z) = \frac{z}{\cos z}$, $z = \frac{\pi}{2}$. 1阶极点

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{z(z-\frac{\pi}{2})}{\cos z}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t(t+\frac{\pi}{2})}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{t(t+\frac{\pi}{2})}{\sin t} = -\frac{\pi}{2}$$

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z\to 0} \left[z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right]^{(3)} = -\frac{1}{6}.$$

例. 求留数: $f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z+5)}$, $z = 0, 2, -5$.

—— $-\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{35}$.

$\frac{1}{2(2+5)}$ $\quad$ $\frac{1}{(-5)(-7)}$

例. 求留数: $f(z) = \frac{z}{\cos z}$, $z = \frac{\pi}{2}$.

—— $-\frac{\pi}{2}$.

$\frac{\frac{\pi}{2}}{-\sin(\frac{\pi}{2})}$

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\left[z^4\cdot\frac{\sin z}{z^4}\right]^{(3)}=-\frac{1}{6}.$$

例. 求留数: $f(z)=\frac{1}{z(z-2)(z+5)}$, $z=0,2,-5$.

—— $-\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{35}$.

例. 求留数: $f(z)=\frac{z}{\cos z}$, $z=\frac{\pi}{2}$.

—— $-\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{1-z+\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^3}{z^2}$$

例. 求留数: $f(z)=\frac{1}{z^2\,\mathrm{e}^z}$, $z=0$.

2阶极点

$$(e^{-z})'=-e^{-z}=-1$$

求留数

利用定理6.2', 有

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z \to 0} \left[z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right]^{(3)} = -\frac{1}{6}.$$

例. 求留数: $f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z+5)}$, $z = 0, 2, -5$.

—— $-\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{35}$.

$\frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$

例. 求留数: $f(z) = \frac{z}{\cos z}$, $z = \frac{\pi}{2}$.

—— $-\frac{\pi}{2}$.

$z = \frac{1}{2} + k$

$k = (0, \pm 1, \cdots, \pm(n-1))$

例. 求留数: $f(z) = \frac{1}{z^2\, e^z}$, $z = 0$.

—— -1.

$\frac{\sin \pi z}{\sin \pi z} = -\frac{1}{\pi}$

求留数

$-\pi \sin \pi z$ $\quad -\frac{2n}{\pi}\cdot 2\pi i$

$-4ni$

例. 求留数: $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$, $z = \pm i$.

$$= \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

$$\left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=\pm i}$$

求留数

例. 求留数: $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$, $z = \pm i$.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{e}{-2i} = \frac{ie}{2}.$$

求留数

例. 求留数: $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}$, $z = \pm\mathrm{i}$.

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{e}}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-\mathrm{i}} f(z) = \frac{\mathrm{e}}{-2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}}{2}.$$

$$\frac{s}{c^2} \qquad -s \cdot 2cs$$

例. 求留数: $f(z) = \frac{\sec z}{z^3}$, $z = 0$.

$$= \frac{1}{z^3 \cos z} \qquad 3阶极点$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\cos z}\right)''$$

$$= \frac{1}{\;} \cdot \frac{c^3 + 2cs^2}{c^4} = \frac{1}{2}$$

求留数

例. 求留数: $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}$, $z = \pm\mathrm{i}$.

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{e}}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-\mathrm{i}} f(z) = \frac{\mathrm{e}}{-2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{ie}}{2}.$$

例. 求留数: $f(z) = \frac{\sec z}{z^3}$, $z = 0$.

—— $\frac{1}{2}$.

求积分

例. 计算积分:

$f(z)$

$\parallel$

$$I = \int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz.$$

$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\, f(z) = -2$

$\underset{z=1}{\mathrm{Res}}\, f(z) = 2$

$I = 0$

求积分

例. 计算积分:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz.$$

—— 0.

求积分

例. 计算积分:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz.$$

$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$

—— 0.

例. 计算积分:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)} dz.$$

$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$ 可去奇点

$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z=1} \frac{\sin^2 z}{z^2} = \sin^2 1$

求积分

$I = 2\pi i \sin^2 1$

例. 计算积分:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz.$$

—— 0.

例. 计算积分:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)} dz.$$

—— $2\pi \mathrm{i} \sin^2 1$.

无穷远点处的留数

定义. 设 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在 ∞ 的某去心邻域 $0 \le r < |z| < +\infty$ 内解析,

无穷远点处的留数

定义. 设 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在 ∞ 的某去心邻域 $0 \leq r < |z| < +\infty$ 内解析，则称积分

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C^-} f(z)dz \qquad \left(C^- : |z| = \rho > r \right)$$

为函数 $f(z)$ 在 ∞ 的留数.

无穷远点处的留数

定义. 设 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 即 $f(z)$ 在 ∞ 的某去心邻域 $0 \le r < |z| < +\infty$ 内解析, 则称积分

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C^-} f(z)dz \qquad \left(C^- : |z| = \rho > r \right)$$

为函数 $f(z)$ 在 ∞ 的留数. 注意路径 C^- 取顺时针方向.

无穷远点处的留数

设 $f(z)$ 在 $r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots ,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

可得

无穷远点处的留数

设 $f(z)$ 在 $r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots ,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

可得

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C^-} f(z) dz \ =$$

无穷远点处的留数

设 $f(z)$ 在 $r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots ,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz,$$

可得

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz = -c_{-1}.$$

无穷远点处的留数

设 $f(z)$ 在 $r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

可得

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C^-} f(z) dz = -c_{-1}.$$

也就是说, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 等于

无穷远点处的留数

设 $f(z)$ 在 $r < |z| < +\infty$ 内的洛朗展式为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

可得

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C^-} f(z) dz = -c_{-1}.$$

也就是说, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 等于 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $r<|z|<+\infty$ 内的洛朗展式中 z^{-1} 项的系数变号.

无穷远点处的留数

- 已知: 函数在有限可去奇点处的留数为零.

无穷远点处的留数

- 已知: 函数在有限可去奇点处的留数为零.
- 若 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (解析点), 则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 不一定为零.

无穷远点处的留数

- 已知: 函数在有限可去奇点处的留数为零.
- 若 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (解析点), 则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 不一定为零.

  例如, $f(z) = \frac{1}{z}$ 以 $z = \infty$ 为可去奇点, 但 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) =$

无穷远点处的留数

- 已知: 函数在有限可去奇点处的留数为零.
- 若 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (解析点), 则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 不一定为零.

  例如, $f(z) = \frac{1}{z}$ 以 $z = \infty$ 为可去奇点, 但 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

无穷远点处的留数

- 已知: 函数在有限可去奇点处的留数为零.
- 若 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (解析点), 则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 不一定为零.

  例如, $f(z) = \frac{1}{z}$ 以 $z = \infty$ 为可去奇点, 但 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

定理. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有有限个孤立奇点 (包含 ∞), 则 $f(z)$ 在全体奇点处的留数的和为零.

无穷远点处的留数

- 已知: 函数在有限可去奇点处的留数为零.
- 若 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (解析点), 则 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ 不一定为零.

例如, $f(z) = \frac{1}{z}$ 以 $z = \infty$ 为可去奇点, 但 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

定理. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有有限个孤立奇点 (包含 ∞), 则 $f(z)$ 在全体奇点处的留数的和为零.

该定理说明有限孤立奇点处的留数与无穷远点处的留数可以互相转化.

无穷远点处的留数

定理. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有有限个孤立奇点 (包含 ∞), 则 $f(z)$ 在全体奇点处的留数的和为零.

无穷远点处的留数

定理. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有有限个孤立奇点 (包含 ∞), 则 $f(z)$ 在全体奇点处的留数的和为零.

证明. 设全部奇点为 $a_1, \ldots, a_n, \infty$, 以原点为心作圆周 C, 使 C 包含 $a_1, \ldots, a_n$,

无穷远点处的留数

定理. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有有限个孤立奇点 (包含 ∞), 则 $f(z)$ 在全体奇点处的留数的和为零.

证明. 设全部奇点为 $a_1, \ldots, a_n, \infty$, 以原点为心作圆周 C, 使 C 包含 $a_1, \ldots, a_n$, 由留数定理,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z),$$

$\Longrightarrow$

无穷远点处的留数

定理. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有有限个孤立奇点 (包含 ∞), 则 $f(z)$ 在全体奇点处的留数的和为零.

证明. 设全部奇点为 $a_1, \ldots, a_n, \infty$, 以原点为心作圆周 C, 使 C 包含 $a_1, \ldots, a_n$, 由留数定理,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z),$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{C^-} f(z)dz = 0,$$

i.e.

无穷远点处的留数

定理. 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上只有有限个孤立奇点 (包含 ∞)，则 $f(z)$ 在全体奇点处的留数的和为零.

证明. 设全部奇点为 $a_1, \ldots, a_n, \infty$, 以原点为心作圆周 C, 使 C 包含 $a_1, \ldots, a_n$, 由留数定理,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z),$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C^-} f(z)dz = 0,$$

$$\text{i.e.} \quad \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \qquad \square$$

无穷远点处的留数的计算

法则. 有
$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,dz \qquad = \oint_C f\left(\frac{1}{w}\right) d\left(\frac{1}{w}\right)$$

无穷远点处的留数的计算

法则. 有 $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

证明. 令 $z = \frac{1}{w}$, 则 $dz = -\frac{dw}{w^2}$, 相应地,

z 平面上无穷远点的去心邻域 $0 \leq r < |z| < +\infty$

映为 w 平面上

无穷远点处的留数的计算

法则. 有 $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

证明. 令 $z=\frac{1}{w}$, 则 $dz=-\frac{dw}{w^2}$, 相应地,

z 平面上无穷远点的去心邻域 $0\le r<|z|<+\infty$

映为 w 平面上原点的去心邻域 $0<|w|<\frac{1}{r}$,

无穷远点处的留数的计算

法则. 有 $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

证明. 令 $z = \frac{1}{w}$, 则 $dz = -\frac{dw}{w^2}$, 相应地,

z 平面上无穷远点的去心邻域 $0 \le r < |z| < +\infty$

映为 w 平面上原点的去心邻域 $0 < |w| < \frac{1}{r}$,

从而

圆周 $C : |z| = \rho > r$ 映为

无穷远点处的留数的计算

法则. 有 $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

证明. 令 $z=\frac{1}{w}$, 则 $dz=-\frac{dw}{w^2}$, 相应地,

z 平面上无穷远点的去心邻域 $0\le r<|z|<+\infty$

映为 w 平面上原点的去心邻域 $0<|w|<\frac{1}{r}$,

从而

圆周 $C:|z|=\rho>r$ 映为圆周 $\gamma:|w|=\frac{1}{\rho}<\frac{1}{r}$,

无穷远点处的留数的计算

法则. 有 $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$

证明. 令 $z=\frac{1}{w}$, 则 $dz=-\frac{dw}{w^2}$, 相应地,

z 平面上无穷远点的去心邻域 $0\le r<|z|<+\infty$

映为 w 平面上原点的去心邻域 $0<|w|<\frac{1}{r}$,

从而

圆周 $C:|z|=\rho>r$ 映为圆周 $\gamma:|w|=\frac{1}{\rho}<\frac{1}{r}$,

并且当 z 绕 C 顺时针转动一周时, w 绕 γ

无穷远点处的留数的计算

法则. 有 $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

证明. 令 $z=\frac{1}{w}$, 则 $dz=-\frac{dw}{w^2}$, 相应地,

z 平面上无穷远点的去心邻域 $0\le r<|z|<+\infty$

映为 w 平面上原点的去心邻域 $0<|w|<\frac{1}{r}$,

从而

圆周 $C:|z|=\rho>r$ 映为圆周 $\gamma:|w|=\frac{1}{\rho}<\frac{1}{r}$,

并且当 z 绕 C 顺时针转动一周时, w 绕 γ 逆时针转动一周,

无穷远点处的留数的计算

法则. 有 $$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

证明. 令 $z=\frac{1}{w}$, 则 $dz=-\frac{dw}{w^2}$, 相应地,

z 平面上无穷远点的去心邻域 $0 \leq r < |z| < +\infty$

映为 w 平面上原点的去心邻域 $0 < |w| < \frac{1}{r}$,

从而

圆周 $C : |z| = \rho > r$ 映为圆周 $\gamma : |w| = \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$,

并且当 z 绕 C 顺时针转动一周时, w 绕 γ 逆时针转动一周,

于是 $$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C^-} f(z)dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma} f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{-1}{w^2}dw$$

$$\text{i.e.}\quad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

例. 计算 $$I=\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} = -\operatorname*{Res}_{w=0} \frac{\frac{1}{w^{15}}}{(\frac{1}{w^2}+1)^2(\frac{1}{w^4}+2)^3}\cdot\frac{1}{w^2}$$

$$= -\operatorname*{Res}_{w=0} \frac{1}{w(w^2+1)^2(2w^4+1)^3}$$

$$= -\lim_{w\to 0} \frac{1}{(w^2+1)^2(2w^4+1)^3} = -1$$

$$I = 2\pi i$$

例. 计算 $I = \int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$

解. 函数 $f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z| < 4$ 内有 6 个奇点:

例. 计算 $I=\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz.$

解. 函数 $f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z|<4$ 内有 6 个奇点: 二阶极点 $\pm\mathrm{i}$, 及

例. 计算 $I = \int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$

解. 函数 $f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z| < 4$ 内有 6 个奇点: 二阶极点 $\pm \mathrm{i}$, 及三阶极点 $\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$.

例. 计算 $I = \int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$

解. 函数 $f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z| < 4$ 内有 6 个奇点: 二阶极点 $\pm \mathrm{i}$, 及三阶极点 $\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$. 要计算这 6 个奇点的留数显然太麻烦,

例. 计算 $I = \int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$

解. 函数 $f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z| < 4$ 内有 6 个奇点：二阶极点 $\pm\mathrm{i}$，及三阶极点 $\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$. 要计算这 6 个奇点的留数显然太麻烦，但应用本节二定理及法则 IV，有

$$I = 2\pi\mathrm{i}\left[-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\right] =$$

例. 计算 $I = \displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$

解. 函数 $f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z| < 4$ 内有 6 个奇点: 二阶极点 $\pm\mathrm{i}$, 及三阶极点 $\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$. 要计算这 6 个奇点的留数显然太麻烦, 但应用本节二定理及法则 IV, 有

$$I = 2\pi\mathrm{i}\left[-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\right] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

例. 计算 $I = \int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$

解. 函数 $f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z|<4$ 内有 6 个奇点: 二阶极点 $\pm\mathrm{i}$, 及三阶极点 $\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$. 要计算这 6 个奇点的留数显然太麻烦, 但应用本节二定理及法则 IV, 有

$$I = 2\pi\mathrm{i}\left[-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\right] = 2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

而

$$f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2} = \frac{\frac{1}{w^{15}}}{w^2(\frac{1}{w^2}+1)^2(\frac{1}{w^4}+2)^3} =$$

例. 计算 $I=\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz.$

解. 函数 $f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z|<4$ 内有 6 个奇点: 二阶极点 $\pm\mathrm{i}$, 及三阶极点 $\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$. 要计算这 6 个奇点的留数显然太麻烦, 但应用本节二定理及法则 IV, 有

$$I=2\pi\mathrm{i}\left[-\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

而

$$f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}=\frac{\frac{1}{w^{15}}}{w^2(\frac{1}{w^2}+1)^2(\frac{1}{w^4}+2)^3}=\frac{1}{w(w^2+1)^2(2w^4+1)^3}$$

以 $w=0$ 为

例. 计算 $I=\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz.$

解. 函数 $f(z)=\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z|<4$ 内有 6 个奇点: 二阶极点 $\pm\mathrm{i}$, 及三阶极点 $\sqrt[4]{-2}=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$. 要计算这 6 个奇点的留数显然太麻烦, 但应用本节二定理及法则 IV, 有

$$I=2\pi\mathrm{i}\left[-\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

而

$$f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}=\frac{\frac{1}{w^{15}}}{w^2(\frac{1}{w^2}+1)^2(\frac{1}{w^4}+2)^3}=\frac{1}{w(w^2+1)^2(2w^4+1)^3}$$

以 $w=0$ 为一阶极点, 其留数为 $\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right]=$

例. 计算 $I = \displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} dz.$

解. 函数 $f(z) = \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z| < 4$ 内有 6 个奇点: 二阶极点 $\pm \mathrm{i}$, 及三阶极点 $\sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$. 要计算这 6 个奇点的留数显然太麻烦，但应用本节二定理及法则 IV, 有

$$I = 2\pi\mathrm{i}\left[-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)\right] = 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right].$$

而

$$f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2} = \frac{\frac{1}{w^{15}}}{w^2(\frac{1}{w^2}+1)^2(\frac{1}{w^4}+2)^3} = \frac{1}{w(w^2+1)^2(2w^4+1)^3}$$

以 $w = 0$ 为一阶极点，其留数为 $\operatorname*{Res}_{w=0}\left[f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{1}{w^2}\right] = 1$, 可得 $I = 2\pi\mathrm{i}$. $\square$

挑战耐心. 设 $a \neq b, b \neq 0$. 计算

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin az}{z^3 \sin bz}$$

3阶极点

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin az}{\sin bz}\right)'' \quad (z \to 0)$$

挑战耐心. 设 $a \neq b, b \neq 0$. 计算

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin az}{z^3 \sin bz} = \frac{a(b^2 - a^2)}{6b}.$$

作业

第六章习题

(一): 1 (2), (4), (6), 3 (2), (4).

(1)

(2) $(\sin z)' = \cos z$, $\cos n\pi \neq 0$

即 $n\pi$ 为 $\frac{1}{\sin z}$ 1阶极点

$\Rightarrow \operatorname{Res}_{n\pi} \frac{1}{\sin z} = \lim_{z \to n\pi} \frac{(z-n\pi)}{\sin z} = \frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n$

(4) $e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} + \cdots$

$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=1} e^{\frac{1}{z-1}} = 1$

$\frac{1-t+t}{(1-t)^2}$

令 $t = \frac{1}{z}$

$e^{\frac{1}{z-1}} = e^{\frac{1}{\frac{1}{t}-1}} = e^{\frac{t}{1-t}}$

$\operatorname*{Res}_{z=\infty} = \operatorname*{Res}_{t=0} -\frac{1}{t^2} e^{\frac{t}{1-t}} = \left(-e^{\frac{t}{1-t}}\right)' \quad t \to 0$

$= -\frac{1}{(1-t)^2} e^{\frac{t}{1-t}} = -1$

(6)

$\operatorname*{Res}_{z=1} = \lim_{z\to 1} \frac{e^z}{z+1} = \frac{e}{2}$

$\operatorname*{Res}_{z=-1} = \lim_{z\to -1} \frac{e^z}{z-1} = -\frac{1}{2e}$

令 $t = \frac{1}{z}$, $f(z) = g(t) = \frac{e^{\frac{1}{t}}}{\frac{1}{t^2}-1} = \frac{t^2 e^{\frac{1}{t}}}{1-t^2}$

$\operatorname*{Res}_{z=\infty} = \operatorname*{Res}_{t=0} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2-1}$

$$= -\operatorname*{Res}_{t=0}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!}\frac{1}{t^2}+\cdots\right)\left(1+t+t^2+\cdots\right)$$

$$= -\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)$$

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$$

$$= -\frac{\sin i}{i}$$

$$= \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\cdot i}-e^{-i\cdot i}}{2i}$$

$$= -\frac{e^{-1}-e^{1}}{-2} = -\frac{e^{1}-e^{-1}}{2} = -\sinh 1$$

或 $\operatorname*{Res}_{\infty} = -\operatorname*{Res}_{\pm 1}$

$$= \frac{e^{-1}-e}{2}$$

3、

(2) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$

$z_1 = i \quad z_2 = -i$ 为 1 阶极点

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} f(z)\,dz$$

$$= \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} + \operatorname{Res}_{z=z_2}\right) f(z)$$

$$= \frac{e^{iz}}{z+i}\Big|_{z=i} + \frac{e^{iz}}{z-i}\Big|_{z=-i}$$

$$= \frac{e^{-1}}{2i} + \frac{e}{-2i}$$

$$= \frac{e^{-1}-e}{2i}$$

(4) $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n (z-b)^n}$

有 n 阶极点 a、b

$$\operatorname{Res}_{\infty} = \operatorname{Res}_{0} - \frac{1}{\left(\frac{1}{t}-a\right)^n\left(\frac{1}{t}-b\right)^n}\cdot\frac{1}{t^2}$$

$$= -\operatorname{Res}_{0} \frac{t^{2n-2}}{(1-ta)^n(1-tb)^n} \qquad n \geq 1$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0$$