LOGO

§4 正定二次型(续)

2 半正定二次型

定义 5.7 设 A 是 n 阶实对称矩阵，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，如果对任意的

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in R^n,$$

都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0$，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为半正定二次型，并称 A 为半正定矩阵。

性质 1　非退化线性替换不改变半正定性。

性质 2 A 是半正定的充分必要条件是对任意的正数 λ，$\lambda E+A$ 都是正定的。

证明 必要性。对任意的

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\neq 0,$$

$$X^T(\lambda E+A)X=\lambda X^TX+X^TAX,$$

因为 A 是半正定的，所以 $X^TAX\geq 0$。又由于 $X^TX=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，所以当 $\lambda>0$ 时，有 $\lambda X^TX>0$。这说明当 $\lambda>0$ 时，$\lambda E+A$ 是正定的。必要性得证。

充分性。因为对任意的正数λ，$\lambda E+A$都是正定的，所以$X^T(\lambda E+A)X\geq 0$。对每个固定的X，$X^T(\lambda E+A)X$关于λ是连续的，所以当$\lambda\to 0$时，有

$$X^T(\lambda E+A)X\to X^TAX\geq 0,$$

这说明A是半正定的。充分性得证。

定理 5.6 设 A 是 n 阶实对称矩阵，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，下列条件等价：

（1）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是半正定的；

（2）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 的正惯性指数与秩相等，即 A 与

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

合同；

（3）存在实矩阵 C，使得 $A=C^TC$；

证明 先证（1）与（2）等价。

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形为

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2,$$

由于非退化线性替换不改变二次型的半正定性，所以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的当且仅当 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 是半正定的，而 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 半正定当且仅当 $d_i\geq 0$，$i=1,2,\cdots,n$，即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的负惯性指数为零，它的正惯性指数与秩相等。

再证（2）推（3）。

若 A 与

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

合同，则存在可逆矩阵 P，使得

$$A = P^T\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P = P^T\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P,$$

令

$$C = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P,$$ $\Rightarrow C$ 可能不可逆

由上式可知 $A = C^T C$。

最后证（3）推（1）。

若 $A=C^TC$，则 $X^TAX=X^TC^TCX=(CX)^T(CX)\geq 0$，这说明 A 是半正定矩阵。

推论　若 A 是半正定矩阵，则 $|A|\ge 0$。

证明　若 A 是半正定矩阵，则存在矩阵 C，使得 $A=C^TC$，于是 $|A|=|C|^2\ge 0$。

注　设 A 是 n 阶方阵，A 的行标与列标相同的子式称为主子式。用行列式的性质可证

$$|\lambda E + A| = \lambda^n + \underbrace{p_1}_{tr(A)}\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n, \quad |A|$$

其中 p_i 是 A 的 i 阶主子式的和，$i=1,2,\cdots,n$。

只证明 3 阶方阵的情形，3 阶级以上的方阵可用归纳法证明。设 3 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

利用行列式的性质可得

$$
|\lambda E+A|=\begin{vmatrix}\lambda+a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & \lambda+a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & \lambda+a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}\lambda & 0 & a_{13}\\ 0 & \lambda & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & a_{12} & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & a_{32} & \lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & \lambda & 0\\ a_{31} & 0 & \lambda\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}\lambda & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & a_{13}\\ a_{21} & \lambda & a_{23}\\ a_{31} & 0 & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & \lambda\end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\lambda^3+p_1\lambda^2+p_2\lambda+p_3
$$

定理 5.7 设 A 是 n 阶实对称矩阵，那么二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是半正定的充分必要条件是 A 的所有主子式都非负。

若A为半正定

证明　必要性。设 D 是 A 的一个 k 阶主子式，它位于 A 的第 $i_1,\cdots,i_k$ 行和列，设 B 是 D 中元素所构成的矩阵，记 X 是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

中除 $x_{i1},\cdots,x_{ik}$ 外其它元素都是 0 的向量，显然有

$$(x_{i1},\cdots,x_{ik})B\begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{ik} \end{pmatrix}=X^T AX \text{，}$$

由于 A 是半正定的，所以 B 也是半正定的，从而 $D=|B|\geq 0$。

充分性。设 A 阶所有主子式都非负，A_k 是 A 的 k 阶顺序主子式所对应的矩阵，考虑 $\lambda E+A$，$\lambda E+A$ 的 k 阶顺序主子式为

$$|\lambda E_k + A_k| = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k,$$

其中 p_i 是 A_k 的 i 阶主子式的和，而 A_k 的主子式也是 A 的主子式，所以 $p_i \geq 0$，从而当 $\lambda > 0$ 时 $|\lambda E_k + A_k| > 0$，$k = 1,\cdots,n$，由此得 $\lambda E+A$ 是正定的，于是 A 是半正定的。

注 若 A 的所有顺序主子式 ≥ 0，A 不一定是半正定的，如

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

$X^T A X > 0$

$(BX)^T A (BX) = X^T (B^T A B) X \geq 0$

例 4 设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 $n \times m$ 实矩阵，证明：

（1）$B^T AB$ 是半正定矩阵；

（2）如果 B 是列满秩矩阵，则 $B^T AB$ 是正定矩阵。

证明 （1）对于任意 m 维列向量 X，令 $Y = BX$，由于 A 是正定矩阵，所以

$$X^T (B^T AB) X = (BX)^T A(BX) = Y^T AY \geq 0,$$

这说明 $B^T AB$ 是半正定矩阵。

（2）如果 B 是列满秩矩阵，则当 $X \neq 0$ 时，有 $Y = BX \neq 0$（这是因为，如果 $BX = 0$，则方程组 $BX = 0$ 有非零解，这与 B 是列满秩矩阵矛盾），从而

$$X^T(B^T AB)X = (BX)^T A(BX) = Y^T AY > 0,$$

这说明 $B^T AB$ 是正定矩阵。

特别地，$B^T B$ 是半正定矩阵。当 B 是列满秩矩阵时，$B^T B$ 是正定矩阵。

定义 5.8 设 A 是 n 阶实对称矩阵，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，如果对任意的

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in R^n,$$

都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le 0$，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为半负定二次型，并称 A 为半负定矩阵。

注 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半负定二次型当且仅当 $-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定二次型。

定义 5.9 即不是半正定的也不是半负定的实二次型称为不定二次型。

作业：12，15。

12、$A^T=A$

$$\exists\ Q^TAQ=\begin{pmatrix}E_n & \\ & -E_m\end{pmatrix}=B$$

$$|B|=(-1)^m<0$$

$$\text{令 } Y=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

$$Y^TBY<0$$

$$\Rightarrow (QY)^TA(QY)$$

15、nE

$$y_1=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$y_2=x_2$$

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}X=Y$$

$$X=PY$$

LOGO

$$f = nx^Tx - Y^T\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}Y$$

$$= nx^Tx - x^T\begin{pmatrix}1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ & \ddots & \vdots \\ & & 1\end{pmatrix}x$$

$$= nx^Tx - x^T\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}x$$

$$= x^T\begin{pmatrix}n-1 & & -1\\ & \ddots & \\ -1 & & n-1\end{pmatrix}x$$

谢谢观赏

$$(n-m)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$(n-m)\, n^{n-m-1} \qquad m=n \qquad |A|=0$$

$$\left| nI - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$$