第三章　随机变量与分布函数

第4节　多个随机变量函数的分布

李 娟

Email: juanlisdu@163.com

山东大学(威海)　数学与统计学院

授课要求：1. 会求多个随机变量的函数的分布;

2. 会求和、商的分布;

3. 熟知某些重要分布的可加性。

一、求随机变量函数的分布的一般形式：

上节中已经讨论了单个随机变量的函数的分布，本节讨论多个随机变量的函数的分布。现在来讨论求一般的随机变量函数的分布函数问题，这一类问题，一般可叙述如下：

一、求随机变量函数的分布的一般形式：

设$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为n 维随机变量。又设有k个$\xi_1,\cdots,\xi_n$的Borel函数：

$$\eta_1=f_1(\xi_1,\cdots,\xi_n),\cdots,\eta_k=f_k(\xi_1,\cdots,\xi_n),$$

其中$f_i(\xi_1,\cdots,\xi_n)(i=1,\cdots,k)$为$n$元Borel函数。现求随机向量$(\eta_1,\cdots,\eta_k)$的联合分布函数。

解：这问题的一般解答如下：......

表面看来已经解决了全部问题。但是进一步考虑着手于实际计算时，要真的把$F_{\eta_1,\cdots,\eta_k}(y_1,\cdots,y_k)$的解析表达式求出来，却往往并不容易。原因在于

$$D:=\{(x_1,\cdots,x_n)|f_i(x_1,\cdots,x_n)<y_i,i=1,\cdots,k\}$$

形式往往很复杂，因此引起计算上的困难，下面仅讨论几种重要特殊的情形。

二、两个离散型随机变量函数的分布列:

1、一般形式: 设(ξ,η)为二维离散型随机变量，且其分布列为:
$P\{\xi=x_i,\eta=y_i\}=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$ 设$z=f(x,y)$为实变量x,y的Borel函数。试求$\zeta=f(\xi,\eta)$的分布列。

设ζ的可能取值为$z_i,i=1,2,\cdots$。令$C_i=\{(x_j,y_k):f(x_j,y_k)=z_i\}$，$i=1,2,\cdots$. 则$\zeta$的分布列为:

$$P\{\zeta=z_i\}=P\{(\xi,\eta)\in C_i\}=\sum_{(x_j,y_k)\in C_i}P\{\xi=x_j,\eta=y_k\},\ i=1,2,\cdots$$

若ξ,η相互独立，则

$$P\{\zeta=z_i\}=\sum_{(x_j,y_k)\in C_i}P\{\xi=x_j\}P\{\eta=y_k\},\ i=1,2,\cdots$$

二、两个离散型随机变量函数的分布列：

例① 设(ξ, η)的分布列为：

$\eta \setminus \xi$	-1	1	2
-1	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

求：(1) $\xi + \eta$; (2) $\xi - \eta$ 的分布列。

二、两个离散型随机变量函数的分布列：

2、某些重要分布的可加性： $P_\xi(x)=\frac{\lambda_1^x}{x!}e^{-\lambda_1}$ $P_\eta(x)=\frac{\lambda_2^x}{x!}e^{-\lambda_2}$

(1) 设随机变量$\xi\sim P(\lambda_1)$，$\eta\sim P(\lambda_2)$，且ξ，η相互独立，则

$\xi+\eta\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$。 $P_{\xi+\eta}(x)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{x-k}}{(x-k)!}=P(\lambda_1+\lambda_2)$

证明：

(2) 设随机变量$\xi\sim b(n_1,p)$，$\eta\sim b(n_2,p)$，且ξ，η相互独立，则

$\xi+\eta\sim b(n_1+n_2,p)$。

证明：

注1： 设随机变量$\xi_i\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$，$i=1,\cdots,n$，且$\xi_1,\cdots,\xi_n$相互独立，则$\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\sim b(n,p)$。

注2： 并非所有分布均具有可加性。（例：几何分布与Pascal分布。）

三、两个连续型随机变量函数的分布：

1、一般形式：

设二维连续型随机变量(ξ,η)的概率密度函数为$p(x,y)$，$\forall x$，$y \in \mathbf{R}$。设$Z=f(x,y)$为实变量x，y的Borel函数。求$\zeta=f(\xi,\eta)$的分布函数或概率密度函数。

$F_\zeta(r) = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^r e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho\, d\rho = \int_0^r d e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$

$= 1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$

解：

例② 设(ξ,η)的概率密度函数为$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \forall x,y\in\mathbf{R}$，求$\zeta=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$的概率密度函数。

$p_\zeta(r) = \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$

解：

注：$R(r)=re^{-\frac{r^2}{2}}$，$r\geq 0$, (3.3.41)—瑞利（Rayleigh）分布。

四、和分布：

定理: 设(ξ,η)的概率密度函数为$p(x,y)$, $\forall x$, $y\in\mathbf{R}$, 则$\zeta=\xi+\eta$的概率密度函数为：

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)dy,\ \forall z\in\mathbf{R}^1.$$

特别地，若ξ与η相互独立，则

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)p_\eta(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(z-y)p_\eta(y)dy,\ \forall z\in\mathbf{R}^1.$$

右边两个积分称为函数p_ξ和p_η的卷积，记为$p_\xi * p_\eta$, i.e.,

$$p_\zeta(z)=p_\xi * p_\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)p_\eta(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(z-y)p_\eta(y)dy,$$

$\forall z\in\mathbf{R}^1$.

证明：

四、和分布：

$x-y=z$

推论: $p_{\xi-\eta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z+y,y)dy,\ \forall z\in\mathbf{R}^1.$

特别地，若ξ与η相互独立，则

$$p_{\xi-\eta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)p_\eta(x-z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(z+y)p_\eta(y)dy,\ \forall z\in\mathbf{R}^1.$$

例③ 设ξ_1，ξ_2相互独立，且皆取值于$[0,1]$区间，服从均匀分布，试求$\xi_1+\xi_2$的概率密度函数。

解: $p_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi_1}(z-y)p_{\xi_2}(y)dy$

$=\int_E dy$

$E:\begin{cases} z-y\in[0,1] \\ y\in[0,1] \end{cases} = [0,1]\cap[z-1,z]$

五、某些重要分布的可加性：

$$\Rightarrow p_{\xi_1+\xi_2}(z)=\begin{cases} z & z\in(0,1) \\ 2-z & z\in(1,2] \end{cases}$$

1、设随机变量$\xi \sim N(0,1)$, $\eta \sim N(0,1)$, ξ, η相互独立，则

$\xi+\eta \sim N(0,2)$.

证明：

推广：①设$\xi_1,\cdots,\xi_n$相互独立，且$\xi_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,\cdots,n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i \sim N(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2).$$

五、某些重要分布的可加性：

②（有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布）设$\xi_1,\cdots,\xi_n$相互独立，且$\xi_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,\cdots,n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i\xi_i+b_i) \sim N(\sum_{i=1}^{n}(a_i\mu_i+b_i),\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2).$$

证明：

注：ξ,η相互独立，$\xi \sim N(0,1),\eta \sim N(0,1)$,则$\xi-\eta \sim N(0,2)$.

证明：两种方法。

五、某些重要分布的可加性：

2、若$\xi \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$，$\eta \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$，且$\xi$，$\eta$相互独立，则

$\xi + \eta \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$。

证明：利用欧拉积分。

推广：设$\xi_1, \cdots, \xi_n$相互独立，且$\xi_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$，$i = 1, \cdots, k$，则

$\sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i \sim \Gamma(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i, \beta)$。

注：$Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$为指数分布，$\xi_1 \sim \Gamma(1, \lambda)$，$\xi_2 \sim \Gamma(1, \lambda)$，

ξ_1与ξ_2独立，则$\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$，不再是指数分布。

推论：$\xi \sim \chi^2(n_1)$，$\eta \sim \chi^2(n_2)$，ξ，η独立，则$\xi + \eta \sim \chi^2(n_1 + n_2)$。

六、商的分布：

z N

$(\xi,\eta) \Rightarrow (\frac{\xi}{\eta}, \eta)$

定理： 若(ξ,η)的概率密度函数为$p(x,y)$，则$\zeta=\frac{\xi}{\eta}$（设$\eta\neq 0$）的概率密度函数为

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(yz,y)|y|dy,\ \forall z\in \mathbf{R}^1. \quad (3.3.23)$$

特别地，若ξ,η相互独立，则

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(yz)p_\eta(y)|y|dy,\ \forall z\in \mathbf{R}^1.$$

证明：

注： $p_{\xi\eta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_{(\xi,\eta)}(x,\frac{z}{x})\frac{1}{|x|}dx,\ \forall z\in \mathbf{R}^1.$

推论： 若ξ,η独立，则$p_{\xi\eta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(\frac{z}{y})p_\eta(y)\frac{1}{|y|}dy, \forall z\in \mathbf{R}^1.$

六、商的分布：

例③ 设ξ、η独立，且$\xi \sim N(0,1)$，$\eta \sim N(0,1)$，求$\frac{\xi}{\eta}$的分布。

注： 若$p_\xi(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{(x-b)^2+a^2}$，$\forall x \in \mathbf{R}^1$，则称$\xi$服从参数为$a, b$ 的Cauchy分布，i.e.，$\xi \sim C(a,b)$。若$a=1$，$b=0$，则称$C(0,1)$为标准Cauchy分布。 (3.3.13)

例④ 设ξ，η相互独立，其概率密度函数分别为：

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [1,3]; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$p_\eta(x) = \begin{cases} e^{-(y-2)}, & y \in [2,+\infty); \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求$p_{\frac{\xi}{\eta}}(z)$。

七、随机向量的变换：

若$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的概率密度函数为$p(x_1,\cdots,x_n)$，求$\eta_1=f_1(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $\cdots,\eta_m=f_m(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的分布，这时有：

$$F(y_1,\cdots,y_m)=P\{\eta_1<y_1,\cdots,\eta_m<y_m\}$$

$$=\int\cdots\int\limits_{f_1(x_1,\cdots,x_n)<y_1,\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n)<y_m} p(x_1,\cdots,x_n)dx_1,\cdots,dx_n. \qquad (3.3.31)$$

显然，这是最一般的场合。当$m=1$时，便是随机向量的函数的情形。当$m=n=1$时，便得到单个随机变量的函数的情形。下面考虑另一个重要的特殊情形，即当$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$与$(\eta_1,\cdots,\eta_m)$有一一对应变换关系时，当然这时$n=m$必须成立。

七、随机向量的变换：

若对$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$, $i = 1 \cdots, n$, 存在唯一的反函数 $x_i = x_i(y_1, \cdots, y_n)$, $i = 1 \cdots, n$, 而且$(\eta_1, \cdots, \eta_n)$的概率密度函数为$q(y_1, \cdots, y_n)$，则

$$F(y_1, \cdots, y_n) = \int_{u_1<y_1, \cdots, u_n<y_n} \cdots \int q(u_1, \cdots, u_n) du_1, \cdots, du_n. \qquad (3.3.32)$$

比较$m = n$时的(3.3.31)和(3.3.32)可知：

$$q(y_1, \cdots, y_n) =$$

$$\begin{cases} p(x_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, x_n(y_1, \cdots, y_n))|J|, & \\ & \text{若} y_1, \cdots, y_n \text{属于} f_1, \cdots, f_n \text{的值域;} \quad (3.3.33) \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

七、随机向量的变换：

其中J为坐标变换的Jacobi行列式：

$$J = \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \tag{3.3.34}$$

这里，我们假定上述偏导数存在而且连续。

公式(3.3.33)对应于单变量场合的公式(3.3.12)，也可以导出对应于公式(3.3.14)的多变量场合的公式。这留给读者作为练习。

注：在计算随机变量的函数的分布函数或概率密度函数时，常需要作积分变量替换去把它算出。

七、随机向量的变换：

定理 设(ξ_1,ξ_2)的联合概率密度函数为$p(x_1,x_2)$。若对于函数

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,x_2), \\ y_2 = f_2(x_1,x_2). \end{cases}$$ 满足下述条件：

1、存在唯一的反函数$\begin{cases} x_1 = h_1(y_1,y_2), \\ x_2 = h_2(y_1,y_2). \end{cases}$

2、有一切连续的一阶偏导数，记

$$J = \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}.$$

则 $\eta_1 = f_1(\xi_1,\xi_2), \eta_2 = f_2(\xi_1,\xi_2)$的联合概率密度函数为

$p_{(\xi_1,\xi_2)}(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))|J|$，若$y_1$，$y_2$属于$f_1$，$f_2$的值域。

$= p_{\eta_1,\eta_2}(y_1,y_2)$

证明：

例① 求$\zeta=\xi+\eta$的概率密度函数。

例② 求$\zeta=\frac{\xi}{\eta}$的概率密度函数。

例③ 求$\zeta=\xi\cdot\eta$的概率密度函数。

八、χ^2–分布，t–分布，F–分布：

1、χ^2–分布：

(1) 定义： 若ξ的概率密度函数为：

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{其它}; \end{cases} \qquad (3.3.11)$$

则称ξ服从自由度为n的χ^2–分布，记作$\xi \sim \chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

(2) 性质： ① 若$\xi \sim N(0,1)$，则$\xi^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(1)$.

② 假设ξ, η相互独立，$\xi \sim \chi^2(m)$, $\eta \sim \chi^2(n)$，则$\xi + \eta \sim \chi^2(n+m)$.

证明：

③ 若$\xi_1, \cdots, \xi_n$相互独立同分布(i.i.d.)于$N(0,1)$，则$\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sim \chi^2(n)$。

若$\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \cdots, n$, 且$\xi_1, \cdots, \xi_n$相互独立，则
$\sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{\xi_i - \mu_i}{\sigma_i})^2 \sim \chi^2(n)$.

八、χ^2–分布，t–分布，F–分布：

注1： $p_{\frac{\chi^2}{n}}(x) = \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{nx}{2}}, x \geq 0.$ $= \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$

证明：

注2： $p_{\sqrt{\frac{\chi^2}{n}}}(x) = \frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{n-1} e^{-\frac{nx^2}{2}}, x \geq 0.$

证明：

2、$t-$分布：

(1) 定义： 若ξ的概率密度函数为：

$$p_\xi(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, \ \forall x \in \mathbf{R}. \qquad (3.3.40)$$

则称ξ服从自由度为n的$t-$分布，记作：$\xi \sim t(n)$.

(2) 性质： 设ξ，η相互独立，$\xi \sim N(0,1)$，$\eta \sim \chi^2(n)$，则$\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}} \sim t(n)$.

$$p_{(\xi,\eta)}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x_2^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x_2}{2}}$$

证明：

（例8（令$S=\eta$，$T=\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}}$，先求$(S,T)$的联合分布。））

$$T^2 = \frac{n\xi^2}{S} \qquad \xi^2 = \frac{ST^2}{n} \qquad \xi = \pm\sqrt{\frac{S}{n}}\,T \qquad \left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{y_1}}y_2 & \sqrt{\frac{y_1}{n}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{y_1}{n}}$$

八、χ^2–分布，t–分布，F–分布：

$$p_{(\xi,\eta)}(y_1,y_2)=p_{(\xi,\eta)}\left(t\sqrt{\frac{y_1}{n}}y_2,\ y_1\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1y_2^2}{2n}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y_1^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y_1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{y_1}{n}}$$

$$=\frac{2}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y_1^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{y_1}{2}\left(1+\frac{y_2^2}{n}\right)}$$

注1： $t(1)=\frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2})}(\frac{x^2}{1}+1)^{-1}=\frac{1}{\pi}(1+x^2)^{-1}=C(0,1)$;

注2： $t(n)$的概率密度函数为偶函数，当$n>30$时，t–分布与$N(0,1)$二者相差无几。

$$=\frac{\xi}{\sqrt{\eta^2/1}}$$

例： $\xi\sim N(0,1),\eta\sim N(0,1),\xi,\eta$独立，则$\frac{\xi}{|\eta|}\sim t(1)=C(1,0)$.

$$p_T(y_2)=\frac{2}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}y_1^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{y_1}{2}\left(1+\frac{y_2^2}{n}\right)}$$

3、F−分布：

(1) 定义： 若ξ的概率密度函数为：

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} n^{\frac{n}{2}} \cdot m^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{n+m}{2}}}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \tag{3.3.39}$$

则称ξ服从自由度为m，n的F−分布，记作$\xi \sim F(m,n)$.

(2) 性质： ① 若$\xi \sim \chi^2(m), \eta \sim \chi^2(n)$，且$\xi$，$\eta$相互独立，则 $\frac{\xi/m}{\eta/n} \sim F(m,n)$.

$\xi+\eta \sim \chi^2(m+n)$

证明：

（**例7：** 先求$\alpha = \xi + \eta$，$\beta = \frac{\xi/m}{\eta/n}$的联合概率密度函数.）

独立

② $F(m,n)=\frac{1}{F(n,m)}$.

证明：

EX：设$\xi_1,\cdots,\xi_n$ i.i.d.$N(0,1)$，则$\frac{\xi_1}{|\xi_2|}\sim ?$; $\frac{\xi_1^2}{\xi_2^2}\sim ?$; $\frac{\sum_{i=1}^{8}\frac{\xi_i^2}{8}}{\sum_{i=9}^{n}\frac{\xi_i^2}{n-8}}\sim ?$;

$\frac{\xi_n}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}{n-1}}}\sim ?$.

$\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_2^2/1}}=t(1)$

$F(1,1)$

$F\left(\frac{8}{2},\frac{8}{2}\right)$ / $F\left(\frac{n-9}{2},\frac{n-8}{2}\right)$

例6. 若(ξ_1,ξ_2)的概率密度函数为$p(x_1,x_2)$，而$\eta_1=a\xi_1+b\xi_2$, $\eta_2=c\xi_1+d\xi_2$. 这里$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，试求$(\eta_1,\eta_2)$的概率密度函数$q(y_1,y_2)$.

解：

$q(y_1,y_2)=P\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}\right)\left|\frac{1}{ad-bc}\right|$

九*、关于顺序统计量的若干分布：

若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是相互独立的随机变量，具有相同的分布函数$F(x)$和概率密度函数$p(x)$，而ξ_n^*及ξ_1^*相当于把$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 按大小顺序重新排列为：$\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_n^*$, 的末项和首项，它们在统计中有重要应用。下面讨论几种与它们有关的分布。

1、首先求极大值ξ_n^*的分布函数：

$$P\{\xi_n^*<x\}=P\{\max\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}<x\}=P\{\xi_1<x,\xi_2<x,\cdots,\xi_n<x\}=P\{\xi_1<x\}\cdots P\{\xi_n<x\}=[F(x)]^n. \tag{3.3.25}$$

2、其次求极小值ξ_1^*的分布函数：

$P\{\xi_1^*\geq x\}=P\{\min\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}\geq x\}=P\{\xi_1\geq x,\xi_2\geq x,\cdots,\xi_n\geq x\}=P\{\xi_1\geq x\}\cdots P\{\xi_n\geq x\}=[1-F(x)]^n$. 因此，

$$P\{\xi_1^*<x\}=1-[1-F(x)]^n. \tag{3.3.26}$$

3、进一步讨论(ξ_1^*, ξ_n^*)的联合分布：

记$G(x,y) = P\{\xi_1^* < x, \xi_n^* < y\}$.

若$x \geq y$，则$G(x,y) = P\{\xi_1^* < x, \xi_n^* < y\} = P\{\xi_n^* < y\} = [F(y)]^n$,

若$x < y$，则$G(x,y) = P\{\xi_1^* < x, \xi_n^* < y\} = P\{\xi_n^* < y\} - P\{\xi_1^* \geq x,$
$\xi_n^* < y\} = [F(y)]^n - [F(y) - F(x)]^n$;

其联合概率密度函数为：

$$q(x,y) = \begin{cases} 0, & x \geq y; \\ n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2} \cdot p(x) \cdot p(y), & x < y. \end{cases} \quad (3.3.29)$$

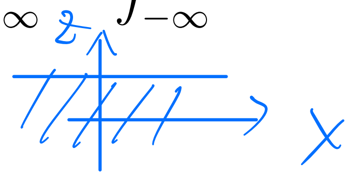
九*、关于顺序统计量的若干分布：

4、最后，来求极差$R=\xi_n^*-\xi_1^*$的概率密度函数$f_R(r)$.：

显然，对于$r\le 0$，$f_R(r)=0$; 若$r>0$, 则

$$P\{R<r\}=\iint\limits_{y-x<r} q(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dx[\int_{-\infty}^{r+x}q(x,y)dy]=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx[\int_{-\infty}^{r}q(x,x+z)dz]=\int_{-\infty}^{r}dz[\int_{-\infty}^{+\infty}q(x,x+z)dx]$$。因此，



$$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}q(x,x+r)dx$$

$$=n(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty}[F(x+r)-F(x)]^{n-2}\cdot p(x)p(x+r)dx. \qquad (3.3.30)$$

极值分布在统计中常被用到，在实际应用中，极值分布与“百年一遇”等概念经常出现在灾害性天气预报中，例如暴雨，洪水预报，以及水库、桥梁等大型工程建筑规范中。

定理3.3.2. 若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$为相互独立的随机变量，则$f_1(\xi_1), \cdots, f_n(\xi_n)$也相互独立，这里$f_i(i = 1, \cdots, n)$是任意的一元Borel函数。

证明：

定理的结论在直观上是明显的，但是定理的证明中却需要两次用到未证明的论断(3.2.37),其中第一次用来指明对$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$的有关概率可以化为乘积的形式，另一次用来说明最后的等式表明$f_1(\xi_1), \cdots, f_n(\xi_n)$是相互独立的，且第一次是难以避免的。

这个结果可以推广到随机向量的场合。

十、随机变量函数的独立性：

例7说明，即使由相同的随机变量构成的不同函数也可能是独立的，这种情况在概率论与数理统计中相当重要，下面再讨论一些例子。

例9： 若ξ与η是相互独立的随机变量，均服从$N(0,1)$，试证化为极坐标后，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$与$\varphi=arctg(\frac{\eta}{\xi})$($\varphi$取值于$[0,2\pi]$),是相互独立的。

解：

$p=\frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}}$

注： 这个结果常被用来产生服从正态分布的随机数。做法如下：产生相互独立的$[0,1]$均匀分布的随机数U_1，U_2，令

$$\xi=(-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi U_2，\ \eta=(-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi U_2，$$

则ξ与η是相互独立的$N(0,1)$随机数。

十、随机变量函数的独立性：

例10：若(ξ_1,ξ_2)服从二元正态分布(3.2.22)，其中$\mu_1=\mu_2=0$。
令$\eta_1=\xi_1\cos\alpha+\xi_2\sin\alpha$，$\eta_2=-\xi_1\sin\alpha+\xi_2\cos\alpha$，这里$0\le\alpha\le 2\pi$，是某个角度。我们来求$(\eta_1,\eta_2)$的概率密度函数$q(u,v)$.
这里可直接用例6的结果。其中$J=1$，因此
$q(u,v)=p(u\cos\alpha-v\sin\alpha,u\sin\alpha+v\cos\alpha)=$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(Au^2-2Buv+Cv^2)\}, \tag{3.3.43}$$

其中$A=...;B=...;C=....$

由(3.3.43)可看出二元正态向量(ξ_1,ξ_2)经坐标旋转而得到的随机向量(η_1,η_2)仍服从正态分布。进一步，若选α使得$\tan 2\alpha=\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}$，则$B=0$，因此$\eta_1$ 与η_2 独立。这说明二元正态分布密度可经适当的坐标旋转化为两个正态分布密度之积。利用正交变换把多维正态变量化作独立正态分量，在数理统计中有重要应用。