第三章 复积分

§2 柯西积分定理

李太玉、孙海伟

山东大学(威海)
数学与统计学院

Spring Semester, 2022

设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在(单或多连通)区域 D 内解析, C 为 D 内可求长简单闭曲线, 其所围区域 Ω 含于 D.

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在(单或多连通)区域 D 内解析, C 为 D 内可求长简单闭曲线, 其所围区域 Ω 含于 D.

由定理 3.1, 有

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C udx-vdy+\mathrm{i}\oint_C vdx+udy.$$

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在(单或多连通)区域 D 内解析, C 为 D 内可求长简单闭曲线, 其所围区域 Ω 含于 D.

由定理 3.1, 有

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C udx-vdy+\mathrm{i}\oint_C vdx+udy.$$

若 $u(x,y),v(x,y)$ 的一阶偏导数连续, 则由格林公式有

$$\oint_C vdx+udy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0,$$
$$\oint_C udx-vdy=\iint_\Omega\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

设 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在(单或多连通)区域 D 内解析, C 为 D 内可求长简单闭曲线, 其所围区域 Ω 含于 D.

由定理 3.1, 有

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + \mathrm{i}\oint_C vdx + udy.$$

若 $u(x,y), v(x,y)$ 的一阶偏导数连续, 则由格林公式有

$$\oint_C vdx + udy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$
$$\oint_C udx - vdy = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

从而

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

- 上述推导需假定：$u(x,y), v(x,y)$ 的一阶偏导数连续;

- 上述推导需假定: $u(x,y), v(x,y)$ 的一阶偏导数连续;
- 解析的等价命题 I:

  $f(z)$ 解析 $\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可微且满足柯西-黎曼方程;

- 上述推导需假定: $u(x,y), v(x,y)$ 的一阶偏导数连续;
- 解析的等价命题 I:

  $f(z)$ 解析 $\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可微且满足柯西-黎曼方程;
- " $u(x,y), v(x,y)$ 的一阶偏导数连续"

  强于

  " $u(x,y), v(x,y)$ 可微";

- 上述推导需假定: $u(x,y), v(x,y)$ 的一阶偏导数连续;
- 解析的等价命题 I:

  $f(z)$ 解析 $\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可微且满足柯西-黎曼方程;
- " $u(x,y), v(x,y)$ 的一阶偏导数连续"

  强于

  " $u(x,y), v(x,y)$ 可微";
- 下面即将学习的柯西-古萨定理告诉我们:

  将" u, v 的一阶偏导数连续" 去掉, 前述结论照样成立.

柯西积分定理

定理 (柯西-古萨). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线, 则

可去

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

柯西积分定理

定理 (柯西-古萨). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线, 则 (C无重点.)

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

推论 1. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长闭曲线 (不必是简单的), 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

柯西积分定理

定理 (柯西-古萨). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

推论 1. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长闭曲线 (不必是简单的), 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证. C 总是可以看成区域 D 内有限多条简单闭曲线衔接而成. 再由积分对路径的可加性及柯西-古萨定理, 即证.

柯西积分定理

定理 (柯西-古萨). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

推论 2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是连接点 z_1 与 z_2 的任意一条可求长简单曲线、且 $C \subset D$,

柯西积分定理

定理 (柯西-古萨). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

推论 2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是连接点 z_1 与 z_2 的任意一条可求长简单曲线、且 $C \subset D$, 则 $f(z)$ 沿 C 的积分与路线 C 无关, 只与起点 z_1 和终点 z_2 有关.

柯西积分定理

定理 (柯西-古萨). 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

推论 2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是连接点 z_1 与 z_2 的任意一条可求长简单曲线、且 $C \subset D$, 则 $f(z)$ 沿 C 的积分与路线 C 无关, 只与起点 z_1 和终点 z_2 有关.

此时, 积分 $\int_C f(z)dz$ 可记作

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

柯西积分定理

推论 2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是连接点 z_1 与 z_2 的任意一条可求长简单曲线、且 $C \subset D$, 则 $f(z)$ 沿 C 的积分与路线 C 无关, 只与起点 z_1 和终点 z_2 有关.

柯西积分定理

推论 2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是连接点 z_1 与 z_2 的任意一条可求长简单曲线、且 $C \subset D$, 则 $f(z)$ 沿 C 的积分与路线 C 无关, 只与起点 z_1 和终点 z_2 有关.

证. 设 C_1 和 C_2 是 D 内连接起点 z_1 与终点 z_2 的任意两条可求长简单曲线, 则 $C_1 \cup C_2^-$ 就衔接成 D 内的一条简单闭曲线,

柯西积分定理

推论 2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是连接点 z_1 与 z_2 的任意一条可求长简单曲线、且 $C \subset D$, 则 $f(z)$ 沿 C 的积分与路线 C 无关, 只与起点 z_1 和终点 z_2 有关.

证. 设 C_1 和 C_2 是 D 内连接起点 z_1 与终点 z_2 的任意两条可求长简单曲线, 则 $C_1 \cup C_2^-$ 就衔接成 D 内的一条简单闭曲线, 由柯西-古萨定理知

$$0 = \oint_{C_1 \cup C_2^-} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz,$$

柯西积分定理

推论 2. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是连接点 z_1 与 z_2 的任意一条可求长简单曲线、且 $C \subset D$, 则 $f(z)$ 沿 C 的积分与路线 C 无关, 只与起点 z_1 和终点 z_2 有关.

证. 设 C_1 和 C_2 是 D 内连接起点 z_1 与终点 z_2 的任意两条可求长简单曲线, 则 $C_1 \cup C_2^-$ 就衔接成 D 内的一条简单闭曲线, 由柯西-古萨定理知

$$0 = \oint_{C_1 \cup C_2^-} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz,$$

从而

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz. \qquad \square$$

三角形周线上的柯西-古萨定理. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, Δ 是 D 内任意一个三角形区域的边界闭曲线, 则

$$\oint_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

三角形周线上的柯西-古萨定理. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, Δ 是 D 内任意一个三角形区域的边界闭曲线, 则

$$\oint_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

推论 3. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, P 是 D 内任意一条简单闭折线, 则

$$\oint_{P} f(z)dz = 0.$$

三角形周线上的柯西-古萨定理. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, Δ 是 D 内任意一个三角形区域的边界闭曲线, 则

$$\oint_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

推论 3. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, P 是 D 内任意一条简单闭折线, 则

$$\oint_{P} f(z)dz = 0.$$

证. 将 P 的折点两两连接作对角线, 则这些对角线把以 P 为边界的多角形分成有限个三角形(边界闭曲线依次记为$\Delta_1, \ldots, \Delta_n$), 沿每条对角线, 积分按相反的方向取了两次, 恰好相互抵消.

三角形周线上的柯西-古萨定理. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, Δ 是 D 内任意一个三角形区域的边界闭曲线, 则

$$\oint_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

推论 3. 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, P 是 D 内任意一条简单闭折线, 则

$$\oint_{P} f(z)dz = 0.$$

证. 将 P 的折点两两连接作对角线, 则这些对角线把以 P 为边界的多角形分成有限个三角形(边界闭曲线依次记为Δ_1, $\ldots, \Delta_n$), 沿每条对角线, 积分按相反的方向取了两次, 恰好相互抵消. 于是由上述定理, 有

$$\oint_{P} f(z)dz = \left\{ \oint_{\Delta_1} + \cdots + \oint_{\Delta_n} \right\} f(z)dz = 0. \qquad \square$$

引理 3.1. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数, C 是 D 内的可求长曲线,

引理 3.1. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数, C 是 D 内的可求长曲线, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的折线 P, 使得

$$\left|\int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

引理 3.1. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数, C 是 D 内的可求长曲线, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的折线 P, 使得

$$\left| \int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

柯西-古萨定理的证明. 由引理知, 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的闭折线 P, 使得

$$\left| \oint_C f(z)dz - \oint_P f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

引理 3.1. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数, C 是 D 内的可求长曲线, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的折线 P, 使得

$$\left|\int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

柯西-古萨定理的证明. 由引理知, 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的闭折线 P, 使得

$$\left|\oint_C f(z)dz - \oint_P f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

而由推论 3, $\oint_P f(z)dz = 0$, 因此有 $$\left|\oint_C f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

引理 3.1. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数, C 是 D 内的可求长曲线, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的折线 P, 使得

折线逼近

$$\left| \int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

柯西-古萨定理的证明. 由引理知, 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的闭折线 P, 使得

$$\left| \oint_C f(z)dz - \oint_P f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

而由推论 3, $\oint_P f(z)dz = 0$, 因此有 $$\left| \oint_C f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

由于 ε 可以任意小, 故必 $$\oint_C f(z)dz = 0. \qquad \square$$

两个待证明命题: 见板书

引理 3.1. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数, C 是 D 内的可求长曲线, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的折线 P, 使得

$$\left| \int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

三角形周线上的柯西-古萨定理. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, Δ 是 D 内任意一个三角形区域的边界闭曲线, 则

$$\oint_\Delta f(z)dz = 0.$$

两个待证明命题: 见板书

引理 3.1. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数, C 是 D 内的可求长曲线, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在一条折点在 C 上、完全位于 D 内的折线 P, 使得

$$\left|\int_C f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| < \varepsilon.$$

三角形周线上的柯西-古萨定理. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, Δ 是 D 内任意一个三角形区域的边界闭曲线, 则

$$\oint_\Delta f(z)dz = 0.$$

作业: 证明矩形周线上的柯西-古萨定理.

柯西-古萨定理的等价命题

柯西-古萨定理(定理 3.2)与下面的定理等价.

定理 3.4. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

柯西-古萨定理的等价命题

柯西-古萨定理(定理 3.2)与下面的定理等价.

定理 3.4. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证明. (1) 定理 3.2 $\Longrightarrow$ 定理 3.4 :

由定理 3.4 的假设,

柯西-古萨定理的等价命题

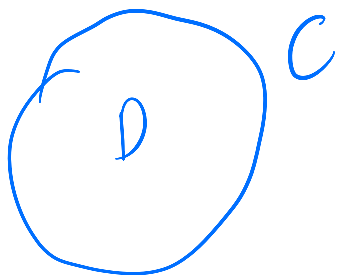
柯西-古萨定理(定理 3.2)与下面的定理等价.

定理 3.4. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证明. (1) 定理 3.2 $\Longrightarrow$ 定理 3.4 :

由定理 3.4 的假设, $f(z)$ 必在 $\mathbb{C}$ 上一个含 $\overline{D}$ 的单连通区域 G 上解析, 而 $C = \partial D \subset G$,



柯西-古萨定理的等价命题

柯西-古萨定理(定理 3.2)与下面的定理等价.

定理 3.4. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证明. (1) 定理 3.2 $\Longrightarrow$ 定理 3.4 :

由定理 3.4 的假设, $f(z)$ 必在 $\mathbb{C}$ 上一个含 $\overline{D}$ 的单连通区域 G 上解析, 而 $C = \partial D \subset G$, 故由定理 3.2 知 $\oint_C f(z)dz = 0$.

柯西-古萨定理的等价命题

柯西-古萨定理(定理 3.2)与下面的定理等价.

定理 3.4. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 则

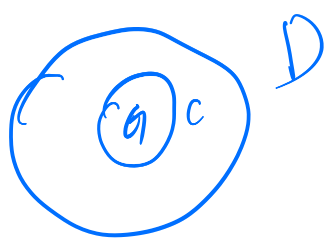
$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证明. (1) 定理 3.2 $\Longrightarrow$ 定理 3.4:

由定理 3.4 的假设, $f(z)$ 必在 $\mathbb{C}$ 上一个含 $\overline{D}$ 的单连通区域 G 上解析, 而 $C = \partial D \subset G$, 故由定理 3.2 知 $\oint_C f(z)dz = 0$.

(2) 定理 3.4 $\Longrightarrow$ 定理 3.2:

由定理 3.2 的假设:



柯西-古萨定理的等价命题

柯西-古萨定理(定理 3.2)与下面的定理等价.

定理 3.4. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证明. (1) 定理 3.2 $\Longrightarrow$ 定理 3.4 :

由定理 3.4 的假设, $f(z)$ 必在 $\mathbb{C}$ 上一个含 $\overline{D}$ 的单连通区域 G 上解析, 而 $C = \partial D \subset G$, 故由定理 3.2 知 $\oint_C f(z)dz = 0$.

(2) 定理 3.4 $\Longrightarrow$ 定理 3.2 :

由定理 3.2 的假设: $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线.

柯西-古萨定理的等价命题

柯西-古萨定理(定理 3.2)与下面的定理等价.

定理 3.4. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证明. (1) 定理 3.2 $\Longrightarrow$ 定理 3.4 :

由定理 3.4 的假设, $f(z)$ 必在 $\mathbb{C}$ 上一个含 $\overline{D}$ 的单连通区域 G 上解析, 而 $C = \partial D \subset G$, 故由定理 3.2 知 $\oint_C f(z)dz = 0$.

(2) 定理 3.4 $\Longrightarrow$ 定理 3.2 :

由定理 3.2 的假设: $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线. 现令 G 为 C 之内部, 即 $C = \partial G$, 则 $f(z)$ 必在闭区域 $\overline{G} \subset D$ 上解析,

柯西-古萨定理的等价命题

柯西-古萨定理(定理 3.2)与下面的定理等价.

定理 3.4. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证明. (1) 定理 3.2 $\Longrightarrow$ 定理 3.4 :

由定理 3.4 的假设, $f(z)$ 必在 $\mathbb{C}$ 上一个含 $\overline{D}$ 的单连通区域 G 上解析, 而 $C = \partial D \subset G$, 故由定理 3.2 知 $\oint_C f(z)dz = 0$.

(2) 定理 3.4 $\Longrightarrow$ 定理 3.2 :

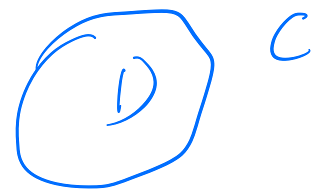
由定理 3.2 的假设: $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内任意一条可求长简单闭曲线. 现令 G 为 C 之内部, 即 $C = \partial G$, 则 $f(z)$ 必在闭区域 $\overline{G} \subset D$ 上解析, 从而 $\oint_C f(z)dz = 0$.

柯西-古萨定理的推广

定理 3.4 的推广:

定理 3.5. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$



柯西-古萨定理的推广

定理 3.4 的推广:

定理 3.5. 设区域 D 是可求长简单闭曲线 C 的内部, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证明. 可参见方企勤《复变函数教程》(北京大学出版社), p.80, 定理2: 讨论了单位圆的情形;

一般情形可见普里瓦洛夫《复变函数引论》, p.167, §4.2.7 & 8. □

柯西-古萨定理的推广: 多连通区域的情形

- 定理 3.2–3.5 都是单连通区域 D 的情形:
  函数 $f(z)$ 在 D 上解析, 则对 D 内的可求长简单闭曲线 C,
  $f(z)$ 沿 C 上的积分为零.

柯西-古萨定理的推广: 多连通区域的情形

- 定理 3.2–3.5 都是单连通区域 D 的情形:
  函数 $f(z)$ 在 D 上解析, 则对 D 内的可求长简单闭曲线 C, $f(z)$ 沿 C 上的积分为零.
- 但如果 $f(z)$ 在 D 内有奇点, 该积分就不一定为零, 例如

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

- 定理 3.2–3.5 都是单连通区域 D 的情形:
  函数 $f(z)$ 在 D 上解析, 则对 D 内的可求长简单闭曲线 C,
  $f(z)$ 沿 C 上的积分为零.
- 但如果 $f(z)$ 在 D 内有奇点, 该积分就不一定为零, 例如

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0.$$

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

- 定理 3.2–3.5 都是单连通区域 D 的情形:
  函数 $f(z)$ 在 D 上解析, 则对 D 内的可求长简单闭曲线 C,
  $f(z)$ 沿 C 上的积分为零.
- 但如果 $f(z)$ 在 D 内有奇点, 该积分就不一定为零, 例如

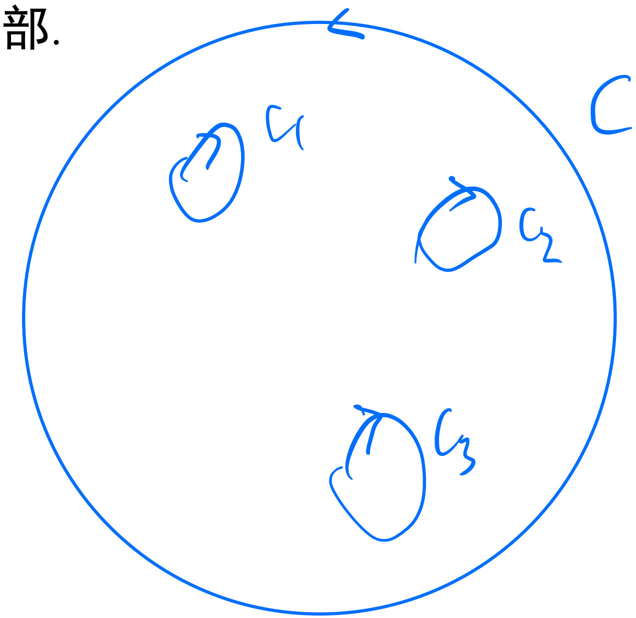
$$\oint_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0.$$

- 为了处理有奇点的情形, 需将柯西-古萨定理推广至多连通区域.

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

定义. (复周线).

设有 $n+1$ 条简单闭曲线 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$, 其中$C_1, C_2, \ldots, C_n$ 中每一条都在其余各条的外部，而它们又全都在 C 的内部.



柯西-古萨定理的推广: 多连通区域的情形

定义. (复周线).

设有 $n+1$ 条简单闭曲线 $C, C_1, C_2, \dots, C_n$, 其中$C_1, C_2, \dots, C_n$ 中每一条都在其余各条的外部，而它们又全都在 C 的内部.

位于 C 的内部同时又都在 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 的外部的点的集合构成一个有界的 $n+1$ 连通区域 D.

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

定义. (复周线).

设有 $n+1$ 条简单闭曲线 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$, 其中$C_1, C_2, \ldots, C_n$ 中每一条都在其余各条的外部，而它们又全都在 C 的内部.

位于 C 的内部同时又都在 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 的外部的点的集合构成一个有界的 $n+1$ 连通区域 D.

称 D 的边界

$$C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$$

负向

为一条复周线,

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

定义. (复周线).

设有 $n+1$ 条简单闭曲线 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$, 其中 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 中每一条都在其余各条的外部，而它们又全都在 C 的内部.

位于 C 的内部同时又都在 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 的外部的点的集合构成一个有界的 $n+1$ 连通区域 D.

称 D 的边界

$$C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$$

为一条复周线，它包括

取正向的 C 与取负向的 $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

复周线上的柯西-古萨定理. 设可求长复周线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 围成区域 D, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0;$$

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

复周线上的柯西-古萨定理. 设可求长复周线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 围成区域 D, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0;$$

或写成 —— 沿外边界积分等于沿内边界积分之和:

$$\oint_{C} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz,$$

其中 C 及 C_k 均取正向.

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

复周线上的柯西-古萨定理. 设可求长复周线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 围成区域 D, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0;$$

证明. 可选取 $n+1$ 条可求长简单曲线作为割线, 顺次地与 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ 连接.

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

复周线上的柯西-古萨定理. 设可求长复周线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 围成区域 D, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0;$$

证明. 可选取 $n+1$ 条可求长简单曲线作为割线, 顺次地与 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ 连接. 设想将 D 沿割线割破, 于是 D 就被分成两个单连通区域 D_1, D_2, 其边界各是一条闭曲线:

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

复周线上的柯西-古萨定理. 设可求长复周线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 围成区域 D, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0;$$

证明. 可选取 $n+1$ 条可求长简单曲线作为割线, 顺次地与 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ 连接. 设想将 D 沿割线割破, 于是 D 就被分成两个单连通区域 D_1, D_2, 其边界各是一条闭曲线：每条割线上沿相反的方向取了两次、且使 D_1, D_2 的边界闭曲线皆取正向.

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

复周线上的柯西-古萨定理. 设可求长复周线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 围成区域 D, 函数 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 则

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0;$$

证明. 可选取 $n+1$ 条可求长简单曲线作为割线, 顺次地与 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ 连接. 设想将 D 沿割线割破, 于是 D 就被分成两个单连通区域 D_1, D_2, 其边界各是一条闭曲线: 每条割线上沿相反的方向取了两次、且使 D_1, D_2 的边界闭曲线皆取正向. 由定理 3.5 可得

$$\oint_{\partial D_k} f(z)dz = 0,$$

柯西-古萨定理的推广：多连通区域的情形

复周线上的柯西-古萨定理．设可求长复周线 $\Gamma = C + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 围成区域 D，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D}$ 上连续，则

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0;$$

证明．可选取 $n+1$ 条可求长简单曲线作为割线，顺次地与 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ 连接．设想将 D 沿割线割破，于是 D 就被分成两个单连通区域 D_1, D_2，其边界各是一条闭曲线：每条割线上沿相反的方向取了两次、且使 D_1, D_2 的边界闭曲线皆取正向．由定理 3.5 可得

$$\oint_{\partial D_k} f(z)dz = 0,$$

从而

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_{\partial D_1} + \oint_{\partial D_2} = 0. \qquad \square$$

例 3.7 (重要积分′). 设 a 为任一可求长简单闭曲线 C 的内部任意一点, $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

例 3.7 (重要积分′). 设 a 为任一可求长简单闭曲线 C 的内部任意一点, $n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

证明. 以 a 为心作圆周 C', 使 C' 完全含于 C 的内部,

例 3.7 (重要积分′). 设 a 为任一可求长简单闭曲线 C 的内部任意一点，$n \in \mathbb{Z}$. 则

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & \text{if } n = 1; \\ 0, & \text{if } n \neq 1. \end{cases}$$

证明. 以 a 为心作圆周 C'，使 C' 完全含于 C 的内部，由复周线上的柯西-古萨定理，

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C'} \frac{dz}{(z-a)^n}.$$

后者已由例 3.2 解决. 证毕.

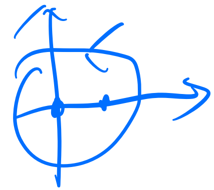
$2\pi i\left(\mathrm{Res}\, f(z)\right) = 2\pi i\left(1 + \ \right)$

$= 2\pi i \ldots_{z=0,1}$

$= 4\pi i$

例 3.8. 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, 其中 C 为内部包含 $0,1$ 的简单闭曲线.

$$\oint_C \frac{2z-1}{z(z-1)}dz$$



$$= \oint_C \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$\oint_{C_1} f = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} \cdot rie^{i\theta}\, d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i + 0$$

$$\oint_{C_2} f = 0 + 2\pi i$$

例 3.8. 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, 其中 C 为内部包含 $0, 1$ 的简单闭曲线.

证明. 被积函数 $\frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$ 有两个奇点: $z = 0, 1$.

例 3.8. 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, 其中 C 为内部包含 $0, 1$ 的简单闭曲线.

证明. 被积函数 $\frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$ 有两个奇点: $z = 0, 1$.

设 C_1, C_2 分别是绕行点 $z = 0$ 与 $z = 1$ 的简单闭曲线、皆取正向、互不包含且完全含于 C 内.

例 3.8. 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, 其中 C 为内部包含 $0,1$ 的简单闭曲线.

证明. 被积函数 $\frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$ 有两个奇点: $z = 0, 1.$

设 C_1, C_2 分别是绕行点 $z = 0$ 与 $z = 1$ 的简单闭曲线、皆取正向、互不包含且完全含于 C 内. 则由复周线上的柯西-古萨定理,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1 \cup C_2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz$$

例 3.8. 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, 其中 C 为内部包含 $0,1$ 的简单闭曲线.

证明. 被积函数 $\frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$ 有两个奇点: $z = 0, 1.$

设 C_1, C_2 分别是绕行点 $z = 0$ 与 $z = 1$ 的简单闭曲线、皆取正向、互不包含且完全含于 C 内. 则由复周线上的柯西-古萨定理,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1 \cup C_2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}dz$$

例 3.8. 求 $\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$, 其中 C 为内部包含 $0,1$ 的简单闭曲线.

证明. 被积函数 $\frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$ 有两个奇点: $z = 0, 1$.

设 C_1, C_2 分别是绕行点 $z = 0$ 与 $z = 1$ 的简单闭曲线、皆取正向、互不包含且完全含于 C 内. 则由复周线上的柯西-古萨定理,

$$\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \oint_{C_1 \cup C_2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}dz$$

$$= 2\pi\mathrm{i} + 0 + 0 + 2\pi\mathrm{i} \ = \ 4\pi\mathrm{i}.$$

□

例 3.9. 设 C 为简单闭曲线, $a, b\,(a \neq b)$ 不在 C 上, 求

$$I = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{dz}{(z-a)(z-b)}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{a-b}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=b} f(z) = \frac{1}{b-a}$$

例 3.9. 设 C 为简单闭曲线, $a, b\,(a \neq b)$ 不在 C 上, 求

$$I = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{dz}{(z-a)(z-b)}.$$

证明. 注意到

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right).$$

例 3.9. 设 C 为简单闭曲线, $a, b\,(a \neq b)$ 不在 C 上, 求

$$I = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{dz}{(z-a)(z-b)}.$$

证明. 注意到

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right).$$

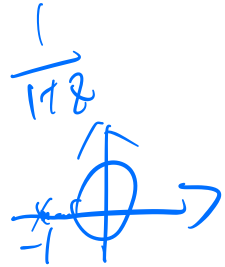
应用柯西-古萨定理和例 3.7 可得

$$I = \begin{cases} 0, & \text{当 } a, b \text{ 同在 } C \text{ 内部或外部;} \\ \frac{1}{a-b}, & \text{当 } a \text{ 在 } C \text{ 内部、} b \text{ 在外部;} \\ \frac{1}{b-a}, & \text{当 } b \text{ 在 } C \text{ 内部、} a \text{ 在外部.} \end{cases}$$

□

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

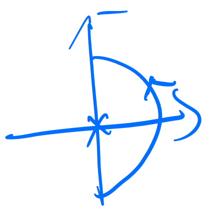


(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

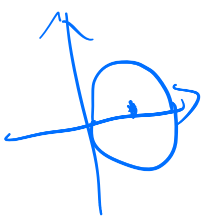
(1) = 0

(2)



$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{9} e^{-i2\theta} \cdot 3i e^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{i}{3} e^{-i\theta} d\theta = \frac{2}{3} i$$

(3)



例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(1) 取 $D=\mathbb{C}\backslash(-\infty,-1]$ 作为单值域, 则 D 单连通,

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(1) 取 $D=\mathbb{C}\backslash(-\infty,-1]$ 作为单值域, 则 D 单连通, 并且由 $r<1$ 知闭圆域 $\{|z|\leq r\}\subset D$. 从而

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(1) 取 $D=\mathbb{C}\backslash(-\infty,-1]$ 作为单值域, 则 D 单连通, 并且由 $r<1$ 知闭圆域 $\{|z|\leq r\}\subset D$. 从而 $\ln(1+z)$ 在该闭圆域上解析,

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(1) 取 $D=\mathbb{C}\backslash(-\infty,-1]$ 作为单值域, 则 D 单连通, 并且由 $r<1$ 知闭圆域 $\{|z|\leq r\}\subset D$. 从而 $\ln(1+z)$ 在该闭圆域上解析, 再由定理 3.4,

$$\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz = 0.$$

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(2) 当 $z \neq 0$ 时, $\frac{1}{z^2}$ 解析, 而 $0 \notin C$,

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(2) 当 $z \neq 0$ 时, $\frac{1}{z^2}$ 解析, 而 $0 \notin C$, 因此

$$\int_C \frac{1}{z^2}dz = -z^{-1}\Big|_{z=-3\mathrm{i}}^{3\mathrm{i}} = -\frac{2}{3\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}}{3}.$$

例 3.10. 计算下列积分

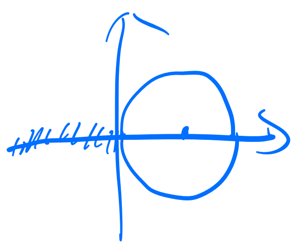
(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(3) 取 $D=\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ 作为单值域, 则 D 单连通,



$w=z^2$

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(3) 取 $D=\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ 作为单值域, 则 D 单连通, 并且可知 $\sqrt{z}$ 的单值分支在圆域 $\{|z-1|<1\}\subset D$ 上解析,

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(3) 取 $D=\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ 作为单值域, 则 D 单连通, 并且可知 $\sqrt{z}$ 的单值分支在圆域 $\{|z-1|<1\}\subset D$ 上解析, 在闭圆域 $|z-1|\leq 1$ 上连续,

例 3.10. 计算下列积分

(1) $\int_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad (0<r<1)$;

(2) $\int_C \frac{1}{z^2}dz$, 其中 C 为右半圆周: $|z|=3$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, 从 $-3\mathrm{i}$ 到 $3\mathrm{i}$;

(3) $\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz$, 其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1}=-1$ 那一支.

解.

(3) 取 $D=\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ 作为单值域, 则 D 单连通, 并且可知 $\sqrt{z}$ 的单值分支在圆域 $\{|z-1|<1\} \subset D$ 上解析, 在闭圆域 $|z-1| \leq 1$ 上连续, 从而由定理 3.5,

$$\int_{|z-1|=1} \sqrt{z}dz = 0. \qquad \square$$

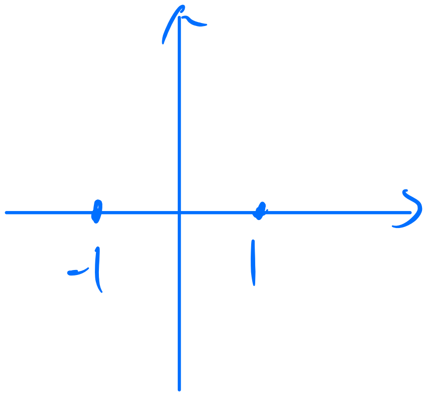
作业

第三章习题 (一): 2, 6, 8;

证明矩形周线上的柯西-古萨定理.

(一)、

2、



(1) $I = 2\int_0^1 z\,dz = 1$

(2) $I = \int_\pi^0 1\cdot de^{i\theta} = 1 - e^{i\pi} = 2$

(3) $I = \int_\pi^{2\pi} 1\cdot de^{i\theta} = 2$

5、

(1) $I = \int_{-2}^{-2+i} (z+2)^2\, d(z+2)$

$= \int_0^i t^2\, dt$

$= \frac{1}{3} i^3 = -\frac{1}{3} i$

(2) $I = 2\int^{\pi+2i} \quad d\sin\frac{z}{2}$

$$I = 2\int_0 \quad a \quad \frac{}{2}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)$$

6、

$$I = \int_0^{2\pi a} (2z^2+8z+1)\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi a} d\left(\frac{2}{3}z^3+4z^2+z\right)$$

$$= \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a$$

8、

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{1+2z}{5+2(z+\frac{1}{z})}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{2i}\oint \frac{1+2z}{2z^2+5z+2}\,dz$$

$$(z+2)(z+\tfrac{1}{2})$$

$($

$$\frac{-5 \pm 3}{4} = -2,\ -\frac{1}{2}$$

$$= \pi \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1+2z}{2z^2+5z+2} = 0$$