1.1

证明：当 A B 不同时发生时

$$F_N(A+B)=F_N(A)+F_N(B)$$

在 N 次中，A：n_A　B：n_B

以 $A+B$ 表示 A、B 至少出现一个的事件

$$F_N(A+B)=\frac{n_A+n_B}{N}=F_N(A)+F_N(B)$$

$$P\{\lim_{N\to\infty}\frac{n_A}{N}=P\}=1$$

① $P(A)=P$；$\forall\varepsilon>0$ $\lim\limits_{N\to\infty}P\{|\frac{n_A}{N}-P|\geq\varepsilon\}=0$

② 概率是频率稳定中心

③ 试验次数 n 很大时，可用频率来代替概率

1.3

2° 证 $\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{a}$

Pr:

$$(1+x)^{a+b}=(1+x)^a(1+x)^b$$

$$\sum_{k=0}^{a+b} C_{a+b}^k x^k=\left(\sum_{i=0}^{a} C_a^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{b} C_b^j x^j\right)$$

对 x^n 系数

$$C_{a+b}^k=\sum_{m=0}^{n} C_a^m C_b^{n-m} \quad \checkmark$$

特例：$(a=b=n)$

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

3°

$$(1+x)^\alpha=\sum_{r=0}^{\infty} C_\alpha^r x^r \quad (\alpha\in R \quad \alpha\neq 0)$$

$x\in(-1,1)$

若 $\alpha=-n \quad n\in \mathbb{Z}^+$

$$C_{-n}^r=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!}$$

$$= (-1)^r \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}$$

$$= (-1)^r C_{n+r-1}^r$$

$$\Rightarrow (1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r C_{n+r-1}^r x^r$$

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{+\infty} C_{n+r-1}^r x^r$$

证: $$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} \quad (n \to \infty)$$

Pr: $$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{\frac{a!}{k!(a-k)!} \cdot \frac{b!}{(n-k)!(b-n+k)!}}{\frac{(a+b)!}{n!(a+b-n)!}}$$

$$= C_1^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k} .$$

$k!$

1.5

$\mathcal{G}_1 = \{(a,b)\}$ $\quad \mathcal{G}_0 = \{[a,b)\}$

证 $m(\mathcal{G}_1) = m(\mathcal{G}_0) = \mathcal{B}_1$

Pr: ① $\forall (a,b) \in \mathcal{G}_1$

有 $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b) \in \mathcal{B}_1$

$\Rightarrow \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{B}_1 \Rightarrow m(\mathcal{G}_1) \subset \mathcal{B}_1$

② $\forall [a,b) \in \mathcal{G}_0$

有 $[a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a-\frac{1}{n}, b) \in m(\mathcal{G}_1)$

$\Rightarrow \mathcal{G}_0 \subset m(\mathcal{G}_1) \Rightarrow \mathcal{B}_1 \subset m(\mathcal{G}_1)$

$\Rightarrow m(\mathcal{G}_1) = \mathcal{B}_1$

证 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3)$

Pr: $= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) A_3)$

$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_3 \cup A_2 A_3)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$

(不连续)

有限可加性 + ? $\Longrightarrow$ 可列可加性

$\forall A_i \in \mathcal{F} \ (i = 1, 2 \cdots) \quad A_i A_j = \emptyset \ (i \neq j)$

$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$

$\Downarrow$

$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim_{n \to \infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{?}{=} P\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A_i\right)$

收敛

$= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)$

Th 1.5.1

Pr: ①若可列可加

(i) 显然

(ii) 若 $A_n \uparrow$

令: $\begin{cases} S_1 = A_1 \\ S_2 = A_2 - A_1 \\ S_3 = A_3 - A_1 \cup A_2 = A_3 - A_2 \\ \vdots \\ S_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = A_k - A_{k-1} \\ \vdots \end{cases}$

有 $S_i S_j = \phi \quad i \neq j$

$\begin{cases} \sum^{k} S_i = \sum^{k} A_i = A_k \\ \sum^{\infty} S_i = \bigcup^{\infty} A_i \end{cases}$

有限可加

由可列可加: $\sum^{\infty} P(S_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(S_i)$

$= \lim_{n \to \infty} P(\sum_{i=1}^{n} S_i)$

$= \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

$P(\lim_{n \to \infty} A_n) = P(\bigcup^{\infty} A_i) = P(\sum^{\infty} S_i) = \sum^{\infty} P(S_i)$

② 若有限可加 且 下连续

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$$

令 $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$$

由下连续

$$= P\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

系2: $B_n \downarrow$ 令 $A_n = \overline{B_n} \uparrow$

由系1: $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) =$$

$1-P(\lim_{n\to\infty} B_n)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n)$$

系3：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 次可列可加性

Pr：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

$$\text{下连续} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

$$\text{次可加性} \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

系4：若有限可加 且 次可列可加

设 $A_1 \dots i$ 不相容

Pr：

$\text{有}\ P(\bigcup^{\infty} A_i) \le \sum^{\infty} P(A_i)$

有 $P(\sum_{i=1} A_i) \le \sum_{i=1} P(\ldots)$

$$\Leftrightarrow \text{证} \quad P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

有 $\sum^{\infty} A_i < +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ s.t.

$$\sum_{i=1}^{N} P(A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq P\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) - \varepsilon$$

(1) $$A\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx \int_{0}^{+\infty} e^{-2y}dy$$

$$= \frac{1}{4} A \int_{+\infty}^{0} de^{-2x} \int_{+\infty}^{0} de^{-2y}$$

$= \frac{1}{4}A = 1 \qquad A = 4$

(2) $P = 4\int_0^2 e^{-2x}dx \int_0^2 e^{-2y}dy$

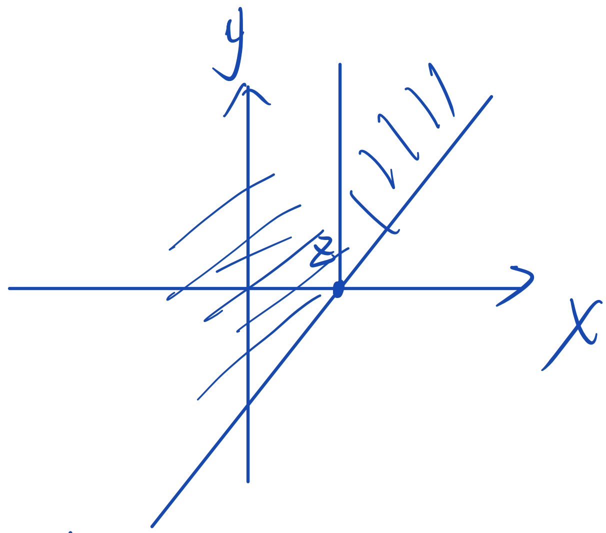
$= \int_2^0 de^{-2x} \int_2^0 de^{-2y}$

$= (1-e^{-4})(1-e^{-4})$

(3) ①

(4) $\zeta = \xi - \eta$

$x - y = z$



$F_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{y+z} p(x,y)\,dx \qquad (z<0)$

$= \int_{-z}^{+\infty} dy \int_0^{y+z} 4e^{-2x}e^{-2y}\,dx$

$= \int_{-z}^{+\infty} 2e^{-2y}dy \int_{y+z}^{0} d\ e^{-2x}$

$+\infty$

$$= \int_{-z}^{+\infty} (1 - e^{-2y-2z}) 2e^{-2y} \, dy$$

$$= \int_{-z}^{+\infty} (2e^{-2y} - 2e^{-4y-2z}) dy$$

$$= \int_{-z}^{+\infty} d\left(\frac{1}{2} e^{-4y-2z} - e^{-2y}\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} e^{2z} - e^{2z}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2z}$$

$$F_g(z) = \int_0^{\infty} dy \int_0^{z} 4e^{-2x} e^{-2y} dx + \int_0^{\infty} dy \int_z^{y+z} 4e^{-2x} e^{-2y} dx$$

$$= \int_0^{z} d(-e^{-2x}) + \int_0^{\infty} 2e^{-2y} dy \int_z^{y+z} d(-e^{-2x})$$

$$= (1 - e^{-4z}) + \int_0^{\infty} 2e^{-2y} (e^{-2z} - e^{-2y-2z}) \, dy$$

$$= 1 - e^{-4z} + \int_0^{\infty} (e^{-2y-2z} - e^{-4y-2z}) d2y$$

$$= 1 - e^{-4z} + \int^{\infty} d\left(\frac{1}{2} e^{-4y-2z} - e^{-2y-2z}\right)$$

$$= 1 - e^{-4z} + \left(0 - \left(\frac{1}{2}e^{-2z} - e^{-2z}\right)\right)$$

$$= 1 - e^{-4z} + e^{-2z} - \frac{1}{2}e^{-2z}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{-2z} - e^{-4z}$$

$$P\{\eta_1 \geq x\} = \left(\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx\right)^n$$

$$= (1 - \Phi(x))^n$$