P33

7、

(1) 设 $[0,1)$ 中有理点

$\{0、a_1、a_2 \cdots\cdots\}$

$(0,1)$ 中有理点

$\{b_1、b_2、\cdots\cdots\}$

作 $0 \leftrightarrow b_1$ 再令 $[0,1)$ 中无理点

$a_1 \leftrightarrow b_2$ 与 $(0,1)$ 中无理点一一对应

$\vdots$

$a_n \leftrightarrow b_{n+1}$

$\vdots$

(2) 设 $[a,b]$ 中有理点 $\{a, b, x_1, x_2 \cdots\}$

(a,b) 中有理点 $\{y_1, y_2, \cdots\}$

令 $\varphi_1 : [a,b] \leftrightarrow (a,b)$

为 $a \leftrightarrow y_1$ $[a,b]$ 中无理数

$b \leftrightarrow y_2$ 与 (a,b) 中无理数

$x_1 \leftrightarrow y_3$ 自身一一对应

$\vdots$

$x_n \leftrightarrow y_{n+2}$

$\vdots$

令 $\varphi : (a,b) \leftrightarrow (-\infty,+\infty)$

$$\varphi_2(x) = \tan\left(\frac{a-x}{a-b}\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [a,b] \overset{\varphi_1 \circ \varphi_2}{\sim} (-\infty, +\infty)$$

10、

$M = \{y_1(x)、y_2(x)、\cdots、y_n(x)、\cdots\}$

$y_n(x) = \{n$ 次多项式$\}$

$y_0 = \{a_0, a_0 \in \mathbb{Z}\}$ 可列

固定 a_0 $\quad y_1 = \{a_0 + a_1 x,\ a_0、a_1 \in \mathbb{Z},\ a_1 \neq 0\}$ 可列

$\vdots$

y_n 可列

$\Rightarrow M$ 可列

11、

设 f 在 x_0 连续

$\exists \delta$ s.t. $x \in O(x_0, \delta)$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < 1$

$\because f \in \mathbb{Z} \quad \therefore f(x) = f(x_0)$

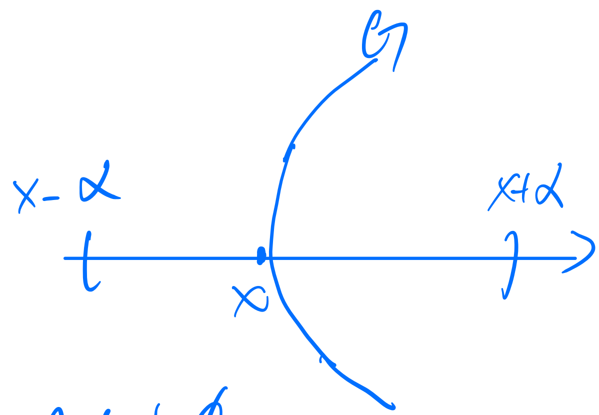
$\Rightarrow f$ 在 $O(x_0, \delta)$ 中连续

$\Rightarrow x_0$ 为连续点集内点

由 x_0 任意性

第二章

13、 $\forall x \in \overline{G}$



$\forall \alpha$ s.t. $O(x,\alpha)/x \cap G \neq \emptyset$

$\Leftarrow$ 证 $x \in \overline{(G/E)}$

$\Leftarrow$ 证 $\forall \beta$ s.t. $O(x,\beta) \cap (G/E) \neq \emptyset$

若 $\exists \beta$ s.t. $O(x,\beta) \cap (G/E) = \emptyset$

设 $O(x,\beta) \cap G = (a,b)$ $b>a$

$\Rightarrow mE \geq m(a,b) = b-a$

18、 $x \neq [0,1]$

$1 = m^*[0,1] \cap A_k + m^* \complement A_k$

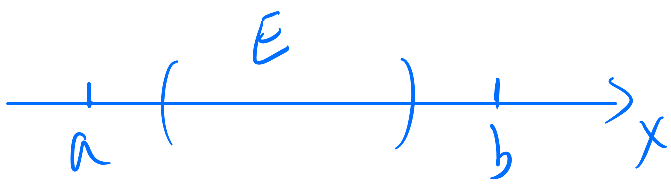
$= m^* A_k + m^* \complement A_k$

$\overset{\shortparallel}{mA_k}$

$\Rightarrow \sum m^* \complement A_k < 1$

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - m\,\complement\left(\bigcap A_k\right)$$
$$= 1 - m \bigcup \complement A_k$$
$$\geq 1 - \sum m^* \complement A_k > 0$$

14、



作 $f(x) = m^* E \cap [a, x]$ $\quad f(a) = 0 \quad f(b) = q$

对 $\forall\ x_1, x_2 \in [a, b] \quad x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = m^* E \cap [a, x_2] - m^* E \cap [a, x_1] \geq 0$$
$$\leq m^* E \cap [x_1, x_2] \leq x_2 - x_1$$

连续

由介值，$\exists\ x_3 \in [a, b]$ s.t.

$$m^* E \cap [a, x_3] = c$$

$$E \cap [a, x_3] \subset E$$

6、

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*E_1 + m^*E_2$$

16、

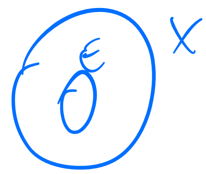
$$m^*\left(\bigcap^{\infty} E_n\right) < \lim_{n\to\infty} m^* E_n$$

$$E_n = (n, +\infty)$$

23、

$E \subset X$

$m X < \infty$



$$mX = m^*E + m^*(X \setminus E)$$

$$mX^* = m^*(X \cap E) + m^*(X \cap \complement E)$$

$$= m^*E + m^* X \setminus E$$

30、

$$m^*A + m^* A \cap E + m^* A \cap \complement E$$

$$m^* \bigcup E_n \cdot \quad m^*E_i + m^*\left(\bigcup E_n - E_i\right)$$

$m^*E_1 \cup E_2 < m^*E_1 + m^*E_2$

$$m^*\bigcup^{N} E_n < m^*E_N + \sum^{N-1} m^*E_n \le m^*E_N + m^*\bigcup^{N-1} E_n$$

$$m^*\bigcup^{N-1} E_n \ge \sum_{n=1}^{N-1} m^*E_n$$

30 (补一)

Pr: 由于 $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n$

若不存在N, 则 $\forall p$ 有 $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{p} E_n\right) \ge \sum_{n=1}^{p} m^*E_n$

$$m^*\left(\bigcup_{p=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{p} E_n\right)\right) = \lim_{p\to\infty} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{p} E_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

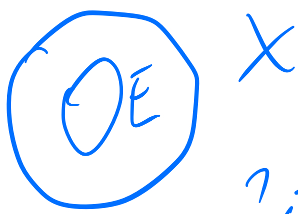
$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \ge \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n$$

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n$$

$$\Rightarrow m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^* E_n \quad 矛盾$$

后面与作业相同

23、(标示)



$\overset{?}{\geq}$ m^*E

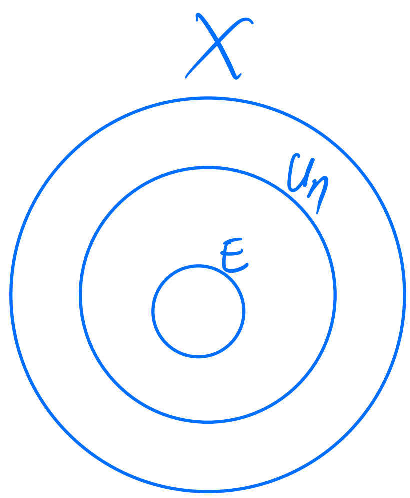
$$mX \overset{?}{=} m_*E + m^*(X-E)$$ (X为开区间时成立)

Pr: $\exists\ V_n \supset E$

$mV_\infty = m^*E$

令 $U_n \to U_n \cap X$

则 $U_n \subset X$



$\Rightarrow X = (X - U_n) + U_n$

$mX = m(X - U_n) + U_n$

$$\text{有}\ (X - U_n) \subset (X - E)$$

$$m(X - U_n) \leq m_*(X - E)$$

$$mX - mU_n \leq m_*(X - E)$$

$$mX \leq m^*E + m_*(X - E)$$

$$\underline{\text{且}}\ mX = m^*E + m^*(X - E)$$

$$\Rightarrow m^*(X - E) \leq m_*(X - E)$$

$$\Rightarrow (X - E)\ \text{可测}$$

$$\Rightarrow E = X - (X - E)\ \text{可测}$$