第三章 复积分

§6 莫雷拉定理

李太玉、孙海伟

山东大学(威海)
数学与统计学院

Spring Semester, 2022

柯西积分定理的逆定理

定理 3.15 (莫雷拉定理). 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内任一简单闭曲线 C, 有

$$\oint_C f(z)dz = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

柯西积分定理的逆定理

定理 3.15 (莫雷拉定理). 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内任一简单闭曲线 C, 有

$$\oint_C f(z)dz = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证. 在假设条件下, 任意选定 $z_0 \in D$, 由定理 3.8 知变上限积分函数 $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$

柯西积分定理的逆定理

定理 3.15 (莫雷拉定理). 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内任一简单闭曲线 C, 有

$$\oint_C f(z)dz = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证. 在假设条件下, 任意选定 $z_0 \in D$, 由定理 3.8 知变上限积分函数 $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

柯西积分定理的逆定理

定理 3.15 (莫雷拉定理). 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内任一简单闭曲线 C, 有

$$\oint_C f(z)dz = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证. 在假设条件下, 任意选定 $z_0 \in D$, 由定理 3.8 知变上限积分函数 $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$. 而解析函数的导数还是解析的, 故 $f(z)$ 在 D 内解析. $\square$

柯西积分定理的逆定理

定理 3.15 (莫雷拉定理). 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续, 且对 D 内任一简单闭曲线 C, 有

$$\oint_C f(z)dz = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

证. 在假设条件下, 任意选定 $z_0 \in D$, 由定理 3.8 知变上限积分函数 $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$. 而解析函数的导数还是解析的, 故 $f(z)$ 在 D 内解析. □

定理 3.8. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续、沿 D 内任一可求长简单闭曲线的积分为零, 则由变上限积分定义的函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在 D 内解析, 且 $F'(z) = f(z)$.

解析的等价命题.IV

定理 3.16 (解析的等价命题.IV). 函数 $f(z)$ 在(单连通或多连通)区域 D 内解析的充要条件是:

(1) $f(z)$ 在 D 内连续;

(2) 对任一简单闭曲线 C 满足 C 及其内部全含于 D 内, 都有

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

解析的等价命题.IV

定理 3.16 (解析的等价命题.IV). 函数 $f(z)$ 在(单连通或多连通)区域 D 内解析的充要条件是:

(1) $f(z)$ 在 D 内连续;

(2) 对任一简单闭曲线 C 满足 C 及其内部全含于 D 内, 都有

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证. 必要性. 由"可微必连续"及柯西-古萨定理可得.

解析的等价命题.IV

定理 3.16 (解析的等价命题.IV). 函数 $f(z)$ 在(单连通或多连通)区域 D 内解析的充要条件是:

(1) $f(z)$ 在 D 内连续;

(2) 对任一简单闭曲线 C 满足 C 及其内部全含于 D 内, 都有

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证. 必要性. 由"可微必连续"及柯西-古萨定理可得.

充分性. 任取 $z_0 \in D$, 以 z_0 为心作半径充分小的圆盘 U, 使 $U \subset D$.

解析的等价命题.IV

定理 3.16 (解析的等价命题.IV). 函数 $f(z)$ 在(单连通或多连通)区域 D 内解析的充要条件是:

(1) $f(z)$ 在 D 内连续;

(2) 对任一简单闭曲线 C 满足 C 及其内部全含于 D 内, 都有

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证. 必要性. 由“可微必连续”及柯西-古萨定理可得.

充分性. 任取 $z_0 \in D$, 以 z_0 为心作半径充分小的圆盘 U, 使 $U \subset D$. 由莫雷拉定理, 知 $f(z)$ 在单连通区域 U 内解析, 从而 $f(z)$ 在点 z_0 解析.

解析的等价命题.IV

$\oint_C (u+iv)\,d(x+iy)$

定理 3.16 (解析的等价命题.IV). 函数 $f(z)$ 在(单连通或多连通)区域 D 内解析的充要条件是:

(1) $f(z)$ 在 D 内连续;

(2) 对任一简单闭曲线 C 满足 C 及其内部全含于 D 内, 都有

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

证. 必要性. 由"可微必连续"及柯西-古萨定理可得.

充分性. 任取 $z_0 \in D$, 以 z_0 为心作半径充分小的圆盘 U, 使 $U \subset D$. 由莫雷拉定理, 知 $f(z)$ 在单连通区域 U 内解析, 从而 $f(z)$ 在点 z_0 解析. 再由 z_0 的任意性, 可知 $f(z)$ 在 D 内解析. □

$$(u\,dx - v\,dy) + i\,(v\,dx + u\,dy) = 0$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$