Задача 4. Хитрая функция

Постановка задачи

Функция $f(n)$ определяется так: записываем все цифры десятичной записи числа n в обратном порядке, после чего избавляемся от ведущих нулей. Например,

$$f(221) = 122, \quad f(1020) = 201, \quad f(10) = 1.$$

Далее вводим функцию

$$g(n) \;=\; \frac{f\big(f(n)\big)}{n}.$$

Например,

$$g(221) = 1, \quad g(1020) = 0.1, \quad g(10) = 0.1.$$

Сколько различных значений принимает функция $g(n)$ при $1 < n < 10^{30}$?

Ответ

30

Обоснование

Пусть $n = m \cdot 10^k$, где m не делится на 10 (то есть m не оканчивается на нули). Тогда при отбрасывании ведущих нулей обращение цифр даёт

$$f(n) = f\big(m \cdot 10^k\big) = f(m).$$

Поскольку m не оканчивается на нули, при втором обращении цифр снова получим исходное m:

$$f\big(f(m)\big) = m.$$

Следовательно,

$$f\big(f(n)\big) = m,$$

и

$$g(n) = \frac{f(f(n))}{n} \;=\; \frac{m}{m \cdot 10^k} \;=\; 10^{-k}.$$

Остаётся заметить, что при $1 < n < 10^{30}$ показатель k может принимать целые значения от 0 до 29 включительно. Таким образом, $g(n)$ принимает ровно 30 различных значений:

$$10^0,\ 10^{-1},\ 10^{-2}, \ldots,\ 10^{-29}.$$

Все эти значения достигаются, например, при $n = 2 \cdot 10^k$, где $k = 0, 1, \ldots, 29$.