2023年全国新高考Ⅱ卷

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，$(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$对应的点位于（　　）.

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的乘法结合复数的几何意义分析判断.

【详解】因为$(1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=3+8\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2=6+8\mathrm{i}$，

则所求复数对应的点为$(6,8)$，位于第一象限.

故选：A.

2. 设集合$A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若$A\subseteq B$，则$a=$（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. -1

【答案】B

【解析】

【分析】根据包含关系分$a-2=0$和$2a-2=0$两种情况讨论，运算求解即可.

【详解】因为$A\subseteq B$，则有：

若$a-2=0$，解得$a=2$，此时$A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，不符合题意；

若$2a-2=0$，解得$a=1$，此时$A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，符合题意；

综上所述：$a=1$.

故选：B.

3. 某学校为了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样方法作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取60名学生，已知该校初中部和高中部分别有400名和200名学生，则不同的抽样结果共有（　　）.

A. $\mathrm{C}_{400}^{45}\cdot\mathrm{C}_{200}^{15}$种　　B. $\mathrm{C}_{400}^{20}\cdot\mathrm{C}_{200}^{40}$种

C. $\mathrm{C}_{400}^{30}\cdot\mathrm{C}_{200}^{30}$种　　D. $\mathrm{C}_{400}^{40}\cdot\mathrm{C}_{200}^{20}$种

【答案】D

【解析】

【分析】利用分层抽样的原理和组合公式即可得到答案.

【详解】根据分层抽样的定义知初中部共抽取$60\times\frac{400}{600}=40$人，高中部共抽取$60\times\frac{200}{600}=20$，

根据组合公式和分步计数原理则不同的抽样结果共有$C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$种.

故选：D.

4. 若$f\left(x\right)=\left(x+a\right)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$为偶函数，则$a=$（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】根据偶函数性质，利用特殊值法求出a值，再检验即可.

【详解】因为$f(x)$ 为偶函数，则 $f(1)=f(-1),\therefore(1+a)\ln\frac{1}{3}=(-1+a)\ln 3$，解得$a=0$，

当$a=0$时，$f\left(x\right)=x\ln\frac{2x-1}{2x+1}$，$\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)>0$，解得$x>\frac{1}{2}$或$x<-\frac{1}{2}$，

则其定义域为$\left\{x\left|x\right\rangle\frac{1}{2}\text{或}x<-\frac{1}{2}\right\}$，关于原点对称.

$$f\left(-x\right)=\left(-x\right)\ln\frac{2\left(-x\right)-1}{2\left(-x\right)+1}=\left(-x\right)\ln\frac{2x+1}{2x-1}=\left(-x\right)\ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-1}=x\ln\frac{2x-1}{2x+1}=f\left(x\right),$$

故此时$f\left(x\right)$为偶函数.

故选：B.

6. 已知函数$f\left(x\right)=ae^{x}-\ln x$在区间$\left(1,2\right)$上单调递增，则$a$的最小值为（　　）.

A. e^{2}　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

【答案】C

【解析】

【分析】根据$f'\left(x\right)=ae^{x}-\frac{1}{x}\geq 0$在$\left(1,2\right)$上恒成立，再根据分参求最值即可求出.

【详解】依题可知，$f'\left(x\right)=ae^{x}-\frac{1}{x}\geq 0$在$\left(1,2\right)$上恒成立，显然$a>0$，所以$xe^{x}\geq\frac{1}{a}$，

设$g\left(x\right)=xe^{x},x\in\left(1,2\right)$，所以$g'\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{x}>0$，所以$g\left(x\right)$在$\left(1,2\right)$上单调递增，

$g\left(x\right)>g\left(1\right)=e$，故$e\geq\frac{1}{a}$，即$a\geq\frac{1}{e}=e^{-1}$，即$a$的最小值为$e^{-1}$.

故选：C．

7. 已知α为锐角，$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，则$\sin\frac{\alpha}{2}=$（　　）．

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$　　C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二倍角公式（或者半角公式）即可求出．

【详解】因为$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，而$\alpha$为锐角，

解得：$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{16}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$．

故选：D．

8. 记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则$S_8=$（　　）．

A. 120　　B. 85　　C. -85　　D. -120

【答案】C

【解析】

【分析】方法一：根据等比数列的前n项和公式求出公比，再根据S_4,S_8的关系即可解出；

方法二：根据等比数列的前n项和的性质求解．

【详解】方法一：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，首项为a_1，

若$q=1$，则$S_6=6a_1=3\times2a_1=3S_2$，与题意不符，所以$q\neq1$；

由$S_4=-5$，$S_6=21S_2$可得，$\frac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=-5$，$\frac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}=21\times\frac{a_1\left(1-q^2\right)}{1-q}$①，

由①可得，$1+q^2+q^4=21$，解得：$q^2=4$，

所以$S_8=\frac{a_1\left(1-q^8\right)}{1-q}=\frac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}\times\left(1+q^4\right)=-5\times(1+16)=-85$．

故选：C．

方法二：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为$S_4=-5$，$S_6=21S_2$，所以$q\neq -1$，否则$S_4=0$，

从而，$S_2,S_4-S_2,S_6-S_4,S_8-S_6$成等比数列，

所以有，$\left(-5-S_2\right)^2=S_2\left(21S_2+5\right)$，解得：$S_2=-1$或$S_2=\dfrac{5}{4}$，

当$S_2=-1$时，$S_2,S_4-S_2,S_6-S_4,S_8-S_6$，即为$-1,-4,-16,S_8+21$，

易知，$S_8+21=-64$，即$S_8=-85$；

当$S_2=\dfrac{5}{4}$时，$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=\left(a_1+a_2\right)\left(1+q^2\right)=\left(1+q^2\right)S_2>0$，

与$S_4=-5$矛盾，舍去.

故选：C.

【点睛】本题主要考查等比数列的前n项和公式的应用，以及整体思想的应用，解题关键是把握S_4,S_8的关系，从而减少相关量的求解，简化运算.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

11. 若函数$f\left(x\right)=a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}\left(a\neq 0\right)$既有极大值也有极小值，则（　　）.

A. $bc>0$　　　　B. $ab>0$　　　　C. $b^2+8ac>0$　　　　D. $ac<0$

【答案】BCD

【解析】

【分析】求出函数$f(x)$的导数$f'(x)$，由已知可得$f'(x)$在$(0,+\infty)$上有两个变号零点，转化为一元二次方程有两个不等的正根判断作答.

【详解】函数$f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$的定义域为$(0,+\infty)$，求导得$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}-\dfrac{2c}{x^3}=\dfrac{ax^2-bx-2c}{x^3}$，

因为函数$f(x)$既有极大值也有极小值，则函数$f'(x)$在$(0,+\infty)$上有两个变号零点，而$a\neq 0$，

因此方程$ax^2-bx-2c=0$有两个不等的正根x_1,x_2，

于是$\begin{cases}\Delta=b^2+8ac>0\\ x_1+x_2=\dfrac{b}{a}>0\\ x_1x_2=-\dfrac{2c}{a}>0\end{cases}$，即有$b^2+8ac>0$，$ab>0$，$ac<0$，显然$a^2bc<0$，即$bc<0$，A 错误，BCD

正确.

故选：BCD

12. 在信道内传输 0，1 信号，信号的传输相互独立．发送 0 时，收到 1 的概率为$\alpha(0<\alpha<1)$，收到 0 的概率为$1-\alpha$；发送 1 时，收到 0 的概率为$\beta(0<\beta<1)$，收到 1 的概率为$1-\beta$．考虑两种传输方案：单次传输和三次传输．单次传输是指每个信号只发送 1 次，三次传输 是指每个信号重复发送 3 次．收到的信号需要译码，译码规则如下：单次传输时，收到的信号即为译码；三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码（例如，若依次收到 1，0，1，则译码为 1）.

A. 采用单次传输方案，若依次发送 1，0，1，则依次收到 l，0，1 的概率为$(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B. 采用三次传输方案，若发送 1，则依次收到 1，0，1的概率为$\beta(1-\beta)^2$

C. 采用三次传输方案，若发送 1，则译码为 1 的概率为$\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$

D. 当$0<\alpha<0.5$时，若发送 0，则采用三次传输方案译码为 0 的概率大于采用单次传输方案译码为 0 的概率

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用相互独立事件的概率公式计算判断 AB；利用相互独立事件及互斥事件的概率计算判断 C；求出两种传输方案的概率并作差比较判断 D 作答.

【详解】对于 A，依次发送 1，0，1，则依次收到 l，0，1 的事件是发送 1 接收 1、发送 0 接收 0、发送 1 接收 1 的 3 个事件的积，

它们相互独立，所以所求概率为$(1-\beta)(1-\alpha)(1-\beta)=(1-\alpha)(1-\beta)^2$，A 正确；

对于 B，三次传输，发送 1，相当于依次发送 1，1，1，则依次收到 l，0，1 的事件，

是发送 1 接收 1、发送 1 接收 0、发送 1 接收 1 的 3 个事件的积，

它们相互独立，所以所求概率为$(1-\beta)\cdot\beta\cdot(1-\beta)=\beta(1-\beta)^2$，B 正确；

对于 C，三次传输，发送 1，则译码为 1 的事件是依次收到 1，1，0、1，0，1、0，1，1 和 1，1，1 的事件和，

它们互斥，由选项 B 知，所以所求的概率为$\mathrm{C}_3^2\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3=(1-\beta)^2(1+2\beta)$，C 错误；

对于 D，由选项 C 知，三次传输，发送 0，则译码为 0 的概率$P=(1-\alpha)^2(1+2\alpha)$，

单次传输发送 0，则译码为 0 的概率$P'=1-\alpha$，而$0<\alpha<0.5$，

因此 $P-P'=(1-\alpha)^2(1+2\alpha)-(1-\alpha)=\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)>0$，即 $P>P'$，D 正确.

故选：ABD

【点睛】关键点睛：利用概率加法公式及乘法公式求概率，把要求概率的事件分拆成两两互斥事件的和，相互独立事件的积是解题的关键.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$，则 $\left|\vec{b}\right|=$______.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】法一：根据题意结合向量数量积的运算律运算求解；法二：换元令 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，结合数量积的运算律运算求解.

【详解】法一：因为 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$，即 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)^2$，

则 $\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，整理得 $\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

又因为 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$，即 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=3$，

则 $\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{b}^2=3$，所以 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$.

法二：设 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，则 $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3},\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}=2\vec{c}+\vec{b}$，

由题意可得：$\left(\vec{c}+2\vec{b}\right)^2=\left(2\vec{c}+\vec{b}\right)^2$，则 $\vec{c}^2+4\vec{c}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4\vec{c}^2+4\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，

整理得：$\vec{c}^2=\vec{b}^2$，即 $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

15. 已知直线 $l:x-my+1=0$ 与 $\odot C:\left(x-1\right)^2+y^2=4$ 交于 A，B 两点，写出满足“$\triangle ABC$ 面积为 $\frac{8}{5}$”的 m 的一个值______.

【答案】2（$2,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ 中任意一个皆可以）

【解析】

【分析】根据直线与圆的位置关系，求出弦长 $\left|AB\right|$，以及点 C 到直线 AB 的距离，结合面积公式即可解出.

【详解】设点 C 到直线 AB 的距离为 d，由弦长公式得 $\left|AB\right|=2\sqrt{4-d^2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times d\times 2\sqrt{4-d^2}=\frac{8}{5}$，解得：$d=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 或 $d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由 $d=\dfrac{|1+1|}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}$，所以 $\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 或 $\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，解得：$m=\pm2$ 或 $m=\pm\dfrac{1}{2}$.

故答案为：2（$2,-2,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$ 中任意一个皆可以）.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，D 为 BC 中点，且 $AD=1$.

（1）若 $\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\tan B$；

（2）若 $b^2+c^2=8$，求 b,c.

【答案】（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$；

（2）$b=c=2$.

【解析】

【分析】（1）方法 1，利用三角形面积公式求出 a，再利用余弦定理求解作答；方法 2，利用三角形面积公式求出 a，作出 BC 边上的高，利用直角三角形求解作答.

（2）方法 1，利用余弦定理求出 a，再利用三角形面积公式求出 $\angle ADC$ 即可求解作答；方法 2，利用向量运算律建立关系求出 a，再利用三角形面积公式求出 $\angle ADC$ 即可求解作答.

【小问 1 详解】

方法 2：在 $\triangle ABC$ 中，因为 D 为 BC 中点，$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，$AD=1$，

则 $S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot DC\sin\angle ADC=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{2}a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}a=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=4$，

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $b^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADB$，

即 $b^2=4+1-2\times2\times1\times\dfrac{1}{2}=3$，解得 $b=\sqrt{3}$，有 $AC^2+AD^2=4=CD^2$，则 $\angle CAD=\dfrac{\pi}{2}$，

$C=\dfrac{\pi}{6}$，过 A 作 $AE\perp BC$ 于 E，于是 $CE=AC\cos C=\dfrac{3}{2},AE=AC\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$BE=\dfrac{5}{2}$，

所以 $\tan B=\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

【小问 2 详解】

方法 1：在$\triangle ABD$与$\triangle ACD$中，由余弦定理得$\begin{cases} c^2=\frac{1}{4}a^2+1-2\times\frac{1}{2}a\times 1\times\cos(\pi-\angle ADC) \\ b^2=\frac{1}{4}a^2+1-2\times\frac{1}{2}a\times 1\times\cos\angle ADC \end{cases}$，

整理得$\frac{1}{2}a^2+2=b^2+c^2$，而$b^2+c^2=8$，则$a=2\sqrt{3}$，

又$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1\times\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$\sin\angle ADC=1$，而$0<\angle ADC<\pi$，于是$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

所以$b=c=\sqrt{AD^2+CD^2}=2$.

方法 2：在$\triangle ABC$中，因为D为BC中点，则$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，又$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，

于是$4\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CB}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2=2(b^2+c^2)=16$，即$4+a^2=16$，解得$a=2\sqrt{3}$，

又$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1\times\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$\sin\angle ADC=1$，而$0<\angle ADC<\pi$，于是$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

所以$b=c=\sqrt{AD^2+CD^2}=2$.

18. $\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases} a_n-6, n\text{为奇数} \\ 2a_n, n\text{为偶数} \end{cases}$，记$S_n$，$T_n$分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前$n$项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$.

【答案】（1）$a_n=2n+3$；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，用a_1, d表示S_n及T_n，即可求解作答.

（2）方法 1，利用（1）的结论求出S_n，b_n，再分奇偶结合分组求和法求出T_n，并与S_n作差比较作答；方法 2，利用（1）的结论求出S_n，b_n，再分奇偶借助等差数列前n项和公式求出T_n，并与S_n作差比较作答.

【小问 1 详解】

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，而$b_n=\begin{cases} a_n-6, n=2k-1 \\ 2a_n, n=2k \end{cases}, k\in\mathrm{N}^*$，

则 $b_1=a_1-6, b_2=2a_2=2a_1+2d, b_3=a_3-6=a_1+2d-6$，

于是 $\begin{cases}S_4=4a_1+6d=32\\T_3=4a_1+4d-12=16\end{cases}$，解得 $a_1=5, d=2$，$a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2n+3$.

【小问 2 详解】

方法 1：由（1）知，$S_n=\dfrac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，$b_n=\begin{cases}2n-3, n=2k-1\\4n+6, n=2k\end{cases}, k\in\mathrm{N}^*$，

当 n 为偶数时，$b_{n-1}+b_n=2(n-1)-3+4n+6=6n+1$，

$T_n=\dfrac{13+(6n+1)}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}n(n-1)>0$，因此 $T_n>S_n$，

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{3}{2}(n+1)^2+\dfrac{7}{2}(n+1)-[4(n+1)+6]=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此 $T_n>S_n$，

所以当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

方法 2：由（1）知，$S_n=\dfrac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，$b_n=\begin{cases}2n-3, n=2k-1\\4n+6, n=2k\end{cases}, k\in\mathrm{N}^*$，

当 n 为偶数时，$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=\dfrac{-1+2(n-1)-3}{2}\cdot\dfrac{n}{2}+\dfrac{14+4n+6}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}n(n-1)>0$，因此 $T_n>S_n$，

当 n 为奇数时，若 $n\geq 3$，则

$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_n)+(b_2+b_4+\cdots+b_{n-1})=\dfrac{-1+2n-3}{2}\cdot\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{14+4(n-1)+6}{2}\cdot\dfrac{n-1}{2}$

$=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5$，显然 $T_1=b_1=-1$ 满足上式，因此当 n 为奇数时，$T_n=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=(\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-5)-(n^2+4n)=\dfrac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此 $T_n>S_n$，

所以当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

22. （1）证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$；

（2）已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.

【答案】（1）证明见详解（2）$(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

【解析】

【分析】（1）分别构建 $F\left(x\right)=x-\sin x,x\in\left(0,1\right)$，$G\left(x\right)=x^2-x+\sin x,x\in\left(0,1\right)$，求导，利用导数判断原函数的单调性，进而可得结果；

（2）根据题意结合偶函数的性质可知只需要研究 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上的单调性，求导，分类讨论 $0<a^2<2$ 和 $a^2\geq 2$，结合（1）中的结论放缩，根据极大值的定义分析求解.

【详解】（1）构建 $F\left(x\right)=x-\sin x,x\in\left(0,1\right)$，则 $F'\left(x\right)=1-\cos x>0$ 对 $\forall x\in\left(0,1\right)$ 恒成立，

则 $F\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，可得 $F\left(x\right)>F\left(0\right)=0$，

所以 $x>\sin x,x\in\left(0,1\right)$；

构建 $G\left(x\right)=\sin x-\left(x-x^2\right)=x^2-x+\sin x,x\in\left(0,1\right)$，

则 $G'\left(x\right)=2x-1+\cos x,x\in\left(0,1\right)$，

构建 $g\left(x\right)=G'\left(x\right),x\in\left(0,1\right)$，则 $g'\left(x\right)=2-\sin x>0$ 对 $\forall x\in\left(0,1\right)$ 恒成立，

则 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，可得 $g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$，

即 $G'\left(x\right)>0$ 对 $\forall x\in\left(0,1\right)$ 恒成立，

则 $G\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，可得 $G\left(x\right)>G\left(0\right)=0$，

所以 $\sin x>x-x^2,x\in\left(0,1\right)$；

综上所述：$x-x^2<\sin x<x$.

（2）令 $1-x^2>0$，解得 $-1<x<1$，即函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-1,1\right)$，

若 $a=0$，则 $f\left(x\right)=-\ln\left(1-x^2\right),x\in\left(-1,1\right)$，

因为 $y=-\ln u$ 在定义域内单调递减，$y=1-x^2$ 在 $\left(-1,0\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，

则 $f\left(x\right)=-\ln\left(1-x^2\right)$ 在 $\left(-1,0\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，

故 $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点，不合题意，所以 $a\neq 0$.

当 $a\neq 0$ 时，令 $b=\left|a\right|>0$

因为 $f\left(x\right)=\cos ax-\ln\left(1-x^2\right)=\cos\left(\left|a\right|x\right)-\ln\left(1-x^2\right)=\cos bx-\ln\left(1-x^2\right)$，

且 $f(-x)=\cos(-bx)-\ln\left[1-(-x)^2\right]=\cos bx-\ln\left(1-x^2\right)=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 在定义域内为偶函数，

由题意可得：$f'(x)=-b\sin bx-\dfrac{2x}{x^2-1},x\in(-1,1)$，

（i）当 $0<b^2\le 2$ 时，取 $m=\min\left\{\dfrac{1}{b},1\right\}$，$x\in(0,m)$，则 $bx\in(0,1)$，

由（1）可得 $f'(x)=-b\sin(bx)-\dfrac{2x}{x^2-1}>-b^2x-\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x\left(b^2x^2+2-b^2\right)}{1-x^2}$，

且 $b^2x^2>0,2-b^2\ge 0,1-x^2>0$，

所以 $f'(x)>\dfrac{x\left(b^2x^2+2-b^2\right)}{1-x^2}>0$，

即当 $x\in(0,m)\subseteq(0,1)$ 时，$f¢(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递增，

结合偶函数的对称性可知：$f(x)$ 在 $(-m,0)$ 上单调递减，

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，不合题意；

（ii）当 $b^2>2$ 时，取 $x\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)\subseteq(0,1)$，则 $bx\in(0,1)$，

由（1）可得 $f'(x)=-b\sin bx-\dfrac{2x}{x^2-1}<-b\left(bx-b^2x^2\right)-\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x}{1-x^2}\left(-b^3x^3+b^2x^2+b^3x+2-b^2\right)$，

构建 $h(x)=-b^3x^3+b^2x^2+b^3x+2-b^2,x\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$，

则 $h'(x)=-3b^3x^2+2b^2x+b^3,x\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$，

且 $h'(0)=b^3>0,h'\left(\dfrac{1}{b}\right)=b^3-b>0$，则 $h'(x)>0$ 对 $\forall x\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$ 恒成立，

可知 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$ 上单调递增，且 $h(0)=2-b^2<0,h\left(\dfrac{1}{b}\right)=2>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$ 内存在唯一的零点 $n\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$，

当 $x\in(0,n)$ 时，则 $h(x)<0$，且 $x>0,1-x^2>0$，

则 $f'(x)<\dfrac{x}{1-x^2}\left(-b^3x^3+b^2x^2+b^3x+2-b^2\right)<0$，

即当 $x\in(0,n)\subseteq(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,n)$ 上单调递减，

结合偶函数的对称性可知：$f(x)$ 在 $(-n,0)$ 上单调递增，

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，符合题意；

综上所述：$b^2>2$，即 $a^2>2$，解得 $a>\sqrt{2}$ 或 $a<-\sqrt{2}$，

故 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

【点睛】关键点睛：

1.当 $0<a^2\le 2$ 时，利用 $\sin x<x, x\in(0,1)$，换元放缩；

2.当 $a^2\ge 2$ 时，利用 $x-x^2<\sin x, x\in(0,1)$，换元放缩.