2023年浙江省高考数学试卷（新高考Ⅰ）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．（5分）（2023•新高考Ⅰ）已知集合 $M=\{-2，-1，0，1，2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap \mathbf{N}=$（　　）

A．$\{-2，-1，0，1\}$　　B．$\{0，1，2\}$　　C．$\{-2\}$　　D．$\{2\}$

2．（5分）（2023•新高考Ⅰ）已知 $z=\frac{1-i}{2+2i}$，则 $z-\overline{z}=$（　　）

A．$-i$　　B．i　　C．0　　D．1

3．（5分）（2023•新高考Ⅰ）已知向量 $\vec{a}=(1，1)$，$\vec{b}=(1，-1)$．若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}+\mu\vec{b})$，则（　　）

A．$\lambda+\mu=1$　　B．$\lambda+\mu=-1$　　C．$\lambda\mu=1$　　D．$\lambda\mu=-1$

4．（5分）（2023•新高考Ⅰ）设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间（0，1）单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty，-2]$　　B．$[-2，0)$　　C．$(0，2]$　　D．$[2，+\infty)$

5．（5分）（2023•新高考Ⅰ）设椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$），C_2：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2．若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$（　　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

6．（5分）（2023•新高考Ⅰ）过点（0，－2）与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为α，则 sinα＝（　　）

A．1　　B．$\frac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{4}$

7．（5分）（2023•新高考Ⅰ）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，则（　　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8．（5分）（2023•新高考Ⅰ）已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$（　　）

A．$\frac{7}{9}$　　　　B．$\frac{1}{9}$　　　　C．$-\frac{1}{9}$　　　　D．$-\frac{7}{9}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

（多选）9．（5分）（2023•新高考Ⅰ）有一组样本数据x_1，x_2，…，x_6，其中x_1是最小值，x_6是最大值，则（　　）

A．x_2，x_3，x_4，x_5的平均数等于x_1，x_2，…，x_6的平均数

B．x_2，x_3，x_4，x_5的中位数等于x_1，x_2，…，x_6的中位数

C．x_2，x_3，x_4，x_5的标准差不小于x_1，x_2，…，x_6的标准差

D．x_2，x_3，x_4，x_5的极差不大于x_1，x_2，…，x_6的极差

（多选）10．（5分）（2023•新高考Ⅰ）噪声污染问题越来越受到重视．用声压级来度量声音的强弱，定义声压级$L_p=20\times lg\frac{p}{p_0}$，其中常数$p_0$（$p_0>0$）是听觉下限阈值，$p$是实际声压．下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60～90
混合动力汽车	10	50～60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车10m处测得实际声压分别为p_1，p_2，p_3，则（　　）

A．$p_1\geqslant p_2$　　　　B．$p_2>10p_3$　　　　C．$p_3=100p_0$　　　　D．$p_1\leqslant 100p_2$

（多选）11．（5分）（2023•新高考Ⅰ）已知函数f（x）的定义域为**R**，f（xy）$=y^2f$（x）$+x^2f$（y），则（　　）

A．f（0）＝0

B．f（1）＝0

C．f（x）是偶函数

D．$x=0$为f（x）的极小值点

（多选）12．（5分）（2023•新高考Ⅰ）下列物体中，能够被整体放入棱长为1（单位：m）

的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（　　）

A．直径为 0.99m 的球体

B．所有棱长均为 1.4m 的四面体

C．底面直径为 0.01m，高为 1.8m 的圆柱体

D．底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有 _________种（用数字作答）.

14．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为 ______________________.

15．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1$（$\omega>0$）在区间$[0，2\pi]$有且仅有 3 个零点，则ω的取值范围是 ____________.

16．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2．点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为 ______________________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）（2023•新高考Ⅰ）已知在$\triangle ABC$ 中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

（1）求 $\sin A$；

（2）设 $AB=5$，求 AB 边上的高.

19．（12 分）（2023•新高考Ⅰ）已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

20．（12 分）（2023•新高考Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，且 $d>1$．令 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n，T_n 分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和.

（1）若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d.

21．（12 分）（2023•新高考Ⅰ）甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中

则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6，乙每次投篮的命中率均为0.8．由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5．

（1）求第2次投篮的人是乙的概率；

（2）求第i次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量X_i服从两点分布，且P（X_i＝1）＝1－P（X_i＝0）＝q_i，i＝1，2，…，n，则E（$\sum_{i=1}^{n} X_i$）$=\sum_{i=1}^{n} q_i$．记前n次（即从第1次到第n次投篮）中甲投篮的次数为Y，求E（Y）．

22．（12分）（2023•新高考Ⅰ）在直角坐标系xOy中，点P到x轴的距离等于点P到点（0，$\frac{1}{2}$）的距离，记动点P的轨迹为W．

（1）求W的方程；

（2）已知矩形$ABCD$有三个顶点在W上，证明：矩形$ABCD$的周长大于$3\sqrt{3}$．

2023年浙江省高考数学试卷（新高考Ⅰ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.（5分）（2023•新高考Ⅰ）已知集合 $M=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap \mathrm{N}=$（　　）

A．$\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$　　B．$\{0,\ 1,\ 2\}$　　C．$\{-2\}$　　D．$\{2\}$

【答案】C

【分析】先把集合 N 表示出来，再根据交集的定义计算即可．

【解答】解：$\because x^2-x-6\geqslant 0$，$\therefore (x-3)(x+2)\geqslant 0$，$\therefore x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$，

$N=(-\infty,\ -2]\cup[3,\ +\infty)$，则 $M\cap \mathrm{N}=\{-2\}$．

故选：C．

【点评】本题考查集合的运算，属于基础题．

2.（5分）（2023•新高考Ⅰ）已知 $z=\frac{1-i}{2+2i}$，则 $z-\overline{z}=$（　　）

A．$-i$　　B．i　　C．0　　D．1

【答案】A

【分析】根据已知条件，结合复数的四则运算，以及共轭复数的定义，即可求解．

【解答】解：$z=\frac{1-i}{2+2i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-i}{1+i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}i$，

则 $\overline{z}=\frac{1}{2}i$，

故 $z-\overline{z}=-i$．

故选：A．

【点评】本题主要考查复数的四则运算，以及共轭复数的定义，属于基础题．

3.（5分）（2023•新高考Ⅰ）已知向量 $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$．若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp(\vec{a}+\mu\vec{b})$，则（　　）

A．$\lambda+\mu=1$　　B．$\lambda+\mu=-1$　　C．$\lambda\mu=1$　　D．$\lambda\mu=-1$

【答案】D

【分析】由已知求得 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\vec{a}+\mu\vec{b}$ 的坐标，再由两向量垂直与数量积的关系列式求解．

【解答】解：∵$\vec{a}$ =（1，1），$\vec{b}$ =（1，-1），

∴$\vec{a}+\lambda\vec{b}$ =（λ+1，1 - λ），$\vec{a}+\mu\vec{b}$ =（μ+1，1 - μ），

由（$\vec{a}+\lambda\vec{b}$）⊥（$\vec{a}+\mu\vec{b}$），得（λ+1）（μ+1）+（1 - λ）（1 - μ）=0，

整理得：2λμ+2=0，即λμ= - 1．

故选：D．

【点评】本题考查平面向量加法与数乘的坐标运算，考查两向量垂直与数量积的关系，是基础题．

4．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间（0，1）单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A．（- ∞，- 2]　　B．[- 2，0）　　C．（0，2]　　D．[2，+∞）

【答案】D

【分析】利用换元法转化为指数函数和二次函数单调性进行求解即可．

【解答】解：设 $t=x(x-a)=x^2-ax$，对称轴为 $x=\frac{a}{2}$，抛物线开口向上，

∵$y=2^t$ 是 t 的增函数，

∴要使 $f(x)$ 在区间（0，1）单调递减，

则 $t=x^2-ax$ 在区间（0，1）单调递减，

即$\frac{a}{2}\geq 1$，即 $a\geqslant 2$，

故实数 a 的取值范围是[2，+∞）．

故选：D．

【点评】本题主要考查复合函数单调性的应用，利用换元法结合指数函数，二次函数的单调性进行求解是解决本题的关键，是基础题．

5．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）设椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$），C_2：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2．若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$（　　）

A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

【答案】A

【分析】利用椭圆 C_2：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的方程可求其离心率 e_2，进而可求 e_1，可求 a．

【解答】解：由椭圆 C_2：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 可得 $a_2=2$，$b_2=1$，$\therefore c_2=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

$\therefore$椭圆 C_2 的离心率为 $e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because e_2=\sqrt{3}e_1$，$\therefore e_1=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{c_1}{a_1}=\frac{1}{2}$，

$\therefore a_1^2=4c_1^2=4(a_1^2-b_1^2)=4(a_1^2-1)$，

$\therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$或 $a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$（舍去）.

故选：A.

【点评】本题考查椭圆的几何性质，考查运算求解能力，属基础题.

7.（5 分）（2023•新高考Ⅰ）记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$为等差数列；乙：$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，则（　　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】C

【分析】首先明确充要条件的判定方法，再从等差数列的定义入手，进行正反两方面的论证.

【解答】解：若$\{a_n\}$是等差数列，设数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，

则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

即$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$，

故$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，

即甲是乙的充分条件.

反之，若$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，则可设$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=D$，

则$\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)D$，即 $S_n=nS_1+n(n-1)D$，

当 $n\geqslant 2$ 时，有 $S_{n-1}=(n-1)S_1+(n-1)(n-2)D$，

上两式相减得：$a_n=S_n-S_{n-1}=S_1+2(n-1)D$，

当 $n=1$ 时，上式成立，所以 $a_n=a_1+2(n-1)D$，

则 $a_{n+1}-a_n=a_1+2nD-[a_1+2(n-1)D]=2D$（常数），

所以数列$\{a_n\}$为等差数列．

即甲是乙的必要条件．

综上所述，甲是乙的充要条件．

故本题选：C．

【点评】本题主要考查利用定义进行等差数列的判断，穿插了充要条件的判定，属中档题．

8．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）已知 sin（α﹣β）$=\frac{1}{3}$，cosαsinβ$=\frac{1}{6}$，则 cos（2α+2β）=（　　）

A．$\frac{7}{9}$　　　B．$\frac{1}{9}$　　　C．$-\frac{1}{9}$　　　D．$-\frac{7}{9}$

【答案】B

【分析】由已知结合和差角公式先求出 sinαcosβ，再求出 sin（α+β），然后结合二倍角公式可求．

【解答】解：因为 sin（α﹣β）=sinαcosβ﹣sinβcosα$=\frac{1}{3}$，cosαsinβ$=\frac{1}{6}$，

所以 sinαcosβ$=\frac{1}{2}$，

所以 sin（α+β）=sinαcosβ+sinβcosα$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，

则 cos（2α+2β）=1﹣2sin^2（α+β）=1﹣2×$\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$．

故选：B．

【点评】本题主要考查了和差角公式，二倍角公式的应用，属于中档题．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

（多选）9．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）有一组样本数据 x_1，x_2，…，x_6，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则（　　）

A．x_2，x_3，x_4，x_5 的平均数等于 x_1，x_2，…，x_6 的平均数

B．x_2，x_3，x_4，x_5 的中位数等于 x_1，x_2，…，x_6 的中位数

C．x_2，x_3，x_4，x_5 的标准差不小于 x_1，x_2，…，x_6 的标准差

D．x_2，x_3，x_4，x_5 的极差不大于 x_1，x_2，…，x_6 的极差

【答案】BD

【分析】根据平均数，中位数，标准差，极差的概念逐一判定即可．

【解答】解：A 选项，x_2，x_3，x_4，x_5 的平均数不一定等于 x_1，x_2，…，x_6 的平均数，A 错误；

B 选项，x_2，x_3，x_4，x_5 的中位数等于$\frac{x_3+x_4}{2}$，x_1，x_2，…，x_6 的中位数等于$\frac{x_3+x_4}{2}$，B 正确；

C 选项，设样本数据 x_1，x_2，…，x_6 为 0，1，2，8，9，10，可知 x_1，x_2，…，x_6 的平均数是 5，x_2，x_3，x_4，x_5 的平均数是 5，

x_1，x_2，…，x_6 的方差$s_1{}^2=\frac{1}{6}\times[(0-5)^2+(1-5)^2+(2-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(10-5)^2]=\frac{50}{3}$，

x_2，x_3，x_4，x_5 的方差$s_2{}^2=\frac{1}{4}\times[(1-5)^2+(2-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2]=\frac{25}{2}$，

$s_1{}^2>s_2{}^2$，$\therefore s_1>s_2$，C 错误.

D 选项，$x_6>x_5$，$x_2>x_1$，$\therefore x_6-x_1>x_5-x_2$，$D$ 正确.

故选：BD.

【点评】本题考查平均数、中位数、标准差、极差的计算，是基础题.

（多选）10.（5 分）（2023•新高考Ⅰ）噪声污染问题越来越受到重视．用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times lg\frac{p}{p_0}$，其中常数 p_0（$p_0>0$）是听觉下限阈值，p 是实际声压．下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60～90
混合动力汽车	10	50～60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1，p_2，p_3，则（　　）

A．$p_1\geqslant p_2$　　B．$p_2>10p_3$　　C．$p_3=100p_0$　　D．$p_1\leqslant 100p_2$

【答案】ACD

【分析】根据题意分别计算 p_1，p_2，p_3 的范围，进行比较即可求解.

【解答】解：由题意得，$60\leqslant 20lg\frac{p_1}{p_0}\leq 90$，$1000p_0\leqslant p_1\leq 10^{\frac{9}{2}}p_0$，

$50\leqslant 20lg\frac{p_2}{p_0}\leq 60$，$10^{\frac{5}{2}}p_0\leqslant p_2\leqslant 1000p_0$，

$20lg\frac{p_3}{p_0}=40$，$p_3=100p_0$，

可得 $p_1\geqslant p_2$，A 正确；

$p_2\leqslant 10p_3=1000p_0$，$B$ 错误；

$p_3=100p_0$，C 正确；

$p_1\leq 10^{\frac{9}{2}}p_0=100\times 10^{\frac{5}{2}}p_0\leqslant 100p_2$，$p_1\leqslant 100p_2$，$D$ 正确．

故选：ACD．

【点评】本题考查函数模型的运用，考查学生的计算能力，是中档题．

（多选）11．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则（　　）

A．$f(0)=0$

B．$f(1)=0$

C．$f(x)$ 是偶函数

D．$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

【答案】ABC

【分析】在已知等式中，取 $x=y=0$ 判断 A；取 $x=y=1$ 判断 B；求出 $f(-1)$，再取 $y=-1$ 判断 C；取满足等式的特殊函数判断 D．

【解答】解：由 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，

取 $x=y=0$，可得 $f(0)=0$，故 A 正确；

取 $x=y=1$，可得 $f(1)=2f(1)$，即 $f(1)=0$，故 B 正确；

取 $x=y=-1$，得 $f(1)=2f(-1)$，即 $f(-1)=\frac{1}{2}f(1)=0$，

取 $y=-1$，得 $f(-x)=f(x)$，可得 $f(x)$ 是偶函数，故 C 正确；

由上可知，$f(-1)=f(0)=f(1)=0$，而函数解析式不确定，

不妨取 $f(x)=0$，满足 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，

常数函数 $f(x)=0$ 无极值，故 D 错误．

故选：ABC．

【点评】本题考查抽象函数的应用，取特值是关键，是中档题．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有 <u>64</u> 种（用数字作答）．

【答案】见试题解答内容

【分析】利用分类计数原理进行计算即可．

【解答】解：若选 2 门，则只能各选 1 门，有$C_4^1C_4^1=16$种，

如选 3 门，则分体育类选修课选 2，艺术类选修课选 1，或体育类选修课选 1，艺术类选修课选 2，

则有$C_4^1C_4^2+C_4^2C_4^1=24+24=48$，

综上共有 16+48＝64 种不同的方案．

故答案为：64．

【点评】本题主要考查简单的计数问题，利用分类计数原理进行计算是解决本题的关键，是基础题．

15．（5 分）（2023•新高考Ⅰ）已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1$（$\omega>0$）在区间$[0，2\pi]$有且仅有 3 个零点，则ω的取值范围是 <u>[2，3）</u>．

【答案】见试题解答内容

【分析】利用余弦函数的周期，结合函数的零点个数，列出不等式求解即可．

【解答】解：$x\in[0，2\pi]$，函数的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$（$\omega>0$），$\cos\omega x-1=0$，可得 $\cos\omega x=1$，

函数 $f(x)=\cos\omega x-1$（$\omega>0$）在区间$[0，2\pi]$有且仅有 3 个零点，

可得 $2\cdot\frac{2\pi}{\omega}\leq2\pi<3\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，

所以 $2\leqslant\omega<3$．

故答案为：[2，3）．

【点评】本题考查三角函数的周期的应用，函数的零点的应用，是基础题．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）（2023•新高考Ⅰ）已知在$\triangle ABC$中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$．

（1）求 $\sin A$；

（2）设 $AB=5$，求 AB 边上的高．

【答案】（1）$\frac{3\sqrt{10}}{10}$；（2）6．

【分析】（1）由三角形内角和可得 $C=\frac{\pi}{4}$，由 2sin（A－C）＝sin$B$，可得 2sin（A－C）＝sin（A+C），再利用两角和与差的三角函数公式化简可得 sin$A$＝3cos$A$，再结合平方关系即可求出 sin$A$；

（2）由 sin$B$＝sin（A+C）求出 sin$B$，再利用正弦定理求出 AC，BC，由等面积法即可求出 AB 边上的高．

【解答】解：（1）∵$A+B=3C$，$A+B+C=\pi$，

∴$4C=\pi$，

∴$C=\frac{\pi}{4}$，

∵2sin（A－C）＝sin$B$，

∴2sin（A－C）＝sin[π－（A+C）]＝sin（A+C），

∴2sin$A$cos$C$－2cos$A$sin$C$＝sin$A$cos$C$+cos$A$sin$C$，

∴sin$A$cos$C$＝3cos$A$sin$C$，

∴$\frac{\sqrt{2}}{2}sinA = 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}cosA$，

∴sin$A$＝3cos$A$，即 cos$A$＝$\frac{1}{3}$sin$A$，

又∵$\sin^2A+\cos^2A=1$，∴$sin^2A+\frac{1}{9}sin^2A=1$，

解得 $\sin^2A=\frac{9}{10}$，

又∵A∈（0，π），∴sin$A$＞0，

∴sin$A$＝$\frac{3\sqrt{10}}{10}$；

（2）由（1）可知 sin$A$＝$\frac{3\sqrt{10}}{10}$，cos$A$＝$\frac{1}{3}$sin$A$＝$\frac{\sqrt{10}}{10}$，

∴sin$B$＝sin（A+C）＝sin$A$cos$C$+cos$A$sin$C$＝$\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴$\frac{AB}{sinC}=\frac{AC}{sinB}=\frac{BC}{sinA}=\frac{5}{sin\frac{\pi}{4}}=5\sqrt{2}$，

∴$AC=5\sqrt{2}\sin B=5\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{10}$，$BC=5\sqrt{2}\times sinA=5\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=3\sqrt{5}$，

设 AB 边上的高为 h，

则$\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}\times AC\times BC\times sinC$，

$\therefore \frac{5}{2}h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times 3\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $h=6$，

即 AB 边上的高为 6．

【点评】本题主要考查了两角和与差的三角函数公式，考查了正弦定理和余弦定理的应用，属于中档题．

19．（12 分）（2023•新高考Ⅰ）已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2lna+\frac{3}{2}$．

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）先求出导函数 $f'(x)$，再对 a 分 $a\leqslant 0$ 和 $a>0$ 两种情况讨论，判断 $f'(x)$ 的符号，进而得到 $f(x)$ 的单调性；

（2）由（1）可知，当 $a>0$ 时，$f(x)_{min}=f(ln\frac{1}{a})=1+a^2+lna$，要证 $f(x)>2lna+\frac{3}{2}$，只需证 $1+a^2+lna>2lna+\frac{3}{2}$，只需证 $a^2-lna-\frac{1}{2}>0$，设 $g(a)=a^2-lna-\frac{1}{2}$，$a>0$，求导可得 $g(x)_{min}=g(\frac{\sqrt{2}}{2})>0$，从而证得 $f(x)>2lna+\frac{3}{2}$．

【解答】解：（1）$f(x)=a(e^x+a)-x$，

则 $f'(x)=ae^x-1$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$ 在 **R** 上单调递减，

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得，$x=ln\frac{1}{a}$，

当 $x\in(-\infty, ln\frac{1}{a})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(ln\frac{1}{a}, +\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 **R** 上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty, ln\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(ln\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增．

证明：（2）由（1）可知，当 $a>0$ 时，$f(x)_{min}=f(ln\frac{1}{a})=a(\frac{1}{a}+a)-ln\frac{1}{a}=1+a^2+lna$，

要证 $f(x)>2lna+\frac{3}{2}$，只需证 $1+a^2+lna>2lna+\frac{3}{2}$，

只需证 $a^2-lna-\frac{1}{2}>0$，

设 $g(a)=a^2-lna-\frac{1}{2}$，$a>0$，

则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$，

令 $g'(a)=0$ 得，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当 $a\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减，当 $a\in(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增，

所以 $g(a)\geqslant g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}-ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=-ln\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，

即 $g(a)>0$，

所以 $a^2-lna-\frac{1}{2}>0$ 得证，

即 $f(x)>2lna+\frac{3}{2}$ 得证．

【点评】本题主要考查了利用导数研究函数的单调性和最值，考查了函数恒成立问题，属于中档题．

20．（12分）（2023•新高考Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $d>1$．令 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n，T_n 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和．

（1）若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d．

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）根据题意及等差数列的通项公式与求和公式，建立方程组，即可求解；

（2）根据题意及等差数列的通项公式的特点，可设 $a_n=tn$，则 $b_n=\frac{n+1}{t}$，且 $d=t>1$；或设 $a_n=k(n+1)$，则 $b_n=\frac{n}{k}$，且 $d=k>1$，再分类讨论，建立方程，即可求解．

【解答】解：（1）∵$3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，

∴根据题意可得 $\begin{cases}3(a_1+d)=3a_1+a_1+2d\\3a_1+3d+(\frac{2}{a_1}+\frac{6}{a_1+d}+\frac{12}{a_1+2d})=21\end{cases}$，

∴ $\begin{cases}a_1=d\\6d+\frac{9}{d}=21\end{cases}$，

∴ $2d^2-7d+3=0$，又 $d>1$，

∴解得 $d=3$，∴ $a_1=d=3$，

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 3n$，$n\in\mathbf{N}^*$；

（2）$\because \{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等差数列，且 $b_n = \frac{n^2+n}{a_n}$，

$\therefore$根据等差数列的通项公式的特点，可设 $a_n = tn$，则$b_n = \frac{n+1}{t}$，且 $d = t > 1$；

或设 $a_n = k(n+1)$，则$b_n = \frac{n}{k}$，且 $d = k > 1$，

①当 $a_n = tn$，$b_n = \frac{n+1}{t}$，$d = t > 1$ 时，

则 $S_{99} - T_{99} = \frac{(t+99t)\times 99}{2} - (\frac{2}{t} + \frac{100}{t}) \times \frac{99}{2} = 99$，

$\therefore 50t - \frac{51}{t} = 1$，$\therefore 50t^2 - t - 51 = 0$，又 $d = t > 1$，

$\therefore$解得 $d = t = \frac{51}{50}$；

②当 $a_n = k(n+1)$，$b_n = \frac{n}{k}$，$d = k > 1$ 时，

则 $S_{99} - T_{99} = \frac{(2k+100k)\times 99}{2} - (\frac{1}{k} + \frac{99}{k}) \times \frac{99}{2} = 99$，

$\therefore 51k - \frac{50}{k} = 1$，$\therefore 51k^2 - k - 50 = 0$，又 $d = k > 1$，

$\therefore$此时 k 无解，

$\therefore$综合可得 $d = \frac{51}{50}$.

【点评】本题考查等差数列的性质，等差数列的通项公式与求和公式的应用，方程思想，化归转化思想，分类讨论思想，属中档题．

21．（12 分）（2023•新高考Ⅰ）甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8．由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5．

（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1) = 1 - P(X_i=0) = q_i$，$i=1$，2，…，$n$，则 $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i$．记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$．

【答案】（1）第 2 次投篮的人是乙的概率为 0.6；

（2）第 i 次投篮的人是甲的概率为 $P_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}$；

（3）$E(Y)=\frac{5}{18}[1-(\frac{2}{5})^n]+\frac{n}{3}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

【分析】（1）设第 2 次投篮的人是乙的概率为 P，结合题意，即可得出答案；

（2）由题意设 P_n 为第 n 次投篮的是甲，则 $P_{n+1}=0.6P_n+0.2(1-P_n)=0.4P_n+0.2$，构造得 $P_{n+1}-\frac{1}{3}=0.4(P_n-\frac{1}{3})$，结合等比数列的定义可得 $\{P_n-\frac{1}{3}\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$，公比为 0.4 的等比数列，即可得出答案；

（3）由（2）得 $P_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}$，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$E(Y)=P_1+P_2+\ldots+P_n$，求解即可得出答案.

【解答】解：（1）设第 2 次投篮的人是乙的概率为 P，

由题意得 $P=0.5\times0.4+0.5\times0.8=0.6$；

（2）由题意设 P_n 为第 n 次投篮的是甲，

则 $P_{n+1}=0.6P_n+0.2(1-P_n)=0.4P_n+0.2$，

$\therefore P_{n+1}-\frac{1}{3}=0.4(P_n-\frac{1}{3})$，

又 $P_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\neq0$，则 $\{P_n-\frac{1}{3}\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$，公比为 0.4 的等比数列，

$\therefore P_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{n-1}$，即 $P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{n-1}$，

$\therefore$ 第 i 次投篮的人是甲的概率为 $P_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}$；

（3）由（2）得 $P_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times(\frac{2}{5})^{i-1}$，

$\therefore$ 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$E(Y)=P_1+P_2+\ldots+P_n=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{5})^{i-1}+\frac{n}{3}=\frac{\frac{1}{6}[1-(\frac{2}{5})^n]}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}[1-(\frac{2}{5})^n]+\frac{n}{3}$，

综上所述，$E(Y)=\frac{5}{18}[1-(\frac{2}{5})^n]+\frac{n}{3}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

【点评】本题考查离散型随机变量的期望与方差，考查转化思想，考查逻辑推理能力和运算能力，属于中档题.

22.（12 分）（2023•新高考Ⅰ）在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0,\frac{1}{2})$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W.

（1）求 W 的方程；

（2）已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

【答案】见试题解答内容

【分析】（1）设点 p 坐标，结合几何条件即可得出 W 的方程.

（2）首先利用平移性，化简 W 的方程可简化计算，核心是把两邻边的和用其他方式表示出来.

【解答】解：（1）设点 P 点坐标为（x，y），由题意得$|y|=\sqrt{x^2+(y-\frac{1}{2})^2}$，

两边平方可得：$y^2=x^2+y^2-y+\frac{1}{4}$，

化简得：$y=x^2+\frac{1}{4}$，符合题意.

故 W 的方程为 $y=x^2+\frac{1}{4}$.

（2）解法一：不妨设 A，B，C 三点在 W 上，且 $AB\perp BC$.

设 A（a，$a^2+\frac{1}{4}$），B（b，$b^2+\frac{1}{4}$），C（c，$c^2+\frac{1}{4}$），

则$\overrightarrow{AB}=(b-a，b^2-a^2)$，$\overrightarrow{BC}=(c-b，c^2-b^2)$.

由题意，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即（$b-a$）（$c-b$）+（$b^2-a^2$）（$c^2-b^2$）=0，

显然（$b-a$）（$c-b$）≠0，于是 $1+(b+a)(c+b)=0$.

此时，$|b+a|.\ |c+b|=1$．于是 $min\{|b+a|，|c+b|\}\leqslant 1$.

不妨设$|c+b|\leqslant 1$，则 $a=-b-\frac{1}{b+c}$，

则$|AB|+|BC|=|b-a|\sqrt{1+(a+b)^2}+|c-b|\sqrt{1+(c+b)^2}$

$=|b-a|\sqrt{1+\frac{1}{(c+b)^2}}+|c-b|\sqrt{1+(c+b)^2}$

$\geqslant|b-a|\sqrt{1+(c+b)^2}+|c-b|\sqrt{1+(c+b)^2}$

$\geqslant|c-a|\sqrt{1+(c+b)^2}$

$=|b+c+\frac{1}{b+c}|\sqrt{1+(c+b)^2}$.

设 $x=|b+c|$，则 $f(x)=(x+\frac{1}{x})\sqrt{1+x^2}$，即 $f(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$，

又 $f'(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.\ (3x^2-1-x^2)}{x^2}=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.\ (2x^2-1)}{x^2}$.

显然，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$为最小值点．故 $f(x)\geqslant f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

故矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(|AB|+|BC|)\geqslant 2f(x)\geqslant 3\sqrt{3}$.

注意这里有两个取等条件，一个是$|b+c|=1$，另一个是$|b+c|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

这显然是无法同时取到的，所以等号不成立，命题得证．

解法二：不妨设A，B，D在抛物线W上，C不在抛物线W上，欲证命题为$|AB|+|AD|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

由图象的平移可知，将抛物线W看作$y=x^2$不影响问题的证明．

设A（a，a^2）（$a\geqslant 0$），平移坐标系使A为坐标原点，

则新抛物线方程为$y'=x'^2+2ax'$，写为极坐标方程，

即$\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta+2a\rho\cos\theta$，即$\rho=\frac{\sin\theta-2a\cos\theta}{\cos^2\theta}$.

欲证明的结论为$|\frac{\sin\theta-2a\cos\theta}{\cos^2\theta}|+|\frac{\sin(\theta+\frac{\pi}{2})-2a\cos(\theta+\frac{\pi}{2})}{\cos^2(\theta+\frac{\pi}{2})}|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

也即$|\frac{2a}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}|+|\frac{2a}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

不妨设$|\frac{2}{\cos\theta}|\geqslant|\frac{2}{\sin\theta}|$，将不等式左边看成关于$a$的函数，根据绝对值函数的性质，

其最小值当$\frac{2}{\cos\theta}\cdot a-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=0$即$a=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$时取得，

因此欲证不等式为$|\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即$|\frac{1}{\cos\theta\sin^2\theta}|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

根据均值不等式，有$|\cos\theta\sin^2\theta|$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}$

$\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\frac{2}{3})^3}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$，

由题意，等号不成立，故原命题得证．

【点评】本题第一问属常规求轨迹方程问题，较简单，第二问对思维能力及计算能力要求很高，属难题．