绝密 ★ 启用前

# 2024年普通高等学校招生全国统一考试（新课标I卷）

## 数学

**本试卷共10页，19小题，满分150分.**

**注意事项：**

**1.答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.**

**2.选择题的作答：每小题选出答案后，用2*B*铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.**

**3.填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.**

**4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.**

1. 已知集合 $A=\{x|-5<x^3<5\},B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】化简集合A，由交集的概念即可得解.

【详解】因为 $A=\{x|-\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\},B=\{-3,-1,0,2,3\}$，且注意到 $1<\sqrt[3]{5}<2$，

从而 $A\cap B=\{-1,0\}$.

故选：A.

2. 若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

【分析】由复数四则运算法则直接运算即可求解.

【详解】因为$\frac{z}{z-1}=\frac{z-1+1}{z-1}=1+\frac{1}{z-1}=1+\mathrm{i}$，所以$z=1+\frac{1}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$.

故选：C.

3. 已知向量$\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(2,x)$，若$\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，则$x=$（　　）

A. $-2$　　B. $-1$　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量垂直的坐标运算可求$x$的值.

【详解】因为$\vec{b}\perp\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)$，所以$\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-4\vec{a}\right)=0$，

所以$\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$即$4+x^2-4x=0$，故$x=2$，

故选：D.

4. 已知$\cos(\alpha+\beta)=m,\tan\alpha\tan\beta=2$，则$\cos(\alpha-\beta)=$（　　）

A. $-3m$　　B. $-\frac{m}{3}$　　C. $\frac{m}{3}$　　D. $3m$

【答案】A

【解析】

【分析】根据两角和的余弦可求$\cos\alpha\cos\beta,\sin\alpha\sin\beta$的关系，结合$\tan\alpha\tan\beta$的值可求前者，故可求$\cos\left(\alpha-\beta\right)$的值.

【详解】因为$\cos\left(\alpha+\beta\right)=m$，所以$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$，

而$\tan\alpha\tan\beta=2$，所以$\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，

故$\cos\alpha\cos\beta-2\cos\alpha\cos\beta=m$即$\cos\alpha\cos\beta=-m$，

从而$\sin\alpha\sin\beta=-2m$，故$\cos\left(\alpha-\beta\right)=-3m$，

故选：A.

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为$\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（　　）

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆柱的底面半径为$r$，根据圆锥和圆柱的侧面积相等可得半径$r$的方程，求出解后可求圆锥的体

积.

【详解】设圆柱的底面半径为$r$，则圆锥的母线长为$\sqrt{r^2+3}$，

而它们的侧面积相等，所以$2\pi r\times\sqrt{3}=\pi r\times\sqrt{3+r^2}$ 即$2\sqrt{3}=\sqrt{3+r^2}$，

故$r=3$，故圆锥的体积为$\frac{1}{3}\pi\times 9\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$.

故选：B.

6. 已知函数为$f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0\\ e^x+\ln(x+1), x\geq 0\end{cases}$，在$\mathbf{R}$上单调递增，则$a$取值的范围是（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的性质和分界点的大小关系即可得到不等式组，解出即可.

【详解】因为$f\left(x\right)$在R上单调递增，且$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=e^x+\ln\left(x+1\right)$单调递增，

则需满足$\begin{cases}-\dfrac{-2a}{2\times\left(-1\right)}\geq 0\\ -a\leq e^0+\ln 1\end{cases}$，解得$-1\leq a\leq 0$，

即$a$的范围是$[-1,0]$.

故选：B.

8. 已知函数为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当$x<3$时$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$　　D. $f(20)<10000$

【答案】B

【解析】

【分析】代入得到$f(1)=1, f(2)=2$，再利用函数性质和不等式的性质，逐渐递推即可判断.

【详解】因为当$x<3$时$f(x)=x$，所以$f(1)=1, f(2)=2$，

又因为$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，

则 $f(3)>f(2)+f(1)=3, f(4)>f(3)+f(2)>5$，

$f(5)>f(4)+f(3)>8, f(6)>f(5)+f(4)>13, f(7)>f(6)+f(5)>21$，

$f(8)>f(7)+f(6)>34, f(9)>f(8)+f(7)>55, f(10)>f(9)+f(8)>89$，

$f(11)>f(10)+f(9)>144, f(12)>f(11)+f(10)>233, f(13)>f(12)+f(11)>377$

$f(14)>f(13)+f(12)>610, f(15)>f(14)+f(13)>987$，

$f(16)>f(15)+f(14)>1597>1000$，则依次下去可知 $f(20)>1000$，则 B 正确；

且无证据表明 ACD 一定正确.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是利用 $f(1)=1, f(2)=2$，再利用题目所给的函数性质 $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，代入函数值再结合不等式同向可加性，不断递推即可.

**二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分．**

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 $X$ 服从正态分布 $N\left(1.8,0.1^2\right)$，假设推动出口后的亩收入 $Y$ 服从正态分布 $N\left(\overline{x},s^2\right)$，则（　　）（若随机变量 $Z$ 服从正态分布 $N\left(u,\sigma^2\right)$，$P(Z<u+\sigma)\approx 0.8413$）

A. $P(X>2)>0.2$　　B. $P(X>2)<0.5$

C. $P(Y>2)>0.5$　　D. $P(Y>2)<0.8$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据正态分布的 $3\sigma$ 原则以及正态分布的对称性即可解出.

【详解】依题可知，$\overline{x}=2.1, s^2=0.01$，所以 $Y\sim N\left(2.1,0.1\right)$，

故 $P\left(Y>2\right)=P\left(Y>2.1-0.1\right)=P\left(Y<2.1+0.1\right)\approx 0.8413>0.5$，C 正确，D 错误；

因为$X\sim N\left(1.8,0.1\right)$，所以$P\left(X>2\right)=P\left(X>1.8+2\times 0.1\right)$，

因为$P\left(X<1.8+0.1\right)\approx 0.8413$，所以$P\left(X>1.8+0.1\right)\approx 1-0.8413=0.1587<0.2$，

而$P\left(X>2\right)=P\left(X>1.8+2\times 0.1\right)<P\left(X>1.8+0.1\right)<0.2$，B 正确，A 错误，

故选：BC．

10. 设函数$f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　　）

A. $x=3$是$f(x)$的极小值点

B. 当$0<x<1$时，$f(x)<f\left(x^2\right)$

C. 当$1<x<2$时，$-4<f(2x-1)<0$

D. 当$-1<x<0$时，$f(2-x)>f(x)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】求出函数$f\left(x\right)$的导数，得到极值点，即可判断 A；利用函数的单调性可判断 B；根据函数$f\left(x\right)$在$\left(1,3\right)$上的值域即可判断 C；直接作差可判断 D.

【详解】对 A，因为函数$f\left(x\right)$的定义域为 **R**，而$f'\left(x\right)=2\left(x-1\right)\left(x-4\right)+\left(x-1\right)^2=3\left(x-1\right)\left(x-3\right)$，

易知当$x\in\left(1,3\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，当$x\in\left(-\infty,1\right)$或$x\in\left(3,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$

函数$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right)$上单调递增，在$\left(1,3\right)$上单调递减，在$\left(3,+\infty\right)$上单调递增，故$x=3$是函数$f\left(x\right)$的极小值点，正确；

对 B，当$0<x<1$时，$x-x^2=x\left(1-x\right)>0$，所以$1>x>x^2>0$，

而由上可知，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递增，所以$f\left(x\right)>f\left(x^2\right)$，错误；

对 C，当$1<x<2$时，$1<2x-1<3$，而由上可知，函数$f\left(x\right)$在$\left(1,3\right)$上单调递减，

所以$f\left(1\right)>f\left(2x-1\right)>f\left(3\right)$，即$-4<f\left(2x-1\right)<0$，正确；

对 D，当$-1<x<0$时，$f(2-x)-f(x)=\left(1-x\right)^2\left(-2-x\right)-\left(x-1\right)^2\left(x-4\right)=\left(x-1\right)^2\left(2-2x\right)>0$，

所以$f(2-x)>f(x)$，正确；

故选：ACD.

## 三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

13. 若曲线$y=e^x+x$在点$\left(0,1\right)$处的切线也是曲线$y=\ln(x+1)+a$的切线，则$a=$__________.

【答案】$\ln 2$

【解析】

【分析】先求出曲线 $y=\mathrm{e}^x+x$ 在 $(0,1)$ 的切线方程，再设曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切点为 $(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，求出 $y'$，利用公切线斜率相等求出 $x_0$，表示出切线方程，结合两切线方程相同即可求解.

【详解】由 $y=\mathrm{e}^x+x$ 得 $y'=\mathrm{e}^x+1$，$y'|_{x=0}=\mathrm{e}^0+1=2$，

故曲线 $y=\mathrm{e}^x+x$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=2x+1$；

由 $y=\ln(x+1)+a$ 得 $y'=\dfrac{1}{x+1}$，

设切线与曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 相切的切点为 $(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，

由两曲线有公切线得 $y'=\dfrac{1}{x_0+1}=2$，解得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，则切点为 $\left(-\dfrac{1}{2},a+\ln\dfrac{1}{2}\right)$，

切线方程为 $y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+a+\ln\dfrac{1}{2}=2x+1+a-\ln 2$，

根据两切线重合, 所以 $a-\ln 2=0$，解得 $a=\ln 2$.

故答案为：$\ln 2$

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）.则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为_________.

【答案】$\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

【分析】将每局的得分分别作为随机变量，然后分析其和随机变量即可.

【详解】设甲在四轮游戏中的得分分别为 $X_1,X_2,X_3,X_4$，四轮的总得分为 $X$.

对于任意一轮，甲乙两人在该轮出示每张牌的概率都均等，其中使得甲获胜的出牌组合有六种，从而甲在该轮获胜的概率 $P(X_k=1)=\dfrac{6}{4\times 4}=\dfrac{3}{8}$，所以 $E(X_k)=\dfrac{3}{8}(k=1,2,3,4)$.

从而 $E(X)=E(X_1+X_2+X_3+X_4)=\sum\limits_{k=1}^{4}E(X_k)=\sum\limits_{k=1}^{4}\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{2}$.

记 $p_k=P(X=k)(k=0,1,2,3)$.

如果甲得 0 分，则组合方式是唯一的：必定是甲出 1，3，5，7 分别对应乙出 2，4，6，8，所以 $p_0=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$；

如果甲得 3 分，则组合方式也是唯一的：必定是甲出 1，3，5，7 分别对应乙出 8，2，4，6，所以 $p_3=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$.

而 $X$ 的所有可能取值是 0，1，2，3，故 $p_0+p_1+p_2+p_3=1$，$p_1+2p_2+3p_3=E\left(X\right)=\frac{3}{2}$.

所以 $p_1+p_2+\frac{1}{12}=1$，$p_1+2p_2+\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$，两式相减即得 $p_2+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}$，故 $p_2+p_3=\frac{1}{2}$.

所以甲的总得分不小于 2 的概率为 $p_2+p_3=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于将问题转化为随机变量问题，利用期望的可加性得到等量关系，从而避免繁琐的列举.

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. 记 $\triangle ABC$ 内角 $A$、$B$、$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$

（1）求 $B$；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 $c$.

【答案】（1）$B=\frac{\pi}{3}$

（2）$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）由余弦定理、平方关系依次求出 $\cos C,\sin C$，最后结合已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$ 得 $\cos B$ 的值即可；

（2）首先求出 $A,B,C$，然后由正弦定理可将 $a,b$ 均用含有 $c$ 的式子表示，结合三角形面积公式即可列方程求解.

【小问 1 详解】

由余弦定理有 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，对比已知 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，

可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $C\in\left(0,\pi\right)$，所以 $\sin C>0$，

从而 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，即 $\cos B=\frac{1}{2}$，

注意到 $B\in(0,\pi)$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

由（1）可得 $B=\frac{\pi}{3}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$C\in(0,\pi)$，从而 $C=\frac{\pi}{4}$，$A=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$，

而 $\sin A=\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由正弦定理有 $\frac{a}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

从而 $a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2}c=\frac{\sqrt{3}+1}{2}c,b=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}c=\frac{\sqrt{6}}{2}c$，

由三角形面积公式可知，$\triangle ABC$ 的面积可表示为

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}c\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{8}c^2$，

由已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$，可得 $\frac{3+\sqrt{3}}{8}c^2=3+\sqrt{3}$，

所以 $c=2\sqrt{2}$.

16. 已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点.

（1）求 $C$ 的离心率;

（2）若过 $P$ 的直线 $l$ 交 $C$ 于另一点 $B$，且 $\triangle ABP$ 的面积为 9，求 $l$ 的方程.

【答案】（1）$\frac{1}{2}$

（2）直线 $l$ 的方程为 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

【解析】

【分析】（1）代入两点得到关于 $a,b$ 的方程，解出即可；

（2）方法一：以$|AP|$为底，求出三角形的高，即点$B$到直线$AP$的距离，再利用平行线距离公式得到平移后的直线方程，联立椭圆方程得到$B$点坐标，则得到直线$l$的方程；方法二：同法一得到点$B$到直线$AP$的距离，再设$B(x_0,y_0)$，根据点到直线距离和点在椭圆上得到方程组，解出即可；法三：同法一得到点$B$到直线$AP$的距离，利用椭圆的参数方程即可求解；法四：首先验证直线$AB$斜率不存在的情况，再设直线$y=kx+3$，联立椭圆方程，得到点$B$坐标，再利用点到直线距离公式即可；法五：首先考虑直线$PB$斜率不存在的情况，再设$PB:y-\frac{3}{2}=k(x-3)$，利用弦长公式和点到直线的距离公式即可得到答案；法六：设线法与法五一致，利用水平宽乘铅锤高乘$\frac{1}{2}$表达面积即可.

【小问1详解】

由题意得$\begin{cases} b=3 \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} b^2=9 \\ a^2=12 \end{cases}$，

所以$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{9}{12}}=\dfrac{1}{2}$.

【小问2详解】

法一：$k_{AP}=\dfrac{3-\frac{3}{2}}{0-3}=-\dfrac{1}{2}$，则直线$AP$的方程为$y=-\dfrac{1}{2}x+3$，即$x+2y-6=0$，

$|AP|=\sqrt{(0-3)^2+\left(3-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，由（1）知$C:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

设点$B$到直线$AP$的距离为$d$，则$d=\dfrac{2\times 9}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

则将直线$AP$沿着与$AP$垂直的方向平移$\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$单位即可，

此时该平行线与椭圆的交点即为点$B$，

设该平行线的方程为：$x+2y+C=0$，

则$\dfrac{|C+6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，解得$C=6$或$C=-18$，

当 $C=6$ 时，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\\x+2y+6=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\\y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$，

即 $B(0,-3)$ 或 $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，

当 $B(0,-3)$ 时，此时 $k_l=\dfrac{3}{2}$，直线 $l$ 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$，

当 $B\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$ 时，此时 $k_l=\dfrac{1}{2}$，直线 $l$ 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$，

当 $C=-18$ 时，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1\\x+2y-18=0\end{cases}$ 得 $2y^2-27y+117=0$，

$\Delta=27^2-4\times2\times117=-207<0$，此时该直线与椭圆无交点.

综上直线 $l$ 的方程为 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

法二：同法一得到直线 $AP$ 的方程为 $x+2y-6=0$，

点 $B$ 到直线 $AP$ 的距离 $d=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

设 $B(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}\dfrac{|x_0+2y_0-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\\\dfrac{x_0^2}{12}+\dfrac{y_0^2}{9}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=-3\\y_0=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=0\\y_0=-3\end{cases}$，

即 $B(0,-3)$ 或 $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，以下同法一.

法三：同法一得到直线 $AP$ 的方程为 $x+2y-6=0$，

点 $B$ 到直线 $AP$ 的距离 $d=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

设 $B\left(2\sqrt{3}\cos\theta,3\sin\theta\right)$，其中 $\theta\in[0,2\pi)$，则有 $\dfrac{\left|2\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta-6\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

联立 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，解得 $\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta=0\\\sin\theta=-1\end{cases}$，

即 $B(0,-3)$ 或 $\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，以下同法一；

法四：当直线 $AB$ 的斜率不存在时，此时 $B(0,-3)$，

$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3=9$，符合题意，此时 $k_l=\dfrac{3}{2}$，直线 $l$ 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$，

当线 $AB$ 的斜率存在时，设直线 $AB$ 的方程为 $y=kx+3$，

联立椭圆方程有 $\begin{cases} y=kx+3 \\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$，则 $(4k^2+3)x^2+24kx=0$，其中 $k\neq k_{AP}$，即 $k\neq -\dfrac{1}{2}$，

解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{-24k}{4k^2+3}$，$k\neq 0$，$k\neq -\dfrac{1}{2}$，

令 $x=\dfrac{-24k}{4k^2+3}$，则 $y=\dfrac{-12k^2+9}{4k^2+3}$，则 $B\left(\dfrac{-24k}{4k^2+3},\dfrac{-12k^2+9}{4k^2+3}\right)$

同法一得到直线 $AP$ 的方程为 $x+2y-6=0$，

点 $B$ 到直线 $AP$ 的距离 $d=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，

则 $\dfrac{\left|\dfrac{-24k}{4k^2+3}+2\times\dfrac{-12k^2+9}{4k^2+3}-6\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$，解得 $k=\dfrac{3}{2}$，

此时 $B\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$，则得到此时 $k_l=\dfrac{1}{2}$，直线 $l$ 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$，

综上直线 $l$ 的方程为 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

法五：当 $l$ 的斜率不存在时，$l:x=3,B\left(3,-\dfrac{3}{2}\right),|PB|=3,A$ 到 $PB$ 距离 $d=3$，

此时 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 3=\dfrac{9}{2}\neq 9$ 不满足条件.

当 $l$ 的斜率存在时，设 $PB:y-\dfrac{3}{2}=k(x-3)$，令 $P(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

$\begin{cases} y=k(x-3)+\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$，消 $y$ 可得 $(4k^2+3)x^2-(24k^2-12k)x+36k^2-36k-27=0$，

$\Delta=(24k^2-12k)^2-4(4k^2+3)(36k^2-36k-27)>0$，且 $k\neq k_{AP}$，即 $k\neq -\dfrac{1}{2}$，

$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{24k^2-12k}{4k^2+3} \\ x_1x_2=\dfrac{36k^2-36k-27}{4k^2+3} \end{cases}$，$|PB|=\sqrt{k^2+1}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\dfrac{27}{4}}}{4k^2+3}$，

A 到直线 $PB$ 距离 $d=\dfrac{\left|3k+\dfrac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$，$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\dfrac{27}{4}}}{4k^2+3}\cdot\dfrac{\left|3k+\dfrac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=9$，

$\therefore k=\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$，均满足题意，$\therefore l: y=\dfrac{1}{2}x$ 或 $y=\dfrac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

法六：当 $l$ 的斜率不存在时，$l: x=3, B\left(3,-\dfrac{3}{2}\right), |PB|=3, A$ 到 $PB$ 距离 $d=3$，

此时 $S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}\neq9$ 不满足条件.

当直线 $l$ 斜率存在时，设 $l: y=k(x-3)+\dfrac{3}{2}$，

设 $l$ 与 $y$ 轴的交点为 $Q$，令 $x=0$，则 $Q\left(0,-3k+\dfrac{3}{2}\right)$，

联立 $\begin{cases} y=kx-3k+\dfrac{3}{2} \\ 3x^2+4y^2=36 \end{cases}$，则有 $\left(3+4k^2\right)x^2-8k\left(3k-\dfrac{3}{2}\right)x+36k^2-36k-27=0$，

$\left(3+4k^2\right)x^2-8k\left(3k-\dfrac{3}{2}\right)x+36k^2-36k-27=0$，

其中 $\Delta=8k^2\left(3k-\dfrac{3}{2}\right)^2-4\left(3+4k^2\right)\left(36k^2-36k-27\right)>0$，且 $k\neq-\dfrac{1}{2}$，

则 $3x_B=\dfrac{36k^2-36k-27}{3+4k^2}, x_B=\dfrac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$，

则 $S=\dfrac{1}{2}|AQ||x_P-x_B|=\dfrac{1}{2}\left|3k+\dfrac{3}{2}\right|\left|\dfrac{12k+18}{3+4k^2}\right|=9$，解的 $k=\dfrac{1}{2}$ 或 $k=\dfrac{3}{2}$，经代入判别式验证均满足题意.

则直线 $l$ 为 $y=\dfrac{1}{2}x$ 或 $y=\dfrac{3}{2}x-3$，即 $3x-2y-6=0$ 或 $x-2y=0$.

18. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geq0$，求 $a$ 的最小值；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，求 $b$ 的取值范围.

【答案】（1）$-2$

（2）证明见解析　　（3）$b\geq -\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】（1）求出 $f'(x)_{\min}=2+a$ 后根据 $f'(x)\geq 0$ 可求 $a$ 的最小值；

（2）设 $P(m,n)$ 为 $y=f(x)$ 图象上任意一点，可证 $P(m,n)$ 关于 $(1,a)$ 的对称点为 $Q(2-m,2a-n)$ 也在函数的图像上，从而可证对称性；

（3）根据题设可判断 $f(1)=-2$ 即 $a=-2$，再根据 $f(x)>-2$ 在 $(1,2)$ 上恒成立可求得 $b\geq -\frac{2}{3}$.

【小问 1 详解】

$b=0$ 时，$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax$，其中 $x\in(0,2)$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{2}{x(2-x)}+a,x\in(0,2)$，

因为 $x(2-x)\leq\left(\frac{2-x+x}{2}\right)^2=1$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，

故 $f'(x)_{\min}=2+a$，而 $f'(x)\geq 0$ 成立，故 $a+2\geq 0$ 即 $a\geq -2$，

所以 $a$ 的最小值为 $-2$.，

【小问 2 详解】

$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$ 的定义域为 $(0,2)$，

设 $P(m,n)$ 为 $y=f(x)$ 图象上任意一点，

$P(m,n)$ 关于 $(1,a)$ 的对称点为 $Q(2-m,2a-n)$，

因为 $P(m,n)$ 在 $y=f(x)$ 图象上，故 $n=\ln\frac{m}{2-m}+am+b(m-1)^3$，

而 $f(2-m)=\ln\frac{2-m}{m}+a(2-m)+b(2-m-1)^3=-\left[\ln\frac{m}{2-m}+am+b(m-1)^3\right]+2a$，

$=-n+2a$，

所以 $Q(2-m,2a-n)$ 也在 $y=f(x)$ 图象上，

由 $P$ 的任意性可得 $y=f(x)$ 图象为中心对称图形，且对称中心为 $(1,a)$.

【小问 3 详解】

因为 $f\left(x\right)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，故 $x=1$ 为 $f\left(x\right)=-2$ 的一个解，

所以 $f\left(1\right)=-2$ 即 $a=-2$，

先考虑 $1<x<2$ 时，$f\left(x\right)>-2$ 恒成立.

此时 $f\left(x\right)>-2$ 即为 $\ln\dfrac{x}{2-x}+2\left(1-x\right)+b\left(x-1\right)^3>0$ 在 $\left(1,2\right)$ 上恒成立，

设 $t=x-1\in\left(0,1\right)$，则 $\ln\dfrac{t+1}{1-t}-2t+bt^3>0$ 在 $\left(0,1\right)$ 上恒成立，

设 $g\left(t\right)=\ln\dfrac{t+1}{1-t}-2t+bt^3,t\in\left(0,1\right)$，

则 $g'\left(t\right)=\dfrac{2}{1-t^2}-2+3bt^2=\dfrac{t^2\left(-3bt^2+2+3b\right)}{1-t^2}$，

当 $b\geq 0$，$-3bt^2+2+3b\geq -3b+2+3b=2>0$，

故 $g'\left(t\right)>0$ 恒成立，故 $g\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上为增函数，

故 $g\left(t\right)>g\left(0\right)=0$ 即 $f\left(x\right)>-2$ 在 $\left(1,2\right)$ 上恒成立.

当 $-\dfrac{2}{3}\leq b<0$ 时，$-3bt^2+2+3b\geq 2+3b\geq 0$，

故 $g'\left(t\right)\geq 0$ 恒成立，故 $g\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上为增函数，

故 $g\left(t\right)>g\left(0\right)=0$ 即 $f\left(x\right)>-2$ 在 $\left(1,2\right)$ 上恒成立.

当 $b<-\dfrac{2}{3}$，则当 $0<t<\sqrt{1+\dfrac{2}{3b}}<1$ 时，$g'\left(t\right)<0$

故在 $\left(0,\sqrt{1+\dfrac{2}{3b}}\right)$ 上 $g\left(t\right)$ 为减函数，故 $g\left(t\right)<g\left(0\right)=0$，不合题意，舍；

综上，$f\left(x\right)>-2$ 在 $\left(1,2\right)$ 上恒成立时 $b\geq-\dfrac{2}{3}$.

而当 $b\geq-\dfrac{2}{3}$ 时，

而 $b\geq-\dfrac{2}{3}$ 时，由上述过程可得 $g\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 递增，故 $g\left(t\right)>0$ 的解为 $\left(0,1\right)$，

即 $f\left(x\right)>-2$ 的解为 $\left(1,2\right)$.

综上，$b\geq-\dfrac{2}{3}$.

【点睛】思路点睛：一个函数不等式成立的充分必要条件就是函数不等式对应的解，而解的端点为函数对一个方程的根或定义域的端点，另外，根据函数不等式的解确定参数范围时，可先由恒成立得到参数的范

围，再根据得到的参数的范围重新考虑不等式的解的情况.

19. 设 $m$ 为正整数，数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 $a_i$ 和 $a_j\left(i<j\right)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 $m$ 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(i,j\right)-$可分数列.

（1）写出所有的 $\left(i,j\right)$，$1\le i<j\le 6$，使数列 $a_1,a_2,...,a_6$ 是 $\left(i,j\right)-$可分数列；

（2）当 $m\ge 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(2,13\right)-$可分数列；

（3）从 $1,2,...,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j\left(i<j\right)$，记数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $\left(i,j\right)-$可分数列的概率为 $P_m$，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$.

【答案】（1）$\left(1,2\right),\left(1,6\right),\left(5,6\right)$

（2）证明见解析　　（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）直接根据 $\left(i,j\right)-$可分数列的定义即可；

（2）根据 $\left(i,j\right)-$可分数列的定义即可验证结论；

（3）证明使得原数列是 $\left(i,j\right)-$可分数列的 $\left(i,j\right)$ 至少有 $\left(m+1\right)^2-m$ 个，再使用概率的定义.

【小问 1 详解】

首先，我们设数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 的公差为 $d$，则 $d\ne 0$.

由于一个数列同时加上一个数或者乘以一个非零数后是等差数列，当且仅当该数列是等差数列，

故我们可以对该数列进行适当的变形 $a_k'=\dfrac{a_k-a_1}{d}+1\left(k=1,2,...,4m+2\right)$，

得到新数列 $a_k'=k\left(k=1,2,...,4m+2\right)$，然后对 $a_1',a_2',...,a_{4m+2}'$ 进行相应的讨论即可.

换言之，我们可以不妨设 $a_k=k\left(k=1,2,...,4m+2\right)$，此后的讨论均建立在该假设下进行.

回到原题，第 1 小问相当于从 $1,2,3,4,5,6$ 中取出两个数 i 和 $j\left(i<j\right)$，使得剩下四个数是等差数列.

那么剩下四个数只可能是 $1,2,3,4$，或 $2,3,4,5$，或 $3,4,5,6$.

所以所有可能的 $\left(i,j\right)$ 就是 $\left(1,2\right),\left(1,6\right),\left(5,6\right)$.

【小问 2 详解】

由于从数列 $1,2,...,4m+2$ 中取出 $2$ 和 $13$ 后，剩余的 $4m$ 个数可以分为以下两个部分，共 $m$ 组，使得每组成

等差数列：

①$\{1,4,7,10\},\{3,6,9,12\},\{5,8,11,14\}$，共$3$组；

②$\{15,16,17,18\},\{19,20,21,22\},...,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$，共$m-3$组.

（如果$m-3=0$，则忽略②）

故数列$1,2,...,4m+2$是$(2,13)-$可分数列.

【小问 3 详解】

定义集合$A=\{4k+1|k=0,1,2,...,m\}=\{1,5,9,13,...,4m+1\}$，

$B=\{4k+2|k=0,1,2,...,m\}=\{2,6,10,14,...,4m+2\}$.

下面证明，对$1\le i<j\le 4m+2$，如果下面两个命题同时成立，

则数列$1,2,...,4m+2$一定是$(i,j)-$可分数列：

命题 1：$i\in A,j\in B$或$i\in B,j\in A$；

命题 2：$j-i\ne 3$.

我们分两种情况证明这个结论.

第一种情况：如果$i\in A,j\in B$，且$j-i\ne 3$.

此时设$i=4k_1+1$，$j=4k_2+2$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,...,m\}$.

则由$i<j$可知$4k_1+1<4k_2+2$，即$k_2-k_1>-\dfrac{1}{4}$，故$k_2\ge k_1$.

此时，由于从数列$1,2,...,4m+2$中取出$i=4k_1+1$和$j=4k_2+2$后，

剩余的$4m$个数可以分为以下三个部分，共$m$组，使得每组成等差数列：

①$\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},...,\{4k_1-3,4k_1-2,4k_1-1,4k_1\}$，共$k_1$组；

②$\{4k_1+2,4k_1+3,4k_1+4,4k_1+5\},\{4k_1+6,4k_1+7,4k_1+8,4k_1+9\},...,\{4k_2-2,4k_2-1,4k_2,4k_2+1\}$，共$k_2-k_1$组；

③$\{4k_2+3,4k_2+4,4k_2+5,4k_2+6\},\{4k_2+7,4k_2+8,4k_2+9,4k_2+10\},...,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$，共$m-k_2$组.

（如果某一部分的组数为$0$，则忽略之）

故此时数列$1,2,...,4m+2$是$(i,j)-$可分数列.

第二种情况：如果$i\in B,j\in A$，且$j-i\ne 3$.

此时设$i=4k_1+2$，$j=4k_2+1$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,...,m\}$.

则由$i<j$可知$4k_1+2<4k_2+1$，即$k_2-k_1>\dfrac{1}{4}$，故$k_2>k_1$.

由于$j-i\neq 3$，故$(4k_2+1)-(4k_1+2)\neq 3$，从而$k_2-k_1\neq 1$，这就意味着$k_2-k_1\geq 2$.

此时，由于从数列$1,2,...,4m+2$中取出$i=4k_1+2$和$j=4k_2+1$后，剩余的$4m$个数可以分为以下四个部分，共$m$组，使得每组成等差数列：

①$\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},...,\{4k_1-3,4k_1-2,4k_1-1,4k_1\}$，共$k_1$组；

②$\{4k_1+1,3k_1+k_2+1,2k_1+2k_2+1,k_1+3k_2+1\}$，$\{3k_1+k_2+2,2k_1+2k_2+2,k_1+3k_2+2,4k_2+2\}$，共2组；

③全体$\{4k_1+p,3k_1+k_2+p,2k_1+2k_2+p,k_1+3k_2+p\}$，其中$p=3,4,...,k_2-k_1$，共$k_2-k_1-2$组；

④$\{4k_2+3,4k_2+4,4k_2+5,4k_2+6\},\{4k_2+7,4k_2+8,4k_2+9,4k_2+10\},...,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$，共$m-k_2$组.

（如果某一部分的组数为0，则忽略之）

这里对②和③进行一下解释：将③中的每一组作为一个横排，排成一个包含$k_2-k_1-2$个行，4个列的数表以后，4个列分别是下面这些数：

$\{4k_1+3,4k_1+4,...,3k_1+k_2\}$，$\{3k_1+k_2+3,3k_1+k_2+4,...,2k_1+2k_2\}$，

$\{2k_1+2k_2+3,2k_1+2k_2+3,...,k_1+3k_2\}$，$\{k_1+3k_2+3,k_1+3k_2+4,...,4k_2\}$.

可以看出每列都是连续的若干个整数，它们再取并以后，将取遍$\{4k_1+1,4k_1+2,...,4k_2+2\}$中除开五个集合$\{4k_1+1,4k_1+2\}$，$\{3k_1+k_2+1,3k_1+k_2+2\}$，$\{2k_1+2k_2+1,2k_1+2k_2+2\}$，$\{k_1+3k_2+1,k_1+3k_2+2\}$，$\{4k_2+1,4k_2+2\}$中的十个元素以外的所有数.

而这十个数中，除开已经去掉的$4k_1+2$和$4k_2+1$以外，剩余的八个数恰好就是②中出现的八个数.

这就说明我们给出的分组方式满足要求，故此时数列$1,2,...,4m+2$是$(i,j)-$可分数列.

至此，我们证明了：对$1\leq i<j\leq 4m+2$，如果前述命题 1 和命题 2 同时成立，则数列$1,2,...,4m+2$一定是$(i,j)-$可分数列.

然后我们来考虑这样的$(i,j)$的个数.

首先，由于 $A\cap B=\varnothing$ ，A 和 $B$ 各有 $m+1$ 个元素，故满足命题 1 的 $(i,j)$ 总共有 $(m+1)^2$ 个；

而如果 $j-i=3$ ，假设 $i\in A, j\in B$ ，则可设 $i=4k_1+1$ ， $j=4k_2+2$ ，代入得 $(4k_2+2)-(4k_1+1)=3$ .

但这导致 $k_2-k_1=\frac{1}{2}$ ，矛盾，所以 $i\in B, j\in A$ .

设 $i=4k_1+2$ ， $j=4k_2+1$ ， $k_1,k_2\in\{0,1,2,...,m\}$ ，则 $(4k_2+1)-(4k_1+2)=3$ ，即 $k_2-k_1=1$ .

所以可能的 $(k_1,k_2)$ 恰好就是 $(0,1),(1,2),...,(m-1,m)$ ，对应的 $(i,j)$ 分别是

$(2,5),(6,9),...,(4m-2,4m+1)$ ，总共 $m$ 个.

所以这 $(m+1)^2$ 个满足命题 1 的 $(i,j)$ 中，不满足命题 2 的恰好有 $m$ 个.

这就得到同时满足命题 1 和命题 2 的 $(i,j)$ 的个数为 $(m+1)^2-m$ .

当我们从 $1,2,...,4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j\,(i<j)$ 时，总的选取方式的个数等于

$\frac{(4m+2)(4m+1)}{2}=(2m+1)(4m+1)$.

而根据之前的结论，使得数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $(i,j)-$可分数列的 $(i,j)$ 至少有 $(m+1)^2-m$ 个.

所以数列 $a_1,a_2,...,a_{4m+2}$ 是 $(i,j)-$可分数列的概率 $P_m$ 一定满足

$$P_m\ge\frac{(m+1)^2-m}{(2m+1)(4m+1)}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}>\frac{m^2+m+\frac{1}{4}}{(2m+1)(4m+2)}=\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}{2(2m+1)(2m+1)}=\frac{1}{8}.$$

这就证明了结论.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于对新定义数列的理解，只有理解了定义，方可使用定义验证或探究结论.