2022年普通高等学校招生全国统一考试

（新高考全国Ⅱ卷）数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,1,2,4\},B=\{x\,||x-1|\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,4\}$　　D. $\{-1,4\}$

【答案】B

【解析】

【分析】求出集合 B 后可求 $A\cap B$.

【详解】$B=\{x\,|\,0\le x\le 2\}$，故 $A\cap B=\{1,2\}$，

故选：B.

2. $(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=$（　　）

A. $-2+4\mathrm{i}$　　B. $-2-4\mathrm{i}$　　C. $6+2\mathrm{i}$　　D. $6-2\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的乘法可求 $(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})$.

【详解】$(2+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=2+4-4\mathrm{i}+2\mathrm{i}=6-2\mathrm{i}$，

故选：D.

4. 已知向量 $\vec{a}=(3,4),\vec{b}=(1,0),\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$，若 $<\vec{a},\vec{c}>=<\vec{b},\vec{c}>$，则 $t=$（　　）

A. -6　　B. -5　　C. 5　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】利用向量的运算和向量的夹角的余弦公式的坐标形式化简即可求得

【详解】解：$\vec{c}=\left(3+t,4\right)$，$\cos\vec{a},\vec{c}=\cos b,\vec{c}$，即 $\dfrac{9+3t+16}{5\left|\vec{c}\right|}=\dfrac{3+t}{\left|\vec{c}\right|}$，解得 $t=5$，

故选：C

5. 有甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻，则不同排列方式共有（　　）

A. 12 种　　B. 24 种　　C. 36 种　　D. 48 种

【答案】B

【解析】

【分析】利用捆绑法处理丙丁，用插空法安排甲，利用排列组合与计数原理即可得解

【详解】因为丙丁要在一起，先把丙丁捆绑，看做一个元素，连同乙，戊看成三个元素排列，有 $3!$ 种排列方式；为使甲不在两端，必须且只需甲在此三个元素的中间两个位置任选一个位置插入，有 2 种插空方式；注意到丙丁两人的顺序可交换，有 2 种排列方式，故安排这 5 名同学共有：$3!\times2\times2=24$ 种不同的排列方式，

故选：B

6. 若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，则（　　）

A. $\tan\left(\alpha-\beta\right)=1$　　B. $\tan\left(\alpha+\beta\right)=1$

C. $\tan\left(\alpha-\beta\right)=-1$　　D. $\tan\left(\alpha+\beta\right)=-1$

【答案】C

【解析】

【分析】由两角和差的正余弦公式化简，结合同角三角函数的商数关系即可得解.

【详解】由已知得：$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$，

即：$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，

即：$\sin\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)=0$，

所以 $\tan\left(\alpha-\beta\right)=-1$，

故选：C

7. 已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为$3\sqrt{3}$和$4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A. 100π　　B. 128π　　C. 144π　　D. 192π

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可求出正三棱台上下底面所在圆面的半径r_1,r_2，再根据球心距，圆面半径，以及球的半径之间的关系，即可解出球的半径，从而得出球的表面积.

【详解】设正三棱台上下底面所在圆面的半径r_1,r_2，所以$2r_1=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ},2r_2=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$，即$r_1=3,r_2=4$，设球心到上下底面的距离分别为$d_1,d_2$，球的半径为$R$，所以$d_1=\sqrt{R^2-9}$，$d_2=\sqrt{R^2-16}$，故$\left|d_1-d_2\right|=1$或$d_1+d_2=1$，即$\left|\sqrt{R^2-9}-\sqrt{R^2-16}\right|=1$或$\sqrt{R^2-9}+\sqrt{R^2-16}=1$，解得$R^2=25$符合题意，所以球的表面积为$S=4\pi R^2=100\pi$.

故选：A.

8. 已知函数$f(x)$的定义域为**R**，且$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y),f(1)=1$，则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　　）

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意赋值即可知函数$f\left(x\right)$的一个周期为6，求出函数一个周期中的$f\left(1\right),f\left(2\right),\cdots,f\left(6\right)$的值，即可解出.

【详解】因为$f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$，令$x=1,y=0$可得，$2f\left(1\right)=f\left(1\right)f\left(0\right)$，所以$f\left(0\right)=2$，令$x=0$可得，$f\left(y\right)+f\left(-y\right)=2f\left(y\right)$，即$f\left(y\right)=f\left(-y\right)$，所以函数$f\left(x\right)$为偶函数，令$y=1$得，$f\left(x+1\right)+f\left(x-1\right)=f\left(x\right)f\left(1\right)=f\left(x\right)$，即有$f\left(x+2\right)+f\left(x\right)=f\left(x+1\right)$，从而可知$f\left(x+2\right)=-f\left(x-1\right)$，$f\left(x-1\right)=-f\left(x-4\right)$，故$f\left(x+2\right)=f\left(x-4\right)$，即$f\left(x\right)=f\left(x+6\right)$，所以函数$f\left(x\right)$的一个周期为$6$.

因为$f\left(2\right)=f\left(1\right)-f\left(0\right)=1-2=-1$，$f\left(3\right)=f\left(2\right)-f\left(1\right)=-1-1=-2$，$f\left(4\right)=f\left(-2\right)=f\left(2\right)=-1$，

$f(5)=f(-1)=f(1)=1$， $f(6)=f(0)=2$，所以

一个周期内的 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$．由于 22 除以 6 余 4，

所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$．

故选：A．

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图像关于点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 中心对称，则（　　）

A. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减

B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 有两个极值点

C. 直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

【答案】AD

【解析】

【分析】根据三角函数的性质逐个判断各选项，即可解出．

【详解】由题意得：$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$，所以 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$，

即 $\varphi=-\frac{4\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $k=2$ 时，$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$．

对 A，当 $x\in\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$，由正弦函数 $y=\sin u$ 图象知 $y=f(x)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 上是单调递减；

对 B，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$，由正弦函数 $y=\sin u$ 图象知 $y=f(x)$ 只有 1 个极值点，

由 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，解得 $x=\frac{5\pi}{12}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 为函数的唯一极值点；

对 C，当 $x=\frac{7\pi}{6}$ 时，$2x+\frac{2\pi}{3}=3\pi$，$f(\frac{7\pi}{6})=0$，直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 不是对称轴；

对 D，由 $y'=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$ 得：$\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，

解得 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

从而得：$x=k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线斜率为 $k=y'|_{x=0}=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1$，

切线方程为：$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-(x-0)$ 即 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$．

故选：AD．

12. 若 x，y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

A. $x+y\le 1$

B. $x+y\ge -2$

C. $x^2+y^2\le 2$

D. $x^2+y^2\ge 1$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据基本不等式或者取特值即可判断各选项的真假．

【详解】因为 $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$（$a,b$ Î $\mathbf{R}$），由 $x^2+y^2-xy=1$ 可变形为，

$(x+y)^2-1=3xy\le 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，解得 $-2\le x+y\le 2$，当且仅当 $x=y=-1$ 时，$x+y=-2$，当且仅当

$x=y=1$ 时，$x+y=2$，所以 A 错误，B 正确；

由 $x^2+y^2-xy=1$ 可变形为 $\left(x^2+y^2\right)-1=xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$，解得 $x^2+y^2\le 2$，当且仅当 $x=y=\pm1$ 时取等号，所以 C 正确；

因为 $x^2+y^2-xy=1$ 变形可得 $\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=1$，设 $x-\dfrac{y}{2}=\cos\theta,\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta$，所以

$x=\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta,y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$，因此

$x^2+y^2=\cos^2\theta+\dfrac{5}{3}\sin^2\theta+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta-\dfrac{1}{3}\cos 2\theta+\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[\dfrac{2}{3},2\right]$，所以当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3},y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时满足等式，但是 $x^2+y^2\ge 1$ 不成立，所以 D 错误.

故选：BC.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N\left(2,\sigma^2\right)$，且 $P(2<X\le 2.5)=0.36$，则 $P(X>2.5)=$__________.

【答案】0.14 ## $\dfrac{7}{50}$.

【解析】

【分析】根据正态分布曲线的性质即可解出.

【详解】因为 $X\sim N\left(2,\sigma^2\right)$，所以 $P\left(X<2\right)=P\left(X>2\right)=0.5$，因此

$P\left(X>2.5\right)=P\left(X>2\right)-P\left(2<X\le 2.5\right)=0.5-0.36=0.14$.

故答案为：0.14 .

14. 曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为__________，__________.

【答案】 ①. $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ ②. $y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$

【解析】

【分析】分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况，当 $x>0$ 时设切点为 $\left(x_0,\ln x_0\right)$，求出函数的导函数，即可求出切线的斜率，从而表示出切线方程，再根据切线过坐标原点求出 x_0，即可求出切线方程，当 $x<0$ 时同理可得；

【详解】解： 因为 $y=\ln|x|$，

当 $x>0$ 时 $y=\ln x$，设切点为 $\left(x_0,\ln x_0\right)$，由 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为

$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$，

又切线过坐标原点，所以 $-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(-x_0\right)$，解得 $x_0=\mathrm{e}$，所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(x-\mathrm{e}\right)$，即 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$；

当 $x<0$ 时 $y=\ln\left(-x\right)$，设切点为 $\left(x_1,\ln\left(-x_1\right)\right)$，由 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_1}=\frac{1}{x_1}$，所以切线方程为

$y-\ln\left(-x_1\right)=\frac{1}{x_1}\left(x-x_1\right)$，

又切线过坐标原点，所以 $-\ln\left(-x_1\right)=\frac{1}{x_1}\left(-x_1\right)$，解得 $x_1=-\mathrm{e}$，所以切线方程为 $y-1=\frac{1}{-\mathrm{e}}\left(x+\mathrm{e}\right)$，即

$y=-\frac{1}{\mathrm{e}}x$；

故答案为：$y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$；$y=-\frac{1}{\mathrm{e}}x$

15. 设点 $A(-2,3),B(0,a)$，若直线 AB 关于 $y=a$ 对称的直线与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点，则 a 的取值范围是________.

【答案】$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$

【解析】

【分析】首先求出点 A 关于 $y=a$ 对称点 A' 的坐标，即可得到直线 l 的方程，根据圆心到直线的距离小于等于半径得到不等式，解得即可；

【详解】解：$A\left(-2,3\right)$ 关于 $y=a$ 对称的点的坐标为 $A'\left(-2,2a-3\right)$，$B\left(0,a\right)$ 在直线 $y=a$ 上，

所以 $A'B$ 所在直线即为直线 l，所以直线 l 为 $y=\frac{a-3}{-2}x+a$，即 $\left(a-3\right)x+2y-2a=0$；

圆 $C:\left(x+3\right)^2+\left(y+2\right)^2=1$，圆心 $C\left(-3,-2\right)$，半径 $r=1$，

依题意圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{\left|-3\left(a-3\right)-4-2a\right|}{\sqrt{\left(a-3\right)^2+2^2}}\le 1$，

即$\left(5-5a\right)^2\le\left(a-3\right)^2+2^2$，解得$\frac{1}{3}\le a\le\frac{3}{2}$，即$a\in\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$；

故答案为：$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17. 已知$\left\{a_n\right\}$为等差数列，$\left\{b_n\right\}$是公比为 2 的等比数列，且$a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$．

（1）证明：$a_1=b_1$；

（2）求集合$\left\{k\middle|b_k=a_m+a_1,1\le m\le 500\right\}$中元素个数．

【答案】（1）证明见解析；

（2）9．

【解析】

【分析】（1）设数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，根据题意列出方程组即可证出；

（2）根据题意化简可得$m=2^{k-2}$，即可解出．

【小问 1 详解】

设数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，所以，$\begin{cases}a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1\\a_1+d-2b_1=8b_1-\left(a_1+3d\right)\end{cases}$，即可解得，$b_1=a_1=\frac{d}{2}$，所以原命题得证．

【小问 2 详解】

由（1）知，$b_1=a_1=\frac{d}{2}$，所以$b_k=a_m+a_1\Leftrightarrow b_1\times 2^{k-1}=a_1+\left(m-1\right)d+a_1$，即$2^{k-1}=2m$，亦即$m=2^{k-2}\in\left[1,500\right]$，解得$2\le k\le 10$，所以满足等式的解$k=2,3,4,\cdots,10$，故集合$\left\{k\mid b_k=a_m+a_1,1\le m\le 500\right\}$中的元素个数为$10-2+1=9$．

18. 记$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，分别以 a，b，c 为边长的三个正三角形的面积依次为S_1,S_2,S_3，已知$S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin B=\frac{1}{3}$．

（1）求$\triangle ABC$的面积；

（2）若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{3}$，求 b.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{2}}{8}$

（2）$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）先表示出 S_1,S_2,S_3，再由 $S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 求得 $a^2+c^2-b^2=2$，结合余弦定理及平方关系求得 ac，再由面积公式求解即可；

（2）由正弦定理得 $\frac{b^2}{\sin^2 B}=\frac{ac}{\sin A\sin C}$，即可求解.

【小问 1 详解】

由题意得 $S_1=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2,S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，则 $S_1-S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}b^2+\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $a^2+c^2-b^2=2$，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $ac\cos B=1$，则 $\cos B>0$，又 $\sin B=\frac{1}{3}$，

则 $\cos B=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$ac=\frac{1}{\cos B}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{8}$；

【小问 2 详解】

由正弦定理得：$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，则 $\frac{b^2}{\sin^2 B}=\frac{a}{\sin A}\cdot\frac{c}{\sin C}=\frac{ac}{\sin A\sin C}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\frac{9}{4}$，则 $\frac{b}{\sin B}=\frac{3}{2}$，

$b=\frac{3}{2}\sin B=\frac{1}{2}$.

21. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F(2,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.

（1）求 C 的方程；

（2）过 F 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点，点 $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$ 在 C 上，且 $x_1>x_2>0,y_1>0$. 过 P 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与过 Q 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交于点 M.从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立：

①M 在 AB 上；② $PQ//AB$；③ $|MA|=|MB|$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

【答案】（1） $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）利用焦点坐标求得 c 的值，利用渐近线方程求得 a,b 的关系，进而利用 a,b,c 的平方关系求得 a,b 的值，得到双曲线的方程；

（2）先分析得到直线 AB 的斜率存在且不为零，设直线 AB 的斜率为 k, $M(x_0,y_0)$, 由③ $|AM|=|BM|$ 等价分析得到 $x_0+ky_0=\frac{8k^2}{k^2-3}$；由直线 PM 和 QM 的斜率得到直线方程，结合双曲线的方程，两点间距离公式得到直线 PQ 的斜率 $m=\frac{3x_0}{y_0}$，由② $PQ//AB$ 等价转化为 $ky_0=3x_0$，由① M 在直线 AB 上等价于 $ky_0=k^2(x_0-2)$，然后选择两个作为已知条件一个作为结论，进行证明即可.

【小问 1 详解】

右焦点为 $F(2,0)$, $\therefore c=2$, $\because$ 渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$, $\therefore \frac{b}{a}=\sqrt{3}$, $\therefore b=\sqrt{3}a$, $\therefore c^2=a^2+b^2=4a^2=4$, $\therefore a=1$，$\therefore b=\sqrt{3}$.

$\therefore$C 的方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

【小问 2 详解】

由已知得直线 PQ 的斜率存在且不为零，直线 AB 的斜率不为零，

若选由①②推③或选由②③推①：由②成立可知直线 AB 的斜率存在且不为零；

若选①③推②，则 M 为线段 AB 的中点，假若直线 AB 的斜率不存在，则由双曲线的对称性可知 M 在 x 轴上，即为焦点 F, 此时由对称性可知 P 、Q 关于 x 轴对称，与从而 $x_1=x_2$，已知不符；

总之，直线 AB 的斜率存在且不为零.

设直线 AB 的斜率为 k, 直线 AB 方程为 $y=k(x-2)$,

则条件① M 在 AB 上，等价于 $y_0=k(x_0-2)\Leftrightarrow ky_0=k^2(x_0-2)$；

两渐近线的方程合并为 $3x^2-y^2=0$,

联立消去 y 并化简整理得：$(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2=0$

设 $A(x_3,y_3),B(x_3,y_4)$, 线段中点为 $N(x_N,y_N)$, 则 $x_N=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{2k^2}{k^2-3}, y_N=k(x_N-2)=\frac{6k}{k^2-3}$,

设 $M(x_0, y_0)$,

则条件③ $|AM| = |BM|$ 等价于 $(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2 = (x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2$,

移项并利用平方差公式整理得：

$(x_3 - x_4)[2x_0 - (x_3 + x_4)] + (y_3 - y_4)[2y_0 - (y_3 + y_4)] = 0$,

$[2x_0 - (x_3 + x_4)] + \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}[2y_0 - (y_3 + y_4)] = 0$, 即 $x_0 - x_N + k(y_0 - y_N) = 0$,

即 $x_0 + ky_0 = \frac{8k^2}{k^2 - 3}$;

由题意知直线 PM 的斜率为 $-\sqrt{3}$，直线 QM 的斜率为 $\sqrt{3}$,

$\therefore$ 由 $y_1 - y_0 = -\sqrt{3}(x_1 - x_0), y_2 - y_0 = \sqrt{3}(x_2 - x_0)$,

$\therefore y_1 - y_2 = -\sqrt{3}(x_1 + x_2 - 2x_0)$,

所以直线 PQ 的斜率 $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{\sqrt{3}(x_1 + x_2 - 2x_0)}{x_1 - x_2}$,

直线 $PM: y = -\sqrt{3}(x - x_0) + y_0$, 即 $y = y_0 + \sqrt{3}x_0 - \sqrt{3}x$,

代入双曲线的方程 $3x^2 - y^2 - 3 = 0$, 即 $(\sqrt{3}x + y)(\sqrt{3}x - y) = 3$ 中,

得：$(y_0 + \sqrt{3}x_0)[2\sqrt{3}x - (y_0 + \sqrt{3}x_0)] = 3$,

解得 P 的横坐标：$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{y_0 + \sqrt{3}x_0} + y_0 + \sqrt{3}x_0\right)$,

同理：$x_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{y_0 - \sqrt{3}x_0} + y_0 - \sqrt{3}x_0\right)$,

$\therefore x_1 - x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3y_0}{y_0^2 - 3x_0^2} + y_0\right)$, $x_1 + x_2 - 2x_0 = -\frac{3x_0}{y_0^2 - 3x_0^2} - x_0$,

$\therefore m = \frac{3x_0}{y_0}$,

$\therefore$ 条件② $PQ // AB$ 等价于 $m = k \Leftrightarrow ky_0 = 3x_0$,

综上所述：

条件① M 在 AB 上，等价于 $ky_0 = k^2(x_0 - 2)$;

条件② $PQ // AB$ 等价于 $ky_0 = 3x_0$;

条件③$\left|AM\right|=\left|BM\right|$等价于$x_0+ky_0=\dfrac{8k^2}{k^2-3}$；

选①②推③：

由①②解得：$x_0=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$,$\therefore x_0+ky_0=4x_0=\dfrac{8k^2}{k^2-3}$，∴③成立；

选①③推②：

由①③解得：$x_0=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$，$ky_0=\dfrac{6k^2}{k^2-3}$，

$\therefore ky_0=3x_0$，∴②成立；

选②③推①：

由②③解得：$x_0=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$，$ky_0=\dfrac{6k^2}{k^2-3}$，$\therefore x_0-2=\dfrac{6}{k^2-3}$，

$\therefore ky_0=k^2\left(x_0-2\right)$，∴①成立.

22. 已知函数$f(x)=xe^{ax}-e^x$.

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x>0$时，$f(x)<-1$，求a的取值范围；

（3）设$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$.

【答案】（1）$f\left(x\right)$的减区间为$\left(-\infty,0\right)$，增区间为$\left(0,+\infty\right)$.

（2）$a\le\dfrac{1}{2}$

（3）见解析

【解析】

【分析】（1）求出$f'\left(x\right)$，讨论其符号后可得$f\left(x\right)$的单调性.

（2）设$h\left(x\right)=xe^{ax}-e^x+1$，求出$h''\left(x\right)$，先讨论$a>\dfrac{1}{2}$时题设中的不等式不成立，再就$0<a\le\dfrac{1}{2}$结合放缩法讨论$h'\left(x\right)$符号，最后就$a\le 0$结合放缩法讨论$h\left(x\right)$的范围后可得参数的取值范围.

（3）由（2）可得$2\ln t<t-\dfrac{1}{t}$对任意的$t>1$恒成立，从而可得$\ln\left(n+1\right)-\ln n<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$对任意的$n\in N^*$恒成立，结合裂项相消法可证题设中的不等式.

【小问1详解】

当$a=1$时，$f\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x$，则$f'\left(x\right)=xe^x$，

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,0)$，增区间为 $(0,+\infty)$.

【小问 2 详解】

设 $h(x)=xe^{ax}-e^{x}+1$，则 $h(0)=0$，

又 $h'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^{x}$，设 $g(x)=(1+ax)e^{ax}-e^{x}$，

则 $g'(x)=(2a+a^{2}x)e^{ax}-e^{x}$，

若 $a>\frac{1}{2}$，则 $g'(0)=2a-1>0$，

因为 $g'(x)$ 为连续不间断函数，

故存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $\forall x\in(0,x_0)$，总有 $g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 为增函数，故 $g(x)>g(0)=0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 为增函数，故 $h(x)>h(0)=-1$，与题设矛盾.

若 $0<a\le\frac{1}{2}$，则 $h'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^{x}=e^{ax+\ln(1+ax)}-e^{x}$，

下证：对任意 $x>0$，总有 $\ln(1+x)<x$ 成立，

证明：设 $S(x)=\ln(1+x)-x$，故 $S'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$，

故 $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，故 $S(x)<S(0)=0$ 即 $\ln(1+x)<x$ 成立.

由上述不等式有 $e^{ax+\ln(1+ax)}-e^{x}<e^{ax+ax}-e^{x}=e^{2ax}-e^{x}\le 0$，

故 $h'(x)\le 0$ 总成立，即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

所以 $h(x)<h(0)=-1$.

当 $a\le 0$ 时，有 $h'(x)=e^{ax}-e^{x}+axe^{ax}<1-1+0=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，所以 $h(x)<h(0)=-1$.

综上，$a\le\frac{1}{2}$.

【小问 3 详解】

取 $a=\frac{1}{2}$，则 $\forall x>0$，总有 $xe^{\frac{1}{2}x}-e^{x}+1<0$ 成立，

令 $t=e^{\frac{1}{2}x}$，则 $t>1,t^{2}=e^{x},x=2\ln t$，

故$2t\ln t<t^2-1$即$2\ln t<t-\frac{1}{t}$对任意的$t>1$恒成立.

所以对任意的$n\in N^*$，有$2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}$，

整理得到：$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，

故$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n$

$=\ln(n+1)$，

故不等式成立.

【点睛】思路点睛：函数参数的不等式的恒成立问题，应该利用导数讨论函数的单调性，注意结合端点处导数的符号合理分类讨论，导数背景下数列不等式的证明，应根据已有的函数不等式合理构建数列不等式.