绝密☆启用前　试卷类型：A

2022年普通高等学校招生全国统一考试

数学

本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x\mid 3x\ge 1\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{x|0\le x<2\}$　　B. $\left\{x\left|\frac{1}{3}\le x<2\right.\right\}$　　C. $\{x|3\le x<16\}$　　D. $\left\{x\left|\frac{1}{3}\le x<16\right.\right\}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合 M,N 后可求 $M\cap N$.

【详解】$M=\{x\mid 0\le x<16\}, N=\{x\mid x\ge\frac{1}{3}\}$，故 $M\cap N=\left\{x\left|\frac{1}{3}\le x<16\right.\right\}$，

故选：D

2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\overline{z}=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的除法可求 z，从而可求 $z+\overline{z}$.

【详解】由题设有 $1-z=\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$，故 $z=1+\mathrm{i}$，故 $z+\overline{z}=(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})=2$，

故选：D

3. 在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，$BD=2DA$．记$\overrightarrow{CA}=\vec{m},\overrightarrow{CD}=\vec{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$（　　）

A. $3\vec{m}-2\vec{n}$　　　　B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$　　　　C. $3\vec{m}+2\vec{n}$　　　　D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据几何条件以及平面向量的线性运算即可解出．

【详解】因为点D在边AB上，$BD=2DA$，所以$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$，即$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\right)$，

所以$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\vec{n}-2\vec{m}=-2\vec{m}+3\vec{n}$．

故选：B．

6. 记函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$的最小正周期为$T$．若$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且$y=f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$中心对称，则$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A. 1　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. $\frac{5}{2}$　　　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】由三角函数的图象与性质可求得参数，进而可得函数解析式，代入即可得解.

【详解】由函数的最小正周期T满足$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，得$\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，解得$2<\omega<3$，

又因为函数图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$对称，所以$\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in Z$，且$b=2$，

所以$\omega=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}k,k\in Z$，所以$\omega=\frac{5}{2}$，$f(x)=\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，

所以$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+2=1$.

故选：A

7. 设$a=0.1e^{0.1},b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

A. $a<b<c$　　　　B. $c<b<a$　　　　C. $c<a<b$　　　　D. $a<c<b$

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$， 导数判断其单调性，由此确定 a,b,c 的大小.

【详解】设 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>-1)$，因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时， $f'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，

所以 $f(\frac{1}{9})<f(0)=0$，所以 $\ln\frac{10}{9}-\frac{1}{9}<0$，故 $\frac{1}{9}>\ln\frac{10}{9}=-\ln 0.9$，即 $b>c$，

所以 $f(-\frac{1}{10})<f(0)=0$，所以 $\ln\frac{9}{10}+\frac{1}{10}<0$，故 $\frac{9}{10}<e^{-\frac{1}{10}}$，所以 $\frac{1}{10}e^{\frac{1}{10}}<\frac{1}{9}$，

故 $a<b$，

设 $g(x)=x\,e^{x}+\ln(1-x)(0<x<1)$，则 $g'(x)=\left(x+1\right)e^{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{\left(x^{2}-1\right)e^{x}+1}{x-1}$，

令 $h(x)=e^{x}(x^{2}-1)+1$， $h'(x)=e^{x}(x^{2}+2x-1)$，

当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时， $h'(x)<0$，函数 $h(x)=e^{x}(x^{2}-1)+1$ 单调递减，

当 $\sqrt{2}-1<x<1$ 时， $h'(x)>0$，函数 $h(x)=e^{x}(x^{2}-1)+1$ 单调递增，

又 $h(0)=0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时， $h(x)<0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时， $g'(x)>0$，函数 $g(x)=x\,e^{x}+\ln(1-x)$ 单调递增，

所以 $g(0.1)>g(0)=0$，即 $0.1e^{0.1}>-\ln 0.9$，所以 $a>c$

故选：C.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

【答案】C

【解析】

【分析】设正四棱锥的高为 h，由球的截面性质列方程求出正四棱锥的底面边长与高的关系，由此确定正四棱锥体积的取值范围.

【详解】∵ 球的体积为 36π，所以球的半径 $R=3$，

设正四棱锥的底面边长为 $2a$， 高为 h，

则 $l^{2}=2a^{2}+h^{2}$， $3^{2}=2a^{2}+(3-h)^{2}$，

所以$6h=l^2$，$2a^2=l^2-h^2$

所以正四棱锥的体积$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times 4a^2\times h=\frac{2}{3}\times(l^2-\frac{l^4}{36})\times\frac{l^2}{6}=\frac{1}{9}\left(l^4-\frac{l^6}{36}\right)$，

所以$V'=\frac{1}{9}\left(4l^3-\frac{l^5}{6}\right)=\frac{1}{9}l^3\left(\frac{24-l^2}{6}\right)$，

当$3\le l\le 2\sqrt{6}$时，$V'>0$，当$2\sqrt{6}<l\le 3\sqrt{3}$时，$V'<0$，

所以当$l=2\sqrt{6}$时，正四棱锥的体积V取最大值，最大值为$\frac{64}{3}$，

又$l=3$时，$V=\frac{27}{4}$，$l=3\sqrt{3}$时，$V=\frac{81}{4}$，

所以正四棱锥的体积V的最小值为$\frac{27}{4}$，

所以该正四棱锥体积的取值范围是$\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

故选：C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

10. 已知函数$f(x)=x^3-x+1$，则（　　）

A. $f(x)$有两个极值点

B. $f(x)$有三个零点

C. 点$(0,1)$是曲线$y=f(x)$的对称中心

D. 直线$y=2x$是曲线$y=f(x)$的切线

【答案】AC

【解析】

【分析】利用极值点的定义可判断 A，结合$f(x)$的单调性、极值可判断 B，利用平移可判断 C；利用导数的几何意义判断 D.

【详解】由题，$f'\left(x\right)=3x^2-1$，令$f'\left(x\right)>0$得$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$或$x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

令$f'(x)<0$得$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$f(x)$在$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$上单调递减，在$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$，$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$上单调递增，

所以$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$是极值点，故 A 正确；

因 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=1+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f(\frac{\sqrt{3}}{3})=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f\left(-2\right)=-5<0$，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上有一个零点，

当 $x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$f\left(x\right)\geq f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$，即函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上无零点，

综上所述，函数 $f(x)$ 有一个零点，故 B 错误；

令 $h(x)=x^3-x$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$h\left(-x\right)=\left(-x\right)^3-\left(-x\right)=-x^3+x=-h\left(x\right)$，

则 $h(x)$ 是奇函数，$(0,0)$ 是 $h(x)$ 的对称中心，

将 $h(x)$ 的图象向上移动一个单位得到 $f(x)$ 的图象，

所以点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，故 C 正确；

令 $f'\left(x\right)=3x^2-1=2$，可得 $x=\pm1$，又 $f(1)=f\left(-1\right)=1$，

当切点为 $(1,1)$ 时，切线方程为 $y=2x-1$，当切点为 $(-1,1)$ 时，切线方程为 $y=2x+3$，

故 D 错误.

故选：AC

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P，Q 两点，则（　　）

A. C 的准线为 $y=-1$

B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

【答案】BCD

【解析】

【分析】求出抛物线方程可判断 A，联立 AB 与抛物线的方程求交点可判断 B，利用距离公式及弦长公式可判断 C、D.

【详解】将点 A 的代入抛物线方程得 $1=2p$，所以抛物线方程为 $x^2=y$，故准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，A 错误；

$k_{AB}=\frac{1-(-1)}{1-0}=2$，所以直线 AB 的方程为 $y=2x-1$，

联立 $\begin{cases}y=2x-1\\x^2=y\end{cases}$，可得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，故 B 正确；

设过 B 的直线为 l，若直线 l 与 y 轴重合，则直线 l 与抛物线 C 只有一个交点，

所以，直线l的斜率存在，设其方程为$y=kx-1$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=kx-1\\x^2=y\end{cases}$，得$x^2-kx+1=0$，

所以$\begin{cases}\Delta=k^2-4>0\\x_1+x_2=k\\x_1x_2=1\end{cases}$，所以$k>2$或$k<-2$，$y_1y_2=(x_1x_2)^2=1$，

又$|OP|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{y_1+y_1^2}$，$|OQ|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{y_2+y_2^2}$，

所以$|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{y_1y_2(1+y_1)(1+y_2)}=\sqrt{kx_1\times kx_2}=|k|>2=|OA|^2$，故C正确；

因为$|BP|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1|$，$|BQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2|$，

所以$|BP|\cdot|BQ|=(1+k^2)|x_1x_2|=1+k^2>5$，而$|BA|^2=5$，故D正确.

故选：BCD

12. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$，若$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，则（　　）

A. $f(0)=0$　　　　B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　　　C. $f(-1)=f(4)$　　　　D. $g(-1)=g(2)$

【答案】BC

【解析】

【分析】转化题设条件为函数的对称性，结合原函数与导函数图象的关系，根据函数的性质逐项判断即可得解.

【详解】因为$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，

所以$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$即$f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$，$g(2+x)=g(2-x)$，

所以$f(3-x)=f(x)$，$g(4-x)=g(x)$，则$f(-1)=f(4)$，故C正确；

函数$f(x)$，$g(x)$的图象分别关于直线$x=\frac{3}{2},x=2$对称，

又$g(x)=f'(x)$，且函数$f(x)$可导，

所以$g\left(\frac{3}{2}\right)=0,g(3-x)=-g(x)$，

所以$g(4-x)=g(x)=-g\left(3-x\right)$，所以$g(x+2)=-g(x+1)=g\left(x\right)$，

所以$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$，$g\left(-1\right)=g\left(1\right)=-g\left(2\right)$，故 B 正确，D 错误；

若函数$f(x)$满足题设条件，则函数$f\left(x\right)+C$（C为常数）也满足题设条件，所以无法确定$f(x)$的函数值，故 A 错误.

故选：BC.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是转化题干条件为抽象函数的性质，准确把握原函数与导函数图象间的关系，准确把握函数的性质（必要时结合图象）即可得解.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(1-\dfrac{y}{x}\right)(x+y)^{8}$的展开式中$x^{2}y^{6}$的系数为________________（用数字作答）.

【答案】-28

【解析】

【分析】$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\left(x+y\right)^{8}$可化为$\left(x+y\right)^{8}-\dfrac{y}{x}\left(x+y\right)^{8}$，结合二项式展开式的通项公式求解.

【详解】因为$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\left(x+y\right)^{8}=\left(x+y\right)^{8}-\dfrac{y}{x}\left(x+y\right)^{8}$，

所以$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\left(x+y\right)^{8}$的展开式中含$x^{2}y^{6}$的项为$C_8^6x^2y^6-\dfrac{y}{x}C_8^5x^3y^5=-28x^2y^6$，

$\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\left(x+y\right)^{8}$的展开式中$x^{2}y^{6}$的系数为-28

故答案为：-28

15. 若曲线$y=(x+a)e^{x}$有两条过坐标原点的切线，则a的取值范围是________________.

【答案】$\left(-\infty,-4\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

【解析】

【分析】设出切点横坐标x_0，利用导数的几何意义求得切线方程，根据切线经过原点得到关于x_0的方程，根据此方程应有两个不同的实数根，求得a的取值范围.

【详解】$\because$ $y=(x+a)e^{x}$，$\therefore$ $y'=(x+1+a)e^{x}$，

设切点为$\left(x_0,y_0\right)$，则$y_0=\left(x_0+a\right)e^{x_0}$，切线斜率$k=\left(x_0+1+a\right)e^{x_0}$，

切线方程为：$y-\left(x_0+a\right)e^{x_0}=\left(x_0+1+a\right)e^{x_0}\left(x-x_0\right)$，

$\because$切线过原点，$\therefore$ $-\left(x_0+a\right)e^{x_0}=\left(x_0+1+a\right)e^{x_0}\left(-x_0\right)$，

整理得：$x_0^2+ax_0-a=0$，

∵切线有两条，∴ �$=a^2+4a>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$，

∴ a 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$，

故答案为：$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1,\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$．

【答案】（1）$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）利用等差数列的通项公式求得 $\dfrac{S_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+2}{3}$，得到 $S_n=\dfrac{(n+2)a_n}{3}$，利用和与项的关系得到当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+2)a_n}{3}-\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，进而得：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，利用累乘法求得 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，检验对于 $n=1$ 也成立，得到 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

（2）由（1）的结论，利用裂项求和法得到 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$，进而证得．

【小问 1 详解】

∵ $a_1=1$，∴ $S_1=a_1=1$，∴ $\dfrac{S_1}{a_1}=1$，

又∵ $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列，

∴ $\dfrac{S_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+2}{3}$，∴ $S_n=\dfrac{(n+2)a_n}{3}$，

∴当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

∴ $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+2)a_n}{3}-\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

整理得：$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，

即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，

∴ $a_n=a_1\times\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\ldots\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$=1\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\ldots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

显然对于 $n=1$ 也成立，

∴ $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

【小问 2 详解】

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

∴ $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)<2$

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

（1）若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B；

（2）求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{6}$；

（2）$4\sqrt{2}-5$.

【解析】

【分析】（1）根据二倍角公式以及两角差的余弦公式可将 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$ 化成 $\cos(A+B)=\sin B$，再结合 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$，即可求出；

（2）由（1）知，$C=\frac{\pi}{2}+B$，$A=\frac{\pi}{2}-2B$，再利用正弦定理以及二倍角公式将$\frac{a^2+b^2}{c^2}$化成$4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5$，然后利用基本不等式即可解出．

【小问 1 详解】

因为$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\frac{\sin B}{\cos B}$，即

$\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos\left(A+B\right)=-\cos C=\frac{1}{2}$，

而$0<B<\frac{\pi}{2}$，所以$B=\frac{\pi}{6}$；

【小问 2 详解】

由（1）知，$\sin B=-\cos C>0$，所以$\frac{\pi}{2}<C<\pi,0<B<\frac{\pi}{2}$，

而$\sin B=-\cos C=\sin\left(C-\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$C=\frac{\pi}{2}+B$，即有$A=\frac{\pi}{2}-2B$．

所以$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\cos^2 2B+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}$

$=\frac{\left(2\cos^2 B-1\right)^2+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5\geq 2\sqrt{8}-5=4\sqrt{2}-5$．

当且仅当$\cos^2 B=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，所以$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值为$4\sqrt{2}-5$．

20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

（1）能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选

到的人患有该疾病”．$\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\dfrac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R.

（i）证明：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$；

（ii）利用该调查数据，给出 $P(A|B),P(A|\bar{B})$ 的估计值，并利用（i）的结果给出 R 的估计值.

附 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】（1）答案见解析

（2）（i）证明见解析；(ii) $R=6$；

【解析】

【分析】(1)由所给数据结合公式求出 K^2 的值，将其与临界值比较大小，由此确定是否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未黄该疾病群体的卫生习惯有差异；(2)(i) 根据定义结合条件概率公式即可完成证明；(ii)根据（i）结合已知数据求 R.

【小问 1 详解】

由已知 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200(40\times90-60\times10)^2}{50\times150\times100\times100}=24$，

又 $P(K^2\geq6.635)=0.01$，$24>6.635$，

所以有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

【小问 2 详解】

(i)因为 $R=\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}\cdot\dfrac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(B|\bar{A})}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(A)}{P(A\bar{B})}\cdot\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}\cdot\dfrac{P(\bar{A})}{P(\bar{A}B)}$，

所以 $R=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\cdot\dfrac{P(B)}{P(\bar{A}B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}\cdot\dfrac{P(\bar{B})}{P(A\bar{B})}$

所以 $R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$，

(ii)

由已知$P(A|B)=\dfrac{40}{100}$，$P(A|\bar{B})=\dfrac{10}{100}$，

又$P(\bar{A}|B)=\dfrac{60}{100}$，$P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{90}{100}$，

所以$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}=6$

21. 已知点$A(2,1)$在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，直线$l$交$C$于$P$，$Q$两点，直线$AP,AQ$的斜率之和为0.

（1）求l的斜率；

（2）若$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求$\triangle PAQ$的面积.

【答案】（1）-1；

（2）$\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$.

【解析】

【分析】（1）由点$A(2,1)$在双曲线上可求出a，易知直线l的斜率存在，设$l:y=kx+m$，$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，再根据$k_{AP}+k_{BP}=0$，即可解出$l$的斜率；

（2）根据直线AP,AQ的斜率之和为0可知直线AP,AQ的倾斜角互补，再根据$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$即可求出直线AP,AQ的斜率，再分别联立直线AP,AQ与双曲线方程求出点P,Q的坐标，即可得到直线PQ的方程以及PQ的长，由点到直线的距离公式求出点A到直线PQ的距离，即可得出$\triangle PAQ$的面积.

【小问1详解】

因为点$A(2,1)$在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，所以$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2-1}=1$，解得$a^2=2$，

即双曲线$C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$

易知直线l的斜率存在，设$l:y=kx+m$，$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$可得，$\left(1-2k^2\right)x^2-4mkx-2m^2-2=0$，

所以，$x_1+x_2=-\dfrac{4mk}{2k^2-1},x_1x_2=\dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}$，

$\Delta=16m^2k^2+4\left(2m^2+2\right)\left(2k^2-1\right)>0\Rightarrow m^2-1+2k^2>0$.

所以由$k_{AP}+k_{BP}=0$可得，$\dfrac{y_2-1}{x_2-2}+\dfrac{y_1-1}{x_1-2}=0$，

即$\left(x_1-2\right)\left(kx_2+m-1\right)+\left(x_2-2\right)\left(kx_1+m-1\right)=0$，

即$2kx_1x_2+\left(m-1-2k\right)\left(x_1+x_2\right)-4\left(m-1\right)=0$，

所以$2k\times\dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}+\left(m-1-2k\right)\left(-\dfrac{4mk}{2k^2-1}\right)-4\left(m-1\right)=0$，

化简得，$8k^2+4k-4+4m\left(k+1\right)=0$，即$\left(k+1\right)\left(2k-1+m\right)=0$，

所以$k=-1$或$m=1-2k$，

当$m=1-2k$时，直线$l:y=kx+m=k\left(x-2\right)+1$过点$A\left(2,1\right)$，与题意不符，舍去，

故$k=-1$.

【小问2详解】

不妨设直线PA,PB的倾斜角为$\alpha,\beta\left(\alpha<\beta\right)$，因为$k_{AP}+k_{BP}=0$，所以$\alpha+\beta=\pi$，

因为$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，所以$\tan\left(\beta-\alpha\right)=2\sqrt{2}$，即$\tan 2\alpha=-2\sqrt{2}$，

即$\sqrt{2}\tan^2\alpha-\tan\alpha-\sqrt{2}=0$，解得$\tan\alpha=\sqrt{2}$，

于是，直线$PA:y=\sqrt{2}\left(x-2\right)+1$，直线$PB:y=-\sqrt{2}\left(x-2\right)+1$，

联立$\begin{cases}y=\sqrt{2}\left(x-2\right)+1\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$可得，$\dfrac{3}{2}x^2+2\left(1-2\sqrt{2}\right)x+10-4\sqrt{2}=0$，

因为方程有一个根为2，所以$x_P=\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3}$，$y_P=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}$，

同理可得，$x_Q=\dfrac{10+4\sqrt{2}}{3}$，$y_Q=\dfrac{-4\sqrt{2}-5}{3}$.

所以$PQ:x+y-\dfrac{5}{3}=0$，$\left|PQ\right|=\dfrac{16}{3}$，

点A到直线PQ的距离$d=\dfrac{\left|2+1-\dfrac{5}{3}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

故$\triangle PAQ$的面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$.

22. 已知函数$f(x)=e^x-ax$和$g(x)=ax-\ln x$有相同的最小值.

（1）求a；

（2）证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

【答案】（1） $a=1$

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）根据导数可得函数的单调性，从而可得相应的最小值，根据最小值相等可求 a. 注意分类讨论.

（2）根据（1）可得当 $b>1$ 时， $e^x-x=b$ 的解的个数、 $x-\ln x=b$ 的解的个数均为 2，构建新函数 $h(x)=e^x+\ln x-2x$，利用导数可得该函数只有一个零点且可得 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 的大小关系，根据存在直线 $y=b$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$、$y=g\left(x\right)$ 有三个不同的交点可得 b 的取值，再根据两类方程的根的关系可证明三根成等差数列.

【小问 1 详解】

$f(x)=e^x-ax$ 的定义域为 R， 而 $f'(x)=e^x-a$，

若 $a\le 0$， 则 $f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 无最小值，故 $a>0$.

$g(x)=ax-\ln x$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$， 而 $g'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$.

当 $x<\ln a$ 时， $f'(x)<0$， 故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln a\right)$ 上为减函数，

当 $x>\ln a$ 时， $f'(x)>0$， 故 $f(x)$ 在 $\left(\ln a,+\infty\right)$ 上为增函数，

故 $f(x)_{\min}=f\left(\ln a\right)=a-a\ln a$.

当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时， $g'(x)<0$， 故 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上为减函数，

当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时， $g'(x)>0$， 故 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上为增函数，

故 $g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-\ln\dfrac{1}{a}$.

因为 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值，

故 $1-\ln\dfrac{1}{a}=a-a\ln a$， 整理得到 $\dfrac{a-1}{1+a}=\ln a$， 其中 $a>0$，

设 $g\left(a\right)=\dfrac{a-1}{1+a}-\ln a,a>0$， 则 $g'\left(a\right)=\dfrac{2}{\left(1+a\right)^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{-a^2-1}{a\left(1+a\right)^2}\le 0$，

故 $g\left(a\right)$ 为 $\left(0,+\infty\right)$ 上的减函数， 而 $g\left(1\right)=0$，

故$g\left(a\right)=0$的唯一解为$a=1$，故$\dfrac{1-a}{1+a}=\ln a$的解为$a=1$.

综上，$a=1$.

【小问2详解】

由（1）可得$f(x)=\mathrm{e}^x-x$和$g(x)=x-\ln x$的最小值为$1-\ln 1=1-\ln\dfrac{1}{1}=1$.

当$b>1$时，考虑$\mathrm{e}^x-x=b$的解的个数、$x-\ln x=b$的解的个数.

设$S\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x-b$，$S'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-1$，

当$x<0$时，$S'\left(x\right)<0$，当$x>0$时，$S'\left(x\right)>0$，

故$S\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上为减函数，在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数，

所以$S\left(x\right)_{\min}=S\left(0\right)=1-b<0$，

而$S\left(-b\right)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$S\left(b\right)=\mathrm{e}^b-2b$，

设$u\left(b\right)=\mathrm{e}^b-2b$，其中$b>1$，则$u'\left(b\right)=\mathrm{e}^b-2>0$，

故$u\left(b\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上为增函数，故$u\left(b\right)>u\left(1\right)=\mathrm{e}-2>0$，

故$S\left(b\right)>0$，故$S\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x-b$有两个不同的零点，即$\mathrm{e}^x-x=b$的解的个数为2.

设$T\left(x\right)=x-\ln x-b$，$T'\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}$，

当$0<x<1$时，$T¢\left(x\right)<0$，当$x>1$时，$T'\left(x\right)>0$，

故$T\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上为减函数，在$\left(1,+\infty\right)$上为增函数，

所以$T\left(x\right)_{\min}=T\left(1\right)=1-b<0$，

而$T\left(\mathrm{e}^{-b}\right)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$T\left(\mathrm{e}^b\right)=\mathrm{e}^b-2b>0$，

$T\left(x\right)=x-\ln x-b$有两个不同的零点即$x-\ln x=b$的解的个数为2.

当$b=1$，由（1）讨论可得$x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^x-x=b$仅有一个零点，

当$b<1$时，由（1）讨论可得$x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^x-x=b$均无零点，

故若存在直线$y=b$与曲线$y=f\left(x\right)$、$y=g\left(x\right)$有三个不同的交点，

则$b>1$.

设$h(x)=\mathrm{e}^x+\ln x-2x$，其中$x>0$，故$h'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}-2$，

设$s\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x-1$，$x>0$，则$s'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-1>0$，

故 $s\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数，故 $s\left(x\right)>s\left(0\right)=0$ 即 $\mathrm{e}^{x}>x+1$，

所以 $h'(x)>x+\dfrac{1}{x}-1\geq 2-1>0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数，

而 $h(1)=\mathrm{e}-2>0$，$h(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{3}}}-3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}<\mathrm{e}-3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}<0$，

故 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有且只有一个零点 x_0，$\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}}<x_0<1$ 且：

当 $0<x<x_0$ 时，$h\left(x\right)<0$ 即 $\mathrm{e}^{x}-x<x-\ln x$ 即 $f\left(x\right)<g\left(x\right)$，

当 $x>x_0$ 时，$h\left(x\right)>0$ 即 $\mathrm{e}^{x}-x>x-\ln x$ 即 $f\left(x\right)>g\left(x\right)$，

因此若存在直线 $y=b$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$、$y=g\left(x\right)$ 有三个不同的交点，

故 $b=f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)>1$，

此时 $\mathrm{e}^{x}-x=b$ 有两个不同的零点 $x_1,x_0(x_1<0<x_0)$，

此时 $x-\ln x=b$ 有两个不同的零点 $x_0,x_4(0<x_0<1<x_4)$，

故 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$，$\mathrm{e}^{x_0}-x_0=b$，$x_4-\ln x_4-b=0$，$x_0-\ln x_0-b=0$

所以 $x_4-b=\ln x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}=x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}-\left(x_4-b\right)-b=0$，

故 x_4-b 为方程 $\mathrm{e}^{x}-x=b$ 的解，同理 x_0-b 也为方程 $\mathrm{e}^{x}-x=b$ 的解

又 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$ 可化为 $\mathrm{e}^{x_1}=x_1+b$ 即 $x_1-\ln\left(x_1+b\right)=0$ 即 $\left(x_1+b\right)-\ln\left(x_1+b\right)-b=0$，

故 x_1+b 为方程 $x-\ln x=b$ 的解，同理 x_0+b 也为方程 $x-\ln x=b$ 的解，

所以 $\left\{x_1,x_0\right\}=\left\{x_0-b,x_4-b\right\}$，而 $b>1$，

故 $\begin{cases}x_0=x_4-b\\x_1=x_0-b\end{cases}$ 即 $x_1+x_4=2x_0$.

【点睛】思路点睛：函数的最值问题，往往需要利用导数讨论函数的单调性，此时注意对参数的分类讨论，而不同方程的根的性质，注意利用方程的特征找到两类根之间的关系.