2024年普通高等学校招生全国统一考试（新课标II卷）

数学

本试卷共10页，19小题，满分150分.

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的.请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】由复数模的计算公式直接计算即可.

【详解】若 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

故选：C.

2. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则（　　）

A. p 和 q 都是真命题　　B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题　　D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

【答案】B

【解析】

【分析】对于两个命题而言，可分别取 $x=-1$、$x=1$，再结合命题及其否定的真假性相反即可得解.

【详解】对于 p 而言，取 $x=-1$，则有 $|x+1|=0<1$，故 p 是假命题，$\neg p$ 是真命题，

对于q而言，取$x=1$，则有$x^3=1^3=1=x$，故q是真命题，$\neg q$是假命题，

综上，$\neg p$和q都是真命题.

故选：B.

3. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，且$(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】由$(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$得$\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，结合$|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，得$1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+6\vec{b}^2=4$，由此即可得解.

【详解】因为$(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，所以$(\vec{b}-2\vec{a})\cdot\vec{b}=0$，即$\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，

又因为$|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，

所以$1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+6\vec{b}^2=4$，

从而$|\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.

4. 某农业研究部门在面积相等的100块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（均在$[900,1200)$之间，单位：kg）并部分整理下表

亩产量	[900，950）	[950，1000）	[1000，1050）	[1100，1150）	[1150，1200）
频数	6	12	18	24	10

据表中数据，结论中正确的是（　　）

A. 100块稻田亩产量的中位数小于1050kg

B. 100块稻田中亩产量低于1100kg的稻田所占比例超过80%

C. 100块稻田亩产量的极差介于200kg至300kg之间

D. 100块稻田亩产量的平均值介于900kg至1000kg之间

【答案】C

【解析】

【分析】计算出前三段频数即可判断 A；计算出低于 1100kg 的频数，再计算比例即可判断 B；根据极差计算方法即可判断 C；根据平均值计算公式即可判断 D.

【详解】对于 A, 根据频数分布表可知, $6+12+18=36<50$,

所以亩产量的中位数不小于 1050kg, 故 A 错误；

对于 B，亩产量不低于1100kg的频数为$24+10=34$，

所以低于1100kg的稻田占比为$\dfrac{100-34}{100}=66\%$，故 B 错误；

对于 C，稻田亩产量的极差最大为$1200-900=300$，最小为$1150-950=200$，故 C 正确；

对于 D，由频数分布表可得，亩产量在$[1050,1100)$的频数为$100-(6+12+18+24+10)=30$，

所以平均值为$\dfrac{1}{100}\times(6\times925+12\times975+18\times1025+30\times1075+24\times1125+10\times1175)=1067$，故 D 错误.

故选：C.

5. 已知曲线 C：$x^2+y^2=16$（$y>0$），从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP'，P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$（$y>0$）　　B. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$（$y>0$）

C. $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$（$y>0$）　　D. $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{8}=1$（$y>0$）

【答案】A

【解析】

【分析】设点$M(x,y)$，由题意，根据中点的坐标表示可得$P(x,2y)$，代入圆的方程即可求解.

【详解】设点$M(x,y)$，则$P(x,y_0),P'(x,0)$，

因为M为PP'的中点，所以$y_0=2y$，即$P(x,2y)$，

又P在圆$x^2+y^2=16(y>0)$上，

所以$x^2+4y^2=16(y>0)$，即$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$，

即点M的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1(y>0)$.

故选：A

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$，当$x\in(-1,1)$时，曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$恰有一个交点，则$a=$（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】解法一：令 $F\left(x\right)=ax^2+a-1,G\left(x\right)=\cos x$，分析可知曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，结合偶函数的对称性可知该交点只能在 y 轴上，即可得 $a=2$，并代入检验即可；解法二：令 $h\left(x\right)=f(x)-g\left(x\right),x\in\left(-1,1\right)$，可知 $h\left(x\right)$ 为偶函数，根据偶函数的对称性可知 $h\left(x\right)$ 的零点只能为 0，即可得 $a=2$，并代入检验即可.

【详解】解法一：令 $f(x)=g\left(x\right)$，即 $a(x+1)^2-1=\cos x+2ax$，可得 $ax^2+a-1=\cos x$，

令 $F\left(x\right)=ax^2+a-1,G\left(x\right)=\cos x$，

原题意等价于当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

注意到 $F\left(x\right),G\left(x\right)$ 均为偶函数，可知该交点只能在 y 轴上，

可得 $F\left(0\right)=G\left(0\right)$，即 $a-1=1$，解得 $a=2$，

若 $a=2$，令 $F\left(x\right)=G\left(x\right)$，可得 $2x^2+1-\cos x=0$

因为 $x\in\left(-1,1\right)$，则 $2x^2\geq 0,1-\cos x\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

可得 $2x^2+1-\cos x\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

则方程 $2x^2+1-\cos x=0$ 有且仅有一个实根 0，即曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

所以 $a=2$ 符合题意；

综上所述：$a=2$.

解法二：令 $h\left(x\right)=f(x)-g\left(x\right)=ax^2+a-1-\cos x,x\in\left(-1,1\right)$，

原题意等价于 $h\left(x\right)$ 有且仅有一个零点，

因为 $h\left(-x\right)=a\left(-x\right)^2+a-1-\cos\left(-x\right)=ax^2+a-1-\cos x=h\left(x\right)$，

则 $h\left(x\right)$ 为偶函数，

根据偶函数的对称性可知 $h\left(x\right)$ 的零点只能为 0，

即 $h\left(0\right)=a-2=0$，解得 $a=2$，

若 $a=2$，则 $h(x)=2x^2+1-\cos x, x\in(-1,1)$，

又因为 $2x^2\geq 0, 1-\cos x\geq 0$ 当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

可得 $h(x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

即 $h(x)$ 有且仅有一个零点 0，所以 $a=2$ 符合题意；

故选：D.

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geq 0$，则 a^2+b^2 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　　　B. $\frac{1}{4}$　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】解法一：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$，分类讨论 $-a$ 与 $-b, 1-b$ 的大小关系，结合符号分析判断，即可得 $b=a+1$，代入可得最值；解法二：根据对数函数的性质分析 $\ln(x+b)$ 的符号，进而可得 $x+a$ 的符号，即可得 $b=a+1$，代入可得最值.

【详解】解法一：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$，

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$；令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$；

若 $-a\leq -b$，当 $x\in(-b,1-b)$ 时，可知 $x+a>0, \ln(x+b)<0$，

此时 $f(x)<0$，不合题意；

若 $-b<-a<1-b$，当 $x\in(-a,1-b)$ 时，可知 $x+a>0, \ln(x+b)<0$，

此时 $f(x)<0$，不合题意；

若 $-a=1-b$，当 $x\in(-b,1-b)$ 时，可知 $x+a<0, \ln(x+b)<0$，此时 $f(x)>0$；

当 $x\in[1-b,+\infty)$ 时，可知 $x+a\geq 0, \ln(x+b)\geq 0$，此时 $f(x)\geq 0$；

可知若 $-a=1-b$，符合题意；

若 $-a>1-b$，当 $x\in(1-b,-a)$ 时，可知 $x+a\langle 0, \ln(x+b)\rangle 0$，

此时 $f(x)<0$，不合题意；

综上所述：$-a=1-b$，即 $b=a+1$，

则 $a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$；

解法二：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$，

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$；令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$；

则当 $x\in(-b,1-b)$ 时，$\ln(x+b)<0$，故 $x+a\leq0$，所以 $1-b+a\leq0$；

$x\in(1-b,+\infty)$ 时，$\ln(x+b)>0$，故 $x+a\geq0$，所以 $1-b+a\geq0$；

故 $1-b+a=0$， 则 $a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$，

当且仅当 $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：分别求 $x+a=0$、$\ln(x+b)=0$ 的根，以根和函数定义域为临界，比较大小分类讨论，结合符号性分析判断.

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，下列说法正确的有（　　）

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点　　　　B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期　　　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

【答案】BC

【解析】

【分析】根据正弦函数的零点，最值，周期公式，对称轴方程逐一分析每个选项即可.

【详解】A 选项，令 $f(x)=\sin 2x=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即为 $f(x)$ 零点，

令 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，即为 $g(x)$ 零点，

显然 $f(x),g(x)$ 零点不同，A 选项错误；

B 选项，显然 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}=1$，B 选项正确；

C 选项，根据周期公式，$f(x),g(x)$ 的周期均为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，C 选项正确；

D 选项，根据正弦函数的性质 $f(x)$ 的对称轴满足 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

$g(x)$ 的对称轴满足 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，

显然 $f(x),g(x)$ 图像的对称轴不同，D 选项错误.

故选：BC

11. 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则（　　）

A. 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a<0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a，b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

【答案】AD

【解析】

【分析】A 选项，先分析出函数的极值点为 $x=0,x=a$，根据零点存在定理和极值的符号判断出 $f(x)$ 在 $(-1,0),(0,a),(a,2a)$ 上各有一个零点；B 选项，根据极值和导函数符号的关系进行分析；C 选项，假设存在这样的 a,b，使得 $x=b$ 为 $f(x)$ 的对称轴，则 $f(x)=f(2b-x)$ 为恒等式，据此计算判断；D 选项，若存在这样的 a，使得 $(1,3-3a)$ 为 $f(x)$ 的对称中心，则 $f(x)+f(2-x)=6-6a$，据此进行计算判断，亦可利用拐点结论直接求解.

【详解】A 选项，$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$，由于 $a>1$，

故 $x\in(-\infty,0)\cup(a,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(a,+\infty)$ 上单调递增，

$x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极大值，在 $x=a$ 处取到极小值，

由 $f(0)=1>0$，$f(a)=1-a^3<0$，则 $f(0)f(a)<0$，

根据零点存在定理 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上有一个零点，

又 $f(-1)=-1-3a<0$，$f(2a)=4a^3+1>0$，则 $f(-1)f(0)<0,f(a)f(2a)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(-1,0),(a,2a)$ 上各有一个零点，于是 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点，A 选项正确；

B 选项，$f'(x)=6x(x-a)$，$a<0$ 时，$x\in(a,0),f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极小值，B 选项错误；

C 选项，假设存在这样的 a,b，使得 $x=b$ 为 $f(x)$ 的对称轴，

即存在这样的 a,b 使得 $f(x)=f(2b-x)$，

即 $2x^3-3ax^2+1=2(2b-x)^3-3a(2b-x)^2+1$，

根据二项式定理，等式右边 $(2b-x)^3$ 展开式含有 x^3 的项为 $2\mathrm{C}_3^3(2b)^0(-x)^3=-2x^3$，

于是等式左右两边 x^3 的系数都不相等，原等式不可能恒成立，

于是不存在这样的 a,b，使得 $x=b$ 为 $f(x)$ 的对称轴，C 选项错误；

D 选项，

方法一：利用对称中心的表达式化简

$f(1)=3-3a$，若存在这样的 a，使得 $(1,3-3a)$ 为 $f(x)$ 的对称中心，

则 $f(x)+f(2-x)=6-6a$，事实上，

$f(x)+f(2-x)=2x^3-3ax^2+1+2(2-x)^3-3a(2-x)^2+1=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$，

于是 $6-6a=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$

即 $\begin{cases}12-6a=0\\12a-24=0\\18-12a=6-6a\end{cases}$，解得 $a=2$，即存在 $a=2$ 使得 $(1,f(1))$ 是 $f(x)$ 的对称中心，D 选项正确.

方法二：直接利用拐点结论

任何三次函数都有对称中心，对称中心的横坐标是二阶导数的零点，

$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，$f'(x)=6x^2-6ax$，$f''(x)=12x-6a$，

由 $f''(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}$，于是该三次函数的对称中心为 $\left(\dfrac{a}{2},f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$，

由题意 $(1,f(1))$ 也是对称中心，故 $\dfrac{a}{2}=1\Leftrightarrow a=2$，

即存在 $a=2$ 使得 $(1,f(1))$ 是 $f(x)$ 的对称中心，D 选项正确.

故选：AD

【点睛】结论点睛：（1） $f(x)$ 的对称轴为 $x=b \Leftrightarrow f(x)=f(2b-x)$；（2） $f(x)$ 关于 (a,b) 对称 $\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b$；（3）任何三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 都有对称中心，对称中心是三次函数的拐点，对称中心的横坐标是 $f''(x)=0$ 的解，即 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 是三次函数的对称中心

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则 $S_{10}=$________.

【答案】95

【解析】

【分析】利用等差数列通项公式得到方程组，解出 a_1, d，再利用等差数列的求和公式节即可得到答案.

【详解】因为数列 a_n 为等差数列，则由题意得 $\begin{cases} a_1+2d+a_1+3d=7 \\ 3(a_1+d)+a_1+4d=5 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=-4 \\ d=3 \end{cases}$，

则 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=10\times(-4)+45\times 3=95$.

故答案为：95.

13. 已知 α 为第一象限角，β 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$_______.

【答案】$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】法一：根据两角和与差的正切公式得 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}$，再缩小 $\alpha+\beta$ 的范围，最后结合同角的平方和关系即可得到答案；法二：利用弦化切的方法即可得到答案.

【详解】法一：由题意得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1-(\sqrt{2}+1)}=-2\sqrt{2}$，

因为 $\alpha\in\left(2k\pi, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right), \beta\in\left(2m\pi+\pi, 2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，$k, m\in Z$，

则 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\pi, (2m+2k)\pi+2\pi\right)$，$k, m\in Z$，

又因为 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}<0$，

则 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\dfrac{3\pi}{2},(2m+2k)\pi+2\pi\right)$，$k,m\in Z$，则 $\sin(\alpha+\beta)<0$，

则 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2\sqrt{2}$，联立 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$，解得 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

法二： 因为 α 为第一象限角，β 为第三象限角，则 $\cos\alpha>0,\cos\beta<0$，

$\cos\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$，$\cos\beta=\dfrac{\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\dfrac{-1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)$

$$=4\cos\alpha\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\frac{-4}{\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(\tan\alpha\tan\beta-1)^2}}=\frac{-4}{\sqrt{4^2+2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

故答案为：$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

14. 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有________种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是________.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

【答案】 ①. 24 ②. 112

【解析】

【分析】由题意可知第一、二、三、四列分别有 4、3、2、1 个方格可选；利用列举法写出所有的可能结果，即可求解.

【详解】由题意知，选 4 个方格，每行和每列均恰有一个方格被选中，

则第一列有 4 个方格可选，第二列有 3 个方格可选，

第三列有 2 个方格可选，第四列有 1 个方格可选，

所以共有 $4\times3\times2\times1=24$ 种选法；

每种选法可标记为 (a,b,c,d)，a,b,c,d 分别表示第一、二、三、四列的数字，

则所有的可能结果为：

$(11,22,33,44),(11,22,34,43),(11,22,33,44),(11,22,34,42),(11,24,33,43),(11,24,33,42)$，

$(12,21,33,44),(12,21,34,43),(12,22,31,44),(12,22,34,40),(12,24,31,43),(12,24,33,40)$，

$(13,21,33,44),(13,21,34,42),(13,22,31,44),(13,22,34,40),(13,24,31,42),(13,24,33,40)$，

$(15,21,33,43),(15,21,33,42),(15,22,31,43),(15,22,33,40),(15,22,31,42),(15,22,33,40)$，

所以选中的方格中，$(15,21,33,43)$ 的 4 个数之和最大，为 $15+21+33+43=112$.

故答案为：24；112

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是确定第一、二、三、四列分别有 4、3、2、1 个方格可选，利用列举法写出所有的可能结果.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$．

（1）求 A.

（2）若 $a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{6}$

（2）$2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）根据辅助角公式对条件 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$ 进行化简处理即可求解，常规方法还可利用同角三角函数的关系解方程组，亦可利用导数，向量数量积公式，万能公式解决；

（2）先根据正弦定理边角互化算出 B，然后根据正弦定理算出 b,c 即可得出周长.

【小问 1 详解】

方法一：常规方法（辅助角公式）

由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$ 可得 $\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A=1$，即 $\sin(A+\dfrac{\pi}{3})=1$，

由于 $A\in(0,\pi)\Rightarrow A+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3})$，故 $A+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，解得 $A=\dfrac{\pi}{6}$

方法二：常规方法（同角三角函数的基本关系）

由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，又 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，消去 $\sin A$ 得到：

$4\cos^2 A-4\sqrt{3}\cos A+3=0\Leftrightarrow(2\cos A-\sqrt{3})^2=0$，解得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{6}$

方法三：利用极值点求解

设 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x(0<x<\pi)$，则 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)(0<x<\pi)$，

显然 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$，注意到 $f(A)=\sin A+\sqrt{3}\cos A=2=2\sin(A+\dfrac{\pi}{3})$，

$f(x)_{\max}=f(A)$，在开区间 $(0,\pi)$ 上取到最大值，于是 $x=A$ 必定是极值点，

即 $f'(A)=0=\cos A-\sqrt{3}\sin A$，即 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{6}$

方法四：利用向量数量积公式（柯西不等式）

设 $\vec{a}=(1,\sqrt{3}),\vec{b}=(\sin A,\cos A)$，由题意，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，

根据向量的数量积公式，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=2\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$，

则 $2\cos\vec{a},\vec{b}=2\Leftrightarrow\cos\vec{a},\vec{b}=1$，此时 $\vec{a},\vec{b}=0$，即 $\vec{a},\vec{b}$ 同向共线，

根据向量共线条件，$1\cdot\cos A=\sqrt{3}\cdot\sin A\Leftrightarrow\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{6}$

方法五：利用万能公式求解

设 $t=\tan\dfrac{A}{2}$，根据万能公式，$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2=\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}$，

整理可得，$t^2-2(2-\sqrt{3})t+(2-\sqrt{3})^2=0=(t-(2-\sqrt{3}))^2$，

解得 $\tan\dfrac{A}{2}=t=2-\sqrt{3}$，根据二倍角公式，$\tan A=\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{6}$

【小问 2 详解】

由题设条件和正弦定理

$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin B\sin C=2\sin C\sin B\cos B$，

又 $B,C\in(0,\pi)$，则 $\sin B\sin C\neq 0$，进而 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得到 $B=\frac{\pi}{4}$，

于是 $C=\pi-A-B=\frac{7\pi}{12}$，

$\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{c}{\sin\frac{7\pi}{12}}$，

解得 $b=2\sqrt{2},c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2+\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

16. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(1,f(1)\right)$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于 0，求 a 的取值范围.

【答案】（1）$(\mathrm{e}-1)x-y-1=0$

（2）$(1,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）求导，结合导数的几何意义求切线方程；

（2）解法一：求导，分析 $a\le 0$ 和 $a>0$ 两种情况，利用导数判断单调性和极值，分析可得 $a^2+\ln a-1>0$，构建函数解不等式即可；解法二：求导，可知 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$ 有零点，可得 $a>0$，进而利用导数求 $f(x)$ 的单调性和极值，分析可得 $a^2+\ln a-1>0$，构建函数解不等式即可.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，则 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

可得 $f(1)=\mathrm{e}-2$，$f'(1)=\mathrm{e}-1$，

即切点坐标为 $(1,\mathrm{e}-2)$，切线斜率 $k=\mathrm{e}-1$，

所以切线方程为 $y-(\mathrm{e}-2)=(\mathrm{e}-1)(x-1)$，即 $(\mathrm{e}-1)x-y-1=0$.

【小问 2 详解】

解法一：因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

若$a\le 0$，则$f'(x)\ge 0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，

可知$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，无极值，不合题意；

若$a>0$，令$f'(x)>0$，解得$x>\ln a$；令$f'(x)<0$，解得$x<\ln a$；

可知$f(x)$在$\left(-\infty,\ln a\right)$内单调递减，在$\left(\ln a,+\infty\right)$内单调递增，

则$f(x)$有极小值$f\left(\ln a\right)=a-a\ln a-a^3$，无极大值，

由题意可得：$f\left(\ln a\right)=a-a\ln a-a^3<0$，即$a^2+\ln a-1>0$，

构建$g\left(a\right)=a^2+\ln a-1,a>0$，则$g'\left(a\right)=2a+\dfrac{1}{a}>0$，

可知$g\left(a\right)$在$\left(0,+\infty\right)$内单调递增，且$g\left(1\right)=0$，

不等式$a^2+\ln a-1>0$等价于$g\left(a\right)>g\left(1\right)$，解得$a>1$，

所以a的取值范围为$\left(1,+\infty\right)$；

解法二：因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

若$f(x)$有极小值，则$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$有零点，

令$f'(x)=\mathrm{e}^x-a=0$，可得$\mathrm{e}^x=a$，

可知$y=\mathrm{e}^x$与$y=a$有交点，则$a>0$，

若$a>0$，令$f'(x)>0$，解得$x>\ln a$；令$f'(x)<0$，解得$x<\ln a$；

可知$f(x)$在$\left(-\infty,\ln a\right)$内单调递减，在$\left(\ln a,+\infty\right)$内单调递增，

则$f(x)$有极小值$f\left(\ln a\right)=a-a\ln a-a^3$，无极大值，符合题意，

由题意可得：$f\left(\ln a\right)=a-a\ln a-a^3<0$，即$a^2+\ln a-1>0$，

构建$g\left(a\right)=a^2+\ln a-1,a>0$，

因为则$y=a^2,y=\ln a-1$在$\left(0,+\infty\right)$内单调递增，

可知$g\left(a\right)$在$\left(0,+\infty\right)$内单调递增，且$g\left(1\right)=0$，

不等式$a^2+\ln a-1>0$等价于$g\left(a\right)>g\left(1\right)$，解得$a>1$，

所以 a 的取值范围为 $\left(1,+\infty\right)$.

18. 某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成员为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分. 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和. 某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p，乙每次投中的概率为 q，各次投中与否相互独立.

（1）若 $p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

（2）假设 $0<p<q$，

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

（ii）为使得甲、乙，所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

【答案】（1）0.686

（2）（i）由甲参加第一阶段比赛；（i）由甲参加第一阶段比赛；

【解析】

【分析】（1）根据对立事件的求法和独立事件的乘法公式即可得到答案；

（2）（i）首先各自计算出 $P_{甲}=\left[1-(1-p)^3\right]q^3$，$P_{乙}=\left[1-(1-q)^3\right]\cdot p^3$，再作差因式分解即可判断；(ii) 首先得到 X 和 Y 的所有可能取值，再按步骤列出分布列，计算出各自期望，再次作差比较大小即可.

【小问 1 详解】

甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分，则甲第一阶段至少投中 1 次，乙第二阶段也至少投中 1 次，

$\therefore$ 比赛成绩不少于 5 分的概率 $P=\left(1-0.6^3\right)\left(1-0.5^3\right)=0.686$.

【小问 2 详解】

（i）若甲先参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{甲}=\left[1-(1-p)^3\right]q^3$，

若乙先参加第一阶段比赛，则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_{乙}=\left[1-(1-q)^3\right]\cdot p^3$，

$\because 0<p<q$，

$\therefore P_{甲}-P_{乙}=q^3-(q-pq)^3-p^3+(p-pq)^3$

$=(q-p)\left(q^2+pq+p^2\right)+(p-q)\cdot\left[(p-pq)^2+(q-pq)^2+(p-pq)(q-pq)\right]$

$=(p-q)\left(3p^2q^2-3p^2q-3pq^2\right)$

$=3pq(p-q)(pq-p-q)=3pq(p-q)[(1-p)(1-q)-1]>0$，

$\therefore P_{甲}>P_{乙}$，应该由甲参加第一阶段比赛.

(ii)若甲先参加第一阶段比赛，比赛成绩 X 的所有可能取值为 0，5，10，15，

$P(X=0)=(1-p)^3+\left[1-(1-p)^3\right]\cdot(1-q)^3$，

$P\left(X=5\right)=\left[1-\left(1-p\right)^3\right]C_3^1 q\cdot\left(1-q\right)^2$，

$P(X=10)=\left[1-(1-p)^3\right]\cdot C_3^2 q^2(1-q)$，

$P(X=15)=\left[1-(1-p)^3\right]\cdot q^3$，

$\therefore E(X)=15\left[1-(1-p)^3\right]q=15\left(p^3-3p^2+3p\right)\cdot q$

记乙先参加第一阶段比赛，比赛成绩 Y 的所有可能取值为 0，5，10，15，

同理 $E(Y)=15\left(q^3-3q^2+3q\right)\cdot p$

$\therefore E(X)-E(Y)=15[pq(p+q)(p-q)-3pq(p-q)]$

$=15(p-q)pq(p+q-3)$，

因为 $0<p<q$，则 $p-q<0$， $p+q-3<1+1-3<0$，

则 $(p-q)pq(p+q-3)>0$，

$\therefore$ 应该由甲参加第一阶段比赛.

【点睛】关键点点睛：本题第二问的关键是计算出相关概率和期望，采用作差法并因式分解从而比较出大小关系，最后得到结论.

19. 已知双曲线 $C:x^2-y^2=m\left(m>0\right)$，点 $P_1\left(5,4\right)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$．按照如下方式依次构造点 $P_n\left(n=2,3,...\right)$，过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 $\left(x_n,y_n\right)$.

（1）若 $k=\dfrac{1}{2}$，求 x_2,y_2；

（2）证明：数列 $\left\{x_n-y_n\right\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

（3）设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$.

【答案】（1） $x_2=3$， $y_2=0$

（2）证明见解析　　（3）证明见解析

【解析】

【分析】

（2）根据等比数列的定义即可验证结论；

（3）思路一：使用平面向量数量积和等比数列工具，证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可.思路二：使用等差数列工具，证明 S_n 的取值为与 n 无关的定值即可.

【小问 2 详解】

由于过 $P_n\left(x_n,y_n\right)$ 且斜率为 k 的直线为 $y=k\left(x-x_n\right)+y_n$，与 $x^2-y^2=9$ 联立，得到方程

$x^2-\left(k\left(x-x_n\right)+y_n\right)^2=9$.

展开即得 $\left(1-k^2\right)x^2-2k\left(y_n-kx_n\right)x-\left(y_n-kx_n\right)^2-9=0$，由于 $P_n\left(x_n,y_n\right)$ 已经是直线 $y=k\left(x-x_n\right)+y_n$ 和 $x^2-y^2=9$ 的公共点，故方程必有一根 $x=x_n$.

从而根据韦达定理，另一根 $x=\dfrac{2k\left(y_n-kx_n\right)}{1-k^2}-x_n=\dfrac{2ky_n-x_n-k^2x_n}{1-k^2}$，相应的

$y=k\left(x-x_n\right)+y_n=\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$.

所以该直线与 C 的不同于 P_n 的交点为 $Q_n\left(\dfrac{2ky_n-x_n-k^2x_n}{1-k^2},\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}\right)$，而注意到 Q_n 的横坐标亦可通过韦达定理表示为 $\dfrac{-\left(y_n-kx_n\right)^2-9}{\left(1-k^2\right)x_n}$，故 Q_n 一定在 C 的左支上.

所以 $P_{n+1}\left(\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2},\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}\right)$.

这就得到 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$，$y_{n+1}=\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$.

所以 $x_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}-\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$

$=\dfrac{x_n+k^2x_n+2kx_n}{1-k^2}-\dfrac{y_n+k^2y_n+2ky_n}{1-k^2}=\dfrac{1+k^2+2k}{1-k^2}\left(x_n-y_n\right)=\dfrac{1+k}{1-k}\left(x_n-y_n\right)$.

再由 $x_1^2-y_1^2=9$，就知道 $x_1-y_1\neq0$，所以数列 $\left\{x_n-y_n\right\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

【小问 3 详解】

方法一：先证明一个结论：对平面上三个点U,V,W，若$\overrightarrow{UV}=(a,b)$，$\overrightarrow{UW}=(c,d)$，则$S_{\triangle UVW}=\frac{1}{2}|ad-bc|$.

（若U,V,W在同一条直线上，约定$S_{\triangle UVW}=0$）

证明：$S_{\triangle UVW}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sin\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sqrt{1-\cos^2\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}}$

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{UW}}{\left|\overrightarrow{UV}\right|\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{UV}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{UW}\right|^2-\left(\overrightarrow{UV}\cdot\overrightarrow{UW}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-(ac+bd)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-2abcd}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-2abcd}=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}=\frac{1}{2}|ad-bc|.$$

证毕，回到原题.

由于上一小问已经得到$x_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$，$y_{n+1}=\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$，

故$x_{n+1}+y_{n+1}=\frac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}+\frac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}=\frac{1+k^2-2k}{1-k^2}(x_n+y_n)=\frac{1-k}{1+k}(x_n+y_n)$.

再由$x_1^2-y_1^2=9$，就知道$x_1+y_1\neq 0$，所以数列$\{x_n+y_n\}$是公比为$\frac{1-k}{1+k}$的等比数列.

所以对任意的正整数m，都有

$$x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m}\right)+\left(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\left(x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m}\right)-\left(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x_n-y_n)(x_{n+m}+y_{n+m})-\frac{1}{2}(x_n+y_n)(x_{n+m}-y_{n+m})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m(x_n-y_n)(x_n+y_n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m(x_n+y_n)(x_n-y_n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right)\left(x_n^2-y_n^2\right)$$

$$=\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right).$$

而又有$\overrightarrow{P_{n+1}P_n}=\left(-(x_{n+1}-x_n),-(y_{n+1}-y_n)\right)$，$\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}=\left(x_{n+2}-x_{n+1},y_{n+2}-y_{n+1}\right)$，

故利用前面已经证明的结论即得

$$S_n=S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=\frac{1}{2}\left|-\left(x_{n+1}-x_n\right)\left(y_{n+2}-y_{n+1}\right)+\left(y_{n+1}-y_n\right)\left(x_{n+2}-x_{n+1}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(x_{n+1}-x_n\right)\left(y_{n+2}-y_{n+1}\right)-\left(y_{n+1}-y_n\right)\left(x_{n+2}-x_{n+1}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(x_{n+1}y_{n+2}-y_{n+1}x_{n+2}\right)+\left(x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1}\right)-\left(x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{9}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}-\frac{1+k}{1-k}\right)+\frac{9}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}-\frac{1+k}{1-k}\right)-\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2\right)\right|.$$

这就表明S_n的取值是与n无关的定值，所以$S_n=S_{n+1}$.

方法二：由于上一小问已经得到$x_{n+1}=\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}$， $y_{n+1}=\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}$，

故$x_{n+1}+y_{n+1}=\dfrac{x_n+k^2x_n-2ky_n}{1-k^2}+\dfrac{y_n+k^2y_n-2kx_n}{1-k^2}=\dfrac{1+k^2-2k}{1-k^2}(x_n+y_n)=\dfrac{1-k}{1+k}(x_n+y_n)$.

再由$x_1^2-y_1^2=9$，就知道$x_1+y_1\neq 0$，所以数列$\left\{x_n+y_n\right\}$是公比为$\dfrac{1-k}{1+k}$的等比数列.

所以对任意的正整数m，都有

$$x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m}\right)+\left(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\left(x_nx_{n+m}-y_ny_{n+m}\right)-\left(x_ny_{n+m}-y_nx_{n+m}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_n-y_n\right)\left(x_{n+m}+y_{n+m}\right)-\frac{1}{2}\left(x_n+y_n\right)\left(x_{n+m}-y_{n+m}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m\left(x_n-y_n\right)\left(x_n+y_n\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\left(x_n+y_n\right)\left(x_n-y_n\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right)\left(x_n^2-y_n^2\right)$$

$$=\frac{9}{2}\left(\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^m-\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^m\right).$$

这就得到$x_{n+2}y_{n+3}-y_{n+2}x_{n+3}=\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1-k}{1+k}-\dfrac{1+k}{1-k}\right)=x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1}$，

以及$x_{n+1}y_{n+3}-y_{n+1}x_{n+3}=\dfrac{9}{2}\left(\left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^2-\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)^2\right)=x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2}$.

两式相减，即得$\left(x_{n+2}y_{n+3}-y_{n+2}x_{n+3}\right)-\left(x_{n+1}y_{n+3}-y_{n+1}x_{n+3}\right)=\left(x_ny_{n+1}-y_nx_{n+1}\right)-\left(x_ny_{n+2}-y_nx_{n+2}\right)$.

移项得到$x_{n+2}y_{n+3}-y_nx_{n+2}-x_{n+1}y_{n+3}+y_nx_{n+1}=y_{n+2}x_{n+3}-x_ny_{n+2}-y_{n+1}x_{n+3}+x_ny_{n+1}$.

故$\left(y_{n+3}-y_n\right)\left(x_{n+2}-x_{n+1}\right)=\left(y_{n+2}-y_{n+1}\right)\left(x_{n+3}-x_n\right)$.

而$\overrightarrow{P_nP_{n+3}}=\left(x_{n+3}-x_n,y_{n+3}-y_n\right)$，$\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}=\left(x_{n+2}-x_{n+1},y_{n+2}-y_{n+1}\right)$.

所以$\overrightarrow{P_nP_{n+3}}$和$\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}$平行，这就得到$S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}$，即$S_n=S_{n+1}$.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于将解析几何和数列知识的结合，需要综合运用多方面知识方可得解.