

# 2021 年普通高等学校招生全国统一考试

## 数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上. 用 2B 铅笔将试卷类型(A)填涂在答题卡相应位置上. 将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上.
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.
4. 考生必须保持答题卡的整洁. 考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合  $A = \{x | -2 < x < 4\}$ ， $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ，则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{2\}$                       B.  $\{2, 3\}$                       C.  $\{3, 4\}$                       D.  $\{2, 3, 4\}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用交集的定义可求  $A \cap B$ .

【详解】由题设有  $A \cap B = \{2, 3\}$ ,

故选：B.

2. 已知  $z = 2 - i$ ，则  $z(\bar{z} + i) =$  ( )

- A.  $6 - 2i$                       B.  $4 - 2i$                       C.  $6 + 2i$                       D.  $4 + 2i$

【答案】C

【解析】

【分析】利用复数的乘法和共轭复数的定义可求得结果.

【详解】因为  $z = 2 - i$ ，故  $\bar{z} = 2 + i$ ，故  $z(\bar{z} + i) = (2 - i)(2 + 2i) = 6 + 2i$

故选：C.

3. 已知圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$ ，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（ ）

A. 2

B.  $2\sqrt{2}$

C. 4

D.  $4\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆锥的母线长为 $l$ ，根据圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长可求得 $l$ 的值，即为所求.

【详解】设圆锥的母线长为 $l$ ，由于圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，则 $\pi l = 2\pi \times \sqrt{2}$ ，解得 $l = 2\sqrt{2}$ .

故选：B.

4. 下列区间中，函数 $f(x) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增的区间是（ ）

A.  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

B.  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

C.  $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

D.  $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】解不等式 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{6} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，利用赋值法可得出结论.

【详解】因为函数 $y = \sin x$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$ ,

对于函数 $f(x) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{6} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ,

解得 $2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ ,

取 $k=0$ ，可得函数 $f(x)$ 的一个单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ,

则 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ， $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \not\subseteq \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ，A选项满足条件，B不满足条件；

取 $k=1$ ，可得函数 $f(x)$ 的一个单调递增区间为 $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$ ,

$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \not\subseteq \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 且 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \not\subseteq \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$ ， $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \not\subseteq \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$ ，CD选项均不满足条件.

故选：A.

【点睛】方法点睛：求较为复杂的三角函数的单调区间时，首先化简成  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  形式，再求  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的单调区间，只需把  $\omega x + \varphi$  看作一个整体代入  $y = \sin x$  的相应单调区间内即可，注意要先把  $\omega$  化为正数.

5. 已知  $F_1, F_2$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的两个焦点，点  $M$  在  $C$  上，则  $|MF_1| \cdot |MF_2|$  的最大值为 ( )

- A. 13                      B. 12                      C. 9                      D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】本题通过利用椭圆定义得到  $|MF_1| + |MF_2| = 2a = 6$ ，借助基本不等式

$$|MF_1| \cdot |MF_2| \leq \left( \frac{|MF_1| + |MF_2|}{2} \right)^2 \text{ 即可得到答案.}$$

【详解】由题， $a^2 = 9, b^2 = 4$ ，则  $|MF_1| + |MF_2| = 2a = 6$ ，

$$\text{所以 } |MF_1| \cdot |MF_2| \leq \left( \frac{|MF_1| + |MF_2|}{2} \right)^2 = 9 \text{ (当且仅当 } |MF_1| = |MF_2| = 3 \text{ 时，等号成立).}$$

故选：C.

【点睛】本题关键在于正确理解能够想到求最值的方法，即通过基本不等式放缩得到.

6. 若  $\tan \theta = -2$ ，则  $\frac{\sin \theta (1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} =$  ( )

- A.  $-\frac{6}{5}$                       B.  $-\frac{2}{5}$                       C.  $\frac{2}{5}$                       D.  $\frac{6}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】将式子进行齐次化处理，代入  $\tan \theta = -2$  即可得到结果.

【详解】将式子进行齐次化处理得：

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta (1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} &= \frac{\sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta + \cos \theta} = \sin \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \frac{\sin \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta + \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{4 - 2}{1 + 4} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

故选：C.

【点睛】易错点睛：本题如果利用  $\tan \theta = -2$ ，求出  $\sin \theta, \cos \theta$  的值，可能还需要分象限讨论其正负，通过齐次化处理，可以避开了这一讨论.

8. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（ ）

- A. 甲与丙相互独立  
B. 甲与丁相互独立  
C. 乙与丙相互独立  
D. 丙与丁相互独立

【答案】B

【解析】

【分析】根据独立事件概率关系逐一判断

【详解】 $P(\text{甲}) = \frac{1}{6}$ ,  $P(\text{乙}) = \frac{1}{6}$ ,  $P(\text{丙}) = \frac{5}{36}$ ,  $P(\text{丁}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ , ,

$P(\text{甲丙}) = 0 \neq P(\text{甲})P(\text{丙})$ ,  $P(\text{甲丁}) = \frac{1}{36} = P(\text{甲})P(\text{丁})$ ,

$P(\text{乙丙}) = \frac{1}{36} \neq P(\text{乙})P(\text{丙})$ ,  $P(\text{丙丁}) = 0 \neq P(\text{丁})P(\text{丙})$ ,

故选：B

【点睛】判断事件  $A, B$  是否独立，先计算对应概率，再判断  $P(A)P(B) = P(AB)$  是否成立

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，由这组数据得到新样本数据  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ，其中

$y_i = x_i + c (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $c$  为非零常数，则（ ）

- A. 两组样本数据的样本平均数相同  
B. 两组样本数据的样本中位数相同  
C. 两组样本数据的样本标准差相同  
D. 两组样数据的样本极差相同

【答案】CD

【解析】

【分析】A、C 利用两组数据的线性关系有  $E(y) = E(x) + c$ 、 $D(y) = D(x)$ ，即可判断正误；根据中位数、极差的定义，结合已知线性关系可判断 B、D 的正误.

【详解】A:  $E(y) = E(x+c) = E(x) + c$  且  $c \neq 0$ , 故平均数不相同, 错误;

B: 若第一组中位数为  $x_i$ , 则第二组的中位数为  $y_i = x_i + c$ , 显然不相同, 错误;

C:  $D(y) = D(x) + D(c) = D(x)$ , 故方差相同, 正确;

D: 由极差的定义知: 若第一组的极差为  $x_{\max} - x_{\min}$ , 则第二组的极差为

$$y_{\max} - y_{\min} = (x_{\max} + c) - (x_{\min} + c) = x_{\max} - x_{\min}, \text{ 故极差相同, 正确;}$$

故选: CD

10. 已知  $O$  为坐标原点, 点  $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $P_2(\cos \beta, -\sin \beta)$ ,  $P_3(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ ,  $A(1, 0)$ ,

则 ( )

A.  $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$

B.  $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

C.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$

D.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$

【答案】AC

【解析】

【分析】A、B 写出  $\overrightarrow{OP_1}$ ,  $\overrightarrow{OP_2}$ ,  $\overrightarrow{AP_1}$ ,  $\overrightarrow{AP_2}$  的坐标, 利用坐标公式求模, 即可判断正误; C、D 根据向量的坐标, 应用向量数量积的坐标表示及两角和差公式化简, 即可判断正误.

【详解】A:  $\overrightarrow{OP_1} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $\overrightarrow{OP_2} = (\cos \beta, -\sin \beta)$ , 所以  $|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$ ,  $|\overrightarrow{OP_2}| = \sqrt{(\cos \beta)^2 + (-\sin \beta)^2} = 1$ , 故  $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$ , 正确;

B:  $\overrightarrow{AP_1} = (\cos \alpha - 1, \sin \alpha)$ ,  $\overrightarrow{AP_2} = (\cos \beta - 1, -\sin \beta)$ , 所以

$$|\overrightarrow{AP_1}| = \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2|\sin \frac{\alpha}{2}|,$$

同理  $|\overrightarrow{AP_2}| = \sqrt{(\cos \beta - 1)^2 + \sin^2 \beta} = 2|\sin \frac{\beta}{2}|$ , 故  $|\overrightarrow{AP_1}|, |\overrightarrow{AP_2}|$  不一定相等, 错误;

C: 由题意得:  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = 1 \times \cos(\alpha + \beta) + 0 \times \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$ ,

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot (-\sin \beta) = \cos(\alpha + \beta), \text{ 正确;}$$

D: 由题意得:  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = 1 \times \cos \alpha + 0 \times \sin \alpha = \cos \alpha$ ,

$$\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \cos \beta \times \cos(\alpha + \beta) + (-\sin \beta) \times \sin(\alpha + \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \beta - \cos \alpha \sin^2 \beta$$

$$= \cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta = \cos(\alpha + 2\beta), \text{ 错误;}$$

故选: AC

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数  $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$  是偶函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

【答案】1

【解析】

【分析】利用偶函数的定义可求参数  $a$  的值.

【详解】因为  $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ , 故  $f(-x) = -x^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x)$ ,

因为  $f(x)$  为偶函数, 故  $f(-x) = f(x)$ ,

时  $x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x}) = -x^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x)$ , 整理得到  $(a-1)(2^x + 2^{-x}) = 0$ ,

故  $a = 1$ ,

故答案为: 1

14. 已知  $O$  为坐标原点, 抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ,  $P$  为  $C$  上一点,  $PF$  与  $x$  轴垂直,  $Q$  为  $x$  轴上一点, 且  $PQ \perp OP$ , 若  $|FQ| = 6$ , 则  $C$  的准线方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $x = -\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】先用坐标表示  $P, Q$ , 再根据向量垂直坐标表示列方程, 解得  $p$ , 即得结果.

【详解】不妨设  $P(\frac{p}{2}, p) \therefore Q(6 + \frac{p}{2}, 0), \overrightarrow{PQ} = (6, -p)$

因为  $PQ \perp OP$ , 所以  $\frac{p}{2} \times 6 - p^2 = 0 \text{ 且 } p > 0 \therefore p = 3 \therefore C$  的准线方程为  $x = -\frac{3}{2}$

故答案为:  $x = -\frac{3}{2}$

【点睛】利用向量数量积处理垂直关系是本题关键.

15. 函数  $f(x) = |2x-1| - 2\ln x$  的最小值为\_\_\_\_\_.

【答案】1

【解析】

【分析】由解析式知  $f(x)$  定义域为  $(0, +\infty)$ ，讨论  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ 、 $x > 1$ ，并结合导数研究的单调性，即可求  $f(x)$  最小值.

【详解】由题设知： $f(x) = |2x - 1| - 2\ln x$  定义域为  $(0, +\infty)$ ，

$\therefore$  当  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  时， $f(x) = 1 - 2x - 2\ln x$ ，此时  $f(x)$  单调递减；

当  $\frac{1}{2} < x \leq 1$  时， $f(x) = 2x - 1 - 2\ln x$ ，有  $f'(x) = 2 - \frac{2}{x} \leq 0$ ，此时  $f(x)$  单调递减；

当  $x > 1$  时， $f(x) = 2x - 1 - 2\ln x$ ，有  $f'(x) = 2 - \frac{2}{x} > 0$ ，此时  $f(x)$  单调递增；

又  $f(x)$  在各分段的界点处连续，

$\therefore$  综上有： $0 < x \leq 1$  时， $f(x)$  单调递减， $x > 1$  时， $f(x)$  单调递增；

$\therefore f(x) \geq f(1) = 1$

故答案为：1.

16. 某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为  $20\text{dm} \times 12\text{dm}$  的长方形纸，对折 1 次共可以得到  $10\text{dm} \times 12\text{dm}$ ， $20\text{dm} \times 6\text{dm}$  两种规格的图形，它们的面积之和

$S_1 = 240\text{dm}^2$ ，对折 2 次共可以得到  $5\text{dm} \times 12\text{dm}$ ， $10\text{dm} \times 6\text{dm}$ ， $20\text{dm} \times 3\text{dm}$  三种规格的图形，它们的面积之和  $S_2 = 180\text{dm}^2$ ，以此类推，则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为\_\_\_\_\_；如果对折  $n$  次，

那么  $\sum_{k=1}^n S_k = \underline{\hspace{2cm}} \text{dm}^2$ .

【答案】 (1). 5 (2).  $720 - \frac{15(3+n)}{2^{n-4}}$

【解析】

【分析】(1) 按对折列举即可；(2) 根据规律可得  $S_n$ ，再根据错位相减法得结果.

【详解】(1) 对折 4 次可得到如下规格： $\frac{5}{4}\text{dm} \times 12\text{dm}$ ， $\frac{5}{2}\text{dm} \times 6\text{dm}$ ， $5\text{dm} \times 3\text{dm}$ ， $10\text{dm} \times \frac{3}{2}\text{dm}$ ， $20\text{dm} \times \frac{3}{4}\text{dm}$ ，共 5 种；

(2) 由题意可得  $S_1 = 2 \times 120$ ， $S_2 = 3 \times 60$ ， $S_3 = 4 \times 30$ ， $S_4 = 5 \times 15$ ， $\dots$ ， $S_n = \frac{120(n+1)}{2^{n-1}}$ ，

设  $S = \frac{120 \times 2}{2^0} + \frac{120 \times 3}{2^1} + \frac{120 \times 4}{2^2} + \dots + \frac{120(n+1)}{2^{n-1}}$ ，

$$\text{则 } \frac{1}{2}S = \frac{120 \times 2}{2^1} + \frac{120 \times 3}{2^2} + \cdots + \frac{120n}{2^{n-1}} + \frac{120(n+1)}{2^n},$$

$$\text{两式作差得 } \frac{1}{2}S = 240 + 120 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{120(n+1)}{2^n} = 240 + \frac{60 \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{120(n+1)}{2^n}$$

$$= 360 - \frac{120}{2^{n-1}} - \frac{120(n+1)}{2^n} = 360 - \frac{120(n+3)}{2^n},$$

$$\text{因此, } S = 720 - \frac{240(n+3)}{2^n} = 720 - \frac{15(n+3)}{2^{n-4}}.$$

$$\text{故答案为: } 5; 720 - \frac{15(n+3)}{2^{n-4}}.$$

【点睛】方法点睛：数列求和的常用方法：

(1) 对于等差等比数列，利用公式法可直接求解；

(2) 对于  $\{a_n b_n\}$  结构，其中  $\{a_n\}$  是等差数列， $\{b_n\}$  是等比数列，用错位相减法求和；

(3) 对于  $\{a_n + b_n\}$  结构，利用分组求和法；

(4) 对于  $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$  结构，其中  $\{a_n\}$  是等差数列，公差为  $d (d \neq 0)$ ，则  $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d} \left( \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$ ，利用裂

项相消法求和.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数,} \\ a_n + 2, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

(1) 记  $b_n = a_{2n}$ ，写出  $b_1, b_2$ ，并求数列  $\{b_n\}$  的通项公式；

(2) 求  $\{a_n\}$  的前 20 项和.

【答案】(1)  $b_1 = 2, b_2 = 5$ ；(2) 300.

【解析】

【分析】(1) 根据题设中的递推关系可得  $b_{n+1} = b_n + 3$ ，从而可求  $\{b_n\}$  的通项.

(2) 根据题设中的递推关系可得  $\{a_n\}$  的前 20 项和为  $S_{20}$  可化为  $S_{20} = 2(b_1 + b_2 + \cdots + b_9 + b_{10}) - 10$ ，利用

(1) 的结果可求  $S_{20}$ .



【详解】(1) 由题设可得  $b_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2, b_2 = a_4 = a_3 + 1 = a_2 + 2 + 1 = 5$

又  $a_{2k+2} = a_{2k+1} + 1, a_{2k+1} = a_{2k} + 2,$

故  $a_{2k+2} = a_{2k} + 3$  即  $b_{n+1} = b_n + 3$  即  $b_{n+1} - b_n = 3$

所以  $\{b_n\}$  为等差数列, 故  $b_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1.$

(2) 设  $\{a_n\}$  的前 20 项和为  $S_{20}$ , 则  $S_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20},$

因为  $a_1 = a_2 - 1, a_3 = a_4 - 1, \cdots, a_{19} = a_{20} - 1,$

所以  $S_{20} = 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}) - 10$

$$= 2(b_1 + b_2 + \cdots + b_9 + b_{10}) - 10 = 2 \times \left( 10 \times 2 + \frac{9 \times 10}{2} \times 3 \right) - 10 = 300.$$

【点睛】方法点睛: 对于数列的交叉递推关系, 我们一般利用已知的关系得到奇数项的递推关系或偶数项的递推关系, 再结合已知数列的通项公式、求和公式等来求解问题.

18. 某学校组织“一带一路”知识竞赛, 有  $A, B$  两类问题, 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答, 若回答错误则该同学比赛结束: 若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答, 无论回答正确与否, 该同学比赛结束.  $A$  类问题中的每个问题回答正确得 20 分, 否则得 0 分;  $B$  类问题中的每个问题回答正确得 80 分, 否则得 0 分, 已知小明能正确回答  $A$  类问题的概率为 0.8, 能正确回答  $B$  类问题的概率为 0.6, 且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

(1) 若小明先回答  $A$  类问题, 记  $X$  为小明的累计得分, 求  $X$  的分布列;

(2) 为使累计得分的期望最大, 小明应选择先回答哪类问题? 并说明理由.

【答案】(1) 见解析; (2)  $B$  类.

【解析】

【分析】(1) 通过题意分析出小明累计得分  $X$  的所有可能取值, 逐一求概率列分布列即可. (2) 与 (1) 类似, 找出先回答  $B$  类问题的数学期望, 比较两个期望的大小即可.

【详解】(1) 由题可知,  $X$  的所有可能取值为 0, 20, 100.

$$P(X=0) = 1 - 0.8 = 0.2;$$

$$P(X=20) = 0.8(1 - 0.6) = 0.32;$$

$$P(X=100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48.$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	20	100
$P$	0.2	0.32	0.48

(2) 由 (1) 知,  $E(X) = 0 \times 0.2 + 20 \times 0.32 + 100 \times 0.48 = 54.4$ .

若小明先回答  $B$  问题, 记  $Y$  为小明的累计得分, 则  $Y$  的所有可能取值为 0, 80, 100.

$$P(Y=0) = 1 - 0.6 = 0.4;$$

$$P(Y=80) = 0.6(1-0.8) = 0.12;$$

$$P(X=100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48.$$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times 0.4 + 80 \times 0.12 + 100 \times 0.48 = 57.6.$$

因为  $54.4 < 57.6$ , 所以小明应选择先回答  $B$  类问题.

19. 记  $\triangle ABC$  是内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $b^2 = ac$ , 点  $D$  在边  $AC$  上,

$$BD \sin \angle ABC = a \sin C.$$

(1) 证明:  $BD = b$ ;

(2) 若  $AD = 2DC$ , 求  $\cos \angle ABC$ .

**【答案】** (1) 证明见解析; (2)  $\cos \angle ABC = \frac{7}{12}$ .

**【解析】**

**【分析】** (1) 根据正弦定理的边角关系有  $BD = \frac{ac}{b}$ , 结合已知即可证结论.

(2) 由题设  $BD = b, AD = \frac{2b}{3}, DC = \frac{b}{3}$ , 应用余弦定理求  $\cos \angle ADB$ 、 $\cos \angle CDB$ , 又

$$\angle ADB = \pi - \angle CDB, \text{ 可得 } 2a^2 + \frac{b^4}{a^2} = \frac{11b^2}{3}, \text{ 结合已知及余弦定理即可求 } \cos \angle ABC.$$

**【详解】**

(1) 由题设,  $BD = \frac{a \sin C}{\sin \angle ABC}$ , 由正弦定理知:  $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin \angle ABC}$ , 即  $\frac{\sin C}{\sin \angle ABC} = \frac{c}{b}$ ,

$$\therefore BD = \frac{ac}{b}, \text{ 又 } b^2 = ac,$$

$\therefore BD = b$ , 得证.

(2) 由题意知:  $BD = b, AD = \frac{2b}{3}, DC = \frac{b}{3}$ ,

$$\therefore \cos \angle ADB = \frac{b^2 + \frac{4b^2}{9} - c^2}{2b \cdot \frac{2b}{3}} = \frac{\frac{13b^2}{9} - c^2}{\frac{4b^2}{3}}, \text{ 同理 } \cos \angle CDB = \frac{b^2 + \frac{b^2}{9} - a^2}{2b \cdot \frac{b}{3}} = \frac{\frac{10b^2}{9} - a^2}{\frac{2b^2}{3}},$$

$$\because \angle ADB = \pi - \angle CDB,$$

$$\therefore \frac{\frac{13b^2}{9} - c^2}{\frac{4b^2}{3}} = \frac{a^2 - \frac{10b^2}{9}}{\frac{2b^2}{3}}, \text{ 整理得 } 2a^2 + c^2 = \frac{11b^2}{3}, \text{ 又 } b^2 = ac,$$

$$\therefore 2a^2 + \frac{b^4}{a^2} = \frac{11b^2}{3}, \text{ 整理得 } 6a^4 - 11a^2b^2 + 3b^4 = 0, \text{ 解得 } \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{a^2}{b^2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{由余弦定理知: } \cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4}{3} - \frac{a^2}{2b^2},$$

$$\text{当 } \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{3} \text{ 时, } \cos \angle ABC = \frac{7}{6} > 1 \text{ 不合题意; 当 } \frac{a^2}{b^2} = \frac{3}{2} \text{ 时, } \cos \angle ABC = \frac{7}{12};$$

$$\text{综上, } \cos \angle ABC = \frac{7}{12}.$$

【点睛】关键点睛：第二问，根据余弦定理及  $\angle ADB = \pi - \angle CDB$  得到  $a, b, c$  的数量关系，结合已知条件及余弦定理求  $\cos \angle ABC$ 。

21. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知点  $F_1(-\sqrt{17}, 0)$ 、 $F_2(\sqrt{17}, 0)$   $|MF_1| - |MF_2| = 2$ ，点  $M$  的轨迹为  $C$ 。

(1) 求  $C$  的方程；

(2) 设点  $T$  在直线  $x = \frac{1}{2}$  上，过  $T$  的两条直线分别交  $C$  于  $A, B$  两点 and  $P, Q$  两点，且  $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$ ，

求直线  $AB$  的斜率与直线  $PQ$  的斜率之和。

$$\text{【答案】(1) } x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x \geq 1); \text{ (2) } 0.$$

【解析】

【分析】(1) 利用双曲线的定义可知轨迹  $C$  是以点  $F_1, F_2$  为左、右焦点双曲线的右支，求出  $a, b$  的值，即可得出轨迹  $C$  的方程；

(2) 设点  $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$ ，设直线  $AB$  的方程为  $y - t = k_1\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ，设点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，联立直线  $AB$  与

曲线  $C$  的方程，列出韦达定理，求出  $|TA| \cdot |TB|$  的表达式，设直线  $PQ$  的斜率为  $k_2$ ，同理可得出  $|TP| \cdot |TQ|$  的表达式，由  $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$  化简可得  $k_1 + k_2$  的值。

【详解】因为  $|MF_1| - |MF_2| = 2 < |F_1F_2| = 2\sqrt{17}$ ,

所以, 轨迹  $C$  是以点  $F_1$ 、 $F_2$  为左、右焦点的双曲线的右支,

设轨迹  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ , 则  $2a = 2$ , 可得  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{17 - a^2} = 4$ ,

所以, 轨迹  $C$  的方程为  $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x \geq 1)$ ;

(2) 设点  $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$ , 若过点  $T$  的直线的斜率不存在, 此时该直线与曲线  $C$  无公共点,

不妨直线  $AB$  的方程为  $y - t = k_1\left(x - \frac{1}{2}\right)$ , 即  $y = k_1x + t - \frac{1}{2}k_1$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k_1x + t - \frac{1}{2}k_1 \\ 16x^2 - y^2 = 16 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 并整理可得 } (k_1^2 - 16)x^2 + k_1(2t - k_1)x + \left(t - \frac{1}{2}k_1\right)^2 + 16 = 0,$$

设点  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 > \frac{1}{2}$  且  $x_2 > \frac{1}{2}$ .

$$\text{由韦达定理可得 } x_1 + x_2 = \frac{k_1^2 - 2k_1t}{k_1^2 - 16}, \quad x_1x_2 = \frac{\left(t - \frac{1}{2}k_1\right)^2 + 16}{k_1^2 - 16},$$

$$\text{所以, } |TA| \cdot |TB| = \left(1 + k_1^2\right) \cdot \left|x_1 - \frac{1}{2}\right| \cdot \left|x_2 - \frac{1}{2}\right| = \left(1 + k_1^2\right) \cdot \left(x_1x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{(t^2 + 12)(1 + k_1^2)}{k_1^2 - 16},$$

$$\text{设直线 } PQ \text{ 的斜率为 } k_2, \text{ 同理可得 } |TP| \cdot |TQ| = \frac{(t^2 + 12)(1 + k_2^2)}{k_2^2 - 16},$$

$$\text{因为 } |TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|, \text{ 即 } \frac{(t^2 + 12)(1 + k_1^2)}{k_1^2 - 16} = \frac{(t^2 + 12)(1 + k_2^2)}{k_2^2 - 16}, \text{ 整理可得 } k_1^2 = k_2^2,$$

$$\text{即 } (k_1 - k_2)(k_1 + k_2) = 0, \text{ 显然 } k_1 - k_2 \neq 0, \text{ 故 } k_1 + k_2 = 0.$$

因此, 直线  $AB$  与直线  $PQ$  的斜率之和为 0.

【点睛】方法点睛: 求定值问题常见的方法有两种:

(1) 从特殊入手, 求出定值, 再证明这个值与变量无关;

(2) 直接推理、计算, 并在计算推理的过程中消去变量, 从而得到定值.

22. 已知函数  $f(x) = x(1 - \ln x)$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 设  $a, b$  为两个不相等的正数, 且  $b \ln a - a \ln b = a - b$ , 证明:  $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ .

【答案】(1)  $f(x)$  的递增区间为  $(0, 1)$ , 递减区间为  $(1, +\infty)$ ; (2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 求出函数的导数, 判断其符号可得函数的单调区间;

(2) 设  $\frac{1}{a} = x_1, \frac{1}{b} = x_2$ , 原不等式等价于  $2 < x_1 + x_2 < e$ , 前者可构建新函数, 利用极值点偏移可证, 后者可设  $x_2 = tx_1$ , 从而把  $x_1 + x_2 < e$  转化为  $(t-1)\ln(t+1) - t \ln t < 0$  在  $(1, +\infty)$  上的恒成立问题, 利用导数可证明该结论成立.

【详解】(1) 函数的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$$\text{又 } f'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x,$$

当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ ,

故  $f(x)$  的递增区间为  $(0, 1)$ , 递减区间为  $(1, +\infty)$ .

(2) 因为  $b \ln a - a \ln b = a - b$ , 故  $b(\ln a + 1) = a(\ln b + 1)$ , 即  $\frac{\ln a + 1}{a} = \frac{\ln b + 1}{b}$ ,

$$\text{故 } f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right),$$

设  $\frac{1}{a} = x_1, \frac{1}{b} = x_2$ , 由 (1) 可知不妨设  $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$ .

因为  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) = x(1 - \ln x) > 0$ ,  $x \in (e, +\infty)$  时,  $f(x) = x(1 - \ln x) < 0$ ,

故  $1 < x_2 < e$ .

先证:  $x_1 + x_2 > 2$ ,

若  $x_2 \geq 2$ ,  $x_1 + x_2 > 2$  必成立.

若  $x_2 < 2$ , 要证:  $x_1 + x_2 > 2$ , 即证  $x_1 > 2 - x_2$ , 而  $0 < 2 - x_2 < 1$ ,

故即证  $f(x_1) > f(2 - x_2)$ , 即证:  $f(x_2) > f(2 - x_2)$ , 其中  $1 < x_2 < 2$ .

设  $g(x) = f(x) - f(2 - x), 1 < x < 2$ ,

则  $g'(x) = f'(x) + f'(2 - x) = -\ln x - \ln(2 - x) = -\ln[x(2 - x)],$

因为  $1 < x < 2$ , 故  $0 < x(2-x) < 1$ , 故  $-\ln x(2-x) > 0$ ,

所以  $g'(x) > 0$ , 故  $g(x)$  在  $(1, 2)$  为增函数, 所以  $g(x) > g(1) = 0$ ,

故  $f(x) > f(2-x)$ , 即  $f(x_2) > f(2-x_2)$  成立, 所以  $x_1 + x_2 > 2$  成立,

综上,  $x_1 + x_2 > 2$  成立.

设  $x_2 = tx_1$ , 则  $t > 1$ ,

结合  $\frac{\ln a + 1}{a} = \frac{\ln b + 1}{b}$ ,  $\frac{1}{a} = x_1, \frac{1}{b} = x_2$  可得:  $x_1(1 - \ln x_1) = x_2(1 - \ln x_2)$ ,

即:  $1 - \ln x_1 = t(1 - \ln t - \ln x_1)$ , 故  $\ln x_1 = \frac{t-1-t \ln t}{t-1}$ ,

要证:  $x_1 + x_2 < e$ , 即证  $(t+1)x_1 < e$ , 即证  $\ln(t+1) + \ln x_1 < 1$ ,

即证:  $\ln(t+1) + \frac{t-1-t \ln t}{t-1} < 1$ , 即证:  $(t-1)\ln(t+1) - t \ln t < 0$ ,

令  $S(t) = (t-1)\ln(t+1) - t \ln t, t > 1$ ,

则  $S'(t) = \ln(t+1) + \frac{t-1}{t+1} - 1 - \ln t = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{2}{t+1}$ ,

先证明一个不等式:  $\ln(x+1) \leq x$ .

设  $u(x) = \ln(x+1) - x$ , 则  $u'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$ ,

当  $-1 < x < 0$  时,  $u'(x) > 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $u'(x) < 0$ ,

故  $u(x)$  在  $(-1, 0)$  上为增函数, 在  $(0, +\infty)$  上为减函数, 故  $u(x)_{\max} = u(0) = 0$ ,

故  $\ln(x+1) \leq x$  成立

由上述不等式可得当  $t > 1$  时,  $\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \leq \frac{1}{t} < \frac{2}{t+1}$ , 故  $S'(t) < 0$  恒成立,

故  $S(t)$  在  $(1, +\infty)$  上为减函数, 故  $S(t) < S(1) = 0$ ,

故  $(t-1)\ln(t+1) - t \ln t < 0$  成立, 即  $x_1 + x_2 < e$  成立.

综上所述,  $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ .

【点睛】方法点睛: 极值点偏移问题, 一般利用通过原函数的单调性, 把与自变量有关的不等式问题转化

与原函数的函数值有关的不等式问题，也可以引入第三个变量，把不等式的问题转化为与新引入变量有关的不等式问题.