Wykład 2
Uczenie Maszynowe

KN Solvro

Cieszymy się, że jesteście z nami!

KN Solvro

Nawiązanie do wykładu 1

ML workflow

1. Definicja problemu
2. Zebranie i przygotowanie danych
3. Podział na zbiór treningowy / testowy
4. Wybór modelu
5. Trenowanie modelu
6. Ewaluacja (np. accuracy, RMSE)
7. Interpretacja wyników i wdrożenie

Sztuczna inteligencja

programy lub systemy komputerowe symulujące ludzkie myślenie

Czy to sztuczna inteligencja?

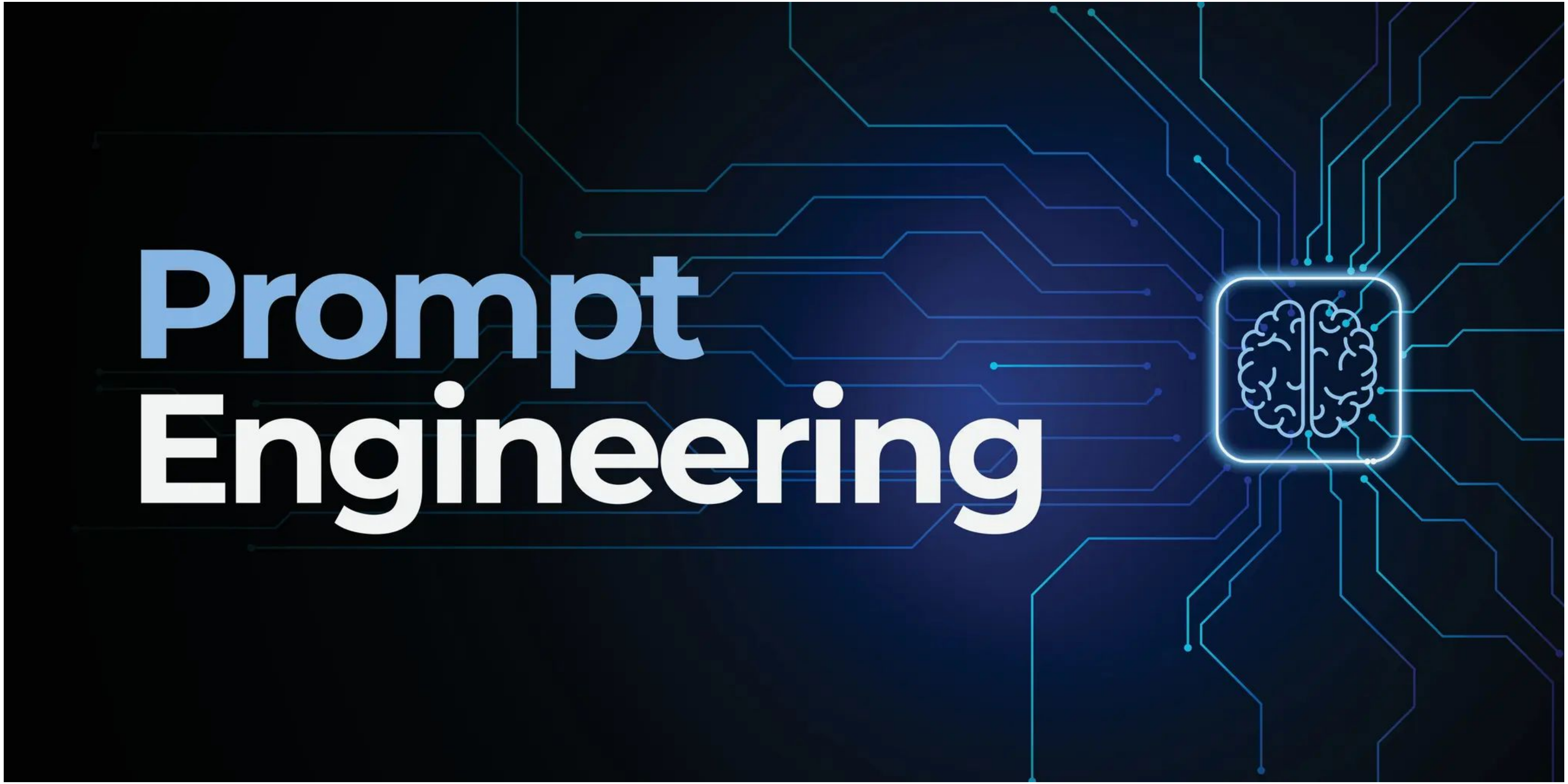
```
let a = 10,
    b = 20;
if (a > b) {
    console.log('a is greater than b');
} else if (a < b) {
    console.log('a is less than b');
} else {
    console.log('a is equal to b');
}
```

Czy to sztuczna inteligencja?

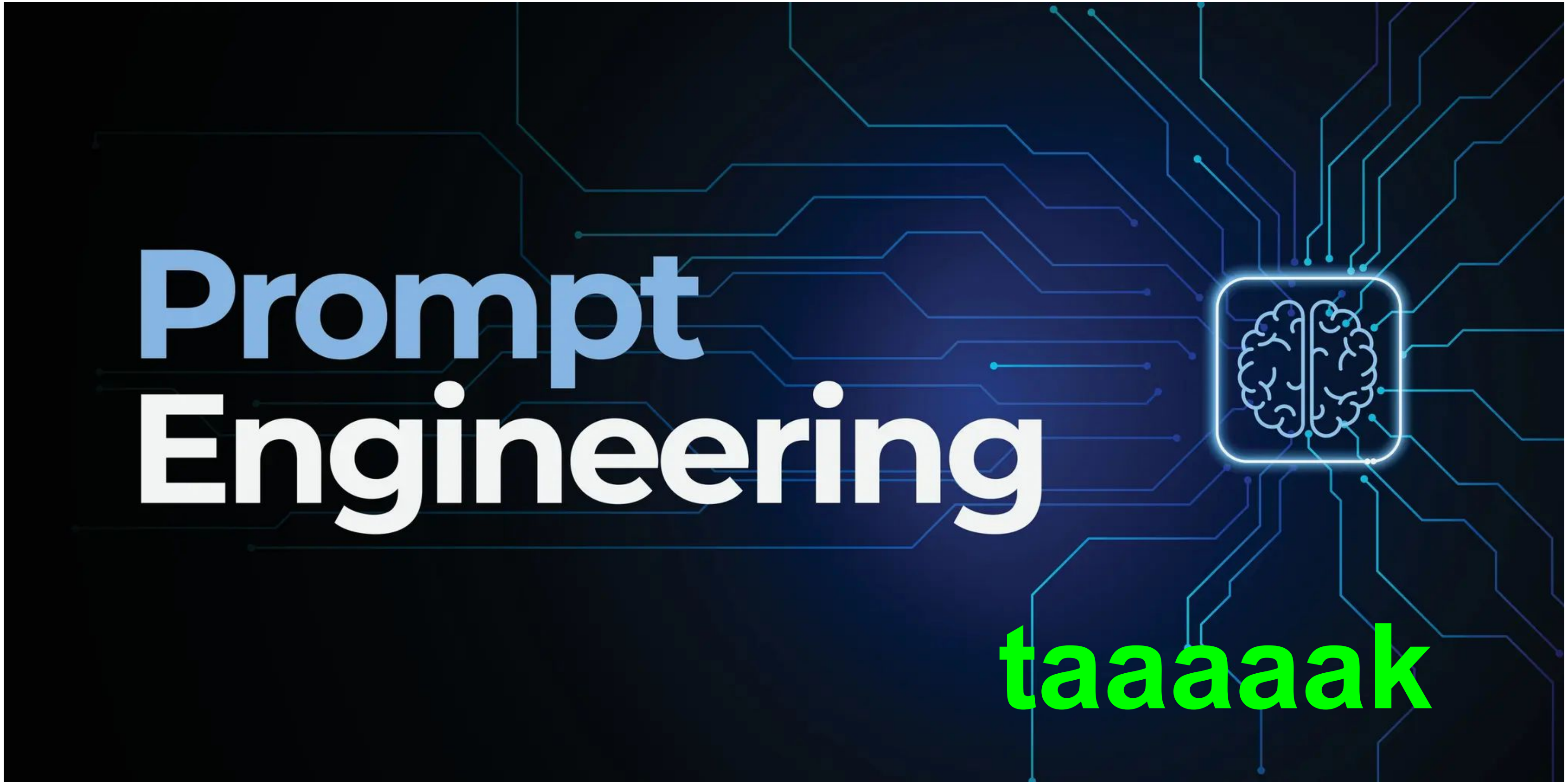
```
let a = 10,
    b = 20;
if (a > b) {
    console.log('a is greater than b');
} else if (a < b) {
    console.log('a is less than b');
} else {
    console.log('a is equal to b');
}
```

imo
może
być

Czy to sztuczna inteligencja?



Czy to sztuczna inteligencja?



Czy to sztuczna inteligencja?

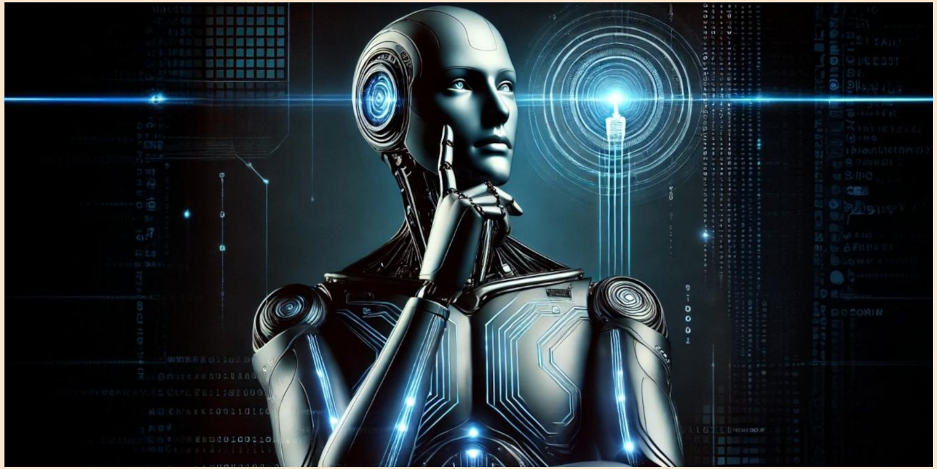
```
# --- Analiza zależności ceny biletu (Fare) vs przeżycie na uzupełnionych danych ---
print("\n--- Analiza zależności ceny biletu (Fare) vs przeżycie ---")
```

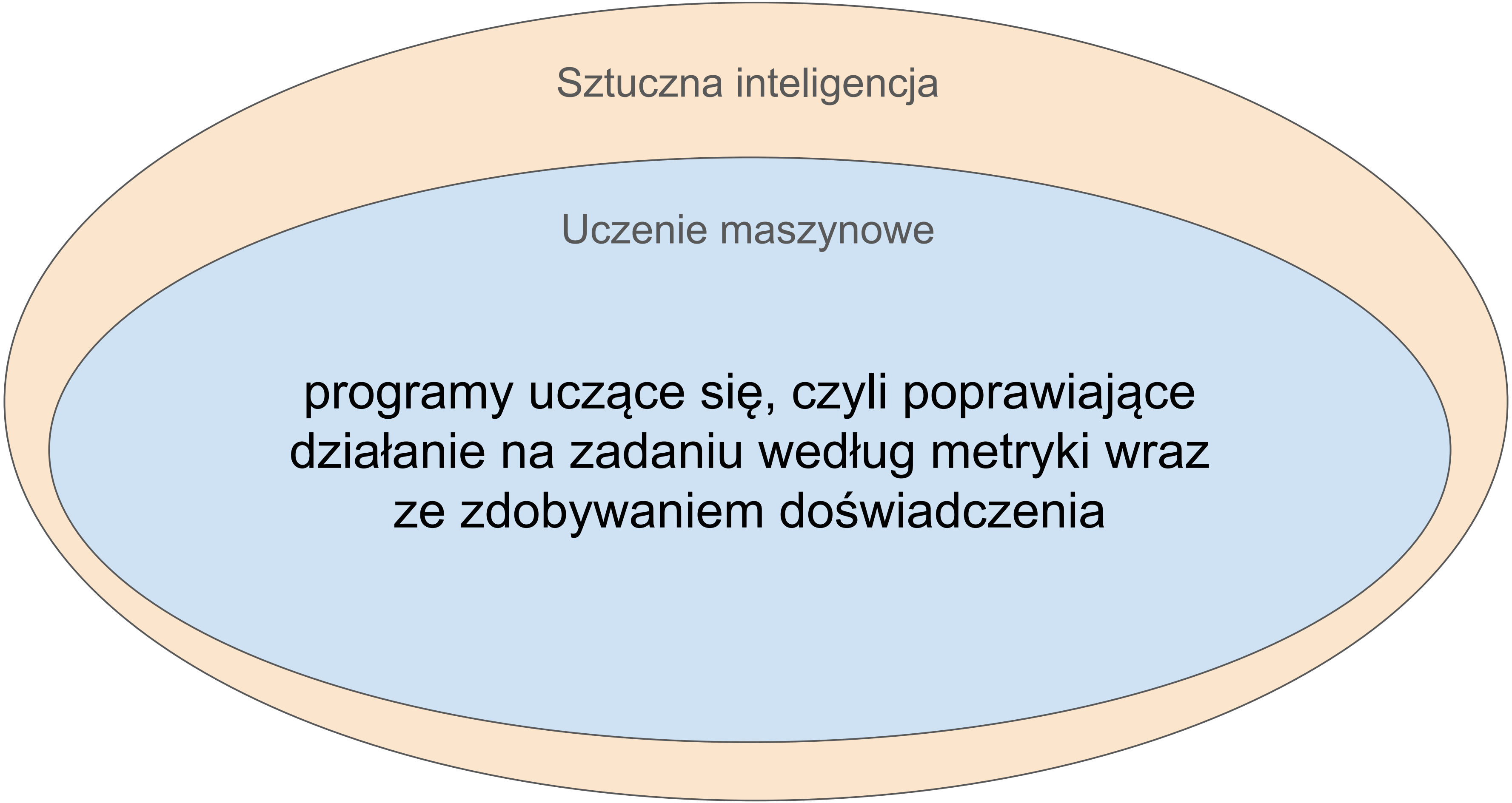
Czy to sztuczna inteligencja?

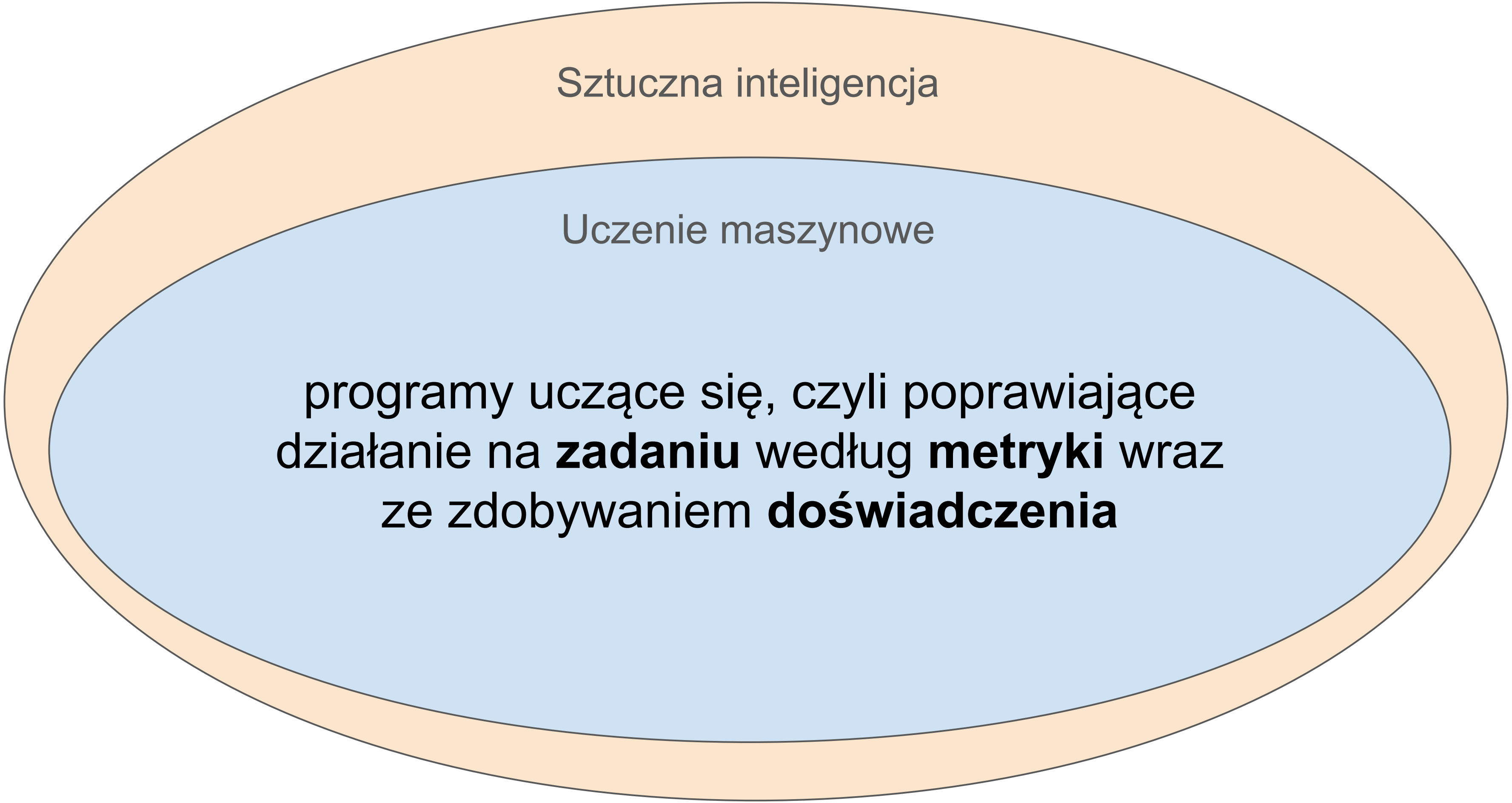
```
# --- Analiza zależności ceny biletu (Fare) vs przeżycie na uzupełnionych danych ---
print("\n--- Analiza zależności ceny biletu (Fare) vs przeżycie ---")
```

bro nikt tak nie pisze 😭😭

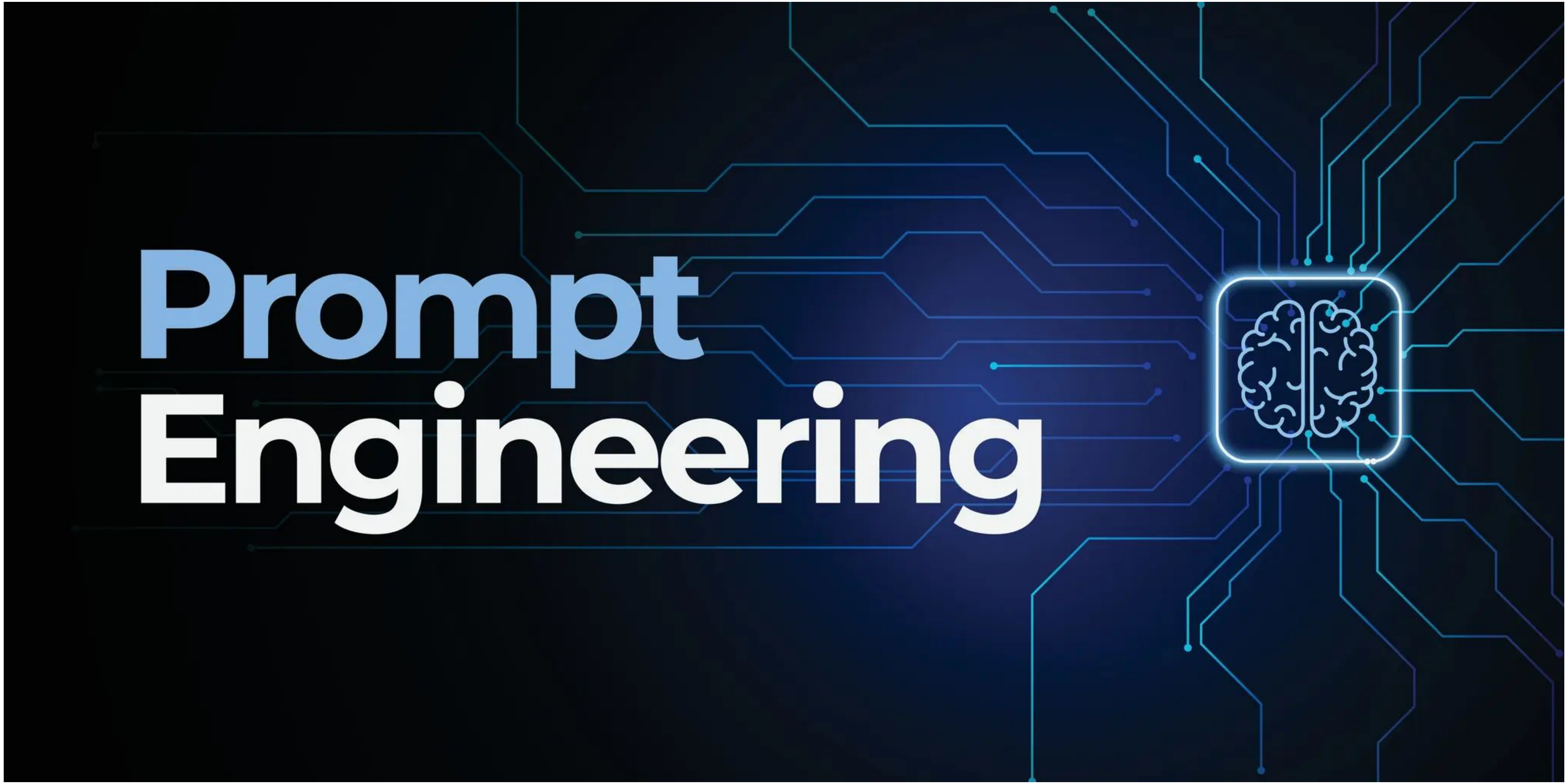
Sztuczna inteligencja




Sztuczna inteligencja
Uczenie maszynowe
programy uczące się, czyli poprawiające działanie na zadaniu według metryki wraz ze zdobywaniem doświadczenia


Sztuczna inteligencja
Uczenie maszynowe
programy uczące się, czyli poprawiające
działanie na **zadaniu** według **metryki** wraz
ze zdobywaniem **doświadczenia**

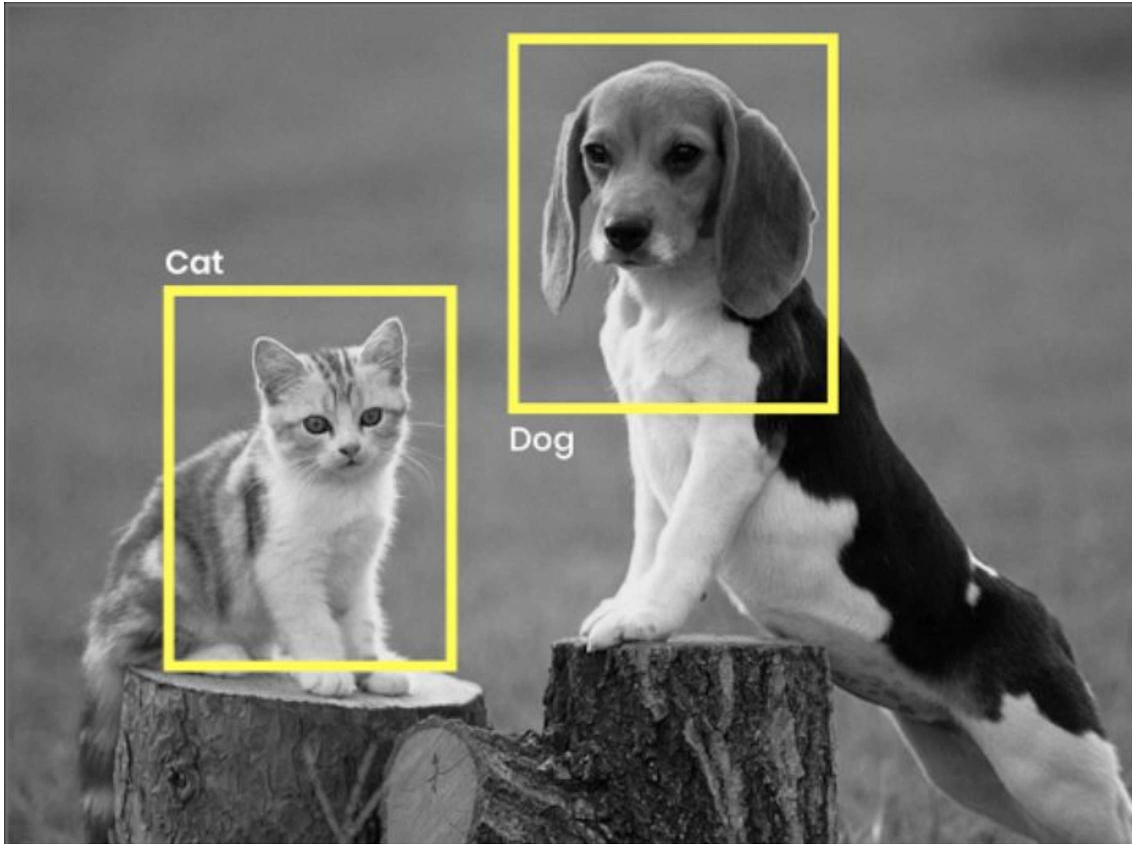
Czy to uczenie maszynowe?



Czy to uczenie maszynowe?

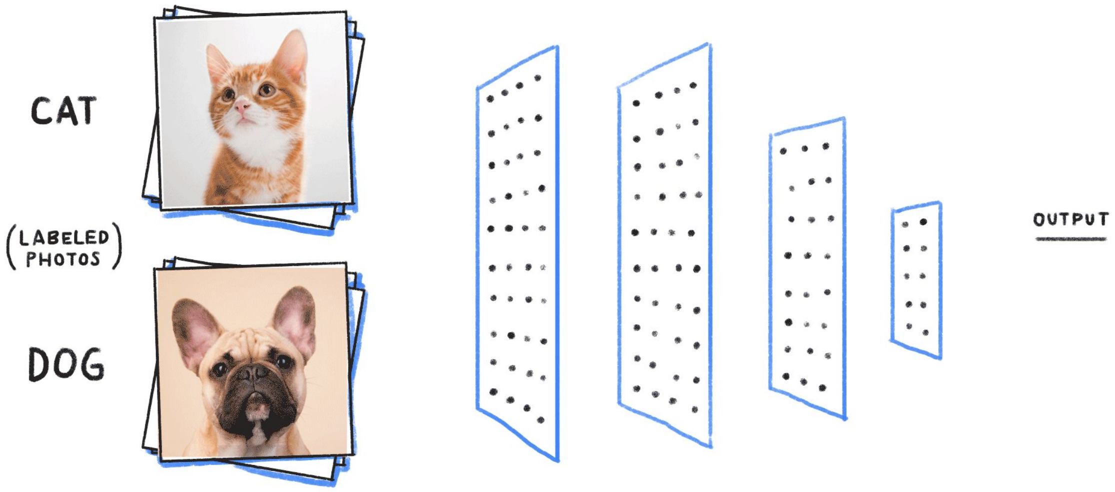
nie, poprawa działania nie jest na podstawie doświadczenia zbieranego przez program

Czy to uczenie maszynowe?

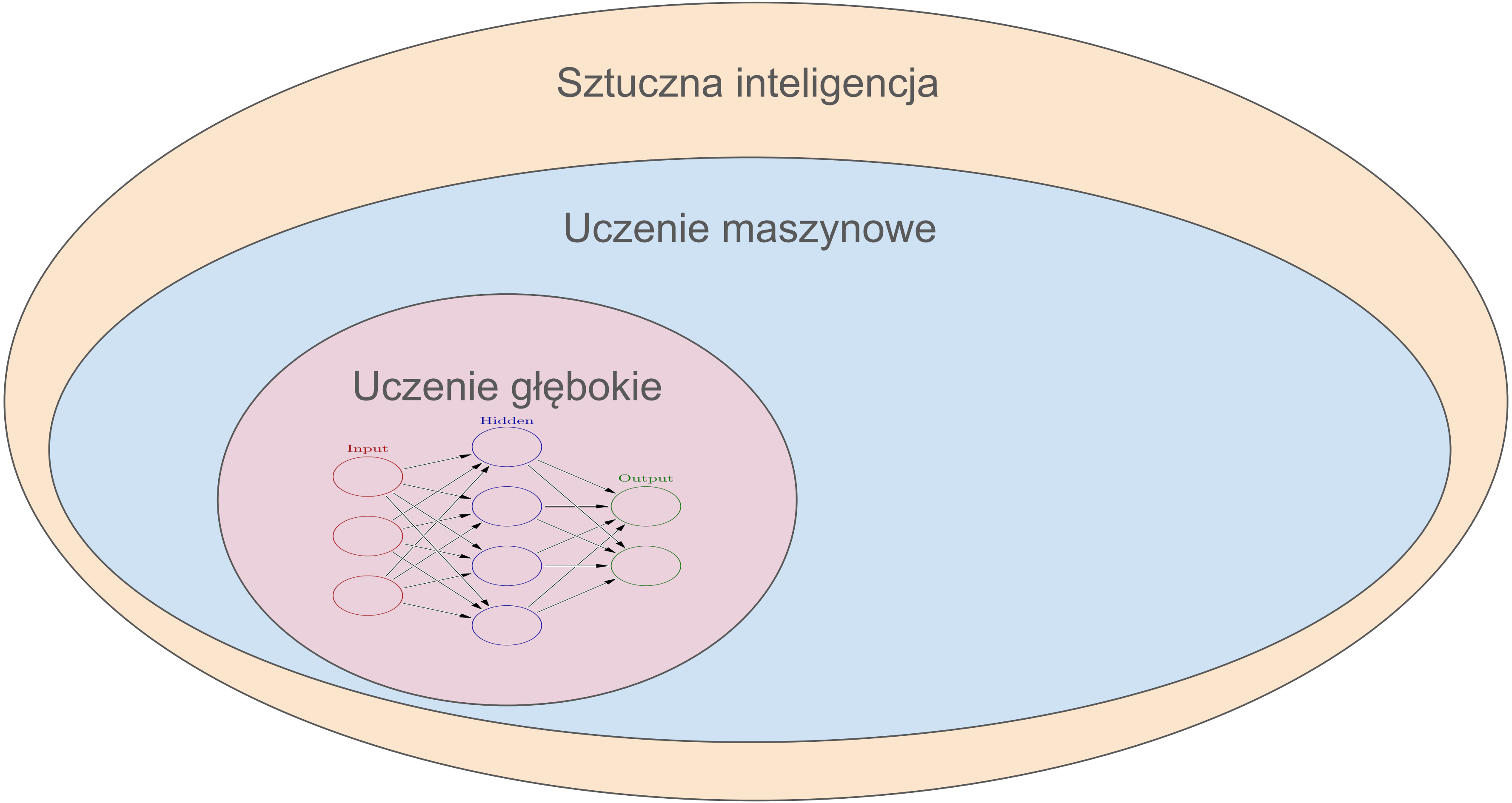


Czy to uczenie maszynowe?

Czy to uczenie maszynowe?



taaaaak! bo sieć się uczy


Sztuczna inteligencja
Uczenie maszynowe
Uczenie głębokie
Input
Hidden
Output

Rodzaje ML

Uczenie nadzorowane	Uczenie nienadzorowane	Uczenie ze wzmocnieniem

Rodzaje ML

Uczenie nadzorowane	Uczenie nienadzorowane	Uczenie ze wzmocnieniem

Klasyfikacja

Survived -
True or False

Uczenie
nadzorowane

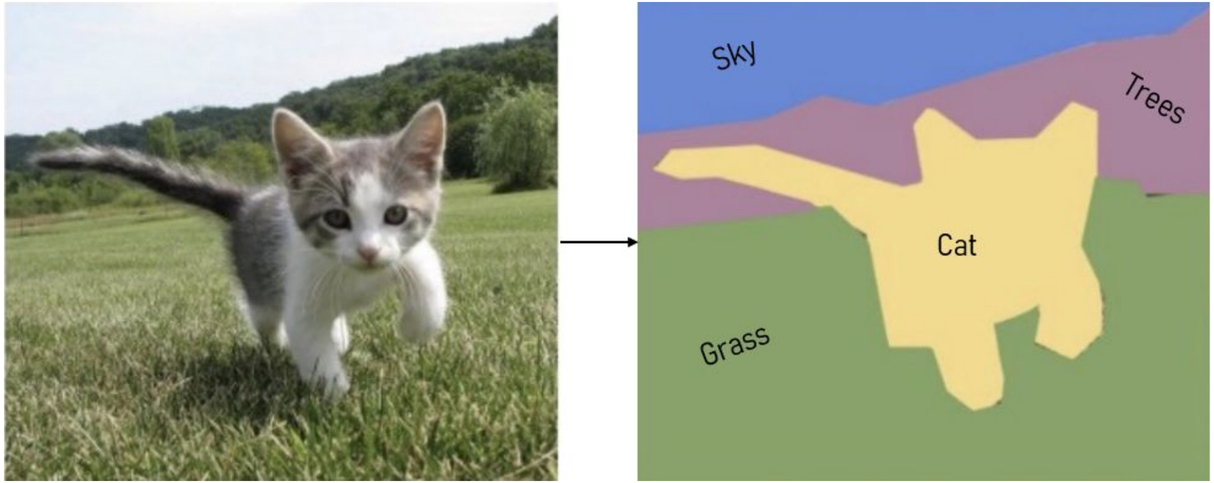
Regresja

Wartość akcji

Uczenie nadzorowane

Segmentacja semantyczna

Uczenie nadzorowane

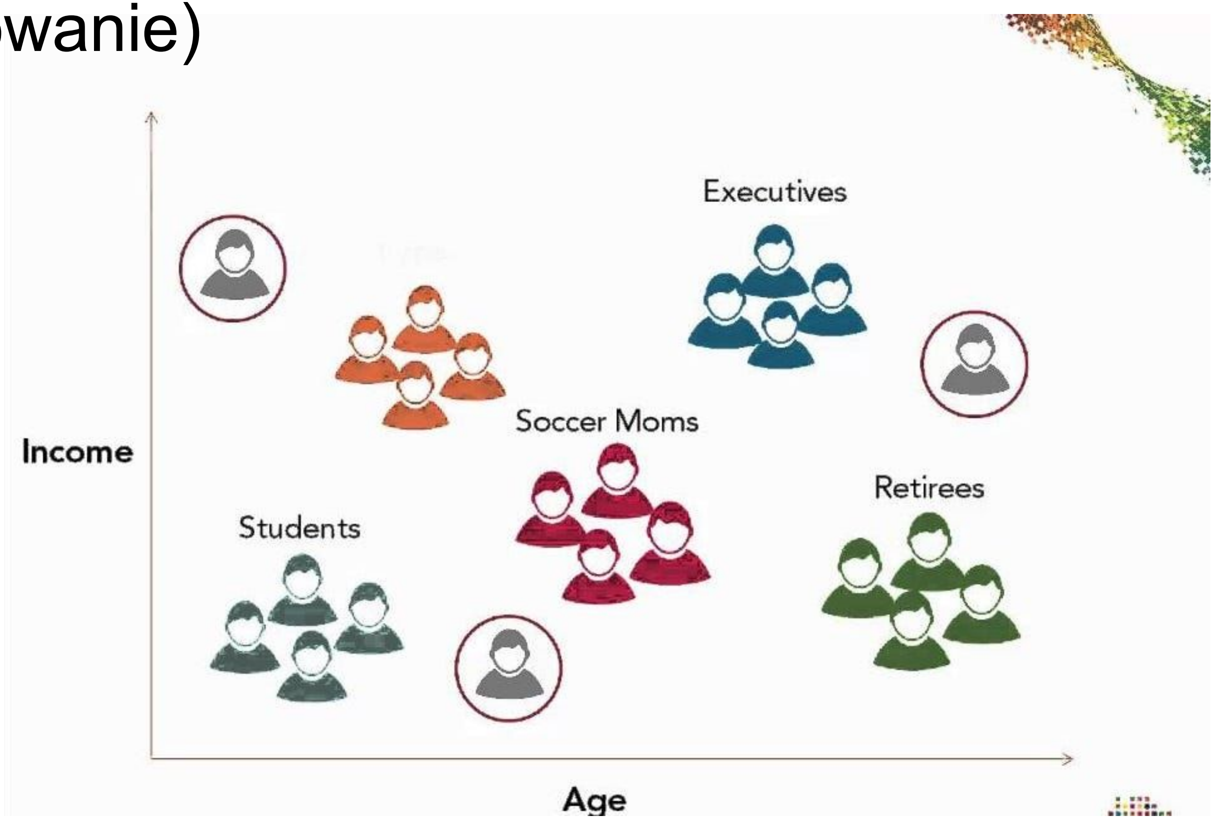


Rodzaje ML

Uczenie nadzorowane	**Uczenie nienadzorowane**	Uczenie ze wzmocnieniem

Klasteryzacja (grupowanie)

Uczenie nienadzorowane



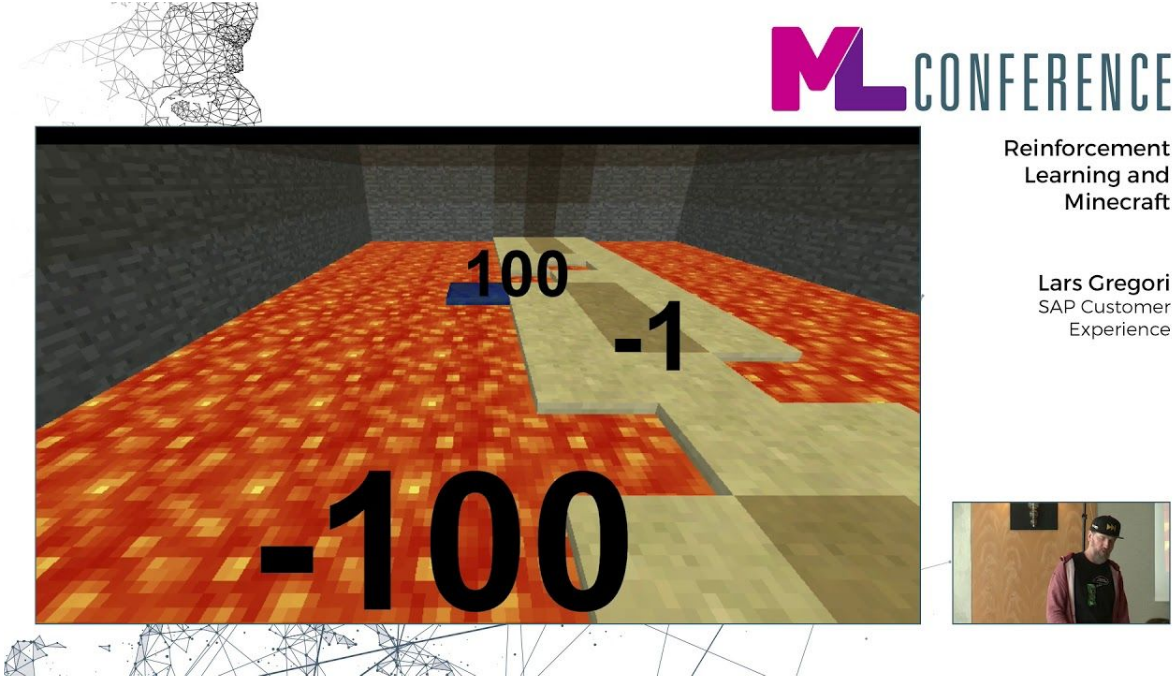
Rodzaje ML

Uczenie nadzorowane

Uczenie nienadzorowane

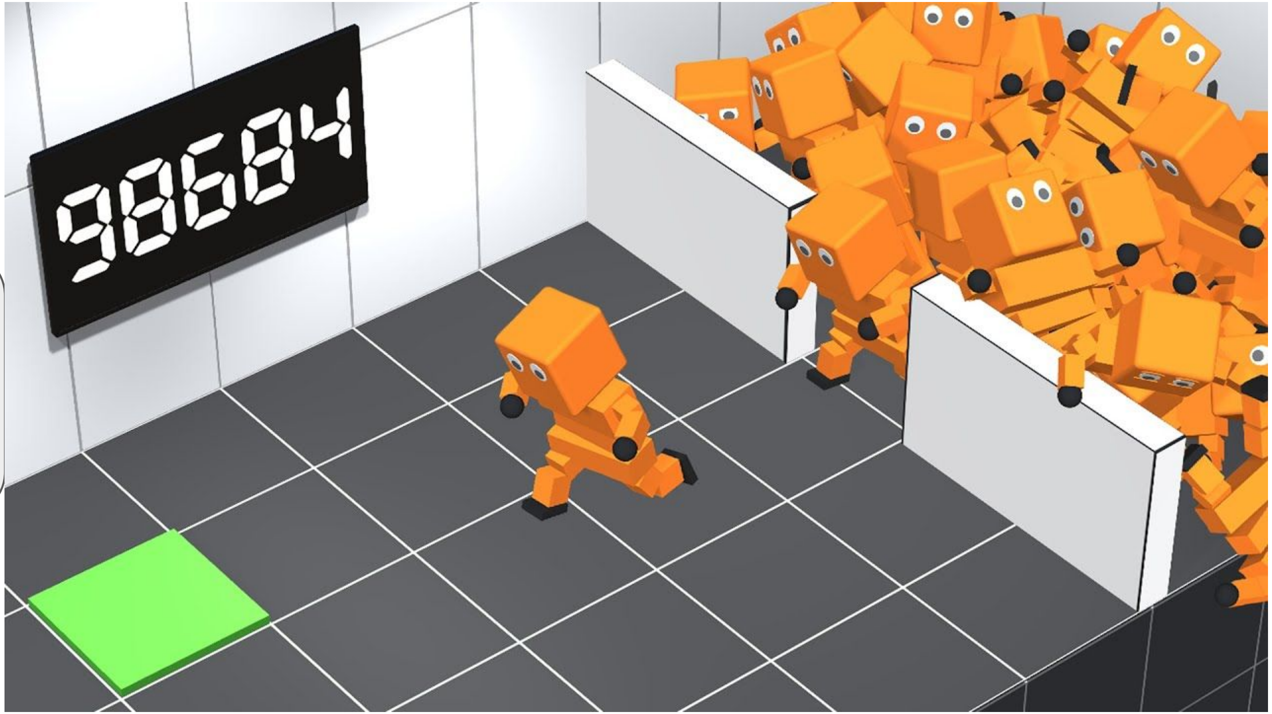
Uczenie ze wzmocnieniem

Uczenie ze wzmocnieniem



https://gymnasium.farama.org

Uczenie ze wzmocnieniem



https://gymnasium.farama.org

Rodzaje ML

Uczenie nadzorowane

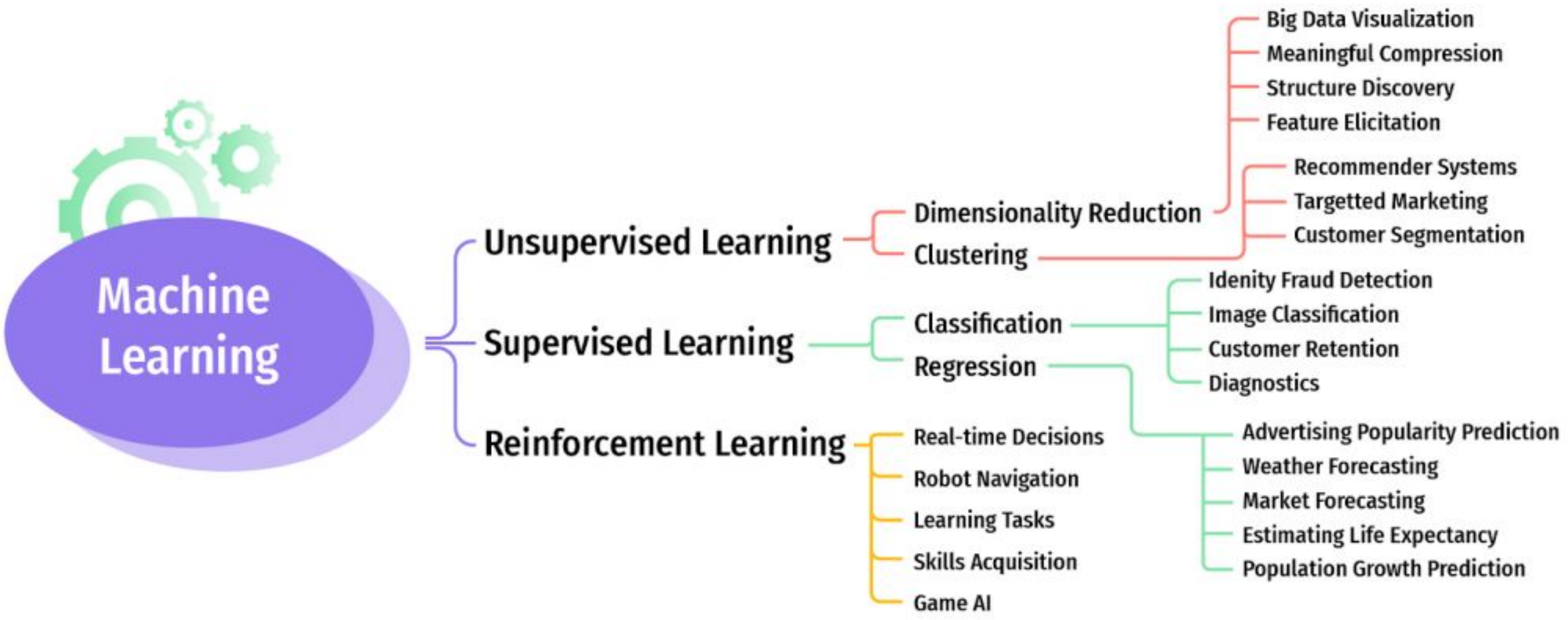
Uczenie nienadzorowane

Uczenie ze wzmocnieniem

Uczenie częściowo nadzorowane

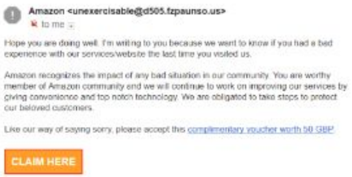
Uczenie samonadzorowane

Zadania ML


Machine Learning
Unsupervised Learning
Dimensionality Reduction
Big Data Visualization
Meaningful Compression
Structure Discovery
Feature Elicitation
Clustering
Recommender Systems
Targetted Marketing
Customer Segmentation
Supervised Learning
Classification
Idenity Fraud Detection
Image Classification
Customer Retention
Diagnostics
Regression
Advertising Popularity Prediction
Weather Forecasting
Market Forecasting
Estimating Life Expectancy
Population Growth Prediction
Reinforcement Learning
Real-time Decisions
Robot Navigation
Learning Tasks
Skills Acquisition
Game AI

Klasyfikacja

Scenariusz: manualna anotacja



Amazon <unexercisable@d505.fzpaunso.us>
to me

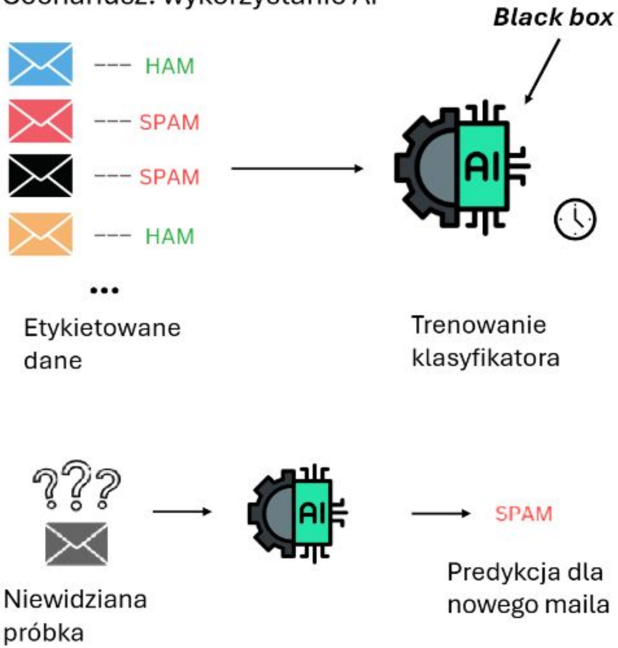
Hope you are doing well. I'm writing to you because we want to know if you had a bad experience with our services/website the last time you visited us.

Amazon recognizes the impact of any bad situation in our community. You are worthy member of Amazon community and we will continue to work on improving our services by giving convenience and top notch technology. We are obligated to take steps to protect our beloved customers.

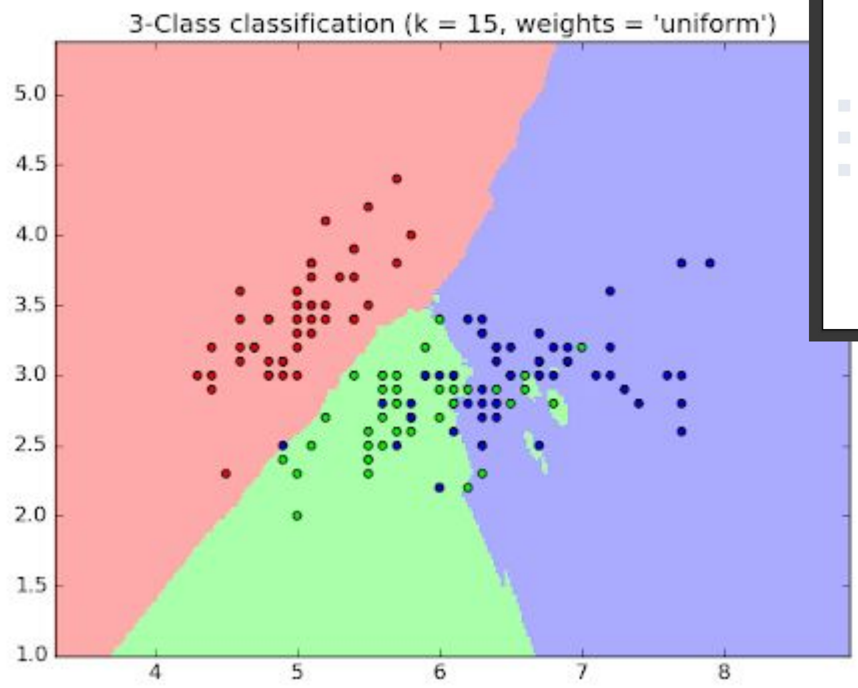
Like our way of saying sorry, please accept this complimentary voucher worth 50 GBP.

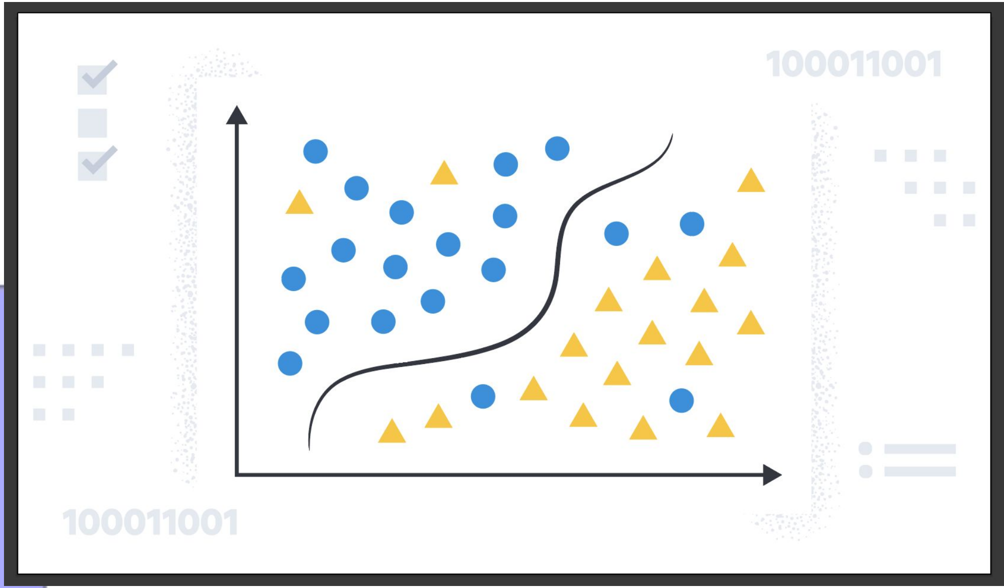
CLAIM HERE

Scenariusz: wykorzystanie AI

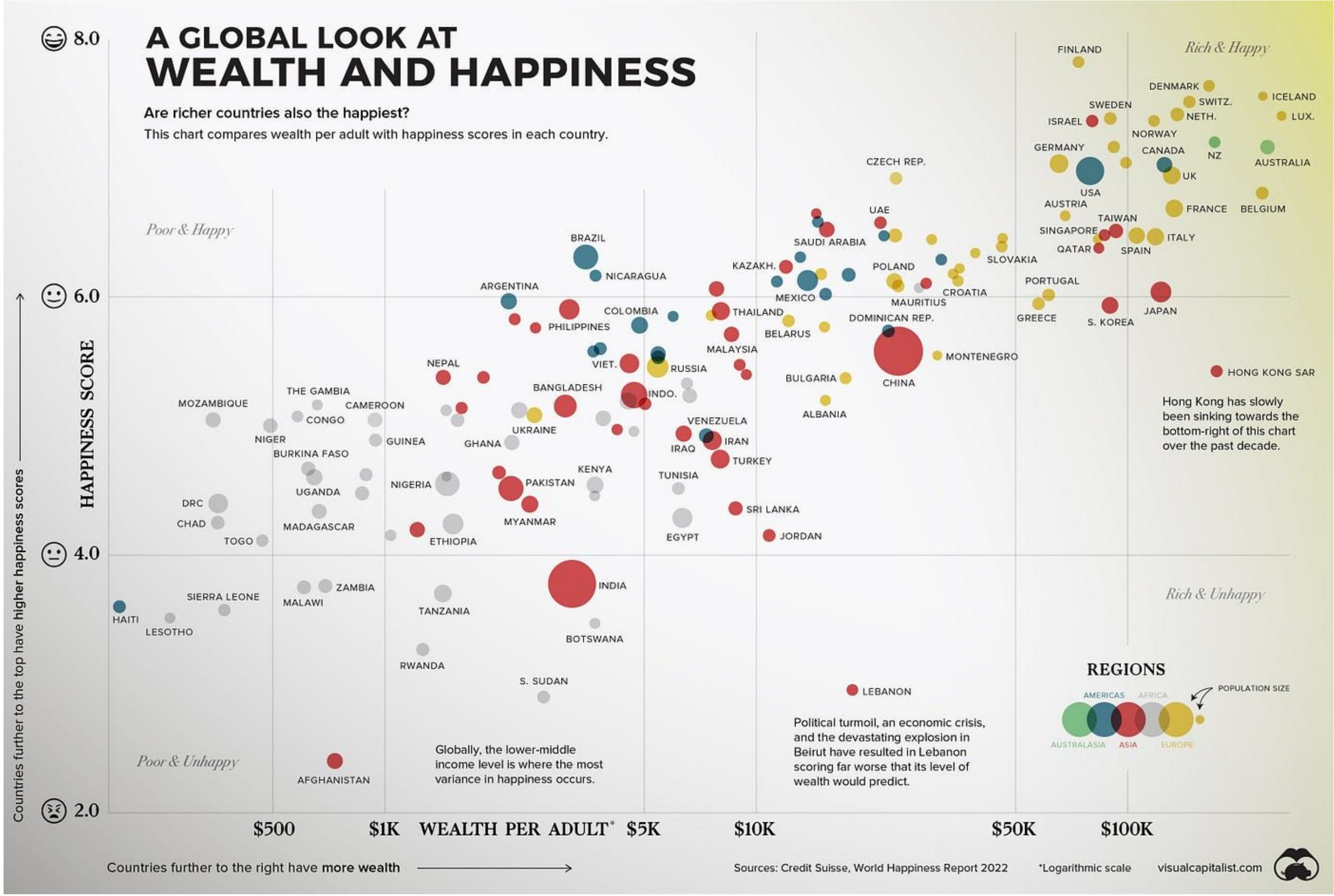


Klasyfikacja



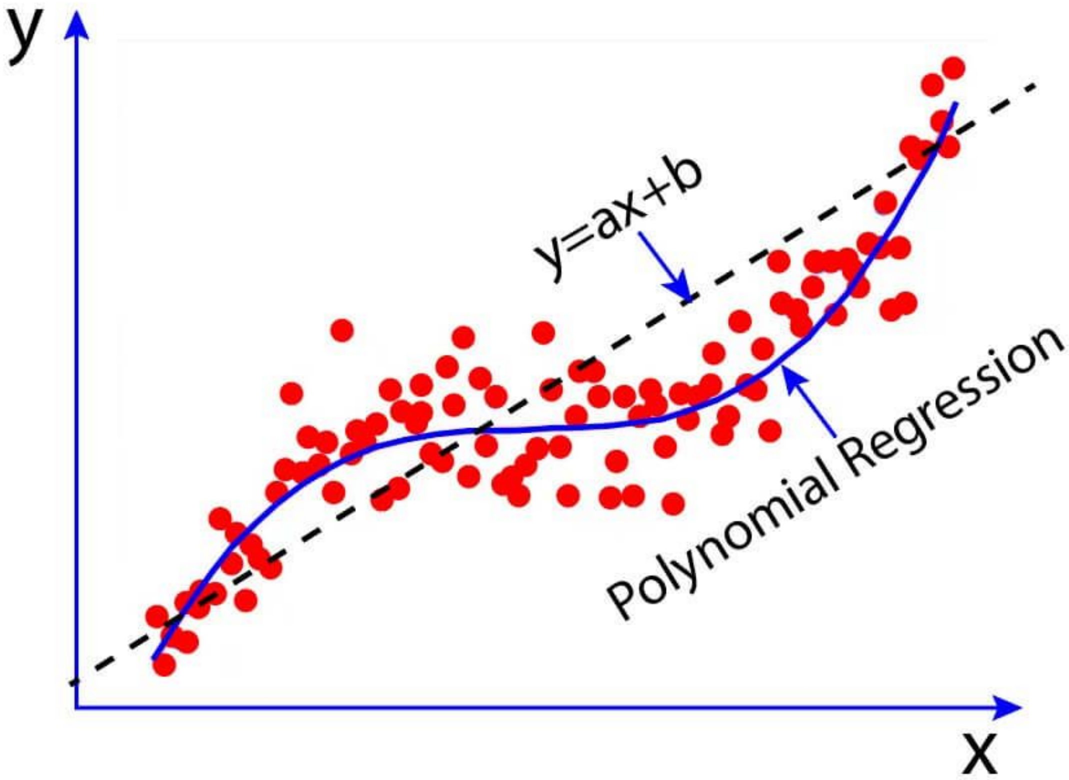


Regresja



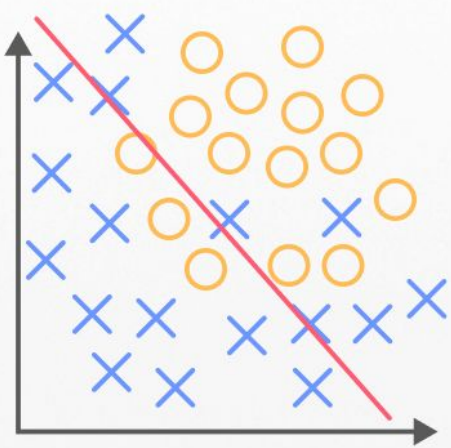
A GLOBAL LOOK AT
WEALTH AND HAPPINESS
Are richer countries also the happiest?
This chart compares wealth per adult with happiness scores in each country.
HAPPINESS SCORE
Countries further to the top have higher happiness scores
8.0
6.0
4.0
2.0
WEALTH PER ADULT*
$500
$1K
$5K
$10K
$50K
$100K
Countries further to the right have more wealth
Poor & Happy
Rich & Happy
Poor & Unhappy
Rich & Unhappy
FINLAND
DENMARK
ICELAND
SWITZ.
SWEDEN
NETH.
LUX.
ISRAEL
NORWAY
GERMANY
CANADA
NZ
AUSTRALIA
CZECH REP.
UK
USA
AUSTRIA
FRANCE
BELGIUM
TAIWAN
UAE
SINGAPORE
ITALY
SAUDI ARABIA
QATAR
SPAIN
SLOVAKIA
BRAZIL
KAZAKH.
POLAND
PORTUGAL
NICARAGUA
ARGENTINA
CROATIA
MEXICO
MAURITIUS
COLOMBIA
THAILAND
GREECE
JAPAN
PHILIPPINES
DOMINICAN REP.
S. KOREA
BELARUS
MALAYSIA
MONTENEGRO
VIET.
NEPAL
RUSSIA
BULGARIA
HONG KONG SAR
THE GAMBIA
BANGLADESH
CHINA
INDO.
MOZAMBIQUE
CAMEROON
Hong Kong has slowly been sinking towards the bottom-right of this chart over the past decade.
CONGO
ALBANIA
VENEZUELA
NIGER
UKRAINE
GUINEA
GHANA
IRAN
IRAQ
BURKINA FASO
TURKEY
KENYA
TUNISIA
NIGERIA
UGANDA
PAKISTAN
DRC
SRI LANKA
MYANMAR
CHAD
MADAGASCAR
EGYPT
JORDAN
TOGO
ETHIOPIA
INDIA
ZAMBIA
SIERRA LEONE
MALAWI
TANZANIA
HAITI
LESOTHO
BOTSWANA
RWANDA
REGIONS
S. SUDAN
LEBANON
POPULATION SIZE
AMERICAS
AFRICA
AUSTRALASIA
ASIA
EUROPE
Political turmoil, an economic crisis, and the devastating explosion in Beirut have resulted in Lebanon scoring far worse that its level of wealth would predict.
Globally, the lower-middle income level is where the most variance in happiness occurs.
AFGHANISTAN
Sources: Credit Suisse, World Happiness Report 2022
*Logarithmic scale
visualcapitalist.com

Regresja

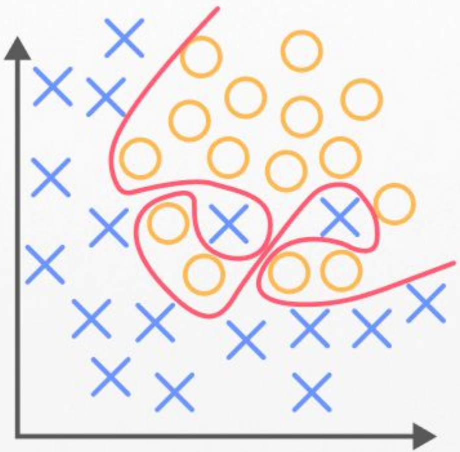


ML workflow

1. Definicja problemu
2. Zebranie i przygotowanie danych
3. Podział na zbiór treningowy / testowy
4. Wybór modelu
5. Trenowanie modelu
6. Ewaluacja (np. accuracy, RMSE)
7. Interpretacja wyników i wdrożenie

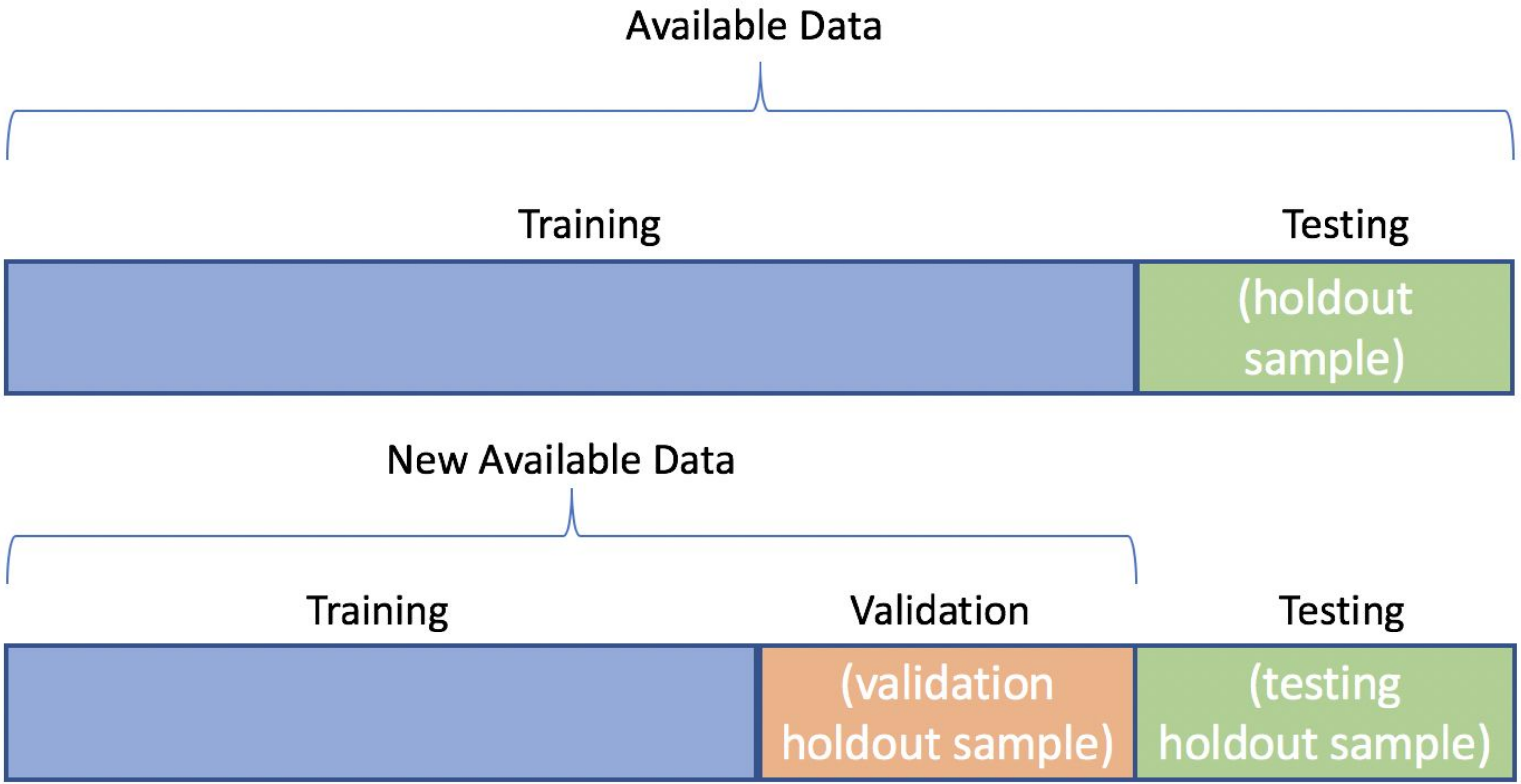


Underfitting



Overfitting

Podział na dane **wyciek danych**



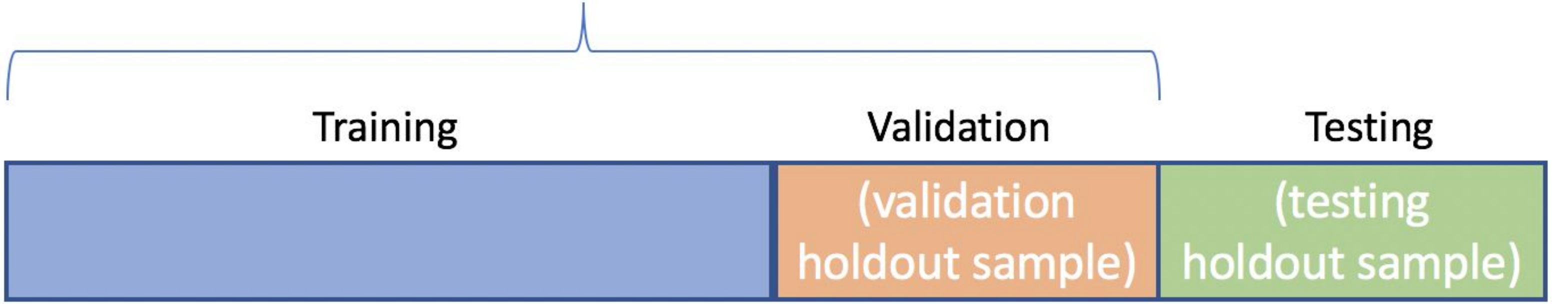
Podział na dane **wyciek danych**

Available Data

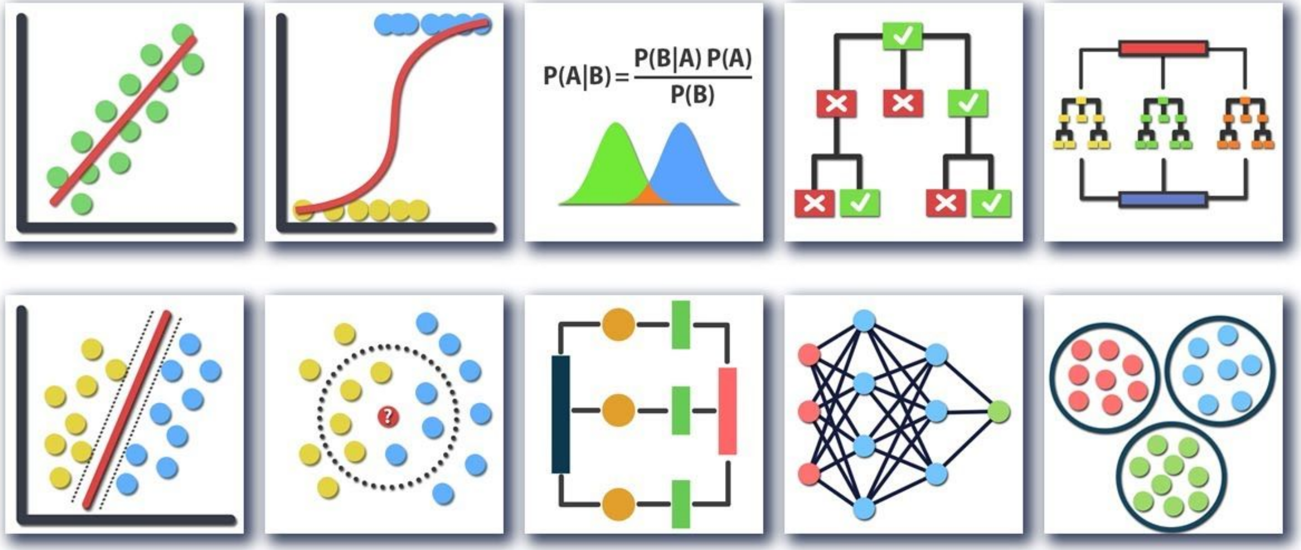
train_test_split

```
sklearn.model_selection.train_test_split(*arrays, test_size=None, train_size=None, random_state=None, shuffle=True, stratify=None)
```

[source]

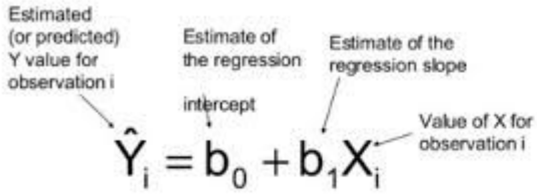


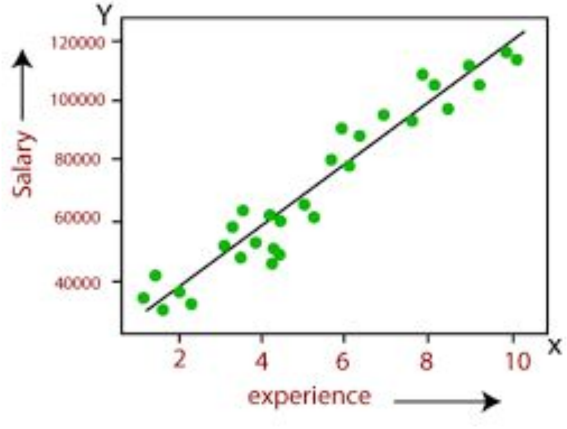
Modele ML



Regresja liniowa

- **Model:** prosta linia
- **Cel:** dopasować linię, która minimalizuje błąd (np. MSE)
- Używana do przewidywania wartości liczbowych

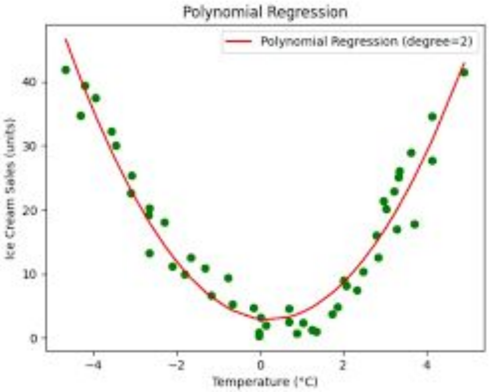




$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Regresja wielomianowa

- **Model:** krzywa
- **Cel:** to samo



$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + \ldots + b_n x_1^n$$

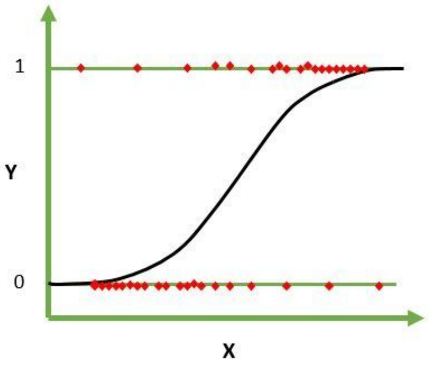
Regresja logistyczna

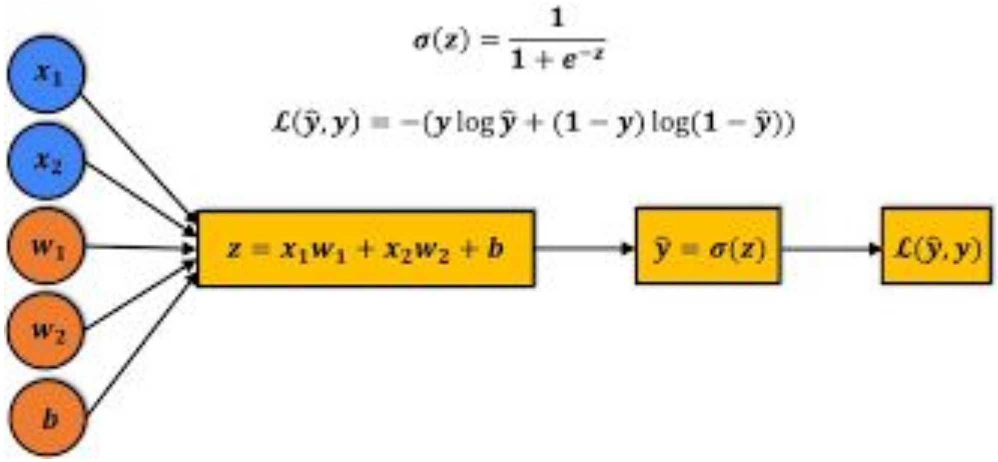
Model do **klasyfikacji binarnej** (0 / 1)

Funkcja logistyczna (sigmoidalna):

Wynik: prawdopodobieństwo przynależności do klasy

Popularna w detekcji spamu, diagnozie chorób, analizie ryzyka





SVM

Głównie do **klasyfikacji**, ale działa też w regresji (SVR)

Szuka **hiperpłaszczyzny** maksymalizującej margines między klasami

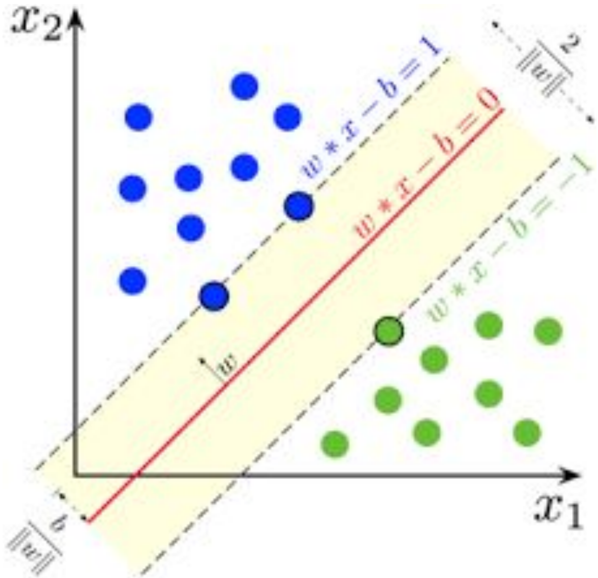
Może używać **jąder** (kernel trick) do klasyfikacji nieliniowej

Dobrze radzi sobie z danymi o dużej liczbie cech

Warunek klasyfikacji

- Klasa +1: w1x1+w2x2+b≥1
- Klasa −1: w1x1+w2x2+b≤−1

Margines = 2/ // w //



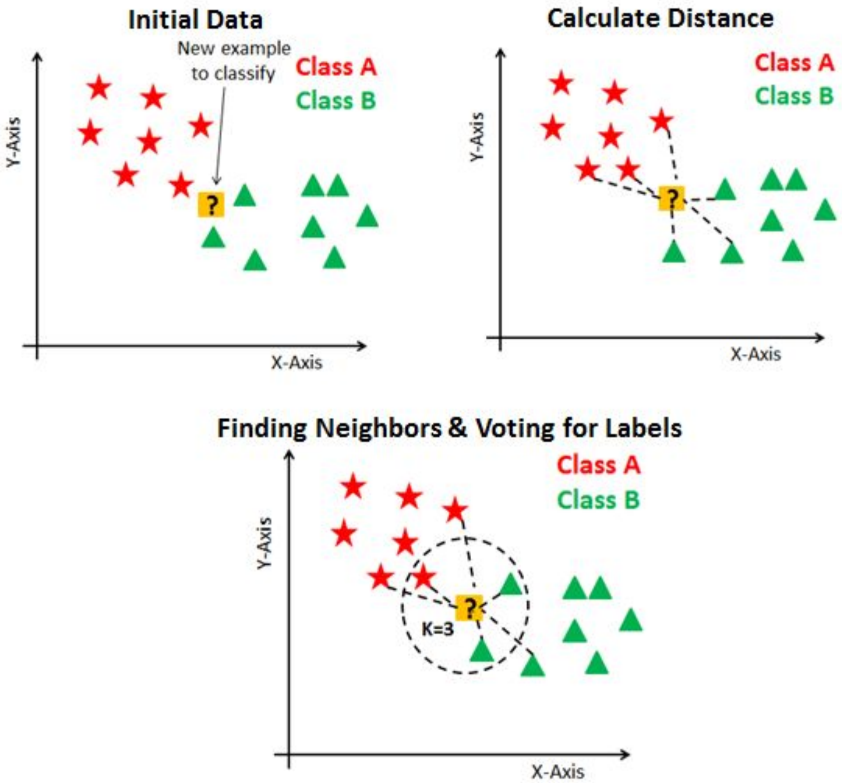
KNN

- **Klasyfikacja** na podstawie k najbliższych punktów

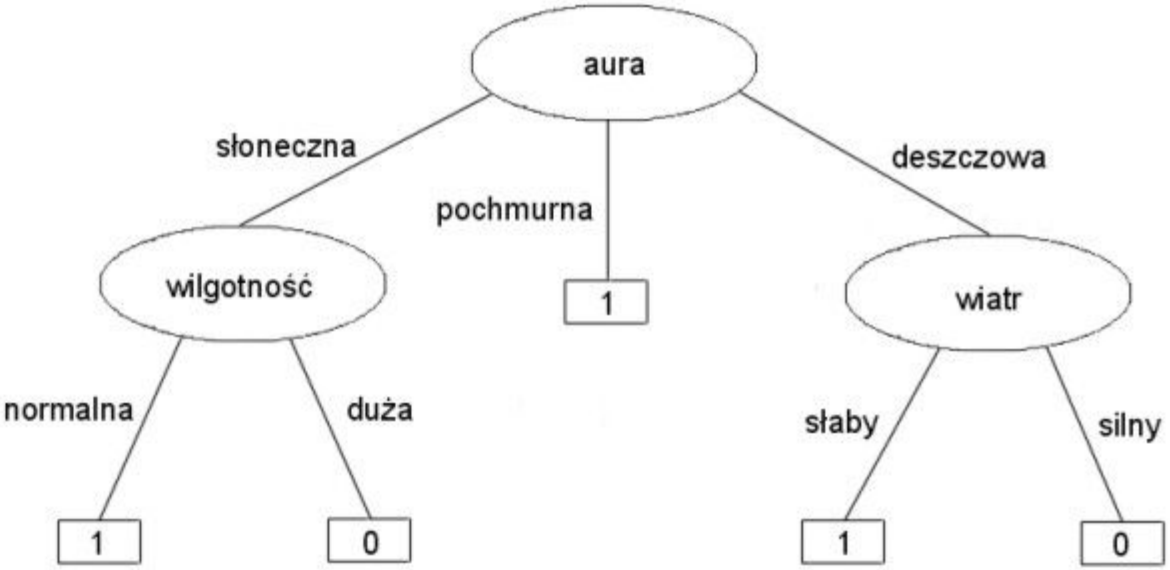
- Brak uczenia modelu – decyzja przy przewidywaniu

- Wymaga definicji **metryki odległości** (np. euklidesowa, kosinusowa)

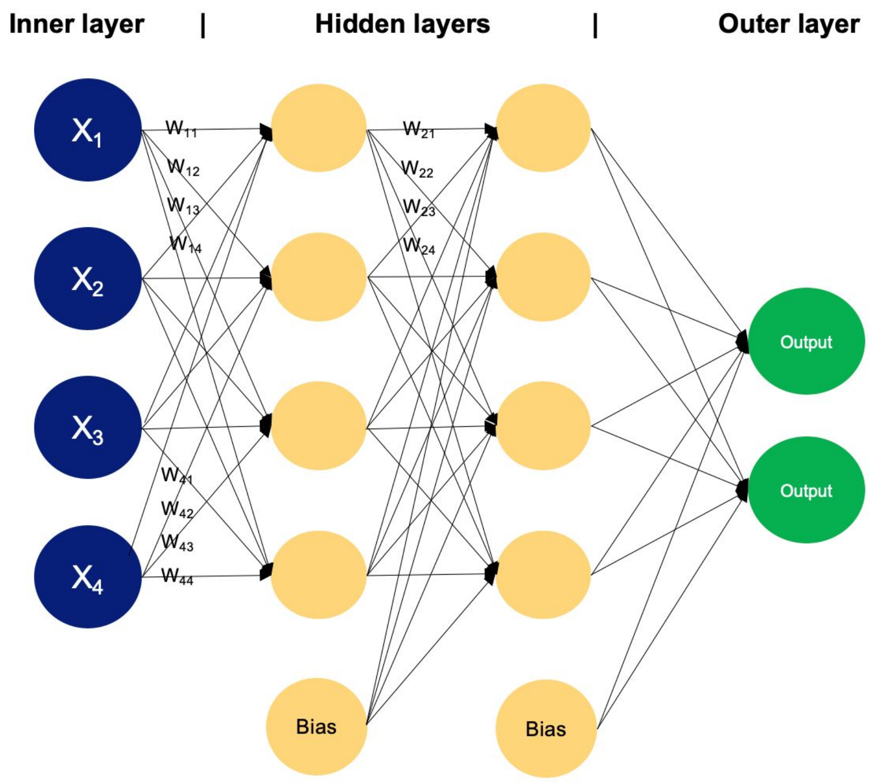
- Prosty, ale wolny przy dużych zbiorach danych



Drzewa


aura
słoneczna
pochmurna
deszczowa
wilgotność
1
wiatr
normalna
duża
słaby
silny
1
0
1
0

MLP



Inner layer | Hidden layers | Outer layer
X_1
X_2
X_3
X_4
W_{11}
W_{12}
W_{13}
W_{14}
W_{41}
W_{42}
W_{43}
W_{44}
W_{21}
W_{22}
W_{23}
W_{24}
Bias
Bias
Output
Output

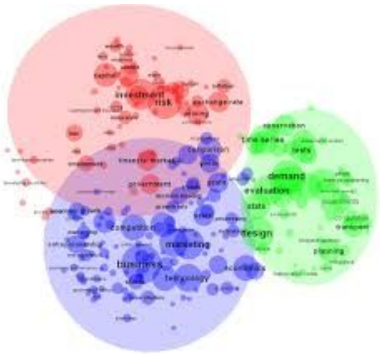
Klasteryzacja

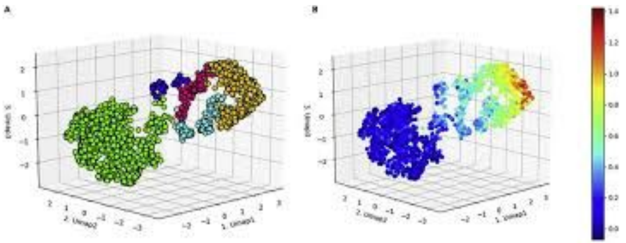
Uczenie **nienadzorowane** – brak etykiet

Celem jest podział danych na **podobne grupy** (klastry)

Zastosowania: segmentacja klientów, grupowanie dokumentów, kompresja obrazów

Przykłady algorytmów: KMeans, DBSCAN, GMM



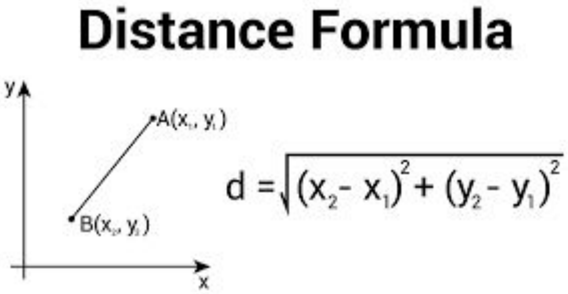


Metryki odległości

Euklidesowa: „linijka” w przestrzeni

Kosinusowa: porównuje kierunek wektorów

Wybór metryki wpływa na działanie algorytmu

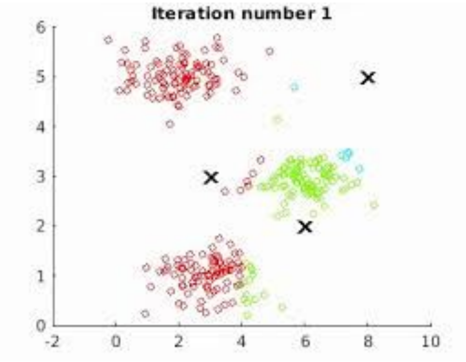


$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i B_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^2} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^2}}$$

K-średnich

Algorytm klasteryzacji:

1. Wybiera **k** centroidów
2. Przypisuje punkty do najbliższego centroidu
3. Aktualizuje położenie centroidów
4. Powtarza, aż centroidy się ustabilizują



Wymaga podania liczby klastrów **k** z góry

Szybki, ale wrażliwy na początkowe ustawienie centroidów

ML workflow

1. Definicja problemu
2. Zebranie i przygotowanie danych
3. Podział na zbiór treningowy / testowy
4. Wybór modelu
5. Trenowanie modelu
6. Ewaluacja (np. accuracy, RMSE)
7. Interpretacja wyników i wdrożenie

Metryki nieklasyfikacji

metryki regresji
Mean Absolute Error
Mean Squared Error
R-squared Score

metryki klasteryzacji
Silhouette Score
Davies-Bouldin Index
Calinski-Harabasz Index

inne metryki
IoU - segmentacja semantyczna, detekcja

https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

Metryki klasyfikacji

Predicted

Actual		Spam	Non-spam
	Spam	**600** (True positive)	**300** (False negative)
	Non-spam	**100** (False positive)	**9000** (True negative)

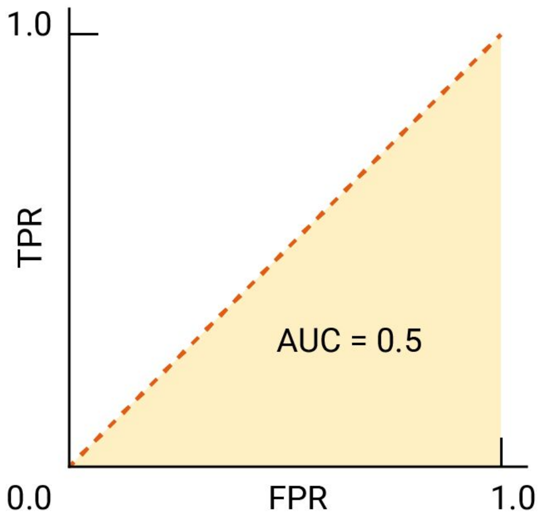
Sources: [12][13][14][15][16][17][18][19] view · talk · edit

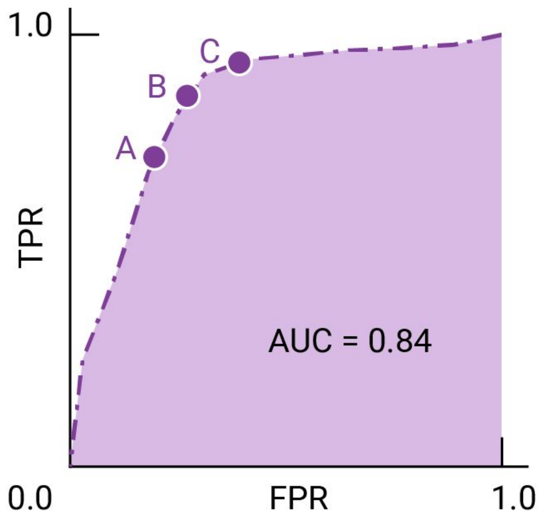
		Predicted condition			
	Total population $= P + N$	**Predicted positive**	**Predicted negative**	Informedness, bookmaker informedness (BM) $= TPR + TNR - 1$	Prevalence threshold (PT) $= \frac{\sqrt{TPR \times FPR} - FPR}{TPR - FPR}$
Actual condition	**Positive (P)** [a]	**True positive** (TP), hit[b]	**False negative** (FN), miss, underestimation	True positive rate (TPR), recall, sensitivity (SEN), probability of detection, hit rate, power $= \frac{TP}{P} = 1 - FNR$	False negative rate (FNR), miss rate type II error [c] $= \frac{FN}{P} = 1 - TPR$
Actual condition	**Negative (N)**[d]	**False positive** (FP), false alarm, overestimation	**True negative** (TN), correct rejection[e]	False positive rate (FPR), probability of false alarm, fall-out type I error [f] $= \frac{FP}{N} = 1 - TNR$	True negative rate (TNR), specificity (SPC), selectivity $= \frac{TN}{N} = 1 - FPR$
	Prevalence $= \frac{P}{P + N}$	Positive predictive value (PPV), precision $= \frac{TP}{TP + FP} = 1 - FDR$	Negative predictive value (NPV) $= \frac{TN}{TN + FN} = 1 - FOR$	Positive likelihood ratio (LR+) $= \frac{TPR}{FPR}$	Negative likelihood ratio (LR−) $= \frac{FNR}{TNR}$
	Accuracy (ACC) $= \frac{TP + TN}{P + N}$	False discovery rate (FDR) $= \frac{FP}{TP + FP} = 1 - PPV$	False omission rate (FOR) $= \frac{FN}{TN + FN} = 1 - NPV$	Markedness (MK), deltaP (Δp) $= PPV + NPV - 1$	Diagnostic odds ratio (DOR) $= \frac{LR+}{LR-}$
	Balanced accuracy (BA) $= \frac{TPR + TNR}{2}$	F_1 score $= \frac{2\,PPV \times TPR}{PPV + TPR} = \frac{2\,TP}{2\,TP + FP + FN}$	Fowlkes–Mallows index (FM) $= \sqrt{PPV \times TPR}$	*phi* or Matthews correlation coefficient (MCC) $= \sqrt{TPR \times TNR \times PPV \times NPV} - \sqrt{FNR \times FPR \times FOR \times FDR}$	Threat score (TS), critical success index (CSI), Jaccard index $= \frac{TP}{TP + FN + FP}$

https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

Metryki klasyfikacji

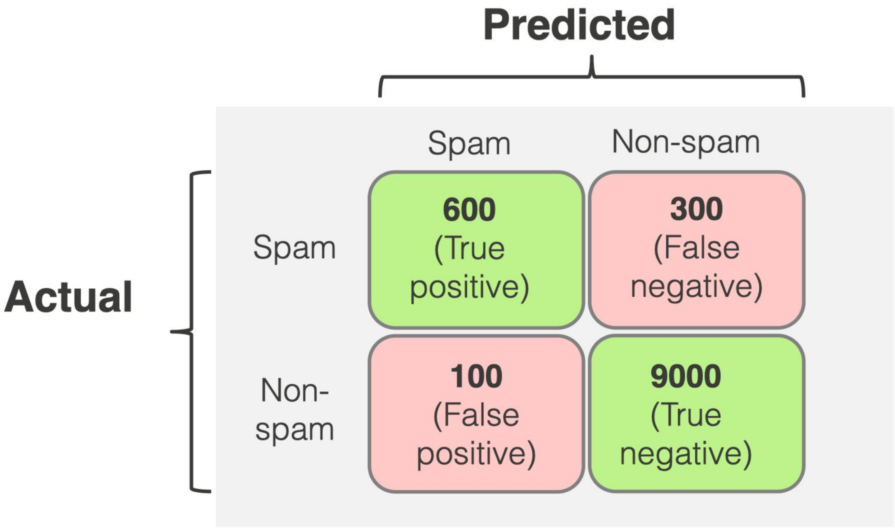
ROC AUC





https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

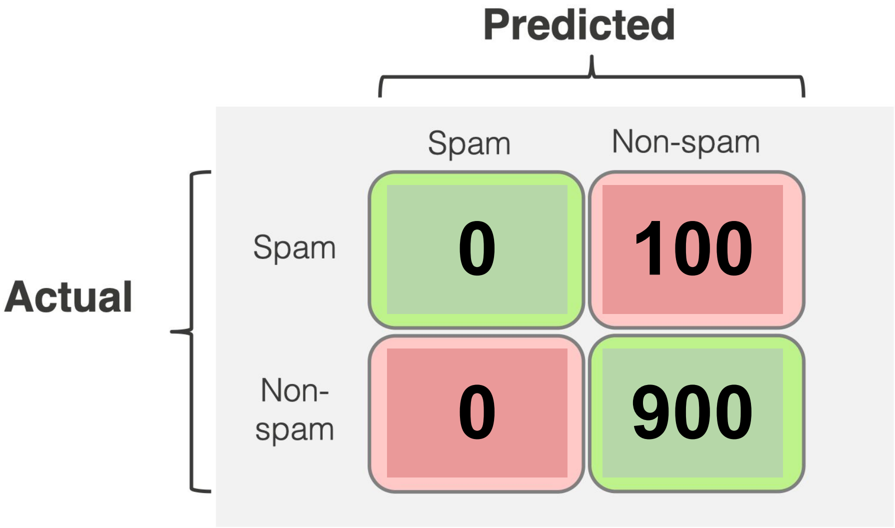
Metryki klasyfikacji



accuracy - dokładność
precision - precyzja - TP / predykowane pozyt.
recall - czułość - TP / naprawdę pozytywne
f1 score - średnia harmoniczna prec. i recall

https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

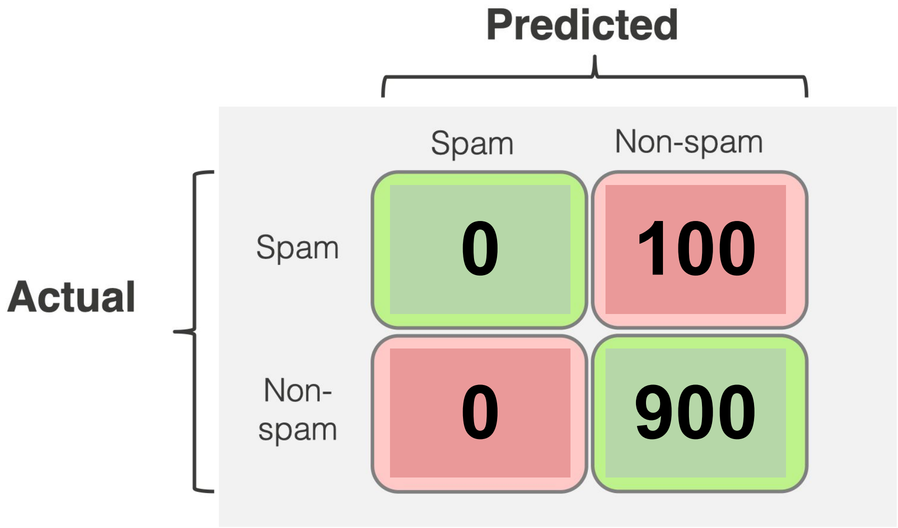
Metryki klasyfikacji - dlaczego accuracy jest mylące?



acc = ?

https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

Metryki klasyfikacji - dlaczego dokładność jest myląca?



$$acc = \frac{900+0}{100 + 0 + 900 + 0}$$

acc = 90%
ale nie działa

https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

Metryki klasyfikacji - dlaczego dokładność jest myląca?

		Predicted	
		Chory	Zdrowy
Actual	Chory	1	9
	Zdrowy	0	990

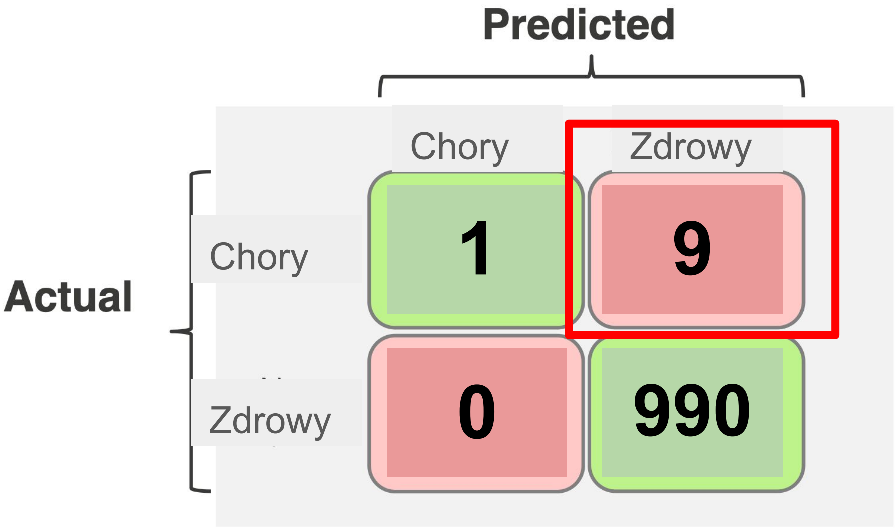
$$acc = \frac{990+1}{9 + 0 + 990 + 1}$$

acc = 0,991

recall = ?

https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

Metryki klasyfikacji - dlaczego dokładność jest myląca?



acc = 0,991

$$\text{recall} = \frac{1}{9 + 1} = 0{,}1$$

https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

Metryki klasyfikacji - dlaczego dokładność jest myląca?

Actual \ Predicted	Spam	Non-spam
Spam	1	0
Non-spam	99	900

acc = 0,901

$$\text{precyzja} = \frac{1}{99 + 1} = 0{,}01$$

https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html

ML workflow

1. Definicja problemu
2. Zebranie i przygotowanie danych
3. Podział na zbiór treningowy / testowy
4. Wybór modelu
5. Trenowanie modelu
6. Ewaluacja (np. accuracy, RMSE)
7. Interpretacja wyników i wdrożenie

PYTANIA?

Dodatek matematyczny

Rozkłady prawdopodobieństwa

- Opisują **jak rozłożone są wartości** zmiennej losowej
- **Dyskretne** (np. rzut kostką) i **ciągłe** (np. wzrost ludzi)
- W praktyce **rzadko spotykamy idealne rozkłady**
- Służą jako **modele matematyczne** i są wygodne do obliczeń

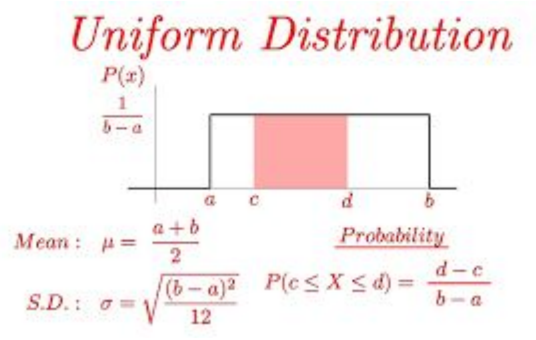
Rozkład jednostajny

Każdy wynik **jednakowo prawdopodobny**

Przykład: **rzut uczciwą kostką**

Parametry: a (min), b (max)

Gęstość prawdopodobieństwa: stała



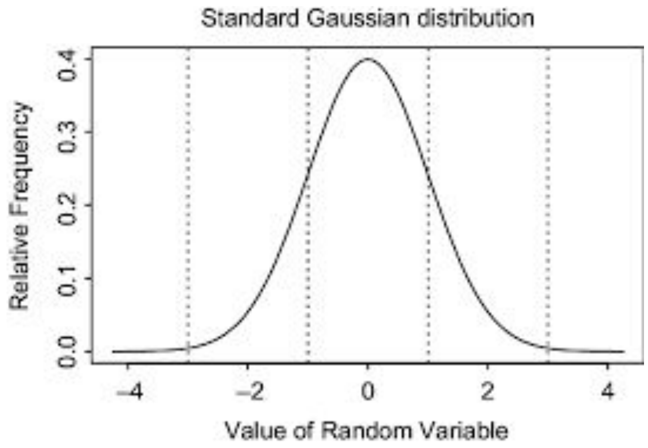
Rozkład normalny (Gaussa)

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Najbardziej znany, **„dzwon”**

Opisywany przez: średnia (μ), odchylenie standardowe (σ)

Przykład: wzrost ludzi, błędy pomiarów



Rozkład wykładniczy

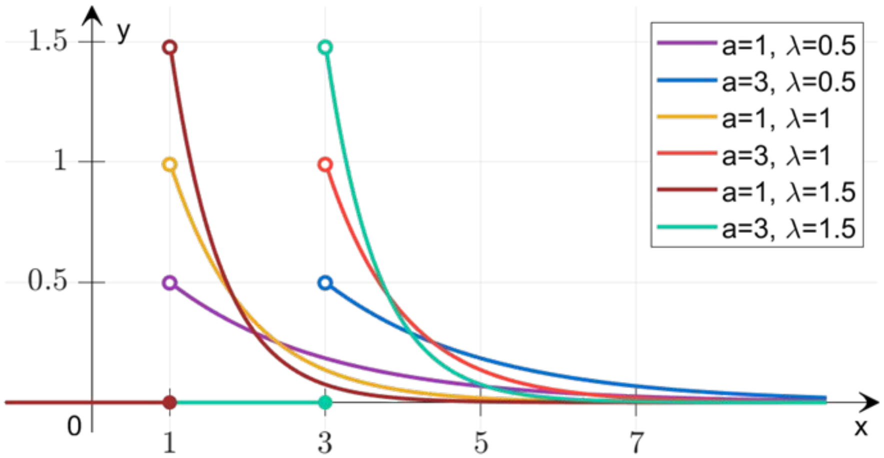
$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Modeluje **czas oczekiwania** na zdarzenie

Parametr: λ (częstość zdarzeń)

Przykład: czas do nadejścia autobusu (przy losowych odjazdach)

przyszłość nie zależy od przeszłości



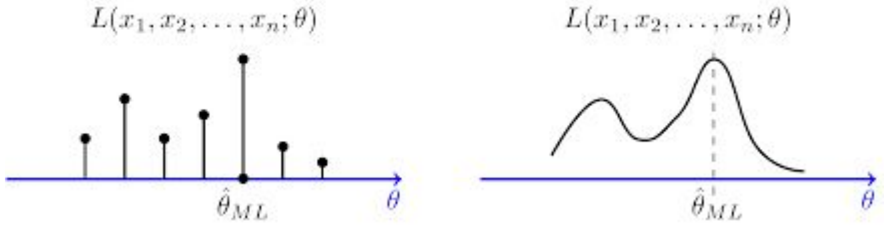
Metoda maksymalnej wiarygodności

Służy do **dopasowania parametrów** modelu do danych

Szukamy parametrów, które **maksymalizują prawdopodobieństwo** zaobserwowania danych

Intuicja: „Jakie parametry sprawiają, że to co widzimy, jest **najbardziej prawdopodobne**?”

Stosowane w regresji, klasyfikacji, statystyce



Metoda maksymalnej wiarygodności

Załóżmy, że mamy niezależne obserwacje (x_1, x_2...,x_n) pochodzące z rozkładu normalnego. Chcemy znaleźć estymatory MLE dla parametrów mu i sigma^2.

1. Gęstość pojedynczej obserwacji

$$p(x_i \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

2. Funkcja wiarygodności (likelihood)

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i \mid \mu, \sigma) = (2\pi)^{-n/2}\,\sigma^{-n}\,\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

3. Log-wiarygodność

$$\ell(\mu, \sigma) = \log L(\mu, \sigma) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - n\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

4. Warunki pierwszego rzędu (pochodne = 0)

- Pochodna względem mu:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}) = 0$$

stąd

$$\boxed{\hat{\mu}_{\text{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- Pochodna względem sigma:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \stackrel{!}{=} 0.$$

Mnożąc przez (sigma^3) i podstawiając mu otrzymujemy

$$-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2}$$

Twierdzenie Bayesa

Startujemy od **przekonania początkowego**

Otrzymujemy **nową obserwację**

Aktualizujemy przekonanie — **prawdopodobieństwo przesuwa się** w stronę hipotezy bardziej wspieranej przez dane

Przykład: spam/nie-spam, diagnoza chorób, przewidywanie awarii

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} \qquad (1)$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \neg A) \cdot P(\neg A)} \qquad (2)$$

Regresja liniowa

Cel
Modelowanie zależności liniowej między zmienną niezależną (cechą) a zmienną zależną (wynikiem).

Dane
Mamy obserwacje:

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad y_i \in \mathbb{R}$$

Model
Prosta regresji ma postać:

$$\hat{y} = wx + b$$

gdzie:

- w — współczynnik kierunkowy (nachylenie prostej)
- b — wyraz wolny (przecięcie z osią y)

Funkcja kosztu (MSE)
Chcemy znaleźć w i b, które minimalizują średni błąd kwadratowy:

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - (wx_i + b))^2$$

Rozwiązanie analityczne (metoda najmniejszych kwadratów):
Optymalne parametry można wyliczyć ze wzorów:

$$w = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} - w\bar{x}$$

gdzie $\bar{x}$ i $\bar{y}$ to średnie wartości cechy i etykiety.

Interpretacja:

- $w > 0$ oznacza wzrost y wraz ze wzrostem x
- $w < 0$ oznacza spadek y wraz ze wzrostem x

Zastosowanie:

- Predykcja wartości ciągłych
- Analiza wpływu pojedynczej cechy na wynik

SVM

Cel
Znaleźć hiperpłaszczyznę w 2D, która maksymalizuje margines oddzielający dwie klasy.

Dane treningowe
Mamy obserwacje

$$\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^{n}, \qquad \mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}) \in \mathbb{R}^2, \qquad y_i \in \{-1, +1\}.$$

Hiperpłaszczyzna decyzyjna
Równanie prostej rozdzielającej:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + b = 0,$$

gdzie $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ to wektor normalny, a b to offset.

Warunki klasyfikacji (margines 1)
Dla każdej próbki wymaga się:

$$y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Margines
Odległość między granicami klas:

$$\text{margines} = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|}.$$

Maksymalizacja marginesu ≡ minimalizacja $\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2$.

Problem optymalizacyjny (prymalny)

$$\min_{\mathbf{w},b} \ \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 \quad \text{pod warunkiem} \quad y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) \geq 1 \quad \forall i.$$

Funkcja Lagrange'a
Wprowadzamy mnożniki $\alpha_i \geq 0$ i definiujemy:

$$L(\mathbf{w}, b, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[y_i(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i + b) - 1\right].$$

Problem dualny

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}} \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j y_i y_j (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0, \qquad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i.$$

Support vectors
Próbki z $\alpha_i > 0$ to *support vectors* — to one definiują granicę.

K-średnich

Cel
Podział zbioru danych na k skupień (klastrów), tak aby punkty w jednym klastrze były jak najbardziej do siebie podobne.

Dane
Mamy zbiór punktów:

$$\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$$

Działanie algorytmu:

1. Inicjalizacja — wybierz losowo k centroidów (środków klastrów):
$$\{\boldsymbol{\mu}_j^{(0)}\}_{j=1}^k$$
2. **Przypisanie punktów do klastrów:**
Każdy punkt przypisz do najbliższego centroidu:
$$C_j^{(t)} = \left\{\mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_j^{(t)}\|^2 \leq \|\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_l^{(t)}\|^2, \ \forall l = 1, \ldots, k\right\}$$
3. **Aktualizacja centroidów:**
Dla każdego klastra oblicz nowy centroid jako średnią punktów w klastrze:
$$\boldsymbol{\mu}_j^{(t+1)} = \frac{1}{|C_j^{(t)}|} \sum_{\mathbf{x}_i \in C_j^{(t)}} \mathbf{x}_i$$
4. Powtarzaj kroki 2 i 3 aż do zbieżności (np. centroidy przestaną się zmieniać).

Funkcja celu (minimalizacja wewnątrzklastrowej sumy kwadratów odległości):

$$J = \sum_{j=1}^k \sum_{\mathbf{x}_i \in C_j} \|\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_j\|^2$$

Algorytm stara się minimalizować J.

Uwagi:

- Algorytm jest czuły na wybór początkowych centroidów.
- Działa najlepiej, gdy klastry są kuliste i mają podobną wielkość.
- Stosowany w eksploracji danych i segmentacji.