Матан - ДЗ 1

Артем Глубшев

1 Задача 1

Задача 1.

- Объясните, что означают перечисленных ниже утверждения (скажите другими словами и как можно короче!).

  - $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in N \exists n > N : |a_n - a| < \varepsilon$ В последоваетльности есть точка a или у последовательности есть подпоследовательность, стремящася к a. Действительно, рассмотрим ε-окрестность точки a. По выражению выше, в нее попадет хотя бы один член. Далее рассотрим меньшую окрестность, где ε равно расстоянию от a до этого члена. В нее снова попадет точка. И т.д. Ясно, что наличие в последовательности точки $a_n = a$ тоже удовлетворяет условию.

    Ответ:
    $$a_k = a$$
    $$\text{OR}$$
    $$lim_{n\to\infty} b_n \in a_n = a$$
  - $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in N \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$

    Точка a - предел a_n
  - $\exists \varepsilon > 0 \exists N \in N \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$

    По утверждению, после второго члена все члены попадают в ε-окрестность a. Про ε при этом ничего не сказано. Это значит, что последовательность ограничена сверху и снизу после 2-го члена, а значит - и после первого, ведь он-то точно конечен.

    Ответ: a_n - ограниченная последовательность
  - $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in N \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon$

    Это отрицание утв.1. Предел последовательности не равен a.

– $\forall\varepsilon > 0 \forall N \in N \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$

  Все члены последовательности со второго равны a. Действительно, $\forall N \in N \forall n > N$ эквивалентно $\forall n > 1$, то есть все члены последовательности кроме первого сколь угодно близки к a, то етсь равны a.

  Ответ: Все члены последовательности со второго равны a.

- Найдите среди этих высказываний пары таких, что одно является отрицанием другого. Ответ: $\forall\varepsilon > 0 \exists N \in N \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$ $\exists\varepsilon > 0 \forall N \in N \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon$

2 Задача 2

Построить пример последовательности an, для которой

- все члены последовательности a_n
- множество всех натуральных чисел

являются ее предельными точками (пункты задачи независимы друг от друга).

В первом случае - пределом любой константы является она сама, т.е. любая точка постоянной последовательности - ее предельная точка. Можно взять $a_n = 1$, можно навернуть что-то страшное из корней и постоянных.

Во втором случае - нам нужна такая последвательность, чтобы из нее выделялись подпоследовательности, стремящиеся к каждому из нат. чисел. Пусть это будут константный последовательности. Можно сделать последовательность вида $a_n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots 1, 2, 3, 4$, которая содержит бесконечность подпоследовательностей вида $b_n = b, b, b, b$.

Доказать, что число членов в ней равно числу членов в нормальной последовательности, несложно - просто строим биекцию между ней и рациональными числами - числитель - число, знаменатель - какой раз оно встретилось. А даллее, биекцию между рациональными и натуральными числами мы уже строили. А число членов в нормальной последовательности очевидно равно числу натуральных чисел.

Ответ:

- $a_n = \frac{e^\pi - \phi}{\sqrt{RSA-2048}}$
- $a_n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, 3, 4 ...$

3 Задача 3

Найдите пределы (если они существуют) или докажите расходимость:

- $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1}(n^3+3ncosn) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}(1+\frac{3cosn}{n^2}) = 1$

  Делим все на n^3 и пренебрегаем бесконечно малыми членами.

- $lim_{n\to\infty}\frac{sin2^n}{n^3+1} = 0$

  По лемме о двух милиционерах,

$$lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^3+1} \leq lim_{n\to\infty}\frac{sin2^n}{n^3+1} \leq lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+1}$$

  Ясно,что левый и правый стремятся к нулю, тогда и средний член стремится к нулю

-
$$lim_{n\to\infty}13^{-n}(n\ln n - n) = 0$$
$$lim_{n\to\infty}13^{-n}(n\ln n - n) = \frac{n(\ln n - 1)}{13^n}$$
$$\frac{n}{13^n} \leq \frac{n(\ln n - 1)}{13^n} \leq \frac{n^2}{13^n}$$

  Рассмотрим «дискретную производную» левой и правой части:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{13^{n+1}}}{\frac{n}{13^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)13^n}{n13^{n+1}} = \frac{1}{13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{13^{n+1}}}{\frac{n^2}{13^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 13^n}{n^2 13^{n+1}} = \frac{1}{13^2}$$

  Ясно, что и левая и правая часть убывают - у них каждый следующий член меньше предыдущего, причем в пределе это соотношение стремится к $\frac{1}{13}$. Итак, два жандарма идут к нулю - и нашей функкии просто некуда деться.

-
$$a_n = \frac{\sqrt{n}\cdot 3^n}{n!} = 0$$

Рассмотрим $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{\frac{\sqrt{n+1}\cdot 3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\sqrt{n}\cdot 3^n}{n!}} = \frac{\sqrt{n+1}\cdot 3}{\sqrt{n}\cdot (n+1)}$$

Ясно, что на бесконечности это соотшношение стремится к $\frac{3}{n+1}$, что явно менье 1, что есть последовательность монотонно убывает.

Также очевидно, что любой из членов последовательности больше нуля - ни одна из частей функции не станет меньше нуля никогда. Значит, имеем функцию,монотонно убывающую и огранич

4 Задача 4

Петя шел из дома в школу. На полпути он решил, что плохо себя чувствует, и повернул обратно. На полпути к дому ему стало лучше, и он повернул в школу. На полпути к iколе он решил, что все-таки нездоров, и повернул к дому. Но на полпути к дому снова повернул к школе, и т.д. Куда придет Петя, если будет так идти?

База индукции: приняв положение школы за 1000, а дома за 0, рассчитаем первые итерации:

$$500.0; 250.0; 625.0; 312.5; 656.25\ldots; 666.6660; 333.3330; 666.6665\ldots$$

Шаг Индукции: итак, допустим, что расстояние от точки $333,(3)$ до текущей позиции Пети равно ε, то есть он в точке $333.(3)+\varepsilon$. ϵ я откладываю к центру исходя из базы индукции.

Тогда его расстояние от школы равно $666,(6)-\varepsilon$. Он проходит половину этого расстояния, и его приходит в точку $333.(3)+\frac{666.(6)}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$. затем он рвзворачивается и проходит половинку расстояния до дома, равного $666,(6)-\frac{\varepsilon}{2}$ и оказывается в точке $333.(3)+\frac{\varepsilon}{4}$

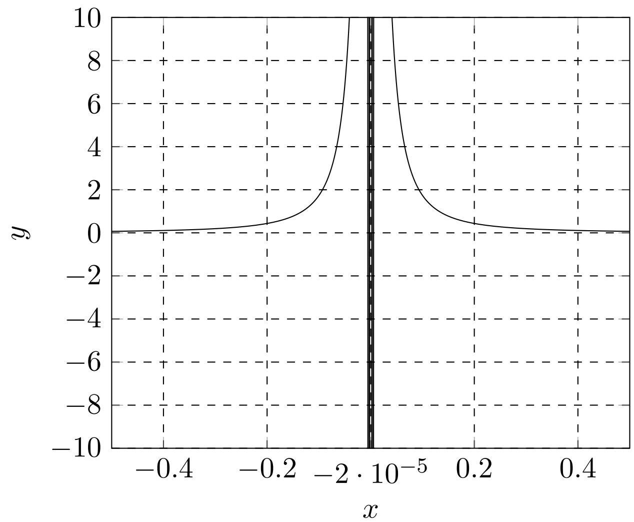
Итак, я показал, что с каждой итерацией расстояние между точками $333,(3)$ и $666,(6)$ на четных и нечетных тиерациях соответственно, уменьшается.

5 Задача 6

С помощью любого математического пакета (например, можно воспользоваться онлайн-ресурсом Geogebra https://www.geogebra.org/graphing) постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

(приложите эскиз графика к работе). Укажите какой-нибудь интервал, на котором функция $f(x)$ обратима и какой-нибудь интервал, на котором функция $f(x)$ не обратима (ответ объясните).



Функция обратима только если монотонна. Участок $[-0.4; 0.4]$ - необратим, участок $[0.2; 0.4]$ обратим

6 Задача 7

Доказать равенство, используя определение сходимости по Коши:

$$lim_{x \to 0} sin(6\pi x) = 0$$

Пусть мы взяли $\varepsilon > 0$. Необходимо доказать, что существует такое $\delta(\varepsilon)$, что $\forall x < \delta |sin 6\pi x - 0| < \varepsilon$

Найдем $\delta(\varepsilon)$.

$$|sin(6\pi\delta)| < \varepsilon$$

$$-\arcsin\varepsilon < 6\pi\delta < \arcsin\varepsilon$$

Итак, мы нашли $\delta(\varepsilon)$, чем доказали предел по Коши.

7 Задача 8

Функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой. Известно, что предел по- следовательности значений функции f в натуральных точках существует, причем $lim_{n\to\infty} f(n) = l$.

Что можно сказать о пределе функции $lim_{x\to\infty} f(x)$?

Если предел функции есть, то он равен l. Но его может и не быть - рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{sinx}{x}; ifnotx \in N$$

$$f(x) = 1; ifx \in N$$

8 Задача 9

Сделайте предположение, чему равен предел (если он существует), и докажите это по определению:

-
  $$lim_{x\to 4} ln(3x+4) = \ln 16$$

  Найдем $\delta(\varepsilon)$

  $$ln(3(4+\delta)+4) = ln(16-\varepsilon)$$

  $$ln(16)ln(3\delta) = ln(16)\frac{1}{\varepsilon}$$

  $$ln(3\delta) = -ln(\varepsilon)$$

  $$3\delta = e^{-ln(\varepsilon)}$$

  $\delta(\varepsilon)$ существует, ЧТД

- $lim_{x\to 3} \frac{5}{|x-3|} = \infty$ Докажем, что

  $$\forall n > N \exists \varepsilon : \frac{5}{|x-3|} < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) > N$$

  $$\frac{5}{3+\epsilon-3} = \frac{5}{\varepsilon} > N$$

  $$\varepsilon = \frac{5}{N}$$

  Мы нашли $\varepsilon(N)$, доказав тем самым предел по Коши