Содержание

1 Механика

1.1 Кинематика

1.1.1 Введение

Определение 1 *Основное понятие механики - движение, т.е. перемещение тела по отношению к другим телам. Без этих тел говорить о движении нельзя - оно относительно*

©*Ландау*

Определение 2 *Механика - раздел физики, в котором изучается простейшая форма движения материи - механическая, т.е. движение в пространстве и времени. Измерение расстояний осуществляется линейкой, времени - часами.*
©*Иродов и Савельев*

Определение 3 *Часы связаны с периодическими процессами, идущими с высокой степенью точности и повторяемостью, например колебания маятника или часового механизма*
©*Крымский, Кериченко*

Родоначальник классической механики - механики малых скоростей и абсолютного времени - **Ньютон**. Также серьезный вклад в классическую физику внес **Галилео Галилей**. Родноачальник релятивистской механики - физики больших скоростей и относительного времени - **Эйнштейн**

Согласно **СТО**, пространство и время неразрывно связаны, образуя четырехмерное **пространство-время**. Из **ОТО** следует, чтопространство гравитирующих масс искривляет пространство и влияет на ход времени.Еще одним ограничесением на **Ньютоновскую механику** является **Квантовая механика**. Её родоначальники: **Н. Бор, Э. Шредингер, В. Гейзенберг, П. Дирак, В. Паули**.

Если поправки Эйнштейна важны на больших скоростях (близких к скорости света), то поправки, вносимые квантовой механикой, начинают наиболее ярко проявляться при изучении атомов и элементарных частиц. Тем не менее, **Классическая Ньютонова механика** продолжает быть справедливой для объектов макромира, скорость которых значительно ниже скорости света.

1.1.2 Системы отсчета.Закон инерции Галилея(Первый закон ньютона).Инерциальные системы отсчета.

Определение 4 *Совокупность тел, которые условно считаются неподвижными и относительно которых рассматривается движение других тел, называется системой отсчета.*
©*Ландау*

Определение 5 *Система отсчета - произвольным образом выбраное тело или стстемы тел, относительно которого(ых) определяется положение всех прочих точек в простанстве.*
©*Крымский, Кериченко*

Если С.О. совпадает с самим телом, то тело будет **покоиться**, а в других с.о. - двигаться,причем в каждой с.о. - по-разному, т.е. по разным траекториям. В этом определении появляется очень важный термин **траектория**

Если тело находится настолько далеко от других тел,что не испытывает с их стороны никакого воздействия, то говорят, что это тело **свободно двигается**.

Определение 6 *Если в качестве С.О. выбрать систему, связанную со свободно двигающися телом, то в такой С.О. свободное движение других тел происходит* ***равноускоренно*** *и* ***прямолинейно****, т.е. описывается постояннй скоростью($v = const$). Такие С.О. называют инерциальными, сокращенно - ИСО. Это утверждение носит название* ***Закона инерции Галилея ака Первого Закона Ньютона****.*

Определение 7 (Школьная формулировка Первого Закона Ньютона) *Если в некоторой СО сила, действующая на тело $\vec{F} = 0$, то тело в этой СО движется прямолинейно и равномерно, а сама СО называется* ***инерциальной***

Определение 8 (Ещё одна формулировка Первого Закона Ньютона) ***Инерциальные системы отсчета*** *существуют, причем их бесконечное количество. Если некоторая система движется равномерно($\vec{v} = const$) относительно ИСО, то эта система тоже является ИСО.*

Определение 9 (Принцип эквивалентности) ***Классическая механика*** *Ньютона и* ***Специальная теория относительности*** *Эйнштейна основаны на постулате о отм, что все физическия явления протекают одинаково в любой ИСО. Другими словами, все ИСО* ***физически эквивалентны****, то есть* ***все законы природы имеют одинаковый вид*** *во всех ИСО.*

1.1.3 Кинематика. Материальная точка. Радиус-вектоор. Декартовы координаты. Скорость

Определение 10 *Кинематика - раздел механики, где рассматривается геометрическое описание движения тел, независимо от причин, обуславливающих это движение.*[1]

©Крымский, Кериченко

Определение 11 *Материальная точка(МТ) - это объект, формой и размером которого в условиях задачи можно пренебречь. МТ - основной объект механики.*

Рассмотрим движение *Земли* вокруг *Солнца. Землю* **в этой задаче** можно считать МТ. Но при изучении *суточного вращения Земли* вокруг своей оси, считать ее МТ уже нельзя!

Декартовы координаты

Определение 12 *Положение МТ в пространстве полностью определяется заданием трех координат: декартовых (x, y, z), полярных (r, ϕ, θ), или циллиндрических (r, ρ, ϕ).*

©Ландау

[1] Причины движения - силы, см. лекцию 3

Перевод систем друг в друга [2]

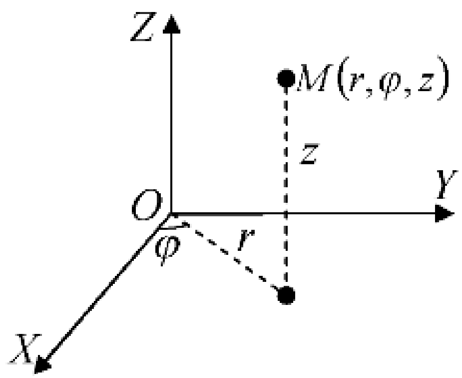

Рис. 1:

$$\text{Перевод полянрых координат}: \begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = r\cos(\phi) \end{cases}$$

$$\theta - \text{Полярный угол;} \theta \in [0;\pi]$$

$$\phi - \text{Азимутальный угол;} \phi \in [0;2\pi]$$

$$\text{Перевод полянрых координат}: \begin{cases} x = \rho\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\phi) \\ r^2 = \rho^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\text{В Декартовых координатах}: \begin{cases} \vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z} = \\ = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha e_\alpha = x_\alpha e_\alpha (\alpha = 1..3) \\ e_i - \text{единичные векторы} \\ x_i - \text{Координаты по разным осям} \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + x^2 \\ \rho^2 = x^2 + y^2 \\ (e_\alpha x_\alpha)^2 = 1 \\ e_x * e_y = e_x * e_z = e_y * e_z = 0 \end{cases}$$

Последнеее утверждение в переводе на человеческий означает, что все три e_i взаимно препендикулярны

[2] r на чертеже - это ρ

Определение 13 *совокупность трех величин* (x, y, z) *образует* ***радиус-вектор*** $\vec{r}$ *частицы, направленный из точки* O *- начала координат в точку* A *- позицию частицы.*

1.1.4 Траектория. Перемещение и путь материальной точки

Определение 14 *Положение точки* A *в пространстве в данный момент времени полностью определяется заданием зависимости* $\vec{r}(t)$*. С течением времени положение* A *меняется(см. чертеж), так, что конец* $\vec{r}$ *описывает в пространстве некоторую кривую, называемую траекторией материальной точки* A*. ©Ландау*

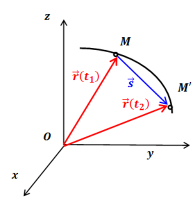

Рис. 2:

Траектория м.быть окружностью радиуса R, параболой, прямой и т.д.

О материальной точке мы часто будем говорит также как о **частице**. В связи с тем, что М.Т. описывается тремя декартовыми координатами (x, y, z), о ней часто говорят, что М.Т. обладает **тремя степенями свободы**.

1.1.5 Скорость

Определение 15 *Движение М.Т. характеризуется ее* ***скоростью****, при равномерном и прямолинейном движении значение скорости определяется просто как путь, проходимый частицей в единицу времени:* $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

В общем случае же, когда движение ***неравномерно****, и меняет свое направление, скорость частицы определяется как* ***вектор****, равные частному от деления вектора* ***бесконечно малого*** *перемещения частицы* dS *на соответствующий интервал времени*dt*:*$\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt}$.

Направление $\vec{v}$ *совпадает с направлением* $d\vec{S}$*, то есть в каждый момент времени скорость направлена* ***по касательной к траектории частицы****, в сторону движения.*

На рисунке изображена траектория движения некоторой М.Т., и отмечены ее радиус-векторы $\vec{r}$ и $\vec{r} + \vec{dr}$ в моменты времени t и $t + dt$. Пользуясь правилом сложения векторов, легко убедиться, что **бесконечно малое смещение** точки A равно разности радиус-векторов частицы в начальный и конечный моменты времени, то есть $d\vec{S} = d\vec{r}$. То есть скорость можно определить как $\vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. То есть скорость есть производная радиус-вектора частицы по времени.

Поскольку компонентами радиус-вектора $\vec{r}$ являются декартовы координат , то проекции скорости на оси координат x, y, z равны производным:

$$\vec{v_x} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$\vec{v_x} = \frac{d\vec{y}}{dt}$$

$$\vec{v_x} = \frac{d\vec{z}}{dt}$$

$$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

где $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ - три взаимно перпендикулярных единичных вектора.

Скорость наряду с положением является основной величиной, характеризующей состояние **движения** М.Т. Сотсояние частицы определяется, следовательно, шестью величинами: тремя координатами и тремя проекциями скорости.

1.1.6 Закон сложения скоростей

Установим связь между значениями скоростей $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ Одной и той же М.Т. в двух разных системах отсчета K и K'. Если за время dt материальная точка переместилась относительно системы отсчета K на величину $d\vec{s}$, а система K переместилась в свою очередь относительно системы K' на величину $d\vec{S}$, то из правила сложения векторов следует, что смещение М.Т. онсоительно системы K' будет равно

$$d\vec{S'} = d\vec{s} + d\vec{s}$$

Разделив обе части на интервал времени dt и обозначив скорость K относительно K' через $\vec{V}$, получим **Правило сложения скоростей**:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{V}$$

Даже если скорости непостоянны, в любой момент времени

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) + \vec{V}(t)$$

Эта формула, связывающая скорости одной и той же М.Т. в разных системах отсчета - правило сложения скоростей.

1.1.7 Абсолютность времени в Ньютоновской механике

На первый взгляд правило сложения скоростей представляется совершенно очевидным. Необходимо, однако, иметь в виду, что оно основано на *молчаливо* сделанном предположении об **абсолютном течении времени**. Мы считаем, что интервал времени dt, за который частица смещается на величину $d\vec{s}$ в системе K равен интервалу времени dt', за который частица смещается на величину $d\vec{S}'$ в системе K'.

Это предположение в действительности строго говоря неправильно. Время - тоже относительно, в СТО Эйнштейна, но следствия, вытекающие из неабсолютности времени, начинают проявляться только на скоростях, сравнимых со скоростью света $\vec{c} = 3*10^{10} cm/s$. Мы в дальнейшем в этом модуле будем рассматривать лишь $\vec{v} << \vec{c}$, когда предположение об **абсолютности времени** хорошо оправдывается.

Механика, основаная на предположении об абсолютности времени называется ньютоновской или классической. Только эту механику мы будем изучать в первом модуле. Основные ее законы были сформулированы Ньютоном в его трактате "Математические начала натуральной философии".

1.1.8 Ускорение. Движение по окружности

Ускорение В общем случае движения М.Т., ее скорость нерпрервыно меняется как по величине, так и по времени. Пусть за время dt скорость изменилась на $d\vec{v}$. Если разделить их друг на друга, получим вектор ускорения $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Ускорение определяет изменение скорости частицы и равно производной от скорости по времени.

Если направление скорости не изменяеся, то есть М.Т. движется по прямой, то ускорение, очевидно, направлено по той же прямой и равно.

Кроме того, $\vec{a} = \frac{d^2\vec{S}}{d^2t}$

Легко также определить ускорение, если скорость меняется тоько по направлению, оставаясь постоянной по величине. Этот случай имеет место при прямолинейном равномерном движении М.Т. по окружности

1.1.9 Центростремительное ускорение

$a_c = \frac{v^2}{R}$.

Пусть в некоторый момент времени скорость равна $\vec{v}$(см. рис. 1). Отложим его от некоторой точки С(рис. 2). При равномерном движении по окружности конец $\vec{v}$(точка А на рис. 2) также равномерно движется по окружности радиуса $|\vec{v}|$ равного абсолютному значению скорости. Ясно, что скорсоть перемещения точки A на рисунке 2 будет ускорение исходной частицы P на рисунке 1, так как перемещение точки A за время dt равно $d\vec{t}$ и следовательно скорость точки A на рисунке 2 равна $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$. Эта скорость имея направление касательной к окружности, с центром C на рис. 2, препендикулярна вектору $\vec{v}$. На рисунке он аобозначена $\vec{a}$

Если скорость $\vec{v}$ перпендикулярна $\vec{a}$ на **вспомогательном рисунке**, то v должна быть перпендикулярна a и на основном рисунке. Таким образом, ускорение М.Т., равномерно движущейся по окружности, перпендикулярно скорости. Определим величину **центростремительного ускорения** $\vec{a}$. За время полного обращения точки P по окружности с центром в точке O, точка A на вспомогательном рисунке пробежит **всю окружность с центром в точке** C, то есть пройдет путь $\vec{S} = 2\pi\vec{v}$. Обозначим период обращения точки P вокруг O и точки A вокруг C как T.

Среднее по времени:

$$< f >_t = \frac{1}{T} * \int_0^T f(t)dt$$

Тогда на вспомогательном рисунке $2\pi\vec{v} = \vec{a}t$, то есть путь равен произведению скорости движения A, то есть фактически модуля ускорения $|\vec{a}|$ на время движения T. Тогда

$$\vec{a} = \frac{2\pi v}{T}$$

Аналогично на основном рисунке

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Подставив одно выражение в другое, получим следующее:

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{2\pi v}{T} \\ T = \frac{2\pi r}{v} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

Центростремительное ускорение равно квадрату скорости, деленному на радиус окружности

Итак, если скорость меняестя только по величине, то направление ускорения совпадает с направлением корости(для движения по прямой). Если же скорость меняется тольеко по направлению(движение по окружности), то векторы скорсоти и ускорения взаимно перпендикулярны.

В общем случае, когда скорость $\vec{v}(t)$ меняется как по величине, так и по направлению, ускорение имеет **две компоненты**: одну - *тангенциальную(касательную)*, вдоль скорост $\vec{v}$ и другую -*нормальную*, перпендикулярную скорости $\vec{v}$. Полное ускорение равно их сумме:

$$\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_t}$$

Касательная составляющая ускорени равно производной от величины скорости $d\vec{v}$ по времени $d\vec{T}$

Нормальная составляющая равна $\frac{v^2}{r}$, где r - радиус кривизны. Качественно, радиус кривизны равен радиусу окружности, наилучшим образом аппроксимирующей траеторию на данном малом участке траектории. Для движения по прямой радиус кривизны бесконечно велик.

В общем случае, любой малый участок траектории можно положить на плоскость и ввести его описание через $y = f(x)$.

Обратный радиус кривизны равен модуля второй производной этой функции.

$$\frac{1}{R} = |\frac{d^2y}{dx^2}|$$

В общем случае радиус кривизна определяется именно так, через вторую производную функции траектории.

Другой, более традиционный вывод центростремительного ускорения При движении по окружности длина бесконечно малого перемещения равна длинне бесконечно малой дуги окружности радиуса r:

$$dS = rd\phi$$

где $d\phi$ - бесконечно малое приращение угла ϕ - азимутального угла. За период обращения полное изменение ϕ:

$$\Delta\phi = 2\pi$$

Но по определению, абсолютное згачение скорости есть производная от бесконечно малого перемещения dS по времени dt. При этом радиус окружности $r = const$. Тогда

$$v = \frac{dS}{dt} = r\frac{d\phi}{dt}$$

. Величина $\frac{d\phi}{dt} = \omega$, где ω - угловая скорость. Она определяестя отношением бесконечно малого изменения угла ϕ к бесконечно малому промежутку времени dt, за корорый произошло это изменение угла.

$$\begin{cases} v = \frac{2\pi r}{T} \\ v = \frac{2\pi r}{t} \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Это соотношение очень важно для всех периодических и колебательных движений.

Выведем соотношение между центростремительным ускорением a и угловой частотой вращения ω

$$\begin{cases} a = \frac{2\pi r}{\omega} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \\ v = \omega r \end{cases} \Rightarrow a = \omega^2 r$$

Центростремительное ускорение пропорционально квадарату угловой скорости, умноженному на радиус окружности.

1.1.10 Матрицы

i	j	k
1	0	2
2	3	1

a_{11}	a_{12}
$a21$	a_{22}

Детерминант(определитель) мартрицы - произведение $-a_{12}*a_{21}+a_{11}*a_{22}$

Иначе можно поступить, умножив каждый элемент строки или столбца, на определитель матрицы, получаемой вычеркиванием столбца и строки этого элемента. Знак определяется как $-1^{coeffssum}$ Детерминант матрицы 1*1 равен значению единственного элемента.

Детерминант матрицы 3*3 равен произведению каждого элемента строки или столбца на детерминант соотьветствующей матрицы 2*2

Применение детерминантов - расчет векторного произведения:

$$a = a_i * \vec{i} + a_j * \vec{j} + a_k * \vec{k}$$

$$b = b_i * \vec{i} + b_j * \vec{j} + b_k * \vec{k}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a} * \vec{b}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Ускорение состоит из двух компонент: нормального a_n и тангенциального a_t

нормальное ускорение считатется так:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$a_t = \frac{dv}{dt}$

1.1.11 Кинематика твердого тела. Виды движения твердого тела.

На лекции 2 мы познакомились с двумя **основными** видами движения: равномерным прямолинейным и вращательным, то етсь равномерным движением по окружности.

До сих пор мы изучали дижение тел, которые можно было рассматривать в данных условия как материальные точки. Теперь мы перейдем к описанию таких движений, при которых существенно **конечная протяженность** тела. При этом мы будем считать тела **твердыми**(в мезанике часто говорят абсолютно твердыми). Под твердым понимается тело, взаимное расположение частей которого остается неизменным во время движения. Такое тело выступает при движении как *единое целое.* Простейшим движение твердого тела является движение, при котором тело перемещается **параллельно самому себе**. Такое движение называется **поступательным**.

1.1.12 Поступательное движение твердого тела.

Определение 16 *При поступательном движении твердого тела* все его точки имеют равную скорость $\vec{v}$ *и описыают траектории одинаковой формы, смещенные по отношению друг к другу.*
©*Ландау*

1.1.13 Вращательное движение

Другим простейшим движение твердого тела является вращение тела ворруг оси. При вращении разлиные точки тела описаывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

При вращательном движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой - **оси вращения**. Если r - расстояние от точки до оси вращения oZ, то скорость равна произведению угловой скорости на радиус.

$$\vec{v} = \omega\vec{r}$$

В механие твердого тела скорость называется скоростью твердотельного вращения. Она пропорциональна угловой скорости вращения ω и расстоянию от точки твердого тела P до оси вращения.

Если вращение твердого тела происходит равномерно($\omega = const$), то как мы показали в лекции 2, угловая скорость связана с периодом вращения по формулам:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Вращение зарактеризуется направлением оси вращения и величиной угловой скорости. Их можно объединить вместе, введя *вектор угловой скорости* $\vec{\omega}$. Такой вектор имеет величину равную ω и коллинеарен оси вращения. Из двух направлений оси вращения вектору гловой скорости принято приписывать направление, определяемое *правилом правого винта*, то есть то, при вращении *ввинчивается винт с правой резьбой.*

1.1.14 Произвольное движение твердого тела. Движение твердого тела, параллельное плоскости

Рассмотренные нами простейшие виды движения твердого тела - поступательное движение и вращение особенно важны в механике, потому что *любое движение твердого тела сводится к их комбинации*

Рассмотрим движение твердого тела, параллельное некоторой плоскости. Такое движение иногда называют *плоским движением*

Рассмотрим два последовательных положения тела A_1 и A_2. Из положения A_1 в положение A_2 твердое тело можно переместить следующим образом, используя комбинацию поступательного и вращательного движений:

В начале *параллельным переносом* пожно перевести тело(и отрезок OO' в нем) из положения A_1 в положение A'. Это поступательное движение твердого тела. А затем поворотом на угол ϕ отностиельно нижней точки отрезка O в конечное положение A_2. Это вращательное движение твердого тела.

В то же время, можно и наоборот: переместить тело из положения A_1 в A_2, в начале сделав параллельный перенос тела в положение A'', и тоже повернуть вокруг верхней точки O на тот же угол ϕ

При этом угол поворота во вращательно движении *обязательно одинаков*, хотя точки *мгновенной оси поворота* O и O' - различны. В то же время, длина пути поступательного движения(длина перемещения отрезка OO') вообще говоря разная. Рассмотренный пример показывает, что любое произвольное движение твердого тела можно представить в виде совокупности поступательного движения всего тела со скоростью $\vec{v}$ какой-то его точки и вращения вокруг оси, проходящей через эту точку. При том поступательная скорость $\vec{v}$ зависит от того, какая из точек тела выбрана в качестве *основной*. Обычно, в качестве основной выбирается *центр масс(центр тяжести тела)*. Поступательная скорость $\vec{v}$ есть скорость центра масс. Точку центра масс в механике также часто называют *центром инерции* тела.

Угловая же скорсоть $\vec{\omega}$ от выбора основной точки не зависит. При любом выборе основной точки угловая скорость будет иметь одинаковую величину и направление. Можно сказать, что скорость поступательного движения имеет *относительный характер*, а угловая скорость вращения твердого тела - *абсолютный характер*

Каждый их векторов скорсои задается тремя проекциями, так тчо для знания скоростивсех точек твердого тела надо задать 6 независимых величин. Поэтому говорят, сто твердое тело - *механическая система с шестью степенями свободы.* При этом в общем случае скорость твердого тела записывается

$$\vec{V} = (v_x, v_y, v_x)$$

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

При этом в общем случае скорость твердого тела записывается как

$$\vec{v} = \vec{V} + [\omega * r]$$

1.1.15 Мгновенная ось вращения

Качение по плоскости как пример плоского движения твердого тела Итак, как мы уже говорили, плоским движением называется такое движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных *одной и той же неподвижной плоскости.*

При этом линейная скорость любой точки тела $\vec{v_0}$ перпендикулярна вектору угловой скорости ω. Пример плоского движения дает качение цилиндра по плоскости. Имеет место слкдующее утверждение: при плоском движении твердого тела любое *бесконечно малое* движение можно представить как *чистое вращение* тела вокруг некоторой оси. Эта ось назывется *мгновенной осью вращения.* Решим данную заадачу по учебнику Савельева. Итак,

$$\vec{V} = \vec{v_0} + [\omega/r]$$

, причем эти два слагаемые для полной скорости параллельны или антипараллельны друг другу. Главная фишка в том, что в нижней точке O' скорость поступательного движения $\vec{v_0}$ и скорсоть вращения $[\omega * r]$ противоположны. В то же время в верхней точке O'' они складываются. В нижней точке касания суммарная скорость равна нулю, в точке O скорость равна v_0, а в верхней - $2v_0$

Тогда поступательное и вращательное двмжение(каение колеса можно) представить как чистое вращение вокруг мгновеено оси, проходящей через нижнюю точку O'. Действительно, тогда в точке O'

$$V = [\omega * 0] = 0$$

В точке O

$$V = [\omega * r] = v_0$$

В точке O''

$$V = [\omega * 2r] = 2v_0$$

Замечание: при неплосо=ком движении элементарное перемещение тела можно пердставить как поворот вокруг мгновенной оси лишь в том случае, если векторы $\vec{v}0$ и $\vec{\omega}$ перпендикулярны. Если угол межлу ними отличен от 90 то движение тела в каждый момент времени будет наложением двух движений: вращения вокруг оси и потсупательного движени вдоль этой оси.

1.2 Динамика

1.2.1 Основные законы ньютоновской динамики. Третий зн. Закон сохранения импульса.Движение центра масс

Определение 17 (Первый закон ньютона) *Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние ©Крымский*

1.2.2 Масса материальной точки, импульс

Импульс $\vec{p}$ материальной точки связан простым соотношением со скоростью М.Т.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

Коэффициент m - характерная для каждой М.Т. постоянная - ее масса. Как показывает опыт, в классической механике масса тела не зависит от скорости.

$$m = const$$

Замечание1. Строго говоря, в определение импульса входит *инертная(иннерционая)* масса m_i, а в закон всемирного тяготения Ньютона входит *гравитационная* масса m_g, но существует принцип эквивалентности Ньютона-Эйнштейна между инертной и гравитационной массой. Согласно этому принципу, инертная и гравитационная массы равны.

Замечание 2. В физической системе СГС масса измеряется в граммах, в инженерной СИ - в килограммах

1.2.3 Сила. Второй закон Ньютона

Если М.Т. совершает сободное движение, то есть не взаимодействует с окружающими телами, то сохраняется ее импульс, если взаимодействует - то ее импульс меняется со временем. Мы можем, следовательно рассмартивать изменение импульса М.Т. как меру воздействия на нее со стороны окружающих тел. Чем больше это изменение за единицу времени,тем интенсивнее воздействие.

Как мы уже обсуждали на прошлой лекции, для определения **воздействия** на М.Т. со стороны окружающих тел естественно рассматривать производную вектора импульса этой М.Т. по времени. Эта производная называется **силой** $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Такое определение характеризует одну сторону взаимодействия, а именно степень *"реагирования"* М.Т. на воздействия на нее со стороны окружающих тел. Но с другой стороны, изучая взаимодействие М.Т. с окружающими телами, можно связать **силу этого взаимодействия** с величинами, характеризующими состояние М.Т. и состояние окружающих тел.

Силы взаимодействия между М.Т. в классической механике оказываются зависящими только от расположения М.Т. Иными словами, силы, действующие между частицами зависят только от рассояния между ними, но не от скоростей частиц(это не так в СТО).

Характер зависимости сил от расстояний между частицами может быть во многих случаях установлен исходя из изучения тех физических явлений, которые лежат в основе взаимодействий между М.Т. Например, для закона всемирного тяготения Ньютона, сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между двумя точками с масссами M_1 и M_2.

$$\vec{F} = G\frac{M_1 M_2}{r^3} * \vec{r}$$

Используем две стороны определения силы и обозначим через $\vec{F}$ выражение для силы, действующей на расссматриваемую М.Т. в зависимости от ее

координат(а также, в общем случае, от величин, характеризующих свойства и расположение окружающих тел, например массы окр. тел в механике или их заряды в электростатике). Мы можем тогда записать равенство двух выражений для силы - изменение импульса М.Т. в ед. времени $\frac{d\vec{P}}{dt}$ и силы.
4

$$\frac{dP}{dt} = \vec{F}(x, y, z...)$$

Так как импульс P в классической механике равен $m\vec{v}$, то есть произведению массы и скорости, то уравенение движения М.Т. можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}$$

Но по определению $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$
Тогда получаем "школьный"вид II Закона Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

При выводе II Закона Ньютона мы считали, что масса не меняется со временем. Таким образом, сила $\vec{F}$, действующая на М.Т. равна произведению ее ускорения на ее массу.

Подчеркнем однако,что второй закон Ньютона приобретает конкретный смысл только после того, как установлен вид силы $\vec{F}$ как функции координат системы. В этом случае(если вид функции $\vec{F}(\vec{r})$ известен, уравнение движения позволяет в принципе определить зависимость скорости $\vec{v}$ и координат $\vec{r} = (x, y, z)$ времени t, то есть найти траекторию ее движения. При этом, помимо вида функции $\vec{F}(\vec{r})$, то етсь законов взаимодействия частицы с окружающими телами, должны быть заданы, как говорят, *начальные условия*: положение и скорость частицы в некоторый момент времени, принимаемый в качестве исходного.

Поскольку уравнение движения можно переписать в виде

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}m$$

то бесконечно малое приращение скорости dv частицы за каждый интервал времени dt определяется по формуле

$$d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}$$

.
А еще

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

Отсюда ясно,что задание начального положения и начальной скорости частицы вместе со вторым законом Ньютона действительно достаточно для полного определения ее траектории, то есть ее дальнейшего движения. Уравнение движения является векторынм уравнением, поэтому его можно переписать в виде трех уравнений, связывающих проекции ускорения и силы на оси Ox, Oy, Oz:

$$\vec{F_\alpha} = m\frac{d\vec{v_\alpha}}{dt}$$

При свободном движении М.Т., когда она не взаимодействует с другими телами, скорость ее в ИСО остается неизменной - по первому З.Н. Напротив, если М.Т. взаимодействуют друг с другом, то их скорости *меняются с течением времени.* Изменения скоростей взаимодействующих друг с другом частиц не является однако *поностью независимыми*, а связаны между собой. Пусть наша системы состоит из N М.Т. Предположим, что эти М.Т. взаимодействуют меду собой, но *не взаимодействуют с окружающими телами.* Тогда для такой совокупности М.Т. можно ввести понятие **замкнутой системы**.

Под замкнутой системой будем понимать совокупность М.Т., взаимодействующих друг с другом и не взаимодействующих с окружающими телами. Для замкнутой системы существует ряд величин, связанных со скоростями, и не меняющихся с течением времени.

Эти сохраняющиеся величины играют особенно важную роль в механике. Это импульс, энергия и момент импульса. Их называют иногда интегралами движения.

Одна из этих величин - полный импульс системы P_Σ. Он представляет собой векторную сумму импульсов каждой из N М.Т.

1.2.4 Закон сохранения импульса

Сумма векторов $\vec{p_i}$, распространенных на все частицы замкнутой системы преставляет собой полный импульс

$$P_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i$$

где индексы нумеруют отдельные М.Т. Эта величина не меняется с течением времени.

$$\vec{P_\Sigma} = const \Rightarrow \frac{d\vec{P_\Sigma}}{dt} = 0$$

Итак, полный мипульс замкнутой системы сохраняется. Это - закон сохранения импульса.

Закон сохранения импульса распадается на три закона - по одному на ось.

$$\vec{P}_{\Sigma_\alpha} = const$$

1.2.5 Третий закон Ньютона

Из ЗСИ следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} = 0$$

Через определение силы:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} = 0$$

Расмотрим систему из двух тел, обозначив силы соответственно $\vec{F_{12}}$ и $\vec{F_{12}}$. Из уравнени выше следует:

$$\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$$

Сила действия равна силе противодействия по модулю, но противоположны по направлению - в этом состоит **Третий Закон Ньютона**

1.2.6 Центр инерции, центр масс

С ЗСИ в классической механике связано важное свойство массы - закон сохранения массы. Чтобы понять содержание этого закона, для замкнутой системы рассмотрим точку, называемую центром инерции системы. Координаты центра инерции представляют собой по Ландау средние значения координат частиц, причем координата каждой частицы считается столько раз, сколько единичная масса содержится в массе частицы m

Иными слоами, если x_α - иксовые координаты частиц с массами m_α, то иксовая координата центра масс определяется по формуле:

$$x_{mc} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

Анаогично и с другими координаами, так сто в векторной форме

$$\vec{r_{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}$$

Скорость

$$\vec{v_{cm}} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i}$$

$$\vec{v_{cm}} = \frac{\vec{P_\Sigma}}{\sum m_i}$$

Скорость центра масс - тоже не меняется со временем. Перепишем полученную формулу в удобном виде:

$$\vec{P_\Sigma} = \vec{v}_{cm} \sum m_i$$

Сумма масс частиц, скорость центра масс и импульс системы связаны так же как и импульс, скорость и масса отдельной частицы. Это означает, что мы можем рассматривать полный импуль системы как импульс одной М.Т., находящейся в центре масс системы и имеющей массу равную общей массе системы - сумме масс всех частиц в системе. Скорость центра масс можно рассматривать как скорость движения системы частиц, как целого. Сумма же масс отдельных частиц выступает как масса всей системы.

Мы видим, таким образом, что масса сложного тела в классической механике равна сумме масс его частей. Это утверждение на работает в СТО. Таким образом, в классической механике выполняется закон сохранения массы и ЗСИ. Последний - даже в СТО.

Так как скорость центра масс не меняется со временем, то связав с центром масс системы систему отсчета, получим еещё одну очень важную ИСО. Её называют системой центра масс. В этой ИСО, которая движется относительно покоящейся ИСО со скоростью равной $\vec{v_{cm}}$, ыыравен нулю полный импульс системы.

1.3 Закон сохранения энергии

Определим работу для б.м. перемещения dS. Исходя из 2 З.Н., сила $\vec{F}$ равняется $\vec{F} = mv'$. В то же время $dS = d\vec{r} = \vec{v}dt$. Подставим выражения для силы и перемещения в формулу для работы. Получим

$$dA = m\frac{dV}{dt}dS$$

,но

$$\frac{dVdt}{dt} = dV$$

, тогда

$$dA = m\vec{v}\vec{dv}$$

. Распишем скалярное произведение vdv, получим $v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z$. Далее по теореме Пифагора

$$dA = m\frac{dV^2}{2}$$

$$m = const \Rightarrow dA = d\frac{mv^2}{2}$$

Но как было показано выше,

$$dA = -dE$$

, так что

$$d(\frac{mv^2}{2} + U) = 0$$

$$d\frac{mv^2}{2} + U$$

- полная энергия частицы. В классической механике она равна сумме кинетической(зав. от квадрата скорости) и потенциальной энергии(зав. только от координат). Как было показано выше, полная энергия частицы равна костанте. Это выражение - закон сохранения энергии. Для замкнутой системы из N частиц закон сохранения энергии имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} E_{k_i} + U_i = const$$

Полную энергию системы часто удобно предстаить в виде внутренней энергии системы и *кинетической энергии движения ее центра масс*(то есть кинетической энергии движения системы как целого)

$$E = E_i nternal + \frac{M_{cm} V_{cm}^2}{2}$$

Внутренняя энергия системы - кинетическая энергия относительного движения частиц отн. центра масс и потенциальную энергию системы.

1.4 Момент импульса. Момент силы. Закон сохранения момента

В класс. механике для замкнутой системе наряду с законами сохранения импульса и энергии, выполняется также закон сохранения полного момента.

Вектор момента импульса для одной частицы определяется векторным произведением радиус вектора и импульса частицы P или с учетом того, что импульс $P = mv$

Если вектора r и P лежат в плоскости XOY, то вектор L направлен по оси z. его направление определяется по правилу правого винта.

Модуль момента также можно представить в виде $L = h_p P$, где $hp = lsin\theta$ - плечо импульса.

Для замкнутой системы из N частиц, полный момент равен

$$L = m_1 r_1 v_1 + m_2 r_2 v_2 + ...$$

Для замкнутой системы сохраняется полный момент.

Продифференцируем, испльзуя правило дифф-я произведения двух функций.

Векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю.

$$\frac{dL}{dt} = m[v, v] + m[r, \frac{dV}{dt}] = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Мы нашли производную момента по времени для одной частицы.

Производная по времени от полного момента равна сумме производных по времени от момента каждой частицы.

Поскольку полный момент сохраняется, то сумма моментов сил равна нулю.

Здесь мы видим аналогию с законом сохранения импульса, согласно которму сумма всех сил в замкнутой системе равна нулю(следствием этого является Третий закон Ньютона - сила действия равна силе противодействия с обратным знаком для системы из 2 частиц).

Обсудим систему единиц и размерности.

Величина, равная кг*м/с**2 - Джоуль, единица энергии в СИ 1 Эрг = г*см/с 1Дж = 10**7 Эрг

Сила в сгс - дин. 1 Дина = г*см/с**2. 1Н = 10**5 Дин

Для мощности - работы в единицу времени:

кВт*ч = 1 кВт*1ч

1.5 Кинетическая энергия вращающегося тела

Рассмотрим циллиндр. Разобьем циллиндр на кусочки и рассмотрим вращение каждого. Обозначим массу m_i, расстояние до оси - r_i. Определим суммарную кинет. энергию:

$$E = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Вынесем отсюда ω:

$$E = \frac{\omega^2}{2} * \sum m_i r_i^2$$

Введем очень важную величину - момент инерции(I)

$$I = \sum m_i r_i^2$$

В терминах момента инерции, мы получили очень простую формулу для энергии вращения:

$$E = \frac{\omega^2 I}{2}$$

Формула аналогична формуле

$$\frac{mv^2}{2}$$

.

Для циллиндра

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Для шара

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

Если тело одновременно вращается вокруг оси, проходящей через центр масс и двигается поступательно, то полная кинетическая энергия равна сумме

$$E = \frac{MV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Теорема Штайнера

Если тело вращается не вокруг оси, проходящей через центр масс, а вокруг произвольной оси, расположенной от центра масс на расстоянии a, то существует соотношениемежду моментами инерции для вращения отн. этих двух осей(z и z').

$$I'_z = I_z + Ma^2$$

Полезно для задач на момент инерции, например про полбревна.