Математический Анализ

Сахарова Нина Евгеньевна

4 ноября 2019 г.

Содержание

1 Практика

1.1 Организационное

1.1.1 Модули и формула оценки

Курс - 2 года, **программа**(формулы оценки, информация о плане, контроле, полезной литературе, задачах для подготовке и т.п.) **на сайте**. Не все соответствует действительности - например, **учебники могут быть не те**. Но формулы точно ОК.

Первые полгода - **функция 1 переменной**. Вторые полгода - функции многих переменных. Третий семестр - **диффуравнения и т.п.**. Курс без лишнего формализма, теорем и доказательств. В первую очередь - практика. Кому захочется БДСМ - для вас **курс матфака**. Кому слишком жестко - **обращаться к Н.Е.**, поможет, даст задания, проконсультирует. Скорее всего, будет ОК.

Формула оценки:

$$\begin{cases} Mark_{diploma} = Mark_1 * 0.25 + Mark_2 * 0.25 + Mark_3 * 0.25 + Mark_4 * 0.25 \\ Mark_1 = Mark_{exam} * 0.3 + Mark_{kr} * 0.3 + Mark_{dz+quiz} * 0.4 \\ Mark_2 = Mark_{exam} * 0.3 + Mark_{kr} * 0.3 + Mark_{dz+quiz} * 0.4 \\ Mark_3 = Mark_{exam} * 0.3 + Mark_{kr} * 0.3 + Mark_{dz+quiz} * 0.4 \\ Mark_4 = Mark_{exam} * 0.6 + Mark_{kr} *? + Mark_{dz+quiz} *? \end{cases}$$

где
$Mark_i$ - оценка за i-тый семестр
$Mark_{exam}$ - оценка за экзамен
$Mark_{kr}$ - контрольная в конце 1 модуля - начале 2го
$Mark_{dz+quiz}$ - средняя оценка за дз и квизы aka самостоятельные.

На кр можно шпору. Один лист в формате А4. С двух сторон. Домашняя - в LaTeX, MS Word, или другом редакторе. **На паре иметь распечатку!**

Дедлайны - святое. Если не будет - снижение оценки. Каждую неделю - листок с задачами. Он будет еще и в **Trello**.

1.1.2 Правила

Низзя

- Списывать - будут нули у всех, у кого совпали работы, и не важно кто у кого списал.
- Стесняться на паре - будут проблемы на экзамене
- Сидеть в гаджетах. Конспекты в LaTeX- можно :). Если все сильно срочно - ладно уж, можно.
- Изображать бревно, пока коллега у доски решает задачу. Решайте параллельно, а не списывайте с доски. Не ленитесь. Решайте задачи, это важно. Увидеть решение задачи другим человеком - недостаточно.
- Списывать задачи с Google
- Выпрашивать оценки в конце семестра(модуля)
- Переписывать без уважительной причины. Без справки - фига вам. Все справки проверяются, если фальшивка - будут бить, и, возможно, ногами
- Делать домашку не вовремя без уважительной причины
- Писать на почту на ВШЭвском домене. **Она не читается.** Есть *saharnina@gmail.com*

Посещаемость не контролируется. Не ходите - ну и номрально, лишь бы сдавали все до дедлайнов. Но как показывает практика, лучше не бросать. Вход-выход в/из аудитории - свободный. Учебники будут все в том же **Trello**. Дублирую тут:

- Stewart?. Calculus. English only. Рекомендовано издание 2008 года. Читать как художественную литературу. Ссылочку дадут.
- Классические учебники матана типа **Демидовича**. Ищите на свой вкус.
- Моргунов. Будет в **Trello**.

- ...
- Смотри **Trello**

1.1.3 Об экзамене

У вас листок с задачами. Решаете их в течение 2-3 часов, со шпаргалкой, потом работы сдаются, проверяются, потом показа работ.

Первая неделя практика, без теории почти. Потом пойдет побольше теории. Пока вспоминаем школьное время: производная, интеграл.

1.2 Лекция №1. Функция, производная.

1.2.1 Функции

Определение 1 *Функция - такое отображение, при котором одному элементу числового множества соответствует* ***ровно один*** *элемент числового множества. Множество, откуда отображается - область определения* D_y*. То, куда - область занчений* E_y*.*

Зависимость не обязана быть формулой, хоть это чаще всего и так. Переменных тоже может быть сколь угодно много.

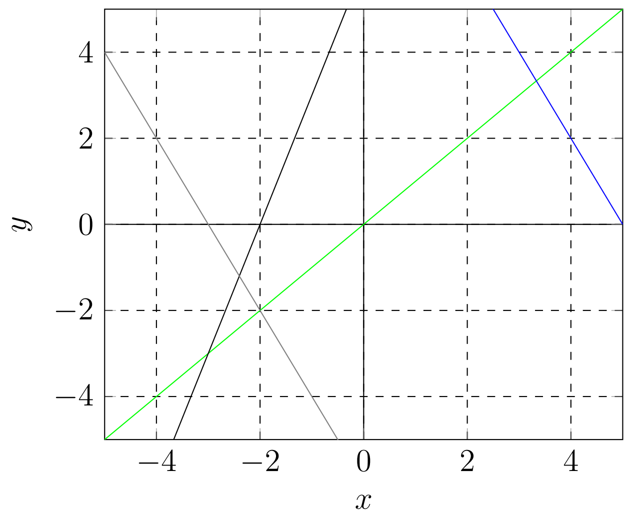
Способы задания:

- Таблицей
- Формулой
- Реккурентно - последовательности
- Графиком

В матанализе - в основном, применяются графики и формулы. Если на графике есть возможноть провести вертикальную прямую так, чтобы она пересекла график дважды, то это **не функция**. Такой ужас задается двумя функциями: $x(t)$ и $y(t)$.

Важные функции:

- Линейная



  - $y = kx + b$. k - коэффициент наклона, чем больше,тем круче, b - свободный член. Прямые задаются так все кроме вертикальной и горизонтальной.
  - $ax + by + c = 0$ - тоже линейная функция.
  - Еще одна форма задания:

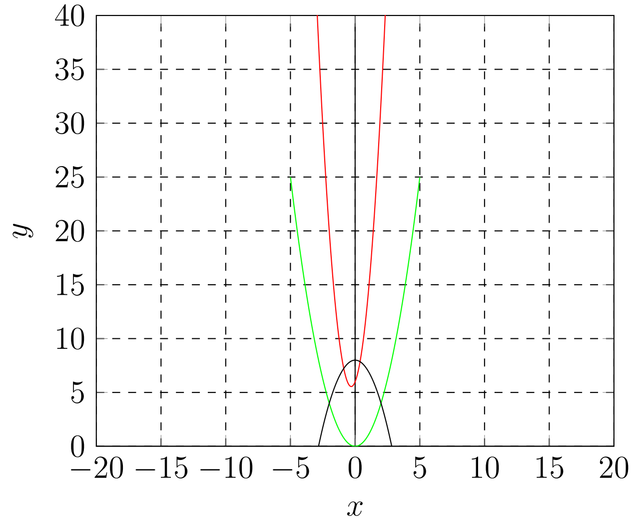
$$\begin{cases} y = at + c_1 \\ x = bt + c_2 \end{cases}$$

    Параллельно вектору (a, b), смещено на вектор (c_2, c_1)

  - $$\begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \end{cases}$$

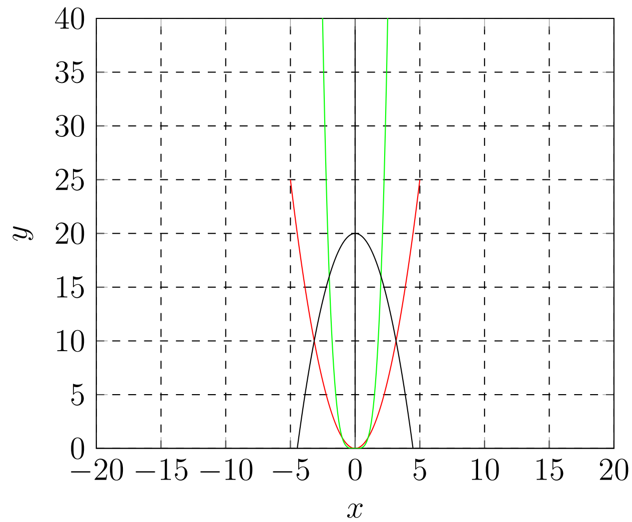
- Степенные фукции. $y = x^n$
  - Квадратный трехчлен.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x_0 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$



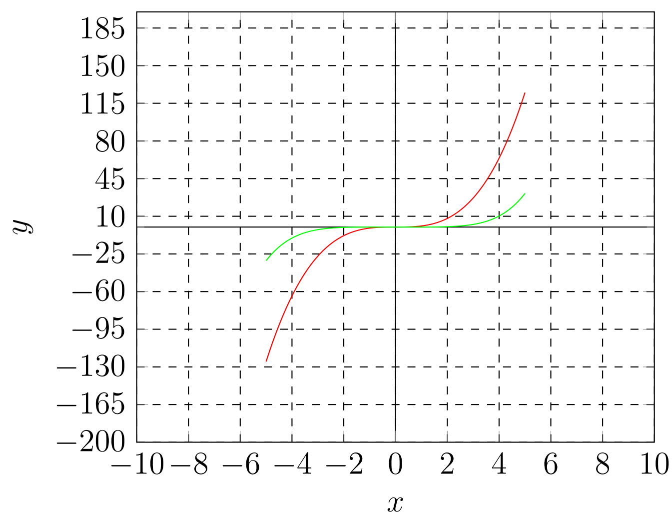
– Четные степени - параболы.

$$y = ax^{2n}$$



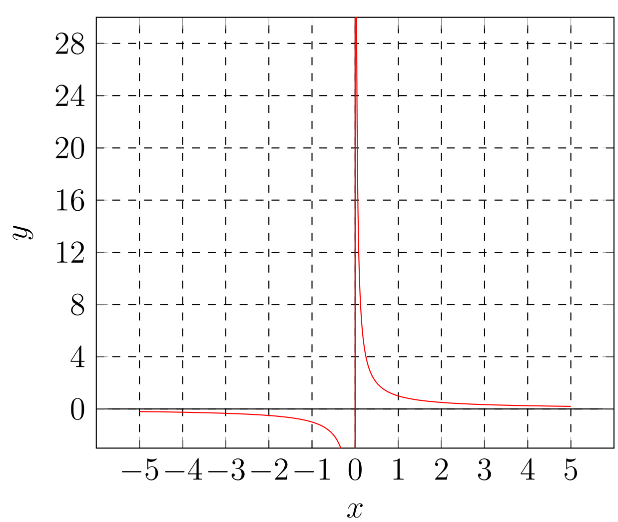
– Нечетные степени - кубические параболы.

$$y = ax^{2n+1}$$



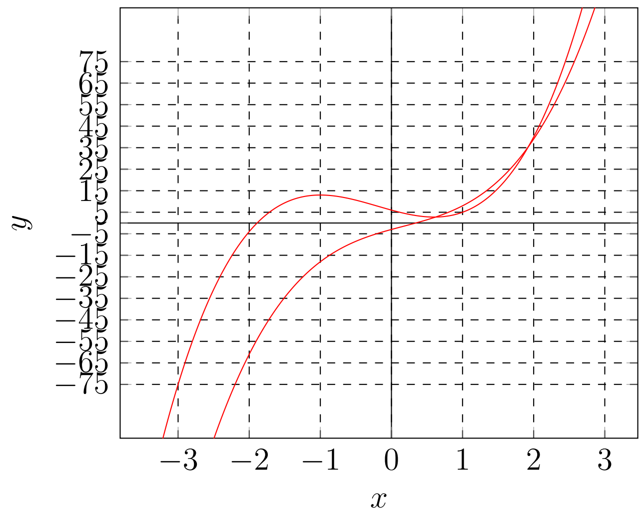
– Отрицательные степени - гиперболы.

$$y = ax^{-n}$$

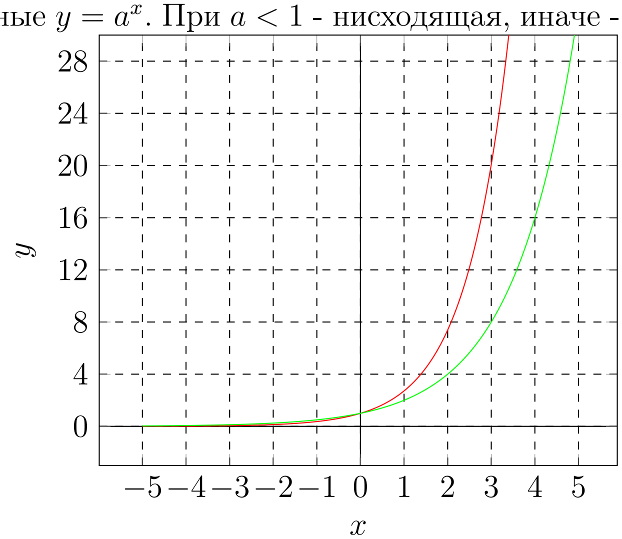


- Полиноминальные функции

$$y = \sum a_i x^i n_{extr} <= i_m ax$$



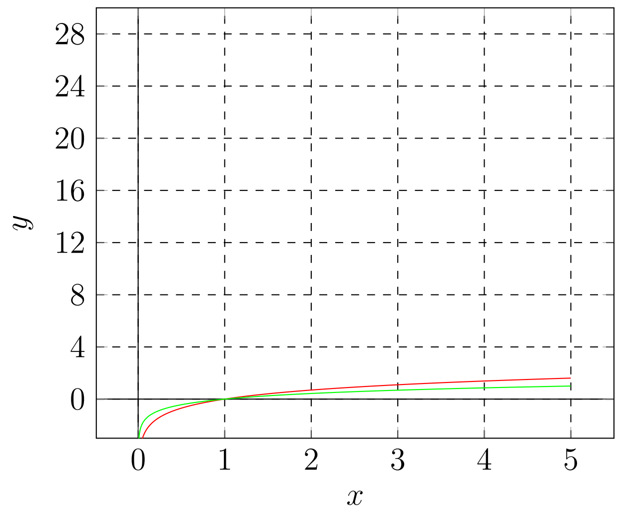
- Рациональные
  - Показательные $y = a^x$. При $a < 1$ - нисходящая, иначе -



    восходящая

  - Логарифмические $y = \log_a x$. По определению, логарифм - обратная для экспоненты функция(см. ниже):

$$log_a x = (a^x)^{-}1$$



Свойства:

$*$ $\log_a b + \log_a c = \log_a b + c$

$*$ $\log a^b = bloga$

Композиция функций

$$f \circ g = f(g(x))$$

Пример:

$$\begin{cases} g(x) = \ln(x+2) \\ f(x) = \sqrt{x+4} \end{cases} \quad f \circ f = \sqrt{ln(2+x)+4}$$

Функция называется обратной, если $f^{-1} \circ f = Eq$, где Eq - тождественное отображение $Eq(x) = x$.

Пример:

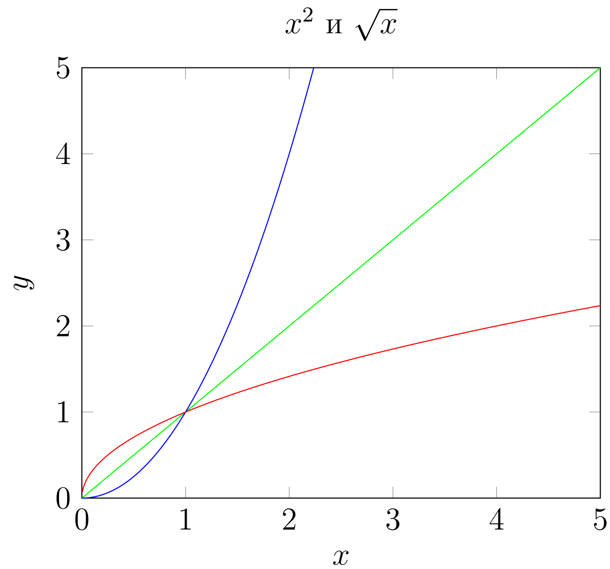
$$f(x) = x^2$$

$$(x > 0)$$

$$f^{-1} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

Обратная функция является отражением относительно данной относительно оси OX.



1.2.2 Пределы

Допустим, у функции нет значения в некой точке x_0. Или это значение выдернуто:

$$\begin{cases} y = 5x + 3 (\forall x \neq 3) \\ y = 7 (x = 3) \end{cases}$$

Если мы хотим понять поведение этого около $x = 3$, пишем следующее

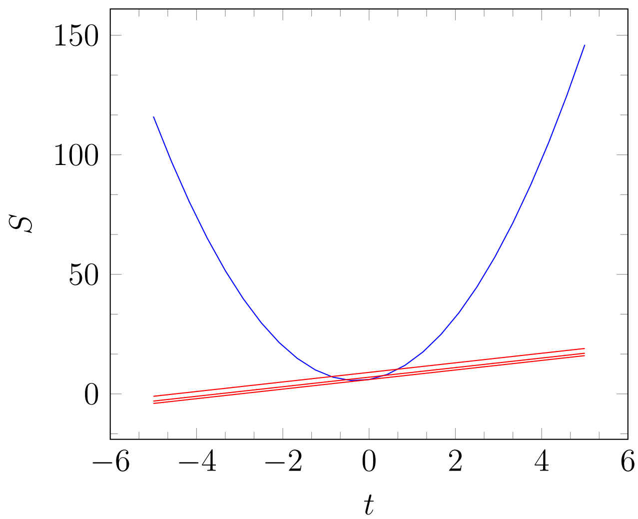
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

, что означает,что если мы берем числа, сколь угодно близкие к x_0, получаем числа, все более близкие к a.

1.2.3 Производная

Допустим, есть график движения материальной точки $S(t)$, и выбрано начало координат. Рассмотрим некое время t_1 и t_2. Проведем секущую, пересекающую функцию в точках t_1 и t_2. Скорость можно определить как $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Устремив Δt к нулю, получим мгновенную скорость и секущая станет касательной. Так и работает производная. Смотри ниже: на рисунке изображены именно такие касательные.

S(t)

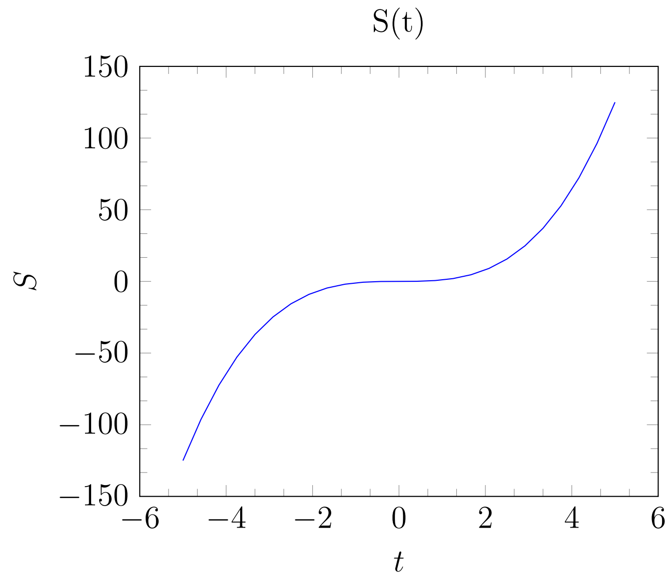


1.3 Лекция №2.

1.3.1 Экстремумы и критические точки. Условия экстремума

$f`(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$

Нули производной - критические точки, максимум или миниум - экстремум. Пример: $x^{3`} = 3x^2$, но в нуле кубическая парабола экстремума не имеет:



Необходимо:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 or f'(x_0) \end{cases}$$

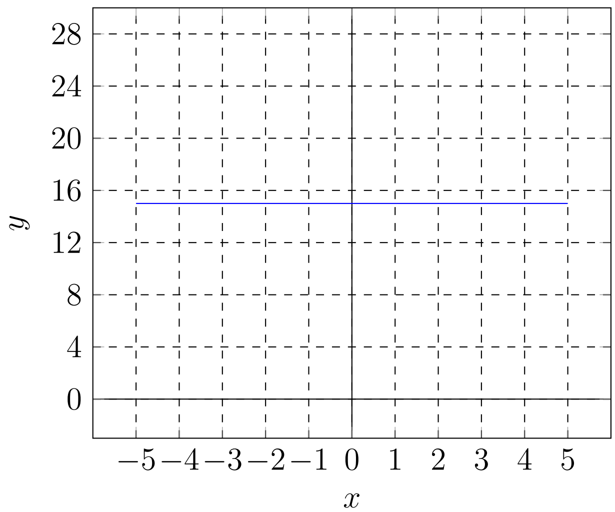
Достаточно:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 or f'(x_0) \\ sgn(f'(x_0 - dx)) = -sgn(f'(x_0 + dx)) \end{cases}$$

1.4 Лекция №3.

1.4.1 Интеграл

Пусть есть график зависимости скорости от времени. Требуется расчитать путь(найти площадь под графиком).



Путь - площадь прямоугольника, ограниченного следующими линиями:

$$x = a$$
$$x = b$$
$$y = 0$$
$$y = v(t)$$

Что же делать с нелинейной функцией? Делить на "ступеньки"! Чем больше ступенек, тем больше точность, а при устремлении их числа в ∞ получим точный ответ.

$$s = lim_{i\to\infty} \sum_{n=0}^{i} S_n = lim_{i\to\infty} \sum_{n=0}^{i} f(x_n)\Delta n$$

где:
$S_n = f(x_n)\Delta n$ - площадь n-ного прямоугольника
i - число прямоугольников

Эта сумма называется суммой Римана, кстати. Это будет определенный интеграл:

$$S = \int_a^b v(t)dt$$

.

Сверху определние интеграла Римана, можно и по-другому.

Определнного интергала может и не существовать. Такие называются несобственными или расходящимися.

Рассмотрим путь как функцию от времени:

$$S = \int_{a=const}^{u} v(t)dt = f(u) = S(u) - S(a)$$

Продифференцируем по u:

$$\frac{dS}{du} = \frac{dS(u)}{du} - \frac{dS(a)}{du} = v(u) - 0$$

Мы только что показали, что производная и интеграл - взаимно обратные операции, хотя и не совсем формально и говорить так лучше не стоит.

Пусть $f(x) = \frac{dG}{dx}$, то есть $\Delta G = \Delta x f(x)$.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен пределу Римановой суммы, с другой стороны, он равен

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \Delta G = G(b) - G(a)$$

. Это формула Ньютона-Лейбница, и она позволяет очень эффективно считать определенные интегралы, а не с пределами как в определении.

Первообразная:

$$F(x) = \int f(x)dx <=> F'(x) = f(x)$$

! Первообразная определена с точностью до константы.

Условия существования обратной функции: $|D_y| = |E_y|$

1.4.2 Дифференциал

$$\Delta f(x) = f(x + \delta x) - f(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Далее говорим, что в пределе

$$\Delta f(x) = \Delta x * f'(x)$$

Или

$$df(x) = dx/f'(x) + \varepsilon$$

При этом ε имеет порядок dx^2 или выше

Рассмотрим квадрат со стороной x. Его площадь, очевидно, x^2. Теперь увеличим сторону на Δx. Площадь стала

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 = x^2 + (x^2)'\Delta x + \Delta x^2$$

. Ясно, что при малых Δx порядок убывания Δx^2 выше, чем Δx и он и есть тот самый ε из уравнения выше.

Ещё можно сказать,что dy - изменение касательной к функции в данной точке за dx

1.4.3 Как посчитать производную и интеграл

I.
$$f(x) = Ag(x) + Bh(x) \Rightarrow f'(x) = Ag'(x) + Bh'(x)$$

Докажем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta g(x) + B\Delta h(x))}{\Delta x} = Ag'(x) + Bh'(x)$$

II.
$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Доказывается путем взятия производных от обоих частей. Действительно, производная от интеграла есть подынтегральная функция, и продифференцировав получим

$$f(x) + g(x) = f(x) + g(x)$$

III. Производная произведения

$$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + g'(x) + f(x)$$

Докажем это:

$$f(x) = g(x)h(x)$$
$$\Delta f(x) = g(x + \Delta x)h(x + \Delta x) - g(x)h(x)$$
$$g + \Delta g = g(x + \Delta x)$$

$$\Delta f(x) = g\Delta h + h\Delta g + \Delta g\Delta h$$
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = g\frac{\Delta h}{\Delta x} + h\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta g\Delta h}{\Delta x}$$

Последний член стремится к нулю при стремлении Δx к нулю, то есть при переходе в пределы получим, что

$$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + g'(x) * f(x)$$

Что и требовалось доказать

IV. Интегрирование по частям

$$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + g'(x) + f(x)$$

Проинтегрировав это, получаем:

$$g(x)h(x)dx = f(x)\int g(x) + g(x)\int h(x)$$

Как использовать? Допустим, есть интеграл стостоящий из произведения двух функций, одна из которых легко интегрируется. Тогда можно сделать так:

$$\int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)$$

Например,

$$\int xe^x = ?$$

Считаем $e^x = g', g = e^x, f = x, f' = 1$

Тогда

$$\int xe^x = xe^x + \int e^x * 1dx = xe^x - e^x + C$$

V. Производная сложной функции. Рассмотрим $f(x) = g \circ h(x) = g(h(x))$ Рассмотрим f как функцию g.

Тогда $df = f'(g) * dg$.

Но $dg = g'(x) * dx$

Из двух предыдущих получим

$$df = f'(g) * g'(x)dx \Rightarrow f'(x) = f'(g) * g'(x)$$

VI. Замена переменной в интергале aka Подведение под дифе- ренциал

Допустим, что

$$x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t)dt$$

Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Пример:

$$\int 2xe^{x^2}dx = |t = x^2| = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

Или

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}2xdx = \int e^{x^2}d(x^2) = |t = x^2| = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

VII. Производная обратно функции

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

2 Нормальный матан

2.1 Множества и отображения. Числа

Определение 2 *Множество - набор элементов, объединенный некоторым правилом.*

Элементы множества уникальны! Элементы перечисляются в фигурных скобках. Множества обозначаются заглавными латинскими буквами.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Пустое множество - не содержит элементов

Число элементов множества называют его *мощностью* $|A|$ или $\#A$. У множества выше $\#A = 6$.

Подмножество B множества A - такое множество, каждый элемент которого принадлежит A. Например, множество $B = 2, 4, 6 \subset A$

Операции:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

- Объединение:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Исключение:

$$A \setminus B = \{1, 2\}$$

- Пересечение:

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- Симметрическая разность:

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = 1, 2, 5$$

- Декартово произведение

$$A*B = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 3\}, \{4, 4\}, \{4, 5\}\}$$

  Пример такого - системы координат. Множество точек есть произвередние множеств X и Y

Отображение

$$f : A \to B$$

- это правило, сопоставляющее каждому элементу из A элемент из B. Элементы из A обязаны перейти куда-то, но элементы B могут быть не затронуты. Образ элемента - то, во что он переходит. Прообраз - то,что переходит в данный элемент.

Композиция отображений - последовательное применение отображений к множеству. Пусть есть $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Их комбинация отображение $f \circ g : A \to C$.

Биекция - взаимно однозначное отображение. Инъекция - такое отображение, при котором у любого элемента есть роно один образ. Сюрьекция - такое отображение, при котором у каждого элемента есть прообраз. Таким образом, Биекция - это Инъекция и Сюрьекция одновременно.

Если одно множество яляется подмножеством другого, это ничего не говорит об их мощности. Так, множества целых и натуральных чисел - равномощны. А вот множество действительных чисел больше. Доказательсто - смотри диагональный метод Кантора.

Обратимное отображение - такое отображение, что

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(b) = b \\ f^{-1} \circ f(a) = a \end{cases}$$

Оно существует только тогда, когда

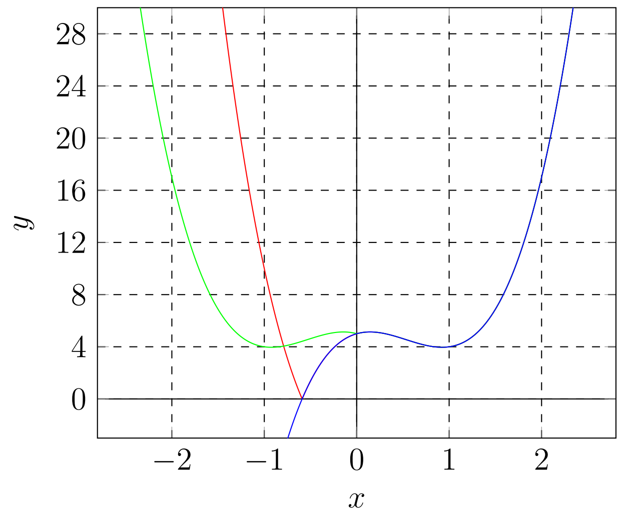
$$\begin{cases} |B| = |A| \\ f : A \to B - biection \end{cases}$$

3 Функции

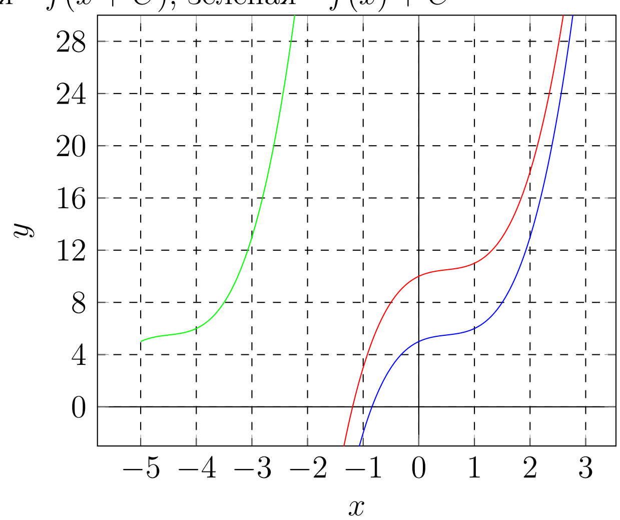
$f(x) : R \to R \Leftrightarrow f(x) = y, x \in R, y \in R$

3.1 Про графики

Модуль функции - отражение нижней части вверх отн. оси X; модуль аргумента - отражение правой части функции налево, «затирая» левую часть. Ниже: синяя - оригинальная функция, зеленая - модуль аргумента, красная - модуль функции.



Сдвиг по аргументу: при замене $x \to kx + b$, функция сдвигается влево на b/k. При прибавлении к функции константы C, она сдвигается вверх на C. Синяя - оригинальная ф-ция, Красная - $f(x + C)$, зеленая - $f(x) + C$



3.2 Пределы функции

По Коши:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

По Гейне:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall a_n : \lim a_n = x_0 \Rightarrow \lim f(a_n) = A$$