Матан - ДЗ 1

Артем Глубшев

1 Задача 0

$$N = 5, M = 7, L = 8$$

2 Задача 1

Итак, имеем множество отрезков. Тот факт, что для максимальной суммы длин «кусочков» множества необходимо максимизировать размер отрезков и минимизимировать расстояние между ними, предлагаю принять очевидным.

Тогда начинаем от левого края, откладываем максимально возможный по условию отрезок отрезок с длинной равной $0.1 - \varepsilon$. Ясно, что больше нельзя - нарушим условия, а меньше можно, но нас же просят максимальный! Затем отступ, минимально возможный по условию - $0.1 - \varepsilon$. Ясно, что сделав отступы меньше получим точки, запрещенные условием, сделав отрезки длиннее - тоже. Повторив пятикратно такое отложение, получим 5 отрезков длинной $0.1 - \varepsilon$, то есть сумма длин отрезков равна $0.5 - 5\varepsilon$. Устремив ε к нулю, получим ответ: сумма длин отрезков сколь угодно близка к $\frac{1}{2}$ снизу, но не может быть равна или больше.

Ответ: Да, доказательство в предыдущем абзаце

3 Задача 2

Методом рандома(не шучу, правда сгенерировал и рандомно выбрал) получено: 89, 97, 47. Теперь к решению задачи.

Ясно, что на 89 делятся $floor(\frac{1000}{89})$ чисел. Аналогично для 97 и 47. Но данный ответ имеет проблему: если чило делится и на 97, и на 47, я посчитаю его дважды, что есть нехорошо. Исправим же это. Сперва определим, сколько чисел делятся на 97 и 47 одновременно. Мне повезло, 0, ведь даже 47*89 больше 1000, а уж замена одного из множителей на 97 дает еще большее число. Таким образом, мне не надо заморачиаться с этим всем, ну и хорошо.

$$\frac{1000}{47} = 21.27659574468085$$
$$\frac{1000}{89} = 11.235955056179776$$
$$\frac{1000}{97} = 10.309278350515465$$
$$21 + 11 + 10 = 42$$

Полным перебором, занявшим аж целых 0.245 секунды получен тот же ответ.

Ответ: 42. Кажется, мой компьютер шутит.

4 Задача 3

Итак, мы знаем что
$$x + \frac{1}{x} \in N$$
. Это утверждение - наша **база индукции** - доказуемое верно для степени равной 1.

Допустим, что для чисел вплоть до n уже доказано,что
$$x^n + \frac{1}{x^n} \in N$$

Тогда
$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x^n + \frac{1}{x^n})(x + \frac{1}{x}) - (x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}})$$

Все скобки в выражении справа от равно целые, а сумма, разность и умножение целых чисел дают целые.

Доказано

5 Задача 4

Я люблю использовать подходы, скоращающие путь к результату, так что сейчас будет простое неиндукционное доказательство, сделать кторое можно в пятом классе, если вспомнить **Формулу Бине**

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{2\Phi - 1}$$

Здесь $\Phi = 1.61833... = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - соотношение серебрянного сечения, "красивого"деления отрезка, такого, что большее к меньшему относится как целое к большему.

Так, начинаем доказывать.

$$F_{n+1} * F_{n-1} = \frac{\Phi^{n+1} - (-\Phi)^{-n-1}}{2\Phi - 1} * \frac{\Phi^{n-1} - (-\Phi)^{-n+1}}{2\Phi - 1}$$

Раскрыв, получим:

$$F_{n+1} * F_{n-1} = \frac{-(-a)^{1-n}a^{n+1} + a^{2n} - (-a)^{-n-1} + (-a)^{-2n}}{2\Phi - 1}$$

Теперь то же самое для F_n^2:

$$F_n^2 = (\frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{2\Phi - 1})^2 = a^{2n} - 2a^n(-a)^{-n} + (-a)^2 n$$

Вычтем

$$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 n = -(-a)^{1-n}a^{n+1} + 2a^n(-a)^{-n} - (-a)^{-1-n}a^{n-1}$$

Вынесем a^n:

$$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 n = a^n(-a(-a)^{1-n} + 2(-a)^{-n} - (-a)^{-1-n}a^{-1})$$

Упростим:

$$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 n = a^n((-a)^{2-n} + 2(-a)^{-n} + (-a)^{-2-n})$$

Свернем в нечто похожее на формулу суммы квадратов

$$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 n = a^n((-a)^{-n^2} + 2(-a)^{-n} + (-a)^{-n^{-2}})$$

... Тут я расхотел набирать еще лист с гаком приведений, но в итоге после подстановки $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ привелось к требуемому

$$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 n = (-1)^n$$

ЧТД.

P.S. Школьник пятого класса должен быть безумно аккуратным, я с matlab'ом-то еле привел это все, а до того были три или четыре попытки на листочке, разумеется, неудачные. Ну нафиг так «сокращать путь»

Доказательство по индукции:

База При

$$n = 2$$

равенство верно.

Шаг Пусть доказано, что

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^n$$

Прибавим к обоим частям F_nF_{n+1}:

$$F_n^2 + F_nF_{n+1} = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^n + F_nF_{n+1}$$

Вынесем:

$$F_n(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}(F_{n-1} + F_n) + (-1)^n$$

По определению,

$$F_{n+2} = F_{n+1}F_n$$

$$F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^n$$

ЧТД

6 Задача 5

По лемме, доказаной ранее, корень извлекается рационально тогда и только тогда, когда он извлекается нацело.

Кроме того, мы доказывали, что(далее R - тип «рациональное число», I - «иррациональное число», использована система записи типов haskell):

$$add :: R- > R- > R$$

$$add :: I- > I- > R$$

$$add :: I- > R- > I$$

Из всего вышесказаного следует, что

$$n + \sqrt{n} \in R \Leftarrow n = k^2, k \in N$$

Ответ: Для $n = k^2, k \in N$

7 Задача 6

7.1

15 мест для герани, 5 для роз. Отсюда 15! и 5! перестановок там и там, и соответственно, всего вариантов

$$N = 15! * 5!$$

7.2

Сводится к первой, введением дополнительной степени свободы - номера горшка с геранью, после которого вы впихнем розы.

$$N = 15! * 5! * 16$$

7.3

герань ставим 15! вариантами. Теперь для первой розы 16 вариантов впихивания, для второй 15, 14, 13, и 12.

$$N = 15! \frac{16!}{11!}$$

Ответ: a. $15! * 5!$ **b.**$15! * 5! * 16$ **c.**$15! * \frac{16!}{11!}$

8 Задача 7

Вы, вероятно, не хотели услышать этот вариант ответа, но сколь угодно много. Берем три дощечки длиной N, делаем из них треугольник. Потом шесть. Потом девять. Ну а что, кто заставлял использовать ровно три дощечки?

Приведу также решение исходя из дополнительного условия о том. что дощечек всякий раз ровно три. С моими числами проблем с треугольниками быть не может, действительно, минимальная сторона у меня 6, максимальная 9, 6+6 $>$ 9, нарушить неравенство треугольника я не могу. Тогда рассмторим три случая: все стороны разные, две совпадают, и все равны.

В перовм случае имеем 4 варианта, так как можем не включить лишь одну длинну дощечек.

Во втором случае имеем 12 вариантов - 4 для парной стороны и 3 для непарной, предполагая что мы выбираем первой парную, иначе наоборот, но не суть.

В третьем случае вариантов снова 4, ведь какая разница, включить одну или все кроме одной.

Ответ: 20 вариантов

9 Задача 8

9.1

Никакой. Сумма степеней не равна M+L+N, такого члена не будет

9.2

Степень у меня 20, искомый член - $a^5 b^7 c^8$. Вспоминаем формулу бинома Ньютона, которую грех не расширить на полиномы, и вот вам - полиномиальная формула.

$$(a_1 + a_2 + .. + a_k)^n = \sum \frac{n!}{r_1! r_2! .. r_k!} a_1^{r1} a_2^{r2} .. a_k^{rk}$$

Нетрудно видеть, что коэффициент равен $\frac{20!}{5!8!7!}$

Ответ:a. 0; b. $\frac{20!}{5!8!7!}$**;**

10 Задача 9

10.1

Почти полная копия задачи с семинара про квадратный город, решается в три строчки:

40 шагов до цели - следовательно, 40! вариантов подразумевая что все шаги различны;

10, 14 и 16 эквивалентны - значит делим на их факториалы;

Легко видеть, что получается:

$$N = \frac{40!}{10!14!16!}$$

10.2

Нет, не зависит, из любого варианта можно перейти в любой, используя отражение кубика, которое не меняет взаимоотношений его частей

11 Задача 10

L*M*N = 280

Очевидно, что группа обязана содержать четное число К., так как мальчиков и девочек поровну и пилить их нельзя. Итак, возможны компании из 2, 4, 6 ... 280*2 К. Для компании из 2n зверей мальчиков можно выбрать $\frac{280!}{n!(280-n)!}$, девочек тоже. Тогда для компании из 2n имеем

$$(\frac{280!}{n!(280-n)!})^2$$

вариантов

Итак, общее число вариантов:

$$\sum_{i=1}^{280} \frac{280!}{n!(280-n)!}$$

Существует теория, что это приводится к чему попроще, но мне не удалось.

Ответ:

$$\sum_{i=1}^{280} \frac{280!}{n!(280-n)!}$$

12 Задача 11

Пишем в ряд N единиц - их сумма очевидно N ставим или нет между ними столбики - $N-1$ мест, так как с краев нельзя, $0 \notin N$. Итак, имеем 2^{N-1} способов поставить столбики, но есть одно «но» - нельзя по условию не поставить столбиков вообще, так как представить N как N нельзя, N не меньше N. Отсюда минус один. Получили, что N имеет $2^{N-1}-1$ способов представления, **чтд**