## Содержание

1 Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по на- правлению. Градиент скалярного поля.

2 Векторное поле. Уравнение векторных линий векторного поля. Ди- вергенция и ротор векторного поля.

3 Односторонние и двусторонние поверхности. Понятие площади по- верхности. Методы вычисления площади поверхности

4 Поверхностные интегралы 1го и 2го рода, определение и методы вычисления

5 Поток векторного поля. Определение потока, свойства и методы вычисления. Физический смысл потока

6 Поток векторного поля через замкнутую поверхность. Теорема Остроградского- Гаусса. Инвариантное определение дивергенции

7 Линейный интеграл. Понятие линейного интеграла, свойства и ме- тоды вычисления. Физический смысл линейного интеграла

8 Циркуляция векторного поля. Теорема Стокса. Инвариантное опре- деление ротора. Формула Грина

9 Потенциальные и соленоидальные векторные поля. Условия потен- циальности векторного поля. Потенциал. Методы вычисления потенциала. Свойства соленоидального поля



10 Тригонометрический ряд Фурье. Тригонометрическая система. На- хождение коэффициентов ряда Фурье

11 Кусочно непрерывные и кусочно гладкие функ-

кают формулы Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

справедливые для всех вещественных чисел $\varphi$. Предполагая, что функция f разлагается в ряд Фурье, заменим в нем синусы и косинусы по формулам Эйлера:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a......n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

где использованы обозначения

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} if n > 0$$

$$c_n = \frac{a_0}{2} if n = 0$$

$$c_n = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} if n < 0$$

Вновь используя формулы Эйлера, преобразуем выражения для коэффициентов cn:

$$c_n = (a_n - ib_n)/2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - i \sin nx]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, if n > 0$$

$$c_0 = a_0/2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) ...... \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i0x}\, dx;$$

$$c_n = (a_{-n} + ib_{-n})/2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos nx - \sin nx]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx, \text{ если } n < 0.$$

Итак, мы видим, что для всех значений n коэффициенты cn ищутся по одной формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

При этом имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

называемое комплексной формой ряда Фурье. Оно короче и симметричнее своего вещественного аналога и поэтому чаще используется в физике.

# 14 Понятие обобщенного ряда Фурье и ортогональные полиномы

## 14.1 Ортогональные полиномы

Два полинома, заданные на интервале $[a, b]$, являются ортогональными, если выполнено условие

$$\int\limits_a^b p(x)\, q(x)\, w(x)\, dx = 0$$

где $w(x)$ - неотрицательная весовая функция.

Множество полиномов $p_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $n$ - степень полинома $p_n(x)$, образуют систему ортогональных полиномов, если справедливо равенство

$$\int\limits_a^b p_m(x)\, p_n(x)\, w(x)\, dx = c_n \delta_{mn}$$

где $c_n$ - заданные константы, а $\delta_{mn}$ - символ Кронекера.

## 14.2 Обобщенный ряд Фурье

Обобщенным рядом Фурье для некоторой функции называется ее разложение в ряд на основе системы ортогональных полиномов. Любая кусочно непрерывная функция может быть представлена в виде обобщенного ряда Фурье:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \text{ непрерывна} \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{в точке разрыва 2 рода} \end{cases}.$$

Ниже мы рассмотрим 4 вида ортогональных полиномов: полиномы Эрмита, Лагерра, Лежандра и Чебышева.

## 14.3 Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

ортогональны с весовой функцией $e^{-x^2}$ на интервале $(-\infty, \infty)$ :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}.$$

Иногда используется альтернативное определение, в котором весовая функция равна $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Это соглашение распространено в теории вероятностей, в частности, из-за того, что плотность нормального распределения описывается функцией

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

## 14.4 Полиномы Лагерра

Полиномы Лагерра $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n\left(x^n e^{-x}\right)}{dx^n}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ортогональны с весовой функцией $e^{-x}$ на интервале $(0, \infty)$ :

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}.$$

### 14.5 Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ :

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

### 14.6 Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ первого рода ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ :

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases}.$$

## 15 Интеграл Фурье и преобразование Фурье.

Интеграл Фурье — это представление непериодической функции $f(x)$ в виде интеграла, равного непрерывной сумме гармоник, зависящих от частоты $\omega$ на интервале $[0; \infty)$.

При этом говорят, что непериодическая функция $f(x)$ имеет непрерывный спектр; частоты образующих её гармоник изменяются непрерывно. Функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ дают закон распределения амплитуд (и начальных фаз) в зависимости от частоты $\omega$.

Представление функции $f(x)$ на интервале $[-\infty, \infty]$:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) cos\omega(t-x) dt$$

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} [A(\omega) cos\omega x + B(\omega) sin\omega x] d\omega$$

, где

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) cos\omega t dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) sin\omega t dt$$

Представление чётной функции $f(x)$ на интервале $(-\infty; \infty)$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} cos\omega x d\omega \int\limits_{0}^{\infty} f(t) cos\omega t dt$$

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} A(\omega) cos\omega x d\omega$$

где

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} f(t) cos\omega t dt$$

Представление нечётной функции $f(x)$ на интервале $(-\infty; \infty)$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} sin\omega x d\omega \int\limits_{0}^{\infty} f(t) sin\omega t dt$$

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} B(\omega) sin\omega x d\omega$$

, где

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} f(t) sin\omega t dt$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} cos\omega x d\omega \int\limits_{0}^{\infty} f(t) cos\omega t dt$$

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} A(\omega) cos\omega x d\omega$$

, где

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} f(t) cos\omega t dt$$

Представление функции $f(x)$ интегралом с синусами на интервале $[0; \infty)$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty sin\omega x d\omega \int\limits_0^\infty f(t) sin\omega t dt$$

$$f(x) = \int\limits_0^\infty B(\omega) sin\omega x d\omega$$

, где

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty f(t) sin\omega t dt$$