



universität
wien

BACHELOR THESIS

Comparison micro- and macroscopic behaviour of
the Random Walk in 2D in the context of Size
Exclusion

Author

Aaron Keziah Pumm

Submitted in the support of the degree
Bachelor of Science (BSc.)

Vienna, January 2023

Study code: A 033621
Bachelor's degree programme: Mathematics
Supervisor: Dr. Michael Fischer

Abstract

insert abstract here

Contents

1	Beispiel-Abschnitt	1
1.1	Matrizen	1
1.2	Zitieren mit bibtex	2
1.3	Abbildungen	2
1.4	Tabellen	3
1.5	Introduction	3
1.6	Random Walk	3
1.7	Size Exclusion	3
1.8	Heat Equation	4
2	Introduction	4
3	Random Walk	4
4	Size Exclusion	4
5	Heat Equation	4
6	Simulations	4
7	Stability and Precision	4
8	Conclusion	4
9	Outlook	4

1 Beispiel-Abschnitt

Im folgenden Abschnitt setzen wir die Existenz und elementare Eigenschaften der ganzen Zahlen \mathbb{Z} voraus.

Theorem 1.1. *Die Relation auf der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die durch*

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ad = cb$$

definiert ist, ist eine Äquivalenzrelation.

Proof. Seien a und $b \neq 0$ ganze Zahlen, dann gilt $ab = ab$ und daher $(a, b) \sim (a, b)$, d. h. \sim ist reflexiv. Seien nun c und $d \neq 0$ weitere ganze Zahlen, für die $(a, b) \sim (c, d)$ gilt, dann folgt nach der Definition der Relation die Identität $0 = ad - cb = da - bc$ und daher auch $(c, d) \sim (a, b)$.

Sind schließlich e und $f \neq 0$ weitere ganze Zahlen, für die $(c, d) \sim (e, f)$ gilt, dann muss die Gleichheit $cf = ed$ gelten. Da gleichzeitig $ad = cb$ erfüllt ist, folgert man

$$0 = ad - cb = (ad - cb)e = ade - cbe = acf - cbe = c(af - eb). \quad (1.1)$$

Angenommen $c = 0$, dann müssen wegen $b, f \neq 0$ und $ad = cb = 0$ sowie $cf = ed = 0$ die Zahlen a und e gleich null sein. Man folgert $af = 0 = eb$ und $(a, b) \sim (e, f)$.

Andererseits angenommen, dass $c \neq 0$, dann folgt aus der Gleichung 1.1 die Identität $af - eb = 0$, da die ganzen Zahlen ein Integritätsbereich sind. Man schließt $(a, b) \sim (e, f)$. \square

Theorem 1.2. *Die Äquivalenzklassen von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ bzgl. der Relation \sim aus dem obigen Theorem bilden bezüglich der Operationen*

$$[a, b] + [c, d] := [ad + cb, bd]$$

und

$$[a, b] \cdot [c, d] := [ac, bd]$$

einen Körper.

1.1 Matrizen

Matrizen kann man in einer Gleichungs-Umgebung mit dem “pmatrix”-Befehl setzen (“bmatrix” für eckige Klammern).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

1.2 Zitieren mit bibtex

Die BibTeX-Datei “references.bib” in diesem Template soll am Ende die gesamten Bibliographiedaten, die für die Arbeit notwendig sind, enthalten. Die meisten mathematischen Bücher sind auf Google Books verzeichnet. Dort kann man (im Moment ganz unten im Google Books - Eintrag) bereits einen fertigen BibTeX-Eintrag beziehen, den man dann nur noch zu “references.bib” hinzufügen muss. Die Literaturliste der Arbeit wird von LaTeX automatisch generiert. Um ein Werk in der Arbeit zu zitieren, verwendet man den “cite”-Befehl. Hier ein Beispiel, wie das aussehen kann.

Ich mag die Bücher [1] und [2]. Kafka [1, S. 1] schreibt im Jahr 1914:

Jemand mußte Josef K. verleumdet haben, denn ohne daß er etwas Böses getan hätte, wurde er eines Morgens verhaftet.

1.3 Abbildungen

Mit der “Figure”-Umgebung kann man Abbildungen in die Arbeit einfügen, die von LaTeX selbst an eine möglichst nahe Stelle gesetzt werden, wo sie Platz finden. Das ist allerdings meistens nicht genau dort, wo man Bezug darauf nehmen möchte. Daher sollte man nicht vergessen, der Umgebung ein “Label” hinzuzufügen, auf welches man dann referenzieren kann, siehe z.B. Abbildung 1.

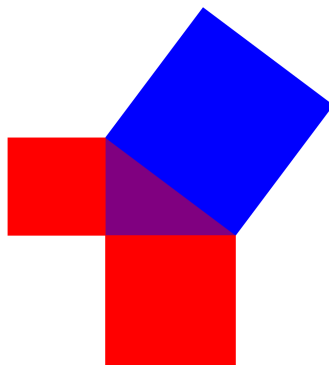


Figure 1: Darstellung des Satzes von Pythagoras.

1.4 Tabellen

Genauso wie Abbildungen, sind Tabellen in LaTeX auch dafür gedacht, automatisch an einen passenden Ort gesetzt zu werden, so wie Tabelle 1 in diesem Dokument. Das macht die “table”-Umgebung. Die “tabular”-Umgebung ist für die Tabelle selbst verantwortlich, und kann auch ohne die “table”-Umgebung verwendet werden, allerdings ist dann die Platzierung meistens etwas eigenwillig, und muss mit dem “vspace”-Befehl repariert werden. Wenn man die Breite einer Tabelle festlegen möchte, kann man das “tabularx”-package verwenden, das wesentlich mehr Formatierungsmöglichkeiten erlaubt, aber im Wesentlichen gleich funktioniert (es ist im Header dieses Templates bereits importiert).

item 11	item 12	item 13
item 21	item 22	item 23

Table 1: Eine Tabelle

1.5 Introduction

In pedestrian dynamics research the stable and scalable simulation of human like movement plays a key roll in evaluating a system of some given parameters. In its core we want to analyse the randomness component to those systems. One way of modelling such system-components would be a Random Walk in a cellular automata environment. We distinguish between the micro- and macroscopic behaviour to enforce new methods that are adequate for a given scenario.

1.6 Random Walk

We define a discrete space called board consisting of cells that can be inhabited by agents. In the further we will call them walkers. The next step would be to define a recursive function that gets applied on the current state of the board and creates a new board state. If we define this function so that each walker has an equal chance to "walk" to one of the adjacent cells we get a Random Walk. Its easy to see that we would expect an equiliberal state in the limit process of this system. In other words the function has a fixed point.

1.7 Size Exclusion

Before the board had no conditions on how a cell could be inhabited. For our puposes it can be helpful to just allow at most one walker in each cell at any given time step. This size exclusion changes the behaviour of the system. We still would expect a fixed point but the process gets slowed down by denied

steps. In the course of this Bachelor Thesis we want to compare those changes in behavior.

1.8 Heat Equation

Lets start with the Random walk in 1D without size exclusion. If we take 20 walkers and let them start right in the middle of our board of 100 cell length, we expect that in the limit each cell has a 20% chance of inhabitation. In fact after generating the naive mean of 1000 simulations this statement gets empowered. (graph) (deriving heat equation from random walk definition)

2 Introduction

kleiner Test

3 Random Walk

4 Size Exclusion

5 Heat Equation

6 Simulations

7 Stability and Precision

8 Conclusion

9 Outlook

References

- [1] F. Kafka. *Der Prozeß*. SEVERUS Verlag, 2015. URL: <https://books.google.at/books?id=47YtCgAAQBAJ>.
- [2] Franz Kafka. *Die Verwandlung*. Ed. by Ewald Rösch. 1. Aufl. Goldmann ; 7665. [München]: Goldmann, 1999.