Formale
Begriffsanalyse

Springer
Berlin
Heidelberg
New York
Barcelona
Budapest
Hongkong
London
Mailand
Paris
Santa Clara
Singapur
Tokio

Bernhard Ganter · Rudolf Wille

Formale Begriffsanalyse

Mathematische Grundlagen

Mit 100 Abbildungen

Springer

Bernhard Ganter
Institut für Algebra
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Technische Universität Dresden
D-01062 Dresden

Rudolf Wille
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe Allgemeine Algebra und Diskrete Mathematik
Technische Hochschule Darmstadt
D-64289 Darmstadt

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Ganter, Bernhard:
Formale Begriffsanalyse : mathematische Grundlagen / Bernhard Ganter ; Rudolf Wille. - Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Budapest ; Hongkong ; London ; Mailand ; Paris ; Santa Clara ; Singapur ; Tokio : Springer, 1996

NE: Wille, Rudolf:

ISBN-13: 978-3-540-60868-4 e-ISBN-13: 978-3-642-61450-7
DOI: 10.1007/978-3-642-61450-7

Satz: Reproduktionsfertige Autorenvorlage
Umschlaggestaltung: Meta Design plus GmbH, Berlin
SPIN: 10519344 33/3142 - 5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

Garrett Birkhoff
mit seiner anwendungsorientierten Sicht der Verbandstheorie[1] und
Hartmut von Hentig
mit seinem konstruktiv-kritischen Verständis von Wissenschaft[2]
haben die Entstehung der Formalen Begriffsanalyse entscheidend beeinflußt.

---

[1] G. Birkhoff: *Lattice Theory*. Amer. Math. Soc., Providence, 1st edition 1940, 2nd (revised) edition 1948, 3rd (new) edition 1967.

[2] H. von Hentig: *Magier oder Magister? Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß*. Klett, Stuttgart 1972.

Vorwort

Die *Formale Begriffsanalyse* ist ein Gebiet der Angewandten Mathematik, das sich auf eine Mathematisierung von *Begriff* und *Begriffshierarchie* gründet und damit mathematisches Denken für die begriffliche Datenanalyse und Wissensverarbeitung aktiviert.

Das Verständnis von „Begriff", das dabei zugrundeliegt, hat sich in der philosophischen Begriffslehre früh entwickelt und wirkt bis heute fort; es hat unter anderem in den Normen DIN 2330 und DIN 2331 seinen Niederschlag gefunden. In der Mathematik hat es eine besondere Rolle bei der Entstehung der mathematischen Logik im 19. Jahrhundert gespielt, dann aber kaum mehr Bedeutung gehabt. Erst ab 1979 ist es wieder intensiver thematisiert worden. Seither hat die Formale Begriffsanalyse durch eine große Zahl von Beiträgen eine solche Breite erhalten, daß eine systematische Darstellung dringend erforderlich, aber in einem Band schon nicht mehr realisierbar ist.

Das vorliegende Buch konzentriert sich deshalb auf die mathematischen Grundlagen der Formalen Begriffsanalyse, die vornehmlich als ein Stück angewandter Verbandstheorie anzusehen sind. Anhand einer Reihe von Beispielen wird die Wirkungsweise der mathematischen Definitionen und Ergebnisse demonstriert und insbesondere aufgezeigt, wie die Formale Begriffsanalyse zur begrifflichen Entfaltung von Datenkontexten angewendet werden kann. Diese Beispiele haben nicht die Funktion von Fallstudien zur Datenanalyse. Eine ausführliche Behandlung von Verfahren begrifflicher Daten- und Wissensverarbeitung soll in einem eigenen Band erfolgen. Auch die allgemeine Grundlegung der Formalen Begriffsanalyse soll separat abgehandelt werden.

Man kann die Formale Begriffsanalyse durchaus auch bei der Untersuchung des menschlichen Begriffsdenkens einsetzen; das ist dann aber eine Anwendung der mathematischen Methode und Sache der jeweiligen Fachwissenschaft, also z.B. der Psychologie. Der Namensteil „Formal" grenzt ein: Es handelt sich um ein mathematisches Arbeitsgebiet, das zwar aus der Verbindung zu bewährten Auffassungen von „Begriff" seine Verständlichkeit und Bedeutung bezieht, das aber nicht den Anspruch erhebt, seinerseits das Begriffsdenken zu erklären.

Die mathematischen Grundlagen der Formalen Begriffsanalyse werden in sieben Kapiteln abgehandelt. Vorab sind in einem „nullten" Kapitel Elemente der mathematischen Ordnungs- und Verbandstheorie zusammengestellt, die im weiteren benutzt werden. Allerdings werden alle anspruchsvolleren Notationen und Ergebnisse aus diesem Kapitel später neu eingeführt; ein Leser, der weiß, was in der Mathematik unter einem „Verband" verstanden wird, kann dieses Kapitel überspringen.

Das *erste Kapitel* beschreibt den grundlegenden Formalisierungsschritt: Eine elementare Darstellungsform für Daten (die „Kreuztabelle") wird mathematisch definiert („Formaler Kontext"). Es wird dann erklärt, was ein formaler Begriff eines solchen Datenkontextes ist und wie die Gesamtheit aller solchen Begriffe eines Kontextes in ihrer Hierarchie als mathematische

Struktur gedeutet werden kann („Begriffsverband"). Man kann anspruchsvollere Datentypen („mehrwertige Kontexte") zulassen. Diese werden durch einen Interpretationsschritt, begriffliche Skalierung genannt, auf den Grundtyp zurückgeführt.

Das *zweite Kapitel* behandelt die Frage, wie man alle Begriffe eines Datenkontextes bestimmen und übersichtlich in einem Diagramm darstellen kann. Dabei wird auch auf Implikationen und Abhängigkeiten zwischen Merkmalen eingegangen. Im *dritten Kapitel* werden Grundbegriffe einer Strukturtheorie von Begriffsverbänden bereitgestellt, nämlich Teil- und Faktorstrukturen sowie Toleranzrelationen. Ausgearbeitet wird jeweils, wieweit sich diese direkt in den Kontexten beschreiben lassen.

Diese mathematischen Werkzeuge werden dann im *vierten* und *fünften* Kapitel benutzt, um mit Hilfe von Zerlegungs- und Konstruktionsverfahren auch komplexere Begriffsverbände beschreiben zu können. Man kann dabei den Begriffsverband in (möglicherweise überlappende) Teile zerlegen, aber auch das direkte Produkt von Verbänden oder von Kontexten als Zerlegungsprinzip nutzen. Ein weiterer Ansatz ist der der Substitution. Nach den gleichen Prinzipien lassen sich Kontexte und Begriffsverbände zusammensetzen. Als zusätzliches Konstruktionsprinzip beschreiben wir noch eine Möglichkeit, Teile eines Begriffsverbandes zu verdoppeln.

Die in der mathematischen Verbandstheorie untersuchten Struktureigenschaften wie das Distributivgesetz und seine Verallgemeinerungen, aber auch Dimensionsbegriffe, spielen auch in der Formalen Begriffsanalyse eine Rolle. Dies ist im *sechsten Kapitel* abgehandelt. Das *siebente Kapitel* ist schließlich den strukturvergleichenden Abbildungen gewidmet, wobei mehrere Arten von Morphismen zum Zuge kommen. Besondere Aufmerksamkeit gilt dabei den Skalenmaßen, die bei der begrifflichen Skalierung vorkommen.

Wir mußten uns schon aus Platzgründen auf eine knappe Ideenführung beschränken. Deshalb haben wir uns bemüht, am Ende eines jeden Kapitels auf weiterführende Ergebnisse und die betreffende Literatur möglichst vollständig hinzuweisen, haben dabei aber nur solche Beiträge berücksichtigt, die mit dem Thema des Buches, also mit den mathematischen Grundlagen der Formalen Begriffsanalyse, in engem Zusammenhang stehen. Das Indexregister sollte alle im Buch definierten Termini enthalten, darüber hinaus nur einige besonders wichtige Stichwörter. Das Literaturverzeichnis dient zugleich als Autorenregister.

Die Entstehung dieses Buches ist durch zahlreiche Lehrveranstaltungen sowei die zahlreichen Aktivitäten der „Forschungsgruppe Begriffsanalyse" der Technischen Hochschule Darmstadt entscheidend gefördert worden. Im einzelnen ist nur noch schwer auszumachen, welche Unterstützung jeweils von wem geleistet wurde. Deshalb können wir hier nur insgesamt allen denen danken, die zur erfolgreichen Arbeit an diesem Buch beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

0. Ordnungstheoretische Grundlagen

Die Formale Begriffsanalyse gründet sich auf die mathematische Theorie geordneter Mengen, speziell auf die Theorie der vollständigen Verbände. Kenntnisse in diesen Gebieten werden beim Leser des Buches nicht vorausgesetzt. Die mathematischen Grundlagen sind in diesem Kapitel zusammengestellt. Wir mußten uns dabei allerdings auf das Nötigste beschränken; für eine breite Einführung in die Ordnungstheorie war kein Raum. Wir verweisen auf die am Ende dieses Kapitels angegebene Literatur. Allgemein müssen wir voraussetzen, daß der Leser Erfahrung im Umgang mit mathematischen Texten hat: wir verwenden ohne weitere Hilfen die Fachsprache der Mathematik, speziell die Sprache der Mengenlehre.

Im ersten Abschnitt werden geordnete Mengen, im zweiten vollständige Verbände eingeführt. Diese beiden Abschnitte sind für die späteren Kapitel grundlegend. Übersprungen werden können hingegen beim ersten Lesen der dritte Abschnitt, der sich mit Hüllensystemen beschäftigt und ebenso der vierte über Galois-Verbindungen. Vieles von dem, was sie enthalten, taucht später unter anderer Bezeichnung wieder auf, die zweite Hälfte dieses Kapitels zeigt die Verankerung der Grundbegriffe der Formalen Begriffsanalyse in der Ordnungs- und Verbandstheorie. Wir folgen dabei an vielen Stellen der „klassischen“ Darstellung von **Garrett Birkhoff**.

0.1 Geordnete Mengen

Definition 1. Eine **binäre Relation** R zwischen zwei Mengen M und N ist eine Menge von Paaren (m,n) mit $m \in M$ und $n \in N$, also eine Teilmenge der Menge $M \times N$ aller solchen Paare. Statt $(m,n) \in R$ schreiben wir oft mRn. Ist $N = M$, so sprechen wir von einer **binären Relation auf der Menge** M. R^{-1} bezeichnet die zu R **inverse Relation**, dies ist die Relation zwischen N und M mit $nR^{-1}m :\Leftrightarrow mRn$. $\Diamond$

Definition 2. Eine binäre Relation R auf einer Menge M heißt **Ordnungsrelation** (oder kurz **Ordnung**), falls sie für alle Elemente $x, y, z \in M$ folgende Bedingungen erfüllt:

1. xRx (Reflexivität)
2. xRy und $x \neq y \Rightarrow$ nicht yRx (Antisymmetrie)
3. xRy und $yRz \Rightarrow xRz$ (Transitivität)

Für R wird häufig das Zeichen $\leq$ benutzt (für R^{-1} dann das Zeichen $\geq$), und man schreibt $x < y$ für $x \leq y$ und $x \neq y$. Wie gewohnt lesen wir $x \leq y$ als „x ist kleiner oder gleich y“, usw. Eine **geordnete Menge** ist ein Paar $(M, \leq)$, wobei M eine Menge und $\leq$ eine Ordnungsrelation auf M ist.[1] ◊

Beispiele geordneter Mengen sind: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der üblichen $\leq$-Relation, aber auch der Raum $\mathbb{R}^n$ mit

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n) :\iff x_i \leq y_i \text{ für } i = 1, 2, \ldots n;$$

die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der Teilerrelation $|$; die *Potenzmenge* $\mathfrak{P}(X)$ aller Teilmengen einer beliebigen Menge X mit der Mengeninklusion. Auch die Gleichheitsrelation $=$ ist ein (triviales) Beispiel einer Ordnung. Viele weitere Beispiele werden im folgenden besprochen.

Definition 3. Man nennt a einen **unteren Nachbarn** von b, falls $a < b$ ist und kein Element c existiert mit $a < c < b$. Dann ist b ein **oberer Nachbar** von a, und man schreibt $a \prec b$. ◊

Jede endliche geordnete Menge $(M, \leq)$ läßt sich durch ein **Liniendiagramm** darstellen (in der Literatur oft auch *Hasse-Diagramm* genannt). Die Elemente von M werden durch kleine Kreise in der Anschauungsebene wiedergegeben. Sind $x, y \in M$ mit $x \prec y$, so wird der y entsprechende Kreis oberhalb des x entsprechenden Kreises aufgetragen (seitliche Verschiebung ist zugelassen), und es werden die beiden Kreise durch eine Linie verbunden. Von einem solchen Diagramm ist die Ordnungsrelation folgendermaßen abzulesen: $x < y$ gilt genau dann, wenn der Kreis, der y darstellt, von dem x darstellenden Kreis durch einen aufsteigenden Linienzug erreichbar ist. Abbildung 0.1 gibt Liniendiagramme für alle geordneten Mengen mit bis zu vier Elementen an.

Definition 4. Zwei Elemente x, y einer geordneten Menge $(M, \leq)$ heißen **vergleichbar**, falls $x \leq y$ oder $y \leq x$, sonst **unvergleichbar**. Eine Teilmenge von $(M, \leq)$, in der je zwei Elemente vergleichbar sind, heißt eine **Kette**; eine Teilmenge, in der je zwei Elemente unvergleichbar sind, eine **Antikette**. Die **Weite** einer endlichen geordneten Menge $(M, \leq)$ ist definiert als die maximale Mächtigkeit einer Antikette in $(M, \leq)$, für eine beliebige geordnete Menge $(M, \leq)$ als das Supremum der Mächtigkeiten von Antiketten in $(M, \leq)$. Ähnlich definiert man die **Länge** als das Supremum der Mächtigkeiten von Ketten in $(M, \leq)$, minus Eins. ◊

---

[1] In der Literatur wird häufig statt von Ordnung bzw. geordneter Menge von *Halbordnung* bzw. *halb-* oder *teilweise geordneter Menge* gesprochen.

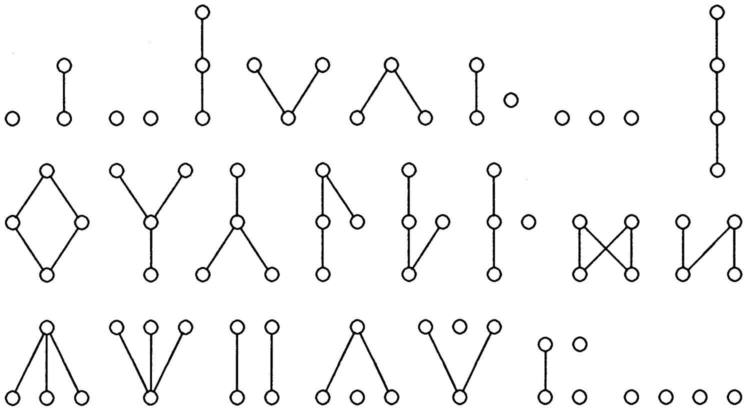
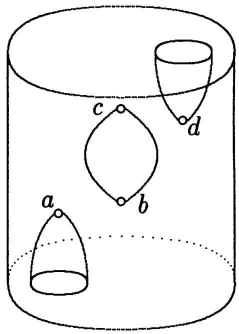


Abbildung 0.1. Liniendiagramme geordneter Mengen mit bis zu vier Elementen

Definition 5. Ist $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und sind a, b, c, d Elemente von M mit $b \leq c$, so definiert man das **Intervall**

$$[b, c] := \{x \in M \mid b \leq x \leq c\}.$$



Man nennt

$$(a] := \{x \in M \mid x \leq a\}$$

ein **Hauptideal** und

$$[d) := \{x \in M \mid x \geq d\}$$

einen **Hauptfilter**.

$a \prec b$ ist damit also gleichbedeutend zu $a < b$ und $[a, b] = \{a, b\}$. $\Diamond$

Definition 6. Eine Abbildung $\varphi : M \longrightarrow N$ zwischen zwei geordneten Mengen $(M, \leq)$ und $(N, \leq)$ heißt **ordnungserhaltend**, wenn für alle $x, y \in M$

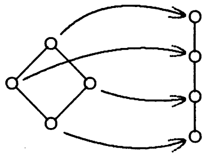
$$x \leq y \Rightarrow \varphi x \leq \varphi y$$

gilt. Erfüllt φ darüberhinaus auch die Umkehrung

$$x \leq y \Leftarrow \varphi x \leq \varphi y,$$

so wird φ **Ordnungseinbettung** genannt. φ ist dann zwangsläufig injektiv. Eine bijektive Ordnungseinbettung heißt **(Ordnungs-) Isomorphismus**. $\Diamond$

Nicht jede bijektive ordnungserhaltende Abbildung ist ein Ordnungsisomorphismus, wie das Beispiel zeigt. Um von einer ordnungserhaltenden Abbildung φ nachzuweisen, daß sie ein Isomorphismus ist, zeigt man gewöhnlich, daß die Umkehrabbildung φ^{-1} existiert und ebenfalls ordnungserhaltend ist.



Bijektiv ordnungserhaltend, aber kein Isomorphismus

Definition 7. Das (direkte) **Produkt** zweier geordneter Mengen $(M_1, \leq)$ und $(M_2, \leq)$ ist definiert als die geordnete Menge $(M_1 \times M_2, \leq)$ mit

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ und } x_2 \leq y_2.$$

Die Definition des Produktes läßt sich auf beliebig viele Faktoren erweitern: Ist T eine Indexmenge und sind $(M_t, \leq)$, $t \in T$, geordnete Mengen, so ist

$$\bigtimes_{t \in T} (M_t, \leq) := (\bigtimes_{t \in T} M_t, \leq) \text{ mit}$$

$$(x_t)_{t \in T} \leq (y_t)_{t \in T} :\Longleftrightarrow x_t \leq y_t \text{ für alle } t \in T. \qquad \Diamond$$

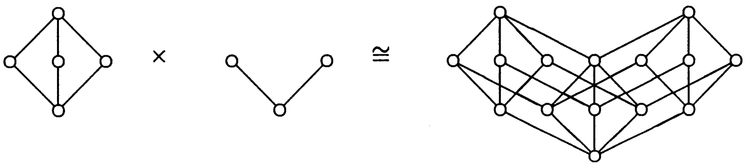


Abbildung 0.2. Ein Beispiel eines Produkts zweier geordneter Mengen

Definition 8. Um die **kardinale Summe** oder **disjunkte Vereinigung** zweier geordneter Mengen definieren zu können, führen wir zunächst die Schreibweise

$$\dot{M}_t := \{t\} \times M_t$$

ein; die Mengen $\dot{M}_1$ und $\dot{M}_2$ sind dann disjunkte Kopien von M_1 und M_2. Wir definieren

$$(M_1, \leq) + (M_2, \leq) := (\dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \leq),$$

wobei die Ordnungsrelation folgendermaßen erklärt ist:

$$(s, a) \leq (t, b) :\Longleftrightarrow s = t \text{ und } a \leq b \text{ in } M_s.$$

Auch diese Definition kann mühelos auf den Fall beliebig vieler Summanden verallgemeinert werden. $\Diamond$

Das Dualitätsprinzip für geordnete Mengen. Die zu einer Ordnungsrelation $\leq$ inverse Relation $\geq$ ist ebenfalls eine Ordnungsrelation. Sie wird die zu $\leq$ **duale** Ordnung genannt. Ein Liniendiagramm der dualen geordneten Menge $(M, \leq)^d := (M, \geq)$ erhält man aus einem von $(M, \leq)$ durch Spiegelung an einer horizontalen Geraden. Ist $(M, \leq) \cong (N, \leq)^d$, so heißen die beiden Ordnungen **dual isomorph**.

Zu einer ordnungstheoretischen Aussage A, die außer rein logischen Bestandteilen nur das Zeichen $\leq$ enthält, bekommt man die duale Aussage A^d, wenn man in A das Zeichen $\leq$ durch $\geq$ ersetzt. A gilt genau dann in einer geordneten Menge, wenn A^d in der dualen geordneten Menge gilt. Das Dualitätsprinzip wird zur Vereinfachung von Definitionen und Beweisen eingesetzt. Behauptet ein Lehrsatz zwei zueinander duale Aussagen, so wird in der Regel nur die eine bewiesen, die andere ergibt sich „dual", d.h. mit dem gleichen Beweis für die duale Ordnung.

Definition 9. Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und A eine Teilmenge von M. Eine **untere Schranke** von A ist ein Element s von M mit $s \leq a$ für alle $a \in A$. Dual wird eine **obere Schranke** von A erklärt. Gibt es in der Menge aller unteren Schranken von A eine größte, so nennt man diese das **Infimum** von A und bezeichnet sie mit $\inf A$ oder $\bigwedge A$; dual wird eine kleinste obere Schranke **Supremum** genannt und mit $\sup A$ oder $\bigvee A$ bezeichnet. Ist $A = \{x, y\}$, so schreibt man für $\inf A$ auch $x \wedge y$ und für $\sup A$ auch $x \vee y$. Für Infimum und Supremum sind auch die Bezeichnungen **Schnitt** und **Verbindung** gebräuchlich. $\Diamond$

0.2 Vollständige Verbände

Definition 10. Eine geordnete Menge $\boldsymbol{V} := (V, \leq)$ ist ein **Verband**, wenn zu je zwei Elementen x und y in V stets das Supremum $x \vee y$ und das Infimum $x \wedge y$ existieren. $\boldsymbol{V}$ heißt **vollständiger Verband**, falls zu jeder Teilmenge X von V das Supremum $\bigvee X$ und das Infimum $\bigwedge X$ existieren. Jeder vollständige Verband $\boldsymbol{V}$ hat ein größtes Element, nämlich $\bigvee V$, dieses wird das **Einselement** das Verbandes genannt und mit $\mathbf{1}_V$ bezeichnet. Dual heißt das kleinste Element $\mathbf{0}_V$ **Nullelement**. $\Diamond$

Die Definition des vollständigen Verbandes verlangt, daß zu jeder Teilmenge X ein Supremum und ein Infimum existieren muß, also auch für $X = \emptyset$. Man hat $\bigwedge \emptyset = \mathbf{1}_V$ und $\bigvee \emptyset = \mathbf{0}_V$, woraus insbesondere $V \neq \emptyset$ für jeden vollständigen Verband folgt. Jeder nichtleere endliche Verband ist ein vollständiger Verband.

Aus den Verbandsoperationen Infimum und Supremum kann die Ordnungsrelation wiedergewonnen werden durch

$$x \leq y \iff x = x \wedge y \iff x \vee y = y.$$

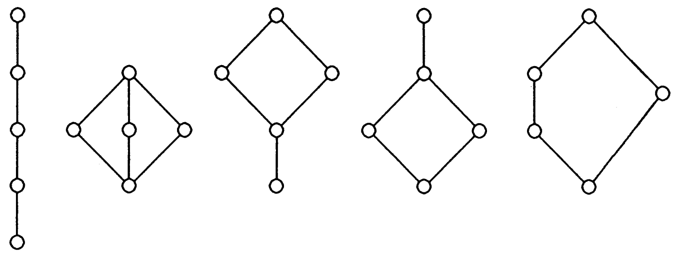


Abbildung 0.3. Liniendiagramme der Verbände mit fünf Elementen.

Ist T eine Indexmenge und $X := \{x_t \mid t \in T\}$ eine Teilmenge von V, so schreiben wir statt $\bigvee X$ auch $\bigvee_{t\in T} x_t$ und statt $\bigwedge X$ auch $\bigwedge_{t\in T} x_t$. Die Supremum- bzw. Infimumbildung ist assoziativ. Der vertraute Spezialfall des Assoziativgesetzes, also $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ bzw. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ läßt sich wie folgt verallgemeinern: Ist $\{X_t \mid t \in T\}$ eine Menge von Teilmengen von V, so ist

$$\bigvee_{t\in T}\left(\bigvee X_t\right) = \bigvee\left(\bigcup_{t\in T} X_t\right) \quad \text{und dual} \quad \bigwedge_{t\in T}\left(\bigwedge X_t\right) = \bigwedge\left(\bigcup_{t\in T} X_t\right).$$

Das Dualitätsprinzip für Verbände. Die Definitionen des Verbandes bzw. des vollständigen Verbandes sind selbstdual: Ist $(V,\leq)$ ein (vollständiger) Verband, so auch $(V,\leq)^d = (V,\geq)$. Das Dualitätsprinzip für geordnete Mengen überträgt sich daher auf Verbände: Aus einer verbandstheoretischen Aussage gewinnt man die dazu duale, indem man die Symbole $\leq, \vee, \wedge, \bigvee, \bigwedge, 0_V, 1_V$ usw. ersetzt durch $\geq$, $\wedge, \vee, \bigwedge, \bigvee, 1_V, 0_V$ usw.

Hilfssatz 1. *Eine geordnete Menge, in der zu jeder Teilmenge das Infimum existiert, ist ein vollständiger Verband.*

Beweis. Sei X eine beliebige Teilmenge der geordneten Menge. Wir haben zu zeigen, daß das Supremum von X existiert. Die Menge S aller oberen Schranken von X besitzt ein Infimum s (selbst dann, wenn S leer ist). Jedes Element von X ist eine untere Schranke von s, ist also $\leq s$. Damit ist s selbst eine obere Schranke von X und folglich das Supremum. □

Beispiele von Verbänden. 1) Für jede Menge M ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$, also die Menge aller Teilmengen von M, durch die Mengeninklusion $\subseteq$ geordnet, und $(\mathfrak{P}(M),\subseteq)$ ist ein vollständiger Verband. Die Verbandsoperationen Supremum und Infimum sind hier Mengenvereinigung und Mengendurchschnitt.

2) Jedes abgeschlossene reelle Intervall $[a,b]$ mit der natürlichen Ordnung bildet einen vollständigen Verband $([a,b],\leq)$ mit dem üblichen Infimum bzw. Supremum als Verbandsoperationen. Hingegen ist die geordnete Menge

$(\mathbb{R}, \leq)$ zwar ein Verband, aber nicht vollständig: Es fehlt ein größtes und ein kleinstes Element.

Weitere Beispiele vollständiger Verbände aus der Mathematik geben wir in Abschnitt 0.3.

Definition 11. Für ein Element v eines vollständigen Verbandes $\boldsymbol{V}$ definieren wir

$$\begin{array}{rrcl} & v_* & := & \bigvee\{x \in V \mid x < v\} \\ \text{und} & v^* & := & \bigwedge\{x \in V \mid v < x\}. \end{array}$$

Wir nennen v **$\bigvee$-irreduzibel**[2], wenn $v \neq v_*$ ist, wenn also v nicht als Supremum echt kleinerer Elemente dargestellt werden kann. v_* ist dann der einzige untere Nachbar von v. Dual nennen wir v **$\bigwedge$-irreduzibel**[3], falls $v \neq v^*$ ist. $J(\boldsymbol{V})$ steht für die Menge aller $\bigvee$-irreduziblen Elemente und $M(\boldsymbol{V})$ für die der $\bigwedge$-irreduziblen. Eine Menge $X \subseteq V$ heißt **supremum-dicht** in V, falls jedes Element von V als Supremum einer Teilmenge von X dargestellt werden kann, und dual **infimum-dicht**, falls für alle $v \in V$ gilt $v = \bigwedge\{x \in X \mid v \leq x\}$. $\Diamond$

Hilfssatz 2. *Ein Element v eines endlichen Verbandes ist genau dann $\bigvee$-irreduzibel, wenn es genau einen unteren Nachbarn hat und genau dann $\bigwedge$-irreduzibel, wenn es genau einen oberen Nachbarn hat. Jede supremum-dichte Teilmenge enthält alle $\bigvee$-irreduziblen Elemente und jede infimum-dichte alle $\bigwedge$-irreduziblen. In einem endlichen Verband $\boldsymbol{V}$ ist umgekehrt die Menge $J(\boldsymbol{V})$ supremum-dicht und $M(\boldsymbol{V})$ infimum-dicht.*

Beweis. v ist genau dann $\bigvee$-irreduzibel, wenn $v_* \neq v$ ist. Dies wiederum ist gleichbedeutend dazu, daß v_* das größte unter allen Elementen ist, die kleiner als v sind, insbesondere also der einzige untere Nachbar von v ist. Dual schließt man für $\bigwedge$-irreduzible Elemente. Die zweite Aussage des Hilfssatzes ist trivial, die dritte beweist man induktiv: Jedes Element v, welches nicht selbst $\bigvee$-irreduzibel ist, ist Supremum echt kleinerer Elemente. Sind diese nun Suprema $\bigvee$-irreduzibler Elemente, so auch v. $\square$

Es lassen sich leicht unendliche vollständige Verbände angeben, die weder $\bigvee$-irreduzible noch $\bigwedge$-irreduzible Elemente enthalten, so z.B. das reelle Intervall $[0, 1]$ mit der natürlichen Ordnung. Stets $\bigvee$-irreduzibel sind (sofern vorhanden) die oberen Nachbarn des Nullelements, genannt die **Atome** des Verbandes; stets $\bigwedge$-irreduzibel sind die **Koatome**, das sind die unteren Nachbarn des Einselementes. Ein vollständiger Verband, in dem jedes Element ein Supremum von Atomen ist, heißt **atomistisch**.

Definition 12. Eine Teilmenge U eines vollständigen Verbandes $\boldsymbol{V}$, die gegen Suprema abgeschlossen ist, für die also gilt

[2] lies: **supremum-irreduzibel**
[3] lies: **infimum-irreduzibel**

$$T \subseteq U \Rightarrow \bigvee T \in U$$

ist ein $\bigvee$-**Unterhalbverband** von V. Dual nennt man eine gegen Infima abgeschlossene Teilmenge einen $\bigwedge$-**Unterhalbverband**. Eine sowohl gegen Suprema als auch gegen Infima abgeschlossene Teilmenge ist ein **vollständiger Unterverband**. $\diamondsuit$

Definition 13. Eine Abbildung $\varphi : V \longrightarrow W$ zwischen zwei vollständigen Verbänden $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$ heißt **supremum-erhaltend**, wenn für jede Teilmenge X von V

$$\varphi \bigvee X = \bigvee \varphi(X)$$

gilt[4]. Ein anderer Name dafür ist $\bigvee$-**Morphismus**, und dual: **infimumerhaltende Abbildung**, $\bigwedge$-**Morphismus**. Ist φ sowohl supremum- als auch infimum-erhaltend, so ist φ ein **vollständiger (Verbands-) Homomorphismus** oder auch **Vollhomomorphismus**. $\diamondsuit$

Jede supremum-erhaltende Abbildung, also erst recht jeder vollständige Homomorphismus, ist ordnungserhaltend. Umgekehrt ist jeder Ordnungsisomorphismus zwischen vollständigen Verbänden automatisch auch ein **Verbandsisomorphismus**, d.h. ein bijektiver Vollhomomorphismus.

0.3 Hüllenoperatoren

Definition 14. Ein **Hüllensystem** auf einer Menge G ist eine Menge von Teilmengen, die G enthält und gegen Durchschnitte abgeschlossen ist. Formal: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(G)$ ist ein Hüllensystem, falls $G \in \mathfrak{A}$ ist und

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcap \mathfrak{X} \in \mathfrak{A}$$

gilt. Ein **Hüllenoperator** φ auf G ist eine Abbildung, die jeder Teilmenge $X \subseteq G$ eine **Hülle** $\varphi X \subseteq G$ zuordnet, wobei gilt:

1. $X \subseteq Y \Rightarrow \varphi X \subseteq \varphi Y$ (Monotonie)
2. $X \subseteq \varphi X$ (Extensität)
3. $\varphi\varphi X = \varphi X$ (Idempotenz)

$\diamondsuit$

Hüllensystem und Hüllenoperator sind eng miteinander verwandt, wie der folgende Satz zeigt:

[4] $\varphi(X)$ steht für $\{\varphi x \mid x \in X\}$.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{A}$ ein Hüllensystem auf G, so definiert*

$$\varphi_{\mathfrak{A}} X := \bigcap \{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\}$$

einen Hüllenoperator auf G. Umgekehrt ist die Menge

$$\mathfrak{A}_\varphi := \{\varphi X \mid X \subseteq G\}$$

aller Hüllen eines Hüllenoperators φ stets ein Hüllensystem, und es gilt

$$\varphi_{\mathfrak{A}_\varphi} = \varphi \quad \textit{sowie} \quad \mathfrak{A}_{\varphi_{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}.$$

Beweis.

- $\varphi_{\mathfrak{A}}$ ist ein Hüllenoperator: Aus $X \subseteq Y$ folgt

  $$\{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\} \supseteq \{A \in \mathfrak{A} \mid Y \subseteq A\},$$

  also aufgrund der Monotonie von $\cap$

  $$\varphi_{\mathfrak{A}} X = \bigcap \{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\} \subseteq \bigcap \{A \in \mathfrak{A} \mid Y \subseteq A\} = \varphi_{\mathfrak{A}} Y.$$

  Die Extensität ist trivial, Idempotenz: Nach der Definition von $\varphi_{\mathfrak{A}}$ enthält jedes Element von $\mathfrak{A}$, welches X enthält, auch $\varphi_{\mathfrak{A}} X$, und umgekehrt.
- $\mathfrak{A}_\varphi$ ist ein Hüllensystem: Sei $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}_\varphi$. Wegen der Extensität von φ ist $\bigcap \mathfrak{X} \subseteq \varphi(\bigcap \mathfrak{X})$. Mit Monotonie und Idempotenz folgt aus $X \in \mathfrak{X}$ stets $\varphi(\bigcap \mathfrak{X}) \subseteq \varphi X = X$, was $\varphi(\bigcap \mathfrak{X}) \subseteq \bigcap \mathfrak{X}$ nach sich zieht.
- $X \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow X = \bigcap \{A \in \mathfrak{A} \mid X \subseteq A\} \Leftrightarrow \varphi_{\mathfrak{A}} X = X \Leftrightarrow X \in \mathfrak{A}_{\varphi_{\mathfrak{A}}}$.
- Für $A \in \mathfrak{A}_\varphi$ ist $X \subseteq A$ gleichbedeutend zu $\varphi X \subseteq A$. Also ist $\varphi_{\mathfrak{A}_\varphi} X = \bigcap \{A \in \mathfrak{A}_\varphi \mid X \subseteq A\} = \bigcap \{A \in \mathfrak{A}_\varphi \mid \varphi X \subseteq A\} = \varphi X$, da $\varphi X \in \mathfrak{A}_\varphi$.

$\square$

Jedes Hüllensystem $\mathfrak{A}$ kann also als die Menge der Hüllen eines Hüllenoperators verstanden werden. Wir nennen daher die Elemente von $\mathfrak{A}$ ebenfalls Hüllen.

Hilfssatz 3. *Ist $\mathfrak{A}$ ein Hüllensystem, so ist $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ ein vollständiger Verband mit $\bigwedge \mathfrak{X} = \bigcap \mathfrak{X}$ und $\bigvee \mathfrak{X} = \varphi_{\mathfrak{A}} \bigcup \mathfrak{X}$ für alle $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$. Umgekehrt ist jeder vollständige Verband isomorph zum Verband aller Hüllen eines Hüllensystems.*

Beweis. Daß $\bigcap \mathfrak{X}$ das Infimum und damit (vergleiche Hilfssatz 1) $\varphi_{\mathfrak{A}} \bigcup \mathfrak{X}$ das Supremum von $\mathfrak{X}$ darstellt, ist offensichtlich. Ist $(V, \leq)$ ein vollständiger Verband, so ist das System $\{(x] \mid x \in V\}$ ein Hüllensystem, denn für jede Teilmenge $T \subseteq V$ gilt $\bigcap_{y \in T} (y] = (\bigwedge T]$. $\square$

Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(G)$, für das $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ ein vollständiger Verband ist, braucht allerdings kein Hüllensystem zu sein. Solche Mengenfamilien sind vielmehr genau die Bildmengen von monotonen, idempotenten Operatoren.

Beispiele. Bei vielen mathematischen Strukturen ist das System der Unterstrukturen ein Hüllensystem. Die Potenzmenge ist natürlich ein Hüllensystem, weitere wichtige Beispiele sind:

(1) **Untervektorräume:** Für einen Vektorraum V ist das System $\mathfrak{U}(V)$ aller Untervektorräume ein Hüllensystem. Den vollständigen Verband $(\mathfrak{U}(V), \subseteq)$ nennt man den **Untervektorraumverband** von V; in diesem Verband ist $U_1 \vee U_2 = U_1 + U_2$ und allgemeiner

$$\begin{aligned}\bigvee \mathfrak{X} = \; & \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n \mid \text{es gibt } U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{X} \\ & \qquad \text{mit } u_i \in U_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}\}.\end{aligned}$$

(2) **Untergruppen:** Für eine Gruppe G ist die Menge $\mathfrak{U}(G)$ aller Untergruppen von G ein Hüllensystem. Den vollständigen Verband $(\mathfrak{U}(G), \subseteq)$ nennt man **Untergruppenverband** von G; in diesem Verband ist, falls G abelsch ist, $U_1 \vee U_2 = U_1 + U_2$ und allgemeiner

$$\begin{aligned}\bigvee \mathfrak{X} = \; & \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n \mid \text{es gibt } U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{X} \\ & \qquad \text{mit } u_i \in U_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}\}.\end{aligned}$$

(3) **abgeschlossene Mengen:** Für einen topologischen Raum T (z.B. für $\mathbb{R}^n$) ist die Menge $\mathfrak{A}(T)$ aller abgeschlossenen Mengen von T ein Hüllensystem. In dem vollständigen Verband $(\mathfrak{A}(T), \subseteq)$ ist das Supremum gleich dem topologischen Abschluß der Vereinigung, also

$$\bigvee \mathfrak{X} = \overline{\bigcup \mathfrak{X}}.$$

(4) **konvexe Mengen:** Für den $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ aller konvexen Teilmengen ein Hüllensystem, also $(\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ ein vollständiger Verband; in diesem Verband ist das Supremum die konvexe Hülle der Vereinigung.

(5) **Seiten von Polyedern:** Für ein Polyeder P ist die Menge $\mathfrak{S}(P)$ aller Seiten von P ein Hüllensystem. Den vollständigen Verband $(\mathfrak{S}(P), \subseteq)$ nennt man den **Seitenverband** von P; für diese Verbände gibt es keine allgemeine „gute" Beschreibung der Suprema.

(6) **Äquivalenzrelationen:** Für eine Menge M ist die Menge $\mathfrak{E}(M)$ aller Äquivalenzrelationen auf M ein Hüllensystem auf $M \times M$. Den vollständigen Verband $(\mathfrak{E}(M), \subseteq)$ nennt man den **Äquivalenzrelationenverband** von M; in diesem Verband ist

$$\begin{aligned}\bigvee \mathfrak{X} = \; & \{(a, b) \in M \times M \mid \text{ es gibt } R_1, \ldots, R_n \in \mathfrak{X} \text{ und} \\ & \qquad (x_i, x_{i+1}) \in R_i \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \\ & \qquad\quad \text{mit } a = x_1 \text{ und } b = x_{n+1}\}.\end{aligned}$$

In der Verbandstheorie werden solche Verbände auf ihre strukturellen Eigenschaften hin untersucht. Einige wichtige solcher Eigenschaften sollen hier kurz erwähnt werden, weitere findet man in §6.

Definition 15. Ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$ heißt

- **distributiv**, falls für alle $x, y, z \in V$ die folgenden Distributivgesetze erfüllt sind:

$$\begin{array}{lrcl} (\mathbf{D}_\wedge) & x \wedge (y \vee z) & = & (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ (\mathbf{D}_\vee) & x \vee (y \wedge z) & = & (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{array}$$

- **vollständig distributiv**, wenn die folgende Verallgemeinerung der beiden Distributivgesetze auf beliebige Infima und Suprema für alle Indexmengen $S, T \neq \emptyset$ erfüllt ist:

$$(\mathbf{D}_{\bigvee\bigwedge}) \qquad \bigwedge\left\{\bigvee\{x_{s,t} \mid t \in T\} \mid s \in S\right\} = \bigvee\left\{\bigwedge\{x_{s,\varphi s} \mid s \in S\} \mid \varphi : S \to T\right\}.$$

- **modular**, wenn er das folgende Gesetz für alle x, y und z erfüllt:

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

◊

Distributivität und Modularität sind **selbstduale** Eigenschaften: erfüllt sie ein Verband $\boldsymbol{V}$, dann auch $\boldsymbol{V}^d$. Alle angegebenen Eigenschaften übertragen sich auf vollständige Unterverbände. Potenzmengenverbände sind vollständig distributiv, Untervektorraumverbände sind modular.

Für den Spezialfall $S := \{0, 1\}$, $x_{0,t} := x$ und $x_{1,t} := x_t$ für alle $t \in T$ erhält man aus der vollständigen Distributivität das schwächere Gesetz

$$(\mathbf{D}_{\wedge\bigvee}) \qquad x \wedge \bigvee_{t \in T} x_t = \bigvee_{t \in T} (x \wedge x_t).$$

Das duale Gesetz $(\mathbf{D}_{\vee\bigwedge})$ gilt im Verband der abgeschlossenen Mengen jedes topolgischen Raumes, und $(\mathbf{D}_{\wedge\bigvee})$ gilt im Verband aller offenen Mengen. Diese Verbände sind gewöhnlich nicht vollständig distributiv.

0.4 Galois-Verbindungen

Definition 16. Für zwei geordnete Mengen $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ seien

$$\varphi : P \longrightarrow Q \text{ und } \psi : Q \longrightarrow P$$

Abbildungen. Ein solches Abbildungspaar wird eine **Galois-Verbindung** zwischen den geordneten Mengen genannt, falls gilt:

1. $p_1 \leq p_2 \Rightarrow \varphi p_1 \geq \varphi p_2$
2. $q_1 \leq q_2 \Rightarrow \psi q_1 \geq \psi q_2$

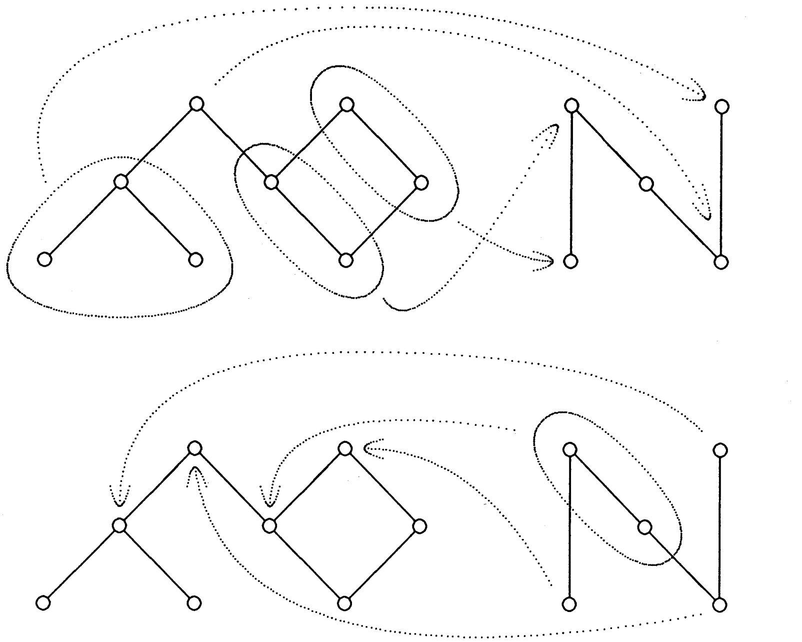


Abbildung 0.4. Beispiel einer Galoisverbindung.

3. $p \leq \psi\varphi p$ und $q \leq \varphi\psi q$

Die beiden Abbildungen nennt man zueinander **dual adjungiert**. $\Diamond$

Hilfssatz 4. *Ein Paar* (φ, ψ) *von Abbildungen ist genau dann eine Galois-Verbindung, wenn gilt:*

4. $p \leq \psi q \Leftrightarrow q \leq \varphi p$.

Beweis. Aus $p \leq \psi q$ folgt mit 1) $\varphi p \geq \varphi\psi q$ und mit 3) $\varphi p \geq q$, also die eine Richtung von 4). Die andere ergibt sich symmetrisch. Umgekehrt folgt aus $\varphi p \leq \varphi p$ mit 4) $p \leq \psi\varphi p$, also 3). Aus $p_1 \leq p_2$ leitet man damit $p_1 \leq \psi\varphi p_2$ ab, woraus man mit 4) $\varphi p_2 \leq \varphi p_1$ erhält. $\square$

Hilfssatz 5. *Für jede Galois-Verbindung* (φ, ψ) *gilt*

$$\varphi = \varphi\psi\varphi \text{ und } \psi = \psi\varphi\psi.$$

Beweis. Mit $q = \varphi p$ erhält man aus 3) $\varphi p \leq \varphi\psi\varphi p$ und aus $p \leq \psi\varphi p$ mit 1) $\varphi p \geq \varphi\psi\varphi p$. $\square$

Die Frage, unter welchen Bedingungen eine gegebene Abbildung φ zu einer Galoisverbindung ergänzt werden kann, beantwortet der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 6. *Eine Abbildung*

$$\varphi : (M, \leq) \longrightarrow (N, \leq)$$

zwischen geordneten Mengen hat genau dann eine Dualadjungierte, wenn das Urbild jedes Hauptfilters ein Hauptideal ist. Die Dualadjungierte ist eindeutig.

Beweis. Für $y \in N$ ist das Urbild von $[y)$ gleich $\{x \in M \mid y \leq \varphi x\}$. Ist ψ zu φ dual adjungiert, so gilt nach Hilfssatz 4

$$\{x \in M \mid y \leq \varphi x\} = \{x \in M \mid x \leq \psi y\} = (\psi y].$$

Dies zeigt auch die Eindeutigkeit von ψ. Umgekehrt können wir ψ durch

$$(\psi y] := \varphi^{-1}([y)) = \{x \in M \mid y \leq \varphi x\}$$

definieren und erhalten dann $x \leq \psi y \Leftrightarrow y \leq \varphi x$, was nach dem Hilfssatz Galois-Verbindungen charakterisiert. □

Für den Fall, daß die beiden geordneten Mengen vollständige Verbände sind, kann die Charakterisierung noch verbessert werden:

Hilfssatz 7. *Eine Abbildung*

$$\varphi : (V, \leq) \longrightarrow (W, \leq)$$

zwischen vollständigen Verbänden besitzt genau dann eine Dualadjungierte, wenn

$$\varphi \bigvee_{t \in T} x_t = \bigwedge_{t \in T} \varphi x_t$$

für $x_t \in V$ gilt.

Beweis. Ist ψ zu φ dual adjungiert, so gilt nach Hilfssatz 4

$$\begin{aligned} y \leq \bigwedge_{t \in T} \varphi x_t \quad &\Leftrightarrow \quad y \leq \varphi x_t \text{ für alle } t \in T \\ &\Leftrightarrow \quad x_t \leq \psi y \text{ für alle } t \in T \\ &\Leftrightarrow \quad \bigvee_{t \in T} x_t \leq \psi y \\ &\Leftrightarrow \quad y \leq \varphi \bigvee_{t \in T} x_t. \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt $\varphi \bigvee_{t \in T} x_t = \bigwedge_{t \in T} \varphi x_t$, dann erfüllt φ sicher die Bedingung 1) aus Definition 16. Definiert man nun $\psi y := \bigvee\{x \in V \mid y \leq \varphi x\}$ für $y \in W$, so ergibt sich die Bedingung 2) unmittelbar, und ebenso der erste Teil von 3). Für $y \in W$ folgt $\varphi\psi y = \varphi \bigvee\{x \in V \mid y \leq \varphi x\} = \bigwedge\{\varphi x \mid y \leq \varphi x\} \geq y$, also 3). Somit ist (φ, ψ) eine Galois-Verbindung. □

Besonders interessiert uns der Spezialfall einer Galois-Verbindung zwischen zwei Potenzmengenverbänden. Sind M und N zwei Mengen, und ist φ eine Abbildung, die jeder Teilmenge A von M eine Teilmenge φA von N zuordnet, sowie ψ eine Abbildung von $\mathfrak{P}(N)$ nach $\mathfrak{P}(M)$ derart, daß die Bedingungen 1), 2) und 3) aus Definition 16 erfüllt sind (die Ordnung ist die Mengeninklusion $\subseteq$), dann sprechen wir kurz von einer **Galois-Verbindung zwischen M und N**. Den Zusammenhang zu den Hüllenoperatoren stellt der folgende Hilfssatz heraus.

Hilfssatz 8. *Die Abbildung $A \mapsto \psi\varphi A$ ist ein Hüllenoperator auf M und die Abbildung $B \mapsto \varphi\psi B$ ein Hüllenoperator auf N. Die Abbildungen φ bzw. ψ definieren duale Isomorphismen zwischen den zugehörigen Hüllensystemen.*

Beweis. Monotonie und Extensität der Abbildungen folgen unmittelbar aus der Definition der Galois-Verbindung, die Idempotenz aus Hilfssatz 5. Ebenfalls diesem Hilfssatz entnehmen wir, daß die Hüllen in M genau die Mengen der Form $\psi B, B \subseteq N$, und die in N genau die der Form $\varphi A, A \subseteq M$ sind. Die Abbildungen $\psi B \mapsto \varphi\psi B$ bzw. $\varphi A \mapsto \psi\varphi A$ sind ordnungsumkehrend und nach Hilfssatz 5 zueinander invers, also bijektiv. □

Galois-Verbindungen zwischen Potenzmengenverbänden stehen in engem Zusammenhang zu binären Relationen zwischen den Grundmengen. Dies zeigt sich im nächsten Hilfssatz, für den wir zuvor eine Schreibweise einführen.

Definition 17. Ist $R \subseteq M \times N$ eine Relation, so schreiben wir

$$\begin{array}{lrcll} & X^R & := & \{y \in N \mid xRy \text{ für alle } x \in X\} & \text{für } X \subseteq M \\ \text{und} & Y^R & := & \{x \in M \mid xRy \text{ für alle } y \in Y\} & \text{für } Y \subseteq N. \end{array}$$

◊

Da wir nicht vorausgesetzt haben, daß M und N disjunkt sind, erlaubt diese Schreibweise mißverständliche Formulierungen, die man aber leicht vermeiden kann.

Satz 2. *Zu jeder binären Relation $R \subseteq M \times N$ wird durch*

$$\begin{array}{lrcll} & \varphi_R X & := & X^R & (= \{y \in N \mid xRy \textit{ für alle } x \in X\}) \\ \textit{und} & \psi_R Y & := & Y^R & (= \{x \in M \mid xRy \textit{ für alle } y \in Y\}) \end{array}$$

eine Galois-Verbindung (φ_R, ψ_R) zwischen M und N definiert. Ist umgekehrt (φ, ψ) eine Galois-Verbindung zwischen M und N, dann ist

$$\begin{array}{rcl} R_{(\varphi,\psi)} & := & \{(x,y) \in M \times N \mid x \in \psi\{y\}\} \\ & = & \{(x,y) \in M \times N \mid y \in \varphi\{x\}\} \end{array}$$

eine binäre Relation zwischen M und N, und es gilt $\varphi_{R_{(\varphi,\psi)}} = \varphi$, $\psi_{R_{(\varphi,\psi)}} = \psi$ sowie $R_{(\varphi_R,\psi_R)} = R$.

Beweis. Man stellt mit Hilfssatz 4 leicht fest, daß (φ_R, ψ_R) eine Galoisverbindung ist und daß die beiden zur Definition von $R_{(\varphi,\psi)}$ angegebenen Mengen gleich sind. Nach dieser Definition ist $(x, y) \in R_{(\varphi,\psi)} \Leftrightarrow y \in \varphi\{x\}$, und daher mit Hilfssatz 7

$$\begin{aligned} \varphi X &= \bigcap_{x \in X} \varphi\{x\} \\ &= \bigcap_{x \in X} \varphi_{R_{(\varphi,\psi)}}\{x\} \\ &= \varphi_{R_{(\varphi,\psi)}} X, \end{aligned}$$

also $\varphi_{R_{(\varphi,\psi)}} = \varphi$ und entsprechend $\psi_{R_{(\varphi,\psi)}} = \psi$. Die letzte Behauptung, $R_{(\varphi_R,\psi_R)} = R$, folgt unmittelbar aus der Äquivalenz $x \in \psi_R\{y\} \Leftrightarrow xRy$. □

Der Gebrauch der Bezeichnung „Galois-Verbindung" ist in der Literatur nicht einheitlich. Manche Autoren ziehen es vor, eine der beiden geordneten Mengen durch die duale zu ersetzen. Wir ziehen es vor, ein solches Abbildungspaar *residuiert* zu nennen. Im Fall vollständiger Verbände hat man:

Hilfssatz 9. *Zu jeder $\bigwedge$-erhaltenden Abbildung $\varphi : (V, \leq) \longrightarrow (W, \leq)$ zwischen vollständigen Verbänden existiert eine $\bigvee$-erhaltende Abbildung*

$$\psi : (W, \leq) \longrightarrow (V, \leq)$$

mit

$$x \leq \varphi(y) \Leftrightarrow \psi(x) \leq y.$$

Die Abbildungen φ und ψ bestimmen einander eindeutig: Aus φ gewinnt man ψ durch

$$\psi(x) = \bigwedge\{y \mid x \leq \varphi(y)\},$$

umgekehrt ergibt sich φ aus ψ durch

$$\varphi(y) = \bigvee\{x \mid \psi(x) \leq y\}.$$

Man nennt dann φ eine **residuierte Abbildung,** *ψ die dazu* **residuale Abbildung,** *und die beiden Abbildungen zueinander* **adjungiert**. *Ist eine der Abbildungen injektiv, so ist die andere surjektiv, und umgekehrt.*

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Hilfssatz 7 und den Hilfssätzen davor: Ersetzen wir $(W, \leq)$ durch den dazu dualen Verband $(W, \geq)$, so bilden φ und ψ gerade eine Galoisverbindung. Den Zusammenhang zwischen Injektivität und Surjektivität schließt man aus Hilfssatz 5. □

0.5 Literatur und Hinweise

Das Standardwerk zur Ordnungs- und Verbandstheorie ist nach wie vor

Birkhoff: *Lattice Theory* [15].

Von den zahlreichen weiteren Lehrbüchern zu diesen Themen sei besonders auf

Crawley & Dilworth: *Algebraic Theory of Lattices* [29],

Davey & Priestley: *Introduction to Lattices and Order* [31],

Erné: *Einführung in die Ordnungstheorie* [47]

und

Grätzer: *General Lattice Theory* [77]

hingewiesen. Viele Informationen über Galoisverbindungen und residuierte Abbildungen sind in

Blyth & Janowitz: *Residuation Theory* [16]

zu finden.

1. Begriffsverbände von Kontexten

Die elementaren Grundbegriffe der Formalen Begriffsanalyse sind der des *formalen Kontextes* und der des *formalen Begriffs*. Der Zusatz „formal“ soll in beiden Fällen betonen, daß es sich dabei um mathematische Sachverhalte handelt, die lediglich einige Aspekte der gemeinsprachlichen Bedeutung von *Kontext* und *Begriff* wiedergeben. Wir werden diesen Zusatz aber nur bei der Definition machen und ihn dann aus Bequemlichkeit weglassen, wie schon in der Überschrift des ersten Abschnitts. Es soll also die Vereinbarung gelten, daß überall dort, wo wir *Kontext* oder *Begriff* schreiben, eigentlich *formaler Kontext* bzw. *formaler Begriff* zu lesen ist.

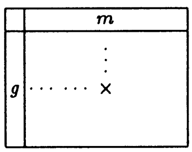
1.1 Kontext und Begriff

Definition 18. Ein **formaler Kontext** $\mathbb{K} := (G, M, I)$ besteht aus zwei Mengen G und M sowie einer Relation I zwischen G und M. Die Elemente von G nennen wir **Gegenstände**, die von M **Merkmale** des Kontextes[1]. Um auszudrücken, daß ein Gegenstand g mit einem Merkmal m in der Relation I steht, schreiben wir gIm oder $(g, m) \in I$ und lesen dies als „der Gegenstand g **hat** das Merkmal m“. ◊

Die Relation I nennen wir auch die *Inzidenzrelation* des Kontextes. Statt $(g, m) \notin I$ schreiben wir manchmal $g\not{I}m$.

Beispiel 1. Der Kontext in Abb.1.1 wurde bei der Planung eines ungarischen Lehrfilmes zum Thema „Lebewesen und Wasser“ verwendet. Gegenstände sind hier die im Film thematisierten Lebewesen, Merkmale die Eigenschaften, die im Film hervorgehoben werden.

Ein kleiner Kontext läßt sich bequem durch eine **Kreuztabelle** darstellen, d.h. durch eine rechteckige Tabelle, deren Zeilen mit den Gegenständen und deren Spalten mit den Merkmalen benannt sind. Ein Kreuz in Zeile g und Spalte m gibt an, daß der Gegenstand g das Merkmal m hat.



[1] genaugenommen: „formale Gegenstände“ und „formale Merkmale“.

		a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	Fischegel	×	×					×		
2	Brasse	×	×					×	×	
3	Frosch	×	×	×				×	×	
4	Hund	×		×				×	×	×
5	Wasserpest	×	×		×		×			
6	Schilf	×	×	×	×		×			
7	Bohne	×		×	×	×				
8	Mais	×		×	×		×			

a: benötigt Wasser zum Leben, b: lebt im Wasser, c: lebt auf dem Land, d: braucht Blattgrün zur Nahrungsaufbereitung, e: zweikeimblättrig, f: einkeimblättrig, g: fähig zum Ortswechsel, h: hat Gliedmaßen, i: säugt seine Jungen

Abbildung 1.1. Kontext zu einem Lehrfilm „Lebewesen und Wasser".

Definition 19. Für eine Menge $A \subseteq G$ von Gegenständen definieren wir

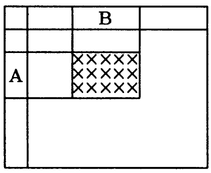
$$A' := \{m \in M \mid gIm \text{ für alle } g \in A\}$$

(die Menge der gemeinsamen Merkmale der Gegenstände in A). Entsprechend ist für eine Menge B von Merkmalen

$$B' := \{g \in G \mid gIm \text{ für alle } m \in B\}$$

definiert (die Menge der Gegenstände, die alle Merkmale aus B haben).[2] $\Diamond$

Definition 20. Ein **formaler Begriff** des Kontextes (G, M, I) ist ein Paar (A, B) mit $A \subseteq G, B \subseteq M$, $A' = B$ und $B' = A$. Wir nennen A den **Umfang** und B den **Inhalt** des Begriffes (A, B). $\mathfrak{B}(G, M, I)$ bezeichnet die Menge aller Begriffe des Kontextes (G, M, I). $\Diamond$



Beispiele von Begriffen des Kontextes aus Abbildung 1.1 geben wir nach der Definition 21. Umfang A und Inhalt B eines Begriffes (A, B) sind über die Relation I engstens verbunden. Jeder der beiden Teile bestimmt den anderen und damit den Begriff, denn es ist ja $B' = A$ bzw. $A' = B$. Weitere einfache Regeln dieses Zusammenspiels sind im folgenden Hilfssatz notiert:

Hilfssatz 10. *Ist (G, M, I) ein Kontext und sind $A, A_1, A_2 \subseteq G$ Mengen von Gegenständen, B, B_1, B_2 Mengen von Merkmalen, so gilt*

[2] Die hier eingeführte Schreibweise ist bequem, aber gelegentlich unzureichend. Wenn es die Verständlichkeit des Textes verbessert, kann man durch Bezeichnungen wie $A^{\uparrow}$, $B^{\downarrow}$ die Ableitungsoperatoren oder durch A^{I}, A^{J} verschiedene Relationen unterscheiden.

1) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2' \subseteq A_1'$ *1')* $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B_2' \subseteq B_1'$

2) $A \subseteq A''$ *2')* $B \subseteq B''$

3) $A' = A'''$ *3')* $B' = B'''$

4) $A \subseteq B' \iff B \subseteq A' \iff A \times B \subseteq I.$

Beweis. 1) Ist $m \in A_2'$, so gilt gIm für alle $g \in A_2$, also erst recht gIm für alle $g \in A_1$ falls $A_1 \subseteq A_2$, und damit $m \in A_1'$. 2) Ist $g \in A$, so gilt gIm für alle $m \in A'$, woraus $g \in A''$ folgt. 3) $A' \subseteq A'''$ folgt sofort aus 2'), und aus $A \subseteq A''$ erhält man mit 1) $A''' \subseteq A'$. 4) folgt direkt aus der Definition. □

Der Hilfssatz zeigt, daß die beiden Ableitungsoperatoren eine Galoisverbindung zwischen den Potenzmengenverbänden $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(M)$ bilden (vergl. 0.4). Wir erhalten also (nach Hilfssatz 8) zwei zueinander dual isomorphe Hüllensysteme auf G und auf M:

Für jede Menge $A \subseteq G$ ist A' ein **Begriffsinhalt** (d.h. Inhalt eines Begriffs), denn (A'', A') ist stets ein Begriff. A'' ist der kleinste **Begriffsumfang**, der A umfaßt. Folglich ist eine Menge $A \subseteq G$ genau dann ein Begriffsumfang, wenn $A = A''$ ist, und entsprechendes gilt für Begriffsinhalte. Die Vereinigung von Begriffsumfängen ergibt im allgemeinen nicht wieder einen Begriffsumfang. Hingegen ist der Durchschnitt beliebig vieler Begriffsumfänge (bzw. Begriffsinhalte) stets wieder ein Begriffsumfang (Begriffsinhalt), wie der folgende Hilfssatz zeigt:

Hilfssatz 11. *Ist T eine Indexmenge und ist für jedes $t \in T$ $A_t \subseteq G$ eine Menge von Gegenständen, so ist*

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)' = \bigcap_{t\in T} A_t'.$$

Entsprechendes gilt für Mengen von Merkmalen.

Beweis.

$$\begin{aligned} m \in \left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)' &\iff gIm \text{ für alle } g \in \bigcup_{t\in T} A_t \\ &\iff gIm \text{ für alle } g \in A_t \text{ für alle } t \in T \\ &\iff m \in A_t' \text{ für alle } t \in T \\ &\iff m \in \bigcap_{t\in T} A_t'. \end{aligned}$$

□

Die Menge aller Begriffsumfänge von (G, M, I) wird gelegentlich mit $\mathfrak{U}(G, M, I)$ bezeichnet. Für die Menge aller Begriffsinhalte schreiben wir $\mathfrak{I}(G, M, I)$,

Definition 21. Sind (A_1, B_1) und (A_2, B_2) Begriffe eines Kontextes, so heißt (A_1, B_1) **Unterbegriff** von (A_2, B_2), falls $A_1 \subseteq A_2$ ist (gleichbedeutend dazu ist $B_2 \subseteq B_1$). (A_2, B_2) ist dann ein **Oberbegriff** von (A_1, B_1), und wir schreiben $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$. Die Relation $\leq$ wird die **hierarchische Ordnung** (oder nur **Ordnung**) der Begriffe genannt. Die so geordnete Menge aller Begriffe von (G, M, I) bezeichnen wir mit $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und nennen sie den **Begriffsverband** des Kontextes (G, M, I). $\Diamond$

Beispiel 2. Der Kontext aus Beispiel 1 hat 19 Begriffe. Das Liniendiagramm in Abbildung 1.2 stellt den Begriffsverband dieses Kontextes dar.

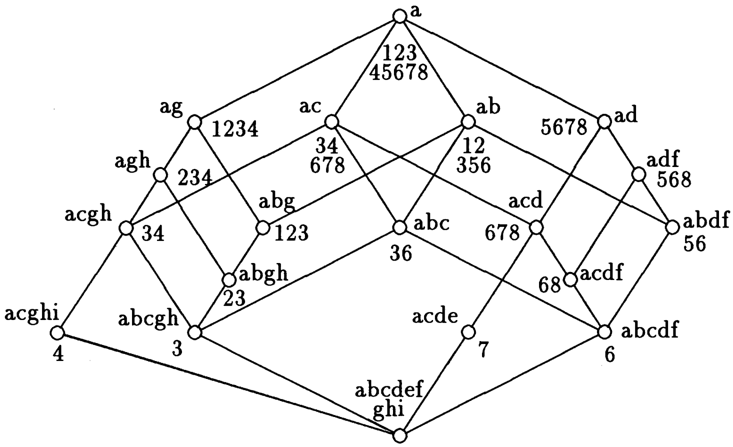


Abbildung 1.2. Begriffsverband zum Kontext aus Abb. 1.1

Satz 3 (Hauptsatz über Begriffsverbände). *Der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist ein vollständiger Verband, in dem Infimum und Supremum folgendermaßen beschrieben sind:*

$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)'' \right)$$

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)'', \bigcap_{t \in T} B_t \right).$$

Ein vollständiger Verband $\mathbf{V}$ ist genau dann isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, wenn Abbildungen $\tilde{\gamma} : G \to V$ und $\tilde{\mu} : M \to V$ existieren, so daß $\tilde{\gamma}(G)$ supremum-dicht in $\mathbf{V}$ ist, $\tilde{\mu}(M)$ infimum-dicht in $\mathbf{V}$ ist und gIm äquivalent ist zu $\tilde{\gamma}g \leq \tilde{\mu}m$ für alle $g \in G$ und alle $m \in M$. Insbesondere ist $\mathbf{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(V, V, \leq)$.

Beweis des Hauptsatzes. Zunächst wird die Formel für das Infimum erläutert. Da $A_t = B_t'$ für jedes $t \in T$ gilt, kann

$$\left(\bigcap_{t\in T} A_t, \left(\bigcup_{t\in T} B_t\right)''\right)$$

mit Hilfssatz 11 umgeformt werden zu

$$\left(\left(\bigcup_{t\in T} B_t\right)', \left(\bigcup_{t\in T} B_t\right)''\right),$$

ist also von der Form (X', X'') und somit sicher ein Begriff. Daß es sich nur um das Infimum, also den größten gemeinsamen Unterbegriff der Begriffe (A_t, B_t) handeln kann, folgt sofort daraus, daß der Umfang dieses Begriffes gerade der Durchschnitt der Umfänge der (A_t, B_t) ist. Die Formel für das Supremum wird entsprechend begründet. Damit ist nun nachgewiesen, daß $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ein vollständiger Verband ist.

Nun zeigen wir, zunächst im Spezialfall $\boldsymbol{V} = \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, die Existenz von Abbildungen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\mu}$ mit den geforderten Eigenschaften. Wir setzen

$$\tilde{\gamma}g := (\{g\}'', \{g\}') \text{ für } g \in G$$

$$\text{und } \tilde{\mu}m := (\{m\}', \{m\}'') \text{ für } m \in M.$$

Man hat $\tilde{\gamma}g \leq \tilde{\mu}m \iff \{g\}'' \subseteq \{m\}' \iff \{g\}' \supseteq \{m\} \iff m \in \{g\}' \iff gIm$, wie behauptet. Außerdem gilt für jeden Begriff (A, B) aufgrund der bewiesenen Formeln

$$\bigvee_{g\in A} (\{g\}'', \{g\}') = (A, B) = \bigwedge_{m\in B} (\{m\}', \{m\}''),$$

$\tilde{\gamma}(G)$ ist also supremum- und $\tilde{\mu}(M)$ infimum-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$. Ist allgemeiner $\boldsymbol{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und $\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \to \boldsymbol{V}$ ein Isomorphismus, so definiert man $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\mu}$ durch

$$\tilde{\gamma}g := \varphi(\{g\}'', \{g\}') \text{ für } g \in G$$

$$\text{und } \tilde{\mu}m := \varphi(\{m\}', \{m\}'') \text{ für } m \in M.$$

Die behaupteten Eigenschaften übertragen sich.

Ist umgekehrt $\boldsymbol{V}$ ein vollständiger Verband und sind

$$\tilde{\gamma} : G \to V, \tilde{\mu} : M \to V$$

Abbildungen mit den angegebenen Eigenschaften, dann definiert man

$$\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \to V$$

durch

$$\varphi(A,B) := sup\{\tilde{\gamma}(g) \mid g \in A\}.$$

φ ist offenbar ordnungserhaltend. Um zu beweisen, daß φ ein Isomorphismus ist, müssen wir also zeigen, daß φ^{-1} existiert und ebenfalls ordnungserhaltend ist. Wir definieren dazu für $x \in V$

$$\psi x := (\{g \in G \mid \tilde{\gamma} g \leq x\}, \{m \in M \mid x \leq \tilde{\mu} m\}),$$

und zeigen, daß ψx ein Begriff von (G, M, I) ist:

$$\begin{aligned} h \in \{g \in G \mid \tilde{\gamma} g \leq x\} &\Leftrightarrow \tilde{\gamma} h \leq x \\ &\Leftrightarrow \tilde{\gamma} h \leq \tilde{\mu} n \text{ für alle } n \in \{m \in M \mid x \leq \tilde{\mu} m\} \\ &\Leftrightarrow hIn \text{ für alle } n \in \{m \in M \mid x \leq \tilde{\mu} m\} \\ &\Leftrightarrow h \in \{m \in M \mid x \leq \tilde{\mu} m\}'. \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung ergibt sich entsprechend. Wir haben also eine Abbildung $\psi : V \to \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ definiert, und man liest unmittelbar an der Definition ab, daß ψ ordnungserhaltend ist. Wir beweisen nun noch $\varphi = \psi^{-1}$. Es ist $\varphi\psi x = \bigvee\{\tilde{\gamma} g \mid g \in G, \tilde{\gamma} g \leq x\} = x$, da $\tilde{\gamma}(G)$ supremum-dicht in $\boldsymbol{V}$ ist. Andererseits ist $\varphi(A, B) = \bigwedge\{\tilde{\mu} m \mid m \in B\}$, da $\tilde{\mu}(M)$ infimum-dicht in $\boldsymbol{V}$ ist, und folglich

$$\begin{aligned} \psi\varphi(A,B) &= \psi \bigwedge\{\tilde{\mu} m \mid m \in B\} \\ &= (\{g \in G \mid \tilde{\gamma} g \leq \bigwedge\{\tilde{\mu} m \mid m \in B\}\}, \{\ldots\}') \\ &= (\{g \in G \mid \tilde{\gamma} g \leq \tilde{\mu} m \text{ für alle } m \in B\}, \{\ldots\}') \\ &= (\{g \in G \mid gIm \text{ für alle } m \in B\}, \{\ldots\}') \\ &= (B', B'') = (A, B). \end{aligned}$$

Wählt man für einen vollständigen Verband $\boldsymbol{V}$ speziell $G := V$, $M := V$, $I := \leq$ und $\tilde{\gamma}$ sowie $\tilde{\mu}$ als die Identität von V, so ergibt sich $\boldsymbol{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$. □

Das Dualitätsprinzip für Begriffsverbände. Mit (G, M, I) ist auch (M, G, I^{-1}) ein Kontext, und zwar mit

$$\underline{\mathfrak{B}}(M, G, I^{-1}) \cong \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)^d,$$

und

$$(B, A) \mapsto (A, B)$$

ist ein Isomorphismus. Anders gesagt: vertauscht man die Rollen von Gegenständen und Merkmalen, so erhält man den dualen Begriffsverband. Dadurch überträgt sich das Dualitätsprinzip auch auf Begriffsverbände.

Die im Hauptsatz aufgetretenen Abbildungen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\mu}$ geben an, wie der Kontext im Begriffsverband wiederzufinden ist. Dies wird in der folgenden Definition vertieft.

Definition 22. Für einen Gegenstand $g \in G$ schreiben wir g' statt $\{g\}'$ für den **Gegenstandsinhalt** $\{m \in M \mid gIm\}$ zum Gegenstand g. Entsprechend ist $m' := \{g \in G \mid gIm\}$ der **Merkmalumfang** zum Merkmal m. In Anlehnung an die im Hauptsatz verwendeten Bezeichnungen schreiben wir γg für den **Gegenstandsbegriff** (g'', g') und μm für den **Merkmalbegriff** (m', m''). ◊

Im Liniendiagramm in Abbildung 1.2 ist zu jedem Begriff Inhalt und Umfang angegeben. Die Bezeichnung läßt sich erheblich vereinfachen, indem man jeden Gegenstand und jedes Merkmal nur noch einmal einträgt, und zwar an den zugehörigen Gegenstands- bzw. Merkmalbegriff (siehe Abbildung 1.3). Man kann dann immer noch den Kontext sowie alle Begriffsumfänge und Begriffsinhalte vom Liniendiagramm ablesen: Sucht man zu einem kleinen Kreis, der ja einen Begriff repräsentiert, den zugehörigen Begriffsumfang, so besteht dieser aus den Gegenständen, die an diesem Kreis oder an von diesem Kreis aus absteigenden Linienzügen liegen. Entsprechend findet man den Begriffsinhalt, indem man alle von dem Kreis aus aufsteigenden Linienzüge mit dem Auge verfolgt und die daran eingetragenen Merkmale notiert.

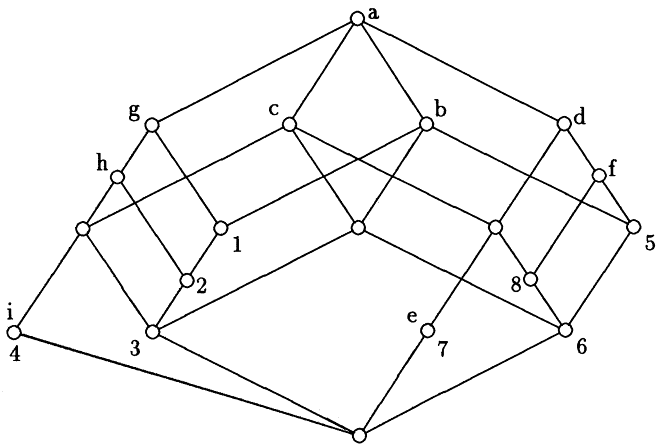


Abbildung 1.3. Liniendiagramm mit reduzierter Bezeichnung

Die sparsame reduzierte Bezeichnung erlaubt es, die vollen Namen der Gegenstände und Merkmale aus dem Kontext in Abbildung 1.1 ins Diagramm einzutragen. Dieses wird dadurch besser lesbar, wie man in Abbildung 1.4 sieht.

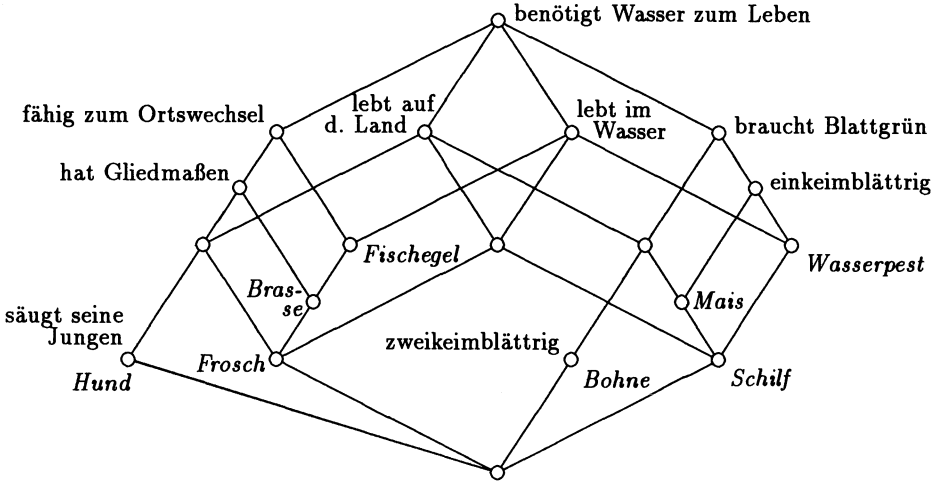


Abbildung 1.4. Begriffsverband zum Lehrfilm „Lebewesen und Wasser"

1.2 Kontext und Begriffsverband

Aus dem System aller Begriffe eines Kontextes läßt sich dieser mühelos rekonstruieren. G und M tauchen als Umfang bzw. Inhalt der trivialen *Grenzbegriffe* auf: Die Menge aller Gegenstände ist Umfang des größten Begriffes, $(\emptyset', \emptyset'') = (G, G')$, dual ist M der Inhalt des kleinsten Begriffes, $(\emptyset'', \emptyset') = (M', M)$. Die Inzidenzrelation I ergibt sich durch

$$I = \bigcup \{A \times B \mid (A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, I)\}.$$

Am Begriffsverband ist der Kontext noch einfacher abzulesen, wie der Hauptsatz zeigt. Andererseits können Begriffsverbände verschiedener Kontexte sehr wohl zueinander isomorph sein. Zu den Kontextmanipulationen, die die Struktur des Begriffsverbandes nicht verändern, gehört das Zusammenfassen von Gegenständen mit gleichen Inhalten bzw. von Merkmalen mit gleichen Umfängen:

Definition 23. Ein Kontext (G, M, I) heißt **bereinigt**, wenn für beliebige Gegenstände $g, h \in G$ aus $g' = h'$ stets $g = h$ folgt und entsprechend $m' = n' \Rightarrow m = n$ für alle $m, n \in M$ gilt. $\Diamond$

Beispiel 3. Abbildung 1.5 zeigt einen Kontext, der die Service-Angebote eines Darmstädter Bürobedarfgeschäfts darstellt. Darunter der bereinigte Kontext.

Ebenfalls ohne Einfluß auf die Struktur des Begriffsverbandes sind Merkmale, die sich als Kombination anderer Merkmale schreiben lassen. Präziser formuliert man dies so: Ist $m \in M$ ein Merkmal und ist $X \subseteq M$ eine Menge

	Möbel	Computer	Kopierer	Schreib-maschinen	Spezial-maschinen
Beratung	×	×	×	×	×
Planung	×	×			
Aufbau und Installation	×	×	×	×	×
Einweisung		×	×	×	×
Schulung, Seminare		×			
Originalersatzteile und -zubehör	×	×	×	×	×
Reparatur	×	×	×	×	×
Service-verträge		×	×	×	

	Möbel	Computer	Kopierer und Schreibmaschinen	Spezial-maschinen
Beratung, Aufbau und Installation, Originalersatzteile und -zubehör, Reparatur	×	×	×	×
Planung	×	×		
Einweisung		×	×	×
Schulung, Seminare		×		
Serviceverträge		×	×	

Abbildung 1.5. Kontext und bereinigter Kontext

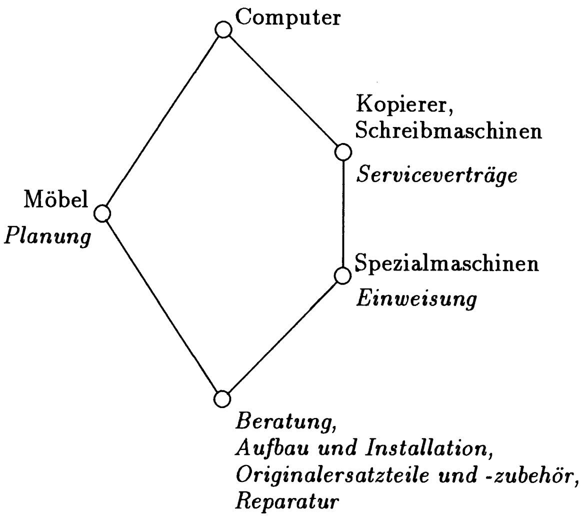


Abbildung 1.6. Der Begriffsverband zum Kontext aus Abbildung 1.5

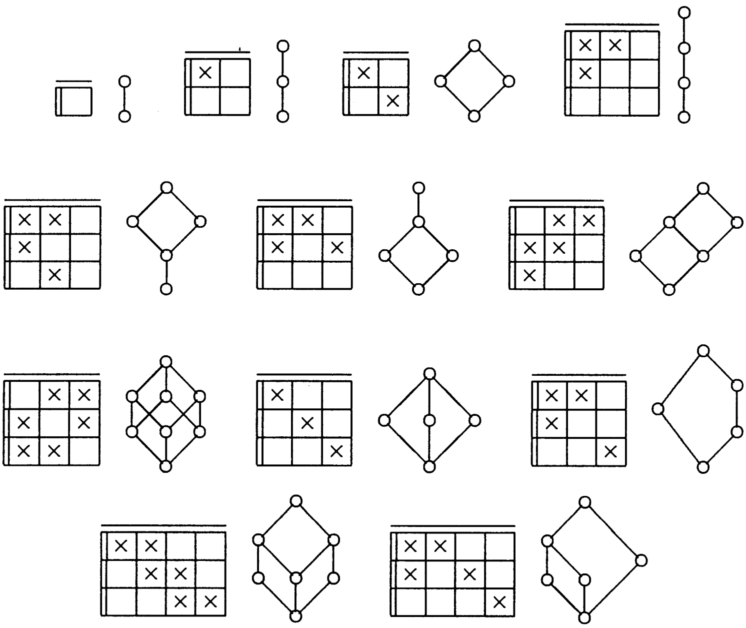


Abbildung 1.7. Reduzierte Kontexte mit bis zu drei Gegenständen und ihre Begriffsverbände. Weggelassen wurde der Kontext $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ und sein (einelementiger) Begriffsverband.

von Merkmalen mit $m \notin X$, aber $m' = X'$, so ist der Merkmalbegriff μm das Infimum der Merkmalbegriffe $\mu x, x \in X$, die Menge $\mu(M \setminus \{m\})$ ist also ebenfalls infimum-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ und nach dem Hauptsatz ist

$$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \cong \underline{\mathfrak{B}}(G, M \setminus \{m\}, I \cap (G \times (M \setminus \{m\}))).$$

Dieses Entfernen von **reduziblen Merkmalen**, d.h. von Merkmalen mit $\bigwedge$-reduziblen Merkmalbegriffen, bzw. von **reduziblen Gegenständen**, also von Gegenständen mit $\bigvee$-reduziblen Gegenstandsbegriffen, nennen wir das **Reduzieren** des Kontextes. Stets reduzibel sind **Vollzeilen** und **Vollspalten**; damit meinen wir Gegenstände g mit $g' = M$ bzw. Merkmale m mit $m' = G$.

Definition 24. Ein bereinigter Kontext (G, M, I) heißt **zeilenreduziert**, wenn jeder Gegenstandsbegriff $\bigvee$-irreduzibel ist, und **spaltenreduziert**, wenn jeder Merkmalbegriff $\bigwedge$-irreduzibel ist. Ein Kontext, der sowohl zeilenreduziert als auch spaltenreduziert ist, ist **reduziert**. $\diamond$

Es lassen sich leicht unendliche Kontexte angeben, in denen alle Merkmale und alle Gegenstände reduzibel sind (vergl. S. 7), man darf also im allgemeinen nicht simultan alle reduziblen Gegenstände und Merkmale weglassen. Bei **endlichen** Begriffsverbänden ist dies aber kein Problem, da in einem endlichen Verband jedes Element Verbindung von $\bigvee$-irreduziblen und Schnitt von $\bigwedge$-irreduziblen Elementen ist (vergl. Hilfssatz 2, S. 7).

Hilfssatz 12. *Zu jedem endlichen*[3] *Verband* $\boldsymbol{V}$ *gibt es bis auf Isomorphie*[4] *genau einen reduzierten Kontext* $\mathbb{K}(\boldsymbol{V})$ *mit* $\boldsymbol{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}(\boldsymbol{V}))$, *nämlich*

$$\mathbb{K}(\boldsymbol{V}) := (J(\boldsymbol{V}), M(\boldsymbol{V}), \leq).$$

$\square$

Man nennt diesen Kontext auch den **Standardkontext** für den Verband $\boldsymbol{V}$. Für die praktische Arbeit mit Kontexten bedeutet der Hilfssatz folgendes: Jeder endliche Kontext läßt sich in eine reduzierte Form bringen, ohne daß sich die Struktur des Begriffsverbandes ändert, und diese ist eindeutig. Man bereinigt den Kontext zunächst, faßt also Gegenstände mit gleichen Inhalten sowie Merkmale mit gleichen Umfängen zusammen. Dann werden alle Gegenstände gestrichen, deren Inhalt sich als Durchschnitt anderer Gegenstandsinhalte schreiben läßt, und ebenso alle Merkmale, deren Umfang Durchschnitt anderer Merkmalumfänge ist.

Aus den Begriffen des reduzierten Kontextes lassen sich die des ursprünglichen einfach gewinnen, wenn man über den Reduktionsvorgang Buch

---

[3] vergl. auch Hilfssatz 14.c).

[4] Zwei Kontexte (G_1, M_1, I_1) und (G_2, M_2, I_2) heißen **isomorph**, wenn es bijektive Abbildungen $\alpha : G_1 \to G_2, \beta : M_1 \to M_2$ gibt mit $g I_1 m \Leftrightarrow (\alpha g) I_2 (\beta m)$ für alle $g \in G_1, m \in M_1$.

geführt hat. Ist (G, M, I) ein endlicher bereinigter Kontext, G_{irr} die Menge der irreduziblen Gegenstände und M_{irr} die der irreduziblen Merkmale, so ist der reduzierte Kontext $(G_{\text{irr}}, M_{\text{irr}}, I \cap (G_{\text{irr}} \times M_{\text{irr}}))$, und jeder Begriff (A, B) von (G, M, I) entspricht dem Begriff $(A \cap G_{\text{irr}}, B \cap M_{\text{irr}})$ von $(G_{\text{irr}}, M_{\text{irr}}, I \cap (G_{\text{irr}} \times M_{\text{irr}}))$. Für jeden Gegenstand $g \in G$ und jeden Begriffsumfang A von (G, M, I) gilt

$$g \in A \iff g'' \cap G_{\text{irr}} \subseteq A \cap G_{\text{irr}},$$

dual für die Merkmale. Notieren wir also zu jedem reduziblen Gegenstand g die Menge $g'' \cap G_{\text{irr}}$ und zu jedem reduziblen Merkmal m die Menge $m'' \cap M_{\text{irr}}$, so können wir die Begriffe von (G, M, I) aus denen von $(G_{\text{irr}}, M_{\text{irr}}, I \cap (G_{\text{irr}} \times M_{\text{irr}}))$ leicht ermitteln.

Das Reduzieren des bereinigten Kontextes läßt sich noch auf eine andere Weise durchführen, nämlich mit Hilfe der **Pfeilrelationen**, die als nächstes definiert werden sollen. Diese Relationen lassen sich bequem in die Kreuztabelle eintragen, da sie nur auf Gegenstand-Merkmal-Paare zutreffen können, die nicht in der Relation I stehen.

Definition 25. Ist (G, M, I) ein Kontext, $g \in G$ ein Gegenstand und $m \in M$ ein Merkmal, so schreiben wir

$$\begin{aligned}
g \swarrow m \quad &:\iff \quad \begin{cases} g \not{I} m \text{ und} \\ \text{falls } g' \subseteq h' \text{ und } g' \neq h', \text{ dann } hIm, \end{cases} \\
g \nearrow m \quad &:\iff \quad \begin{cases} g \not{I} m \text{ und} \\ \text{falls } m' \subseteq n' \text{ und } m' \neq n', \text{ dann } gIn, \end{cases} \\
g \swarrow\!\!\!\nearrow m \quad &:\iff \quad g \swarrow m \text{ und } g \nearrow m.
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Es ist also $g \swarrow m$ genau dann, wenn g' maximal ist unter allen Gegenstandsinhalten, in denen m nicht vorkommt. Mit anderen Worten: $g \swarrow m$ gilt genau dann, wenn g das Merkmal m nicht hat, m aber im Inhalt jedes echten Unterbegriffes von γg liegt. Setzt man nun, wie in Definition 11 (S. 7),

$$(\gamma g)_* := \bigvee \{ \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}(G, M, I) \mid \mathfrak{x} < \gamma g \},$$

dann ist $(\gamma g)_*$ ein Unterbegriff von γg und γg ist genau dann $\bigvee$-irreduzibel, wenn $\gamma g \neq (\gamma g)_*$ ist. Dies wiederum ist gleichbedeutend dazu, daß es ein Merkmal m im Inhalt von $(\gamma g)_*$ gibt, welches nicht im Inhalt von γg liegt, also zu $g \swarrow m$ für ein $m \in M$. Man hat deshalb

$$\begin{aligned}
g \swarrow m \quad &\iff \quad \gamma g \wedge \mu m = (\gamma g)_* \neq \gamma g \\
g \nearrow m \quad &\iff \quad \gamma g \vee \mu m = (\mu m)^* \neq \mu m.
\end{aligned}$$

	Gruppe der 77	Blockfrei	LLDC	MSAC	OPEC	AKP
Afghanistan	×	×	×	×		
Ägypten	×	×		×		
Algerien	×	×			×	
Angola	×	×				×
Antigua u. Barbuda	×					×
Äquatorialguinea	×	×	×			×
Argentinien	×					
Äthiopien	×	×	×	×		×
Bahamas	×					×
Bahrain	×	×				
Bangladesh	×	×	×	×		
Barbados	×	×				×
Belize	×	×				×
Benin	×	×	×	×		×
Bhutan	×	×	×			
Birma	×		×	×		
Bolivien	×	×				
Botswana	×	×	×			×
Brasilien	×					
Brunei						
Burkina Faso	×	×	×	×		×
Burundi	×	×	×	×		×
Chile	×					
China VR						
Costa Rica	×					
Djibouti	×	×	×			×
Dominica	×	×				×
Dominikanische Rep.	×					×
Ecuador	×	×			×	
Elfenbeinküste	×	×		×		×
El Salvador	×			×		
Fidschi	×					×
Gabun	×	×			×	×

	Gruppe der 77	Blockfrei	LLDC	MSAC	OPEC	AKP
Gambia	×	×	×	×		×
Ghana	×	×	×	×		×
Grenada	×	×				×
Guatemala	×			×		
Guinea	×	×	×	×		×
Guinea-Bissau	×	×	×	×		×
Guyana	×	×		×		×
Haiti	×		×	×		×
Honduras	×			×		
Hongkong						
Indien	×	×		×		
Indonesien	×	×			×	
Irak	×	×			×	
Iran	×	×			×	
Jamaica	×	×				×
Jemen	×	×	×	×		
Jordanien	×	×				
Kambodscha	×	×		×		
Kamerun	×	×		×		×
Kapverdische Inseln	×	×	×	×		×
Katar	×	×			×	
Kenia	×	×		×		×
Kiribati			×			×
Kolumbien	×	×				
Komoren	×	×	×			×
Kongo	×	×				×
Korea-Nord	×	×	×			
Korea-Süd	×					
Kuba	×	×				
Kuwait	×	×			×	
Laos	×	×	×	×		
Lesotho	×	×	×	×		×
Libanon	×	×				

Die Abkürzungen bedeuten: LLDC := Least Developed Countries, MSAC := Most Seriously Affected Countries, OPEC := Organization of Petrol Exporting Countries, AKP := African, Karibbean and Pacific Countries.

Abbildung 1.8. Zugehörigkeit von Ländern der Dritten Welt zu Ländergruppen (Teil 1).

	Gruppe der 77	Blockfrei	LLDC	MSAC	OPEC	AKP
Liberia	×	×				×
Libyen	×	×			×	
Madagaskar	×	×	×	×		×
Malawi	×	×	×			×
Malaysia	×	×				
Malediven	×	×	×			
Mali	×	×	×	×		×
Marokko	×	×				
Mauretanien	×	×	×	×		×
Mauritius	×	×				×
Mexiko	×					
Mongolei			×			
Mozambique	×	×		×		×
Namibia	×					×
Nauru						
Nepal	×	×	×	×		
Nicaragua	×	×				
Niger	×	×	×	×		×
Nigeria	×	×			×	×
Oman	×	×				
Pakistan	×	×		×		
Panama	×	×				
Papua-Neuguinea	×					×
Paraguay	×					
Peru	×	×				
Philippinen	×					
Réunion						
Rwanda	×	×	×	×		×
Salomonen	×					×
Samoa	×		×	×		×
São Tomé u. Principe	×	×	×			×
Saudi-Arabien	×	×			×	

	Gruppe der 77	Blockfrei	LLDC	MSAC	OPEC	AKP
Senegal	×	×		×		×
Seychellen	×	×				×
Sierra Leone	×	×	×	×		×
Singapur	×	×				
Somalia	×	×	×	×		×
Sri Lanka	×	×		×		
St. Kitts						
St. Lucia	×	×				×
St. Vincent u. Grenad.	×					×
Sudan	×	×	×	×		×
Surinam	×	×				×
Swaziland	×	×				×
Syrien	×	×				
Taiwan						
Tanzania	×	×	×	×		×
Thailand	×					
Togo	×	×	×			×
Tonga	×					×
Trinidad u. Tobago	×	×				×
Tschad	×	×	×	×		×
Tunesien	×	×				
Tuvalu			×			×
Uganda	×	×	×	×		×
Uruguay	×					
Vanuatu	×	×	×			×
Venezuela	×	×			×	
Ver. Arab. Emirate	×	×			×	
Vietnam	×	×	×			
Zaire	×	×	×			×
Zambia	×	×	×			×
Zentralafrikanische Rep.	×	×	×	×		×
Zimbabwe	×	×				×

Abbildung 1.8. Zugehörigkeit von Ländern der Dritten Welt zu Ländergruppen (Teil 2). Quelle: *Lexikon Dritte Welt*, Rowohlt-Verlag, Reinbek 1993.

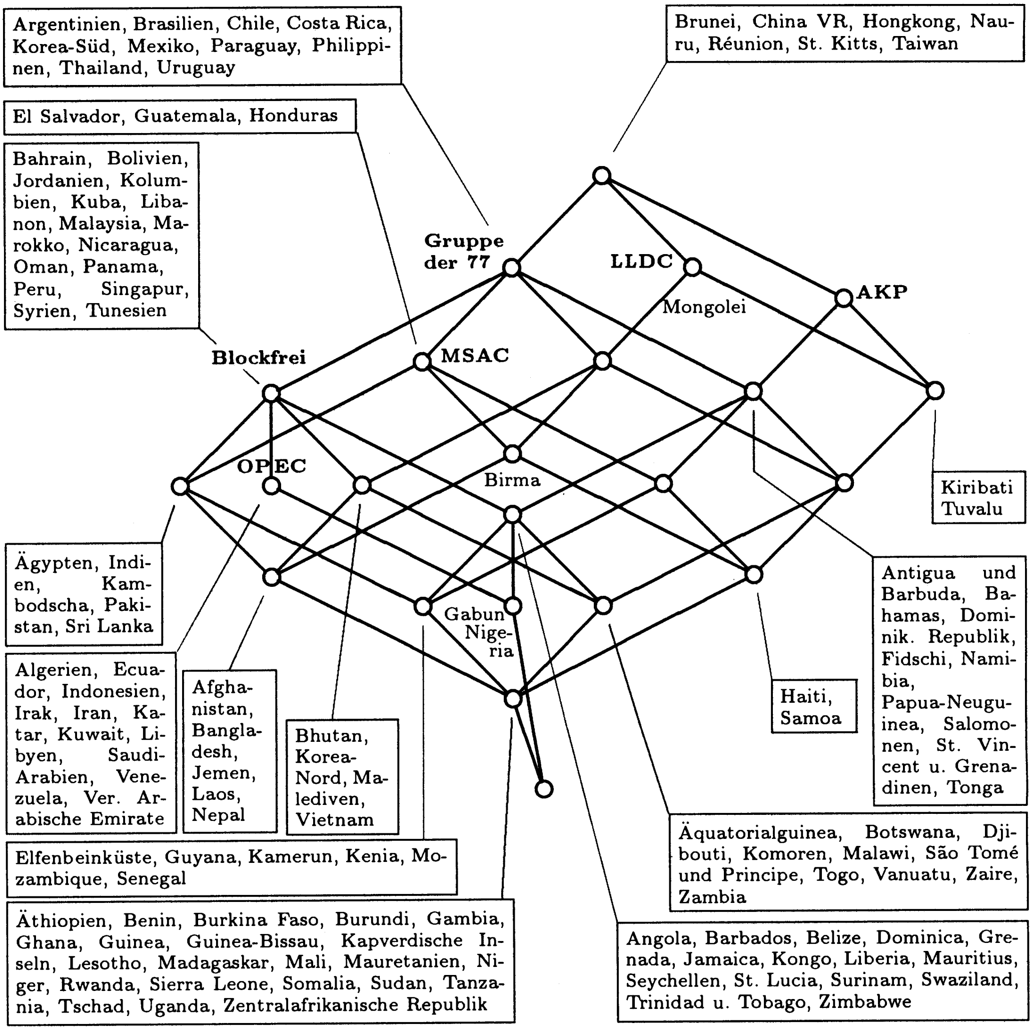


Abbildung 1.9. Begriffsverband zum Kontext der Dritte-Welt-Länder

Beispiel 4. Abbildung 1.10 zeigt den Kontext aus Abbildung 1.5 mit den Pfeilrelationen; daneben der reduzierte Kontext.

$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$	$\swarrow$
$\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$	$\times$
$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	
$\nearrow$	$\times$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$

$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$	$\swarrow$
$\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$	$\times$	$\times$
$\nearrow$	$\times$	$\swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow$

Abbildung 1.10. Kontext mit Pfeilrelationen und der reduzierte Kontext.

Die Bedeutung der Pfeilrelationen für das Reduzieren gibt der nächste Hilfssatz an:

Hilfssatz 13. *In jedem Kontext gilt:*

a) γg *ist* $\bigvee$*-irreduzibel* $\iff$ *Es gibt ein* $m \in M$ *mit* $g \swarrow m$.
b) μm *ist* $\bigwedge$*-irreduzibel* $\iff$ *Es gibt ein* $g \in G$ *mit* $g \nearrow m$.

In jedem endlichen[5] *Kontext gilt außerdem:*

c) γg *ist* $\bigvee$*-irreduzibel* $\iff$ *Es gibt ein* $m \in M$ *mit* $g \swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow m$.
d) μm *ist* $\bigwedge$*-irreduzibel* $\iff$ *Es gibt ein* $g \in G$ *mit* $g \swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow m$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den zuvor gemachten Bemerkungen zusammen mit Hilfssatz 2. Wählt man m' maximal bzgl. $g \swarrow m$ (in einem endlichen Kontext ist dies ja sicher möglich), so gilt auch $g \nearrow m$, also $g \swarrow\!\!\!\!\!\!\nearrow m$. □

Zum Reduzieren eines endlichen bereinigten Kontextes trägt man also zuerst die Pfeilrelationen in die Kreuztabelle ein und streicht dann alle Zeilen und alle Spalten, die keinen Doppelpfeil enthalten. Die Endlichkeitsvoraussetzung in den Hilfssätzen 12 und 13 kann abgeschwächt werden:

Definition 26. Ein Kontext (G, M, I) heißt **doppelt fundiert**, wenn es für jeden Gegenstand $g \in G$ und jedes Merkmal $m \in M$ mit $g \not{I} m$ einen Gegenstand $h \in G$ und ein Merkmal $n \in M$ gibt mit

$$g \nearrow n \text{ und } m' \subseteq n' \quad \text{sowie} \quad h \swarrow m \text{ und } g' \subseteq h'.$$

Ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ heißt **doppelt fundiert**, falls es zu je zwei Elementen $x < y$ aus V Elemente $s, t \in V$ gibt mit:

$$\begin{array}{l} s \text{ ist minimal bezüglich } s \leq y,\ s \not\leq x, \text{ sowie} \\ t \text{ ist maximal bezüglich } t \geq x,\ t \not\geq y. \end{array}$$

◊

[5] vergl. auch Hilfssatz 14.d)

Man erkennt sofort mit Hilfe von Hilfssatz 13, daß das Merkmal n und der Gegenstand h, die in Definition 26 auftreten, irreduzibel sein müssen. Entsprechendes gilt auch für die Verbandselemente s und t im zweiten Teil der Definition: s muß $\bigvee$-irreduzibel, t muß $\bigwedge$-irredzibel sein. Die Eigenschaft „doppelt fundiert“ impliziert also die Existenz „vieler“ irreduzibler Elemente.

Hilfssatz 14. *a) Jeder endliche Kontext ist doppelt fundiert.*

b) Ein Kontext, in dem es keine unendlichen Ketten $g_1, g_2, \ldots$ von Gegenständen mit $g_1' \subset g_2' \subset \ldots$ und keine unendlichen Ketten $m_1, m_2, \ldots$ von Merkmalen mit $m_1' \subset m_2' \subset \ldots$ gibt, ist doppelt fundiert.

c) Jeder Begriff eines doppelt fundierten Kontextes ist Supremum $\bigvee$-irreduzibler Begriffe und Infimum $\bigwedge$- irreduzibler Begriffe. Hilfssatz 12 gilt also auch für Begriffsverbände doppelt fundierter Kontexte.

d) Ist (G, M, I) doppelt fundiert und $g \in G$, $m \in M$, so gilt: wenn $g \swarrow m$, dann existiert ein Merkmal n mit $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$, wenn $g \nearrow m$, dann existiert ein Gegenstand h mit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$. Die Teile c) und d) von Hilfssatz 13 gelten also auch für doppelt fundierte Kontexte.

Beweis. b) Ist $g \not\!I m_i$ und gilt nicht $g \nearrow m_i$, so existiert nach der Definition der Pfeilrelationen ein Merkmal $m_{i+1} \neq m_i$ mit $g \not\!I m_{i+1}$ und $m_i' \subset m_{i+1}'$. Gilt zusätzlich $g \swarrow m_i$, so folgt auch $g \swarrow m_{i+1}$. Mit diesem Argument erhält man, ausgehend von $m_1 := m$ eine Kette vom Merkmalen mit anwachsenden Merkmalumfängen. Diese Kette muß nach Voraussetzung endlich sein, und endet schließlich mit einem Merkmal $m_j =: n$ mit $g \nearrow n$ und $g \swarrow n$, also $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$.
a) folgt unmittelbar aus b).
c) Sei (A, B) ein Begriff und $(C, D) := \bigvee\{\gamma x \mid x \in A, \gamma x\ \bigvee\text{–irreduzibel}\}$. Angenommen $(C, D) < (A, B)$. Dann gibt es $m \in D$, $g \in A$ mit $g \not\!I m$. Also gibt es ein $h \in G$ mit $h \swarrow m$ und $g' \subseteq h'$, also $h \in A$. Wegen $h \swarrow m$ ist γh $\bigvee$-irreduzibel, also $h \in C$ und damit $m \in h'$, was ein Widerspruch ist.
d) Aus $g \swarrow m$ folgt $g \not\!I m$, also existiert ein $n \in M$ mit $m' \subseteq n'$ und $g \nearrow n$. Zusammen ergibt sich $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$. □

Hilfssatz 15. *Ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ doppelt fundiert, dann ist auch (G, M, I) doppelt fundiert. Ist ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$ nicht doppelt fundiert, dann ist auch der Kontext $(V, V, \leq)$ nicht doppelt fundiert.*

Beweis. Sei $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ doppelt fundiert und $g \in G$, $m \in M$ mit $g \not\!I m$, also $\gamma g \not\leq \mu m$. Zu $\mathfrak{x} := \mu m$ und $\mathfrak{y} := \mu m \vee \gamma g$ existiert ein Begriff $\mathfrak{t}$, welcher maximal ist bezüglich $\mathfrak{t} \geq \mathfrak{x}$, $\mathfrak{t} \not\geq \mathfrak{y}$. Aufgrund dieser Maximalitätseigenschaft muß $\mathfrak{t}$ $\bigwedge$-irreduzibel sein, es gibt also ein Merkmal n mit $\mathfrak{t} = \mu n$. Somit gilt $g \nearrow n$ und $m' \subseteq n'$. Dual ergibt sich die zweite Bedingung.

Ist aber $(V, V, \leq)$ doppelt fundiert, so muß auch $\boldsymbol{V}$ es sein: Sei $x < y$ in $\boldsymbol{V}$, dann gilt sicher $y \not\leq x$, d.h. $y \not\!I x$ in $(V, V, \leq)$. Aus der Definition der Doppeltfundiertheit von $(V, V, \leq)$ folgt nun die Existenz eines Elements $s \in V$

mit $s \swarrow x$ und $y' \subseteq s'$, also ist s minimal bzgl. $s \nleq x$, $s \leq y$. Die zweite Bedingung zeigt man wieder mit dem dualen Argument. □

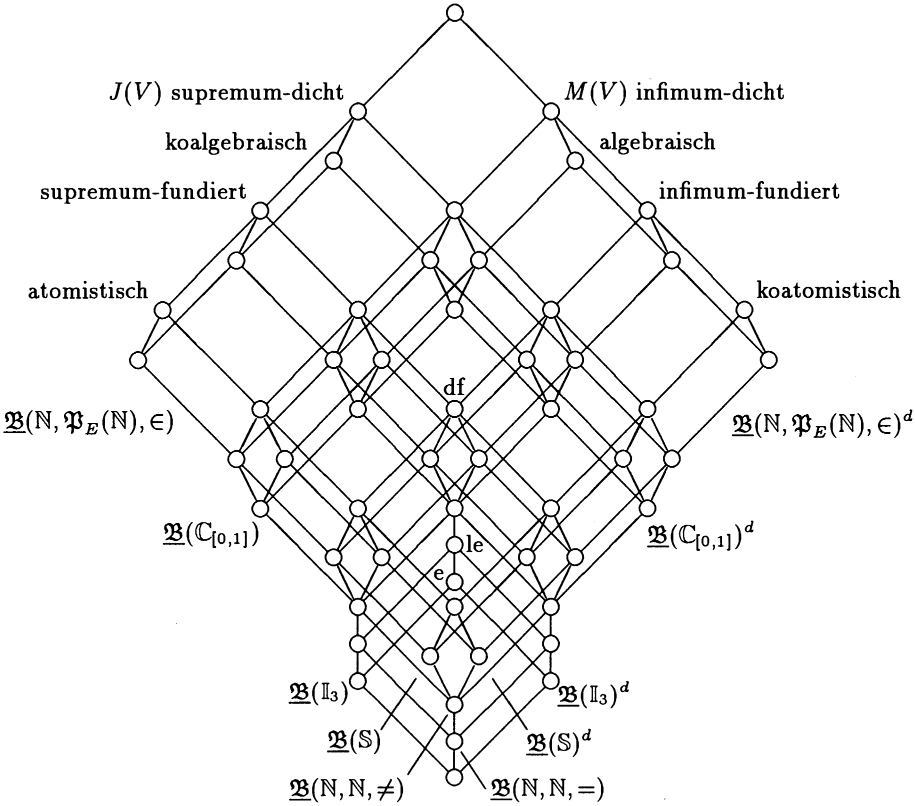
Ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$ ist also genau dann doppelt fundiert, wenn *jeder* Kontext (G, M, I) mit $\boldsymbol{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ doppelt fundiert ist. Man beachte aber, daß der Begriffsverband eines doppelt fundierten Kontextes nicht doppelt fundiert zu sein braucht, wie das Beispiel $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, \leq)$ zeigt.

Es kommt häufig vor, daß eine Aussage für alle endlichen, nicht aber für alle vollständigen Verbände bewiesen werden kann. Wir werden in diesem Buch an solchen Stellen nach Möglichkeit die Endlichkeitsbedingung durch „doppelt fundiert" ersetzen. Das ist nicht in jedem Fall die weitestgehende Abschwächung, die Festlegung auf „doppelt fundiert" geschieht aus Gründen der Einheitlichkeit. In der mathematischen Verbandstheorie sind zahlreiche andere Bedingungen gebräuchlich, von denen wir in Abbildung 1.11 einige in ihrer Hierarchie zeigen. Die dabei verwendeten Benennungen erläutern wir hier nur kurz: Ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ ist **supremum-fundiert**, wenn es zu je zwei Elementen $x < y$ aus V ein Element $s \in V$ gibt, welches minimal ist bezüglich $s \leq y$, $s \nleq x$. Die duale Eigenschaft ist **„infimum-fundiert"**. Ein Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist **algebraisch** (dual: **koalgebraisch**), wenn für jede Teilmenge $A \subseteq G$ aus

$$E \subseteq A \Rightarrow E'' \subseteq A \text{ für jede endliche Teilmenge } E$$

schon $A = A''$ folgt. Eine geordete Menge ist **längenendlich**, wenn jede in ihr enthaltene Kette endlich ist.

Der in Abbildung 1.11 gezeigte Verband ist Ergebnis einer Merkmalexploration im Sinne von §2.3, die dargestellten Implikationen zwischen den Eigenschaften sind also tatsächlich beweisbar. Auf die Wiedergabe der Beweise wird aber hier verzichtet.



Die Abkürzungen bedeuten: df := doppelt fundiert, le := längenendlich, e := endlich. Mit $\mathfrak{P}_E(\mathbb{N})$ wird die Menge aller endlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen bezeichnet, weiter sei $\mathbb{S}$ der Kontext, der als Subposition (vergl. §1.4) der Kontexte $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}_E(\mathbb{N}), \in)$ und $(\mathfrak{P}_E(\mathbb{N}), \mathfrak{P}_E(\mathbb{N}), =)$ entsteht. $\mathbb{C}_{[0,1]}$ ist die (in §1.4 definierte) konvex-ordinale Skala zum reellen Einheitsintervall $([0,1], \leq)$.

Abbildung 1.11. Die Fundiertheit im Vergleich zu verwandten Bedingungen.

1.3 Mehrwertige Kontexte

Umgangssprachlich wird das Wort „Merkmal" nicht nur für Eigenschaften verwendet, die ein Gegenstand haben oder nicht haben kann: Merkmale wie „Farbe", „Gewicht", „Geschlecht", „Note" haben *Ausprägungen* oder *Werte*. Wir bezeichnen sie als *mehrwertige Merkmale*, im Unterschied zu den bisher betrachteten *einwertigen Merkmalen*.

Definition 27. Ein **mehrwertiger Kontext** (G, M, W, I) besteht aus den Mengen G, M und W und einer dreistelligen Relation I zwischen G, M und W (d.h. $I \subseteq G \times M \times W$), wobei gilt:

$$\text{aus } (g, m, w) \in I \text{ und } (g, m, v) \in I \text{ folgt stets } w = v.$$

Die Elemente von G nennen wir die **Gegenstände**, die von M die **(mehrwertigen) Merkmale** und die von W die **Merkmalausprägungen** oder **Werte**. $(g, m, w) \in I$ lesen wir als „das Merkmal m hat beim Gegenstand g den Wert w". (G, M, W, I) heißt n-**wertiger Kontext**, wenn W n Elemente hat. Die mehrwertigen Merkmale können als partielle Abbildungen aus G in W verstanden werden, dies legt es nahe, $m(g) = w$ statt $(g, m, w) \in I$ zu schreiben. Der **Definitionsbereich** eines Merkmals m wird definiert als

$$\operatorname{dom}(m) := \{g \in G \mid (g, m, w) \in I \text{ für ein } w \in W\}.$$

Das Merkmal m heißt **vollständig**, falls $\operatorname{dom}(m) = G$ ist, ein mehrwertiger Kontext heißt **vollständig**, falls alle Merkmale vollständig sind. $\Diamond$

Wie die bisher behandelten **einwertigen** Kontexte können mehrwertige Kontexte durch Tabellen dargestellt werden, bei denen die Zeilen mit den Gegenständen und die Spalten mit den Merkmalen benannt sind. Der Eintrag in Zeile g und Spalte m ist dann die Merkmalausprägung $m(g)$. Hat das Merkmal m keine Ausprägung beim Gegenstand g, so wird auch nichts eingetragen.[6]

Beispiel 5. Der im oberen Teil von Abbildung 1.13 dargestellte mehrwertige Kontext enthält einen Vergleich der verschiedenen Möglichkeiten, Motor und Antrieb eines PKW anzuordnen (vgl. Abbildung 1.12).

Wie kann man einem mehrwertigen Kontext Begriffe zuordnen? Wir tun dies auf folgende Weise: Der mehrwertige Kontext wird in einen einwertigen verwandelt, nach Regeln, die wir unten erklären. Die Begriffe dieses *abgeleiteten* einwertigen Kontextes werden dann als Begriffe des mehrwertigen Kontextes gedeutet. Dieser Interpretationsvorgang, **begriffliche Skalierung** genannt, ist aber keineswegs eindeutig, das Begriffssystem eines mehrwertigen Kontextes hängt also von der Skalierung ab. Das kann zunächst verwirren, es

[6] Zur Rolle der „leeren Zellen" in einem Kontext ist in den Hinweisen am Ende des Kapitels noch mehr gesagt.

Abbildung 1.12. Antriebskonzepte für Personenkraftwagen.[7]

erweist sich aber als ein vorzügliches Instrument zur zweckgerichteten Auswertung von Daten.

Zur Skalierung wird zunächst jedes Merkmal eines mehrwertigen Kontextes durch einen Kontext interpretiert, dieser wird *begriffliche Skala* genannt.

Definition 28. Eine **Skala** zum Merkmal m eines mehrwertigen Kontextes ist ein (einwertiger) Kontext $\mathbb{S}_m := (G_m, M_m, I_m)$ mit $m(G) \subseteq G_m$. Die Gegenstände einer Skala nennen wir **Skalenwerte**, die Merkmale **Skalenmerkmale**. $\Diamond$

Jeder Kontext kann als Skala verwendet werden, formal besteht zwischen Skala und Kontext kein Unterschied. Wir wollen die Bezeichung „Skala" aber nur für solche Kontexte verwenden, die eine klare begriffliche Struktur haben und die Bedeutung tragen. Einige besonders einfache Kontexte werden immer wieder als Skalen benutzt, die wichtigsten sind am Ende des nächsten Abschnitts tabellarisch zusammengestellt.

Die Wahl der Skala zum Merkmal m ist, wie gesagt, mathematisch nicht zwingend, es handelt sich um eine Interpretationsentscheidung. Das gleiche gilt für den zweiten Schritt der **Skalierung**, das Zusammenfügen der Skalen zu einem einwertigen Kontext. Im einfachsten Fall genügt dafür das unverbundene Zusammenstellen der Einzelskalen, wir beschreiben dies unten als *schlichte Skalierung*. Besonders im Fall numerischer Skalen wird man sich damit aber nicht zufrieden geben, man benötigt dann die Skalierung mit Hilfe eines *Kompositionsoperators*. Wir verweisen dazu auf die am Ende des Kapitels angegebene Literatur.

Bei der **schlichten Skalierung** erhält man aus dem mehrwertigen Kontext (G, M, W, I) und den Skalenkontexten $\mathbb{S}_m$, $m \in M$, den abgeleiteten einwertigen Kontext wie folgt: Die Gegenstandsmenge G bleibt unverändert, jedes mehrwertige Merkmal m wird ersetzt durch die Skalenmerkmale der Skala $\mathbb{S}_m$. Denkt man sich einen mehrwertigen Kontextes durch eine Tabelle dargestellt, so kann man sich die schlichte Skalierung folgendermaßen veranschaulichen: Jede Merkmalausprägung $m(g)$ wird ersetzt durch die zu $m(g)$ gehörige Zeile des Skalenkontextes $\mathbb{S}_m$. Die genaue Beschreibung erfährt man in der folgenden Definition, für die wir noch eine Abkürzung benötigen: Die Merkmalmenge des abgeleiteten Kontextes ist die disjunkte Vereinigung der

[7] Quelle: *Schlag nach! 100 000 Tatsachen aus allen Wissensgebieten.* BI-Verlag Mannheim, 1982.

Merkmalmengen der beteiligten Skalen. Um sicherzustellen, daß die Mengen disjunkt sind, ersetzt man die Merkmalmenge der Skala $\mathbb{S}_m$ wie in Definition 8 (S. 4) durch

$$\dot{M}_m := \{m\} \times M_m.$$

Definition 29. Ist (G, M, W, I) ein mehrwertiger Kontext und sind $\mathbb{S}_m$, $m \in M$, Skalenkontexte, so ist der **abgeleitete Kontext bezüglich der schlichten Skalierung** der Kontext (G, N, J) mit

$$N := \bigcup_{m \in M} \dot{M}_m,$$

und

$$gJ(m,n) :\Longleftrightarrow m(g) = w \text{ und } wI_m n. \qquad \Diamond$$

Beispiel 6. Der einwertige Kontext in Abbildung 1.13 ergibt sich als der abgeleitete Kontext zu dem darüber abgebildeten mehrwertigen Kontext, wenn folgende Skalen benutzt werden:

$\mathbb{S}_{\mathrm{Au}} := \mathbb{S}_{\mathrm{Ab}} :=$

	++	+	−
++	×	×	
+		×	
−			×

$\mathbb{S}_{\mathrm{F}} :=$

	++	+	−−
++	×	×	
+		×	
−−			×

$\mathbb{S}_{\mathrm{E}} :=$

	u	ü	n	u/n
u	×			
ü		×		
n			×	
u/n				×

$\mathbb{S}_{\mathrm{R}} := \mathbb{S}_{\mathrm{W}} :=$

	++	+	−	−−
++	×	×		
+		×		
−			×	
−−			×	×

$\mathbb{S}_{\mathrm{B}} :=$

	sg	g	m	h
sg	×	×		
g		×		
m			×	
h				×

Hätten wir für die Merkmale *Au*, *Ab* und *F* ebenfalls die Skala $\mathbb{S}_R$ verwendet, wäre der abgeleitete Kontext nur unwesentlich anders ausgefallen. Den Begriffsverband zeigt Abbildung 1.14.

Die formale Definition des Kontextes erlaubt es, Relationen aus beliebigen Zusammenhängen zu Kontexten zu machen und ihre Begriffsverbände zu untersuchen, also auch solche, bei denen eine *Interpretation* der Mengen G und M als „Gegenstände" bzw. „Merkmale" künstlich erscheint. Das ist bei vielen aus der Mathematik stammenden Kontexten so, und man bekommt auf diese Weise Begriffsverbände, die oft strukturelle Eigenschaften haben, welche bei empirischen Datensätzen höchst selten auftreten. Dennoch sind diese Kontexte auch für die Datenanalyse von großer Bedeutung, sie eignen sich z.B. als „Idealstrukturen" oder als Skalen für die oben eingeführte Skalierung. Die am weitaus häufigsten verwendeten, die *Elementarskalen*, stellen wir nun vor, weitere folgen dann im nächsten Abschnitt.

Wir beginnen mit der Definition einiger Operationen, die es erlauben, aus gegebenen Kontexten neue zu konstruieren.

	Au	Ab	F	E	R	B	W
Standard	schlecht	gut	gut	untersteuernd	gut	mittel	sehr gut
Front	gut	schlecht	sehr gut	untersteuernd	sehr gut	sehr gering	gut
Heck	sehr gut	sehr gut	sehr schlecht	übersteuernd	schlecht	gering	sehr schlecht
Mittel	sehr gut	sehr gut	gut	neutral	sehr schlecht	gering	sehr schlecht
Allrad	sehr gut	sehr gut	gut	unterst./neutral	gut	hoch	schlecht

	Au			Ab			F			E				R				B				W			
	++	+	–	++	+	–	++	+	– –	u	ü	n	u/n	++	+	–	– –	sg	g	m	h	++	+	–	– –
Standard			×		×			×		×					×					×		×	×		
Front		×				×	×	×		×				×	×			×	×				×		
Heck	×	×		×	×				×		×					×			×				×		
Mittel	×	×		×	×			×				×				×	×		×					×	×
Allrad	×	×		×	×			×					×		×						×			×	

Au := Antriebswirkung unbeladen; Ab := Antriebswirkung beladen; F := Fahrstabilität; E := Eigenlenkverhalten; R := Raumausnutzung; B := Bauaufwand; W := Wartungsfreundlichkeit.
++ := sehr gut; + := gut; – := schlecht; – – := sehr schlecht; u := untersteuernd;
ü := übersteuernd; n := neutral; sg := sehr gering; g := gering, m := mittel; h := hoch.

Abbildung 1.13. Ein mehrwertiger Kontext: Antriebskonzepte für Personenkraftwagen. Darunter ein abgeleiteter einwertiger Kontext.

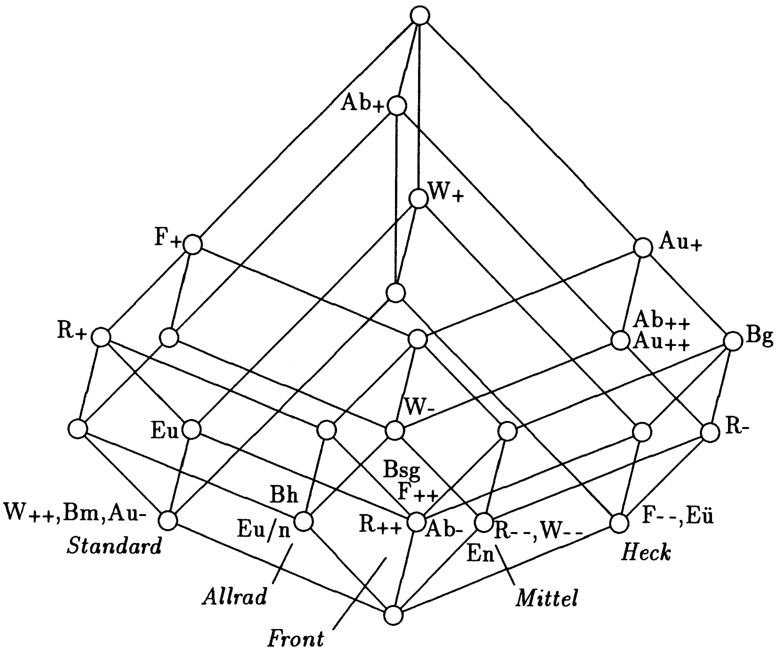


Abbildung 1.14. Begriffsverband zum Kontext der Antriebskonzepte.

Definition 30. Seien $\mathbb{K} := (G, M, I)$, $\mathbb{K}_1 := (G_1, M_1, I_1)$ und $\mathbb{K}_2 := (G_2, M_2, I_2)$ Kontexte. Wir benutzen die Abkürzungen $\dot{G}_j := \{j\} \times G_j$, $\dot{M}_j := \{j\} \times M_j$ und $\dot{I}_j := \{((j,g),(j,m)) \mid (g,m) \in I_j\}$ für $j \in \{1,2\}$ in der folgenden Definition. Es ist:

$$\mathbb{K}^c := (G, M, (G \times M) \setminus I)$$

der **komplementäre Kontext** zu $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^d := (M, G, I^{-1})$$

der **duale Kontext** zu $\mathbb{K}$,

und, falls $G = G_1 = G_2$,

$$\mathbb{K}_1 \mid \mathbb{K}_2 := (G, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2)$$

die **Apposition** von $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$,

sowie dual, falls $M = M_1 = M_2$,

$$\frac{\mathbb{K}_1}{\mathbb{K}_2} := (\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, M, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2)$$

die **Subposition** von $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$.

Schließlich sei

$$\mathbb{K}_1 \dot{\cup} \mathbb{K}_2 := (\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2)$$

die **disjunkte Vereinigung** von $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$.

Den Kontext $\mathbb{K}^{cd}$ nennen wir den zu $\mathbb{K}$ **konträren Kontext**. ◊

Der Gebrauch von $\dot{G}_i$ für $\{i\} \times G_i$ und entsprechend $\dot{M}_i$ soll sicherstellen, daß die Mengen disjunkt sind. Streng genommen werden dadurch aber Apposition und Subposition nichtassoziativ. Wir werden darüber hinwegsehen und stillschweigend die Kontexte

$$(\ \mathbb{K}_1 \mid \mathbb{K}_2\ ) \mid \mathbb{K}_3 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{K}_1 \mid (\ \mathbb{K}_2 \mid \mathbb{K}_3\ )$$

identifizieren. Das gleiche gilt für die Subposition, ja sogar für Mischformen der beiden Operationen. Wir unterscheiden nicht zwischen

$$\frac{\mathbb{K}_1 \mid \mathbb{K}_2}{\mathbb{K}_3 \mid \mathbb{K}_4} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbb{K}_1}{\mathbb{K}_3} \left| \frac{\mathbb{K}_2}{\mathbb{K}_4} \right. .$$

Die beiden Abkürzungen

$$\begin{aligned} \times &:= (G, M, G \times M) \\ \emptyset &:= (G, M, \emptyset) \end{aligned}$$

verwenden wir gelegentlich ohne weitere Angabe der Mengen G und M, wenn diese sich aus dem Zusammenhang ergeben. So ist etwa mit

$$\begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & \times \\ \hline \emptyset & \mathbb{K}_2 \end{array}$$

der Kontext $(\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2 \cup (\dot{G}_1 \times \dot{M}_2))$ gemeint, dessen Begriffsverband isomorph zur **vertikalen Summe** der Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ ist (sofern nicht $\mathbb{K}_1$ eine Vollspalte und $\mathbb{K}_2$ eine Vollzeile enthält, vergl. 4.3).

$$\begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & \mathbb{K}_2 \end{array}$$

Jeder Begriffsumfang von $\mathbb{K}_1 \dot{\cup} \mathbb{K}_2$, mit Ausnahme des Umfanges $\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2$, liegt ganz in einer der Mengen $\dot{G}_i$. Entsprechendes gilt für Inhalte; der Begriffsverband $\boldsymbol{V} := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \dot{\cup} \mathbb{K}_2)$ ist deshalb eine **horizontale Summe**, d.h. er ist die Vereinigung $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 \dot{\cup} \boldsymbol{V}_2$ zweier Unterverbände, die sich nur im kleinsten und im größten Element überlappen: $\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2 = \{0_V, 1_V\}$. Sofern in $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ keine Vollzeilen oder -spalten vorkommen, hat man $\boldsymbol{V}_i \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_i)$, allgemeiner $\boldsymbol{V}_i = \underline{\mathfrak{B}}(\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_i)$.

Wir hatten in Definition 28 verlangt, daß die Ausprägungen des mehrwertigen Merkmals Gegenstände der Skala sein sollten. Bei den nun folgenden *standardisierten Skalen* verwenden wir als Gegenstandsmenge gern $\mathbf{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$, für die Skalierung eines mehrwertigen Merkmals müssen die Gegenstände dann zunächst umbenannt werden. Die geeigneten Definitionen für die Isomorphie von Skalen werden später, in Kapitel 7.3 (S. 260 ff.), noch vorgestellt.

Definition 31 (Elementarskalen, siehe auch Abbildung 1.15)

Nominalskalen. $\mathbb{N}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, =)$.
Nominalskalen werden zur Skalierung von Merkmalen verwendet, deren Ausprägungen sich gegenseitig ausschließen. Hat ein Merkmal z.B. die Werte {*männlich, weiblich, sächlich*}, so liegt es nahe, es nominal zu skalieren. Es ergibt sich dadurch eine *Partition* der Gegenstände in Begriffsumfänge. Die Klassen entsprechen dabei den Ausprägungen des Merkmals.

	1	2	3	4
1	×			
2		×		
3			×	
4				×

Die Nominalskala $\mathbb{N}_4$.

(Eindimensionale) Ordinalskalen. $\mathbb{O}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq)$.

$\mathbb{O}_4 =$

	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×	×	×
3			×	×
4				×

Ordinalskalen skalieren mehrwertige Merkmale, deren Ausprägungen geordnet sind und bei denen jede Merkmalsausprägung die jeweils schwächeren impliziert. Hat ein Merkmal z.B. die Ausprägungen {*laut, sehr laut, extrem laut*}, so liegt es nahe, es ordinal zu skalieren. Die Merkmalsausprägungen bewirken dann eine Kette von Begriffsumfängen, die als *Rangordnung* gedeutet werden kann.

(Eindimensionale) Interordinalskalen. $\mathbb{I}_n := \quad (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq) \mid (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \geq)$.

$\mathbb{I}_4 =$

	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≥ 1	≥ 2	≥ 3	≥ 4
1	×	×	×	×	×			
2		×	×	×	×	×		
3			×	×	×	×	×	
4				×	×	×	×	×

In Fragebögen werden als Antwortmöglichkeiten oft Gegensatzpaare angeboten wie *aktiv–passiv*, *redselig–wortkarg* usw., wobei man sich für Zwischenwerte entscheiden kann. Die Ausprägungen sind dann *bipolar* geordnet. Für solche Merkmale kann die Skalierung durch Interordinalskalen fruchtbar sein. Die Begriffsumfänge der Interordinalskala sind genau die Intervalle von Ausprägungen, auf diese Weise wird die *Zwischenbeziehung* begrifflich wiedergegeben. Bipolare Merkmale können aber oft auch treffend *biordinal* skaliert werden:

Biordinalskalen. $\mathbb{M}_{n,m} := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq) \dot{\cup} (\mathbf{m}, \mathbf{m}, \geq)$.

$\mathbb{M}_{4,2} =$

	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≥ 5	≥ 6
1	×	×	×	×		
2		×	×	×		
3			×	×		
4				×		
5					×	
6					×	×

Im Sprachgebrauch verwenden wir Gegensatzpaare häufig nicht in Sinne der Interordinalskala, sondern einfacher: jedem Gegenstand wird einer der beiden Pole zugeordnet, wobei noch abgestuft werden kann. Die Ausprägungen {*sehr leise, leise, laut, sehr laut*} legen z.B. eine solche Skalierung nahe: *laut* und *leise* schließen sich aus, *sehr laut* impliziert *laut*, *sehr leise* impliziert *leise*. Eine entsprechende *Partition mit Rangordnung* hat man in den Namen der Schulnoten: Eine sehr gute Leistung ist natürlich auch gut, befriedigend und ausreichend, aber nicht mangelhaft oder ungenügend.

Die **dichotome Skala.** $\mathbb{D} := (\{0,1\}, \{0,1\}, =)$
Sie spielt eine Sonderrolle, denn sie ist zu den Skalen $\mathbb{N}_2$ und $\mathbb{M}_{1,1}$ isomorph und mit $\mathbb{I}_2$ eng verwandt. Sie wird häufig benutzt, um Merkmale mit {*ja, nein*}-Ausprägungen zu skalieren.

	0	1
0	×	
1		×

Ein oft auftretender Spezialfall der schlichten Skalierung ist der, daß alle mehrwertigen Merkmale bezüglich der gleichen Skala oder Skalenfamilie interpretiert werden. So spricht man von einem **nominal skalierten Kontext**, wenn alle Skalen $\mathbb{S}_m$ Nominalskalen sind, etc. Wir nennen einen mehrwertigen Kontext **nominal**, wenn die Art der Daten eine nomimale Skalierung naheliegt; von einem **ordinalen Kontext** spricht man bei einem mehrwertigen Kontext, wenn für jedes Merkmal die Menge der Ausprägungen auf natürliche Weise geordnet ist. Ein Beispiel zeigt Abbildung 1.16, siehe auch Abbildung 1.17.

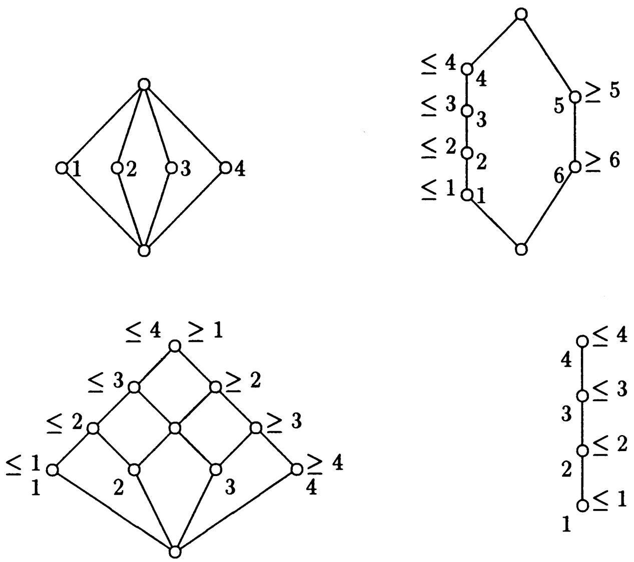


Abbildung 1.15. Die Begriffsverbände der Elementarskalen werden nach den Skalen benannt. Das Bild zeigt einen **Nominalverband**, $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{N}_4)$, einen **Biordinalverband**, $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{M}_{4,2})$, einen **Interordinalverband**, $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{I}_4)$, und einen **Ordinalverband**, $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{O}_4)$. Der Ordinalverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{O}_n)$ ist isomorph zur n-elemetigen **Kette** C_n.

Forum Romanum		B	GB	M	P
1	Triumphbogen des Septimus Severus	*	*	**	*
2	Titusbogen	*	**	**	
3	Basilica Julia			*	
4	Maxentius-Basilica	*			
5	Phocassäule		*	**	
6	Curia				*
7	Haus der Vestalinnen			*	
8	Portikus der zwölf Götter		*	*	*
9	Tempel des Antonius und der Fausta	*	*	***	*
10	Tempel des Castor und Pollux	*	**	***	*
11	Tempel des Romulus		*		
12	Tempel des Saturn			**	*
13	Tempel des Vespasian			**	
14	Tempel der Vesta		**	**	*

Abbildung 1.16. Beispiel eines ordinalen Kontextes: Bewertungen von Monumenten des Forum Romanum in verschiedenen Reiseführern (B = Baedecker, GB = Les Guides Bleus, M = Michelin, P = Polyglott). Ordinal wird der Kontext durch die Anzahl der jeweils vergebenen Sterne; ist kein Stern angegeben, so wird dies als Null gewertet.

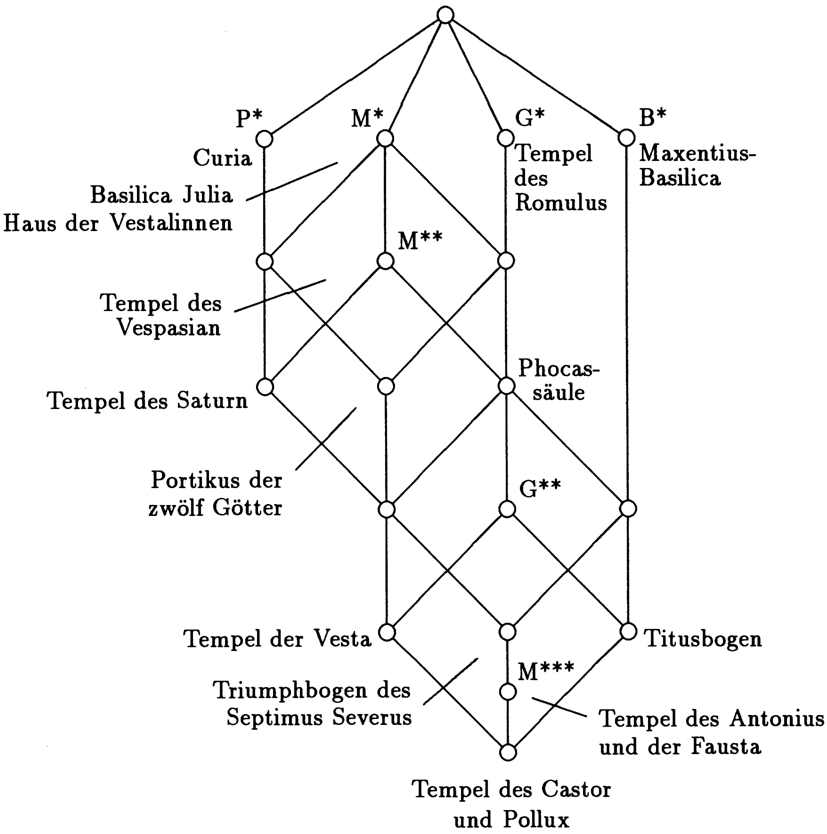


Abbildung 1.17. Der Begriffsverband zum ordinalen Kontext aus Abbildung 1.16.

1.4 Kontextkonstruktionen und Standardskalen

Die folgenden häufig gebrauchten Summen- und Produktkonstruktionen für Kontexte haben wir jeweils für den Fall von zwei Kontexten formuliert. Die Definitionen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf beliebig viele Kontexte verallgemeinern. Die ergänzenden Informationen über die Begriffsverbände der entstehenden Kontexte übertragen sich.

Definition 32. Die **direkte Summe** zweier Kontexte ist definiert durch[8]

$$\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2 := (\dot{G}_1 \cup \dot{G}_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \dot{I}_1 \cup \dot{I}_2 \cup (\dot{G}_1 \times \dot{M}_2) \cup (\dot{G}_2 \times \dot{M}_1))$$

$\Diamond$

Der Begriffsverband der Summe von Kontexten ist isomorph zum Produkt ihrer Begriffsverbände. Im Fall zweier Kontexte hat man also

$\mathbb{K}_1$	×
×	$\mathbb{K}_2$

$$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \times \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2),$$

denn (A, B) ist genau dann ein Begriff von $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$, wenn $(A \cap \dot{G}_i, B \cap \dot{M}_i)$ ein Begriff von $\mathbb{K}_i := (\dot{G}_i, \dot{M}_i, \dot{I}_i)$ ist, für $i \in \{1, 2\}$. Der Isomorphismus ist also durch $(A, B) \mapsto ((A \cap \dot{G}_1, B \cap \dot{M}_1), (A \cap \dot{G}_2, B \cap \dot{M}_2))$ gegeben.

Definition 33. Als **Halbprodukt** bezeichnet man

$$\mathbb{K}_1 \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \mathbb{K}_2 := (G_1 \times G_2, \dot{M}_1 \cup \dot{M}_2, \nabla)$$

mit

$$(g_1, g_2)\nabla(j, m) :\Longleftrightarrow g_j I_j m \qquad \text{für } j \in \{1, 2\}. \qquad \Diamond$$

Die Begriffsumfänge des Halbproduktes sind genau die Mengen der Form $A_1 \times A_2$, wobei jede der Mengen A_j ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}_j$ ist. Daraus ergibt sich auch die Struktur des Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \mathbb{K}_2)$: Er ist im wesentlichen das Produkt der Begriffsverbände der Faktorkontexte, allerdings mit einer Modifikation bezüglich der Nullelemente. Präzis lautet die Konstruktionsvorschrift folgendermaßen: Aus jedem der Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_j)$ entfernen wir das Nullelement, sofern der zugehörige Begriffsumfang leer ist. Dann bilden wir das Produkt dieser geordneten Mengen und ergänzen es, falls wir zuvor ein Element entfernt haben, durch Hinzufügen eines neuen Nullelements zu einem vollständigen Verband. Dieser ist dann isomorph zum Begriffsverband des Halbproduktes.

Definition 34. Das **direkte Produkt** ist gegeben durch

$$\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 := (G_1 \times G_2, M_1 \times M_2, \nabla)$$

$$\text{mit } (g_1, g_2)\nabla(m_1, m_2) :\Longleftrightarrow g_1 I_1 m_1 \text{ oder } g_2 I_2 m_2. \qquad \Diamond$$

[8] Zur Schreibweise vergleiche Definition 8 (S. 4).

Den Begriffsverband des direkten Produktes nennen wir das *Tensorprodukt* der Begriffsverbände der Faktorkontexte. Auf Tensorprodukte kommen wir noch ausführlich zurück (§4.4, §5.4). Die Kreuztabelle des direkten Produktes erhält man, indem man in der Tabelle von $\mathbb{K}_1$ jede leere Zelle durch eine Kopie von $\mathbb{K}_2$ und jedes Kreuz durch ein Rechteck voller Kreuze, welches die Größe von $\mathbb{K}_2$ hat, ersetzt. Ein Beispiel findet man in den Abbildungen 4.15 (Seite 165) und 4.16.

Eine weitere Kontextkonstruktion, nämlich die **Substitutionssumme**, bei der man einen Kontext in einen anderen einsetzt, wird in Abschnitt 4.3 beschrieben. Summe und Produkt reduzierter Kontexte sind reduziert (vergl. Korollar 74, S. 168). Bei der disjunkten Vereinigung können reduzible Gegenstände oder Merkmale mit leerem Inhalt bzw. Umfang auftreten. Halbprodukte reduzierter Kontexte sind reduziert, wenn die Faktoren (mit höchstens einer Ausnahme) **atomistisch** sind, d.h. $g' \subseteq h' \Rightarrow g = h$ erfüllen.

Für Kontextkonstruktionen lassen sich leicht zahlreiche einfache Rechenregeln angeben, die bei manchen Beweisen von Nutzen sind. Insbesondere ist das direkte Produkt (bis auf Isomorphie) kommutativ und assoziativ; es ist distributiv über der direkten Summe, der Apposition und der Subposition. Wir halten eines dieser Ergebnisse für später fest:

Hilfssatz 16.

$$(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2) \times \mathbb{K}_3 = (\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2) + (\mathbb{K}_2 \times \mathbb{K}_3).$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß die drei Kontexte $\mathbb{K}_i =: (G_i, M_i, I_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, disjunkte Gegenstandsmengen und disjunkte Merkmalmengen haben. Wegen

$$(G_1 \cup G_2) \times G_3 = (G_1 \times G_3) \cup (G_2 \times G_3)$$

und

$$(M_1 \cup M_2) \times M_3 = (M_1 \times M_3) \cup (M_2 \times M_3)$$

haben die beiden Kontexte im Hilfssatz die gleichen Gegenstände und Merkmale. Auch für die Inzidenz findet man auf beiden Seiten das gleiche, nämlich

$$(g,h)I(m,n) \iff \begin{cases} g \in G_1 \text{ und } m \in M_2 & \text{oder} \\ g \in G_2 \text{ und } m \in M_1 & \text{oder} \\ hI_3n & \text{oder} \\ g \in G_1, m \in M_1 \text{ und } gI_1m & \text{oder} \\ g \in G_2, m \in M_2 \text{ und } gI_2m. & \end{cases}$$ □

Wir geben nun eine Liste von interessanten Kontextfamilien an. Viele davon haben sich als Skalen bewährt; wir zeigen eine Übersicht, die auch Grundbedeutungen der Skalen enthält, am Ende des Abschnittes in Abbildung 1.26. Diese Kontexte dienen außerdem als Beispielreservoir für mathematische Überlegungen.

(1) Für jede Menge S ist die **Kontranominalskala**

$$\mathbb{N}_S^c := (S, S, \neq)$$

reduziert. Die Begriffe dieses Kontextes sind genau die Paare $(A, S \setminus A)$ für $A \subseteq S$. Der Begriffsverband ist isomorph zum Potenzmengenverband von S, hat also $2^{|S|}$ Elemente. Wenn $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist, schreiben wir $\mathbb{N}_n^c$.

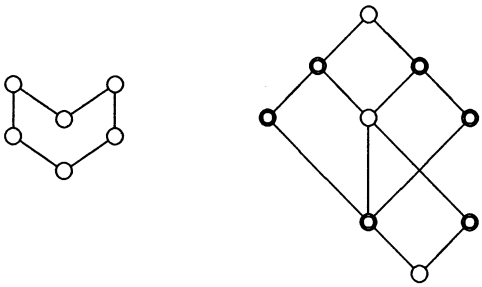


Abbildung 1.18. Beispiel einer geordneten Menge $(P, \leq)$ und ihrer Vervollständigung $\underline{\mathfrak{B}}(P, P, \leq)$.

(2) Aus einer beliebigen geordneten Menge $\boldsymbol{P} := (P, \leq)$ gewinnt man die **allgemeine Ordinalskala**

$$\mathbb{O}_{\mathbf{P}} := (P, P, \leq),$$

deren Begriffe genau die Paare (X, Y) sind mit $X, Y \subseteq P$, bei denen X die Menge aller unteren Schranken von Y und Y die Menge aller oberen Schranken von X ist. Diesen Begriffsverband nennt man die **Dedekind-MacNeille-Vervollständigung** der geordneten Menge $\boldsymbol{P}$. Er ist der kleinste vollständige Verband, in den $\boldsymbol{P}$ ordnungseingebettet werden kann, im Sinne des folgenden Satzes:

Satz 4. (Dedekindscher Vervollständigungssatz) *Für eine geordnete Menge $(P, \leq)$ wird durch*

$$\iota x := ((x], [x)) \text{ für } x \in P$$

eine Einbettung ι von $(P, \leq)$ in $\underline{\mathfrak{B}}(P, P, \leq)$ definiert; insbesondere gilt $\iota \bigvee X = \bigvee \iota X$ bzw. $\iota \bigwedge X = \bigwedge \iota X$, falls in $(P, \leq)$ das Supremum bzw. Infimum von X existiert. Ist κ irgendeine Einbettung von $(P, \leq)$ in einen vollständigen Verband V, dann existiert stets auch eine Einbettung λ der geordneten Menge $\underline{\mathfrak{B}}(P, P, \leq)$ in V mit $\kappa = \lambda \circ \iota$.

Beweis. Die Begriffe von $(P, P, \leq)$ sind offenbar genau die Paare (A, B) mit $A, B \subseteq P$ und

$$\begin{aligned} A = B^{\downarrow} &:= \{x \in P \mid x \leq y \text{ für alle } y \in B\}, \\ B = A^{\uparrow} &:= \{y \in P \mid x \leq y \text{ für alle } x \in A\}; \end{aligned}$$

insbesondere sind also alle Paare $((x], [x))$ mit $x \in P$ Begriffe von $(P, P, \leq)$, was ι als Einbettung bestätigt. Existiert das Supremum von X in $(P, \leq)$, dann gilt $[\bigvee X) = \bigcap_{x \in X} [x)$, also $\iota \bigvee X = ((\bigvee X], [\bigvee X)) = \left((\bigcap_{x \in X} [x))^{\downarrow}, \bigcap_{x \in X} [x)\right) = \bigvee ((x], [x)) = \bigvee \iota X$. Die Gleichung für existierende Infima zeigt man dual.

Für den fehlenden Teil des Beweises verweisen wir auf Hilfssatz 33 (S. 99). □

(3) Ebenfalls aus einer beliebigen geordneten Menge $\boldsymbol{P} := (P, \leq)$ gewinnt man den reduzierten Kontext

$$\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}} := (P, P, \not\geq),$$

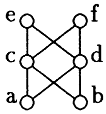
der auch **Kontraordinalskala** genannt wird. Die Begriffe sind hier gerade die Paare (X, Y) mit folgenden Eigenschaften:
- $X \cup Y = P$ und $X \cap Y = \emptyset$,
- X ist ein **Ordnungsideal** in $\boldsymbol{P}$, d.h. aus $x \in X$ und $z \leq x$ folgt stets $z \in X$. Wegen $X \cup Y = P$ und $X \cap Y = \emptyset$ ist dies äquivalent zu:
- Y ist ein **Ordnungsfilter** in $\boldsymbol{P}$, d.h. aus $y \in Y$ und $y \leq z$ folgt stets $z \in Y$.

Der Kontext $(P, P, \not\geq)$ ist doppelt fundiert: für $x, y \in P$ gilt nämlich:

$$x \swarrow y \iff x \nearrow y \iff x = y.$$

Ist also x ein Gegenstand und y ein Merkmal mit $x \not I y$ (also $x \geq y$), so gilt für das *Merkmal* x dann $x \nearrow x$ und $x' = P \setminus [x) \supset P \setminus [y) = y'$, wie in Definition 26 gefordert.

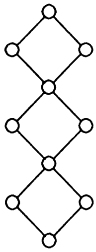
Der Begriffsverband $\mathfrak{B}(P, P, \not\geq)$ ist isomorph zum Verband der Ordnungsideale von $\boldsymbol{P}$. Ein Blick auf (1) zeigt, daß alle Begriffe der Kontraordinalskala auch Begriffe der Kontranominalskala $\mathbb{N}^c_P$ sind. Wir werden später (Satz 13, S. 112) beweisen, daß deshalb $\mathfrak{B}(P, P, \not\geq)$ ein vollständiger Unterverband von $\mathfrak{B}(P, P, \neq)$ ist. Diese Verbände sind also vollständig distributiv. Der *Satz von Birkhoff* (Satz 39, S. 220) zeigt, daß es genau die doppelt fundierten vollständig distributiven vollständigen Verbände sind, die so entstehen. Insbesondere ist also jeder endliche distributive Verband zum Begriffsverband einer Kontraordinalskala isomorph. Der duale Verband, also $\mathfrak{B}(P, P, \not\leq)$, wird oft mit $2^{\mathbf{P}}$ bezeichnet, weil er auch isomorph zum Verband der ordnungserhaltenden Abbildungen von $\boldsymbol{P}$ in den zweielementigen Verband ist.



$(P, \leq)$ $\longrightarrow$

	a	b	c	d	e	f
a		×	×	×	×	×
b	×		×	×	×	×
c				×	×	×
d			×		×	×
e						×
f					×	

$(P, P, \ngeq)$ $\longrightarrow$



$\underline{\mathfrak{B}}(P, P, \ngeq)$

Abbildung 1.19. Eine geordnete Menge $(P, \leq)$, die zugehörige Kontraordinalskala und ihr Begriffsverband, also der Idealverband von $(P, \leq)$.

(4) Einen interessanten Spezialfall von (3) erhält man, wenn man als geordnete Menge die Potenzmenge einer Menge S wählt, also den Kontext $(\mathfrak{P}(S), \mathfrak{P}(S), \not\supseteq)$ betrachtet. Wegen $A \not\supseteq B \iff B \cap (S \setminus A) \neq \emptyset$ ist dieser Kontext isomorph zu

$$(\mathfrak{P}(S), \mathfrak{P}(S), \Delta) \text{ mit } X \Delta Y :\iff (X \cap Y) \neq \emptyset.$$

Den Begriffsverband nennt man den **freien vollständig distributiven Verband** FCD(S). Bezeichnen wir für $S := \{1, 2, \ldots, n\}$ den Kontext $(\mathfrak{P}(S), \mathfrak{P}(S), \not\supseteq)$ mit $\mathbb{A}_n$, so läßt sich eine einfache Rekursionsvorschrift zur Erzeugung dieser Kontexte angeben:

$$\mathbb{A}_0 = \boxed{\emptyset} \quad \text{und} \quad \mathbb{A}_{n+1} = \begin{array}{c|c} \mathbb{A}_n & \times \\ \hline \mathbb{A}_n & \mathbb{A}_n \end{array}.$$

Eine Verallgemeinerung ergibt sich, wenn man als Grundmenge eine geordnete Menge $(S, \leq)$ zuläßt, als Menge der Gegenstände die Menge $\mathcal{OI}(S, \leq)$ der Ordnungsideale und als Merkmalmenge die Menge $\mathcal{OF}(S, \leq)$ der Ordnungsfilter von $(S, \leq)$ nimmt. Den Begriffsverband

$$\mathrm{FCD}(S, \leq) := (\mathcal{OI}(S, \leq), \mathcal{OF}(S, \leq), \Delta)$$

nennt man den **freien vollständig distributiven Verband über der geordneten Menge** $(S, \leq)$.

(5) Für eine beliebige geordnete Menge $(P, \leq)$ definieren wir einen **Filter** als eine Teilmenge von P, die ein Ordnungsfilter ist und in der außerdem je zwei Elemente eine gemeinsame untere Schranke besitzen. $F \subseteq P$ ist also genau dann ein Filter, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:
1. Aus $x \in F$ und $y \geq x$ folgt $y \in F$,
2. zu je zwei Elementen $x, y \in F$ existiert ein $u \in F$ mit $u \leq x$ und $u \leq y$.

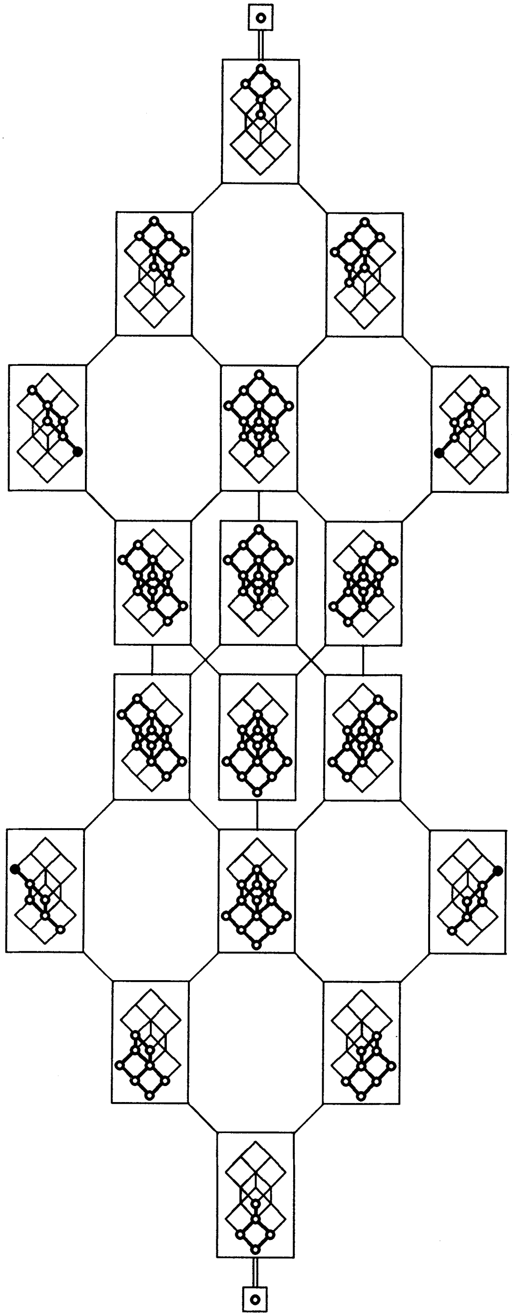


Abbildung 1.20. Ein gestuftes Liniendiagramm für den freien distributiven Verband FCD(4). Solche Diagramme werden in 2.2 erläutert. Das hier gezeigte Bild stammt von S. Thiele [177]. Die Technik, die dazu geführt hat, wird in Beispiel 14 (S. 216) erklärt.

Dual definiert man ein **Ideal** als eine Teilmenge von P, die Ordnungsideal ist und mit je zwei Elementen auch eine gemeinsame obere Schranke dieser Elemente enthält. Filter in diesem Sinne sind unter anderem die Hauptfilter. Dual ist jedes Hauptideal ein Ideal. Die Menge aller Filter bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(P,\leq)$, die aller Ideale mit $\mathcal{I}(P,\leq)$. Man erhält den doppelt fundierten Kontext

$$\mathbb{F}_{(P,\leq)} := (\mathcal{F}(P,\leq), \mathcal{I}(P,\leq), \Delta),$$

wobei wieder

$$F \Delta I :\Longleftrightarrow F \cap I \neq \emptyset.$$

(6) Wiederum aus einer geordneten Menge $\boldsymbol{P} := (P,\leq)$ ergibt sich die **allgemeine Interordinalskala**

$$\mathbb{I}_{\mathbf{P}} := (P,P,\leq) \mid (P,P,\geq),$$

deren Begriffssystem wir an den Umfängen erläutern: Merkmalumfänge sind genau die Hauptideale und die Hauptfilter von $\boldsymbol{P}$, Begriffsumfänge sind alle Durchschnitte dieser Mengen. Darunter sind alle Intervalle[9]. Allgemein sind es die Mengen, die *Durchschnitte von Intervallen* sind.

(7) Analog zu (6) wird die **konvex–ordinale Skala**

$$\mathbb{C}_{\mathbf{P}} := (P,P,\not\geq) \mid (P,P,\not\leq)$$

gebildet. Begriffsumfänge sind hier genau die **konvexen** Teilmengen von $\boldsymbol{P}$, das sind diejenigen Teilmengen, die mit je zwei Elementen a und b auch stets alle Elemente c mit $a \leq c \leq b$ enthalten.

	1,a	1,b	1,c	1,d	1,e	1,f	2,a	2,b	2,c	2,d	2,e	2,f
a		×	×	×	×	×		×				
b	×		×	×	×	×	×					
c				×	×	×	×	×		×		
d			×		×	×	×	×	×			
e						×	×	×	×	×		×
f					×		×	×	×	×	×	

Abbildung 1.21. Die konvex-ordinale Skala zur geordneten Menge aus Abbildung 1.19.

[9] im Sinne von Definition 5 (S. 3), gemeint sind also nur die „abgeschlossenen" Intervalle.

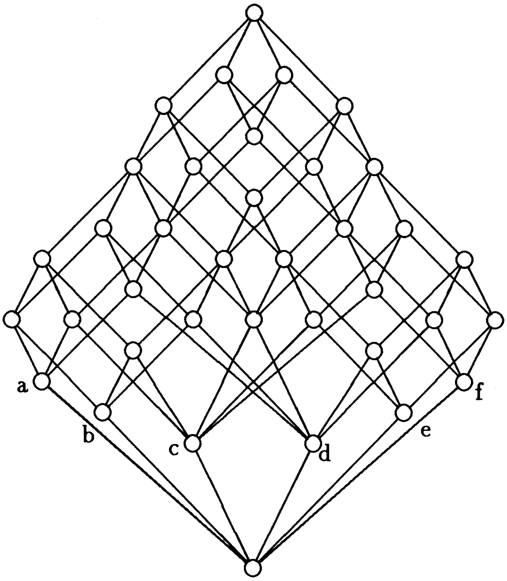


Abbildung 1.22. Der Begriffverband der konvex–ordinalen Skala aus Abbildung 1.21

(8) Sei S eine Menge, $s \in S$ ein beliebiges Element. Wählt man für G die Menge aller zweielementigen Teilmengen von S und für M die Menge aller Teilmengen von $S \setminus \{s\}$, so erhält man mit der Definition

$$\{x, y\} \diamond X :\Leftrightarrow |\{x, y\} \cap X| \neq 1$$

einen Kontext $(G, M, \diamond)$ mit $\binom{|S|}{2}$ Gegenständen und $2^{|S|-1}$ Merkmalen, der bis auf eine Vollspalte reduziert ist. Jeder Begriffsumfang dieses Kontextes ist eine Menge von zweielementigen Teilmengen von S, kann also als eine symmetrische reflexive Relation auf S verstanden werden; tatsächlich sind die dabei vorkommenden Relationen genau die Äquivalenzrelationen auf S. Der Begriffsverband $\mathfrak{B}(G, M, \diamond)$ ist also isomorph zum Äquivalenzrelationenverband $\mathfrak{E}(S)$.
Auch für diese Kontextserie können wir eine Merkregel angeben. Wir erhalten $\mathbb{P}_1 := (\emptyset, \{*\}, \emptyset)$ und gewinnen den $n+1$-ten Kontext dieser Serie, $\mathbb{P}_{n+1}$, aus dem n-ten folgendermaßen: Wir bilden die Apposition von $\mathbb{P}_n$ mit der Kreuztabelle $\mathbb{P}_n^{\text{rev}}$, die mit $\mathbb{P}_n$ identisch ist, außer daß die Spalten in umgekehrter Reihenfolge hingeschrieben werden.

$\mathbb{P}_n$	$\mathbb{P}_n^{\text{rev}}$
$2^n - 1 \quad \ldots \quad 2^{n-1}$	$2^{n-1} - 1 \quad \ldots \quad 0$

Wir fügen n weitere Zeilen hinzu, die wir so mit Kreuzen füllen, daß die Spalten dieses Teilkontextes wie die Binärdarstellungen der Zahlen $2^n - 1, \dots, 0$ aussehen. Ein Beispiel ist in Abbildung 1.23 angegeben.

1	0	0	1	1	0	0	1
3	2	1	0	0	1	2	3
7	6	5	4	3	2	1	0

$\longrightarrow$

×			×	×			×
×	×					×	×
×		×			×		×
×	×	×	×				
×	×			×	×		
×		×		×		×	

Abbildung 1.23. Kontext $\mathbb{P}_4$ zum Verband der Äquivalenzrelationen auf einer 4-elementigen Menge.

(9) Ist R eine symmetrische Relation auf S (leicht zu veranschaulichen durch die Kanten eines ungerichteten Graphen), so erhält man mit

$$(S, S, R)$$

einen Kontext, dessen Begriffe genau die Paare (A, B), $A \subseteq S$, $B \subseteq S$ sind, die maximal bezüglich der Eigenschaft sind, daß jedes Element in A mit jedem Element von B in der Relation R steht (in der Veranschaulichung also maximale vollständig bipartite Kantenmengen). Mit (A, B) ist demnach stets auch (B, A) ein Begriff, und die Abbildung

$$(A, B) \mapsto (B, A)$$

ist eine **Polarität**, d.h. eine ordnungsumkehrende Bijektion, die zu sich selbst invers ist (eine andere Bezeichnung dafür ist *involutorischer Antiautomorphismus*). Umgekehrt ist jeder vollständige **Polaritätsverband** (also jeder vollständige Verband mit einer Polarität) isomorph zum Begriffsverband eines Kontextes (S, S, R) mit symmetrischer Relation R.
Ist die Relation R außerdem irreflexiv, so müssen Umfang und Inhalt jedes Begriffes disjunkt sein, und man hat

$$(A, B) \wedge (B, A) = (\emptyset, \emptyset')$$

$$\text{und } (A, B) \vee (B, A) = (\emptyset', \emptyset),$$

(A, B) und (B, A) sind also zueinander **komplementär**: Ihr Infimum ist das kleinste, ihr Supremum das größte Element des Begriffsverbandes. Einen Verband mit einer solchen Polarität nennt man einen **Orthoverband**; die vollständigen Orthoverbände sind (bis auf Isomorphie) genau die Begriffsverbände von Kontexten mit irreflexiver, symmetrischer Relation.

Beispiele solcher Kontexte sind in diesem Buch häufig. Man erkennt sie leicht, wenn die Kreuztabelle symmetrisch zur Hauptdiagonalen angegeben ist. Der Kontext $\mathbb{K}_{(2,3)}$ aus Abbildung 1.24 ist Kontext eines Polaritätsverbandes, nicht aber eines Orthoverbandes. Das gleiche gilt auch für den Kontext aus Abbildung 5.9 (S. 205), wird aber erst mit Hilfe einer geschickt gewählten Umsortierung der Kreuztabelle deutlich.

×	×	×	×	×	×	×	×
×		×		×		×	
×	×			×	×		
×			×	×			×
×	×	×	×				
×		×			×		×
×	×					×	×
×			×		×	×	

Abbildung 1.24. $\mathbb{K}_{(3,2)}$

(10) Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und V^* der Dualraum von V, so ist

$$(V, V^*, \perp) \quad \text{mit} \quad a \perp \varphi :\iff \varphi a = 0$$

ein doppelt fundierter Kontext, dessen Begriffsumfänge genau die Untervektorräume von V sind.

Für den Spezialfall der Vektorräume über $GF(2)$ erhalten wir wieder eine einfache Rekursion zur Erzeugung dieser Kontexte: Für

$$\mathbb{K}_{(d,2)} := (GF(2)^d, (GF(2)^d)^*, \perp)$$

beweist man nämlich leicht

$$\mathbb{K}_{(d+1,2)} = \frac{\mathbb{K}_{(d,2)} \mid \mathbb{K}_{(d,2)}}{\mathbb{K}_{(d,2)} \mid \mathbb{K}^c_{(d,2)}}.$$

Ein Beispiel zeigt Abbildung 1.24.

(11) Ist H ein Hilbertraum und $\perp$ die Orthogonalitätsrelation, so ist der Begriffsverband des Kontextes

$$(H, H, \perp)$$

isomorph zum (orthomodularen) Verband der abgeschlossenen Teilräume von H; zu jedem solchen Teilraum U ist nämlich $(U, U^\perp)$ ein Begriff.

(12) Die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ kann auf natürliche Weise mit einer Verbandsordnung versehen werden. Dazu nennen wir ein Paar $(\varphi i, \varphi j)$ eine **Inversion** der Permutation φ, wenn $i < j$, aber $\varphi i > \varphi j$ gilt. Ordnet man die Permutationen durch

$$\sigma \leq \tau :\iff \text{jede Inversion von } \sigma \text{ ist auch Inversion von } \tau,$$

so erhält man, wie erstmals Yanagimoto und Okamoto [219] gezeigt haben, einen Verband Σ_n. Für die Kontextbeschreibung hat man eine einfache Rekursionsvorschrift: Setzt man

$$\mathbb{K}_0 := \mathbb{L}_0 := \boxed{\times} \quad \text{und}$$

$$\mathbb{L}_{n+1} := \frac{\emptyset \mid \mathbb{L}_n}{\mathbb{L}_n \mid \mathbb{L}_n}, \qquad \mathbb{K}_{n+1} := \frac{\mathbb{K}_n \mid \mathbb{K}_n}{\mathbb{K}_n \mid \mathbb{L}_n},$$

dann hat man

$$\Sigma_n \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_n).$$

Die Kontexte $\mathbb{K}_n$ sind bis auf Vollzeilen und -spalten reduziert. Σ_4 wird in Abbildung 1.25 gezeigt.

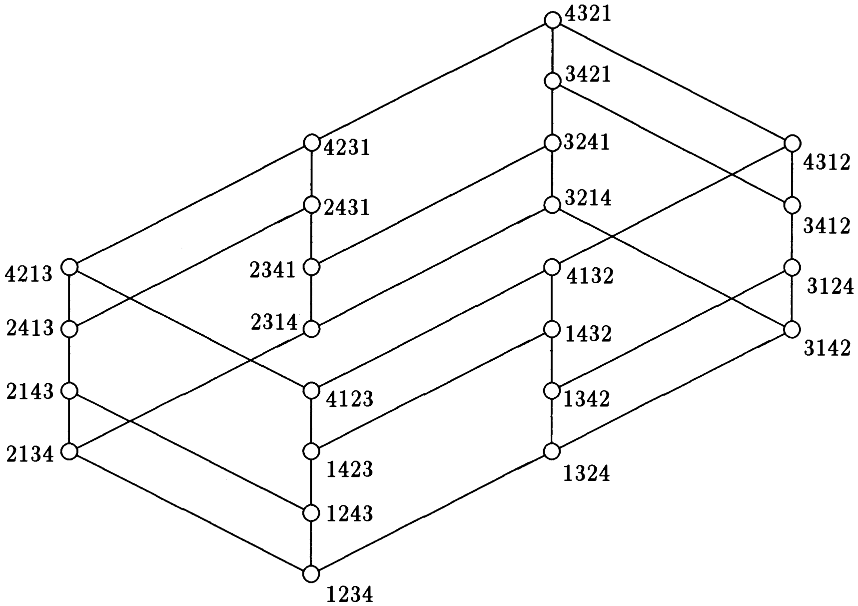


Abbildung 1.25. Der Verband Σ_4 der Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$

Wenn die in den Definitionen der Standardskalen auftretenden geordneten Mengen zusammengesetzt sind, etwa als kardinale Summe oder als direktes Produkt, dann wird man erwarten, daß auch die zugehörigen Skalen zerlegbar sind. Das ist auch der Fall, allerdings auf unterschiedliche Weise, wie die folgenden Regeln beispielhaft zeigen:

Hilfssatz 17.

$$\begin{aligned}
\mathbb{O}_{\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2} &= \mathbb{O}_{\mathbf{P}_1} \dot\cup \mathbb{O}_{\mathbf{P}_2} \\
\mathbb{I}_{\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2} &= \mathbb{I}_{\mathbf{P}_1} \dot\cup \mathbb{I}_{\mathbf{P}_2} \\
\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2} &= \mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}_1} + \mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}_2} \\
\mathbb{C}_{\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2} &= \mathbb{C}_{\mathbf{P}_1} + \mathbb{C}_{\mathbf{P}_2} \\
\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_2} &= \mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}_1} \times \mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}_2} \\
\mathbb{C}_{\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_2} &= \mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}_1} \times \mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}_2} \mid \mathbb{O}^{c}_{\mathbf{P}_1} \times \mathbb{O}^{c}_{\mathbf{P}_2}
\end{aligned}$$

Symbol	Definition	Name	Grundbedeutung
$\mathbb{O}_\mathbf{P}$	$(P, P, \leq)$	allgemeine Ordinalskala	Hierarchie
$\mathbb{O}_n$	$(\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq)$	eindimensionale Ordinalskala	Rangordnung
$\mathbb{N}_n$	$(\mathbf{n}, \mathbf{n}, =)$	Nominalskala	Partition
$\mathbb{M}_{n_1,\ldots,n_k}$	$\mathbb{O}_{\mathbf{n}_1+\cdots+\mathbf{n}_k}$	Multiordinalskala	Partition mit Rangordnungen
$\mathbb{M}_{m,n}$	$\mathbb{O}_{\mathbf{m}+\mathbf{n}}$	Biordinalskala	Zweiklassen-rangordnung
$\mathbb{B}_n$	$(\mathfrak{P}(\mathbf{n}), \mathfrak{P}(\mathbf{n}), \subseteq)$	n-dimensionale Boolesche Skala	Abhängigkeit von Merkmalen
$\mathbb{G}_{n_1,\ldots,n_k}$	$\mathbb{O}_{\mathbf{n}_1} \mathbin{\underline{\overline{\times}}} \cdots \mathbin{\underline{\overline{\times}}} \mathbb{O}_{\mathbf{n}_k}$	k-dimensionale Gitterskala	Mehrfachordnung
$\mathbb{O}_\mathbf{P}^{cd}$	$(P, P, \not\geq)$	Kontra-ordinalskala	Hierarchie und Unabhängigkeit
$\mathbb{N}_n^c$	$(\mathbf{n}, \mathbf{n}, \neq)$	Kontra-nominalskala	Partition und Unabhängigkeit
$\mathbb{D}$	$(\{0,1\}, \{0,1\}, =)$	dichotome Skala	Dichotomie
$\mathbb{D}_k$	$\underbrace{\mathbb{D} \mathbin{\underline{\overline{\times}}} \cdots \mathbin{\underline{\overline{\times}}} \mathbb{D}}_{k-\text{mal}}$	k-dimensionale dichotome Skala	mehrfache Dichotomie
$\mathbb{I}_\mathbf{P}$	$\mathbb{O}_\mathbf{P} \mid \mathbb{O}_\mathbf{P}^d$	allgemeine Interordinalskala	Zwischenrelation
$\mathbb{I}_n$	$\mathbb{O}_n \mid \mathbb{O}_n^d$	eindimensionale Interordinalskala	Lineare Zwischenrelation
$\mathbb{C}_\mathbf{P}$	$\mathbb{O}_\mathbf{P}^{cd} \mid \mathbb{O}_\mathbf{P}^c$	konvex-ordinale Skala	konvexe Ordnung

Abbildung 1.26. Standardisierte Skalen von ordinalem Typ

1.5 Literatur und Hinweise

Zu 1.1 Die Formale Begriffsanalyse wurde im Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, beginnend Ende der 70er Jahre, entwickelt. Die erste, programmatische Veröffentlichung zur Formalen Begriffsanalyse war

> Wille: *Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts* [193].

Dort finden sich bereits viele der in diesem Buch dargestellten Ideen, auch der Hauptsatz über Begriffsverbände ist dort bewiesen. Es war schon früher vorgeschlagen worden, die mathematischen Möglichkeiten, die Birkhoffs Ergebnis (Satz 2 auf S. 14) liefert, für die Datenanalyse zu nutzen. Die Deutung der Inzidenzrelation als Gegenstand-Merkmal-Beziehung ist in der ersten Auflage von Birkhoffs Verbandstheoriebuch ausdrücklich genannt. Bemerkenswerte Ansätze findet man bei Barbut [8], siehe Barbut & Monjardet [9]. Einige französische Autoren verwenden deshalb die dort benutzte Bezeichnung **treillis de Galois** für „Begriffsverband" (engl. **concept lattice**).

Die Darmstädter Gruppe war wohl die erste, die diese Möglichkeiten systematisch zu einer Datenanalysemethode ausgebaut und in vielen Anwendungen erprobt und weiterentwickelt hat. Entscheidend für den Erfolg dieser Arbeit waren unter anderem die Formalisierung von „Kontext" und die Auffassung von „Begriff" als *Einheit* von Extension und Intension.

Das Verständnis von „Begriff", das hier formalisiert wird, hat in der Philosophie weit verzweigte und tiefreichende Wurzeln, die an anderer Stelle ausführlicher dargestellt werden [212]. Ihren Ausdruck findet diese Denktradition dann sogar in den Normen DIN 2330 und DIN 2331, die wiederum am Beginn der Entwicklung von der Darmstädter Gruppe diskutiert wurden. Über die Entstehung der Formalen Begriffsanalyse und den gedanklichen Hintergrund findet man einiges in [211] und [42].

Die mathematische Substanz des Hauptsatzes ist sicherlich in der Hauptsache Birkhoff [14] zuzuschreiben, auch wenn dort der zweite Teil noch nicht formuliert ist. Dieser findet sich - in ordnungstheoretischer Fassung - bei J. Schmidt [153] und Banaschewski [5]. Die hier vorgestellte allgemeine Fassung erscheint erstmals in [193]. Es ist nicht ganz leicht, die Zwischenstufen Autoren zuzuordnen. Daß ein endlicher Verband durch seine Irreduziblen bestimmt ist, war Verbandtheoretikern wohlbekannt. Eine Quelle ist Markowsky [124].

Verallgemeinerungen der hier vorgestellten Modellierung sind in mehreren Varianten diskutiert worden. Die in unserem Verständnis wichtigste ist die Einbeziehung mehrwertiger Kontexte mittels der Begrifflichen Skalierung, wie sie in 1.3 und 1.4 eingeführt ist. Lehmann und Wille [108] haben eine **triadische Begriffsanalyse** entworfen, bei der die Inzidenzrelation dreistellig ist und die Begriffe aus drei Mengen bestehen. Die mathematische Theorie steckt derzeit noch in den Anfängen [213]. Umbreit [178] hat in einer umfangreichen Studie untersucht, wie sich die Formale Begriffsanalyse mit

Ansätzen der Fuzzy-Logik verbinden läßt. Verwandte Elemente finden sich auch in Arbeiten von Pawlak [136], Kent [96] und Burusco Juandeaburre & Fuentes-Gonzales [25]. Weitere Ansätze sind von Diday [39] und Marty [127] betrachtet worden. Einen ähnlichen Restrukturierungsversuch zur mathematischen Logik unternimmt [214].

Untersucht worden sind auch Kontexte mit zusätzlicher Struktur, etwa einer zusätzlichen Operation; die zugehörigen Begriffsverbände haben dann ebenfalls zusätzliche Struktureigenschaften. Beispiele dafür sind die in 1.4 eingeführten Polaritäts- und Orthoverbände, Verallgemeinerungen findet man bei Hoch [88]. Kontexte mit algebraischer Struktur werden von Vogt [180], [179], [181], [184] und von U. Wille [216], [217] untersucht, Kontexte mit topologischer Struktur von Hartung [83], [84], [85] und Kontexte mit relationaler Struktur von Priß [139].

Ein Paar (A, B) mit $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$ heißt **Vorbegriff** des Kontextes (G, M, I), falls $A' \subseteq B$ und $B' \subseteq A$ (vgl. [161]). Von einem **Halbbegriff** spricht man, wenn $A' = B$ *oder* $B' = A$ gilt [118].

Das Beispiel aus Abbildung 1.1 stammt aus einer pädagogischen Untersuchung, vgl. Takács [174].

Zu 1.2 Jedem Kontext $\mathbb{K} := (G, M, I)$ kann auf einfache Weise ein bereinigter Kontext zugeordnet werden, nämlich

$$\mathbb{K}^\circ := (G/\ker\gamma, M/\ker\mu, I^\circ),$$

wobei die Symbole die folgenden Bedeutungen haben: $\ker\gamma$ ist die Äquivalenrelation auf G mit

$$(g, h) \in \ker\gamma :\iff \gamma g = \gamma h.$$

Entsprechend ist $\ker\mu$ definiert. Die Äquivalenzklassen von $\ker\gamma$ sind die Gegenstände von $\mathbb{K}^\circ$, die von $\ker\mu$ die Merkmale. Die Inzidenz ist durch

$$([g]\ker\gamma, [m]\ker\mu) \in I^\circ :\iff gIm$$

erklärt.

Die Anzahl der reduzierten Kontexte mit vier Gegenständen ist 386, die derer mit fünf Gegenständen ist 13596, weitere Anzahlen sind uns nicht bekannt. Auch ohne die Zusatzbedingung „reduziert“ ist die Anzahlbestimmung nicht einfach. Die folgenden Zahlen stammen aus der Bayreuther Gruppe um A. Kerber und R. Laue:

$\|G\|$ \ $\|M\|$	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	7	13	22	34
3	4	13	36	87	190
4	5	22	87	317	1053

Ebenfalls nicht leicht zu bestimmen ist die maximal mögliche Anzahl $f(n)$ von Merkmalen in einem reduzierten Kontext mit n Gegenständen. Für kleine n findet man

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	1	2	4	7	13

Asymptotische Ergebnisse können bei Kleitman [99] nachgeschlagen werden.

Die Pfeilrelationen sind in [194] nach dem Vorbild der *schwachen Perspektivitäten* in der Kongruenztheorie eingeführt (vgl. [77]). Es gab zahlreiche Vorläufer. So benutzt z.B. Day [33] bereits die Doppelpfeilrelation („Relation ρ“) zur Charakterisierung der Semidistributivität und eine den Pfeilrelationen eng verwandte „Relation C“ zur Beschreibung der Kongruenzen endlicher Verbände. Doppelt fundierte Verbände kommen erstmals in [199] vor. Geyer [73] hat mögliche Konfigurationen der Pfeilrelationen untersucht.

Zu 1.3 Mehrwertige Kontexte wurden bereits in [193] eingeführt; von den zahlreichen verwandten Modellierungen seien die *Relationalen Datenbanken* von Codd [26], aber auch die *Informationssysteme* von Pawlak [135] sowie die *Chu spaces* (vgl. [138]) genannt. Die Verwendung in begrifflichen Datei- und Wissenssystemen ist von Vogt, Wachter & Wille [183], von Scheich, Skorsky, Vogt, Wachter & Wille [152] und in [209] diskutiert. Zur Begrifflichen Skalierung mehrwertiger Kontexte siehe [67]. Der Name „Skala“ wurde gewählt, um den Zusammenhang zur mathematischen Meßtheorie zu betonen (siehe dazu [105]). Allerdings unterscheiden sich die Ansätze erheblich. Während in der Meßtheorie unter einer Skala gewöhnlich eine Abbildung in die reellen Zahlen, also in eine feste Struktur, verstanden wird, hat es sich für die Begriffliche Skalierung als außerordentlich nützlich erwiesen, daß für verschiedene mehrwertige Merkmale entsprechend ihrer begrifflichen Struktur unterschiedliche Skalen gewählt werden können, selbst bei gleicher Wertemenge. Die Begriffsanalyse kennt deshalb auch viele Ordinalskalen, im Gegensatz zur Meßtheorie.

„Leere Zellen“ eines einwertigen Kontextes (also Paare (g,m) mit $(g,m) \notin I$) werden als ***nicht begriffsbildend*** angesehen. Will man die Negation zur Begriffsbildung heranziehen, so muß man das jeweilige Merkmal m **dichotomisieren**, d.h. ein zusätzliches Merkmal $\neg m$ einführen mit $(g,\neg m) \in I :\iff (g,m) \notin I$. „Leere Zellen“ eines mehrwertigen Kontextes (also Paare (g,m) mit $(g,m,w) \notin I$ für alle $w \in W$) führen gewöhnlich bei der schlichten Skalierung zu leeren Zellen im abgeleiteten Kontext. Wenn es inhaltlich geboten ist, können sie aber auch als Werte gedeutet und mit skaliert werden.

Kontextkonstruktionen werden in vielen Arbeiten behandelt, u.a. in [60]. Die Komplementierung ist ausführlich bei Deiters [37], [38] untersucht. Weinheimer [186] führt die ***Produktapposition*** als weitere Konstruktion ein.

Die Begriffsverbände der Potenzen (bezüglich des Halbproduktes) der dichotomen Skala sind gerade die „vollen Begriffsverbände“ bei Lex [112]. Mit Interpretationen von Skalen haben sich auch Spangenberg und Wolff [160] befaßt.

Zu 1.4 Die ebenfalls naheliegende Produktdefinition für Kontexte

$$\mathbb{K}_1 \;\&\; \mathbb{K}_2 := (G_1 \times G_2, M_1 \times M_2, \&)$$

mit

$$(g_1, g_2)\&(m_1, m_2) :\iff g_1 I_1 m_1 \ \underline{\text{und}}\ g_2 I_2 m_2$$

ist auch von einigen Autoren betrachtet worden (Schaffert [151], Reuter [143], Erné [49]), spielt aber in der Literatur nicht die Rolle des direkten Produktes. Die Umfänge von $\mathbb{K}_1 \& \mathbb{K}_2$ sind neben $G_1 \times G_2$ genau die Mengen $U_1 \times U_2$ mit

$$U_i \in \begin{cases} \mathfrak{U}(\mathbb{K}_i) & \text{falls } G_i \text{ ein Merkmalinhalt von } \mathbb{K}_i \text{ ist,} \\ \mathfrak{U}(\mathbb{K}_i) \setminus G_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Begriffsverband ist also dem der Kontextsumme und dem des Halbproduktes eng verwandt.

Der Dedekindsche Vervollständigungssatz (der natürlich Dedekinds Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen verallgemeinert) findet sich in ordnungstheoretischer Fassung bereits bei MacNeille [122] und J. Schmidt [153]. Vergleiche auch Banaschewski und Bruns [6].

Für die Behandlung distributiver Begriffsverbände sind die Kontraordinalskalen von zentraler Bedeutung [199]. Die Skalierung mittels dieser Skalen hat Strahringer [167] gründlich untersucht. Strahringer und Wille [168], [169] entwickeln auf dieser Grundlage eine *Ordinale Datenanalyse*.

Strahringer hat sich auch mit der konvex-ordinalen Skalierung befaßt [166]. Strahringer und Wille zeigen in [170], daß sich diese Skalierung dazu eignet, eine verallgemeinerte *Clusteranalyse* zu formulieren. Dies ist von Leonhard und Winterberg [111] weiter ausgearbeitet worden. Auch zur Klassifikation von ordinalen Clustermethoden hat sich die Formale Begriffsanalyse als nützlich erwiesen, siehe Janowitz & Wille [91].

Aus einer geordneten Mengen $(P, \leq)$ können noch weitere interessante Kontexte gewonnen werden. Beispielsweise kann der Begriffsverband des Kontextes $(P, P, \not\geq)$ als Verband der *maximalen Antiketten* von $(P, \leq)$ gedeutet werden, siehe [198] und Reuter [145].

Freie distributive Verbände sind mit Mitteln der Formalen Begriffsanalyse in [207] sowie von Bartenschlager [11], [10] untersucht worden und, mit eng verwandten Methoden, schon früher von Markowsky [125]. Siehe auch Luksch [114]. Die umfangreiche Literatur zu diesem Thema kann bei Bartenschlager nachgeschlagen werden. Die Δ-Relation wurde in [198] definiert.

Symmetrische Kontexte haben B. Schmidt [154] sowie Schaffert [151] behandelt.

Flath ([55], [56], [57]) hat die Beschreibung der irreduziblen Elemente des Verbandes Σ_n der Permutationen durch Bennett und Birkhoff [12] auf Multipermutationen verallgemeinert und u.a. zur Bestimmung der Ordnungsdimension dieser Verbände mit begriffsanalytischen Mitteln genutzt.

2. Bestimmung und Darstellung

Die Aufgabe, den Begriffsverband eines Kontextes zu bestimmen, hat je nach den Randbedingungen verschiedene Lösungen. Bei einem kleinen Kontext ist es sinnvoll, zunächst eine vollständige Liste aller Begriffe aufzustellen. Damit beschäftigt sich der erste Abschnitt dieses Kapitels. Im zweiten diskutieren wir Möglichkeiten, Liniendiagramme von Hand oder automatisch zu erzeugen. Schon eine Liste von einigen Dutzend Begriffen ist recht unübersichtlich, und es erfordert Übung, gute Liniendiagramme von Begriffsverbänden mit mehr als 20 Elementen anzufertigen. Mit Hilfe von gestuften Liniendiagrammen kann man etwas größere Begriffsverbände zufriedenstellend graphisch darstellen. Spätestens bei einigen hundert Elementen entfällt aber die Möglichkeit der vollständigen graphischen Wiedergabe; dann müssen Zerlegungs– und Darstellungstechniken eingesetzt werden, die wir in den späteren Kapiteln vorstellen.

Ein anderes Bestimmungsproblem stellt sich, wenn der Kontext nicht direkt gegeben ist, sondern erschlossen werden muß. Diesen Fall diskutieren wir im dritten Abschnitt, der sich mit den Implikationen zwischen Merkmalen befaßt. Diese Merkmallogik kann auf mehrwertige Kontexte übertragen werden, dazu dient Teil vier des Kapitels.

2.1 Alle Begriffe eines Kontextes

Das Auffinden aller Begriffe eines endlichen Kontextes bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Der folgende Hilfssatz faßt noch einmal die naiven Möglichkeiten zusammen, alle Begriffe zu erzeugen:

Hilfssatz 18. *Jeder Begriff eines Kontextes* (G, M, I) *ist von der Form* (X'', X') *für eine Teilmenge* $X \subseteq G$ *und von der Form* (Y', Y'') *für eine Teilmenge* $Y \subseteq M$. *Umgekehrt ist jedes solche Paar ein Begriff.*

Jeder Begriffsumfang ist Durchschnitt von Merkmalumfängen und jeder Begriffsinhalt ist Durchschnitt von Gegenstandsinhalten. □

Allerdings ergibt sich aus dem Hilfssatz nicht sofort ein Verfahren, das auch praktikabel ist. Nur bei einem sehr kleinen Kontext (G, M, I) wird man zur Erzeugung aller Begriffe für jede Teilmenge X von G den Ausdruck (X'', X') bilden. Der zweite Teil des Hilfssatzes eröffnet immerhin eine

Möglichkeit, die Begriffe eines kleinen Kontextes von Hand zu berechnen. Man legt dazu eine Liste von Begriffsumfängen an; zu Beginn ist diese Liste leer. Man fährt dann folgendermaßen fort:

Erster Schritt. Der Begriffsumfang G wird in die Liste eingetragen.

Dann führt man für jedes Merkmal $m \in M$ (wobei die Merkmale in irgendeiner Reihenfolge durchlaufen werden) jeweils folgendes durch:

Schritt m. Für jede Menge A, die bei einem früheren Schritt in die Liste eingetragen wurde, bildet man die Menge

$$A \cap m'$$

und nimmt sie in die Liste auf, sofern sie darin noch nicht vorkommt.

Man überzeugt sich leicht, daß die Liste zum Schluß genau diejenigen Mengen enthält, die Durchschnitte von Merkmalumfängen sind, und dies sind nach dem Hilfssatz genau die Begriffsumfänge. Zu jedem solchen Begriffsumfang A kann man dann anhand des Kontextes den Begriffsinhalt A' ermitteln und erhält auf diese Weise eine Liste aller Begriffe (A, A') des Kontextes.

Schritt	Umfang	Schritt	Umfang	Schritt	Umfang
1	$\{1,\ldots,8\}$		$\{6,7,8\}$		$\{1,2,3\}$
a			$\{6\}$		$\{3,4\}$
b	$\{1,2,3,5,6\}$	e	$\{7\}$		$\{3\}$
c	$\{3,4,6,7,8\}$		$\varnothing$	h	$\{2,3,4\}$
	$\{3,6\}$	f	$\{5,6,8\}$		$\{2,3\}$
d	$\{5,6,7,8\}$		$\{6,8\}$	i	$\{4\}$
	$\{5,6\}$	g	$\{1,2,3,4\}$		

Abbildung 2.1. Liste der Begriffsumfänge zum Kontext aus Abbildung 1.1.

Auf diese Weise die Begriffe zu bestimmen fällt in der Regel leichter, wenn man dabei gleichzeitig ein Liniendiagramm des Begriffsverbandes erstellt. Wie das ablaufen kann, soll für den Kontext aus Abbildung 1.1 erläutert werden. Die Zwischenschritte sind in Abbildung 2.2 dargestellt. Zunächst zeichnet man einen kleinen Kreis für den größten Begriff des Kontextes aufs Papier. Wenn es Merkmale gibt, deren Merkmalumfang alle Gegenstände enthält, so schreibt man deren Namen oben an den eben gezeichneten Kreis; in unserem Beispiel ist das „a“. Dann bestimmt man die Merkmale, deren Umfänge maximal unter den verbleibenden Merkmalumfängen sind; im Beispiel erhält man b, c, d und g. Für jedes dieser Merkmale stellt man den zugehörigen Merkmalbegriff durch einen kleinen Kreis unterhalb des schon gezeichneten Kreises dar, verbindet diese Kreise jeweils mit dem Kreis des größten Begriffs

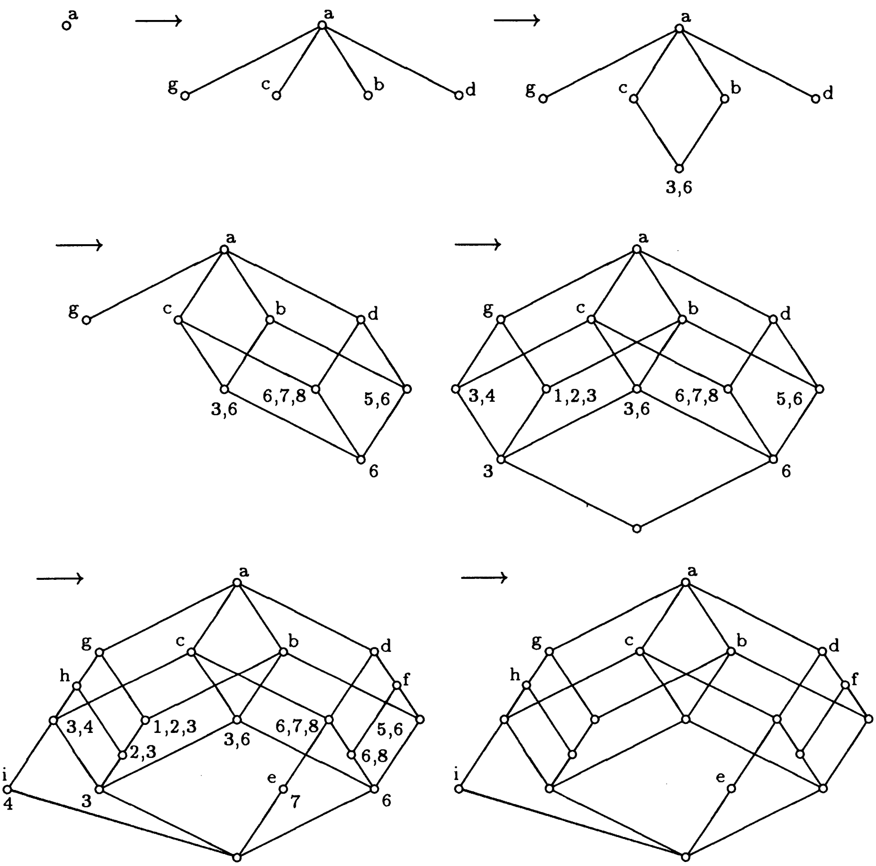


Abbildung 2.2. Zwischenschritte beim Entwurf von Abbildung 1.3. Abschließend werden nun noch die Gegenstandsnamen eingetragen, was zugleich eine Kontrolle dafür ist, ob das Diagramm korrekt ist.

und schreibt die Namen der neuen Merkmale oben an die zugehörigen Kreise. Nun bildet man systematisch die Infima der schon dargestellten Begriffe und stellt die neu entstehenden Begriffe durch kleine Kreise mit den jeweils zugehörigen Verbindungslinien dar; im Beispiel behandelt man so zunächst die Begriffe zu b und c, dann zu b, c und d, danach schließlich zu b, c, d und g, wobei die Kenntnis vorher schon bestimmter Begriffe ausgenutzt wird (ggf. kann man die gebildeten Umfangsschnitte vorläufig an die zugehörigen Kreise schreiben, um sie für das weitere besser behalten zu können). Ist das Liniendiagramm für alle bis dahin bestimmten Begriffe erstellt, dann sucht man Merkmale, deren Umfänge unter den noch nicht benutzten Merkmalumfängen maximal sind; im Beispiel erhält man e, f und h. Wie zuvor stellt man wieder die Merkmalbegriffe und alle neuen Schnitte von nunmehr vorhandenen Begriffen dar. Im Beispiel muß man dieses Verfahren ein weiteres Mal, nämlich für das Merkmal i, durchführen. Hat man schließlich alle Merkmale abgearbeitet, sollte das gewonnene Liniendiagramm den Begriffsverband korrekt darstellen. Um das zu überprüfen, löscht man zunächst die vorläufig eingetragenen Umfänge und trägt dann die Gegenstandsnamen jeweils (von unten) so an die Begriffskreise ein, daß die Äquivalenz $\gamma g \leq \mu m \iff gIm$ des Hauptsatzes erfüllt ist. Wenn das nicht für jeden Gegenstand möglich ist, hat man Fehler gemacht, was durchaus passieren kann. Erfahrungsgemäß lassen sich solche Fehler aber leicht korrigieren. Um ein besser lesbares Liniendiagramm zu erhalten, wird das zuerst entstandene Diagramm gewöhnlich noch überarbeitet.

Der geschilderte Algorithmus zur Begriffsbestimmung wird für größere Kontexte umständlich, weil immer wieder in der Liste nachgeschlagen werden muß. Wir schildern daher als nächstes einen schnelleren Algorithmus zur Erzeugung aller Begriffsumfänge, der sich überdies leicht programmieren läßt. Dabei wird vom Kontext nur der Hüllenoperator $A \to A''$ benutzt, es handelt sich also um einen *Algorithmus zur Erzeugung aller Hüllen eines gegebenen Hüllenoperators.*

Zunächst denken wir uns die Menge aller Teilmengen von G „lexikographisch geordnet“. Der Einfachheit halber wird dazu angenommen, daß $G = \{1,2,...,n\}$ ist. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq G$ **lektisch kleiner** als eine Teilmenge $B \neq A$, falls das kleinste Element, in dem sich A und B unterscheiden, zu B gehört. Formal:

$$A < B :\Leftrightarrow \exists_{i \in B \setminus A}\ A \cap \{1,2,...,i-1\} = B \cap \{1,2,...,i-1\}.$$

Dies definiert eine streng konnexe Ordnung auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(G)$, d.h. für Teilmengen $A \neq B$ gilt stets $A < B$ oder $B < A$. Ziel des weiteren ist nun, für eine beliebig vorgegebene Menge $A \subseteq G$ den bezüglich der lektischen Ordnung kleinsten Begriffsumfang nach A zu finden. Ist dies gelöst, so kann man offenbar alle Begriffsumfänge wie folgt erzeugen: Der lektisch kleinste Begriffsumfang ist $\emptyset''$. Die übrigen Umfänge findet man sukzessive, indem man jeweils zu dem zuletzt gefundenen den lektisch nächsten bestimmt. Zum Schluß erhält man den lektisch größten Umfang, nämlich G.

Wir definieren dazu für $A, B \subseteq G, i \in G$,

$$A <_i B :\Leftrightarrow i \in B \setminus A \text{ und } A \cap \{1,2,...,i-1\} = B \cap \{1,2,...,i-1\}.$$
$$A \oplus i := ((A \cap \{1,2,...,i-1\}) \cup \{i\})''.$$

Ohne Probleme verifiziert man die folgenden Aussagen:

(1) $A < B \Leftrightarrow A <_i B$ für ein $i \in G$.
(2) $A <_i B$ und $A <_j C$ mit $i < j \Rightarrow C <_i B$.
(3) $i \notin A \Rightarrow A < A \oplus i$.
(4) $A <_i B$ und B Begriffsumfang $\Rightarrow A \oplus i \subseteq B$, d.h. $A \oplus i \leq B$.
(5) $A <_i B$ und B Begriffsumfang $\Rightarrow A <_i A \oplus i$.

Satz 5. *Der kleinste Begriffsumfang, der bzgl. der lektischen Ordnung größer ist als eine gegebene Menge $A \subset G$, ist*

$$A \oplus i,$$

wobei i das größte Element von G ist mit $A <_i A \oplus i$.

Beweis. Sei A^+ der kleinste Umfang nach A bzgl. der lektischen Ordnung. Wegen $A < A^+$ ist $A <_i A^+$ für ein $i \in G$ nach (1) und damit $A <_i A \oplus i$ nach (5). Nach (4) folgt $A \oplus i \leq A^+$, also $A \oplus i = A^+$ wegen $A < A \oplus i$. Daß i das größte Element ist mit $A <_i A \oplus i$, ergibt sich aus (2), denn $A <_j A \oplus j$ mit $j \neq i$ hat wegen $A \oplus i = A^+ < A \oplus j$ nach (2) $j < i$ zur Folge. □

Satz 5 zeigt, wie der gesuchte Begriffsumfang zu finden ist. Wir fassen zusammen:

Algorithmus zur Erzeugung aller Begriffsumfänge eines gegebenen Kontextes (G, M, I): Der lektisch kleinste Begriffsumfang ist $\emptyset''$. Für eine gegebene Menge $A \subset G$ findet man den lektisch nächsten Begriffsumfang, indem man alle Elemente i von $G \setminus A$ prüft, beginnend mit dem größten und dann in absteigender Folge, bis erstmals $A <_i A \oplus i$ ist. $A \oplus i$ ist dann der gesuchte Umfang. □

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	i
1					Ø				7
2							×		6
3						×			8
4						×		×	7
5						×	×	×	5
6					×	×			8
7					×	×		×	7

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	i
8					×	×	×	×	4
9				×					3
10			×						6
11			×			×			4
12			×	×					6
13			×	×		×	×	×	2

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	i
14		×	×						4
15		×	×	×					1
16	×	×	×						5
17	×	×	×		×	×			4
18	×	×	×	×					5
19	×	×	×	×	×	×	×	×	

Abbildung 2.3. Liste der Begriffsumfänge zum Kontext aus Abb. 1.1 in lektischer Ordnung. Jeweils hinter einem Umfang A ist das Element i mit $A^+ = A \oplus i$ angegeben.

Wegen der Dualität zwischen Gegenständen und Merkmalen läßt sich der Algorithmus ohne Änderungen auf die Begriffsinhalte übertragen; man hat nur die Menge G durch M zu ersetzen. Daß die Begriffsumfänge in lektischer Reihenfolge ausgegeben werden, kann ausgenutzt werden. Sind beispielsweise

$$C := \{1, 2, \ldots, c\}, D := \{c+1, c+2, \ldots, d\} \subseteq G,$$

so erhält man als lektische Nachfolger von C zuerst die Mengen, die C enthalten und zu D disjunkt sind. Eine Modifikation des Verfahrens (z.B. Änderung der Anordnung der Elemente von G) erlaubt, für beliebige Teilmengen $C, D \subseteq G$ alle Begriffsumfänge A von (G, M, I) zu finden mit $C \subseteq A, A \cap D = \emptyset$.

Von diesem Algorithmus existieren mehrere Implementationen. Am bekanntesten ist wohl das Programm ConImp von Peter Burmeister, das besonders auf DOS-Rechnern verbreitet ist. Für die Unix-Welt gibt es eine Version namens Concepts von Christian Lindig. Beide Programme werden derzeit zu nichtkommerziellen Zwecken gegen geringe Gebühr abgegeben.[1]

An den Voraussetzungen für den Algorithmus läßt sich einiges abschwächen, er erlaubt deshalb mehrere Verallgemeinerungen. Ohne wesentliche Änderungen des Beweises erhält man

Satz 6. *Ist $\mathcal{F}$ eine Familie von Begriffsumfängen des Kontextes (G, M, I) mit der Eigenschaft*

$$A \in \mathcal{F} \text{ und } i \in G \quad \Rightarrow \quad (A \cap \{1, \ldots; i-1\})'' \in \mathcal{F},$$

so erhält man zu einer beliebigen Teilmenge $A \subseteq G$ die in $\mathcal{F}$ lektisch nächste Menge A^+ –sofern eine solche existiert– durch

$$A^+ = A \oplus i,$$

wobei i das größte Element von G ist, für welches $A <_i A \oplus i$ und zugleich $A \oplus i \in \mathcal{F}$ gilt. □

Wir geben ein einfaches Beispiel für Anwendungsmöglichkeiten dieses Satzes: Wollen wir alle Partitionen einer 7-elementigen Menge finden, die keine Klassen mit mehr als drei Elemente enthalten, so kann der Kontext für den Äquivalenzrelationenverband aus 1.4.(8) (S. 53) verwendet werden. Die Familie $\mathcal{F}$ der Partitionen mit der angegebenen Eigenschaft ist ein Ordnungsideal und erfüllt damit natürlich die Bedingung in Satz 6, sie kann also mit dem entsprechend modifizierten Algorithmus durchlaufen werden.

[1] Z.B. kostenlos über das Internet: ftp.mathematik.th-darmstadt.de:/pub/department/software/conceptanalysis beziehungsweise ftp.ips.cs.tu-bs.de:/pub/local/softech/misc.

2.2 Diagramme

Die schönste und vielseitigste Darstellungsform für einen Begriffsverband ist ein gut gezeichnetes Liniendiagramm. Allerdings ist es mühevoll, ein solches Diagramm von Hand zu zeichnen, und man wünscht sich eine automatische Erstellung durch den Computer. Wir kennen dazu viele Algorithmen, aber keine, die allgemein dieses Problem zufriedenstellend lösen könnten. Es ist ja keineswegs klar, was denn ein *gutes* Diagramm ausmacht. Es soll übersichtlich, leicht lesbar sein und die Interpretation der dargestellten Daten erleichtern; wie dies im Einzelfall zu bewerkstelligen ist, hängt aber vom Interpretationsziel und der Struktur des Verbandes ab. Einfache Optimierungskriterien (Minimierung der Zahl der Kantenkreuzungen, Zeichnen in Schichten, etc.) führen oft zu wenig befriedigenden Ergebnissen. Trotzdem sind automatisch erstellte Diagramme eine große Hilfe: sie können als Grundlage für die Zeichnung von Hand dienen. Wir schildern deshalb hier einfache Methoden, Liniendiagramme mit Unterstützung des Rechners zu erzeugen und zu manipulieren; später können wir mit Hilfe der Strukturtheorie für Begriffsverbände noch bessere Verfahren vorschlagen. Natürlich werden wir nicht auf die tatsächliche Programmierung eingehen.

		a	b	c	d	e	f	g
T_1	$(0,0),(6,0),(3,1)$		×	×	×		×	
T_2	$(0,0),(1,0),(0,1)$		×	×				×
T_3	$(0,0),(4,0),(1,2)$		×		×	×		
T_4	$(0,0),(2,0),(1,\sqrt{3})$	×		×	×	×		
T_5	$(0,0),(2,0),(5,1)$		×		×		×	
T_6	$(0,0),(2,0),(1,3)$		×	×	×	×		
T_7	$(0,0),(2,0),(0,1)$		×					×

a: gleichseitig, b: nicht gleichseitig, c: gleichschenklig, d: schiefwinklig, e: spitzwinklig, f: stumpfwinklig, g: rechtwinklig.

Abbildung 2.4. Ein Kontext über Dreiecke

Zur Illustration benutzen wir zunächst den Kontext in Abbildung 2.4, in dem Dreiecke nach Eigenschaften wie *rechtwinklig, gleichseitig* klassifiziert sind. Die Auswahl der Dreiecke ist nicht zufällig: der Kontext ist das Ergebnis einer *Merkmalexploration*, wie sie im nächsten Abschnitt vorgestellt wird. Im Moment interessiert uns aber lediglich die Frage, wie ein Liniendiagramm für den Begriffsverband gewonnen werden kann.

Wir können ein Computerprogramm benutzen, um die Begriffe des Kontextes und die Kanten des Liniendiagramms zu erhalten. Die nachstehende

Nachfolgerliste ist mit dem im vorigen Abschnitt genannten Programm CONIMP erzeugt. Man liest ab, daß der Kontext 18 Begriffe hat, diese sind mit den laufenden Nummern 1,...,18 bezeichnet.

1 :	–				
2 :	1	–			
3 :	2	–			
4 :	1	–			
5 :	2	4	–		
6 :	3	5	–		
7 :	1	–			
8 :	7	–			
9 :	2	7	–		
10 :	9	–			
11 :	3	9	–		
12 :	4	7	–		
13 :	8	12	–		
14 :	5	9	12	–	
15 :	10	14	–		
16 :	6	11	14	–	
17 :	6	–			
18 :	13	15	16	17	–

Hinter dem Doppelpunkt ist angegeben, welche oberen Nachbarn der jeweilige Begriff hat. Zu jedem solchen oberen Nachbarn ist im Liniendiagramm eine Kante einzuzeichnen, und dies sind alle Kanten. Offenbar ist der Begriff Nr. 1 das Einselement des Begriffsverbandes (denn er hat keinen oberen Nachbarn) und Nr. 18 ist das Nullelement (denn 18 taucht nicht als oberer Nachbar auf). Als Graph ist das Liniendiagramm durch diese Liste bereits vollständig angegeben. Man kann sie benutzen, um ein Diagramm „von unten nach oben“ zu entwerfen: zuerst zeichnet man das kleinste Element (Begriff Nr. 18), darüber die oberen Nachbarn (13, 15, 16, 17), dann deren obere Nachbarn (6, 8, 10, 11, 12, 14), und so weiter. Offen ist noch, wie die Punkte auf dem Papier anzuordnen sind. Man kann dies „nach Gefühl“ tun, wird dann jedoch einige Durchgänge brauchen, bis man ein befriedigendes Diagramm entwickelt hat.

Es gibt aber eine wirkungsvolle Methode, die Herstellung eines Liniendiagramms zu unterstützen. Diese **geometrische Methode** beruht darauf, über ein geometrisches Bild des Begriffsverbandes zunächst Einsicht in die verbandstheoretische Struktur zu gewinnen, um damit eine möglichst gute Anordnung für das Liniendiagramm zu finden. Es wird also in einem Zwischenschritt –von Hand oder mit Computerunterstützung– ein Hilfsbild gezeichnet, welches dann verwendet wird, um das eigentliche Liniendiagramm zu zeichnen. Dieses Hilfsbild nennen wir zur Unterscheidung das **geometrische Diagramm**. Mit ihm verbinden wir die folgende Vorstellung: Wir denken uns den Verband durch ein dreidimensionales Liniendiagramm realisiert und stellen uns vor, daß wir vom höchsten Punkt, also vom Einselement aus, auf den Verband herunterblicken.

Von oben aus sieht man als erstes die unteren Nachbarn des Einselementes. Im geometrischen Diagramm werden diese durch unverdeckte Kreise dargestellt, in die der Name des jeweiligen Elementes eingertagen wird. Für das weitere Zeichnen des geometrischen Diagramms gelten die folgenden Regeln:

1. Ein Element mit genau einem oberen Nachbarn wird durch einen Kreis dargestellt, der von dem oberen Nachbarn teilweise verdeckt wird.
2. Ein Element mit genau zwei oberen Nachbarn wird durch eine Verbindungslinie zwischen den oberen Nachbarn dargestellt. Der Name des Ele-

mentes wird in einen Kreis geschrieben, der von dieser Verbindungslinie teilweise verdeckt wird.

3. Ein Element mit genau drei oberen Nachbarn wird durch ein Verbindungsdreieck zwischen den oberen Nachbarn dargestellt. Man schreibt den Namen des Elements ins Innere des Dreiecks.

Elemente mit $n > 3$ oberen Nachbarn werden entsprechend durch ein n-Simplex dargestellt, das die oberen Nachbarn verbindet. Das größte und das kleinste Element des Verbandes werden nicht eingezeichnet.

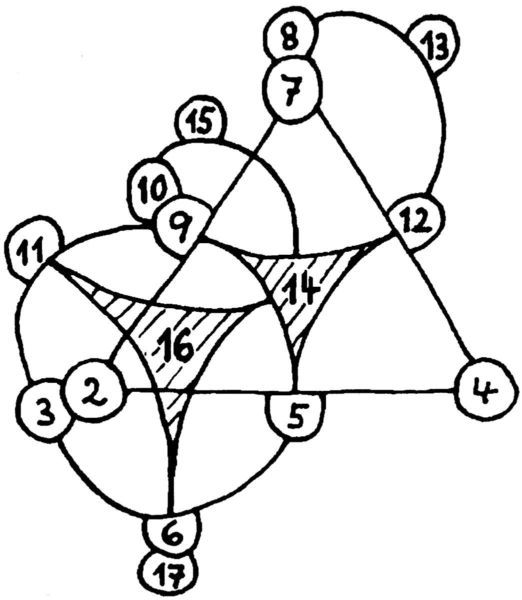


Abbildung 2.5. Ein geometrisches Diagramm

Auf diese Weise entsteht das geometrische Diagramm in Abbildung 2.5. Die Einzelschritte sind in folgender Tabelle aufgeschrieben. Die notwendige Information ist der oben abgedruckten Nachfolgerliste entnommen.

2	liegt direkt unter 1:	deshalb ein Kreis für 2.
3	direkt unter 2:	deshalb ein Kreis für 3, etwas verdeckt vom 2-Kreis.
4	direkt unter 1:	deshalb ein Kreis für 4.
5	direkt unter 2 und 4:	deshalb eine Strecke für 5 zwischen 2- und 4-Kreis.
6	direkt unter 3 und 5:	deshalb eine Strecke für 6 zwischen 3-Kreis und 5-Strecke.
7	direkt unter 1:	deshalb ein Kreis für 7.
8	direkt unter 7:	deshalb ein Kreis für 8, etwas verdeckt vom 7-Kreis.
9	direkt unter 2 und 7:	deshalb eine Strecke für 9 zwischen 2- und 7-Kreis.

10 direkt unter 9: deshalb ein Kreis für 10, etwas verdeckt von der 9-Strecke.
11 direkt unter 3 und 9: deshalb eine Strecke für 11 zwischen 3-Kreis und 9-Strecke.
12 direkt unter 4 und 7: deshalb eine Strecke für 12 zwischen 4- und 7-Kreis.
13 direkt unter 8 und 12: deshalb eine Strecke für 13 zwischen 8-Kreis und 12-Strecke.
14 direkt unter 5, 9 und 12: deshalb ein Dreieck für 14 zwischen 5-, 9- und 12-Strecke.
15 direkt unter 10 und 14: deshalb eine Strecke für 15 zwischen 10-Kreis und 14-Dreieck.
16 direkt unter 6, 11 und 14: deshalb ein Dreieck für 16 zwischen 6- und 11-Strecke sowie 14-Dreieck.
17 direkt unter 6: deshalb ein Kreis für 17, etwas verdeckt von der 6-Strecke.

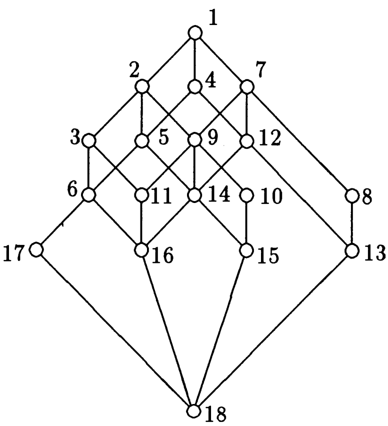


Abbildung 2.6. Ein Liniendiagramm zum Verband der Dreiecksbegriffe.

Zu klären bleibt, wie man aus dem geometrischen Diagramm ein gutes Liniendiagramm gewinnt. Für den Begriffsverband der Dreiecke ist das abgeleitete Liniendiagramm in Abb. 2.6 dargestellt. Hat man bereits Erfahrungen mit der geometrischen Methode, dann sieht man an Abb. 2.5, daß die auffälligste Teilstruktur des Verbandes aus zwei Booleschen Würfeln besteht. Doch auch wenn man diese Erfahrung nicht hat, kann man bei systematischem Vorgehen schon bald zu dieser Einsicht kommen. Beginnen sollte man in der Regel mit den unteren Nachbarn des Einselementes, die durch unverdeckte Kreise dargestellt sind. In Abb. 2.5 sind das der 2-, 4- und 7-Kreis. Diese Kreise sind paarweise durch die Strecken 5, 9 und 12 verbunden, die wiederum durch das 14-Dreieck in Verbindung stehen. Das zeigt an, daß die Begriffe 1, 2, 4, 5, 7, 9, 12, und 14 einen Booleschen Teilverband bilden. Die Frage ist, wie man diese acht Elemente am besten im Liniendiagramm anordnet. Nach Darstellung des Einselementes empfiehlt es sich, die Koatome 2 und 7 nach außen und 4 dazwischen zu legen, da unter 2 und 7 jeweils ein weiterer „Punkt“ liegt, der Platz benötigt. Die Begriffe 5, 7, 9 und 12 werden am besten nach der *Parallelogrammregel* verortet; diese besagt, daß man Elemente möglichst dorthin zeichnet, wo sie drei schon dargestellte Elemente mit den Verbindungsstrecken zu einem Parallelogramm ergänzen. Das entstehende Bild des Booleschen Teilverbandes gibt einen Würfel wieder, der auf einer seiner Ecken steht. Nach den bisherigen Erläuterungen sollte es nicht schwer fallen, auch den zweiten Booleschen Teilverband zu erkennen, der aus den Begriffen 2, 3, 5, 6, 9, 11, 14 und 16 besteht. Da der ihn darstellende Würfel mit dem ersten in den Elementen 2, 5, 9 und 14 übereinstimmt, liegt auf der Hand, wie man die bisherige Zeichnung fortsetzt; befolgt werden sollte dabei noch die sogenannte *Geradenregel*, nach der eine Strecke zu einem neuen „Punkt“ möglichst so gerichtet sein soll, daß sie ein längeres Geradenstück mit schon gezeichneten Strecken bildet. Befolgt man die Geraden- und Parallelogrammregel für die restlichen Elemente 8, 10, 13, 15 und 17, so erhält man aus dem geometrischen Diagramm ein befriedigendes Liniendiagramm, das nur noch durch das Nullelement (Nr. 18) ergänzt werden muß (vgl. Abb. 2.6). Für die Beschriftung mit Gegenstands- und Merkmalsnamen benötigt man Zusatzinformation, die das Programm ConImp durch eine *Zuordnungsliste* bereitstellt (s. Abb. 2.7).

Begriff	:	Gegenstand	Begriff	:	Merkmal
8	:	T_7	2	:	schiefwinklig
10	:	T_5	3	:	spitzwinklig
11	:	T_3	4	:	gleichschenklig
13	:	T_2	7	:	nicht gleichseitig
15	:	T_1	8	:	rechtwinklig
16	:	T_6	10	:	stumpfwinklig
17	:	T_4	17	:	gleichseitig

Abbildung 2.7. Die Zuordnung zu den Begriffen

Allgemein ist zu empfehlen, das geometrische Diagramm möglichst schnell anhand der Nachfolgerliste zu erstellen. Dabei sollte man vor manchmal etwas kühnerem Zeichnen von Linien- und Flächenstücken nicht zurückschrecken. Die Erfahrung zeigt, daß man solche Diagramme immer noch gut als Anleitung zum Zeichnen guter Liniendiagramme verwenden kann. Hilfreich ist, sich zunehmend geometrische Muster und ihre zugehörigen Umsetzungen im Liniendiagramm einzuprägen. Anzumerken ist noch, daß es durchaus Fälle gibt (wenn auch selten), wo es sich empfiehlt, das Liniendiagramm von unten nach oben aufzubauen; dann arbeitet man besser mit der sogenannten *Vorgängerliste*.

Die beiden geschilderten Verfahren nutzen den Computer, um die für ein Diagramm erforderliche Information zu gewinnen. Wir schildern nun noch eine Methode, bei der der Rechner ein Diagramm erzeugt und zur interakti-

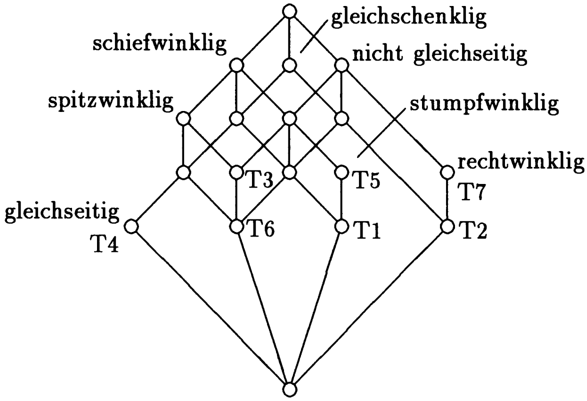


Abbildung 2.8. Das beschriftete Liniendiagramm.

ven Verbesserung anbietet. Details der Programmierung sind an dieser Stelle natürlich unwichtig, wir geben deshalb lediglich eine **Positionierungsregel** an, die den Elementen einer gegebenen geordneten Menge $(P, \leq)$ Punkte der Zeichenebene zuweist. Sind a und b Elemente von P mit $a < b$, so muß der a zugeordnete Punkt tiefer liegen (d.h. kleinere y-Koordinate haben) als der, der b zugeordnet wird, dies wird unser Verfahren gewährleisten. Das Berechnen der Kanten und die Überprüfung auf unerwüschte Koinzidenzen überlassen wir der jeweiligen Programmierung. Wir werden nicht einmal garantieren, daß unsere Positionierung injektiv ausfällt (was natürlich für ein korrektes Liniendiagramm erforderlich ist), auch dies ist jeweils bei Bedarf zu überprüfen.

Definition 35. Eine **Mengendarstellung** einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist eine Ordnungseinbettung von $(P, \leq)$ in die Potenzmenge einer Menge X, also eine Abbildung

$$\mathrm{dar} : P \to \mathfrak{P}(X)$$

mit der Eigenschaft

$$x \leq y \Leftrightarrow \mathrm{dar}\, x \subseteq \mathrm{dar}\, y. \qquad \Diamond$$

Beispiel einer Mengendarstellung ist für eine beliebige geordnete Menge $(P, \leq)$ die Zuordnung

$$X := P, \quad a \mapsto (a].$$

Bei einem Begriffsverband sind

$$X := G, \quad (A, B) \mapsto A$$

$$\text{bzw. } X := M, \quad (A, B) \mapsto M \setminus B$$

Darstellungen, die sich kombinieren lassen zu

$$X := G \,\dot\cup\, M, \quad (A, B) \mapsto A \cup (M \setminus B).$$

Dabei genügt es, sich auf die irreduziblen Gegenstände und Merkmale zu beschränken[2].

Für ein **additives Liniendiagramm** einer geordneten Menge $(P, \leq)$ benötigt man eine Mengendarstellung dar : $P \to \mathfrak{P}(X)$ sowie eine **Gitterprojektion**

$$\text{vec} : X \to \mathbb{R}^2,$$

die jedem Element von X einen reellen Vektor mit positiver y-Koordinate zuordnet. Durch

$$\text{pos}\, p := n + \sum_{x \in \text{dar}\, p} \text{vec}\, x$$

erhalten wir eine Positionierung der Elemente von P in der Zeichenebene, dabei ist n ein Normierungsvektor, der zur Verschiebung des gesamten Diagramms beliebig gewählt werden kann. Weil wir für die Gitterprojektion nur positive y-Koordinaten zugelassen haben, ist garantiert, daß kein Element p unterhalb eines Elementes q mit $q < p$ positioniert wird.

Jedes endliche Liniendiagramm kann als additives Diagramm bezüglich einer geeigneten Mengendarstellung gedeutet werden. Für Begriffsverbände benutzen wir gewöhnlich die Darstellung durch die irreduziblen Gegenstände und/oder Merkmale; die so entstehenden Diagramme zeichnen sich durch eine große Zahl von parallelen Kanten aus, was der Lesbarkeit dient. Diese Diagramme lassen sich außerdem besonders leicht manipulieren:

Ändert man –bei fester Mengendarstellung– die Gitterprojektion für ein Element $x \in X$, so bedeutet dies für die Positionierung, daß alle Bilder des Ordnungsfilters $\{p \in P \mid x \in \text{dar}\, p\}$ um den gleichen Betrag verschoben werden und alle anderen Bilder festbleiben. Bei der Mengendarstellung durch die Irreduziblen sind diese Ordnungsfilter gerade Hauptfilter bzw. Komplemente von Hauptidealen. Man manipuliert dann also das Diagramm, indem man Hauptfilter bzw. -ideale verschiebt und die übrigen Elemente festläßt.

Erfahrungsgemäß liefert die Mengendarstellung mittels der irreduziblen Merkmale am leichtesten ein gut interpretierbares Diagramm.

Gelegentlich ist es günstig, einen Verband als Teil einer größeren Ordnung darzustellen. Wir zeichnen dazu ein Liniendiagramm der Ordnung, stellen aber nur die Elemente des eigentlich gemeinten Verbandes durch kleine Kreise dar. Ein Beispiel zeigt Abbildung 5.3 (S. 189).

Selbst sorgfältig entworfene Liniendiagramme verlieren ab einer gewissen Größe ihre Lesbarkeit, in der Regel ab etwa 50 Elementen. Um einiges weiter kommt man mit *gestuften Liniendiagrammen*, die wir nun einführen. Diese Diagramme sind aber nicht nur geeignet, um größere Begriffsverbände darzustellen. Sie bieten auch eine Möglichkeit, sich anschaulich zu machen, wie sich der Begriffsverband bei der Hinzunahme weiterer Merkmale ändert.

Die Grundidee des gestuften Liniendiagramms ist es, Teilgebiete eines gewöhnlichen Diagramms abzugrenzen und Parallelscharen von Linien zwi-

[2] Zu Mengendarstellungen siehe auch Kap. 6.5

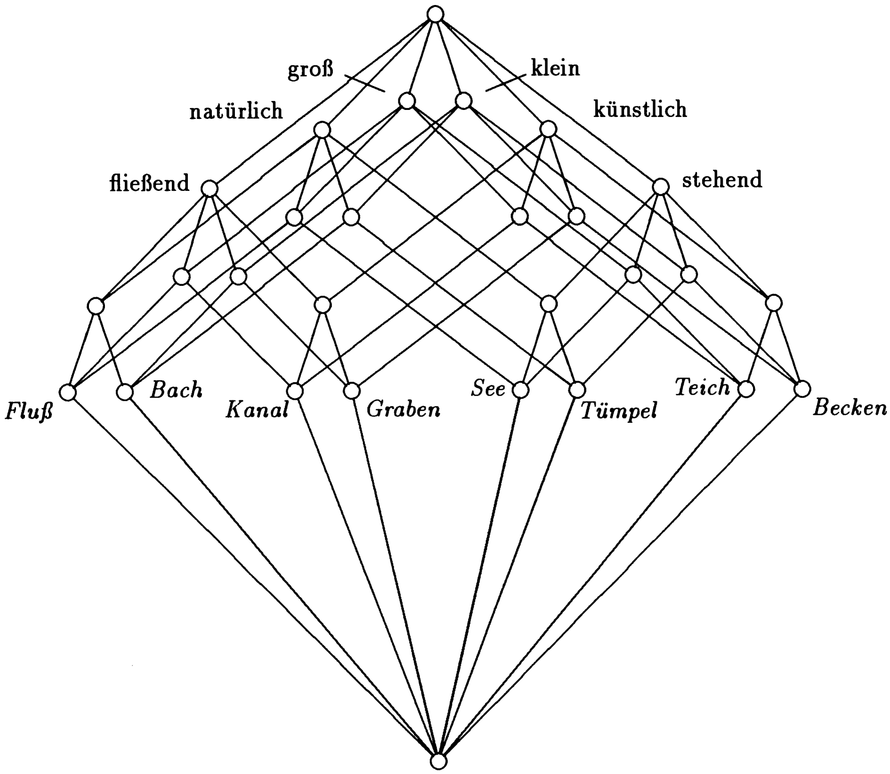


Abbildung 2.9. Ein additives Liniendiagramm des Begriffsverbandes zu einem Wortfeld *„Gewässer"*. Für die Mengendarstellung wurden die irreduziblen Merkmale verwendet. Die Positionierung der Merkmalbegriffe legt also die aller übrigen Begriffe fest; deutet man die Strecken vom Einselement zu den Merkmalbegriffen als Vektoren, so ergibt sich die Position eines beliebigen Begriffes, indem man vom Einselement aus die Summe der Vektoren abträgt, die zu Merkmalen seines Begriffsinhaltes gehören. Andere Diagramme des gleichen Verbandes findet man in Abbildung 2.10.

schen solchen Teilgebieten durch jeweils nur eine Linie zu ersetzen. Ein gestuftes Liniendiagramm besteht also aus abgegrenzten *Feldern*, in denen Teile des gewöhnlichen Liniendiagramms gezeichnet sind und die durch Linien miteinander verbunden sein können. Im einfachsten Fall sind zwei Felder, die durch eine einfache Linie miteinander verbunden sind, kongruent. Die Linie zeigt dann an, daß Kreise, die bei der Verschiebung des einen Feldes auf das andere zusammenfallen, im gewöhnlichen Liniendiagramm miteinander verbunden sind. Eine Doppellinie zwischen zwei Feldern bedeutet, daß jedes Element des oberen Feldes größer ist als jedes Element des unteren Feldes. Abbildung 2.10 zeigt den Begriffsverband aus dem vorigen Abschnitt, einmal als gewöhnliches Liniendiagramm und einmal gestuft gezeichnet. Der Übersichtlichkeit halber wurden die Namen der Gegenstände und Merkmale weggelassen.

Wir erlauben zusätzlich, daß durch eine einfache Linie verbundene Felder nicht notwendig kongruent sind, sondern jeweils einen Teil zweier kongruenter Figuren enthalten. Die beiden kongruenten Figuren werden dann als „Hintergrundstruktur“ in die Felder eingezeichnet, die Elemente aber nur dann durch Kreise hervorgehoben, wenn sie zu den jeweiligen Teilstrukturen gehören. Die Linie, die die beiden Felder verbindet, bedeutet dann, daß je zwei entsprechende Elemente des Hintergrundes miteinander verbunden sein sollen. Beispiele findet man in den Abbildungen 1.20 (S. 51) und 2.17 (S. 90).

Gestufte Liniendiagramme entstehen aus Teilungen der Menge der Merkmale. Grundlage ist der folgende Satz:

Satz 7. *Sei (G, M, I) ein Kontext und $M = M_1 \cup M_2$. Die Abbildung*

$$(A, B) \mapsto (((B \cap M_1)', B \cap M_1), ((B \cap M_2)', B \cap M_2))$$

ist eine $\bigvee$-erhaltende Ordnungseinbettung von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ in das Produkt von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M_1, I \cap G \times M_1)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(G, M_2, I \cap G \times M_2)$. Die Komponentenabbildungen

$$(A, B) \mapsto ((B \cap M_i)', B \cap M_i)$$

sind surjektiv auf $\underline{\mathfrak{B}}(G, M_i, I \cap G \times M_i)$.

Beweis. Wenn (A, B) ein Begriff von (G, M, I) ist, dann ist $B \cap M_i$ die Menge der gemeinsamen Merkmale der Gegenstände aus A im Kontext $\underline{\mathfrak{B}}(G, M_i, I \cap G \times M_i)$, also ein Begriffsinhalt dieses Kontextes. Die angegebene Zuordnung ist also wirklich eine Abbildung ins Produkt. Aus den Begriffsinhalten $B \cap M_1$ und $B \cap M_2$ erhalten wir B als Vereinigung zurück, die Abbildung ist also injektiv. Daß sie auch $\bigvee$-erhaltend (und damit eine Ordnungseinbettung) ist, erkennt man ebenfalls an den Begriffsinhalten. Es bleibt zu zeigen, daß die Komponentenabbildungen surjektiv sind. Sei C ein Begriffsinhalt von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M_i, I \cap G \times M_i)$. Dann ist $B := C^{II}$ ein Begriffsinhalt von (G, M, I) mit $B \cap M_i = C$, der Begriff (B', B) von (G, M, I) hat also unter der i-ten Komponentenabbildung als Bild den Begriff mit dem Inhalt C. $\square$

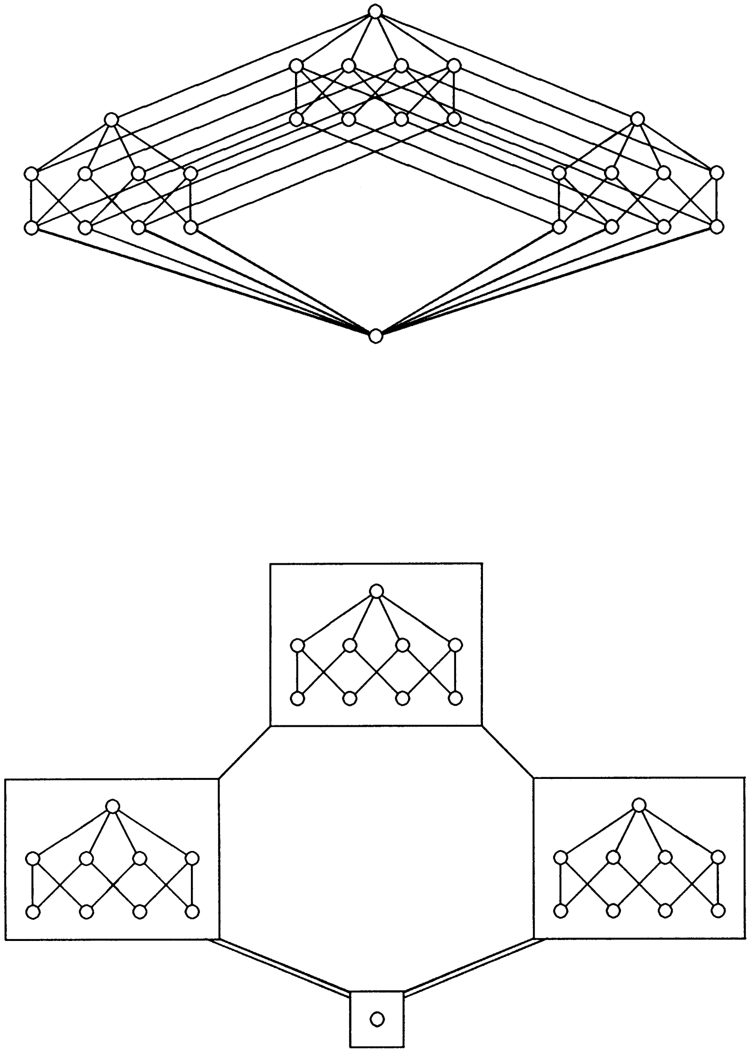


Abbildung 2.10. Liniendiagramm und gestuftes Liniendiagramm

Um ein gestuftes Liniendiagramm zu entwerfen, geht man folgendermaßen vor: Zunächst teilt man die Merkmalmenge ein: $M = M_1 \cup M_2$. Diese Einteilung braucht nicht disjunkt zu sein. Für die Interpretation wichtiger ist, daß die Mengen M_i Bedeutung tragen. Man zeichnet nun Liniendiagramme der Teilkontexte $\mathbb{K}_i := (G, M_i, I \cap G \times M_i)$, $i \in \{1, 2\}$, und beschriftet sie mit den Namen der Gegenstände und Merkmale, wie gewohnt. Als nächstes entwirft man als Hilfsstruktur ein gestuftes Liniendiagramm des Produkts der Begriffsverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_i)$; dazu zeichnet man eine große Kopie des Diagramms von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$, bei der man die Verbandselemente aber nicht durch kleine Kreise, sondern durch kongruente rechteckige Felder darstellt, in die man jeweils ein Diagramm von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ eingetragen hat.

In diesem Produkt ist der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ nach Satz 7 als $\bigvee$-Halbverband eingebettet. Liegt eine Liste der Elemente von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ vor, so kann man diese, nach ihren Inhalten, in das Produkt eintragen. Anderenfalls trägt man die Gegenstandsbegriffe, deren Inhalte man ja unmittelbar am Kontext ablesen kann, ein und bildet alle Suprema.

Dies liefert zugleich eine weitere, durchaus praktikable Methode zur Bestimmung eines Begriffsverbandes von Hand: Man teilt die Merkmalmenge geeignet, bestimmt die (kleinen) Begriffsverbände der Teilkontexte, zeichnet ihr Produkt als gestuftes Diagramm, trägt die Gegenstandsbegriffe ein und schließt gegen Suprema ab. Empfehlenswert ist dieses Vorgehen besonders, um rasch zu einem brauchbaren Diagramm zu gelangen.

2.3 Implikationen zwischen Merkmalen

Zur Einführung in die nun folgende Problemstellung soll ein –gedachtes– Beispiel dienen: Stellen wir uns einen Hersteller von Computergerät vor, dessen verschiedene Produkte auf vielfältige Weise, aber keineswegs beliebig, kombinierbar sind. Um eine begriffliche Gliederung der (sinnvollen) Konfigurationen zu erhalten, müßten wir den Kontext betrachten, dessen Gegenstände die Kombinationen und dessen Merkmale die Komponenten sind. Liegt eine Liste dieser Kombinationen nicht vor, so müssen wir sie erstellen; Grundlage dafür wird unsere Kenntnis darüber sein, welche Möglichkeiten für das Kombinieren von Bauteilen bestehen.

Ausgangspunkt der Begriffsanalyse ist also in diesem Fall nicht ein explizit angegebener Kontext; vielmehr erschließen wir den Kontext und damit auch das Begriffsystem aus der **Merkmallogik**, also aus den Regeln, wie Merkmale kombiniert werden können.

Diese Vorgehensweise drängt sich nicht nur im oben diskutierten Beispiel auf. Oft kommt es vor, daß eine große Menge von Gegenständen bezüglich einer relativ kleinen Zahl von Merkmalen klassifiziert werden soll und daß es sinnlos oder undurchführbar ist, zunächst den gesamten Kontext aufzuschreiben und dann die im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren zur Bestimmung des Begriffsystems anzuwenden. In solchen Fällen bestimmt man den Begriffsverband aus den *Implikationen zwischen den Merkmalen*, also aus Aussagen der Art: „Jeder Gegenstand mit den Merkmalen $a, b, c, \ldots$ hat auch die Merkmale $x, y, z, \ldots$“. Formal ist eine **Implikation zwischen Merkmalen** (in M) ein Paar von Teilmengen der Merkmalmenge M, bezeichnet wird eine solche Implikation mit $A \to B$. (Bei kleinen Mengen lassen wir, wie schon früher, die Klammern weg, schreiben also $A \to m$ statt $A \to \{m\}$, etc.) In diesem Abschnitt studieren wir die Merkmalimplikationen, die in einem Kontext *gelten*. Wieviel Information diese Implikationen beinhalten, wird daran deutlich, daß man aus ihnen die Struktur des Begriffsverbandes rekonstruieren kann. Umgekehrt können die Implikationen zwischen Merkmalen eines Kontextes auch an seinem Begriffsverband abgelesen werden. Allerdings ist das System aller in einem Kontext gültigen Implikationen zwischen Merkmalen meist sehr groß und enthält viele triviale Implikationen. Deshalb werden wir bemüht sein, Teilsysteme herauszuarbeiten, die zur Beschreibung des Begriffsverbandes ausreichen. Zunächst einige einfache Definitionen:

Definition 36. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ **respektiert** eine Implikation $A \to B$, wenn $A \not\subseteq T$ oder $B \subseteq T$ ist. T **respektiert eine Menge** $\mathcal{L}$ von Implikationen, wenn T jede einzelne Implikation in $\mathcal{L}$ respektiert. $A \to B$ **gilt** für eine Menge $\{T_1, T_2, \ldots\}$ von Teilmengen, falls jede der Teilmengen T_i die Implikation $A \to B$ respektiert. $A \to B$ **gilt in einem Kontext** (G, M, I), wenn sie im System der Gegenstandsinhalte gilt. Wir sagen dann auch, $A \to B$ sei **eine Implikation des Kontextes** (G, M, I) oder, gleichbedeutend, im Kontext (G, M, I) sei A **eine Prämisse für** B. ◊

Hilfssatz 19. *Eine Implikation $A \to B$ gilt in (G, M, I) genau dann, wenn $B \subseteq A''$ ist. Sie gilt dann automatisch auch für die Menge aller Begriffsinhalte.* □

Wie liest man eine Implikation vom Begriffsverband ab? Es genügt, dies für Implikationen der Form $A \to m$ zu beschreiben, denn $A \to B$ gilt ja genau dann, wenn für jedes $m \in B$ auch $A \to m$ gilt. $A \to m$ gilt genau dann, wenn $(m', m'') \geq (A', A'')$ ist, also wenn $\mu m \geq \bigwedge\{\mu n \mid n \in A\}$ ist. Im Begriffsverband hat man also zu prüfen, ob der mit m bezeichnete Begriff über dem Infimum aller mit einem n aus A bezeichneten Begriffe liegt.

Gelegentlich ist es nützlich, zur Bestimmung der Implikationen vom ursprünglichen Kontext (G, M, I) zu seinem komplementären Kontext $(G, M, (G \times M) \setminus I)$ überzugehen, besonders wenn dieser erheblich weniger Begriffe hat als (G, M, I). Für $m \in M$ und $A \subseteq M$ gelten folgende Äquivalenzen: $m \in A'' \Leftrightarrow \{m\} \subseteq A'' \Leftrightarrow A' \subseteq m' \Leftrightarrow \bigcap\{n' \mid n \in A\} \subseteq m' \Leftrightarrow G \setminus m' \subseteq \bigcup\{G \setminus n' \mid n \in A\}$. Damit gilt genau dann $A \to m$ in dem Kontext (G, M, I), wenn in seinem komplementären Kontext jeder Gegenstand mit dem Merkmal m wenigstens ein Merkmal n aus A hat.

Hilfssatz 20. *Ist $\mathcal{L}$ eine Menge von Implikationen in M, so ist*

$$\mathfrak{H}(\mathcal{L}) := \{X \subseteq M \mid X \text{ respektiert } \mathcal{L}\}$$

ein Hüllensystem auf M. Ist $\mathcal{L}$ die Menge aller Implikationen eines Kontextes, dann ist $\mathfrak{H}(\mathcal{L})$ das System aller Begriffsinhalte.

Der *Beweis* ist trivial. Den zugehörigen Hüllenoperator beschreibt man folgendermaßen: Für eine Menge $X \subseteq M$ sei

$$X^{\mathcal{L}} := X \cup \bigcup\{B \mid A \to B \in \mathcal{L}, A \subseteq X\}.$$

Man bildet die Mengen $X^{\mathcal{L}}$, $X^{\mathcal{L}\mathcal{L}}$, $X^{\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{L}}, \ldots$, bis schließlich eine Menge $\mathcal{L}(X) := X^{\mathcal{L}\ldots\mathcal{L}}$ mit $\mathcal{L}(X)^{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(X)$ entsteht (bei unendlichen Kontexten muß dieser Prozess gegebenenfalls transfinit fortgesetzt werden). $\mathcal{L}(X)$ ist dann die gesuchte Hülle von X bezüglich des Hüllensystems $\mathfrak{H}(\mathcal{L})$.

Mit Hilfe des Hüllensystems $\mathfrak{H}(\mathcal{L})$ kann man sich auch zu jeder vorgegebenen Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen einen Kontext verschaffen, dessen Begriffsinhalte genau die $\mathcal{L}$ respektierenden Mengen sind: $(\mathfrak{H}(\mathcal{L}), M, \ni)$ hat diese Eigenschaft. Außer $\mathcal{L}$ gelten in diesem Kontext noch alle Implikationen, die aus $\mathcal{L}$ im Sinne der nachstehenden Definition folgen:

Definition 37. Eine Implikation $A \to B$ **folgt (semantisch)** aus einer Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen zwischen Merkmalen, falls jede Teilmenge von M, die $\mathcal{L}$ respektiert, auch $A \to B$ respektiert. Eine Implikationenfamilie $\mathcal{L}$ wird **abgeschlossen** genannt, wenn jede Implikation, die aus $\mathcal{L}$ folgt, schon zu $\mathcal{L}$ gehört.

Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen eines Kontextes (G, M, I) heißt **vollständig**, wenn jede Implikation von (G, M, I) aus $\mathcal{L}$ folgt. ◊

Anders gesagt: Eine Implikation folgt semantisch aus $\mathcal{L}$, wenn sie in jedem Mengensystem gilt, in dem auch $\mathcal{L}$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{H}(\mathcal{L}) = \mathfrak{H}(\mathcal{L} \cup \{A \to B\})$ ist. Die abgeschlossenen Mengen von Implikationen lassen sich gut syntaktisch charakterisieren. Das ist ausführlich z.B. in dem Buch von Maier [123] abgehandelt, aus dem wir den folgenden Hilfssatz (der von Armstrong [1] stammt) zitieren:

Hilfssatz 21. *Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen auf M ist genau dann abgeschlossen, wenn die folgenden Bedingungen für alle $W, X, Y, Z \subseteq M$ erfüllt sind:*

1. $X \to X \in \mathcal{L}$,
2. *Wenn* $X \to Y \in \mathcal{L}$, *dann* $X \cup Z \to Y \in \mathcal{L}$,
3. *Wenn* $X \to Y \in \mathcal{L}$ *und* $Y \cup Z \to W \in \mathcal{L}$, *dann* $X \cup Z \to W \in \mathcal{L}$.

□

Um nachzuweisen, daß eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen eines Kontextes vollständig ist, muß man zeigen, daß jede Teilmenge $T \subseteq M$, die $\mathcal{L}$ respektiert, ein Begriffsinhalt ist.

Ein erster Ansatz, eine handliche vollständige Menge von Implikationen zu finden, besteht darin, diejenigen wegzulassen, die trivial aus anderen folgen oder die in jedem Kontext gelten. Beispielsweise gilt $A \to B$ stets, wenn

$B \subseteq A$ ist, und aus $A \to B$ und $C \subseteq B$ folgt stets $A \to C$. Ebenso folgt aus $A_j \to B_j$ für $j \in J$ stets $\bigcup_{j\in J} A_j \to \bigcup_{j\in J} B_j$. Eliminiert man die so entstehenden Implikationen, so bleiben bestimmte *Implikationen mit echter Prämisse* übrig:

Definition 38. Für eine Merkmalmenge $A \subseteq M$ eines Kontextes (G, M, I) bezeichnen wir mit

$$A^\bullet := A'' \setminus (A \cup \bigcup_{n\in A} (A \setminus \{n\})'')$$

die Menge derjenigen Merkmale, die zwar in A'', nicht aber in A oder in der Hülle einer echten Teilmenge von A liegen. Wir nennen A eine **echte Prämisse**, wenn $A^\bullet \neq \emptyset$, d.h. wenn

$$A'' \neq A \cup \bigcup_{n\in A} (A \setminus \{n\})''.$$

Insbesondere ist $\emptyset$ eine echte Prämisse, wenn $\emptyset'' \neq \emptyset$ ist. $\Diamond$

Hilfssatz 22. *Ist T eine endliche Teilmenge von M, so ist*

$$T'' = T \cup \bigcup \{A^\bullet \mid A \textit{ ist echte Prämisse mit } A \subseteq T\}.$$

Die Menge aller Implikationen der Form

$$A \to A^\bullet, \quad A \textit{ echte Prämisse,}$$

eines Kontextes mit endlicher Merkmalmenge ist vollständig.

Beweis. Ist $T = T''$, so ist die Behauptung trivial, sei also $m \in T'' \setminus T$. Eine Teilmenge A von T, die minimal bezüglich der Eigenschaft $m \in A''$ ist, muß eine echte Prämisse sein, also gibt es eine Implikation $A \to A^\bullet$ mit $m \in A^\bullet$. Da m beliebig gewählt war, folgt die erste Behauptung. Respektiert T alle Implikationen der Form $A \to A^\bullet$, wobei A echte Prämisse ist, so folgt aus dem soeben Bewiesenen, daß $T'' = T$ ist, also daß T ein Begriffsinhalt ist. $\square$

In gewisser Hinsicht ist die Menge der echten Prämissen kanonisch bezüglich der in Hilfssatz 22 beschriebenen Eigenschaft. Um dies zu präzisieren, führen wir zunächst noch eine Bezeichnung ein. Eine Familie von Implikationen kann dadurch vereinfacht werden, daß Implikationen mit gleicher Prämisse zusammengefaßt werden. Wir nennen eine Implikationenfamilie **kontrahiert**, wenn Prämissen nicht mehrfach auftreten. Ist nun $\mathcal{L}$ irgendeine kontrahierte Familie von Implikationen, die die Bedingung aus dem Hilfssatz erfüllt, d.h. mit

$$T'' = T \cup \bigcup \{B \mid A \to B \in \mathcal{L}, A \subseteq T\} \quad \text{für alle } T \subseteq M,$$

dann enthält $\mathcal{L}$ zu jeder echten Prämisse E eine Implikation $E \to F$ mit $E^\bullet \subseteq F$, wie man ohne Schwierigkeiten erkennt, wenn man E anstelle von T in die Bedingung einsetzt.

Zur Bestimmung der echten Prämissen eines doppelt fundierten Kontextes (G, M, I) kann man die Pfeilrelation $\swarrow$ heranziehen. In Anlehnung an Definition 36 nennen wir eine Merkmalmenge P eine **echte Prämisse für** ein Merkmal m, wenn P eine echte Prämisse ist und $m \in P^\bullet$ gilt.

Hilfssatz 23. *P ist genau dann eine Prämisse für m, wenn für alle $g \in G$ mit $g \swarrow m$*

$$(M \setminus g') \cap P \neq \emptyset$$

gilt. P ist genau dann eine echte Prämisse für m, wenn $m \notin P$ und P minimal ist bezüglich der Eigenschaft, daß $(M \setminus g') \cap P \neq \emptyset$ für alle $g \in G$ mit $g \swarrow m$ gilt.

Beweis. Für $g \in G$ und $P \subseteq M$ hat man die Äquivalenzen

$$(M \setminus g') \cap P \neq \emptyset \iff P \not\subseteq g' \iff g \notin P'.$$

Da $P' \not\subseteq m'$ äquivalent dazu ist, daß es einen Gegenstand $g \in P'$ mit $g \swarrow m$ gibt, folgt die erste Behauptung. Die Minimalitätseigenschaft echter Prämissen ergibt die zweite Behauptung. □

Nach dem Hilfssatz erhält man die echten Prämissen, indem man für jedes Merkmal m die minimalen Merkmalmengen P mit $(M \setminus g') \cap P \neq \emptyset$ für alle $g \swarrow m$ bestimmt.

Auch die in Hilfssatz 22 beschriebene Implikationenmenge ist in der Regel noch redundant.

Definition 39. Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen eines Kontextes heißt **nichtredundant**, wenn keine der Implikationen aus den übrigen folgt. ◊

Guigues und Duquenne [76] haben gezeigt, daß es zu jedem Kontext mit endlicher Merkmalmenge M eine natürliche vollständige und nichtredundante Menge von Implikationen gibt. Für die folgenden Ergebnisse machen wir die *Generalvoraussetzung, daß* die auftretende Merkmalmenge M *endlich ist.* Dies ermöglicht es, den grundlegenden Begriff des Pseudoinhaltes (der an die Stelle der echten Prämisse tritt), rekursiv zu definieren:

Definition 40. $P \subseteq M$ heißt **Pseudoinhalt** von (G, M, I) genau dann, wenn $P \neq P''$ ist und für jeden Pseudoinhalt $Q \subseteq P$, $Q \neq P$ schon $Q'' \subseteq P$ gilt. ◊

Satz 8. *Die Menge der Implikationen*

$$\mathcal{L} := \{P \to P'' \mid P \text{ } Pseudoinhalt\}$$

ist nichtredundant und vollständig.

Beweis. Offenbar gilt $\mathcal{L}$ in (G, M, I). Um zu zeigen, daß $\mathcal{L}$ vollständig ist, müssen wir wieder zeigen, daß jede Menge $T \subseteq M$, die $\mathcal{L}$ respektiert, ein Begriffsinhalt ist. Jede solche Menge respektiert insbesondere alle Implikationen $Q \to Q''$, wo Q ein Pseudoinhalt und $Q \subseteq T$ ist. Angenommen $T \neq T''$, dann erfüllt T selbst die Definition eines Pseudoinhaltes, und die Implikation $T \to T''$ ist in $\mathcal{L}$, wird aber nicht von T respektiert, Widerspruch.

Um zu zeigen, daß $\mathcal{L}$ nichtredundant ist, betrachten wir einen beliebigen Pseudoinhalt P und zeigen, daß P die Menge $\mathcal{L} \setminus \{P \to P''\}$ respektiert. Ist nämlich $Q \to Q''$ eine Implikation in $\mathcal{L} \setminus \{P \to P''\}$ mit $Q \subseteq P$, dann muß auch $Q'' \subseteq P$ sein, da P ein Pseudoinhalt ist. □

In der Praxis werden natürlich die Implikationen nicht in der Form $P \to P''$, sondern in der Form $P \to (P'' \setminus P)$ angegeben. Wir nennen dies die **Duquenne-Guigues-Basis** oder einfach **Stammbasis** der Merkmalimplikationen. Im Falle der Dritte-Welt-Länder (Abbildung 1.8) besteht diese Basis aus fünf Implikationen (siehe Abbildung 2.11).

OPEC	$\to$	Gruppe der 77, Blockfrei
MSAC	$\to$	Gruppe der 77
Blockfrei	$\to$	Gruppe der 77
Gruppe der 77, Blockfrei, MSAC, OPEC	$\to$	LLDC, AKP
Gruppe der 77, Blockfrei, LLDC, OPEC	$\to$	MSAC, AKP

Abbildung 2.11. Stammbasis zum Dritte-Welt-Kontext

Wiederum läßt sich zeigen, daß diese Implikationenfamilie in gewisser Hinsicht kanonisch bezüglich der angegebenen Eigenschaften ist. Wir notieren zuerst einen einfachen Hilfssatz:

Hilfssatz 24. *Sind P und Q Begriffs- oder Pseudoinhalte mit $P \not\subseteq Q$ und $Q \not\subseteq P$, so ist $P \cap Q$ ein Begriffsinhalt.*

Beweis. Sowohl P als auch Q, und damit auch $P \cap Q$, respektieren alle Implikationen in $\mathcal{L}$ mit Ausnahme von $P \to P''$ und $Q \to Q''$. Ist $P \neq P \cap Q \neq Q$, so respektiert $P \cap Q$ auch diese Implikationen, ist also ein Inhalt. □

Der folgende Hilfssatz zeigt u.a., daß es keine vollständige Menge geben kann, die weniger Implikationen enthält, als es Pseudoinhalte gibt:

Hilfssatz 25. *Jede vollständige Menge Σ von Implikationen enthält zu jedem Pseudoinhalt P eine Implikation $A \to B$ mit $A'' = P''$.*

Beweis. Da ein Pseudoinhalt P stets ungleich P'' ist, muß es, wenn Σ vollständig ist, wenigstens eine Implikation $A \to B$ in Σ geben, die aus P herausführt, also mit $A \subseteq P$ und $B \not\subseteq P$. Wegen $B \subseteq A''$ ist $A'' \not\subseteq P$, und deshalb kann $A'' \cap P$ kein Begriffsinhalt sein. Nach Hilfssatz 24 folgt daraus $P \subseteq A''$ und damit $P'' = A''$. □

Die rekursive Definition der Pseudoinhalte gibt einen ersten, allerdings ineffizienten Algorithmus zu ihrer Erzeugung. Wir entwickeln nun ein praktikableres Verfahren. Als unmittelbare Folge aus Hilfssatz 24 hat man:

Hilfssatz 26. *Die Menge aller Teilmengen von M, die Begriffsinhalte oder Pseudoinhalte von (G, M, I) sind, ist ein Hüllensystem.* □

Der Hüllenoperator zu diesem Hüllensystem entsteht durch eine Modifikation aus dem Operator $\mathcal{L}$. Ausgehend von einer Menge X bilden wir sukzessive

$$X^{\mathcal{L}^*} := X \cup \bigcup \{B \mid A \to B \in \mathcal{L}, A \subseteq X, A \neq X\}$$

$$X^{\mathcal{L}^*\mathcal{L}^*} := X^{\mathcal{L}^*} \cup \bigcup \{B \mid A \to B \in \mathcal{L}, A \subseteq X^{\mathcal{L}^*}, A \neq X^{\mathcal{L}^*}\}$$

und so fort, bis schließlich eine Menge $\mathcal{L}^*(X)$ mit $\mathcal{L}^*(X) = \mathcal{L}^*(X)^{\mathcal{L}^*}$ erreicht ist. Diese Menge ist dann der gesuchte Pseudoinhalt bzw. Begriffsinhalt. Festzuhalten ist, daß bei diesem Prozeß zur Erzeugung eines Pseudoinhaltes P nur Implikationen $A \to B$ benötigt werden, deren Prämisse A eine echte Teilmenge von P ist. Dies erlaubt nämlich eine rekursive Erzeugung der Pseudoinhalte mit Hilfe des in 2.3 beschriebenen Algorithmus.

Algorithmus zur Erzeugung aller Begriffsinhalte und Pseudoinhalte eines Kontextes (G, M, I) in lektischer Ordnung. Es wird angenommen, daß $M = \{1, 2, ..., n\}$ ist. Die Bezeichnung $<_i$ ist in 2.3 erklärt.

Der lektisch kleinste Begriffs- oder Pseudoinhalt ist $\emptyset$. Für eine gegebene Menge B findet man den lektisch nächsten Begriffs- oder Pseudoinhalt, indem man alle Elemente i von M prüft, beginnend mit dem größten und dann in absteigender Folge, bis erstmals $B <_i \mathcal{L}^*((B \cap \{1, 2, \ldots, i-1\}) \cup \{i\})$ ist. $\mathcal{L}^*((B \cap \{1, 2, \ldots, i-1\}) \cup \{i\})$ ist dann der gesuchte Begriffs- oder Pseudoinhalt. □

Wir kehren nun zur Ausgangsfrage dieses Abschnittes zurück: Wie ist es möglich, mit Hilfe der Implikationen die Begriffsinhalte zu bestimmen? Wir haben gesehen, daß dazu nicht alle Implikationen benötigt werden, sondern ein kleiner Teil bereits ausreicht. Allerdings haben wir bisher nur angegeben, wie diese Implikationen aus einem bereits vorliegenden Kontext gewonnen werden können. Mit den nun vorhandenen Hilfsmitteln können wir aber auch eine Methode entwickeln, redundanzfreie Implikationenmengen zu erstellen, wenn der Kontext nur teilweise oder gar nicht vorliegt. Dieses Verfahren, **Merkmalexploration** genannt, hat sich in vielen Anwendungen bewährt. In der Praxis benutzen wir dazu einen Computer, der die Implikationenmengen zu verwalten hat und berechnen kann, welche Informationen noch fehlen. Die Angabe der Implikationen erfolgt dann *interaktiv*, d.h. im Wechselspiel mit dem Benutzer.

Der Algorithmus zur Ermittlung der Pseudoinhalte erlaubt eine Modifikation, die zu einem solchen interaktiven Programm führt. Man kann nämlich, während die Liste $\mathcal{L}$ der Implikationen erzeugt wird, den Kontext noch verändern, indem man neue Gegenstände hinzunimmt. Respektieren die Inhalte dieser Gegenstände alle bis dahin ermittelten Implikationen, so kann die Rechnung für den neuen Kontext mit den bis dahin gewonnenen Ergebnissen fortgeführt werden. Dies ist die Aussage des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 27. *Es sei* $\mathbb{K}$ *ein Kontext, und* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *seien die ersten* n *Pseudoinhalte von* $\mathbb{K}$ *bezüglich der lektischen Ordnung. Wird nun* $\mathbb{K}$ *um einen Gegenstand* g *erweitert, dessen Gegenstandsinhalt* g' *die Implikationen* $P_i \to P_i''$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, *respektiert, dann sind* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *auch die lektisch ersten* n *Pseudoinhalte des erweiterten Kontextes.*

Dies beweist man z.B. durch Induktion über n. □

Ist also ein neuer Pseudoinhalt P gefunden worden, kann man den Algorithmus anhalten lassen und nachfragen, ob die Implikation $P \to P''$ zu $\mathcal{L}$ hinzugenommen werden soll. Der Benutzer kann dies bejahen oder den Kontext um ein Gegenbeispiel erweitern, welches natürlich den bisher bejahten Implikationen nicht widersprechen darf. Im Extremfall kann das Verfahren mit einem Kontext begonnen werden, in dem die Gegenstandsmenge noch leer ist. Der Benutzer hat dann alle Gegenbeispiele einzugeben; er kann also auf diese Weise ein Begriffssystem mit vorgegebener „Merkmallogik“ erzeugen.

Statt dieses Programm im einzelnen zu beschreiben, demonstrieren wir seine Wirkungsweise an einem Beispiel. Einem Buch über Meßtheorie [148] entnehmen wir eine Liste von Eigenschaften binärer Relationen, die dort zur Definition verschiedener Relationenklassen benötigt werden, siehe Abbildung 2.12.

	Eigenschaft	Definition
r	reflexiv	xRx für alle $x \in S$
i	irreflexiv	$\neg xRx$ für alle $x \in S$
s	symmetrisch	$xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in S$
as	asymmetrisch	$xRy \Rightarrow \neg yRx$ für alle $x, y \in S$
an	antisymmetrisch	xRy und $yRx \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in S$
t	transitiv	xRy und $yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in S$
nt	negativ transitiv	$\neg xRy$ und $\neg yRz \Rightarrow \neg xRz$ für alle $x, y, z \in S$
k	konnex	xRy oder yRx für alle $x \neq y \in S$
sk	streng konnex	xRy oder yRx für alle $x, y \in S$

Abbildung 2.12. Eigenschaften binärer Relationen

Welche Implikationen bestehen zwischen diesen Eigenschaften? Für jede einzelne dieser Implikationen ist es einfach zu entscheiden, ob sie für alle binären Relationen gilt. Es sind nur endlich viele solcher Implikationen möglich (denn es sind ja nur endlich viele Merkmale), aber jedenfalls mehr, als daß man sie alle auflisten möchte. Unser Algorithmus soll uns helfen, ohne Umschweife „gute“ Implikationen zu entdecken. Implikationen, die nicht für alle binären Relationen gelten, widerlegen wir durch die Angabe von Gegenbeispielen.

Zunächst verschaffen wir uns einen kleinen Vorrat an Beispielen, indem wir alle Relationen auf der ein- oder zweielementigen Menge betrachten. Es gibt, bis auf Isomorphie, zwölf solche Relationen (Abbildung 2.13).

S	R	r	i	s	as	an	t	nt	k	sk	
$\{0\}$	$\emptyset$		×	×	×	×	×	×	×		
$\{0\}$	$\{(0,0)\}$	×		×		×	×	×	×	×	
$\{0,1\}$	$\emptyset$		×	×	×	×	×	×			
$\{0,1\}$	$\{(0,0)\}$			×		×	×				$\leftarrow$
$\{0,1\}$	$\{(0,0),(1,1)\}$	×		×		×	×				
$\{0,1\}$	$\{(0,0),(0,1)\}$					×	×	×	×		$\leftarrow$
$\{0,1\}$	$\{(0,0),(1,0)\}$					×	×	×	×		$\leftarrow$
$\{0,1\}$	$S\times S\setminus\{(0,1)\}$	×				×	×	×	×	×	
$\{0,1\}$	$S\times S\setminus\{(0,0)\}$			×				×	×		$\leftarrow$
$\{0,1\}$	$\{(0,1)\}$		×		×	×	×	×	×		
$\{0,1\}$	$\{(0,1),(1,0)\}$		×	×				×	×		
$\{0,1\}$	$S\times S$	×		×			×	×	×	×	

Abbildung 2.13. Beispiele binärer Relationen

Nun haben wir einen Kontext für den Start (im allgemeinen darf dieser Kontext auch leer sein). Natürlich können nur solche Implikationen für alle binären Relationen gelten, die in diesem Kontext gelten, aber nicht umgekehrt. Man beachte, daß die vier mit einem $\leftarrow$ gekennzeichneten Gegenstände überflüssig sind, da ihre Gegenstandsinhalte Durchschnitt von anderen Gegenstandsinhalten sind und deshalb alle Implikationen respektieren, die von den anderen respektiert werden. Wir lassen sie daher im folgenden weg. Nun benutzen wir den Algorithmus zur Berechnung des ersten Pseudoinhaltes. Der lektisch kleinste in diesem Kontext ist $\{sk\}$, mit $\{sk\}'' = \{r, t, nt, k, sk\}$. Mit anderen Worten, die Implikation

$$\{sk\} \to \{r, t, nt, k, sk\}$$

gilt in allen bisher angegebenen Beispielen. Gilt sie für binäre Relationen allgemein? Natürlich nicht, ein Gegenbeispiel ist z.B. $S = \{0, 1, 2\}$, $R = S \times S \setminus \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$. Diese Relation ist reflexiv, antisymmetrisch, konnex und streng konnex und hat keine der anderen Eigenschaften. Wir erweitern unseren Kontext um dieses Beispiel und fragen erneut nach dem kleinsten Pseudoinhalt. Dies ist immer noch $\{sk\}$, aber nun ist $\{sk\}'' = \{r, k, sk\}$, und wir haben nachzuprüfen ob die Implikation $\{sk\} \to \{r, k, sk\}$, die wir mit

Nr.	S	R
1	$\{0\}$	$\emptyset$
2	$\{0\}$	$\{(0,0)\}$
3	$\{0,1\}$	$\emptyset$
4	$\{0,1\}$	$\{(0,0),(0,1)\}$
5	$\{0,1\}$	$S \times S \setminus \{(0,1)\}$
6	$\{0,1\}$	$\{(0,1)\}$
7	$\{0,1\}$	$\{(0,1),(1,0)\}$
8	$\{0,1\}$	$S \times S$
9	$\{0,1,2\}$	$S \times S \setminus \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$
10	$\{0,1,2\}$	$\{(0,1),(1,2),(2,0)\}$
11	$\{0,1,2\}$	$\{(0,1)\}$
12	$\{0,1,2\}$	$\{(0,1),(1,0)\}$
13	$\{0,1,2\}$	$S \times S \setminus \{(0,1)\}$
14	$\{0,1,2\}$	$S \times S \setminus \{(0,1),(1,0)\}$

Abbildung 2.14. Eine vollständige Liste von Beipielen

$$sk \to r, k$$

abkürzen, für alle binären Relationen gilt. In der Tat ist jede streng konnexe Relation reflexiv und konnex. Diese Implikation wird daher in die Implikationenliste $\mathcal{L}$ aufgenommen.

Der nächste Pseudoinhalt ist $\{t, k\}$ mit $\{t, k\}'' = \{t, nt, k\}$. Dies schlägt die Implikation

$$t, k \to nt$$

vor, die in der Tat für binäre Relationen gilt und deshalb in die Liste aufgenommen wird, ebenso wie die nächste,

$$an, nt \to t,$$

die von dem Pseudoinhalt $\{an, nt\}$ mit

$$\{an, nt\}'' = \{an, t, nt\}$$

stammt. Danach erhalten wird den Pseudoinhalt $\{as\}$, für den

$$\{as\}'' = \{i, as, an, t, nt\}$$

im Kontext der Beispiele gilt. Aber die Implikation

$$as \to i, an, t, nt$$

gilt nicht allgemein, wie das folgende Beispiel zeigt: $S := \{0,1,2\}$, $R := \{(0,1),\ (1,2),\ (2,0)\}$. Diese Relation hat die Merkmale i, as, an, nt, und wir nehmen sie in den Kontext auf. Da sie natürlich alle bisher akzeptierten Implikationen respektiert, ändern sich durch sie die bislang gefundenen Pseudoinhalte nicht (Hilfssatz 27).

Im weiteren Verlauf bestätigen wir zunächst die Implikationen $as \to i, an$ und $s, k \to nt$ sowie $s, an \to t$, geben dann zu $i, t \to as, an, nt$ ein Gegenbeispiel an, usw. Das vollständige Ergebnis ist in den Abbildungen 2.14 bis 2.17 wiedergegeben.

Man beachte, daß die Prämissen der Implikationen in Abbildung 2.16 genau die Pseudoinhalte des Kontextes in Abbildung 2.15 sind.

	r	i	s	as	an	t	nt	k	sk
1		×	×	×	×	×	×	×	
2	×		×		×	×	×	×	×
3		×	×	×	×	×	×		
4	×		×		×	×			
5	×				×	×	×	×	×
6		×		×	×	×	×	×	
7		×	×				×	×	
8	×		×			×	×	×	×
9	×				×			×	×
10		×		×	×			×	
11		×		×	×	×			
12		×	×						
13	×						×	×	×
14	×		×						

Abbildung 2.15. Der Kontext der Beispiele

streng konnex → reflexiv, konnex
transitiv, konnex → negativ transitiv
antisymmetrisch, negativ transitiv → transitiv
asymmetrisch → irreflexiv, antisymmetrisch
symmetrisch, konnex → negativ transitiv
symmetrisch, antisymmetrisch → transitiv
irreflexiv, transitiv → asymmetrisch, antisymmetrisch
irreflexiv, antisymmetrisch → asymmetrisch
irreflexiv, symmetrisch, asymme- trisch, antisymmetrisch, transitiv → negativ transitiv
reflexiv, konnex → streng konnex
reflexiv, negativ transitiv → konnex, streng konnex
reflexiv, symmetrisch, negativ tran- sitiv, konnex, streng konnex → transitiv
reflexiv, irreflexiv → alle Eigenschaften

Abbildung 2.16. Eine vollständige und nichtredundante Liste von Implikationen

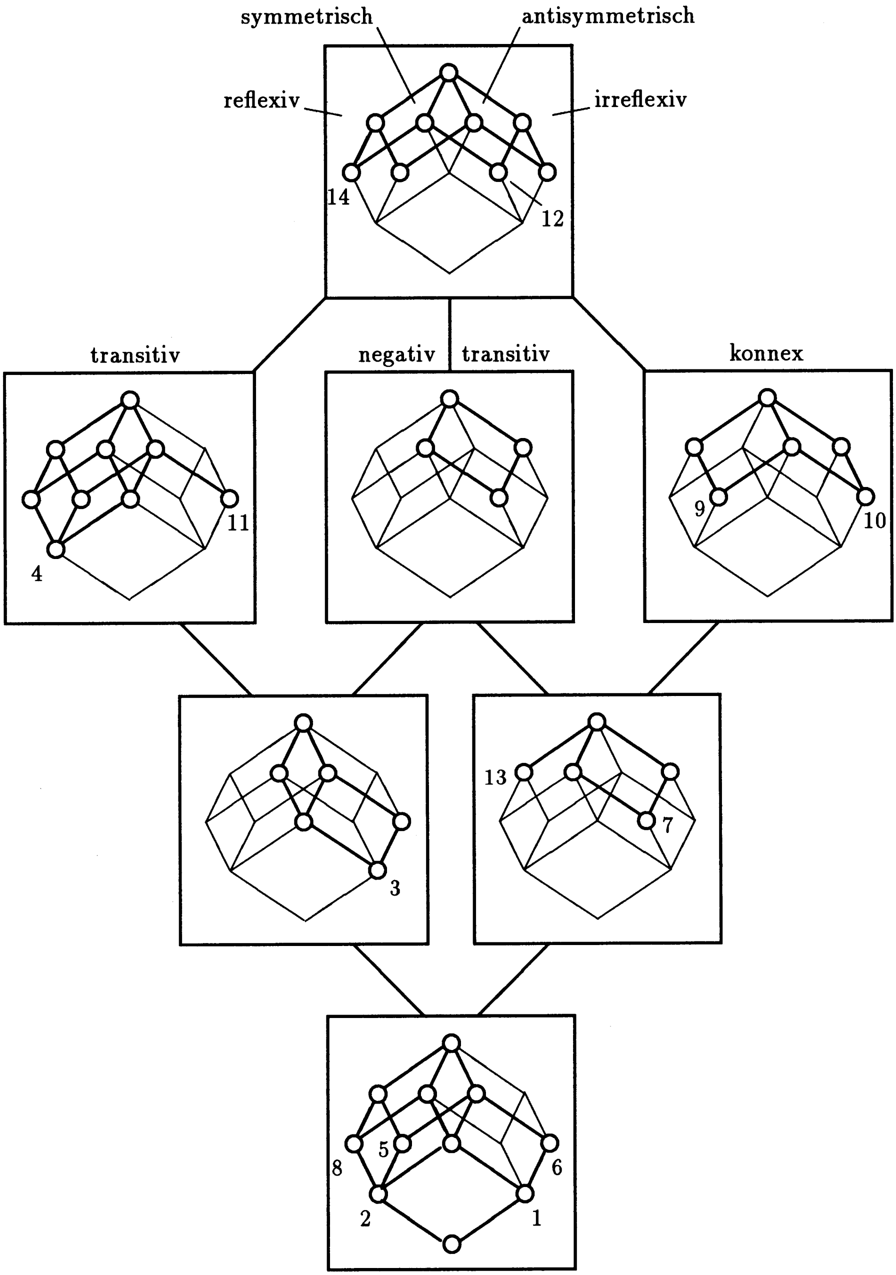


Abbildung 2.17. Der Begriffsverband zum Kontext der binären Relationen

Es ist durch das Verfahren nicht gewährleistet, daß der entstehende Kontext reduziert ist (wie in diesem Beispiel); neu eingegebene Gegenstände können früher eingegebene entbehrlich machen. Man kann den Kontext während des Ablaufes zeilenreduzieren (d.h. reduzible Gegenstände streichen), dies hat keinen Einfluß auf die Implikationen.

2.4 Abhängigkeiten zwischen Merkmalen

Wie läßt sich die Implikationentheorie auf den Fall mehrwertiger Kontexte übertragen? Die Merkmalimplikationen im abgeleiteten Kontext bieten dazu einen Ansatz, der aber elementar ist; er beschreibt im wesentlichen Implikationen zwischen einzelnen Merkmalausprägungen, jedenfalls solange wir bei der schlichten Skalierung bleiben. Die Umgangssprache benutzt den Begriff der **Abhängigkeit** von mehrwertigen Merkmalen, wie er etwa in dem Beispielsatz

> „Der Preis eines Grundstücks hängt ab von seiner Lage und seiner Größe"

zum Ausdruck kommt. Hier ist eine simultane Abhängigkeit von Merkmalausprägungen gemeint, vielleicht sogar graduell im Sinne von „je größer, desto teurer".

Es gibt verschiedene Abhängigkeitsbegriffe für mehrwertige Merkmale, die den verschiedenen Möglichkeiten der Skalierung entsprechen. Für eine Einordnung in einen allgemeinen theoretischen Rahmen verweisen wir auf die Literatur.

Wir beschreiben hier den Fall der *funktionalen Abhängigkeit*, den (stärkeren) der *ordinalen Abhängigkeit* und deuten Verallgemeinerungen an. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns zunächst auf den Fall vollständiger mehrwertiger Kontexte.

Definition 41. Sind $X \subseteq M$ und $Y \subseteq M$ Mengen von Merkmalen eines vollständigen mehrwertigen Kontextes (G, M, W, I), dann nennen wir Y **funktional abhängig** von X, wenn für jedes Paar von Gegenständen $g, h \in G$ folgendes gilt:

$$(\forall_{m \in X}\ m(g) = m(h)) \Rightarrow (\forall_{n \in Y}\ n(g) = n(h)). \qquad \Diamond$$

Wenn also zwei Gegenstände bezüglich aller Merkmale aus X die gleichen Ausprägungen haben, dann muß das für die Merkmale aus Y ebenfalls so sein. In der Theorie relationaler Datenbanken wird dieser Abhängigkeitsbegriff gern verwendet. Die Bezeichnung „funktional" erklärt sich so: Y hängt genau dann funktional von X ab, wenn es eine Abbildung $f : W^X \to W^Y$ gibt mit

$$f(m(g) \mid m \in X) = (n(g) \mid n \in Y) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Bei der ordinalen Abhängigkeit betrachtet man einen ordinalen Kontext, hat also für jedes Merkmal $m \in M$ eine Ordnung $\leq_m$ auf der Menge $m(G)$ der Ausprägungen von m. (Man erhält den Spezialfall der funktionalen Abhängigkeit, wenn man für jede dieser Ordnungen die Gleichheitsrelation nimmt.)

Definition 42. Es sei (G, M, W, I) ein vollständiger mehrwertiger Kontext, und für jedes Merkmal $m \in M$ sei $\leq_m$ eine Ordnungsrelation auf der Menge $m(G)$ der Ausprägungen von m. Sind $X \subseteq M$ und $Y \subseteq M$ Mengen von Merkmalen, dann nennen wir Y **ordinal abhängig** von X, wenn für jedes Paar von Gegenständen $g, h \in G$ folgendes gilt:

$$(\forall_{m \in X}\ m(g) \leq_m m(h)) \Rightarrow (\forall_{n \in Y}\ n(g) \leq_n n(h)). \qquad \Diamond$$

Ganz gleich welche Ordnungen $\leq_m$ gewählt sind, impliziert die ordinale Abhängigkeit stets die funktionale Abhängigkeit. Aus $m(g) = m(h)$ folgt nämlich $m(g) \leq_m m(h)$ sowie $m(h) \leq_m m(g)$, und umgekehrt. Man kann also erwarten, daß die ordinale Abhängigkeit eine Art „ordnungserhaltende funktionale Abhängigkeit“ ist. Das ist intuitiv auch richtig, aber umständlich zu formulieren, denn die Bedingung der Ordnungstreue ist nur für die im Kontext auftretenden Tupel $(m(g) \mid m \in X)$ gefordert. Nicht jede solche Abbildung läßt sich zu einer ordnungserhaltenden Abbildung von W^X nach W^Y fortsetzen.

Die ordinalen Abhängigkeiten (und als Spezialfall davon die funktionalen Abhängigkeiten) mehrwertiger Kontexte lassen sich auf elegante Weise auf Implikationen geeigneter einwertiger Kontexte zurückführen. Zu einem vollständigen mehrwertigen Kontext (G, M, W, I) mit Ordnungen $\leq_m$ auf den Ausprägungen definieren wir einen einwertigen Kontext

$$\mathbb{K}_{\mathbb{O}} := (G \times G, M, I_{\mathbb{O}})$$

durch die Regel

$$(g, h) I_{\mathbb{O}}\, m \quad :\Longleftrightarrow\ m(g) \leq_m m(h).$$

Für die funktionalen Abhängigkeiten vereinfacht sich der Kontext noch etwas: Man kann die Symmetrie der Gleichheitsrelation nutzen und definiert

$$\mathbb{K}_{\mathbb{N}} := (\mathfrak{P}_2(G), M, I_{\mathbb{N}})$$

durch

$$\{g, h\} I_{\mathbb{N}}\, m \quad :\Longleftrightarrow\ m(g) = m(h).$$

Dabei ist

$$\mathfrak{P}_2(G) := \{\{g, h\} \mid g, h \in G, g \neq h\}.$$

Die so definierten Kontexte entsprechen exakt den oben gegebenen Definitionen für die Abhängigkeiten, und ohne Mühe zeigt man:

Hilfssatz 28. *Genau dann ist in (G, M, W, I) die Merkmalmenge Y funktional abhängig von X, wenn im Kontext $\mathbb{K}_{\mathbb{N}}$ die Implikation $X \to Y$ gilt. Genau dann ist in (G, M, W, I) die Merkmalmenge Y ordinal abhängig von X, wenn im Kontext $\mathbb{K}_{\mathbb{O}}$ die Implikation $X \to Y$ gilt.* $\square$

Die Theorie der funktionalen und ordinalen Abhängigkeiten ist damit vollständig auf die der Implikationen zurückgeführt. Insbesondere kann der im vorigen Abschnitt angegebene Algorithmus auch zur Erzeugung einer Basis für die funktionalen bzw. ordinalen Abhängigkeiten genutzt werden.

Die Übersetzung funktioniert auch dann, wenn der mehrwertige Kontext (G, M, W, I) nicht vollständig ist. Dazu bemerken wir vorab, daß Y genau dann von X ordinal abhängig ist, wenn dies für jedes einzelne Merkmal in Y gilt, d.h. wenn $\{n\}$ ordinal von X abhängig ist für jedes $n \in Y$. Es genügt also anzugeben, wann ein einzelnes Merkmal von einer Merkmalmenge abhängig ist. Für den allgemeinen Fall kann man das so formulieren:

Definition 43. Es sei (G, M, W, I) ein mehrwertiger Kontext mit einer Ordnungsrelation $\leq_m$ auf der Menge $m(G)$ der Ausprägungen für jedes Merkmal $m \in M$. Sind $X \subseteq M$ eine Menge von Merkmalen und $n \in M$ ein Merkmal, dann nennen wir n **ordinal abhängig** von X, wenn

$$\forall_{m \in X} \ \operatorname{dom}(n) \subseteq \operatorname{dom}(m)$$

und aus $n(g) \not\leq n(h)$ stets folgt, daß es ein Merkmal $m \in X$ gibt mit $m(g) \not\leq m(h)$. $\Diamond$

Um Hilfssatz 28 anzupassen, müssen wir die Definitionen der Kontexte $\mathbb{K}_\mathrm{N}$ und $\mathbb{K}_\mathbb{O}$ modifizieren. Dazu führen wir für jedes Merkmal $m \in M$, welches nicht vollständig ist, eine Kopie $\hat{m}$ ein. Diese neuen Merkmale sollen untereinander verschieden sein und nicht zu M gehören. Wir erweitern die Merkmalmenge des einwertigen Kontextes also um die Menge

$$\hat{M} := \{\hat{m} \mid \operatorname{dom}(m) \neq G\}.$$

Im Fall vollständiger Kontexte hat man $\hat{M} = \emptyset$, im allgemeinen Fall ist

$$\mathbb{K}_\mathrm{N} := (\mathfrak{P}_2(G), M \,\dot{\cup}\, \hat{M}, I_\mathrm{N}) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{K}_\mathbb{O} := (G \times G, M \,\dot{\cup}\, \hat{M}, I_\mathbb{O}),$$

mit

$$\{g, h\} I_\mathrm{N}\, \hat{m} :\iff (g, h) I_\mathbb{O}\, \hat{m} :\iff g \in \operatorname{dom}(m) \text{ und } h \in \operatorname{dom}(m)$$

und, wie oben,

$$(g, h) I_\mathbb{O}\, m :\iff m(g) \leq_m m(h), \quad \{g, h\} I_\mathrm{N}\, m :\iff m(g) = m(h).$$

Hilfssatz 28 verallgemeinert sich nun folgendermaßen:

Hilfssatz 29. *Genau dann ist das Merkmal n funktional (bzw. ordinal) abhängig von X, wenn im Kontext $\mathbb{K}_\mathrm{N}$ (bzw. im Kontext $\mathbb{K}_\mathbb{O}$) die Implikationen $\{\hat{n}\} \cup X \to n$ und $\hat{n} \to \hat{X}$ gelten.* $\square$

Lassen sich die vorgestellten Ansätze auf andere Abhängigkeitsbegriffe als den der funktionalen und den der ordinalen Abhängigkeit übertragen? Für welche derartigen Fälle ist es möglich, die Abhängigkeiten eines mehrwertigen Kontextes durch die Implikationen eines geeigneten einwertigen Kontextes darzustellen?

Hier gibt es derzeit noch keine vollständige Klarheit. Eine naheliegende Verallgemeinerung erhält man, indem man (vollständige) mehrwertige Kontexte (G, M, W, I) betrachtet, bei denen für jedes Merkmal $m \in M$ eine Relation Θ_m auf W vorgegeben ist. Wir kürzen die Folge dieser Relationen durch $\Theta := (\Theta_m \mid m \in M)$ ab und sagen, eine Merkmalmenge $Y \subseteq M$ sei **Θ-abhängig** von einer Menge $X \subseteq M$, falls für jedes Paar von Gegenständen $g, h \in G$ folgendes gilt:

$$(\forall_{m \in X}\; m(g)\Theta m(h)) \Rightarrow (\forall_{n \in Y}\; n(g)\Theta n(h)).$$

Eine mögliche Interpretation solcher Abhängigkeiten ist es, die Θ_m als Unschärfen oder Toleranzen zu deuten. Eine Θ-Abhängigkeit beschreibt dann eine „unscharfe funktionale Abhängigkeit".

Hilfssatz 28 läßt sich ohne Probleme auf diesen Fall übertragen. Die Θ-Abhängigkeiten von (G, M, W, I) sind genau die Implikationen des Kontextes

$$\mathbb{K}_\Theta := (G \times G, M, I_\Theta) \qquad \text{mit} \qquad (g, h) I_\Theta\, m \quad :\Longleftrightarrow\; m(g)\Theta_m m(h).$$

2.5 Literatur und Hinweise

Zu 2.1 Der Algorithmus in Satz 5 stammt aus [58], siehe auch [59]. Andere Algorithmen stammen von Fay [54], Norris [133], Bordat [22]. Einen Vergleich findet man bei Guenoche [81]. Weiterentwicklungen sind von Ganter und Reuter [64], [61], Krolak–Schwerdt, Orlik und Ganter [106] angegeben. Zur Komplexität siehe Skorsky [159]. In Kürze wird ein Buch von Vogt [182] zu diesem Thema erscheinen.

Schütt [156] gibt eine Abschätzung für die Anzahl der Begriffe in Abhängigkeit von $|I|$:

$$|\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)| \leq \frac{3}{2} \cdot 2^{\sqrt{|I|+1}} - 1 \qquad (\text{für } |I| > 2).$$

Zu 2.2 Das Gewässer-Beispiel aus Abbildung 2.9 stammt aus der Arbeit [98] von Kipke und Wille. Automatische Diagrammerstellung wird ausführlich in Arbeiten von Skorsky, Luksch und Wille diskutiert, siehe [159], [115] und [206], aber auch Gepperth [71]. Es gibt dazu auch zahlreiche Implementierungen; am verbreitetsten ist wohl DIAGRAM von Frank Vogt für DOS. TOSCANA [103] ist ein kommerziell genutztes Programmsystem, das mit Hilfe aufwendiger gestufter Linindiagramme den Zugriff auf Datenbanken erleichtert und erweitert. Siehe auch [209], [210] sowie Kühn & Ries [107]. Die geometrische Methode ist in [203] und bei [173] dargestellt und von Kark [95] durch ein Programm unterstützt. Skorsky [158] hat die Parallelogrammregel untersucht.

Es sind andere Darstellungsformen für Kontexte und Begriffsverbände vorgeschlagen worden, auf die hier nicht eingegangen wird. Siehe [203], Bokowski und Kollewe [17], Kollewe [102], Lengnink [109], [110].

Zu 2.3 Implikationen und Abhängigkeiten zwischen Merkmalen sind bereits in [193] betrachtet. Die Implikationenbasis mit den Pseudoinhalten wurde in der Formalen Begriffsanalyse von Duquenne und Guigues [76], [45] eingeführt, aus ihrer Arbeit stammt auch Satz 8. Entsprechende Fragestellungen haben auch in der Theorie relationaler Datenbanken eine Rolle gespielt, siehe dazu Maier [123], Ch. 5. Weitere Untersuchungen findet man bei Wild [189], [188], [190].

Echte Prämissen wurden in [66] eingeführt, siehe auch Rusch und Wille [149].

Eine Implikation $A \to B$ gilt in einem Kontext nur dann, wenn *jeder* Gegenstand, der alle Merkmale aus A hat, auch alle Merkmale aus B hat. Verschiedene Autoren haben versucht, diese Bedingung abzuschwächen. Burmeister [24] beschreibt Implikationen bei unvollständigem Wissen mittels einer dreiwertigen KLEENE-Logik. Dies ist auch in seinem bereits erwähnten Programm CONIMP implementiert. Luxenburger [119], [120], [121] untersucht **partielle Implikationen**, das sind solche, die für nur einen Teil der Gegenstandsmenge gelten.

Durch die Ergebnisse von Duquenne und Guigues wurde es möglich, die von Wille schon früher vorgeschlagene Merkmalexploration wirkungsvoller algorithmisch umzusetzen, dies ist in [58], [59] beschrieben. Eine bemerkenswerte frühe Anwendung dieser Technik wurde von Reeg und Weiß [141] durchgeführt; bei ihrer Untersuchung bestand die Merkmalmenge aus 50 gängigen Eigenschaften endlicher Verbände.

Stumme [172] läßt Ausnahmen und Hintergrundimplikationen zu.

Die Methode der Merkmalexploration ist auf verschiedene Weisen weiterentwickelt worden (vgl. [205]): Einerseits zur **Begriffexploration** [200] (siehe auch Klotz und Mann [100]), bei der statt mit Merkmalen allgemeiner mit Begriffen gearbeitet wird. Eine Spezialisierung auf den distributiven Fall ist besonders gut handhabbar, siehe Stumme [171].

Andererseits kann die Merkmalexploration zur **Regelexploration** erweitert werden, bei der prädikatenlogische Horn-Formeln an die Stelle der Implikationen treten, das behandelt Zickwolff [221].

Zu 2.4 Die meisten Ergebnisse dieses Abschnittes stammen aus [67]. Eine einheitliche Theorie der Abhängigkeit mehrwertiger Merkmale ist in [202] entworfen, vergleiche auch [66]. Die Θ-Abhängigkeiten können bei Stöhr und Wille [165] nachgelesen werden. Umbreit [178] untersucht in ihrer Arbeit auch Implikationen und Abhängigkeiten zwischen unscharfen Merkmalen.

3. Teile und Faktoren

Will man Teile eines komplexeren Begriffssystems studieren, so liegt es nahe, einige Gegenstände und/oder Merkmale aus der Betrachtung auszuklammern. Wir beschreiben, wie sich das auf den Begriffsverband auswirkt. Der Begriffsverband eines *Teilkontextes* besitzt stets eine Ordnungseinbettung in den des ursprünglichen Kontextes. Sehr viel mehr Information gewinnt man, wenn man es mit *verträglichen* Teilkontexten zu tun hat, die wir danach einführen. Diese speziellen Teilkontexte lassen sich leicht mit Hilfe der Pfeilrelationen entdecken. Man erhält dann einen *Faktorverband* des ursprünglichen Begriffsverbandes. Die Zusammenhänge zwischen Faktorverbänden, Kongruenzrelationen und solchen Teilkontexten sind im zweiten Abschnitt dargestellt.

Auch die *vollständigen Unterverbände* eines Begriffsverbandes lassen sich durch Teile des Kontextes beschreiben, aber nicht durch Teilkontexte, sondern durch Teilrelationen der Inzidenzrelation I, bei fester Gegenstands- und Merkmalsmenge. Solche *abgeschlossenen Relationen* sind im dritten Abschnitt definiert.

Im vierten Abschnitt werden *Toleranzrelationen* eingeführt; das sind verallgemeinerte Kongruenzrelationen, die nicht transitiv zu sein brauchen. Es zeigt sich, daß auch für Toleranzrelationen noch ein Faktorverband eingeführt werden kann. Außerdem ist eine Kontextbeschreibung möglich: Toleranzen entsprechen gewissen Obermengen der Inzidenzrelation I, nämlich den *Blockrelationen*.

3.1 Teilkontexte

Definition 44. Ist (G, M, I) ein Kontext und sind $H \subseteq G$ und $N \subseteq M$, so wird $(H, N, I \cap H \times N)$ ein **Teilkontext** von (G, M, I) genannt.[1] $\Diamond$

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Frage, wie das Begriffssystem eines Teilkontextes mit dem von (G, M, I) zusammenhängt. Werden nur Merkmale weggelassen, betrachtet man also für eine Menge $N \subseteq M$ den Teilkontext

[1] Wir schreiben $I \cap H \times N$ für $I \cap (H \times N)$ und statt $(H, N, I \cap H \times N)$ machmal einfach (H, N).

$(G, N, I \cap G \times N)$, so bleibt die Änderung überschaubar. Jeder Merkmalumfang von $(G, N, I \cap G \times N)$ ist ja auch ein Merkmalumfang von (G, M, I), und da jeder Begriffsumfang Durchschnitt von Merkmalumfängen ist, erhält man:

Hilfssatz 30. *Ist $N \subseteq M$, so ist jeder Begriffsumfang von $(G, N, I \cap G \times N)$ ein Begriffsumfang von (G, M, I).* □

Dem Weglassen von Merkmalen entspricht also eine Vergröberung des Hüllensystems der Begriffsumfänge, und entsprechendes gilt für das Weglassen von Gegenständen. Man erhält zugleich eine natürliche Einbettung des Begriffsverbandes von $(G, N, I \cap G \times N)$ in den von (G, M, I):

Hilfssatz 31. *Für $N \subseteq M$ ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathfrak{B}}(G, N, I \cap G \times N) & \to & \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \\ (A, B) & \mapsto & (A, A') \end{array}$$

eine $\bigwedge$-treue Ordnungseinbettung. Dual ist für $H \subseteq G$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathfrak{B}}(H, M, I \cap H \times M) & \to & \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \\ (A, B) & \mapsto & (B', B) \end{array}$$

eine $\bigvee$-treue Ordnungseinbettung. □

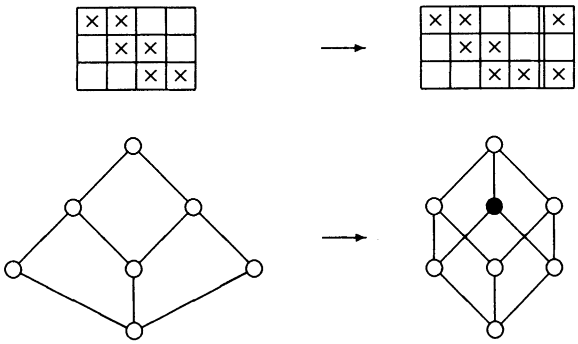


Abbildung 3.1. Eine $\bigwedge$-Einbettung des Begriffsverbandes eines Teilkontextes

Ein Beispiel zeigt Abbildung 3.1. Kombiniert man die beiden Teile des Hilfssatzes, so ergibt sich:

Hilfssatz 32. *Ist $H \subseteq G$ und $N \subseteq M$, so ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathfrak{B}}(H,N,I\cap H\times N) & \to & \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I) \\ (A,B) & \mapsto & (A'',A') \end{array}$$

eine Ordnungseinbettung, und ebenso die Abbildung

$$(A,B) \mapsto (B',B''). \qquad \square$$

Diese Ordnungseinbettungen sind bijektiv, falls $(H,N,I\cap H\times N)$ ein **dichter Teilkontext** ist, d.h. falls γH $\bigvee$-dicht und dual μN $\bigwedge$-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ ist.

Hilfssatz 33. *Genau dann existiert eine ordnungserhaltende Abbildung von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ in einen vorgegebenen vollständigen Verband V, wenn es Abbildungen $\alpha : G \to V$, $\beta : M \to V$ gibt mit*

$$gIm \Rightarrow \alpha g \leq \beta m.$$

Die Existenz einer Ordnungseinbettung ist gleichbedeutend zur Existenz eines solchen Abbildungspaares, welches die stärkere Bedingung

$$gIm \iff \alpha g \leq \beta m$$

erfüllt.

Beweis. Ist $\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I) \to V$ ordnungserhaltend, dann haben $\alpha := \varphi\circ\gamma$ und $\beta := \varphi\circ\mu$ die angegebenen Eigenschaften. Ist umgekehrt (α,β) ein Abbildungspaar mit $gIm \Rightarrow \alpha g \leq \beta m$, dann ist z.B. die Abbildung

$$\varphi(A,B) := \bigvee_{g\in A} \alpha g$$

ordnungserhaltend. Hat man die stärkere Bedingung $gIm \iff \alpha g \leq \beta m$ zur Verfügung, dann kann man zeigen, daß φ sogar eine Ordnungseinbettung ist: Sind nämlich (A_1,B_1) und (A_2,B_2) Begriffe und $(A_1,B_1) \not\leq (A_2,B_2)$, dann existiert ein Gegenstand $h \in A_1$ und ein Merkmal $n \in B_2$ mit $(h,n) \notin I$, also $\alpha h \not\leq \beta n$. Es gilt andererseits $\alpha g \leq \beta n$ für alle $g \in A_2$, und man hat $\alpha h \not\leq \bigvee\{\alpha g \mid g \in A_2\}$. Folglich kann auch $\varphi(A_1,B_1)$ nicht kleiner oder gleich $\varphi(A_2,B_2)$ sein. $\square$

Der Begriffsverband eines Teilkontextes ist also zu einer Teilordnung des gesamten Begriffsverbandes isomorph (aber nicht notwendig ein Unterverband). Die Ableitungsoperatoren bezüglich eines Teilkontextes

$$(H,N,I\cap H\times N)$$

lassen sich durch die von (G,M,I) ausdrücken: Ist $A \subseteq H$, so ist die Menge der gemeinsamen Merkmale bezüglich $(H,N,I\cap H\times N)$ gleich $A'\cap N$. Dual ist der zu einer Menge $B \subseteq N$ gehörende Begriffsumfang von $(H,N,I\cap H\times N)$

gleich $B' \cap H$. Die Begriffe eines Teilkontextes ergeben sich aber im allgemeinen nicht einfach dadurch aus denen von (G, M, I), daß man Begriffsumfang und Begriffsinhalt auf den Teilkontext einschränkt. Dies ist nur bei den verträglichen Teilkontexten richtig, die wir als nächste untersuchen.

Definition 45. Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ heißt **verträglich**, wenn für jeden Begriff $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ das Paar $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff des Teilkontextes ist. ◊

			↓	↓	↓
→	×		×		
→	×	×	×		×
→		×			×
			×	×	×

Abbildung 3.2. Beispiel eines verträglichen Teilkontextes.

Die Einschränkung der Begriffe auf einen verträglichen Teilkontext ist eine Abbildung zwischen den Begriffsverbänden, die zwangsläufig strukturerhaltend sein muß, wie der nächste Hilfssatz zeigt:

Hilfssatz 34. *Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ von (G, M, I) ist genau dann verträglich, wenn durch*

$$\Pi_{H,N}(A, B) := (A \cap H, B \cap N) \text{ für alle } (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$$

ein surjektiver Vollhomomorphismus

$$\Pi_{H,N} : \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \to \underline{\mathfrak{B}}(H, N, I \cap H \times N)$$

definiert wird.

Beweis. Nach Definition 45 ist $(H, N, I \cap H \times N)$ genau dann verträglich, wenn $\Pi_{H,N}$ eine Abbildung ist. Daß diese dann zwangsläufig infimum-erhaltend ist, erkennt man an den Begriffsumfängen: Die Abbildung $A \mapsto A \cap H$ ist zweifellos $\bigcap$-erhaltend, und das Infimum von Begriffen ist über den Durchschnitt ihrer Begriffsumfänge erklärt (vergl. Hauptsatz). Dual schließt man, daß $\Pi_{H,N}$ supremum-erhaltend ist. Die Surjektivität sieht man so: Ist $(C, C' \cap N)$ ein Begriff von $(H, N, I \cap H \times N)$, dann ist $\Pi_{H,N}(C'', C') = (C'' \cap H, C' \cap N)$ ein Begriff mit dem gleichen Inhalt, also der gleiche Begriff. □

Wenn es einen surjektiven Vollhomomorphismus von einem vollständigen Verband $\boldsymbol{V}$ auf einen vollständigen Verband $\boldsymbol{W}$ gibt, dann nennt man $\boldsymbol{W}$ auch ein (vollständig) **homomorphes Bild** von $\boldsymbol{V}$. Der obige Hilfssatz besagt also, daß der Begriffsverband eines verträglichen Teilkontextes von (G, M, I) stets ein homomorphes Bild von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist. Für die Strukturtheorie ist es eine wichtige Frage, ob auch die Umkehrung gilt, d.h. ob jedes homomorphe Bild von einem verträglichen Teilkontext herrührt. Wir verschieben dies auf Abschnitt 3.2.

Wie erkennt man verträgliche Teilkontexte? Wir geben zuerst eine technische Bedingung an, die in Beweisen oft benutzt wird. Für Algorithmen ist allerdings die Charakterisierung mit Hilfe der Pfeilrelationen viel besser geeignet; wir stellen sie danach vor.

Hilfssatz 35. *Genau dann ist* $(H, N, I \cap H \times N)$ *ein verträglicher Teilkontext von* (G, M, I), *wenn gilt:*

a1) Für jeden Gegenstand $h \in H$ *und jedes Merkmal* $m \in M$ *mit* $h \not I m$ *existiert ein Merkmal* $n \in N$ *mit* $h \not I n$ *und* $m' \subseteq n'$.

a2) Für jedes Merkmal $n \in N$ *und jeden Gegenstand* $g \in G$ *mit* $g \not I n$ *existiert ein Gegenstand* $h \in H$ *mit* $h \not I n$ *und* $g' \subseteq h'$.

Gleichbedeutend dazu sind die Bedingungen

b1) Für $A \subseteq G$ *ist* $(A' \cap N)' \cap H \subseteq A''$,

b2) Für $B \subseteq M$ *ist* $(B' \cap H)' \cap N \subseteq B''$.

Beweis. Ist $(H, N, I \cap H \times N)$ verträglich und $m \in M$, so muß $(m' \cap H, m'' \cap N)$ ein Begriff des Teilkontextes sein. Wenn also $h \in H$ ein Gegenstand mit $h \not I m$ ist, so muß es ein Merkmal $n \in m'' \cap N$ mit $h \not I n$ geben. Dies ist gerade die Bedingung a1), und a2) ergibt sich dual.

Nun seien a1), a2) erfüllt, wir zeigen b1): Sei $A \subseteq G$, $h \notin A''$, $h \in H$. Dann existiert ein $m \in A'$ (d.h. $m' \supseteq A$) mit $h \not I m$, also nach a1) ein $n \in A' \cap N$ mit $n' \supseteq A$ und $h \not I n$. Folglich ist $h \notin (A' \cap N)'$, und damit $(A' \cap N)' \cap H \subseteq A''$. b2) ergibt sich entsprechend.

Es bleibt zu zeigen, daß $(H, N, I \cap H \times N)$ verträglich ist, falls b1) und b2) erfüllt sind. Sei (A, B) ein Begriff von (G, M, I). Dann ist $(A \cap H)' \cap N \supseteq A' \cap N = B \cap N$ und, unter Verwendung von b2), $(A \cap H)' \cap N = (B' \cap H)' \cap N \subseteq B'' \cap N = B \cap N$, also $(A \cap H)' \cap N = B \cap N$ und dual $A \cap H = (B \cap N)' \cap H$. Daher ist $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff von $(H, N, I \cap H \times N)$. □

Im Fall der doppelt fundierten Kontexte lassen sich die verträglichen Teilkontexte auf höchst einfache Weise an den Pfeilrelationen erkennen:

Definition 46. Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ eines bereinigten Kontextes (G, M, I) ist **pfeilabgeschlossen**, falls gilt: aus $h \nearrow m$ und $h \in H$ folgt $m \in N$ und aus $g \swarrow n$ und $n \in N$ folgt $g \in H$. ◊

Hilfssatz 36. *Jeder verträgliche Teilkontext ist pfeilabgeschlossen.*

Bei einem doppelt fundierten Kontext ist auch jeder pfeilabgeschlossene Teilkontext verträglich.

Beweis. Ist $(H, N, I \cap H \times N)$ verträglich und sind $h \in H$, $m \in M$ so, daß $h \nearrow m$ gilt, so existiert nach 35.a1) ein Merkmal $n \in N$ mit $h \not I n$ und $m' \subseteq n'$. Wegen $h \nearrow m$ ist m' maximal bezüglich $h \not I m$, also $m' = n'$, also $m = n$, d.h. $m \in N$. Dual folgt aus $g \swarrow n$ und $n \in N$ schon $g \in H$.

Ist umgekehrt $(H, N, I \cap H \times N)$ pfeilabgeschlossener Teilkontext eines doppelt fundierten Kontextes, so kann 35.a1) nachgewiesen werden: Sei $h \in H$ ein Gegenstand und sei $m \in M$ ein Merkmal mit $h \not{I} m$. Nach Definition 26 existiert ein Merkmal n mit $m' \subseteq n'$ und $h \nearrow n$, also $n \in N$, was zu zeigen war. 35.a2) folgt entsprechend. □

Bei doppelt fundierten Kontexten ist es also einfach, die verträglichen Teilkontexte zu bestimmen. Man trägt die Pfeilrelationen $\nearrow$ und $\swarrow$ in den Kontext ein und betrachtet den gerichteten Graphen $(G \dot\cup M, \nearrow \cup \swarrow)$. Die verträglichen Teilkontexte entsprechen dann genau den Zusammenhangskomponenten dieses gerichteten Graphen. Setzen wir überdies voraus, daß (G, M, I)

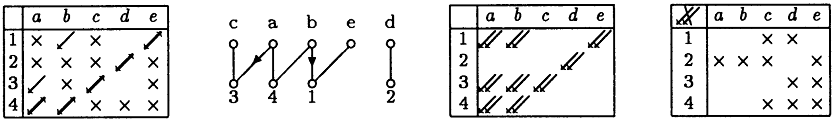


Abbildung 3.3. Zu Hilfssatz 37

reduziert ist, dann können wir die pfeilabgeschlossenen Teilkontexte elegant durch die Begriffe eines Kontextes beschreiben. Dazu benötigen wir den transitiven Abschluß der Pfeilrelationen, also die folgende Definition:

Definition 47. Für $g \in G$ und $m \in M$ schreiben wir $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$, falls es Gegenstände $g = g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$ und Merkmale $m_1, m_2, \ldots, m_k = m \in M$ gibt mit $g_i \swarrow m_i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $g_j \nearrow m_{j-1}$ für $j \in \{2, \ldots, k\}$. Das Komplement (die Negation) dieser Relation wird mit $\not\swarrow\!\!\!\nearrow$ bezeichnet, es ist also $g \not\swarrow\!\!\!\nearrow m \Leftrightarrow$ nicht $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$. ◊

Hilfssatz 37. *(G, M, I) sei ein reduzierter doppelt fundierter Kontext. $(H, N, I \cap H \times N)$ ist genau dann ein pfeilabgeschlossener Teilkontext, wenn $(G \setminus H, N)$ ein Begriff des Kontextes $(G, M, \not\swarrow\!\!\!\nearrow)$ ist.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen *doppelt fundiert* und *reduziert* folgt nach Hilfssatz 13 (S. 32), daß es zu jedem Gegenstand g ein Merkmal m gibt mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$, und dual. Zunächst sei $(H, N, I \cap H \times N)$ pfeilabgeschlossen. Ist $g \in H$ und $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$, dann muß $m \in N$ sein, also gilt $g \in H$ genau dann, wenn es ein $n \in N$ gibt mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow n$. Folglich ist $g \in G \setminus H$ genau dann, wenn $g \not\swarrow\!\!\!\nearrow n$ für alle $n \in N$ gilt, d.h. $G \setminus H = N^{\not\swarrow\!\!\!\nearrow}$. Nun sei $m \in M \setminus N$, und $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$. $g \in H$ ist unmöglich, weil $(H, N, I \cap H \times N)$ pfeilabgeschlossen ist, also haben wir $g \in G \setminus H$, $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ und damit $m \notin (G \setminus H)^{\not\swarrow\!\!\!\nearrow}$. Dies zeigt $(G \setminus H)^{\not\swarrow\!\!\!\nearrow} \subseteq N$, also ist $(G \setminus H, N)$ ein Begriff von $(G, M, \not\swarrow\!\!\!\nearrow)$.

Für die Umkehrung setzen wir voraus, daß $(G \setminus H, N)$ ein Begriff von $(G, M, \not\swarrow\!\!\!\nearrow)$ ist. Aus $g \swarrow n$ und $n \in N$ folgt sofort $g \in H$; haben wir $h \nearrow m$ und $h \in H$, so müssen wir noch $m \in N$ beweisen. Angenommen $m \notin N$, dann gäbe es einen Gegenstand $g \in (G \setminus H)$ mit $g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m$, und wegen $h \in H$ ein Merkmal $n \in N$ mit $h \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow n$. Zusammen ergeben $g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow m$, $h \nearrow m$ und $h \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow n$ aber $g \swarrow\!\!\!\!\!\nearrow n$, was unmöglich ist. Also ist $(H, N, I \cap H \times N)$ pfeilabgeschlossen. □

Hilfssatz 38. *Jeder verträgliche Teilkontext eines bereinigten (bzw. reduzierten, bzw. doppelt fundierten) Kontextes ist bereinigt (bzw. reduziert, bzw. doppelt fundiert).*

Die Pfeilrelationen vererben sich auf verträgliche Teilkontexte, d.h. es gilt $g \swarrow m$ *in* $(H, N, I \cap H \times N)$ *genau dann, wenn* $g \in H$, $m \in N$ *und* $g \swarrow m$ *in* (G, M, I) *gilt, und entsprechend für* $\nearrow$.

Beweis. Mehrmals im Beweis benötigen wir folgendes Argument: Sind $h_1, h_2 \in H$ Gegenstände mit $h_1' \cap N \subseteq h_2' \cap N$, so gilt auch $h_1' \subseteq h_2'$. Dies folgt aus Hilfssatz 35: Wäre nämlich m ein Merkmal mit $m \in h_1' \setminus h_2'$, so erhielte man aus a1) ein Merkmal $n \in N \cap (h_1' \setminus h_2')$, was im Falle $h_1' \cap N \subseteq h_2' \cap N$ nicht möglich ist. (Entsprechendes gilt natürlich für Merkmale.) Daraus folgt sogleich die erste Behauptung: $h_1' \cap N = h_2' \cap N$ hat $h_1' = h_2'$ zur Folge, d.h. Gegenstände mit den gleichen Zeileninhalten im Teilkontext haben insgesamt gleiche Zeileninhalte.

Ist $h \in H$ irreduzibel in (G, M, I), so existiert ein Merkmal m mit $h \not I m$ und gIm für jedes $g \in G$ mit $g' \supsetneq h'$. Nach 35.a1) findet man ein $n \in N$ mit $h \not I n$ und $n' \supseteq m'$, also mit gIn für alle $g \in G$ mit $g' \supsetneq h'$ und insbesondere gIn für alle $g \in H$ mit $g' \cap N \supsetneq h' \cap N$. Zusammen mit der dualen Betrachtung zeigt dies, daß ein verträglicher Teilkontext eines reduzierten Kontextes reduziert ist.

Nun zu den Pfeilen: Seien zunächst $h \in H$ und $n \in N$, und gelte $h \swarrow n$ in (G, M, I). Dann ist h' maximal bezüglich $n \notin h'$. Nach der Vorüberlegung ist dann auch $h' \cap N$ maximal bezüglich $n \notin h' \cap N$. Also gilt $h \swarrow n$ auch in $(H, N, I \cap H \times N)$. Alle Pfeile von (G, M, I) bleiben also in $(H, N, I \cap H \times N)$ erhalten.

Kann man umgekehrt aus $h \swarrow n$ in $(H, N, I \cap H \times N)$ auch auf $h \swarrow n$ in (G, M, I) schließen? Falls nicht, so müßte es einen Gegenstand $g \in G$ mit $g \not I n$ und $g' \supset h'$ geben und weiter mit Hilfssatz 35.a2) einen Gegenstand $h_2 \in H$ mit $h_2 \not I n$ und $h_2' \supseteq g'$, woraus $h_2' \supset h'$ und $h_2 \not I n$ folgen würde (daß $h_2' \cap N = h' \cap N$ unmöglich ist, folgt wieder aus unserer ersten Überlegung). Damit wäre h' nicht maximal unter den Begriffsumfängen von $(H, N, I \cap H \times N)$, die n nicht enthalten, im Widerspruch zur Voraussetzung $h \swarrow n$.

Es fehlt noch der Beweis, daß sich die Eigenschaft, doppelt fundiert zu sein, auf verträgliche Teilkontexte überträgt. Seien also $h \in H, n \in N$, und gelte $h \not I n$. Wenn (G, M, I) doppelt fundiert ist, dann gibt es ein Merkmal $m \in M$ mit $h \nearrow m$ und $n' \subseteq m'$. Wir wenden Hilfssatz 35.a1) an und bekommen ein Merkmal $n_2 \in N$ mit $h \not I n_2$ und $m' \subseteq n_2'$. Es folgt $m' = n_2'$ und damit $h \nearrow n_2$, was sich nach dem oben Bewiesenen auf $(H, N, I \cap H \times N)$ überträgt.

Die eine Bedingung für die Doppeltfundiertheit ist damit bewiesen, die andere ergibt sich dual. □

Wir erwähnen noch, daß dichte Teilkontexte immer verträglich sind:

Hilfssatz 39. *Für einen Teilkontext* $(H, N, I \cap H \times N)$ *von* (G, M, I) *sind äquivalent:*

1. $(H, N, I \cap H \times N)$ *ist dicht.*
2. $(H, N, I \cap H \times N)$ *ist verträglich und die Abbildung* $\Pi_{H,N}$ *ist injektiv.*
3. *Für jeden Begriff* (A, B) *von* (G, M, I) *gilt*

$$(A \cap H)'' = A \text{ und } (B \cap N)'' = B.$$

Beweis. 1) $\Leftrightarrow$ 3): $(H, N, I \cap H \times N)$ ist genau dann dicht, wenn es zu jedem Gegenstand $g \in G$ eine Teilmenge $X \subseteq H$ gibt mit $\gamma g = \bigvee_{x \in X} \gamma x$, also mit $g' = X'$ und damit $g \in X''$, und die duale Bedingung für Merkmale gilt. Wegen $\gamma x \leq \gamma g$ für alle $x \in X$ hat man $X \subseteq g''$ und damit die Bedingung aus 3) für den Fall $A = g''$. Daraus folgt die allgemeinere Bedingung ohne Problem.
3) $\Rightarrow$2): Um zu zeigen, daß $(H, N, I \cap H \times N)$ verträglich ist, weist man die Bedingungen b) aus Hilfssatz 35 nach: Ist $A \subseteq G$, dann ist A' ein Begriffsinhalt und erfüllt wegen 3) $(A' \cap N)'' = A'$, woraus $(A' \cap N)' = A''$ und damit b1) folgt. b2) ist dazu dual. Die Injektivität von $\Pi_{H,N}$ folgt sofort aus $(A \cap H)'' = A$.
2) $\Rightarrow$ 3): Wenn $\Pi_{H,N}$ injektiv ist und (A, B) ein Begriff von (G, M, I) ist, dann muß $(A \cap H)'' = A$ sein, sonst wären $(A \cap H)''$ und A verschiedene Umfänge, die gleichen Schnitt mit H haben. □

3.2 Vollständige Kongruenzen

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß für einen verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ von (G, M, I) die Abbildung $\Pi_{H,N}$ ein surjektiver Vollhomomorphismus von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ auf $\underline{\mathfrak{B}}(H, N, I \cap H \times N)$ ist, daß also der Begriffsverband des Teilkontextes stets ein homomorphes Bild von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist. Wir wollen nun untersuchen, ob auch die Umkehrung richtig ist, d.h. ob jeder surjektive Vollhomomorphismus, jedes homomorphe Bild durch einen Teilkontext beschrieben werden kann. Bei endlichen Kontexten ist dies richtig, bei unendlichen allerdings nicht allgemein. Zur Klärung der Situation benötigen wir einen Begriff aus der Verbandstheorie: den der vollständigen Kongruenzrelation.

Definition 48. Eine **vollständige Kongruenzrelation** eines vollständigen Verbandes $\boldsymbol{V}$ ist eine Äquivalenzrelation Θ auf $\boldsymbol{V}$, für die gilt:

$$x_t \Theta y_t \text{ für } t \in T \Rightarrow (\bigwedge_{t \in T} x_t) \Theta (\bigwedge_{t \in T} y_t) \text{ und } (\bigvee_{t \in T} x_t) \Theta (\bigvee_{t \in T} y_t).$$

Man definiert

$$[x]\Theta := \{y \in V \mid x\Theta y\},$$

das ist die Äquivalenzklasse von Θ, die x enthält. Der **Faktorverband**

$$\mathbf{V}/\Theta := \{[x]\Theta \mid x \in V\}$$

trägt die Ordnung

$$[x]\Theta \leq [y]\Theta :\Leftrightarrow x\Theta(x \wedge y)(\Leftrightarrow (x \vee y)\Theta y).$$

Daß dies wirklich eine Ordnungsrelation definiert, kann man z.B. folgendermaßen argumentieren: Definiert man für $x \in \mathbf{V}$

$$x_\Theta := \bigwedge\{y \in \mathbf{V} \mid y\Theta x\} = \bigwedge[x]\Theta$$

$$\text{und } x^\Theta := \bigvee\{y \in \mathbf{V} \mid y\Theta x\} = \bigvee[x]\Theta,$$

so ergibt sich sofort $[x]\Theta = \left[x_\Theta, x^\Theta\right]$ und $[x]\Theta \leq [y]\Theta \Leftrightarrow x_\Theta \leq y_\Theta \Leftrightarrow x^\Theta \leq y^\Theta$. Die **Kongruenzklassen**, d.h. die Klassen einer Kongruenzrelation, sind also Intervalle. Sie werden nach ihren kleinsten Elementen geordnet, oder, was gleichbedeutend ist, nach den größten. Man folgert

$$\bigwedge_{t \in T}[x_t]\Theta = \left[\bigwedge_{t \in T} x_t\right]\Theta \text{ und } \bigvee_{t \in T}[x_t]\Theta = \left[\bigvee_{t \in T} x_t\right]\Theta.$$

◊

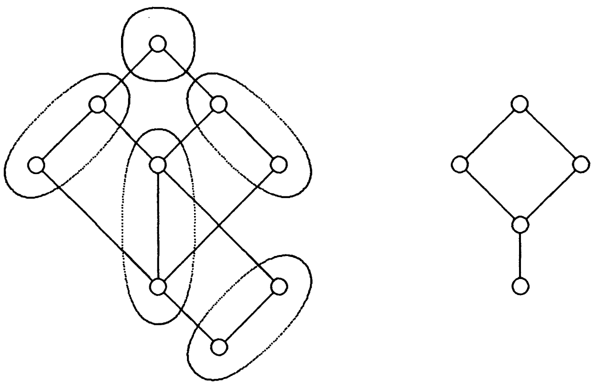


Abbildung 3.4. Kongruenz und Faktorverband

Wenn im folgenden von Kongruenzrelationen oder von **Kongruenzen** die Rede ist, sind stets vollständige Kongruenzrelationen gemeint. Die Bedeutung der Kongruenzen für das von uns betrachtete Problem ergibt sich aus dem folgenden *Homomorphiesatz*. Er besagt unter anderem, daß wir jedes homomorphe Bild eines vollständigen Verbandes im Verband selbst wiederfinden, nämlich als Faktorverband.

Satz 9. (Homomorphiesatz) *Ist Θ eine vollständige Kongruenzrelation eines vollständigen Verbandes $\boldsymbol{V}$, dann ist $x \mapsto [x]\Theta$ ein Vollhomomorphismus von $\boldsymbol{V}$ auf $\boldsymbol{V}/\Theta$. Ist umgekehrt $\varphi : \boldsymbol{V}_1 \longrightarrow \boldsymbol{V}_2$ ein surjektiver Vollhomomorphismus zwischen vollständigen Verbänden, dann ist*

$$\mathit{Kern}\ \varphi := \{(x, y) \in \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_1 \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$$

eine vollständige Kongruenzrelation von $\boldsymbol{V}_1$; außerdem wird durch

$$[x]\mathit{Kern}\ \varphi \mapsto \varphi(x)$$

ein Isomorphismus von $\boldsymbol{V}_1/\mathit{Kern}\ \varphi$ auf $\boldsymbol{V}_2$ erklärt.

Beweis. Die Homomorphieeigenschaften der Abbildung $x \mapsto [x]\Theta$ haben wir bereits oben nachgewiesen. Kern φ ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
(x_t, y_t) \in \text{Kern } \varphi \text{ für alle } t \in T \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(x_t) = \varphi(y_t) \text{ für alle } t \in T \\
&\Rightarrow \quad \varphi\left(\bigwedge_{t\in T} x_t\right) = \bigwedge_{t\in T} \varphi(x_t) \\
&= \quad \bigwedge_{t\in T} \varphi(y_t) = \varphi\left(\bigwedge_{t\in T} y_t\right) \\
&\Rightarrow \quad \left(\bigwedge_{t\in T} x_t\right) \text{Kern } \varphi \left(\bigwedge_{t\in T} y_t\right);
\end{aligned}$$

analog folgt die $\bigvee$-Verträglichkeit. ($[x]$Kern $\varphi) \mapsto \varphi(x)$ beschreibt eine Bijektion, die offenbar die Homomorphiebedingungen erfüllt. □

Die Abbildung $x \mapsto [x]\Theta$ wird gelegentlich mit π_Θ bezeichnet und **kanonische Projektion** auf den Faktorverband genannt.

Wir stellen noch ein Ergebnis aus der Verbandstheorie bereit, welches wir später benötigen, es beschreibt, welche Äquivalenzrelationen auf einem vorgegebenen Verband Kongruenzen sind.

Satz 10 (Charakterisierung vollständiger Kongruenzrelationen). *Eine Äquivalenzrelation Θ auf einem vollständigen Verband $\boldsymbol{V}$ ist genau dann eine vollständige Kongruenzrelation von $\boldsymbol{V}$, wenn jede Äquivalenzklasse von Θ ein Intervall von $\boldsymbol{V}$ ist (wir setzen dann $[x]\Theta =: \left[x_\Theta, x^\Theta\right]$ für alle $x \in V$), wobei die unteren Grenzen dieser Intervalle unter Suprema abgeschlossen sind (d.h. $\bigvee_{t\in T} x^t_\Theta = y_\Theta$) und die oberen Grenzen dieser Intervalle unter Infima abgeschlossen sind (d.h. $\bigwedge_{t\in T} x^\Theta_t = z^\Theta$).*

Beweis. Sei Θ eine vollständige Kongruenzrelation von $\boldsymbol{V}$. Für $x \in \boldsymbol{V}$ sind dann $x_\Theta := \bigwedge[x]\Theta$ und $x^\Theta := \bigvee[x]\Theta$ Elemente von $[x]\Theta$. Ist $x_\Theta \leq y \leq x^\Theta$, dann folgt aus $y\Theta y$ und $x_\Theta \Theta x^\Theta$

$$y = (x_\Theta \vee y)\Theta(x^\Theta \vee y) = x^\Theta$$

und damit $y \in [x]\Theta$. Demnach gilt $[x]\Theta = [x_\Theta, x^\Theta]$. Die Abbildungen $x \mapsto x_\Theta$ und $x \mapsto x^\Theta$ bilden eine Galois-Verbindung zwischen $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}^d$, denn $x \leq y \Rightarrow x_\Theta \leq y_\Theta$, $x \geq y \Rightarrow x^\Theta \geq y^\Theta$, $x \leq (x_\Theta)^\Theta$, $x \geq (x^\Theta)_\Theta$. Nach Hilfssatz 7 folgt, daß $x \mapsto x_\Theta$ ein $\bigvee$-Homomorphismus und $x \mapsto x^\Theta$ ein $\bigwedge$-Homomorphismus von $\boldsymbol{V}$ in sich ist. Insbesondere gilt $\bigvee_{t\in T} x^t_\Theta = \left(\bigvee_{t\in T} x^t\right)_\Theta$ und $\bigwedge_{t\in T} x^\Theta_t = \left(\bigwedge_{t\in T} x_t\right)^\Theta$, was zu zeigen war. Sei nun umgekehrt Θ eine Äquivalenzrelation auf $\boldsymbol{V}$, deren Äquivalenzklassen Intervalle sind mit supremum-abgeschlossenen unteren Grenzen und infimum-abgeschlossenen oberen Grenzen. Sei $x_t\Theta y_t$ (für $t \in T$). Dann gilt $(x_t)_\Theta = (y_t)_\Theta$ und $(x_t)^\Theta = (y_t)^\Theta$ für $t \in T$. Folglich ist

$$\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta \leq \bigvee_{t\in T} x_t, \bigvee_{t\in T} y_t \leq \bigvee_{t\in T}(x_t)^\Theta.$$

Da aus $a \leq b$ allgemein $a^\Theta \leq b^\Theta$ folgt (denn $a \leq b$ ergibt $a \leq a^\Theta \wedge b^\Theta \leq a^\Theta$ und somit, da $a^\Theta \wedge b^\Theta$ eine obere Intervallgrenze ist, $a^\Theta \wedge b^\Theta = a^\Theta$), erhält man aus $(x_s)_\Theta \leq \bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta$ für jedes $s \in T$ auch $(x_s)^\Theta = ((x_s)_\Theta)^\Theta \leq (\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta)^\Theta$ und damit $\bigvee_{t\in T}(x_t)^\Theta \leq \left(\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta\right)^\Theta$. Demnach gilt:

$$\bigvee_{t\in T} x_t, \bigvee_{t\in T} y_t \in \left[\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta, (\bigvee_{t\in T}(x_t)_\Theta)^\Theta\right],$$

d.h. $\left(\bigvee_{t\in T} x_t\right)\Theta\left(\bigvee_{t\in T} y_t\right)$. Dual zeigt man die $\bigwedge$-Verträglichkeit von Θ, womit Θ als vollständige Kongruenzrelation nachgewiesen ist. □

Im Licht des Homomorphiesatzes stellt sich unsere Frage nun neu: welcher Zusammenhang besteht zwischen den verträglichen Teilkontexten und den Kongruenzen? Es folgt sofort aus dem Homomorphiesatz, daß der Begriffsverband eines verträglichen Teilkontextes $(H, N, I \cap H \times N)$ von (G, M, I) stets zu einem Faktorverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ isomorph ist: $(H, N, I \cap H \times N)$ induziert eine vollständige Kongruenz $\Theta_{H,N}$ auf $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, nämlich den Kern des Vollhomomorphismus $\Pi_{H,N}$, und man hat

$$\underline{\mathfrak{B}}(H, N, I \cap H \times N) \cong \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)/\Theta_{H,N}.$$

Es ist dabei

$$(A_1, B_1)\Theta_{H,N}(A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 \cap H = A_2 \cap H \Leftrightarrow B_1 \cap N = B_2 \cap N.$$

Die kleinsten und größten Elemente der Kongruenzklassen lassen sich leicht ermitteln: Ist (A, B) ein Begriff, so ist das kleinste Element der Kongruenzklasse $[(A, B)]\Theta_{H,N}$ der Begriff $((A\cap H)'', (A\cap H)')$ und das größte der Begriff $((B \cap N)', (B \cap N)'')$.

Wir sagen, eine vollständige Kongruenz Θ sei **durch einen Teilkontext induziert**, wenn es einen verträglichen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ gibt mit $\Theta = \Theta_{H,N}$. Über den Zusammenhang zwischen verträglichen Teilkontexten und Kongruenzen werden wir folgendes beweisen: bei einem doppelt fundierten Begriffsverband ist jede Kongruenz durch einen Teilkontext induziert. Dieser ist, sofern der Kontext reduziert ist, auch eindeutig durch die Kongruenz bestimmt. Allerdings sind diese einschränkenden Voraussetzungen nicht überflüssig, die allgemeine Theorie ist also etwas komplizierter.

Wir untersuchen zuerst das Problem der Eindeutigkeit. Eine Kongruenz kann durch mehrere Teilkontexte induziert sein, diese unterscheiden sich aber nur um reduzible Gegenstände und Merkmale. Unter allen möglichen Teilkontexten gibt es dann stets einen größten:

Hilfssatz 40. *Wenn eine vollständige Kongruenz Θ durch einen Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ induziert ist, dann gilt*

$$H \subseteq G_\Theta := \{g \in G \mid \gamma g \textit{ ist kleinstes Element einer } \Theta\textit{-Klasse}\} \textit{ und}$$

$$N \subseteq M_\Theta := \{m \in M \mid \mu m \textit{ ist größtes Element einer } \Theta\textit{-Klasse}\}.$$

Θ ist dann auch induziert durch den verträglichen Teilkontext

$$(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta).$$

Beweis. Ist Θ die von $(H, N, I \cap H \times N)$ induzierte Kongruenz (also $\Theta = \Theta_{H,N}$), so gilt nach der oben erwähnten Beschreibung der kleinsten Elemente der $\Theta_{H,N}$-Klassen:

$$g \in G_\Theta \Leftrightarrow \text{ es gibt } X \subseteq H \text{ mit } X' = g'.$$

Daraus folgt sofort $H \subseteq G_\Theta$ und dual $N \subseteq M_\Theta$.

Wieso ist $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ verträglich? Wir benutzen Hilfssatz 35, weisen die Bedingung a1) nach: Ist $g \in G_\Theta$ und $m \in M$ mit $g \not I m$, so gibt es eine Menge $X \subseteq H$ mit $g' = X'$, also insbesondere ein $h \in H$ mit $h \not I m$ und $g' \subseteq h'$. Da $(H, N, I \cap H \times N)$ verträglich ist, findet sich ein Merkmal $n \in N$ mit $h \not I n$ und $m' \subseteq n'$, also gilt auch $g \not I n$, $n \in N \subseteq M_\Theta$ und $m' \subseteq n'$, Bedingung a1) ist also erfüllt, und dual zeigt man a2).

Schließlich bleibt zu beweisen, daß $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ die gleiche Kongruenz induziert wie $(H, N, I \cap H \times N)$. Dazu genügt es zu zeigen, daß aus $(A_1, B_1)\Theta(A_2, B_2)$ stets $A_1 \cap G_\Theta = A_2 \cap G_\Theta$ folgt; die umgekehrte Implikation ergibt sich sofort aus $H \subseteq G_\Theta$ und $N \subseteq M_\Theta$. Sei also $g \in A_1 \cap G_\Theta$. Dann gibt es $X \subseteq H$ mit $X' = g'$, folglich $X \supseteq B_1$ und deshalb $X'' \subseteq A_1$, woraus weiter $X = X \cap H \subseteq A_1 \cap H = A_2 \cap H$, und damit $g \in A_2$ folgt. □

Man kann also einen verträglichen Teilkontext durch Hinzunahme reduzibler Gegenstände und Merkmale „sättigen“, ohne daß sich die zugehörige Kongruenz ändert.

Definition 49. Ein Teilkontext $(H, N, I \cap H \times N)$ von (G, M, I) heißt **gesättigt**, falls gilt:

$$\text{aus } g \in G, X \subseteq H \text{ und } X' = g' \text{ folgt } g \in H \text{ und}$$

$$\text{aus } m \in M, Y \subseteq N \text{ und } Y' = m' \text{ folgt } m \in N. \qquad \Diamond$$

Aus dem vorigen Hilfssatz ergibt sich mit Hilfe dieser Definition sofort:

Hilfssatz 41. *Wenn eine Kongruenz Θ überhaupt durch einen Teilkontext induziert ist, dann ist sie auch durch einen gesättigten Teilkontext induziert, dieser ist dann gleich $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$. In einem reduzierten Kontext ist jeder Teilkontext gesättigt.* □

Nun zum zweiten Teil der Frage: welche Kongruenzen sind durch Teilkontexte induziert? Aufgrund der Hilfssätze wissen wir, daß $H = G_\Theta$ und $N = M_\Theta$ gewählt werden kann, sofern Θ überhaupt durch einen Teilkontext induziert ist. Es lassen sich leicht Kongruenzen angeben, die nicht von dieser Form sind, allerdings sind diese Beispiele unendlich. Eine genaue Klärung liefern die folgenden Sätze.

Hilfssatz 42. *Eine vollständige Kongruenzrelation Θ ist genau dann durch einen Teilkontext induziert, wenn $\{[\gamma h]\Theta \mid h \in G_\Theta\}$ supremum-dicht und $\{[\mu n]\Theta \mid n \in M_\Theta\}$ infimum-dicht in $\mathfrak{B}(G, M, I)/\Theta$ ist.*

Beweis. Wenn Θ durch einen Teilkontext induziert ist, dann ist

$$\mathfrak{B}(H, N, I \cap H \times N) \cong \mathfrak{B}(G, M, I)/\Theta,$$

und der Isomorphismus $(A, B) \mapsto [(A, B)]\Theta$ bildet die supremum-dichte Menge $\{\gamma h \mid h \in H\}$ auf $\{[\gamma h]\Theta \mid h \in H\}$ ab, diese Menge ist also supremum-dicht in $\mathfrak{B}(G, M, I)/\Theta$, und dual ist $\{[\mu n]\Theta \mid n \in N\}$ infimum-dicht. Wegen $H \subseteq G_\Theta$ und $N \subseteq M_\Theta$ folgt so die Richtung "$\Rightarrow$" der Behauptung.

Den Beweis für die andere Richtung beginnen wir, indem wir zeigen, daß unter den angegebenen Bedingungen $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ verträglich ist. Seien $h \in G_\Theta$, $m \in M$ mit $h \not I m$. Dann ist $[\gamma h]\Theta \not\leq [\mu m]\Theta$, und da $\{[\mu n]\Theta \mid n \in M_\Theta\}$ infimum-dicht in $\mathfrak{B}(G, M, I)/\Theta$ ist, gibt es ein $n \in M_\Theta \setminus h'$ mit $\mu n \geq \mu m$, also $n' \supseteq m'$. Daraus folgt 35.a1) und dual 35.a2).
Um zu zeigen, daß Θ durch $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ induziert ist, müssen wir

$$(A, B)\Theta(C, D) \Leftrightarrow A \cap G_\Theta = C \cap G_\Theta$$

für $(A, B), (C, D) \in \mathfrak{B}(G, M, I)$ nachweisen. Sei $(\underline{A}, \underline{B})$ der kleinste Begriff in der Θ-Klasse, die (A, B) enthält. Für $h \in G_\Theta$ gilt $\gamma h \leq (A, B) \Leftrightarrow \gamma h \leq (\underline{A}, \underline{B})$, da γh ebenfalls kleinstes Element einer Θ-Klasse ist, und $(\underline{A}, \underline{B}) = \bigvee\{\gamma h \mid h \in A \cap G_\Theta\}$ wegen der Supremum-Dichtheit von $\{[\gamma h]\Theta \mid h \in G_\Theta\}$. (A, B) und (C, D) sind genau dann kongruent, wenn die Klassen $[(A, B)]\Theta$ und $[(C, D)]\Theta$ dasselbe kleinste Element haben, also wenn $A \cap G_\Theta = C \cap G_\Theta$ ist. □

Wenn $[v]\Theta$ $\bigvee$-irreduzibel in $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)/\Theta$ ist, dann muß das kleinste Element der Kongruenzklasse $[v]\Theta$ ebenfalls $\bigvee$-irreduzibel und damit ein Gegenstandsbegriff γg mit $g \in G_\Theta$ sein. Die Menge $\{[\gamma h]\Theta \mid h \in G_\Theta\}$ enthält also alle $\bigvee$-irreduziblen Elemente, und ebenso enthält $\{[\mu n]\Theta \mid n \in M_\Theta\}$ alle $\bigwedge$-irreduziblen Elemente von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)/\Theta$. Als Folgerung aus Hilfssatz 42 erhalten wir also

Hilfssatz 43. *Wenn $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)/\Theta$ doppelt fundiert ist, dann ist Θ durch einen Teilkontext induziert.* □

Betrachten wir den Begriffsverband nur bis auf Isomorphie, so ist jede Kongruenz durch einen Teilkontext eines geeigneten Kontextes induziert: Jeder vollständige Verband $\boldsymbol{V}$ kann als Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(V,V,\leq)$ dargestellt werden; nach Hilfssatz 42 ist bei dieser Darstellung jede vollständige Kongruenz durch einen Teilkontext induziert. Im Fall doppelt fundierter Verbände können wir aber weiter gehen. Dazu übertragen wir zunächst Hilfssatz 38:

Hilfssatz 44. *Jeder Faktorverband eines doppelt fundierten vollständigen Verbandes ist doppelt fundiert.*

Beweis. Es seien $[x]\Theta < [y]\Theta$ zwei Elemente von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)/\Theta$, wobei wir OBdA annehmen, daß x das größte und y das kleinste Element seiner Klasse ist, also daß $x = \bigvee[x]\Theta$ und $y = \bigwedge[y]\Theta$. In dem doppelt fundierten Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ finden wir also ein Element s, welches minimal ist bezgl. $s \leq y$, $s \not\leq x \wedge y$. Wir behaupten, daß $[s]\Theta$ die entsprechende Minimalitätseigenschaft bezüglich $[x]\Theta < [y]\Theta$ hat. Sicher ist $[s]\Theta \leq [y]\Theta$, andererseits ist $[s]\Theta \leq [x]\Theta$ unmöglich, denn daraus würde $s \vee x \in [x]\Theta$ und damit $s \vee x \leq x$ folgen. Wir haben also $[s]\Theta \leq [y]\Theta$, $[s]\Theta \not\leq [x]\Theta$, und zeigen noch die Minimalität: Ist nämlich $[r]\Theta < [s]\Theta$, wobei $r = \bigwedge[r]\Theta$ das kleinste Element seiner Klasse ist, so ist $r < s$ und nach der Minimalitätseigenschaft von s auch $r \leq x$, und damit $[r]\Theta \leq [x]\Theta$. Die zweite Bedingung beweist man dual. □

Kombiniert man die Hilfssätze 43 und 44, so ergibt sich:

Satz 11. *Wenn $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ doppelt fundiert ist, dann ist jede vollständige Kongruenzrelation durch einen Teilkontext induziert.* □

Wir wollen zum Schluß dieses Abschnittes die erzielten Ergebnisse benutzen, um das System aller vollständigen Kongruenzrelationen eines Begriffsverbandes $\boldsymbol{V}$ zu analysieren. Diese Menge von Kongruenzen ist durch die Mengeninklusion $\subseteq$ geordnet; sie bildet sogar ein Hüllensystem auf $V \times V$ und damit einen vollständigen Verband, den **Verband $\mathfrak{C}(\boldsymbol{V})$ der vollständigen Kongruenzrelationen von $\boldsymbol{V}$**.

Setzen wir voraus, daß $\boldsymbol{V}$ doppelt fundiert ist, dann dürfen wir annehmen, daß $\boldsymbol{V}$ Begriffsverband eines reduzierten, doppelt fundierten Kontextes (G,M,I) ist. Dadurch ergeben sich folgende Vereinfachungen: Jeder verträgliche Teilkontext eines reduzierten Kontextes ist gesättigt (vergl. Definition 41), die verträglichen Teilkontexte sind genau die pfeilabgeschlossenen

(Hilfssatz 33), und jede vollständige Kongruenz ist durch einen Teilkontext induziert (Satz 11). In diesem Fall entsprechen also die pfeilabgeschlossenen Teilkontexte eineindeutig den vollständigen Kongruenzen.

Auch die Ordnung der Kongruenzrelationen spiegelt sich in den Teilkontexten wider: Sind Θ und Ψ zwei Kongruenzen von $\boldsymbol{V}$, so gilt

$$\begin{aligned}
\Theta \subseteq \Psi \Leftrightarrow \quad & (A,B)\Theta(C,D) \Rightarrow (A,B)\Psi(C,D) \\
& \text{ für alle } (A,B),(C,D) \in \boldsymbol{V} \\
\Leftrightarrow \quad & A \cap G_\Theta = C \cap G_\Theta \Rightarrow A \cap G_\Psi = C \cap G_\Psi \text{ und} \\
& B \cap M_\Theta = D \cap M_\Theta \Rightarrow B \cap M_\Psi = D \cap M_\Psi \\
& \text{ für alle } (A,B),(C,D) \in \boldsymbol{V} \\
\Leftrightarrow \quad & G_\Psi \subseteq G_\Theta \text{ und } M_\Psi \subseteq M_\Theta.
\end{aligned}$$

Ordnet man also die Teilkontexte durch

$$\begin{aligned}
(H_1, N_1, I \cap H_1 \times N_1) &\leq (H_2, N_2, I \cap H_2 \times N_2) \\
&:\Leftrightarrow H_1 \subseteq H_2 \text{ und } N_1 \subseteq N_2,
\end{aligned}$$

so ist unter den genannten Voraussetzungen die geordnete Menge der pfeilabgeschlossenen Teilkontexte dual isomorph zum Verband der vollständigen Kongruenzen. Nun ist aber sowohl die Vereinigung als auch der Durchschnitt von pfeilabgeschlossenen Teilkontexten wieder pfeilabgeschlossen; der Verband der pfeilabgeschlossenen Teilkontexte ist daher vollständig distributiv. Hilfssatz 37 ermöglicht es deshalb, auf einfache Weise auch einen Kontext für den Kongruenzverband anzugeben.

Satz 12. *Der Kongruenzverband eines doppelt fundierten Begriffsverbandes* $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ *ist isomorph zum vollständig distributiven Verband* $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,\not\Swarrow)$.

Beweis. Ist (G,M,I) reduziert, dann wird jede Kongruenz durch genau einen Teilkontext $(H,N,I \cap H \times N)$ induziert, außerdem wissen wir nach Hilfssatz 32, daß diese Teilkontexte zu den Begriffen von $(G,M,\not\Swarrow)$ korrespondieren: $(H,N,I \cap H \times N)$ induziert eine Kongruenz genau dann, wenn $(G \setminus H, N)$ ein solcher Begriff ist. Die Ordnung dieser Teilkontexte ist sowohl zu der der Begriffe von $(G,M,\not\Swarrow)$ als auch zu der der Kongruenzen dual, die beiden letzteren müssen also zueinander isomorph sein.

Für die Struktur von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,\not\Swarrow)$ ist es aber unerheblich, ob (G,M,I) reduziert ist, sofern $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ doppelt fundiert ist. In diesem Fall können wir ja zum reduzierten Kontext $(G_{\text{irr}}, M_{\text{irr}}, I \cap G_{\text{irr}} \times M_{\text{irr}})$ übergehen, wobei G_{irr} bzw. M_{irr} die Menge der irreduziblen Gegenstände bzw. Merkmale ist. Die $\Swarrow$-Relation vererbt sich auf diesen Teilkontext, da in der Definition 47 außer g und m nur irreduzible Gegenstände und Merkmale vorkommen. $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,\not\Swarrow)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(G_{\text{irr}}, M_{\text{irr}}, \not\Swarrow)$ sind deshalb isomorph, jeder Begriff von $(G,M,\not\Swarrow)$ ist von der Form $\Big((G \setminus G_{\text{irr}}) \cup \underline{A}, \underline{B} \cup (\underline{A}^{\not\Swarrow} \cap (M \setminus M_{\text{irr}}))\Big)$, wobei $(\underline{A}, \underline{B})$ ein Begriff von $(G_{\text{irr}}, M_{\text{irr}}, \not\Swarrow)$ ist. $\square$

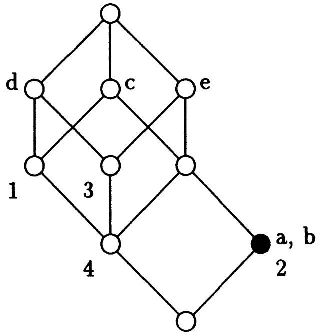


Abbildung 3.5. Der Kongruenzverband des Verbandes aus Abbildung 3.4 ist zugleich der Verband der pfeilabgeschlossenen Teilkontexte von Abbildung 3.3. Das markierte Element entspricht der Kongruenz aus Abbildung 3.4 und dem verträglichen Teilkontext bei Definition 45.

3.3 Abgeschlossene Teilrelationen

Definition 50. Eine Relation $J \subseteq I$ heißt **abgeschlossene Relation** des Kontextes (G, M, I), wenn jeder Begriff des Kontextes (G, M, J) auch ein Begriff von (G, M, I) ist. $\Diamond$

Satz 13. *Ist J eine abgeschlossene Relation von (G, M, I), so ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$ ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ mit $J = \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)\}$. Umgekehrt ist für jeden vollständigen Unterverband U von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ die Relation*

$$J := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in U\}$$

abgeschlossen, und es ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J) = U$.

Beweis. Sei J eine abgeschlossene Relation von (G, M, I). Nach der Definition ist $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$ eine Teilmenge von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, die $(M^I, M) = (M^J, M)$ sowie $(G, G^I) = (G, G^J)$ enthält[2]. Die Charakterisierung der Suprema und Infima durch den Hauptsatz zeigt, daß $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$ ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist. Die Beziehung $J = \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)\}$ gilt für jeden Kontext (G, M, J).

Nun sei umgekehrt U ein vollständiger Unterverband und

$$J := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in U\}.$$

[2] In Übereinstimmung mit Definition 17 (S. 14) schreiben wir X^I bzw. X^J anstelle von X', um deutlich zu machen, wann wir uns auf den Kontext (G, M, I) und wann auf (G, M, J) beziehen.

Wir haben zu zeigen, daß J eine abgeschlossene Relation ist mit $U = \underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$. Offenbar ist $U \subseteq \underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$, es bleibt also zu zeigen, daß jeder Begriff von (G, M, J) zu U gehört. Wir beweisen dies zuerst für die Gegenstandsbegriffe: Seien $g \in G$ und $D := \bigcap\{A \mid (A, B) \in U, g \in A\}$. D ist ein Umfang von (G, M, J), und folglich ist $g^{JJ} \subseteq D$. Für jedes Merkmal $m \in g^J$ existiert ein Begriff $(A, B) \in U$ mit $(g, m) \in A \times B$, und wegen $D \subseteq A$ folgt $m \in D^J$. Deshalb ist $g^J = D^J$ und $g^{JJ} = D$. Dies zeigt, daß für jedes $g \in G$ der Begriff (g^{JJ}, g^J) zu U gehört. Jeder Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$ ist aber Supremum von solchen Gegenstandsbegriffen, es ist daher $U \supseteq \underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$, was noch zu zeigen war. □

Die abgeschlossenen Relationen stehen also in eineindeutiger Beziehung zu den vollständigen Unterverbänden. Die Abbildung

$$\mathbf{C}(U) := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \in U\}$$

bildet die Menge der vollständigen Unterverbände bijektiv auf die Menge der abgeschlossenen Relationen von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ab. Sie ist auch ordnungserhaltend, $U_1 \subseteq U_2 \Leftrightarrow J_1 \subseteq J_2$. Allerdings ist $\mathbf{C}$ weder $\bigcup$- noch $\bigcap$-erhaltend. Der Durchschnitt abgeschlossener Relationen ist nicht notwendig wieder abgeschlossen, die abgeschlossenen Relationen bilden im allgemeinen kein Hüllensystem. Das ist insofern überraschend, als die Familie der vollständigen Unterverbände sehr wohl ein Hüllensystem bildet: zu jeder Teilmenge T eines vollständigen Verbandes ist der Durchschnitt aller Unterverbände, die T enthalten, ebenfalls ein Unterverband (nämlich der von T **erzeugte** (vollständige) Unterverband).

Ist $\mathfrak{J}$ eine Familie abgeschlossener Relationen und $D := \bigcap \mathfrak{J}$, so gibt es aber immerhin stets eine größte abgeschlossene Relation in D, nämlich

$$J := \bigcup\{A \times B \mid (A, B) \text{ Begriff}, A \times B \subseteq D\}.$$

Das sieht man leicht folgendermaßen ein: wenn (A, B) ein Begriff von (G, M, I) und J eine abgeschlossene Relation mit $A \times B \subseteq J$ ist, dann ist (A, B) auch Begriff von (G, M, J). Die Begriffe (A, B) mit $A \times B \subseteq D$ sind also genau diejenigen, die in jedem der Unterverbände $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, L)$, $L \in \mathfrak{J}$, liegen. Sie bilden also gerade den Durchschnitt dieser Unterverbände, also selbst einen vollständigen Unterverband. Aus dieser Überlegung ergibt sich der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 45. *Zu jeder Menge $T \subseteq \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ von Begriffen gibt es eine kleinste abgeschlossene Relation J von (G, M, I), die alle Mengen $A \times B$ mit $(A, B) \in T$ enthält. $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$ ist der von T erzeugte vollständige Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$.* □

Wie erkennt man, ob eine Relation abgeschlossen ist? Eine erste Information enthält der nächste Hilfssatz.

	a	b	c	d	e	f	g	h
1			×					×
2	×	×	×					
3	×	×	⊗		⊗			
4			⊗	⊗	⊗			
5			⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	
6		⊗	⊗		⊗		⊗	
7			×			×	×	
8				×	×	×	×	
9		⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	
10		×	×				×	

Abbildung 3.6. Beispiel einer abgeschlossenen Relation in einem Kontext, aus [62].

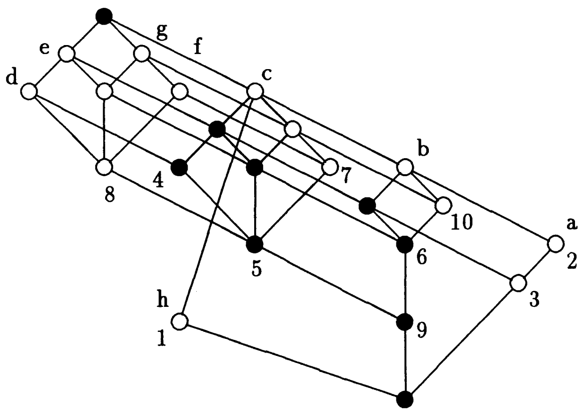


Abbildung 3.7. Diagramm des Begriffsverbandes zum Kontext aus Abb. 3.6. Der Unterverband, der aus den geschwärzten Elementen besteht, gehört zur oben angegebenen abgeschlossenen Relation.

Hilfssatz 46. *Eine Teilrelation $J \subseteq I$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Teilmenge $X \subseteq G$ und für jede Teilmenge $X \subseteq M$ gilt*

$$X^{JJ} \supseteq X^{JI}.$$

Beweis. (X^{JJ}, X^J) ist genau dann ein Begriff von (G, M, I), wenn $X^{JJ} = X^{JI}$ und $X^{JJI} = X^J$ ist. Setzt man $Y := X^J$, so kann die zweite Bedingung wegen $X^J = X^{JJJ}$ umgeschrieben werden zu $Y^{JI} = Y^{JJ}$. Die Inklusion $Y^{JJ} \subseteq Y^{JI}$ gilt aber für jede Teilrelation. □

Etwas anspruchsvoller ist die folgende Charakterisierung:

Hilfssatz 47. *Die abgeschlossenen Relationen eines Kontextes (G, M, I) sind genau diejenigen Teilrelationen $J \subseteq I$, die die folgende Bedingung erfüllen:*

(C) Aus $(g, m) \in I \setminus J$ folgt $(h, m) \notin I$ für ein $h \in G$ mit $g^J \subseteq h^J$ sowie $(g, n) \notin I$ für ein $n \in M$ mit $m^J \subseteq n^J$.

Beweis. Sei J eine abgeschlossene Relation von (G, M, I) und sei $(g, m) \in I \setminus J$. (g^{JJ}, g^J) ist ein Begriff von (G, M, I), also ist $g^J = g^{JJI}$. Da $m \notin g^J$ ist, gibt es ein $h \in g^{JJ}$ mit $m \notin h^I$, also mit $(h, m) \notin I$ und $g^J \subseteq h^J$. Dual folgt der zweite Teil von (**C**).

Umgekehrt sei $J \subseteq I$ eine Relation, die (**C**) erfüllt, und es sei (A, B) ein Begriff von (G, M, J). Wir haben zu zeigen, daß (A, B) ein Begriff von (G, M, I) ist, also daß $A \doteq B^I$ und $B = A^I$ gilt. $B \subseteq A^I$ ist trivial, wir zeigen $B \supseteq A^I$. Angenommen, es gäbe ein Merkmal $m \in A^I$, welches nicht zu $B = A^J$ gehört. Dann müßte es einen Gegenstand $g \in A$ geben mit $(g, m) \notin J$, aber $(g, m) \in I$. Mit Hilfe der Bedingung (**C**) fänden wir dann ein $h \in G$ mit $m \notin h^I$ und $h^J \supseteq g^J \supseteq B$. Wegen $h^J \supseteq B$ wäre dann aber $h \in A$, was im Widerspruch zu $m \in A^I$ stünde. Dual beweist man $A = B^I$, J ist also abgeschlossen. □

Hilfssatz 48. *Ist J eine abgeschlossene Relation und ist*

$$(H, N, I \cap H \times N)$$

ein verträglicher Teilkontext von (G, M, I), dann ist $J \cap H \times N$ eine abgeschlossene Relation von $(H, N, I \cap H \times N)$ und $(H, N, J \cap H \times N)$ ein verträglicher Teilkontext von (G, M, J).

Beweis. Wenn (A, B) ein Begriff von (G, M, I) ist, dann ist $(A \cap H, B \cap N)$ ein Begriff von $(H, N, I \cap H \times N)$. Dies gilt insbesondere für die Begriffe von (G, M, J), in diesem Falle ist $(A \cap H, B \cap N)$ sogar ein Begriff von $(H, N, J \cap H \times N)$. Jeder Begriff von $(H, N, J \cap H \times N)$ entsteht auf diese Weise, also ist $J \cap H \times N$ abgeschlossen und $(H, N, J \cap H \times N)$ verträglich. □

Der Hilfssatz hat folgenden Hintergrund: ein Homomorphismus bildet Unterverbände auf Unterverbände ab. Ist $(H, N, I \cap H \times N)$ ein verträglicher Teilkontext und J eine abgeschlossene Relation, dann bildet $\Pi_{H,N}$ den Unterverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$ auf den Unterverband $\underline{\mathfrak{B}}(H, N, J \cap H \times N)$ ab.

Hilfssatz 48 enthält als Sonderfall die Aussage, daß beim Wegstreichen reduzibler Gegenstände und Merkmale eine abgeschlossene Relation abgeschlossen bleibt. Ein dichter Teilkontext ist ja nach Hilfssatz 38 stets verträglich. Im folgenden Hilfssatz stellen wir einen Zusammenhang zwischen abgeschlossenen Relationen und den Pfeilrelationen her. Sicherheitshalber erläutern wir zuvor eine dabei benutzte Abkürzung:

$$\swarrow \cup \nearrow := \{(g, m) \mid g \swarrow m \text{ oder } g \nearrow m\}.$$

Im folgenden Hilfssatz sind damit die Pfeilrelationen im Kontext (G, M, J) gemeint:

Hilfssatz 49. *Es sei (G, M, J) ein doppelt fundierter bereinigter Kontext. Dann gilt: Genau dann ist J eine abgeschlossene Relation von (G, M, I), wenn*

$$J \subseteq I \subseteq G \times M \setminus (\swarrow \cup \nearrow).$$

Beweis. Wenn J eine abgeschlossene Relation von (G, M, I) ist und $(g, m) \in I \setminus J$, dann existiert nach Hilfssatz 47 ein h mit $(h, m) \notin J$ und $g^J \subseteq h^J$, also $g^J \subset h^J$ und damit $(g, m) \notin \swarrow$.

Ist andererseits $J \subseteq I \subseteq G \times M \setminus (\swarrow \cup \nearrow)$, dann genügt es nach Hilfssatz 46, für vorgegebenes $X \subseteq G$ (und dual für $X \subseteq M$) zu zeigen, daß $X^{JJ} \supseteq X^{JI}$ gilt. Sei also $X \subseteq G$, $B := X^J$ und $g \in B^I$. Wäre $g \notin B^J$, dann gäbe es ein Merkmal $m \in B$ mit $(g, m) \notin J$, und weiter wegen der Doppelfundiertheit ein Merkmal n mit $g \nearrow n$ und $n^J \supseteq m^J$, also insbesondere $n \in B$, und folglich $(g, n) \in I$, im Widerspruch zu $g \nearrow n$. $\square$

Vollzeilen und Vollspalten des Kontextes gehören zu jeder abgeschlossenen Relation, und es ist manchmal lästig, sie mitführen zu müssen. Zur Vereinfachung benutzen wir deshalb gelegentlich die Schreibweise

$$\square := M' \times M \cup G \times G'.$$

Die Relation $\square$ besteht also gerade aus den trivialen Inzidenzen in I. Im folgenden Hilfssatz setzen wir einfach $\square = \emptyset$ voraus und geben einige einfache Beispiele abgeschlossener Relationen.

Hilfssatz 50. *Sind (A, B) und (C, D) Begriffe eines Kontextes (G, M, I) mit $G' = \emptyset = M'$, so sind*

$$I \cap A \times M, \quad I \cap G \times D, \quad I \cap (A \times M \cup G \times D)$$

und, falls $(A, B) \leq (C, D)$, auch $I \cap C \times B$ abgeschlossene Relationen mit

$$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I \cap A \times M) = \{(G, \emptyset)\} \cup ((A, B)]$$

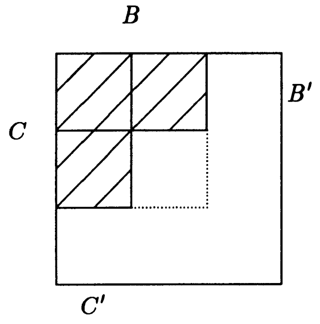


Abbildung 3.8. Zu Hilfssatz 51: Zwischen (B', B) und (C, C') liegen gerade die Begriffe des Kontextes $(C, B, I \cap C \times B)$.

$$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I \cap G \times D) = \{(\emptyset, M)\} \cup [(C, D))$$

$$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I \cap (A \times M \cup G \times D)) = ((A, B)] \cup [(C, D))$$

$$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I \cap C \times B) = \{(\emptyset, M), (G, \emptyset)\} \cup [(A, B), (C, D)].$$

Beweis. Es genügt, den Beweis für $J := I \cap C \times B$ zu führen. Zweifellos sind $(G, \emptyset)$ und $(\emptyset, M)$ Begriffe von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$. Außerdem ist jeder Begriff $(X, Y) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ mit $(A, B) \leq (X, Y) \leq (C, D)$ auch Begriff von (G, M, J), denn es ist ja $X \times Y \subseteq I \cap \ C \times B \ \subseteq J$. Sei daher $(X, Y) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, J)$. Wir dürfen $X \subseteq C$ und $Y \subseteq B$ annehmen. Aus $Y \subseteq B$ erhalten wir wegen $A \times B \ \subseteq J$ sofort $A = B^J \subseteq Y^J = X$, also $A \subseteq X$ und damit $X^I \subseteq A^I = B$. Mit $X^J = X^I \cap B$ ergibt sich $X^I = X^J$. Dual erkennt man $Y^I = Y^J$, also $(X, Y) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$. □

Als unmittelbare Folgerung daraus ergibt sich:

Hilfssatz 51. *Sind* (A, B) *und* (C, D) *Begriffe von* (G, M, I) *mit* $(A, B) \leq (C, D)$*, dann ist*

$$[(A, B), (C, D)] = \mathfrak{B}(C, B, I \cap C \times B).$$ □

Beispiel 7. Wir demonstrieren diesen Hilfssatz anhand der Begriffe $\gamma 5$ und μc im Kontext aus Abbildung 3.6. Man hat

$$\gamma 5 = (5'', 5') = (\{5, 9\}, \{c, d, e, f, g\}),$$

$$\mu m = (m', m'') = (G \setminus \{8\}, \{c\}).$$

Nach dem Hilfssatz ist $[\gamma 5, \mu c] = \mathfrak{B}(C, B, I \cap C \times B)$ mit

$$\begin{aligned} & C &:=& \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\} \\ \text{und} \quad & B &:=& \{c, d, e, f, g\}. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß in diesem Teilkontext die Gegenstände 1, 2, 3, 5, 9 und 10 sowie das Merkmal c reduzibel sind. Der reduzierte Kontext ist in Abbildung 3.9 zusammen mit seinem Begriffsverband wiedergegeben. Es handelt sich um ein Intervall im Zentrum von Abbildung 3.7.

	d	e	f	g
4	×	×		
6		×		×
7			×	×

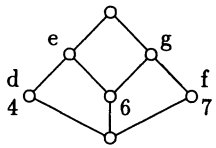


Abbildung 3.9. Der Begriffsverband dieses Teilkontextes ist isomorph zu einem Intervall.

Wir geben zwei weitere Beispiele abgeschlossener Relationen:

Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen des Kontextes (G, M, I), also von Abbildungspaaren (α, β) mit

$$\alpha : G \to G, \quad \beta : M \to M, \quad gIm \iff \alpha(g)I\beta(m),$$

dann erhält man eine abgeschlossene Relation I_Γ mit Hilfe der Definition

$$\begin{aligned} (g,m) \in I_\Gamma \quad &:\iff \quad gI\beta(m) \text{ für alle } (\alpha,\beta) \in \Gamma \\ &(\iff \quad \alpha(g)Im \text{ für alle } (\alpha,\beta) \in \Gamma), \end{aligned}$$

wie man unschwer nachweist. Der zugehörige Unterverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I_\Gamma)$ besteht gerade aus denjenigen Begriffen (A, B) von (G, M, I), die unter Γ invariant sind, für die also gilt

$$(\alpha A, \beta B) = (A, B) \quad \text{für alle } (\alpha, \beta) \in \Gamma.$$

Es kann vorkommen, daß sich eine abgeschlossene Relation nur wenig von der Inzidenzrelation I unterscheidet, im Extremfall nur in einem „Kreuz“. Dieser Fall korrespondiert zum *Demontieren* doppelt irreduzibler Elemente und soll deshalb kurz geschildert werden, wobei wir aber die ordnungstheoretischen Ergebnisse nur skizzieren und für die Beweise auf die Literatur verweisen.

Ein Element a einer geordneten Menge soll **doppelt irreduzibel** genannt werden, wenn a genau einen unteren Nachbarn a_* und genau einen oberen Nachbarn a^* hat und außerdem die (im Endlichen entbehrlichen) Bedingungen

$$x < a \Rightarrow x \leq a_*, \quad x > a \Rightarrow x \geq a^*$$

erfüllt sind. In einem vollständigen Verband sind die doppelt irreduziblen Elemente nach Hilfssatz 2 (S. 7) genau diejenigen, die sowohl $\bigvee$-irreduzibel als auch $\bigwedge$-irreduzibel sind.

Vom **Demontieren** eines doppelt irreduziblen Elementes a in einer geordneten Menge $(P, \leq)$ spricht man, wenn man den Übergang von $(P, \leq)$ zur geordneten Menge

$$(P \setminus \{a\}, (P \setminus \{a\})^2 \cap \leq)$$

meint. Für diese geordnete Menge schreiben wir kurz $(P \setminus \{a\}, \leq)$ im folgenden.

Demontiert man ein doppelt irreduzibles Element a eines vollständigen Verbandes $\boldsymbol{V}$, dann erhält man einen vollständigen Unterverband $\boldsymbol{V} \setminus \{a\}$. Offenbar ist dafür die Eigenschaft, doppelt irreduzibel zu sein, auch notwendig. Man hat eine weitere Umkehrung:

Hilfssatz 52. *Ist a ein doppelt irreduzibles Element von $(P, \leq)$, dann ist $(P \setminus \{a\}, \leq)$ genau dann ein vollständiger Verband, wenn $(P, \leq)$ ein vollständiger Verband ist.* □

Wir lassen den (einfachen) Beweis aus und weisen stattdessen auf eine Anwendung hin: Will man von einer vorgegebenen geordneten Menge $(P, \leq)$ feststellen, ob sie ein vollständiger Verband ist, so kann man zunächst doppelt irreduzible Elemente entfernen und dann die Reststruktur überprüfen. Ist $(P, \leq)$ endlich, dann kann man sukzessive *alle* doppelt irreduziblen Elemente demontieren, bis schließlich ein **DI-Kern** ohne doppelt irreduzible Elemente übrig bleibt.

Mit einem einfachen Argument kann übrigens gezeigt werden, daß der DI-Kern eindeutig ist, also nicht abhängig von der Reihenfolge, in der die doppelt irreduziblen Elemente demontiert werden.

Das Demontieren eines Elementes entspricht gerade dem Streichen eines Kreuzes im Kontext:

Hilfssatz 53. *Ist $\mathfrak{a} = \gamma g = \mu m$ ein doppelt irreduzibler Begriff eines bereinigten Kontextes (G, M, I), dann ist*

$$\mathfrak{B}(G, M, I) \setminus \{\mathfrak{a}\} = \mathfrak{B}(G, M, I \setminus \{(g, m)\}).$$

Beweis. Wir hatten bereits festgestellt, daß $\mathfrak{B}(G, M, I) \setminus \{\mathfrak{a}\}$ ein vollständiger Unterverband ist. Nach Satz 13 ist die zugehörige abgeschlossene Relation durch

$$J := \bigcup \{A \times B \mid (A, B) \neq \mathfrak{a}\}$$

gegeben. Ist nun $(h, n) \in I$ ein beliebiges inzidentes Gegenstand-Merkmal-Paar, dann ist $(h, n) \in h'' \times h'$ und $(h, n) \in n' \times n''$. Aus $(h, n) \notin J$ folgt also $(h'', h') = \mathfrak{a} = (n', n'')$, also (weil (G, M, I) bereinigt ist) $h = g$ und $n = m$. □

3.4 Blockrelationen und Toleranzen

Definition 51. Es sei $\boldsymbol{V}$ ein vollständiger Verband. Eine **vollständige Toleranzrelation** auf $\boldsymbol{V}$ ist eine Relation $\Theta \subseteq \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$, die reflexiv, symmetrisch und mit Suprema und Infima verträglich ist, d.h. für die gilt

$$x_t \Theta y_t \text{ für } t \in T \Rightarrow (\bigwedge_{t \in T} x_t) \Theta (\bigwedge_{t \in T} y_t) \text{ und } (\bigvee_{t \in T} x_t) \Theta (\bigvee_{t \in T} y_t).$$

Eine vollständige Toleranzrelation ist also dann eine Kongruenzrelation, wenn sie transitiv ist. ◊

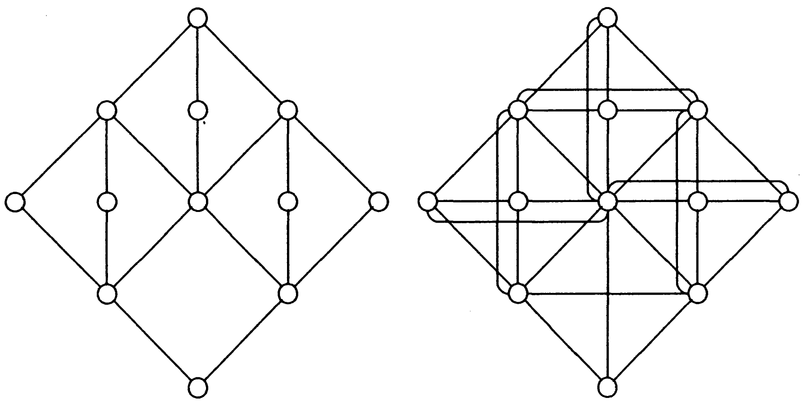


Abbildung 3.10. Die im rechten Bild verbundenen Paare (auch die Paare benachbarter Elemente) gehören zu einer Toleranzrelation des links abgebildeten Verbandes.

Hilfssatz 54. *Ist Θ eine vollständige Toleranzrelation auf $\boldsymbol{V}$, so folgt aus $a\Theta b$ und $x, y \in [a \wedge b, a \vee b]$ schon $x \Theta y$.*

Beweis. Aus $a\Theta b$ und $a\Theta a$ folgt $a\Theta a \wedge b$ und entsprechend $b\Theta a \wedge b$; daraus erhält man $a \wedge b \;\Theta\; a \vee b$. Es folgt $x \vee (a \wedge b) \;\Theta\; x \vee (a \vee b)$, also $x\Theta(a \vee b)$ und entsprechend $(a \vee b)\Theta y$. Wegen $x, y \leq a \vee b$ ergibt sich $x\Theta y$. □

Definition 52. Ist Θ eine vollständige Toleranzrelation und ist $a \in \boldsymbol{V}$, so definieren wir

$$a_\Theta := \bigwedge \{x \in \boldsymbol{V} \mid a\Theta x\} \text{ und } a^\Theta := \bigvee \{x \in \boldsymbol{V} \mid a\Theta x\}.$$

Als **Blöcke** von Θ bezeichnen wir die Intervalle $[a]_\Theta := [a_\Theta, (a_\Theta)^\Theta]$, $(a \in \boldsymbol{V})$. ◊

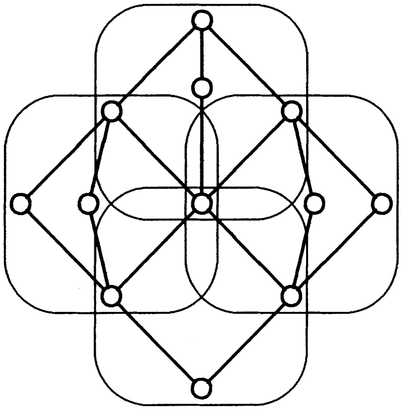


Abbildung 3.11. Die Blöcke der Toleranzrelation aus Abbildung 3.10.

a_Θ ist das kleinste (und dual a^Θ das größte) Element, welches mit a in der Relation Θ steht. Die duale Definition $[a]^\Theta := [(a^\Theta)_\Theta, a^\Theta]$ liefert ebenfalls die Blöcke von Θ: Wegen $((a_\Theta)^\Theta)_\Theta = a_\Theta$ und $((a^\Theta)_\Theta)^\Theta = a^\Theta$ erhält man nämlich $[a]_\Theta = [a_\Theta]^\Theta$ sowie $[a]^\Theta = [a^\Theta]_\Theta$. Aus $a\Theta b$ und $a \leq b$ folgt $b_\Theta \leq a \leq b$, also $a \in [b]_\Theta$, entsprechend folgt aus $a\Theta b$ und $a \geq b$ stets $a \in [b]^\Theta$. Die Blöcke einer Toleranzrelation brauchen nicht disjunkt zu sein, wenn es sich nicht um eine Kongruenzrelation handelt. Man hat

$$[a]_\Theta \cap [b]_\Theta \neq \emptyset \iff a_\Theta \leq (b_\Theta)^\Theta \text{ und } b_\Theta \leq (a_\Theta)^\Theta.$$

Hilfssatz 55. *Die Blöcke von Θ sind genau die maximalen Teilmengen X von $\boldsymbol{V}$ mit $x\Theta y$ für alle $x, y \in X$.*

Beweis. Wegen Hilfssatz 54 haben wir $x\Theta y$ für alle $x, y \in [a]_\Theta$. Ist nun z irgendein Element mit $z\Theta a$ und $z\Theta a_\Theta$, so ergibt sich $z \geq a_\Theta$ und $z \leq (a_\Theta)^\Theta$, also $z \in [a]_\Theta$. Jeder Block ist also maximal bezüglich der genannten Eigenschaft. Ist nun X irgendeine maximale Menge paarweise in der Relation Θ stehender Elemente von $\boldsymbol{V}$, so folgt aus der Verträglichkeit, daß $\bigwedge X$ und $\bigvee X$ zu X gehören; wegen der Maximalität ist also $X = [\bigwedge X, \bigvee X]$ und $(\bigwedge X)^\Theta = \bigvee X$, $(\bigvee X)_\Theta = \bigwedge X$, d.h. X ist ein Block von Θ. $\square$

Hilfssatz 56. *Die Abbildung $x \overset{\varphi}{\mapsto} x_\Theta$ ist ein $\bigvee$-Morphismus, und die Abbildung $x \overset{\psi}{\mapsto} x^\Theta$ ist ein $\bigwedge$-Morphismus. Die beiden Abbildungen sind zueinander adjungiert.*

Beweis. Wir zeigen, daß (φ, ψ) eine Galoisverbindung zwischen $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}^d$ ist. Es gilt nämlich $x \leq y \Rightarrow x_\Theta \leq y_\Theta \Rightarrow x_\Theta \geq^d y_\Theta$, $x \leq^d y \Rightarrow x \geq y \Rightarrow x^\Theta \geq y^\Theta$, $x \leq (x_\Theta)^\Theta$ und $x \geq (x^\Theta)_\Theta \Rightarrow x \leq^d (x^\Theta)_\Theta$. Man hat also

$$\varphi(\bigvee x_t) = \bigwedge\nolimits^d \varphi(x_t) = \bigvee \varphi(x_t)$$

und entsprechend

$$\psi(\bigwedge x_t) = \psi(\bigvee^d x_t) = \bigwedge \psi(x_t). \qquad \square$$

Definition 53. Die Menge aller Blöcke einer vollständigen Toleranzrelation von $\boldsymbol{V}$ wird mit $\boldsymbol{V}/\Theta$ bezeichnet und durch

$$B_1 \leq B_2 :\iff \bigwedge B_1 \leq \bigwedge B_2 \qquad (\iff \bigvee B_1 \leq \bigvee B_2)$$

geordnet. ◊

In der Definition wird behauptet, daß die kleinsten Elemente der Blöcke auf die gleiche Weise geordnet sind wie die größten Elemente. Das ist wegen $x_\Theta \leq y_\Theta \iff (x_\Theta)^\Theta \leq (y_\Theta)^\Theta$ richtig. Es gilt noch mehr: Die Menge der oberen Grenzen von Blöcken ist gegen Infima, die der unteren Grenzen gegen Suprema abgeschlossen, ganz analog wie im Fall der vollständigen Kongruenzen (vergl. Satz 10, S. 106). Das ist im folgenden Satz ausgeführt:

Satz 14. *Mit der oben angegebenen Ordnung ist* $\boldsymbol{V}/\Theta$ *ein vollständiger Verband (der* **Faktorverband** *von* $\boldsymbol{V}$ *nach* Θ*). Für Blöcke* B_t *bzw. für Elemente* x_t, $t \in T$, *von* $\boldsymbol{V}$ *gilt*

$$\bigvee_{t\in T} B_t = [\bigvee_{t\in T} \bigwedge B_t]^\Theta \quad \textit{bzw.} \quad \bigwedge_{t\in T} B_t = [\bigwedge_{t\in T} \bigvee B_t]_\Theta$$
$$\bigvee [x_t]_\Theta = [\bigvee x_t]_\Theta \quad \textit{bzw.} \quad \bigwedge [x_t]^\Theta = [\bigwedge x_t]^\Theta$$

Beweis. Die Beweise der Gleichungen ergeben sich leicht aus Hilfssatz 56. □

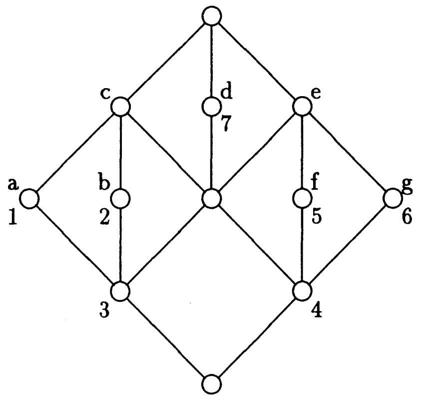
Wie beschreibt man vollständige Toleranzrelationen von Begriffsverbänden anhand der Kontexte?

Definition 54. Als **Blockrelation** eines Kontextes (G, M, I) bezeichnen wir eine Relation $J \subseteq G \times M$, die folgenden Bedingungen genügt:

1. $I \subseteq J$,
2. für jeden Gegenstand $g \in G$ ist g^J ein Inhalt von (G, M, I),
3. für jedes Merkmal $m \in M$ ist m^J ein Umfang von (G, M, I).

◊

An diese Definition können wir einige Beobachtungen anschließen: Ist J eine Blockrelation von (G, M, I), dann ist jeder Umfang von (G, M, J) ein Umfang von (G, M, I) und jeder Inhalt von (G, M, J) einer von (G, M, I). Der Durchschnitt beliebig vieler Blockrelationen von (G, M, I) ist wieder eine Blockrelation, denn es gilt $g^{\bigcap J_t} = \bigcap g^{J_t}$, und der Durchschnitt von Inhalten ist stets wieder ein Inhalt, und dual. Die Blockrelationen von (G, M, I) bilden also ein Hüllensystem und damit einen vollständigen Verband.



	a	b	c	d	e	f	g
1	×	•	×	•	•		
2	•	×	×	•	•		
3	×	×	×	×	×	•	•
4	•	•	×	×	×	×	×
5			•	•	×	×	•
6			•	•	×	•	×
7			•	×	•		

Abbildung 3.12. Die Blockrelation J zur Toleranz aus Abbildung 3.10 enthält zusätzlich noch die durch die Punkte markierten Paare.

Satz 15. *Der Verband aller Blockrelationen eines Kontextes* (G, M, I) *ist isomorph zum Verband aller vollständigen Toleranzrelationen von* $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$*. Ein Isomorphismus ist die Abbildung* β*, die jeder vollständigen Toleranzrelation* Θ *die durch*

$$g\beta(\Theta)m :\iff \gamma g\Theta(\gamma g \wedge \mu m) \quad (\iff (\gamma g \vee \mu m)\Theta\mu m)$$

definierte Blockrelation zuordnet; umgekehrt ergibt sich aus einer Blockrelation J *die zugehörige Toleranz durch*

$$(A, B)\beta^{-1}(J)(C, D) \iff A \times D \cup C \times B \subseteq J.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $J := \beta(\Theta)$ eine Blockrelation ist. Weil Θ reflexiv ist, ist $I \subseteq J$. Nach der Definition ist

$$g^J = \{m \in M \mid \gamma g\Theta(\gamma g \wedge \mu m)\},$$

wir behaupten, daß dies ein Begriffsinhalt von (G, M, I) ist. Dazu betrachten wir den Begriff

$$\bigwedge\{\mu m \mid \gamma g\Theta(\gamma g \wedge \mu m)\} = (g^{JI}, g^{JII}).$$

Ist n ein Merkmal dieses Begriffs, so gilt

$$\mu n \geq \bigwedge\{\mu m \mid \gamma g\Theta(\gamma g \wedge \mu m)\},$$

und deshalb auch

$$\gamma g \wedge \mu n \geq \bigwedge\{\gamma g \wedge \mu m \mid \gamma g\Theta(\gamma g \wedge \mu m)\}.$$

Beachtet man, daß dieses Infimum in Θ-Relation zu γg steht, so erkennt man, daß $(\gamma g \wedge \mu n)\Theta\gamma g$ gilt, also $n \in g^J$. Es ist also $g^J = g^{JII}$ ein Begriffsinhalt, dual zeigt man, daß jede Menge der Form m^J ein Begriffsumfang von (G, M, I) ist.

Nun gehen wir von einer Blockrelation J aus und definieren eine Relation $\tau(J)$ auf $\mathfrak{B}(G, M, I)$ durch

$$(A, B)\tau(J)(C, D) :\Longleftrightarrow A \times D \cup B \times C \subseteq J.$$

Offensichtlich ist $\tau(J)$ reflexiv und symmetrisch, und ist T eine Indexmenge und sind Begriffe mit $(A_t, B_t)\Theta(C_t, D_t)$ für $t \in T$ gegeben, so argumentieren wir folgendermaßen: Für $g \in A_t$ haben wir $g^J \supseteq D_t = C_t^I$ und folglich $g^{JI} \subseteq C_t^{II} = C_t$. Für $g \in \bigcap_{t \in T} A_t$ erhalten wir somit $g^{JI} \subseteq \bigcap_{t \in T} C_t$; also $g^J = g^{JII} \supseteq \left(\bigcap_{t \in T} C_t\right)^I$, was $\bigcap_{t \in T} A_t \times \left(\bigcap_{t \in T} C_t\right)^I \subseteq J$ beweist. Analog zeigen wir $\bigcap_{t \in T} C_t \times \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)^I \subseteq J$, und haben insgesamt $\bigwedge_{t \in T}(A_t, B_t)\tau(J) \bigwedge_{t \in T}(C_t, D_t)$ bewiesen. Das duale Argument weist nach, daß $\tau(J)$ auch mit Suprema verträglich ist, also eine vollständige Toleranzrelation ist.

Beide Abbildungen, β und τ, sind offensichtlich ordnungserhaltend. Zum Beweis des Satzes fehlt also noch der Nachweis, daß sie zueinander invers sind. Sei Θ eine vollständige Toleranzrelation von $\mathfrak{B}(G, M, I)$, wir wollen zeigen, daß

$$(A, B)\Theta(C, D) \Longleftrightarrow (A, B)\tau(\beta(\Theta))(C, D)$$

gilt; nach Hilfssatz 54 dürfen wir uns dabei auf den Spezialfall $(A, B) > (C, D)$ beschränken. Man hat

$$\begin{aligned}
(A, B)\Theta(C, D) &\Longleftrightarrow \gamma g \vee (C, D)\Theta(C, D) \text{ für alle } g \in A \\
&\Longleftrightarrow \gamma g\Theta\gamma g \wedge (C, D) \text{ für alle } g \in A \\
&\Longleftrightarrow \gamma g\Theta\gamma g \wedge \mu m \text{ für alle } g \in A \text{ und } m \in D \\
&\Longleftrightarrow A \times D \subseteq \beta(\Theta) \\
&\Longleftrightarrow (A, B)\tau(\beta(\Theta))(C, D).
\end{aligned}$$

Für das letzte Stück des Beweises sei J eine Blockrelation von (G, M, I). Dann gilt

$$\begin{aligned}
(g, m) \in J &\Longleftrightarrow g \in m^J \\
&\Longleftrightarrow g^{II} \subseteq g^{JJ} \cap m^J \text{ und} \\
(g^{II} \cap m^I)^I = (g^I \cup m^{II})^{II} &\subseteq (g^J \cup m^{JJ})^{JJ} = (g^{JJ} \cap m^J)^J \\
&\Longleftrightarrow g^{II} \times (g^{II} \cap m^I)^I \subseteq J \\
&\Longleftrightarrow (\gamma g)\tau(J)(\gamma g \wedge \mu m) \\
&\Longleftrightarrow (g, m) \in \beta(\tau(J)).
\end{aligned}$$

Das beweist $J = \beta(\tau(J))$. □

Korollar 57. *Ist Θ eine Toleranzrelation auf $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ und ist $J := \beta(\Theta)$ die zugehörige Blockrelation, so gilt:*

$$\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)/\Theta \cong \underline{\mathfrak{B}}(G,M,J).$$

Genauer hat man:

1. *$[(B^I,B),(C,C^I)]$ ist genau dann ein Block von Θ, wenn (C,B) ein Begriff von (G,M,J) ist.*
2. *Die Abbildung*
$$[(B^I,B),(C,C^I)] \mapsto (C,B)$$
ist ein Isomorphismus vom Verband der Blöcke von Θ auf den der Begriffe von (G,M,J).
3. *Ist (C,B) ein Begriff von (G,M,J), so gilt für den zugehörigen Block von Θ*
$$[(B^I,B),(C,C^I)] = \mathfrak{B}(C,B,I\cap C\times B).$$

Beweis. Nach Satz 15 stehen zwei Begriffe $(A,B) \leq (C,D)$ von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ genau dann in der Relation Θ, wenn $C \times B \subseteq J$ gilt, also wenn $B \subseteq C^J$ und $C \subseteq B^J$. Zu einem beliebigen Begriff (X,Y) von (G,M,I) ist deshalb

$$\begin{aligned}(X,Y)_\Theta &= (X^{JI},X^J) \quad \text{und}\\ (X,Y)^\Theta &= (Y^J,Y^{JI}) \quad \text{und folglich}\\ ((X,Y)_\Theta)^\Theta &= (X^{JJ},X^{JJI}).\end{aligned}$$

Setzen wir $B := X^J$ und $C := X^{JJ}$, dann ist (C,B) ein Begriff von (G,M,J), und der Block $[(X,Y)]_\Theta$ erweist sich als von der behaupteten Form:

$$[(X,Y)]_\Theta = [(X,Y)_\Theta,((X,Y)_\Theta)^\Theta] = [(B^I,B),(C,C^I)]\,.$$

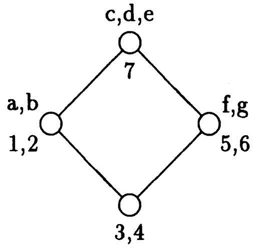
Die Abbildung
$$[(X,Y)]_\Theta \mapsto (X^{JJ},X^J)$$
ist daher ein Ordnungsisomorphismus, der die Blöcke von Θ auf die Begriffe von (G,M,J) abbildet.

Die dritte Teilbehauptung folgt aus Hilfssatz 51. $\square$

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Beobachtungen. Die erste beschäftigt sich mit der Frage, welche Intervallfamilien die Systeme der Blöcke einer Toleranz sind. Das klärt der folgende Satz:

Satz 16. *Es sei $\mathbf{V}$ ein vollständiger Verband, T eine Indexmenge und $\mathcal{F} := \{[\underline{x}_t,\overline{x}_t] \mid t \in T\}$ eine Familie von Intervallen von $\mathbf{V}$. Die Intervalle sollen paarweise verschieden sein: $s \neq t \Rightarrow [\underline{x}_s,\overline{x}_s] \neq [\underline{x}_t,\overline{x}_t]$. Dann sind die folgenden Bedingungen gleichbedeutend:*

1. *$\mathcal{F}$ ist die Familie der Blöcke einer vollständigen Toleranzrelation auf einem vollständigen Unterverband von $\mathbf{V}$.*



	c	d	e	f	g
3	×	×	×		
4	×	×	×	×	×
5			×	×	
6			×		×

Abbildung 3.13. Der Begriffsverband $\mathfrak{B}(G, M, J)$ der Blockrelation J ist isomorph zum Faktorverband nach der Toleranzrelation. Als Beispiel ist der zum Begriff $(\{3,4,5,6\}, \{c,d,e,f,g\})$ von J gehörende Teilkontext angegeben. Sein Begriffsverband ist isomorph zum zugehörigen Block der Toleranz.

2. *a) Die Menge $\{\overline{x}_t \mid t \in T\}$ der oberen Intervallgrenzen ist $\bigwedge$-abgeschlossen.*
   b) Die Menge $\{\underline{x}_t \mid t \in T\}$ der unteren Intervallgrenzen ist $\bigvee$-abgeschlossen.
   c) Die oberen und die unteren Grenzen sind auf gleiche Weise geordnet, d.h. es gilt $\underline{x}_s \leq \underline{x}_t \iff \overline{x}_s \leq \overline{x}_t$.
3. *Es gibt eine Ordnung $\leq$ auf T, bezüglich derer $(T, \leq)$ ein vollständiger Verband ist, und Abbildungen*

$$\underline{\alpha} : T \to \boldsymbol{V}, \qquad \textit{injektiv und } \bigvee\textit{-erhaltend,}$$

$$\overline{\alpha} : T \to \boldsymbol{V}, \qquad \textit{injektiv und } \bigwedge\textit{-erhaltend,}$$

mit $\underline{\alpha}(s) \leq \underline{\alpha}(t) \iff \overline{\alpha}(s) \leq \overline{\alpha}(t)$, und $\mathcal{F} = \{[\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)] \mid t \in T\}$.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Jeder Block einer vollständigen Toleranzrelation Θ ist von der Form $[x]^\Theta = [(x^\Theta)_\Theta, x^\Theta]$, die oberen Blockgrenzen sind also genau die Elemente der Form x^Θ. Aus Hilfssatz 56 folgt

$$\bigwedge\{x_t^\Theta \mid t \in T\} = (\bigwedge\{x_t \mid t \in T\})^\Theta,$$

das Ergebnis ist also wieder eine obere Blockgrenze. Das beweist a), und dual schließt man b). c) ergibt sich wieder aus Hilfssatz 56: $x^\Theta \leq y^\Theta \iff (x^\Theta)_\Theta \leq (y^\Theta)_\Theta$.

$2 \Rightarrow 3$: Wir ordnen T durch $s \leq t :\iff \underline{x}_s \leq \underline{x}_t$, wegen c) ist dies äquivalent zu $\overline{x}_s \leq \overline{x}_t$. Die durch $\underline{\alpha}(t) := \underline{x}_t$ definierte Abbildung ist also ein Ordnungsisomorphismus von $(T, \leq)$ auf $\{\underline{x}_t \mid t \in T\}$, entsprechend definiert $\overline{\alpha}(t) := \overline{x}_t$ einen Ordnungsisomorphismus von $(T, \leq)$ auf $\{\overline{x}_t \mid t \in T\}$. Nach a) und b) ist $(T, \leq)$ somit ein vollständiger Verband.

$3 \Rightarrow 1$: Wir zeigen zuerst, daß unter den in 3 gegebenen Voraussetzungen die Menge

$$U := \bigcup\{[\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)] \mid t \in T\}$$

ein vollständiger Unterverband von $\boldsymbol{V}$ ist. Sei also $x_s, s \in S$ eine Folge von Elementen aus U. Zu jedem $s \in S$ gibt es ein $t_s \in T$ mit $x_s \in [\underline{\alpha}(t_s), \overline{\alpha}(t_s)]$, wir behaupten, daß auch $\bigvee_{s \in S} x_s$ in einem solchen Intervall liegt, nämlich in $[\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)]$ mit $t := \bigvee_{s \in S} t_s$. Da $\underline{\alpha}$ $\bigvee$-erhaltend ist, ist $\underline{\alpha}(t) \leq \bigvee_{s \in S} x_s$ klar, und da $\overline{\alpha}$ ordnungserhaltend ist, hat man für jedes $s \in S$ $x_s \leq \overline{\alpha}(t_s) \leq \overline{\alpha}(\bigvee_{s \in S} t_s)$ und damit $\bigvee_{s \in S} x_s \leq \overline{\alpha}(t)$. U ist also bzgl. Suprema abgeschlossen und auch gegen Infima, wie die duale Argumentation ergibt.

Die Relation

$$\Theta := \{(x, y) \mid \exists_{t \in T}\ x, y \in [\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)]\}$$

ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch, außerdem folgt aus $(x_s, y_s) \in \Theta, s \in S$, daß für geeignete $t_s \in T$ gilt $x_s, y_s \in [\underline{\alpha}(t_s), \overline{\alpha}(t_s)]$ gilt, also

$$\bigvee\{x_s \mid s \in S\}, \bigvee\{y_s \mid s \in S\} \in [\underline{\alpha}(\bigvee t_s), \overline{\alpha}(\bigvee t_s)],$$

d.h.

$$(\bigvee\{x_s \mid s \in S\}, \bigvee\{y_s \mid s \in S\}) \in \Theta.$$

Θ ist also $\bigvee$-verträglich (und dual natürlich auch $\bigwedge$-verträglich), also eine vollständige Toleranz.

Schließlich muß noch gezeigt werden, daß die Intervalle $[\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)]$ tatsächlich die Blöcke von Θ, d.h. die maximalen Mengen paarweise in der Relation Θ stehender Elemente sind. Ist $[u, v]$ ein Block, so ist $(u, v) \in \Theta$, also $u, v \in [\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)]$ für ein t, jeder Block von Θ ist also von dieser Form. Andererseits ist auch jedes $[\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)]$ maximal; aus $[\underline{\alpha}(s), \overline{\alpha}(s)] \subseteq [\underline{\alpha}(t), \overline{\alpha}(t)]$ können wir nämlich $\overline{\alpha}(s) \leq \overline{\alpha}(t)$, also $s \leq t$ herleiten und auch $\underline{\alpha}(t) \leq \underline{\alpha}(s)$, also $t \leq s$, zusammen $s = t$. □

Die zweite Beobachtung schlägt eine Brücke zwischen verträglichen Teilkontexten und Blockrelationen. Transitive Toleranzrelationen sind Kongruenzrelationen, wir können also eine vollständige Kongruenzrelation (unter geeigneten Voraussetzungen, vergl. Satz 11) auf zwei Weisen beschreiben: durch einen verträglichen Teilkontext und durch eine Blockrelation.

Hilfssatz 58. *Es sei Θ eine vollständige Kongruenzrelation des doppelt fundierten Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, $(G_\Theta, M_\Theta, I \cap G_\Theta \times M_\Theta)$ der zugehörige gesättigte verträgliche Teilkontext und $J = \beta(\Theta)$ die Blockrelation zu Θ. Dann gilt:*

$$\begin{array}{rcl} (g, m) \in J & \iff & g'' \cap G_\Theta \subseteq m' \\ & \iff & m'' \cap M_\Theta \subseteq g' \\ G_\Theta & = & \{g \in G \mid g^I = g^J\} \\ M_\Theta & = & \{m \in M \mid m^I = m^J\} \end{array}$$

Beweis. Nach Satz 15 ist $(g,m) \in J \iff (\gamma g, \gamma g \wedge \mu m) \in \Theta$, und zwei Begriffe sind genau dann kongruent, wenn ihre Umfänge gleichen Durchschnitt mit G_Θ haben. Im vorliegenden Fall bedeutet dies $g'' \cap G_\Theta = g'' \cap m' \cap G_\Theta$, was der ersten Zeile der Behauptung entspricht. Dual erschließt man die zweite.

Nach der Definition ist g genau dann in G_Θ, wenn γg kleinstes Element einer Θ-Klasse ist. Das ist gleichbedeutend dazu, daß für jedes Merkmal m aus $(\gamma g, \gamma g \wedge \mu m) \in \Theta$ schon $\mu m \geq \gamma g$ folgt, also daß $(g,m) \in J$ stets $(g,m) \in I$ zur Folge hat. □

Den Zusammenhang zwischen Kongruenz- und Blockrelationen kann man nach dem Satz auch folgendermaßen erklären: ist φ ein Homomorphismus, $\Theta = \text{Kern}\varphi$ und J die zu Θ gehörende Blockrelation, so gilt

$$(g,m) \in J \iff \varphi\gamma g \leq \varphi\mu m.$$

3.5 Literatur und Hinweise

Zu 3.1 Verträgliche Teilkontexte wurden in [194] eingeführt. Dort steht auch schon die Charakterisierung mit Hilfe der Pfeilrelationen. Hilfssatz 37 ist der Arbeit von Knecht und Wille [101] entnommen.

Zu 3.2 Kongruenzrelationen gehören zum Standardstoff der Lehrbücher zur abstrakten Algebra. Satz 9 ist „klassisch". In Büchern zur Verbandstheorie betrachtet man allerdings gewöhnlich Verbandskongruenzen (bei denen nur die Verträglichkeit mit Suprema und Infima *endlicher Mengen* gefordert wird). Diese unterscheiden sich von den vollständigen Kongruenzrelationen ganz erheblich. Natürlich ist jede vollständige Kongruenz auch Verbandskongruenz im schwächeren Sinne. Aber während die Verbandskongruenzen stets einen distributiven Unterverband des Äquivalenzrelationenverbandes bilden, ist die Situation für vollständige Kongruenzen komplizierter: Das Supremum zweier vollständiger Kongruenzen braucht nicht mit dem Supremum als Äquivalenzrelationen übereinzustimmen, und *jeder* vollständige Verband ist isomorph zum Verband der vollständigen Kongruenzrelationen eines geeigneten Begriffsverbandes (Teo [176], Grätzer [78]). Deshalb läßt sich auch Satz 10 nicht ohne weiteres aus den korrespondierenden Sätzen für Algebren ableiten, sondern folgt [192]. Zur Kongruenztheorie für Begriffsverbände siehe auch Reuter und Wille [146].

Zu 3.3 Abgeschlossene Relationen wurden in [200] eingeführt, um die Beschreibung subdirekter Produkte, die in [195] in Angriff genommen worden war, zu vereinfachen. Der Begriffsverband in Abbildung 3.7 stammt ursprünglich aus einer Analyse biologischer Daten, siehe [62]. Das Demontieren doppelt irreduzibler Elemente ist von Duffus und Rival [44] untersucht worden. Sie haben auch die Eindeutigkeit des DI-Kerns bewiesen. Ein höchst einfacher

Beweis stammt von Farley [53]. Distributive Verbände, die von ihren doppelt irreduziblen Elementen erzeugt werden, haben Monjardet & Wille [130] untersucht.

Man kann strukturell beschreiben, was geschieht, wenn man der Inzidenzrelation I „ein Kreuz" hinzufügt. Wir beschränken uns hier auf die Kardinalität: der Begriffsverband kann größer, aber auch kleiner werden. Eine einfache Abschätzung von Skorsky zeigt

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I \cup \{(g, m)\})|}{\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)} \leq \frac{3}{2}.$$

Kleiner werden kann der Begriffsverband dabei nur, falls $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ gilt. Gilt weder $g \nearrow m$ noch $g \swarrow m$, dann ist nach Hilfssatz 49 $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I \cup \{(g, m)\})$.

Zu 3.4 Czedli [30] hatte entdeckt, daß man auch für Toleranzrelationen einen Faktorverband bekommt. Bandelt [7] hat diesen Zusammenhang näher untersucht. Das Zusammenspiel zwischen vollständigen Toleranzrelationen und Blockrelationen wurde in [197] erstmals beschrieben. Wille hatte auch vorgeschlagen, Toleranzrelationen zu nutzen, um Zählformeln mit Hilfe der Möbiusfunktion zu gewinnen, siehe dazu auch [142] und Vogt [180].

4. Zerlegungen von Begriffsverbänden

Ein komplexer Begriffsverband kann unter Umständen in einfachere Teile zerlegt werden. Dazu muß sich die mathematische Modellierung bewähren, indem sie wirkungsvolle und vielseitige Zerlegungsmethoden bereitstellt. Jedes solche Zerlegungsprinzip läßt sich umgekehrt als Konstruktionsverfahren nutzen. Deshalb treten einige der folgenden Themen im nächsten Kapitel unter anderem Vorzeichen wieder auf.

Läßt sich ein Verband als Unterverband eines direkten Produktes darstellen, so spricht man von einer *subdirekten Zerlegung.* Die im vorigen Kapitel bereitgestellte Theorie erlaubt eine elegante Beschreibung dieser Zerlegungen anhand des Kontextes, dies ist der Gegenstand des ersten Abschnitts.

Die in 3.4 eingeführten Toleranzrelationen führen zu Überdeckungen des Begriffsverbandes durch überlappende Intervalle. Dies wird im zweiten Abschnitt als Zerlegungsprinzip genutzt.

Eine überraschend vielseitige Kontextoperation besteht darin, einen Kontext in einen anderen einzusetzen. Wir präzisieren dies im dritten Abschnitt und beschreiben die zugehörige Verbandskonstruktion, das *Substitutionsprodukt.* Einige Anstrengung verwenden wir dann darauf, einen Zerlegungssatz für dieses Produkt nachzuweisen (Satz 25).

Im vierten Abschnitt schließlich führen wir das *Tensorprodukt* vollständiger Verbände mit Hilfe des direkten Produktes der Kontexte ein. Ähnlich wie beim direkte Produkt von Verbänden (das ja zu Kontextsumme korrespondiert), ist tensorielle Zerlegbarkeit selten. Wir übertragen daher die in 4.1 ausgeführte Idee des subdirekten Produktes auf Kontexte und erhalten den Begriff der *subtensoriellen Zerlegung* von Begriffsverbänden.

4.1 Subdirekte Zerlegungen

Das **direkte Produkt** von geordneten Mengen haben wir schon in der Definition 7 eingeführt, wir wiederholen sie hier für den Spezialfall vollständiger Verbände:

Definition 55. Es sei T irgendeine Indexmenge. Für eine Familie $(\mathbf{V}_t)_{t\in T}$ vollständiger Verbände ist das **Produkt** definiert als

$$\bigtimes_{t\in T} V_t := \left(\bigtimes_{t\in T} V_t, \leq\right)$$

mit

$$(x_t)_{t\in T} \leq (y_t)_{t\in T} :\Leftrightarrow x_t \leq y_t \text{ für alle } t \in T.$$

Die Verbände V_t, $t \in T$, sind die **Faktoren** des Produktes, und die für $s \in T$ definierten Abbildungen

$$\pi_s : \bigtimes_{t\in T} V_t \longrightarrow V_s$$

mit

$$\pi_s((x_t)_{t\in T}) := x_s$$

sind die **kanonischen Projektionen**. ◊

Ohne Schwierigkeiten beweist man:

Hilfssatz 59. *Jedes Produkt vollständiger Verbände ist ein vollständiger Verband. Infimum und Supremum können komponentenweise gebildet werden. Die kanonischen Projektionen sind surjektive Vollhomomorphismen.* □

Dem direkten Produkt von Begriffsverbänden entspricht die direkte Summe der Kontexte, vergl. Definition 34.

Definition 56. Ein **(vollständiges)**[1] **subdirektes Produkt** von vollständigen Verbänden ist ein vollständiger Unterverband des direkten Produktes, der von den Projektionsabbildungen auf die Faktoren sämtlich surjektiv abgebildet wird.

Eine **subdirekte Zerlegung** eines vollständigen Verbandes V ist eine Familie Θ_t, $t \in T$, vollständiger Kongruenzrelationen von V mit

$$\bigcap_{t\in T} \Theta_t = \Delta,$$

dabei bezeichnet Δ die triviale Kongruenz $\Delta := \{(x,x) \mid x \in V\}$. Die Verbände V/Θ_t, $t \in T$, werden die **Faktoren** der subdirekten Zerlegung genannt. ◊

Satz 17. *Ist V ein vollständiges subdirektes Produkt der Verbände $V_t, t \in T$, dann bilden die Kerne der kanonischen Projektionen*

$$\{Kern\ \pi_t \mid t \in T\}$$

eine subdirekte Zerlegung von V. Umgekehrt erhält man zu jeder subdirekten Zerlegung Θ_t, $t \in T$, von V durch

$$\iota(v) := ([v]\Theta_t)_{t\in T}$$

einen Isomorphismus von V auf ein subdirektes Produkt der Faktorverbände V/Θ_t, $t \in T$.

[1] Wir werden den Zusatz „vollständig“ aus sprachlichen Gründen desöfteren weglassen; man ersetze also im folgenden, wo immer erforderlich, „subdirekt“ durch „vollständig subdirekt“.

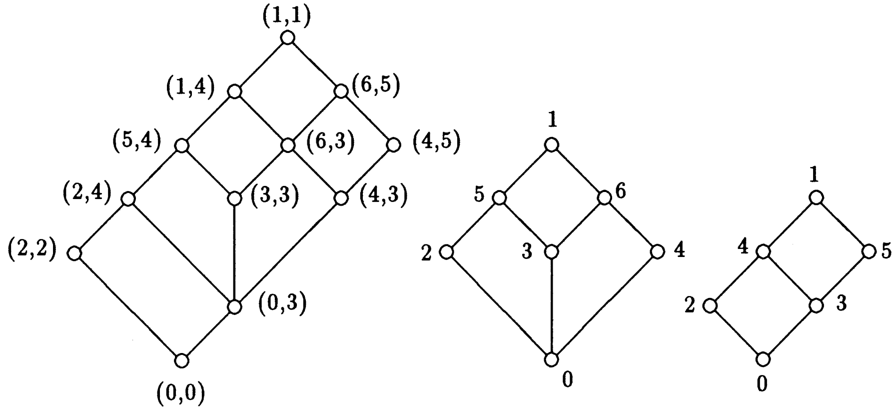


Abbildung 4.1. Der links abgebildete Verband ist ein subdirektes Produkt der beiden Verbände rechts daneben.

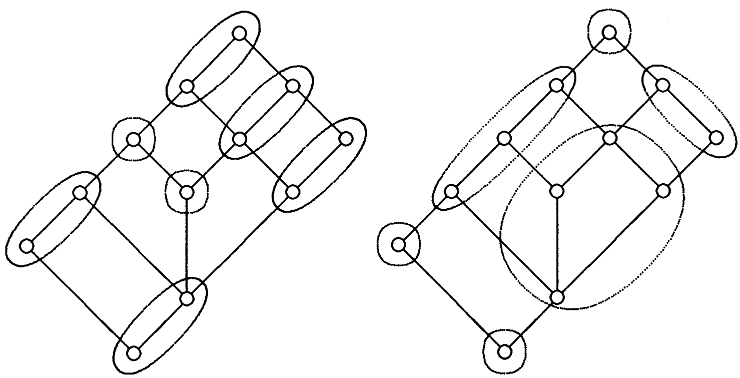


Abbildung 4.2. Die beiden hier eingezeichneten Kongruenzen bilden eine subdirekte Zerlegung des Verbandes aus Abbildung 4.1. Die Faktorverbände nach diesen Kongruenzen sind gerade die in der vorigen Abbildung angegebenen Faktoren des subdirekten Produktes.

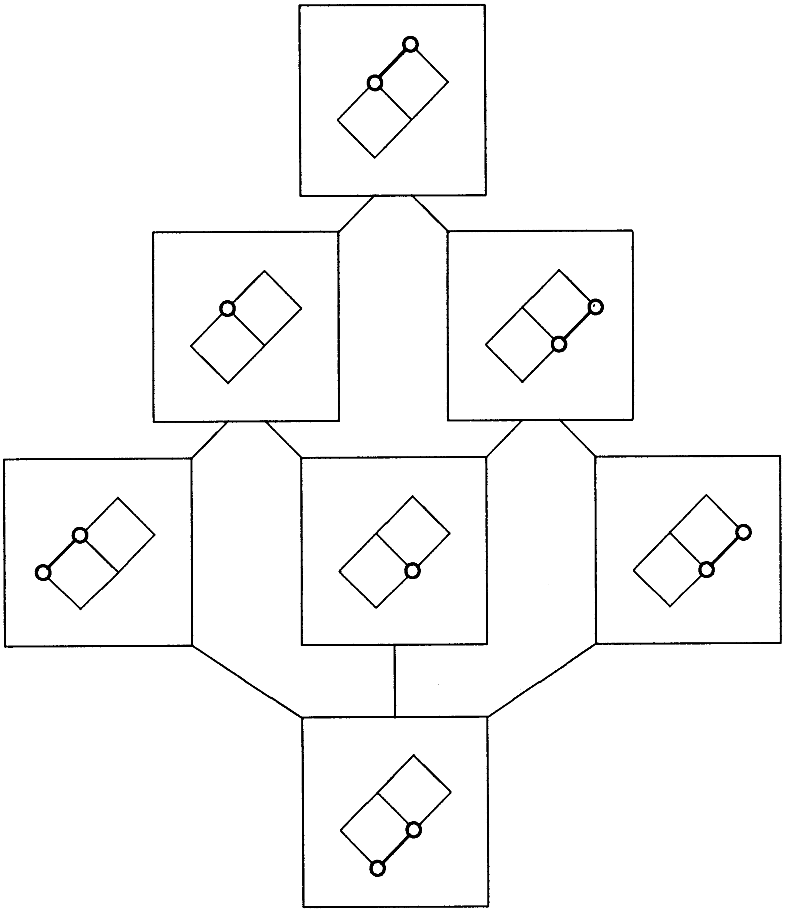


Abbildung 4.3. Am gestuften Liniendiagramm läßt sich die Definition des subdirekten Produktes gut nachvollziehen.

Beweis. Die Kerne der kanonischen Projektionen sind Kongruenzen, wir haben also zum Beweis des ersten Teiles nur zu zeigen, daß ihr Durchschnitt die triviale Kongruenz Δ ist. Zwei Elemente $(v_t)_{t\in T}$ und $(w_t)_{t\in T}$ des direkten Produktes sind verschieden, wenn es ein $s \in T$ gibt mit $v_s \neq w_s$, also mit $\pi_s(v) \neq \pi_s(w)$, was zu $(v, w) \notin \operatorname{Kern} \pi_s$ äquivalent ist. Aus $v \neq w$ folgt also $(v, w) \notin \bigcap_{t\in T} \operatorname{Kern} \pi_t$, was zu beweisen war.

Nun zeigen wir, daß die im zweiten Teil definierte Abbildung ι die behaupteten Eigenschaften hat. ι ist ein vollständiger Homomorphismus, denn für eine beliebige Familie $(v_j)_{j\in J}$ von Elementen von $\boldsymbol{V}$ gilt

$$\begin{aligned} \iota\left(\bigwedge_{j\in J} v_j\right) &= \left(\left[\bigwedge_{j\in J} v_j\right]\Theta_t\right)_{t\in T} \\ &= \left(\bigwedge_{j\in J} [v_j]\,\Theta_t\right)_{t\in T} \\ &= \bigwedge_{j\in J} ([v_j]\,\Theta_t)_{t\in T} \\ &= \bigwedge_{j\in J} \iota\,(v_j)\,, \end{aligned}$$

ebenso zeigt man, daß ι Suprema erhält. ι ist injektiv, denn aus $v, w \in \boldsymbol{V}$, $v \neq w$ folgt die Existenz eines $t \in T$ mit $(v, w) \notin \Theta_t$. Dann aber ist $[v]\Theta_t \neq [w]\Theta_t$, also $\iota(v) \neq \iota(w)$.

Damit ist ι ein Isomorphismus von $\boldsymbol{V}$ auf den vollständigen Unterverband $\iota(V)$ des Produktes $\times_{t\in T} (\boldsymbol{V}/\Theta_t)$. Zu zeigen bleibt, daß die kanonischen Projektionen

$$\pi_s : \iota(\boldsymbol{V}) \longrightarrow V_s\,, \qquad s \in T,$$

surjektiv sind. Dies folgt aus

$$\pi_s(\iota(V)) = \{[v]\Theta_s \mid v \in V\} = \boldsymbol{V}/\Theta_s. \qquad \square$$

Bei der Definition der subdirekten Zerlegung haben wir den Trivialfall, daß eine der Kongruenzen die triviale Kongruenz Δ ist, nicht ausgeschlossen. Diejenigen Verbände, die nur solche Zerlegungen zulassen, beschreibt die folgende Definition:

Definition 57. Ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$ heißt **(vollständig) subdirekt irreduzibel**, wenn jede subdirekte Zerlegung von $\boldsymbol{V}$ die triviale Kongruenz Δ enthält. $\Diamond$

Eine andere Formulierung dieser Eigenschaft ist die folgende: Ist $\boldsymbol{V}$ isomorph zu einem subdirekten Produkt von Verbänden $\boldsymbol{V}_t$, $t \in T$, dann ist $\boldsymbol{V}$ schon kanonisch isomorph zu einem der Faktoren V_t (*kanonisch isomorph* bedeutet hier, daß $\boldsymbol{V}$ zu $\boldsymbol{V}_t$ isomorph und die kanonische Projektion π_t bijektiv und deshalb ein Isomorphismus ist).

Diese Eigenschaft kann besonders leicht am Verband der Kongruenzrelationen von $\boldsymbol{V}$ abgelesen werden. Genau dann ist nämlich $\boldsymbol{V}$ subdirekt irreduzibel, wenn dieser Verband genau ein Atom hat:

Hilfssatz 60. *Ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$ ist genau dann subdirekt irreduzibel, wenn $\boldsymbol{V}$ eine kleinste nichttriviale*[2] *Kongruenz besitzt, d.h. eine vollständige Kongruenzrelation Θ mit $\Theta \neq \Delta$ und $\Theta \leq \Psi$ für alle vollständigen Kongruenzen $\Psi \neq \Delta$.*

Beweis. Ist Θ eine solche Kongruenz, und ist ι ein Isomorphismus von $\boldsymbol{V}$ auf ein subdirektes Produkt $\iota(V)$ von Verbänden $\boldsymbol{V}_t, t \in T$, so kann wegen

$$\bigcap_{t \in T} \operatorname{Kern}(\pi_t \circ \iota) = \Delta$$

nicht

$$\Theta \leq \operatorname{Kern}(\pi_t \circ \iota) \text{ für alle } t \in T$$

gelten. Also ist für wenigstens ein $t \in T$ $\operatorname{Kern}(\pi_t \circ \iota) = \Delta$.

Wenn andererseits keine solche Minimalkongruenz existiert, dann gilt für die Familie $\mathfrak{C}(\boldsymbol{V})$ aller Kongruenzen von $\boldsymbol{V}$ doch

$$\bigcap \{\Theta \mid \Theta \in \mathfrak{C}(\boldsymbol{V}), \Theta \neq \Delta\} = \Delta.$$

Diese Kongruenzen bilden dann also eine echte subdirekte Zerlegung von $\boldsymbol{V}$. □

Die Untersuchung subdirekter Zerlegungen kann direkt am Kontext vorgenommen werden, wenn die in den vorigen Abschnitten entwickelte Beziehung zwischen Kongruenzrelationen, verträglichen und pfeilabgeschlossenen Teilkontexten ausgenutzt wird. Dazu müssen wir allerdings voraussetzen, daß der untersuchte Verband $\boldsymbol{V}$ doppelt fundiert und damit isomorph zum Begriffsverband eines reduzierten Kontextes $\mathbb{K}$ ist. In diesem Fall nämlich entsprechen die Kongruenzen eineindeutig den pfeilabgeschlossenen Teilkontexten von $\mathbb{K}$.

Hilfssatz 61. *Ist (G, M, I) reduzierter Kontext eines doppelt fundierten Begriffsverbandes, so entsprechen die subdirekten Zerlegungen von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ eineindeutig den Familien pfeilabgeschlossener Teilkontexte $(G_t, M_t, I \cap G_t \times M_t)$ mit $\bigcup_{t \in T} G_t = G$ und $\bigcup_{t \in T} M_t = M$.*

Beweis. Nach den Bemerkungen vor Satz 12 gilt für eine Familie Θ_t, $t \in T$, von Kongruenzen genau dann $\bigcap_{t \in T} \Theta_t = \Delta$, wenn für die zugehörigen pfeilabgeschlossenen Teilkontexte $(G_t, M_t, I \cap G_t \times M_t)$ gilt: $\bigcup_{t \in T} G_t = G$ und $\bigcup_{t \in T} M_t = M$. □

[2] Dabei ist auch die Allkongruenz $V \times V$ zugelassen.

Die zu subdirekt irreduziblen Faktoren von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ gehörenden Teilkontexte sind besonders leicht zu erkennen. Dazu beachten wir, daß es zu jedem Gegenstand g stets einen kleinsten pfeilabgeschlossenen Teilkontext gibt, der g enthält. Einen solchen Teilkontext werden wir einen **1-erzeugten** pfeilabgeschlossenen Teilkontext nennen. (Entsprechendes gilt für Merkmale; da aber in einem reduzierten Kontext jeder Gegenstand durch einen Doppelpfeil mit einem Merkmal verbunden ist und umgekehrt, genügt es, sich auf eine der beiden Mengen G bzw. M zu konzentrieren).

Hilfssatz 62. *Ein reduzierter Kontext (G, M, I) ist genau dann 1-erzeugt, wenn $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ subdirekt irreduzibel ist.*

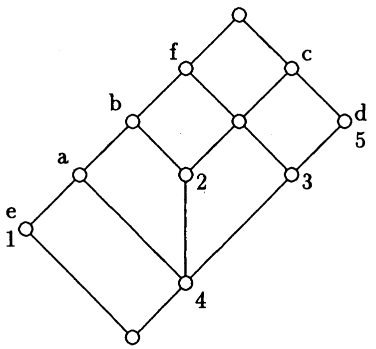
Beweis. Ist (G, M, I) 1-erzeugt, so gibt es zu jeder Familie $(G_t, M_t, I \cap G_t \times M_t)$, $t \in T$, von pfeilabgeschlossenen Teilkontexten ein $t \in T$ mit $G_t = G$ und $M_t = M$. Mit Hilfe von Hilfssatz 61 erkennen wir, daß dies äquivalent zur subdirekten Irreduzibilität ist. □

Satz 18. *Jeder doppelt fundierte vollständige Verband besitzt eine subdirekte Zerlegung in subdirekt irreduzible Faktoren.*

Beweis. Es genügt vorauszusetzen, daß $\boldsymbol{V}$ isomorph zum Begriffsverband eines reduzierten Kontextes (G, M, I) ist, und wir dürfen dann auch $\boldsymbol{V} = \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ annehmen. Für $g \in G$ bezeichne $(G_g, M_g, I \cap G_g \times M_g)$ den kleinsten pfeilabgeschlossenen Teilkontext von (G, M, I), der g enthält. Hilfssatz 36 (S. 101) zeigt, daß dieser Teilkontext ebenfalls reduziert ist; nach Hilfssatz 62 ist der zugehörige Begriffsverband subdirekt irreduzibel. Also liefert mit Hilfssatz 61

$$(G_g, M_g, I \cap G_g \times M_g), \quad g \in G$$

eine subdirekte Zerlegung von $\boldsymbol{V}$ mit subdirekt irreduziblen Faktoren. □



	a	b	c	d	e	f
1	×	×	⤢	↙	×	×
2	⤢	×	×	⤢		×
3	↙	⤢	×	×		×
4	×	×	×	×	⤢	×
5			×	×		⤢

Abbildung 4.4. Anhand der Pfeilrelationen im Kontext kann untersucht werden, welche subdirekten Zerlegungen der Begriffsverband hat.

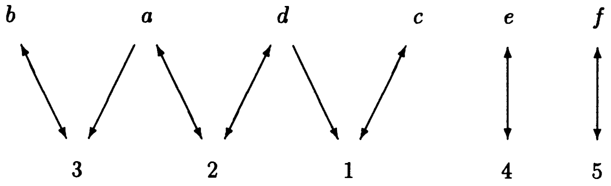


Abbildung 4.5. Man erkennt fünf 1-erzeugte Teilkontexte: einen zu jedem Gegenstand.

Wir wenden abschließend die entwickelte Theorie auf das zu Beginn gegebene Beispiel (Abbildung 4.1) an. Eine Darstellung des Verbandes als Begriffsverband ist in Abbildung 4.4 angegeben. Die Pfeilrelationen des Kontextes sind in Abbildung 4.5 als Graph dargestellt. Man liest ab, daß es genau fünf 1-erzeugte Teilkontexte gibt. Es gibt im wesentlichen nur eine subdirekte Zerlegung dieses Verbandes in subdirekt irreduzible Faktoren, die zugehörigen Teilkontexte werden von den Gegenständen 2, 4 und 5 erzeugt. Man kann noch den vom Gegenstand 1 oder den von 3 erzeugten Teilkontext hinzunehmen; diese Teilkontexte sind aber in dem von 2 erzeugten enthalten und deshalb entbehrlich.

Die in Abbildung 4.2 angegebene subdirekte Zerlegung entspricht den beiden Teilkontexten $(\{1,2,3\},\{a,b,c,d\})$ und $(\{1,4,5\},\{c,e,f\})$. Man erkennt, daß der zweite Faktor kleiner gewählt werden kann: der Gegenstand 1 ist überflüssig, der zweite Teilkontext kann durch $(\{4,5\},\{e,f\})$ ersetzt werden. Abbildung 4.6 zeigt die zugehörige Kongruenz, sie kann die zweite Kongruenz in Abbildung 4.2 ersetzen. Der Faktor nach dieser Kongruenz ist dreielementig.

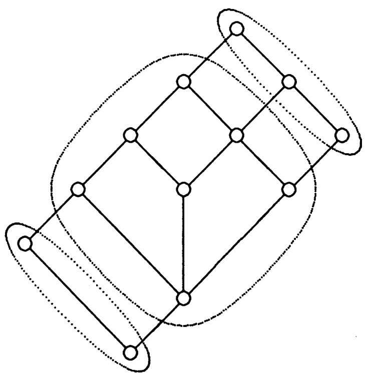


Abbildung 4.6. Die zweite Kongruenz in der subdirekten Zerlegung aus Abbildung 4.2 kann gröber gewählt werden.

4.2 Atlas-Zerlegungen

Eine Landkarte, die ein großes Areal in einem großen Maßstab abbilden soll, wird zwangsläufig unhandlich. Man behilft sich, indem man sie in einen Atlas zerlegt, also eine Sammlung handhabbarer Teilkarten, die das gewünschte Gebiet überdecken und deren Beziehung untereinander durch eine Übersichtskarte und durch weitere Informationen angegeben ist.

Eine analoge Vorgehensweise für unhandlich große Verbände kann man mit Hilfe der Toleranzrelationen einführen. Nach Satz 14 (S. 122) liefert eine Toleranzrelation auf einem vollständigen Verband $\boldsymbol{V}$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{V}$ in Intervalle, die selbst Elemente eines vollständigen Verbandes sind. $\boldsymbol{V}$ kann dann verstanden werden als konstruiert aus einer Familie vollständiger Verbände, deren Indizes wiederum einen vollständigen Verband bilden. Die Rolle der Teilkarten im Atlas übernehmen also die Blöcke der Toleranz, und als „Übersichtskarte" fungiert der Faktorverband.

Ganz so einfach wie im Fall der Landkarten ist es allerdings bei den Toleranzen nicht, die Vernetzung der Teilkarten anzugeben. Im allgemeinen Fall geschieht dies durch eine Familie von adjungierten Abbildungspaaren. Einfacher wird es im Fall verklebter Toleranzen: dann ergeben sich diese Abbildungen von selbst.

Definition 58. Q sei ein vollständiger Verband, und für jedes Element $q \in Q$ sei $\boldsymbol{V}_q$ ebenfalls ein vollständiger Verband. Für jedes Paar $q \leq r$ in Q seien

$$\varphi_q^r : \boldsymbol{V}_q \to \boldsymbol{V}_r \quad \text{und} \quad \psi_q^r : \boldsymbol{V}_r \to \boldsymbol{V}_q$$

Abbildungen. Man nennt eine solche Familie

$$(\boldsymbol{V}_q \mid q \in Q)$$

einen **Q-Atlas**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

0. $\boldsymbol{V}_q \subseteq \boldsymbol{V}_r \Rightarrow q = r$.
1. $\boldsymbol{V}_q \cap \boldsymbol{V}_r$ ist ein Ordnungsfilter von V_q und ein Ordnungsideal von $\boldsymbol{V}_r$, falls $q \leq r$.
2. $\{q \in Q \mid x \in \boldsymbol{V}_q\}$ ist ein Intervall $[x_{\min}, x_{\max}]$ in Q für jedes $x \in \bigcup_{q \in Q} \boldsymbol{V}_q$.
3. $\varphi_q^q x = x = \psi_q^q x$ für alle $x \in \boldsymbol{V}_q$.
4. $\varphi_q^r x \leq y$ gilt genau dann in $\boldsymbol{V}_r$, wenn $x \leq \psi_q^r y$ in $\boldsymbol{V}_q$ gilt.
5. $\varphi_r^s \varphi_q^r = \varphi_q^r$ und $\psi_q^r \psi_r^s = \psi_q^r$.
6. $\varphi_q^r x = \varphi_{q \vee s}^{r \vee s} x$ für alle $x \in \boldsymbol{V}_q \cap \boldsymbol{V}_{q \vee s}$ und $\psi_s^t = \psi_{s \wedge r}^{t \wedge r}$ für alle $y \in \boldsymbol{V}_t \cap \boldsymbol{V}_{t \wedge r}$.

Die **Summe** des Q-Atlas wird definiert als das Paar

$$\left(\bigcup_{q \in Q} \boldsymbol{V}_q, \sqsubseteq \right),$$

wobei
$$x \sqsubseteq y :\Longleftrightarrow x_{\min} \leq y_{\min} \text{ und } \varphi_{x_{\min}}^{y_{\min}} x \leq y$$
für alle $x, y \in \bigcup_{q \in Q} \boldsymbol{V}_q$. ◊

Die Bedingung (4) besagt, daß für $q \leq r$ die beiden Abbildungen φ_q^r und ψ_q^r jeweils zueinander *adjungiert* in Sinne von Hilfssatz 9 (S. 15) sind, wie man leicht anhand der Hilfssätze 4 und 6 erkennt. φ_q^r ist also $\bigvee$-erhaltend und ψ_q^r ist $\bigwedge$-erhaltend. Bezeichnet man die Grenzelemente von $\boldsymbol{V}_t$ mit 0_t bzw. 1_t, so hat man insbesondere $\varphi_q^r 0_q = 0_r$ und $\psi_q^r 1_r = 1_q$.

Hilfssatz 63.
$$x_{\min} \leq y_{\min} \quad \textit{und} \quad \varphi_{x_{\min}}^{y_{\min}} x \leq y$$
ist äquivalent zu
$$x_{\max} \leq y_{\max} \quad \textit{und} \quad x \leq \psi_{x_{\max}}^{y_{\max}} y.$$

Beweis. Sei $x_{\min} \leq y_{\min}$ und $\varphi_{x_{\min}}^{y_{\min}} x \leq y$. Benutzt werden im weiteren die Abkürzungen
$$q := x_{\min}, \quad r := y_{\min}, \quad s := x_{\max}, \quad t := y_{\max}.$$
Mit (6) erhält man
$$y \geq \varphi_q^r x = \varphi_s^{r \vee s} x.$$
$\varphi_q^r x$ ist also ein Element von $\boldsymbol{V}_r \cap \boldsymbol{V}_{r \vee s}$, und nach (1) folgt $y \in \boldsymbol{V}_{r \vee s}$, also $s \leq t$. Weil $r \geq x_{\min}$ ist, gilt $s \wedge r \in [x_{\min}, x_{\max}]$ und nach (2) folgt $x \in \boldsymbol{V}_{s \wedge r}$. Mit (6) und (3) erhält man daraus
$$\varphi_q^{s \wedge r} x = x.$$
Damit folgt
$$\varphi_{s \wedge r}^r x = \varphi_{s \wedge r}^r \varphi_q^{s \wedge r} x = \varphi_q^r x \leq y$$
wegen (5). Mit (4) und (6) ergibt sich
$$x \leq \psi_{s \wedge r}^r y = \psi_s^t y.$$
Die Gegenrichtung der Äquivalenz ergibt sich dual. □

Satz 19. *Die Summe eines Q-Atlas ist ein vollständiger Verband* $\boldsymbol{V}$, *in dem die Infima und Suprema wie folgt beschreibbar sind:*
$$\bigsqcup_{t \in T} x_t = \bigvee_{t \in T} \varphi_{q_t}^r x_t \quad \textit{und} \quad \bigsqcap_{t \in T} x_t = \bigwedge_{t \in T} \psi_s^{q_t} x_t,$$
wobei $x_t \in \boldsymbol{V}_{q_t}$, $r := \bigvee_{t \in T} q_t$ *und* $s := \bigwedge_{t \in T} q_t$. *Die vollständigen Verbände* $\boldsymbol{V}_q$, $q \in Q$, *sind genau die Blöcke einer vollständigen Toleranzrelation* Θ *von* $\boldsymbol{V}$, *und* $q \mapsto \boldsymbol{V}_q$ *beschreibt einen Isomorphismus von* Q *auf* $\boldsymbol{V}/Q$; *weiterhin ist*

$$\varphi_q^r = x \sqcup 0_r \textit{ für alle } x \in \boldsymbol{V}_q$$

und

$$\psi_q^r y = y \sqcap 1_q \textit{ für alle } y \in \boldsymbol{V}_r.$$

Auf diese Weise erhält man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den vollständigen Toleranzrelationen auf einem vollständigen Verband und den Darstellungen dieses Verbandes als Summe eines Q-Atlas.

Beweis. Ohne Schwierigkeiten weist man nach, daß $\sqsubseteq$ eine Ordnung ist, die sogar auf jedem der $\boldsymbol{V}_q$ mit der dort gegebenen Ordnung übereinstimmt. Weiterhin beweisen wir, daß aus $\varphi_q^r x = y$ stets $x \sqsubseteq y$ folgt: Nach (6) erhält man zunächst $\varphi_{x_{\max}}^{r \vee x_{\max}} x = y$ und damit $x_{\max} \leq y_{\max}$. Mit

$$\varphi_{r \vee x_{\max}}^{y_{\max}} y = \varphi_{y_{\max}}^{y_{\max}} y = y$$

bekommt man sogar $\varphi_{x_{\max}}^{y_{\max}} x = y$ und wegen (4) $x \leq \psi_{x_{\max}}^{y_{\max}} y$. Folglich gilt $x \sqsubseteq y$ nach Hilfssatz 63. Dual schließen wir, daß auch $x = \psi_q^r y$ stets $x \sqsubseteq y$ nach sich zieht.

Wir zeigen nun, daß das Supremum die im Satz angegebene Form hat: Sei $x_t \in \boldsymbol{V}_{q_t}$ und $x_t \sqsubseteq y$ für $t \in T$. Nach Hilfssatz 63 und (2) erhält man $y \in \boldsymbol{V}_{y_{\min} \vee q_t}$ für alle $t \in T$ und damit $y \in \boldsymbol{V}_{y_{\min} \vee r}$ für $r := \bigvee_{t \in T} q_t$. Aus $\varphi_{x_{\min}}^{y_{\min}} x_t \leq y$ folgt deshalb $\varphi_{q_t}^{y_{\min} \vee q_t} x_t \leq y$ wegen (6) und

$$\varphi_{q_t}^r \sqsubseteq \varphi_{q_t}^{y_{\min} \vee r} x_t = \varphi_{y_{\min} \vee q_t}^{y_{\min} \vee r} \varphi_{q_t}^{y_{\min} \vee q_t} x_t \sqsubseteq \varphi_{y_{\min} \vee q_t}^{y_{\min} \vee r} y = y$$

wegen (5), (6) und (3). Damit ist $\bigvee_{t \in T} \varphi_{q_t}^r x_t \sqsubseteq y$ gezeigt. Da $\bigvee_{t \in T} \varphi_{q_t}^r x_t$ eine obere Schranke der x_t, $t \in T$, ist, ist $\bigvee_{t \in T} \varphi_{q_t}^r x_t$ das Supremum der x_t, $t \in T$, in $(V, \sqsubseteq)$. Wegen Hilfssatz 63 liefert der duale Beweis die Gleichung für das Infimum. Somit ist nachgewiesen, daß die Summe eines Q-Atlas stets ein vollständiger Verband ist.

Für $x, y \in \boldsymbol{V}$ sei nun

$$x \Theta y :\Longleftrightarrow x, y \in \boldsymbol{V}_q \text{ für mindestes ein } q \in Q.$$

Die bewiesene Beschreibung der Suprema und Infima liefert sofort, daß Θ eine vollständige Toleranzrelation von $\boldsymbol{V}$ ist. Man kann Hilfssatz 55 (S. 121) benutzen, um nachzuweisen, daß die $\boldsymbol{V}_q$ gerade die Blöcke von Θ sind, hat aber dazu die Maximalität der $\boldsymbol{V}_q$ nachzuweisen. Sei deshalb $q \in Q$ und y ein Element mit

$$x \Theta y \quad \text{für alle } x \in \boldsymbol{V}_q.$$

Dann gilt insbesondere $y \Theta 0_q$, woraus $\{0_q, y\} \subseteq \boldsymbol{V}_r$ für ein $r \in Q$ und wegen $0_r \leq 0_q$ dann auch $r \leq q$ folgt. Ebenso erhält man aus $y \Theta 1_q$ ein $s \in Q$ mit $y \in \boldsymbol{V}_s$ und $s \geq q$. Zusammen hat man $q \in [y_{\min}, y_{\max}]$ und nach (2) somit $y \in \boldsymbol{V}_q$, was zusammen mit (0) die Behauptung ergibt.

Offenbar beschreibt $q \mapsto \boldsymbol{V}_q$ einen Isomorphismus von Q auf $\boldsymbol{V}/\Theta$. Für $q \leq r$, $x \in \boldsymbol{V}_q$ und $y \in \boldsymbol{V}_r$ gilt

$$x \sqcup 0_r = \varphi_q^r x \vee \varphi_r^r 0_r = \varphi_q^r x$$

und dual $y \sqcap 1_q = \psi_q^r y$. Definiert man für eine beliebige vollständige Toleranzrelation Ξ zwischen ihren Blöcken Morphismen durch diese Gleichungen, dann erhält man einen $\boldsymbol{V}/\Xi$-Atlas, dessen Summe wieder $\boldsymbol{V}$ ist. Das zeigt die behauptete eineindeutige Zuordnung. □

Die Bedingungen vereinfachen sich im Fall von Toleranzen mit überlappenden Nachbarschaften.

Definition 59. Eine vollständige Toleranzrelation Θ eines Verbandes $\boldsymbol{V}$ hat **überlappende Nachbarschaften**, wenn gilt

$$B_1 \prec B_2 \text{ in } \boldsymbol{V}/\Theta \Rightarrow B_1 \cap B_2 \neq \emptyset.$$

$\Sigma(\boldsymbol{V})$ bezeichne die kleinste Toleranzrelation, die alle Paare (x, y) mit $x \prec y$ in $\boldsymbol{V}$ enthält.

Im Falle doppelt fundierter Verbände nennt man eine Toleranz mit überlappenden Nachbarschaften **verklebt**, und $\Sigma(\boldsymbol{V})$ wird die **Skelett-Toleranz** genannt. Der Faktorverband $\boldsymbol{V}/\Sigma(\boldsymbol{V})$ heißt dann das **Skelett** von $\boldsymbol{V}$. ◊

Der Durchschnitt beliebig vieler Toleranzrelationen ist wieder Toleranzrelation, $\Sigma(\boldsymbol{V})$ ist also wohldefiniert.

Satz 20. *$\Sigma(\boldsymbol{V})$ ist die kleinste Toleranzrelation von $\boldsymbol{V}$ mit überlappenden Nachbarschaften. Insbesondere ist die Skelett-Toleranz die kleinste verklebte Toleranz.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $\Sigma(\boldsymbol{V})$ überlappende Nachbarschaften hat. Seien also $B_1 =: [a, b]$ und $B_2 =: [c, d]$ Blöcke von $\Sigma(\boldsymbol{V})$ mit $B_1 \prec B_2$. Wir führen die Annahme $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ zum Widerspruch. Daraus würde nämlich $b < b \vee c$ folgen, und aus $b < x \leq d$ allgemein $B_1 = [b]_{\Sigma(V)} < [x]_{\Sigma(V)} \leq [d]_{\Sigma(V)} = B_2$, wegen $B_1 \prec B_2$ also $[x]_{\Sigma(V)} = B_2$ und damit $x \geq c$. Aus diesem Grunde ist $b \vee c = \bigwedge\{x \mid b < x \leq d\}$, woraus wir $b \prec b \vee c$ und folglich $(b, b \vee c) \in \Sigma(V)$ schließen können. Wegen $(b \vee c)_{\Sigma(V)} = c$ ergibt dies $c \leq b \leq d$, also den angestrebten Widerspruch $b \in B_2$.

Zu zeigen ist noch, daß $\Sigma(\boldsymbol{V})$ die kleinste unter den Toleranzrelationen mit überlappenden Nachbarschaften ist. Sei also Θ irgendeine solche Toleranzrelation und $x \prec y$ ein Paar benachbarter Elemente von $\boldsymbol{V}$, wir haben zu zeigen, daß es einen Block von Θ gibt, der x und y enthält. Das ist sicher der Fall, wenn $x \in [y]_\Theta$ ist, wir dürfen also $x \notin [y]_\Theta$ und insbesondere $[x]_\Theta < [y]_\Theta$ annehmen. Nun betrachten wir irgendeinen Block $[u, v]$ mit $[x]_\Theta \leq [u, v] < [y]_\Theta$. Aus $y \leq v$ würde wegen $u < y_\Theta \leq y$ sofort $y \in [u, v]$ folgen, was $y\Theta u$ und damit einen Widerspruch zu $u < y_\Theta$ nach sich zieht. Also ist $y \not\leq v$, und wegen $x = (v \wedge y)\ \Theta\ (v \wedge y^\Theta) = v$ erhalten wir $x\Theta v$ und deshalb $x \in [u, v]$. Jeder Block zwischen $[x]_\Theta$ und $[y]_\Theta$ enthält also x, und weil die unteren Blockgrenzen gegen Suprema abgeschlossen sind, gilt dies auch für

$$B_x := \bigvee\{B \in \mathbf{V}/\Theta \mid [x]_\Theta \leq B < [y]_\Theta\}.$$

Dieser Block muß also ein unterer Nachbar von $[y]_\Theta$ sein, und weil Θ überlappende Nachbarschaften hat, folgt $B_x \cap [y]_\Theta \neq \emptyset$, also $\bigvee B_x \in [y]_\Theta$. Wenn $y \notin B_x$ ist, dann ist $y \wedge \bigvee B_x = x$ und damit $x \in [y]_\Theta$. Widerspruch zu $[x]_\Theta < [y]_\Theta$! $\square$

Die zugehörige Blockrelation $\beta(\Sigma(\mathbf{V}))$ läßt sich einfach beschreiben.

Satz 21. *Es sei (G, M, I) ein doppelt fundierter Kontext und*

$$\Sigma := \Sigma(\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I))$$

die Skelett-Toleranz. Für die zugehörige Blockrelation $J := \beta(\Sigma)$ gilt dann:

a) J ist die kleinste Blockrelation von (G, M, I), die alle Paare (g, m) mit $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$ enthält.
b) J enthält alle Paare (g, m) mit $g \swarrow m$ oder $g \nearrow m$.

Beweis. b) Aus $g \swarrow m$ folgt $\gamma g \wedge \mu m = (\gamma g)_* \prec \gamma g$, also $(g, m) \in J$ nach der Definition von β. Dual zeigt man, daß J auch alle Paare (g, m) mit $g \nearrow m$ enthält.

a) Es sei K eine Blockrelation, die alle Paare (g, m) mit $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$ enthält, weiter seien (A, B) sowie (C, D) Begriffe mit $(A, B) \prec (C, D)$. Wir wollen zeigen, daß (A, B) und (C, D) in der zu K gehörenden Toleranzrelation $\beta^{-1}(K)$ stehen. Dazu betrachten wir einen Gegenstand $g \in C$ sowie ein Merkmal $m \in B$ mit $g \not{I} m$. Da der Kontext doppelt fundiert ist, finden wir einen Gegenstand h mit $h' \supseteq g'$ und $h \swarrow m$, also insbesondere $h \not{I} m$. Erneutes Ausnutzen der Doppelfundiertheit liefert ein Merkmal n mit $n' \supseteq m'$ und $h \nearrow n$ und damit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$ (denn $\mu n \geq \mu m \geq (\gamma h)_*$). Folglich ist $(h, n) \in K$, was gleichbedeutend ist zu $(\gamma h, \gamma h \wedge \mu n) \in \beta^{-1}(K)$, oder kürzer $(\gamma h, (\gamma h)_*) \in \beta^{-1}(K)$. Daraus schließen wir nun $((A, B) \vee \gamma h, (A, B) \vee (\gamma h)_*) \in \beta^{-1}(K)$, also $((C, D), (A, B)) \in \beta^{-1}(K)$, wie behauptet. $\square$

Nun konzentrieren wir uns auf den Fall verklebter Toleranzen, setzen also insbesondere doppelt fundierte Verbände voraus. Wir beschreiben das System der Blöcke einer verklebten Toleranz abstrakt:

Definition 60. Es sei $\mathbf{V}_q$, $q \in Q$, eine Familie doppelt fundierter vollständiger Verbände. Die Indexmenge Q sei ein Verband endlicher Länge. Wir nennen $(\mathbf{V}_q \mid q \in Q)$ einen **Q-Atlas mit überlappenden Nachbarkarten**, wenn für je zwei Elemente $q, r \in Q$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

0. $\mathbf{V}_q \subseteq \mathbf{V}_r \Rightarrow q = r$.
1. Wenn $q \leq r$ gilt, dann ist $\mathbf{V}_q \cap \mathbf{V}_r$ ein Ordnungsfilter in $\mathbf{V}_q$ und ein Ordnungsideal in $\mathbf{V}_r$.
2. Wenn q ein unterer Nachbar von r ist, dann ist $\mathbf{V}_q \cap \mathbf{V}_r \neq \emptyset$.

3. Die Ordnungen von V_q und V_r stimmen auf dem Durchschnitt $V_q \cap V_r$ überein.
4. $V_q \cap V_r \subseteq V_{q \wedge r} \cap V_{q \vee r}$.
5. $q \leq r \leq s \Rightarrow V_q \cap V_s \subseteq V_r$

$\Diamond$

Dies ist mit Definition 58 kompatibel. Die dort geforderten Abbildungen ergeben sich nämlich im verklebten Fall ganz kanonisch, wie der folgende Hilfssatz zeigt:

Hilfssatz 64. *Ein Q-Atlas mit überlappenden Nachbarkarten ist ein Q-Atlas im Sinne von Definition 58, wenn man die Abbildungen φ_q^r und ψ_q^r folgendermaßen definiert:*

1. $\varphi_q^q\, x := \psi_q^q\, x := x$ *für alle* $x \in V_q$.

2. Für $q \prec r$ *sei*

$$\varphi_q^r\, x := x \vee 0_r \quad (\text{in } V_q),$$
$$\psi_q^r\, y := y \wedge 1_q \quad (\text{in } V_r);$$

3. für $q = q_0 \prec q_1 \prec \cdots \prec q_m = r$ *sei*

$$\varphi_q^r := \varphi_{q_{m-1}}^{q_m} \circ \cdots \circ \varphi_{q_0}^{q_1},$$
$$\psi_q^r := \psi_{q_0}^{q_1} \circ \cdots \circ \psi_{q_{m-1}}^{q_m}.$$

Beweis. Die Bedingungen 0) und 1) sind die gleichen wie in Definition 58. Bedingung 2) von Definition 58 ergibt sich folgendermaßen: Die Menge

$$\{q \in Q \mid x \in V_q\}$$

ist nach 5) konvex und nach 4) gegen $\vee$ und $\wedge$ abgeschlossen, also ein Intervall in dem Verband endlicher Länge Q.

Die übrigen Bedingungen beziehen sich auf die Abbildungen φ_q^r und ψ_q^r. Zunächst ist zu zeigen, daß die Abbildungen auf die angegebene Weise für alle $q \leq r$ wohldefiniert sind. Im Falle $q \prec r$ ist $V_q \cap V_r$ nach 2) nicht leer und mit 1) deshalb $0_r \in V_q$. Das Supremum $x \vee 0_r$ kann also für alle $x \in V_q$ innerhalb von V_q gebildet werden und liegt nach 1) in V_r.

Da Q von endlicher Länge ist, gibt es zu je zwei Elementen $q < r$ in Q mindestens eine, möglicherweise aber mehrere Ketten benachbarter Elemente zwischen q und r. Wir haben zu zeigen, daß die Definition von φ_q^r von der Wahl einer solchen Kette unabhängig ist (der Beweis für ψ_q^r verläuft dann analog). Seien also $q_0 \prec q_1 \prec \cdots \prec q_m$ und $r_0 \prec r_1 \prec \cdots \prec r_n$ Ketten mit $q_0 = r_0$ und $q_m = r_n$. Der Beweis läuft per Induktion über die Länge des Intervalls $[q_0, q_m]$.

1. Fall: $q_1 \vee r_1 = q_m$.

Weil die kleinsten Elemente von V_{q_1} und V_{r_1} zu V_{q_0} gehören, kann das Supremum $0_{q_1} \vee 0_{r_1}$ in V_{q_0} gebildet werden. Dieses Element gehört sowohl zu

$\boldsymbol{V}_{q_1}$ als auch zu $\boldsymbol{V}_{r_1}$; diese beiden Verbände sind also nicht disjunkt. Wegen 4) hat man

$$\boldsymbol{V}_{q_1} \cap \boldsymbol{V}_{r_1} \subseteq \boldsymbol{V}_{q_0} \cap \boldsymbol{V}_{q_m},$$

also sind auch $\boldsymbol{V}_{q_0}$ und $\boldsymbol{V}_{q_m}$ nicht disjunkt, und 0_{q_m} muß ein Element von $\boldsymbol{V}_{q_0}$ sein. Wegen 5) gehört deshalb 0_{q_m} zu allen Verbänden $\boldsymbol{V}_{q_i}$, $i \in \{0, \ldots, m\}$, und zu allen Verbänden $\boldsymbol{V}_{r_j}$, $j \in \{0, \ldots, n\}$. Die Mengen $\boldsymbol{V}_{q_0} \cap \boldsymbol{V}_{q_i}$ bzw. $\boldsymbol{V}_{q_0} \cap \boldsymbol{V}_{r_j}$ sind deshalb sämtlich nichtleer, und da sie nach 1) Ordnungsideale sind, müssen die Elemente 0_{q_i} bzw. 0_{r_j} sämtlich zu $\boldsymbol{V}_{q_0}$ gehören.

Für $x \in \boldsymbol{V}_{q_0}$ folgt damit

$$(\varphi_{q_{m-1}}^{q_m} \circ \cdots \circ \varphi_{q_0}^{q_1})x = (\ldots((x \vee 0_{q_1}) \vee 0_{q_2}) \vee \ldots) \vee 0_{q_m},$$

und alle diese Suprema werden in $\boldsymbol{V}_{q_0}$ gebildet. Deshalb gilt

$$\varphi_{q_0}^{q_m}\, x = x \vee 0_{q_1} \vee \cdots \vee 0_{q_m} = x \vee 0_{q_m}$$

und entsprechend

$$\varphi_{r_0}^{r_n}\, x = x \vee 0_{r_1} \vee \cdots \vee 0_{r_n} = x \vee 0_{r_n},$$

woraus wegen $q_m = r_n$ das gewünschte Resultat folgt.
2. Fall: $q_1 \vee r_1 < q_m$. Sei

$$\begin{aligned} q_1 = s_1 \prec s_2 \prec \cdots \prec s_j &= q_1 \vee r_1 \\ r_1 = t_1 \prec t_2 \prec \cdots \prec t_k &= q_1 \vee r_1 \end{aligned}$$

und $s_j \prec s_{j+1} \prec \cdots \prec s_l = q_m$ sowie $t_{k+i} = s_{j+i}$ für $i \in \{1, \ldots, l-j\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann

$$\varphi_{s_{j-1}}^{s_j} \circ \cdots \circ \varphi_{s_1}^{s_2} \circ \varphi_{q_0}^{q_1} = \varphi_{t_{k-1}}^{t_k} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{t_2} \circ \varphi_{r_0}^{r_1},$$

$$\varphi_{q_{m-1}}^{q_m} \circ \cdots \circ \varphi_{q_1}^{q_2} = \varphi_{s_{l-1}}^{s_l} \circ \cdots \circ \varphi_{s_1}^{s_2}$$

und

$$\varphi_{r_{n-1}}^{r_n} \circ \cdots \circ \varphi_{r_1}^{r_2} = \varphi_{t_{l-j-1}}^{t_{l-j}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{t_2}.$$

Es folgt nun durch Einsetzen

$$\varphi_{q_{m-1}}^{q_m} \circ \cdots \circ \varphi_{q_0}^{q_1} = \varphi_{r_{n-1}}^{r_n} \circ \cdots \circ \varphi_{r_0}^{r_1}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Definition von φ_q^r unabhängig von der Wahl einer kette ist.

Weiter ist (4) zu zeigen, d.h. daß die Abbildungspaare φ_q^r, ψ_q^r, $q \leq r$, Adjunktionen sind. Ist $q \prec r$, dann folgt dies unmittelbar aus der Definition, denn für $x \in \boldsymbol{V}_q$, $y \in \boldsymbol{V}_r$ hat man

$$\varphi_q^r\, x \leq y \iff x \vee 0_r \leq y \iff x \leq y$$

und dual

$$x \leq \psi_q^r y \iff x \leq y \wedge 1_q \iff x \leq y.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \varphi_{q_{m-1}}^{q_m} \circ \cdots \circ \varphi_{q_0}^{q_1} x \leq y \\
\iff \quad & \varphi_{q_{m-2}}^{q_{m-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{q_0}^{q_1} x \leq \psi_{q_{m-1}}^{q_m} y \\
\iff \quad & \vdots \\
\iff \quad & x \leq \psi_{q_0}^{q_1} \circ \cdots \circ \psi_{q_{m-1}}^{q_m} y.
\end{aligned}$$

Die Bedingung (5) folgt unmittelbar aus den Teilen (1) und (3) der Definition. Zu zeigen bleibt die Bedingung 6) von Definition 58. Dazu betrachtet man zunächst den Fall $q \prec r$, für den aus $x \in \boldsymbol{V}_q \cap \boldsymbol{V}_{q \vee s}$ folgt:

$$\varphi_q^r x = x \vee 0_r = x \vee 0_r \vee 0_{q \vee s} = x \vee 0_{r \vee s} = \varphi_{q \vee s}^{r \vee s} x;$$

falls nicht $q \vee s \prec r \vee s$ gilt, ergibt sich die letzte Gleichheit wie im vorangegangenen für $\varphi_{q_0}^{q_m}$. Der allgemeine Fall ergibt sich nun durch Hintereinanderausführung entlang einer Kette von Nachbarschaften. □

Die **Summe** eines Q-Atlas mit überlappenden Nachbarkarten, gegeben durch $(\boldsymbol{V}_q \mid q \in Q)$, wird beschrieben durch

$$\left(\bigcup_{q \in Q} \boldsymbol{V}_q, \leq \right),$$

wobei $\leq$ die transitive Hülle der Vereinigung der Ordnungen auf den Summanden ist.

Satz 22. *Die Summe eines Q-Atlas mit überlappenden Nachbarkarten ist ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$, bei dem die Summanden $\boldsymbol{V}_q$, $q \in Q$, genau die Blöcke einer vollständigen Toleranzrelation Θ sind und $q \mapsto \boldsymbol{V}_q$ einen Isomorphismus von Q auf $\boldsymbol{V}/Q$ beschreibt.*

Umgekehrt bilden in einem vollständigen Verband $\boldsymbol{V}$ die Blöcke einer Toleranz Θ mit überlappenden Nachbarschaften, für die $Q := \boldsymbol{V}/\Theta$ von endlicher Länge ist, stets einen Q-Atlas mit überlappenden Nachbarkarten, der $\boldsymbol{V}$ zur Summe hat.

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, daß die Ordnung $\sqsubseteq$ des durch Hilfssatz 64 beschriebenen Q-Atlas gleich der transitiven Hülle $\leq$ der Vereinigung der Ordnungen auf den Summanden ist. Nach der Definition stimmt $\sqsubseteq$ auf den Summanden $\boldsymbol{V}_q$ mit deren Ordnungen überein, weshalb $x \leq y$ stets $x \sqsubseteq y$ zur Folge hat. Gilt umgekehrt $x \sqsubseteq y$, d.h. $x_{\min} \leq y_{\min}$ und $\varphi_{x_{\min}}^{y_{\min}} x \leq y$, dann folgt für

$$x_{\min} = q_0 \prec q_1 \prec \cdots \prec q_m = y_{\min}$$

wie beim Hilfssatz 64

$$\varphi_{x_{\min}}^{y_{\min}} x = (\ldots((x \vee 0_{q_1}) \vee 0_{q_2}) \vee \ldots) \vee 0_{q_m},$$

was $x \leq y$ ergibt. Damit ist

$$\left(\bigcup_{q\in Q} V_q, \leq\right) = \left(\bigcup_{q\in Q} V_q, \sqsubseteq\right)$$

nachgewiesen. Hilfssatz 64 liefert deshalb die Behauptungen des ersten Teiles von Satz 19. Weiterhin erhält man, daß in einem vollständigen Verband $\boldsymbol{V}$ die Blöcke einer verklebten Toleranz Θ einen Q-Atlas bilden. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß dieser Q-Atlas sogar ein Q-Atlas mit überlappenden Nachbarkarten ist. Die Bedingungen 0), 1), 2) und 3) von Definition 60 sind offenbar erfüllt. Aus $0_q \leq x \leq 1_q$ und $0_r \leq x \leq 1_r$ folgt

$$0_{q\vee r} = 0_q \vee 0_r \leq x \leq 1_q \wedge 1_r = 1_{q\wedge r},$$

was 4) nachweist. 5) sieht man daran, daß $q \leq r \leq s$ und $0_s \leq x \leq 1_q$ wegen $0_r \leq 0_s$ und $1_q \leq 1_r$ sofort $0_r \leq x \leq 1_r$ ergibt. □

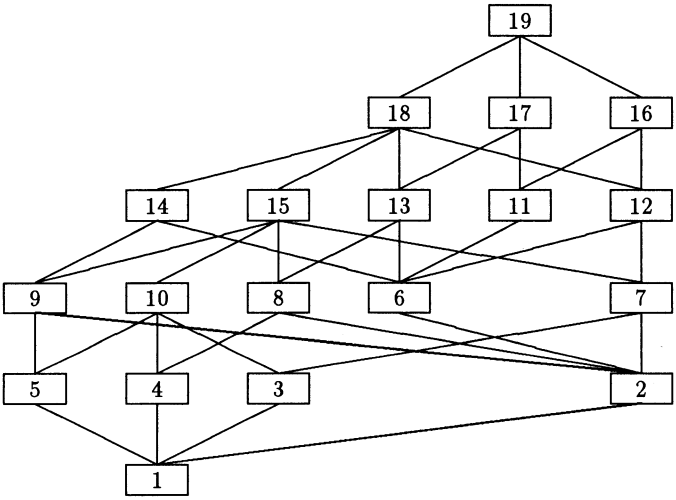


Abbildung 4.7. Computer-generiertes Verbandsdiagramm

Satz 22 kann ganz praktisch zur Diagrammdarstellung benutzt werden, sofern der darzustellende Verband eine nichttriviale Toleranz mit überlappenden Nachbarschaften besitzt. Dies überprüft man, indem man die Pfeilrelationen in den Kontext einträgt und die Relation

$$J := I \cup \swarrow \cup \nearrow$$

entsprechend den Bedingungen aus Definition 54 (S. 122) solange anreichert, bis eine Blockrelation vorliegt (nämlich $\beta(\Sigma)$). Die Blöcke („Karten") erhält

	10	14	15	16	17	18
2	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	×	×	×	×	×
3	×	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	×	×	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	×
4	×	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	×	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	×	×
5	×	×	×	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	×
6		×	$\swarrow\!\!\!\nearrow$	×	×	×
11		$\swarrow$		×	×	$\swarrow\!\!\!\nearrow$

Abbildung 4.8. Der Standardkontext zum Verband aus Abbildung 4.7

man nach Korollar 57 (S. 125) als Begriffsverbände von Teilkontexten. Von diesen werden Diagramme angefertigt. Die Überlappungen können auch bei reduzierter Bezeichnung der Einzelkarten abgelesen werden, denn jeder Begriff wird mit seinem richtigen Umfang und Inhalt angegeben. Nach Satz 22 ist durch diese Menge von Diagrammen der Verband eindeutig beschrieben. Die Stimmigkeit des Atlas kann anhand der Bedingungen aus Definition 60 überprüft werden.

Wir demonstrieren dies anhand eines Untergruppenverbandes, für den wir in Abbildung 4.7 ein computergeneriertes Diagramm angeben, welches aus einem Buch über orthomodulare Verbände stammt [93]. Der Standardkontext für diesen Verband (vergl. Seite 27) ist, samt Pfeilrelationen, in Abbildung 4.8 wiedergegeben. Eine kurze Überprüfung zeigt, daß $J := I \cup \swarrow \cup \nearrow$ bereits eine Blockrelation ist, also gleich $\beta(\Sigma)$.

Der Begriffsverband von (G, M, J) ist eine dreielementige Kette. Die zu den Blöcken der Relation gehörenden Teilkontexte sind mit ihren Begriffsverbänden in Abbildung 4.9 dargestellt. An dem in dieser Abbildung mittleren Verband erkennt man leicht, wie sich die Blöcke überlappen. Das kleinste Element dieses Blocks ist der Begriff mit dem Umfang $\{2\}$, diesen entdecken wir im unteren Verband auf der rechten Seite. Das größte Element des unteren Verbandes hat den Inhalt $\{15, 18\}$. Wir finden es im mittleren Verband ebenfalls leicht wieder. Dem unteren und dem mittleren Verband sind also die fünf Elemente des Intervalls

$$[(\{2\}, \{14, 15, 16, 17, 18\}), (\{2, 3, 4, 5\}, \{15, 18\})]$$

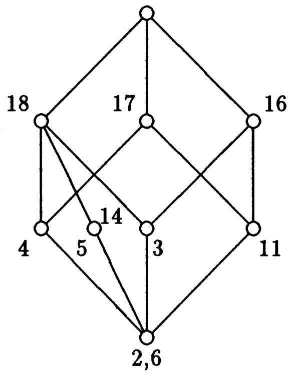
gemeinsam. Analog schneiden sich der mittlere und der obere Verband im Intervall

$$[\gamma 6, \mu 18],$$

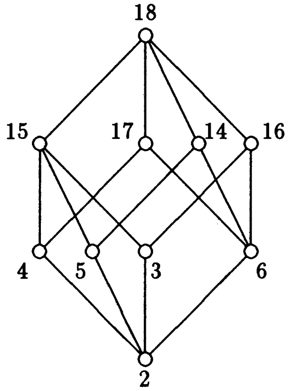
welches ebenfalls fünf Elemente hat.

Im vorliegenden Fall erweist es sich als besonders günstig, daß wir für die Überlappungsbereiche jeweils kongruente Diagramme gewählt haben. Dadurch wird es möglich, die einzelnen Teildiagramme zu überlagern (Abbildung 4.10) und so ein neues Diagramm für den Verband zu gewinnen (Abbildung 4.11), welches aufgrund seiner Entstehung die Struktur besonders gut wiedergibt.

	14	16	17	18
2	×	×	×	×
3		×		×
4			×	×
5	×			×
6	×	×	×	×
11		×	×	



	14	15	16	17	18
2	×	×	×	×	×
3		×	×		×
4		×		×	×
5	×	×			×
6	×		×	×	×



	10	14	15	16	17	18
2		×	×	×	×	×
3	×		×	×		×
4	×		×		×	×
5	×	×	×			×

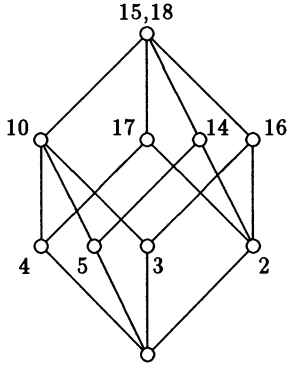


Abbildung 4.9. Die Blöcke der Skelett-Toleranz

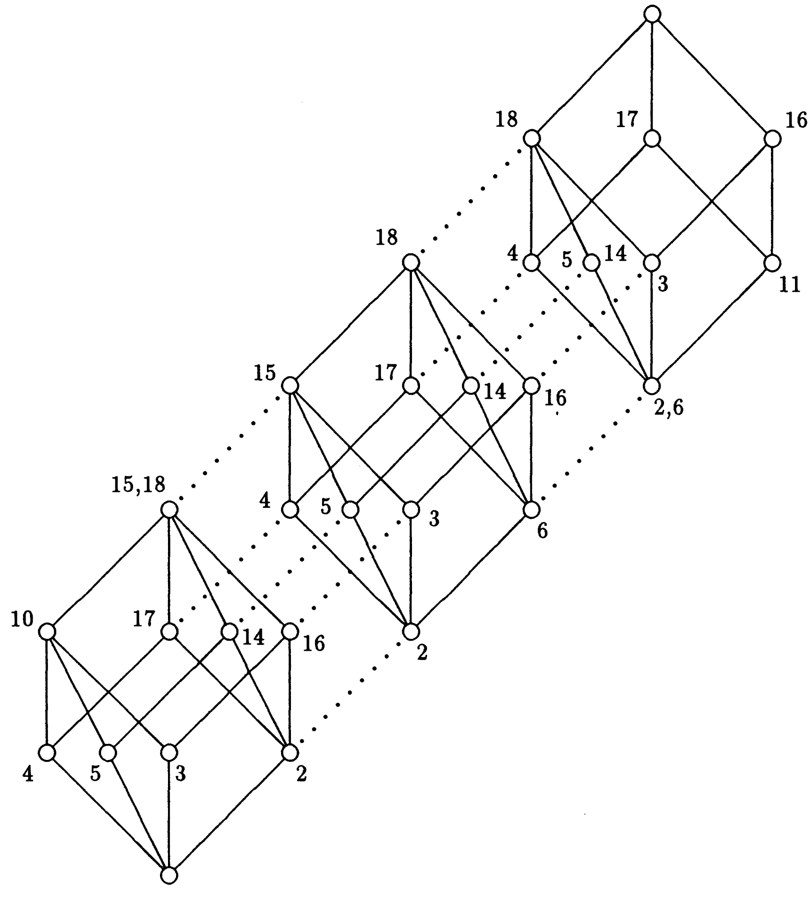


Abbildung 4.10. Atlas der Teildiagramme. Die gepunkteten Linien verbinden gleiche Begriffe in den verschiedenen Teildiagrammen. Wird längs dieser Linien zusammengezogen, so entsteht das Diagramm in Abbildung 4.11.

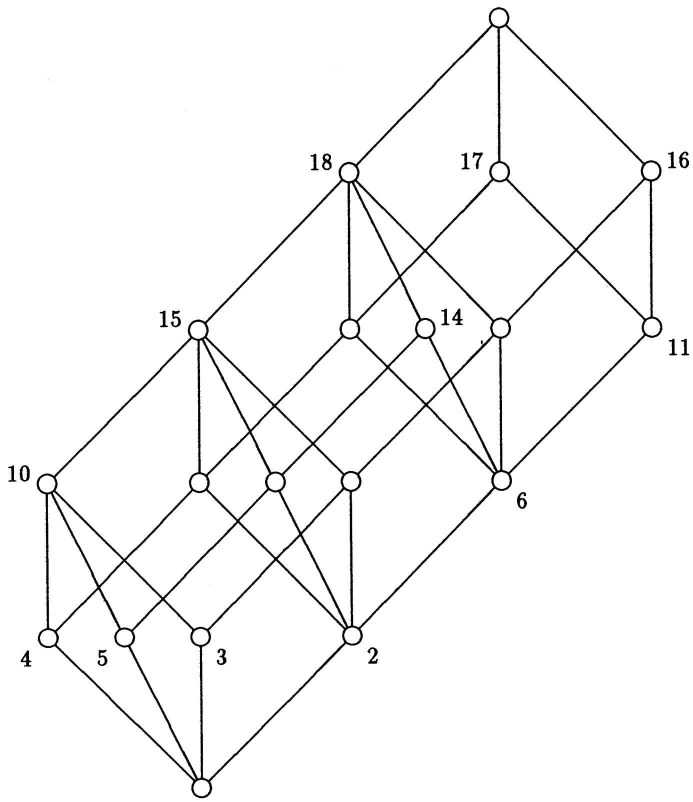


Abbildung 4.11. Der gleiche Verband wie in Abbildung 4.7, aber mit einem Diagramm, das die Struktur besser wiedergibt.

4.3 Substitution

Bei der *Substitutionssumme* wird ein Kontext in einen anderen eingesetzt, und zwar an einer „leeren Zelle“, d.h. an einem nichtinzidenten Gegenstand-Merkmal-Paar. Man veranschaulicht sich die Konstruktion, indem man sich die betreffende Zeile und Spalte geeignet vervielfacht denkt, so daß Platz für den einzusetzenden Kontext entsteht. Bequemerweise setzen wir voraus, daß die beiden Kontexte disjunkt und nichtleer sind, und kommen so zu folgender Definition:

Definition 61. $\mathbb{K}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ und $\mathbb{K}_2 = (G_2, M_2, I_2)$ seien Kontexte und $(g, m) \notin I_1$ ein nichtinzidentes Gegenstand-Merkmal-Paar von $\mathbb{K}_1$. Wir setzen $G_2 \neq \emptyset \neq M_2$ und $(G_1 \setminus \{g\}) \cap G_2 = \emptyset = (M_1 \setminus \{m\}) \cap M_2$ voraus. Als die **Substitutionssumme** von $\mathbb{K}_1$ mit $\mathbb{K}_2$ über (g, m) bezeichnen wir den Kontext

$$\mathbb{K}_1(g, m)\mathbb{K}_2 := (G, M, I)$$

mit $G := (G_1 \setminus \{g\}) \dot{\cup} G_2$, $M := (M_1 \setminus \{m\}) \dot{\cup} M_2$ und

$$I := \{(h, n) \in I_1 \mid h \neq g, n \neq m\} \cup G_2 \times g^{I_1} \cup m^{I_1} \times M_2 \cup I_2.$$

Wir sprechen von einer **echten Substitutionssumme**, wenn $G_2^{I_2} = \emptyset = M_2^{I_2}$ gilt[3]. Dann ist g^{I_1} ein Inhalt und m^{I_1} ein Umfang von (G, M, I). Die zugehörigen Begriffe bezeichnen wir mit a und b. $\Diamond$

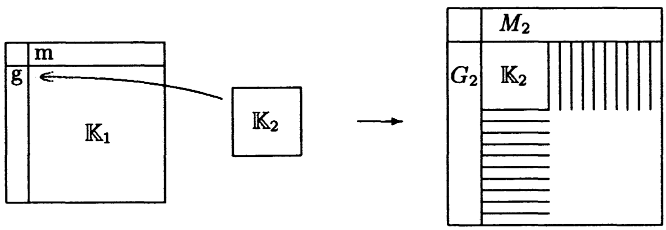


Abbildung 4.12. Bei der Substitutionssumme $\mathbb{K}_1(g, m)\mathbb{K}_2$ wird der Kontext $\mathbb{K}_2$ in „die leere Zelle“ (g, m) eingesetzt. Die Schraffuren im Ergebniskontext sollen andeuten, daß jeder Gegenstand $\notin G_2$ entweder mit allen oder mit keinem Merkmal aus M_2 inzident ist, und dual, daß alle Gegenstände aus G_2 die gleichen Inhalte bezüglich der Merkmale $\notin M_2$ haben.

Unmittelbar der Definition entnimmt man, daß die Substitutionssumme eingeschränkt assoziativ ist:

[3] Der Fall $\mathbb{K}_2 \cong (\{g\}, \{m\}, \emptyset)$, also $\mathbb{K}_1(g, m)\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1$ ist dabei zugelassen, und ebenso $\mathbb{K}_1 = (\{g\}, \{m\}, \emptyset)$. Im folgenden werden nur echte Substitutionssummen betrachtet.

Hilfssatz 65.

$$\mathbb{K}_1(g,m)(\mathbb{K}_2(h,n)\mathbb{K}_3) = (\mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2)(h,n)\mathbb{K}_3,$$

sofern $g \in G_1$, $m \in M_1$, $h \in G_2$, $n \in M_2$ *und* $(g,m) \notin I_1$, $(h,n) \notin I_2$. □

Die Substitutionssumme verallgemeinert mehrere bereits eingeführte Kontextoperationen. Kontextsumme, disjunkte Vereinigung und die Konstruktion von Seite 41, die zur vertikalen Summe der Begriffsverbände führt, lassen sich als Spezialfälle der Form

$$(\mathbb{K}_0(g,m)\mathbb{K}_1)(h,n)\mathbb{K}_2$$

gewinnen, wenn wir für $\mathbb{K}_0$ die Kontexte

$$\begin{array}{|c|cc|}\hline & m & n \\ \hline g & & \times \\ h & \times & \\ \hline\end{array}, \quad \begin{array}{|c|cc|}\hline & m & n \\ \hline g & & \\ h & & \\ \hline\end{array}, \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{|c|cc|}\hline & m & n \\ \hline g & & \times \\ h & & \\ \hline\end{array}$$

wählen, denn als Ergebnisse erhält man

$$\begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & \times \\ \hline \times & \mathbb{K}_2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & \mathbb{K}_2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|c} \mathbb{K}_1 & \times \\ \hline \emptyset & \mathbb{K}_2 \end{array}$$

Wir wollen untersuchen, wie der Begriffsverband der Substitutionssumme mit denen der Summanden zusammenhängt. Es zeigt sich, daß der Begriffsverband des zweiten Summanden mehrfach im Begriffsverband des ersten „aufgehängt“ ist, ähnlich wie die Besegelung eines Schiffes in der Takelung (siehe Abbildung 4.13).

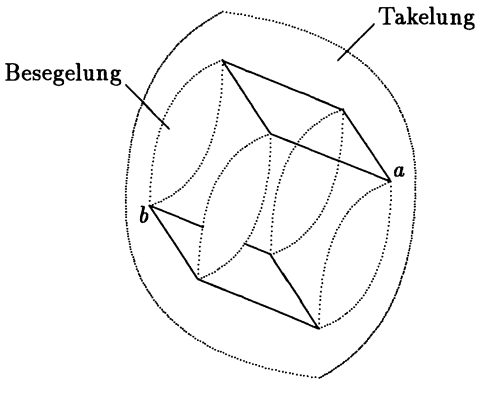


Abbildung 4.13. Besegelung und Takelung

Der erste Hilfssatz zeigt, daß wir $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ als Unterverband wiederfinden:

Hilfssatz 66. *Die* **Takelung** *einer echten Substitutionssumme*

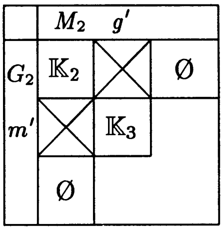
$$(G, M, I) = \mathbb{K}_1(g, m)\mathbb{K}_2,$$

definiert als

$$U := \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I \setminus I_2),$$

ist ein vollständiger Unterverband von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2)$, der isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ ist. U enthält insbesondere alle Begriffe, die $\geq a$ oder $\leq b$ sind.

Beweis. Hilfssatz 47 (S. 115) zeigt, daß $I \setminus I_2$ abgeschlossen ist. Der Kontext $(G, M, I \setminus I_2)$ ist bis auf Bereinigen identisch mit $\mathbb{K}_1$, die Isomorphie folgt also aus Satz 13 (S. 112). Ein Begriff $(A, B) \leq b$ erfüllt $A \subseteq m^{I_1}$ und deshalb $A \times B \cap I_2 = \emptyset$, woraus $(A, B) \in U$ folgt. □



Die übrigen Begriffe von $\mathbb{K} := (G, M, I)$, also diejenigen, die nicht zu $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I \setminus I_2)$ gehören, enthalten sämtlich „ein Kreuz aus I_2“ und liegen deshalb ganz in dem Teilkontext $(G_2 \cup m^{I_1}, M_2 \cup g^{I_1})$. Dieser Teilkontext ist nach der Definition von $\mathbb{K}$ die Summe von $\mathbb{K}_2$ und $\mathbb{K}_3 := (m^{I_1}, g^{I_1}, I_3 := I \cap (m^{I_1} \times g^{I_1}))$, der Begriffsverband dieses Teilkontextes ist also isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2) \times \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_3)$. Wir behaupten nicht, daß wir dadurch einen Unterverband erhalten, wissen aber nach Hilfssatz 32 (S. 99), daß wir eine Ordnungseinbettung dieses Begriffsverbandes in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ finden, indem wir jedem Begriff (A, B) von $\mathbb{K}_2 + \mathbb{K}_3$ den Begriff (A^{II}, A^I) von $\mathbb{K}$ zuordnen. Der genannte Hilfssatz schlägt noch eine zweite Ordnungseinbettung vor, nämlich $(A, B) \mapsto (B^I, B^{II})$, dies liefert aber im vorliegenden Fall die gleiche Abbildung, weil für jeden Begriff (A, B) von $\mathbb{K}_2 + \mathbb{K}_3$ gilt, daß $A^I = B$ oder $B^I = A$ ist. Das Bild bei dieser Abbildung bezeichnen wir mit P, und fassen zusammen:

Hilfssatz 67. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2 + \mathbb{K}_3) & \to & \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1(g, m)\mathbb{K}_2), \\ (A, B) & \mapsto & (A^{II}, A^I) \quad (= (B^I, B^{II})), \end{array}$$

ist eine Ordnungseinbettung, bei der der Begriff mit dem Umfang G_3 $(= m^{I_1})$ auf b und der mit dem Inhalt M_3 $(= g^{I_1})$ auf a abgebildet wird. Die Bildmenge P überdeckt alle Begriffe, die nicht zu U gehören. □

Wir nennen P die **Besegelung** der Substitutionssumme. Der folgende Satz zeigt, daß die beiden Teile, Takelung und Besegelung, die Struktur des Begriffsverbands einer Substitutionssumme bestimmen. Es ist allerdings noch anzugeben, wie U und P zusammengefügt sind. Bevor wir das tun, führen wir noch die zugehörige Verbandskonstruktion ein.

Definition 62. Für vollständige Verbände U und W, $|W| > 1$, und Elemente $a, b \in U$ mit $a \not\leq b$ definieren wir das **Substitutionsprodukt** $U(a,b)W$ von U und W über (a,b) als den Begriffsverband der (echten) Substitutionssumme

$$U(a,b)W := \underline{\mathfrak{B}}((U,U,\leq)(a,b)(W_0,W_1,\leq)).$$

Dabei ist $W_0 := W \setminus \{0_W\}$ und $W_1 := W \setminus \{1_W\}$. $\Diamond$

Das Substitutionsprodukt von U und W ist nach dieser Definition also der Begriffsverband des Kontextes (G, M, I) mit

$$\begin{aligned} G &= (U \setminus \{a\}) \cup (W \setminus \{0_W\}), \\ M &= (U \setminus \{b\}) \cup (W \setminus \{1_W\}), \end{aligned}$$

und

$$gIm \iff \begin{cases} g \leq m \text{ in } U, & \text{falls } g \in U, m \in U \\ g \leq b \text{ in } U, & \text{falls } g \in U, m \in W \\ a \leq m \text{ in } U, & \text{falls } g \in W, m \in U \\ g \leq m \text{ in } W, & \text{falls } g \in W, m \in W \end{cases}$$

Die Takelung dieser Substitutionssumme ist auf natürliche Weise isomorph zu U; wir bezeichnen es deshalb ebenfalls mit U. Auch die Namen a und b übernehmen wir für die zugehörigen Elemente des Substitutionsprodukts.

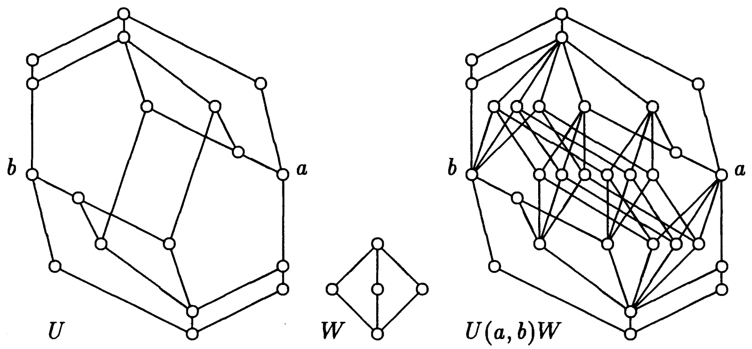


Abbildung 4.14. Ein Substitutionsprodukt.

Satz 23 (Eigenschaften des Substitutionsproduktes). *Der Begriffsverband V einer echten Substitutionssumme*

$$V = \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2)$$

mit Takelung U und Besegelung P hat die unten aufgeführten Eigenschaften (Subst 1) – (Subst 4). Dabei sind a, b wie in den Hilfssätzen und $W := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$.

Umgekehrt ist jeder vollständige Verband V, der (Subst 1) – (Subst 4) erfüllt, isomorph zu $U(a,b)W$. Insbesondere gilt

$$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)(\gamma g, \mu m)\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2).$$

(Subst 1) $V = U \cup P$, $P \cap U \subseteq (b] \cup [a)$, $a, b \in U$, $a \not\leq b$.

(Subst 2) U *ist ein vollständiger Unterverband von* V,

(Subst 3) W *ist ordnungsisomorph zu* $P \cap (a]$, *und für alle* $p \in P$ *gilt*

$$p = (p \wedge a) \vee (p \wedge b) \quad \textit{sowie} \quad p = (p \vee a) \wedge (p \vee b)$$

(Subst 4) Falls $u \in U$ *und* $p \in P \setminus U$, *dann gilt* $u \leq p \Rightarrow u \leq b$ *und* $u \geq p \Rightarrow u \geq a$.

Beweis. Daß $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2)$ die Eigenschaften (Subst 1) und (Subst 2) hat, haben wir bereits in den Hilfssätzen 66 und 67 gezeigt, und ebenso, daß P ordnungsisomorph zum direkten Produkt von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_3)$ ist. Daraus folgt der erste Teil von (Subst 3). Ein Begriff $p = (X,Y)$ von $\mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2$, der nicht zu U gehört, erfüllt $X \subseteq G_2 \cup m^{I_1}$ und $Y \cap M_2 \neq \emptyset$. Jeder Unterbegriff davon, der zu U gehört, muß deshalb einen Umfang haben, der ganz in m^{I_1} liegt, ist also $\leq b$. Das beweist (Subst 4). Nun kann man auch den zweiten Teil von (Subst 3) erschließen, denn eine obere Schranke von $(p \wedge a) \vee (p \wedge b)$, die kleiner oder gleich p ist, muß in P liegen und deshalb gleich p sein.

Wir nehmen nun an, daß umgekehrt V die Eigenschaften (Subst 1) – (Subst 4) hat. Zunächst leiten wir einige Informationen über die Struktur von P her. Aus (Subst 3) erschließen wir, daß $P \subseteq [a \wedge b, a \vee b]$ gilt. Die Abbildungen $p \mapsto p \vee b$ und $q \mapsto q \wedge a$ sind zueinander inverse Isomorphismen zwischen $P \cap (a]$ und $P \cap [b)$, denn für $p \leq a$ gilt

$$(p \vee b) \wedge a = (p \vee b) \wedge (p \vee a) = p,$$

und dual. Auf diese Weise haben wir nicht nur den in (Subst 3) geforderten Isomorphismus $\sigma : W \to P \cap (a]$, sondern auch einen weiteren $\tau : W \to P \cap [b)$ vermöge $\tau(x) := \sigma(x) \vee b$. Anhand von (Subst 1) sehen wir, daß die Elemente von $P \cap (a]$, mit Ausnahme der Randelemente a und $a \wedge b$, sämtlich nicht zu U gehören, entsprechendes gilt für $P \cap [b)$.

Zum Beweis der Isomorphie von V mit $U(a,b)W$ benutzen wir den Hauptsatz über Begriffsverbände. Der $U(a,b)W$ definierende Kontext hat die Gegenstandsmenge $G = (U \setminus \{a\}) \cup (W \setminus \{0_W\})$ und die Merkmalmenge $M = (U \setminus \{b\}) \cup (W \setminus \{1_W\})$ (vergl. die Angaben im Anschluß an Definition 62). Die Abbildungen

$$\tilde{\gamma} : G \to V, \quad \tilde{\mu} : M \to V,$$

definiert durch

$$\tilde{\gamma}(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in U \\ \sigma(x) & \text{falls } x \in W \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\mu}(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in U \\ \tau(x) & \text{falls } x \in W, \end{cases}$$

erfüllen die im Hauptsatz genannten Bedingungen, wie wir zeigen werden. Dazu muß nachgewiesen werden, daß $\tilde{\gamma}(G)$ $\bigvee$-dicht und $\tilde{\mu}(M)$ $\bigwedge$-dicht in V sind und daß gIm äquivalent ist zu $\tilde{\gamma}g \leq \tilde{\mu}m$.

Es ist $\tilde{\gamma}(G) = U \cup (P \cap (a])$, denn $\sigma(0_W) = a \wedge b$ ist nach (Subst 2) ein Element von U. Ebenso ist $\tilde{\mu}(M) = U \cup (P \cap [b))$. Jedes Element $p \notin U$ ist wegen $p = (p \wedge a) \vee (p \wedge b)$ Supremum eines Elementes aus $P \cap (a]$ und eines Elements aus $(b]$, also jedenfalls von Elementen aus $\tilde{\gamma}(G)$. Dual zeigt man, daß $\tilde{\mu}(M)$ infimum-dicht ist.

Um $gIm \iff \tilde{\gamma}g \leq \tilde{\mu}m$ nachzuweisen, unterscheiden wir vier Fälle, je nachdem, ob $g \in U$ oder $g \in W$ und ob $m \in U$ oder $m \in W$ gilt. Liegen beide in U, dann ist die Behauptung offensichtlich richtig. Liegt $g \in U$, $m \in W$, dann ist gIm nach Definition 62 äquivalent zu $g \leq b$ in U. Andererseits ist $\tilde{\mu}(m) = \tau(m) \notin U$ oder $\tilde{\mu}(m) = b$, also nach (Subst 4) $\tilde{\gamma}g \leq \tilde{\mu}m \iff \tilde{\gamma}g \leq b$, und wegen $\tilde{\gamma}g = g$ sind die Bedingungen gleichwertig. Dual handelt man den Fall $g \in W, m \in U$ ab. Schließlich ist noch der Fall $g, m \in W$ zu behandeln: Man hat dann $gIm \iff g \leq m \in W \iff \sigma(g) \leq \sigma(m) \iff \sigma(g) \leq \sigma(m) \vee b$ (denn aus $\sigma(g) \leq \sigma(m) \vee b$ folgt $\sigma(g) = \sigma(g) \wedge a \leq (\sigma(m) \vee b) \wedge b = \sigma(m)$), und wegen $\tilde{\gamma}(g) = \sigma(g)$ sowie $\tilde{\mu}(m) = \tau(m) = \sigma(m) \vee b$ ist alles bewiesen. □

Es läßt sich leicht noch genauere Information über die Menge P ableiten. Wir stellen einiges im folgenden Hilfssatz ohne Beweis zusammen.

Hilfssatz 68 (Weitere Eigenschaften). *Der Begriffsverband*

$$\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2)$$

einer echten Substitutionssumme hat (mit den Bezeichnungen aus Satz 23) die folgenden Eigenschaften:

(Subst 5) Die Besegelung P ist isomorph zu einem direkten Produkt

$$P \cong (P \cap (a]) \times (P \cap (b]).$$

Die Elemente von $P \cap (b]$ sind genau diejenigen der Form $x = (x \vee a) \wedge b$.

(Subst 6) Für $x \in P \cap (a]$, $y \in P \cap [b)$ gilt

$$x \leq y \iff x \leq y \wedge a \iff x \vee b \leq y.$$

(Subst 7) Jedes Element von $P \cap (a]$ ist Supremum von Gegenstandsbegriffen in $P \cap (a]$, und jedes Element von $P \cap [b)$ ist Infimum von Merkmalbegriffen in $P \cap [b)$.

(Subst 8) Wenn 1_W $\bigvee$-irreduzibel ist, dann ist a ein Gegenstandsbegriff. Wenn 0_W $\bigwedge$-irreduzibel ist, dann ist b ein Merkmalbegriff.

□

Das Substitutionsprodukt eines Verbandes $\boldsymbol{V}$ mit dem zweielementigen Verband ist stets isomorph zu $\boldsymbol{V}$.

	×
×	

substitutions-
unzerlegbar

Deshalb nennen wir $\boldsymbol{V}$ **substitutionsunzerlegbar**, falls $\boldsymbol{V}$ mehr als zwei Elemente hat und aus $\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{V}_1(a,b)\boldsymbol{V}_2$ stets $|\boldsymbol{V}_1| = 2$ oder $|\boldsymbol{V}_2| = 2$ folgt. Geklärt werden soll noch, wann die Substitutionszerlegbarkeit eines Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ zur Folge hat, daß auch der Kontext $\mathbb{K}$ zerlegt werden kann.

		×
	×	

substitutions-
zerlegbar

Das ist nicht allgemein so, weil die Hinzunahme (in Sonderfällen auch die Wegnahme) reduzibler Gegenstände und Merkmale die Eigenschaft eines Kontextes, Substitutionssumme zu sein, aufheben kann. Im folgenden Satz (den wir noch mit einem Hilfssatz vorbereiten,) gehen wir deshalb zu einem dichten Teilkontext über.

Hilfssatz 69. *Genau dann ist ein Kontext $\mathbb{K}$ isomorph zu einer echten Substitutionssumme von Kontexten mit Begriffsverbänden isomorph zu U und W, wenn es einen Verbandsisomorphismus ψ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ auf ein Substitutionsprodukt $U(a,b)W$ gibt mit*

$$\psi\gamma(G) \subseteq U \cup (a] \quad \textit{und} \quad \psi\mu(M) \subseteq U \cup [b),$$

für den zusätzlich die folgende Sonderfallbedingung erfüllt ist:

– *wenn 0_W $\bigwedge$-irreduzibel ist, dann ist $b \in \psi\mu(M)$,*
– *wenn 1_W $\bigvee$-irreduzibel ist, dann ist $a \in \psi\gamma(G)$.*

Beweis. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2$ ist, dann ist nach dem vorigen Satz

$$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)(\gamma g, \mu m)\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2).$$

Ist $h \in G$ ein Gegenstand, dann gehört der Gegenstandsbegriff entweder zur Takelung U oder er liegt in der Gegenstandsmenge G_2; dann aber ist $\gamma h \leq \gamma g = a$. Wenn 1_W $\bigvee$-irreduzibel ist, dann ist 1_W Gegenstandsbegriff in $\mathbb{K}_2$, dieser Gegenstand gehört dann auch zu $\mathbb{K}$ und wird unter $\psi\gamma$ auf a abgebildet. Dual argumentiert man für Merkmale.

Nun sei umgekehrt ψ ein Isomorphismus mit den im Hilfssatz angegebenen Eigenschaften, es sei wieder P die Besegelung von $U(a,b)W$, und weiter $g_a \notin G$ sowie $m_b \notin M$. Wir definieren einen Kontext $\mathbb{K}_1$ durch

$$G_U := \{g \in G \mid \psi\gamma g \in U \setminus \{a\}\}, \quad G_1 := G_U \cup \{g_a\}$$

$$M_U := \{m \in M \mid \psi\mu m \in U \setminus \{b\}\}, \quad M_1 := M_U \cup \{m_b\}$$

$$I_1 := I \cap (G_U \times M_U) \cup \{(g_a, m) \mid \psi\mu m \geq a\} \cup \{(g, m_b) \mid \psi\gamma g \leq b\}.$$

Der Begriffsverband dieses Kontextes $\mathbb{K}_1 := (G_1, M_1, I_1)$ ist isomorph zu U, denn $\psi\gamma(G)$ ist $\bigvee$-dicht in $U(a,b)W$, und nach (Subst 4) ist $(\psi\gamma(G) \cap U) \cup \{a\}$

dann $\bigvee$-dicht in U. Dual ist $(\psi\mu(M)\cap U)\cup\{b\}$ infimum-dicht in U. Deshalb sind die Abbildungen $\gamma_1 : G_1 \to U$ und $\mu_1 : M_1 \to U$, die durch

$$\gamma_1(g) := \begin{cases} \psi\gamma g, & \text{falls } g \in G_U, \\ a, & \text{falls } g = g_a, \end{cases} \quad \text{und} \quad \mu_1(m) := \begin{cases} \psi\mu m, & \text{falls } m \in M_U, \\ b, & \text{falls } m = m_b, \end{cases}$$

definiert sind, nach dem Hauptsatz hinreichend für die Isomorphie von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ zu U, denn offenbar gilt $gIm \iff \gamma_1 g \leq \mu_1 m$.

Der Kontext $\mathbb{K}_2 := (G_2, M_2, I_2)$ wird erklärt durch

$$G_2 := G \setminus G_U, \qquad M_2 := M \setminus M_U, \qquad I_2 := I \cap G_2 \times M_2.$$

Wir behaupten, daß $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2) \cong W(\cong P \cap (a])$ gilt und argumentieren wieder mit dem Hauptsatz; dabei benutzen wir die Abbildungen $\gamma_2 : G_2 \to P \cap (a]$ und $\mu_2 : M_2 \to P \cap (a]$, die folgendermaßen definiert sind:

$$\gamma_2 g := \psi\gamma g, \qquad \mu_2 m := (\psi\mu m) \wedge a.$$

Mit (Subst 6) erhält man

$$\psi\gamma g \leq (\psi\mu m) \wedge a \iff \psi\gamma g \leq \psi\mu m,$$

also $\gamma_2 g \leq \mu_2 m \iff (g,m) \in I_2$. (Subst 7) besagt, daß die Gegenstandsbegriffe $\bigvee$-dicht in $P \cap (a]$ liegen. $P \cap (a]$ enthält aber nach (Subst 1) keine Elemente von U außer a und $a \wedge b$. $\gamma_2 G_2$ ist deshalb $\bigvee$-dicht im Verband $P \cap (a]$, denn nach (Subst 8) ist auch das größte Element a ein Supremum von Elementen aus $\gamma_2 G_2$. Beachtet man, daß nach (Subst 3) $x \mapsto x \wedge a$ ein Isomorphismus von $P \cap [b)$ auf $P \cap (a]$ ist, so erhält man, daß dual $\mu_2 M_2$ $\bigwedge$-dicht in $P \cap (a]$ ist.

Ohne Schwierigkeiten prüft man nach, daß

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_1(g_a, m_b)\mathbb{K}_2. \qquad \square$$

Satz 24. *Ist $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \cong U(a,b)W$, dann gibt es einen dichten Teilkontext $\mathbb{K}_0$ von $\mathbb{K}$, der eine echte Substitutionssumme von Kontexten mit Begriffsverbänden isomorph zu U und W ist, vorausgesetzt, der Isomorphismus $\psi : U(a,b)W \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ kann so gewählt werden, daß die folgende (auch notwendige) Sonderfallbedingung erfüllt ist:*

- *falls 1_W $\bigvee$-irreduzibel ist, dann ist $\psi(a)$ ein Gegenstandsbegriff γg_a von $\mathbb{K}$.*
- *falls 0_W $\bigwedge$-irreduzibel ist, dann ist $\psi(b)$ ein Merkmalbegriff μm_b von $\mathbb{K}$,*

Beweis. Wenn

$$\psi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \to U(a,b)W$$

ein Isomorphismus ist, so daß ψ^{-1} die Sonderfallbedingung erfüllt, dann definieren wir einen Teilkontext $\mathbb{K}_0 := (G_0, M_0, I \cap G_0 \times M_0)$ durch

$$\begin{aligned} G_0 &:= \{g \mid \psi\gamma g \in U \cup (a]\} \\ M_0 &:= \{m \mid \psi\mu m \in U \cup [b)\}. \end{aligned}$$

Wir müssen nur beweisen, daß $\mathbb{K}_0$ ein dichter Teilkontext ist, denn dann liefert Hilfssatz 69 den Rest der Behauptung.

Wir zeigen dazu, daß γG_0 $\bigvee$-dicht ist, die entsprechende Behauptung für M_0 beweist man dann dual. Da ψ ein Isomorphismus ist, können wir stattdessen nachweisen, daß $\psi\gamma G_0$ $\bigvee$-dicht in $U(a,b)W$ liegt. $\psi\gamma G$ ist gewiß $\bigvee$-dicht, jedes Element $s \in U(a,b)W$ ist also als ein Supremum

$$s = \bigvee X, \quad X := (s] \cap \psi\gamma G$$

darstellbar. Wir unterscheiden vier Fälle:

$s \in U, s \not\geq a$ Nach (Subst 4) ist dann $X \subseteq U$.

$s \leq a$ Dann ist trivialerweise auch $X \subseteq (a]$.

$s \in P$ Nach (Subst 3) gilt $s = (s \wedge a) \vee (s \wedge b)$, und $s \wedge b \in U$, $s \wedge a \leq a$. Man hat deshalb $s = \bigvee(X \cap (a]) \vee \bigvee(X \cap U)$.

$s \geq a$ Für jedes $p \in P$ gilt nach (Subst 3) $a \vee p = a \vee (p \wedge b)$ mit $p \wedge b \in U$. Jedes Element von X, welches nicht zu U gehört, kann also ersetzt werden durch Elemente aus $(a] \cup (b]$, und diese wiederum sind Suprema von Elementen aus $\psi\gamma G \cap ((a] \cup (b])$.

Insgesamt reichen also von $\psi\gamma G$ diejenigen Elemente aus, die in $U \cup (a]$ liegen, also die Bilder von G_0, wie behauptet. □

Wir wollen diese Ergebnisse benutzen, um einen Satz über „eindeutige Primfaktorzerlegung“ für das Substitutionsprodukt endlicher Verbände zu beweisen. Das geht allerdings nicht ganz glatt; die Sonderfallbedingung macht sich bemerkbar und verhindert ein Ergebnis ohne Ausnahme. Das entscheidende technische Hilfsmittel ist ein Verfeinerungssatz, der zeigt, daß zwei Substitutionsprodukte nur isomorph sein können, wenn sie sich aus den gleichen Faktoren zusammensetzen:

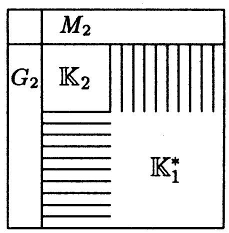
Hilfssatz 70. *Es seien V_1, V_2, V_3, V_4 doppelt fundierte vollständige Verbände. V_3 habe ein $\bigvee$-reduzibles Einselement und ein $\bigwedge$-reduzibles Nullelement, und V_4 ebenso. Gilt für geeignete Elemente a_1, a_2, b_1, b_2*

$$V_1(a_1, b_1)V_3 \cong V_2(a_2, b_2)V_4,$$

dann gibt es Verbände W_1, W_2, W_3, W_4 und Elemente $c_1, \ldots, c_4$ sowie $d_1, \ldots, d_4$ mit

$$\begin{aligned} V_1 &\cong W_1(c_1, d_1)W_2, & V_2 &\cong W_1(c_2, d_2)W_3, \\ V_3 &\cong W_3(c_3, d_3)W_4, & V_4 &\cong W_2(c_4, d_4)W_4. \end{aligned}$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes läßt sich mit Hilfe der nachstehenden Graphik anschaulicher machen. Dargestellt ist eine Substitutionssumme $\mathbb{K} := \mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2$. Der Teilkontext $\mathbb{K}_2$ ist eingezeichnet, $\mathbb{K}_1^* =: (G_1^*, M_1^*, I_1^*)$ bezeichnet den Kontext, der aus $\mathbb{K}_1$ durch Streichen des Gegenstandes g und des Merkmales m entsteht. Wir erhalten daraus einen Kontext isomorph zu $\mathbb{K}_1$, indem wir irgendein nichtinzidentes Gegenstand-Merkmal-Paar aus $\mathbb{K}_2$ hinzunehmen. $\mathbb{K}_1$ ist also, bis auf die Namen von g und m, ebenfalls gegeben, und diese Namen sind für die Substitutionssumme irrelevant. Wir schreiben deshalb in einer solchen Situation $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1(\ ,\ )\mathbb{K}_2$ als Abkürzung dafür, daß $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1(g,m)\mathbb{K}_2$ für geeignete g, m gilt.



$\mathbb{K} = \mathbb{K}_1(\ ,\ )\mathbb{K}_2.$

Beweis. Es sei

$$V := V_1(c_1, d_1)V_3 \cong V_2(c_2, d_2)V_4$$

und $\mathbb{K}$ der (reduzierte) Standardkontext zu V. Wir können Satz 24 anwenden, denn wegen der Zusatzvoraussetzungen ist die Sonderfallbedingung irrelevant. $\mathbb{K}$ ist also auf zweifache Weise Substitutionssumme:

$$\mathbb{K} \cong \mathbb{K}_1(g_1, m_1)\mathbb{K}_3 \cong \mathbb{K}_2(g_2, m_2)\mathbb{K}_4,$$

wobei für $i \in \{1, \ldots, 4\}$

$$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_i) \cong V_i \qquad \text{und} \qquad \mathbb{K}_i =: (G_i, M_i, I_i).$$

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes garantieren, daß $\mathbb{K}_3$ und $\mathbb{K}_4$ weder Voll- noch Leerzeilen oder -Spalten haben.

Der Isomorphie der Substitutionsprodukte entspricht also die Isomorphie zweier Substitutionssummen. Dieser Umstand soll im folgenden ausgenutzt werden. Allerdings ergeben sich dabei Komplikationen, das Hilfssatz 70 entsprechende Ergebnis für Substitutionssummen gilt nämlich nicht allgemein. Wenn es uns allerdings gelingt, Kontexte $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$, $\mathbb{L}_4$ zu finden mit

$$\begin{tikzcd}
& W_1 \arrow[dl, "V_1"'] \arrow[dr, "V_2"] & \\
W_2 \arrow[dr, "V_4"'] & & W_3 \arrow[dl, "V_3"] \\
& W_4 &
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{L}_1(\ ,\ )\mathbb{L}_2, \qquad \mathbb{K}_2 = \mathbb{L}_1(\ ,\ )\mathbb{L}_3,$$
$$\mathbb{K}_3 = \mathbb{L}_3(\ ,\ )\mathbb{L}_4, \qquad \mathbb{K}_4 = \mathbb{L}_2(\ ,\ )\mathbb{L}_4,$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{L}_1 \arrow[dl, "\mathbb{K}_1"'] \arrow[dr, "\mathbb{K}_2"] & \\
\mathbb{L}_2 \arrow[dr, "\mathbb{K}_4"'] & & \mathbb{L}_3 \arrow[dl, "\mathbb{K}_3"] \\
& \mathbb{L}_4 &
\end{tikzcd}$$

dann ergibt sich die Behauptung des Hilfssatzes aus Satz 23. In einigen Spezialfällen ist das so. Diese handeln wir zunächst ab:

1. Fall: $G_3 \subset G_4$ und $M_3 \subset M_4$.
Wir definieren einen Teilkontext

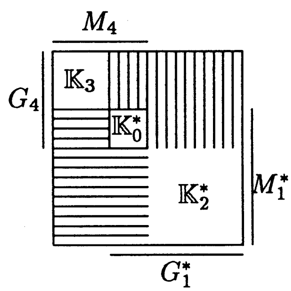
$$\mathbb{K}_0^* := (G_0^*, M_0^*, I_0^*)$$

durch

$$G_0^* := G_4 \setminus G_3$$

und

$$M_0^* := M_4 \setminus M_3.$$



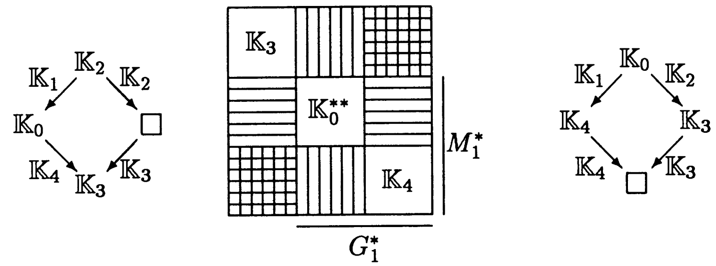
Wie oben erweitern wir diesen Kontext durch Hinzunahme eines nichtinzidenten Paares aus $\mathbb{K}_3$ zu einem Kontext $\mathbb{K}_0$. Dieser kann keine Vollzeile oder -spalte enthalten, weil $\mathbb{K}_4$ keine enthält. Man hat deshalb

$$\mathbb{K}_1^* = \mathbb{K}_2(\,,\,)\mathbb{K}_0^*, \quad \mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2(\,,\,)\mathbb{K}_0, \quad \mathbb{K}_4 = \mathbb{K}_0(\,,\,)\mathbb{K}_3$$

Nimmt man als vierten den trivialen Kontext $\square := (\{g\}, \{m\}, \emptyset)$ hinzu, so erhält man die gewünschte Verfeinerung mit

$$\begin{array}{ll} \mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2(\,,\,)\mathbb{K}_0 & \mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_2(\,,\,)\square \\ \mathbb{K}_3 = \square(\,,\,)\mathbb{K}_3 & \mathbb{K}_4 = \mathbb{K}_0(\,,\,)\mathbb{K}_3 \end{array}$$

(linkes Diagramm). Der umgekehrte Fall $G_4 \subset G_3$, $M_4 \subset M_3$ ist damit natürlich auch abgehandelt.



2. Fall: $G_3 \cap G_4 = \emptyset = M_3 \cap M_4$.
Man definiert (mittleres Bild)

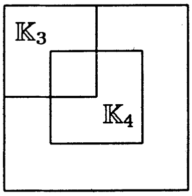
$$\begin{aligned} G_0^{**} &:= G \setminus (G_3 \cup G_4), \\ M_0^{**} &:= M \setminus (M_3 \cup M_4). \end{aligned}$$

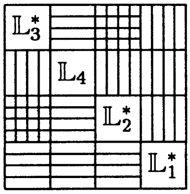
$\mathbb{K}_0$ sei der Teilkontext mit Gegenstandsmenge $G_0 := G_0^{**} \cup \{g, h\}$ und Merkmalmenge $M_0 := M_0^{**} \cup \{m, n\}$, wobei (g, m) und (h, n) nichtinzidente Gegenstand-Merkmal-Paare aus $\mathbb{K}_3$ bzw. $\mathbb{K}_4$ sind.

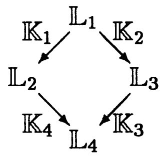
Man erkennt, daß $\mathbb{K}_0(g, m)\mathbb{K}_4$ gleich $\mathbb{K}_1$ ist. Ebenso ist $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_0(h, n)\mathbb{K}_3$. Wieder mit Hilfe des trivialen Kontextes $\square$ ergibt sich die im rechten Diagramm dargestellte Verfeinerung, aus der die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

Die Fälle $G_3 \subseteq G_4$, $M_4 \subseteq M_3$ (bzw. dual) und $G_3 \cap G_4 \neq \emptyset$, $M_3 \cap M_4 = \emptyset$ erweisen sich als trivial: Ist z.B. $G_3 \subseteq G_4$ und $m \in M_3 \setminus M_4$, dann gilt $m' \cap G_4 = \emptyset$ oder $m' \cap G_4 = G_4$ und folglich $m' \cap G_3 = \emptyset$ oder $m' \cap G_3 = G_3$, im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Ist $M_3 \cap M_4 = \emptyset$, dann ist natürlich $G_3 \subseteq G_4$ unmöglich, weil sonst $\mathbb{K}_3$ konstante Spalten hätte. Ist dann $g \in G_3 \cap G_4$, $h \in G_3 \setminus G_4$ und $m \in M_4$, dann folgt aus gIm sofort hIm und damit hIn für alle $n \in M_4$, was wiederum gIn für alle $n \in M_4$ erzwingt. Ebenso folgt aus $g \not I m$, daß $g' \cap M_4 = \emptyset$ ist. $\mathbb{K}_4$ enthielte also eine Voll- oder eine Leerzeile, was den Voraussetzungen widerspricht.

Der noch verbleibende Fall ist der, daß sich die beiden Teilkontexte $\mathbb{K}_3$ und $\mathbb{K}_4$ nichttrivial schneiden. Man kann ähnlich wie bisher vorgehen und Kontexte $\mathbb{L}_1, \ldots, \mathbb{L}_4$ einführen, wie im Bild angegeben:







Mit $H_1^* := G \backslash (G_3 \cup G_4)$, $N_1^* := M \backslash (M_3 \cup M_4)$, $H_2^* := G_4 \backslash G_3$, $N_2^* := M_4 \backslash M_3$, $H_3^* := G_3 \setminus G_4$, $N_3^* := M_3 \setminus M_4$ und $H_4 := G_3 \cap G_4$, $N_4 := M_3 \cap M_4$ definiert man Teilkontexte $\mathbb{L}_1 \ldots, \mathbb{L}_4$, die in der Tat die im Diagramm angegebene Verfeinerung liefern, sofern die dabei auftretenden Substitutionssummen echt sind. Es kann aber der Fall eintreten, daß $\mathbb{L}_4$ Vollzeilen oder -spalten enthält (für $\mathbb{L}_2$ und $\mathbb{L}_3$ schließt man dies wie im ersten Fall aus).

Hier hilft nun ein einfacher Trick: wir erweitern den Gesamtkontext $\mathbb{K}$ um einen Gegenstand g_∞ und ein Merkmal m_∞ mit $g'_\infty := g'_4 \cap M_1^*$ und $m'_\infty := m'_4 \cap G_1^*$, wobei $g_4 \in G_4$ und $m_4 \in M_4$ beliebig sind. Der neue Gegenstand und das neue Merkmal sind reduzibel, und zwar sowohl in $\mathbb{K}$ als auch in den Teilkontexten $\mathbb{K}_1, \ldots, \mathbb{K}_4$; die jeweiligen Begriffsverbände ändern ihren Isomorphietyp also nicht. Bezeichnen wir mit $\mathbb{L}_4^+$ den aus $\mathbb{L}_4$ entstandenen Kontext, so erhalten wir

$$\mathbb{K}_1 = \mathbb{L}_1(\, , \,)\mathbb{L}_2 \qquad \mathbb{K}_2 = \mathbb{L}_1(\, , \,)\mathbb{L}_3$$
$$\mathbb{K}_3 = \mathbb{L}_3(\, , \,)\mathbb{L}_4^+ \qquad \mathbb{K}_4 = \mathbb{L}_2(\, , \,)\mathbb{L}_4^+,$$

und damit die Behauptung. □

Mit diesem Hilfssatz können wir nun schließlich das angekündigte Ergebnis beweisen. Eine Sonderrolle spielt dabei der dreielementige Verband C_3, weil er als einziger substitutionsunzerlegbarer Verband nicht die Zusatzbedingung aus Hilfssatz 70 erfüllt.

Satz 25. *Wenn keine Substitutionszerlegung des endlichen Verbandes $\boldsymbol{V}$ einen Faktor isomorph zu C_3 enthält, dann haben je zwei Substitutionszerlegungen von $\boldsymbol{V}$ in unzerlegbare Verbände die gleiche Länge und paarweise isomorphe Faktoren.*

Beweis. Nach Hilfssatz 65 können wir jede Substitutionszerlegung in linksgeklammerte Form bringen. Es seien also

$$V \cong (\ldots((M_1(\, , \,)M_2)\ldots)(\, , \,)M_{m-1})(\, , \,)M_m$$

$$V \cong (\ldots((N_1(\, , \,)N_2)\ldots)(\, , \,)N_{n-1})(\, , \,)N_n$$

zwei Zerlegungen von $\boldsymbol{V}$ in unzerlegbare Faktoren $M_1, \ldots, M_m$ bzw. $N_1, \ldots,$ N_n (die Namen der Elemente in den Klammern spielen für den Beweis keine

Rolle). Dabei sei n die größtmögliche Länge, die eine solche Zerlegung von $\boldsymbol{V}$ haben kann. Wir führen Induktion über n.

Nach Hilfssatz 70 gibt es Verbände $W_1, \ldots, W_4$ mit

$$\begin{aligned}(\ldots((M_1(\,,\,)M_2)(\,,\,)M_3\ldots)(\,,\,)M_{m-1} &\cong W_1(\,,\,)W_2,\\ (\ldots((N_1(\,,\,)N_2)(\,,\,)N_3\ldots)(\,,\,)N_{n-1} &\cong W_1(\,,\,)W_3,\end{aligned}$$

$$M_m \cong W_3(\,,\,)W_4 \quad \text{und} \quad N_n \cong W_2(\,,\,)W_4.$$

Da M_m und N_n substitutionsunzerlegbar sind, gilt $|W_2| = |W_3| = 2$ oder $|W_4| = 2$. Im ersten Fall ist $M_m \cong W_4 \cong N_n$ und

$$(..(M_1(\,,\,)M_2)\ldots)M_{m-1} \cong W_1 \cong (..(N_1(\,,\,)N_2)\ldots)N_{n-1},$$

und die Behauptung folgt mittels Induktion. Wenn $|W_4| = 2$, dann gilt $M_m \cong W_3$ und $N_n \cong W_2$, und wir haben

$$(W_1(\,,\,)N_n)(\,,\,)M_m \cong \boldsymbol{V} \cong (W_1(\,,\,)M_m)(\,,\,)N_n$$

Für $n = 2$ erhalten wir $|W_1| = 2$, weil N_1 unzerlegbar ist, und damit $m = 2$, $M_1 \cong N_2$ und $N_1 \cong M_2$. Wenn $n > 2$ ist, können wir schließen, daß jede Substitutionszerlegung von W_1 höchstens $n-2$ Faktoren hat, denn sonst ergäbe sich eine Zerlegung von $\boldsymbol{V}$ mit mehr als n Faktoren. Per Induktion können wir also schließen, daß alle Zerlegungen von W_1 in unzerlegbare Faktoren die gleiche Zahl, k, von Faktoren haben. Diese Zahl muß aber sogar gleich $n-2$ sein, denn

$$W_1(\,,\,)M_m \cong (\ldots((N_1(\,,\,)N_2)(\,,\,)N_3\ldots)(\,,\,)N_{n-1},$$

und ebenfalls nach Induktionsannahme hat jede Zerlegung dieses Verbandes genau $n-1$ Faktoren. □

4.4 Tensorielle Zerlegungen

Definition 63. Es sei T eine Indexmenge. Das **direkte Produkt** von Kontexten $\mathbb{K}_t := (G_t, M_t, I_t), t \in T$ ist definiert als der Kontext

$$\bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t := (\bigtimes_{t\in T} G_t, \bigtimes_{t\in T} M_t, \nabla),$$

wobei für $g := (g_t)_{t\in T}$ und $m := (m_t)_{t\in T}$ gilt:

$$g \nabla m :\Longleftrightarrow \exists_{t\in T} \quad g_t I_t m_t. \qquad \Diamond$$

Wir hatten diese Definition bereits im Abschnitt §1.4 für den Spezialfall

$$\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 := (G_1 \times G_2, M_1 \times M_2, \nabla),$$

$$(g_1, g_2)\nabla(m_1, m_2) :\iff g_1 I_1 m_1 \text{ oder } g_2 I_2 m_2$$

zweier Faktoren vorgestellt. Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir die Abkürzungen:

$$G := \bigtimes_{t\in T} G_t, \quad M := \bigtimes_{t\in T} M_t, \quad g := (g_t)_{t\in T} \quad \text{und} \quad m := (m_t)_{t\in T}.$$

	a	b
1	×	
2		

$\mathbb{K}_1$

$\times$

	c	d	e
3	×		
4		×	
5			×

$\mathbb{K}_2$

$=$

		a	a	a	b	b	b
		c	d	e	c	d	e
1	3	×	×	×	×		
1	4	×	×	×		×	
1	5	×	×	×			×
2	3	×			×		
2	4		×			×	
2	5			×			×

$\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$

$=$

		a	b	a	b	a	b
		c	c	d	d	e	e
1	3	×	×	×		×	
2	3	×	×				
1	4	×		×	×	×	
2	4			×	×		
1	5	×		×		×	×
2	5					×	×

$\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$

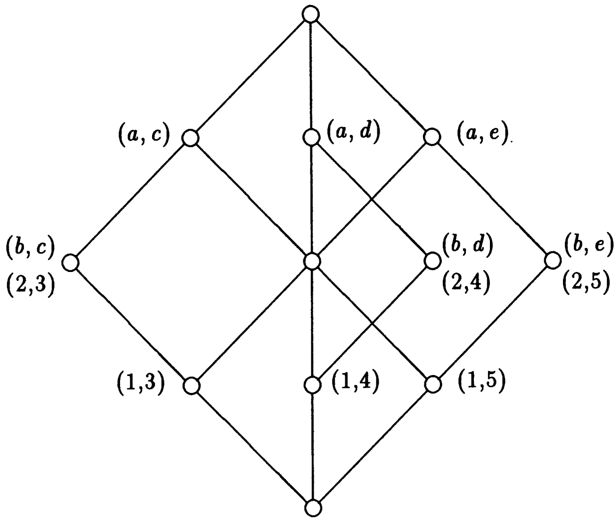
Abbildung 4.15. Das direkte Produkt zweier kleiner Kontexte

Eine lästige Komplikation der Schreibweise rührt von dem Trivialfall der „Vollzeilen“ und „Vollspalten“ her. Wir verwenden die in § 3.3 eingeführte Schreibweise

$$\square := M^{\nabla} \times M \cup G \times G^{\nabla}.$$

Der Leser kann aber ohne großen Verlust an Allgemeinheit voraussetzen, daß Vollzeilen und -spalten nicht auftreten, und überall $G^{\nabla} = M^{\nabla} = \square = \emptyset$ setzen.

Jeder triviale Kontext mit nur einem Begriff, also jeder Kontext der Form $(G, M, G \times M)$, wirkt für das direkte Produkt wie ein Nullelement: Ist einer der Faktoren trivial, dann auch das Produkt. Diesen Fall müssen wir gelegentlich ausschließen.



$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)$

Abbildung 4.16. Der Begriffsverband des direkten Produktes der Kontexte aus Abbildung 4.15

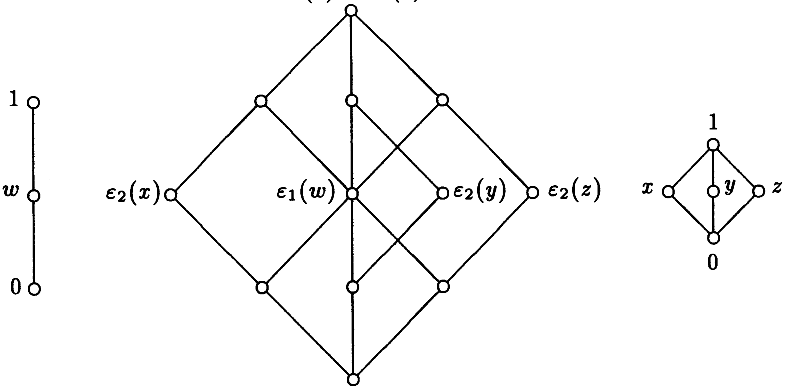


Abbildung 4.17. Die Abbildungen $\varepsilon_i : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_i) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)$

Hilfssatz 71. *Für jedes $t \in T$ ist die Relation*

$$\nabla_t := \{(g,m) \in G \times M \mid g_t I_t m_t\} \cup \square$$

eine abgeschlossene Teilrelation. Wenn $\nabla \neq G \times M$ ist, dann ist der zugehörige Unterverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, \nabla_t)$ isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$, und die Abbildung

$$\varepsilon_t : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \to \underline{\mathfrak{B}}(G, M, \nabla)$$

mit

$$\varepsilon_t(A, B) := (\{g \in G \mid g_t \in A\} \cup M^\nabla, \{m \in M \mid m_t \in B\} \cup G^\nabla)$$

ist eine kanonische Verbandseinbettung.

Beweis. Daß ∇_t abgeschlossen ist, kann man leicht z.B. mit Hilfssatz 47 (S. 115) nachweisen: Ist nämlich $(g,m) \in \nabla \setminus \nabla_t$, dann ist insbesondere $m^\nabla \neq G$, wir können also einen Gegenstand $\tilde{g} \notin m^\nabla$ wählen. Mit dessen Hilfe definieren wir einen Gegenstand h durch

$$h_s := \begin{cases} \tilde{g}_s & \text{falls } s \neq t \\ g_s & \text{falls } s = t \end{cases}.$$

Man hat dann $(h,m) \notin \nabla$ und $h^\nabla = h^{\nabla_t}$.

Es ist eine Routinesache nachzuweisen, daß ε_t die behaupteten Eigenschaften hat. □

Hilfssatz 72. *Sind g, h Gegenstände des direkten Produktes $\times_{t \in T} \mathbb{K}_t$, dann gilt*

$$g^\nabla \subseteq h^\nabla \iff \begin{cases} h \in M^\nabla & \textit{oder} \\ g_t^{I_t} \subseteq h_t^{I_t} & \textit{für alle } t \in T \end{cases}.$$

Beweis. „$\Rightarrow$": Wir setzen die Negation der rechten Seite voraus: Sei $m \notin h^\nabla$ und $n_t \in g_t^{I_t} \setminus h_t^{I_t}$ für ein $t \in T$. Betrachte das Merkmal $\tilde{m}$, definiert durch

$$\tilde{m}_s := \begin{cases} m_s & \text{falls } s \neq t \\ n_t & \text{falls } s = t \end{cases}.$$

Dann gilt $\tilde{m} \in g^\nabla \setminus h^\nabla$, also $g^\nabla \not\subseteq h^\nabla$. Die Richtung „$\Leftarrow$" ist trivial. □

Hilfssatz 73.

$$g \swarrow m \iff \forall_{t \in T} \quad g_t \swarrow m_t,$$

$$g \nearrow m \iff \forall_{t \in T} \quad g_t \nearrow m_t.$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage. Zunächst bemerken wir, daß wir uns wegen $(g,m) \notin \nabla \iff \forall_t (g_t, m_t) \notin I_t$ auf nichtinzidente Paare beschränken können. Gilt $g_t \swarrow m_t$ für irgendein t nicht, dann muß es einen Gegenstand $h_t \in G_t$ geben mit $g_t' \subseteq h_t'$, $g_t' \neq h_t'$ und $(h_t, m_t) \notin I_t$. Der Gegenstand $\tilde{g}$, definiert durch

$$\tilde{g}_s := \begin{cases} g_s & \text{falls } s \neq t \\ h_t & \text{falls } s = t \end{cases}$$

erfüllt

$$g^\nabla \subseteq \tilde{g}^\nabla, \quad g^\nabla \neq \tilde{g}^\nabla \quad \text{und} \quad (\tilde{g}, m) \notin \nabla,$$

woraus $\neg(g \swarrow m)$ folgt.

Ganz analog schließt man von rechts nach links: Wenn $g_t \swarrow m_t$ für alle $t \in T$ gilt, dann hat man sicher $(g,m) \notin \nabla$ und muß nur noch einen Gegenstand h betrachten mit $g^\nabla \subseteq h^\nabla$, $g^\nabla \neq h^\nabla$, erhält also nach Hilfssatz 72 $g_s' \subset h_s'$, $g_s' \neq h_s'$ für ein $s \in T$, woraus wegen $g_s \swarrow m_s$ sofort $h_s I_s m$ folgt und damit $h \nabla m$. □

Mit Hilfssatz 13 (S. 32) erhält man

Korollar 74. *Ein Gegenstand g eines direkten Produktes ist genau dann irreduzibel, wenn alle g_t irreduzibel sind. Entsprechendes gilt für Merkmale.*

Das direkte Produkt von reduzierten Kontexten ist reduziert, das direkte Produkt von doppelt fundierten Kontexten ist doppelt fundiert. □

Unser Interesse gilt dem Begriffsverband des direkten Produktes. Diesen werden wir das *Tensorprodukt* der Faktorverbände $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ nennen und auf diese Weise eine neue Verbandskonstruktion und damit ein neues Zerlegungsprinzip erhalten. Dazu ist allerdings zu zeigen, daß das Tensorprodukt (bis auf Isomorphie) unabhängig von der Wahl der unterliegenden Kontexte $\mathbb{K}_t$ ist. Das ist das Ergebnis des Satzes, der sich an die Definition anschließt.

Definition 64. Das **Tensorprodukt** vollständiger Verbände $\mathbf{V}_t$, $t \in T$, ist definiert als

$$\bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t := \underline{\mathfrak{B}}(\bigtimes_{t\in T} (V_t, V_t, \leq)),$$

im Spezialfall zweier Faktoren also als

$$\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2 := \underline{\mathfrak{B}}(V_1 \times V_2, V_1 \times V_2, \nabla)$$

mit

$$(g_1, g_2) \nabla (m_1, m_2) :\iff g_1 \leq m_1 \text{ oder } g_2 \leq m_2. \qquad \Diamond$$

Satz 26. *Der Begriffsverband eines direkten Produktes von Kontexten ist isomorph zum Tensorprodukt der Begriffsverbände der Faktorkontexte:*

$$\underline{\mathfrak{B}}(\bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t) \cong \bigotimes_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t).$$

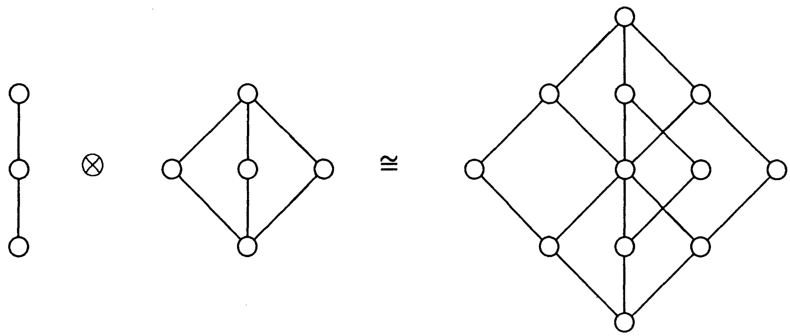


Abbildung 4.18. $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1) \otimes \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)$

Zum *Beweis* verwenden wir den Hauptsatz über Begriffsverbände.
Das Tensorprodukt $\bigotimes_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ ist nach der Definition 64 der Begriffsverband des Kontextes (G, M, ∇) mit

$$G = M = \bigtimes_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$$

und

$$(A_t, B_t)_{t\in T} \ \nabla\ (C_t, D_t)_{t\in T} \iff \exists_{t\in T} A_t \subseteq C_t.$$

Um die behauptete Isomorphie nachzuweisen, müssen wir Abbildungen

$$\tilde{\gamma} : G \to \underline{\mathfrak{B}}(\bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t) \qquad \text{und} \qquad \tilde{\mu} : M \to \underline{\mathfrak{B}}(\bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t)$$

mit den im Hauptsatz geforderten Eigenschaften angeben. Wir wählen dazu

$$\tilde{\gamma}((A_t, A_t')_{t\in T}) := (\{g \mid \forall_t\ g_t \in A_t\} \cup M^\nabla, \{m \mid \exists_t\ m_t \in A_t'\})$$

$$\tilde{\mu}((B_t', B_t)_{t\in T}) := (\{g \mid \exists_t\ g_t \in B_t'\}, G^\nabla \cup \{m \mid \forall_t\ m_t \in B_t\}).$$

Zunächst ist zu zeigen, daß es sich dabei um Begriffe handelt, daß also

$$\begin{aligned} \{g \mid \forall_t\ g_t \in A_t\}^\nabla &= \{m \mid \exists_t\ m_t \in A_t'\} \quad \text{und} \\ M^\nabla \cup \{g \mid \forall_t\ g_t \in A_t\} &= \{m \mid \exists_t\ m_t \in A_t'\}^\nabla \end{aligned}$$

gilt. Die Inklusionen $\subseteq$ sind jeweils trivial, sei deshalb m ein Merkmal mit $m_t \notin A_t'$ für alle $t \in T$. Dann existiert für jedes $t \in T$ ein Gegenstand $g_t \in A_t$ mit $(g_t, m_t) \notin I_t$, und $g := (g_t)_{t\in T}$ erfüllt $(g, m) \notin \nabla$. Dies beweist die Inklusion $\supseteq$ im ersten Fall, der zweite Fall ist analog, ebenso der duale Nachweis für $\tilde{\mu}$.

Als nächstes zeigen wir, daß $\tilde{\gamma}G$ supremum-dicht ist, indem wir nachweisen, daß $\tilde{\gamma}G$ alle Gegenstandsbegriffe von $\underline{\mathfrak{B}}(\bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t)$ enthält. Es gilt nämlich (mit $g := (g_t)_{t\in T}$)

$$\tilde{\gamma}((g_t'', g_t')_{t\in T}) = (\ldots, \{m \mid \exists_{t\in T}\ m_t \in g_t\}) = (\ldots, g^{\nabla}).$$

Schließlich gilt noch

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}((A_t, B_t)_{t\in T}) \leq \tilde{\mu}((C_t, D_t)_{t\in T}) \\ \iff\ & \{g \in G \mid \forall_{t\in T}\ g_t \in A_t\} \cup M^{\nabla} \subseteq \{g \in G \mid \exists_{t\in T}\ g_t \in C_t\} \\ \iff\ & \exists_{t\in T}\ A_t \subseteq C_t, \end{aligned}$$

denn $\forall_t A_t \not\subseteq C_t \iff \exists_{g\in G} \forall_{t\in T}\ g_t \in A_t \setminus C_t$. Die Bedingung $\exists_{t\in T}\ A_t \subseteq C_t$ ist aber äquivalent zu $(A_t, B_t)_{t\in T}\ \nabla\ (C_t, D_t)_{t\in T}$, was noch zu beweisen war. $\square$

Satz 27. *Der Kongruenzverband eines Tensorproduktes endlich vieler doppelt fundierter Verbände ist isomorph zum Tensorprodukt der Kongruenzverbände:*

$$\mathfrak{C}\Big(\bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t\Big) \cong \bigotimes_{t\in T} \mathfrak{C}(\mathbf{V}_t)$$

Beweis. Nach Satz 12 (S. 111) ist $\mathfrak{C}(\mathbf{V}_t) \cong \underline{\mathfrak{B}}(G_t, M_t, \not\swarrow\!\!\!/\!\!/)$, wobei $g_t \swarrow\!\!\!/\!\!/ m_t$ in $\mathbf{V}_t$ genau dann gilt, wenn es Gegenstände $g_1, \ldots, g_n$ und Merkmale $m_1, \ldots, m_n$ gibt mit

$$g_t = g_1 \swarrow m_1 \nwarrow g_2 \swarrow \cdots \nwarrow g_n \swarrow m_n = m_t.$$

Wenn es eine solche Elementfolge der Länge n gibt, dann auch für jede Zahl größer als n, denn es findet sich dann ein Merkmal $k \in V_t$ mit $g_t \swarrow\!\!\!\nearrow k$ und folglich $g_t \swarrow k \nwarrow g_t$, wodurch die Folge beliebig verlängert werden kann. Wir können Hilfssatz 73 anwenden und erhalten, da T endlich ist,

$$g \swarrow\!\!\!/\!\!/ m \text{ in } \bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t \iff g_t \swarrow\!\!\!/\!\!/ m_t \text{ in } \mathbb{K}_t \text{ für alle } t \in T,$$

und folglich

$$g \not\swarrow\!\!\!/\!\!/ m \iff g_t \not\swarrow\!\!\!/\!\!/ m_t \text{ für ein } t \in T.$$

Daher ist

$$(G, M, \not\swarrow\!\!\!/\!\!/) = \Big(\bigtimes_{t\in T} (G_t, M_t, \not\swarrow\!\!\!/\!\!/)\Big),$$

was mit Satz 12 die Behauptung beweist. $\square$

Das Tensorprodukt war definiert worden als der Begriffsverband des Kontextes

$$(G, M, \nabla) := \bigtimes_{t\in T} (V_t, V_t, \leq),$$

dabei ist $G^{\nabla} = \{m \mid \exists_t\ m_t = 0\}$ und $M^{\nabla} = \{g \mid \exists_t\ g_t = 0\}$. Die Begriffsverbände der Faktorkontexte sind auf natürliche Weise isomorph zu den Verbänden $\mathbf{V}_t$. Es liegt daher nahe, die Einbettung von $\mathbf{V}_s$ in $\bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t$ mit dem gleichen Buchstaben zu bezeichnen wie die zugehörige Einbettung in Hilfssatz 71. Wir definieren also $\varepsilon_s : \mathbf{V}_s \to \bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t$ durch

$$\varepsilon_s(x_s) := (\{g \in G \mid g_s \le x_s\} \cup M^\nabla, \{m \in M \mid x_s \le m_s\} \cup G^\nabla),$$

wobei $(G, M, \nabla) := \times_{t\in T}(V_t, V_t, \le)$.

Hilfssatz 75. *Für jeden Gegenstandsbegriff $y := \tilde{\gamma}(g)$ und für jeden Merkmalbegriff $z := \mu(m)$ des Tensorproduktes sowie jede Teilmenge $S \subseteq T$ gilt*

$$y \le \bigvee_{s\in S} \varepsilon_s(x_s) \iff \exists_{s\in S}\ y \le \varepsilon_s(x_s)$$

$$z \ge \bigwedge_{s\in S} \varepsilon_s(x_s) \iff \exists_{s\in S}\ z \ge \varepsilon_s(x_s).$$

Beweis. Der Hilfssatz behauptet, umformuliert, daß der Begriffsumfang von $\bigvee_{s\in S} \varepsilon_s(x_s)$ gerade die Vereinigung der Umfänge der $\varepsilon_s(x_s), s \in S$, ist, und dual. Dies ergibt sich unmittelbar aus den oben angegebenen expliziten Darstellungen dieser Mengen. □

Die Unterverbände $\varepsilon_t(V_t)$ verhalten sich also *zueinander distributiv*: Supremum bzw. Infumum von Elementen aus unterschiedlichen $\varepsilon_t(V_t)$ kann gebildet werden, indem die Begriffsumfänge (bzw. -inhalte) vereinigt werden. Dies hat eine Rechenregel zur Folge, die in der nun kommenden Definition formuliert wird:

Definition 65. Wir nennen zwei Teilmengen X und Y eines vollständigen Verbandes **zueinander distributiv**, wenn für jede Indexmenge S und jedes Paar von Folgen $(x_s)_{s\in S}$, $(y_s)_{s\in S}$ von Elementen $x_s \in X$, $y_s \in Y$ die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$\bigvee_{s\in S}(x_s \wedge y_s) \ge \bigwedge_{R\subseteq S}(\bigvee_{r\in R} x_r \vee \bigvee_{s\in S\setminus R} y_s),$$

$$\bigwedge_{s\in S}(x_s \vee y_s) \le \bigvee_{R\subseteq S}(\bigwedge_{r\in R} x_r \wedge \bigwedge_{s\in S\setminus R} y_s). \qquad \diamond$$

Man kann die Ungleichungen übrigens ohne Änderung der Aussage durch Gleichungen ersetzen, denn die jeweils anderen Richtungen gelten in jedem Verband.

Hilfssatz 76. *Sind $\mathbf{V}_i$ und $\mathbf{V}_j$, $(i \ne j)$ Faktoren eines Tensorprodukts*

$$\bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t,$$

dann sind die Unterverbände $\varepsilon_i(\mathbf{V}_i)$ und $\varepsilon_j(\mathbf{V}_j)$ zueinander distributiv.

Beweis. Wir beweisen nur die erste Ungleichung

$$\bigvee_{s\in S}(\varepsilon_i(x_s)\wedge\varepsilon_j(y_s))\geq\bigwedge_{R\subseteq S}(\bigvee_{r\in R}\varepsilon_i(x_r)\vee\bigvee_{s\in S\setminus R}\varepsilon_j(y_s)).$$

Dazu genügt es nachzuweisen, daß jeder Merkmalbegriff z, der $\geq$ der linken Seite ist, auch $\geq$ der rechten Seite der Ungleichung ist. Es sei also z ein Merkmalbegriff und

$$R_z:=\{r\in S\mid\varepsilon_i(x_r)\leq z\}.$$

Dann hat man natürlich $\bigvee_{r\in R_z}\varepsilon_i(x_r)\leq z$, und kann folgende Schlußkette nachvollziehen:

$$\begin{array}{lll} & & z\geq\bigvee_{s\in S}(\varepsilon_i(x_s)\wedge\varepsilon_j(y_s))\\ \iff & \forall_{s\in S} & z\geq\varepsilon_i(x_s)\wedge\varepsilon_j(y_s)\\ \iff & \forall_{s\in S} & z\geq\varepsilon_i(x_s)\text{ oder }z\geq\varepsilon_j(y_s)\\ \iff & \forall_{s\in S\setminus R_z} & z\geq\varepsilon_j(y_s)\\ \iff & & z\geq\bigvee_{r\in R_z}\varepsilon_i(x_r)\vee\bigvee_{s\in S\setminus R_z}\varepsilon_j(y_s)\\ \implies & & z\geq\bigwedge_{R\subseteq S}(\bigvee_{r\in R}\varepsilon_i(x_r)\vee\bigvee_{s\in S\setminus R}\varepsilon_j(y_s))\end{array}$$

Bei der zweiten Äquivalenz wurde Hilfssatz 75 benutzt. □

Die Wortwahl „zueinander distributiv" legt das folgende Ergebnis nahe:

Satz 28. *Das Tensorprodukt vollständig distributiver Verbände ist vollständig distributiv.*

Beweis. Wir benutzen im Vorgriff die Charakterisierung der vollständigen Distributivität durch eine Kontextbedingung aus Satz 40 (S. 221) und zeigen, daß sich diese Bedingung von den Faktoren auf ein direktes Produkt von Kontexten überträgt. Zur leichteren Lesbarkeit ersetzen wir dabei die Aussage $h\in k''$ durch die (äquivalente) Aussage $k'\subseteq h'$.

Es seien also $\mathbb{K}_t:=(G_t,M_t,I_t)$, $t\in T$, Kontexte und $(G,M,I):=\bigtimes_{t\in T}\mathbb{K}_t$, weiter seien $g\in G$ und $m\in M$ Elemente mit $(g,m)\notin I$. Dann hat man für alle $t\in T$

$$(g_t,m_t)\notin I_t$$

und, wenn die $\mathbb{K}_t$ die Bedingung aus Satz 40 erfüllen, für jedes $t\in T$ Elemente $h_t\in G_t$ sowie $n_t\in M_t$ mit

$$(h_t,m_t)\notin I_t,(g_t,n_t)\notin I_t\text{ und }k_t\subseteq h_t\text{ für alle }k\in G_t\setminus n_t'.$$

Wir setzen $h:=(h_t)_{t\in T}$ und $n:=(n_t)_{t\in T}$ und finden $(h,m)\notin I$ sowie $(g,n)\notin I$. Ist nun $k\in G\setminus n'$, also $k_t\in G_t\setminus n_t'$ für alle $t\in T$, dann gilt für jedes $t\in T$

$$k'_t \subseteq h'_t$$

und nach Hilfssatz 72 folglich

$$k' \subseteq h',$$

was zu beweisen war. □

Das direkte Produkt von Verbänden hatten wir, um ein vielseitigeres Zerlegungsprinzip zu gewinnen, zum subdirekten Produkt verallgemeinert. Ähnlich kann man beim Tensorprodukt verfahren. Dazu bieten sich zwei Wege an: Erstens kann man ein *subtensorielles Produkt* von vollständigen Verbänden in Analogie zum subdirekten Produkt definieren, und zweitens läßt sich ein *subdirektes Produkt* von Kontexten einführen. Macht man es richtig, dann entsprechen diese beiden Konstruktionen einander.

Definition 66. Ein **subtensorielles Produkt** vollständiger Verbände $\mathbf{V}_t$, $t \in T$, ist ein Faktorverband

$$\bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t \Big/ \Theta$$

des Tensorproduktes, für den die Restriktionen der Faktorabbildung

$$\pi_\Theta : \bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t \to \bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t \Big/ \Theta, \qquad x \mapsto [x]\Theta$$

auf die Unterverbände $\varepsilon_t(\mathbf{V}_t)$ sämtlich injektiv sind.

Eine **subtensorielle Zerlegung** eines vollständigen Verbandes $\mathbf{V}$ ist dann eine Folge $(\mathbf{V}_t \mid t \in T)$ vollständiger Unterverbände von $\mathbf{V}$, für die es einen Isomorphismus ψ von $\mathbf{V}$ auf ein subtensorielles Produkt $\bigotimes_{t\in T} \mathbf{V}_t / \Theta$ gibt mit

$$\pi_\Theta(\varepsilon_t(\mathbf{V}_t)) = \psi(\mathbf{V}_t), \quad t \in T. \qquad \Diamond$$

Subtensorielle Zerlegungen können intern charakterisiert werden. Wir beschränken uns der Übersichtlichkeit halber auf den Fall $T = \{1, 2\}$.

Hilfssatz 77. *Ein Paar $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ vollständiger Unterverbände ist genau dann eine subtensorielle Zerlegung von $\mathbf{V}$, wenn $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ zueinander distributiv sind und ihre Vereinigung $\mathbf{V}$ erzeugt.*

Beweis. Sind $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ zueinander distributive Unterverbände von $\mathbf{V}$, dann gibt es nach Satz 37 (S. 206), ⊗3, einen vollständigen Homomorphismus

$$\varphi : \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V},$$

für den $\varphi \circ \varepsilon_t = id_{V_t}$ für $t = 1$ und $t = 2$ gilt. Wenn $V_1 \cup V_2$ ganz $\mathbf{V}$ erzeugt, dann muß dieser Morphismus surjektiv sein, $\mathbf{V}$ ist dann also ein Faktorverband von $\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2$.

Ist umgekehrt $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ eine subtensorielle Zerlegung, dann sind $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ zueinander distributiv, denn diese Eigenschaft überträgt sich auf Faktorverbände. Ihre Vereinigung erzeugt $\mathbf{V}$, weil $\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2$ von $\varepsilon(\mathbf{V}_1) \cup \varepsilon(\mathbf{V}_2)$ erzeugt wird. □

Bei doppelt fundierten Begriffsverbänden läßt sich die Bezeichungsweise für subtensorielle Produkte noch etwas vereinfachen. Nach Satz 26 ist $\bigotimes_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$ ja isomorph zum Begriffsverband des direkten Produktes

$$(G, M, \nabla) := \bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t$$

der beteiligten Kontexte. Dem Unterverband $\varepsilon_t(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t))$ entspricht dabei jeweils die abgeschlossene Relation ∇_t. Im doppelt fundierten Fall ist sichergestellt, daß ein subtensorielles Produkt stets durch einen verträglichen Teilkontext $(H, N, \nabla \cap H \times N)$ von (G, M, ∇) induziert ist. Solche Teilkontexte beschreibt die folgende Definition:

Definition 67. Ein **subdirektes Produkt** von Kontexten

$$\mathbb{K}_t := (G_t, M_t, I_t), \quad t \in T,$$

ist ein verträglicher Teilkontext

$$(H, N, \nabla \cap H \times N)$$

des direkten Produktes $\bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $t \in T$ der Teilkontext

$$(H_t, N_t, I_t \cap H_t \times N_t)$$

mit

$$H_t := \{h_t \mid h \in H\} \quad \text{und} \quad N_t := \{n_t \mid n \in N\}$$

dicht in $\mathbb{K}_t$ ist. ◊

Hilfssatz 78. *Die subdirekten Produkte von Kontexten sind genau die verträglichen Teilkontexte zu subtensoriellen Produkten.*

Beweis. Nach Hilfssatz 38 (S. 103) ist die Bedingung, daß die Abbildung $\Pi_{H,N}$ eingeschränkt auf $\varepsilon_t(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t))$ injektiv ist, äquivalent dazu, daß der Teilkontext $(H, N, \nabla_t \cap H \times N)$ dicht in (G, M, ∇_t) ist. Dies wiederum ist nach dem gleichen Hilfssatz äquivalent dazu, daß für jeden Begriff (A, B) von (G, M, ∇_t)

$$(A \cap H)^{\nabla_t\nabla_t} = A \quad \text{und} \quad (B \cap N)^{\nabla_t\nabla_t} = B$$

gilt. Setzt man $A_t := \{g_t \mid g \in A\}$, so erkennt man anhand der Beschreibung der Begriffe von (G, M, ∇_t) in Hilfssatz 71, daß

$$\{g_t \mid g \in A \cap H\} = A_t \cap H_t$$

und deshalb

$$(A \cap H)^{\nabla_t\nabla_t} = \{g \in G \mid g_t \in (A_t \cap H_t)^{I_tI_t}\}$$

gilt. Es ist folglich

$$(A \cap H)^{\nabla_t\nabla_t} = A \iff (A_t \cap H_t)^{I_tI_t} = A_t.$$

Das ist wieder die Bedingung aus Hilfssatz 38. $(H, N, \nabla_t \cap N \times N)$ ist also genau dann dicht in (G, M, ∇_t), wenn $(H_t, N_t, I_t \cap H_t \times N_t)$ dicht in $\mathbb{K}_t$ ist. □

Die Einschränkungen der abgeschlossenen Relationen ∇_t auf einen solchen Teilkontext ergeben dann Teilrelationen $J_t := \nabla_t \cap H \times N$ mit

$$\underline{\mathfrak{B}}(H, N, J_t) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t).$$

Wir wollen nun klären, unter welchen Bedingungen ein Kontext *isomorph* zu einem subdirekten Produkt ist. Dazu definieren wir

Definition 68. Eine **subdirekte Zerlegung** eines Kontextes

$$\mathbb{K} := (G, M, I)$$

ist eine Familie $(I_t)_{t \in T}$ von Teilrelationen von I mit folgenden Eigenschaften:

1. $I = \bigcup_{t \in T} I_t$
2. Es gibt surjektive Abbildungen

$$\alpha : G \to H, \qquad \beta : M \to N$$

auf ein subdirektes Produkt $(H, N, \nabla \cap H \times N)$ mit

$$gI_tm \iff \alpha g \nabla_t \beta m.$$

$\Diamond$

Ist $(H, N, \nabla \cap H \times N)$ ein subdirektes Produkt, dann ist $(\nabla_t \cap H \times N)_{t \in T}$ eine subdirekte Zerlegung, wie man leicht erkennt, wenn man für α und β jeweils die identische Abbildung wählt.

Die Abbildungen α und β müssen nicht injektiv sein. Allerdings folgt aus $\alpha g = \alpha h$ stets $g^{I_t} = h^{I_t}$ für alle $t \in T$ und insbesondere $g' = h'$. (α, β) ist also „bis auf Bereinigen“ ein Isomorphismus von (G, M, I) auf $(H, N, \nabla \cap H \times N)$ und sogar von (G, M, I_t) auf $(H, N, \nabla_t \cap H \times N)$ für alle $t \in T$. Insbesondere haben die Kontexte $\mathbb{K}_t := (G, M, I_t)$ und $(H, N, \nabla_t \cap H \times N)$ isomorphe Begriffsverbände. Es liegt nahe, diese Kontexte als die – in der Definition ja nicht näher bezeichneten – Faktoren des direkten Produktes zu verwenden. Wir zeigen, daß dies möglich ist, bereinigen diese Kontexte zuvor aber noch. Dazu definieren wir für jeden der Kontexte

$$\mathbb{K}_t := (G, M, I_t)$$

Äquivalenzrelationen Θ_t auf G und Ψ_t auf M durch

$$\begin{aligned} (g, h) \in \Theta_t \quad &:\iff \quad g^{I_t} = h^{I_t} \\ (m, n) \in \Psi_t \quad &:\iff \quad m^{I_t} = n^{I_t}. \end{aligned}$$

Es ist also $\Theta_t = \ker \gamma_t$ und $\Psi_t = \ker \mu_t$. Der Kontext

$$\mathbb{K}_t^\circ := (G/\Theta_t, M/\Psi_t, \bar{I}_t)$$

mit

$$([g]\Theta_t, [m]\Psi_t) \in \bar{I}_t :\iff (g, m) \in I_t$$

ist dann der zugehörige bereinigte Kontext.

Dem Kontext $\mathbb{K} := (G, M, I)$ kann dann auf natürliche Weise ein Teilkontext des direkten Produktes

$$\bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t^\circ = (\bigtimes_{t\in T} G/\Theta_t, \bigtimes_{t\in T} M/\Psi_t, \overline{\nabla})$$

der bereinigten Kontexte $\mathbb{K}_t^\circ$ zugeordnet werden. Die Bezeichnung $\overline{\nabla}$ wird dabei nur zur besseren Unterscheidung benutzt. Gemeint ist die Inzidenz des direkten Produktes, also

$$(g_t)_{t\in T}\overline{\nabla}_s(m_t)_{t\in T} \iff g_s I_s m_s.$$

Die Rolle der Abbildungen α und β aus Definition 68 übernehmen dabei die Abbildungen $\underline{\iota}$ und $\overline{\iota}$, die wie folgt definiert sind:

$$\underline{\iota} : G \to \bigtimes_{t\in T} G/\Theta_t, \qquad g \mapsto ([g]\Theta_t)_{t\in T}$$

$$\overline{\iota} : M \to \bigtimes_{t\in T} M/\Psi_t, \qquad m \mapsto ([m]\Psi_t)_{t\in T}.$$

Der Bildkontext

$$(\underline{\iota}G, \overline{\iota}M, \overline{\nabla} \cap \underline{\iota}G \times \overline{\iota}M)$$

hat offenbar die Eigenschaft, daß die Projektionsabbildungen

$$([g]\Theta_t)_{t\in T} \mapsto [g]\Theta_s, \qquad ([m]\Psi_t)_{t\in T} \mapsto [m]\Psi_s$$

auf die Faktorkontexte surjektiv und ihre Bilder damit sicher dicht sind. Außerdem gilt

$$gI_tm \quad (\text{in } \mathbb{K}) \quad \iff \quad \alpha g\overline{\nabla}_t\beta m \quad (\text{in } (\underline{\iota}G, \overline{\iota}M, \overline{\nabla} \cap \underline{\iota}G \times \overline{\iota}M)).$$

Dieser Teilkontext ist also sicher dann ein subdirektes Produkt, wenn er verträglich ist.

Hilfssatz 79. *$(I_t)_{t\in T}$ ist genau dann eine subdirekte Zerlegung, wenn der Teilkontext*

$$(\underline{\iota}G, \overline{\iota}M, \overline{\nabla} \cap \underline{\iota}G \times \overline{\iota}M)$$

von $\bigtimes_{t\in T} \mathbb{K}_t^\circ$ verträglich ist.

Beweis. Wenn dieser Teilkontext verträglich ist, dann erfüllt er offenbar alle Bedingungen einer subdirekten Zerlegung. Mühsamer ist die andere Richtung. Es sei also, wie in Definition 68, $(H, N, \nabla \cap H \times N)$ ein verträglicher Teilkontext irgendeines direkten Produktes $\bigtimes_{t\in T}(\tilde{G}_t, \tilde{M}_t, J_t)$ und $\alpha : G \to H$, $\beta : M \to N$ Abbildungen mit

$$gI_tm \iff \alpha g\nabla_t\beta_m.$$

Wir haben zu zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen der im Hilfssatz genannte Teilkontext ebenfalls verträglich ist. Dazu benutzen wir die Charakterisierung aus Hilfssatz 35 (S. 101). Sei also $\underline{h} \in \underline{\iota}G$ ein Gegenstand des Teilkontextes, d.h. $\underline{h} = ([g]\Theta_t)_{t\in T}$ für einen Gegenstand $g \in G$. Weiter sei $m := ([m_t]\Psi_t)_{t\in T}$ ein beliebiges Merkmal des direkten Produktes der $\mathbb{K}_t^\circ$ mit $(\underline{h}, m) \notin \overline{\nabla}$. Dann haben wir zu zeigen, daß es ein Merkmal $\overline{n} \in \overline{\iota}M$ gibt mit

$$(\underline{h}, \overline{n}) \notin \overline{\nabla} \quad \text{und} \quad m^{\overline{\nabla}} \subseteq \overline{n}^{\overline{\nabla}}.$$

Aus den Voraussetzugen erhalten wir

$$([g]\Theta_t, [m_t]\Psi_t) \notin \bar{I}_t$$

für alle $t \in T$, d.h.

$$(g, m_t) \notin I_t \quad \text{für alle } t \in T.$$

Dann gilt auch

$$(\alpha g, \beta m_t) \notin \nabla_t \quad \text{für alle } t \in T.$$

Ist

$$\alpha g =: (g_t)_{t\in T}$$

und

$$\beta m_s =: (m_t^s)_{t\in T} \qquad \text{für jedes } s \in T,$$

dann haben wir

$$(g_t, m_t^t) \notin J_t \quad \text{für alle } t \in T.$$

Setzen wir

$$l := (m_t^t)_{t\in T},$$

dann ist l ein Merkmal des direkten Produktes mit $(\alpha g, l) \notin \nabla$. Weil $(H, N, \nabla \cap H \times N)$ verträglich ist, muß es ein Merkmal $\beta n \in N$ geben mit

$$(\alpha g, \beta n) \notin \nabla \quad \text{und} \quad l^\nabla \subseteq (\beta n)^\nabla.$$

Setzen wir $\beta n =: (n_t)_{t\in T}$, dann erhalten wir mit Hilfssatz 72

$$(m_t^t)^{\nabla_t} \subseteq (n_t)^{\nabla_t} \qquad \text{für alle } t \in T,$$

also

$$(\beta m_t)^{\nabla_t} \subseteq (\beta n)^{\nabla_t} \qquad \text{für alle } t \in T,$$

woraus

$$m_t^{I_t} \subseteq n_t^{I_t} \qquad \text{für alle } t \in T$$

folgt. Wir erhalten also

$$([m_t]\Psi_t)^{\bar{I}_t} \subseteq ([n_t]\Psi_t)^{\bar{I}_t} \quad \text{für alle } t \in T$$

und mit $\overline{n} := \overline{\iota}n$

$$m^{\overline{\nabla}} \subseteq \overline{n}^{\overline{\nabla}}.$$

Wegen $(\alpha g, \beta n) \notin \nabla$ haben wir $(g, n) \notin I$ und deshalb $(g, n) \notin I_t$ für alle $t \in T$, woraus die noch fehlende Aussage

$$(\underline{h}, \overline{n}) \notin \overline{\nabla}$$

folgt. □

Hilfssatz 79 gibt eine strukturelle Beschreibung subdirekter Produkte. Im doppelt fundierten Fall kann man das besonders leicht ausnutzen. Dies ist im folgenden Satz dargestellt. Die dabei verwendeten Bezeichnungen sind wie folgt zu verstehen: Eine Familie $(I_t)_{t\in T}$ von Teilrelationen von (G, M, I) wird doppelt fundiert genannt, wenn jeder der Kontexte (G, M, I_t) doppelt fundiert ist. Die Pfeilrelationen $\swarrow_t$ und $\nearrow_t$ beziehen sich ebenfalls auf diese Kontexte.

Satz 29. *Eine doppelt fundierte Familie $(I_t)_{t\in T}$ von Teilrelationen ist genau dann eine subdirekte Zerlegung von (G, M, I), wenn gilt:*

1. $I = \bigcup_{t\in T} I_t$,
2. *gilt $g_t \swarrow_t m$ für alle $t \in T$, dann existiert ein Gegenstand $h \in G$ mit $g_t^{I_t} = h^{I_t}$ für alle $t \in T$,*
3. *gilt $g \nearrow_t m_t$ für alle $t \in T$, dann existiert ein Merkmal $n \in M$ mit $m_t^{I_t} = n^{I_t}$ für alle $t \in T$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 79 ist $(I_t)_{t\in T}$ genau dann eine subdirekte Zerlegung, wenn der Teilkontext

$$(\underline{\iota}G, \bar{\iota}M, \overline{\nabla} \cap \underline{\iota}G \times \bar{\iota}M)$$

abgeschlossen ist. Wegen der Fundiertheitsvoraussetzung ist dies gleichbedeutend dazu, daß er pfeilabgeschlossen ist. Genau dies wird aber von den Bedingungen 2) und 3) des obigen Satzes gefordert. Bedingung 2) ist z.B. die Umformulierung der Bedingung

$$\text{aus} \quad ([g_t]\Theta_t)_{t\in T} \swarrow \bar{\iota}m \quad \text{folgt} \quad ([g_t]\Theta_t) \in \underline{\iota}G,$$

denn $([g_t]\Theta_t)$ gehört genau dann zu $\underline{\iota}G$, wenn ein Gegenstand $h \in G$ existiert mit $[g_t]\Theta_t = [h]\Theta_t$ für alle $t \in T$. □

Man kann dies zusammen mit Hilfssatz 77 zu einer praktikablen Bedingung ausbauen. Dazu nennen wir ein Paar (x, y) eines doppelt fundierten Verbandes $\mathbf{V}$ **schwach distributiv**, wenn für jedes $\bigvee$-irreduzible Element $g \in J(\mathbf{V})$

$$g \leq x \vee y \iff g \leq x \text{ oder } g \leq y$$

gilt und dual

$$m \geq x \wedge y \iff m \geq x \text{ oder } m \geq y$$

für jedes $\bigwedge$-irreduzible Element $m \in M(\mathbf{V})$ gilt. Zwei Begriffe (A_1, B_1) und (A_2, B_2) bilden also sicher dann ein schwach distributives Paar, wenn $A_1 \cup A_2$ ein Begriffumfang und $B_1 \cup B_2$ ein Begriffsinhalt ist. Wir hatten oben gesehen, daß dies für Paare (x, y) von Elementen eines Tensorproduktes mit $x \in \varepsilon_i(\mathbf{V}_i)$, $y \in \varepsilon_j(\mathbf{V}_j)$ und $i \neq j$ stets der Fall ist. Dies hatte zur Folge, daß diese Unterverbände zueinander distributiv sind. Tatsächlich zeigt man mit dem gleichen Beweis wie bei Hilfssatz 76 die folgende Aussage:

Hilfssatz 80. *Sind alle Paare* (x_t, y_t), $t \in T$, *schwach distributiv, dann gilt*

$$\bigvee_{t\in T}(x_t \wedge y_t) = \bigwedge_{S\subseteq T}(\bigvee_{s\in S} x_s \vee \bigvee_{t\in T\setminus S} y_t)$$

und auch die duale Gleichung. □

Satz 30. *Es seien* $\boldsymbol{V}_1$ *und* $\boldsymbol{V}_2$ *vollständige Unterverbände von* $\boldsymbol{V}$, *und* $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}_1$ *und* $\boldsymbol{V}_2$ *seien doppelt fundiert. Dann ist* $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ *genau dann eine subtensorielle Zerlegung von* $\boldsymbol{V}$, *wenn die Vereinigung* $\boldsymbol{V}_1 \cup \boldsymbol{V}_2$ *den Verband* $\boldsymbol{V}$ *erzeugt und jedes Paar* (x_1, x_2) *mit* $x_1 \in \boldsymbol{V}_1$ *und* $x_2 \in \boldsymbol{V}_2$ *schwach distributiv ist.*

Beweis. Es folgt sofort aus den Hilfssätzen 77 und 80, daß die angegebenen Bedingungen hinreichend für eine subtensorielle Zerlegung sind. Zu zeigen ist, daß die schwache Distributivität auch notwendig ist. Dazu benutzen wir Satz 29 für den Standardkontext

$$\mathbb{K}(\boldsymbol{V}) := (J(\boldsymbol{V}), M(\boldsymbol{V}), \leq)$$

von $\boldsymbol{V}$. Betrachte ein Element $x_1 \in \boldsymbol{V}_1$ und ein Element $x_2 \in \boldsymbol{V}_2$ sowie ein $\bigvee$-irreduzibles Element $g \in J(\boldsymbol{V})$ mit $g \not\leq x_1$ und $g \not\leq x_2$. Dann gibt es Elemente $m_1, m_2 \in M(\boldsymbol{V})$ mit $x_1 \leq m_1$, $x_2 \leq m_2$ und $g \nearrow_1 m_1$, $g \nearrow_2 m_2$, wobei $\nearrow_t$ die Pfeilrelation bezüglich der abgeschlossenen Teilrelation I_t ist, die zu $\boldsymbol{V}_t$ gehört. Nach Satz 29 gibt es ein Merkmal $m \in M(\boldsymbol{V})$ mit $m^{I_1} = m_1^{I_1}$ und $m^{I_2} = m_2^{I_2}$. Bedingung 1.von Satz 29 erzwingt $m^I = m^{I_1} \cup m^{I_2}$, woraus $g \not\leq m$ folgt. Da $m = m_1 \vee m_2 \geq x_1 \vee x_2$ gilt, hat dies $g \not\leq x_1 \vee x_2$ zur Folge, was eine der Bedingungen für die schwache Distributivität ist. Die andere ergibt sich dual. □

Korollar 81. *Zwei doppelt fundierte vollständige Unterverbände* $\boldsymbol{V}_1$ *und* $\boldsymbol{V}_2$, *deren Vereinigung einen ebenfalls doppelt fundierten Unterverband erzeugt, sind genau dann zueinander distributiv, wenn jedes Paar* (x_1, x_2) *mit* $x_1 \in \boldsymbol{V}_1$ *und* $x_2 \in \boldsymbol{V}_2$ *schwach distributiv ist.* □

Beispiel 8. Wir untersuchen den in Abbildung 4.19 dargestellten Verband darauf, ob er eine subtensorielle Zerlegung hat. Abgesehen von Paaren vergleichbarer Elemente (solche sind automatisch schwach distributiv) enthält der Verband nur drei schwach distributive Paare. Diese sind im Diagramm auf der rechten Seite durch die gepunkteten Linien angegeben. Man erkennt, daß es nur eine nichttriviale Zerlegung in zwei Unterverbände gibt, die die Bedigungen von Satz 30 erfüllen. Diese beiden Unterverbände sind ebenfalls im rechten Diagramm durch die gefüllten bzw. verdoppelten Kreise kenntlich gemacht.

In Abbildung 4.20 ist der Kontext $\mathbb{K}(\boldsymbol{V})$ angegeben und die zu den Unterverbänden gehörenden abgeschlossenen Relationen samt ihren Pfeilrelationen. Man kann bei diesen kleinen Kontexten leicht überprüfen, daß die

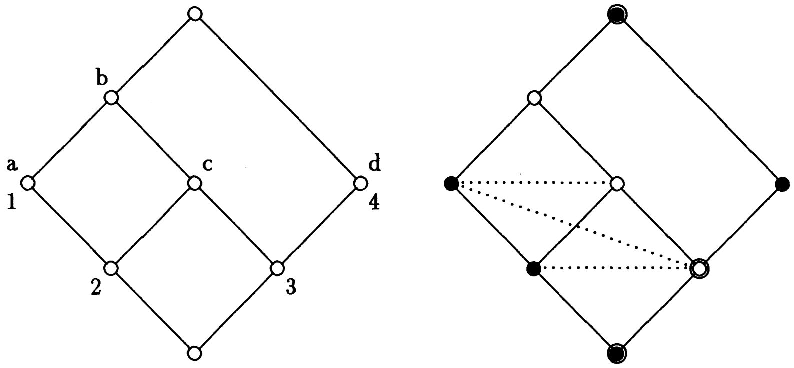


Abbildung 4.19. Die gepunkteten Linien im rechten Diagramm verbinden die schwach distributiven Paare unvergleichbarer Elemente.

I	a	b	c	d
1	×	×		
2	×	×	×	
3		×	×	×
4				×

I_1	a	b	c	d
1	×	×	⤢	↗
2	×	×	×	⤢
3	⤢	⤢	↙	×
4	⤢	⤢	↙	×

I_2	a	b	c	d
1		⤢	⤢	⤢
2		⤢	⤢	⤢
3	⤢	×	×	×
4		⤢	⤢	⤢

$\overline{I_1}$	a, b	c	d
1	×		
2	×	×	
3, 4			×

$\overline{I_2}$	a	b, c, d
1, 2, 4		
3		×

Abbildung 4.20. Kontext zum Verband aus Abbildung 4.19, zusammen mit den abgeschlossenen Relationen zu den Unterverbänden. Darunter die bereinigten Kontexte.

$\overline{\nabla}$		a, b		c		d		
		a	b, c, d	a	b, c, d	a	b, c, d	
1	1, 2, 4	×	×		⤢		↗	←
	3	×	×	⤢	×	↗	×	
2	1, 2, 4	×	×	×	×		⤢	←
	3	×	×	×	×	⤢	×	
3,4	1, 2, 4		⤢		↙	×	×	←
	3	⤢	×	↙	×	×	×	←
		↑	↑		↑		↑	

Abbildung 4.21. Das direkte Produkt der beiden bereinigten Kontexte aus Abbildung 4.20. Der Kontext aus Hilfssatz 79 ist durch die Pfeile am Rand markiert.

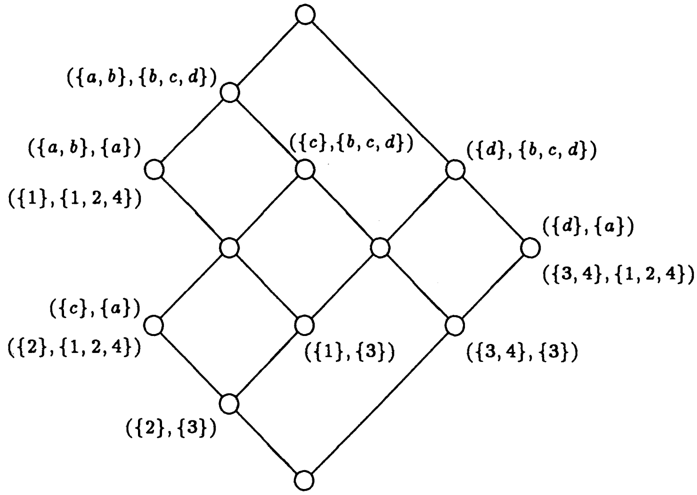


Abbildung 4.22. Der Begriffsverband zum Kontext aus Abbildung 4.21 ist das Tensorprodukt der Unterverbände aus Abbildung 4.19.

Bedingungen aus Satz 29 in der Tat erfüllt sind. Wir können deshalb zu den bereinigten Kontexten übergehen, um eine konkrete Darstellung als subtensorielles Produkt zu finden. In Hilfssatz 79 ist angegeben, wie man vorzugehen hat. Der dort genannte Teilkontext

$$(\underline{\iota}G, \bar{\iota}M, \overline{\nabla} \cap \underline{\iota}G \times \bar{\iota}M)$$

von $\times_{t \in T} \mathbb{K}_t^\circ$ ist in Abbildung 4.21 durch Pfeile am Rande markiert. Anhand der Pfeilrelationen sieht man, daß er pfeilabgeschlossen und damit verträglich ist. Abbildung 4.22 zeigt schließlich den Begriffsverband des Kontextes aus Abbildung 4.21, also das Tensorprodukt der beiden Unterverbände, die die subtensorielle Zerlegung bilden. Man erkennt den Ausgangsverband als Intervall unterhalb des größten Elementes; tatsächlich werden diese Elemente durch die Projektionsabbildung getrennt.

4.5 Literatur und Hinweise

Zu 4.1 Die einleitenden Sätze in diesem Abschnitt, etwa bis Hilfssatz 60, sind bekannten Ergebnissen der Allgemeinen Algebra analog. Allerdings fallen die vollständigen Verbände nicht unter die von der Allgemeinen Algebra behandelten Strukturklassen und erfordern deshalb gesonderte Beweise. Einiges findet sich bei Pierce [137]. Die begriffsanalytischen Resultate stützen sich hauptsächlich auf [194].

Zu 4.2 Der Abschnitt folgt [197]. Die hier entwickelte Zerlegungs- und Verklebungstechnik ist von Herrmann [87] entwickelt und erfolgreich eingesetzt worden, eine modernere Fassung geben Day und Herrmann [34]. Vogt [180] hat die Technik der Atlas-Zerlegung zur Klärung der Struktur der Untergruppenverbände endlicher abelscher Gruppen eingesetzt.

Zu 4.3 Substitutionssumme und Substitutionsprodukt wurden von Luksch und Wille [117] zum Zwecke der begriffsanalytischen Auswertung von Paarvergleichstest benutzt, in [116] formal eingeführt und eingehend von Stephan [163], [162] untersucht. Aus Stephans Dissertation stammt insbesondere Satz 25 und der vorbereitende Hilfssatz 70. Wir haben allerdings gegenüber der zitierten Literatur die Notation leicht geändert und schreiben nun $U(a,b)V$, wo in früheren Arbeiten $U(b,a)V$ steht.

Zu 4.4 Tensorprodukte vollständiger Verbände sind in vielen Arbeiten untersucht. Unsere Darstellung (§4.4, §5.4) erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern soll die Grundkenntnisse bereitstellen. Die hier diskutierte Definition des Tensorproduktes stammt aus [199] und der Verallgemeinerung in [208]. Vorläufer findet man u.a. bei Waterman [185], Mowat [131] und Shmuely [157]. Eine Beschreibung der Begriffsumfänge und -inhalte direkter Produkte von Kontexten (als G_κ-Ideale) findet sich in [208]. Die kategorientheoretische Bedeutung dieses Produktes ist bei Erné [50] untersucht. Weitere Quellen sind Bandelt [7], Raney [140] und Kalmbach [94].

Subtensorielle Produkte werden in [69] behandelt.

5. Konstruktionen von Begriffsverbänden

Damit ein Konstruktionsverfahren, mit dem man aus zwei Kontexten $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ einen neuen, sagen wir $\mathbb{K}$, gewinnt, auch ein brauchbares Konstruktionsprinzip für Begriffsverbände abgibt, sollte es *unter Reduzieren invariant* sein. Damit ist folgendes gemeint: wird die gleiche Konstruktion auf Kontexte angewendet, deren Begriffsverbände zu denen von $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ isomorph sind, dann sollte der Begriffsverband des Ergebnisses auch isomorph zu dem von $\mathbb{K}$ sein.

Wir haben im ersten Kapitel schon eine ganze Reihe solcher Verfahren vorgestellt. Hier beschreiben wir nun vier Konstruktionen im Detail.

Beim *subdirekten Produkt* betrachtet man Unterverbände direkter Produkte. Wir hatten in 4.1 bereits untersucht, wie man die zugehörigen abgeschlossenen Relationen der Kontextsumme erkennt. Nun zeigen wir, wie man solche Relationen als eine *Fusion* von Kontexten konstruieren kann.

Obwohl subdirekte Produkte für die Allgemeine Algebra von zentraler Wichtigkeit sind, werden sie selten als Konstruktionsmittel verstanden. Ein Grund dafür ist ihre Mehrdeutigkeit: Ein subdirektes Produkt ist durch die Angabe der Faktoren noch nicht eindeutig festgelegt. Dem kann aber leicht abgeholfen werden, indem man in den Faktoren feste Erzeugendensysteme wählt. Man kommt so zum P-Produkt algebraischer Strukturen und zur P-Fusion von Kontexten. Eine mögliche Anwendung dieser Konstruktion ist es, verschiedene Datensätze zu einem Sachverhalt gemeinsam zu entfalten.

Die in 4.2 vorgestellten Atlas-Verklebungen ergänzen wir durch eine Methode, bei der Verbände „seitlich" verklebt werden. Das ist dann besonders einfach darzustellen, wenn der Überlappungsbereich der beteiligten Verbände die Vereinigung eines Ideals und eines Filters ist.

Der dritte Abschnitt behandelt die Technik der *Verdopplung* konvexer Teilmengen eines Begriffsverbandes. Diese Konstruktion ist in der mathematischen Verbandstheorie unter anderem bei der Untersuchung freier Verbände erfolgreich angewendet worden.

Schließlich greifen wir das Tensorprodukt vollständiger Verbände wieder auf. Wir geben eine verbandstheoretische Charakterisierung dieses Produktes und führen die *tensoriellen Operationen* ein, mit deren Hilfe man das Rechnen in einem Tensorprodukt auf das in den Faktoren zurückführen kann.

5.1 Subdirekte Produktkonstruktionen

Die *(direkte) Summe* von Kontexten hatten wir bereits in Definition 34 (S. 46) eingeführt, allerdings nur für den Fall zweier Kontexte formuliert. Allgemeiner definiert man für eine Familie von Kontexten $\mathbb{K}_t := (G_t, M_t, I_t)$, $t \in T$, die Summe durch

$$\sum_{t\in T}(G_t, M_t, I_t) := \left(\dot{\bigcup} G_t, \dot{\bigcup} M_t, \dot{\bigcup} I_t \cup \bigcup_{s\neq t} G_s \times M_t\right).$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Mengen G_t, $t \in T$, paarweise disjunkt sind und ebenso die Mengen $M_t, t \in T$. Falls nötig, wird dies erzwungen, indem zuvor wie in Definition 34 (S. 46) jeder Kontext $\mathbb{K}_t := (G_t, M_t, I_t)$ durch den isomorphen Kontext $\dot{\mathbb{K}}_t := (\dot{G}_t, \dot{M}_t, \dot{I}_t)$ mit $\dot{G}_t := \{t\} \times G_t$ und $\dot{M}_t := \{t\} \times M_t$ ersetzt wird. Man hat dann

Satz 31. *Der Begriffsverband einer Summe von Kontexten ist isomorph zum Produkt ihrer Begriffsverbände:*

$$\underline{\mathfrak{B}}(\sum_{t\in T}\mathbb{K}_t) \cong \bigtimes_{t\in T} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t).$$

Die Abbildung

$$(A, B) \mapsto ((A \cap G_t, B \cap M_t) \mid t \in T)$$

ist ein (natürlicher) Isomorphismus.

Die Projektionsabbildung auf $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$, kombiniert mit diesem Isomorphismus, ist die Abbildung

$$(A, B) \mapsto (A \cap G_t, B \cap M_t),$$

der dazugehörige verträgliche Teilkontext ist $\mathbb{K}_t =: (G_t, M_t, I_t)$.

Beweis. Zu zeigen ist lediglich, daß die Begriffe des Summenkontextes genau die Paare (A, B) mit $A \subseteq \dot{\bigcup} G_t$, $B \subseteq \dot{\bigcup} M_t$, sind, die die Eigenschaft haben, daß für jedes $t \in T$ die Restriktion $(A \cap G_t, B \cap M_t)$ ein Begriff von $\mathbb{K}_t$ ist. Das ist einfach: Man macht sich anhand der Definition klar, daß für eine Menge $A_t \subseteq G_t$ die Ableitung im Summenkontext wie folgt zu ermitteln ist:

$$A_t' = A^{I_t} \cup \bigcup_{s\neq t} M_t.$$

Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq G$ hat man deshalb (mit $A_t := A \cap G_t$)

$$A' = (\bigcup_{t\in T} A_t)' = \bigcap_{t\in T} A_t' = \bigcup_{t\in T} A_t^{I_t}.$$

Dual gilt, daß die Begriffsumfänge des Summenkontextes genau die Vereinigungen von Begriffsumfängen der Summanden sind, woraus die behauptete Isomorphie folgt. Die Angabe über die verträglichen Teilkontexte gewinnt man aus Hilfssatz 34 (S. 100). □

Wir möchten in diesem Abschnitt vollständige subdirekte Produkte, also vollständige Unterverbände eines direkten Produktes, für die die Projektionsabbildungen surjektiv sind, in der Kontextsprache charakterisieren. Den Ansatz dazu haben wir bereits gemacht, denn jedem vollständigen Unterverband entspricht eine abgeschlossene Relation J im Summenkontext, und die Surjektivität der Projektionsabbildungen ist nach Hilfssatz 48 (S. 115) äquivalent zu der Bedingung $J \cap G_t \times M_t = I_t$. Dies ist in folgendem Hilfssatz zusammengefaßt:

Hilfssatz 82. *Die subdirekten Produkte von Begriffsverbänden $\underline{\mathfrak{B}}(G_t, M_t, I_t)$ entsprechen eineindeutig den abgeschlossenen Relationen J des Summenkontextes $\sum_{t\in T}(G_t, M_t, I_t)$ mit $J \cap G_t \times M_t = I_t$ für alle $t \in T$.* □

Wir wollen solche Relationen J noch genauer beschreiben. Dazu benötigen wir den Begriff der *Bindung* zwischen Kontexten, der im Abschnitt 7.2 noch ausführlicher behandelt wird. Zur leichteren Formulierung führen wir noch eine Kurzschreibweise ein: Sind $\mathbb{K}_s := (G_s, M_s, I_s)$ und $\mathbb{K}_t := (G_t, M_t, I_t)$ Kontexte und ist $J_{st} \subseteq G_s \times M_t$ eine Relation, dann schreiben wir für $X \subseteq G_s$, $Y \subseteq M_t$

$$X^t \quad \text{statt} \quad X^{J_{st}} \qquad \text{und} \qquad Y^s \quad \text{statt} \quad Y^{J_{st}}.$$

Definition 69. Eine **Bindung** von einem Kontext $\mathbb{K}_s := (G_s, M_s, I_s)$ zu einem Kontext $K_t := (G_t, M_t, I_t)$ ist eine eine Relation $J_{st} \subseteq G_s \times M_t$, für die gilt:

- für jeden Gegenstand $g \in G_s$ ist g^t ein Begriffsinhalt von $\mathbb{K}_t$
- für jedes Merkmal $m \in M_t$ ist m^s ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}_s$.

◊

Eine Bindung läßt sich gut in der Bildsprache der Kreuztabellen veranschaulichen, indem man die beiden Kontexte diagonal untereinander schreibt und die Bindung in den rechten oberen Quadranten einträgt (eine Bindung von $\mathbb{K}_t$ zu $\mathbb{K}_s$ kann in die linken unteren Quadranten geschrieben werden). Jede Zeile von J_{st} muß einen Begriffsinhalt von $\mathbb{K}_t$ und jede Spalte von J_{st} einen Begriffsumfang von $\mathbb{K}_s$ angeben.

$\mathbb{K}_s$	J_{st}
	$\mathbb{K}_t$

Hilfssatz 83. *Ist J_{rs} eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_s$ und ist J_{st} eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$, so gilt für $g \in G_r$, $m \in M_t$*

$$m \in g^{sst} \iff m^s \supseteq g^{ss} \iff g^s \supseteq m^{ss} \iff g \in m^{ssr}.$$

Beweis. (Vergl. Abbildung 5.1.) Die mittlere Äquivalenz

$$m^s \supseteq g^{ss} \iff g^s \supseteq m^{ss}$$

folgt direkt aus Hilfssatz 10 (S. 18), weil g^s ein Inhalt und m^s ein Umfang von $\mathbb{K}_s$ ist. Die beiden anderen Äquivalenzen sind zueinander dual und ergeben sich mühelos aus den Definitionen. Man hat z.B.

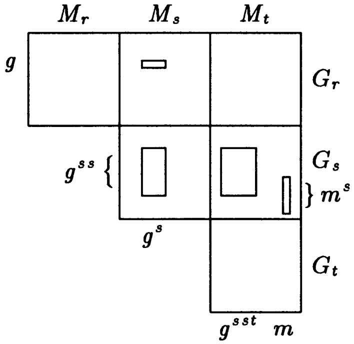


Abbildung 5.1. Zum Beweis von Hilfssatz 83.

$$\begin{aligned} m \in g^{sst} &\iff m \in g^{ss\prime} && (\text{da } m \in M_t) \\ &\iff m' \supseteq g^{ss} \\ &\iff m^s \supseteq g^{ss} && (\text{da } g^{ss} \subseteq G_s \text{ und } m^s = m' \cap G_s). \end{aligned}$$

□

Hilfssatz 84. *Ist J_{rs} eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_s$ und J_{st} eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$, dann ist*

$$J_{rs} \circ J_{st} := \{(g, m) \in G_r \times M_t \mid g^{ss} \subseteq m^s\}$$

eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_t$. Für eine beliebige Bindung J_{rt} von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_t$ gilt $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$ genau dann, wenn

$$g^t \subseteq g^{sst} \text{ für alle } g \in G_r$$

oder, dazu äquivalent, wenn $m^r \subseteq m^{ssr}$ für alle $m \in M_t$ gilt.

Beweis. Nach Hilfssatz 83 ist für festes $g \in G_r$

$$\{m \in M_t \mid (g, m) \in J_{rs} \circ J_{st}\} = \{m \in M_t \mid g^{ss} \subseteq m^s\} = g^{sst},$$

also ein Begriffsinhalt von $\mathbb{K}_t$. Dual zeigt man, daß für jedes $m \in M_t$

$$\{g \in G_r \mid (g, m) \in J_{rs} \circ J_{st} = m^{ssr}\}$$

gilt. Deshalb ist $J_{rs} \circ J_{st}$ eine Bindung. Aus der gleichen Überlegung ergibt sich auch die zweite Behauptung des Hilfssatzes. □

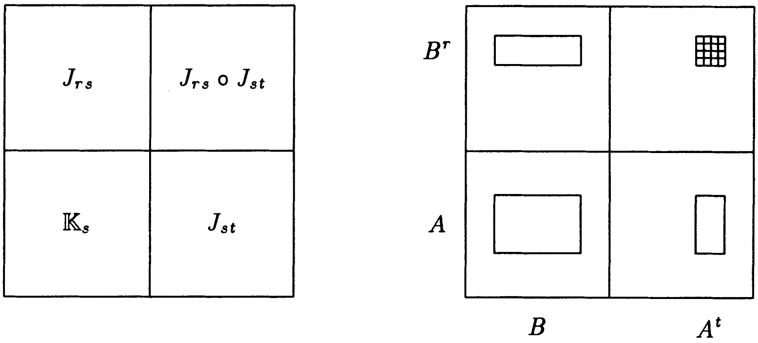


Abbildung 5.2. Zur Definition von $J_{rs} \circ J_{st}$.

Die Definition von $J_{rs} \circ J_{st}$ kann man sich ohne Rückgriff auf die Kontexte $\mathbb{K}_r$ und $\mathbb{K}_t$ veranschaulichen. Man hat nämlich

$$J_{rs} \circ J_{st} = \bigcup_{(A,B)\in\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_s)} B^r \times A^t,$$

was anhand Abbildung 5.2 leicht gedeutet werden kann:

Zu jedem Begriff (A, B) von $\mathbb{K}_s$ nehmen wir (g, m) dann zu $J_{rs} \circ J_{st}$ hinzu, wenn $B \subseteq g^s$ und $A \subseteq m^s$ gilt. Deshalb ist $\mathbb{K}_s$ ein dichter Teilkontext des Kontextes in Abbildung 5.2.

Hilfssatz 85. *Ist $J \subseteq I$ eine Teilrelation im Summenkontext $(G, M, I) := \sum_{t\in T} \mathbb{K}_t$ mit der Eigenschaft, daß für alle $t \in T$*

$$I_t = J_{tt} := J \cap G_t \times M_t$$

gilt, dann sind äquivalent

1. *J ist eine abgeschlossene Relation.*
2. *Die $J_{st} := J \cap (G_s \times M_t)$ sind Bindungen und es gilt*

$$J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$$

für alle $r, s, t \in T$.

Beweis. Ist J abgeschlossen, dann ist für jeden Gegenstand $g \in G$ (g^J, g^{JJ}) ein Begriff von $\sum \mathbb{K}_t$. Wir entnehmen Satz 31, daß die Teilkontexte $\mathbb{K}_s$ sämtlich verträglich sind und folgern daraus zweierlei:

Erstens muß $g^s = g^J \cap M_s$ ein Inhalt von $\mathbb{K}_s$ sein. Dies, zusammen mit der dualen Argumentation für Merkmale, zeigt, daß alle J_{st} Bindungen sein müssen.

Zweitens muß $(g^{JJ} \cap G_s, g^J \cap M_s)$ ein Begriff von $\mathbb{K}_s$ sein. Also ist $g^{JJ} \cap G_s = g^{ss}$ und insbesondere $g^{ss} \subseteq g^{JJ}$, woraus wir für beliebiges $t \in T$

$$g^{sst} \supseteq g^{JJt} = g^t$$

schließen können. Dies gilt für jeden Gegenstand g und hat nach Hilfssatz 84 $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$ zur Folge. Damit ist (2) nachgewiesen.

Setzen wir andererseits (2) voraus, dann können wir zum Nachweis, daß J eine abgeschlossene Relation ist, Hilfssatz 47 (S. 115) benutzen. Es sei also $(g, m) \in I \setminus J$, was wegen $I_t = J_{tt}$ zur Folge hat, daß $g \in G_r$ und $m \in M_s$ gilt für geeignete $r \neq s$. Da J_{rs} eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_s$ ist, ist g^s ein Inhalt von $\mathbb{K}_s$. Deshalb muß es einen Gegenstand $h \in g^{ss}$ geben mit $(h, m) \notin I$. Nach Hilfssatz 84 haben wir für jedes $t \in T$

$$g^t \subseteq g^{sst} \subseteq h^t$$

und folglich $g^J \subseteq h^J$. Dies zeigt, zusammen mit der dualen Argumentation, daß die Bedingung von Hilfssatz 47 erfüllt ist: J ist abgeschlossen. □

Hilfssätze 82 und 85 können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Satz 32. *Für eine Teilrelation $J \subseteq I$ im Summenkontext $(G, M, I) := \sum_{t \in T} \mathbb{K}_t$ sind äquivalent:*

1. *J ist eine abgeschlossene Relation und entspricht einem subdirekten Produkt der $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t)$, $t \in T$.*
2. *J ist eine abgeschlossene Relation und für alle $t \in T$ gilt $I_t = J_{tt}$ $(:= J \cap G_t \times M_t)$.*
3. *Die $J_{st} := J \cap G_s \times M_t$ sind Bindungen von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$ mit $J_{tt} = I_t$ und $J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}$ für alle $r, s, t \in T$.*

□

Man beachte, daß im letzten Punkt des Satzes nicht gefordert wird, daß J abgeschlossen ist. Dies ergibt sich vielmehr (wie auch schon bei Hilfssatz 85) als Konsequenz, wenn J auf die angegebene Weise aus Bindungen zusammengesetzt ist. Sind dabei die Kontexte $\mathbb{K}_t$ alle reduziert, dann ist es auch (G, M, J). Das folgt aus Hilfssatz 48 (S. 115).

Um das subdirekte Produkt als Konstruktionsverfahren nutzen zu können, führen wir folgende Sprechweise ein:

Definition 70. Ist P eine Menge, $\boldsymbol{V}$ ein vollständiger Verband und $\alpha : P \to \boldsymbol{V}$ eine Abbildung, dann nennen wir $(\boldsymbol{V}, \alpha)$ einen (vollständigen) P-**Verband**, falls $\boldsymbol{V}$ von $\{\alpha p \mid p \in P\}$ erzeugt wird.

Für $P := \{1, 2, \ldots, n\}$ spricht man auch von einem (vollständigen) n-Verband. Ist $(P, \leq)$ eine geordnete Menge, dann nennen wir $(\boldsymbol{V}, \alpha)$ einen (vollständigen) $(P, \leq)$-**Verband**, falls α zusätzlich ordnungserhaltend ist.

Einer Familie $(\boldsymbol{V}_t, \alpha_t)$, $t \in T$, vollständiger P-Verbände kann auf natürliche Weise ein vollständiger Unterverband des direkten Produktes $\times_{t \in T} \boldsymbol{V}_t$ zugeordnet werden, nämlich derjenige, der von den Elementen

$$\alpha p := (\alpha_t p \mid t \in T), \qquad p \in P,$$

erzeugt wird. Wir nennen diesen Verband das **P-Produkt** der Verbände (V_t, α_t). Für P-Produkte von zwei Verbänden benutzen wir als Symbol das Zeichen $\overset{P}{\times}$ beziehungsweise $\overset{n}{\times}$. ◊

Beispiel 9. In Abbildung 5.3 ist ein 4-Produkt von drei kleinen Ketten als Unterverband des direkten Produktes veranschaulicht. Die Elemente der Menge $P = \{1,2,3,4\}$ sind jeweils an diejenigen Verbandselemente geschrieben, auf die sie durch α abgebildet werden. Im Diagramm rechts gehören nur die durch kleine Kreise angegebenen Elemente zum 4-Produkt; die zusätzlichen Linien wurden gezeichnet, um die Lage des Verbandes im direkten Produkt zu verdeutlichen.

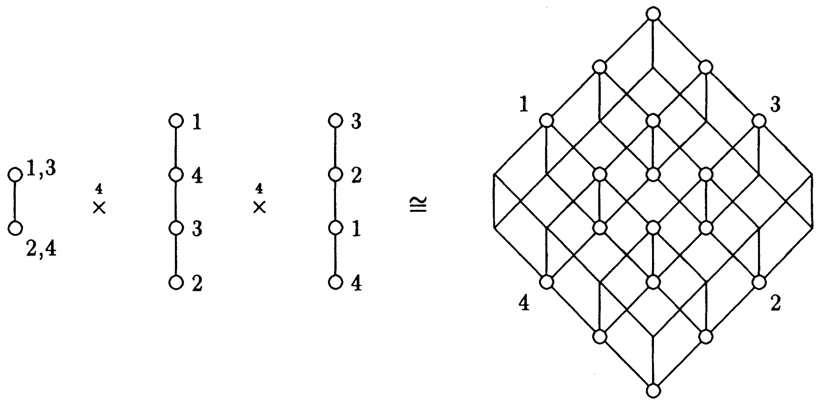


Abbildung 5.3. Ein einfaches Beispiel eines 4-Produktes.

Wenn die beteiligten Verbände Begriffsverbände sind, benutzt man die naheliegende Bezeichnungen: $(\mathbb{K}, \alpha)$ wird **P-Kontext** genannt, falls $(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}), \alpha)$ ein P-Verband ist. α bildet dann ja die Elemente von P auf Begriffe von $\mathbb{K}$ ab; für diese Bilder schreiben wir meist $(A^p, B^p) := \alpha p$. Wir nennen dann $(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}), \alpha)$ kurzerhand „den Begriffsverband des P-Kontextes $(\mathbb{K}, \alpha)$“.

Offensichtlich ist das P-Produkt ein vollständiges subdirektes Produkt, denn die kanonischen Projektion π_t bildet das Erzeugendensystem $\{\alpha p \mid p \in P\}$ des P-Produktes auf $\{\alpha_t p \mid p \in P\}$, also auf ein Erzeugendensystem von V_t ab. π_t muß deshalb surjektiv sein. Einem P-Produkt von P-Begriffsverbänden entspricht damit nach Satz 32 auf natürliche Weise eine abgeschlossene Relation J im Summenkontext. Dies wird im folgenden Satz genauer beschrieben, in dem wir wieder die Abkürzung $J_{st} := J \cap G_s \times M_t$ benutzen:

Satz 33. *Die zu einem P-Produkt von P-Begriffsverbänden* $(\mathfrak{B}(\mathbb{K}_t), \alpha_t)$ *gehörende abgeschlossene Relation J des Summenkontextes* $\sum_{t\in T}\mathbb{K}_t$ *ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:*

1. *für alle* $t \in T$ *gilt* $J_{tt} = I_t$,
2. *für alle* $s, t \in T, s \neq t$, *ist* J_{st} *die kleinste Bindung von* $\mathbb{K}_s$ *zu* $\mathbb{K}_t$, *welche die Mengen*
$$A_s^p \times B_t^p, \qquad p \in P,$$
enthält, dabei sind A_s^p *und* B_t^p *definiert durch* $\alpha_s p =: (A_s^p, B_s^p)$ *und* $\alpha_t p =: (A_t^p, B_t^p)$.

Beweis. Es ergibt sich direkt aus Definition 69, daß der Durchschnitt von Bindungen eine Bindung ist. Deshalb gibt es stets eine kleinste Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$, $s \neq t$, welche die Mengen

$$A_s^p \times B_t^p, \qquad p \in P,$$

sämtlich enthält. Bezeichnen wir diese Bindung mit J_{st} und setzen $J_{tt} := I_t$, dann ist

$$J := \bigcup_{s,t\in T} J_{st}$$

offenbar genau die Relation, die von den beiden Bedingungen des Satzes charakterisiert wird. Wir zeigen als erstes, daß J die Bedingung 3) von Satz 32 erfüllt.

Dazu betrachten wir, für festgewählte $r, s, t \in T$, $p \in P$, ein Merkmal $m \in B_t^p$. Wegen $A_s^p \times B_t^p \subseteq J_{st}$ haben wir sicher $m^s \supseteq A_s^p$. Ebenso können wir für jeden Gegenstand $g \in A_r^p$ wegen $A_r^p \times B_s^p \subseteq J_{rs}$ schon $g^s \supseteq B_s^p$ und, da (A_s^p, B_s^p) ein Begriff von $\mathbb{K}_s$ ist, auch $g^{ss} \subseteq A_s^p$ erschließen. Wir haben also $g^{ss} \subseteq A_s^p \subseteq m^s$ und erhalten mit Hilfssatz 84

$$\begin{aligned}(g,m) \in A_r^p \times B_t^p \quad &\Rightarrow \quad g^{ss} \subseteq m^s \\ &\Rightarrow \quad (g,m) \in J_{rs} \circ J_{st}.\end{aligned}$$

Da dies für alle $g \in A_r^p$ und alle $m \in B_t^p$ richtig ist, haben wir

$$A_s^p \times B_t^p \subseteq J_{rs} \circ J_{st}.$$

Hilfssatz 84 stellt auch fest, daß $J_{rs} \circ J_{st}$ eine Bindung ist. Da vorausgesetzt ist, daß J_{rt} die kleinste Bindung ist, die all diese Mengen enthält, folgt

$$J_{rt} \subseteq J_{rs} \circ J_{st}.$$

Damit ist die dritte Bedingung von Satz 32 erfüllt und folglich J die abgeschlossene Relation eines subdirekten Produktes der $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_t)$.

Zu zeigen ist nun noch, daß J die richtige abgeschlossene Relation ist, also tatsächlich dem angegebenen P-Produkt entspricht. Dieses wird von den Elementen $\{\alpha p \mid p \in P\}$ erzeugt; die zugehörigen Begriffe im Summenkontext sind

$$(A^p, B^p), \qquad A^p := \bigcup A_t^p, \quad B^p := \bigcup B_t^p, \quad t \in T.$$

J enthält alle Mengen $A^p \times B^p$, und jede abgeschlossene Relation, die diese Mengen enthält, gehört zu einem subdirekten Produkt und muß deshalb die dritte Bedingung von Satz 32 erfüllen. J ist die kleinste abgeschlossene Relation, die das tut, und nach Hilfssatz 45 (S. 113) deshalb die abgeschlossene Relation zu dem von den (A^p, B^p) erzeugten Unterverband. □

Die in Satz 33 beschriebene, zum P-Produkt korrespondierende Kontextkonstruktion soll einen Namen erhalten:

Definition 71. Die ***P*-Fusion** einer Familie $(\mathbb{K}_t, \alpha_t)$, $t \in T$, von P-Kontexten ist der P-Kontext

$$((G, M, J), \alpha),$$

bei dem $J \subseteq I$ diejenige Teilrelation im Summenkontext $(G, M, I) := \sum_{t \in T} \mathbb{K}_t$ ist, die durch die Bedingungen von Satz 33 charakterisiert wird, und bei dem α die folgendermaßen definierte Abbildung ist: Ist für $t \in T$ jeweils $\alpha_t p =: (A_t^p, B_t^p)$, dann ist

$$\alpha p := (\dot{\bigcup_{t \in T}} A_t^p, \dot{\bigcup_{t \in T}} B_t^p).$$

Im Falle zweier P-Kontexte benutzen wir

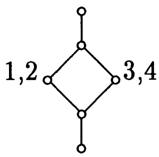
$$(\mathbb{K}_1, \alpha_1) \overset{P}{+} (\mathbb{K}_2, \alpha_2)$$

als Zeichen für die P-Fusion. ◊

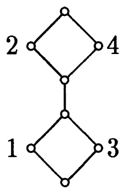
Man hat dann natürlich:

Korollar 86. *Der Begriffsverband einer P-Fusion von Kontexten ist isomorph zum P-Produkt ihrer Begriffsverbände.* □

Beispiel 10. Wir berechnen das 4-Produkt der beiden 4-Verbände

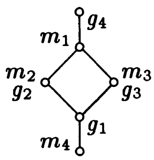


und



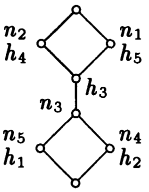
.

In diesem Fall würde die Vorgehensweise aus dem vorigen Beispiel zu unübersichtlichen Zwischenschritten führen. Wir bestimmen deshalb die zugehörigen 4-Standardkontexte und erhalten:



	m_1	m_2	m_3	m_4
g_1	×	×	×	
g_2	×	×		
g_3	×		×	
g_4				

$$\alpha_1(1) = \alpha_1(2) = (\{g_1, g_2\}, \{m_1, m_2\})$$
$$\alpha_1(3) = \alpha_1(4) = (\{g_1, g_3\}, \{m_1, m_3\})$$



	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
h_1	×	×	×		×
h_2	×	×	×	×	
h_3	×	×			
h_4		×			
h_5	×				

$$\alpha_2(1) = (\{h_1\}, \{n_1, n_2, n_3, n_5\})$$
$$\alpha_2(2) = (\{h_1, h_2, h_3, h_4\}, \{n_2\})$$
$$\alpha_2(3) = (\{h_2\}, \{n_1, n_2, n_3, n_4\})$$
$$\alpha_2(4) = (\{h_1, h_2, h_3, h_5\}, \{n_1\})$$

Nun bilden wir die 4-Fusion dieser beiden Kontexte, wie es in Satz 33 angegeben ist, d.h. wir bilden die disjunkte Vereinigung der beiden Kontexte, reichern die Inzidenz um die Mengen $\{g_1, g_2\} \times \{n_1, n_2, n_3, n_5\}$, $\{g_1, g_2\} \times \{n_2\}$, $\{g_1, g_3\} \times \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, $\{g_1, g_3\} \times \{n_1\}$ für $J_{1,2}$ sowie um die Mengen $\{h_1\} \times \{m_1, m_2\}$, $\{h_1, h_2, h_3, h_4\} \times \{m_1, m_2\}$, $\{h_2\} \times \{m_1, m_3\}$, $\{h_1, h_2, h_3, h_5\} \times \{m_1, m_3\}$ für $J_{2,1}$ an. Im vorliegenden Fall sind dadurch bereits Bindungen entstanden; allgemein muß man die Inzidenz erweitern, bis Bindungen entstehen. Als Ergebniskontext erhält man folgenden 4-Kontext:

	m_1	m_2	m_3	m_4	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
g_1	×	×	×		×	×	×	×	×
g_2	×	×			×	×	×		×
g_3	×		×		×	×	×	×	
g_4									
h_1	×	×	×		×	×	×		×
h_2	×	×	×		×	×	×	×	
h_3	×	×	×		×	×			
h_4	×	×				×			
h_5	×		×		×				

$$\alpha(1) = (\{g_1, g_2, h_1\}, \{m_1, m_2, n_1, n_2, n_3, n_5\})$$
$$\alpha(2) = (\{g_1, g_2, h_1, h_2, h_3, h_4\}, \{m_1, m_2, n_2\})$$
$$\alpha(3) = (\{g_1, g_3, h_2\}, \{m_1, m_3, n_1, n_2, n_3, n_4\})$$
$$\alpha(4) = (\{g_1, g_3, h_1, h_2, h_3, h_5\}, \{m_1, m_3, n_1\})$$

Der zugehörige Begriffsverband ist isomorph zum gesuchten 4-Produkt. Er ist in Abbildung 5.4 wiedergegeben.

Für den Spezialfall, daß die Kontexte $\mathbb{K}_t$ jeweils die gleichen Gegenstände und die gleichen Merkmale haben, gibt es eine natürliche Wahl für die Menge P. In der folgenden Definition setzen wir nur aus Bequemlichkeit voraus, daß G und M disjunkt sind.

Definition 72. Kontexte $\mathbb{K}_t := (G, M, I_t)$ mit fester Gegenstandsmenge G und fester Merkmalmenge M können als P-Kontexte $(\mathbb{K}_t, \alpha_t)$ aufgefaßt werden mit $P := G \dot\cup M$ und

$$\begin{aligned} \alpha_t g &:= (g^{tt}, g^t) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \quad \text{für } g \in G, \\ \alpha_t m &:= (m^t, m^{tt}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_t) \quad \text{für } m \in M. \end{aligned}$$

Ist $((G, M, I), \alpha)$ die P-Fusion einer solchen Familie von P-Kontexten, dann wird (G, M, I) die **Fusion** der Kontexte $\mathbb{K}_t$ genannt. $\Diamond$

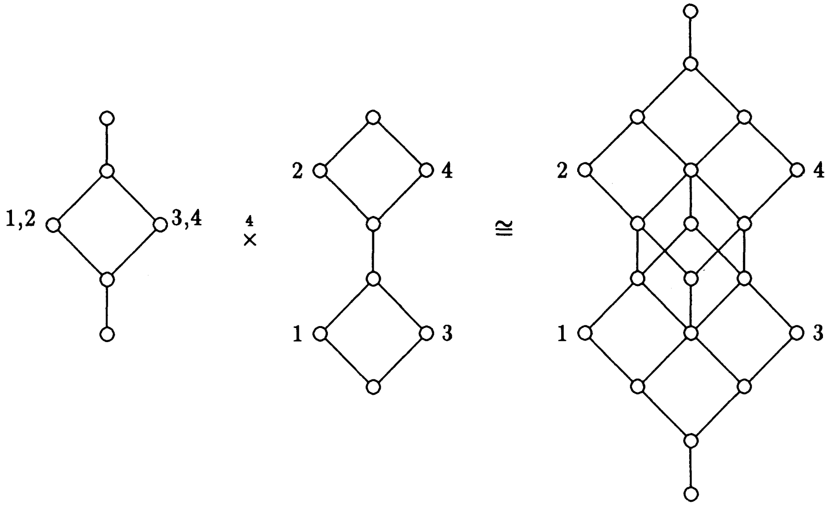


Abbildung 5.4. Der 4-Verband rechts ist der Begriffsverband der in Beispiel 10 berechneten 4-Fusion und folglich isomorph zum 4-Produkt der Faktoren links.

5.2 Verklebungen

Die geometrische Anschaulichkeit der Verbandsdiagramme legt eine einfache Konstruktion nahe, nämlich Verbände durch das Zusammenkleben längs gemeinsamer Teilstrukturen zu größeren Verbänden zusammenzusetzen. Im Abschnitt 4.2 haben wir eine solche Möglichkeit schon vorgestellt, allerdings als Zerlegungsprinzip.

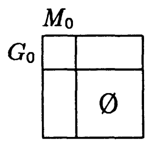
Derartige Verfahren spielen bei der Konstruktion tatsächlich eine Rolle. Sie erweisen sich aber im Detail als verzwickt und nicht immer leicht zu handhaben. Das gleiche gilt für die zugehörige Kontextoperation, die *Vereinigung.* Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen erhält man aber eine glatte und praktikable Theorie.

Hilfssatz 87. *Es seien* (G_0, G_0') *und* (M_0', M_0) *Begriffe von* (G, M, I). *Genau dann gilt für jeden Begriff* (X, Y) *von* (G, M, I)

$$(M_0', M_0) \leq (X, Y) \text{ oder } (X, Y) \leq (G_0, G_0'),$$

$$\text{wenn } I \subseteq G \times M_0 \cup G_0 \times M \text{ ist.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$": Ist $(g, m) \in I$, dann ist $(M_0', M_0) \leq (g'', g')$ (also $m \in M_0$) oder $(g'', g') \leq (G_0, G_0')$ (also $g \in G_0$). „$\Leftarrow$": Ist $I \subseteq G \times M_0 \cup G_0 \times M$ und (X, Y) ein Begriff mit $X \not\subseteq G_0$, dann ist $X' \subseteq M_0$ und daher $(M_0', M_0) \leq (X, Y)$. $\square$



Liegt die in diesem Hilfssatz beschriebene Situation vor, so ist der Begriffsverband auf einfache Weise aus zwei Verbänden zusammengesetzt, nämlich aus dem Ideal $((G_0, G_0')]$ und dem Filter $[(M_0', M_0))$, die sich in dem (möglicherweise leeren) Intervall $[(M_0', M_0), (G_0, G_0')]$ überlappen. Man spricht von der **Hall-Dilworth-Verklebung** (vergl. Definition 60 auf Seite 143), im Spezialfall $(G_0, G_0') = (M_0', M_0)$ von der **vertikalen Summe**, von der bereits auf Seite 41 die Rede war. Dort wurde auch die **horizontale Summe** erwähnt, bei der zwei Verbände durch Identifikation der beiden größten und der beiden kleinsten Elemente „seitlich verklebt“ werden. In Abschnitt 4.3 war gezeigt worden, daß das Substitutionsprodukt beide Konstruktionen verallgemeinert.

Während die Hall-Dilworth-Verklebung der einfachste Fall einer Atlas-Konstruktion im Sinne von §4.2 ist, kann die horizontale Summe auf eine andere naheliegende Weise verallgemeinert werden, nämlich zur *horizontalen Verklebung*, bei der man zuläßt, daß sich die beteiligten Verbände in mehr als nur den beiden Randelementen überlappen. Mit der allgemeinen Situation, nämlich der, daß ein Begriffsverband Vereinigung von Unterverbänden ist, befaßt sich der nächste (recht triviale) Hilfssatz:

Hilfssatz 88. *Für Relationen $J_t \subseteq G \times M$, $t \in T$, sind äquivalent*

1. $\mathfrak{B}(G, M, \bigcup_{t\in T} J_t) = \bigcup_{t\in T} \mathfrak{B}(G, M, J_t)$.
2. *Die J_t sind abgeschlossene Relationen von $(G, M, \bigcup_{t\in T} J_t)$ und es gilt*

$$A \times B \subseteq \bigcup_{t\in T} J_t \Rightarrow \exists_{s\in T}\ A \times B \subseteq J_s.$$

□

Der Beweis ist einfach; das Ergebnis ist auch nicht sehr ergiebig. Um eine besser handhabbare Bedingung zu bekommen, beschränken wir uns auf zwei Verbände und machen die Voraussetzung, daß die Überlappung Vereinigung eines Ideals und eines Filters ist, also die in Hilfssatz 87 beschriebene Form hat.

Definition 73. Ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$ ist **Ideal-Filter-Verklebung** zweier Unterverbände U_1 und U_2, wenn gilt:

1. $\boldsymbol{V} = U_1 \cup U_2$
2. Aus $x \leq y$ in $\boldsymbol{V}$ folgt $\{x, y\} \subseteq U_1$ oder $\{x, y\} \subseteq U_2$.
3. $U_1 \cap U_2 = (a] \cup [b)$ für geeignete Elemente $a, b \in \boldsymbol{V}$.

◊

Eine Ideal-Filter-Verklebung läßt sich am Kontext erkennen:

Satz 34. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

1. $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ *ist Ideal-Filter-Verklebung vollständiger Unterverbände U_1 und U_2. $J_1 := C(U_1)$ und $J_2 := C(U_2)$ sind die zugehörigen abgeschlossenen Relationen.*

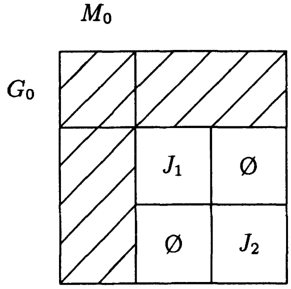


Abbildung 5.5. Kontext einer Ideal-Filter-Verklebung. Im schraffierten Bereich stimmen J_1 und J_2 mit I überein; es ist dies zugleich die zur Überlappung der Verbände gehörende abgeschlossene Relation.

2. J_1 und J_2 sind abgeschlossene Relationen von (G, M, I) und
- *a) für jeden Gegenstand g gilt $g^I = g^{J_1}$ oder $g^I = g^{J_2}$, und für jedes Merkmal m gilt dual $m^I = m^{J_1}$ oder $m^I = m^{J_2}$,*
- *b) es gibt einen Begriffsumfang G_0 und einen Begriffsinhalt M_0 von (G, M, I) mit $J_1 \cap J_2 = (G_0 \times M \cup G \times M_0) \cap I$.*

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2*a*): Jeder Gegenstandsbegriff γg gehört zu einem der Unterverbände. $\gamma g \in U_i$ ist aber gleichbedeutend mit $g^I = g^{J_i}$.
1) $\Rightarrow$ 2*b*): Nach Voraussetzung ist $U_1 \cap U_2 = (\mathfrak{a}] \cup [\mathfrak{b})$ für geeignete Begriffe $\mathfrak{a} =: (G_0, G_0')$ und $\mathfrak{b} =: (M_0', M_0)$. Offenbar ist $J_1 \cap J_2 \supseteq (G_0 \times M \cup G \times M_0) \cap I$, zu zeigen bleibt die andere Inklusion. Sei $(g, m) \in J_1 \cap J_2$ und $m \notin M_0$. Dann gibt es Begriffe $(X_1, Y_1) \in U_1$ sowie $(X_2, Y_2) \in U_2$ mit $(g, m) \in X_i \times Y_i$. Das Infimum dieser Begriffe ist mit beiden vergleichbar, einer der drei Begriffe (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) und $(X_1, Y_1) \wedge (X_2, Y_2)$ liegt also in $U_1 \cap U_2$. Der Inhalt dieses Begriffs enthält m, kann also nicht Teilmenge von M_0 sein. Der Begriff liegt also im Ideal $((G_0, G_0')]$, und wir erhalten $X_1 \cap X_2 \subseteq G_0$, woraus $g \in G_0$ folgt.
2) $\Rightarrow$ 1): Wir müssen zeigen, daß alle Begriffe und alle Vergleichbarkeiten zwischen Begriffen von (G, M, I) von einem der Unterverbände U_i stammen. Nehmen wir also an, es gäbe einen Begriff $(X, Y) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, der weder zu U_1 noch zu U_2 gehört, so daß also weder $X \times Y \subseteq J_1$ noch $X \times Y \subseteq J_2$ gilt. Dann muß es Paare $(g, m), (h, n) \in X \times Y$ mit $(g, m) \in J_1 \setminus J_2$ und $(h, n) \in J_2 \setminus J_1$ geben, und aus den Voraussetzungen folgt $g, h \notin G_0$ und $m, n \notin M_0$. Also kann (g, n) nicht zu $J_1 \cap J_2$ gehören, aber sicher ist $(g, n) \in I$, denn $(g, n) \in X \times Y$. Aus $(g, m) \in J_1 \setminus J_2$ schließen wir $g^I = g^{J_1}$, also $(g, n) \in J_1$, und aus $(h, n) \in J_2 \setminus J_1$ dual $n^I = n^{J_2}$, also $(g, n) \in J_2$, was einen Widerspruch ergibt.
Sind $(X, Y) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, J_1)$ und $(U, V) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, J_2)$ und ist $(U, V) \leq (X, Y)$, dann ist $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$, also $U \times Y \subseteq J_1 \cap J_2$. Daraus folgt $U \subseteq G_0$

(also $(U,V) \in \mathfrak{B}(G,M,J_1)$) oder $Y \subseteq M_0$ (also $(X,Y) \in \mathfrak{B}(G,M,J_2)$), jedenfalls $\{(U,V),(X,Y)\} \subseteq U_i$ für $i = 1$ oder $i = 2$. □

Die Charakterisierung in Satz 34 weist den Weg zur zugehörigen Kontextkonstruktion. Wir definieren

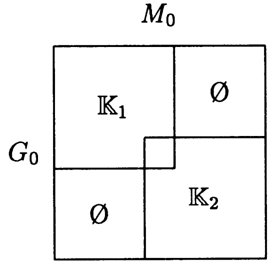
Definition 74. Die **Vereinigung** zweier Kontexte $\mathbb{K}_1 := (G_1, M_1, I_1)$ und $\mathbb{K}_2 := (G_2, M_2, I_2)$ ist der Kontext

$$\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2 := (G_1 \cup G_2, M_1 \cup M_2, I_1 \cup I_2).$$

Wir nennen $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$ eine **Verklebung** der Kontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $G_0 := G_1 \cap G_2$ ist Begriffsumfang von $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$.
2. $M_0 := M_1 \cap M_2$ ist Begriffsinhalt von $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$.
3. $I_0 := I_1 \cap I_2 = I_1 \cap G_0 \times M_0 = I_2 \cap G_0 \times M_0$.

◊



Die Kontextverklebung ist nicht das genaue Gegenstück zur Verbandsverklebung. Die Voraussetzungen sind schwächer. Die Bedingung, daß $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ auf $G_0 \times M_0$ übereinstimmen, erzwingt keineswegs, daß auch die in G_0 enthaltenen Umfänge sowie die in M_0 enthaltenen Inhalte in beiden Kontexten dieselben sind. Dies ist aber bei einer Ideal-Filter-Verklebung zwangsläufig der Fall. Es ist deshalb eher überraschend, daß der folgende Satz gilt. Der Satz hat einen Haken, auf den aufmerksam gemacht werden muß. Er sagt aus, daß der Begriffsverband der Verklebung zweier Kontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ die Ideal-Filter-Verklebung zweier Unterverbände ist, er sagt aber *nicht*, daß diese Unterverbände zu $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1)$ und $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2)$ isomorph sind. Das ist auch im allgemeinen nicht richtig.

Satz 35.
Genau dann ist $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ die Ideal-Filter-Verklebung zweier vollständiger Unterverbände U_1 und U_2 mit

$$U_1 \cap U_2 = ((G_0, G_0')] \cup [(M_0', M_0)),$$

wenn $\mathbb{K}$ die Verklebung zweier Teilkontexte $\mathbb{K}_1 := (G_1, M_1, I_1)$ und $\mathbb{K}_2 := (G_2, M_2, I_2)$ ist mit

$$G_0 = G_1 \cap G_2 \quad \textit{und} \quad M_0 = M_1 \cap M_2.$$

Beweis. Die eine Richtung folgt sofort aus Satz 34: Erfüllt $\mathbb{K} := (G, M, I)$ nämlich die Bedingung 2 von Satz 34, dann erhalten wir mit

$$\begin{array}{rrcl} & G_1 & := & \{g \in G \mid g^I = g^{J_1}\}, \\ & M_1 & := & \{m \in M \mid m^I = m^{J_1}\}, \\ & G_2 & := & G_0 \cup (G \setminus G_1), \\ & M_2 & := & M_0 \cup (M \setminus M_1) \\ \text{und} & I_1 & := & I \cap G_1 \times M_1, \\ & I_2 & := & I \cap G_2 \times M_2 \end{array}$$

offenbar Kontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$ und $G_0 = G_1 \cap G_2$, $M_0 = M_1 \cap M_2$ und $I_0 = I_1 \cap I_2 = I_1 \cap G_0 \times M_0 = I_2 \cap G_0 \times M_0$. Da G_0 ein Begriffsumfang und M_0 ein Begriffsinhalt von $\mathbb{K}$ ist, ist $\mathbb{K}$ Verklebung von $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$.

Für die Rückrichtung haben wir zu zeigen, daß $\mathbb{K}$ die zweite Bedingung aus Satz 34 erfüllt. Dazu setzen wir

$$\begin{array}{rcl} J_1 & := & I_1 \cup I \cap (G_0 \times M \cup G \times M_0) \\ J_2 & := & I_2 \cup I \cap (G_0 \times M \cup G \times M_0). \end{array}$$

Zu beweisen ist dann, daß J_1 und J_2 abgeschlossene Relationen sind. Wir demonstrieren dies für $J := J_1$, und zwar mit Hilfe von Hilfssatz 46 (S. 115): Sei $X \subseteq G$ beliebig. Wenn $X \not\subseteq G_0$, dann ist $X^J \subseteq M_1$ und wegen

$$J \cap G \times M_1 = I \cap G \times M_1$$

folgt $X^{JJ} = X^{II}$. Wenn $X \subseteq G_0$, dann ist $X^J = X^I$ und deshalb $X^{JJ} \subseteq X^{JI} = X^{II} \subseteq G_0$, da G_0 ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}$ ist. Wegen $J \cap G_0 \times M = I_0 \cap G_0 \times M$ und $X^{II} \subseteq G_0$ gilt $X^{IJ} = X^{II}$, also $X^{JJ} = X^{II} = X^{JI}$. □

Die zu den Unterverbänden gehörenden abgeschlossenen Relationen sind im Beweis angegeben worden. Sie stimmen mit I_1 bzw. I_2 jeweils bis auf eine Modifikation „unterhalb von G_0" und „oberhalb von M_0" überein. Diese Modifikation entfällt, wenn I_1 dicht in J_1 und I_2 dicht in J_2 ist. Das ist dann der Fall, wenn G_0 ein Begriffsumfang sowohl von $\mathbb{K}_1$ als auch von $\mathbb{K}_2$ ist, wenn weiter jede Teilmenge $T \subseteq G_0$

$$T \text{ ist Begriffsumfang von } \mathbb{K}_1 \iff T \text{ ist Begriffsumfang von } \mathbb{K}_2$$

erfüllt und das entsprechende für M_0 gilt. Diese Bedingungen bewirken nämlich, daß die von dem Begriff mit dem Umfang G_0 erzeugten Ideale in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ und $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ isomorph sind und ebenso die Filter der Begriffe mit Inhalten $\subseteq M_0$. Daß $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ in I_0 übereinstimmen, hat zur Folge, daß diese Isomorphismen durch *eine* Abbildung hergestellt werden können.

Insbesondere gilt: Eine Ideal-Filter-Verklebung zweier Begriffsverbände ist isomorph zum Begriffsverband der Verklebung der beteiligten Kontexte.

Beim praktischen Arbeiten stellt sich die Aufgabe meist in der leicht verallgemeinerten Form, zwei Verbände zu verkleben, die zwar keine Elemente gemeinsam haben, bei denen aber ein Isomorphismus von einem Ideal-Filter-Paar des einen auf ein entsprechendes Paar des anderen vorgegeben ist. Um diese Konstruktion für Begriffsverbände durchzuführen, modifiziert man zunächst die betreffenden Kontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ so, daß die Gegenstandsbegriffe in den beiden Idealen übereinstimmen und auch die Merkmalbegriffe in den beiden Filtern. Das kann durch gegenseitiges Anreichern, bei doppelt fundierten Kontexten auch durch Reduzieren erreicht werden. Die Gegenstände und Merkmale zu diesen Begriffen erhalten jeweils den gleichen Namen, wenn sie durch den Isomorphismus aufeinander abgebildet werden; im übrigen macht man die beiden Kontexte disjunkt. Der Begriffsverband der Verklebung der so modifizierten Kontexte ist dann, wie gewünscht, die Ideal-Filter-Verklebung geeigneter isomorpher Kopien ihrer Begriffsverbände.

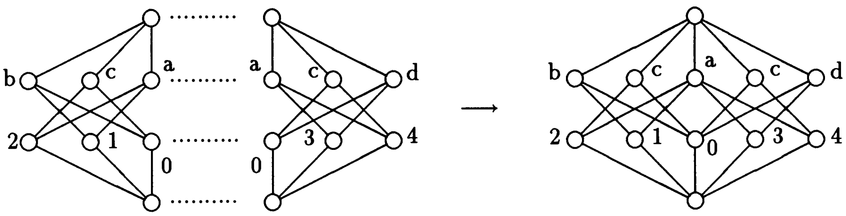


Abbildung 5.6. Ideal-Filter-Verklebung zweier Würfel

	a	b	c
0		×	×
1	×	×	
2	×		×

$\mathbb{K}_1$

$\cup$

	a	d	e
0		×	×
3	×	×	
4	×		×

$\mathbb{K}_2$

$=$

	a	b	c	d	e
0		×	×	×	×
1	×	×			
2	×		×		
3	×			×	
4	×				×

$\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$

Abbildung 5.7. Die Kontextverklebung zu Abbildung 5.6.

Als Beispiel zeigen wir in Abbildung 5.6 eine Ideal-Filter-Verklebung zweier Boolescher Verbände. Die zugehörige Kontextverklebung ist in Abbildung 5.7 angegeben. Man erkennt, daß $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2$ auch Kontextsumme ist und der durch die Verklebung entstandene Verband folglich ein direktes Produkt. Allgemein hat man für Kontextverklebungen

$$(\mathbb{K}_0 + \mathbb{K}_1) \cup (\mathbb{K}_0 + \mathbb{K}_2) = \mathbb{K}_0 + (\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2).$$

5.3 Lokale Verdopplung

Ein weiteres Konstruktionsprinzip besteht darin, einen Teil eines Verbandes, z.B. ein Intervall, auf geeignete Weise zu verdoppeln. Wir schildern zuerst die Kontextkonstruktion und leiten dann die korrespondierende Verbandskonstruktion her.

Eine Kontextmanipulation, die überhaupt keinen Einfluß auf die Struktur des Begriffsverbandes hat, ist das „inverse Reduzieren“, also das Hinzunehmen reduzibler Merkmale oder Gegenstände: Man erweitert einen Kontext (G, M, I) z.B. um eine Menge N von neuen Merkmalen und ergänzt die Relation I derart, daß für jedes $n \in N$ der Merkmalumfang n' ein Begriffsumfang von (G, M, I) ist. (G, M, I) ist dann ein dichter Teilkontext des neuen Kontextes, und folglich sind die Begriffsverbände isomorph. Gleiches gilt, wenn man (G, M, I) stattdessen um eine Menge H von neuen Gegenständen erweitert und dafür sorgt, daß jeder solche Gegenstand $h \in H$ bzgl. G reduzibel ist, d.h. daß h' ein Begriffsinhalt von (G, M, I) ist.

Führt man aber beide Erweiterungen simultan durch, dann ändert sich der Begriffsverband merklich. Erste Auskunft darüber enthalten die nächsten Hilfssätze:

Hilfssatz 89. *Es sei $(G \cup H, M \cup N, J)$ ein Kontext mit $G \cap H = M \cap N = \emptyset$ und $J \cap H \times N = \emptyset$. Genau dann erfüllt der Teilkontext (G, M, I) mit $I := J \cap G \times H$ die Bedingungen*

1. *für jeden Gegenstand $h \in H$ ist h' ein Begriffsinhalt von (G, M, I),*
2. *für jedes Merkmal $n \in N$ ist n' ein Begriffsumfang von (G, M, I),*

wenn (G, M, I) verträglich ist.

Das *beweist* man ohne jede Mühe mittels der Bedingungen a1) und a2) von Hilfssatz 35 (S. 101). □

Die Abbildung $\Pi_{G,M}$ mit

$$(A, B) \mapsto (A \cap G, B \cap M)$$

ist unter den Voraussetzungen aus dem Hilfssatz also ein surjektiver Vollhomomorphismus (Hilfssatz 34, S. 100) der, wie der nächste Hilfssatz zeigt, kleine Urbildklassen hat:

Hilfssatz 90. *Es sei (C, D) ein Begriff von (G, M, I). Dann gibt es mindestens einen und höchstens zwei Begriffe (A, B) von $(G \cup H, M \cup N, J)$ mit $(C, D) = (A \cap G, B \cap M)$, nämlich*

$$(C, C^J) \quad \textit{oder} \quad (D^J, D).$$

(C, C^J) ist genau dann ein Begriff von $(G \cup H, M \cup N, J)$,

wenn es ein Merkmal $n \in N$ gibt mit $C \subseteq n^J$

oder wenn es keinen Gegenstand $h \in H$ gibt mit $D \subseteq h^J$.

Beweis. Wegen $J \cap H \times N = \emptyset$ gilt für jeden Begriff (A, B) von $(G \cup H, M \cup N, J)$ eine der Möglichkeiten $A \subseteq G$ oder $B \subseteq M$, was unter der Voraussetzung $(C, D) = (A \cap G, B \cap M)$ dann

$$A = C \text{ (und damit } B = C^J\text{)} \quad \text{oder} \quad B = D \text{ (und damit } A = D^J\text{)}$$

nach sich zieht. (C, C^J) ist <u>kein</u> Begriff, wenn $C^J \subseteq M$, also $C^J = C^I = D$, aber $D^J \not\subseteq G$, also $D^J \neq C$ ist. Für D argumentiert man entsprechend. □

Der Hilfssatz gibt die möglichen Urbilder für einen Begriff $(C, D) \in \mathfrak{B}(G, M, I)$ in etwas unübersichtlicher Formulierung an. Wir wiederholen deshalb die Fallunterscheidung in Tabellenform:

$C \subseteq n^J$ für ein $n \in N$	$D \subseteq h^J$ für ein $h \in H$	(C, C^J) ist Begriff	(D^J, D) ist Begriff	gleich?
ja	ja	ja	ja	$(C, C^J) < (D^J, D)$
ja	nein	ja	nein	
nein	ja	nein	ja	
nein	nein	ja	ja	$(C, C^J) = (D^J, D)$

Zwei verschiedene Urbilder bzgl. $\Pi_{G,M}$ hat (C, D) also nur im ersten Fall. Wir halten weiter fest:

Hilfssatz 91. *Ist $(G \cup H, M \cup N, J)$ ein Kontext mit den im vorigen Hilfssatz angegebenen Eigenschaften, dann gilt:*
(A, B) ist genau dann ein Begriff von $(G \cup H, M \cup N, J)$, wenn $(A \cap G, B \cap M)$ ein Begriff von (G, M, I) ist und einer der drei Fälle

1. $A \subseteq G, B \subseteq M,\ A = B^J,\ B = A^J$
2. $A \subseteq G, B = A^J \not\subseteq M$
3. $B \subseteq M, A = B^J \not\subseteq G$

vorliegt.

Beweis. Nach Hilfssatz 89 ist für jeden Begriff (A, B) von $(G \cup H, M \cup N, J)$ die Restriktion $(A \cap G, B \cap M)$ ein Begriff von (G, M, I), und weil $J \cap H \times N = \emptyset$ vorausgesetzt ist, muß $A \times B \cap H \times N = \emptyset$, also $A \subseteq G$ oder $B \subseteq N$, und damit einer der Fälle 1)–3) gelten.

Ist umgekehrt A ein Begriffsumfang von (G, M, I) und $A^J \not\subseteq M$, dann ist (A, A^J) ein Begriff von $(G \cup H, M \cup N, J)$ nach dem vorigen Hilfsatz. Ist $A^J = A^I$, dann ist $B = A^J$ ein Begriffsinhalt von (G, M, I), und man kann unter der Voraussetzung $B^J \neq B^I$ dual argumentieren. Übrig bleibt der triviale Fall $A^I = A^J$ und $B^I = B^J$. □

Bei einem doppelt fundierten Kontext ist es besonders einfach nachzuprüfen, ob die Bedingungen aus Hilfssatz 89 vorliegen. Man kann Hilfssatz 36 (S. 101) anwenden und erhält eine algorithmisch leicht handhabbare Bedingung:

	M	N
G		X
H	X	$\emptyset$

Hilfssatz 92. *Ein doppelt fundierter Kontext $(G \cup H, M \cup N, J)$ mit $G \cap H = \emptyset$ und $M \cap N = \emptyset$ hat genau dann die Eigenschaften aus Hilfssatz 89, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $J \cap H \times N = \emptyset$,
2. *aus* $h \swarrow m$, $h \in H$ *folgt* $m \in N$,
3. *aus* $g \nearrow n$, $n \in N$ *folgt* $g \in H$.

□

Wir haben für die Wahl der Mengen H und N keine Einschränkungen gemacht. Es zeigt sich aber, daß man ohne Verlust von Allgemeinheit eine sehr spezielle Wahl treffen darf.

Definition 75. Es sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}(G, M, I)$ eine konvexe Menge von Begriffen und, o.B.d.A., $\mathfrak{C} \cap (G \cup M) = \emptyset$. Dann ist

$$\mathbb{K}[\mathfrak{C}] := (G \cup \mathfrak{C}, M \cup \mathfrak{C}, I_{\mathfrak{C}}),$$

wobei $I_{\mathfrak{C}}$ folgendermaßen erklärt ist:

$$I_{\mathfrak{C}} \cap G \times M := I, \quad I_{\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} := \emptyset$$

und, für $(C, D) \in \mathfrak{C}$, $g \in G$ und $m \in M$,

$$\begin{array}{lcl} g\, I_{\mathfrak{C}}\, (C, D) & :\iff & g \in C, \\ (C, D)\, I_{\mathfrak{C}}\, m & :\iff & m \in D. \end{array}$$

◊

Offenbar erfüllt der so definierte Kontext die Bedingungen aus Hilfssatz 89, wobei $\mathfrak{C}$ die Rolle sowohl von H als auch von N übernimmt.

	M	N
G	I	
H		$\emptyset$

$(G \cup H, M \cup N, J)$

	M	$\mathfrak{C}$
G	I	$\in$
$\mathfrak{C}$	$\ni$	$\emptyset$

$\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$

Abbildung 5.8. Bei der Verdopplungskonstruktion können H und N durch die gleiche konvexe Menge $\mathfrak{C}$ ersetzt werden.

Hilfssatz 93. *Definiert man* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}(G, M, I)$, *indem man für* $(C, D) \in \mathfrak{B}(G, M, I)$ *vereinbart*

$$(C, D) \in \mathfrak{C} \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists_{h \in H} \exists_{n \in N} \; C \subseteq n^J \text{ und } D \subseteq h^J,$$

dann ist $\mathfrak{C}$ *konvex und es gilt*

$$\underline{\mathfrak{B}}(G \cup H, M \cup N, J) \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}[\mathfrak{C}]).$$

Beweis. Es sei $H_0 := \{h \in H \mid h^{JIJ} \cap N \neq \emptyset\}$. Dual wird N_0 definiert. Ist $h \in H \setminus H_0$, dann ist $h^J = (h^{JI})^J$, also h reduzibel. $(G \cup H_0, M \cup N_0, J)$ ist dicht in $(G \cup H, M \cup N, J)$ und hat deshalb, bis auf Isomorphie, den gleichen Begriffsverband. Wir dürfen darum $H = H_0$, $N = N_0$ voraussetzen. Das macht die Argumentation einfacher, denn wir haben dann zu jedem $h \in H$ ein $n \in N$ mit $h^{JI} \subseteq n^J$, woraus man schließen kann, daß der Begriff $\gamma_I(h) := (h^{JI}, h^J)$ von (G, M, I) zu $\mathfrak{C}$ gehört. Ebenso kann man jedem Merkmal $n \in N$ den Begriff $\mu_I(n) := (n^J, n^{JI}) \in \mathfrak{C}$ zuordnen. Im Kontext $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ sind diese Begriffe Gegenstände und Merkmale. Für den Gegenstand $\gamma_I(h)$ hat man

$$\gamma_I(h)^{I_\mathfrak{C}} = h^J,$$

und für das Merkmal $\mu_I(n)$ gilt

$$\mu_I(n)^{I_\mathfrak{C}} = n^J.$$

Ist (A, B) ein Begriff von (G, M, I) und $h \in H$, dann folgt nun

$$B \subseteq h^J \iff B \subseteq \gamma_I(h)^{I_\mathfrak{C}}$$

und dual. Weil außerdem zu jedem Begriff $(C, D) \in \mathfrak{C}$ nach der Definition von $\mathfrak{C}$ ein $h \in H$ und ein $n \in N$ existieren mit $\mu_I(n) \leq (C, D) \leq \gamma_I(h)$, hat man

$$\exists_{h \in H} \; B \subseteq h^J \iff \exists_{\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}} \; B \subseteq \mathfrak{c}^{I_\mathfrak{C}},$$

und die duale Aussage, was

$$A^J \cap H \neq \emptyset \iff A^{I_\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset \quad \text{und} \quad B^J \cap N \neq \emptyset \iff B^{I_\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$$

zur Folge hat.
Nun definieren wir für $(A, B) \in \mathfrak{B}(G \cup H, M \cup N, J)$

$$\varphi(A, B) := \begin{cases} (A, A^{I_\mathfrak{C}}) & \text{falls } A \subseteq G \\ (B^{I_\mathfrak{C}}, B) & \text{falls } B \subseteq M \end{cases},$$

und behaupten, daß wir damit einen Isomorphismus

$$\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(G \cup H, M \cup N, J) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}[\mathfrak{C}])$$

erklärt haben. Zunächst stellen wir fest, daß $\varphi(A, B)$ nach Hilfssatz 91 für jeden Begriff $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(G \cup H, M \cup N, J)$ erklärt ist. Mit der oben bewiesenen Äquivalenz und erneut mit Hilfe von Hilfssatz 91 folgern wir, daß tatsächlich $\varphi(A, B)$ stets ein Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}[\mathfrak{C}])$ ist und sogar, daß jeder solche Begriff dabei vorkommt. φ ist also eine Bijektion. Daß φ auch ein Ordnungsisomorphismus ist, ist aufgrund der einfachen Gestalt der beteiligten Begriffe elementar. $\square$

Dank Hilfssatz 92 können wir uns auf die Kontextkonstruktion $\mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ konzentrieren, weil sie den allgemeinen Fall mit abdeckt. Die Aussage von Hilfssatz 90, spezialisiert auf den Kontext $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$, lautet:

Hilfssatz 94. *Zu jedem Begriff (C, D) von $\mathbb{K}$ gibt es mindestens einen und höchstens zwei Begriffe (A, B) von $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ mit $(A \cap G, B \cap M) = (C, D)$, nämlich*

$$(C, C^{I_\mathfrak{C}}) \quad \textit{oder} \quad (D^{I_\mathfrak{C}}, D).$$

Genau dann sind $(C, C^{I_\mathfrak{C}})$ und $(D^{I_\mathfrak{C}}, D)$ beides Begriffe von $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ und dazu verschieden, wenn $(C, D) \in \mathfrak{C}$ ist.

Beweis. Neu zu beweisen ist nur der letzte Satz. Nach Hilfssatz 90 gibt es genau dann zwei Begriffe (A, B) mit $(A \cap G, B \cap M) = (C, D)$, wenn es Elemente $\mathfrak{h}, \mathfrak{n} \in \mathfrak{C}$ gibt mit $C \subseteq \mathfrak{h}^{I_\mathfrak{C}}$, $D \subseteq \mathfrak{n}^{I_\mathfrak{C}}$, also $\mathfrak{h} \leq (C, D) \leq \mathfrak{n}$. Weil $\mathfrak{C}$ konvex ist, ist dies gleichbedeutend zu $(C, D) \in \mathfrak{C}$. □

Definition 76. Für eine konvexe Teilmenge C eines vollständigen Verbandes $\boldsymbol{V} := (V, \leq)$ definieren wir den vollständigen Verband $\boldsymbol{V}[C] := (V[C], \leq)$ durch $V[C] := (V \setminus C) \cup (C \times \{0, 1\})$ und

$$x \leq y :\Longleftrightarrow \begin{cases} x, y \in V \setminus C \text{ und } x \leq y \text{ in } \boldsymbol{V} \\ \text{oder } x \in V \setminus C, y = (y_0, i), y_0 \in C, x \leq y_0 \text{ in } \boldsymbol{V} \\ \text{oder } y \in V \setminus C, x = (x_0, i), x_0 \in C, x_0 \leq y \text{ in } \boldsymbol{V} \\ \text{oder } x = (x_0, i), y = (y_0, j) \in C \times \{0, 1\}, i \leq j \text{ und } x_0 \leq y_0. \end{cases}$$

◊

Die Definition enthält die beweisbedürftige Behauptung, daß so ein vollständiger Verband definiert wird. Dies folgt aus dem nächsten Satz.

Satz 36. *Ist $\mathfrak{C} \subseteq \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ konvex, dann gilt*

$$\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})[\mathfrak{C}] \cong \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}[\mathfrak{C}]).$$

Beweis. Wir zeigen, daß durch die Vorschrift

$$\varphi(A, B) := \begin{cases} (A \cap G, B \cap M), & \text{falls } (A \cap G, B \cap M) \notin \mathfrak{C}, \\ ((A \cap G, B \cap M), 0), & \text{falls } (A, B \cap M) \in \mathfrak{C}, \\ ((A \cap G, B \cap M), 1), & \text{falls } (A \cap G, B) \in \mathfrak{C}, \end{cases}$$

ein Isomorphismus

$$\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}[\mathfrak{C}]) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})[\mathfrak{C}]$$

erklärt wird. Nach Hilfssatz 91 ist zu jedem Begriff (A, B) von $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ stets $(A \cap G, B)$ oder $(A, B \cap M)$ ein Begriff von $\mathbb{K}$, und nach Hilfssatz 94 hat ein Begriff (C, D) von $\mathbb{K}$ genau dann zwei Urbilder unter $\Pi_{G,M}$, wenn $(C, D) \in \mathfrak{C}$ ist.

Deshalb ist φ eine bijektive Abbildung. Es bleibt noch zu zeigen, daß φ auch ein Ordnungsisomorphismus ist. Man hat

$$\begin{aligned}(A_1,B_1)<(A_2,B_2) &\iff A_1\subset A_2\\ &\iff A_1\cap G\subset A_2\cap G \text{ oder}\\ &\ A_1\cap G=A_2\cap G \text{ und } A_1\subset A_2\\ &\iff A_1\cap G\subset A_2\cap G \text{ oder } (A_1\cap G,B_1\cap M)\in\mathfrak{C}\\ &\iff \varphi(A_1,B_1)<\varphi(A_2,B_2).\end{aligned}$$

□

Beim praktische Arbeiten wird man den Kontext $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ nach Möglichkeit reduzieren. Ein Blick auf die Pfeilrelationen zeigt den Weg: ist $\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}$ ein Gegenstand von $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$, dann kann $\mathfrak{c}\swarrow\mathfrak{d}$ nach Hilfssatz 92 nur für ein Merkmal $\mathfrak{d}\in\mathfrak{C}$ gelten. Man überlegt sich rasch, daß genau die minimalen bzw. maximalen Elemente von $\mathfrak{C}$ irreduzibel sind. Definiert man nämlich

$$\mathfrak{C}_{min}:=\{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}\mid \mathfrak{c}\text{ ist minimal in }\mathfrak{C}\}$$

$$\text{und } \mathfrak{C}_{max}:=\{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}\mid \mathfrak{c}\text{ ist maximal in }\mathfrak{C}\},$$

dann hat man für $\mathfrak{c},\mathfrak{d}\in\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{c}\swarrow\mathfrak{d} \iff \mathfrak{c}\in\mathfrak{C}_{min} \text{ und } \mathfrak{c}\leq\mathfrak{d},$$

$$\mathfrak{c}\nearrow\mathfrak{d} \iff \mathfrak{d}\in\mathfrak{C}_{max} \text{ und } \mathfrak{c}\leq\mathfrak{d}.$$

Setzt man deshalb voraus, daß $\mathfrak{C}$ genügend viele minimale und maximale Elemente hat, also daß

$$\mathfrak{C}=\bigcup\{[\mathfrak{c},\mathfrak{d}]\mid \mathfrak{c}\in\mathfrak{C}_{min},\mathfrak{d}\in\mathfrak{C}_{max},\mathfrak{c}\leq\mathfrak{d}\},$$

dann ist $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ doppelt fundiert (sofern $\mathbb{K}$ dies ist), und der Kontext $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ hat den (bis auf Isomorphie) gleichen Begriffsverband wie

$$\mathbb{K}[\mathfrak{C}]_r:=(G\cup\mathfrak{C}_{min},M\cup\mathfrak{C}_{max},I_{\mathfrak{C}}\cap(G\cup\mathfrak{C}_{min})\times(M\cup\mathfrak{C}_{max})).$$

Besonders einfach ist $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]_r$ bei der **Intervallverdopplung**, also in dem Fall, daß $\mathfrak{C}$ ein Intervall $\mathfrak{C}=[(B',B),(C,C')]$ von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist, denn dann sind $\mathfrak{C}_{min}$ und $\mathfrak{C}_{max}$ beide einelementig, und man hat

$$\mathbb{K}[\mathfrak{C}]_r=(G\cup\{(B',B)\},M\cup\{(C,C')\},J)$$

mit

$$J\cap G\times M=I,\quad (B',B)^J:=B\quad\text{und}\quad (C,C')^J:=C.$$

Wir halten dies in einem Hilfssatz fest:

Hilfssatz 95. *Ein doppelt fundierter Kontext ist genau dann von der Form $\mathbb{K}[\mathfrak{C}]$ für ein Intervall $\mathfrak{C}\subseteq\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, wenn es einen Gegenstand h und ein Merkmal n gibt mit*

$$h\swarrow\!\!\!\nearrow n,\quad g\swarrow n\Rightarrow g=h,\quad h\nearrow m\Rightarrow m=n.$$

Denn dann sind mit $H := \{h\}$ und $N := \{n\}$ offenbar die Bedingungen von Hilfssatz 92 erfüllt. □

Beispiel 11. Wir betrachten Klammerungen bei einem Produkt von $n+1$ Variablen $x_0, \ldots, x_n$. Weil es uns dabei auf die Namen der Variablen nicht ankommt, ersetzen wir sie durch Punkte. So steht (..)((..).) für $(x_0x_1)((x_2x_3)x_4)$, usw. Man kann die Klammerungen durch die Vereinbarung ordnen, daß ein Ausdruck größer wird, wenn Teilterme nach der Regel

$$A(BC) \longrightarrow (AB)C$$

ersetzt werden. Tamari [175] hat bemerkt, daß dies eine Ordnung induziert, die die Menge aller Klammerungen von $n+1$ Symbolen zu einem Verband macht; dieser wird deshalb der **Tamariverband** $\mathbb{T}_n$ genannt. Bennett und Birkhoff[13] haben die Irreduziblen dieser Verbände bestimmt. Dadurch ist es möglich, einen (reduzierten) Kontext für den Tamariverband $\mathbb{T}_n$ anzugeben. Mit $S := \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\mathfrak{P}_2(S) := \{\{i,j\} \mid i,j \in S, i \neq j\}$ ist dies der Kontext

$$(\mathfrak{P}_2(S), \mathfrak{P}_2(S), I),$$

wobei für $i < j$ und $p < q$ die Inzidenz I definiert wird durch

$$\{i,j\}I\{p,q\} :\Longleftrightarrow \quad \text{nicht } (p \leq i < q \leq j).$$

Geyer [75] hat eine Rekursionsregel für diese Kontexte angegeben, die am Beispiel $n = 5$ in Abbildung 5.9 erkennbar wird.

	1 2	2 3	1 3	3 4	2 4	1 4	4 5	3 5	2 5	1 5
1 2	⤢	×	×	×	×	×	×	×	×	×
2 3	×	⤢	↙	×	×	×	×	×	×	×
1 3	↗	×	⤢	×	×	×	×	×	×	×
3 4	×	×	×	⤢	↙	↙	×	×	×	×
2 4	×	↗		×	⤢	↙	×	×	×	×
1 4	↗	×	↗	×	×	⤢	×	×	×	×
4 5	×	×	×	×	×	×	⤢	↙	↙	↙
3 5	×	×	×	↗			×	⤢	↙	↙
2 5	×	↗		×	↗		×	×	⤢	↙
1 5	↗	×	↗	×	×	↗	×	×	×	⤢

Abbildung 5.9. Der reduzierte Kontext zum Tamariverband $\mathbb{T}_5$.

Der Kontext hat eine auffällige Struktur der Pfeilrelationen: Die (quadratische) Kreuztabelle kann so angeordnet werden, daß alle Doppelpfeile auf, alle Aufwärtspfeile unter und alle Abwärtspfeile oberhalb der Hauptdiagonalen stehen. In diesem speziellen Fall erfüllen der „unterste“ Gegenstand h und das bzgl. $\swarrow\!\!\nearrow$ zugehörige Merkmal n offenbar die Bedingungen von Hilfssatz 95. Der Kontext entsteht also durch Intervallverdopplung aus dem Teilkontext, den man durch Streichen von h und n erhält.

Dieser hat aber wieder die gleiche Struktur der Pfeilrelationen. Der Vorgang kann also wiederholt werden, bis schließlich nichts mehr übrig bleibt. Der Tamariverband entsteht also durch iterierte Intervallverdopplung aus dem einelementigen Verband. Abbildung 5.10 zeigt den Tamariverband $\mathbb{T}_4$ samt „Entstehungsgeschichte“: An den Kanten ist jeweils vermerkt, bei welchem Schritt der iterierten Intervallverdopplung sie entstanden sind. In absteigender Reihenfolge ergeben sich Kongruenzen, die den Verband schrittweise bis zum einelementigen Verband faktorisieren.

5.4 Tensorielle Konstruktionen

Mit Hilfe des in 4.4 eingeführten Distributivgesetzes läßt sich eine verbandstheoretische Charakterisierung des Tensorproduktes formulieren, welche nicht auf den Kontext-Begriff zurückgreift. Wir behandeln nur den Fall von Tensorprodukten mit zwei Faktoren; der allgemeine Fall ist nicht wesentlich verschieden, aber gewöhnungsbedürftig.

Satz 37. *Das Tensorprodukt $\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2$ hat die folgenden Eigenschaften:*

$\otimes$1) *$\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2$ ist ein vollständiger Verband, und*

$$\varepsilon_1 : \mathbf{V}_1 \hookrightarrow \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2, \qquad \varepsilon_2 : \mathbf{V}_2 \hookrightarrow \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2$$

sind vollständige Verbandseinbettungen.

$\otimes$2) *Die vollständigen Unterverbände $\varepsilon_1(\mathbf{V}_1)$ und $\varepsilon_2(\mathbf{V}_2)$ sind zueinander distributiv.*

$\otimes$3) *Wenn $\mathbf{V}$ ein vollständiger Verband ist, der $\otimes$1) und $\otimes$2) erfüllt, also wenn es Einbettungen*

$$\alpha_1 : \mathbf{V}_1 \hookrightarrow \mathbf{V} \qquad \textit{und} \qquad \alpha_2 : \mathbf{V}_2 \hookrightarrow \mathbf{V}$$

gibt mit der Eigenschaft, daß die vollständigen Unterverbände $\alpha_1(\mathbf{V}_1)$ und $\alpha_2(\mathbf{V}_2)$ zueinander distributiv sind, dann gibt es einen vollständigen Homomorphismus $\varphi : \mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}$ mit

$$\alpha_1 = \varphi \circ \varepsilon_1, \qquad \textit{und} \qquad \alpha_2 = \varphi \circ \varepsilon_2.$$

$\otimes$4) *Die Vereinigung $\varepsilon_1(\mathbf{V}_1) \cup \varepsilon_2(\mathbf{V}_2)$ der beiden Unterverbände erzeugt $\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2$.*

Das Tensorprodukt ist durch diese Eigenschaften bis auf Isomorphie charakterisiert.

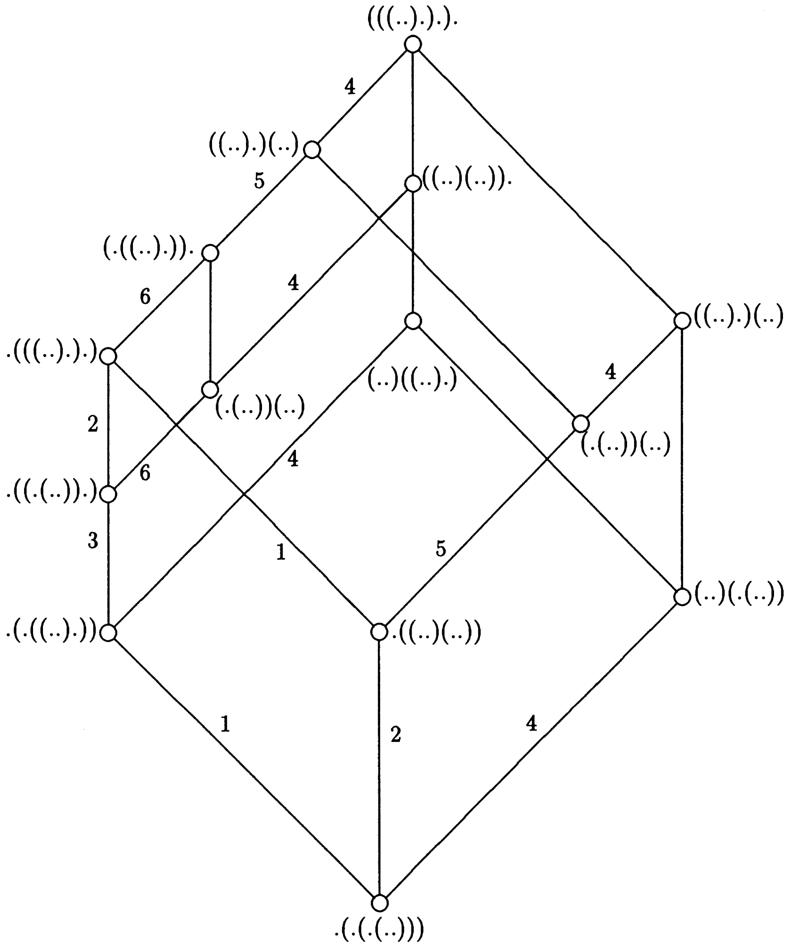


Abbildung 5.10. Der Tamariverband $\mathbb{T}_4$. Die Ziffern an den Kanten deuten die Entstehung des Verbandes durch Intervallverdopplung an.

Beweis. Die Eigenschaften $\otimes 1)$, $\otimes 2)$ und $\otimes 4)$ haben wir schon bewiesen. Daß die Eigenschaften $\otimes 1)$–$\otimes 4)$ charakteristisch sind, ist leicht einzusehen, denn zu jedem Verband mit diesen Eigenschaften erhält man aus $\otimes 3)$ sogleich einen Isomorphismus zum Tensorprodukt.

Zu zeigen ist noch $\otimes 3)$. Es sei also $\boldsymbol{V}$ ein Verband mit den in $\otimes 3)$ angegebenen Eigenschaften. Wir erarbeiten zunächst die folgende Teilbehauptung: *Für jede Teilmenge $X \subseteq \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2$ gilt*

$$\bigvee_{(x_1,x_2)\in X} (\alpha_1(x_1) \wedge \alpha_2(x_2)) = \bigwedge_{(y_1,y_2)\in X^\nabla} (\alpha_1(y_1) \vee \alpha_2(y_2)).$$

Dazu nutzen wir die Bedingung, daß die beiden Bildmengen zueinander distributiv sind und erhalten zunächst:

$$\begin{aligned}\bigvee_{(x_1,x_2)\in X} (\alpha_1(x_1) \wedge \alpha_2(x_2)) &= \bigwedge_{R\subseteq X} \Big(\bigvee_{x_1\in R} \alpha_1(x_1) \vee \bigvee_{x_2\in X\setminus R} \alpha_2(x_2)\Big) \\ &= \bigwedge_{R\subseteq X} \Big(\alpha_1\big(\bigvee_{x_1\in R} x_1\big) \vee \alpha_2\big(\bigvee_{x_2\in X\setminus R} x_2\big)\Big).\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen $y_1^R := \bigvee_{x_1\in R} x_1$ und $y_2^R := \bigvee_{x_2\in X\setminus R} x_2$ vereinfachen wir dies zu

$$\bigvee_{(x_1,x_2)\in X} (\alpha_1(x_1) \wedge \alpha_2(x_2)) = \bigwedge_{R\subseteq X} (\alpha_1(y_1^R) \vee \alpha_2(y_2^R)).$$

Jedes Element von X gehört zu R oder zu $X \setminus R$, deshalb ist sicher seine erste Komponente $\leq y_1^R$ oder seine zweite Komponente $\leq y_2^R$, jedenfalls hat man $(x_1, x_2)\nabla(y_1^R, y_2^R)$ für alle $(x_1, x_2) \in X$, und folglich $(y_1^R, y_2^R) \in X^\nabla$, unabhängig von R. Das beweist

$$\bigwedge_{R\subseteq X} (\alpha_1(y_1^R) \vee \alpha_2(y_2^R)) \geq \bigwedge_{(y_1,y_2)\in X^\nabla} (\alpha_1(y_1) \vee \alpha_2(y_2)).$$

Wählen wir andererseits für $(y_1, y_2) \in X^\nabla$ speziell $R := \{(x_1, x_2) \in X \mid x_1 \leq y_1\}$, dann gilt $X \setminus R \subseteq \{(x_1, x_2) \in X \mid x_2 \leq y_2\}$ und deshalb $\alpha_1(y_1^R) \vee \alpha_2(y_2^R) \leq \alpha_1(y_1) \vee \alpha_2(y_2)$, woraus

$$\bigwedge_{R\subseteq X} (\alpha_1(y_1^R) \vee \alpha_2(y_2^R)) \leq \bigwedge_{(y_1,y_2)\in X^\nabla} (\alpha_1(y_1) \vee \alpha_2(y_2))$$

und damit die Teilbehauptung folgt. Nun definieren wir eine Abbildung $\varphi : \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_2 \to \boldsymbol{V}$ durch

$$\varphi(A, B) := \bigvee_{(x_1,x_2)\in A} \alpha_1(x_1) \wedge \alpha_2(x_2) = \bigwedge_{(y_1,y_2)\in B} \alpha_1(y_1) \vee \alpha_2(y_2).$$

Wir müssen zeigen, daß φ ein vollständiger Homomorphismus ist; wegen der Symmetrie der Definition genügt es, die Eigenschaft „$\bigvee$-treu“ zu begründen.

Dazu setzen wir die Teilbehauptung ein und erhalten für eine beliebige Teilmenge $\{(A_t, B_t) \mid t \in T\} \subseteq \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_2$

$$\begin{aligned}
\bigvee_{t \in T} \varphi(A_t, B_t) &= \bigvee_{t \in T} \bigvee_{(x_1,x_2) \in A_t} (\alpha_1(x_1) \wedge \alpha_2(x_2)) \\
&= \bigvee_{(x_1,x_2) \in \bigcup A_t} (\alpha_1(x_1) \wedge \alpha_2(x_2)) \\
&= \bigwedge_{(y_1,y_2) \in (\bigcup A_t)^\nabla} (\alpha_1(x_1) \vee \alpha_2(x_2)) \\
&= \bigwedge_{(y_1,y_2) \in \bigcap B_t} (\alpha_1(x_1) \vee \alpha_2(x_2)) \\
&= \varphi(\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t)),
\end{aligned}$$

wie gewünscht.

Schließlich müssen wir noch den Zusammenhang zwischen den Abbildungen α_i und ε_i beleuchten. Dazu erinnern wir an die Definition der ε_i (speziell ε_1), aus der sich ergibt, daß für ein beliebiges $x \in \boldsymbol{V}_1$ der Begriffsumfang von $\varepsilon_1(x)$ gegeben ist als $\{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 \mid x_1 \leq x \text{ oder } x_2 = 0\}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon_1(x)) &= \bigvee_{\substack{x_1 \leq x \\ x_2 \leq 1}} (\alpha_1(x_1) \wedge \alpha_2(x_2)) \vee \bigvee_{\substack{x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 0}} (\alpha_1(x_1) \wedge \alpha_2(x_2)) \\
&= \alpha_1(x) \wedge \alpha_2(1) = \alpha_1(x).
\end{aligned}$$

□

Die Abbildungen γ und μ, die auf die Gegenstands- bzw. Merkmalbegriffe abbilden, sind mit den ε_t verwandt. Man hat nämlich

$\gamma(x_1, x_2) =$

$$(\{(g_1, g_2) \mid g_1 \leq x_1 \text{ und } g_2 \leq x_2\} \cup M^\nabla, \{(m_1, m_2) \mid x_1 \leq m_1 \text{ oder } x_2 \leq m_2\}),$$

$\mu(x_1, x_2) =$

$$(\{(g_1, g_2) \mid g_1 \leq x_1 \text{ oder } g_2 \leq x_2\}, G^\nabla \cup \{(m_1, m_2) \mid x_1 \leq m_1 \text{ und } x_2 \leq m_2\}),$$

und deshalb

$$\gamma(x_1, x_2) = \varepsilon_1(x_1) \wedge \varepsilon_2(x_2) \quad \text{und} \quad \mu(x_1, x_2) = \varepsilon_1(x_1) \vee \varepsilon_2(x_2).$$

Es hat sich bewährt, für diese Abbildungen besondere Zeichen einzuführen.

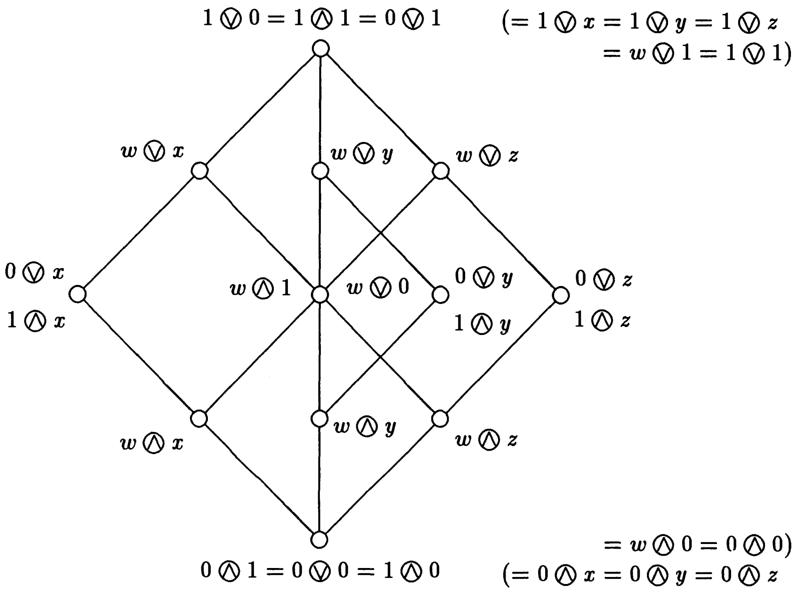
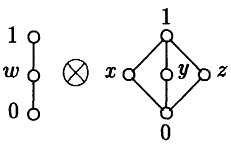


Abbildung 5.11. 

mit den tensoriellen Operationen.

Definition 77. Sind $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ vollständige Verbände, dann sind die **tensoriellen Operationen**

$$\textcircled{\scriptsize$\wedge$} : \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 \to \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_2, \quad \text{und} \quad \textcircled{\scriptsize$\vee$} : \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 \to \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_2$$

definiert durch

$$x_1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2 := \gamma(x_1, x_2) = \varepsilon_1(x_1) \wedge \varepsilon_2(x_2),$$

$$x_1 \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2 := \mu(x_1, x_2) = \varepsilon_1(x_1) \vee \varepsilon_2(x_2). \qquad \Diamond$$

Hilfssatz 96. *Die tensoriellen Operationen erfüllen die folgenden Rechenregeln:*

$$x_1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} 1 = \varepsilon_1(x_1) = x_1 \textcircled{\scriptsize$\vee$} 0, \qquad 1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2 = \varepsilon_2(x_2) = 0 \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2,$$

$$x_1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2 = x_1 \textcircled{\scriptsize$\vee$} 0 \wedge 0 \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2, \qquad x_1 \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2 = x_1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} 1 \vee 1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2,$$

$$\bigwedge_{s\in S} x_1^s \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2^s = (\bigwedge_{s\in S} x_1^s) \textcircled{\scriptsize$\wedge$} (\bigwedge_{s\in S} x_2^s), \qquad \bigvee_{s\in S} x_1^s \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2^s = (\bigvee_{s\in S} x_1^s) \textcircled{\scriptsize$\vee$} (\bigvee_{s\in S} x_2^s),$$

$$\bigvee_{s\in S} x_1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2^s = x_1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} (\bigvee_{s\in S} x_2^s), \qquad \bigwedge_{s\in S} x_1 \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2^s = x_1 \textcircled{\scriptsize$\vee$} (\bigwedge_{s\in S} x_2^s),$$

$$\bigvee_{s\in S} x_1^s \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2 = (\bigvee_{s\in S} x_1^s) \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2, \qquad \bigwedge_{s\in S} x_1^s \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2 = (\bigwedge_{s\in S} x_1^s) \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2,$$

$$\bigwedge_{s\in S} (x_1^s \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2^s) = \bigvee_{R\subseteq S} ((\bigwedge_{r\in R} x_1^r \textcircled{\scriptsize$\wedge$} 1) \wedge (\bigwedge_{s\in S\setminus R} 1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2^s)),$$

$$\bigvee_{s\in S} (x_1^s \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2^s) = \bigwedge_{R\subseteq S} ((\bigvee_{r\in R} x_1^r \textcircled{\scriptsize$\vee$} 0) \vee (\bigvee_{s\in S\setminus R} 0 \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2^s)).$$

Beweis. Alle Regeln erhält man unmittelbar aus den Definitionen, bis auf die beiden letzten, für die man den Hilfssatz 76 zu Rate zieht: wegen $x_1 \textcircled{\scriptsize$\wedge$} x_2 = \varepsilon_1(x_1) \wedge \varepsilon_2(x_2)$, $x_1 \textcircled{\scriptsize$\vee$} x_2 = \varepsilon_1(x_1) \vee \varepsilon_2(x_2)$ und den in der ersten Zeile genannten Regeln sind die Gleichungen genau die Übersetzung des Umstandes, daß die Unterverbände $\varepsilon_1(\boldsymbol{V}_1)$ und $\varepsilon_2(\boldsymbol{V}_2)$ zueinander distributiv sind. $\square$

Thiele [177] hat eindrucksvoll vorgeführt, wie man zu lesbaren Diagrammen von Tensorprodukten kleiner Verbände kommt. Dazu überträgt man zunächst die in §5.1 entwickelte Idee des P-Produktes auf Tensorprodukte und vereinbart:

Definition 78. Für einen P-Verband $(\boldsymbol{V}_1, \alpha_1)$ und einen Q-Verband $(\boldsymbol{V}_2, \alpha_2)$ mit $P \cap Q = \emptyset$ ist

$$(\boldsymbol{V}_1, \alpha_1) \otimes (\boldsymbol{V}_2, \alpha_2) := (\boldsymbol{V}, \alpha)$$

derjenige $P \dot\cup Q$-Unterverband von $\boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_2$, für den die Abbildung

$$\alpha : P \dot\cup Q \to \boldsymbol{V}_1 \otimes \boldsymbol{V}_2$$

folgendermaßen definiert ist:

$$\alpha(r) := \begin{cases} \varepsilon_1 \alpha_1(r) & \text{falls } r \in P, \\ \varepsilon_2 \alpha_2(r) & \text{falls } r \in Q. \end{cases}$$

$\diamond$

Man überzeugt sich anhand von Satz 37 rasch davon, daß auf diese Weise in der Tat ein $P \dot\cup Q$-Verband definiert ist.

Sind $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ Begriffsverbände, so kann man die zugehörige Kontextoperation einführen:

Definition 79. Für einen P-Kontext $(\mathbb{K}_1, \alpha_1)$ und einen Q-Kontext $(\mathbb{K}_2, \alpha_2)$ mit $P \cap Q = \emptyset$ definieren wir

$$(\mathbb{K}_1, \alpha_1) \times (\mathbb{K}_2, \alpha_2) := (\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2, \alpha)$$

als denjenigen $P \dot\cup Q$-Kontext, für den die Abbildung

$$\alpha : P \dot\cup Q \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)$$

wie in Definition 78 erklärt ist. $\diamond$

Unmittelbar aus diesen beiden Definitionen ergibt sich

$$\underline{\mathfrak{B}}((\mathbb{K}_1, \alpha_1) \times (\mathbb{K}_2, \alpha_2)) \cong (\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1), \alpha_1) \otimes (\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2), \alpha_2).$$

Thiele hat gezeigt, daß das so definierte Produkt distributiv über der P-Fusion ist, daß sich also Hilfssatz 16 (S. 47) auf diesen Fall übertragen läßt. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 38. *Sind $(\mathbb{K}_1, \alpha_1)$ und $(\mathbb{K}_2, \alpha_2)$ beides P-Kontexte und ist $(\mathbb{K}_3, \alpha_3)$ ein Q-Kontext mit $P \cap Q = \emptyset$, dann gilt*

$$((\mathbb{K}_1, \alpha_1) \overset{P}{+} (\mathbb{K}_2, \alpha_2)) \times (\mathbb{K}_3, \alpha_3)$$

$$= ((\mathbb{K}_1, \alpha_1) \times (\mathbb{K}_3, \alpha_3)) \overset{P \dot\cup Q}{+} ((\mathbb{K}_2, \alpha_2) \times (\mathbb{K}_3, \alpha_3)).$$

Beweis. Beide Seiten der behaupteten Gleichung beschreiben abgeschlossene Relationen von

$$\mathbb{K} := (\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2) \times \mathbb{K}_3 = \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_3 + \mathbb{K}_2 \times \mathbb{K}_3$$

(vergl. Hilfssatz 16). Wenn wir zeigen können, daß auch die Abbildung α in beiden Fällen die gleiche ist, ist alles bewiesen, denn dann müssen die von

$$\{\alpha x \mid x \in P \mathbin{\dot{\cup}} Q\}$$

erzeugten Unterverbände und damit auch die zugehörigen abgeschlossenen Relationen die gleichen sein. Dies rechnet man nun einfach nach; das Hauptproblem dabei ist das einer übersichtlichen Schreibweise. Wir benutzen dazu wieder die Bezeichnungen

$$(A_t^x, B_t^x) := \alpha_t x \quad \text{für } t \in \{1,2,3\} \text{ und } x \in P \mathbin{\dot{\cup}} Q.$$

Außerdem schreiben wir $(\mathbb{K}_{12}, \alpha_{12})$ für den P-Kontext $(\mathbb{K}_1, \alpha_1) \overset{P}{+} (\mathbb{K}_2, \alpha_2)$ und vereinbaren die Abkürzung

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2) := (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2).$$

Man hat dann also

$$\alpha_{12} p = \alpha_1 p + \alpha_2 p.$$

Für die Einbettungsabbildungen verwenden wir die Bezeichnungen ε_1, ε_2, ε_{12} und ε_3 in der naheliegenden Weise, wobei wir allerdings im Falle von ε_3 noch differenzieren müssen: Wir schreiben ε_3^i, wenn wir im Produkt $\mathbb{K}_i \times \mathbb{K}_3$ arbeiten. Zur leichteren Lesbarkeit setzen wir voraus, daß keiner der Kontexte eine Vollspalte oder eine Vollzeile enthält. Bei der Auswertung der Abbildungen ε_i mit der in Hilfssatz 71 angegebenen Formel fallen dann die trivialen Terme M^∇ und G^∇ weg.

Für die linke Seite erhalten wir, falls $p \in P$,

$$\begin{aligned} \alpha p &= \varepsilon_{12}\alpha_{12}p \\ &= \varepsilon_{12}(A_1^p \cup A_2^p, B_1^p \cup B_2^p) \\ &= ((A_1^p \cup A_2^p) \times G_3, (B_1^p \cup B_2^p) \times M_3) \end{aligned}$$

und für $q \in Q$

$$\begin{aligned} \alpha q &= \varepsilon_3^{12}\alpha_3 q \\ &= \varepsilon_3^{12}(A_3^q, B_3^q) \\ &= ((G_1 \cup G_2) \times A_3^q, (M_1 \cup M_2) \times B_3^q). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite berechnet man für $p \in P$

$$\begin{aligned} \alpha p &= \varepsilon_1\alpha_1 p + \varepsilon_2\alpha_2 p \\ &= (A_1^p \times G_3, B_1^p \times M_3) + (A_2^p \times G_3, B_2^p \times M_3) \\ &= ((A_1^p \cup A_2^p) \times G_3, (B_1^p \cup B_2^p) \times M_3) \end{aligned}$$

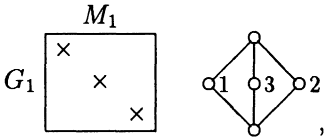
und für $q \in Q$

$$\begin{aligned}
\alpha q &= \varepsilon_3^1 \alpha_3 q + \varepsilon_3^2 \alpha_3 q \\
&= (G_1 \times A_3^q, M_1 \times B_3^q) + (G_2 \times A_3^q, M_2 \times B_3^q) \\
&= ((G_1 \cup G_2) \times A_3^q, (M_1 \cup M_2) \times B_3^q).
\end{aligned}$$

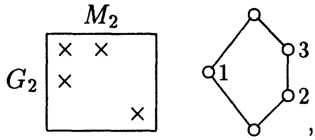
□

Wegen der schönen Anwendungen, die dieser Satz hat, unterstützen wir ihn durch mehrere Beispiele. Das erste demonstriert einfach den im Satz wiedergegebenen Sachverhalt:

Beispiel 12. Betrachte die beiden 3-Kontexte $(\mathbb{K}_1, \alpha_1)$ und $(\mathbb{K}_2, \alpha_2)$, die folgendermaßen gegeben sind

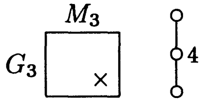


,



,

sowie den $\{4\}$-Kontext $(\mathbb{K}_3, \alpha_3)$ mit nachstehender Veranschaulichung:



.

Mit $P := \{1,2,3\}$ und $Q := \{4\}$ erkennt man in Abbildung 5.12 links den Kontext

$$((\mathbb{K}_1, \alpha_1) \overset{P}{+} (\mathbb{K}_2, \alpha_2)) \times (\mathbb{K}_3, \alpha_3)$$

und rechts

$$((\mathbb{K}_1, \alpha_1) \times (\mathbb{K}_3, \alpha_3)) \overset{P \dot\cup Q}{+} ((\mathbb{K}_2, \alpha_2) \times (\mathbb{K}_3, \alpha_3)).$$

Man erkennt auch, daß beide Kontexte gleich sind.

Korollar 97. *Für zwei P-Verbände* $(\boldsymbol{V}_1, \alpha_1)$, $(\boldsymbol{V}_2, \alpha_2)$ *und einen Q-Verband* $(\boldsymbol{V}_3, \alpha_3)$ *(mit* $P \cap Q = \emptyset$*) gilt*

$$((\boldsymbol{V}_1, \alpha_1) \overset{P}{\times} (\boldsymbol{V}_2, \alpha_2)) \otimes (\boldsymbol{V}_3, \alpha_3)$$

$$\cong ((\boldsymbol{V}_1, \alpha_1) \otimes (\boldsymbol{V}_3, \alpha_3)) \overset{P \cup Q}{\times} (\boldsymbol{V}_2, \alpha_2) \otimes (\boldsymbol{V}_3, \alpha_3)).$$

□

Auch dieses Korollar stammt von Thiele. Er hat es virtuos benutzt, um Diagramme von Tensorprodukten zu zeichnen. Als erste Anwendung berechnen wir das Tensorprodukt zweier vierelementiger Ketten:

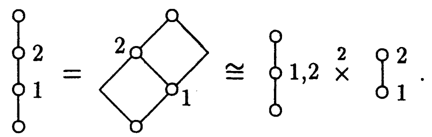
	M_1			M_2			M_1			M_2		
G_1	×			×	×	×	×			×	×	×
		×		×	×			×		×	×	
			×	×	×				×	×	×	
G_2	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	
	×	×	×	×			×	×	×	×		
	×					×	×					×
G_1	×			×	×	×	×	×	×	×	×	×
		×		×	×	×	×	×	×	×	×	×
			×	×	×		×	×	×	×	×	×
G_2	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×
	×	×	×	×			×	×	×	×	×	×
	×					×	×	×	×	×	×	×

=

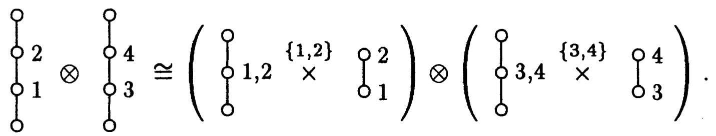
	M_1			M_1			M_2			M_2		
G_1	×			×			×	×	×	×	×	×
		×			×		×	×		×	×	
			×			×	×	×		×	×	
G_1	×			×	×	×	×	×	×	×	×	×
		×		×	×	×	×	×		×	×	×
			×	×	×	×	×	×		×	×	×
G_2	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	
	×	×	×	×	×	×	×			×		
	×			×					×			×
G_2	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	×
	×	×	×	×	×	×	×			×	×	×
	×			×	×	×			×	×	×	×

Abbildung 5.12. Nach Satz 38 sind die beiden Kontexte gleich.

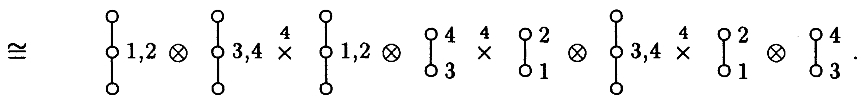
Beispiel 13. Um das Tensorprodukt zweier vierelementiger Ketten zu berechnen, nutzen wir aus, daß eine solche Kette als 2-Produkt einer zweielementigen und einer dreielementigen Kette geschrieben werden kann:



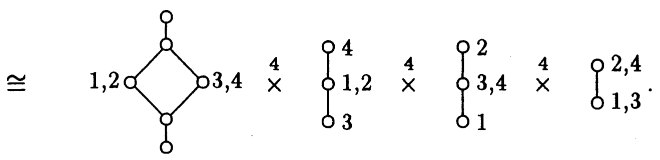
Zerlegt man beide Faktoren auf diese Weise, so erhält man

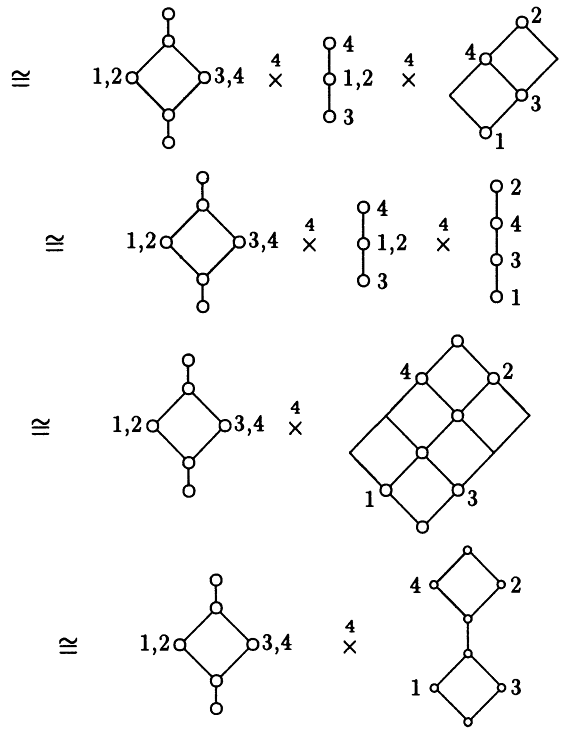


Mit Hilfe von Korollar 97 kann nun ausmultipliziert werden, wobei wir durch die Vereinbarung „Tensorprodukt vor P-Produkt“ Klammern sparen. Der obige Ausdruck berechnet sich zu



Das Tensorprodukt zweier dreielementiger Ketten ist, wie man leicht anhand der Kontexte feststellt, sechselementig. Zweielementige Ketten verhalten sich bezüglich des Tensorproduktes wie neutrale Elemente. Durch diese Beobachtungen kann der Ausdruck in ein reines 4-Produkt umgewandelt werden:



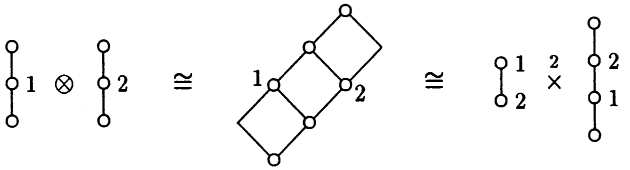


Dieses Produkt haben wir bereits in Beispiel 10 (S. 191) berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.4 (S. 193) wiedergegeben.

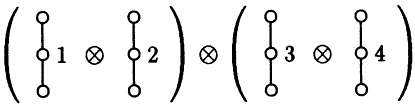
Beispiel 14. Eine besonders schöne Anwendung dieser Methoden ist Thieles Darstellung des freien distributiven Verbandes mit vier Erzeugenden als ein subdirektes Produkt. Das dadurch gewonnene gestufte Liniendiagramm ist in Abbildung 1.20 (S. 51) wiedergegeben.

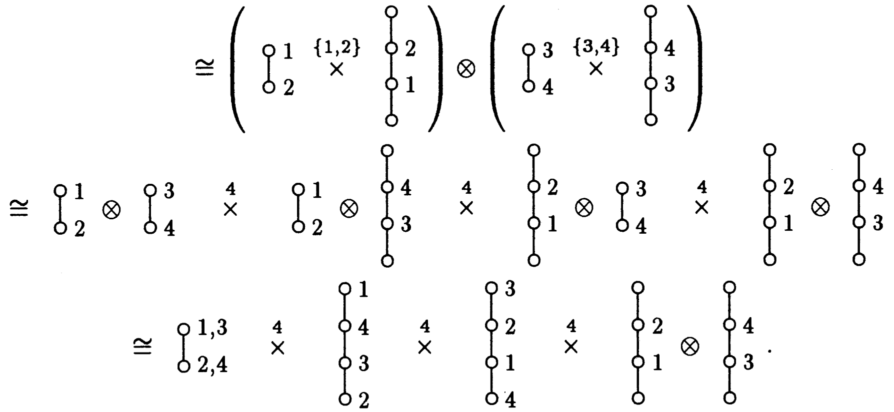
Allgemein gilt, daß FCD(n) zur n-ten Tensorpotenz des dreielementigen Verbandes isomorph ist [198]. FCD(4) erhält man also als das Tensorprodukt von vier dreielementigen Ketten.

Wir nutzen aus, daß sich ein Tensorprodukt zweier dreielementiger Ketten in ein 2-Produkt umschreiben läßt:



Damit erhalten wir

FCD(4) $\cong$ 



Das Tensorprodukt von zwei vierelementigen Ketten hatten wir bereits im Beispiel 13 berechnet; das 4-Produkt der übrigen Faktoren war Gegenstand von Beipiel 9, siehe Abbildung 5.3 (S. 189). Das Tensorprodukt von vier dreielementigen Ketten, und damit der freien vollständig distributive Verband mit vier Erzeugenden, ist also isomorph zu dem in Abbildung 5.13 gezeigten 4-Produkt. Auf diese Weise wurde das Diagramm in Abbildung 1.20 (S. 51) gewonnen.

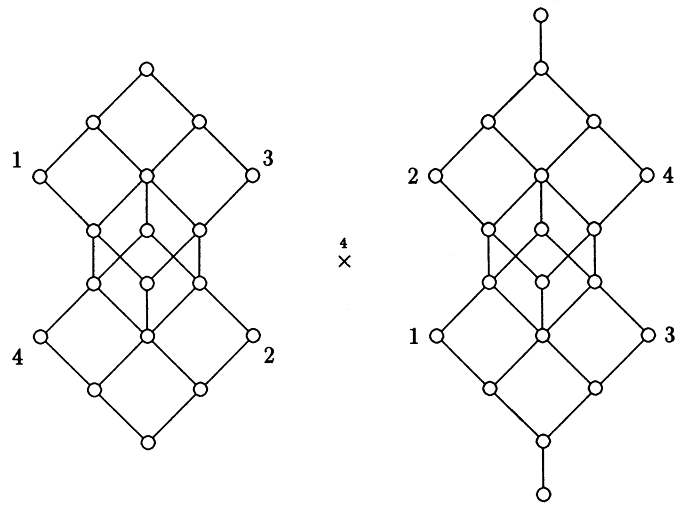


Abbildung 5.13. Der freie distributive Verband FCD(4) als ein 4-Produkt.

5.5 Literatur und Hinweise

Zu 5.1 Abschnitt 5.1 folgt [201] und dem Vorläufer dieser Arbeit, [196].

Zur Rolle des Bindungsproduktes $J_{r,s} \circ J_{s,t}$ vergleiche man auch Hilfssatz 113 (S. 258).

P-Produkte von Verbänden sind ein altes Thema eines der Autoren dieses Buches, siehe [191] und [192]. In den Arbeiten von Bartenschlager [10] und Thiele [177] wird vom P-Produkt als mathematischem Konstruktionsmittel ausgiebig Gebrauch gemacht.

Zu 5.2 Die Ergebnisse dieses Abschnittes bauen auf der Dissertation von S. Gürgens [82] auf, allerdings sind die Bezeichnungen geändert. Dort finden sich auch weitergehende Ergebnisse. Gürgens gibt einen Algorithmus an, der feststellt, ob $\mathbb{K}$ Verklebung zweier Kontexte ist. Sie studiert auch die gleichzeitige Verklebung mehrerer Verbände bzw. Kontexte. Vorbild waren die Verklebungen Boolescher Verbände in der Theorie orthomodularer Verbände, vergl. Greechie [79].

Zu 5.3 Lokale Verdopplung wurde von Day [32] eingeführt, zunächst für Intervalle und dann allgemeiner. Sie haben eine wichtige Rolle bei der Untersuchung freier Verbände gespielt, siehe auch Day [33], Nation [132] sowie Day, Nation & Tschantz [35]. Day hat auch schon eine begriffsanalytische Fassung der Intervallverdopplungskonstruktion angegeben. Unsere Darstellung folgt weitgehend Geyer [74].

Daß die Klammerungen einen Verband bilden, war zuerst von Tamari [175] publiziert worden, Huang und Tamari [89] gaben dann einen einfacheren Beweis. Die begriffsanalytische Untersuchung stammt von Geyer [75].

Zu 5.4 Das direkte Produkt von Kontexten hat sich besonders als ein natürliches Produkt für begriffliche Skalen erwiesen. Produkte der Elementarskalen sind in Thiele [177] untersucht und durch viele Diagramme anschaulich gemacht. In dieser bereits mehrfach zitierten Arbeit findet sich auch das Ergebnis, daß das direkte Produkt zweier abgeschlossener Relationen wieder abgeschlossen ist; Tensorprodukte von Unterverbänden führen also auf Unterverbände des Tensorproduktes.

Strahringer [166] beschreibt Produkte konvex-ordinaler Skalen. [202] benutzt das direkte Produkt für die allgemeine Modellierung von Abhängigkeiten zwischen mehrwertigen Merkmalen. Stumme [171] verwendet es für die distributive Begriffexploration.

Die Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen von einer geordneten Menge $\mathbf{P}$ in einen vollständigen Verband $\boldsymbol{V}$ bildet, punktweise geordnet, ebenfalls einen vollständigen Verband, der mit $\boldsymbol{V}^{\mathbf{P}}$ bezeichnet wird. Gelegentlich wird eine Formel verwendet, die einen Zusammenhang zwischen diesem Verband und dem Verband $\underline{2}^{\mathbf{P}}$ aller ordnungserhaltenden Abbildungen von $\mathbf{P}$ in den zweielementigen Verband $\underline{2}$ herstellt:

$$\boldsymbol{V}^{\mathbf{P}} \cong \underline{2}^{\mathbf{P}} \otimes \boldsymbol{V}.$$

6. Eigenschaften von Begriffsverbänden

Die mathematische Verbandstheorie klassifiziert Verbände nach ihren strukturellen Eigenschaften. Die wichtigste, nämlich die *Distributivität*, haben wir bereits im Abschnitt 0.3 erwähnt und seither mehrfach benutzt. Wir wollen sie nun noch etwas intensiver untersuchen, dabei konzentrieren wir uns auf doppelt fundierte Verbände, bei denen vieles einfacher ist. Hinzu kommen weitere interessante Eigenschaften, wie die *Modularität* und die *Halbmodularität*, die eine besondere Rolle in der Geometrie spielen. Wir geben an, wie sich *Semidistributivität* und *lokale Distributivität* mit Hilfe der Pfeilrelationen beschreiben lassen und welche hüllentheoretischen Konsequenzen diese Eigenschaften haben. Der letze Abschnitt beschäftigt sich mit verschiedenen Begriffen von *Dimension* von Verbänden, insbesondere mit der Ordnungsdimension.

6.1 Distributivität

Bereits in Definition 15 (S. 11) hatten wir die Varianten des Distributivgesetzes eingeführt: Ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$ heißt **distributiv**, wenn die beiden (zueinander äquivalenten) Gesetze

$$\begin{array}{llcl} (\mathbf{D}_\wedge) & x \wedge (y \vee z) & = & (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ (\mathbf{D}_\vee) & x \vee (y \wedge z) & = & (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{array}$$

gelten und **vollständig distributiv**, wenn die folgende Verallgemeinerung auf beliebige Infima und Suprema für alle Indexmengen $S, T \neq \emptyset$ erfüllt ist:

$$(\mathbf{D}_{\bigvee\bigwedge}) \qquad \bigwedge_{s \in S} \bigvee_{t \in T} x_{s,t} = \bigvee_{\varphi: S \to T} \bigwedge_{s \in S} x_{s,\varphi(s)}.$$

Auch dieses Gesetz ist zu seinem dualen, $(\mathbf{D}_{\bigwedge\bigvee})$, äquivalent. Die eine Richtung des Gesetzes $(\mathbf{D}_{\bigvee\bigwedge})$, nämlich die Ungleichung

$$\bigwedge_{s \in S} \bigvee_{t \in T} x_{s,t} \geq \bigvee_{\varphi: S \to T} \bigwedge_{s \in S} x_{s,\varphi(s)}$$

gilt in jedem vollständigen Verband, denn für festes φ ist $\bigwedge_{s\in S} x_{s,\varphi(s)}$ stets kleiner oder gleich der linken Seite.

Oft benutzt wird eine verschärfte Fassung des Gesetzes der vollständigen Distributivität, die sich aber aus der oben angegebenen ableiten läßt. Dabei erlaubt man, daß die Menge T in Abhängigkeit von $s \in S$ gewählt wird; man ersetzt T dazu durch eine Mengenfamilie

$$\{T_s \mid s \in S\}.$$

An die Stelle der Abbildungen $\varphi : S \to T$ treten dann die Elemente

$$\varphi \in \bigtimes_{s\in S} T_s$$

des direkten Produktes dieser Mengen (wofür wir kurz $\bigtimes T_s$ schreiben). Diese Fassung des Gesetzes $(\mathbf{D}_{\bigwedge\bigvee})$ lautet dann

$$\bigwedge_{s\in S}\bigvee_{t\in T_s} x_{s,t} = \bigvee_{\varphi\in\bigtimes T_s}\bigwedge_{s\in S} x_{s,\varphi(s)}.$$

Wiederum gilt die Ungleichung "$\geq$" in jedem vollständigen Verband.

Beweise für die behaupteten Äquivalenzen findet man in den zitierten Büchern zur Verbandstheorie, speziell bei Balbes & Dwinger [3]. Birkhoffs "Lattice theory" entnehmen wir die folgende nützliche Charakterisierung der distributiven Verbände:

Hilfssatz 98. *Ein Verband ist genau dann distributiv, wenn aus $a \wedge x = a \wedge y$ und $a \vee x = a \vee y$ stets $x = y$ folgt.* □

Beispiele vollständig distributiver vollständiger Verbände sind die Potenzmengenverbände, allgemeiner die Verbände der Ordnungsideale geordneter Mengen, wie der folgende bekannte Satz feststellt:

Satz 39. (Satz von Birkhoff) *Ist $\mathbf{D}$ ein vollständig distributiver vollständiger Verband, in dem die Menge $J(\mathbf{D})$ der $\bigvee$-irreduziblen Elemente supremum-dicht ist, dann wird durch*

$$x \mapsto (x] \cap J(\mathbf{D})$$

ein Isomorphismus von $\mathbf{D}$ auf das Hüllensystem aller Ordnungsideale von $(J(\mathbf{D}), \leq)$ beschrieben. Umgekehrt ist für jede geordnete Menge $(P, \leq)$ das Hüllensystem aller Ordnungsideale ein vollständig distributiver Verband $\mathbf{D}$, in dem

$$J(\mathbf{D}) = \{(x] \mid x \in P\}$$

supremum-dicht ist.

Beweis. Für $x \in D$ ist offenbar $(x] \cap J(\boldsymbol{D})$ ein Ordnungsideal von $(J(\boldsymbol{D}), \leq)$. Ist A ein Ordnungsideal von $(J(\boldsymbol{D}), \leq)$ und $a := \bigvee A$, dann ist $A \subseteq (a] \cap J(\boldsymbol{D})$. Es ist sogar $A = (a] \cap J(\boldsymbol{D})$, wie folgende Überlegung zeigt: Für $x \in D$ gilt

$$x \in (a] \iff x \leq a \iff x \leq \bigvee A \iff x = x \wedge \bigvee A.$$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes erhalten wir

$$x \in (a] \iff x = x \wedge \bigvee A = \bigvee \{x \wedge y \mid y \in A\}.$$

Ist zusätzlich x $\bigvee$-irreduzibel, dann kann $x = \bigvee\{x \wedge y \mid y \in A\}$ nur eintreten, wenn $x = x \wedge y$ für ein $y \in A$ gilt, also $x \leq y$ für ein $y \in A$. Da A ein Ordnungsideal in $J(\boldsymbol{D})$ ist, folgt daraus $x \in A$.

Wenn $J(\boldsymbol{D})$ supremum-dicht in $\boldsymbol{D}$ ist, beschreibt also

$$x \mapsto (x] \cap J(\boldsymbol{D})$$

eine Bijektion, die wegen

$$x \leq y \iff (x] \cap J(\boldsymbol{D}) \subseteq (y] \cap J(\boldsymbol{D})$$

sogar ein Verbandsisomorphismus ist.

Durchschnitt und Vereinigung beliebig vieler Ordnungsideale einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ergeben wieder Ordnungsideale. Daher ist der Verband aller Ordnungsideale ein vollständiger Unterverband des Potenzmengenverbandes von P und somit vollständig distributiv. Jedes Ordnungsideal A ist Vereinigung und somit Supremum von Hauptidealen:

$$A = \bigcup_{a \in A} (a],$$

und wegen $(a]_* = (a] \setminus \{a\}$ ist jedes Hauptideal $\bigvee$-irreduzibel. □

Satz 40. *Ein Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist genau dann vollständig distributiv, wenn es für jedes nichtinzidente Gegenstand-Merkmal-Paar*

$$(g, m) \notin I$$

einen Gegenstand $h \in G$ und ein Merkmal $n \in M$ gibt mit $(g, n) \notin I$, $(h, m) \notin I$ und $h \in k''$ für alle $k \in G \setminus \{n\}'$.

Beweis. In jedem Begriffsverband gilt

$$\bigwedge_{s \in S} \bigvee_{t \in T_s} (A_{s,t}, B_{s,t}) \geq \bigvee_{\varphi \in \times T_s} \bigwedge_{s \in S} (A_{s,\varphi(s)}, B_{s,\varphi(s)}).$$

Angenommen, die linke Seite wäre größer als die rechte. Dann gibt es

$$g \in \bigcap_{s \in S} (\bigcap_{t \in T} B_{s,t})' \quad \text{und} \quad m \in \bigcap_{\varphi \in \times T_s} (\bigcap_{s \in S} A_{s,\varphi(s)})'$$

mit $(g,m) \notin I$. Existieren nun $h \in G$ und $n \in M$ mit $(g,n) \notin I$, $(h,m) \notin I$ und $h \in k''$ für alle $k \in G \setminus n'$, dann kann für $s \in S$ wegen $g \in (\bigcap_{t \in T} B_{s,t})'$ nicht $n \in \bigcap_{t \in T} B_{s,t}$ gelten. Deshalb gibt es ein $\hat{\varphi} \in \times_{s \in S} T_s$ mit $n \notin B_{s,\hat{\varphi}(s)}$ für alle $s \in S$. Aus $h \in k''$ und $k \in G \setminus n'$ folgt nun $h \in A_{s,\hat{\varphi}(s)}$ für alle $s \in S$. Da aber $m \in (\bigcap_{s \in S} A_{s,\hat{\varphi}(s)})'$ ist, ergibt sich ein Widerspruch zu $(h,m) \notin I$. Also folgt die Gleichung aus den angegebenen Bedingungen.

Um für die Rückrichtung die vollständige Distributivität anwenden zu können, machen wir uns zunächst klar, daß für jeden Gegenstand $g \in G$

$$(g'', g') = \bigwedge_{\varphi} \bigvee_{n \in M \setminus g'} (\varphi(n)'', \varphi(n)')$$

gilt, wobei die φ unter dem $\bigwedge$-Operator folgendermaßen zu wählen sind:

$$\varphi \in \bigtimes_{n \in M \setminus g'} (G \setminus n').$$

φ läuft also über alle Abbildungen, die jedem mit g nicht inzidenten Merkmal n einen mit n nicht inzidenten Gegenstand $\varphi(n)$ zuordnen. Eine mögliche Wahl ist also $\varphi(n) := g$ für alle n, damit erhält man die Richtung "$\geq$" der Behauptung. Für die andere Richtung bemerken wir, daß $n \notin \varphi(n)'$ gilt. n kann also erst recht nicht im Inhalt des Supremums $\bigvee_{n \in M \setminus g'} (\varphi(n)'', \varphi(n)')$ liegen, dieser Inhalt ist also Teilmenge von g'.

Wir haben zu zeigen, daß es –die vollständige Distributivität des Begriffsverbandes vorausgesetzt– für beliebige $g \in G$ und $m \in M$ mit $(g,m) \notin I$ möglich ist, ein $h \in G$ und ein $n \in M$ zu finden, die den im Satz angegebenen Bedingungen genügen.

Mit Hilfe der Vorüberlegung und durch Anwendung des Distributivgesetzes erhalten wir

$$(g'', g') = \bigwedge_{\varphi} \bigvee_{n \in M \setminus g'} (\varphi(n)'', \varphi(n)') = \bigvee_{n \in M \setminus g'} \bigwedge_{k \in G \setminus n'} (k'', k').$$

Somit gibt es ein $n \in M \setminus g'$ mit $m \notin (\bigcap_{k \in G \setminus n'} k'')'$ und folglich ein $h \in \bigcap_{k \in G \setminus n'} k''$ mit $(h,m) \notin I$. Die gefundenen Elemente h und n erfüllen die angegebenen Bedingungen. □

Es ist leicht, vollständige Verbände anzugeben, die distributiv, aber nicht vollständig distributiv sind. Allerdings können solche Beispiele nicht doppelt fundiert sein, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 41. *Für einen doppelt fundierten Begriffsverband* $\mathbf{V} := \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $\mathbf{V}$ *ist distributiv.*

2. *V ist vollständig distributiv.*
3. *Aus $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$ und $g \nearrow n$ folgt $\mu m = \mu n$.*
4. *Aus $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$ und $h \swarrow m$ folgt $\gamma g = \gamma h$.*
5. *V ist isomorph zu einem vollständigen subdirekten Produkt von zweielementigen Verbänden.*
6. *V ist isomorph zu einem vollständigen Unterverband eines Potenzmengenverbandes.*
7. *V ist isomorph zum vollständigen Verband aller Ordnungsfilter einer geordneten Menge.*

Ist (G, M, I) reduziert, so sind folgende Bedingungen zu den bisher aufgeführten äquivalent:

8. *Jede echte Prämisse ist einelementig.*
9. *Aus $g \nearrow m$ folgt $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$, aus $g \swarrow m$ folgt $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$,*
   aus $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$ und $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$ folgt $m = n$ und aus $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$ und $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$ folgt $g = h$.

Beweis. Wir zeigen $1 \Rightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Rightarrow 9 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 2 \Rightarrow 8 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1$.
$1 \Rightarrow 3$: Aus $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$ und $g \nearrow n$ schließen wir, daß γg $\bigvee$-irreduzibel ist und daß $\gamma g \wedge \mu m \leq \gamma g_*$ und $\gamma g \wedge \mu n \leq \gamma g_*$. Also ist auch $\mu m \vee \mu n \not\geq \gamma g$, denn mit dem Distributivgesetz erhält man $\gamma g \wedge (\mu m \vee \mu n) = (\gamma g \wedge \mu m) \vee (\gamma g \wedge \mu n) \leq \gamma g_* \vee \gamma g_* = \gamma g_* < \gamma g$. Da μm und μn als maximal $\not\geq \gamma g$ vorausgesetzt waren, muß $\mu m = \mu m \vee \mu n = \mu n$ sein, q.e.d.
$3 \Rightarrow 4$: Sei $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$, $h \swarrow m$ und $\gamma g \neq \gamma h$. Dann ist $h' \not\subseteq g'$, also existiert ein Merkmal n mit hIn, $g \not\!I n$. Dann findet sich ein Merkmal $\tilde{n}$ mit $g \nearrow \tilde{n}$ und $n' \subseteq \tilde{n}'$, aufgrund von 3 muß aber $\gamma m = \gamma \tilde{n}$ gelten, woraus wir $n' \subseteq m'$ schließen. Dies aber steht im Widerspruch zu $h \in n', h \notin m'$.

Entsprechend zeigt man $4 \Rightarrow 3$.
$3, 4 \Rightarrow 9$: Wenn $g \nearrow n$ gilt und g irreduzibel ist, so existiert ein m mit $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow m$, nach 3 also $m = n$ und somit $g \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$. Zusammen mit dem dualen Argument zeigt dies, daß ein reduzierter Kontext, der 3 und 4 erfüllt, nur Doppelpfeile zuläßt. Die weitere Behauptung, nämlich daß die Doppelpfeilrelation eine Bijektion zwischen G und M darstellt, folgt nun unmittelbar aus 3 bzw. 4.
$9 \Rightarrow 5$: Nach Hilfssatz 62 (S. 137) entsprechen die subdirekt irreduziblen Faktoren von V genau den Begriffsverbänden der einserzeugten Teilkontexte von (G, M, I) (wir dürfen (G, M, I) als reduziert voraussetzen). Nach 9 sind aber alle einserzeugten Teilkontexte von der gleichen, trivialen Gestalt: sie bestehen aus einem Gegenstand und einem Merkmal, die nicht in Relation zueinander stehen. Jeder subdirekte Faktor von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ ist also ein zweielementiger Verband.
$5 \Rightarrow 6$: Die Abbildung $(x_t)_{t \in T} \mapsto \{t \in T \mid x_t = \mathbf{1}\}$ ist ein Isomorphismus von der T-fachen Potenz des zweielementigen Verbandes auf den vollständigen Verband aller Teilmengen von T.

$6 \Rightarrow 2$: Daß die Potenzmengenverbände vollständig distributiv sind, ist aus der elementaren Mengenlehre bekannt (und überdies leicht nachzuweisen), es folgt also 2.
$2 \Rightarrow 8$: Ist (G, M, I) reduzierter Kontext mit vollständig distributivem Begriffsverband, so gilt für jede Menge $B \subseteq M$

$$B'' = \bigcup_{b \in B} b'',$$

denn es ist

$$\begin{aligned} m \in B'' \quad &\Leftrightarrow \quad \mu m \geq \bigwedge\{\mu n | n \in B\} \\ &\Leftrightarrow \quad \mu m = \mu m \vee \bigwedge\{\mu n | n \in B\} \\ &\Leftrightarrow \quad \mu m = \bigwedge\{\mu m \vee \mu n | n \in B\} \\ &\Leftrightarrow \quad \mu m = \mu m \vee \mu n \text{ für ein } n \in B \\ &\qquad\quad \text{(denn } \mu m \text{ ist } \bigwedge\text{-irreduzibel)} \\ &\Leftrightarrow \quad m \in n'' \text{ für ein } n \in B. \end{aligned}$$

Dies ist offenbar gleichbedeutend zu der Bedingung 8.
$8 \Rightarrow 7$: Die Menge M der (irreduziblen) Merkmale ist durch $m \leq n :\Leftrightarrow n' \subseteq m'$ geordnet. Aus 8 folgt, daß die Begriffsinhalte genau die Ordnungsfilter von M bezüglich dieser Ordnung sind.
$7 \Rightarrow 1$: Vereinigung und Durchschnitt von Ordnungsfiltern ergeben wieder Ordnungfilter, die Distributivität ergibt sich also aus der der Mengenoperationen. □

Jedes subdirekte Produkt[1] (vollständig) distributiver Verbände ist (vollständig) distributiv.

6.2 Halbmodularität und Modularität

Der Verband der Untervektorräume eines Vektorraumes, allgemeiner der der Untermoduln eines Moduls, besitzt eine besondere Struktureigenschaft: in ihm gilt das *modulare Gesetz.* Auch die Normalteilerverbände von Gruppen sind modular. Eine Abschwächung dieser Eigenschaft, die *Halbmodularität*, kann auf verschiedene Weisen definiert werden. Einige dieser Definitionen benutzen die Nachbarschaftsrelation $x \prec y$ (vergl. Definition 3) und beziehen sich deshalb sinnvoll nur auf Verbände mit gewissen Endlichkeitsvoraussetzungen.

[1] vergleiche die Fußnote auf Seite 132

Definition 80. Ein Verband $\boldsymbol{V}$ heißt **halbmodular**, falls für je zwei Elemente x, y gilt

$$x \wedge y \prec y \Rightarrow x \prec x \vee y,$$

modular, wenn er das folgende Gesetz für alle x, y und z erfüllt:

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z,$$

gradiert, wenn es eine **Rangfunktion** $r(x)$ gibt, die jedem Element von $\boldsymbol{V}$ eine natürliche Zahl zuordnet mit

$$r(0) = 0 \text{ und } x \prec y \Rightarrow r(y) = r(x) + 1.$$

Wir sagen, $\boldsymbol{V}$ erfülle die **schwache Halbmodularitätsbedingung**, wenn

$$x \wedge y \prec x, y \quad \Rightarrow \quad x, y \prec x \vee y,$$

gilt, und die **starke Halbmodularitätsbedingung**, wenn gilt:

> Sind x, y und z Elemente mit $x < z$, $y \vee x = y \vee z$ und $y \wedge x = y \wedge z$, so existiert ein Element $d \leq y$ mit $y \wedge x < d$ und $(x \vee d) \wedge z = x$.

$\Diamond$

Es gibt eine Charakterisierung der modularen Verbände, die ganz analog zu der der distributiven Verbände in Hilfssatz 98 ist. Den Beweis findet man wieder bei Birkhoff.

Hilfssatz 99. *Ein Verband ist genau dann modular, wenn aus $x \leq y$, $a \wedge x = a \wedge y$ und $a \vee x = a \vee y$ stets $x = y$ folgt.*

Ein modularer Verband, der nicht distributiv ist, enthält Elemente x, y, z mit $x \vee y = x \vee z = y \vee z$ und $x \wedge y = x \wedge z = y \wedge z$, aber $x \neq y$. □

Die Hierarchie dieser Verbandseigenschaften ist gründlich untersucht und an anderer Stelle ausführlich beschrieben. Wir halten hier nur die einfachsten Aussagen fest:

Hilfssatz 100. *Jeder distributive Verband ist modular. Das modulare Gesetz impliziert die starke Halbmodularitätsbedingung (und ihr Dual), und aus dieser folgt die Halbmodularität.*

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich aus dem Vergleich der Hilfssätze 98 und 99. Die starke Halbmodularitätsbedingung gilt in jedem modularen Verband schon deshalb, weil ihre Prämisse niemals erfüllt wird: Sind nämlich x, y, z Elemente mit $x < y$ und $y \vee x = y \vee z$ sowie $y \wedge x = y \wedge z$, so liefert das modulare Gesetz

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber gleich x, die rechte gleich z, was im Widerspruch zu $x < z$ steht.

Daß aus der starken Halbmodularitätsbedingung die Halbmodularität folgt, sieht man so: Es seien y, x Elemente mit $y \wedge x \prec y$, aber $x \not\prec y \vee x$. Dann muß es ein Element z geben mit $x < z < y \vee x$, und $y \wedge x \prec y$ erzwingt $y \wedge z = y \wedge x$. Bedingung 2 liefert nun ein Element d mit $y \wedge x < d \leq y$, woraus wegen $y \wedge x \prec y$ sofort $d = y$ geschlossen werden kann. Daraus ergibt sich aber, daß $x \vee d = y \vee x$ ist, d kann also nicht die geforderte Bedingung $(x \vee d) \wedge z = x$ erfüllen. $\square$

In einem reduzierten Kontext ist $g \swarrow m$ gleichbedeutend zu $(\gamma g)_* = \gamma g \wedge \mu m$. Ist der Begriffsverband halbmodular, so folgt daraus $\gamma g \vee \mu m = (\mu m)^*$, also $g \nearrow m$. Ein solcher Kontext kann also keine „echten Abwärtspfeile“ enthalten, im modularen Fall müssen sogar alle Pfeile Doppelpfeile sein. Diese Bedingungen sind allerdings in keiner Weise hinreichend für Halbmodularität oder gar Modularität. Eine Charakterisierung dieser Eigenschaften in der Kontextsprache liefert der folgende Satz. Zur Vorbereitung benötigen wir noch eine Abkürzung: Ist g ein Gegenstand in einem Kontext (G, M, I), so bezeichne

$$g_\bullet := \{x \in G \mid \gamma x < \gamma g\}.$$

Wenn γg $\bigvee$-irreduzibel ist, dann ist $g_\bullet$ also gerade der Begriffsumfang von $(\gamma g)_*$.

Satz 42. *Für einen doppelt fundierten Begriffsverband* $\mathbf{V} := \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. $\mathbf{V}$ *ist halbmodular.*
2. $\mathbf{V}$ *erfüllt die starke Halbmodularitätsbedingung.*
3. *In* (G, M, I) *gilt die folgende* Austauschbedingung*:*
$$g_\bullet \subseteq A, h \in (A \cup \{g\})'' \text{ und } h \notin A'' \Rightarrow g \in (A \cup \{h\})''.$$
4. *Aus* $g \swarrow m$, $g \swarrow n$, hIm *und* $h\not{I}n$ *folgt, daß ein Merkmal* p *existiert mit* $h\not{I}p$, gIp *und* $m' \cap n' \subseteq p'$.

Ist $\mathbf{V}$ *endlich, so sind folgende Bedingungen zu den bisher aufgeführten äquivalent:*

5. $\mathbf{V}$ *erfüllt die schwache Halbmodularitätsbedingung.*
6. $\mathbf{V}$ *ist gradiert und besitzt eine Rangfunktion mit*
$$r(x) + r(y) \geq r(x \wedge y) + r(x \vee y).$$

Bemerkung: Im Beweis wird, anders als im Satz formuliert, nur eine der beiden Fundiertheitsbedingungen verwendet. Nimmt man die andere hinzu, so kann man noch etwas verbessern. Beipielsweise kann in Bedingung (4) dann $h\not{I}p$ durch $h \nearrow p$ ersetzt werden. Damit läßt sich zeigen, daß Faktorverbände doppelt fundierter halbmodularer Verbände wieder halbmodular sind.
Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Seien y, x und z Elemente mit $x < z$ und $y \vee x = y \vee z$ und $y \wedge x = y \wedge z$. Wir zeigen zunächst, daß es ein Element d gibt mit

$y \wedge x \prec d \leq y$. Wegen der Fundiertheit existiert nämlich ein Element s, das minimal ist bezüglich $s \leq y$, $s \not\leq y \wedge x$. s ist zwangsläufig $\bigvee$-irreduzibel, und $s_* \leq y \wedge x$, also $s \wedge (y \wedge x) = s_* \prec s$. Setzen wir nun $d := s \vee (y \wedge x)$, so erhalten wir aus der ersten Bedingung des Hilfssatzes $y \wedge x \prec d$. Erneutes Anwenden der Bedingung ergibt $x \prec x \vee d$. $x \vee d \leq z$ hätte $z \geq x \vee d \geq d \geq s$ und wegen $y \geq s$ auch $y \wedge z = y \wedge x \geq s$ zur Folge, was im Widerspruch zur Definition von s stünde. Also ist $z \wedge (x \vee d) = x$. $2 \Rightarrow 1$ ist schon in Hilfssatz 100 bewiesen.

$3 \Rightarrow 1$: Seien x, y Begriffe mit $x \wedge y \prec y$ und $x = (A, B)$, weiter sei z ein Begriff zwischen x und $x \vee y$: $x < z < x \vee y$. Aus der Fundiertheit erhalten wir ein Element s, welches minimal ist bezüglich $s \leq y$, $s \not\leq x$, s ist dann $\bigvee$-irreduzibel und damit ein Gegenstandsbegriff, also $s = \gamma h$ für ein $h \in G$. Wegen $s_* \leq x$ gilt $h_\bullet \subseteq A$, außerdem gilt $x \vee y = x \vee s$. Wählen wir nun einen Gegenstand g, der im Umfang des Begriffes z liegt, aber nicht zu A gehört, so haben wir

$$g \notin (A \cup h_\bullet)'', \quad g \in (A \cup \{h\})'',$$

woraus mit (3) folgt, daß $h \in (A \cup \{g\})''$ ist. Dieser Begriffsumfang ist aber in dem von z enthalten, und es entsteht ein Widerspruch zu $\gamma h \not\leq z$.

$1 \Rightarrow 3$: Die Bedingung (3) ist trivialerweise erfüllt, wenn g reduzibel ist, wir dürfen uns deshalb auf den Fall $(\gamma g)_* \prec \gamma g$ beschränken. Die Voraussetzungen von (3) beschreiben drei Begriffe, nämlich (A'', A'), $((A \cup \{h\})'', (A \cup \{h\})')$ und $((A \cup \{g\})'', (A \cup \{g\})')$ mit $A'' \subset (A \cup \{h\})'' \subseteq (A \cup \{g\})''$. Weil $g_\bullet \subseteq A$ gilt, ist $\gamma g \wedge (A'', A') = \gamma g_*$, wegen der Halbmodularität ist also

$$((A \cup \{g\})'', (A \cup \{g\})')$$

ein oberer Nachbar von (A'', A'), was

$$((A \cup \{g\})'', (A \cup \{g\})') = ((A \cup \{h\})'', (A \cup \{h\})')$$

erzwingt.

$1 \Rightarrow 4$: Seien g, h, m, n wie angegeben. Wählen wir x minimal bzgl. $x \leq \gamma h$, $x \not\leq \mu n$, dann ist x ein Gegenstandsbegriff, der die gleichen Voraussetzungen erfüllt wie γh, außerdem gilt für jedes Merkmal p mit $x \not\leq \mu p$ auch $h \not I p$. Wir dürfen also o.B.d.A. $x = \gamma h$ annehmen, also insbesondere, daß γh $\bigvee$-irreduzibel ist und $\gamma h_* \leq \mu m \wedge \mu n$. Wegen (1) ist $\gamma h \vee (\mu m \wedge \mu n)$ ein oberer Nachbar von $\mu m \wedge \mu n$, der $\leq \mu m$ ist. Ebenfalls wegen (1) ist auch $\mathfrak{y} := \gamma g \vee (\mu m \wedge \mu n)$ ein oberer Nachbar von $\mu m \vee \mu n$, aber wegen $\gamma g \not\leq \mu m$ von $\gamma h \vee (\mu m \wedge \mu n)$ verschieden. Es muß also ein trennendes Merkmal p geben, das im Inhalt des Begriffs $\mathfrak{y}$ liegt, aber nicht auf h zutrifft. Dieses Merkmal erfüllt also die angegebenen Bedingungen.

$4 \Rightarrow 1$: Wir überlegen zunächst, daß es genügt, Bedingung (1) für Gegenstandsbegriffe y zu zeigen. Ist nämlich y beliebig und $x \wedge y \prec y$ ein unterer Nachbar von y, so finden wir einen Gegenstandsbegriff $\gamma g \leq y$, minimal bezüglich $\gamma g \not\leq x \wedge y$, woraus folgt, daß $\gamma g_* = \gamma g \wedge (x \wedge y) = \gamma g \wedge x$ ein unterer Nachbar von γg ist. Dürfen wir hier nun (1) anwenden, dann erhalten wir $x \prec x \vee \gamma g = x \vee \gamma g \vee (x \wedge y) = x \vee y$, denn $x \wedge y < \gamma g \vee (x \wedge y) \leq y$, also $\gamma g \vee (x \wedge y) = y$.

Angenommen nun, es gäbe einen Gegenstand g und ein x derart, daß $x \wedge \gamma g = \gamma g_*$ ein unterer Nachbar von γg, aber $x \vee \gamma g$ kein oberer Nachbar von x ist, also $x < z < x \vee \gamma g$ für ein z. Dann gibt es einen Gegenstand h im Umfang von z, der nicht im Umfang von x liegt, ein Merkmal n, das im Inhalt von x, aber nicht im Inhalt von z liegt und ein Merkmal m, welches im Inhalt von z liegt, aber nicht auf g zutrifft. Damit sind die Voraussetzungen von (4) sämtlich erfüllt, und wir können schlußfolgern, daß es ein Merkmal p geben muß, welches $m' \cap n'$ im Umfang hat, also $x \leq \mu p$ erfüllt, mit gIp und $h\not{I}p$. Aus gIp folgt aber $\mu p \geq x \vee \gamma g \geq z$, aus $h\not{I}p$ folgt $\mu p \not\geq z$, Widerspruch!
$1 \Rightarrow 5$ ist trivial.
$5 \Rightarrow 6$: n sei die Länge einer maximalen Kette in $\boldsymbol{V}$. Wir definieren eine Funktion r auf $\boldsymbol{V}$ durch $r(1) := n$ und, für $x \neq 1$,

$$r(x) := max\{r(y) \mid x \prec y\} - 1.$$

Wäre r keine Rangfunktion, dann müßte es Elemente $x \prec y$ geben mit $r(x) + 1 \neq r(y)$, und wir betrachten unter allen solchen Beispielen eines mit maximalem y, außerdem, nach der Definition von r, einen weiteren oberen Nachbarn z von x mit $r(z) = r(x) + 1$. Nach der Halbmodularitätsbedingung ist $y \vee z$ ein oberer Nachbar von y und von z, nach der Maximalitätsbedingung ist dann $r(y) = r(y \vee z) - 1 = r(z)$, Widerspruch!

Um die behauptete Rangungleichung nachzuweisen, führen wir wieder die Annahme eines Gegenbeispiels zum Widerspruch: Es seien also a, b, x, y Elemente mit $a = x \wedge y$ und $b = x \vee y$, die die Ungleichung verletzen. Die Elemente seien so gewählt, daß a unter allen Gegenbeispielen maximal ist und daß b unter allen Gegenbeispielen mit kleinstem Element a minimal ist. Ist nun y ein oberer Nachbar von $x \wedge y$, dann wählen wir einen oberen Nachbarn $\underline{x}$ von $x \wedge y$, der unter x liegt. Da y nicht unter x liegen kann - denn sonst wäre die Ungleichung erfüllt - ist $\underline{x} \neq y$, und $\overline{y} := y \vee \underline{x}$ ein oberer Nachbar von y mit $x \wedge \overline{y} = \underline{x}$ sowie $x \vee \overline{y} = x \vee y$. Für die Elemente x und $\overline{y}$ gilt nach Voraussetzung die Rangungleichung, und damit auch für x und y. Wenn y kein oberer Nachbar von x ist, dann können wir einen oberen Nachbarn $\underline{y}$ von $x \wedge y$ finden, der unter y liegt. Anwenden der Rangungleichung für die Elemente x und $\underline{y}$ sowie für y und $x \vee \underline{y}$ liefert die Behauptung.
$6 \Rightarrow 1$ ist wieder trivial. □

Im atomistischen Fall hat man $g_\bullet = \emptyset$ für alle $g \in G$. Die Austauschbedingung vereinfacht sich dadurch zur bekannten Form

$$h \in (A \cup \{g\})'', \quad h \notin A'' \quad \Rightarrow \quad g \in (A \cup \{h\})''.$$

6.3 Semidistributivität und Lokale Distributivität

Definition 81. Ein vollständiger Verband $\boldsymbol{V}$ heißt

- **semidistributiv**, wenn die folgenden Gesetze für alle $x, y, z \in \boldsymbol{V}$ gelten:

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{SD}_\vee) & x \vee y = x \vee z \Rightarrow x \vee y = x \vee (y \wedge z) = x \vee z \\ (\mathbf{SD}_\wedge) & x \wedge y = x \wedge z \Rightarrow x \wedge y = x \wedge (y \vee z) = x \wedge z. \end{array}$$

  Erfüllt $\boldsymbol{V}$ $(\mathrm{SD}_\vee)$, so nennt man $\boldsymbol{V}$ **verbindungs-semidistributiv**, dual heißt ein vollständiger Verband, der $(\mathrm{SD}_\wedge)$ erfüllt, **schnitt-semidistributiv**.
- **lokal distributiv** oder **verbindungsdistributiv**, wenn $\boldsymbol{V}$ halbmodular ist und jeder modulare Unterverband distributiv ist. Verbände, die die duale Bedingung erfüllen, nennen wir **schnittdistributiv**.

Eine Darstellung eines Verbandselementes a als ein Supremum $a = \bigvee X$ heißt **irredundant**, wenn $a \neq \bigvee(X \setminus \{x\})$ für jedes $x \in X$ gilt. Die Elemente von X müssen dabei offenbar paarweise unvergleichbar sein. Wir werden uns hier hauptsächlich mit irredundanten $\bigvee$-Darstellungen in längenendlichen Verbänden befassen. Das macht vieles einfacher, denn in einem solchen Verband kann aus jeder $\bigvee$-Darstellung eine endliche und dann auch eine irredundante $\bigvee$-Darstellung ausgewählt werden.

Besondere Aufmerksamkeit finden die $\bigvee$-Darstellungen durch $\bigvee$-irreduzible Elemente. Hat a genau eine solche Darstellung, so sagen wir, a habe eine **eindeutige irredundante $\bigvee$-Darstellung**. Der Zusatz „durch Irreduzible" wird oft weggelassen, ist aber gemeint.

Eine irredundante $\bigvee$-Darstellung $a = \bigvee X$ heißt **kanonisch**, wenn für jede irredundante Darstellung $a = \bigvee Y$ und für jedes $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert mit $x \leq y$. Hat ein Element eines endlichen Verbandes eine kanonische Darstellung, dann besteht diese notwendig aus $\bigvee$-irreduziblen Elementen. Man beachte aber, daß die Verfeinerungseigenschaft gegenüber allen irredundanten Darstellungen verlangt wird.

In einem doppelt fundierten Verband ist bekanntlich jedes Element a das Supremum von $\bigvee$-irreduziblen Elementen: $a = \bigvee\{x \in J(\boldsymbol{V}) \mid x \leq a\}$. $e \in J(\boldsymbol{V})$ ist ein **Extremalpunkt** von a, falls e dabei unentbehrlich ist, falls also

$$a \neq \bigvee\{x \in J(\boldsymbol{V}) \setminus \{e\} \mid x \leq a\}$$

gilt. Die Extremalpunkte sind Teil von *jeder* $\bigvee$-Darstellung von a durch Irreduzible. Ein **Basispunkt** von a ist ein $\bigvee$-irreduzibles Element $b \leq a$ mit

$$b \not\leq \bigvee\{x \in J(\boldsymbol{V}) \mid x \leq a, b \not\leq x\}.$$

In einem Begriffsverband sind die Extremalpunkte eines Begriffs (A, A') genau die Gegenstandsbegriffe γg mit $g \in A$, aber

$$g \notin (A \setminus \{h \mid g' = h'\})''.$$

Wir nennen einen solchen Gegenstand deshalb einen **Extremalpunkt des Begriffsumfangs** A. Entsprechend ist g ein **Basispunkt des Begriffsumfangs** A, falls $g \in A$, aber

$$g \notin (A \setminus \{h \mid g' \supseteq h'\})''. \qquad \Diamond$$

Satz 43. *Für einen doppelt fundierten Begriffsverband* $\mathbf{V} = \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ *sind äquivalent:*

1. $\mathbf{V}$ *erfüllt* ($SD_\vee$).
2. *Für alle* $g, h \in G$ *und alle* $m \in M$ *gilt:*

$$\text{aus } g \swarrow\!\!\!\nearrow m \text{ und } h \swarrow\!\!\!\nearrow m \text{ folgt } g' = h'.$$

Ist $\mathbf{V}$ *endlich, oder, allgemeiner, erfüllt* $\mathbf{V}$ *die Zusatzbedingung*

(*) *wenn* $\mathfrak{x} < \mathfrak{a}$ *ist, dann existiert ein unterer Nachbar* $\mathfrak{u}$ *von* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{u} \prec \mathfrak{a}$,

so sind folgende Bedingungen zu den vorgenannten äquivalent:

3. *Jedes Element von* $\mathbf{V}$ *hat eine kanonische* $\bigvee$*-Darstellung.*
4. *Jeder Begriffsumfang ist die Hülle seiner Basispunkte.*

Dual kann die Bedingung ($SD_\wedge$) *charakterisiert werden.*

Beweis. 1 $\Leftrightarrow$ 2: Wir nehmen o.B.d.A. an, daß (G, M, I) Kontext eines Begriffsverbandes ist, der ($SD_\vee$) erfüllt. Aus $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ und $h \swarrow\!\!\!\nearrow m$ schließen wir

$$\mu m \vee \gamma g = \mu m^* = \mu m \vee \gamma h$$

und daraus mit Hilfe der Semidistributivität

$$\mu m^* = \mu m \vee (\gamma g \wedge \gamma h).$$

Nun ist sowohl γg_* als auch γh_* kleiner oder gleich μm. Damit also die obige Gleichung gelten kann, darf $\gamma g \wedge \gamma h$ weder $\leq \gamma g_*$ noch $\leq \gamma h_*$ sein. Dies erzwingt $\gamma g = \gamma h$.

Nun nehmen wir umgekehrt an, daß (G, M, I) die obige Bedingung für die Pfeilrelationen erfüllt, und zeigen, daß $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ verbindungssemidistributiv ist. Seien dazu x, y und z Elemente von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ mit

$$x \vee y = x \vee z > x \vee (y \wedge z).$$

Dann existiert ein Element t, welches maximal ist bezgl.

$$t \geq x \vee (y \wedge z), \quad t \ngeq x \vee y.$$

t ist $\bigwedge$-irreduzibel, also $t = \mu m$ für ein $m \in M$, und $\mu m^* \geq x \vee y$. Nun ist $y \nleq \mu m$, denn

$$y \vee \mu m \geq y \vee x \vee (y \wedge z) = x \vee y,$$

und man erhält
$$y \vee \mu m = \mu m^*.$$
Also existiert ein Begriff s, welcher minimal ist bezüglich $s \leq y, s \not\leq \mu m$. s ist $\bigvee$-irreduzibel, folglich ein Gegenstandsbegriff $s = \gamma g$ für ein $g \in G$, und es gilt $\gamma g_* \leq \mu m$, d.h. $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$.

Ebenso findet man ein $h \in G$ mit $h \swarrow\!\!\!\nearrow m$ und $\gamma h \leq z$. Die Voraussetzung erzwingt $\gamma g = \gamma h$, daraus aber folgt $\gamma g \leq z$, also $\gamma g \leq y \wedge z \leq x \vee (y \wedge z) \leq \mu m$. Widerspruch!

$1 \Rightarrow 4$ für Verbände, die die Zusatzbedingung erfüllen: Es sei $\mathfrak{a}$ ein Begriff. Für jeden unteren Nachbarn $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{a}$ existiert wegen der Fundiertheit ein Element $\bar{\mathfrak{u}} \leq \mathfrak{a}$, welches minimal ist bezüglich $\bar{\mathfrak{u}} \not\leq \mathfrak{u}$. Dieses Element ist durch $\mathfrak{u}$ eindeutig bestimmt, denn ist $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{x} \not\leq \mathfrak{u}$ beliebig, dann hat man
$$\mathfrak{u} \vee \bar{\mathfrak{u}} = \mathfrak{a} = \mathfrak{u} \vee \mathfrak{x}$$
und erhält durch Anwenden von $(\mathrm{SD}_\vee)$ daraus
$$\mathfrak{u} \vee (\bar{\mathfrak{u}} \wedge \mathfrak{x}) = \mathfrak{a},$$
woraus wegen der Minimalität von $\bar{\mathfrak{u}}$ sogleich $\bar{\mathfrak{u}} \leq \mathfrak{x}$ folgt. Es gilt also für $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{a}$
$$\mathfrak{x} \not\leq \mathfrak{u} \iff \bar{\mathfrak{u}} \leq \mathfrak{x}.$$
$\bar{\mathfrak{u}}$ ist $\bigvee$-irreduzibel, und folglich existiert ein Gegenstand g mit $\bar{\mathfrak{u}} = \gamma g$. Wir zeigen, daß g ein Basispunkt von $\mathfrak{a}$ ist. Ist nämlich A der Umfang von $\mathfrak{a}$ und $h \in A$ beliebig, dann gilt
$$h' \subseteq g' \iff \gamma h \geq \gamma g \iff \gamma h \geq \bar{\mathfrak{u}} \iff \gamma h \not\leq \mathfrak{u}.$$
Also liegt $A \setminus \{h \mid g' \supseteq h'\}$ ganz im Umfang von $\mathfrak{u}$, woraus die gewünschte Basispunkteigenschaft folgt:
$$g \notin (A \setminus \{h \mid g' \supseteq h'\})''.$$
Nun sei
$$\mathfrak{x} := \bigvee\{\bar{\mathfrak{u}} \mid \mathfrak{u} \prec \mathfrak{a}\}.$$
Wir behaupten $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$. Wäre dem nicht so, dann gäbe es aufgrund der Zusatzbedingung einen unteren Nachbarn $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{x} \leq \mathfrak{u} \prec \mathfrak{a}$, und $\bar{\mathfrak{u}} \not\leq \mathfrak{x}$ ergäbe einen Widerspruch.

$4 \Rightarrow 3$: Ist jeder Umfang die Hülle seiner Basispunkte, gilt also für jedes Verbandselement $\mathfrak{a}$, daß
$$\mathfrak{a} = \bigvee\{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \text{ ist Basispunkt von } \mathfrak{a}\},$$
dann ist diese Darstellung kanonisch. Sie ist jedenfalls irredundant, und ist $\mathfrak{a} = \bigvee Y$ irgendeine irredundante Darstellung und $\mathfrak{b}$ ein Basispunkt von $\mathfrak{a}$,

dann folgt aus $\mathfrak{b} \leq \bigvee Y$ und dem Umstand, daß $J(\boldsymbol{V})$ $\bigvee$-dicht ist, sofort, daß es ein $\mathfrak{y} \in Y$ geben muß mit $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{y}$.
$3 \Rightarrow 1$: Wir betrachten ein Element $\mathfrak{v}$ und eine kanonische $\bigvee$-Darstellung $\mathfrak{v} = \bigvee X$. Aus

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_o \vee \mathfrak{y} = \mathfrak{v}_o \vee \mathfrak{z}$$

folgt, daß $\mathfrak{y} \geq \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x} \in X$ mit $\mathfrak{x} \not\leq \mathfrak{v}_o$ gilt, und ebenso $\mathfrak{z} \geq \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x} \in X$ mit $\mathfrak{x} \not\leq \mathfrak{v}_o$. Zusammen erzwingt dies

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_o \vee (\mathfrak{y} \wedge \mathfrak{z}). \qquad \square$$

Beispiele von Verbänden, die die Bedingungen aus Satz 39 erfüllen, kann man sich leicht mittels der Technik der lokalen Verdopplung verschaffen (5.3.) Ist nämlich $\boldsymbol{V}$ ein doppelt fundierter semidistributiver Verband und $\mathfrak{C} \subseteq \boldsymbol{V}$ eine konvexe Teilmenge mit einem kleinsten Element, dann ist auch $\boldsymbol{V}[\mathfrak{C}]$ semidistributiv, wie man an den Pfeilrelationen erkennt. Der Tamariverband (vergl. Abbildungen 5.9, 5.10, S. 207) erfüllt ($\mathrm{SD}_\vee$) und ($\mathrm{SD}_\wedge$).

Satz 44. *Für einen doppelt fundierten Begriffsverband* $\boldsymbol{V} := \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ *sind äquivalent:*

1. *Aus* $g \nearrow m$ *und* $h \nearrow m$ *folgt* $g' = h'$.
2. $\boldsymbol{V}$ *besitzt eine nachbarschaftstreue* $\bigwedge$*-Einbettung in einen Potenzmengenverband.*
3. *Jeder Begriffsumfang ist die Hülle seiner Extremalpunkte.*
4. *Für jeden Begriffsumfang* A *und für alle* $g, h \in G \setminus A$ *mit* $g' \neq h'$ *gilt:*

   Aus $g \in (A \cup \{h\})''$ *folgt* $h \notin (A \cup \{g\})''$ **(Anti-Austauschaxiom).**

Ist $\boldsymbol{V}$ *längenendlich, so ist folgende Bedingung zu den bisher genannten äquivalent:*

5. $\boldsymbol{V}$ *ist schnittdistributiv.*
6. *Jedes Element hat eine eindeutige irredundante* $\bigvee$*-Darstellung.*

Beweis. $1 \Rightarrow 4$: Ist A ein Begriffsumfang und $g \notin A$, so finden wir ein Merkmal m mit $A \subseteq m'$ und $g \nearrow m$. Aus hIm würde $g \notin (A \cup \{h\})''$ folgen, also muß $h \not{I} m$ gelten und wir finden ein Merkmal n mit $h \nearrow n$ und $m' \subseteq n'$. $m' = n'$ würde wegen (1) schon $g' = h'$ nach sich ziehen, also muß $g \in n'$ gelten, damit ist aber $A \cup \{g\} \subseteq n'$ und folglich $h \notin (A \cup \{g\})''$.

$4 \Rightarrow 2$: Wir gehen zum Begriffsverband des bereinigten Kontextes über und zeigen, daß das Hüllensystem der Umfänge nachbarschaftstreu in der Potenzmenge von G eingebettet ist. Seien dazu A_1, A_2 Umfänge mit $A_1 \subset A_2$, und sei (A_1, A_1') ein unterer Nachbar von (A_2, A_2'). Sind nun $g, h \in A_2 \setminus A_1$, so ist wegen der Nachbarschaft $(A_1 \cup \{g\})'' = A_2 = (A_1 \cup \{h\})''$, woraus mit dem Anti-Austauschaxiom $g = h$ folgt.

$2 \Rightarrow 3$: Wir beginnen diesen Teil des Beweises mit drei Vorüberlegungen: Jeder Verband, der eine nachbarschaftstreue $\wedge$-Einbettung

$$\varphi : \boldsymbol{V} \to \mathfrak{P}(X)$$

in einen Potenzmengenverband besitzt, ist dual halbmodular, denn aus $a \prec a \vee b$ folgt, daß sich $\varphi(a)$ und $\varphi(a \vee b)$ in nur einem Element unterscheiden. Dies überträgt sich auf $\varphi(a \wedge b)$ und $\varphi(b)$, also müssen auch diese benachbart sein, was $a \wedge b \prec b$ nach sich zieht.

Zweitens zeigen wir, daß ein doppelt fundierter Verband, der (2) erfüllt, auch der Zusatzbedingung (*) aus Satz 43 genügt. Gilt nämlich $a < b$, dann gibt es, weil $\boldsymbol{V}$ doppelt fundiert ist, ein $\bigwedge$-irreduzibles Element $t \in \boldsymbol{V}$ mit

$$a \leq t, \quad b \not\leq t, \quad b \leq t^*,$$

und mit $t \prec t^*$ ergibt sich aufgrund der dualen Halbmodularität

$$a \leq b \wedge t \prec b.$$

Jedes Element von $\boldsymbol{V}$ ist also entweder $\bigvee$-irreduzibel oder das Supremum seiner unteren Nachbarn.

Für die dritte Vorüberlegung betrachten wir ein beliebiges Element $x \in X$. Unter allen Elementen von $\boldsymbol{V}$, in deren Bild x liegt, gibt es ein kleinstes, nämlich

$$v_x := \bigwedge\{v \in \boldsymbol{V} \mid x \in \varphi(v)\}.$$

v_x ist $\bigvee$-irreduzibel (oder das kleinste Element von $\boldsymbol{V}$), denn es kann nur einen unteren Nachbarn u von v geben, weil dessen Bild

$$\varphi(u) = \varphi(v_x) \setminus \{x\}$$

zwingend festgelegt ist. Ist w irgendein $\bigvee$-irreduzibles Element mit $x \in \varphi(w)$, $x \notin \varphi(w_*)$, dann gilt $w = w_* \vee v_x$, also $w = v_x$.

Nun betrachten wir ein beliebiges Element a von $\boldsymbol{V}$. Wäre der Umfang a nicht die Hülle seiner Extremalpunkte, dann gäbe es einen unteren Nachbarn $u \prec a$, dessen Umfang alle Extremalpunkte von a enthält. $\varphi(a)$ und $\varphi(u)$ unterscheiden sich in nur einem Element, sagen wir x, von X. Ist w ein $\bigvee$-irreduzibles Element mit $w \vee u = a$, dann ist $u \wedge w$ ein unterer Nachbar von w, also w_+, und man hat $x = \varphi(w) \setminus \varphi(w_*)$, woraus $w = v_x$ folgt. v_x ist also ein Extremalpunkt von a, der nicht unter u liegt. Widerspruch!

3 $\Rightarrow$ 1: Wenn m ein irreduzibles Merkmal ist und A der Begriffsumfang von μm^*, dann gibt es nach (3) einen Extremalpunkt h von A mit $h \notin m'$. Es ist dann $A^- := A \setminus \{x \mid h' = x'\}$ ein Begriffsumfang, der m' umfaßt. Nun betrachte einen beliebigen Gegenstand $g \in A \setminus m'$. Man hat $(m' \cup \{g\})'' = A$, und deshalb kann A^- nicht $m' \cup \{g\}$ enthalten. Folglich ist $g \in \{x \mid h' = x'\}$, d.h. $g' = h'$. μm und μm^* unterscheiden sich also nur um einen einzigen Gegenstandsbegriff.

3 $\Rightarrow$ 6: Ist ein Umfang die Hülle seiner Extremalpunkte, so ist dies die einzige irredundante $\bigvee$-Darstellung.

3 $\Leftarrow$ 6 für längenendliche Verbände: In einem längenendlichen Verband enthält jede $\bigvee$-Darstellung eine irredundante, die Eindeutigkeit hat also zur

Folge, daß jeder Begriffsumfang A eine kleinste Teilmenge E hat mit $E'' = A$. Diese muß aber aus Extremalpunkten bestehen, denn sonst gäbe es ein $e \in E$ mit $e \in (A \setminus \{e\})''$, und $A \setminus \{e\}$ wäre eine Erzeugendenmenge von A, welche E nicht enthält.

$2 \Rightarrow 5$: Wir haben bereits oben gezeigt, daß aus (2) die duale Halbmodularität und auch die Zusatzbedingung aus Satz 43 folgt. Es muß noch gezeigt werden, daß jeder modulare Unterverband distributiv ist. Wäre dem nicht so, so gäbe es nach Hilfssatz 99 Elemente x, y, z mit $x \vee y = x \vee y = y \vee z$, $x \wedge y = x \wedge z = y \wedge z$, aber $x \neq y$. Wähle einen unteren Nachbarn u von $x \vee y$ mit $z \leq u$. $\varphi(x \vee y) \setminus \varphi(u)$ besteht aus genau einem Element, sagen wir g. Da $\varphi(x) \nsubseteq \varphi(u)$ und $\varphi(y) \nsubseteq \varphi(u)$ gilt, muß $g \in \varphi(x) \cap \varphi(y) = \varphi(x \wedge y)$ sein, woraus wegen $x \wedge y \leq z$ der Widerspruch $g \in \varphi(z) \subseteq \varphi(u)$ folgt.

$5 \Rightarrow 1$ für längenendliche Verbände: Wegen der dualen Halbmodularität folgt aus $g \nearrow m$ stets $g \swarrow m$. Wir können also $g \swarrow\!\!\!\nearrow m, h \swarrow\!\!\!\nearrow m$ voraussetzen und haben $\gamma g = \gamma h$ zu zeigen. Das Element $\gamma g \vee \gamma h$ ist $\leq \mu m^*$, aber nicht $\leq \mu m$; wir finden deshalb, wenn $\gamma g \neq \gamma h$ ist, drei verschiedene untere Nachbarn a_0, b_0, c_0 des Elements $\gamma g \vee \gamma h$ mit $a_0 \geq \gamma g$, $b_0 \geq \gamma h$, $b_0 \ngeq \gamma g$ und $c_0 \leq \mu m$, und weiter eine absteigende Kette $a_0 \succ a_1 \succ \ldots \succ a_n = \gamma g$ benachbarter Elemente. Wegen der Schnittdistributivität sind die Schnitte $b_1 := a_0 \wedge b_0$ und $c_1 := a_0 \wedge c_0$ voneinander verschieden, sie können auch beide nicht gleich a_1 sein, weil sonst $\gamma g \leq \mu m$ oder $\gamma g \leq b_0$ folgen würde. Ein Weiterführen dieser Argumentation ergibt, daß jeweils die Elemente a_i, b_i und c_i verschiedene untere Nachbarn von a_{i-1} sind für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und deshalb a_n nicht $\bigvee$-irreduzibel sein kann; dies stellt aber wegen $a_n = \gamma g$ einen Widerspruch dar. □

Die erste Bedingung von Satz 44 impliziert offenbar die zweite Bedingung von Satz 43. Endliche schnittdistributive Verbände erfüllen also auch ($\mathrm{SD}_\vee$).

In einem Kontext, in dem es keine „echten Aufwärtspfeile" gibt (was heißen soll, daß aus $g \nearrow m$ stets $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ folgt), gilt auch die Umkehrung. Das ist insbesondere der Fall für atomistische Kontexte, in denen ja aus $(g, m) \notin I$ schon $g \swarrow m$ folgt.

In Abbildung 6.1 sind die Implikationen zwischen den genannten Verbandseigenschaften dargestellt (für doppelt fundierte vollständige Verbände). Zwei der Merkmale müssen noch erklärt werden: Nach A. Day ist ein Verband **halbkonvex**, falls er die folgende Bedingung erfüllt:

$$\text{(C)} \qquad x \wedge y = x \wedge z, \quad x \vee y = x \vee z \quad \Rightarrow \quad x \leq z.$$

B steht für die Eigenschaft, ein beschränkt homomorphes Bild eines freien Verbandes zu sein. Diese Eigenschaft hat eine einfache Charakterisierung in der Kontextsprache: sie ist äquivalent dazu, daß die Gegenstände und Merkmale des (reduzierten) Kontextes so angeordnet werden können, daß jeder $\swarrow\!\!\!\nearrow$ auf der Diagonalen, jeder $\nearrow$ unterhalb der Diagonalen und jeder $\swarrow$ oberhalb der Diagonalen steht.

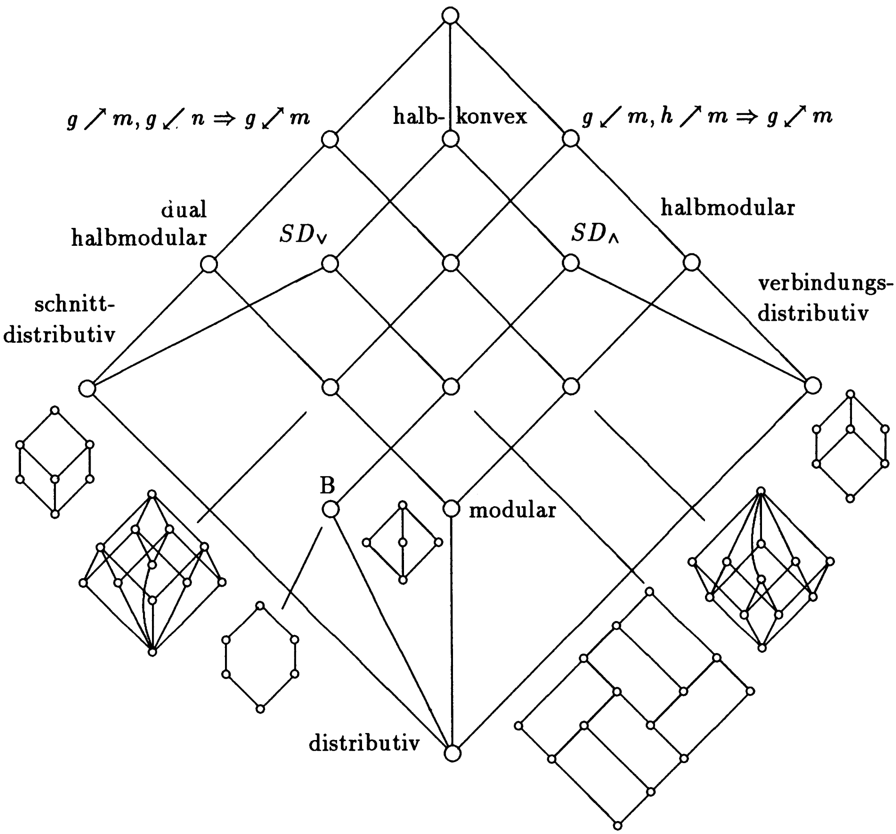


Abbildung 6.1. Verallgemeinerungen des Distributivgesetzes.

Die konvex–ordinalen Skalen $\mathbb{C}_{(P,\leq)}$ (siehe §1.4) sind, jedenfalls wenn $(P,\leq)$ endlich ist, doppelt fundiert. Begriffsumfänge sind die konvexen Teilmengen von $(P,\leq)$, Extremalpunkte die maximalen und minimalen Elemente solcher Teilmengen. Bedingung (3) von Satz 44 ist also erfüllt, endliche konvex–ordinale Skalen sind deshalb schnittdistributiv.

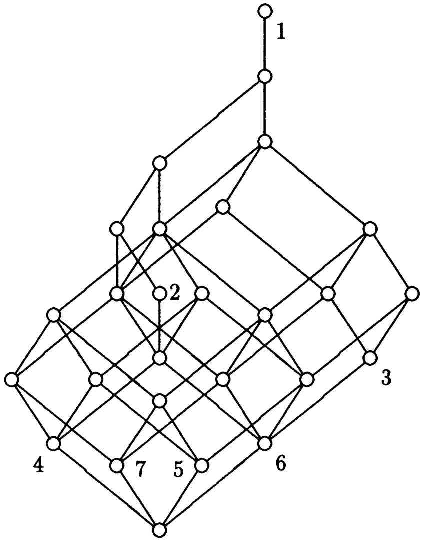


Abbildung 6.2. Die additiv gesättigten Teilmengen von $\{1,\ldots,7\}$.

Das Anti-Austauschaxiom gilt im Hüllensystem der konvexen Mengen eines beliebigen metrischen Raumes. Es gilt aber auch in anderen Zusammenhängen, z.B. wenn man jedem Gegenstand g ein *Gewicht* $wt(g)$ zuordnen kann derart, daß aus $wt(g) = wt(h)$ schon $g' = h'$ folgt und

$$g \notin A'', g \in (A \cup \{h\})'' \Rightarrow wt(g) \geq wt(h)$$

gilt, was so gedeutet werden kann, daß das Gewicht von g mindestens so groß sein muß wie das von h, wenn g mit Hilfe von h erzeugt wird. Ein einfaches Beispiel dazu ist in Abbildung 6.2 wiedergegeben: Ist $G \subseteq \mathbb{N}$ eine beliebige Menge, dann soll eine Teilmenge $T \subseteq G$ **additiv gesättigt** genannt werden, wenn aus $a, b \in T, a + b \in G$ schon $a + b \in T$ folgt. Die additiv gesättigten Teilmengen von G bilden ein Hüllensystem, welches die oben angegebene Bedingung mit $wt(g) := g$ offenbar erfüllt. Der zugehörige Verband ist also schnittdistributiv. Abbildung 6.2 zeigt ein Beispiel mit $G := \{1, 2, \ldots, 7\}$.

6.4 Dimension

Definition 82. Eine geordnete Menge $(P, \leq)$ hat **Ordnungsdimension**

$$dim(P, \leq) = n$$

genau dann, wenn sie in das direkte Produkt von n Ketten eingebettet[2] werden kann, und n die kleinste Zahl ist, für die das möglich ist. $\Diamond$

Wir werden zeigen, daß sich die Ordnungsdimension auch in der Sprache der Formalen Begriffsanalyse gut beschreiben läßt. Dazu schicken wir einige einfache Beobachtungen voraus, auf die wir unsere Aussagen gründen werden, und die zugleich so gehalten sind, daß sie auch für mögliche Variationen des Ordnungsdimensionsbegriffes genutzt werden können. Ein Beispiel einer solchen Variante ist das der k-Dimension: Die **k-Dimension** $dim_k(P, \leq)$ einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist die kleinste Anzahl von Ketten der Mächtigkeit k, in deren Produkt sie ordnungseingebettet werden kann.

Gewöhnlich untersucht man Einbettungen beliebiger geordneter Mengen. Wir konzentrieren uns auf Einbettungen von Begriffsverbänden, dies stellt aber keine ernsthafte Einschränkung dar: Der Dedekindsche Vervollständigungssatz (Satz 4, S. 48) zeigt nämlich, daß $(P, \leq)$ genau dann in einen vollständigen Verband einbettbar ist, wenn auch $\underline{\mathfrak{B}}(P, P, \leq)$ in diesen Verband eingebettet werden kann. Man hat deshalb den folgenden Satz:

Satz 45.

$$\begin{aligned} dim(P, \leq) &= dim \underline{\mathfrak{B}}(P, P, \leq) \\ dim_k(P, \leq) &= dim_k \underline{\mathfrak{B}}(P, P, \leq) \end{aligned}$$

$\square$

Als direktes Korollar aus Hilfssatz 33 (S. 99) erhält man:

Hilfssatz 101. *Genau dann gibt es eine Ordnungseinbettung von* $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ *in ein Produkt* $\times_{t \in T} \mathbf{V}_t$, *wenn es Abbildungspaare* $(\alpha_t, \beta_t), t \in T$ *gibt mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\alpha_t : G \to \mathbf{V}_t, \quad \beta_t : M \to \mathbf{V}_t,$
2. $(g, m) \in I \Rightarrow \alpha_t g \leq \beta_t m$ *für alle* $t \in T$,
3. $(g, m) \notin I \Rightarrow \alpha_t g \not\leq \beta_t m$ *für ein* $t \in T$.

$\square$

Wir geben eine Umformulierung dieses Sachverhalts, indem wir die Abbildungen α_t und β_t durch Relationen J_t mit $(g, m) \in J_t :\Longleftrightarrow \alpha_t g \leq \beta_t m$ ersetzen:

[2] Gemeint ist eine Ordnungseinbettung nach Definition 6 (S. 3).

Hilfssatz 102. *Genau dann gibt es eine Ordnungseinbettung von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ in ein Produkt $\times_{t \in T} \mathbf{V}_t$, wenn es Kontexte (G, M, J_t) und Ordnungseinbettungen von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, J_t)$ in $\mathbf{V}_t$ für $t \in T$ gibt, so daß gilt*

$$I = \bigcap_{t \in T} J_t \qquad \square$$

Im Falle eines doppelt fundierten Kontextes läßt sich Hilfssatz 102 noch etwas verbessern: Die Forderung $I = \bigcap_{t \in T} J_t$ kann abgeschwächt werden, die Aussage bleibt richtig, wenn stattdessen nur

$$I \subseteq \bigcap_{t \in T} J_t \text{ und } \{(g, m) \mid g \swarrow m \text{ oder } g \nearrow m\} \cap \bigcap_{t \in T} J_t = \emptyset$$

verlangt wird. Das ergibt sich aus Hilfssatz 49 (S. 116).

Definition 83. Eine **Ferrers-Relation** ist eine Relation $F \subseteq G \times M$ mit

$$(g, m) \in F, \quad (h, n) \in F, \quad (g, n) \notin F \quad \Rightarrow \quad (h, m) \in F.$$

Als **Ferrers-Dimension** $fdim(G, M, I)$ eines Kontextes (G, M, I) bezeichnen wir die kleinste Anzahl von Ferrers-Relationen $F_t \subseteq G \times M, t \in T$ mit $I = \bigcap_{t \in T} F_t$. $\Diamond$

Denkt man sich (G, M, F) als Kreuztabelle, so läßt sich die Ferrers-Bedingung leicht anschaulich machen: Die Definition verbietet den Teilkontext $\begin{array}{|c|c|}\hline \times & \\ \hline & \times \\ \hline\end{array}$, und dieser kommt genau dann nicht vor, wenn sich die Tabelle durch Umsortieren von Zeilen und Spalten in Treppengestalt bringen läßt. Das ist auch Grundlage des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 103. *Genau dann ist $F \subseteq G \times M$ eine Ferrers-Relation, wenn $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, F)$ eine Kette ist.*

Beweis. Sei F eine Ferrers-Relation und seien $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ zwei Begriffe von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, F)$. Wenn $(A_1, B_1) \not\leq (A_2, B_2)$ ist, dann gibt es einen Gegenstand $g \in A_1$ und ein Merkmal $n \in B_2$ mit $(g, n) \notin F$. Für jedes $m \in B_1$ hat man $(g, m) \in F$ und für jedes $h \in A_2$ ebenso $(h, n) \in F$, aus der Ferrers-Bedingung folgt also $(h, m) \in F$ für alle $h \in A_2, m \in B_1$ und damit $(A_2, B_2) \leq (A_1, B_1)$. Je zwei Begriffe von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, F)$ sind also vergleichbar, $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, F)$ ist somit eine Kette. Die Rückrichtung ist noch einfacher. $\square$

Die Bestimmung der Ferrers-Dimension ist eine Aufgabe, die allgemein schwierig zu lösen (da $\mathcal{NP}$-vollständig) ist. Bei kleinen Kontexten kann man sie aber durchaus von Hand durchführen. Dabei ist es bequem auszunutzen, daß das Komplement einer Ferrers-Relation ebenfalls eine Ferrers-Relation ist. Die Ferrers-Dimension von (G, M, I) ist also auch gleich der kleinsten Anzahl von Ferrers-Relationen F_t, die die leeren Felder der Kreuztabelle überdecken, d.h. mit $G \times M \setminus I = \bigcup_{t \in T} F_t$. Es ist allerdings nicht immer möglich, diese Überdeckung *disjunkt* zu wählen.

Satz 46. *Die Ferrers-Dimension von (G, M, I) ist gleich der Ordnungsdimension des Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$:*

$$dim\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) = fdim(G, M, I).$$

Die Ordnungsdimension einer geordneten Menge $(P, \leq)$ ist gleich der Ferrers-Dimension von $(P, P, \leq)$:

$$dim(P, \leq) = fdim(P, P, \leq).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Hilfssätzen 102 und 103, denn ein vollständiger Verband ist natürlich genau dann in eine Kette einbettbar, wenn er selbst eine Kette ist. □

×	×	1	×	1	1	1
2	×	×	4	×	1	1
2	3	×	×	2	×	1
2	3	3	×	×	3	×
×	3	3	4	×	×	1
2	×	2	2	2	×	×
×	3	×	4	4	4	×

$(3,0,0,0)$	$(3,0,3,3)$
$(2,1,0,1)$	$(3,3,0,3)$
$(1,2,1,0)$	$(2,2,1,3)$
$(0,2,3,0)$	$(3,2,3,0)$
$(1,0,2,1)$	$(2,1,3,2)$
$(0,3,0,0)$	$(1,3,2,2)$
$(0,0,1,3)$	$(0,3,3,3)$

Abbildung 6.3. Punkt-Geraden-Kontext der projektiven Ebene PG(2,2), mit Ferrers-Relationen. Die Ferrers-Dimension und damit die Ordnungsdimension der Ebene ist 4, eine Überdeckung der 28 leeren Felder mit weniger als vier Ferrers-Relationen ist nicht möglich, weil jede Ferrers-Relation in diesem Beispiel höchstens acht Elemente haben kann. Rechts daneben eine Einbettung von PG(2,2) in ein Produkt von 4 Ketten, die erste Spalte gibt die Bilder der Punkte, die zweite die der Geraden an.

Satz 46 läßt sich noch in mehrere Richtungen verschärfen. Wir können die Längen der beteiligten Ketten mit einbeziehen, und wir können untersuchen, ob es nicht genügt, die Pfeilrelationen zu überdecken. Beides ist möglich und läßt sich sogar kombinieren. Dazu definieren wir zunächst die *Länge* einer Ferrers-Relation:

Definition 84. Die **Länge** einer Ferrers-Relation $F \subseteq G \times M$ ist die Länge des Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, F)$. Mit $fdim_k(G, M, I)$ bezeichnen wir die kleinste Anzahl von Ferrers-Relationen $F_t \subseteq G \times M$, $t \in T$, der Länge $\leq k$ mit $I = \bigcap_{t \in T} F_t$. Eine Ferrers-Relation ist k**-stufig**, wenn $k = |\{g^F \mid g \in G\}|$. ◊

Denkt man sich eine k-stufige Ferrers-Relation in Tabellenform dargestellt und in Treppenform sortiert, dann hat diese Treppe tatsächlich k Stufen. Die Stufenzahl stimmt im großen und ganzen mit der Länge überein, allerdings müssen dabei Vollzeilen und -spalten gesondert gezählt werden. Die folgende triviale Beobachtung ist hilfreich:

Hilfssatz 104. *Das Komplement $G \times M \setminus F$ einer k-stufigen Ferrers-Relation $F \subseteq G \times M$ ist eine Ferrers-Relation der Länge k.*

$fdim_k(G, M, I)$ ist gleich der kleinsten Anzahl $(k-1)$-stufiger Ferrers-Relationen, deren Vereinigung gleich $G \times M \setminus I$ ist. □

Satz 46 läßt sich nun ohne neuen Beweis übertragen:

Satz 47.

$$dim_k \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) = fdim_k(G, M, I)$$

$$dim_k(P, \leq) = fdim_k(P, P, \leq).$$ □

×	×	1	×	1	1	1
2	×	×	2	×	1	1
3	3	×	×	3	×	3
3	3	4	×	×	5	×
×	4	4	4	×	×	4
2	×	2	2	2	×	×
×	5	×	5	5	5	×

Abbildung 6.4. Die 3-Dimension von PG(2,2) ist 5. Zwar wäre rechnerisch auch eine Überdeckung mit 4 Ferrers-Relationen der Länge 3 denkbar, eine solche Überdeckung existiert aber nicht. Die 2-Dimension ist 7.

Von besonderem Interesse ist die 2-Dimension, also die kleinste Anzahl von Rechtecken, mit denen das Komplement von I überdeckt werden kann. Die direkten Produkte zweielementiger Ketten sind genau die Potenzmengenverbände. Die 2-Dimension eines vollständigen Verbandes gibt also die Größe der kleinstmöglichen Mengendarstellung im Sinne von Definition 35 (S. 74) an. Wir zeigen einen Zusammenhang zu einer anderen Darstellungsform:

Definition 85. Eine **Mengendarstellung eines Kontextes** (G, M, I) in einer Menge T ist ein Paar von Abbildungen $\alpha : G \to \mathfrak{P}(T)$, $\beta : M \to \mathfrak{P}(T)$, welches jedem Gegenstand und jedem Merkmal eine Teilmenge von T zuordnet, und zwar so, daß gilt:

$$gIm \iff \alpha g \cap \beta m \neq \emptyset.$$

Von einer **komplementären Mengendarstellung** sprechen wir, wenn die Bedingung

$$gIm \iff \alpha g \cap \beta m = \emptyset$$

erfüllt ist. ◊

In §1.4 hatten wir die Kontexte für die freien distributiven Verbände mit Hilfe von Mengendarstellungen definiert.

Hilfssatz 105. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *(G, M, I) besitzt eine komplementäre Mengendarstellung in T.*
2. *$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ besitzt eine Mengendarstellung in T.*
3. *$dim_2\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \leq |T|$.*

Beweis.

$1 \Rightarrow 3$: Ist (α, β) eine komplementäre Mengendarstellung in T, dann sind die Relationen

$$\begin{aligned} F_t &:= \{g \mid t \in \alpha g\} \times \{m \mid t \in \beta m\} \\ &= \{(g, m) \mid t \in \alpha g \cap \beta m\} \\ &\subseteq G \times M \setminus I \end{aligned}$$

1-stufige Ferrers-Relationen (oder leer) mit $\bigcup_{t \in T} F_t = G \times M \setminus I$, und nach Satz 47 folgt $dim_2\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \leq |T|$.

$3 \Rightarrow 2$: Die Produkte 2-elementiger Ketten sind genau die Potenzmengenverbände, und deshalb ist $dim_2\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \leq n$ gleichbedeutend damit, daß $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ in den Potenzmengenverband einer n-elementigen Menge ordnungseingebettet werden kann.

$2 \Rightarrow 1$: Ist φ eine Ordnungseinbettung in einen Potenzmengenverband $\mathfrak{P}(T)$, so erhält man durch $\alpha g := \varphi\gamma g$, $\beta m := T \setminus \varphi\mu m$ eine komplementäre Mengendarstellung von (G, M, I), denn es gilt ja

$$gIm \iff \gamma g \leq \mu m \iff \varphi\gamma g \subseteq \varphi\mu m \iff \varphi\gamma g \cap (T \setminus \varphi\mu m) = \emptyset.$$

$\square$

Wir wissen bereits aus den Bemerkungen nach Hilfssatz 102, daß es zur Bestimmung der Ferrers-Dimension eines doppelt fundierten Kontextes $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ genügt, diejenigen Paare (g, m) des Komplements von I zu überdecken, für die $g \swarrow m$ oder $g \nearrow m$ gilt. Tatsächlich kann man sich sogar auf die Doppelpfeile beschränken, diese spielen also die Rolle für die Ferrers-Dimension, die die aus der Ordnungstheorie bekannten *kritischen Paare* für die Ordnungsdimension haben.

Satz 48. *Ein doppelt fundierter Kontext (G, M, I) hat Ferrers-Dimension $\leq n$ genau dann, wenn es n Ferrers-Relationen $F_t \subseteq G \times M \setminus I$ gibt, deren Vereinigung alle Paare (g, m) mit $g \swarrow\!\!\!\nearrow m$ enthält.*

Sind dabei alle F_t höchstens $(k-1)$-stufig, dann gilt auch

$$fdim_k(G, M, I) \leq n.$$

Beweis. Wir beschreiben zuerst eine Möglichkeit, eine gegebene Ferrers-Relation F geeignet zu erweitern. Der Grundgedanke ist, daß durch das Kopieren einer Zeile oder einer Spalte des Kontextes die Ferrers-Bedingung nicht beeinträchtigt wird. Formal läßt sich dies so ausführen: Für eine Ferrers-Relation $F \subseteq G \times M$ und Gegenstände $g, h \in G$ ist

$$F \cup \{(g,m) \mid (h,m) \in F\}$$

ebenfalls eine Ferrers-Relation, und wenn $F \cap I = \emptyset$ ist, dann folgt aus $g' \subseteq h'$, daß auch $F \cup \{(g,m) \mid (h,m) \in F\}$ disjunkt zu I ist. Die Stufenzahl erhöht sich dabei nicht. Entsprechendes gilt beim Kopieren der n-Spalte in die m-Spalte $(m, n \in M)$, also beim Übergang von F zu

$$F \cup \{(g,m) \mid (g,n) \in F\}.$$

Definieren wir daher für eine Ferrers-Relation $F \subseteq G \times M \setminus I$

$$\begin{aligned} \widetilde{F} &:= F \cup \bigcup_{g' \subseteq h'} \{(g,m) \mid (h,m) \in F\} \\ \text{und damit} \quad \overline{F} &:= \widetilde{F} \cup \bigcup_{m' \subseteq n'} \{(g,m) \mid (g,n) \in F\}, \end{aligned}$$

so erhalten wir wieder eine Ferres-Relation $\overline{F} \subseteq G \times M \setminus I$. Ist F höchstens k-stufig, dann ist $\overline{F}$ höchstens k-stufig.

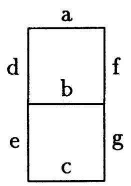
Nun seien für $t \in T$ Ferrers-Relationen $F_t \subseteq G \times M \setminus I$ gegeben, die zusammen alle Doppelpfeile überdecken. Die Relationen $\overline{F}_t, t \in T$ überdecken dann, so behaupten wir, ganz $G \times M \setminus I$:

Ist nämlich $(g,m) \notin I$, dann existiert wegen der Doppeltfundiertheit ein Merkmal n mit $g \nearrow n$ und $m' \subseteq n'$, und weiter ein Gegenstand h mit $h \swarrow\!\!\!\!\nearrow n$ und $g' \subseteq h'$. Ist $(h,n) \in F_t$, dann ist $(g,n) \in \widetilde{F}_t$ und $(g,m) \in \overline{F}_t$. □

Es ergibt sich unmittelbar aus Definition 85, daß eine Mengendarstellung von (G, M, I) eine komplementäre Mengendarstellung des komplementären Kontextes $(G, M, G \times M \setminus I)$ ist und umgekehrt. Die Bestimmung der **Mengendimension** von $\mathbb{K}$, also der kleinstmöglichen Kardinalität einer Mengendarstellung, ist deshalb äquivalent zur Bestimmung der 2-Dimension von $\mathbb{K}^c$ (und schwierig, da ebenfalls $\mathcal{NP}$-vollständig). Nach den oben angegebenen Ergebnissen besteht die Aufgabe darin, die Relation I mit möglichst wenigen 1-stufigen Ferrersrelationen, also mit möglichst wenigen „rechteckigen" Teilrelationen auszufüllen. Wir hatten für solche Rechtecke (A, B) mit $A \times B \subseteq I$ früher schon den Terminus *Vorbegriff* des Kontextes (G, M, I) eingeführt. Die Mengendimension ist also gleich der kleinsten Anzahl von Vorbegriffen (genauer: Mengen $A \times B$, wobei (A, B) Vorbegriff), deren Vereinigung I ausfüllt. Da sich aber jeder Vorbegriff zu einem Begriff erweitern läßt, ist die Mengendimension auch gleich der kleinsten Anzahl von Begriffen, deren Vereinigung gleich I ist. Wir geben dazu ein Beispiel.

Beispiel 15. Es soll festgestellt werden, ob sich die Ziffern der Sieben-Segment-Anzeige

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

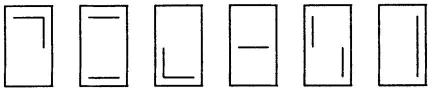


	a	b	c	d	e	f	g
0	×		×	⊗	×	×	×
1						⊗	×
2	×	×	×		⊗	×	
3	×	×	⊗			×	×
4		⊗		×		×	×
5	×	×	×	×			×
6	×	×	×	×	×		×
7	⊗					×	×
8	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×		×	×

Abbildung 6.5. Die Sieben-Segment-Anzeige und der Kontext der Ziffern. Die eingekreisten Kreuze markieren eine blockierende Menge.

als Vereinigungen von weniger als sieben Teilfiguren darstellen lassen.

Dazu betrachten wir den Kontext in Abbildung 6.5, dessen Gegenstände diese Ziffern und dessen Merkmale die Segmente der Anzeige sind; die Inzidenz ist auf die naheliegenden Weise erklärt. Die Begriffsinhalte entsprechen auf natürliche Weise Teilfiguren der Anzeige; eine Menge von Begriffen füllt genau dann I aus, wenn sich jeder Gegenstandsinhalt als Vereinigung von Begriffsinhalten aus dieser Menge darstellen lässt. Deshalb ist die Aufgabe, mit möglichst wenigen Teilfiguren auszukommen, äquivalent zur Bestimmung der Mengendimension. In der Tat kommt man mit sechs Begriffsinhalten aus, nämlich



Daß eine kleinere Anzahl nicht zum Erfolg führen kann, zeigt die „blockierende Menge“ von Inzidenzen, die in Abbildung 6.5 herhorgehoben sind: keine zwei dieser Kreuze können zu einem Vorbegriff gehören.

Einbettungen in direkte Produkte von Ketten sind auch für das Zeichnen von Verbandsdiagrammen von Interesse. Dabei haben sich $\bigvee$-Einbettungen bewährt, d.h. injektive, $\bigvee$-erhaltende Abbildungen, und es stellt sich die Frage nach der Existenz solcher Einbettungen. Der theoretische Hintergrund dafür wird in Kapitel 7 in anderem Zusammenhang erarbeitet. Wir geben das folgende Ergebnis ohne Beweis an, weil es sich als Spezialfall der Hilfssätze 119 (S. 262) und 121 (S. 265) gewinnen läßt.

Satz 49. *Genau dann gibt es eine $\bigvee$-Einbettung eines endlichen Verbandes $\boldsymbol{V}$ in das direkte Produkt von n Ketten der Längen $l_1, \dots, l_n$, wenn $M(\boldsymbol{V})$ mit n Ketten der Mächtigkeiten $m_1, \dots, m_n$ überdeckt werden kann, wobei $m_i \leq l_i$ gilt für $i \in \{1, \dots, n\}$.* □

Als unmittelbare Folgerung daraus kann man zwei Meßzahlen für dieses Einbettungsproblem bestimmen: Bezeichnen wir als **$\bigvee$-Dimension** die kleinste Anzahl von Ketten, in deren Produkt der Verband $\bigvee$-erhaltend eingebettet werden kann und als **$\bigvee$-Rang** die kleinste Länge eines solchen Produktes, dann gibt uns der Satz befriedigende Auskunft über diese Zahlen, jedenfalls für endliche Verbände. Wir verwenden dazu ein bekanntes Resultat von Dilworth ([29], S. 3), welches besagt, daß die kleinste Anzahl von Ketten, mit denen eine endliche geordnete Menge überdeckt werden kann, gleich der Weite dieser geordneten Menge ist.

Korollar 106. *Bei einem endlichen Verband V ist die $\bigvee$-Dimension gleich der Weite von $M(V)$ und der $\bigvee$-Rang gleich der Mächtigkeit von $M(V)$.* □

6.5 Literatur und Hinweise

Die in diesem Kapitel behandelten Verbandseigenschaften, also die Distributivität und ihre Verallgemeinerungen, die Modularität sowie Fragen der Dimension sind Kernthemen der mathematischen Verbands- und Ordnungstheorie. Es geht uns hier nicht darum, eine begriffsanalytische Darstellung des Gesamtstandes der Forschung anzubieten, vielmehr wollen wir zeigen, daß sich diese Themen ohne Schwierigkeiten in unsere Sprache einbeziehen und damit auch nutzen lassen. Unsere Zusammenfassung erhebt naturgemäß keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Wir verweisen auf die eingangs genannten Lehrbücher zur Ordnungs- und Verbandstheorie und auf die aktuelle Diskussion in den Fachjournalen wie ORDER. Einen detaillierten Vergleich vieler Eigenschaften endlicher Verbände haben Reeg und Weiß erarbeitet [141]. Algorithmen und Komplexitätsabschätzungen findet man in der Dissertation [159] von Skorsky.

Zu 6.1 Eine ausführliche Untersuchung der Distributivität bei Begriffsverbänden verdanken wir Erné. Seine Studie [48] enthält viele Ergebnisse, die über das hier Dargestellte hinausgehen. Hier ist auch erstmals ausgearbeitet, daß die verschiedenen Varianten des Distributivgesetzes im doppelt fundierten Fall zusammenfallen. Satz 40 wird dort mit topologischen Aussagen in Verbindung gebracht. Dieser Satz stammt aus [199] und geht auf Ideen von Raney [140] zurück. Endliche distributive Begriffsverbände sind in [198] beschrieben.

Daß sich die Distributivität mit Hilfe der Pfeilrelationen beschreiben läßt, war in der Fassung von Satz 41(9) früh bekannt. Die elegant knappe Fassung in Satz 41(3,4) stammt ebenfalls von Erné.

Zu 6.2 Von Stern gibt es ein Buch [164], das sich mit halbmodularen Verbänden befaßt. Die Charakterisierung der Halbmodularität mit Hilfe der Pfeilrelationen hat Skorsky aus einem Ergebnis von Faigle und Herrmann [52] abgeleitet.

Zu 6.3 Die Literatur zu Verallgemeinerungen der Distributivgesetze ist so umfangreich, daß wir auf die einschlägigen Lehrbücher verweisen müssen, insbesondere auf Crawley & Dilworth [29]. Die Semidistributivität ist bei der Untersuchung freier Verbänd von großer Wichtigkeit, wie von Jónsson und Kiefer [92] deutlich gemacht wurde, siehe auch Nation [132]. Day [33] benutzt bereits die Charakterisierung mittels der Doppelpfeilrelation. Es gibt Verallgemeinerungen der Semidistributivität, die sich ebenfalls mit Hilfe der Pfeilrelationen beschreiben lassen, siehe dazu Day, Nation & Tschantz [35] sowie Geyer [72].

Lokal distributive Verbände wurden von Dilworth [40] eingeführt und treten in verschiedenen Zusammenhängen als natürliche Strukturen auf. Einen konzentrierten Überblick über die Entwicklung dieses Begriffs gibt Monjardet [129]. Die verschiedenen Teile von Satz 44 sind aus Arbeiten von Green und Markowski [80], Jamison [90] und Edelman [46] zusammengetragen.

Der Vergleich der Verbandseigenschaften in Abbildung 6.1 stammt wieder von Skorsky, siehe auch R. Schmidt [155]. Skorsky hat sich auch mit nachbarschaftstreuen Einbettungen in distributive Verbände beschäftigt [158], weil dies auch für die automatische Diagrammerstellung interessant ist. Wild [187] hatte das Problem für Potenzmengenverbände geklärt.

Zu 6.4 Daß die Ordnungsdimension von $(P, \leq)$ gleich der der Dedekind-MacNeille-Vervollständigung ist, war früh bekannt, vergleiche [5], [153]. Baldy & Mitas [4] haben dies verallgemeinert.

Die Begriffe *Ferrers-Relation* und *-Dimension* gehen auf Riguet [147] und Cogis [27], [28] zurück, beim letztgenannten Autor finden sich auch schon Teile der Aussage von Satz 46. Bouchet [23] beweist den Satz für geordnete Mengen, die allgemeine Fassung findet sich in [206]. Zur Ferrers-Dimension siehe auch Doignon, Ducamp & Falmagne [41] und Koppen [104]. Anwendungen finden sich bei Reuter [143], [144], Ganter, Nevermann, Reuter und Stahl [63]. Eng mit den Ferrers-Relationen verwandt sind die **Intervallordnungen**. Dabei betrachtet man geordnete Mengen $(P, \leq)$, in die  nicht eingebettet werden kann. Formal lautet die Bedingung

$$u < v, \quad x < y, \quad u \not< y \quad \Rightarrow \quad x < v,$$

und anhand von Definition 83 erkennt man, daß dies gerade dazu äquivalent ist, daß $<$ eine Ferrers-Relation ist. Untersuchungen zur „Intervalldimension“ stehen also mit denen zur Ferrers-Dimension in engem Zusammenhang. Man kann hier erheblich verallgemeinern, indem man die Ordnung der Intervalle einer beliebigen geordneten Menge betrachtet, dies hat Mitas [128] getan.

Das Beispiel der Sieben-Segment-Anzeige stammt von Stahl und Wille [161]. Zu Mengendarstellungen siehe auch Markowsky [126].

7. Kontextvergleich und begriffliche Meßbarkeit

Strukturvergleichende Abbildungen zwischen Begriffsverbänden sind in erster Linie die vollständigen Homomorphismen. Im Abschnitt 3.2 haben wir den Zusammenhang zwischen den verträglichen Teilkontexten und den vollständigen Kongruenzen, also den Kernen vollständiger Homomorphismen, erarbeitet. Ein weiterer Ansatz besteht darin, den Verbandshomomorphismen Kontextmorphismen gegenüberzustellen, wobei es naheliegt, dafür Abbildungspaare zu verwenden, also die Gegenstände und die Merkmale separat abzubilden. Solche Paare können wie Abbildungen behandelt werden. Wir tun dies auch ohne weitere Vorwarnung; schreiben z.B.

$$(\alpha, \beta) : (G, M, I) \to (H, N, J),$$

wenn wir ein Abbildungspaar $\alpha : G \to H$, $\beta : M \to N$ meinen, und verwenden die für Abbildungen üblichen Benennungen im übertragenen Sinne. Das ist deshalb problemlos, weil wir ein solches Abbildungspaar (α, β) im Falle $G \cap M = \emptyset = H \cap N$ durch die Abbildung

$$\alpha \cup \beta : G \dot{\cup} M \to H \dot{\cup} N$$

ersetzen können.

Zuerst behandeln wir Automorphismen von Kontexten, um mit deren Hilfe Verbandsautomorphismen beschreiben zu können. Hier spielen die algorithmischen Fragen eine Rolle. Wir zeigen, daß man die Automorphismen eines Kontextes mit dem gleichen Algorithmus erzeugen kann, den wir bereits im zweiten Kapitel zur Erzeugung der Begriffe benutzt haben.

Strebt man eine Dualität an, die die Vollhomomorphismen zwischen Begriffsverbänden und geeigneten Morphismen zwischen den zugehörigen Kontexten aufeinander abbildet, dann zeigen einfachste Beispiele, daß dies nicht ohne Einschränkungen realisiert werden kann. Der Grund dafür ist, daß höchst unterschiedliche Kontexte isomorphe Begriffsverbände haben können; wir wissen ja, daß sich beim Bereinigen und Reduzieren die Struktur des Begriffsverbands nicht ändert.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, sich zu behelfen. Die eine ist es, mengenwertige Abbildungen zu verwenden. Ein anderer Ansatz betrachtet die Begriffsverbände nur bis auf Isomorphie und beschreibt die Homomorphismen durch Morphismen zwischen geeigneten Kontexten. Darüber berichten wir im zweiten Abschnitt.

Beim *Skalieren* eines mehrwertigen Kontextes, wie es im ersten Kapitel definiert wurde, hat man die Möglichkeit, die Skalen zu wählen. Um dieses Instrument gezielter einsetzen zu können, benötigt man Methoden, Skalen zu vergleichen. Kann man ein Merkmal *gröber* und *feiner* skalieren? Und welche Auswirkungen hat das auf den Begriffsverband? Zur Beantwortung dieser Fragen führen wir nun die geeigneten Morphismen ein, nämlich die *Skalenmaße*.

Eine immer wieder auftretende Aufgabe ist die folgende: Daten sind in Form eines einwertigen Kontextes gegeben, man vermutet aber eine in Wirklichkeit mehrwertige Natur der Daten. Man kann dann versuchen, den Vorgang der Skalierung umzukehren und zu fragen, ob sich die begriffliche Struktur des gegebenen einwertigen Kontextes ganz oder teilweise durch die Einführung mehrwertiger Merkmale mit vorgegebener Skalierung erklären läßt. Auch dies kann mit Hilfe der Skalenmaße angegangen werden, es entwickelt sich daraus der Ansatz einer *begriffsanalytischen Meßtheorie*.

7.1 Automorphismen von Kontexten

Definition 86. Ein **Isomorphismus** zwischen Kontexten $\mathbb{K}_1 := (G, M, I)$ und $\mathbb{K}_2 := (H, N, J)$ ist ein Paar (α, β) bijektiver Abbildungen $\alpha : G \to H$, $\beta : M \to N$ mit

$$gIm \iff \alpha(g)J\beta(m).$$

Im Falle $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$ sprechen wir von einem **Automorphismus**; die Gruppe der Automorphismen eines Kontextes $\mathbb{K}$ wird mit $Aut(\mathbb{K})$ notiert. $\Diamond$

Isomorphe Kontexte haben isomorphe Begriffsverbände, denn jeder Kontextisomorphismus (α, β) induziert durch

$$(A, B) \mapsto (\alpha(A), \beta(B)) \qquad \text{für } (A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$$

einen Verbandsisomorphismus von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ auf $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$. Sind beide Kontexte reduziert, dann ist auch jeder Verbandsisomorphismus durch einen (und nur einen) Kontextisomorphismus induziert. Allgemeiner gilt, falls die Kontexte bereinigt sind, daß ein Verbandsisomorphismus φ genau dann durch einen Kontextisomorphismus induziert ist, wenn φ Gegenstandsbegriffe auf Gegenstandsbegriffe und Merkmalbegriffe auf Merkmalbegriffe surjektiv abbildet.

Eine Beobachtung von W. Xia zeigt, daß man die Isomorphismen selbst wieder als Begriffe eines geeigneten Kontextes auffassen kann. Dazu definieren wir

Definition 87. Für Kontexte $\mathbb{K}_1 := (G, M, I)$ und $\mathbb{K}_2 := (H, N, J)$ ist

$$\mathbb{K}_1 \mathbin{\tilde{\times}} \mathbb{K}_2 := (G \times H, M \times N, \sim)$$

mit

$$(g, h) \sim (m, n) \quad :\iff \quad (gIm \iff hJn). \qquad \Diamond$$

Satz 50. *Ist $\mathbb{K}_2$ bereinigt und sind $\alpha \subseteq G \times H$, $\beta \subseteq M \times N$ bijektive Abbildungen zwischen G und H bzw. M und N, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *(α, β) ist ein Kontextisomorphismus von $\mathbb{K}_1$ auf $\mathbb{K}_2$*
2. *$(\alpha, \beta) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \tilde{\times} \mathbb{K}_2)$.*

Beweis. Für $A \subseteq G \times H$, $B \subseteq M \times N$ gilt

$$A^{\sim} = \{(m, n) \mid gIm \iff hJn \text{ für alle } (g, h) \in A\}$$

sowie

$$B^{\sim} = \{(g, h) \mid gIm \iff hJn \text{ für alle } (m, n) \in B\}.$$

Ein Paar (α, β) bijektiver Abbildungen ist also genau dann ein Isomorphismus von $\mathbb{K}_1$ auf $\mathbb{K}_2$, wenn $\alpha \subseteq \beta^{\sim}$ oder, gleichbedeutend, wenn $\beta \subseteq \alpha^{\sim}$ ist. Daraus folgt aber dann auch $\alpha = \beta^{\sim}$ und $\beta = \alpha^{\sim}$, denn wenn $(g, h) \in \beta^{\sim}$, dann gilt für alle $m \in M$

$$hJ\beta m \iff gIm \iff \alpha g J \beta m,$$

woraus wir $h^J = (\alpha g)^J$ schließen. Wenn $\mathbb{K}_2$ bereinigt ist, hat dies $h = \alpha g$ zur Folge, und wir erhalten $\alpha = \beta^{\sim}$. □

Nebenher entnehmen wir dem Satz noch, daß ein Isomorphismus (α, β) im Falle bereinigter Kontexte durch jede seiner beiden Komponenten schon festgelegt ist.

Der Satz erlaubt eine nützliche Verschärfung. Oft wissen wir schon, daß ein bestimmter Gegenstand g von $\mathbb{K}_1$ nicht durch einen Isomorphismus auf $h \in \mathbb{K}_2$ abgebildet werden kann, z.B. weil g nicht die gleiche Anzahl von Merkmalen hat wie h. Der Gegenstand (g, h) von $\mathbb{K}_1 \tilde{\times} \mathbb{K}_2$ kann also zu keinem Isomorphismus gehören und ist in dieser Hinsicht überflüssig. Tatsächlich kann man solche Gegenstands- bzw. Merkmalpaare streichen, ohne daß sich die Aussage des Satzes ändert. Dies wird im folgenden Satz formuliert, wir definieren dazu

$$\widetilde{G} := \bigcup \{\alpha \mid (\alpha, \beta) \text{ ist ein Isomorphismus von } \mathbb{K}_1 \text{ auf } \mathbb{K}_2\},$$

$$\widetilde{M} := \bigcup \{\beta \mid (\alpha, \beta) \text{ ist ein Isomorphismus von } \mathbb{K}_1 \text{ auf } \mathbb{K}_2\}.$$

Korollar 107. *X und Y seien Mengen mit $\widetilde{G} \subseteq X \subseteq G \times H$ und $\widetilde{M} \subseteq Y \subseteq M \times N$. $\mathbb{K}_2$ sei wieder bereinigt. Dann sind für bijektive Abbildungen $\alpha : G \to H$, $\beta : M \to N$ die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *(α, β) ist ein Isomorphismus von $\mathbb{K}_1$ auf $\mathbb{K}_2$*
2. *$(\alpha, \beta) \in \underline{\mathfrak{B}}(X, Y, \sim \cap X \times Y)$.*

Beweis. Jeder Isomorphismus ist ein Begriff von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1 \tilde{\times} \mathbb{K}_2)$, dessen Umfang und Inhalt ganz im Teilkontext liegen, also ein Begriff des Teilkontextes. Ist umgekehrt (α, β) ein Begriff des Teilkontextes, so gilt sicher $\alpha \subseteq \beta^{\sim}$. Im Beweis des vorigen Satzes wurde bereits gezeigt, daß im Falle bijektiver Abbildungen daraus folgt, daß (α, β) ein Isomorphismus ist. □

Man kann diesen Satz (und auch das Korollar) mit den Algorithmen aus Abschnitt 2.1 kombinieren und erhält so z.B. ein Verfahren zur Erzeugung aller Automorphismen eines (endlichen) Kontextes $\mathbb{K} := (G, M, I)$. Allerdings wird man dabei vermeiden wollen, wirklich im Kontext $\mathbb{K} \tilde{\times} \mathbb{K}$ zu arbeiten, weil dieser ja beträchtlich größer ist als $\mathbb{K}$. Tatsächlich kann man die notwendigen Berechnungen auf solche in $\mathbb{K}$ zurückführen. Das wird durch die nachstehende Definition vorbereitet:

Definition 88. Eine **Boxrelation** auf einer (endlichen) Menge S ist eine Teilmenge $R \subseteq S \times S$ der Form

$$R = A_1 \times B_1 \cup A_2 \times B_2 \cup \ldots \cup A_r \times B_r,$$

wobei $A_1, \ldots, A_r$ paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen von S sind und $B_1, \ldots, B_r$ ebenso. Eine Boxrelation heißt **regulär**, wenn $|A_i| = |B_i|$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ und außerdem $\bigcup A_i = S = \bigcup B_i$ gilt. Eine Boxrelation ist eine **partielle Permutation**, falls $|A_i| = 1 = |B_i|$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$. $\Diamond$

Die Boxrelationen auf S bilden ein Hüllensystem. Ihre Rolle für die Automorphismen klärt der nächste Hilfssatz:

Hilfssatz 108. *Alle Begriffsumfänge von $\mathbb{K} \tilde{\times} \mathbb{K}$ sind Boxrelationen auf G und alle Begriffsinhalte sind Boxrelationen auf M.*

Ist (α, β) ein Automorphismus von $\mathbb{K}$ und (A, B) ein Begriff von $\mathbb{K} \tilde{\times} \mathbb{K}$ mit $(A, B) \leq (\alpha, \beta)$, dann ist A eine partielle Permutation und B regulär.

Beweis. Jeder Gegenstandsinhalt von $\mathbb{K} \tilde{\times} \mathbb{K}$ ist wegen

$$(g, h)^{\sim} = g' \times h' \cup (M \setminus g') \times (N \setminus h')$$

eine Boxrelation, und damit auch jeder Durchschnitt von Gegenstandsinhalten, also jeder Begriffsinhalt. Entsprechendes gilt für Umfänge.

$(A, B) \leq (\alpha, \beta)$ ist äquivalent zu $A \subseteq \alpha$ und $\beta \subseteq B$. Sind dabei α und β Permutationen, dann ist trivialerweise A eine partielle Permutation. Daß B regulär sein muß, ergibt sich aus dem nachstehenden (trivialen) Hilfssatz. $\square$

Hilfssatz 109. *Enthält eine Boxrelation eine reguläre Boxrelation, dann ist sie selbst regulär.* $\square$

Zum praktischen Arbeiten stellt man eine Boxrelation R zweckmäßig durch zwei Abbildungen $\rho_1 : S \to \mathbb{N}_0$, $\rho_2 : S \to \mathbb{N}_0$ dar mit

$$(s, t) \in R \iff \rho_1(s) = \rho_2(t) > 0.$$

In dieser Darstellung läßt sich z.B. der Durchschnitt von Boxrelationen leicht ermitteln und ebenso die einfachen Kontextoperationen ausführen. Ist beispielsweise

$$R = A_1 \times B_1 \cup A_2 \times B_2 \cup \ldots \cup A_r \times B_r$$

ein Begriffsinhalt von $\mathbb{K} \tilde{\times} \mathbb{K}$ und $(g, h) \in G \times G$, dann gilt

$$(g,h) \in R^{\sim} \iff \begin{cases} g' = \bigcup\{A_i \mid B_i \subseteq h'\} \\ h' = \bigcup\{B_i \mid A_i \subseteq g'\} \end{cases}.$$

Wir wollen nun einen Algorithmus angeben, der alle Automorphismen eines bereinigten Kontextes $\mathbb{K}$ erzeugt. Grundsätzlich gilt, daß wir dafür die Ergebnisse von Abschnitt 2.1 verwenden können: dort wurde ein Algorithmus zur Erzeugung aller Begriffe eines Kontextes vorgestellt, und nach Satz 50 sind die Automorphismen spezielle Begriffe. Wir könnten also die Automorphismen erhalten, indem wir die Begriffe von $\mathbb{K} \tilde{\times} \mathbb{K}$ erzeugen und diejenigen verwerfen, die keine Automorphismen sind. Das würde allerdings in aller Regel zu absurdem Aufwand führen, wir müßten eine riesige Zahl von Begriffen überpüfen, um einige Automorphismen zu finden. Man wird daher anstreben, Satz 6 (S. 68) zu benutzen und nach einer Teilfamilie $\mathcal{F}$ der Menge aller Umfänge von $\mathbb{K} \tilde{\times} \mathbb{K}$ suchen, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt und alle Automorphismen liefert, darüber hinaus aber nur wenige Begriffsumfänge.

Das ist aber ebenfalls unrealistisch. Überlegungen zur Komplexität zeigen nämlich, daß man keinen Algorithmus erwarten darf, der für jeden Kontext $\mathbb{K}$ die Automorphismen leicht findet. Die von uns benutzte Menge $\mathcal{F}$ enthält deshalb außer den Automorphismen noch weitere Begriffsumfänge, und zwar im ungünstigen Fall sehr viele.

Um Satz 6 (S. 68) anwenden zu können, müssen wir uns auf eine lineare Ordnung der Gegenstandsmenge festlegen. Dazu wählen wir willkürlich eine lineare Ordnung auf G und setzen

$$(g_1, h_1) < (g_2, h_2) :\iff \begin{cases} g_1 < g_2 & \text{oder} \\ g_1 = g_2 & \text{und } h_1 < h_2. \end{cases}$$

Ist $\alpha \subseteq G \times G$ eine partielle Permutation und $g \in G$ ein Gegenstand, dann sagen wir, α sei **undefiniert** für g, wenn es kein $h \in G$ gibt mit $(g,h) \in \alpha$. Wir nennen α **linksbündig**, falls folgendes gilt: Wenn α undefiniert ist für g, dann ist $\alpha = \alpha \cap \{(g_1, g_2) \mid (g_1, g_2) < (g, g)\}$.

Hilfssatz 110. *Die Menge $\mathcal{F}$ aller Umfänge von Begriffen $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K} \tilde{\times} \mathbb{K})$, für die gilt*

- *α ist eine linksbündige partielle Permutation,*
- *β ist eine reguläre Boxrelation,*

erfüllt die Voraussetzungen von Satz 6 (S. 68).

Beweis. Es sei (α, β) ein solcher Begriff und $(i,j) \in G \times G$ beliebig. Dann ist

$$\alpha_0 := (\alpha \cap \{(g,h) \mid (g,h) < (i,j)\})''$$

Umfang eines Unterbegriffes (α_0, β_0) von (α, β), insbesondere gilt $\alpha_0 \subseteq \alpha$ und $\beta \subseteq \beta_0$. Trivialerweise ist α_0 eine partielle Permutation, und nach Hilfssatz 109 ist β_0 regulär. Zu beweisen ist also nur, daß α_0 linksbündig ist. Sei g undefiniert für α_0. Wenn $g \geq i$ gilt, ist nichts zu beweisen, also sei $g < i$. Dann ist aber auch α undefiniert für g, woraus die Behauptung folgt. □

Die im Hilfssatz beschriebene Menge von Begriffen enthält alle Automorphismen, es sind genau diejenigen Elemente (α, β) von $\mathcal{F}$, für die α eine (vollständige) Permutation ist. Der Algorithmus besteht also darin, die Menge $\mathcal{F}$ auf die in Satz 6 (S. 68) angegebene Weise zu durchlaufen und dabei die α, die für keinen Gegenstand undefiniert sind, als Treffer zu nehmen.

Eine weitere Anwendung von Satz 6 erlaubt es, einen Begriffsverband „modulo Automorphismen" zu berechnen. Damit ist folgendes gemeint: Ist $\Gamma \leq Aut(G, M, I)$ eine Gruppe von Kontextautomorphismen, dann zerfällt $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ in Bahnen unter Γ. Unser Ziel ist es nun, aus jeder solchen Bahn von Γ genau einen Begriff anzugeben, nämlich denjenigen mit dem lektisch größten Begriffsumfang. Einen solchen Begriffsumfang nennen wir **bahnmaximal**. Wir wollen dabei aber vermeiden, zunächst alle Begriffsumfänge auszurechnen und dann die bahnmaximalen darunter zu bestimmen. Der folgende Satz zeigt, daß der Algorithmus aus Abschnitt 2.1 geeignet modifiziert werden kann, so daß er nur die gewünschten Begriffsumfänge erzeugt.

Satz 51. *Der kleinste bahnmaximale Begriffsumfang nach einer Menge $A \subseteq G$ ist*

$$A^+ := A \oplus i,$$

wobei i das größte Element von G ist, für das $A <_i A \oplus i$ und zugleich $\alpha(A \oplus i) \leq A \oplus i$ für alle $(\alpha, \beta) \in \Gamma$ gilt.

Beweis. Zu zeigen ist, daß das System der bahnmaximalen Begriffsumfänge die Voraussetzungen von Satz 6 (S. 68) erfüllt. Wir beweisen, daß allgemeiner folgendes richtig ist: *Ist B ein Begriffsumfang und $A = (B \cap \{1, \ldots, i-1\})''$, dann gilt für jeden Automorphismus (α, β) von (G, M, I)*

$$A < \alpha(A) \Rightarrow B < \alpha(B).$$

Denn $A < \alpha(A)$ bedeutet $A <_j \alpha(A)$ für ein $j \in G$. Wäre $i \leq j$, dann ergäbe sich

$$A \cap \{1, \ldots, i-1\} = \alpha(A) \cap \{1, \ldots, i-1\},$$

was wegen

$$A = (A \cap \{1, \ldots, i-1\})''$$

zur Folge hätte, daß $A \subseteq \alpha(A)$ und damit $A = \alpha(A)$, im Widerspruch zu $A < \alpha(A)$. Also muß $j < i$ sein. Aber dann gilt

$$B \cap \{1, \ldots, j-1\} = A \cap \{1, \ldots, j-1\} = \alpha(A) \cap \{1, \ldots, j-1\} \subseteq \alpha(B)$$

und $j \in \alpha(B) \setminus B$, woraus $B < \alpha(B)$ folgt. □

Bei Verbänden mit vielen Automorphismen ist ein Diagramm der Bahnen oft übersichtlicher als eines, das alle Elemente des Verbandes darstellt. Als Beispiel zeigen wir in Abbildung 7.1 den Verband der 59 Untergruppen der alternierenden Gruppe A_5. Dargestellt sind die neun Bahnen der Automorphismengruppe Γ, die isomorph zur S_5 ist. Angegeben ist jeweils ein Repräsentant, wobei die Abkürzungen folgendes bedeuten: $S_1 := \{id\}$, $Z_2 := \{id, (01)(23)\}$, $Z_3 := \{id, (012), (021)\}$, $V_4 :=$

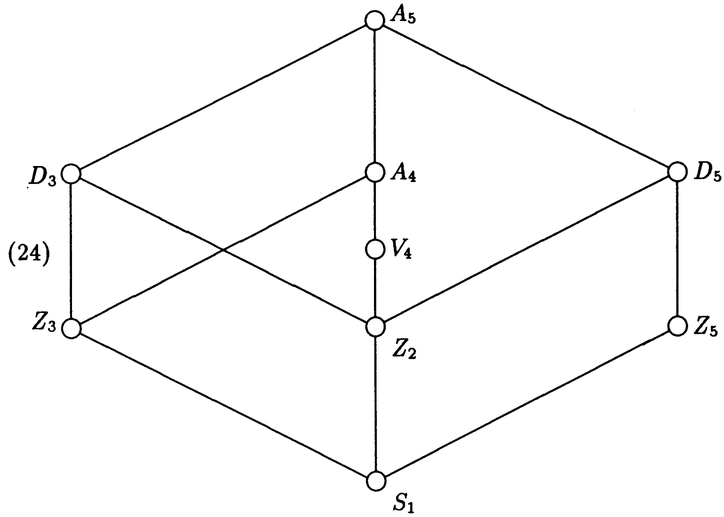


Abbildung 7.1. Der Verband der Untergruppen der alternierenden Gruppe A_5 „modulo Automorphismen".

$\{id, (01)(23), (03)(12), (02)(13)\}$, $Z_5 := \langle(01234)\rangle$, $D_3 := \langle(01)(23), (014)\rangle$, $D_5 := \langle(01)(23), (01234)\rangle$, $A_4 := \langle(01)(23), (012)\rangle$, $A_5 := \langle(012), (01234)\rangle$.

Die Bahnen sind nach folgender Regel geordnet: Die Bahn a^Γ ist genau dann kleiner oder gleich der Bahn b^Γ, wenn es einen Automorphismus $\gamma \in \Gamma$ gibt mit der Eigenschaft, daß γa eine Untergruppe von b ist. Daraus folgt nicht unbedingt, daß auch a eine Untergruppe von b sein muß. In Abbildung 7.1 beispielsweise enthält D_3 die Gruppe Z_3 nicht, wohl aber die Gruppe $(24)Z_3(24)$, die aus Z_3 durch Konjugieren entsteht. Aus diesem Grunde ist an der entsprechenden Kante des Diagramms auch das Element (24) eingetragen.

Derartige Diagramme „modulo Automorphismen" werden in der Gruppentheorie benutzt, können aber allgemeiner verwendet werden. M. Zickwolff (deren Arbeiten [220], [221] das Beispiel entnommen ist), hat ausgearbeitet, welche Informationen in das Diagramm der Bahnen eines (endlichen) Verbandes $\boldsymbol{V}$ mit Automorphismengruppe Γ eingetragen werden müssen, damit $\boldsymbol{V}$ daraus rekonstruiert werden kann. Man wählt dazu zunächst willkürlich ein Repräsentantensystem R der Bahnen (beispielsweise die Menge der bahnmaximalen Elemente in Satz 51). Für jeden Repräsentanten $a \in R$ notiert man den Stabilisator Γ_a und trägt ihn beim entsprechenden Element in das Bahnendiagramm ein. Oft genügt es, wie in Abbildung 7.1, den Repräsentanten a einzutragen und den Stabilisator Γ_a bei Bedarf zu berechnen. Für je zwei Elemente $a, b \in R$ wird die Menge

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma a \prec b\}$$

derjenigen Automorphismen bestimmt, die a auf einen unteren Nachbarn von b abbilden. Diese Menge zerfällt in (disjunkte) Doppelnebenklassen der Form

$$\Gamma_b \alpha \Gamma_a.$$

Es genügt deshalb, jeweils ein Repräsentantensystem $\beta(a,b)$ für diese Klassen zu notieren. $\beta(a,b)$ wird, sofern nichtleer, ebenfalls in das Bahnendiagramm eingetragen, und zwar an der Kante zwischen a und b. Dabei kann allerdings die Komplikation eintreten, daß $\beta(a,b) \neq \emptyset$, a^Γ aber (im Bahnendiagramm) nicht unterer Nachbar von b^Γ ist. In diesem Fall wird dem Diagramm eine Kante von a nach b hinzugefügt. Der Übersichtlichkeit halber wird vereinbart, daß eine Kante von a nach b, an der nichts eingetragen ist, $\beta(a,b) = \{id\}$ symbolisieren soll. Abbildung 7.2 zeigt ein weiteres einfaches Beispiel: links einen Verband, dessen Automorphismengruppe offenbar isomorph zur zyklischen Gruppe Z_3 ist, rechts das Bahnendiagramm mit den notwendigen Angaben.

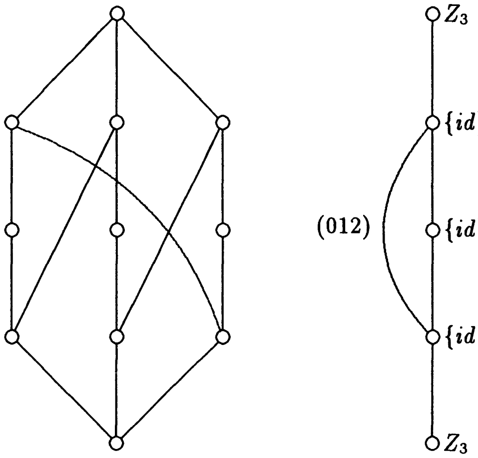


Abbildung 7.2. Das Bahnendiagramm (rechts) enthält eine zusätzliche Kante.

7.2 Morphismen und Bindungen

Definition 89. Sind $\mathbb{K}_1 := (G,M,I)$ und $\mathbb{K}_2 := (H,N,J)$ Kontexte, dann nennen wir eine Abbildung $\alpha : G \to H$

- **umfangsstetig**, wenn für jeden Begriffsumfang U von $\mathbb{K}_2$ das Urbild $\alpha^{-1}(U)$ ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}_1$ ist.
- **umfangsabgeschlossen**, wenn das Bild $\alpha(U)$ eines Begriffsumfangs U von $\mathbb{K}_1$ stets ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}_2$ ist.

Die umfangsstetigen Abbildungen nennen wir auch **Skalenmaße**; sie werden im folgenden Abschnitt ausführlich untersucht. Dual wird erklärt, wann eine

Abbildung $\beta : M \to N$ **inhaltsstetig** bzw. **inhaltsabgeschlossen** ist. Ein Abbildungspaar $(\alpha, \beta) : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ heißt

- **inzidenzerhaltend**, falls für alle $g \in G, m \in M$

$$gIm \Rightarrow \alpha(g)J\beta(m)$$

- **inzidenzreflektierend**, falls für alle $g \in G, m \in M$

$$gIm \Leftarrow \alpha(g)J\beta(m)$$

- **stetig**, falls α umfangsstetig und β inhaltsstetig ist
- **begriffserhaltend**, wenn für jeden Begriff $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ das Paar $(\beta(B)', \alpha(A)')$ ein Begriff von $\mathbb{K}_2$ ist, und
- **begriffstreu**, wenn es zugleich begriffserhaltend und stetig ist.

$\Diamond$

Auch wenn (α, β) inzidenzerhaltend und -reflektierend ist, brauchen die beiden Abbildungen nicht injektiv zu sein. Allerdings folgt dann aus $\alpha(g) = \alpha(h)$, daß $g' = h'$ gilt und dual; eine solche Abbildung ist also „injektiv bis auf Bereinigen".

Es folgt aus Hilfssatz 33 (S. 99), daß den inzidenzerhaltenden Abbildungen gewisse ordnungserhaltende Abbildungen zwischen den Begriffsverbänden entsprechen. Begriffserhaltende Abbildungen sind zwangsläufig inzidenzerhaltend; dabei ist die in der Definition angegebene Abbildung ordnungserhaltend. Diese Abbildungen brauchen aber keine Verbandshomomorphismen zu sein. Anders im Fall begriffstreuer Abbildungen:

Satz 52. *Ist $(\alpha, \beta) : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ eine begriffstreue Abbildung, dann ist*

$$(A, B) \mapsto (\beta(A)', \alpha(A)')$$

ein Vollhomomorphismus von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_1)$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_2)$.

Ein Vollhomomorphismus ist genau dann durch eine begriffstreue Abbildung induziert, wenn er Gegenstandsbegriffe auf Gegenstandsbegriffe und Merkmalbegriffe auf Merkmalbegriffe abbildet. $\square$

Erné hat diesen Satz bewiesen mit dem Ziel, Verbandshomomorphismen durch begriffstreue Abbildungen darzustellen; die im Satz gemachte Einschränkung verschwindet, wenn man die Verbände nur bis auf Isomorphie betrachtet: Nach dem Hauptsatz ist jeder Verband $\boldsymbol{V} \cong \underline{\mathfrak{B}}(V, V, \leq)$, und für diesen Kontext ist jeder Begriff ein Gegenstands- und ein Merkmalbegriff, und folglich jeder Vollhomomorphismus zwischen solchen Begriffsverbänden durch eine begriffstreue Abbildung induziert. Erné gibt auch eine einfache Charakterisierung der begriffstreuen Abbildungen, die wir noch anschließen:

Hilfssatz 111. *Eine inzidenzerhaltende Abbildung* $(\alpha, \beta) : (G, M, I) \to (H, N, J)$ *ist genau dann begriffstreu, wenn folgende Bedingung für alle* $h \in H$, $n \in N$ *erfüllt ist:*

$$(h, n) \notin J \quad \Rightarrow \quad \exists_{(g,m) \notin I}\, \alpha^{-1}(n') \subseteq m' \textit{ und } \beta^{-1}(h') \subseteq g'. \qquad \square$$

Die bisher behandelten Morphismenbegriffe für Kontexte haben den Nachteil, nicht alle Verbandshomomorphismen darzustellen, jedenfalls solange der Kontext nicht, wie oben beschrieben, gewechselt werden darf. Es hat verschiedene Versuche gegeben, diese Schwierigkeit durch die Einführung *mengenwertiger* Abbildungen zu überwinden. Wir wählen einen anderen Weg, über den diese Ergebnisse aber leicht erreicht werden können.

Die Frage nach einer Kontextbeschreibung für die $\bigvee$–Morphismen führt uns zurück auf den bereits im Zusammenhang mit den subdirekten Produkten untersuchten Begriff der *Bindung* von einem Kontext (G, M, I) zu einem Kontext (H, N, J). Darunter verstehen wir (Definition 69, S. 185) eine Relation $R \subseteq G \times N$ mit der Eigenschaft, daß die Menge g^R der mit einem Gegenstand $g \in G$ in Relation stehenden Elemente stets einen Inhalt von (H, N, J) und dual für jedes $n \in N$ die Menge n^R einen Umfang von (G, M, I) bildet. Um leichter an früher erzielte Ergebnisse anknüpfen zu können, modifizieren wir diese Definition noch, indem wir den Zielkontext dualisieren:

Definition 90. Eine **duale Bindung** von (G, M, I) zu (H, N, J) ist eine Bindung zwischen (G, M, I) und dem dualen Kontext zu (H, N, J), also eine Relation $R \subseteq G \times H$, für die gilt:

- für jeden Gegenstand $g \in G$ ist g^R ein Begriffsumfang von (H, N, J) und
- für jeden Gegenstand $h \in H$ ist h^R ein Begriffsumfang von (G, M, I).

$\Diamond$

Der Begriff der dualen Bindung ist symmetrisch: ist R eine duale Bindung von $\mathbb{K}_1$ zu $\mathbb{K}_2$, dann ist R^{-1} eine duale Bindung von $\mathbb{K}_2$ zu $\mathbb{K}_1$.

Satz 53. *Zu jeder dualen Bindung* $R \subseteq G \times H$ *wird durch*

$$\varphi_R(X, X^I) := (X^R, X^{RJ}), \qquad \psi_R(Y, Y^I) := (Y^R, Y^{RJ})$$

eine Galoisverbindung (φ_R, ψ_R) *zwischen* $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ *und* $\underline{\mathfrak{B}}(H, N, J)$ *definiert. Umgekehrt ist für jede Galoisverbindung* (φ, ψ)

$$R_{(\varphi,\psi)} := \{(g, h) \mid \gamma g \leq \psi\gamma h\} = \{(g, h) \mid \gamma h \leq \varphi\gamma g\}$$

eine duale Bindung, und es gilt

$$\varphi_{R_{(\varphi,\psi)}} = \varphi, \quad \psi_{R_{(\varphi,\psi)}} = \psi \quad \textit{sowie} \quad R_{(\varphi_R,\psi_R)} = R.$$

Beweis. Wegen $X \subseteq Y^R \iff Y \subseteq X^R$ kann Hilfssatz 4 (S. 12) herangezogen werden um nachzuweisen, daß (φ_R, ψ_R) Galoisverbindung ist. Der gleiche Hilfssatz zeigt auch, daß die beiden zur Definition von $R_{(\varphi,\psi)}$ angegebenen Mengen gleich sind. Deshalb ist für jedes $g \in G$ die Menge $g^{R_{(\varphi,\psi)}}$ gleich dem Umfang von $\varphi\gamma g$ und für $h \in H$ ist entsprechend $h^{R_{(\varphi,\psi)}}$ der Umfang von $\psi\gamma h$. Deshalb ist $R_{(\varphi,\psi)}$ eine duale Bindung.

Für jede duale Bindung R gilt $g^R = g^{IIR}$, denn für jeden Umfang U von (G, M, I) und damit für jede Menge der Form $U = h^R, h \in H$, gilt

$$g \in U \iff g'' \subseteq U.$$

Man hat dies auch für $R_{(\varphi,\psi)}$ und schließt deshalb

$$\begin{aligned}
\varphi_{R_{(\varphi,\psi)}}\gamma g &= \varphi_{R_{(\varphi,\psi)}}(g'', g') \\
&= (g''^{R_{(\varphi,\psi)}}, \ldots) \\
&= (g^{R_{(\varphi,\psi)}}, \ldots) \\
&= (\{h \mid (g,h) \in R_{(\varphi,\psi)}\}, \cdots) \\
&= \bigvee\{\gamma h \mid (g,h) \in R_{(\varphi,\psi)}\} \\
&= \bigvee\{\gamma h \mid \gamma h \leq \varphi\gamma g\} \\
&= \varphi\gamma g \quad (\text{weil } \gamma(H) \bigvee\text{-dicht}),
\end{aligned}$$

und damit für einen beliebigen Begriff (X, X')

$$\begin{aligned}
\varphi(X, X') &= \varphi \bigvee_{g \in X} \gamma g \\
&= \bigwedge_{g \in X} \varphi\gamma g \qquad \text{(nach Hilfssatz 7 (S. 13))} \\
&= \bigwedge_{g \in X} \varphi_{R_{(\varphi,\psi)}}\gamma g \\
&= \varphi_{R_{(\varphi,\psi)}} \bigvee_{g \in X} \gamma g \\
&= \varphi_{R_{(\varphi,\psi)}}(X, X').
\end{aligned}$$

□

Die dualen Bindungen entsprechen also den Galoisverbindungen zwischen den Begriffsverbänden, und diese nach Hilfssatz 7 (S. 13) gewissen Morphismen. Macht man die Dualisierung wieder rückgängig, geht man also wieder zu einer Bindung über, dann wird die Bedingungen aus dem Hilfssatz handlicher: Man erhält dann, wie in Hilfssatz 9 (S. 15) beschrieben, ein residuiertes Abbildungspaar. Die beiden Abbildungen bestimmen sich gegenseitig, die eine ist ein $\bigvee$-Morphismus, die andere ein $\bigwedge$-Morphismus. Dies ist im folgenden Korollar zusammengefaßt:

Korollar 112. *Zu jeder Bindung $R \subseteq G \times N$ zwischen Kontexten (G, M, I) und (H, N, J) wird durch*

$$\varphi_R(A, B) := (A^{RJ}, A^R)$$

ein $\bigvee$-Morphismus $\varphi_R : \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \to \underline{\mathfrak{B}}(H, N, J)$ definiert und durch

$$\psi_R(A, B) := (B^R, B^{RI})$$

ein $\bigwedge$-Morphismus $\psi_R : \underline{\mathfrak{B}}(H, N, J) \to \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$. Umgekehrt entsteht aus jedem $\bigvee$-Morphismus $\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \to \underline{\mathfrak{B}}(H, N, J)$ eine Bindung R_φ vermöge

$$R_\varphi := \{(g, n) \mid \varphi\gamma g \leq \mu n\}$$

und aus jedem $\bigwedge$-Morphismus $\psi : \underline{\mathfrak{B}}(H, N, J) \to \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ eine Bindung R^ψ vermöge

$$R^\psi := \{(g, n) \mid \gamma g \leq \psi\mu n\}.$$

Es gilt $R_\varphi = R^\psi$ genau dann, wenn ψ residual zu φ ist. □

Wir hatten in Hilfssatz 83 (S. 185) ein Produkt von Bindungen eingeführt. Man kann zeigen (und wir tun dies im folgenden Hilfssatz), daß dieses Produkt zur Hintereinanderausführung von $\bigwedge$-Morphismen korrespondiert. Wir verwenden dabei wieder die bei den Hilfssätzen 83 und 84 benutzten Bezeichungen.

Hilfssatz 113. *Ist J_{rs} eine Bindung von $\mathbb{K}_r$ zu $\mathbb{K}_s$ und ist J_{st} eine Bindung von $\mathbb{K}_s$ zu $\mathbb{K}_t$, dann gilt für die zugehörigen $\bigwedge$-Morphismen*

$$\psi_{J_{rs} \circ J_{st}} = \psi_{J_{rs}} \circ \psi_{J_{rs}}.$$

Beweis. Man hat

$$R^{\psi_{J_{rs}} \circ \psi_{J_{st}}} = \{(g, m) \mid \gamma g \leq \psi_{J_{rs}} \circ \psi_{J_{st}}(\mu m)\}$$

und es ist

$$\psi_{J_{st}}(\mu m) = (m^s, m^{ss}),$$
$$\psi_{J_{rs}}(m^s, m^{ss}) = (m^{ssr}, m^{ssrr}),$$

und deshalb

$$(g, m) \in R^{\psi_{J_{rs}} \circ \psi_{J_{st}}} \iff g \in m^{ssr} \iff (g, m) \in J_{rs} \circ J_{st}.$$ □

Vollhomomorphismen sind diejenigen Abbildungen, die sowohl $\bigvee$-Morphismen als auch $\bigwedge$-Morphismen sind. Aus dem obigen Korollar läßt sich deshalb auch eine Charakterisierung der Vollhomomorphismen ableiten:

Korollar 114. *Zu jedem Vollhomomorphismus*

$$\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I) \to \underline{\mathfrak{B}}(H,N,J)$$

wird durch

$$R := R_\varphi = \{(g,n) \mid \varphi\gamma g \leq \mu n\} \subseteq G \times N$$

eine Bindung von (G,M,I) zu (H,N,J) und durch

$$S := R^\varphi = \{(h,m) \mid \gamma h \leq \varphi\mu m\} \subseteq H \times M$$

eine Bindung von (H,N,J) zu (G,M,I) erklärt, und es gilt

$$A^{RJ} = B^S, \qquad B^{SJ} = A^R$$

für alle $(A,B) \in \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$.

Sind umgekehrt $R \subseteq G \times N$ und $S \subseteq H \times M$ Bindungen, die diese Bedingung erfüllen, dann ist durch

$$\varphi(A,B) := (B^S, A^R)$$

ein Vollhomomorphismus von $\underline{\mathfrak{B}}(G,M,I)$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(H,N,J)$ definiert. □

Korollar 114 zeigt also, daß sich Vollhomomorphismen zwischen Begriffsverbänden zufriedenstellend mittels geeigneter Bindungspaare zwischen den Kontexten beschreiben lassen. Man hat nun verschiedene Möglichkeiten, aus diesen Bindungen mengewertige Abbildungen zu machen. Beispielsweise kann man jedem Homomorphismus

	M	N
G	I	$R := R_\varphi$
H	$S := R^\varphi$	J

$$\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(G,M,I) \to \underline{\mathfrak{B}}(H,N,J)$$

Abbildungen

$$\alpha : G \to \mathfrak{P}(N), \quad \beta : M \to \mathfrak{P}(H)$$

zuordnen durch

$$\begin{aligned} \alpha g &:= g^R = \{n \mid \varphi\gamma g \leq \mu n\} \\ \beta m &:= m^S = \{h \mid \gamma h \leq \varphi\mu m\}. \end{aligned}$$

Den Homomorphismus φ rekonstruiert man aus (α,β) durch

$$\varphi(A,B) = (\bigcap_{m\in B} \beta m, \bigcap_{g\in A} \alpha g).$$

Es ist nicht schwierig, die Abbildungspaare, die auf diese Weise von Vollhomomorphismen herrühren, mit Hilfe der im Korollar 114 angegebenen Bedingungen zu charakterisieren.

Die symmetrische Situation in Korollar 114 läßt weitere Varianten zu. Man kann ja die Bindungen auch durch Abbildungen in der anderen Richtung, also $\alpha : H \to \mathfrak{P}(M)$, $\beta : N \to \mathfrak{P}(G)$ beschreiben, und so fort. Wir geben nur noch ein weiteres Beispiel dieser Art:

Hilfssatz 115. *Zu jedem Vollhomomorphismus*

$$\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) \to \underline{\mathfrak{B}}(H, N, J)$$

erhält man durch die Definition

$$g \in \alpha h :\Longleftrightarrow \gamma h \leq \varphi\gamma g, \quad m \in \beta n :\Longleftrightarrow \varphi\mu m \leq \mu n$$

ein Abbildungspaar

$$\alpha : H \to \mathfrak{P}(G), \quad \beta : N \to \mathfrak{P}(M)$$

mit

$$\varphi(A, B) = (\{h \in H \mid \alpha h \subseteq A\}, \{n \in N \mid \beta n \subseteq B\}).$$

Sind umgekehrt $\alpha : H \to \mathfrak{P}(G)$ und $\beta : N \to \mathfrak{P}(M)$ Abbildungen mit der Eigenschaft, daß für jeden Begriff $(A, B) \in \underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$

$$(\{h \in H \mid \alpha h \subseteq A\}, \{n \in N \mid \beta n \subseteq B\})$$

ein Begriff von (H, N, J) ist, dann ist die Abbildung

$$(A, B) \mapsto (\{h \in H \mid \alpha h \subseteq A\}, \{n \in N \mid \beta n \subseteq B\})$$

ein vollständiger Homomorphismus von $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(H, N, J)$. □

7.3 Skalenmaße

Definition 91. Sei $\mathbb{K} := (G, M, I)$ ein Kontext und $\mathbb{S} := (G_{\mathbb{S}}, M_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{S}})$ eine Skala. Eine Abbildung $\sigma : G \to G_{\mathbb{S}}$ wird ein $\mathbb{S}$-**Maß** genannt, wenn das Urbild $\sigma^{-1}(U)$ eines jeden Begriffsumfanges von $\mathbb{S}$ ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}$ ist. Ein $\mathbb{S}$-Maß σ heißt **voll**, wenn jeder Begriffsumfang von $\mathbb{K}$ auch das Urbild eines Begriffsumfanges von $\mathbb{S}$ ist. ◊

Zur Veranschaulichung dieser Definition denken wir uns einen neuen Kontext $\mathbb{K}_\sigma$, dessen Gegenstände die von $\mathbb{K}$ und dessen Merkmale die von $\mathbb{S}$ sind. In die g-Zeile dieses Kontextes tragen wir die $\sigma(g)$-Zeile der Skala ein. Formal definiert man also $\mathbb{K}_\sigma := (G, M_{\mathbb{S}}, I_\sigma)$ durch

$$gI_\sigma m :\Leftrightarrow \sigma(g)I_{\mathbb{S}}m.$$

Die Definition besagt nun, daß σ genau dann ein $\mathbb{S}$-Maß ist, wenn jeder Begriffsumfang von $\mathbb{K}_\sigma$ auch ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}$ ist; σ ist voll genau dann, wenn $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_\sigma$ die gleichen Begriffsumfänge haben.

Da der Kontext $\mathbb{K}_\sigma$ auf der gleichen Gegenstandsmenge definiert ist wie $\mathbb{K}$, kann man sich die beiden Kontexte zusammengefügt denken zur Apposition

$$\mathbb{K} \mid \mathbb{K}_\sigma \ ,$$

deren Begriffsumfänge die gleichen sind wie die von $\mathbb{K}$, sofern σ ein Maß ist. Auf diese Weise versteht man ein $\mathbb{S}$-Maß als die Möglichkeit, den gegebenen Kontext um Merkmale aus der Skala $\mathbb{S}$ zu erweitern, ohne daß sich die Begriffsumfänge ändern. σ ist voll, wenn die neuen Merkmale die alten entbehrlich machen.

Hilfssatz 116. *Für eine Abbildung $\sigma : G \to G_{\mathbb{S}}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *σ ist ein $\mathbb{S}$-Maß.*
2. *Für alle Teilmengen $A \subseteq G$ gilt $\sigma(A'') \subseteq \sigma(A)''$.*
3. *Für alle Teilmengen $A, B \subseteq G$ gilt $A \to B \Rightarrow \sigma(A) \to \sigma(B)$ (dabei ist, entsprechend §2.3, $A \to B$ eine Abkürzung für $B \subseteq A''$).*

σ ist genau dann voll, wenn in (3) auch die umgekehrte Implikation gilt.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Jedes Skalenmaß erfüllt die Bedingung (2), denn für jedes $A \subseteq G$ ist $\sigma^{-1}(\sigma(A)'')$ ein Umfang, der A und damit auch A'' enthält.
(2) $\Rightarrow$ (3): $A \to B \iff B \subseteq A'' \Rightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A'') \subseteq \sigma(A)'' \Rightarrow \sigma(A) \to \sigma(B)$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Ist U ein Umfang von $\mathbb{S}$ und g irgendein Gegenstand aus $(\sigma^{-1}(U))$, d.h. mit $\sigma^{-1}(U) \to g$, so folgt $U \to \sigma g$, also $\sigma g \in U$ und folglich $g \in \sigma^{-1}(U)$, diese Menge muß also ein Umfang von $\mathbb{K}$ sein.

σ ist genau dann voll, wenn für $A \subseteq G$ stets $A'' = \sigma^{-1}(\sigma(A)'')$ gilt; dies ist aber gleichbedeutend zu

$$g \in A'' \iff \sigma(g) \in \sigma(A)'',$$

also zu

$$A \to g \iff \sigma(A) \to \sigma g. \qquad \square$$

Die Definition des $\mathbb{S}$-Maßes braucht nicht wirklich für alle Begriffsumfänge überprüft zu werden. Es genügt, daß die Urbilder der Spaltenumfänge von $\mathbb{S}$ Begriffsumfänge von $\mathbb{K}$ sind (denn das Urbild eines Durchschnitts von Mengen ist der Durchschnitt der Urbilder). Ebenso ist ein $\mathbb{S}$-Maß schon dann voll, wenn jeder Spaltenumfang von $\mathbb{K}$ Urbild eines Begriffsumfangs von $\mathbb{S}$ ist. Nennen wir eine Teilmenge T der Merkmalmenge eines Kontextes $\mathbb{K}$ **dicht**, falls die Menge $\{\mu m \mid m \in T\}$ infimum-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist, so können wir auch folgendermaßen formulieren: Ein Skalenmaß ist genau dann voll, wenn die Menge

$$\{m \in M \mid m' \text{ ist Urbild eines Begriffsumfanges}\}$$

dicht ist.

Ein surjektives $\mathbb{S}$-Maß ist nicht automatisch voll. Tatsächlich kann jedes Skalenmaß σ durch ein surjektives ersetzt werden, wenn man zu einer Teilskala übergeht (unter einer **Teilskala** einer Skala $\mathbb{S}$ verstehen wir einen Teilkontext $(T, M_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{S}} \cap (T \times M_{\mathbb{S}}))$, wobei $T \subseteq G_{\mathbb{S}}$). Dies ist die Aussage des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 117. *Für jede Teilskala $(T, M_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{S}} \cap (T \times M_{\mathbb{S}}))$ von $\mathbb{S}$ ist die identische Abbildung ein volles $\mathbb{S}$-Maß. Für einen Kontext (G, M, I) ist $\sigma : G \to G_{\mathbb{S}}$ genau dann ein $\mathbb{S}$-Maß, wenn σ ein $(\sigma(G), M_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{S}} \cap (\sigma(G) \times M_{\mathbb{S}}))$-Maß ist.*

Beweis. Die Begriffsumfänge der Teilskala sind genau die Mengen der Form $U \cap \sigma(G)$, wobei U Begriffsumfang von $\mathbb{S}$ ist. □

Zu einem Skalenmaß σ erhalten wir zwei Abbildungen zwischen den Begriffsverbänden der beteiligten Kontexte $\mathbb{K}$ und $\mathbb{S}$, und zwar eine in jeder Richtung. Dies beschreiben die beiden folgenden Hilfssätze. Aus dem Umstand, daß die Mengenabbildung σ^{-1} durchschnitterhaltend ist, schließt man unmittelbar:

Hilfssatz 118. *Ist σ ein $\mathbb{S}$-Maß von $\mathbb{K}$, so wird durch*

$$(A, A') \mapsto (\sigma^{-1}(A), \sigma^{-1}(A)')$$

eine $\bigwedge$-erhaltende Abbildung von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{S})$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ definiert. Ist σ surjektiv, so ist diese Abbildung injektiv. □

(Wir bezeichnen diese Abbildung ebenfalls mit σ^{-1}.)

Mit anderen Worten: Ist σ ein $\mathbb{S}$-Maß, dann finden wir eine Kopie der Teilskala $(\sigma(G), M_{\mathbb{S}}, I_{\mathbb{S}} \cap (\sigma(G) \times M_{\mathbb{S}}))$ im System der Begriffsumfänge von $\mathbb{K}$ wieder.

Wir zeigen nun, daß jedem $\mathbb{S}$-Maß von $\mathbb{K}$ eindeutig eine $\bigvee$-erhaltende Abbildung von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{S})$ zugeordnet werden kann.

Hilfssatz 119. *Zu jedem $\mathbb{S}$-Maß σ von $\mathbb{K}$ wird durch*

$$\tilde{\sigma}(A, A') := (\sigma(A)'', \sigma(A)')$$

ein $\bigvee$-Morphismus

$$\tilde{\sigma} : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{S})$$

definiert. $\tilde{\sigma}$ bildet die Gegenstandsbegriffe von $\mathbb{K}$ auf Gegenstandsbegriffe von $\mathbb{S}$ ab. Ist $\mathbb{S}$ eine Skala, in der $g \neq h$ stets $g' \neq h'$ impliziert (für alle $g, h \in G_{\mathbb{S}}$), dann entsteht umgekehrt jede $\bigvee$-erhaltende Abbildung von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ nach $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{S})$ mit dieser Eigenschaft auf die angegebene Weise aus einem $\mathbb{S}$-Maß. σ und $\tilde{\sigma}$ bestimmen einander eindeutig. σ ist genau dann voll, wenn $\tilde{\sigma}$ injektiv ist.

Beweis. Sei ψ die zu σ^{-1} residuale Abbildung, und sei X ein Begriffsumfang von $\mathbb{K}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\psi(X, X') &= \bigwedge\{(Y'', Y') \mid X \subseteq \sigma^{-1}(Y'')\} \\
&= \bigwedge\{(Y'', Y') \mid \sigma(X) \subseteq Y''\} \\
&= \left(\bigcap\{Y'' \mid \sigma(X) \subseteq Y''\}, (\bigcap\{\ldots\})'\right) \\
&= (\sigma(X)'', \sigma(X)') = \tilde{\sigma}(X, X').
\end{aligned}$$

$\tilde{\sigma}$ ist also zu σ^{-1} residual und damit $\bigvee$-erhaltend.

Als nächstes zeigen wir, daß $\tilde{\sigma}$ Gegenstandsbegriffe auf Gegenstandsbegriffe abbildet: Sei $x \in G$ ein Gegenstand und $g := \sigma(x)$ das Bild von x in $G_{\mathbb{S}}$. $\sigma^{-1}(g'')$ ist ein Umfang von $\mathbb{K}$, der x und damit auch x'' enthält, also ist $\sigma(x'') \subseteq g''$, was $\sigma(x'')'' \subseteq g''$ nach sich zieht. Weil aber $g \in \sigma(x'')$ ist, muß Gleichheit gelten, also $\sigma(x'')'' = g''$, und damit $\tilde{\sigma}(x'', x') = (g'', g')$.

Es bleibt zu zeigen, daß jede $\bigvee$-erhaltende Abbildung, die Gegenstandsbegriffe auf Gegenstandsbegriffe abbildet, von einem Maß herrührt. Sei also ψ eine solche Abbildung, wir definieren dazu $\sigma : G \to G_{\mathbb{S}}$ durch

$$\sigma(x) = g \quad :\Leftrightarrow \quad \psi(x'', x') = (g'', g').$$

(Hier geht die Voraussetzung $g' = h' \Rightarrow g = h$ ein.) Man hat dann

$$\begin{aligned}
\psi(X, X') &= \psi(\bigvee\{(x'', x') \mid (x \in X\}) \\
&= \bigvee\{\psi(x'', x') \mid x \in X\} \\
&= \bigvee\{(\sigma(x)'', \sigma(x)') \mid x \in X\} \\
&= \left((\bigcup\{\sigma(x)'' \mid x \in X\})'', (\ldots)'\right) \\
&= (\sigma(X)'', \sigma(X)').
\end{aligned}$$

Jede solche Abbildung ist also durch ein Maß induziert.

Die übrigen Behauptungen folgen aus Hilfssatz 9 (S. 15). □

Definition 92. Sind $\mathbb{S}_1$ und $\mathbb{S}_2$ Skalen mit den gleichen Skalenwerten, also mit $G_{\mathbb{S}_1} = G_{\mathbb{S}_2}$, so nennen wir $\mathbb{S}_1$ **feiner** als $\mathbb{S}_2$, wenn jeder Umfang von $\mathbb{S}_2$ auch Umfang von $\mathbb{S}_1$ ist. $\mathbb{S}_2$ ist dann **gröber** als $\mathbb{S}_1$. $\mathbb{S}_1$ und $\mathbb{S}_2$ heißen **(Skalen-)äquivalent**, wenn es ein volles bijektives $\mathbb{S}_2$-Maß von $\mathbb{S}_1$ gibt. ◇

Ist σ ein bijektives volles Maß, so auch σ^{-1}. Die Äquivalenz von Skalen ist also symmetrisch. Da die Nacheinanderausführung von (vollen) Skalenmaßen wieder ein (volles) Skalenmaß ergibt, ist die Skalenäquivalenz wirklich eine Äquivalenzrelation. Ist $\mathbb{S}_1$ gleichzeitig feiner und gröber als $\mathbb{S}_2$, so sind die beiden Skalen äquivalent.

Die Möglichkeit, unterschiedlich fein skalieren zu können, kann man sehr praktisch bei der Datenanalyse nutzen. Daß $\mathbb{S}_1$ eine feinere Skala als $\mathbb{S}_2$ ist, bedeutet, daß sich $\mathbb{S}_1$ (bis auf Äquivalenz) als Apposition von $\mathbb{S}_2$ mit einem anderen Kontext schreiben läßt, beispielsweise ist dann $\mathbb{S}_1$ äquivalent zu $\mathbb{S}_2 \mid \mathbb{S}_1$. Dies überträgt sich bei der schlichten Skalierung auf den abgeleiteten einwertigen Kontext: Feineres Skalieren liefert einen feineren abgeleiteten Kontext; wird mit feineren Skalen skaliert, so hat der abgeleitete Kontext einfach „ein paar Spalten mehr", d.h. er kann als Apposition zweier Kontexte geschrieben werden, von denen der eine der abgeleitete Kontext bezüglich der gröberen Skalierung ist. Aus Abschnitt 2.2 wissen wir, daß der Begriffsverband einer Apposition geeignet durch ein gestuftes Liniendiagramm wiedergegeben werden kann, der Begriffsverband der gröberen Skalierung dient dann als Grobstruktur, die von den bei der feineren Skalierung hinzukommenden Merkmalen noch ausdifferenziert wird.

Dazu ein Beispiel: Häufig sind Befragungen so formuliert, daß Meinungen vorgestellt werden, zu denen die Befragten ihre Zustimmung oder Ablehnung äußern können; dazu wird eine Alternative mit Zwischenwerten angeboten, etwa in folgender Form:

stimme zu ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *stimme nicht zu*

In Abschnitt 1.4 haben wir die Interordinalskala für die Skalierung solcher Merkmale vorgeschlagen, gewöhnlich skaliert man aber zunächst gröber, z.B. mit der nebenstehenden **Schwellenwert-Skala**, bei der nur zwei Merkmale der Interordinalskala verwendet sind. Auf diese Weise verschafft man sich einen groben Eindruck von den Ergebnissen. Diese Vergröberung ist aber durchaus korrekt: Nach Hilfssatz 119 ist der so erhaltene Begriffsverband ein Bild (unter einem $\bigvee$-Morphismus) von dem Begriffsverband, der bei interordinaler Skalierung entsteht.

	≤ 2	≥ 6
1	×	
2	×	
3		
4		
5		
6		×
7		×

Auch die Skalen $\mathbb{N}_n$, $\mathbb{O}_n$ und $\mathbb{M}_{a,n-a}$ sind (äquivalent zu) Vergröberungen der Interordinalskala $\mathbb{I}_n$. Die feinste Skala mit n Werten ist die Kontranominalskala $\mathbb{N}_n^c$.

Um die Rolle der Skalenmaße bei der schlichten Skalierung zu beschreiben, machen wir uns zunächst klar, daß das in 1.4 eingeführte *Halbprodukt*

$$\mathop{\mathbb{X}}_{j\in J} \mathbb{S}_j := \left(\mathop{\times}_{j\in J} G_j, \bigcup_{j\in J} \dot{M}_j, \nabla \right)$$

mit

$$(g_j)_{j\in J} \nabla (k,m) :\Longleftrightarrow g_k I_k m$$

von Skalen auch Produkt im Sinne der Kategorientheorie ist, und zwar in der Kategorie der Skalen mit den Skalenmaßen als Morphismen. Dazu überzeugen wir uns, daß die Projektionen

$$\pi_k : \mathop{\times}_{j\in J} G_j \to G_k$$

$$\text{mit} \qquad \pi_k((g_j)_{j\in J}) := g_k$$

surjektive $\mathbb{S}_k$-Maße von $\mathbb{X}_{j\in J}\, \mathbb{S}_j$ sind. Außerdem muß noch gezeigt werden, daß die Produktabbildung ein Maß ist. Dann folgt die behauptete Eigenschaft aus dem Umstand, daß das Produkt in der Kategorie der Mengen das kartesische Produkt ist.

Definition 93. Ist $\mathbb{K}$ ein Kontext und ist für jedes $j \in J$ die Abbildung σ_j ein $\mathbb{S}_j$-Maß von $\mathbb{K}$, so wird das **Produktmaß**

$$\sigma : \mathbb{K} \to \bigtimes_{j \in J} \mathbb{S}_j$$

definiert durch

$$\sigma(g) := (\sigma_j(g))_{j \in J}. \qquad \Diamond$$

Hilfssatz 120. *Das Produktmaß σ ist ein $\bigtimes_{j\in J} \mathbb{S}_j$-Maß mit $\pi_k \circ \sigma = \sigma_k$.*

Beweis. Die Umfänge des Halbproduktes sind genau die Produkte $\bigtimes_{j\in J} U_j$ von Umfängen der Einzelskalen. Das Urbild eines solchen Umfanges bzgl. σ ergibt sich durch

$$\sigma^{-1}(\bigtimes_{j \in J} U_j) = \bigcap_{j \in J} \sigma_j^{-1}(U_j).$$

Die Urbilder unter σ sind also genau solche Teilmengen, die Durchschnitte von Urbildern unter den Maßen σ_j sind. Jede solche Menge ist ein Umfang von $\mathbb{K}$, σ ist also ein Skalenmaß. □

Man kann das Argument in diesem Beweis noch etwas verfeinern: Jeder Umfang ist ja Durchschnitt von Merkmalumfängen, die Urbilder von Umfängen der Produktskala unter σ sind also genau die Durchschnitte von Urbildern der Merkmalumfänge von $\mathbb{S}_j, j \in J$. Daraus erhält man folgende Beobachtung:

Hilfssatz 121. *Das Produktmaß ist genau dann voll, wenn die Menge der Begriffe der Form*

$$(\sigma_j^{-1}(m^{I_j}), (\sigma_j^{-1}(m^{I_j})'), j \in J, m \in M_j$$

infimum-dicht in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ ist. □

Sind alle Merkmale von $\mathbb{K}$ irreduzibel, so gilt: Genau dann ist das Produktmaß voll, wenn jeder Merkmalumfang von $\mathbb{K}$ Urbild eines Merkmalumfangs unter einem der Skalenmaße σ_j ist, d.h. wenn zu jedem Merkmal m von $\mathbb{K}$ ein $j \in J$ und ein Merkmal $m_j \in M_j$ existiert mit $m' = \sigma_j^{-1}(m_j^{I_j})$.

Den Begriff des Produktmaßes können wir abschließend benutzen, um eine alternative Definition des abgeleiteten Kontextes bezüglich der schlichten Skalierung zu geben:

Hilfssatz 122. *Sei (G, M, W, I) ein vollständiger mehrwertiger Kontext, und seien $\mathbb{S}_m$, $m \in M$, Skalen zu den Merkmalen aus M. Weiterhin sei $\mathbb{K}$ der abgeleitete Kontext bezüglich der schlichten Skalierung. Dann ist für jedes mehrwertige Merkmal $m \in M$ die Abbildung*

$$g \mapsto m(g)$$

ein $\mathbb{S}_m$-Maß von $\mathbb{K}$, und $\mathbb{K}$ ist isomorph zur Teilskala des Halbproduktes der $\mathbb{S}_m$, die das Bild des Produktmaßes dieser Abbildungen ist.

Der *Beweis* ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen. □

7.4 Meßbarkeitssätze

Hilfssatz 122 hat gezeigt, daß volle Skalenmaße in Halbprodukte von Skalen als eine Art von Umkehrung der schlichten Skalierung verstanden werden können. Wir können nun versuchen, abgeleitete Kontexte zu erkennen, also bei einem vorgelegten einwertigen Kontext die Frage zu entscheiden, ob er aus einem mehrwertigen durch Skalierung mit vorgegebenen Skalen entstanden sein kann. Gefragt wird also, welche Kontexte voll in ein Halbprodukt von Nominalskalen, Ordinalskalen etc. gemessen werden können, und gegebenenfalls, welche Größe das erforderliche Halbprodukt dazu haben muß. Hilfssatz 120 ist dabei sehr nützlich, denn mit seiner Hilfe kann das Problem aufgeteilt werden. Wir untersuchen deshalb zunächst, wie man erkennt, ob ein gegebener Kontext ein Maß in eine der Standardskalen zuläßt. Ist das der Fall, dann können einige der Merkmale des Kontextes zu einem mehrwertiges Merkmal (mit der gegebenen Skalierung) zusammengefaßt werden, und mehrfache Anwendung dieses Vorgehens führt nach Hilfssatz 120 schließlich zu einem vollen Maß in das Halbprodukt.

Da jedes Skalenmaß surjektiv auf eine Teilskala ist, ist es nützlich, die Teilskalen der Standardskalen zu kennen. In vielen Fällen gehören sie zur gleichen Skalenfamilie:

Hilfssatz 123. *Folgende Skalenfamilien haben die Eigenschaft, daß jede Teilskala einer Skala aus der Familie äquivalent ist zu einer Skala aus derselben Familie:*

a) Nominalskalen,
b) eindimensionale Ordinalskalen,
c) eindimensionale Interordinalskalen,
d) Multiordinalskalen,
e) Kontranominalskalen,
f) Kontraordinalskalen,
g) konvex-ordinale Skalen.

Der *Beweis* wird weggelassen. □

Satz 54. *Der Kontext* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *erlaubt genau dann ein surjektives* $\mathbb{S}$-*Maß für*

a) $\mathbb{S} = \mathbb{N}_n$, *wenn es eine Partition der Gegenstandsmenge* G *in* n *Begriffsumfänge gibt.*

b) $\mathbb{S} = \mathbb{O}_n$, *wenn es eine Kette* $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$ *von* n *nichtleeren Begriffsumfängen gibt.*

c) $\mathbb{S} = \mathbb{I}_n$, *wenn es eine Kette von* n *nichtleeren Begriffsumfängen von* $\mathbb{K}$ *gibt, deren Komplemente ebenfalls Begriffsumfänge sind.*

d) $\mathbb{S} = \mathbb{M}_{n_1,\ldots,n_k}$, *wenn es* k *Ketten aus jeweils* n_i *nichtleeren Begriffsumfängen gibt, deren größte Elemente eine Partition von* G *bilden.*

e) $\mathbb{S} = \mathbb{N}_n^c$, *wenn es eine Partition von* G *in* n *Begriffsumfänge gibt, deren Vereinigungen ebenfalls Begriffsumfänge sind.*

f) $\mathbb{S} = \mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}}$, *wenn es eine Menge* $\mathcal{P}$ *von Begriffsumfängen mit folgenden Eigenschaften gibt:*
- *Die Menge* $\mathcal{P}$*, geordnet durch die Mengeninklusion* $\subseteq$*, ist isomorph zu* $\mathbf{P}$.
- *Jede Vereinigung von Umfängen aus* $\mathcal{P}$ *ist ein Umfang.*
- *Zu jedem Gegenstand* $g \in G$ *gibt es einen größten Umfang* $U_g \in \mathcal{P}$*, der* g *nicht enthält.*
- $\mathcal{P} = \{U_g \mid g \in G\}$.

g) $\mathbb{S} = \mathbb{C}_{\mathbf{P}}$, *wenn es eine Menge* $\mathcal{P}$ *von Begriffsumfängen gibt, die die Bedingungen aus f) erfüllen und für die zusätzlich gilt:*
- *Die Komplemente von Umfängen aus* $\mathcal{P}$ *und die Vereinigungen solcher Komplemente sind ebenfalls Umfänge.*

Beweis. Aus Hilfssatz 118 wissen wir, daß $\mathbb{K}$ genau dann ein surjektives $\mathbb{S}$-Maß erlaubt, wenn es eine Familie $\mathcal{U}_{\mathbb{S}}$ von Umfängen von $\mathbb{K}$ und eine Abbildung $\sigma : G \longrightarrow G_{\mathbb{S}}$ gibt, so daß die (Merkmal-)Umfänge von $\mathbb{S}$ genau die Bilder von $\mathcal{U}_{\mathbb{S}}$ unter σ sind. In anderen Worten: Im System der Umfänge von $\mathbb{K}$ müssen die Merkmalumfänge einer Skala vorkommen, die nach Bereinigen isomorph zu $\mathbb{S}$ ist.

Damit sind a), b), c) und d) sofort klar. Um e) zu zeigen, überzeugt man sich zunächst, daß die komplementäre Nominalskala die angegebene Eigenschaft hat: Für jeden Skalenwert $g \in G_{\mathbb{S}}$ ist $\{g\}$ ein Umfang, aber auch $G_{\mathbb{S}} \setminus \{g\}$. Die Urbildmengen der Skalenwerte unter einem surjektiven $\mathbb{S}$-Maß bilden also eine Partition mit der im Hilfssatz angegebenen Eigenschaft. Es gilt aber auch die Umkehrung: Ist eine solche Partition gegeben, so ist eine Abbildung von G auf $G_{\mathbb{S}}$, die die Klassen der Partition auf die Werte der Skala abbildet, ein $\mathbb{S}$-Maß.

Für f) argumentiert man ähnlich: Die Umfänge einer Kontraordinalskala sind nach der Definition gerade die Ordnungsideale von $\mathbf{P}$, die Merkmalumfänge sind dabei genau die Komplemente von Hauptfiltern. Das System der Merkmalumfänge von $\mathbb{S} := \mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}}$ erfüllt also die in f) angegebenen Bedingungen, und auch die Urbilder unter einem $\mathbb{S}$-Maß tun es. Ist umgekehrt ein System solcher Umfänge eines Kontextes vorgegeben, und ist dabei φ der Ordnungsisomorphismus dieses Systems auf $\mathbf{P}$, so erhalten wir ein $\mathbb{S}$-Maß durch $\sigma(g) := \varphi(U_g)$ für alle $g \in G$. Unter diesen Voraussetzungen ist nämlich für jedes beliebige Skalenmerkmal $p \in \mathbf{P}$ das Urbild des Merkmalumfangs $\{x \in \mathbf{P} \mid x \not\geq p\}$ gleich

$$\sigma^{-1}(p') = \{g \mid \varphi(U_g) \not\geq p\} = \{g \mid U_g \not\supseteq U_{\bar{p}}\},$$

wobei $\bar{p}$ ein Gegenstand von $\mathbb{K}$ sei mit $\varphi(U_{\bar{p}}) = p$. Da U_g unter den ausgewählten Umfängen der größte ist, der g nicht enthält, ist $U_g \not\supseteq U_{\bar{p}}$ zu $g \in U_{\bar{p}}$ äquivalent, wir erhalten also

$$\sigma^{-1}(p') = \{g \mid U_g \not\supseteq U_{\bar{p}}\} = U_{\bar{p}}.$$

Das Urbild jedes Spaltenumfangs ist ein Umfang: σ ist ein Maß.

Zu g): Die konvex-ordinale Skala ist die Apposition zweier Kontraordinalskalen, ein $\mathbb{C}_\mathbf{P}$-Maß ist deshalb erst recht ein $\mathbb{O}^{cd}_\mathbf{P}$-Maß und muß deshalb die Bedingungen aus f) erfüllen. Die konvex-ordinale Skala erfüllt auch die bei g) zusätzlich geforderte Bedingung, die in diesem Spezialfall verlangt, daß die Vereinigungen von Hauptfiltern konvexe Mengen sind. Diese Bedingung ist also notwendig; zu zeigen ist noch, daß sie auch hinreichend ist.

Es sei also $\mathcal{P}$ ein System von Begriffsumfängen von $\mathbb{K}$, welches die Bedingungen aus f) erfüllt, und σ das im Beweis von f) konstruierte $\mathbb{O}^{cd}_\mathbf{P}$-Maß. Wir werden beweisen, daß unter der Zusatzbedingung dieselbe Abbildung σ auch ein $\mathbb{O}^{c}_\mathbf{P}$-Maß ist (woraus die Behauptung folgt). Dazu definieren wir ein Mengensystem $\mathcal{Q} := \{V_g \mid g \in G\}$ durch

$$V_g := \bigcup \{G \setminus U \mid U \in \mathcal{P}, g \in U\},$$

und zeigen, daß $\mathcal{Q}$ die unter f) angegebenen Bedingungen erfüllt, und zwar für die zu $\mathbf{P}$ duale Ordnung. Die Zusatzforderung in g) garantiert, daß jedes V_g und alle Vereinigungen solcher Mengen Umfänge sind. Nach der Definition ist außerdem

$$\begin{aligned} V_g \subseteq V_h \quad &\iff \quad \{U \in \mathcal{P} \mid g \in U\} \subseteq \{U \in \mathcal{P} \mid h \in U\} \\ &\iff \quad \{U \in \mathcal{P} \mid g \notin U\} \supseteq \{U \in \mathcal{P} \mid h \notin U\} \\ &\iff \quad \{U \in \mathcal{P} \mid U \subseteq U_g\} \supseteq \{U \in \mathcal{P} \mid U \subseteq U_h\} \\ &\iff \quad U_g \supseteq U_h. \end{aligned}$$

$\mathcal{Q}$ ist also ordnungsisomorph zu $\mathbf{P}^d$, und zwar mit dem Isomorphismus $\psi V_g := \varphi U_g$. Im Beweis von f) wurde gezeigt, daß dann die Abbildung $g \mapsto \psi V_g$ ein $\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}^d}$-Maß ist, woraus wegen $\sigma g = \varphi U_g = \psi V_g$ und wegen $\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}^d} = \mathbb{O}^{c}_{\mathbf{P}}$ alles weitere folgt. □

Nun können wir uns der eingangs gestellten Frage zuwenden: Es sei $\mathcal{S}$ eine Familie von Skalen, etwa die der Nominalskalen oder der Ordinalskalen. Wir wollen diejenigen abgeleiteten Kontexte charakterisieren, die aus mehrwertigen Kontexten entstehen können, wenn mit Skalen aus $\mathcal{S}$ schlicht skaliert wird. Nach Hilfssatz 121 sind dies genau die Kontexte, die zu einer Teilskala eines Halbproduktes von Skalen aus $\mathcal{S}$ äquivalent sind. Wir prägen dafür einen kürzeren Namen:

Definition 94. Es sei $\mathbb{K}$ ein Kontext und $\mathcal{S}$ eine Familie von Skalen. Wir sagen, $\mathbb{K}$ sei **voll $\mathcal{S}$-meßbar**, wenn $\mathbb{K}$ voll in ein Halbprodukt von Skalen aus $\mathcal{S}$ gemessen werden kann.

Ist $\mathcal{S}$ speziell die Familie der Nominalskalen, so sagen wir **voll nominal meßbar** statt „voll $\mathcal{S}$-meßbar“. Einen voll $\{\mathbb{N}_n\}$-meßbaren Kontext nennen wir **voll n-wertig nominal meßbar**, im Spezialfall $n = 2$ auch **voll dichotom meßbar**. ◊

Hilfssatz 124. *Für jede Familie $\mathcal{S}$ von Skalen gilt eine der folgenden Alternativen:*

1. *Jeder Kontext ist voll $\mathcal{S}$-meßbar.*
2. *Jeder voll $\mathcal{S}$-meßbare Kontext ist voll nominal meßbar.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß jeder Kontext $\mathbb{K}$ voll ordinal meßbar, ja sogar voll $\{\mathbb{O}_2\}$-meßbar ist. Dies folgt unmittelbar aus Hilfssatz 120: Definieren wir zu jedem Merkmal m von $\mathbb{K}$ ein $\mathbb{O}_2$-Maß σ_m durch

$$\sigma_m(g) := \begin{cases} 1 \text{ falls } gIm \\ 2 \text{ falls } g\not{I}m \end{cases},$$

so ist wegen $\sigma_m^{-1}(1) = m'$ das Produktmaß voll.

Wir haben bei dieser Argumentation nur benutzt, daß es in $\mathbb{O}_2$ zwei Gegenstände g, h gibt mit $g' \subset h'$ und $g' \neq h'$, der Kontext also nicht **atomistisch** ist im Sinne der Definition auf Seite 47. Alternative 1 tritt also nur dann nicht ein, wenn alle Skalen in $\mathcal{S}$ atomistisch sind. Es ist deshalb nur noch zu zeigen, daß jede atomistische Skala selbst voll nominal meßbar ist. Das folgt aus Hilfssatz 125 unten. □

Begriffsverbände atomistischer Kontexte sind atomistisch, und jeder atomistische vollständige Verband ist isomorph zum Begriffsverband eines atomistischen Kontextes. Die Kontexteigenschaft „atomistisch" bedeutet gerade, daß die Umfänge der Gegenstandsbegriffe eine Partition der Gegenstandsmenge bilden. Sie überträgt sich auf Halbprodukte und auf die Urbilder unter vollen Skalenmaßen: Ein Kontext, der voll in ein Halbprodukt atomistischer Skalen gemessen werden kann, muß selbst atomistisch sein. Ein reduzierter Kontext ist genau dann atomistisch, wenn aus $g\not{I}m$ stets $g \swarrow m$ folgt.

Definition 95. Ein Begriffsumfang U eines Kontextes $\mathbb{K} = (G, M, I)$ heißt **n-valent**, wenn $G \setminus U$ die disjunkte Vereinigung von $n-1$, aber nicht von weniger Begriffsumfängen ist. Ist $\mathbb{K}$ atomistisch, so hat jeder Umfang eine Valenz, wir definieren dann die Valenz einer Menge von Umfängen als das Supremum der beteiligten Valenzen. Die **Merkmal-Valenz** $V_M(\mathbb{K})$ eines atomistischen Kontextes ist die Valenz der Menge der Merkmalumfänge, sofern $\mathbb{K}$ reduziert ist. Im allgemeinen Fall sagen wir, ein atomistischer Kontext $\mathbb{K}$ habe Merkmal-Valenz $V_M(\mathbb{K}) \leq n$ genau dann, wenn es eine infimum-dichte Menge von Begriffen von $\mathbb{K}$ gibt, deren Umfänge alle Valenz $\leq n$ haben. ◊

Hilfssatz 125. *Ein Kontext ist genau dann voll n-wertig nominal meßbar, wenn er Merkmal-Valenz $\leq n$ hat. Jeder atomistische Kontext ist voll nominal meßbar.*

Beweis. Jedes $\mathbb{N}_n$-Maß von $\mathbb{K}$ induziert eine Partition der Gegenstandsmenge in nicht mehr als n Begriffsumfänge, alle diese Begriffsumfänge haben also Valenz $\leq n$. Nach Hilfssatz 120 finden wir also zu jedem vollen Maß in ein Halbprodukt von $\mathbb{N}_n$-Skalen eine infimum-dichte Menge von Begriffen, deren

Umfänge sämtlich von Valenz $\leq n$ sind. Besitzt $\mathbb{K}$ andererseits eine solche Menge von Begriffen, so kann, mit dem gleichen Hilfssatz, ein Produktmaß mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert werden: Jeder Partition der Gegenstandsmenge in höchstens Klassen kann ein $\mathbb{N}_n$-Maß zugeordnet werden, indem man die Klassen der Umfangspartition jeweils auf verschiedene Gegenstände der Nominalskala abbildet.

Ein atomistischer Kontext (G, M, I) hat Merkmalvalenz $\leq |G|$, ist also sicher voll $\mathbb{N}_{|G|}$-meßbar. □

Welche „Meßbarkeitsklassen" es innerhalb der Klasse der atomistischen Skalen gibt, ist wenig untersucht. Eine erste Information erhält man, wenn man auch für Gegenstände $g \in G$ eine Valenz definiert: g hat **Valenz** n, wenn es $n-1$ Gegenstände $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ (aber nicht mehr) gibt mit der Eigenschaft, daß $g, g_1, \ldots, g_{n-1}$ paarweise den gleichen Begriff erzeugen: $\{g, g_1\}'' = \{g, g_2\}'' \ldots = \{g_1, g_2\}'' \ldots = \{g_{n-2}, g_{n-1}\}'' \neq g''$. $V_G(\mathbb{K})$ bezeichnet das Supremum der Valenzen von Gegenständen von $\mathbb{K}$.

Hilfssatz 126. *Besteht $\mathcal{S}$ aus atomistischen Skalen und ist n eine natürliche Zahl, so gilt: $\mathbb{N}_n$ ist genau dann voll $\mathcal{S}$-meßbar, wenn $\mathcal{S}$ eine Skala $\mathbb{S}$ der Gegenstandsvalenz $V_G(\mathbb{S}) \geq n$ enthält.*

Beweis. Jede $\bigvee$-erhaltende Abbildung von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{N}_n)$, $n > 2$, in einen Verband, welche nicht injektiv ist, bildet zwei Atome auf vergleichbare Elemente ab. Nach Hilfssatz 119 ist deshalb jedes nichttriviale Maß von $\mathbb{N}_n$, $n > 2$, in einen atomistischen Kontext injektiv und damit voll. Wird $\mathbb{N}_2$ voll in ein Halbprodukt atomistischer Skalen gemessen, dann muß wenigstens einer der Faktoren die beiden Gegenstände trennen, und man hat: Wenn $\mathbb{N}_n$ voll $\mathcal{S}$-meßbar ist, dann gibt es eine Skala $\mathbb{S} \in \mathcal{S}$, so daß $\mathbb{N}_n$ voll $\mathbb{S}$-meßbar ist. Wiederum nach Hilfssatz 119 gibt es dann eine $\bigvee$-Einbettung von $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{N}_n)$ in $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{S})$, bei der Gegenstandsbegriffe auf Gegenstandsbegriffe abgebildet werden, $\mathbb{S}$ hat also Gegenstandsvalenz $\geq n$.

Umgekehrt findet man in einer Skala, die Gegenstandsvalenz $\geq n$ hat, auch einen Gegenstand der Valenz n und damit ein Maß, welches $\mathbb{N}_n$ injektiv und voll nach $\mathbb{S}$ abbildet. □

Aus den beiden letzten Hilfssätzen ziehen wir für einen Spezialfall eine einfache Konsequenz:

Hilfssatz 127. *Besteht $\mathcal{S}$ aus atomistischen Skalen der Merkmalvalenz $\leq n$ und enthält $\mathcal{S}$ eine Skala der Gegenstandsvalenz n ($n \in \mathbb{N}$), dann gilt: Ein Kontext $\mathbb{K}$ ist genau dann voll $\mathcal{S}$-meßbar, wenn er voll n-wertig nominal meßbar ist.* □

Dies genügt bereits, um sich einen Überblick über die Meßbarkeit bezüglich der atomistischen Standardskalen zu verschaffen. Man hat nämlich für alle $n \geq 2$

$$V_G(\mathbb{N}_n) = V_M(\mathbb{N}_n) = n,$$

$$V_G(\mathbb{I}_n) = V_M(\mathbb{I}_n) = 2,$$
$$V_G(\mathbb{N}_n^c) = V_M(\mathbb{N}_n^c) = 2.$$

Daraus ergibt sich:

Hilfssatz 128. *Für einen Kontext $\mathbb{K}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\mathbb{K}$ ist voll dichotom meßbar.*
2. *$\mathbb{K}$ ist voll interordinal meßbar.*
3. *$\mathbb{K}$ ist voll kontranominal meßbar.*

□

Der Hilfssatz erlaubt es auch, die Begriffsverbände von mehrwertigen Kontexten, die schlicht mit Elementarskalen skaliert sind, zu charakterisieren. Dazu benötigen wir noch eine Definition: Wir sagen, ein Element x eines atomistischen vollständigen Verbandes $\mathbf{V}$ habe **Valenz** $\leq n$, wenn es eine n-elementige Teilmenge T von V gibt, die x enthält und die die Eigenschaft hat, daß jedes Atom von V kleiner oder gleich genau einem Element von T ist. Hat im Spezialfall $n = 2$ die Menge $T = \{x, y\}$ die angegebene Eigenschaft, dann nennt man y ein **Pseudokomplement** zu x.

Satz 55. *Jeder vollständige Verband ist isomorph zum Begriffsverband eines ordinal skalierten mehrwertigen Kontextes.*
Ein vollständiger Verband ist genau dann isomorph zum Begriffsverband eines nominal skalierten vollständigen mehrwertigen Kontextes, wenn er atomistisch ist.
Ein vollständiger Verband ist genau dann isomorph zum Begriffsverband eines nominal skalierten vollständigen n-wertigen Kontextes, wenn er atomistisch ist und eine infimum-dichte Menge von Elementen der Valenz $\leq n$ enthält.

Im Spezialfall $n = 2$ erhalten wir:
Ein vollständiger Verband ist genau dann isomorph zum Begriffsverband eines nominal skalierten vollständigen 2-wertigen Kontextes, wenn er atomistisch ist und eine infimum-dichte Menge von Elementen mit Pseudokomplement enthält. Dies charakterisiert zugleich die Begriffsverbände interordinal skalierter mehrwertiger Kontexte und auch die Begriffsverbände komplementär nominal skalierter mehrwertiger Kontexte. □

7.5 Literatur und Hinweise

Zu 7.1 Nicht nur Isomorphismen, sondern auch andere Abbildungsklassen sind als Begriffe darstellbar, das hat W. Xia [218] ausgearbeitet. Satz 51 stammt aus [61], vergleiche auch Ganter und Reuter [64].

Zum gruppentheoretischen Hintergrund von Abbildung 7.1 findet man vieles bei Kerber ([97], insb. Kapitel 3).

Zu 7.2 Definition 89 folgt - mit kleinen Modifikationen- der Arbeit [51] von Erné, aus der auch Satz 52 und Hilfssatz 111 stammen und die viele zusätzliche Informationen zu diesem Thema enthält. Der Frage, wieweit sich Verbandsmorphismen derart Kontextabbildungen gegenüberstellen lassen, daß eine Dualität entsteht, ist auch G. Hartung [86] nachgegangen.

Zu 7.3 Begriffliche Skalen und begriffliches Messen sind erstmals in [65] besprochen. Viele Ergebnisse des Abschnittes finden sich in anderer Formulierung in Büchern wie dem von Blyth und Janowitz [16]. Ansonsten werden hier und im folgenden Abschnitt Resultate aus [67] verwendet.

Zu 7.4 Es sei nochmals auf [67] verwiesen. Teile von Satz 55 sind bereits in [193] enthalten.

Literatur

1. W.W. Armstrong. Dependency structures of data base relationships. *IFIP Congress*, Geneva, Switzerland (1974), 580–583. (→ 81)
2. Kirby A. Baker and Rudolf Wille, editors. *Lattice theory and its applications.* Heldermann–Verlag, Berlin 1995.
3. Raymond Balbes and Philip Dwinger. *Distributive lattices.* University of Missouri Press 1974. (→ 220)
4. Philippe Baldy and Jutta Mitas. Generalized dimension of an ordered set and its MacNeille completion. *Order* 11, 1994, 135–148. (→ 245)
5. Bernhard Banaschewski. Hüllensysteme und Erweiterungen von Quasiordnungen. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* 2 (1956), 117–130. (→ 58, 245)
6. Bernhard Banaschewski und Günter Bruns. Categorical characterization of the MacNeille completion. *Arch. Math.* 18 (1967), 369–377. (→ 61)
7. Hans Jürgen Bandelt. Tolerance relations of lattices. *Bull. Austral. Math. Soc.* 23 (1981), 367–381. (→ 129, 182)
8. Marc Barbut. Note sur l'algèbre des techniques d'analyse hiérarchique. Appendice de: *L'analyse hiérarchique* (B. Matalon). Gautiers-Villars, Paris 1965, 125–146. (→ 58)
9. M. Barbut und Bernhard Monjardet. *Ordre et classification, Algèbre et Combinatoire.* 2 tomes. Paris, Hachette, 1970. (→ 58)
10. Georg Bartenschlager. *The interval doubling and the P-product construction for free bounded distributive lattices.* FB4–Preprint, TH Darmstadt, 1994. (→ 61, 218)
11. Georg Bartenschlager. Free bounded distributive lattices over finite ordered sets and their skeletons. *Acta Math. Univ. Comenianae* Vol. LXIV, 1(1995), 1–23. (→ 61)
12. M.K. Bennett und Garrett Birkhoff. The convexity lattice of a poset. *Order* 2 (1985), 223–242. (→ 61)
13. M.K. Bennett und Garrett Birkhoff. Two families of Newman lattices. *Algebra universalis* 32 (1994), 115ff. (→ 205)
14. Garrett Birkhoff. *Lattice Theory*, first edition. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 25, Providence, R.I. 1940. (→ 58)
15. Garrett Birkhoff. *Lattice Theory*, third edition. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 25, Providence, R.I. 1973. (→ 16)
16. T.S. Blyth and M.F. Janowitz. *Residuation theory.* Pergamon Press, New York, 1972. (→ 16, 272)
17. Jürgen Bokowski and Wolfgang Kollewe. On representing contexts in line arrangements. *Order*, 8 (1991), 393–403. (→ 95)
18. Hans-Herrmann Bock, editor. *Classification and related methods of data analysis.* North–Holland, Amsterdam, 1988.
19. Hans-Herrmann Bock and P. Ihm, editors. *Classification, data analysis, and knowledge organization.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1991.

20. Hans-Herrmann Bock, W. Lenski, and M. M. Richter, editors. *Information systems and data analysis.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1994.
21. Hans-Herrmann Bock, Wolfgang Polasek, editors. *Data analysis and information systems.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1996.
22. J. P. Bordat. Calcul pratique du treillis de Galois d'une correspondance. *Math. Sci. Hum.* 96 (1986), 31–47. (→ 94)
23. A. Bouchet. *Etude combinatoire des ensembles ordonnés finis.* Thèse de Doctorat D'Etat, Université de Grenoble, 1971. (→ 245)
24. Peter Burmeister. Merkmalimplikationen bei unvollständigem Wissen. In [113], 15–46. (→ 95)
25. A. Burusco Juandeaburre and R. Fuentes-Gonzalez. The study of the L-fuzzy concept lattice. *Mathware & Soft Computing* 3 (1994), 209–218. (→ 59)
26. E.F. Codd. A relational model for large shared data banks. *Comm. ACM* 13.6 (1970), 377–387. (→ 60)
27. O. Cogis. *Le dimension Ferrers des Graphs orientés.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université Curie, Paris 1980. (→ 245)
28. O. Cogis. On the Ferrers dimension of a digraph. *Discrete Math.* 38 (1982), 47–52. (→ 245)
29. Peter Crawley and Robert P. Dilworth. *Algebraic Theory of Lattices.* Prentice Hall, Englewood Cliffs 1973. (→ 16, 244, 245)
30. Gabor Czedli. Factor lattices by tolerances. *Acta Sci. Math. Szeged* 44 (1982), 35–42. (→ 129)
31. Brian A. Davey and Hilary Priestley. *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge University Press, 1990. (→ 16)
32. Alan Day. A simple solution to the word problem for lattices. *Canad. Math. Bull.* 13 (1970), 253–254. (→ 218)
33. Alan Day. Characterizations of lattices that are bounded-homomorphic images or sublattices of free lattices. *Canadian J. Math.* 31 (1979), 69–78. (→ 60, 218, 245)
34. Alan Day and Christian Herrmann. Gluings of modular lattices. *Order* 5 (1988), 85 - 101. (→ 182)
35. Alan Day, James B. Nation, and S. Tschantz. Doubling convex sets in lattices and a generalized semidistributivity condition. *Order* 6 (1989), 175 - 180. (→ 218, 245)
36. P. O. Degens, H.-J. Hermes und O. Opitz, Hrsg. *Die Klassifikation und ihr Umfeld.* Indeks–Verlag, Frankfurt, 1986.
37. Konrad Deiters. *Komplementäre Kontexte von Verbänden.* Diplomarbeit, Hannover 1993. (→ 60)
38. Konrad Deiters and Marcel Erné. *Negations and contrapositions of complete lattices.* To appear. (→ 60)
39. Edwin Diday. *Introduction a l'approche symbolique en analyse de données.* Journées symbolique/numérique. Paris 9-Dauphine, 1987. (→ 59)
40. Robert P. Dilworth. Lattices with unique irreducible decompositions. *Ann. Math.* 41 (1940), 771–777. (→ 245)
41. J.P. Doignon, A. Ducamp, and J.C. Falmagne. On realizable biorders and the biorder dimension of a relation. *Journal of Math. Psychology* 28 (1984), 73–109. (→ 245)
42. Gernot Dorn, Rolf-Dieter Frank, Bernhard Ganter, Uwe Kipke, Werner Poguntke und Rudolf Wille. Forschung und Mathematisierung — Suche nach Wegen aus dem Elfenbeinturm. In *Berichte der AG Mathematisierung* 3, GH Kassel, 1982, 228–240. Auch in *Wechselwirkung* 15 (1982), 20–23. (→ 58)

43. D. Dorninger, G. Eigenthaler, H. K. Kaiser, and W. B. Müller, editors. *Contributions to general algebra*, volume 7. Hölder–Pichler–Tempsky, Wien, 1991.
44. Dwight Duffus and Ivan Rival. Crowns in dismantlable partially ordered sets. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* 18 (1976), 271–292. (→ 128)
45. Vincent Duquenne. Contextual implications between attributes and some properties of finite lattices. In [68], 213–239. (→ 95)
46. Paul H. Edelman. Meet-distributive lattices and the anti-exchange closure. *Algebra universalis* 10 (1980), 290–299. (→ 245)
47. Marcel Erné. *Einführung in die Ordnungstheorie.* B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1982 (→ 16)
48. Marcel Erné. Distributive laws for concept lattices. *Algebra universalis* 30 (1993), 538–580. (→ 244)
49. Marcel Erné. Tensor products of contexts and complete lattices. *Algebra universalis* 31 (1994), 36–65. (→ 61)
50. Marcel Erné. The Dedekind-MacNeille completion as a reflector. *Order* 8 (1991), 159–174. (→ 182)
51. Marcel Erné. *Categories of contexts.* Preprint. (→ 272)
52. Ulrich Faigle and Christian Herrmann. Projective geometry on partially ordered sets. *Transactions Amer. Math. Soc.* 266 (1981), 319–332. (→ 244)
53. Jonathan David Farley. The uniqueness of the core. *Order* 10 (1993), 129–131. (→ 129)
54. G. Fay. *An algorithm for finite Galois connections.* Technical report. Institute for Industrial Economy, Budapest 1973. (→ 94)
55. Sigrid Flath. *Congruence relations of multinomial lattices.* FB4–Preprint, TH Darmstadt, 1994. (→ 61)
56. Sigrid Flath. *A representation of multinomial lattices.* FB4–Preprint, TH Darmstadt, 1994. (→ 61)
57. Sigrid Flath. The order dimension of multinomial lattices. *Order* 10 (1993), 201–219. (→ 61)
58. Bernhard Ganter. *Two basic algorithms in concept analysis.* FB4–Preprint No 831, TH Darmstadt, 1984. (→ 94)
59. Bernhard Ganter. Algorithmen zur Formalen Begriffsanalyse. In [68], 241–254. (→ 94)
60. Bernhard Ganter. Composition and decomposition in formal concept analysis. In [18], 561–566. (→ 60)
61. Bernhard Ganter. Finding closed sets under symmetry. FB4–Preprint 1307, TH Darmstadt, 1990. (→ 94, 271)
62. Bernhard Ganter. Lattice theory and Formal Concept Analysis: a subjective introduction. In [2], 79–90. (→ 114)
63. Bernhard Ganter, Peter Nevermann, Klaus Reuter, and Jürgen Stahl. How small can a lattice of order–dimension n be? *Order* 3 (1987), 345–353. (→ 245)
64. Bernhard Ganter and Klaus Reuter. Finding all closed sets: a general approach. *Order* 8 (1991), 283–290. (→ 94, 271)
65. Bernhard Ganter, Jürgen Stahl, and Rudolf Wille. Conceptual measurement and many–valued contexts. In [70], 169–176. (→ 272)
66. Bernhard Ganter and Rudolf Wille. Implikationen und Abhängigkeiten zwischen Merkmalen. In [36], 171–185. (→ 95)
67. Bernhard Ganter and Rudolf Wille. Conceptual scaling. In: Fred S. Roberts, editor, *Applications of combinatorics and graph theory to the biological and social sciences.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelber–New York, 1989, 139–167. (→ 60, 95, 272)

68. Bernhard Ganter, Rudolf Wille, and Karl Erich Wolff (Hrsg.). *Beiträge zur Begriffsanalyse.* B. I.–Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1987.
69. Bernhard Ganter and Rudolf Wille. *Subtensorial decomposition of complete lattices.* Preprint TU Dresden 1994. (→ 182)
70. W. Gaul and M. Schader, editors. *Classification as a tool of research.* North–Holland, Amsterdam, 1986.
71. Udo Gepperth. *Automatisches Zeichnen begriffsanalytischer Liniendiagramme unter Verwendung flußalgorithmischer Berechnungen von Merkmalsketten.* Diplomarbeit, FH Darmstadt, 1990. (→ 94)
72. Winfried Geyer. Generalizing semidistributivity. *Order* 10 (1993), 77–92. (→ 245)
73. Winfried Geyer. On context patterns associated with concept lattices. *Order* 10 (1993), 363–373. (→ 60)
74. Winfried Geyer. The generalized doubling construction and formal concept analysis. *Algebra universalis* 32 (1994), 341–367. (→ 218)
75. Winfried Geyer. On Tamari lattices. *Discrete Mathematics*, to appear. (→ 205, 218)
76. J.-L. Guigues and Vincent Duquenne. Familles minimales d'implications informatives resultant d'un tableau de donnèes binaires. *Math. Sci. Humaines* 95 (1986), 5–18. (→ 83, 95)
77. George Grätzer. *General lattice theory.* Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1978. (→ 16, 60)
78. George Grätzer. The complete congruence lattice of a complete lattice. In: *Lattices, Semigroups, and Universal Algebra (Lisbon 1988).* Plenum, New York / London 1990, 81–88. (→ 128)
79. R.J. Greechie. *On generating pathological orthomodular structures.* KSU Technical report No. 13, April 1970. (→ 218)
80. Curtis Green und G. Markowski. *A combinatorial test for local distributivity.* I.B.M. technical report No. RC5129, 1974. (→ 245)
81. Alain Guenoché. Construction du treillis de Galois d'une relation binaire. *Math. Sci. Humaines* 109 (1990), 41–53. (→ 94)
82. Sigrid Gürgens. *Ideal-Filter-Verklebung von Verbänden.* Dissertation, TH Darmstadt, 1992. (→ 218)
83. Gerd Hartung. *Darstellung beschränkter Verbände als Verbände offener Begriffe.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1989. (→ 59)
84. Gerd Hartung. Sublattices of topologically represented lattices. *Acta Math. Univ. Comenianae* Vol. LXIV, 1(1995), 25–41. (→ 59)
85. Gerd Hartung. A topological representation of lattices. *Algebra universalis*, 29 (1992),273–299. (→ 59)
86. Gerd Hartung. An extended duality for lattices. In K. Denecke and H.-J. Vogel, editors, *General algebra and applications*, Heldermann–Verlag, Berlin (1993) 126–142. (→ 272)
87. Christian Herrmann. *S*-verklebte Summen von Verbänden. *Math. Z.* 130 (1973), 255 - 274. (→ 182)
88. Sigrid Hoch. *Begriffsverbände mit Anti-Endomorphismus.* Dissertation, TH Darmstadt, 1989. (→ 59)
89. S. Huang and D. Tamari. Problems of associativity: a simple proof for the lattice property of systems ordered by a semi-associative law. *Journal of Combinatorial Theory (A)* 13 (1972), 7-13. (→ 218)
90. Robert E. Jamison. Copoints in antimatroïds. *Congr. Num.* 29, 535–544. (→ 245)

91. Melvin F. Janowitz and Rudolf Wille. On the clasification of monotone-equivariant cluster methods. In: I.J. Cox, P. Hansen, B. Jolesz, editors, Partitioning data sets. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995, 117–141. (→ 61)
92. Bjarni Jónsson and James E. Kiefer. Finite sublattices of a free lattice. *Canad. J. Math.* 14 (1962), 487–497. (→ 245)
93. H. Jürgensen and J. Loewer. Drawing Hasse diagrams of partially ordered sets. In [94], 331–345. (→ 148)
94. Gudrun Kalmbach. *Orthomodular lattices.* Academic Press, London 1983. (→ 182)
95. Manfred Kark. *Interaktives Zeichnen geometrischer Darstellungen von Begriffsverbänden.* Diplomarbeit, FH Darmstadt, 1989. (→ 95)
96. Robert E. Kent. *Rough concept analysis.* Preprint. (→ 59)
97. Adalbert Kerber. *Algebraic combinatorics via finite group actions.* B. I.–Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1991. (→ 271)
98. Uwe Kipke and Rudolf Wille. Formale Begriffsanalyse erläutert an einem Wortfeld. *LDV-Forum*, 5 (1987), 31–36. (→ 94)
99. Daniel J. Kleitman. Extremal properties of collections of subsets containing no two sets in their union. *Journal of Combinatorial Theory,* Vol. 20 (1976), 390-392. (→ 60)
100. Udo Klotz and Astrid Mann. *Begriffexploration.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1988. (→ 95)
101. Sigrid Knecht and Rudolf Wille. Congruence lattices of finite lattices as concept lattices. In J. Almeida, G. H. Bordalo, and P. Dwinger, editors, *Lattices, semigroups, and universal algebra.* Plenum Press, New York–London (1990), 323–325. (→ 128)
102. Wolfgang Kollewe. Representation of data by pseudoline arrangements. In [134], 113–122. (→ 95)
103. Wolfgang Kollewe, Martin Skorsky, Frank Vogt, Rudolf Wille. TOSCANA - ein Werkzeug zur begrifflichen Analyse und Erkundung von Daten. In [215], 267 - 288. (→ 94)
104. Mathieu Koppen. On finding the bidimension of a relation. *Journal of Math. Psychology* 31.2 (1987), 155–178. (→ 245)
105. David. H. Krantz, R. Duncan Luce, Patrick Suppes, Amos Tversky. *Foundations of measurement.* Vol. 1, 2, 3. Academic Press, New York, 1971, 1989, 1990. (→ 60)
106. Sabine Krolak-Schwerdt, P. Orlik und Bernhard Ganter. TRIPAT: a model for analyzing three-mode binary data. In [20], 298–307. (→ 94)
107. R. Kühn and M. Ries. *Methoden der Formalen Begriffsanalyse beim Aufbau kooperativer Information.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1988. (→ 94)
108. Fritz Lehmann and Rudolf Wille A triadic approach to Formal Concept Analysis. In: Gerard Ellis, Robert Levinson, William Rich, John F. Sowa, editors, *Conceptual structures: applications, implementation and theory.* Lecture Notes in Artificial Intelligence 954. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1995, 32–43. (→ 58)
109. Katja Lengnink. *Formale Begriffsanalyse von Ähnlichkeitsdaten.* Staatsexamensarbeit, TH Darmstadt, 1991. (→ 95)
110. Katja Lengnink. Diagrams of similarity lattices. In [134], 99–107. (→ 95)
111. Ingo Leonhard und Michaela Winterberg. *Begriffliches Clustern mit konvex-ordinalen Skalen.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1994. (→ 61)
112. Wilfried Lex. Eine Darstellung zur maschinellen Behandlung von Begriffen. In [68], 141–160. (→ 60)

113. Wilfried Lex, Hrsg. *Arbeitstagung Begriffsanalyse und Künstliche Intelligenz.* Informatik–Bericht 89/3, TU Clausthal, 1991.
114. Peter Luksch. Distributive lattices freely generated by an ordered set of width two. *Discrete Mathematics*, 88 (1991), 249–258. (→ 61)
115. Peter Luksch, Martin Skorsky, and Rudolf Wille. On drawing concept lattices with a computer. In [70], 269–274. (→ 94)
116. Peter Luksch and Rudolf Wille. Substitution decomposition of concept lattices. In G. Eigenthaler, H. K. Kaiser, W. B. Müller, and W. Nöbauer, editors, *Contributions to general algebra*, volume 5. Hölder–Pichler–Tempsky, Wien (1987), 213–220. (→ 182)
117. Peter Luksch and Rudolf Wille. Formal concept analysis of paired comparisons. In [18], 167–176. (→ 182)
118. Peter Luksch and Rudolf Wille. A mathematical model for conceptual knowledge systems. In [19], 156–162. (→ 59)
119. Michael Luxenburger. *Partielle Implikationen und partielle Abhängigkeiten zwischen Merkmalen.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1988. (→ 95)
120. Michael Luxenburger. Implications partielles dans un contexte. *Mathématiques, informatique et sciences humaines*, 113 (29e année):35–55, 1991. (→ 95)
121. Michael Luxenburger. *Implikationen, Abhängigkeiten und Galois–Abbildungen.* Dissertation, TH Darmstadt, 1993. Verlag Shaker. (→ 95)
122. H. M. MacNeille. Partially ordered sets. *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 42 (1937), 90–96. (→ 61)
123. David Maier. *The theory of relational data bases.* Computer Science Press, Rockville 1983. (→ 81, 95)
124. G. Markowsky. The factorization and representation of lattices. *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 203 (1975), 185–200. (→ 58)
125. G. Markowsky. *Combinatorial aspects of lattices theory with applications to the enumeration of free distributive lattices.* PhD-Thesis, Havard University, 1973. (→ 61)
126. G. Markowsky. The representation of posets and lattices by sets. *Algebra universalis* 11 (1980), 173–192. (→ 245)
127. R. Marty. Foliated semantic networks, facts, qualities. *Computers & mathematics with applications* 23 (1992). Reprinted in: Fritz Lehmann (ed.), *Semantic networks in artificial intelligence.* Pergamon Press, Oxford 1992. (→ 59)
128. Jutta Mitas. Interval orders based on arbitrary ordered sets. *Discrete Mathematics*, 144 (1995), 75–95. (→ 245)
129. Bernard Monjardet. A use for frequently rediscovering a concept. *Order* 1 (1985), 415–417. (→ 245)
130. Bernard Monjardet and Rudolf Wille. On finite lattices generated by their doubly irreducible elements. *Discrete Mathematics*, 73 (1988/89), 163–164. (→ 129)
131. D.G. Mowat. *A Galois problem for mappings.* PhD-Thesis, University of Waterloo, 1968. (→ 182)
132. James B. Nation. Finite sublattices of a free lattice. *Transactions of the American Math. Soc.* 269 (1), 1982, 311–337. (→ 218, 245)
133. Eugene M. Norris. An algorithm for computing the maximal rectangles in a binary relation. *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, Tome XXIII, No 2, Bucarest (1978), 243–250. (→ 94)
134. O. Opitz, B. Lausen, and R. Klar, editors. *Information and classification.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1993.
135. Zdzisław Pawlak. Rough concept analysis. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 33 (1985), 495–498. (→ 60)

136. Zdzisław Pawlak. *Rough sets.* Kluwer. Dordrecht–Boston 1991. (→ 59)
137. Richard S. Pierce. *Introduction to the theory of abstract algebras.* Holt, Rinehart and Winston, N.Y. 1968. (→ 181)
138. Vaughan Pratt. Chu spaces: Automata with quantum aspects. In: *Proc. workshop on physics and computation (PhysComp '94)*, Dallas, IEEE, 1994. (→ 60)
139. Uta Priss. The formalization of WordNet by methods of relational concept analysis. In: Christiane Fellbaum (ed.): *WordNet - An electronic lexical database and some of its applications*, MIT-Press, 1996. (→ 59)
140. G. N. Raney. A subdirect union representation for completely distributive complete lattices. *Proc. Amer. Math. Soc.* 4 (1953), 518–522. (→ 182, 244)
141. Stefan Reeg and Wolfgang Weiß. *Properties of finite lattices.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1990. (→ 95, 244)
142. Klaus Reuter. Counting formulas for glued lattices. *Order*, 1 (1985), 265–276. (→ 129)
143. Klaus Reuter. On the dimension of the product of order relations. *Order*, 6 (1989), 277–293. (→ 61, 245)
144. Klaus Reuter. On the order dimension of convex polytopes. *European Journal of Combinatorics*, 11 (1990), 57–63. (→ 245)
145. Klaus Reuter. The jump number and the lattice of maximal antichains. *Discrete Mathematics*, 88 (1991), 289–307. (→ 61)
146. Klaus Reuter and Rudolf Wille. Complete congruence relations of concept lattices. *Acta Sci. Math.*, 51 (1987), 319–327. (→ 128)
147. J. Riguet. Les relations de Ferrers. *C.R. Acad. Sci. Fr.*, 231 (1950), 936–937. (→ 245)
148. Fred S. Roberts. *Measurement Theory.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1979. (→ 86)
149. Anja Rusch and Rudolf Wille. *Knowledge Spaces and Formal Concept Analysis.* In [21], 427ff. (→ 95)
150. M. Schader, editor. *Analysing and modelling data and knowledge.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1992.
151. S. Schaffert. *Zerlegungssätze für symmetrische Kontexte.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1985. (→ 61, 61)
152. Patrick Scheich, Martin Skorsky, Frank Vogt, Cornelia Wachter, and Rudolf Wille. Conceptual data systems. In [134], 72–84. (→ 60)
153. Jürgen Schmidt. Zur Kennzeichnung der Dedekind-MacNeilleschen Hülle einer geordneten Menge. *Arch. Math.* 7 (1956), 241–249. (→ 58, 245)
154. Beate Schmidt. *Ein Zusammenhang zwischen Graphentheorie und Verbandstheorie.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1982. (→ 61)
155. Roland Schmidt. *Verbandstheoretische Analyse von Liniendiagrammen.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1988. (→ 245)
156. Dieter Schütt. *Abschätzungen für die Anzahl der Begriffe von Kontexten.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1987. (→ 94)
157. Z. Shmuely. The structure of Galois connections. *Pacific J. Math.* 3 (1974), 209–225. (→ 182)
158. Martin Skorsky. How to draw a concept lattice with parallelograms. In [204]. (→ 95, 245)
159. Martin Skorsky. *Endliche Verbände — Diagramme und Eigenschaften.* Disssertation, TH Darmstadt, 1992. Verlag Shaker. (→ 94, 244)
160. Norbert Spangenberg und Karl Erich Wolff. Interpretation von Mustern in Kontexten und Begriffsverbänden. *Actes 26e Séminaire Lotharingien de Combinatoire.* Publication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg 1991, 93–113. (→ 60)

161. Jürgen Stahl and Rudolf Wille. Preconcepts and set representation of contexts. In [70], 431–438. (→ 59, 245)
162. Jörg Stephan. *Substitution decomposition of lattices.* Dissertation, TH Darmstadt, 1991. (→ 182)
163. Jörg Stephan. Substitution products of lattices. In [43], 321–336. (→ 182)
164. Manfred Stern. *Semimodular lattices.* Teubner, Stuttgart-Leipzig 1991. (→ 244)
165. Birgit Stöhr and Rudolf Wille. Formal concept analysis of data with tolerances. In [150], 117–127. (→ 95)
166. Selma Strahringer. Direct products of convex–ordinal scales. *Order* 11 (1994), 361–383. (→ 61, 218)
167. Selma Strahringer. Dimensionality of ordinal structures. *Discrete Mathematics* 144 (1995), 97–117. (→ 61)
168. Selma Strahringer and Rudolf Wille. Convexity in ordinal data. In [19], 113–120. (→ 61)
169. Selma Strahringer and Rudolf Wille. Towards a structure theory for ordinal data. In [150], 129–139. (→ 61)
170. Selma Strahringer and Rudolf Wille. Conceptual clustering via convex–ordinal structures. In [134], 85–98. (→ 61)
171. Gerd Stumme. Distributive concept exploration – a tool for knowledge acquisition in formal concept analysis. To appear. (→ 95)
172. Gerd Stumme. Attribute exploration with background implications and exceptions. In [21], 457ff. (→ 95)
173. Gerd Stumme und Rudolf Wille. A geometric heuristic for drawing concept lattices. In: R. Tamassia and I.G. Tollis (eds.). *Graph drawing.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1993, 85–98. (→ 95)
174. Viola Takàcs. *Two applications of Galois graphs in pedagogical research.* Manuscript of a lecture given at TH Darmstadt, Feb. 8, 1984, 60 p. (→ 59)
175. D. Tamari. The algebra of bracketings and their enumeration. *Nieuw Arch. Wiskunde* III. Ser. 10 (1962), 193–206. (→ 205, 218)
176. S. K. Teo. Representing finite lattices as complete congruence lattices of complete lattices. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 33(1990), 177–182. (→ 128)
177. Stefan Thiele. *Ordnungsdiagramme der Begriffsverbände von Skalenprodukten.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1991. (→ 51, 218, 211, 218)
178. Silke Umbreit. *Formale Begriffsanalyse mit unscharfen Begriffen.* Dissertation, Universität Halle 1994. (→ 58, 95)
179. Frank Vogt. *Bialgebraic contexts for finite distributive lattices.* FB4–Preprint 1548, TH Darmstadt, 1993. (→ 59)
180. Frank Vogt. Subgroup lattices of finite Abelian groups: structure and cardinality. In: [2], 241–259. (→ 59, 129, 182)
181. Frank Vogt. *Bialgebraic contexts.* Dissertation, TH Darmstadt, 1994. Verlag Shaker. (→ 59)
182. Frank Vogt. *Datenstrukturen und Algorithmen zur Formalen Begriffsanalyse: Eine C++-Klassenbibliothek.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1996. (→ 94)
183. Frank Vogt, Cornelia Wachter, and Rudolf Wille. Data analysis based on a conceptual file. In [19]. (→ 60)
184. Frank Vogt and Rudolf Wille. Ideas of algebraic concept analysis. In [20], 193–205. (→ 59)
185. A.G. Waterman. *Colloquium lecture at McMaster 1966.* Unveröffentlicht, siehe [131]. (→ 182)

186. Thomas Weinheimer. *Merkmalsprodukte formaler Kontexte und ihre Begriffsverbände.* Diplomarbeit, TH Darmstadt, 1994. (→ 60)
187. Marcel Wild. *Covering order sublattices of Boolean lattices.* Preprint, 1991. (→ 245)
188. Marcel Wild. Implicational bases for finite closure systems. In [113], 147–170. (→ 95)
189. Marcel Wild. Optimal implicational bases for finite modular lattices. *Order*, to appear. (→ 95)
190. Marcel Wild. A theory of finite closure spaces based on implications. *Advances in Mathematics* 108.1 (1994), 118–134. (→ 95)
191. Rudolf Wille Subdirekte Produkte und konjunkte Summen. *J. reine u. angewandte Math.* 239/240 (1970), 333–338. (→ 218)
192. Rudolf Wille. Subdirekte Produkte vollständiger Verbände. *J. reine u. angewandte Math.* 283/284 (1976), 53–70. (→ 128, 218)
193. Rudolf Wille. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In Ivan Rival, editor, *Ordered sets*, Reidel, Dordrecht–Boston (1982), 445–470. (→ 58, 58, 60, 95, 272)
194. Rudolf Wille. Subdirect decomposition of concept lattices. *Algebra Universalis*, 17 (1983), 275–287. (→ 60, 128, 181)
195. Rudolf Wille. Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme. In Hans-Herrmann Bock, editor, *Anwendungen der Klassifikation: Datenanalyse und numerische Klassifikation.* Indeks–Verlag, Frankfurt (1984), 32–51. Line diagrams of hierarchical concept systems (engl. Übersetzung). *Int. Classif.* **11** (1984), 77–86. (→ 128)
196. Rudolf Wille. Sur la fusion des contextes individuels. *Math. Sci. Hum.*, 85 (1984), 57–71. (→ 217)
197. Rudolf Wille. Complete tolerance relations of concept lattices. In G. Eigenthaler, H. K. Kaiser, W. B. Müller, and W. Nöbauer, editors, *Contributions to general algebra*, volume 3. Hölder–Pichler–Tempsky, Wien (1985), 397–415. (→ 129, 182)
198. Rudolf Wille. Finite distributive lattices as concept lattices. *Atti Inc. Logica Mathematica*, 2 (1985), 635–648. (→ 61, 216)
199. Rudolf Wille. Tensorial decomposition of concept lattices. *Order*, 2 (1985), 81–95. (→ 60, 61, 182, 244)
200. Rudolf Wille. Bedeutungen von Begriffsverbänden. In [68], 161–211. (→ 95, 128)
201. Rudolf Wille. Subdirect product construction of concept lattices. *Discrete Mathematics*, 63 (1987), 305–313. (→ 217)
202. Rudolf Wille. Dependencies of many valued attributes. In [18], 581–586. (→ 95, 218)
203. Rudolf Wille. Geometric representation of concept lattices. In Otto Opitz, editor, *Conceptual and numerical analysis of data.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1989), 239–255, (→ 95, 95)
204. Rudolf Wille, editor. *Klassifikation und Ordnung*, Frankfurt, 1989. Indeks–Verlag.
205. Rudolf Wille. Knowledge acquisition by methods of formal concept analysis. In E. Diday, editor, *Data analysis, learning symbolic and numeric knowledge.* Nova Science Publishers. New York–Budapest (1989) 365–380. (→ 95)
206. Rudolf Wille. Lattices in data analysis: how to draw them with a computer. In: Ivan Rival, editor, *Algorithms and order.* Kluwer, Dordrecht–Boston (1989), 33–58. (→ 94, 245)
207. Rudolf Wille. The skeleton of free distributive lattices. *Discrete Mathematics*, 88 (1991), 309–320. (→ 61)

208. Rudolf Wille. Tensor products of complete lattices as closure systems. In [43], 381–385. (→ 182, 182)
209. Rudolf Wille. Concept lattices and conceptual knowledge systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 23 (1992), 493–515. (→ 60, 94)
210. Rudolf Wille. Begriffliche Datensysteme als Werkzeug der Wissenskommunikation. In: H. H. Zimmermann, H.-D. Luckhardt und A. Schulz (Hrsg.): *Mensch und Maschine – Informationelle Schnittstellen der Kommunikation.* Universitätsverlag Konstanz, 1992, 63–73. (→ 94)
211. Rudolf Wille. Plädoyer für eine philosophische Grundlegung der Begrifflichen Wissensverarbeitung. In [215], 11–25. (→ 58)
212. Rudolf Wille. Begriffsdenken: Von der griechischen Philosophie bis zur Künstlichen Intelligenz heute. *Dilthey-Kastanie*, Ludwig-Georgs-Gymnasium Darmstadt 1995, 77–109. (→ 58)
213. Rudolf Wille. The basic theorem of triadic concept analysis. *Order* 12 (1995), 149–158. (→ 58)
214. Rudolf Wille. Restructuring mathematical logic: an approach based on Peirce's pragmatism. In: Aldo Ursini, Paolo Agliano, editors. *Logic and algebra.* Marcel Dekker, New York 1996. (→ 59)
215. Rudolf Wille und Monika Zickwolff (Hrsg.) *Begriffliche Wissensverarbeitung: Grundfragen und Aufgaben.* B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994.
216. Uta Wille. Eine Axiomatisierung bilinearer Kontexte. *Mitt. Math. Seminar Giessen* 200 (1991), 71–112. (→ 59)
217. Uta Wille. *Geometric representation of ordinal contexts.* Dissertation Univ. Giessen, 1995. (→ 59)
218. Weiqun Xia. *Morphismen als formale Begriffe, Darstellung und Erzeugung.* Dissertation, TH Darmstadt, 1993. Verlag Shaker. (→ 271)
219. T. Yanagimoto and M. Okamoto. Partial orderings of permutations and monotonicity of a rank correlation statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.* 21: 1969, 489–506. (→ 55)
220. Monika Zickwolff. Darstellung symmetrischer Strukturen durch Transversale. In [43], 391–403. (→ 253)
221. Monika Zickwolff. *Rule exploration: first order logic in formal concept analysis.* Dissertation, TH Darmstadt, 1991. (→ 95, 253)

Index