Mathématiques – Licence 1

Table des matières

1 Fondements

Axiome 1. *"Axiome d'extensionnalité"*

$$[\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F)] \Leftrightarrow (E = F)$$

Dit autrement : *« si le fait qu'un objet mathématique $\in E$ signifie qu'il $\in F$ aussi, et inversement, alors c'est que les ensembles E et F sont identiques ».*

Axiome 2. *"Existence de l'ensemble vide"*

$$\exists ! E \mid (\forall x,\ x \notin E)$$
$$\wedge$$
$$E = \varnothing$$

Dit autrement : *« Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\varnothing$ et il est unique compte tenu de l'axiome 1 (axiome d'extensionnalité) ».*

Axiome 3. *"Axiome du singleton"*

$$\forall a,\ \exists ! E \mid (E = \{a\})$$

Dit autrement : *« Pour tout objet mathématique, il exist un ensemble ne contenant que cet objet mathématique et cet ensemble est unique ».*

Dit autrement : *« Tout objet mathématique peut être wrappé dans un ensemble ».*

Axiome 4. *"Axiome de la paire"*

$$\forall a, b,\ \exists E \mid (E = \{a,\ b\})$$

Dit autrement : *« Pour tout couple d'objets mathématiques, il existe un ensemble qui les contient tous les deux exclusivement et qui est unique ».*

Dit autrement : *« Tout couple d'objets mathématiques peut être wrappé dans un ensemble ».*

Remarques : $\forall a, b$:
- $(\{a, b\} = \{b, a\})$
- $\{a, a\} = \{a\}$
- $(x \in \{a, b\}) \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b))$

Axiome 5. *"Axiome d'extension"*

$$\forall a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n_{\in \mathbb{N}^*}},\ \exists! E \mid E = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$$

Dit autrement : *« Ce qui est vrai pour 2 éléments dans le cadre de l'axiome 4 (axiome de la paire) est également vrai pour $n_{\in \mathbb{N}^*}$ éléments. On peut voir l'axiome d'extension comme une extension de l'axiome de la paire ».*

Dit autrement : *« Pour tout tout n-uplet d'objets mathématiques, il existe un ensemble qui contient exclusivement tous ces éléments et qui est unique ».*

Dit autrement : *« tout n-uplet d'objets mathématiques peut être wrappé dans un ensemble ».*

Définition 1. *"Définition d'un ensemble par la compréhension"*

$$\exists E \Rightarrow (\exists P\ :\ (E = \{x \mid P(x)\}))_{\text{où } P \text{ est une propriété collectivisante}}$$

Dit autrement : *« Si un objet mathématique E existe, alors il existe une propriété collectivisante P qui s'applique à chaque élément de l'ensemble E et qui permet de générer ce dernier via la feature "tous les éléments qui ont telle(s) propriété(s)" ».*

Remarques :

- *Une propriété collectivisante c'est une propriété qui permet de générer un ensemble de manière fiable, sans paradoxe. Par exemple la propriété "est pair" est collectivisante (et sous-entend "objet qui dispose d'une méthode intrinsèque permettant de déterminer s'il est pair, et dont la valeur de retour est True"), tandis que la propriété "est inclus dans lui-même" (le fameux paradoxe du barbier) n'est pas collectivisante.*
- *Il est important lors de la création d'un ensemble par compréhension, de bien utiliser une propriété collectivisante.*
- *Une propriété est donc une fonction qui prend un objet mathématique en argument et qui retourne un booléen. Cette fonction peut être absolue, pouvant prendre en argument les objets mathématiques qui lui sont spécifiés dans sa définition, ou relative à un objet, en tant que méthode de ce dernier (plus flexible).*
- *Les principales propriétés collectivisantes $P(x)$ sont :*
  - $x \in E$ *avec* $x \neq E$
  - $x = y$
  - $x \subseteq y$
  - $\ldots$

Axiome 6. *"Axiome de séparation"*

Soit A un ensemble contenant des ensembles dont les éléments disposent d'une propriété P qui peut valoir True ou False

$$\forall E \in A,\ ((x \in E) \land P(x)) \text{ est collectivisante}$$

Dit autrement : *« N'importe quel ensemble dont les éléments disposent d'une propriété, peut être filtré à l'aide de cette propriété pour obtenir un nouvel ensemble ne contenant que certains éléments sans prendre le risque de se retrouver avec un paradoxe ».*

Remarques :

- *Du coup on a* $\{\ x \mid ((x \in E) \land P(x))\ \}$ *qui est souvent utilisé, et pour simplifier la lecture, on peut l'ecrire comme ceci* $\{\ x \in E \mid P(x)\}$*. Donc*
$$\{\ x \in E \mid P(x)\} = \{\ x \mid ((x \in E) \land P(x))\ \}$$
- *Ça veut donc dire que tout ensemble* $\{\ x \in E \mid P(x)\ \}$ *existe dès lors que E existe et que P est une propriété de chaque élément de E (pouvant valoir True ou False), pas de galère.*

Définition 2. *"Inclusion d'un ensemble dans un autre"*

$$F \subseteq E \Leftrightarrow \forall x,\ (x \in \Rightarrow x \in E)$$

Dit autrement : *« Quand* $F \subseteq E$*, tout élément de F est aussi dans E et F est un sous-ensemble de E ».*

Remarques :

- $\varnothing$ *est un sous-ensemble de tous les ensembles*
- *Tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même*
- $\subseteq$ *est une relation d'ordre*

Axiome 7. *"La propriété d'inclusion est collectivisante"*

Soit P une propriété sur les éléments d'un ensemble E

$$(P(x) = (x \subseteq E)) \text{ est collectivisante.}$$

Dit autrement : *« Si on a un ensemble* $\{\ E' \mid E' \subseteq E\ \}$ *c'est ok. D'ailleurs ça correspond à l'ensemble des sous-ensembles de E, encore appelé ensemble des parties de E, noté* $\mathcal{P}(E)$ *».*

Définition 3. *"Définition de l'opérateur d'Union / Réunion d'ensembles $\cup$"*

$$\forall E, F,\ \exists! G \mid \ (\forall x,\ (x \in G) \Leftrightarrow ((x \in E) \vee (x \in F)))$$

Dit autrement : *«*

$$\forall E, F,\ \exists! G \mid G = \{\ x \mid\ (x \in E) \vee (x \in F)\ \} = E \cup F$$

Dit autrement : *« Pour tout couple d'ensemble, il existe un 3^e^ ensemble qui contient tous les éléments des 2 premiers ensemble réunis. Ça veut dire que l'opérateur de réunion $\cup$ fonctionne pour tout couple d'ensemble sans bug ».*

Dit autrement : *« Tout couple d'ensemble peut être fusionné en un 3^e^ ensemble contenant tous les ensembles des 2 premiers ensembles ».*

Dit autrement :

$$G = E \cup F = \{\ x \mid\ (x \in E) \vee (x \in F)\ \}$$

Définition 4. *"Définition de l'opérateur d'Intersection d'ensembles $\cap$"*

$$\forall E, F,\ \exists! G \mid \ (\forall x \in G,\ ((x \in E) \wedge (x \in F)))$$

Dit autrement :

$$\forall E, F,\ \exists! G \mid G = \{x \in E \mid x \in F\} = E \cap F$$

Dit autrement : *« Pour tout couple d'ensemble, il existe un 3^e^ ensemble qui contient tous les éléments compris à la fois dans l'un et dans l'autre ensemble. Ça veut dire que l'opérateur d'intersection $\cap$ fonctionne pour tout couple d'ensemble sans bug ».*

Remarque :

- *$E \cap F$ existe du fait de l'axiome 6 (axiome de séparation) et est unique du fait de l'axiome 1 (axiome d'extensionalité)*

Définition 5. *"Définition de l'opérateur de différence d'ensembles $-$ "*

$$\forall x,\ x \in (E - F) \iff ((x \in E) \wedge (x \notin F))$$

Dit autrement :

$$-(E,\ F) = E - F = \{\ x \mid\ ((x \in E) \wedge (x \notin F))\ \}$$

Dit autrement : *« C'est l'ensemble des éléments de E auxquels on a retiré les éléments de F ».*

Remarques :

- *$E-F$ existe du fait de l'axiome 6 (axiome de séparation) et est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionalité)*
- *Si $F \subseteq E$, alors $E - F$ est égal au complémentaire de F par rapport à E, noté $\complement_E(F)$*
- *On peut voir l'opérateur $-$ entre 2 ensembles comme l'extension de la notion de complémentaire entre 2 ensembles, vu que $C_E(F) = E - F$*

Résumé des propriétés des opérateurs $\cup$ et $\cap$

- Associativité de $\cup$:
  $E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$
  ————————————————
- Commutativité de $\cup$:
  $E \cup F = F \cup E$
  ————————————————
- $\varnothing$ élément neutre de $\cup$:
  $\varnothing \cup E = E$
  ————————————————
- $\forall E$, E est idempotent pour $\cup$:
  $E \cup E = E$

- Associativité de $\cap$:
  $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$:
  ————————————————
- Commutativité de $\cap$:
  $E \cap F = F \cap E$
  ————————————————
- $\varnothing$ élément absorbant de $\cap$:
  $\varnothing \cap E = \varnothing$
  ————————————————
- $\forall E$, E est idempotent pour $\cap$:
  $E \cap E = E$

- Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:
  $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
  ————————————————
- Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:
  $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
  ————————————————
- Inclusion et union :
  $E \subseteq F \Leftrightarrow E \cup F = F$
  ————————————————
- Inclusion et intersection :
  $E \subseteq F \Leftrightarrow E \cup F = F$
  ————————————————
- - est un morphisme de $\cup \rightarrow \cap$:
  $E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G)$
  ————————————————
- - est un morphisme de $\cap \rightarrow \cup$:
  $E - (F \cap G) = (E - F) \cup (E - G)$

Définition 6. *"Définition du produit cartésien fondamental / restreint"*

$$\forall E, F,\ \exists! G = E \times F = \{\ (a, b)\ \mid\ ((a \in E) \land (b \in F))\ \}$$

Dit autrement :

$$E \times F = \{\ (a, b)\ \mid\ ((a \in E) \land (b \in F))\ \}$$

Dit autrement : *« Quand on a 2 ensembles, on peut créer un nouvel ensemble contenant tous les couples qu'il est possible de former avec un élément du premier ensemble et un élément du second ensemble ».*

Remarques :

- $E \times F$ *est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionalité)*
- *Il s'agit d'un opérateur binaire*
- *Cet opérateur N'EST PAS associatif,* $E \times F \neq F \times E$
- $(E \times F = \varnothing) \Leftrightarrow ((E = \varnothing) \lor (F = \varnothing))$
- $((a_1,\ a_2) = (b_1,\ b_2)) \Leftrightarrow ((a_1 = b_1) \land (a_2 = b_2))$

Définition 7. *"Définition du produit cartésien fusionnant"*

$$\forall E_1, E_2, \ldots, E_{(n_{\in \mathbb{N}^*})},$$

$$\exists! G = \{\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge \cdots \wedge (a_n \in E_n))\ \}$$
$$\text{et } G = (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n)$$

Dit autrement :

$$\prod_{i=1}^{n_{\in \mathbb{N}^*}} (E_i) = (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n)$$
$$= \{\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge \cdots \wedge (a_n \in E_n))\ \}$$

Dit autrement : *« Quand on a $n_{\in \mathbb{N}^*}$ ensembles, on peut créer un nouvel ensemble contenant tous les n-uplets qu'il est possible de former avec un élément de chaque ensemble ».*

Remarques :

- $\prod_{i=1}^{n_{\in \mathbb{N}^*}} (E_i)$ *est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionalité)*
- *Il s'agit d'un opérateur n-aire*
- *Généralement quand on voit des produits d'ensembles, il s'agit de produits cartésiens fusionnant et non de produits cartésiens fondamentaux, sauf mention contraire*
- *Du coup le produit cartésien fusionnant est d'une certaine manière un moyen de rendre le produit cartésien fondamental associatif*
- $\left(\prod_{i=1}^{n_{\in \mathbb{N}^*}} (E_i) = \varnothing\right) \iff (\exists k \in \mathbb{N}^*\ \mid\ (E_i = \varnothing))$
- *Ça permet de définir l'opérateur puissance appliqué aux ensembles, avec* $E^{(n_{\in \mathbb{N}^*})} = (E \times E \times \cdots \times E)$ *(n fois)*
- *La diagonale de* $E^{(n_{\in \mathbb{N}^*})}$ *est* $\{\ (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\ \mid\ (a_1 = a_2 = \cdots = a_n)\ \}$, *c'est-à-dire* $\{\ (x,\ x,\ \ldots,\ x) \in E^n\ \}$
- $\left((a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{(n_{\in \mathbb{N}^*})}) = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)\right)$
  $\Leftrightarrow ((a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \cdots \wedge (a_n = b_n))$

- *Il faut bien comprendre la différence entre le produit cartésien fondamental et le produit cartésien fusionnant. Avec le produit cartésien fondamental, on a :*

  $$\begin{aligned} E_1 \times E_2 \times E_3 &= (E_1 \times E_2) \times E_3 \\ &= \{\ (a_1, a_2)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2))\ \} \times E_3 \\ E_1 \times E_2 \times E_3 &= \{\ (b, a_3)\ \mid\ ((b \in \{\ (a_1, a_2)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2))\ \}) \wedge (a_3 \in E_3))\ \} \end{aligned}$$

  Ce qui donne donc un ensemble de couples du type $((a_1, a_2)\ ,\ a_3)$, *tandis qu'avec le produit cartésien fusionnant on aura :*

  $$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{\ (a_1, a_2, a_3)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge (a_3 \in E_3))\ \}$$

  Ce qui donne un ensemble de triplets du type (a_1, a_2, a_3)

Axiome 8. *"Égalité de 2 applications"*

$$\text{Soient } f = F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix} \text{ et } g = F^{\circ}\begin{pmatrix} I_g & \to & O_g \\ t & \to & g(t) \end{pmatrix}$$

$$f = g \iff ((I_f = I_g) \wedge (O_f = O_g) \wedge (\forall x \in I_f,\ f(x) = g(x)))$$

Dit autrement : *« 2 applications sont égales si elles ont le même ensemble d'entrée, le même ensemble de sortie et que pour une même entrée elles donnent une meme sortie (qu'elles ont la même expression quoi) ».*

Remarques :

- *La restriction de f à I'_f se note $f_{|I'_f}$ (la fonction aura alors le même ensemble image que f, sauf si ce dernier est égal à son domaine image auquel cas la nouvelle fonction aura pour ensemble de sortie son nouveau domaine image), ou bien $f_{|I'_f \to O_f}$ (dans ce dernier cas la situation est univoque)*

- *La co-restriction de f à $O_{f'}$ se note $f_{|I_f \to O_{f'}}$*
- *De manière générale, on peut prendre une fonction f et créer une nouvelle fonction en modifiant ses ensembles d'entrée et de sortie en faisant $f_{|I'_f \to O_{f'}}$*

- *Certains appellent p_i l'application suivante :*

$$p_i = F^{\circ}\left(\begin{matrix} \left(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{\left(n \in \mathbb{N}^*\right)}\right) & \to O_{p_i} \\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) & \to x_i \end{matrix}\right)$$

  appellée "application i-eme coordonnée" ou "i-eme application coordonnée" ou "i-eme projection", qui en gros prend un n-uplet et retourne son i-eme élément, genre $p_3(1,\ 3,\ 42,\ a,\ b,\ c)$ retourne 42. Bien évidemment il faut que $i \in]0, n]_{\mathbb{N}}$

- *L'opérateur "produit cartésien fondamental" $\times$ des fonctions fonctionne comme suit :*

$$f_1 \times f_2 = F^{\circ}\begin{pmatrix} (I_{f_1} \times I_{f_2}) & \to & (O_{f_1} \times O_{f_2}) \\ (x_1, x_2) & \to & (f_1(x_1),\ f_2(x_2)) \end{pmatrix}$$

  En gros ça retourne une fonction qui prend 2 arguments et retourne un couple de valeurs. L'opérateur "produit cartésien fusionnant" $\times$ a le même fonctionnement mais c'est un opérateur n-aire et pas un opérateur binaire comme le produit cartésien fondamental.

- *Quand $I_{f_1} = I_{f_2}$, certains définissent*

$$(f_1, f_2) = F^{\circ} \begin{pmatrix} I_{f_1} & \to & (O_{f_1} \times O_{f_2}) \\ x & \to & (f_1 \times f_2)(x,\ x) \end{pmatrix}$$

  En gros c'est juste un moyen d'avoir une fonction à une variable mais la notation peut porter à confusion avec le couple de 2 fonctions (f_1, f_2) donc pas génial du tout.

Définition 8. *"Graphe d'une application"*

Soit $f = \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \rightarrow & O_f \\ x & \rightarrow & f(x) \end{pmatrix}$

Le graphe de f *est :*

$$\Gamma = \{\ (x, y) \in (I_f \times O_f)\ \mid y = f(x)\ \}$$

Dit autrement :

$$\Gamma = \{\ (x,\ f(x))\ \ \mid\ \ x \in I_f\ \}$$

Dit autrement : *« Le graphe d'une application c'est l'ensemble des "points" de cette application, c'est-à-dire l'ensemble des couples* $(x, f(x))$ $\forall x \in I_f$ *».*

Remarques :

- *Certains ouvrages définissent une application par un triplet* $(I_f,\ \Gamma,\ O_f)$ *où* Γ *vérifie que* $\forall x \in I_f,\ \exists! y \in O_f \mid ((x, y) \in \Gamma)$*, c'est-à-dire en français : « Tout élément de* I_f *a une unique image dans* O_f *par* f *»*
- *Le graphe de l'application identité sur E,* $Id_E = \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ x & \rightarrow & x \end{pmatrix}$ *est la diagonale de* E^2
- *Le graphe de* $f_{|(I'_f)_{\subseteq I_f} \rightarrow O_f}$ *est* $\Gamma' = \Gamma \cap \left(I'_f \times O_f\right)$
- *Le graphe d'une application vide* $f_\varnothing$ *(c'est-à-dire une application dont l'ensemble de départ est* $\varnothing$*) est l'ensemble vide* $\varnothing$

Définition 9. *"Domaine image d'une application"*

Soit $f = \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \rightarrow & O_f \\ x & \rightarrow & f(x) \end{pmatrix}$

$$Im(f) = \{\ y \in O_f \mid (\exists x \in I_f\ :\ (f(x) = y))\ \}$$

Dit autrement : *« Le domaine image d'une application est l'ensemble dont TOUS les éléments ont au moins un antécédent dans l'ensemble de départ, par l'application ».*

Remarques :

- *L'ensemble des antécédents d'un* $y_{\in O_f}$ *par* f *est* $\{\ x \in I_f \mid f(x) = y\ \}$
- *En principe quand on écrit* $f(x)$*, ca correspond à l'élément de* O_f *correspondant. Cependant, une feature des applications est de pouvoir passer un ensemble en argument, genre* $f(A)$*, ce qui va renvoyer* $Im\left(f_{|A \rightarrow O_f}\right)$*. Cependant comme ça peut porter à confusion, on préfère utiliser la notation* f^**, genre* $f^*(A)$*. Du coup, on a*

$$f^*(I_f) = Im(f)$$

- *Du coup on peut voir la notation* $*$ *comme un opérateur qui s'applique à la fonction nommée juste avant, et qui retourne une fonction (plus précisément un foncteur) prenant un ensemble en argument et retournant l'ensemble image correspondant*

- $f^* (\varnothing) = \varnothing$ $\quad\left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|\varnothing}\right) = \varnothing\right)$
- $(f^* (B) - f^* (A)) \subseteq f^* (B - A)$ $\quad\left(\Leftrightarrow \left(Im\left(f_{|B}\right) - Im\left(f_{|A}\right)\right) \subseteq Im\left(f_{|B-A}\right)\right)$
- $(A \subseteq B) \Rightarrow (f^* (A) \subseteq f^* (B))$ $\quad\left(\Leftrightarrow \left((A \subseteq B) \Rightarrow Im\left(f_{|A}\right) \subseteq Im\left(f_{|B}\right)\right)\right)$
- $f^* (A \cup B) = f^* (A) \cup f^* (B)$ $\quad\left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|A\cup B}\right) = Im\left(f_{|A}\right) \cup Im\left(f_{|B}\right)\right)$
- $f^* (A \cap B) \subseteq (f^* (A) \cap f^* (B))$ $\quad\left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|A\cap B}\right) \subseteq Im\left(f_{|A}\right) \cap Im\left(f_{|B}\right)\right)$
  ► f *injective* $\Rightarrow (f^* (A \cap B) = (f^* (A) \cap f^* (B)))$

- *Pour rappel :*
  - Théorème des valeurs intermédiaires : si $f = F^\circ \left(I_{f_{\subseteq\mathbb{R}}} \to O_{f_{\subseteq\mathbb{R}}}\right)$ *continue sur* I_f*, alors* $f^* \left(I_{\subseteq I_f}\right)$ *est un intervalle*
  - Théorème des bornes : si $I = \left[a_{\in I_f}, b_{\in I_f}\right]_{\mathbb{R}}$*, alors* $f^* (I)$ *est aussi un segment*
  - $D_{x:A\to B} (f (x))$ *= domaine de définition de l'expression* $f(x)$ *par rapport à x, en considérant x comme appartenant à l'ensemble wrapper A et qu'on veut des sorties qui soient dans l'ensemble wrappeur B*
  - $D_{A\to B} (f (x))$ *= idem mais on considère implicitement que la variable est x, plus lisible quand l'expression passée en argument ne contient qu'une seule variable car c'est univoque*
  - $D (f (x))$ *= idem et on considère que c'est avec les wrappers* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $D_{A\to B} (f) = D\left(f_{|A\to B}\right)$ *= domaine de définition de la fonction f avec restriction et co-restriction*
  - $D (f)$ *= idem mais on considère, comme c'est une fonction passée en argument, que quand on ne précise pas les wrappers, les wrappers sont* $I_f \to O_f$ *(et non* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *comme quand on passe une expression)*
  - $Im_{x\in A} (f (x))$ *= domaine image pour* $x \in A$
  - $Im_{x\in D_{A\to B}} (f (x))$ *= Domaine image pour* $x \in D_{x:A\to B} (f (x))$
  - $Im (f)$ *= domaine image de la fonction f*
  - $\hat{f}_{\to\{x_0\}\leftarrow}$ *= prolongement par continuité de f en* x_0
  - $\hat{f} = \hat{f}_{\to(\Psi_{\to\leftarrow}(f))\leftarrow}$ *= prolongement par continuité de f sur tous ses points de prolongeabilité (l'ensemble des points de prolongeabilité étant* $\Psi_{\to\leftarrow} (f)$*)*

Définition 10. *"Application surjective"*
Soit $f = F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \rightarrow & O_f \\ x & \rightarrow & f(x) \end{pmatrix}$

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow (\forall y \in O_f,\ \exists x \in I_f \mid (y = f(x)))$$

Dit autrement : *« Une fonction f est surjective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont AU MOINS un antécédent dans son ensemble d'entrée ».*

Remarques :
- *On parle de surjection ou d'application surjective, de* I_f *SUR* O_f *(plutôt que "dans"* O_f*)*
- *L'application identité sur* I_f*,* $Id_{I_f} = f^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \rightarrow & I_f \\ x & \rightarrow & x \end{pmatrix}$*, est surjective (en fait elle est même bijective)*

Théorème 1. *"Théorème de Cantor"*
Il n'existe AUCUNE application de $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ *qui soit surjective*

Définition 11. *"Application injective"*
Soit $f = F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \rightarrow & O_f \\ x & \rightarrow & f(x) \end{pmatrix}$

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall \left(x,\ x'\right) \in (I_f)^2,\ \left(\left(f(x) = f\left(x'\right)\right) \Leftrightarrow \left(x = x'\right)\right)$$

Dit autrement : *« Quand la fonction f est injective, si on prend 2 éléments de* I_f*, si leur image par f donne le même élément de* O_f*, alors c'est que ces 2 éléments sont le même élément ».*

Dit autrement : *« Une fonction f est injective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont AU PLUS un antécédent dans son ensemble d'entrée ».*

Remarque :
- *On parle fonction injective ou d'injection*
- $\left(f = F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \rightarrow & O_f \\ x & \rightarrow & f(x) \end{pmatrix} \text{ strictement monotone}\right) \Longleftrightarrow f \text{injective}$

Définition 12. *"Application bijective"*
Soit $f = \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \forall y \in O_f,\ (\exists! x \in I_f \mid y = f(x))$$

Dit autrement : *« Une fonction f est bijective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont EXACTEMENT un antécédent dans son ensemble d'entrée ».*

Dit autrement : *« Une fonction f est bijective quand elle est surjective et injective ».*

Remarques :

- *L'application identité sur E, $Id_E = \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} E & \to & E \\ x & \to & x \end{pmatrix}$ est bijective*
- $(f = \digamma^{\circ}(I_f \to O_f)\ \text{injective}) \Rightarrow \left(f_{|I_f \to Im(f)}\ \text{bijective}\right)$*, autrement dit pour toute fonction injective, si on restreint son ensemble image à son domaine image on obtient une fonction bijective*

Définition 13. *"Application réciproque d'une application bijective"*
Soit $f = \digamma^{\circ}(I_f \to O_f)$ *bijective*

$$f_{-1} \text{ est l'application réciproque de } f$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in (I_f \times O_f),\ (y = f(x) \Leftrightarrow x = f_{-1}(y))$$

Dit autrement : *« L'application réciproque f_{-1} d'une application bijective f est celle qui permet de défaire ce que f a fait. ».*

Remarques :

- $f_{-1}(f(x)) = x$
- $f(f_{-1}(y)) = y$
- $(f_{-1})_{-1} = f$
- *L'application réciproque d'une application bijective est aussi bijective*
- *On peut voir l'indice $_{-1}$ comme un opérateur qui prend en argument une fonction bijective (ou qui est une méthode intrinsèque à l'objet fonction bijective) et qui retourne sa fonction réciproque*

Définition 14. *"Composition de fonction"*
Soient $f = F^\circ (I_f \to O_f)$ *et* $g = F^\circ (O_f \to O_g)$

$$g \;\circ\; f = F^\circ \begin{pmatrix} I_f & \to & O_g \\ x & \to & g(f(x)) \end{pmatrix}$$

Dit autrement : *« L'opérateur* $\circ$ *prend 2 applications définies comme ci-dessus et retourne une nouvelle fonction qui chaîne les 2 premières. Si les ensembles de départ et d'arrivée des applications passées en paramètres ne sont pas corrects alors ça crash. ».*

Remarques :

- $\forall f \in \mathcal{F}(I_f \to O_f)\,,\; Id_{O_f} \circ f = f \circ Id_{I_f} = f$
- *L'opérateur* $\circ$ *est associatif, c'est-à-dire que*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g \circ f)$$

- *Si* f *est constante et* g *est constante, alors* $f \circ g$ *est constante*
- $f \circ f$ *est possible si* $I_f = O_f$

- $((f \text{ surjective}) \wedge (g \text{ surjective})) \Rightarrow (f \circ g \text{ surjective})$
- $((f \text{ injective}) \wedge (g \text{ injective})) \Rightarrow (f \circ g \text{ injective})$
- $((f \text{ bijective}) \wedge (g \text{ bijective})) \Rightarrow (f \circ g \text{ bijective})$
  et $(f \circ g)_{-1} = f_{-1} \circ g_{-1}$

- $((g \circ f) \;\; [\text{surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective})$
- $((g \circ f) \;\; \text{injective}) \Rightarrow (f \text{ injective})$

Définition 15. *"Domaine image réciproque d'une application bijective"*
Soient $f = F^{\circ}\left(I_f \rightarrow O_f\right)$
et $B \subseteq O_f$

$$f_*\left(B\right) = D\left(f_{|I_f \rightarrow B}\right) = \{x \in I_f \mid f\left(x\right) \in B\}\, 5$$

Dit autrement : *« Le domaine image réciproque d'une application bijective c'est tout simplement le domaine de définition de cette application une fois qu'elle est co-restreinte. C'est un peu alambiqué comme nom parce que c'est aussi le domaine image de son application réciproque. ».*

Dit autrement : *« On peut donc voir l'indice* $_*$ *comme un opérateur ou une méthode des applications bijectives qui prend en argument l'application et un ensemble de co-restriction et qui retourne le nouveau domaine de définition de l'application ».*

Remarques :

- *Certains auteurs notent le domaine image réciproque de* f *sur* B, $f^{-1}\left(B\right)$ *au lieu de* $f_*\left(B\right)$*, mais cela porte à confusion avec la bijection réciproque d'autres auteurs, ou l'opérateur puissance des fonctions.*
- *Il y a également des flemmards qui notent* $f_*\left(y\right)$ *au lieu de* $f_*\left(\{y\}\right)$*, c'est également à éviter dans l'idéal.*

- $f_*\left(\varnothing\right) = \varnothing$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \rightarrow \varnothing}\right) = \varnothing\right)$
- $f_*\left(O_f\right) = I_f$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \rightarrow O_f}\right) = I_f,\ \textit{logique}\ldots\right)$
- $f_*\left(A \cup B\right) = f_*\left(A\right) \cup f_*\left(B\right)$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \rightarrow (A \cup B)}\right) = D\left(f_{|I_f \rightarrow A}\right) \cup D\left(f_{|I_f \rightarrow B}\right)\right)$
- $f_*\left(A \cap B\right) = f_*\left(A\right) \cap f_*\left(B\right)$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \rightarrow (A \cap B)}\right) = D\left(f_{|I_f \rightarrow A}\right) \cap D\left(f_{|I_f \rightarrow B}\right)\right)$
- $f_*\left(A - B\right) = f_*\left(A\right) - f_*\left(B\right)$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \rightarrow (B - A)}\right) = D\left(f_{|I_f \rightarrow B}\right) - D\left(f_{|I_f \rightarrow A}\right)\right)$
- $A \subseteq B \Rightarrow f_*\left(A\right) \subseteq f_*\left(B\right)$ $\quad \left(\Leftrightarrow \left(A \subseteq B \Rightarrow D\left(f_{|I_f \rightarrow A}\right) \subseteq D\left(f_{|I_f \rightarrow B}\right)\right)\right)$

Axiome 9. *"Ensemble des applications de E dans F"*

Les applications de l'ensemble E dans l'ensemble F existe et se note $\mathcal{F}(E \to F)$

Remarques :

- *Certains auteurs notent cet ensemble $\mathcal{F}(E, F)$, ou F^E*
- $\forall E \neq \varnothing,\ \mathcal{F}(E \to \varnothing) = \varnothing$
- $\forall A,\ card(\mathcal{F}(\varnothing \to A)) = 1$
  En effet, on a
  $\mathcal{F}(\varnothing \to A) = \{f_{\varnothing} = F^{\circ}(\varnothing \to A)\}$
- $\forall a, E,\ card(\mathcal{F}(E \to \{a\})) = 1$
  En effet, on a
  $\mathcal{F}(E \to \{a\}) = \left\{F^{\circ}\left(\begin{smallmatrix} E & \to & \{a\} \\ x & \to & a \end{smallmatrix}\right)\right\}$
- $\forall a, A,$ *l'application*

$$F^{\circ}\begin{pmatrix} \mathcal{F}(\{a\} \to A) & \to & A \\ f & \to & f(a) \end{pmatrix}$$

est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(\{a\} \to A)$ est en bijection naturelle avec A par cette application, vu que connaître une application f de $\mathcal{F}(\{a\} \to A)$ revient à connaître $f(a) \in A$, et inversement).

- $\forall a, b, F,$ *l'application*

$$F^{\circ}\begin{pmatrix} \mathcal{F}(\{a, b\} \to F) & \to & F^2 \\ f & \to & (f(a), f(b)) \end{pmatrix}$$

est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(\{a, b\} \to F)$ est en bijection naturelle avec F^2 par cette application, vu que connaître une application f de $\mathcal{F}(\{a, b\} \to F)$ revient à connaître $(f(a), f(b)) \in F^2$, et inversement).

- $\forall E,$ *l'application*

$$F^{\circ}\begin{pmatrix} \mathcal{F}(E \to \{0, 1\}) & \to & \mathcal{P}(E) \\ f & \to & (E_0 = f_*(\{0\})) \end{pmatrix}$$

est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(E \to \{0, 1\})$ est en bijection naturelle avec $\mathcal{P}(E)$ par cette application, vu que connaître une application f de $\mathcal{F}(E \to \{0, 1\})$ revient à connaître $E_{0_{\subseteq E}}$ contenant tous les antécédents de 0 par f, (et par déduction, $E_{1_{\subseteq E}}$ contenant tous les antécédents de 1 par f vu que $E_1 = E - E_0 = \complement_E(E_0)$), et inversement).

- $\forall (E \neq \varnothing), (F \neq \varnothing),\ card(\mathcal{F}(E \to F)) = card(F)^{card(E)}$

  C'est-à-dire que quand on prend 2 ensembles E et F non vides, le nombre de fonction possibles de E dans F est le nombre d'éléments dans F élevé à la puissance du nombre d'éléments dans E.

  C'est pourquoi certains auteurs notent $\mathcal{F}(E \to F)$ comme ceci : F^E.

Définition 16. *"Suites"*
On appelle une "suite" une application de $I_{\subseteq \mathbb{N}} \to O$.
Si on appelle la suite u, on a donc $u \in \mathcal{F}(I \to O)$, et l'image de $n_{\in I}$, $u(n)$, se note, par convention, u_n, et s'appelle "n-ième terme de la suite u"

Remarques :

- *$\mathcal{F}(\mathbb{N} \to O)$ (encore noté $O^{\mathbb{N}}$) désigne donc l'ensembles de toutes les suites possibles définies sur $\mathbb{N}$ à valeur dans O.*
- *Il existe un opérateur $[\subseteq]$, qui signifie que l'ensemble à gauche de l'opérateur est inclus dans celui à droite de l'opérateur (comme pour l'opérateur $\subseteq$), mais que l'ensemble de gauche est un intervalle joint fermé. On a donc*
  - ▶ $[1,3]_{\mathbb{N}} [\subseteq] \mathbb{N}$
  - ▶ $[1,4[_{\mathbb{N}} [\subseteq] \mathbb{N}$, *car* $[1,4[_{\mathbb{N}} = [1,3]_{\mathbb{N}}$
  - ▶ $\{1,\ 2,\ 3\} [\subseteq] \mathbb{N}$, *car* $\{1,\ 2,\ 3\} = [1,3]_{\mathbb{N}}$
  - ▶ $\{1,\ 2,\ 4\} [\not\subseteq] \mathbb{N}$

- *u désigne donc l'objet mathématique "suite", qui est une application, tandis que u_n désigne $u(n)$, la valeur de retour de u pour un $n_{\in I_u}$ donné*

- *Certains auteurs désignent l'objet suite u comme ceci :*

$$(u_n)_{n \in I_u}$$

genre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. *Parfois certains auteurs utilisent juste la notation* (u_n) *avec les parenthèses mais c'est pas très cohérent d'un point de vue "parsing"*

C'est un peu comme la déclaration des fonctions. La façon la plus précise de déclarer une fonction c'est avec la syntaxe

$$f = F^\circ \binom{I_f \ \to \ O_f}{x \ \to \ f(x)=Expr(x)}$$

mais dans le cas où on ne veut pas spécifier son expression, on peut faire "$f = F^\circ (I_f \to O_f)$*" ou "*$f \in \mathcal{F}(I_f \to O_f)$*" ou "*$f \in (O_f)^{I_f}$*", et dans le cas où on ne veut pas spécifier ses ensembles d'entrée et de sortie pour sous-entendre qu'ils correspondent aux domaines de définition et image de l'expression, on peut faire "*$f = F^\circ (x \ \to \ Expr(x))_{W_I \to W_O}$*" où* W_I *et* W_O *sont les ensembles wrapper de l'entrée et de la sortie respectivement, voire "*$f = F^\circ (x \ \to \ Expr(x))$*" si on a la flemme car par défaut les wrappers d'entrée et de sortie valent* $\mathbb{R}$. *Mais il y a aussi une syntaxe que certains jugent plus ergonomique qui est "*$f\left(x_{\in I_f}\right) = (Expr(x))_{\in O_f}$*" qui donne toutes les infos nécessaire à la définition précise de la fonction.*

Pour les suites c'est pareil, on peut utiliser les syntaxes des fonctions pour déclarer une suite, par exemple "$u = F^\circ \binom{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}{n\to u_n = Expr(n)}$*", ou "*$u(n_{\in\mathbb{N}}) = (Expr(n))_{\in\mathbb{R}}$*", ou alors on peut, pour un peu plus de lisibilité et de contextualisation du domaine des suites, utiliser la notation*

$$u_{n_{\in\mathbb{N}}} = (expr(n))_{\in\mathbb{R}}$$

voire "$\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\in\mathbb{R}}$*" si on ne veut pas spécifier son expression, voire "*$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*" si on a la maxi-flemme vu que par défaut quand l'ensemble d'arrivée n'est pas spécifié ça considère que c'est* $\mathbb{R}$.

- *Il y a des suites finies (cas où* $card(I_u) \in \mathbb{N}$*) et des suites infinies (cas où* $card(I_u) = +\infty$*).*

- *On peut bien-sûr créer des sous-suites ou des sur-suites à partir de suites existantes par restriction ou extension de l'ensemble de départ de ces dernières, par exemple* $u' = u_{|I_{u'_{\subseteq\mathbb{N}}}}$*, et on peut la définir aussi avec la syntaxe* $(u_{n_k})_{k\in I_{u'_{\subseteq\mathbb{N}}}}$*, genre* $(u_{n_k})_{k\in[1,5]_{\mathbb{N}}}$ *ou* $(u_{n_k})_{k\in\{1,\ 3,\ 7,\ 42,\ 324\}}$ *mais ces syntaxes commencent à être un peu équivoque de mon point de vue donc je prefère utiliser les syntaxes des fonctions lors de la créations de sous-suites ou de sur-suites.*

- *On peut bien-entendu composer les suites comme on compose les fonctions vu que les suites sont aussi des fonctions. Par exemple si on a :*

  $$\varphi = \digamma^{\circ}\binom{K_{\subseteq\mathbb{N}}\to\ I_{\subseteq\mathbb{N}}}{k\ \to\ \varphi(k)=i} = \big((\varphi_k)_{k\in K}\big)_{\in I}$$

  et

  $$x = \digamma^{\circ}\binom{I\ \to\ O}{i\ \to\ x_i} = \big((x_i)_{i\in I}\big)_{\in O}$$

  On a donc :

  $$x\ \circ\ \varphi = \digamma^{\circ}\left(\begin{matrix}K\ \to\ O\\ k\ \to\ x(\varphi(k))=x_{\varphi(k)}=x_{(\varphi_k)}\end{matrix}\right)$$

  Ou dit autrement :

  $$x\ \circ\ \varphi = (x_i)_{i\in Im(\varphi)} = (x_i)_{i\in\underline{\varphi}}$$

  Mais certains auteurs le notent comme suit, ce qui est un peu plus lisible mais pas cohérent avec la syntaxe de départ : $x\circ\varphi = \big(x_{\varphi(k)}\big)_{k\in K}$ *genre* $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ *au lieu de* $(x_i)_{i\in 2\mathbb{N}}$*. Personnellement cette dernière syntaxe est plus contreintuitive pour moi.*

- *Concernant les suites multi-indexées, (c'est-à dire disposant de plusieurs index, donc dont l'ensemble de départ est le résutat d'une produit cartésien de sous-ensembles de* $\mathbb{N}$*), par exemple* $x = (x_i)_{i\in I}$ *avec* $I = J_{\subseteq\mathbb{N}}\times K_{\subseteq\mathbb{N}}$*, les auteurs préfèrent souvent noter les index comme suit :* $x = (x_{j,k})_{j\in J,\ k\in K}$*, mais personnellement j'aime beaucoup la notation* $x = (x_i)_{i\in I}$ *qu'on peut expliciter en* $x = \big(x_{(j,k)}\big)_{(j,k)\in(J\times K)}$ *qui respecte la logique de la syntaxe et qui est très lisible.*

Définition 17. *"Famille d'éléments"*

Une famille d'éléments de l'ensemble O indexée par l'ensemble $I_{\subseteq\mathbb{N}}$ est simplement une application de $I \to O$. On la note $\underline{x}$.

En gros c'est exactement une suite, c'est la même chose, mais ce changement de nom et de notation est purement psychologique pour mettre en avant les valeurs $x_i \in O$ et le rôle des indices $i \in O$.

Cependant, une façon plus cohérente pour moi d'utiliser le concept de "famille d'éléments" serait de le définir comme l'ensemble des termes de la suite plutôt que comme la suite elle-même. Du coup on peut imaginer la suite $x \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \to O)$, et on aurait alors $\underline{x} = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots\}$. Ça permet alors d'avoir des notations simples où on déclare un élément de la famille en question.

Du coup dans cette définition alternative qui me semble plus cohérente, la suite générique $x \in \mathcal{F}(I_x \to O_x)$ donnerait alors la famille

$$\underline{x} = \{e \in O_x \mid (\exists i \in I_x \ : \ e = x_i)\} = \{x_i \mid i \in I_x\}$$

Du coup, $\underline{x}$ c'est tout simplement $Im(x)$ (ou $\underline{u}$ c'est $Im(u)$)

Cette notation (qui est également un opérateur du coup) peut s'utiliser plus généralement dans le cadre des fonctions.

Cependant beaucoup d'auteurs, plutôt que $\underline{x}$, préfèrent utiliser la notation $(x_i)_{i\in I_x}$, genre $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui est la même notation que pour les suites (ce qui est logique vu que c'est exactement le même objet pour eux). Du coup compte tenu de ce qui a été décrit ci-dessus, si on veut la famille d'éléments vue comme le domaine image de la suite, on peut écrire $\underline{\left((x_i)_{i\in I_x}\right)_{\in O_x}}$, ou $\underline{(x_i)_{i\in I_x}}$ si $O_x = \mathbb{R}$ et qu'on a la flemme.