

Notions mathématiques utilisées en physiques

0) Introduction

L'idée c'est d'expliquer les concepts mathématiques dont j'ai besoin, au fur et à mesure que je les rencontre dans mon parcours.

1) La confusion entre variable de grandeur et fonction

En physique on manipule des **grandeurs** (position, distance, température, durée, instant, énergie, etc) que l'on exprime **sous forme de fonction** (position fonction du temps, énergie fonction de la température et de la distance, etc).

Ces fonctions sont donc utilisées comme des fonctions mathématiques, avec ce que cela implique comme trucs que l'on peut faire avec (dérivation, intégration, étude de variation, etc).

Le problème c'est que **d'un point de vue formalisme, il y a confusion** entre la fonction elle-même (un objet mathématique qui est constitué d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée, d'une variable nommée et d'une expression mettant en jeu cette variable nommée), et la valeur que prend la fonction en fonction de la variable qu'on lui passe.

En d'autres termes, on confond la fonction f , et la valeur que prend f pour un argument x donné, c'est-à-dire $f(x)$.

Cela pose des problèmes de cohérence parce que ça n'a pas de sens de dériver une valeur alors qu'on cherche à dériver une expression ou une fonction, idem dans le cadre d'une intégration.

De même, dans le formaliste, si on note z la position verticale d'un système, à un instant t , noter $z(t_A)$ comme si passer t_A à la fonction z allait retourner la valeur, alors qu'il ne s'agit pas d'une fonction, est en soi un non-sens.

On pourrait simplement se dire « oui mais cette notation signifie “la valeur que prend z quand t égal t_A ” », seulement par la suite on va traiter z comme une fonction en intégrant ou dérivant par rapport au temps, ce n'est donc pas une simple notation comme l'argument ci-dessous le sous-entend.

La solution est de considérer que le « parseur » fonctionne comme suit:

- ◆ Toute grandeur (par exemple z ou T) varie en fonction du temps, et à chaque instant, elle prend une valeur donnée.
- ◆ Donc toute grandeur est régie par une fonction du temps.
- ◆ Cette fonction, on peut la noter f indice nom de la variable (f_z ou f_T par exemple).
- ◆ On a donc, par exemple $f_z = f^\circ \left(\begin{array}{cc} [t_0, t_f]_{\mathbb{R}[s]} & \rightarrow \mathbb{R}[m] \\ t & \rightarrow f_z(t) \end{array} \right)$
- ◆ Et donc pour un instant t donné, on a $z = f_z(t)$
- ◆ Comme c'est un peu lourdingue d'écrire $z_A = f_z(t_A)$ pour spécifier la valeur que prend la grandeur z quand $t = t_A$, pour des raisons d'ergonomies on va définir la règle selon laquelle, quand on écrit $z_A(t = t_A)$ ou $z_A(t_A)$, ça renvoie $f_z(t_A)$. En gros si une grandeur se voit passer un argument, ça appelle la fonction qui gère cette grandeur et lui passe l'argument et retourne la valeur correspondante.

2) Le changement de variable au sein d'une intégrale

C'est la technique de base pour utiliser les intégrales en physique, ne serait-ce que parce qu'il arrive souvent que la variable d'intégration ne corresponde pas aux bornes d'intégration (dans le calcul du travail d'une force par exemple).

Le théorème est le suivant:

Soient:

- $I \subseteq \mathbb{R}$
- $J \subseteq \mathbb{R}$
- $K \subseteq \mathbb{R}$
- $f = f^\circ \left(\begin{array}{l} J \rightarrow K \\ x \rightarrow f(x) \end{array} \right)$
- $g = f^\circ \left(\begin{array}{l} I \rightarrow J \\ t \rightarrow g(t) \end{array} \right)$

\Rightarrow on peut donc composer f et g dans le sens $f(g(x))$

Si, pour un intervalle $[t_A, t_B] \subseteq I$, on a:

- ✓ **g dérivable** sur $[t_A, t_B]$
- ✓ la fonction dérivée de g sur $[t_A, t_B]$ est **intégrable** sur $[t_A, t_B]$
- ✓ **f continue** sur $[g(t_A), g(t_B)]$

Alors on peut écrire que:

par changement de variable, en posant $u = g(t)$

$$\int_{t=t_A}^{t_B} f(g(t)) \cdot d(g)(t) = \int_{t=t_A}^{t_B} f(u) du = \int_{u=g(t_A)}^{g(t_B)} f(u) du$$

\Rightarrow Ici on cherche à partir d'une intégrale expanded qu'on voudrait packer en posant $u = g(x)$

Ensuite, il y a le corollaire (cette fois-ci on cherche à partir d'une intégrale packée pour l'expand en posant $x = g(u)$):

Soient:

- $I \subseteq \mathbb{R}$
- $J \subseteq \mathbb{R}$
- $K \subseteq \mathbb{R}$
- $f = f^\circ \left(\begin{array}{c} J \rightarrow K \\ x \rightarrow f(x) \end{array} \right)$
- $\varphi = f^\circ \left(\begin{array}{c} I \rightarrow J \\ t \rightarrow \varphi(t) \end{array} \right)$

\Rightarrow on peut donc composer f et φ dans le sens $f(\varphi(t))$

Si, pour un intervalle $[x_A, x_B] \subseteq J$, on a:

- ✓ $t_A = \text{elof}(I) \mid \varphi(t_A) = x_A$
- ✓ $t_B = \text{elof}(I) \mid \varphi(t_B) = x_B$
- ✓ φ **bijective** sur $[t_A, t_B]$
- ✓ φ **dérivable** sur $[t_A, t_B]$
- ✓ la fonction dérivée de φ sur $[t_A, t_B]$ est **intégrable** sur $[t_A, t_B]$
- ✓ f **continue** sur $[g(t_A), g(t_B)]$

Alors on peut écrire que:

par changement de variable, en posant $x = \varphi(t)$

$$\int_{x=x_A}^{x_B} f(x) dx = \int_{x=x_A}^{x_B} f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi)(t) = \int_{t=[t_A=\varphi^{-1}(x_A)]}^{[t_B=\varphi^{-1}(x_B)]} f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi)(t)$$

\Rightarrow le truc particulier ici est que la fonction expand a besoin d'être bijective.

Remarque importante, dans la mécanique classique, toutes les grandeurs sont des fonctions du temps et à chaque instant ne correspond qu'une seule valeur de la grandeur, donc le passage d'une valeur de grandeur à un temps ne posera jamais problème dans ce cas. L'inverse n'est pas vrai.

Du coup, quand on se trouve dans le cas d'un changement de variable au sein d'une intégrale parce que la variable d'intégration ne correspond pas aux bornes, par exemple:

$$W_1 = \int_{t=t_A}^{t_B} dz = \int_{z=z_A}^{z_B} dz = (z_B - z_A)$$

En réalité ce qui est processé est la chose suivante:

$$W_1 = \int_{t=t_A}^{t_B} d(f_z(t))$$

(ce qui est évidemment égal à $f_z(t_B) - f_z(t_A)$, mais c'est pour comprendre la logique du truc).

Et du coup, par changement de variable posé en arrière-plan $V_z = f_z(t)$, on a

$$W_1 = \int_{t=t_A}^{t_B} d(f_z(t)) = \int_{V_z=f_z(t_A)}^{f_z(t_B)} dV_z = f_z(t_B) - f_z(t_A)$$

Bien-sûr, sous réserve que f_z soit dérivable sur $[t_A, t_B]$ et que cette dérivée soit intégrable sur $[t_A, t_B]$, la fonction $\text{packer} = f^\circ \left(\begin{matrix} [t_A, t_B] & \rightarrow & \{1\} \\ t & \rightarrow & 1 \end{matrix} \right)$ étant continue sur $[t_A, t_B]$.

Sauf que comme c'est un peu **contre-intuitif et plus coûteux en charge mentale** d'introduire moult moult noms de variables pour faire de la technique mathématique, on va simplifier tout ça en créant une convention : quand je fais un changement de variable au sein d'une intégrale, je nomme cette variable comme la grandeur qu'elle désigne. Il n'y aura pas de conflit vu que dans une intégrale, la variable est muette, mais pour nos humbles cerveaux d'humains ça permet de voir vraiment le sens de ce qu'on est en train de faire.

Du coup ça donne le fameux:

$$W_1 = \int_{t=t_A}^{t_B} dz = \int_{z=z_A}^{z_B} dz$$

Donc pour conclure, on peut faire du changement de variable en veux-tu en voilà, mais faut garder à l'esprit que c'est sous réserve de 3 conditions qu'on a dites plus haut.

3) Équation de cercle dans un repère cartésien

Dans un plan repéré par un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, un cercle de centre O et de rayon $r \in \mathbb{R}_+ [\text{m}]$ sera d'équation:

$$x^2 + z^2 = r^2$$

Si ce cercle est de centre C (point quelconque du plan), alors on aura l'équation:

$$(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$

4) Équation d'ellipse dans un repère cartésien

Déjà il faut rappeler qu'une ellipse correspond à une figure circulaire qui n'est pas ronde mais ovale.

Elle a différentes caractéristiques:

- Elle est composée d'un grand axe et d'un petit axe, perpendiculaires entre eux
- Elle dispose d'un centre qui est l'intersection de ses 2 axes
- Elle dispose de 2 foyers situés sur le grand axe, permettant de tracer l'ellipse avec la méthode du jardinier

L'équation caractéristique d'une ellipse dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, de centre O, est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1$$

où $a \in (\mathbb{R}^*) [\text{m}]$ correspond à la taille de l'un des 2 axes de l'ellipse

et $b \in (\mathbb{R}^*) [\text{m}]$ de même

Si $a > b$, alors on aura le grand axe suivant \vec{e}_x , donc une ellipse allongée horizontalement

Si $a < b$, alors on aura le grand axe suivant \vec{e}_z , donc une ellipse allongée verticalement

Si $a = b$, alors les 2 axes seront de même longueur ce qui correspond à un cercle.

Si cette ellipse est de centre C (point quelconque du plan), alors on aura l'équation:

$$\left(\frac{x - x_C}{a}\right)^2 + \left(\frac{z - z_C}{b}\right)^2 = 1$$

Enfin, si l'ellipse n'a pas ses axes colinéaires avec la base du repère, mais est rotée de $\theta_{\in \mathbb{R}[\text{rad}]}$, alors son équation dans le repère sera:

$$\left(\frac{(x - x_C) \cos(\theta) + (z - z_C) \sin(\theta)}{a}\right)^2 + \left(\frac{(x - x_C) \sin(\theta) + (z - z_C) \cos(\theta)}{b}\right)^2 = 1$$

5) Équations différentielles

6) Le gradient

Le gradient c'est un opérateur qui prend en argument un **champ scalaire** (soit la fonction, soit l'expression) et qui retourne un **champ vectoriel** (en objet fonction ou expression selon ce qu'on lui a donné à manger).

En pratique, on a un champ scalaire S du genre

$$f_S = f^\circ \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ f_S(x, y, z) = S \end{array} \right)$$

Le gradient de ce champ scalaire sera

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}(f_S(x, y, z)) &= [\partial_x(f_S(x, y, z))] \cdot \vec{e}_x + [\partial_y(f_S(x, y, z))] \cdot \vec{e}_y + [\partial_z(f_S(x, y, z))] \cdot \vec{e}_z \\ \vec{\text{grad}}(f_S(x, y, z)) &= \begin{pmatrix} \partial_x(f_S(x, y, z)) \\ \partial_y(f_S(x, y, z)) \\ \partial_z(f_S(x, y, z)) \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} \end{aligned}$$

Soit plus simplement

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}(S) &= [\partial_x(S)] \cdot \vec{e}_x + [\partial_y(S)] \cdot \vec{e}_y + [\partial_z(S)] \cdot \vec{e}_z \\ \vec{\text{grad}}(S) &= \begin{pmatrix} \partial_x(S) \\ \partial_y(S) \\ \partial_z(S) \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} \end{aligned}$$

Remarque: quand on travaille dans un repère cartésien, on a

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}(f_S(x, y, z)) &= \vec{\nabla}(f_S(x, y, z)) \\ \vec{\text{grad}}(S) &= \vec{\nabla}(S) \end{aligned}$$

De manière générale, le gradient prend une fonction scalaire à «n» variables (ou son expression) et retourne une fonction vectorielle à «n» variables (ou son expression) où chaque composante du vecteur retourné est la dérivée de la fonction scalaire par rapport à une de ses variables, ce qui fait un vecteur à «n» composantes.

7) La divergence

La divergence c'est un opérateur qui prend en argument un **champ vectoriel** (soit la fonction, soit l'expression) et qui retourne un **champ scalaire** (en objet fonction ou expression selon ce qu'on lui a donné à manger).

En pratique, on a un champ vectoriel \vec{V} du genre

$$f_{\vec{V}} = f^{\circ} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow f_{\vec{V}}(x, y, z) = \vec{V} \end{array} \right)$$

La divergence de ce champ vectoriel sera

$$\text{div} (f_{\vec{V}}(x, y, z)) = \partial_x ((f_{\vec{V}}(x, y, z))_x) + \partial_y ((f_{\vec{V}}(x, y, z))_y) + \partial_z ((f_{\vec{V}}(x, y, z))_z)$$

ou plus simplement

$$\text{div} (\vec{V}) = \partial_x ((\vec{V})_x) + \partial_y ((\vec{V})_y) + \partial_z ((\vec{V})_z)$$

$$\text{div} (\vec{V}) = \partial_x (V_x) + \partial_y (V_y) + \partial_z (V_z)$$

Remarque: quand on travaille dans un repère cartésien, la divergence c'est un peu comme si on faisait un produit scalaire entre l'opérateur gradient (ce qui n'a pas trop de sens vu que ça serait un vecteur dont les composantes ne sont pas des scalaires mais des opérateurs de dérivation wtf) et l'expression du champ vectoriel, du coup certains (certainement pas moi) le notent comme ça:

$$\text{div} (\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{V})$$

Ce qu'il faut comprendre comme le fait que l'opérateur div soit noté $\vec{\nabla}$, ultra pas ergonomique.

De manière générale, la divergence prend une fonction vectorielle à «n» variables (ou son expression) et retourne une fonction scalaire à «n» variables (ou son expression) correspondant à la somme des dérivées de chaque composante du vecteur, par rapport à leur variable respective en gros.

Attention par contre, on pourrait y voir une analogie avec l'opérateur de différentiation totale vu que

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \partial_x(V_x) + \partial_y(V_y) + \partial_z(V_z)$$

et que

$$d(f) = \partial_x(f) dx + \partial_y(f) dy + \partial_z(f) dz$$

un peu comme si la divergence c'était un peu comme la différentiation totale mis à part qu'on divise chaque élément de la somme par la différentielle totale de la variable, sauf que non parce que

$$\operatorname{div}(\vec{V}) \neq \partial_x(\vec{V}) + \partial_y(\vec{V}) + \partial_z(\vec{V})$$

mais

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \partial_x(V_x) + \partial_y(V_y) + \partial_z(V_z)$$

Te fais pas piéger fréro.

8) Le rotationnel

Le rotationnel c'est un opérateur qui prend en argument un **champ vectoriel** (soit la fonction, soit l'expression) et qui retourne un **champ vectoriel** (en objet fonction ou expression selon ce qu'on lui a donné à manger).

En pratique, on a un champ vectoriel \vec{V} du genre

$$f_{\vec{V}} = f^{\circ} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow f_{\vec{V}}(x, y, z) = \vec{V} \end{array} \right)$$

Le rotationnel de ce champ vectoriel sera

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{V}) &= [\partial_y(V_z) - \partial_z(V_y)] \cdot \vec{e}_x + [\partial_z(V_x) - \partial_x(V_z)] \cdot \vec{e}_y + [\partial_x(V_y) - \partial_y(V_x)] \cdot \vec{e}_z \\ \text{rot}(\vec{V}) &= \begin{pmatrix} \partial_y(V_z) - \partial_z(V_y) \\ \partial_z(V_x) - \partial_x(V_z) \\ \partial_x(V_y) - \partial_y(V_x) \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} \end{aligned}$$

Remarque: quand on travaille dans un repère cartésien, le rotationnel c'est un peu comme si on faisait un produit vectoriel entre l'opérateur gradient (ce qui n'a pas trop de sens vu que ça serait un vecteur dont les composantes ne sont pas des scalaires mais des opérateurs de dérivation wtf toujours) et l'expression du champ vectoriel, du coup certains (certainement pas moi) le notent comme ça:

$$\text{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{V})$$

Ce qu'il faut comprendre comme le fait que l'opérateur rot soit noté $\vec{\nabla} \wedge$, ultra pas ergonomique.

De manière générale, le rotationnel prend une fonction vectorielle à «n» variables (ou son expression) et retourne une fonction vectorielle à «n» variables (ou son expression) dont les composantes du vecteur retourné sont obtenues en faisant l'algorithme de calcul du déterminant en utilisant la configuration suivante:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_{x1} & \vec{e}_{x2} & \vec{e}_{x3} & \dots & \vec{e}_{xn} \\ \partial_{x1} & \partial_{x2} & \partial_{x3} & \dots & \partial_{xn} \\ V_{x1} & V_{x2} & V_{x3} & \dots & V_{xn} \end{vmatrix}, \text{ genre } \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

9) Le laplacien scalaire

Le laplacien scalaire c'est un opérateur qui prend en argument un **champ scalaire** (soit la fonction, soit l'expression) et qui retourne un **champ scalaire** (en objet fonction ou expression selon ce qu'on lui a donné à manger). Il correspond à la **divergence du gradient du champ scalaire**.

En pratique, on a un champ scalaire S du genre

$$f_S = f^\circ \left((x, y, z) \xrightarrow{\mathbb{R}^3} f_S(x, y, z) = S \right)$$

Le laplacien scalaire de ce champ scalaire sera

$$\Delta(f_S(x, y, z)) = \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}}(f_S(x, y, z))) = \partial_x^2(f_S(x, y, z)) + \partial_y^2(f_S(x, y, z)) + \partial_z^2(f_S(x, y, z))$$

Soit plus simplement

$$\Delta(S) = \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}}(S)) = \partial_x^2(S) + \partial_y^2(S) + \partial_z^2(S)$$

Remarque: quand on travaille dans un repère cartésien, le laplacien scalaire c'est la divergence du gradient, or avec les notations pourries vues plus haut, le gradient c'est équivalent à l'opérateur nabla quand on est en repère cartésien, donc $\vec{\nabla}$, et la divergence peut se noter $\vec{\nabla} \cdot$, donc d'une certaine manière, le laplacien scalaire c'est $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$, c'est pourquoi certains notent le laplacien scalaire comme ça:

$$\Delta(S) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})(S) = \vec{\nabla}^2(S)$$

Ce qu'il faut comprendre comme le fait que l'opérateur Δ soit noté $\vec{\nabla}^2$, pas génialement ergonomique comme souvent mais bon il faut le savoir.

De manière générale, le laplacien scalaire prend une fonction scalaire à «n» variables (ou son expression) et retourne une fonction scalaire à «n» variables (ou son expression) correspondant à la somme des dérivées secondes par rapport à chaque variable de la fonction scalaire de départ en gros. C'est un peu comme la divergence, mais à partir d'un champ scalaire et en dérivant deux fois plutôt qu'une.

10) Le laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel c'est un opérateur qui prend en argument un **champ vectoriel** (soit la fonction, soit l'expression) et qui retourne un **champ vectoriel** (en objet fonction ou expression selon ce qu'on lui a donné à manger).

En pratique, on a un champ vectoriel \vec{V} du genre

$$f_{\vec{V}} = f^{\circ} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \\ f_{\vec{V}}(x, y, z) = \vec{V} \end{array} \right)$$

Le laplacien vectoriel de ce champ vectoriel sera

$$\vec{\Delta}(\vec{V}) = \left[\Delta \left(\left(\vec{V} \right)_x \right) \right] \cdot \vec{e}_x + \left[\Delta \left(\left(\vec{V} \right)_y \right) \right] \cdot \vec{e}_y + \left[\Delta \left(\left(\vec{V} \right)_z \right) \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{\Delta}(\vec{V}) = \Delta(V_x) \cdot \vec{e}_x + \Delta(V_y) \cdot \vec{e}_y + \Delta(V_z) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{\Delta}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \Delta(V_x) \\ \Delta(V_y) \\ \Delta(V_z) \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \partial_x^2(V_x) + \partial_y^2(V_x) + \partial_z^2(V_x) \\ \partial_x^2(V_y) + \partial_y^2(V_y) + \partial_z^2(V_y) \\ \partial_x^2(V_z) + \partial_y^2(V_z) + \partial_z^2(V_z) \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

De manière générale, le laplacien vectoriel prend une fonction vectorielle à «n» variables (ou son expression) et retourne une fonction vectorielle à «n» variables (ou son expression) dont chaque composante du vecteur retourné correspond au laplacien scalaire de la composante correspondante du vecteur de départ.

Attention cependant, il y a une sorte de biais commun qui nous fait croire que le laplacien vectoriel aurait un pattern proche de la divergence, mais pas du tout, on a bien

$$\vec{\Delta}(\vec{V}) \neq \partial_x^2(V_x) \cdot \vec{e}_x + \partial_y^2(V_y) \cdot \vec{e}_y + \partial_z^2(V_z) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{\Delta}(\vec{V}) = \Delta(V_x) \cdot \vec{e}_x + \Delta(V_y) \cdot \vec{e}_y + \Delta(V_z) \cdot \vec{e}_z$$

Fais bien gaffe à pas te faire avoir.