Notions mathématiques utilisées en physiques

0) Introduction

L'idée c'est d'expliquer les concepts mathématiques dont j'ai besoin, au fur et à mesure que je les rencontre dans mon parcours.

1) La confusion entre variable de grandeur et fonction

En physique on manipule des **grandeurs** (position, distance, température, durée, instant, énergie, etc) que l'on exprime **sous forme de fonction** (position fonction du temps, énergie fonction de la température et de la distance, etc).

Ces fonctions sont donc utilisées comme des fonctions mathématiques, avec ce que cela implique comme trucs que l'on peut faire avec (dérivation, intégration, étude de variation, etc).

Le problème c'est que **d'un point de vue formalisme, il y a confusion** entre la fonction elle-même (un objet mathématique qui est constitué d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée, d'une variable nommée et d'une expression mettant en jeu cette variable nommée), et la valeur que prend la fonction en fonction de la variable qu'on lui passe.

En d'autres termes, on confond la fonction f, et la valeur que prend f pour un argument x donné, c'est-à-dire $f(x)$.

Cela pose des problèmes de cohérence parce que ça n'a pas de sens de dériver une valeur alors qu'on cherche à dériver une expression ou une fonction, idem dans le cadre d'une intégration.

De même, dans le formaliste, si on note z la position verticale d'un système, à un instant t, noter $z(t_A)$ comme si passer t_A à la fonction z allait retourner la valeur, alors qu'il ne s'agit pas d'une fonction, est un en soi un non-sens.

On pourrait simplement se dire « oui mais cette notation signifie "la valeur que prend z quand t égal t_A" », seulement par la suite on va traiter z comme une fonction en intégrant ou dérivant par rapport au temps, ce n'est donc pas une simple notation comme l'argument ci-dessous le sous-entend.

La solution est de considérer que le « parseur » fonctionne comme suit:

- Toute grandeur (par exemple z ou T) varie en fonction du temps, et à chaque instant, elle prend une valeur donnée.
- Donc toute grandeur est régie par une fonction du temps.
- Cette fonction, on peut la noter f indice nom de la variable (f_z ou f_T par exemple).
- On a donc, par exemple $f_z = \mathrm{f}^{\circ} \begin{pmatrix} [t_0,\ t_f]_{\mathbb{R}[\mathrm{s}]} & \rightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{m}] \\ t & \rightarrow & f_z(t) \end{pmatrix}$
- Et donc pour un instant t donné, on a $z = f_z\left(t\right)$
- Comme c'est un peu lourdingue d'écrire $z_A = f_z\left(t_A\right)$ pour spécifier la valeur que prend la grandeur z quand t = t_A, pour des raisons d'ergonomies ou va définir la règle selon laquelle, quand on écrit $z_A\left(t = t_A\right)$ ou $z_A\left(t_A\right)$, ça renvoie $f_z\left(t_A\right)$. En gros si une grandeur se voit passer un argument, ça appelle la fonction qui gère cette grandeur et lui passe l'argument et retourne la valeur correspondante.

2) Le changement de variable au sein d'une intégrale

C'est la technique de base pour utiliser les intégrales en physique, ne serait-ce que parce qu'il arrive souvent que la variable d'intégration ne corresponde pas aux bornes d'intégration (dans le calcul du travail d'une force par exemple).

Le théorème est le suivant:

Soient:

- $I \subseteq \mathbb{R}$
- $J \subseteq \mathbb{R}$
- $K \subseteq \mathbb{R}$
- $f = \mathrm{f}^{\circ} \left(\begin{smallmatrix} J & \to & K \\ x & \to & f(x) \end{smallmatrix} \right)$
- $g = \mathrm{f}^{\circ} \left(\begin{smallmatrix} I & \to & J \\ t & \to & g(t) \end{smallmatrix} \right)$

⇒ on peut donc composer f et g dans le sens $f\left(g\left(x\right)\right)$

Si, pour un intervalle $[t_A,\ t_B] \subseteq I$, on a:

✔ g **dérivable** sur $[t_A,\ t_B]$

✔ la fonction dérivée de g sur $[t_A,\ t_B]$ est **intégrable** sur $[t_A,\ t_B]$

✔ f **continue** sur $[g\left(t_A\right),\ g\left(t_B\right)]$

Alors on peut écrire que:

$$\text{par changement de variable, en posant } u = g\left(t\right)$$

$$\int_{t=t_A}^{t_B} f\left(g\left(t\right)\right) \cdot \mathrm{d}\left(g\right)\left(t\right) = \int_{t=t_A}^{t_B} f\left(u\right) \mathrm{d}u = \int_{u=g(t_A)}^{g(t_B)} f\left(u\right) \mathrm{d}u$$

⇒ Ici on cherche à partir d'une intégrale expanded qu'on voudrait packer en posant $u = g\left(x\right)$

Ensuite, il y a le corollaire (cette fois-ci on cherche à partir d'une intégrale packée pour l'expand en posant $x = g(u)$):

Soient:

- $I \subseteq \mathbb{R}$
- $J \subseteq \mathbb{R}$
- $K \subseteq \mathbb{R}$
- $f = \mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix} J & \to & K \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$
- $\varphi = \mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix} I & \to & J \\ t & \to & \varphi(t) \end{pmatrix}$

  ⇒ on peut donc composer f et φ dans le sens $f(\varphi(t))$

Si, pour un intervalle $[x_A, x_B] \subseteq J$, on a:

✔ $t_A = \mathrm{elof}(I) \quad | \quad \varphi(t_A) = x_A$

✔ $t_B = \mathrm{elof}(I) \quad | \quad \varphi(t_B) = x_B$

✔ φ **bijective** sur $[t_A,\ t_B]$

✔ φ **dérivable** sur $[t_A,\ t_B]$

✔ la fonction dérivée de φ sur $[t_A,\ t_B]$ est **intégrable** sur $[t_A,\ t_B]$

✔ f **continue** sur $[g(t_A),\ g(t_B)]$

Alors on peut écrire que:

$$\int_{x=x_A}^{x_B} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{par changement de variable, en posant } x=\varphi(t)}{=} \int_{x=x_A}^{x_B} f(\varphi(t)) \cdot \mathrm{d}(\varphi)(t) = \int_{t=[t_A=\varphi^{-1}(x_A)]}^{[t_b=\varphi^{-1}(x_B)]} f(\varphi(t)) \cdot \mathrm{d}(\varphi)(t)$$

Du coup, quand on se trouve dans le cas d'un changement de variable au sein d'une intégrale parce que la variable d'intégration ne correspond pas aux bornes, par exemple:

$$\mathrm{W}_1 = \int_{t=t_A}^{t_B} \mathrm{d}z = \int_{z=z_A}^{z_B} \mathrm{d}z = (z_B - z_A)$$

En réalité ce qui est processé est la chose suivante:

$$\mathrm{W}_1 = \int_{t=t_A}^{t_B} \mathrm{d}\left(f_z\left(t\right)\right)$$

(ce qui est évidemment égal à $f_z\left(t_B\right) - f_z\left(t_A\right)$, mais c'est pour comprendre la logique du truc).

Et du coup, par changement de variable posé en arrière-plan $V_z = f_z\left(t\right)$, on a

$$\mathrm{W}_1 = \int_{t=t_A}^{t_B} \mathrm{d}\left(f_z\left(t\right)\right) \;=\; \int_{V_z=f_z(t_A)}^{f_z(t_B)} dV_z = f_z\left(t_B\right) - f_z\left(t_A\right)$$

Bien-sûr, sous réserve que f_z soit dérivable sur $\left[t_A,\ t_B\right]$ et que cette dérivée soit intégrable sur $\left[t_A,\ t_B\right]$, la fonction $\mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix}[t_A,\ t_B] & \to & \{1\} \\ t & \to & 1\end{pmatrix}$ *étant continue sur $\left[t_A,\ t_B\right]$.*

Sauf que comme c'est un peu **contre-intuitif et plus coûteux en charge mentale** d'introduire moult moult noms de variables pour faire de la technique mathématique, on va simplifier tout ça en créant une convention : quand je fais un changement de variable au sein d'une intégrale, je nomme cette variable comme la grandeur qu'elle désigne. Il n'y aura pas de conflit vu que dans une intégrale, la variable est muette, mais pour nos humbles cerveaux d'humains ça permet de voir vraiment le sens de ce qu'on est en train de faire.

Du coup ça donne le fameux:

$$W_1 = \int_{t=t_A}^{t_B} \mathrm{d}z = \int_{z=z_A}^{z_B} \mathrm{d}z$$

Donc pour conclure, on peut faire du changement de variable en veux-tu en voilà, mais faut garder à l'esprit que c'est sous réserve de 3 conditions qu'on a dites plus haut.

3) <u>Équation de cercle dans un repère cartésien</u>

Dans un plan repéré par un repère cartésien $(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_z})$, un cercle de centre O et de rayon $r_{\in\mathbb{R}_+[\mathrm{m}]}$ sera d'équation:

$$x^2 + z^2 = r^2$$

Si ce cercle est de centre C (point quelconque du plan), alors on aura l'équation:

$$(x - x_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$

4) <u>Équation d'ellipse dans un repère cartésien</u>

Déjà il faut rappeler qu'une ellipse correspond à une figure circulaire qui n'est pas ronde mais ovale.

Elle a différentes caractéristiques:

- Elle est composée d'un grand axe et d'un petit axe, perpendiculaires entre eux
- Elle dispose d'un centre qui est l'intersection de ses 2 axes
- Elle dispose de 2 foyers situés sur le grand axe, permettant de tracer l'ellipse avec la méthode du jardinier

L'équation caractéristique d'une ellipse dans un repère cartésien $(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_z})$, de centre O, est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1$$

où $a \in (\mathbb{R}^*)\ [\mathrm{m}]$ correspond à la taille de l'un des 2 axes de l'ellipse

et $b \in (\mathbb{R}^*)\ [\mathrm{m}]$ de même

Si $a > b$, alors on aura le grand axe suivant $\vec{e_x}$, donc une ellipse allongée horizontalement

Si $a < b$, alors on aura le grand axe suivant $\vec{e_z}$, donc une ellipse allongée verticalement

Si $a = b$, alors les 2 axes seront de même longueur ce qui correspond à un cercle.

Si cette ellipse est de centre C (point quelconque du plan), alors on aura l'équation:

$$\left(\frac{x - x_C}{a}\right)^2 + \left(\frac{z - z_C}{b}\right)^2 = 1$$

Enfin, si l'ellipse n'a pas ses axes colinéaires avec la base du repère, mais est rotée de $\theta_{\in\mathbb{R}[\mathrm{rad}]}$, alors son équation dans le repère sera:

$$\left(\frac{(x - x_C)\cos(\theta)\ +\ (z - z_C)\cos(\theta)}{a}\right)^2 + \left(\frac{(x - x_C)\sin(\theta) + (z - z_C)\sin(\theta)}{b}\right)^2 = 1$$

5) Équations différentielles