Mathématiques – Licence 1

Table des matières

1 Fondements - Objets de base **3**
1.1 Ensembles . . . 3
Axiome 1 : d'extensionnalité . . . 3
Axiome 2 : d'existence de l'ensemble vide . . . 3
Axiome 3 : du singleton . . . 3
Axiome 4 : de la paire . . . 3
Axiome 5 : d'extension . . . 4
Définition 1 : d'un ensemble par la compréhension . . . 5
Axiome 6 : de séparation . . . 6
Définition 2 : de l'opérateur d'inclusion d'ensembles $\subseteq$ . . . 6
Axiome 7 : du caractère collectivisant de l'inclusion . . . 7
Définition 3 : de l'opérateur d'union d'ensembles $\cup$ . . . 7
Définition 4 : de l'opérateur d'intersection d'ensembles $\cap$ . . . 9
Définition 5 : de l'opérateur de différence d'ensembles $-$ . . . 10
Définition 6 : de l'opérateur de différence symétrique d'ensembles Δ . . . 10
Résumé des propriétés des opérateurs sur les ensembles . . . 11
Définition 7 : du produit cartésien fondamental $\times_f$ . . . 12
Définition 8 : du produit cartésien fusionnant $\times$ . . . 13
1.2 Fonctions et applications . . . 15
Définition 9 : d'une fonction . . . 15
Définition 10 : d'une application . . . 15
Définition 11 : de l'égalité de 2 fonctions . . . 15
Définition 12 : du graphe d'une application . . . 18
Définition 13 : du domaine de définition d'une fonction . . . 19
Définition 14 : du domaine image d'une fonction . . . 23
Définition 15 : d'une fonction surjective . . . 29
Définition 16 : d'une fonction injective . . . 29
Définition 17 : d'une fonction bijective . . . 30
Définition 19 : de la composition de 2 fonctions . . . 31
Axiome 8 : Ensemble des applications de E dans F . . . 32
1.3 Suites et familles d'éléments . . . 34
Définition 20 : d'une suite . . . 34
Définition 21 : d'une famille d'éléments . . . 37

Définition 22 : d'une famille d'ensembles 40
Axiome 9 : du choix 40
Définition 23 : du recouvrement d'un ensemble 41
Définition 24 : d'une partition d'un ensemble 41
Théorème 2 : Bijection du générateur d'application caractéristique de $A_{\subseteq E}$ 42
1.4 Lois de composition 43
Définition 25 : d'une LCI sur un ensemble C 43
Définition 26 : d'un ensemble stable pour une LCI donnée 45
Définition 27 : d'une LCI produit de 2 LCI 46
Définition 28 : d'une LCI produit de $n_{\in[2,+\infty[_{\mathbb{N}}}$ LCI 46
Définition 29 : de l'associativité d'une LCI 48
Définition 30 : de la commutativité d'une LCI 48
Définition 31 : de l'élément neutre à gauche pour une LCI 48
Définition 32 : de l'élément neutre à droite pour une LCI 49
Définition 33 : de l'élément neutre pour une LCI 49
Définition 34 : d'un élément inversible à gauche pour une LCI 50
Définition 35 : d'un élément inversible à droite pour une LCI 50
Définition 36 : d'un élément inversible pour une LCI 51
Définition 37 : d'un élément simplifiable à gauche pour une LCI 52
Définition 38 : d'un élément simplifiable à droite pour une LCI 53
Définition 39 : d'un élément simplifiable pour une LCI sur un ensemble . . 54
Définition 40 : d'un élément absorbant à gauche pour une LCI 56
Définition 41 : d'un élément absorbant à droite pour une LCI 56
Définition 42 : d'un élément absorbant pour une LCI 57
Définition 43 : d'un 'élément idempotent pour une LCI 57
Définition 44 : d'un morphisme d'une LCI 58
Définition 45 : d'un magma 61
1.5 Relations 71
Définition 46 : d'une relation binaire 71
Définition 47 : du domaine à gauche d'une relation binaire 75
Définition 48 : du domaine à droite d'une relation binaire 75
Définition 49 : d'une relation binaire totale 76
Définition 50 : d'une relation binaire induite R de $E'_{\subseteq E} \to F'_{\subseteq F}$ 77
Définition 51 : d'une relation binaire inverse d'une relation binaire 78
Définition 52 : d'une relation binaire complémentaire d'une relation binaire 80
Définition 53 : de la composition de 2 relations binaires 82
Définition 54 : de la réflexivité d'une relation binaire interne 83
Définition 55 : de l'antiréflexivité d'une relation binaire interne 83
Définition 56 : de la transitivité d'une relation binaire interne 84
Définition 57 : de l'antitransitivité d'une relation binaire interne 85

1 Fondements - Objets de base

1.1 Ensembles

Axiome 1. *"Axiome d'extensionnalité"*

$$[\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F)] \Leftrightarrow (E = F)$$

Dit autrement : *« si le fait qu'un objet mathématique appartienne à E signifie qu'il appartient forcément aussi à F, et vice versa, alors c'est que les ensembles E et F sont identiques ».*

Axiome 2. *"Axiome d'existence de l'ensemble vide"*

$$\exists! E \mid\ (\forall x,\ x \notin E)$$

$$\wedge$$

$$E = \varnothing$$

Dit autrement : *« Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\varnothing$ et il est unique compte tenu de l'axiome 1 (axiome d'extensionnalité) ».*

Axiome 3. *"Axiome du singleton"*

$$\forall a,\ \exists! E \mid (E = \{a\})$$

Dit autrement : *« Pour tout objet mathématique, il exist un ensemble ne contenant que cet objet mathématique et cet ensemble est unique ».*
Dit autrement : *« Tout objet mathématique peut être wrappé dans un ensemble ».*

Axiome 4. *"Axiome de la paire"*

$$\forall a, b,\ \exists E \mid\ (E = \{a,\ b\})$$

Dit autrement : *« Pour tout couple d'objets mathématiques, il existe un ensemble qui les contient tous les deux exclusivement et qui est unique ».*
Dit autrement : *« Tout couple d'objets mathématiques peut être wrappé dans un ensemble ».*

Remarques : $\forall a, b$ *:*
- $(\{a, b\} = \{b, a\})$
- $\{a, a\} = \{a\}$
- $(x \in \{a, b\}) \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b))$

Axiome 5. *"Axiome d'extension"*

$$\forall a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{n_{\in \mathbb{N}^*}},\ \exists! E \mid E = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}$$

Dit autrement : *« Ce qui est vrai pour 2 éléments dans le cadre de l'axiome 4 (axiome de la paire) est également vrai pour $n_{\in \mathbb{N}^*}$ éléments. On peut voir l'axiome d'extension comme une extension de l'axiome de la paire ».*

Dit autrement : *« Pour tout tout n-uplet d'objets mathématiques, il existe un ensemble qui contient exclusivement tous ces éléments et qui est unique ».*

Dit autrement : *« tout n-uplet d'objets mathématiques peut être wrappé dans un ensemble ».*

Remarque :

- *Le fait que tout objet ou multitude d'objets puisse systématiquement être wrappé en un ensemble fait que quand on travaillera sur des fonctions qui prennent en argument des ensembles, vu que l'ensemble contenant tous les ensembles n'existe pas, on raisonnera systématiquement sur un ensemble "wrapper" qu'on appellera généralement W.*

Définition 1. *"Définition d'un ensemble par la compréhension"*
Soit P une propriété collectivisante.

$$\exists E \Rightarrow (\exists P \ : \ (E = \{x \mid P(x)\}))$$

Dit autrement : *« Si un objet mathématique E existe, alors il existe une propriété collectivisante P qui s'applique à chaque élément de l'ensemble E et qui permet de générer ce dernier via la feature "tous les éléments qui ont telle(s) propriété(s)" ».*

Remarques :

- *Une propriété collectivisante c'est une propriété qui permet de générer un ensemble de manière fiable, sans paradoxe. Par exemple la propriété "est pair" est collectivisante (et sous-entend "objet qui dispose d'une méthode intrinsèque permettant de déterminer s'il est pair, et dont la valeur de retour est True"), tandis que la propriété "est inclus dans lui-même" (le fameux paradoxe du barbier) n'est pas collectivisante.*
- *Il est important lors de la création d'un ensemble par compréhension, de bien utiliser une propriété collectivisante.*
- *Une propriété est donc une fonction qui prend un objet mathématique en argument et qui retourne un booléen. Cette fonction peut être absolue, pouvant prendre en argument les objets mathématiques qui lui sont spécifiés dans sa définition, ou relative à un objet, en tant que méthode de ce dernier (plus flexible).*
- *Les principales propriétés collectivisantes $P(x)$ sont :*
  – $x \in E$ *avec* $x \neq E$
  – $x = y$
  – $x \subseteq y$
  – $\ldots$

Axiome 6. *"Axiome de séparation"*

Soit A un ensemble contenant des ensembles dont les éléments disposent d'une propriété P qui peut valoir True ou False

$$\forall E \in A,\ ((x \in E) \wedge P(x)) \text{ est collectivisante}$$

Dit autrement : *« N'importe quel ensemble dont les éléments disposent d'une propriété, peut être filtré à l'aide de cette propriété pour obtenir un nouvel ensemble ne contenant que certains éléments sans prendre le risque de se retrouver avec un paradoxe ».*

Remarques :

- *Du coup on a* $\{\ x \mid ((x \in E) \wedge P(x))\ \}$ *qui est souvent utilisé, et pour simplifier la lecture, on peut l'ecrire comme ceci* $\{\ x \in E \mid P(x)\}$*. Donc*

$$\{\ x \in E \mid P(x)\} = \{\ x \mid ((x \in E) \wedge P(x))\ \}$$

- *Ça veut donc dire que tout ensemble* $\{\ x \in E \mid P(x)\ \}$ *existe dès lors que E existe et que P est une propriété de chaque élément de E (pouvant valoir True ou False), pas de galère.*

Définition 2. *"Inclusion d'un ensemble dans un autre"*

$$F \subseteq E \Leftrightarrow \forall x,\ (x \in F \Rightarrow x \in E)$$

Dit autrement : *« Quand* $F \subseteq E$*, tout élément de F est aussi dans E et F est un sous-ensemble de E ».*

Remarques :

- $\varnothing$ *est un sous-ensemble de tous les ensembles*
- *Tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même*
- *Ici, l'opérateur* $\subseteq$ *est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W, on peut le faire en faisant :*

$$\subseteq_W = F^{\circ} \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow & \{0,1\} \\ (A,B) & \mapsto & \begin{pmatrix} A \subseteq B : 1 \\ A \nsubseteq B : 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ou, sans utiliser l'opérateur $\subseteq$ *:*

$$\subseteq_W = F^{\circ} \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow & \{0,1\} \\ (A,B) & \mapsto & \begin{pmatrix} (\forall x \in A,\ x \in B) : 1 \\ (\exists x \in A \mid x \notin B) : 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- $\subseteq_W$ *est une relation d'ordre.*

Axiome 7. *"La propriété d'inclusion est collectivisante"*
Soit P une propriété sur les éléments d'un ensemble E

$$(P(x) := (x \subseteq E)) \text{ est collectivisante.}$$

Dit autrement : *« Si on a un ensemble $\{ E' \mid E' \subseteq E \}$ c'est ok. D'ailleurs ça correspond à l'ensemble des sous-ensembles de E, encore appelé ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$ ».*

Définition 3. *"Définition de l'opérateur d'Union / Réunion d'ensembles $\cup$"*

$$\forall E, F,\ \exists! G \mid\ (\forall x,\ (x \in G) \Leftrightarrow ((x \in E) \vee (x \in F)))$$

Dit autrement : *«*

$$\forall E, F,\ \exists! G \mid G = \{\ x \mid\ (x \in E) \vee (x \in F)\ \} = E \cup F$$

Dit autrement : *« Pour tout couple d'ensemble, il existe un 3e ensemble qui contient tous les éléments des 2 premiers ensemble réunis. Ça veut dire que l'opérateur de réunion $\cup$ fonctionne pour tout couple d'ensemble sans bug ».*

Dit autrement : *« Tout couple d'ensemble peut être fusionné en un 3e ensemble contenant tous les ensembles des 2 premiers ensembles ».*

Dit autrement :

$$G = E \cup F = \{\ x \mid\ (x \in E) \vee (x \in F)\ \}$$

Remarque :

- *L'opérateur d'union peut s'utiliser comme un opérateur binaire classique, genre $A \cup B$, mais il peut aussi s'utiliser comme l'opérateur de somme :*

$$\text{à l'instar de } \sum_{i=a}^{b} (Expr(i)) \text{ ou} \sum_{i \in I} (Expr(i))$$

$$\text{on peut faire } \bigcup_{i=a}^{b} (Expr(i)) \text{ ou} \bigcup_{i \in I} (Expr(i))$$

Cependant attention, dans les notations avec les bornes "$\in I$", si I est un ensemble non ordonné (genre $\{a,\ b,\ c\}$ plutôt que $(a,\ b,\ c)$), vu que ça prendra les éléments dans l'ensemble selon un ordre aléatoire, l'opération ne sera pas la même et si les opérateurs ne sont pas commutatifs, le résultat sera variant. Attention donc à choisir un ensemble I ordonné pour éviter des effets de bord.

De même, si I est un ensemble fini on a l'assurance que le retour de l'expression est défini, c'est sécurisé. Par contre si I est infini, il n'est pas dit que l'expression existe et la somme ou le produit ou l'union ou l'intersection ou autre ne sera pas défini ce qui peut causser moult bug.

- *Ici, l'opérateur $\cup$ est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W, on peut le faire en faisant :*

$$\cup_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \to & \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto & A \cup B \end{pmatrix}$$

ou, sans utiliser l'opérateur $\cup$:

$$\cup_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \to & \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto & \{x \in W \mid ((x \in A) \vee (x \in B))\} \end{pmatrix}$$

Définition 4. *"Définition de l'opérateur d'Intersection d'ensembles $\cap$"*

$$\forall E, F,\ \exists ! G \mid (\forall x \in G,\ ((x \in E) \wedge (x \in F)))$$

Dit autrement :

$$\forall E, F,\ \exists ! G \mid G = \{x \in E \mid x \in F\} = E \cap F$$

Dit autrement : *« Pour tout couple d'ensemble, il existe un 3^e^ ensemble qui contient tous les éléments compris à la fois dans l'un et dans l'autre ensemble. Ça veut dire que l'opérateur d'intersection $\cap$ fonctionne pour tout couple d'ensemble sans bug ».*

Remarque :

- *$E \cap F$ existe du fait de l'axiome 6 (axiome de séparation) et est unique du fait de l'axiome 1 (axiome d'extensionalité)*
- *L'opérateur d'intersection peut s'utiliser comme un opérateur binaire classique, genre $A \cap B$, mais il peut aussi s'utiliser comme l'opérateur de somme :*

$$\text{à l'instar de } \sum_{i=a}^{b} (Expr(i)) \text{ ou} \sum_{i \in I} (Expr(i))$$

$$\text{on peut faire } \bigcap_{i=a}^{b} (Expr(i)) \text{ ou} \bigcap_{i \in I} (Expr(i))$$

Cependant attention, dans les notations avec les bornes "$\in I$", si I est un ensemble non ordonné (genre $\{a,\ b,\ c\}$ plutôt que $(a,\ b,\ c)$), vu que ça prendra les éléments dans l'ensemble selon un ordre aléatoire, l'opération ne sera pas la même et si les opérateurs ne sont pas commutatifs, le résultat sera variant. Attention donc à choisir un ensemble I ordonné pour éviter des effets de bord.

De même, si I est un ensemble fini on a l'assurance que le retour de l'expression est défini, c'est sécurisé. Par contre si I est infini, il n'est pas dit que l'expression existe et la somme ou le produit ou l'union ou l'intersection ou autre ne sera pas défini ce qui peut causser moult bug.

- *Ici, l'opérateur $\cap$ est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W, on peut le faire en faisant :*

$$\cap_W = F^{\circ} \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto & A \cap B \end{pmatrix}$$

ou, sans utiliser l'opérateur $\cap$:

$$\cap_W = F^{\circ} \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto & \{x \in W \mid ((x \in A) \wedge (x \in B))\} \end{pmatrix}$$

Définition 5. *"Définition de l'opérateur de différence d'ensembles $-$ "*

$$\forall x,\ x \in (E - F) \Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (x \notin F))$$

Dit autrement :

$$-(E,\ F) = E - F = \{\ x \mid\ ((x \in E) \wedge (x \notin F))\ \}$$

Dit autrement : *« C'est l'ensemble des éléments de E auxquels on a retiré les éléments de F ».*

Remarques :

- *$E - F$ existe du fait de l'axiome 6 (axiome de séparation) et est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionalité)*
- *Si $F \subseteq E$, alors $E - F$ est égal au complémentaire de F par rapport à E, noté $\complement_E(F)$*
- *On peut voir l'opérateur $-$ entre 2 ensembles comme l'extension de la notion de complémentaire entre 2 ensembles, vu que $C_E(F) = E - F$*

- *Ici, l'opérateur $-$ est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W, on peut le faire en faisant :*

$$-_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \to & \mathcal{P}(W) \\ (A,B) & \mapsto & A - B \end{pmatrix}$$

ou, sans utiliser l'opérateur $-$:

$$-_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \to & \mathcal{P}(W) \\ (A,B) & \mapsto & \{x \in W \mid ((x \in A) \wedge (x \notin B))\} \end{pmatrix}$$

Définition 6. *"Définition de l'opérateur différence symétrique d'ensembles"*

$$\forall x,\ x \in (E \Delta F) \Leftrightarrow (x \in (E \cup F - E \cap F))$$

Dit autrement :

$$\Delta(E,F) = (E \cup F - E \cap F)$$

Dit autrement : *« La différence symétrique entre 2 ensembles, c'est la reunion de ces 2 ensembles à laquelle on retire les éléments communs aux 2 ensembles ».*

Remarque :

- *Ici, l'opérateur Δ est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W, on peut le faire en faisant :*

$$\Delta_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \to & \mathcal{P}(W) \\ (A,B) & \mapsto & A \Delta B \end{pmatrix}$$

ou, sans utiliser l'opérateur Δ ni $\cup$ ni $\cap$:

$$\Delta_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \to & \mathcal{P}(W) \\ (A,B) & \mapsto & \{x \in W \mid ((x \in A) \oplus (x \in B))\} \end{pmatrix}$$

Résumé des propriétés des opérateurs $\cup$ et $\cap$

- Associativité de $\cup$:
  $E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$
- Commutativité de $\cup$:
  $E \cup F = F \cup E$
- $\varnothing$ élément neutre de $\cup$:
  $\varnothing \cup E = E$
- $\forall E$, E est idempotent pour $\cup$:
  $E \cup E = E$

- Associativité de $\cap$:
  $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$:
- Commutativité de $\cap$:
  $E \cap F = F \cap E$
- $\varnothing$ élément absorbant de $\cap$:
  $\varnothing \cap E = \varnothing$
- $\forall E$, E est idempotent pour $\cap$:
  $E \cap E = E$

- Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:
  $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
- Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:
  $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
- Inclusion et union :
  $E \subseteq F \Leftrightarrow E \cup F = F$
- Inclusion et intersection :
  $E \subseteq F \Leftrightarrow E \cup F = F$
- - est un morphisme de $\cup \rightarrow \cap$:
  $E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G)$
- - est un morphisme de $\cap \rightarrow \cup$:
  $E - (F \cap G) = (E - F) \cup (E - G)$

Définition 7. *"Définition du produit cartésien fondamental / restreint"*

$$\forall E, F,\ \exists! G = E \times_f F = \{\ (a,b)\ \mid\ ((a \in E) \wedge (b \in F))\ \}$$

Dit autrement :

$$E \times_f F = \{\ (a,b)\ \mid\ ((a \in E) \wedge (b \in F))\ \}$$

Dit autrement : *« Quand on a 2 ensembles, on peut créer un nouvel ensemble contenant tous les couples qu'il est possible de former avec un élément du premier ensemble et un élément du second ensemble ».*

Remarques :

- $E \times_f F$ *est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionalité)*
- *Il s'agit d'un opérateur binaire*
- *Cet opérateur N'EST PAS associatif,* $E \times_f F \neq F \times_f E$
- $(E \times_f F = \varnothing) \Leftrightarrow ((E = \varnothing) \vee (F = \varnothing))$
- $((a_1,\ a_2) = (b_1,\ b_2)) \Leftrightarrow ((a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2))$

Définition 8. *"Définition du produit cartésien fusionnant"*

$$\forall E_1, E_2, \dots, E_{(n_{\in \mathbb{N}^*})},$$

$$\begin{aligned} &\exists! G = \{\ (a_1, a_2, \dots, a_n)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge \dots \wedge (a_n \in E_n))\ \} \\ &\textit{et } G = (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \end{aligned}$$

Dit autrement :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n_{\in \mathbb{N}^*}} (E_i) &= (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \\ &= \{\ (a_1, a_2, \dots, a_n)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge \dots \wedge (a_n \in E_n))\ \} \end{aligned}$$

Dit autrement : *« Quand on a $n_{\in \mathbb{N}^*}$ ensembles, on peut créer un nouvel ensemble contenant tous les n-uplets qu'il est possible de former avec un élément de chaque ensemble ».*

Remarques :

- $\prod_{i=1}^{n_{\in \mathbb{N}^*}} (E_i)$ *est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionalité)*

- *Il s'agit d'un opérateur n-aire*
- *Généralement quand on voit des produits d'ensembles, il s'agit de produits cartésiens fusionnant et non de produits cartésiens fondamentaux, sauf mention contraire*
- *Du coup le produit cartésien fusionnant est d'une certaine manière un moyen de rendre le produit cartésien fondamental associatif*

- $\left(\prod_{i=1}^{n_{\in \mathbb{N}^*}} (E_i) = \varnothing\right) \iff (\exists k \in \mathbb{N}^*\ \mid\ (E_i = \varnothing))$

- *Ça permet de définir l'opérateur puissance appliqué aux ensembles, avec* $E^{(n_{\in \mathbb{N}^*})} = (E \times E \times \dots \times E)$ *(n fois)*
- *La diagonale de* $E^{(n_{\in \mathbb{N}^*})}$ *est* $\{\ (a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)\ \mid\ (a_1 = a_2 = \dots = a_n)\ \}$, *c'est-à-dire* $\{\ (x,\ x,\ \dots,\ x) \in E^n\ \}$

- $\left((a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{(n_{\in \mathbb{N}^*})}) = (b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)\right)$
  $\Leftrightarrow ((a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \dots \wedge (a_n = b_n))$

- *Il faut bien comprendre la différence entre le produit cartésien fondamental et le produit cartésien fusionnant. Avec le produit cartésien fondamental, on a :*

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 \times E_3 &= (E_1 \times E_2) \times E_3 \\ &= \{\ (a_1, a_2)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2))\ \} \times E_3 \end{aligned}$$
$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{\ (b, a_3)\ \mid\ ((b \in \{\ (a_1, a_2)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2))\ \}) \wedge (a_3 \in E_3))\ \}$$

  Ce qui donne donc un ensemble de couples du type $((a_1, a_2)\ ,\ a_3)$*, tandis qu'avec le produit cartésien fusionnant on aura :*

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{\ (a_1, a_2, a_3)\ \mid\ ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge (a_3 \in E_3))\ \}$$

  Ce qui donne un ensemble de triplets du type (a_1, a_2, a_3)

1.2 Fonctions et applications

Définition 9. *"Définition d'une fonction"*

Une fonction est un objet mathématique constitué :

- *d'un ensemble de départ E*
- *d'un ensemble d'arrivée F*
- *d'une variable muette*
- *d'une expression sur cette variable muette*

On la déclare comme ça :

$$\text{Soient } E \text{ et } F \text{ 2 ensembles}$$
$$f := \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} E & \to & F \\ x & \mapsto & Expr\,(x) \end{pmatrix}$$

Dit autrement : *« Une fonction c'est un objet mathématique qui permet de prendre un élément de son ensemble de départ et, si c'est possible, lui appliquer un procédé pour le transformer en un élément de son ensemble de sortie ».*

Remarques :

- *L'ensemble des fonctions de E à valeurs dans F existe et est noté $\mathcal{F}\,(E \to F)$, ou encore F^E*

Définition 10. *"Définition d'une application"*

Une application est une fonction donc tous les éléments de l'ensemble de départ disposent d'une image dans l'ensemble d'arrivée.

Dit autrement : *« Une application est une fonction dont l'ensemble de départ est égal à son ensemble de définition. ».*

Remarques :

- *L'ensemble des applications de E à valeurs dans F existe et se note $\mathcal{F}_A\,(E \to F)$*
- *On a donc logiquement $\mathcal{F}_A\,(E \to F) \subseteq \mathcal{F}\,(E \to F)$*
- *L'ensemble des fonctions de E à valeurs dans F qui ne sont pas des applications se note $\mathcal{F}_{\cancel{A}}(E \to F)$.*
- *On a donc logiquement $\mathcal{F}_{\cancel{A}}(E \to F) \subseteq \mathcal{F}\,(E \to F)$*
- *On a également logiquement $\mathcal{F}_A\,(E \to F) \cup \mathcal{F}_{\cancel{A}}(E \to F) = \mathcal{F}\,(E \to F)$*

Définition 11. *"Définition de l'égalité de 2 fonctions"*

$$\text{Soient } f = \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix} \text{ et } g = \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} I_g & \to & O_g \\ t & \mapsto & g(t) \end{pmatrix}$$

$$f = g \Leftrightarrow ((I_f = I_g) \wedge (O_f = O_g) \wedge (\forall x \in I_f,\ f(x) = g(x)))$$

Dit autrement : *« 2 fonctions sont égales si elles ont le même ensemble d'entrée, le même ensemble de sortie et que pour une même entrée elles donnent une meme sortie (qu'elles ont la même expression quoi) ».*

Remarques :

- *La restriction de* f *à* I'_f *se note* $f_{|I'_f}$ *(la fonction aura alors le même ensemble image que* f*, sauf si ce dernier est égal à son domaine image auquel cas la nouvelle fonction aura pour ensemble de sortie son nouveau domaine image), ou bien* $f_{|I'_f \to O_f}$ *(dans ce dernier cas la situation est univoque)*
- *La co-restriction de* f *à* O'_f *se note* $f_{|I_f \to O'_f}$
- *De manière générale, on peut prendre une fonction* f *et créer une nouvelle fonction en modifiant ses ensembles d'entrée et de sortie en faisant* $f_{|I'_f \to O'_f}$

- *Certains appellent p_i l'application suivante :*

$$p_i := \digamma^{\circ} \begin{pmatrix} \left(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{\left(n \in \mathbb{N}^*\right)}\right) & \to O_{p_i} \\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) & \mapsto x_i \end{pmatrix}$$

  appellée "application i-eme coordonnée" ou "i-eme application coordonnée" ou "i-eme projection", qui en gros prend un n-uplet et retourne son i-eme élément, genre $p_3\,(1,\ 3,\ 42,\ a,\ b,\ c)$ *retourne 42. Bien évidemment il faut que* $i \in]0, n]_{\mathbb{N}}$

- *L'opérateur "produit cartésien fondamental"* $\times$ *des fonctions fonctionne comme suit :*

$$f_1 \times f_2 := \digamma^{\circ} \begin{pmatrix} (I_{f_1} \times I_{f_2}) & \to & (O_{f_1} \times O_{f_2}) \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (f_1(x_1),\ f_2(x_2)) \end{pmatrix}$$

  En gros ça retourne une fonction qui prend 2 arguments et retourne un couple de valeurs. L'opérateur "produit cartésien fusionnant" $\times$ *a le même fonctionnement mais c'est un opérateur n-aire et pas un opérateur binaire comme le produit cartésien fondamental.*

- *Quand* $I_{f_1} = I_{f_2}$*, certains définissent*

$$(f_1, f_2) := \digamma^{\circ} \begin{pmatrix} I_{f_1} & \to & (O_{f_1} \times O_{f_2}) \\ x & \mapsto & (f_1 \times f_2)(x,\ x) \end{pmatrix}$$

  En gros c'est juste un moyen d'avoir une fonction à une variable mais la notation peut porter à confusion avec le couple de 2 fonctions (f_1, f_2) *donc pas génial du tout.*

Définition 12. *"Graphe d'une application"*

Soit $f := \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$

Le graphe de f *est :*

$$\mathcal{G}_f := \{\ (x, y) \in (I_f \times O_f)\ \mid y = f(x)\ \}$$

Dit autrement :

$$\mathcal{G}_f := \{\ (x,\ f(x))\ \mid\ x \in I_f\ \}$$

Dit autrement : *« Le graphe d'une application c'est l'ensemble des "points" de cette application, c'est-à-dire l'ensemble des couples* $(x, f(x))\ \forall x \in I_f$ *».*

Remarques :

- *Certains ouvrages définissent une application par un triplet* $(I_f,\ \Gamma,\ O_f)$ *où* Γ *vérifie que* $\forall x \in I_f,\ \exists! y \in O_f \mid ((x, y) \in \Gamma)$*, c'est-à-dire en français : « Tout élément de* I_f *a une unique image dans* O_f *par* f *»*
- *Le graphe de l'application identité sur* E*,* $Id_E = \digamma^{\circ}\begin{pmatrix} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{pmatrix}$ *est la diagonale de* E^2
- *Le graphe de* $f_{|(I'_f)_{\subseteq I_f}}$ *est* $\mathcal{G}\left(f_{|(I'_f)_{\subseteq I_f}}\right) = \mathcal{G}_f \cap \left(I'_f \times O_f\right)$
- *Le graphe d'une application vide* $f_{\varnothing}$ *(c'est-à-dire une application dont l'ensemble de départ est* $\varnothing$*) est l'ensemble vide* $\varnothing$

- $\mathcal{G}$ *est donc un opérateur qui peut prendre en argument une application, avec la syntaxe* $\mathcal{G}(f)$ *ou* $\mathcal{G}_f$ *et retourner le graphe de l'application. Si on lui passe en argument une fonction qui n'est pas en application, ça cast la fonction en application en restreingnant l'ensemble de départ au domaine de définition de la fonction et ça retourne le graphe de l'application ainsi obtenue.*

Définition 13. *"Domaine de définition d'une fonction"*
Soit $f = F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$

$$D(f) = \{\ x \in I_f \mid (\exists y \in O_f\ :\ (f(x) = y))\ \}$$

Dit autrement : *« Le domaine de définition d'une fonction est un sous-ensemble de son ensemble de départ, dont TOUS les éléments ont au moins une image dans l'ensemble d'arrivée, par la fonction ».*

Remarques :

- *Le domaine de définition d'une fonction* f *est donc noté* $D(f)$*.* D *est un opérateur qui peut prendre en argument obligatoire, soit une fonction, soit une expression.*

- *Sa syntaxe exhaustive dans le cas où on lui passe une fonction est* $D_{A \to B}(f)$ *où* A *est l'ensemble de départ que l'on impose (restreint ou étend) à la fonction, et* B *est l'ensemble d'arrivée que l'on impose (co-restreint ou co-étend) à la fonction. Ça donne plus de flexibilité en permettant d'obtenir un domaine de définition compte tenu d'un ensemble de départ et d'un ensemble d'arrivée. En l'absence de précision du domaine de départ et d'arrivée, genre* $D(f)$*, l'opérateur considère que l'ensemble de départ à considérer est l'ensemble de départ de la fonction et l'ensemble d'arrivée à considérer est l'ensemble d'arrivée de la fonction. On a donc :*
$$D_{A \to B}(f) = D\left(f_{|A \to B}\right)$$
et
$$D(f) = D_{I_f \to O_f}(f)$$

- *Sa syntaxe exhaustive dans le cas où on lui passe une expression est* $D_{variable:A \to B}(Expr(variable,\ variable_2,\ \ldots))$*, par exemple :*
$D_{x:A \to B}(3ax + b)$*, la variable précisée étant celle dont on veut l'ensemble d'appartenance inclus dans* A *tel que l'expression appartienne à un ensemble inclus dans* B*.*

  En gros l'opérateur D *va caster l'expression en fonction, en considérant que la variable est celle passée en argument et que les ensembles de départ et d'arrivée sont ceux passés en argument, pour ensuite traiter la fonction comme vu plus haut. Donc on a par exemple :*
$$D_{x:A \to B}(3x + 6) = D\left(F^{\circ}\begin{pmatrix} A & \to & B \\ x & \to & 3x+6 \end{pmatrix}\right)$$

S'il y a plusieurs variables dans l'expression, il faudra que les autres variables soient définies en amont (genre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) où à la volée dans l'expression (genre $D_{x:A\to B}\left(3\left(a_{\in\mathbb{R}}\right)x + \left(b_{\in\mathbb{R}}\right)\right)$). Cela signifie qu'une expression du type $D_{x:A\to B}\left(3ax + b\right)$ où a et b n'ont pas été préalablement définis dans le scope va raise error.

Si une des autres variables est déclarée telle que l'expression ne peut pas appartenir à B, par exemple $D_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(\frac{3}{\left(a_{\in\mathbb{R}}\right)} + 6x\right)$, vu que a peut être nul et qu'on veut un résultat toujours réel, ça va raise error. De manière générale, si on a quelque chose d'indécidable, ça raise error. C'est donc de notre responsabilité, lorsqu'il y a des constantes dans l'expression, de bien les définir en amont pour s'assurer que l'expression passée en argument ne fera pas tout crasher.

Si l'expression est telle qu'il est impossible qu'elle appartienne à B, alors ça renverra $\varnothing$. Par exemple, $D_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(\frac{x}{a-a}\right) = \varnothing$

Si la variable précisée en argument n'est pas présente dans l'expression, alors ça retournera A ou $\varnothing$, en fonction de si l'expression appartient à A d'emblée ou non. Par exemple $D_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+}\left(3\left(a_{\in\{3,4\}}\right)^2 + 6\right) = \mathbb{R}$,
et pour $a \in \{3, 4\}$, $D_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*}\left(\left(3-a\right)\left(4-a\right)\right) = \varnothing$

Ça peut tout à fait gérer des fonction à plusieurs variables, donc on peut par exemple faire

$$D_{(x,\ a,\ b):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^*}\left(3ax^2 + bx + 42\right)$$

Enfin, si on ne précise pas les ensembles A et B, il est considéré qu'il s'agit de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De même, si la variable n'est pas précisée, il est considéré que c'est la ou les variable.s non déclarée.s de l'expression (avec un tuple classé par ordre d'apparition des variables dans l'expression). par exemple :

$$D_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*}\left(3x^2 + 6x + 42\right) = D_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*}\left(3x^2 + 6x + 42\right)$$

ou

$$D_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}\left(3ax^2 + 6\left(b_{\in\{1,\ 6,\ 42\}}\right)x + 42\right) = D_{(a,\ x):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}\left(3ax^2 + 6\left(b_{\in\{1,\ 6,\ 42\}}\right)x + 42\right)$$

ou

$$D_{\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}\left(3ax^2 + 6bx + 42\right) = D_{(a,\ x,\ b):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}\left(3ax^2 + 6bx + 42\right)$$

Du coup, logiquement, on a $D\left(3a^2 + bx + 42\right) = D_{(a,\ b,\ x):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}\left(3a^2 + bx + 42\right)$

Bien entendu, si l'ensemble de départ ne correspond pas (par exemple $D_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(3x + a^2\right)$ au lieu de $D_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}\left(3x + a^2\right)$), ça raise error.

Mais dans ces derniers cas, il est préférable de passer par une fonction correctement déclarée plutôt que par une expression.

- *Du coup, l'opérateur $D_{A\to B}$ est la fonction suivante :*

$$D_{A\to B} = D\left(A, B\right) = F^{\circ}\begin{pmatrix} \mathcal{F}\left(\mathcal{P}\left(W\right) \to \mathcal{P}\left(W\right)\right) & \to & \mathcal{P}\left(A\right) \\ f & \mapsto & \left\{x \in A \mid \left(\exists y \in B \ : \ f_{\mid A\to B}\left(x\right) = y\right)\right\} \end{pmatrix}$$

- *De manière plus générale, l'opérateur D au sein d'un ensemble wrapper W est la fonction suivante :*

$$D = F^{\circ}\begin{pmatrix} \left(\mathcal{P}\left(W\right) \times \mathcal{P}\left(W\right)\right) & \to & \mathcal{F}\left(\left(\mathcal{P}\left(W\right)\right)^{\mathcal{P}(W)} \ \to \ P\left(W\right)\right) \\ \left(A, B\right) & \mapsto & D_{A\to B} = F^{\circ}\begin{pmatrix} \mathcal{F}(A \to B) & \to & \mathcal{P}(A) \\ f & \mapsto & \left\{x{\in}A \mid \left(\exists y{\in}B \ : \ f_{\mid A\to B}(x){=}y\right)\right\} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que l'opérateur D est une fonction qui prend 2 ensembles A et B et renvoit une fonction, cette dernière prenant en argument une fonction d'ensemble de départ A et d'ensemble d'arrivée B et retourne le domaine de définition de cette fonction.

Donc d'un point de vue parsing, l'instruction $D_{A\to B}\left(f\right)$ correspond en réalité à $\left(D\left(A,\ B\right)\right)\left(f\right)$

J'ai préféré designer le truc en 2 fonctions qui se chaînent plutôt qu'une seule qui prend un triplet pour permettre plus de flexibilité. Mais sinon en effet on aurait tout aussi bien pu avoir

$$D = F^{\circ}\begin{pmatrix} \left(\mathcal{P}\left(W\right)\right)^{2} \times \left(\mathcal{P}\left(W\right)\right)^{\mathcal{P}(W)} & \to & \mathcal{P}\left(W\right) \\ \left(A, B, f\right) & \mapsto & \left\{x \in A \mid \left(\exists y \in B \ : \ f_{\mid A\to B}\left(x\right) = y\right)\right\} \end{pmatrix}$$

- *Enfin, il y a une notation particulière qui parfois peut être pratique. Il s'agit de la notation f_*, genre $f_*\left(A\right)$, qui est une façon raccourcie d'obtenir le domaine de définition de f co-restreint à A. Du coup, on a*

$$f_*\left(A\right) = D_{I_f\to A}\left(f\right) = D\left(f_{\mid I_f\to A}\right)$$

$$f_*\left(O_f\right) = D\left(f\right)$$

- *Du coup on peut voir la notation $_*$ comme un opérateur qui s'applique à la fonction nommée juste avant, et qui retourne une fonction prenant un ensemble en argument et retournant le domaine de définition correspondant. On a donc, au sein d'un ensemble wrapper W :*

$$_* = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} & \to & (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} \\ f & \mapsto & f_* = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \to & \mathcal{P}(W) \\ A & \mapsto & D_{|I_f \to A}(f) = \left\{ x \in I_f \ | \ (\exists y \in A \ : \ f(x) = y) \right\} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Cette notation $f_*(A)$, certains auteurs l'appellent le "domaine image réciproque", parfois noté $f^{-1}(B)$ mais cela porte à confusion avec la bijection réciproque d'autres auteurs, ou l'opérateur puissance des fonctions.

- *Il y a également des flemmards qui notent $f_*(y)$ au lieu de $f_*(\{y\})$, c'est également à éviter dans l'idéal.*

- *Il y a donc différentes choses notables concernant f_* :*

  - $f_*(\varnothing) = \varnothing$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \to \varnothing}\right) = \varnothing \right)$
  - $f_*(A - B) = f_*(A) - f_*(B)$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \to (B-A)}\right) = D\left(f_{|I_f \to B}\right) - D\left(f_{|I_f \to A}\right) \right)$
  - $A \subseteq B \Rightarrow f_*(A) \subseteq f_*(B)$ $\quad \left(\Leftrightarrow \left(A \subseteq B \Rightarrow D\left(f_{|I_f \to A}\right) \subseteq D\left(f_{|I_f \to B}\right) \right) \right)$
  - $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \to (A \cup B)}\right) = D\left(f_{|I_f \to A}\right) \cup D\left(f_{|I_f \to B}\right) \right)$
  - $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ $\quad \left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \to (A \cap B)}\right) = D\left(f_{|I_f \to A}\right) \cap D\left(f_{|I_f \to B}\right) \right)$

Définition 14. *"Domaine image d'une fonction"*
Soit $f = \digamma^{\circ} \begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$

$$Im\,(f) = \{\ y \in O_f \mid (\exists x \in I_f\ :\ (f\,(x) = y))\ \}$$

Dit autrement : *« Le domaine image d'une fonction est un sous-ensemble de son ensemble d'arrivée, dont TOUS les éléments ont au moins un antécédent dans l'ensemble de départ, par la fonction ».*

Remarques :

- *L'ensemble des antécédents d'un* $y_{\in O_f}$ *par* f *est donc* $\{\ x \in I_f \mid f\,(x) = y\ \}$

- *Le domaine image d'une fonction* f *est donc noté* $Im\,(f)$*. Im est un opérateur qui peut prendre en argument obligatoire, soit une fonction, soit une expression. C'est le même principe que l'opérateur* D

- *Sa syntaxe exhaustive dans le cas où on lui passe une fonction est* $Im_{A\to B}\,(f)$ *où* A *est l'ensemble de départ que l'on impose (restreint ou étend) à la fonction, et* B *est l'ensemble d'arrivée que l'on impose (co-restreint ou co-étend) à la fonction. Ça donne plus de flexibilité en permettant d'obtenir un domaine image compte tenu d'un ensemble de départ et d'un ensemble d'arrivée. En l'absence de précision du domaine de départ et d'arrivée, genre* $Im\,(f)$*, l'opérateur considère que l'ensemble de départ à considérer est l'ensemble de départ de la fonction et l'ensemble d'arrivée à considérer est l'ensemble d'arrivée de la fonction. On a donc :*

  $$Im_{A\to B}\,(f) = Im\left(f_{|A\to B}\right)$$

  et

  $$Im\,(f) = Im_{I_f\to O_f}\,(f)$$

- *Sa syntaxe exhaustive dans le cas où on lui passe une expression est* $Im_{variable:A\to B}\,(Expr\,(variable,\ variable_2,\ \ldots))$*, par exemple :*
  $Im_{x:A\to B}\,(3ax + b)$*, la variable précisée étant celle dont le fait qu'elle appartienne à* A *fait que l'expression appartient au sous-ensemble de* B *que l'on recherche.*

  En gros l'opérateur Im va caster l'expression en fonction, en considérant que la variable est celle passée en argument et que les ensembles de départ et d'arrivée sont ceux passés en argument, pour ensuite traiter la fonction comme vu plus haut. Donc on a par exemple :

  $$Im_{x:A\to B}\,(3x + 6) = Im\left(\digamma^{\circ}\begin{pmatrix} A & \to & B \\ x & \to & 3x+6 \end{pmatrix}\right)$$

S'il y a plusieurs variables dans l'expression, il faudra que les autres variables soient définies en amont (genre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*) où à la volée dans l'expression (genre* $Im_{x:A\to B}\left(3\left(a_{\in\mathbb{R}}\right)x + \left(b_{\in\mathbb{R}}\right)\right)$*). Cela signifie qu'une expression du type* $Im_{x:A\to B}(3ax + b)$ *où a et b n'ont pas été préalablement définis dans le scope va raise error.*

Si une des autres variables est déclarée telle que l'expression ne peut pas appartenir à B, par exemple $Im_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(\frac{3}{\left(a_{\in\mathbb{R}}\right)} + 6x\right)$*, vu que a peut être nul et qu'on veut un résultat toujours réel, ça va raise error. De manière générale, si on a quelque chose d'indécidable, ça raise error. C'est donc de notre responsabilité, lorsqu'il y a des constantes dans l'expression, de bien les définir en amont pour s'assurer que l'expression passée en argument ne fera pas tout crasher.*

Si l'expression est telle qu'il est impossible qu'elle appartienne à B, alors ça renverra $\varnothing$*. Par exemple,* $Im_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(\frac{x}{a-a}\right) = \varnothing$

Si la variable précisée en argument n'est pas présente dans l'expression, alors ça retournera l'ensemble des valeurs possibles de l'expression. Par exemple
$Im_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+}\left(3\left(a_{\in\{3,4\}}\right)^2 + 6\right) = \{33, 54\}$,
et pour $a \in \{3, 4\}$, $D_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*}((3-a)(4-a)) = \varnothing$

Ça peut tout à fait gérer des fonction à plusieurs variables, donc on peut par exemple faire

$$Im_{(x,\ a,\ b):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^*}\left(3ax^2 + bx + 42\right)$$

Enfin, si on ne précise pas les ensembles A et B, il est considéré qu'il s'agit de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. De même, si la variable n'est pas précisée, il est considéré que c'est la ou les variable.s non déclarée.s de l'expression (avec un tuple classé par ordre d'apparition des variables dans l'expression). par exemple :*

$$Im_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*}\left(3x^2 + 6x + 42\right) = Im_{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*}\left(3x^2 + 6x + 42\right)$$

ou

$$Im_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}\left(3ax^2 + 6\left(b_{\in\{1,\ 6,\ 42\}}\right)x + 42\right) = Im_{(a,\ x):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}\left(3ax^2 + 6\left(b_{\in\{1,\ 6,\ 42\}}\right)x + 42\right)$$

ou

$$Im_{\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}\left(3ax^2 + 6bx + 42\right) = Im_{(a,\ x,\ b):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}\left(3ax^2 + 6bx + 42\right)$$

Du coup, logiquement, on a $Im\left(3a^2 + bx + 42\right) = Im_{(a,\ b,\ x):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}\left(3a^2 + bx + 42\right)$

Bien entendu, si l'ensemble de départ ne correspond pas (par exemple $Im_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(3x + a^2\right)$ *au lieu de* $Im_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}\left(3x + a^2\right)$*), ça raise error.*

Mais dans ces derniers cas, il est préférable de passer par une fonction correctement déclarée plutôt que par une expression.

- *Du coup, l'opérateur $Im_{A\to B}$ est la fonction suivante :*

$$Im_{A\to B} = Im\left(A,B\right) = F^{\circ}\begin{pmatrix}\mathcal{F}\left(\mathcal{P}\left(W\right)\to\mathcal{P}\left(W\right)\right) & \to & \mathcal{P}\left(B\right)\\ f & \mapsto & \left\{y\in B \mid \left(\exists x\in A\ :\ f_{|A\to B}\left(x\right)=y\right)\right\}\end{pmatrix}$$

- *De manière plus générale, l'opérateur Im au sein d'un ensemble wrapper W est la fonction suivante :*

$$Im = F^{\circ}\begin{pmatrix}\left(\mathcal{P}\left(W\right)\times\mathcal{P}\left(W\right)\right) & \to & \mathcal{F}\left(\left(\mathcal{P}\left(W\right)\right)^{\mathcal{P}(W)}\ \to\ P\left(W\right)\right)\\ \left(A,B\right) & \mapsto & Im_{A\to B} = F^{\circ}\begin{pmatrix}\mathcal{F}(A\ \to\ B) & \to & \mathcal{P}(B)\\ f & \mapsto & \left\{y\in B\ \mid\ \left(\exists x\in A\ :\ f_{|A\to B}(x)=y\right)\right\}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que l'opérateur Im est une fonction qui prend 2 ensembles A et B et renvoit une fonction, cette dernière prenant en argument une fonction d'ensemble de départ A et d'ensemble d'arrivée B et retourne le domaine image de cette fonction.

Donc d'un point de vue parsing, l'instruction $Im_{A\to B}\left(f\right)$ correspond en réalité à $\left(Im\left(A,\ B\right)\right)\left(f\right)$

De la même manière que pour l'opérateur D, j'ai préféré designer le truc en 2 fonctions qui se chaînent plutôt qu'une seule qui prend un triplet pour permettre plus de flexibilité. Mais sinon en effet on aurait tout aussi bien pu avoir

$$Im = F^{\circ}\begin{pmatrix}\left(\mathcal{P}\left(W\right)\right)^{2}\times\left(\mathcal{P}\left(W\right)\right)^{\mathcal{P}(W)} & \to & \mathcal{P}\left(W\right)\\ \left(A,B,f\right) & \mapsto & \left\{y\in B \mid \left(\exists x\in A\ :\ f_{|A\to B}\left(x\right)=y\right)\right\}\end{pmatrix}$$

- *Enfin, il y a une notation particulière qui parfois peut être pratique. En principe quand on écrit $f(x)$, ca correspond à l'élément de O_f correspondant. Cependant, une feature des applications est de pouvoir passer un ensemble en argument, genre $f(A)$, ce qui va renvoyer $Im\left(f_{|A\to O_f}\right)$. Cependant comme ça peut porter à confusion, je préfère utiliser la notation f^*, genre $f^*\left(A\right)$. Du coup, on a*

$$f^*\left(A\right) = Im\left(f_{|A}\right)$$

$$f^*\left(I_f\right) = Im\left(f\right)$$

- *Du coup on peut voir la notation* * *comme un opérateur qui s'applique à la fonction nommée juste avant, et qui retourne une fonction prenant un ensemble en argument et retournant le domaine image correspondant. On a donc, au sein d'un ensemble wrapper* W *:*

$$^* = F^\circ \left(\begin{matrix} (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} & \to & (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} \\ f & \mapsto & f^* = F^\circ \left(\begin{smallmatrix} \mathcal{P}(W) & \to & \mathcal{P}(W) \\ A & \mapsto & Im_{|A \to O_f}(f) = \left\{ y \in O_f \ | \ (\exists x \in A \ : \ f(x) = y) \right\} \end{smallmatrix} \right) \end{matrix} \right)$$

- *Il y a donc différentes choses notables concernant* f^* *:*
  - $f^*(\varnothing) = \varnothing$ $\quad \left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|\varnothing}\right) = \varnothing\right)$
  - $(f^*(B) - f^*(A)) \subseteq f^*(B - A)$ $\quad \left(\Leftrightarrow \left(Im\left(f_{|B}\right) - Im\left(f_{|A}\right)\right) \subseteq Im\left(f_{|B-A}\right)\right)$
  - $(A \subseteq B) \Rightarrow (f^*(A) \subseteq f^*(B))$ $\quad \left(\Leftrightarrow \left((A \subseteq B) \Rightarrow Im\left(f_{|A}\right) \subseteq Im\left(f_{|B}\right)\right)\right)$
  - $f^*(A \cup B) = f^*(A) \ \cup \ f^*(B)$ $\quad \left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|A \cup B}\right) = Im\left(f_{|A}\right) \cup Im\left(f_{|B}\right)\right)$
  - $f^*(A \cap B) \subseteq (f^*(A) \cap f^*(B))$ $\quad \left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|A \cap B}\right) \subseteq Im\left(f_{|A}\right) \cap Im\left(f_{|B}\right)\right)$
  - f *injective* $\Rightarrow (f^*(A \cap B) = (f^*(A) \cap f^*(B)))$

Pour résumer :

- $D_{x:A\to B}\left(f\left(x\right)\right) =$ *domaine de définition de l'expression* $f(x)$ *par rapport à* x*, en considérant une fonction d'ensemble d'entrée* A *et d'ensemble de sortie* B

- $D_{A\to B}\left(f\left(x\right)\right) =$ *idem mais on considère implicitement que la variable est* x*, plus lisible quand l'expression passée en argument ne contient qu'une seule variable car c'est univoque*

- $D\left(f\left(x\right)\right) =$ *idem et on considère que c'est avec les wrappers* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $D_{A\to B}\left(f\right) = D\left(f_{|A\to B}\right) =$ *domaine de définition de la fonction* f *avec restriction et co-restriction*

- $D\left(f\right) =$ *idem mais on considère, comme c'est une fonction passée en argument, que quand on ne précise pas les wrappers, les wrappers sont* $I_f \to O_f$ *(et non* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *comme quand on passe une expression)*

- $f_*\left(A\right) = D_{I_f\to A}\left(f\right) =$ *Domaine de définition de* f *co-restreinte à* A

- $Im_{x:A\to B}\left(f\left(x\right)\right) =$ *domaine image de l'expression* $f(x)$ *par rapport à* x*, en considérant une fonction d'ensemble d'entrée* A *et d'ensemble de sortie* B

- $Im_{A\to B}\left(f\left(x\right)\right) =$ *item mais on considère implicitement que la variable est* x*, plus lisible quand l'expression passée en argument ne contient qu'une seule variable car c'est univoque*

- $Im\left(f\left(x\right)\right) =$ *idem et on considère que c'est avec les wrappers* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $Im_{A\to B}\left(f\right) = Im\left(f_{|A\to B}\right)$

- $Im\left(f\right) =$ *domaine image de la fonction* f

- $f^*\left(A\right) = Im_{A\to O_f}\left(f\right) =$ *Domaine image de* f *restreinte à* A

- $\hat{f}_{\to\{x_0\}\leftarrow} =$ *prolongement par continuité de* f *en* x_0

- $\hat{f} = \hat{f}_{\to\left(\Psi_{\to\leftarrow}(f)\right)\leftarrow} =$ *prolongement par continuité de* f *sur tous ses points de prolongeabilité (l'ensemble des points de prolongeabilité étant* $\Psi_{\to\leftarrow}\left(f\right)$*)*

- $f_* (\varnothing) = \varnothing$ $\left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \to \varnothing}\right) = \varnothing\right)$
- $f_* (A - B) = f_* (A) - f_* (B)$ $\left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \to (B-A)}\right) = D\left(f_{|I_f \to B}\right) - D\left(f_{|I_f \to A}\right)\right)$
- $A \subseteq B \Rightarrow f_* (A) \subseteq f_* (B)$ $\left(\Leftrightarrow \left(A \subseteq B \Rightarrow D\left(f_{|I_f \to A}\right) \subseteq D\left(f_{|I_f \to B}\right)\right)\right)$
- $f_* (A \cup B) = f_* (A) \cup f_* (B)$ $\left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \to (A \cup B)}\right) = D\left(f_{|I_f \to A}\right) \cup D\left(f_{|I_f \to B}\right)\right)$
- $f_* (A \cap B) = f_* (A) \cap f_* (B)$ $\left(\Leftrightarrow D\left(f_{|I_f \to (A \cap B)}\right) = D\left(f_{|I_f \to A}\right) \cap D\left(f_{|I_f \to B}\right)\right)$

- $f^* (\varnothing) = \varnothing$ $\left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|\varnothing}\right) = \varnothing\right)$
- $(f^* (B) - f^* (A)) \subseteq f^* (B - A)$ $\left(\Leftrightarrow \left(Im\left(f_{|B}\right) - Im\left(f_{|A}\right)\right) \subseteq Im\left(f_{|B-A}\right)\right)$
- $(A \subseteq B) \Rightarrow (f^* (A) \subseteq f^* (B))$ $\left(\Leftrightarrow \left((A \subseteq B) \Rightarrow Im\left(f_{|A}\right) \subseteq Im\left(f_{|B}\right)\right)\right)$
- $f^* (A \cup B) = f^* (A) \ \cup \ f^* (B)$ $\left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|A \cup B}\right) = Im\left(f_{|A}\right) \cup Im\left(f_{|B}\right)\right)$
- $f^* (A \cap B) \subseteq (f^* (A) \cap f^* (B))$ $\left(\Leftrightarrow Im\left(f_{|A \cap B}\right) \subseteq Im\left(f_{|A}\right) \cap Im\left(f_{|B}\right)\right)$
- $f \ \ injective \ \Rightarrow (f^* (A \cap B) = (f^* (A) \cap f^* (B)))$.

Définition 15. *"Fonction surjective"*
Soit $f := F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow (\forall y \in O_f,\ \exists x \in I_f \mid (y = f(x)))$$

Dit autrement : *« Une fonction f est surjective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont AU MOINS un antécédent dans son ensemble d'entrée ».*

Remarques :

- *On parle de surjection ou de fonction surjective, de I_f SUR O_f (plutôt que "dans" O_f)*
- *L'application identité sur I_f, $Id_{I_f} = f^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & I_f \\ x & \to & x \end{pmatrix}$, est surjective (en fait elle est même bijective)*

Théorème 1. *"Théorème de Cantor"*
Il n'existe AUCUNE application de $E \to \mathcal{P}(E)$ qui soit surjective

Définition 16. *"Fonction injective"*
Soit $f := F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall \left(x,\ x'\right) \in (I_f)^2,\ \left(\left(f(x) = f\left(x'\right)\right) \Leftrightarrow \left(x = x'\right)\right)$$

Dit autrement : *« Quand la fonction f est injective, si on prend 2 éléments de I_f, si leur image par f donne le même élément de O_f, alors c'est que ces 2 éléments sont le même élément ».*

Dit autrement : *« Une fonction f est injective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont AU PLUS un antécédent dans son ensemble d'entrée ».*

Remarque :

- *On parle de fonction injective ou d'injection*
- $\left(f = F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix} \text{ strictement monotone}\right) \Longleftrightarrow f \text{injective}$

Définition 17. *"Fonction bijective"*
Soit $f := F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \rightarrow & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \forall y \in O_f,\ (\exists! x \in I_f \mid y = f(x))$$

Dit autrement : *« Une fonction f est bijective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont EXACTEMENT un antécédent dans son ensemble d'entrée ».*
Dit autrement : *« Une fonction f est bijective quand elle est surjective et injective ».*

Remarques :

- *L'application identité sur E, $Id_E := F^{\circ}\begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{pmatrix}$ est bijective*
- $(f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$ *injective*$) \Rightarrow \left(f_{|I_f \rightarrow Im(f)} \text{ bijective}\right)$*, autrement dit pour toute fonction injective, si on restreint son ensemble image à son domaine image on obtient une fonction bijective*

Définition 18. *"Application réciproque d'une application bijective"*
Soit $f \in \mathcal{F}_A(I_f \rightarrow O_f)$ *bijective*

$$f_{-1} \text{ est l'application réciproque de } f$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in (I_f \times O_f),\ (y = f(x) \Leftrightarrow x = f_{-1}(y))$$

Dit autrement : *« L'application réciproque f_{-1} d'une application bijective f est celle qui permet de défaire ce que f a fait. ».*

Remarques :

- $f_{-1}(f(x)) = x$
- $f(f_{-1}(y)) = y$
- $(f_{-1})_{-1} = f$
- *L'application réciproque d'une application bijective est aussi bijective*
- *On peut voir l'indice $_{-1}$ comme un opérateur qui prend en argument une fonction bijective (ou qui est une méthode intrinsèque à l'objet fonction bijective) et qui retourne sa fonction réciproque*

Définition 19. *"Composition de fonction"*
Soient $f \in \mathcal{F}(I_f \to O_f)$ *et* $g \in \mathcal{F}(O_f \to O_g)$

$$g \circ f = F^{\circ} \begin{pmatrix} I_f & \to & O_g \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{pmatrix}$$

Dit autrement : *« L'opérateur* $\circ$ *prend 2 fonctions définies comme ci-dessus et retourne une nouvelle fonction qui chaîne les 2 premières. Si les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions passées en paramètres ne sont pas corrects alors ça crash. ».*

Remarques :

- $\forall f \in \mathcal{F}(I_f \to O_f)\,,\ Id_{O_f} \circ f = f \circ Id_{I_f} = f$
- *L'opérateur* $\circ$ *est associatif, c'est-à-dire que*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g \circ f)$$

- *Si* f *est constante et* g *est constante, alors* $f \circ g$ *est constante*
- $f \circ f$ *est possible si* $I_f = O_f$

- $((f\ surjective) \wedge (g\ surjective)) \Rightarrow (f \circ g\ surjective)$
- $((f\ injective) \wedge (g\ injective)) \Rightarrow (f \circ g\ injective)$
- $((f\ bijective) \wedge (g\ bijective)) \Rightarrow (f \circ g\ bijective)$
  et $(f \circ g)_{-1} = f_{-1} \circ g_{-1}$

- $((g \circ f)\ \ [surjective) \Rightarrow (g\ surjective)$
- $((g \circ f)\ \ injective) \Rightarrow (f\ injective)$

Axiome 8. *"Ensemble des applications de E dans F"*
Les applications de l'ensemble E dans l'ensemble F existe et se note $\mathcal{F}(E \to F)$

Remarques :

- *Certains auteurs notent cet ensemble $\mathcal{F}(E, F)$, ou F^E*
- *On peut désigner l'ensembles des applications de $E \to F$ qui sont surjectives par $\mathcal{F}(E \to F)_{\to}$. C'est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E \to F)$*
- *On peut désigner l'ensembles des applications de $E \to F$ qui sont injectives par $\mathcal{F}(E \to F)_{\leftarrow}$. C'est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E \to F)$*
- *On peut désigner l'ensembles des applications de $E \to F$ qui sont bijectives par $\mathcal{F}(E \to F)_{\leftrightarrow}$. C'est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E \to F)$*

- $\forall E \neq \varnothing,\ \mathcal{F}(E \to \varnothing) = \varnothing$

- $\forall A,\ card(\mathcal{F}(\varnothing \to A)) = 1$
  En effet, on a
  $\mathcal{F}(\varnothing \to A) = \{f_{\varnothing} = F^{\circ}(\varnothing \to A)\}$

- $\forall a, E,\ card(\mathcal{F}(E \to \{a\})) = 1$
  En effet, on a
  $\mathcal{F}(E \to \{a\}) = \left\{F^{\circ}\left(\begin{smallmatrix} E & \to & \{a\} \\ x & \mapsto & a \end{smallmatrix}\right)\right\}$

- $\forall a, A$, *l'application*

$$F^{\circ}\begin{pmatrix} \mathcal{F}(\{a\} \to A) & \to & A \\ f & \mapsto & f(a) \end{pmatrix}$$

  est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(\{a\} \to A)$ est en bijection naturelle avec A par cette application, vu que connaître une application f de $\mathcal{F}(\{a\} \to A)$ revient à connaître $f(a) \in A$, et inversement).

- $\forall a, b, F$, *l'application*

$$F^{\circ}\begin{pmatrix} \mathcal{F}(\{a, b\} \to F) & \to & F^2 \\ f & \mapsto & (f(a), f(b)) \end{pmatrix}$$

  est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(\{a, b\} \to F)$ est en bijection naturelle avec F^2 par cette application, vu que connaître une application f de $\mathcal{F}(\{a, b\} \to F)$ revient à connaître $(f(a), f(b)) \in F^2$, et inversement).

- $\forall E$, *l'application*

$$F^{\circ}\begin{pmatrix}\mathcal{F}(E \to \{0,1\}) & \to & \mathcal{P}(E) \\ f & \mapsto & (E_0 = f_*(\{0\}))\end{pmatrix}$$

est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(E \to \{0,1\})$ *est en bijection naturelle avec* $\mathcal{P}(E)$ *par cette application, vu que connaître une application* f *de* $\mathcal{F}(E \to \{0,1\})$ *revient à connaître* $E_{0_{\subseteq E}}$ *contenant tous les antécédents de 0 par f, (et par déduction,* $E_{1_{\subseteq E}}$ *contenant tous les antécédents de 1 par* f *vu que* $E_1 = E - E_0 = \complement_E(E_0)$*), et inversement).*

- $\forall(E \neq \varnothing), (F \neq \varnothing)$, $card(\mathcal{F}(E \to F)) = card(F)^{card(E)}$

C'est-à-dire que quand on prend 2 ensembles E et F non vides, le nombre de fonction possibles de E dans F est le nombre d'éléments dans F élevé à la puissance du nombre d'éléments dans E.

C'est pourquoi certains auteurs notent $\mathcal{F}(E \to F)$ *comme ceci :* F^E.

1.3 Suites et familles d'éléments

Définition 20. *"Suites"*

On appelle une "suite" une application de $I_{\subseteq \mathbb{N}} \to O$.

Si on appelle la suite u, on a donc $u \in \mathcal{F}(I \to O)$, et l'image de $n_{\in I}$, $u(n)$, se note, par convention, u_n, et s'appelle "n-ième terme de la suite u"

Remarques :

- *$\mathcal{F}(\mathbb{N} \to O)$ (encore noté $O^{\mathbb{N}}$) désigne donc l'ensembles de toutes les suites possibles définies sur $\mathbb{N}$ à valeur dans O.*
- *Il existe un opérateur $[\subseteq]$, qui signifie que l'ensemble à gauche de l'opérateur est inclus dans celui à droite de l'opérateur (comme pour l'opérateur $\subseteq$), mais que l'ensemble de gauche est un intervalle joint fermé. On a donc*
  - ▶ $[1, 3]_{\mathbb{N}} \, [\subseteq] \, \mathbb{N}$
  - ▶ $[1, 4[_{\mathbb{N}} [\subseteq] \, \mathbb{N}$, *car* $[1, 4[_{\mathbb{N}} = [1, 3]_{\mathbb{N}}$
  - ▶ $\{1,\ 2,\ 3\} \, [\subseteq] \, \mathbb{N}$, *car* $\{1,\ 2,\ 3\} = [1, 3]_{\mathbb{N}}$
  - ▶ $\{1,\ 2,\ 4\} \, [\not\subseteq] \, \mathbb{N}$

- *u désigne donc l'objet mathématique "suite", qui est une application, tandis que u_n désigne $u(n)$, la valeur de retour de u pour un $n_{\in I_u}$ donné*

- *Certains auteurs désignent l'objet suite u comme ceci :*

$$(u_n)_{n \in I_u}$$

genre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Parfois certains auteurs utilisent juste la notation (u_n) avec les parenthèses mais c'est pas très cohérent d'un point de vue "parsing". Par ailleurs, cette notation $(u_n)_{n \in I_u}$ peut porter à confusion avec la notation de "famille d'éléments" ou de "uplet" ou de "tuple" (cf définition suivante).

C'est un peu comme la déclaration des fonctions. La façon la plus précise de déclarer une fonction c'est avec la syntaxe

$$f = F^{\circ} \begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & f(x) = Expr(x) \end{pmatrix}$$

mais dans le cas où on ne veut pas spécifier son expression, on peut faire "$f = F^{\circ}(I_f \to O_f)$" ou "$f \in \mathcal{F}(I_f \to O_f)$" ou "$f \in (O_f)^{I_f}$", et dans le cas où on ne veut pas spécifier ses ensembles d'entrée et de sortie pour sous-entendre qu'ils correspondent aux domaines de définition et image de l'expression, on peut faire "$f = F^{\circ}(x \ \mapsto \ Expr(x))_{W_I \to W_O}$" où W_I et W_O sont les ensembles wrapper de l'entrée et de la sortie respectivement, voire "$f = F^{\circ}(x \ \mapsto \ Expr(x))$" si on a la flemme car par défaut les wrappers d'entrée et de sortie valent $\mathbb{R}$. Mais il y a aussi une syntaxe que certains jugent plus ergonomique qui est "$f\left(x_{\in I_f}\right) = (Expr(x))_{\in O_f}$" qui donne toutes les infos nécessaire à la définition précise de la fonction.

Pour les suites c'est pareil, on peut utiliser les syntaxes des fonctions pour déclarer une suite, par exemple "$u = F^{\circ}\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ n\mapsto u_n=Expr(n)\end{smallmatrix}\right)$*", ou "*$u\left(n_{\in\mathbb{N}}\right) = (Expr\,(n))_{\in\mathbb{R}}$*", ou alors on peut, pour un peu plus de lisibilité et de contextualisation du domaine des suites, utiliser la notation*

$$u_{n_{\in\mathbb{N}}} = (expr\,(n))_{\in\mathbb{R}}$$

voire "$\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\in\mathbb{R}}$*" si on veut utiliser la notation vue plus haute (bien que de mon point de vue elle ne soit pas ergonomique), et si on ne veut pas spécifier son expression, voire "*$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*" si on a la maxi-flemme vu que par défaut quand l'ensemble d'arrivée n'est pas spécifié ça considère que c'est* $\mathbb{R}$.

- *Il y a des suites finies (cas où* $card\,(I_u) \in \mathbb{N}$*) et des suites infinies (cas où* $card\,(I_u) = +\infty$*).*

- *On peut bien-sûr créer des sous-suites ou des sur-suites à partir de suites existantes par restriction ou extension de l'ensemble de départ de ces dernières, par exemple* $u' = u_{|I_{u'_{\subseteq\mathbb{N}}}}$*, et on peut la définir aussi avec la syntaxe* $(u_{n_k})_{k\in I_{u'}\subseteq\mathbb{N}}$*, genre* $(u_{n_k})_{k\in[1,5]_{\mathbb{N}}}$ *ou* $(u_{n_k})_{k\in\{1,\ 3,\ 7,\ 42,\ 324\}}$ *mais ces syntaxes commencent à être un peu équivoque de mon point de vue donc je prefère utiliser les syntaxes des fonctions lors de la créations de sous-suites ou de sur-suites.*

- *On peut bien-entendu composer les suites comme on compose les fonctions vu que les suites sont aussi des fonctions. Par exemple si on a :*

$$\varphi = F^{\circ}\left(\begin{smallmatrix}K_{\subseteq\mathbb{N}} \to & I_{\subseteq\mathbb{N}}\\ k\ \mapsto & \varphi(k)=i\end{smallmatrix}\right)$$

et

$$x = F^{\circ}\left(\begin{smallmatrix}I & \to & O\\ i & \mapsto & x_i\end{smallmatrix}\right)$$

On a donc :

$$x\ \circ\ \varphi = F^{\circ}\left(\begin{smallmatrix}K & \to & O\\ k & \mapsto & x(\varphi(k))=x_{\varphi(k)}=x_{(\varphi_k)}\end{smallmatrix}\right)$$

Mais certains auteurs le notent comme suit, ce qui est un peu plus lisible mais pas cohérent avec la syntaxe de départ : $x\ \circ\ \varphi = \left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in K}$ *genre* $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ *au lieu de* $(x_i)_{i\in 2\mathbb{N}}$*. Personnellement cette dernière syntaxe est plus contre-intuitive pour moi d'autant qu'elle porte à confusion avec la notationd des uplets.*

- *Concernant les suites multi-indexées, (c'est-à dire disposant de plusieurs index, donc dont l'ensemble de départ est le résutat d'une produit cartésien de sous-ensembles de* $\mathbb{N}$*), par exemple* $x = \mathcal{F}\left(I \to O\right)$ *avec* $I = J_{\subseteq \mathbb{N}} \times K_{\subseteq \mathbb{N}}$*, dans la notation portant à confusion avec la notation des uplets, les auteurs préfèrent souvent noter les index comme suit :* $x = \left(x_{j,k}\right)_{j \in J,\ k \in K}$*, mais personnellement j'aime beaucoup la notation* $x = \left(x_i\right)_{i \in I}$ *qu'on peut expliciter en* $x = \left(x_{(j,k)}\right)_{(j,k) \in (J \times K)}$ *qui respecte la logique de la syntaxe et qui est très lisible.*

- *Pour conclure, j'aime bien déclarer une suite générale en faisant* $u \in \mathcal{F}\left(I_{\subseteq \mathbb{N}} \to O\right)$*, et déclarer explicitement en faisant* $u_{i \in I} = \left(Expr\left(i\right)\right)_{\in O}$ *et je réserve la notation* $\left(u_i\right)_{i \in I}$ *pour les uplets (cf définition suivante)*

Définition 21. *"Famille d'éléments"*

Une famille d'éléments de l'ensemble O *indexée par l'ensemble* $I_{\subseteq\mathbb{N}}$ *est simplement une application de* $I \to O$*. On la note* $\underline{x}$*.*

En gros c'est exactement une suite, c'est la même chose, mais ce changement de nom et de notation est purement psychologique pour mettre en avant les valeurs $x_i \in O$ *et le rôle des indices* $i \in O$*, comme dans un tuple* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*.*

Cependant, une façon plus cohérente selon moi d'utiliser le concept de "famille d'éléments" serait de le définir comme l'uplet contenant les termes de la suite ordonnés suivant leur index, plutôt que comme la suite elle-même. Du coup on peut imaginer la suite $x \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \to O)$*, et on aurait alors* $\underline{x} = (x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots)$*. Ça permet d'avoir des notations simples où on déclare un élément du tuple en question, genre "Soit* $e \in \underline{x}$*", et de pouvoir itérer sur ces ensembles sans avoir d'effets de bords (vu que si on map sur un ensemble non ordonné, ça va prendre les éléments à processer dans un ordre aléatoire et si l'opération qu'on applique n'est pas commutative, on n'aura pas le même résultat en fonction de l'itération), genre en faisant*

$$\sum_{e\in\underline{x}} \left(3 \cdot e + \frac{1}{e}\right) \ \textit{ou} \ \prod_{i\in\underline{x}} (E_i)$$

Du coup dans cette définition alternative qui me semble plus cohérente, la suite générique $x \in \mathcal{F}(I_{\subseteq\mathbb{N}} \to O)$ *donnerait alors la famille*

$$\underline{x} = (x_a,\ x_b,\ \ldots) \subseteq (Im\,(x))^2\,,\ \textit{avec}\ \{a, b, \ldots\} = I$$

c'est-à-dire un uplet avec tous les termes de la suite ordonnés suivant leur index. Cette notation (qui est un opérateur du coup) peut s'utiliser plus généralement dans le cadre des fonctions discrètes définies sur des ensembles ordonnés.

Cependant beaucoup d'auteurs, plutôt que $\underline{x}$*, préfèrent utiliser la notation* $(x_i)_{i\in I_x}$*, genre* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *qui est la même notation que pour les suites (ce qui est logique vu que c'est exactement le même objet pour eux). Par ailleurs, beaucoup d'auteurs considèrent qu'une famille d'éléments, de même qu'une suite ou qu'un uplet correspondent finalement à la même "classe", au même objet mathématique. Du coup, compte tenu de ce qui a été décrit ci-dessus, on va faire comme ça :*

Quand on parlera de "famille", on fera référence à l'uplet contenant tous les termes de la suite, et on utilisera univoquement la notation $(x_i)_{i\in I}$*.*

Du coup pour résumer, si on a une suite $u := \digamma^{\circ} \begin{pmatrix} I_{\in \mathbb{N}} & \to & O \\ i & \mapsto & u_i \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire* $u_{i \in I} := (u_i)_{\in O}$, *alors*

- u *désigne la suite en elle-même*
- u_k *désigne le k-ieme terme de la suite*
- $\underline{u}$ *désigne l'uplet contenant tous les termes de la suite* u
- $(u_i)_{i \in I}$ *désigne aussi l'uplet contenant tous les termes de la suite* u
- $(u_i)_{i \in \{1,\ 3,\ 42\}}$ *désigne le triplet* (u_1, u_3, u_{42})

Ça sera beaucoup plus intuitif de procéder comme ça. Quand on parlera de famille on utilisera la notation intuitive des uplets $(u_i)_{i \in I}$ *et on désignera l'uplet en question, et pour parler de la suite on utilisera l'identifiant de l'objet, ici* u

---

Remarque :

- *Une famille qui contient tous les éléments d'un ensemble* E *en un seul exemplaire est dite "famille canoniquement associée à* E*". On peut obtenir cette famille à partir d'un ensemble grâce à l'opérateur* $\mathcal{C}$ *:*

$$x := \mathcal{C}\,(E) \in \mathcal{F}\,([1,\ \mathit{card}\,(E)]_{\mathbb{N}} \to E)$$

- *Il y a une notation de flemmard où, quand on ne précise pas de borne de l'opérateur itératif (*$\sum, \prod, \bigcup, \bigcap, \dots$*), alors ça considère que l'opération se fait sur tout l'ensemble de départ de la suite dont il est question dans l'expression dès lors que la suite et son index sont univoque dans l'expression, genre "*$\sum(x_i)$*" où un parsing comprend que* x*, déclaré dans le scope, est bien une suite, qu'aucun* i *n'est déclaré dans le scope et qu'aucune borne n'est spécifiée. Cette notation est équivalente à "*$\sum(x)$*" qui est un peu moins lisible mais mois sujette à conflit. Personnellement je préfère cette dernière.*

- *Concernant les opérateurs itératifs (*$\sum, \prod, \bigcup, \bigcap, \dots$*), quand on leur passe un objet sans préciser de bornes, si c'est un ensemble, alors ça va opérer tous les éléments de l'ensemble dans un ordre aléatoire. Si l'ensemble est ordonné, alors ça va opérer dans l'ordre spécifié. On peut donc faire :*

$$\sum(u) \text{ qui somme tous les termes de la suite}$$

$$\bigcup(X) \text{ qui réunie tous les éléments contenus dans } X$$

$$\sum(E) \text{ qui est la somme de tous les éléments de } E$$

$$\dots$$

- *Un truc intéressant avec les notations de suites ou de familles, c'est que, pour peu qu'il n'y ai pas de suite x déclarée, on peut noter un n-uplet quelconque* $\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n\in\mathbb{N}}\right)$ *comme ceci* $(x_i)_{i\in[1,\ n]_{\mathbb{N}}}$, *ici désignant un n-uplet de réels, et si on veut que ce soit un n-uplet d'objets particuliers genre d'éléments de* E, *on fait* $\left((x_i)_{\in E}\right)_{i\in[1,\ n]_{\mathbb{N}}}$.

- *Cependant, de la même manière que dans une déclaration de fonction,* $f := F^{\circ}\begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & 3x \end{pmatrix}$, *dans l'expression de* x *on ne précise pas l'ensemble auquel appartient* x *vu que dans la syntaxe de la définition, on considère d'emblée que c'est un élément de* I_f, *dans le cadre d'une définition de fonction définie sur un produit cartésien, genre* $g := F^{\circ}\begin{pmatrix} E^n & \to & O_f \\ x & \mapsto & 3x \end{pmatrix}$, *si on veut expliciter le n-uplet en entrée, on pourra utiliser la notation de n-uplet comme ça :*

$$g := F^{\circ}\begin{pmatrix} E^n & \to & O_f \\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) & \mapsto & 3\cdot(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \end{pmatrix}$$

de même que comme ça :

$$g := F^{\circ}\begin{pmatrix} E^n & \mapsto & O_f \\ x = \left((x_i)_{i\in[1,\ n]_{\mathbb{N}}}\right) & \mapsto & 3\cdot x \end{pmatrix}$$

On ne précise pas à quel ensemble appartiennent les éléments de la famille mais comme on est dans le cadre d'une déclaration de fonction, ça considère d'emblée que le n-uplet est un élément de l'ensemble de départ de la fonction, et non un ensemble de réels comme c'est le cas en situation habituelle.

Définition 22. *"Famille d'ensembles"*

On a parlé des familles d'éléments, les éléments peuvent également être des ensembles. Il s'agit juste d'un cas particulier de famille d'éléments où les éléments sont des ensembles. On pourrait imaginer une famille d'ensembles contenus dans un ensemble W *:*

$$\big((E_i)_{\in W}\big)_{i\in I_{\subseteq \mathbb{N}}}$$

On est plus ou moins obligé de définir les ensembles en question par rapport à un ensemble générique W *parce qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles. Beaucoup d'auteurs ne précisent pas l'ensemble* W *dans la déclaration, un peu pour dire que ça pourrait être n'importe quel ensemble ou n'importe quels objets mathématiques mais ça contredit la règle plus haut qui dit qu'en l'absence de précision de l'ensemble de sortie, on considère que c'est* $\mathbb{R}$*, et le but est d'avoir une syntaxe univoque pour un plus large panel de circonstance possibles, donc si possible préciser* W*.*

Axiome 9. *"Axiome du choix"*

Soit $E := \big((E_i)_{\in W}\big)_{i\in I_{\subseteq \mathbb{N}}}$ *une famille d'ensembles.*

$$(\forall i \in I_E,\ E_i \neq \varnothing) \implies \left(\prod_{i\in I_E} (E_i) \neq \varnothing\right)$$

Dit autrement : *« Si la famille d'ensembles ne compte aucun ensemble vide, alors le produit cartésien de tous ses ensembles n'est pas* $\varnothing$*. ».*

Dit autrement : *« Plus généralement, il est possible de construire des ensembles en répétant une infinité de fois une action de choix, même non spécifiée explicitement »*

Dit autrement :

$$\forall X,\ (X \neq \varnothing) \Rightarrow \Big(\exists f \in \mathcal{F}\Big(X \to \bigcup (X)\Big)\ \mid\ (\forall A \in X,\ f(A) \in A)\Big)$$

C'est un peu évident en soi mais c'est un axiome qui permet de trancher le cas où on applique le "choix" (ici le produit cartésien) sur un ensemble qui contient une infinité d'ensembles.

Définition 23. *"Recouvrement d'un ensemble"*

$$P \text{ est un recouvrement de } E$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\bigcup (P) = E$$

Dit autrement : *Un recouvrement d'"un ensemble E est un ensemble contenant des ensembles dont la réunion donne E »*

Définition 24. *"Partition d'un ensemble"*

$$P \text{ est une partition de } E$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\Big(\forall (e_1,\ e_2)_{\neq} \in P^2,\ (e_1 \cap e_2 = \varnothing) \wedge (\forall e \in P,\ e \neq \varnothing) \wedge \Big(\bigcup (P) = E\Big)\Big)$$

Dit autrement :

$$P \text{ est une partition de } E$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\Big(\forall (e_1,\ e_2) \in \left(P^2\right)_{\neq},\ (e_1 \cap e_2 = \varnothing)\Big) \wedge (\forall e \in P,\ e \neq \varnothing) \wedge \Big(\bigcup (P) = E\Big)$$

Dit autrement :

$$P \text{ est une partition de } E$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\Big(\forall (e_1,\ e_2) \in P^2,\ (e_1 \neq e_2) \Rightarrow \Big((e_1 \cap e_2 = \varnothing) \wedge (\forall e \in P,\ e \neq \varnothing) \wedge \Big(\bigcup (P) = E\Big)\Big)\Big)$$

Dit autrement : *« Une partition d'un ensemble E est un ensemble contenant des ensembles non vides et tous disjoints dont la réunion donne E ».*

Dit autrement : *« C'est un recouvrement de E mais dont les ensembles contenus dedans sont non vides et tous disjoints ».*

Théorème 2. *"Bijection du générateur d'application caractéristique de $A_{\subseteq E}$"*
Soit E un ensemble

$$\Gamma_{\mathcal{X}_E} := \digamma^\circ \begin{pmatrix} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E \to \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_{(A,E)} = \digamma^\circ \begin{pmatrix} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \in A: & 1 \\ x \notin A: & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ est bijective}$$

Dit autrement : *« Soient un ensemble E, un ensemble $A_{\subseteq E}$ et une fonction $\mathcal{X}_{(A,E)}$ (qu'on pourrait appeler "isInA"), qui s'appelle la "fonction caractéristique de A par rapport à E", qui prend un élément de E et dit si celui-ci est aussi dans A. Et bien la fonction qui permet de prendre cet ensemble $A_{\subseteq E}$ quelconque pour lui associer son application caractéristique, elle est bijective ».*

Dit autrement : *« Il n'y a qu'une seule application caractéristique pour chaque sous-ensemble de E, et il n'y a qu'un seul sous-ensemble de E pour chaque application caractéristique possible ».*

Dit autrement :

$$\forall E, \digamma^\circ \begin{pmatrix} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E \to \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_{(A,E)} = \digamma^\circ \begin{pmatrix} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \in A: & 1 \\ x \notin A: & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathcal{F}\left(P(E) \to \mathcal{F}(E \to \{0,1\})\right)_{\leftrightarrow}$$

Remarque :

- *Le fait que $\Gamma_{\mathcal{X}_E}$ soit bijective fait qu'il y a une bijection naturelle entre $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F}(E \to \{0,1\})$. Connaître $A \in \mathcal{P}(E)$ revient à connaître la fonction caractéristique de A, $\mathcal{X}_{(A,E)}$*

- *La fonction caractéristique d'un ensemble A par rapport à un ensemble E est donc :*

$$\mathcal{X}_{(A,E)} = \digamma^\circ \begin{pmatrix} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} (x \in A) : 1 \\ (x \notin A) : 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

  Cette fonction $\mathcal{X}_{(A,E)}$ est donc équivalente à l'ensemble $A_{\subseteq E}$

1.4 Lois de composition

Définition 25. *"Loi de composition sur un ensemble C"*

$$\star \text{ est une loi de composition sur } C \iff \star \in \mathcal{F}\left((A \times_f B) \to C_{\in\{A,B\}}\right)$$

Dit autrement : *« Une loi de composition sur C c'est une fonction de $(A \times_f B) \to C$ où C est, soit A, soit B »*

Dit autrement : *« Une loi de composition sur A (respectivement B) c'est une fonction de $(A \times_f B) \to A$ (respectivement de $(A \times_f B) \to B$ ».*

Dit autrement : *« C'est un opérateur binaire, tout simplement, qui prend un élément d'un ensemble, un autre élément d'un autre ensemble et qui renvoit en conséquence un 3^e^ élément. Ce 3^e^ élément est soit systématiquement issu du premier ensemble, soit systématiquement issu du second. Du coup on peut le noter classiquement comme ça "$\star\left(a_{\in A}, b_{\in B}\right)$", mais on peut aussi le noter comme un opérateur binaire "$a_{\in A} \star b_{\in B}$" ».*

Remarques :

- *La définition utilise le produit cartésien fondamental $\times_f$ plutôt que le produit cartésien fusionnant $\times$ parce qu'une LCI est un opérateur binaire et prend donc en argument des couples et non des uplets généraux. Par exemple, si on utilisait le produit cartésien fusionnant pour une LCI $\star \in \mathcal{F}(A \times B \to A)$ avec $A = A_l \times A_r$ et $B = B_l \times B_r$, alors vu que A serait un ensemble de couples $\left((a_1)_{\in A_l}, (a_2)_{\in A_r}\right)$ et B un ensemble de couples $\left((b_1)_{\in B_l}, (b_2)_{\in B_r}\right)$, le produit cartésien fusionnant $A \times B$ serait un ensemble de quadruplets $\left((a_1)_{\in A_l}, (a_2)_{\in A_r}, (b_1)_{\in B_l}, (b_2)_{\in B_r}\right)$ et non un ensemble de couples de couples $\left(\left((a_1)_{\in A_l}, (a_2)_{\in A_r}\right), \left((b_1)_{\in B_l}, (b_2)_{\in B_r}\right)\right)$. Or, une LCI prend en arguments un couple d'éléments quels qu'ils soient, et non un quadruplets d'éléments, d'où la nécessité d'utiliser le produit cartésien fondamental.*

- *L'ensemble qui reste le même, (par exemple A si $\star \in \mathcal{F}((A \times B) \to A)$, B si $\star \in \mathcal{F}((A \times B) \to B)$) est appelé **ensemble de stabilité de la loi de composition**.*

- *Si $A = B$, c'est-à-dire si $\star \in \mathcal{F}\left(A^2 \to A\right)$, on parle de **loi de composition interne** sur A, abrégée LCI sur A*

- *Si $A \neq B$, c'est-à-dire si $\star \in \mathcal{F}((A \times B) \to A)$ (respectivment $\star \in \mathcal{F}((A \times B) \to B)$) avec $A \neq B$, on parle de **loi de composition externe** sur A (respectivement sur B), abrégée LCE sur A, respectivement sur B*

- *On peut citer comme exemple de lois de compositions internes les applications "$+$" et "$\times$" sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou aussi $\cup$ et $\cap$ sur $\mathcal{P}(E)$.*

- *Il y a une utilisation ultra pratique des LCI, un peu difficile à comprendre au premier abord mais très importante au demeurant, c'est qu'avec une LCI $\star$ sur un ensemble E, on peut toujours construire une LCI $\star_{F}$ sur $\mathcal{F}(I \to E)$.*

  Cela est dû à une feature des fonctions qui est que quand on a une une fonction f et une fonction g, $(f+g)$ renvoie une fonction qui à tout x associe $f(x)+g(x)$, et ça fonctionne avec n'importe quel type d'opérateur, pour peu que la méthode de l'opérateur soit définie au sein des objets de l'ensemble d'arrivée des fonctions utilisées dans l'expression.
  En l'occurence, quand on a une expression $f \star g$, si la fonction $\star$ est définie sur un ensemble de fonctions, genre $\mathcal{F}(I \to O)$, alors ça va opérer normalement en utilisant l'opérateur binaire $\star$, donc renvoyer $\star(f,g)$, en revanche si ce n'est pas le cas, alors ça utilisera la feature des fonctions qui renverra la nouvelle fonction $F^\circ \begin{pmatrix} I & \to & O \\ x & \mapsto & f(x)\star g(x) \end{pmatrix}$. C'est ce qui permet de trancher les ambiguîtés.

  Par exemple, si on a une LCI $\star := F^\circ \begin{pmatrix} E^2 & \to & E \\ (a,\ b) & \mapsto & \star(a,b) \end{pmatrix}$,
  et I un ensemble quelconque,
  on pourrait créer une LCI

$$\star_F := F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{F}(I \to E))^2 & \to & \mathcal{F}(I \to E) \\ (f,\ g) & \mapsto & f \ *_F \ g = f \star g = F^\circ \begin{pmatrix} I & \to & E \\ x & \mapsto & f(x)\ \star\ g(x) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

  En gros c'est la LCI $\star$ appliquée aux 2 fonctions.
  Il y a beaucoup d'auteurs qui ne changent même pas le nom de la LCI, genre qui définissent $\star$ comme on vient de le faire et puis qui disent que "par construction générale, $\star$ est aussi une LCI sur $\mathcal{F}(I \to E)$" vu qu'on a le droit d'écrite $f \star g$, cependant cette notation n'est pas une opération de f et g mais une feature particulière des fonctions qui font que quand on écrit ça, le "parseur" le traduit en une déclaration d'une nouvelle fonction mettant en jeu $f(x) \star g(x)$, donc personnellement je préfère nommer la LCI différemment vu qu'il ne s'agit pas du même objet mathématique. On verra plus tard des situations où cette technique peut être mise en pratique.

Définition 26. *"Ensemble stable pour une LCI donnée"*
Soit $\star$ une LCI sur E,

$$A_{\subseteq E} \text{ stable pour la LCI } \star \iff \forall (a,\ b) \in A^2,\ ((a \star b) \in A)$$

Dit autrement : *« Un ensemble est stable pour une LCI donnée quand la LCI appliquée à 2 éléments de cet ensemble donne systématiquement un résultat dans ce même ensemble ».*

Dit autrement :

$$A_{\subseteq E} \text{ stable pour la LCI } \star \iff Im\left(\star_{|A^2 \to E}\right) \subseteq A$$

Dit autrement : *« Un ensemble A est stable pour une LCI donnée quand la LCI restreinte à cet ensemble a son domaine image inclus dans ce même ensemble ».*

Remarques :

- *Quand $A_{\subseteq E}$ est stable pour $\star$ (LCI sur E), la LCI restreinte sur A^2 et co-restrenite sur A, $\star_{|A^2 \to A}$, est appelée "LCI sur E induite sur A"*

- *Une LCI induite est généralement notée de la même manière que la LCI initiale, ici $\star$, mais c'est la maxi-galère parce qu'on ne parle pourtant pas du même objet et le fait de désigner par le même identifiant 2 objets distincts est le meilleur moyen de plus savoir où on habite. Le plus rigoureux et ergonomique selon moi est de la noter en cohérence avec les notations / opérateurs de restriction de fonctions, à savoir $\star_{|A^2 \to A}$, ou bien $\star_A$ pourquoi pas.*

- *Du coup, si on considère la LCI sur $\mathbb{C}$, $+$, avec $+ = F^\circ \begin{pmatrix} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & z_1 + z_2 \end{pmatrix}$, on a $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ qui sont stables par $+$. Même chose pour $\times = F^\circ \begin{pmatrix} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & z_1 \times z_2 \end{pmatrix}$*

- *De même, en considérant les LCI $\cup$ et $\cap$ sur $\mathcal{P}(E)$, E étant un ensemble quelconque, si on prend un ensemble $(E')_{\subseteq E}$, et bien l'ensemble $\mathcal{P}(E')$, sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$, est stable pour $\cup$ de même que pour $\cap$.*

- *De même que, quand on a une fonction $f = F^\circ \begin{pmatrix} I_f & \to & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$ et un ensemble A, certains auteurs notent $f(A)$ le domaine image de $f_{|A}$ (et que je préfère noter $Im\left(f_{|A}\right)$ ou $f^*(A)$), on peut noter le domaine image d'une LCI $\star \in \mathcal{F}\left(E^2 \to E\right)$ restreinte comme ceci :*

$$A \star B = Im\left(\star_{|(A \times B) \to E}\right) = \star^*(A \times B)$$

Définition 27. *"LCI produit de deux LCI"*

Soient E et F deux ensembles, $\star_E \in \mathcal{F}\left(E^2 \to E\right)$ et $\star_F \in \mathcal{F}\left(F^2 \to F\right)$

La LCI produit des LCI $\star_E$ et $\star_F$ est : (attention ici il est question de produit cartésien fondamental noté $\times_f$ et de produit cartésien fusionnant noté $\times$) :

$$\star_\Pi = F^\circ \begin{pmatrix} (E \times F) \times_f (E \times F) & \to & (E \times F) \\ ((a_1, a_2), (a_3, a_4)) & \mapsto & (a_1 \ \star_E \ a_2, \ b_1 \ \star_F \ b_2) \end{pmatrix}$$

Dit autrement : *« Soient E et F deux ensembles, $\star_E$ une LCI sur E et $\star_F$ une LCI sur F. La LCI produit de $\star_E$ et $\star_F$ est une LCI sur $(E \times F)$, qui prend 2 couples $(a_{\in E}, b_{\in F})$ et qui retourne un couple $(c_{\in E}, d_{\in F})$ où c est le résultat de l'opération des 2 éléments de E par la LCI sur E et d est le résultat de l'opération des 2 éléments de F par la LCI sur F ».*

Définition 28. *"LCI produit de $n_{\in [2, +\infty[_\mathbb{N}}$ LCI"*

Soient $n \in [2, \ +\infty[_\mathbb{N}$,

et $I := [1, \ n]_\mathbb{N}$

et $s_1 := \left((E_i)_{\in W}\right)_{i \in I}$ une famille d'ensembles

et $s_2 := \left((\star_i)_{\in \mathcal{F}\left((E_i)^2 \to E_i\right)}\right)_{i \in I_{\subseteq \mathbb{N}}}$ une famille de LCI sur chaque ensemble spécifiquement

La LCI produit des LCI de s_2 est : (attention ici il est question de produit cartésien fondamental noté $\times_f$ et de produit cartésien fusionnant noté $\times$) :

$$\star_\Pi = F^\circ \left(\begin{matrix} \prod (E_i) \times_f \prod (E_i) & \to & \prod (E_i) \\ \left(\left((x_i)_{\in E_i}\right)_{i \in I}, \ \left((y_i)_{\in E_i}\right)_{i \in I}\right) & \mapsto & \left((x_i \ \star_i \ y_i)_{\in E_i}\right)_{i \in I} \end{matrix} \right)$$

Dit autrement :

Soient $n \in [2, \ +\infty[_\mathbb{N}$,

et $I := [1, \ n]_\mathbb{N}$

et $s_1 := \left((E_i)_{\in W}\right)_{i \in I}$ une famille d'ensembles

et $s_2 := \left((\star_i)_{\in \mathcal{F}\left((E_i)^2 \to E_i\right)}\right)_{i \in I_{\subseteq \mathbb{N}}}$ une famille de LCI sur chaque ensemble spécifiquement

La LCI produit des LCI de s_2 est : (attention ici il est question de produit cartésien fondamental noté $\times_f$ et de produit cartésien fusionnant noté $\times$) :

$$\star_\Pi = F^\circ \begin{pmatrix} (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) \times_f (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) & \to & (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) \\ ((x_1, x_2, \ldots, x_n), \ (y_1, y_2, \ldots, y_n)) & \mapsto & ((x_1 \star_1 y_1), \ \ldots, \ (x_n \star_n y_n)) \end{pmatrix}$$

Dit autrement : *« Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille de $n \geq 2$ ensembles et $(\star_i)_{i\in I}$ une famille de LCI sur chaque ensemble de la famille précédente. La LCI produit des LCI de cette dernière est une LCI sur $\prod(E_i)$, qui prend 2 n-uplets de $\prod(E_i)$ et qui retourne un n-uplet de $\prod(E_i)$ où chaque élément de ce dernier est le résultat de l'opération des 2 éléments de chaque E_i par la LCI sur E_i. ».*

Remarque :

- *Du coup* $\left((x_i)_{\in E_i}\right)_{i\in I} \star_\Pi \left((y_i)_{\in E_i}\right)_{i\in I} = \left(((x_i \star_i y_i))_{\in E_i}\right)_{i\in I}$
- *Dans la famille de LCI sur laquelle on crée la LCI produit, il peut y avoir plusieurs fois la même LCI. Par exemple on peut faire une LCI produit de $n_{\in[2,+\infty[}$ fois la même LCI, genre si on a un ensemble E et $\star$ une LCI sur E, on peut faire une LCI produit de $\star$ et $\star$ qui donnera*

$$\star_\Pi = F^\circ\begin{pmatrix} (E^2)\times_f(E^2) & \to & E^2 \\ ((a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2)) & \mapsto & (a_1\star a_2,\ b_1\star b_2)\end{pmatrix}$$

De manière générale, la LCI produit sur n LCI $\star$ donnera tout simplement, avec $I = [1, n]_{\mathbb{N}}$

$$\star_\Pi = F^\circ\begin{pmatrix} (E^n)\times_f(E^n) & \to & E^n \\ \left(\left((x_i)_{\in E}\right)_{i\in I},\ \left((y_i)_{\in E}\right)_{i\in I}\right) & \mapsto & \left((x_i\star y_i)_{\in E}\right)_{i\in I}\end{pmatrix}]$$

Ça veut dire qu'on aura $\left((x_i)_{\in E_i}\right)_{i\in I} \star_\Pi \left((y_i)_{\in E_i}\right)_{i\in I} = \left((x_i \star y_i)_{\in E_i}\right)_{i\in I}$

- *Un truc intéressant que je me permet de redire : si on a un ensemble E et $\star$ une LCI sur E, alors l'ensemble $\mathcal{F}(I\to E)$ dispose d'une LCI $\star_F$ sur celui-ci :*

$$\star_F = F^\circ\begin{pmatrix} \mathcal{F}(I\to E)\times_f\mathcal{F}(I\to E) & \to & \mathcal{F}(I\to E) \\ (f,\ g) & \mapsto & f\star_F g = f\star g = F^\circ\begin{pmatrix} I & \to & E \\ x & \mapsto & f(x)\star g(x)\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Définition 29. *"Associativité d'une LCI"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$\star \text{ associative} \iff \forall (a,\ b,\ c) \in E^3,\ (a \star b) * c = a * (b \star c) = a \star b \star c$$

Remarques :

- *Les LCI $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$, ainsi que $\cup$ et $\cap$ sur un ensemble wrapper W sont associatives*
- *Quand on a une LCI $\star$ sur un ensemble E qui n'est pas associative, alors pour chaque $a_{\in E}$ on peut créer une suite $c \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ qui prend en input un nombre d'opérations mettant en jeu a (c'est-à-dire le nombre de fois $+ 1$ où a est présent dans le calcul), et qui retourne le nombre de résultats "à priori" distincts en fonction des possibilités de placement des parenthèses. Concrètement, pour $n = 0$, on a $c_n = c_0 = 1$ vu que notre calcul est a. Pour $n = 1$, on a $c_n = c_1 = 1$ vu que notre calcul est $a \star a$, pour $n = 2$, on a $c_n = c_2 = 2$ vu que notre calcul est $a \star a \star a$ donc les parenthèses peuvent se placer suivant $(a \star a) \star a$ ou $a \star (a \star a)$, pour $n = 3$ on a $c_n = c_3 =$. La famille $\underline{c}$ est ce qu'on appelle* ***les nombres de Catalan***

Définition 30. *"Commutativité d'une LCI"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$\star \text{ commutative} \iff \forall (a,\ b) \in E^2,\ a \star b = b \star a$$

Remarque :

- *les LCI $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$, ainsi que $\cup$ et $\cap$ sur un ensemble wrapper W sont commutatives*

Définition 31. *"Élément neutre à gauche pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E
et $e \in E$

$$e \text{ est l'élément neutre à gauche pour } \star \iff \forall a \in E,\ (e \star a = a)$$

Dit autrement : *« C'est l'élément de E tel que quand on l'opère avec un autre élément, l'élément neutre à gauche, ça donne toujours cet autre élément. Il est neutre dans le sens où il n'altère aucun élément de E par la LCI. Il n'existe pas forcément pour la LCI en question. Certains disent qu'une LCI qui dispose d'un élément neutre à gauche dans son ensemble de stabilité qu'elle est* ***unifère à gauche****. ».*

Définition 32. *"Élément neutre à droite pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E
et $e \in E$

$$e \text{ est l'élément neutre à droite pour } \star \iff \forall a \in E,\ (a \star e = a)$$

Dit autrement : *« C'est un élément de E tel que quand on l'opère avec un autre élément, l'élément neutre à droite, ça donne toujours cet autre élément. Il est neutre dans le sens où il n'altère aucun élément de E par la LCI. Il n'existe pas forcément pour la LCI en question. Certains disent qu'une LCI qui dispose d'un élément neutre à droite dans son ensemble de stabilité qu'elle est **unifère à droite**. ».*

Définition 33. *"Élément neutre pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E
et $e \in E$

$$e \text{ est l'élément neutre de } \star \iff \forall a \in E,\ (a \star e = e \star a = a)$$

Dit autrement :
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E
et $e \in E$

$$e \text{ est l'élément neutre de } \star$$
$$\iff$$
$$(e \text{ est un élément neutre à gauche de } \star) \ \wedge \ (e \text{ est un élément neutre à droite de } \star)$$

Dit autrement : *« C'est un élément de E tel que quand on l'opère avec un autre élément, ça donne toujours cet autre élément. Il est neutre dans le sens où il n'altère aucun élément de E par la LCI. Il n'existe pas forcément pour la LCI en question. Certains disent qu'une LCI qui dispose d'un élément neutre dans son ensemble de stabilité qu'elle est **unifère**. ».*

Remarques :

- *L'élément neutre de la LCI $+$ sur $\mathbb{C}$ est 0*
- *L'élément neutre de la LCI $\times$ sur $\mathbb{C}$ est 1*
- *L'élément neutre de la LCI $\cup$ sur un ensemble $\mathcal{P}(E)$ est $\varnothing$*
- *L'élément neutre de la LCI $\cap$ sur un ensemble $\mathcal{P}(E)$ est $\mathcal{P}(E)$*
- *S'il y a un élément neutre pour une LCI, alors il est unique*
- *Si pour une LCI, il y a un élément neutre à gauche et un élément neutre à droite, alors ils sont forcément égaux, constituant donc l'élément neutre pour la LCI*

Définition 34. *"Élément inversible à gauche pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E admettant un élément neutre
et $e \in E$ l'élément neutre pour $\star$

$$a_{\in E} \text{ est un élément inversible à gauche pour } \star \ \Leftrightarrow \ \big(\exists a' \in E \mid \big(a' \star a = e\big)\big)$$

Dit autrement : *« Un élément est inversible à gauche pour une LCI donnée quand on peut l'opérer avec un autre élément de l'ensemble, placé à gauche, pour obtenir l'élément neutre (par exemple pour la LCI + sur $\mathbb{R}$, on a 42 qui est inversible à gauche car on a -42 dans $\mathbb{R}$ qui est tel que $(-42) + 42 = 0$)*
*L'élément a' est appelé **élément inverse à gauche de** a **par** $\star$, ou encore **élément symétrique à gauche de** a **par** $\star$, ».*

Dit autrement : *« Un élément est inversible à gauche pour une LCI ssi il admet un élément inverse à gauche par la LCI ».*

Définition 35. *"Élément inversible à droite pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E admettant un élément neutre
et $e \in E$ l'élément neutre pour $\star$

$$a_{\in E} \text{ est un élément inversible à droite pour } \star \ \Leftrightarrow \ \big(\exists a' \in E \mid \big(a \star a' = e\big)\big)$$

Dit autrement : *« Un élément est inversible à droite pour une LCI donnée quand on peut l'opérer avec un autre élément de l'ensemble, placé à droite, pour obtenir l'élément neutre (par exemple pour la LCI + sur $\mathbb{R}$, on a 42 qui est inversible à droite car on a -42 dans $\mathbb{R}$ qui est tel que $(42) + (-42) = 0$)*
*L'élément a' est appelé **élément inverse à droite de** a **par** $\star$ ou encore **élément symétrique à droite de** a **par** $\star$ ».*

Dit autrement : *« Un élément est inversible à droite pour une LCI ssi il admet un élément inverse à droite par la LCI ».*

Définition 36. *"Élément inversible pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E admettant un élément neutre et $e \in E$ l'élément neutre pour $\star$

$$a_{\in E} \text{ est un élément inversible pour } \star \Leftrightarrow \big(\exists a' \in E \mid \big(a' \star a = a \star a' = e\big)\big)$$

Dit autrement : *« Un élément est inversible pour une LCI donnée quand on peut l'opérer avec un autre élément de l'ensemble pour obtenir l'élément neutre (par exemple pour la LCI + sur $\mathbb{R}$, on a 42 qui est inversible car on a -42 dans $\mathbb{R}$ qui est tel que $(-42) + 42 = 42 + (-42) = 0$)*
L'élément a' est appelé ***élément inverse de*** *a* ***par*** *$\star$ ».*

Dit autrement : *« Un élément est inversible pour une LCI ssi il admet un élément inverse par la LCI ».*

Dit autrement : *« Un élément est inversible pour une LCI ssi il est inversible à gauche et inversible à droite et que les éléments inverses à gauche et à droite sont égaux ».*

Remarques :

- *Souvent, les LCI commutatives sont notées + parce que ça permet de faire des analogies avec l'addition qu'on connait bien depuis tout petit (pour peu que ses propriétés se retrouvent également dans la LCI en question). Dans ce cas le symétrique d'un élément a est appelé "l'opposé" de a, plutôt que "l'inverse" de a, noté $-a$, histoire de rester dans le même registre.*
- *Parfois la LCI est notée $\times$ ou $\cdot$ voire elle n'apparaît pas entre les termes lors d'une opération (par exemple avec ab au lieu de $a \cdot b$), parce qu'elle permet de faire des analogies avec la multiplication qu'on connait bien aussi depuis tout petit. Dans ce cas le symétrique d'un élément a est appelé "l'inverse", plutot que "l'opposé", noté a^{-1}, histoire de rester dans le même registre.*

- *Si la LCI $\star$ sur E est associative, alors si a dispose d'un élément inverse à gauche par $\star$ (disons a') et d'un élément inverse à droite par $\star$ (disons a''), alors il s'agit du même élément, et donc a est inversible pour $\star$ (c'est logique car à ce moment-là, $a' * a * a'' = (a' * a) * a'' = a' * (a * a'') = a' = a''$)*
- *De ce qui a été dit ci-dessus, il découle que si une LCI est associative, alors tout élément inverse (à gauche ou à droite ou général) d'un élément de l'ensemble est unique.*

Définition 37. *"Élément simplifiable à gauche pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$a_{\in E} \text{ est simplifiable à gauche pour } \star \;\Leftrightarrow\; \forall\,(x,\ y) \in E^2,\ ((a \star x = a \star y) \Rightarrow (x = y))$$

Dit autrement : *Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E*

$$a_{\in E} \text{ est simplifiable à gauche pour } \star \;\Leftrightarrow\; \forall\,(x,\ y) \in E^2,\ ((a \star x = a \star y) \Leftrightarrow (x = y))$$

Dit autrement : *« Un élément est simplifiable à gauche pour une LCI donnée ssi quand on prend 2 éléments x et y de E, le fait d'avoir $a \star x = a \star y$ fait qu'obligatoirement $x = y$. L'inverse est toujours vrai mais la définition originelle ne précise qu'une implication au lieu d'une équivalence, possiblement pour suggérer que l'inverse peut être vrai en dehors de la définition de l'élément simplifiable à gauche. Pourquoi pas. ».*

Remarque :

- *Si on a $\star$, LCI unifère à gauche sur E, d'élément neutre e, qui est associative, alors tout élément $a_{\in E}$ inversible à gauche par $\star$ est également simplifiable à gauche par $\star$. Autrement dit :*

  Soient E un ensemble et $\star$ une LCI associative et unifère à gauche sur E

  $$\forall a \in E,\ (a \text{ inversible à gauche par } \star) \Rightarrow (a \text{ simplifiable à gauche par } \star)$$

  En effet, dans ce cas, on aura
  $(a \star x = a \star y) \Leftrightarrow (a' \star a \star x = a' \star a \star y) \Leftrightarrow (x = y)$
  Il s'agit d'une relation d'implication et non d'équivalence, l'inverse n'est donc pas forcément vrai, c'est-à-dire que si a est simplifiable, il n'est pas forcément inversible. On peut prendre l'exemple de la LCI $\times$ sur $\mathbb{N}$, on a bien 3 qui est simplifiable à gauche car $3 \times x = 3 \times y \Leftrightarrow x = y$, malgré le fait que 3 ne soit pas inversible pour $\times$ car $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

Définition 38. *"Élément simplifiable à droite pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$a_{\in E} \text{ est simplifiable à droite pour } \star \;\Leftrightarrow\; \forall (x,\ y) \in E^2,\ ((x \star a = y \star a) \Rightarrow (x = y))$$

Dit autrement : *Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E*

$$a_{\in E} \text{ est simplifiable à droite pour } \star \;\Leftrightarrow\; \forall (x,\ y) \in E^2,\ ((x \star a = y \star a) \Leftrightarrow (x = y))$$

Dit autrement : *« Un élément est simplifiable à gauche pour une LCI donnée ssi quand on prend 2 éléments x et y de E, le fait d'avoir $x \star a = y \star a$ fait qu'obligatoirement $x = y$. L'inverse est toujours vrai mais la définition originelle ne précise qu'une implication au lieu d'une équivalence, possiblement pour suggérer que l'inverse peut être vrai en dehors de la définition de l'élément simplifiable à droite. Pourquoi pas. ».*

Remarque :

- *Si on a $\star$, LCI unifère à droite sur E, d'élément neutre e, qui est associative, alors tout élément $a_{\in E}$ inversible à droite par $\star$ est également simplifiable à droite par $\star$. Autrement dit :*

  Soient E un ensemble et $\star$ une LCI associative et unifère à droite sur E

  $$\forall a \in E,\ (a \text{ inversible à droite par } \star) \Rightarrow (a \text{ simplifiable à droite par } \star)$$

  En effet, dans ce cas, on aura
  $(x \star a = y \star a) \Leftrightarrow (x \star a \star a' = y \star a \star a') \Leftrightarrow (x = y)$
  Il s'agit d'une relation d'implication et non d'équivalence, l'inverse n'est donc pas forcément vrai, c'est-à-dire que si a est simplifiable, il n'est pas forcément inversible. On peut prendre l'exemple de la LCI $\times$ sur $\mathbb{N}$, on a bien 3 qui est simplifiable à droite car $x \times 3 = y \times 3 \Leftrightarrow x = y$, malgré le fait que 3 ne soit pas inversible pour $\times$ car $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

Définition 39. *"Élément simplifiable pour une LCI sur un ensemble"*
Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$a_{\in E} \text{ est simplifiable pour } \star$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x,\ y) \in E^2,\ (((a \star x = a \star y) \Rightarrow (x = y))\ \wedge\ ((x \star a = y \star a) \Rightarrow (x = y)))$$

Dit autrement : *Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E*

$$a_{\in E} \text{ est simplifiable pour } \star$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x,\ y) \in E^2,\ (((a \star x = a \star y) \Leftrightarrow (x = y))\ \wedge\ ((x \star a = y \star a) \Leftrightarrow (x = y)))$$

Dit autrement : *Soient $\star$ une LCI sur un ensemble E*

$$a_{\in E} \text{ est simplifiable pour } \star$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(a \text{ est simplifiable à gauche pour } \star) \wedge (a \text{ est simplifiable à droite pour } \star)$$

Dit autrement : *« Un élément est simplifiable pour une LCI donnée ssi quand on prend 2 éléments x et y de E, le fait d'avoir $x \star a = y \star a$ ou $a \star x = a \star y$ fait qu'obligatoirement $x = y$. L'inverse est toujours vrai mais la définition originelle ne précise qu'une implication au lieu d'une équivalence, possiblement pour suggérer que l'inverse peut être vrai en dehors de la définition de l'élément simplifiable à droite. Pourquoi pas. ».*

Remarque :

- *Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont simplifiables pour la LCI $+$ sur $\mathbb{N}$ mais aucun à part 0 n'est inversible*

- *Tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont simplifiables pour la LCI $\times$ sur $\mathbb{Z}$ mais aucun à part $+1$ et -1 n'est inversible*

- *Tous les éléments de $\mathbb{C}$ sont inversibles pour la LCI $+$ sur $\mathbb{C}$*
- *Tous les éléments de $\mathbb{C}^\star$ sont inversibles pour la LCI $\times$ sur $\mathbb{C}$*

- *Si on a $\star$, LCI unifère sur E, d'élément neutre e, qui est associative, alors tout élément $a_{\in E}$ inversible pour $\star$ est également simplifiable pour $\star$. Autrement dit :*

  $$\text{Soient } E \text{ un ensemble et } \star \text{ une LCI associative et unifère sur } E$$

  $$\forall a \in E,\ (a \text{ inversible pour } \star) \Rightarrow (a \text{ simplifiable pour } \star)$$

  En effet, dans ce cas, on aura par exemple
  $(x \star a = y \star a) \Leftrightarrow (x \star a \star a' = y \star a \star a') \Leftrightarrow (x = y)$
  Il s'agit d'une relation d'implication et non d'équivalence, l'inverse n'est donc pas forcément vrai, c'est-à-dire que si a est simplifiable, il n'est pas forcément inversible. On peut prendre l'exemple de la LCI $\times$ sur $\mathbb{N}$, on a bien 3 qui est simplifiable car $x \times 3 = y \times 3 \Leftrightarrow x = y$, malgré le fait que 3 ne soit pas inversible pour $\times$ car $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

Définition 40. *"Élément absorbant à gauche pour une LCI sur un ensemble"*
Soit $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$a_{\in E} \text{ est un élément absorbant à gauche pour } \star \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (a \star x = a)$$

Dit autrement : *« Un élément est absorbant à gauche pour une LCI donnée ssi quand on l'opère à gauche avec n'importe quel élément de l'ensemble de stabilité, ça le renvoit toujours lui. »*

Dit autrement : *« On peut dire que c'est le contraire de l'élément neutre à gauche. L'élément neutre à gauche quand on l'opère à gauche avec $x \in E$ ça retourne systématiquement x, l'élément absorbant à gauche a quand on l'opère avec $x \in E$ ça retourne systématiquement a ».*

Remarque :

- 0 *est l'élément absorbant à gauche de la LCI $\times$ sur $\mathbb{C}$. En effet,* $\forall x \in \mathbb{C},\ (0 \times x = 0)$

Définition 41. *"Élément absorbant à droite pour une LCI sur un ensemble"*
Soit $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$a_{\in E} \text{ est un élément absorbant à droite pour } \star \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (x \star a = a)$$

Dit autrement : *« Un élément est absorbant à droite pour une LCI donnée ssi quand on l'opère à droite avec n'importe quel élément de l'ensemble de stabilité, ça le renvoit toujours lui. »*

Dit autrement : *« On peut dire que c'est le contraire de l'élément neutre à droite. L'élément neutre à droite quand on l'opère à droite avec $x \in E$ ça retourne systématiquement x, l'élément absorbant à droite a quand on l'opère avec $x \in E$ ça retourne systématiquement a ».*

Remarque :

- 0 *est l'élément absorbant à droite de la LCI $\times$ sur $\mathbb{C}$. En effet,* $\forall x \in \mathbb{C},\ (x \times 0 = 0)$

Définition 42. *"Élément absorbant pour une LCI sur un ensemble"*
Soit $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$a_{\in E} \text{ est un élément absorbant pour } \star \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (a \star x = x \star a = a)$$

Dit autrement : *« Un élément est absorbant pour une LCI donnée ssi quand on l'opèreavec n'importe quel élément de l'ensemble de stabilité, ça le renvoit toujours lui. »*
Dit autrement : *« On peut dire que c'est le contraire de l'élément neutre. L'élément neutre quand on l'opère avec $x \in E$ ça retourne systématiquement x, l'élément absorbant a quand on l'opère avec $x \in E$ ça retourne systématiquement a ».*
Dit autrement : *« Un élément est absorbant pour une LCI donnée ssi il est absorbant à gauche et absorbant à droite pour la LCI en question. ».*

Remarque :

- 0 *est l'élément absorbant de la LCI* $\times$ *sur* $\mathbb{C}$*. En effet,*
  $\forall x \in \mathbb{C},\ (0 \times x = x \times 0 = 0)$

Définition 43. *"Élément idempotent pour une LCI sur un ensemble"*
Soit $\star$ une LCI sur un ensemble E

$$a_{\in E} \text{ est un élément idempotent pour } \star \Leftrightarrow (a \star a = a)$$

Dit autrement : *« Un élément est idempotent pour une LCI donnée ssi quand on l'opère avec lui-même il retourne lui-même ».*

Remarque :

- *Tout élément neutre pour une LCI est idempotent pour cette LCI*
- *Pour la LCI* $+$ *sur* $\mathbb{C}$*, seul l'élément neutre* 0 *est idempotent*
- *Pour la LCI* $\times$ *sur* $\mathbb{C}$*, seuls* 0 *et l'élément neutre* 1 *sont idempotents*

Définition 44. *"Morphisme d'une LCI vers une autre LCI"*
Soient E_1 et E_2 des ensembles,
et $\star_1$ une LCI sur E_1
et $\star_2$ une LCI sur E_2
et $\varphi \in \mathcal{F}(E_1 \to E_2)$

$$\varphi \text{ est un morphisme de } \star_1 \text{ vers } \star_2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall (a,\ b) \in (E_1)^2,\ (f(a\ \star_1\ b) = f(a)\ \star_2\ f(b))$$

Dit autrement : *« Un morphisme d'une LCI vers une autre LCI, c'est une application définie sur l'ensemble de stabilité de la première LCI, à valeurs dans l'ensemble de stabilité de la seconde LCI, et qui, quand elle prend en argument 2 éléments opérés par la première LCI, retourne ces 2 éléments opérés par la fonction puis opérés par la seconde LCI ».*

Dit autrement : *« Un morphisme d'une LCI vers une autre LCI, c'est une application qui est capable de transformer un calcul mettant en jeu la première LCI en un calcul mettant en jeu la seconde LCI ».*

Remarques :
- *Certains utilisent le terme d'homomorphisme pour parler de morphisme*
- *Quand les 2 LCI sont identiques, on parle d'endomorphisme. On dira alors, par exemple dans le cas où il s'agit d'un morphisme de $\star$ vers $\star$, que c'est un endomorphisme sur $\star$*
- *Quand le morphisme est bijectif, on parle d'isomorphisme*
- *Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme*
- *S'il existe un isomorphisme d'une LCI vers une autre LCI, on dit que ces 2 LCI sont isomorphes*
- *La composée d'un morphisme φ_2 de $\star_2$ vers $\star_3$ avec un morphisme φ_1 de $\star_1$ vers $\star_2$ donne un morphisme φ_{comp} de $\star_1$ vers $\star_3$*
  En effet, $\varphi_1(a \star_1 b) = \varphi_1(a) \star_2 \varphi_1(b)$
  et $\varphi_2(c \star_2 d) = \varphi_2(c) \star_3 \varphi_2(d)$
  donc

$$\begin{aligned}
\varphi_{comp}(a \star_1 b) &= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a \star_1 b) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(a \star_1 b)) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(a) \star_2 \varphi_1(b)) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(a)) \star_3 \varphi_2(\varphi_1(b)) \\
&= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a) \star_3 (\varphi_2 \circ \varphi_1)(b) \\
\varphi_{comp}(a \star_1 b) &= \varphi_{comp}(a) \star_3 \varphi_{comp}(b)
\end{aligned}$$

- *Par ailleurs, si les 2 morphismes évoqués ci-dessus sont des isomorphismes, alors la composition sera également un isomorphisme*
- *L'identité sur E, c'est-à-dire l'application $Id_E = \digamma^{\circ}\left(\begin{smallmatrix} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{smallmatrix}\right)$ est un isomorphisme de toute LCI sur E vers elle-même (c'est donc un automorphisme)*
- *L'application réciproque d'un isomorphisme d'une première LCI vers une seconde LCI, est également un isomorphisme, de la seconde LCI vers la première*
- *La relation "être isomorphe" est une relation d'équivalence*
- *De même que la notation $\mathcal{F}(E \to F)$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur E à valeur dans F, la notation $\mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)$ désigne l'ensemble des morphismes de $\star_1$ vers $\star_2$, avec $\mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)_{\to}$ l'ensemble des morphismes surjectifs, $\mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)_{\leftarrow}$ l'ensemble des morphismes injectifs et $\mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)_{\leftrightarrow}$ l'ensemble des morphismes bijectifs.*

- *Si 2 LCI sont isomorphes, alors :*
  - *l'unes des 2 LCI est associatives $\Leftrightarrow$ l'autre LCI est aussi associative (donc quand 2 LCI sont isomorphes, elles sont soit toutes les 2 associatives, soit toutes les 2 pas associatives)*
  - *l'unes des 2 LCI est commutative $\Leftrightarrow$ l'autre LCI est aussi commutative (donc quand 2 LCI sont isomorphes, elles sont soit toutes les 2 commutatives, soit toutes les 2 pas commutatives)*

- *Un isomorphisme transforme toujours l'élément neutre (tout court ou à gauche ou à droite) en l'élément neutre (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). C'est-à-dire que si on a $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)_{\leftrightarrow}$ et e_1 l'élément neutre de $\star_1$ et e_2 l'élément neutre de $\star_2$, alors*
$$\varphi(e_1) = e_2$$
- *Un isomorphisme transforme toujours un élément absorbant (tout court ou à gauche ou à droite) en élément absorbant (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)_{\leftrightarrow}$*

$$a_1 \text{ est un élément absorbant de } \star_1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\varphi(a_1) \text{ est un élément absorbant de } \star_2$$

- *Un isomorphisme transforme toujours un élément idempotent en élément idempotent. Dit autrement :* $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)_{\leftrightarrow}$

$$i_1 \text{ est un élément idempotent de } \star_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\varphi(i_1) \text{ est un élément idempotent de } \star_2$$

- *Un isomorphisme transforme toujours un élément inversible (tout court ou à gauche ou à droite) en élément inversible (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement :* $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)_{\leftrightarrow}$

$$a_1' \text{ inversible (tout court ou à gauche ou à droite) par } \star_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\varphi(a_1') \text{ inversible (respectivement tout court ou à gauche ou à droite) par } \star_2$$

- *Un isomorphisme transforme toujours un élément simplifiable (tout court ou à gauche ou à droite) en élément simplifiable (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement :* $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)_{\leftrightarrow}$

$$a \text{ simplifiable (tout court ou à gauche ou à droite) par } \star_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\varphi(a) \text{ simplifiable (respectivement tout court ou à gauche ou à droite) par } \star_2$$

Définition 45. *"Définition d'un Magma"*

Un magma est un objet mathématique constitué d'un ensemble et d'une LCI sur cet ensemble. On le déclare comme ça :

$$\text{Soient } E \text{ un ensemble et } \star \text{ une LCI sur } E$$

$$M := \mathcal{M}^{\circ}(E, \star)$$

Dit autrement : *« C'est le fait de packer une LCI avec son ensemble de stabilité pour créer un objet mathématique. C'est plus simple à manipuler plutôt que de devoir dealer avec l'ensemble à certains moments et la LCI à d'autres moments. ».*

Remarque :

- *L'ensemble du vocabulaire utilisé pour les LCI et les éléments particuliers des ensemble de stabilité sont exportés à ce nouveau type d'objet mathématique*
- *L'ensemble du magma est appelé* ***ensemble de stabilité du magma*** *(vu que c'est l'ensemble de stabilité de la LCI du magma)*
- *Pour un élément faisant partie de l'ensemble de stabilité du magma, on peut dire que l'élément "appartient au magma"*
- *La LCI du magma est simplement appelée "LCI du magma"*
- *L'élément neutre (tout court ou à gauche ou à droite) pour la LCI du magma est dit "élément neutre (tout court ou à gauche ou à droite) du magma", le magma est donc dit* ***unifère*** *(tout court ou à gauche ou à droite).*
- *Dans la méthode constructeur du magma, on doit toujours préciser l'ensemble de stabilité et la LCI, genre $\mathcal{M}^{\circ}(E, \star)$, (c'est un peu un pléonasme mais c'est le standard), et optionnellement on peut spécifier l'élément neutre quand on veut déclarer un magma unifère, genre $\mathcal{M}^{\circ}(E, \star, e)$. La raison pour laquelle on doit préciser l'ensemble sur lequel s'applique la LCI est que ça permet de restreindre ou d'étendre la LCI passée en argument sans avoir à le mentionner explicitement. Par exemple si on a une LCI $\star$ sur E et qu'on a $F_{\subseteq E}$, on peut créer un magma $\mathcal{M}^{\circ}(F, \star)$ qui est équivalent à $\mathcal{M}^{\circ}\left(F, \star_{|F}\right)$, la LCI de stabilité du magma sera bien $\star_{|F}$ (c'est géré par la méthode constructeur) et non $\star$. Cependant il faut faire très attention quand on utilise cette syntaxe parce que si la LCI n'est pas restreingnable ou étendable ça fera tout exploser.*
- *Un élément absorbant (tout court ou à gauche ou à droite) pour la LCI du magma est dit "élément absorbant (tout court ou à gauche ou à droite) du magma"*
- *Si la LCI du magma est associative, on dit que le magma est associatif*
- *Si la LCI du magma est commutative, on dit que le magma est commutatif*
- *Si tous les éléments du magma sont inversibles (tout court ou à gauche ou à droite), on dit que le magma est* ***symétrique*** *(tout court ou à gauche ou à droite)*

- *Un magma associatif est appelé un "demi-groupe"*
- *Un magma associatif et unifère est appelé "un monoïde"*
- *Un magma associatif, unifère et symétrique est appelé "un groupe"*

- *Si on a 2 magmas et qu'on a un morphisme de la LCI du premier magma vers la LCI du second magma, on dit qu'il s'agit d'un morphisme du premier magma vers le second magma, et que les 2 magmas sont isomorphes.*

  Donc quand on a une LCI $\star_1$ *sur* E_1 *et une LCI* $\star_2$ *sur* E_2 *et un morphisme* φ *de* $\star_1$ *vers* $\star_2$*, on peut aussi dire que* φ *est un morphisme du magma* $\mathcal{M}^\circ(E_1, \star_1)$ *vers* $\mathcal{M}^\circ(E_2, \star_2)$ *et que ces derniers sont isomorphes. Les règles de nommage du morphismes s'appliquent de la même manière (morphisme, homomorphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, ...)*

- *De même que la notation* $\mathcal{M}(\star_1 \to \star_2)$ *désigne l'ensemble des morphismes de* $\star_1$ *vers* $\star_2$*, la notation* $\mathcal{M}(\mathcal{M}^\circ(E_1,\ *_1) \to \mathcal{M}^\circ(E_2,\ \star_2))$ *désigne l'ensemble des morphismes du magma* $\mathcal{M}^\circ(E_1,\ \star_1)$ *vers* $\mathcal{M}^\circ(E_2,\ \star_2)$*. Une façon de dire que* φ *est un morphisme d'un magma* M_1 *vers un magma* M_2 *serait de noter* $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \to M_2)$

- *La composée d'un morphisme* φ_2 *de* M_2 *vers* M_3 *avec un morphisme* φ_1 *de* M_1 *vers* M_2 *donne un morphisme* φ_{comp} *de* M_1 *vers* M_3
  En effet, $\varphi_1(a \star_1 b) = \varphi_1(a) \star_2 \varphi_1(b)$
  et $\varphi_2(c \star_2 d) = \varphi_2(c) \star_3 \varphi_2(d)$
  donc

$$\begin{aligned}
\varphi_{comp}(a \star_1 b) &= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a \star_1 b) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(a \star_1 b)) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(a) \star_2 \varphi_1(b)) \\
&= \varphi_2(\varphi_1(a)) \star_3 \varphi_2(\varphi_1(b)) \\
&= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a) \star_3 (\varphi_2 \circ \varphi_1)(b) \\
\varphi_{comp}(a \star_1 b) &= \varphi_{comp}(a) \star_3 \varphi_{comp}(b)
\end{aligned}$$

- *Par ailleurs, si les 2 morphismes évoqués ci-dessus sont des isomorphismes, alors la composition sera également un isomorphisme*

- *L'identité sur un ensemble E, c'est-à-dire l'application $Id_E = F^\circ \left(\begin{smallmatrix} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{smallmatrix}\right)$ est un isomorphisme de tout magma dont l'ensemble de stabilité est E, vers lui-même. Dit autrement, l'application identité sur un ensemble E, Id_E, est un automorphisme sur tout magma dont l'ensemble de stabilité est E.*

- *L'application réciproque d'un isomorphisme d'un magma vers un second magma est également un isomorphisme, du second magma vers le premier*
- *La relation "être isomorphe" est une relation d'équivalence*
- *De même que la notation $\mathcal{F}(E \to F)$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur E à valeur dans F, la notation $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)$ désigne l'ensemble des morphismes du magma M_1 vers M_2, avec $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)_{\to}$ l'ensemble des morphismes surjectifs, $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)_{\leftarrow}$ l'ensemble des morphismes injectifs et $\mathcal{M}(M_1 \to M_2)_{\leftrightarrow}$ l'ensemble des morphismes bijectifs.*

- *Si 2 magmas sont isomorphes, alors :*
  - *l'un des 2 magma est associatif $\Leftrightarrow$ l'autre magma est aussi associatif (donc quand 2 magmas sont isomorphes, ils sont soit tous les 2 associatifs, soit tous les 2 pas associatifs)*
  - *l'un des 2 magmas est commutatif $\Leftrightarrow$ l'autre magma est aussi commutatif (donc quand 2 magmas sont isomorphes, ils sont soit tous les 2 commutatifs, soit tous les 2 pas commutatifs)*

- *Un isomorphisme transforme toujours l'élément neutre (tout court ou à gauche ou à droite) en l'élément neutre (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). C'est-à-dire que si on a $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \to M_2)_{\leftrightarrow}$ et e_1 l'élément neutre de M_1 et e_2 l'élément neutre de M_2, alors*
$$\varphi(e_1) = e_2$$
- *Un isomorphisme transforme toujours un élément absorbant (tout court ou à gauche ou à droite) en élément absorbant (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \to M_2)_{\leftrightarrow}$*

$$a_1 \text{ un élément absorbant de } M_1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\varphi(a_1)$$

- *Un isomorphisme transforme toujours un élément idempotent en élément idempotent. Dit autrement :* $\varphi \in \mathcal{M}\,(M_1 \to M_2)_{\leftrightarrow}$

$$i_1 \text{ est un élément idempotent de } M_1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\varphi\,(i_1) \text{ est un élément idempotent de } M_2$$

- *Un isomorphisme transforme toujours un élément inversible (tout court ou à gauche ou à droite) en élément inversible (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement :* $\varphi \in \mathcal{M}\,(M_1 \to M_2)_{\leftrightarrow}$

$$a_1' \text{ est un élément inversible (tout court ou à gauche ou à droite) de } M_1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\varphi\left(a_1'\right) \text{ est un élément inversible}$$
$$\text{(respectivement tout court ou à gauche ou à droite) de } M_2$$

- *Un isomorphisme transforme toujours un élément simplifiable (tout court ou à gauche ou à droite) en élément simplifiable (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement :* $\varphi \in \mathcal{M}\,(M_1 \to M_2)_{\leftrightarrow}$

$$a \text{ est un élément simplifiable (tout court ou à gauche ou à droite) de } M_1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\varphi\,(a) \text{ est un élément simplifiable}$$
$$\text{(respectivement tout court ou à gauche ou à droite) de } M_2$$

- *L'application exponentielle (népérienne)* $exp = exp_e = \mathcal{F}^\circ \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x \end{pmatrix}$ *est un morphisme de* $\mathcal{M}^\circ\,(\mathbb{R}, +) \to \mathcal{M}^\circ\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$*. En effet,* $\forall\,(a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ \left(e^{a+b} = e^a \times e^b\right)$

- *L'application logarithme néperien* $\ln = \log_e = \mathcal{F}^\circ \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{pmatrix}$ *est un morphisme de* $\mathcal{M}^\circ\left(\mathbb{R}_+^*,\ \times\right) \to \mathcal{M}^\circ\,(\mathbb{R},\ +)$*. En effet,*
$\forall\,(a,\ b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \left(\ln\,(a \times b) = \ln\,(a) + \ln\,(b)\right)$*. Par ailleurs, c'est totalement logique que ce soit le cas car la fonction* $\ln$ *est l'application réciproque de la fonction exponentielle, cette dernière étant un isomorphisme, sa fonction réciproque est également un isomorphisme.*

- *De manière générale, l'application exponentielle de base* $a_{\in \mathbb{R}_+^*}$, $exp_a = F^\circ \binom{\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*}{x \mapsto a^x}$ *est un morphisme de* $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R},\ +) \to \mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*,\ \times)$.
En effet, $\forall (b,\ c) \in \mathbb{R}^2,\ a^{b+c} = a^b \times a^c$. *C'est la généralisation du cas de la fonction exponentielle décrit ci-dessus, où on avait* $a = e$.

- *Également de manière générale, l'application logarithme de base* $a_{\in \mathbb{R}_+^*}$, $\log_a = F^\circ \binom{\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}}{x \mapsto \log_a(x)}$ *est un morphisme de* $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times) \to \mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}, +)$. *En effet,* $\forall (b,\ c) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ (\log_a(b \times c) = \log_a(b) + \log_a(c))$. *Par ailleurs, c'est totalement logique que ce soit le cas car la fonction* $\log_a$ *est l'application réciproque de la fonction exponentielle de base a, cette dernière étant un isomorphisme, sa fonction réciproque est également un isomorphisme. Enfin, c'est la généralisation du cas de la fonction logarithme néperien décrit ci-dessus, où on aurait* $a = e$.

- *L'application* $F^\circ \binom{\mathbb{R}^* \to \{1\}}{x \mapsto (0)^x}$ *est un morphisme de* $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}^*,\ +) \to \mathcal{M}^\circ(1, \times)$. *En effet,* $\forall (a,\ b) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ 0^{a+b} = 0^a \times 0^b$. *C'est un extension du cas de la fonction exponentielle décrit plus haut, avec* $a = 0$*, mais qui nous impose de restreindre l'ensemble de départ du morphisme (et donc du magma de départ) à* $\mathbb{R}^*$ *(donc à retirer 0) vu que* 0^0 *est une expression sujette à débat (valant 1 ou undefined en fonction des domaines et des auteurs).*

- *L'application* $F^\circ \binom{\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*}{x \mapsto x^{(n \in \mathbb{N}^*)}}$ *est un automorphisme sur* $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times)$*, c'est-à-dire un endomorphisme bijectif de* $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times) \to \mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times)$. *En effet,* $\forall (a,\ b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ ((a \times b)^n = a^n \times b^n)$.

- *L'application* $F^\circ \binom{P(E) \to P(E)}{A \mapsto (C_E(A) = E - A)}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup) \to \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap)$*, ainsi que de* $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap) \to \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup)$ *(cf page 11).*

  En effet, $\forall (A,\ B) \in (P(E))^2,\ (E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B))$

  De même, $\forall (A,\ B) \in (P(E))^2,\ (E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B))$

  C'est ce qu'on appelle la loi de Morgan, le fait qu'en logique, $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ *et que* $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.

- *Attention là le cervelas va fumer. On a évoqué page 42 le générateur d'application caractéristique des ensembles de $\mathcal{P}(E)$ par rapport à E. On va voir que cette application peut être un isomorphisme d'un magma vers un autre. Pour rappel, en considèrant un ensemble quelconque E, l'application caractéristique d'un ensemble $A_{\subseteq E}$ c'est l'application, qu'on pourrait aussi bien appeler "isInA", qui prend un élément de E et retourne 1 s'il est aussi dans A et 0 sinon, c'est-à-dire*

$$\mathcal{X}_{(A,E)} := F^\circ \begin{pmatrix} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \notin A: & 0 \\ x \in A: & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

On peut donc créer une application $\Gamma_{\mathcal{X}_E}$ qui, pour chaque sous-ensemble A de E, retourne son application caractéristique par rapport à E, $\mathcal{X}_{(A,E)}$, ce qu'on pourrait appeler le "générateur d'application caractéristique des sous-ensembles de E" :

$$\Gamma_{\mathcal{X}_E} := F^\circ \begin{pmatrix} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E \to \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \begin{pmatrix} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x\ inA : 1 \\ x \notin A : 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

On avait vu, d'après le théorème 2 ("Bijection du générateur d'application caractéristique de $A_{\subseteq E}$"), que cette application $\Gamma_{\mathcal{X}_E}$ est bijective. Bien, le rappel est fait.

Maintenant, on va créer les 3 LCI sur $\mathcal{P}(E)$ suivantes :

$\cup_E := F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(E))^2 & \to & \mathcal{P}(E) \\ (A,\ B) & \mapsto & A \cup B \end{pmatrix}$ *qui utilise la réunion d'ensembles*

$\cap_E := F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(E))^2 & \to & \mathcal{P}(E) \\ (A,\ B) & \mapsto & A \cap B \end{pmatrix}$ *qui utilise l'intersection d'ensembles*

$\Delta_E := F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(E))^2 & \to & \mathcal{P}(E) \\ (A,\ B) & \mapsto & A \Delta B \end{pmatrix}$ *qui utilise la différence symétrique d'ensembles*

On va également créer les 3 LCI sur $\{0,1\}$ *suivantes :*

$$\vee_1 := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\{0,1\})^2 & \to & \{0,1\} \\ (a,b) & \mapsto & \begin{pmatrix} (a=0 \wedge b=0): & 0 \\ (a=1 \wedge b=1): & 1 \\ (a=1 \wedge b=0): & 1 \\ (a=0 \wedge b=1): & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

En fait, la LCI $\vee_1$ *c'est un opérateur "OR" tout simplement, on peut résumer son fonctionnement avec la table ci-dessous :*

$\vee_1$	*0*	*1*
0	*0*	*1*
1	*1*	*1*

$$\wedge_2 := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\{0,1\})^2 & \to & \{0,1\} \\ (a,b) & \mapsto & \begin{pmatrix} (a=0 \wedge b=0): & 0 \\ (a=1 \wedge b=1): & 1 \\ (a=1 \wedge b=0): & 0 \\ (a=0 \wedge b=1): & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

En fait, la LCI $\wedge_2$ *c'est un opérateur ET tout simplement, on peut résumer son fonctionnement avec la table ci-dessous :*

$\wedge_2$	*0*	*1*
0	*0*	*0*
1	*0*	*1*

$$\oplus_3 := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\{0,1\})^2 & \to & \{0,1\} \\ (a,b) & \mapsto & \begin{pmatrix} (a=0 \wedge b=0): & 0 \\ (a=1 \wedge b=1): & 0 \\ (a=1 \wedge b=0): & 1 \\ (a=0 \wedge b=1): & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

En fait, la LCI $\oplus_3$ *c'est un opérateur "XOR" tout simplement, on peut résumer son fonctionnement avec la table ci-dessous :*

$\oplus_3$	*0*	*1*
0	*0*	*1*
1	*1*	*0*

Pour chacune des LCI sur $\{0,1\}$ $\vee_1, \wedge_2$ *et* $\oplus_3$*, on peut utiliser chacune d'elle pour créer 3 LCI sur* $\mathcal{F}(E \to \{0,\ 1\})$ *avec la méthode abordée page 44, que sont :*

$$\vee_{1_F} := F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{F}(E \to \{0,1\}))^2 & \to & \mathcal{F}(E \to \{0,1\}) \\ (f,\ g) & \mapsto & f\ \vee_1\ g\ =\ F^\circ \binom{E \to \{0,1\}}{x \to f(x)\ \vee_1\ g(x)} \end{pmatrix}$$

$$\wedge_{2_F} := F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{F}(E \to \{0,1\}))^2 & \to & \mathcal{F}(E \to \{0,1\}) \\ (f,\ g) & \mapsto & f\ \wedge_2\ g\ =\ F^\circ \binom{E \to \{0,1\}}{x \to f(x)\ \wedge_2\ g(x)} \end{pmatrix}$$

$$\oplus_{3_F} := F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{F}(E \to \{0,1\}))^2 & \to & \mathcal{F}(E \to \{0,1\}) \\ (f,\ g) & \mapsto & f\ \oplus_3\ g\ =\ F^\circ \binom{E \to \{0,1\}}{x \to f(x)\ \oplus_3\ g(x)} \end{pmatrix}$$

On peut donc créer les 6 magmas suivants :
$M_{E_1} := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup_E)$
$M_{E_2} := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap_E)$
$M_{E_3} := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \Delta_E)$
$M_1 := \mathcal{M}^\circ\left(\mathcal{F}(E \to \{0,1\}), \vee_{1_F}\right)$
$M_2 := \mathcal{M}^\circ\left(\mathcal{F}(E \to \{0,1\}), \wedge_{2_F}\right)$
$M_3 := \mathcal{M}^\circ\left(\mathcal{F}(E \to \{0,1\}), \oplus_{3_F}\right)$

Et bien accrochez-vous bien, on peut remarquer que l'application $\Gamma_{\mathcal{X}_E}$ *est :*

1. *un isomorphisme de* $M_{E_1} \to M_1$*, c'est-à-dire de* $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup_E) \to \mathcal{M}^\circ\left(\mathcal{F}(E \to \{0,1\}), \vee_{1_F}\right)$.

2. *un isomorphisme de* $M_{E_2} \to M_2$*, c'est-à-dire de* $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap_E) \to \mathcal{M}^\circ\left(\mathcal{F}(E \to \{0,1\}), \wedge_{2_F}\right)$

3. *un isomorphisme de* $M_{E_3} \to M_3$*, c'est-à-dire de* $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \Delta_E) \to \mathcal{M}^\circ\left(\mathcal{F}(E \to \{0,1\}), \oplus_{3_F}\right)$

1. *un isomorphisme de* $M_{E_1} \to M_1$*, c'est-à-dire de* $\mathcal{M}^{\circ}\left(\mathcal{P}\left(E\right), \cup_E\right) \to \mathcal{M}^{\circ}\left(\mathcal{F}\left(E \to \{0,1\}\right), \vee_{1_F}\right)$.

   En effet, $\forall\left(A,B\right) \in \left(P\left(E\right)\right)^2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A \ \cup_E \ B\right) &= \mathcal{X}_{((A \cup B),E)} \\
&= F^{\circ}\left(\begin{array}{l} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \in A \cup B : 1 \\ x \notin A \cup B : 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) \\
&= F^{\circ}\left(\begin{array}{l} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} (x \in A) \vee (x \in B) : 1 \\ (x \notin A) \wedge (x \notin B) : 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) \\
&= F^{\circ}\left(\begin{array}{l} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \left(\mathcal{X}_{(A,E)}(x)\right) \ \vee_1 \ \left(\mathcal{X}_{(B,E)}(x)\right) \end{array}\right) \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \ \vee_1 \ \mathcal{X}_{(B,E)} \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \ \vee_{1_F} \ \mathcal{X}_{(B,E)} \\
\Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A \ \cup_E \ B\right) &= \Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A\right) \ \vee_{1_F} \Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(B\right)
\end{aligned}$$

2. *un isomorphisme de* $M_{E_2} \to M_2$*, c'est-à-dire de* $\mathcal{M}^{\circ}\left(\mathcal{P}\left(E\right), \cap_E\right) \to \mathcal{M}^{\circ}\left(\mathcal{F}\left(E \to \{0,1\}\right), \wedge_{2_F}\right)$

   En effet, $\forall\left(A,B\right) \in \left(P\left(E\right)\right)^2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A \ \cap_E \ B\right) &= \mathcal{X}_{((A \cap B),E)} \\
&= F^{\circ}\left(\begin{array}{l} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \in A \cap B : 1 \\ x \notin A \cap B : 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) \\
&= F^{\circ}\left(\begin{array}{l} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} (x \in A) \wedge (x \in B) : 1 \\ (x \notin A) \vee (x \notin B) : 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) \\
&= F^{\circ}\left(\begin{array}{l} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \left(\mathcal{X}_{(A,E)}(x)\right) \ \wedge_2 \ \left(\mathcal{X}_{(B,E)}(x)\right) \end{array}\right) \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \ \wedge_2 \ \mathcal{X}_{(B,E)} \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \ \wedge_{2_F} \ \mathcal{X}_{(B,E)} \\
\Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A \ \cap_E \ B\right) &= \Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A\right) \ \wedge_{2_F} \ \Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(B\right)
\end{aligned}$$

3. un isomorphisme de $M_{E_3} \to M_3$*, c'est-à-dire de* $\mathcal{M}^\circ\left(\mathcal{P}\left(E\right), \Delta_E\right) \to \mathcal{M}^\circ\left(\mathcal{F}\left(E \to \{0,1\}\right), \oplus_{3_{\mathcal{F}}}\right)$

En effet, $\forall \left(A, B\right) \in \left(P\left(E\right)\right)^2,$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A\ \Delta_E\ B\right) &= \mathcal{X}_{((A\ \Delta_E\ B),E)} \\
&= \mathcal{F}^\circ\left(\begin{matrix} E\ \to\ \{0,1\} \\ x\ \mapsto \begin{pmatrix} x \in A\Delta B : 1 \\ x \notin A\Delta B : 0 \end{pmatrix} \end{matrix}\right) \\
&= \mathcal{F}^\circ\left(\begin{matrix} E\ \to\ \{0,1\} \\ x\ \mapsto \begin{pmatrix} (x \in (A \cup B - A \cap B)) : 1 \\ (x \notin (A \cup B - A \cap B)) : 0 \end{pmatrix} \end{matrix}\right) \\
&= \mathcal{F}^\circ\left(\begin{matrix} E\ \to\ \{0,1\} \\ x\ \mapsto \left(\mathcal{X}_{(A,E)}(x)\right)\ \oplus_3\ \left(\mathcal{X}_{(B,E)}(x)\right) \end{matrix}\right) \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)}\ \oplus_3\ \mathcal{X}_{(B,E)} \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)}\ \oplus_{3_{\mathcal{F}}}\ \mathcal{X}_{(B,E)} \\
\Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A\ \Delta_E\ B\right) &= \Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(A\right)\ \oplus_{3_{\mathcal{F}}}\ \Gamma_{\mathcal{X}_E}\left(B\right)
\end{aligned}$$

1.5 Relations

Définition 46. *"Définition d'une relation binaire"*

$$R \text{ est une relation binaire de } E \text{ vers } F \text{ de graphe de correspondance } G$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$R = \mathcal{F}^{\circ}\left(\begin{array}{l} E\times F \ \to \ \{0{,}1\} \\ (a,\ b) \ \mapsto \begin{pmatrix} (a,b) \in G : 1 \\ (a,b) \notin G : 0 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

Dit autrement : *« Une relation binaire R d'un ensemble E vers un ensemble F est une application qui décrit l'existence ou la non existence d'un lien orienté entre chaque élément de E et chaque élément de F. Il est défini par :*

- *un ensemble de gauche E*
- *un ensemble de droite F*
- *un graphe de correspondance G qui n'est ni plus ni moins que l'ensemble des couples d'éléments en relation les uns avec les autres*

».

Dit autrement : *« Une relation binaire R d'un ensemble E vers un ensemble F est un objet mathématique qui décrit l'existence ou la non existence d'un lien orienté entre chaque élément de E et chaque élément de F.*

Si $(x, y) \in G$, alors x est en relation avec y. Autrement, x n'est pas en relation avec y, ce qui ne signifie par forcément que y n'est pas en relation avec x.

Remarques :

- *On défini une relation binaire R de E vers F de graphe de correspondance G comme ceci :*
$$R := \mathcal{R}^{\circ}(E \to F, G)$$
- *On peut accéder au graphe de correspondance d'une relation binaire R en faisant*
$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \text{ ou } \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(R)$$
Attention donc, il s'agit de l'opérateur $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ qui prend en argument une relation, à ne pas confondre avec l'opérateur $\mathcal{G}$ qui retournerait le graphe de la fonction R. Par exemple, si j'ai le graphe de correspondance suivant :
$$G := \{(a,\ b),\ (a,\ c),\ (b,\ d)\}$$
et que je crée la relation binaire suivante :
$$R := \mathcal{R}^{\circ}(\{a,\ b,\ e\} \to \{b,\ c,\ d\}, G)$$

on aura alors

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} = G = \{(a,\ b)\,,\ (a,\ c)\,,\ (b,\ d)\}$$

Tandis qu'on aura

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_R = \{\ &((a,\ b)\,,\ 1)\,,\ ((a,\ c)\,,\ 1)\,,\ ((a,\ d)\,,\ 0)\,,((b,\ b)\,,\ 0)\,,\\ &((b,\ c)\,,\ 0)\,,\ ((b,\ d)\,,\ 1)\,,\ ((e,\ c)\,,\ 0)\,,\ ((e,\ d)\,,\ 0)\ \}\end{aligned}$$

- *L'ensemble des relations binaires de* E *vers* F *est donc* $\mathcal{F}\left((E \times F) \to \{0,1\}\right)$.

- *Quand la relation a son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée identiques, on dit que c'est une relation binaire* ***interne sur*** E*, ou simplement une relation binaire sur* E*. Dans ce cas, on ne parlera pas vraiment d'ensemble de gauche ou d'ensemble de droite (vu que l'ensemble de gauche c'est* E *et l'ensemble de droite aussi), mais tout simplement d'ensemble de la relation binaire interne.*

- *Si on veut définir une relation binaire interne sur* E *de graphe de correspondance* G*, on peut utiliser la syntaxe* $R := \mathcal{R}^\circ\left(E, G\right)$ *qui est équivalente à* $R := \mathcal{R}^\circ\left(E \to E, G\right)$

- *L'assertion "*x *est en relation avec* y *via* R*" peut se noter* $R\left(x, y\right)$ *comme elle peut se noter*

$$xRy$$

  vu que R *est un opérateur binaire.*

- *La méthode constructeur* $\mathcal{R}^\circ$ *exige qu'on précise les 2 ensembles d'où on prend les éléments en possible lien les uns avec les autres. Ça pourrait sembler être une information inutile étant donné que tout ce qu'on a besoin de faire pour savoir si 2 objets mathématiques sont en relation l'un avec l'autre, c'est de vérifier que le couple se trouve dans le graphe de la relation binaire, graphe également passé en argument à la méthode constructeur. Cependant, vu qu'il s'agit d'une fonction, il faut donc définir un ensemble de départ pour prendre les éléments à tester et c'est pourquoi ces ensembles doivent être spécifiés lors de la construction de l'objet.*

- *Vu qu'une relation binaire utilise un ensemble de couples pour déterminer quels éléments sont relation les uns avec les autres, on peut aussi passer directement une fonction en argument de la méthode constructeur pour définir une relation. Par exemple si on a*
  $f = \mathcal{F}^\circ \begin{pmatrix} E & \to & F \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$*, alors on peut faire*

  $$R := \mathcal{R}^\circ (f)$$

  qui est équivalent à

  $$R := \mathcal{R}^\circ (I_f \to O_f, \mathcal{G}_f)$$

  On parle alors de ***relation fonctionnelle****.*
  Bien entendu, ce sera alors une relation où chaque élément de I_f ne pourra être en relation qu'avec, au plus, 1 élément de O_f

- *Pour tout ensemble E, la relation d'égalité $=$ est une relation binaire interne sur E*
- *Pour tout ensemble E, la relation d'appartenance $\in$ est une relation binaire de $E \to \mathcal{P}(E)$*
- *Pour tout ensemble E, la relation d'inclusion $\subseteq$ est une relation binaire de $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$*

- *Une relation binaire est donc une application, mais dans certains cas, des opérateurs tels que $\circ$ ou $_{-1}$ ou $\overline{R}$ vont devoir réaliser une action différente de celle réalisée d'habitude avec des fonctions (composition de relation binaire plutôt que composition de fonction, retourner la relation binaire inverse plutôt que la fonction réciproque, retourner la relation binaire complémentaire, ...). Pour trancher, ces opérateurs devront savoir qu'il s'agit d'un relation, et ils le sauront si la fonction appartient à $\mathcal{F}((E \times F) \to \{0, 1\})$*

- *Normalement, l'utilisation standard quand on crée une relation $\mathcal{R}^\circ (E \to F, G)$, c'est d'utiliser un graphe de correspondance G qui soit un sous-ensemble de $E \times F$, cependant rien ne nous empêche en réalité d'utiliser n'importe quel ensemble de couples. Par contre il faudra tester l'existence d'une relation avec des éléments de $(E \times F)$ forcément vu que la fonction a son ensemble de départ dans cet ensemble.*

- *Pour rappel (cf page 42), une application caractéristique d'un ensemble A par rapport à un ensemble E est* $\mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \begin{pmatrix} E \to \{0{,}1\} \\ x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x\in A:\ 1 \\ x\notin A:\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$. *Par conséquent, une relation* $\mathcal{R}^\circ\left(E \to F, G\right)$ *est une application caractéristique de G par rapport à* $(E \times F)$ *dès lors que* $G \subseteq (E \times F)$. *On a donc* $\mathcal{R}^\circ\left(E \to F, G\right) = \mathcal{X}_{(G,(E\times F))}$

- *Beaucoup d'auteurs considèrent qu'une relation binaire n'est pas une fonction mais un ensemble, en l'occurence, le graphe de correspondance. Ils considèrent donc que la relation binaire et le graphe de correspondance de la relation binaire sont la même chose, et que le fait d'écrire xRy est un "raccourci", un "alias" pour dire "$(x, y) \in R$". C'est une approche qui est d'une certaine manière équivalente dès lors que le graphe est inclus dans le produit cartésien des ensembles de gauche et de droite de la relation, car étant donné qu'il y a une bijection naturelle entre $\mathcal{P}\left(E\right)$ et $\mathcal{F}\left(E \to \{0, 1\}\right)$ via l'application génératrice d'application caractéristiques sur E (cf pages 33 et 42) :*

$$\Gamma_{\mathcal{X}_E} := F^\circ \begin{pmatrix} \mathcal{P}\left(E\right) & \to & \mathcal{F}\left(E \to \{0,1\}\right) \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \begin{pmatrix} E \to \{0{,}1\} \\ x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x\in A:\ 1 \\ x\notin A:\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

  le fait de considérer un ensemble $A_{\subseteq E}$ revient à considérer sont application caractéristique $\mathcal{X}_{(A,E)}$ et inversement.

  Ainsi, le fait de considérer une relation $\mathcal{R}^\circ\left(E \to F, G\right)$, qui est donc $\mathcal{X}_{(G,(E\times F))}$, revient à considérer l'ensemble $G_{\subseteq (E\times F)}$

Définition 47. *"Domaine à gauche d'une relation binaire"*
Soit $R \in \mathcal{F}(E \times F \to \{0,1\})$

On appelle "domaine à gauche de R" l'ensemble

$$D_L(R) = \{x \in E \mid (\exists y \in F \ : \ xRy)\}$$

Dit autrement : *« C'est l'ensemble contenant tous les élements de l'ensemble de gauche de la relation, qui sont en relation avec au moins un élément de l'ensemble de droite de la relation ».*

Remarque :

- *Certains parlent d'ensemble de définition de la relation, ou de domaine de la relation, mais cela peut porter à confusion étant donné qu'une relation est une fonction et que techniquement, son domaine de définition est le produit cartésien de son ensemble à gauche avec son ensemble à droite.*

Définition 48. *"Domaine à droite d'une relation binaire"*
Soit $R \in \mathcal{F}(E \times F \to \{0,1\})$

On appelle "domaine à droite de R" l'ensemble

$$D_R(R) = \{y \in F \mid (\exists x \in E \ : \ xRy)\}$$

Dit autrement : *« C'est l'ensemble contenant tous les élements de l'ensemble de droite de la relation qui sont en relation avec au moins un élément de l'ensemble de gauche de la relation ».*

Remarque :

- *Certains parlent d'ensemble de définition de la relation, ou de domaine de la relation, mais cela peut porter à confusion étant donné qu'une relation est une fonction et que techniquement, son domaine de définition est le produit cartésien de son ensemble à gauche avec son ensemble à droite.*

Définition 49. *"Définition d'une relation binaire totale"*
Soit $R \in \mathcal{F}(E \times F \to \{0,1\})$

$$R \text{ est une relation totale}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(\forall x \in E,\ (\exists y \in F \mid (xRy))) \wedge (\forall y \in F,\ (\exists x \in E \mid (xRy)))$$

Dit autrement :
Soit $R \in \mathcal{F}(E \times F \to \{0,1\})$

$$R \text{ est une relation totale}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R_{-1})}} = E \times F$$

Dit autrement : *« Une relation binaire est totale quand tous les éléments de l'ensemble de gauche sont en relation avec au moins un élément de l'ensemble de droite et que tous les éléments de l'ensemble de droite sont en relation avec au moins un élément de l'ensemble de gauche ».*

Dit autrement : *« Une relation binaire est totale quand son ensemble de gauche est égale à son domaine de gauche et que son ensemble de droite est égal à son domaine de droite ».*

Remarques :

- *Dans le cas d'une relation binaire interne sur E, on écrirait :*

$$R \text{ est une relation binaire totale } \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ (xRy \vee yRx)$$

ou

$$R \text{ est une relation binaire totale } \Leftrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R_{-1})}} = E^2$$

- *Toute relation binaire totale est réflexive*

Définition 50. *"Relation binaire induite par R de $E'_{\subseteq E} \to F'_{\subseteq F}$"*
Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \to F, G)$

$$R' \text{ est une relation binaire induite par } R$$
$$\iff$$
$$R' = \mathcal{R}^\circ \left(E' \to F', G'\right)$$
$$\wedge$$
$$\left(E' \subseteq E\right) \wedge \left(F' \subseteq F\right)$$
$$\wedge \left(\forall (a,\ b) \in (E \times F),\ xR'y \Rightarrow xRy\right)$$

Dit autrement :
Soient $R := \mathcal{R}^\circ (E \to F, G)$
et $E' \subseteq E$
et $F' \subseteq F$

On peut alors créer une relation de E' *vers* F' *de graphe de correspondance* G' *:*

$$R' := \mathcal{R}^\circ \left(E' \to F', G'\right)$$

qui est telle que $\forall (a,\ b) \in (E \times F),\ xR'y \Rightarrow xRy$

Dit autrement : *« Une relation binaire* R' *induite par* R*, c'est une "sous-relation" de* R*, on pourrait dire que c'est* R *restreinte à* $E' \times F'$*, mais il est possible d'avoir une relation binaire induite par une relation sans forcément avoir le même graphe de correspondance, que ce graphe de correspondance G' soit inclus dans G par exemple, ou qu'une partie soit incluse dans G et que le reste utilise des éléments qui n'appartiennent pas à* $E \times F$*, etc ».*

Remarques :

- *On n'a pas forcément besoin de changer (en l'occurence, restreindre) le graphe G dans la relation induite vu que l'ensemble de départ de la fonction sera déjà restreint, donc la fonction donnera le bon résultat.*

- *Dans le cas où on a* R *une relation binaire interne sur* E *de graphe de correspondance* G*, avec* $E' \subseteq E$*, on pourra donc également créer une relation binaire induite par* R *sur* E' *:* $R' := \mathcal{R}^\circ (E', G)$

Définition 51. *"Relation binaire inverse d'une relation binaire R"*
Soit $R := \mathcal{R}^\circ\,(E \to F, G)$

$$R' \text{ est la relation inverse de } R$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$R' = \mathcal{R}^\circ\left(F \to E, G'\right)$$

$$\text{avec}$$

$$G' = \{(y,\ x) \in (F \times E) \mid ((x,\ y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R})\}$$

Dit autrement : *« En gros c'est la même relation mais avec les flèches qui ont un sens inversé. Du coup l'ensemble de gauche devient l'ensemble de droite et inversement, et le graphe de correspondance est le même mais en inversant l'ordre des éléments dans les couples ».*

Remarques :

- *Attention à ne pas confondre une relation binaire inverse d'une relation binaire, avec une relation binaire réciproque d'une relation binaire, qui serait la fonction réciproque de cette dernière. Du reste, une relation binaire ne pourrait admettre une fonction réciproque que si ses ensembles à gauche et à droite comptent 3 éléments en tout (répartis en 2 éléments d'un côté et 1 élément de l'autre), afin que le cardinal du produit cartésien soit égal à 2 pour rendre possible la bijection.*

- *Pour toute relation binaire, il existe une relation binaire inverse unique (qui peut parfois être une relation binaire identique)*

- *Concernant la notation de la relation binaire inverse d'une relation binaire R, On la note parfois* R^{-1}, *mais étant donné que R est une application, cela peut aussi être vu/parsé comme l'opération* $\frac{1}{R}$ *ce qui crée une situation équivoque. De même, on pourrait la noter* R_{-1} *mais cela pourrait être vu/parsé comme l'opération qui retourne la fonction réciproque de R, ce qui crée également une situation équivoque.*

  Du fait qu'il y a infiniment plus de situations où une relation n'est pas bijective que de situations où elle l'est et admet une fonction réciproque, dans une situation où l'on a une relation R instanciée avec la méthode constructeur $\mathcal{R}^\circ$, *la notation* R_{-1} *désignera systématiquement la relation inverse de R sauf si la relation est bijective, auquel cas ça désignera la fonction réciproque de R (et alors il faudra nommer explicitement la relation inverse de R si on en a besoin).*

  D'une certaine manière, on peut donc dire que l'opérateur $_{-1}$ *appliqué à une fonction :*
  — *retourne la fonction réciproque si la fonction opérée est bijective*

- *sinon, si c'est une relation, c'est-à-dire un objet instancié avec* $\mathcal{R}^\circ$, *retourne la relation inverse*
- *sinon, raise error*

- *Les relations binaires* $\leq$ *et* $\geq$ *sur un ensemble quelconque sont toutes deux des relations binaires inverses l'une de l'autre, de meme que les relations binaires* $<$ *et* $>$.

- *Les relations binaire "aime" et "est aimé par" sont toutes deux des relations binaires inverses l'une de l'autre.*

- *Une relation binaire interne est symétrique ssi sa relation binaire inverse est symétrique*

Définition 52. *"Relation binaire complémentaire d'une relation binaire"*
Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \to F, G)$

$$R' \text{ est la relation binaire complémentaire de } R$$
$$\iff$$
$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{R'}} = \{(x,\ y) \in (E \times F) \ | \ (x, y) \notin \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}\}$$

Dit autrement :
Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \to F, G)$

$$R' \text{ est la relation binaire complémentaire de } R$$
$$\iff$$
$$R' = \mathcal{R}^\circ (E \to F, ((E \times F) - G))$$

Dit autrement :
Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \to F, G)$

$$R' \text{ est la relation binaire complémentaire de } R$$
$$\iff$$
$$R' = \mathcal{R}^\circ \left(E \to F,\ \mathcal{C}_{(E \times F)} (G)\right)$$

Dit autrement : *« La relation binaire complémentaire d'une relation binaire R c'est tout simplement une relation binaire avec le même ensemble de gauche, le même ensemble de droite, et un graphe de correspondance qui contient uniquement tous les couples que le graphe de correspondance de R ne contient pas ».*

Remarques :

- *Toute relation binaire dispose d'une relation binaire complémentaire*
- *Pour toute relation binaire R, sa relation binaire complémentaire peut se noter* $\overline{R}$*, ou* $\cancel{R}$*. On peut donc voir "overline" ou "cancel" comme un opérateur unaire qui prend en argument une relation binaire et qui retourne sa relation binaire complémentaire.*

  Ainsi, l'assertion $\neg (xRy)$ *est équivalente à* $x\overline{R}y$ *ou* $x\cancel{R}y$*, ce qui fait que la notation "cancel" prend tout son sens, comme dans* $\notin$ *ou* $\neq$

- *Les relations binaires* $\leq$ *et* $>$ *sur un ensemble quelconque sont complémentaires*
- *Les relations binaires "aime" et "n'aime pas" sur un ensemble quelconque sont complémentaires*

- *Une relation binaire interne est réflexive ssi sa relation binaire complémentaire est réflexive*
- *Une relation binaire interne est symétrique ssi sa relation binaire complémentaire est symétrique*
- *Pour toute relation R, $\overline{\overline{R}} = R$*

Définition 53. *"Composition de 2 relations binaires"*
Soient $R_1 := \mathcal{R}^{\circ}(E \to F, G_1)$
et $R_2 := \mathcal{R}^{\circ}(F \to H, G_2)$

$$R_1 \circ R_2 = \mathcal{R}^{\circ}(E \to H, G_3)$$

avec

$$G_3 = \Big\{(x,\ y)\ \in (E \times H)\ \mid\ \Big(\exists z \in F\ :\ \Big(\Big((x,\ z) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{R_1}}\Big) \wedge \Big((z,\ y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{R_2}}\Big)\Big)\Big)\Big\}$$

Dit autrement : *«*
Soient $R_1 := \mathcal{R}^{\circ}(E \to F, G_1)$
et $R_2 := \mathcal{R}^{\circ}(F \to H, G_2)$

$$R_1 \circ R_2 = \mathcal{R}^{\circ}(E \to H, G_3)$$

avec

$$G_3 = \{(x,\ y)\ \in (E \times H)\ \mid\ (\exists z \in F\ :\ (xR_1z \wedge zR_2y))\}$$

Dit autrement : *« La composition de 2 relations binaires (qui n'est pas la composition fonctionnelle qu'on a pu voir plus haut), c'est une nouvelle relation dont l'ensemble de gauche est celui de la première relation, l'ensemble de droite est celui de la seconde relation et le graphe de correspondance est l'ensemble des couples dont le premier élément est relié au second élément par l'intermédiaire d'un 3e élément. C'est donc l'ensemble des couples* (x, y) *tels qu'on a* xR_1z *et* zR_2y *».*

Remarque :

- *L'opérateur de composition utilisé ici réalise une composition de relations et non une composition de fonction. De toute façon la composition fonctionnelle de 2 relations binaires n'est pas possible vu que l'ensemble d'arrivée d'une relation binaire ne pourra jamais être égal à l'ensemble de départ d'une autre relation binaire.*
  En effet, l'ensemble d'arrivée d'une relation binaire est systématiquement $\{0, 1\}$*, un ensemble qui ne peut pas être obtenu par le produit cartésien de 2 ensembles.*

  L'opérateur de composition $\circ$ *fonctionne donc comme suit :*
  — *Si les 2 fonctions passées en argument sont composables, alors ça réalise une composition de fonction*
  — *Sinon, si les fonctions passés en argument sont des relations (des objets instanciés par* $\mathcal{R}^{\circ}$*), alors ça les compose comme indiqué ci-dessus,*
  — *Sinon ça raise error*

Définition 54. *"Réflexivité d'une relation binaire interne"*
Soit $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est réflexive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall x \in E,\ xRx$$

Dit autrement : *« Une relation binaire interne est réflexive ssi tous les éléments de son ensemble sont en relation avec eux-même ».*

Remarque :

- *Une relation binaire interne est réflexive ssi sa relation binaire complémentaire est antiréflexive*

- R *non réflexive* $\Leftrightarrow (\exists x \in E \mid \neg(xRx))$

Définition 55. *"Antiréflexivité d'une relation binaire interne"*
Soit $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est antiréflexive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall x \in E,\ \neg(xRx)$$

Dit autrement : *« Soit* $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est antiréflexive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall x \in E,\ x\overline{R}x$$

Dit autrement : *« Soit* $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est antiréflexive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall x \in E,\ x\not{R}x$$

Dit autrement : *« Une relation binaire interne est antiréflexive ssi tous les éléments de son ensemble ne sont pas en relation avec eux-même ».*

Remarques :

- *Certains auteurs parlent de relation binaires internes* ***irréflexives***
- *Une relation binaire interne peut n'être ni réflexive, ni antiréflexive.*
- *Une relation binaire interne non réflexive n'est pas forcément antiréflexive*

- *Une relation binaire interne est antiréflexive ssi sa relation binaire complémentaire est réflexive.*

- *R non antiréflexive* $\Leftrightarrow (\exists x \in E \mid xRx)$

Définition 56. *"Transitivité d'une relation binaire interne"*
Soit $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est transitive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\,(x,y,z) \in E^3,\ \ ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$$

Dit autrement :
Soit $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est transitive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R\circ R)}} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}$$

Dit autrement : *« Une relation binaire interne est transitive ssi le graphe de correspondance est tel que le fait qu'un élément x soit en relation avec un élément y et qu'un élément y soit en relation avec un élément z implique que forcément x est en relation avec z ».*

Remarques :

- *Pour* $R = \mathcal{R}^\circ(E,G)$*,* $R \circ R = \mathcal{R}^\circ(E,G')$ *avec*
  $G' = \left\{(x,y) \in E^2 \mid\ (\exists z \in E\ :\ (xRz \wedge zRy))\right\}$
  Du coup, si R est transitive, tous les couples (x,y) qui répondent à cette condition étaient déjà dans $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}$ ce qui fait que $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R\circ R)}} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}$

- *R non transitive* $\Leftrightarrow \left(\exists\,(x,y,z) \in E^3 \mid\ (xRy \wedge yRz \wedge \neg\,(xRz))\right)$

Définition 57. *"Antitransitivité d'une relation binaire interne"*
Soit $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est antitransitive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \left((xRy \wedge yRz) \Rightarrow \neg (xRz)\right)$$

Dit autrement :
Soit $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est antitransitive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \left((xRy \wedge yRz) \Rightarrow x\overline{R}z\right)$$

Dit autrement :
Soit $R \in \mathcal{F}\left(E^2 \to \{0,1\}\right)$

$$R \text{ est antitransitive}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \left((xRy \wedge yRz) \Rightarrow x\not{R}z\right)$$

Dit autrement : *« Une relation binaire interne est antitransitive ssi le graphe de correspondance est tel que le fait qu'un élément x soit en relation avec un élément y et qu'un élément y soit en relation avec un élément z implique que forcément x n'est pas en relation avec z ».*

Remarques :
- *Une relation binaire interne peut n'être ni transitive, ni antitransitive.*
- *La relation "est le père de" est antitransitive*