6) <u>Correspondances entre repères non cartésiens et repères cartésiens</u>

Alors du coup on a vu que pour définir un repère polaire dans un plan, on partait d'un point O de référence et d'une base $(\vec{e_r},\ \vec{e_\theta})$ pour définir les transformations de O à faire pour obtenir un point M donné.

En fait, l'ensemble $(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta})$ peut constituer un repère cartésien, permettant de placer n'importe quel point de l'espace en lui appliquant une translation de $x_{M\in\mathbb{R}}\cdot\vec{e_r}$ et une translation de $y_{M\in\mathbb{R}}\cdot\vec{e_\theta}$, sans aucun problème, d'ailleurs souvent on dit qu'on définit le repère mobile $(O,\ \vec{e_{r_M}},\ \vec{e_{\theta_M}})$ par rapport au repère cartésien $(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y})$ (qu'on nomme ainsi mais qui est équivalent à notre repère $(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta})$, si ce n'est peut-être que les normes de $\vec{e_r}$ et de $\vec{e_\theta}$ sont égales pour faire un repère orthonormé, et encore, en vrai on utilise que des repères orthonormés en 3D pour représenter des trajectoires dans l'espace, ça sera un autre délire si on a des coordonnées spatiales x et y et un temps ou une autre grandeur sur un autre axe, bref on verra ça plus tard).

Du coup, pour les sous-parties suivantes, on va considérer que le repère fixe qui sert à définir le repère non-cartésien (genre polaire, cylindrique, sphérique en fonction de telle convention, etc), peut aussi servir de repère cartésien et on va voir comment passer des coordonnées dans l'un des repères non cartésien (en considérant le repère mobile donc), vers les coordonnées de son repère cartésien de définition, et vice-versa. C'est pas très compréhensible mais t'as capté.

6.1) Cartésien 2D ↔ Polaire

6.2) Cartésien 3D ↔ Cylindrique

6.3) Sphérique (R, L, C) ↔ Cartésien 3D

6.4) Sphérique (R, L, L) ↔ Cartésien 3D

6.5) Sphérique (R, L, C) ↔ Sphérique (R, L, L)

6.6) Cylindrique ↔ Sphérique (R, L, C)

6.7) Cylindrique ↔ Sphérique (R, L, L)

Remarque:

De manière générale, quand on a un repère d'un espace à n dimensions genre $(O,\ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, où on repère des points avec des coordonnées genre $M\ (x_1, x_2, x_3)$, et qu'on a un autre repère du même espace $(O, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ où on repère les points avec des coordonnées $M\ (y_1, y_2, y_3)$, et bien on aura forcément les relations:

$$\vec{u_1} = \frac{\partial_{/y_1}\left(\vec{OM}\right)}{\left|\partial_{/y_1}\left(\vec{OM}\right)\right|} = \frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial y_1} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial y_1}\right|},$$

$$\vec{u_2} = \frac{\partial_{/y_2}\left(\vec{OM}\right)}{\left|\partial_{/y_2}\left(\vec{OM}\right)\right|} = \frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial y_2} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial y_2}\right|}$$

$$\vec{u_3} = \frac{\partial_{/y_3}\left(\vec{OM}\right)}{\left|\partial_{/y_3}\left(\vec{OM}\right)\right|} = \frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial y_3} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial y_3}\right|}$$

et

$$\vec{e_1} = \frac{\partial_{/}\left(\vec{OM}\right)}{\left|\partial_{/x_1}\left(\vec{OM}\right)\right|} = \frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial x_1}\right|}$$

$$\vec{e_2} = \frac{\partial_{/}\left(\vec{OM}\right)}{\left|\partial_{/x_2}\left(\vec{OM}\right)\right|} = \frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial x_2}\right|}$$

$$\vec{e_3} = \frac{\partial_{/}\left(\vec{OM}\right)}{\left|\partial_{/x_3}\left(\vec{OM}\right)\right|} = \frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial x_3} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial\left(\vec{OM}\right)}{\partial x_3}\right|}$$

⇒ Pratique pour trouver les valeurs des vecteurs unitaires d'un repère en fonction des vecteurs unitaires d'un autre repère

Par exemple, quand on a un repère cartésien et un repère polaire généré à partir de ce repère cartésien dans un espace à 2 dimensions, on a:

$x = r \cdot \cos(\theta)$ et $y = r \cdot \sin(\theta)$

Donc $\vec{OM} = r\cos(\theta)\,\vec{e_x} + r\sin(\theta)\,\vec{e_y}$

Donc on a:

$$\partial_{/r}\left(\vec{OM}\right) = \partial_{/r}\left(r\cos(\theta)\,\vec{e_x} + r\sin(\theta)\,\vec{e_y}\right) = \cos(\theta)\,\vec{e_x} + \sin(\theta)\,\vec{e_y}$$

et

$$\left|\partial_{/r}\left(\vec{OM}\right)\right| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

D'où:

$$\vec{e_{r_M}} = \frac{\partial_{/r}\left(\vec{OM}\right)}{\left|\partial_{/r}\left(\vec{OM}\right)\right|} = \frac{\cos(\theta)\,\vec{e_x} + \sin(\theta)\,\vec{e_y}}{\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}} = \cos(\theta)\,\vec{e_x} + \sin(\theta)\,\vec{e_y}$$

Donc:

$$\vec{e_{r_M}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y})}$$

De même:

$$\partial_{/\theta}\left(\vec{OM}\right) = \partial_{/\theta}\left(r\cos(\theta)\,\vec{e_x} + r\sin(\theta)\,\vec{e_y}\right) = -r\sin(\theta)\,\vec{e_x} + r\cos(\theta)\,\vec{e_y}$$

et

$$\left|\partial_{/\theta}\left(\vec{OM}\right)\right| = \sqrt{(-r\sin(\theta))^2 + (r\cos(\theta))^2} = \sqrt{r^2\left(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)} = r$$

D'où:

$$\vec{e_{\theta_M}} = \frac{\partial_{/\theta}\left(\vec{OM}\right)}{\left|\partial_{/\theta}\left(\vec{OM}\right)\right|} = \frac{-r\sin(\theta)\,\vec{e_x} + r\cos(\theta)\,\vec{e_y}}{r} = -\sin(\theta)\,\vec{e_x} + \cos(\theta)\,\vec{e_y}$$

Donc:

$$\vec{e_{\theta_M}} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}_{(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y})}$$

Et on retombe bien sur le fait que $\partial_{/\theta}\left(\vec{e_{r_M}}\right) = \vec{e_{\theta_M}}$ et que $\partial_{/\theta}\left(\vec{e_{\theta_M}}\right) = -\vec{e_{r_M}}$

6.1) Correspondances [Cartésien 2D ↔ Polaire]

6.1.1) Polaire ⇒ Cartésien 2D

$$M\left(r,\ \theta\right)_{\left(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta}\right)} \implies M\left(x,\ y\right)_{\left(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y}\right)}$$

- $x = r \cdot \cos\left(\theta\right)$
- $y = r \cdot \sin\left(\theta\right)$

- $\vec{e_x} = \cos\left(\theta\right) \cdot \vec{e_{r_M}} - \sin\left(\theta\right) \cdot \vec{e_{\theta_M}}$
- $\vec{e_y} = \sin\left(\theta\right) \cdot \vec{e_{r_M}} + \cos\left(\theta\right) \cdot \vec{e_{\theta_M}}$

6.1.2) Cartésien 2D ⇒ Polaire

$$M\left(x,\ y\right)_{\left(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y}\right)} \implies M\left(r,\ \theta\right)_{\left(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta}\right)}$$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = \operatorname{atan2}\left(y, x\right) = 2\operatorname{atan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

- $\vec{e_{r_M}} = \cos\left(\theta\right) \cdot \vec{e_x} + \sin\left(\theta\right) \cdot \vec{e_y}$
- $\vec{e_{\theta_M}} = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e_x} + \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e_y}$
  $= -\sin\left(\theta\right) \cdot \vec{e_x} + \cos\left(\theta\right) \cdot \vec{e_y}$

Du coup on retrouve bien le fait que:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\vec{e_{r_M}}\right) = \vec{e_{\theta_M}}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\vec{e_{\theta_M}}\right) = -\vec{e_{r_M}}$$

6.2) Correspondances [Cartésien 3D ↔ Cylindrique]

6.2.1) Cylindrique ⇒ Cartésien 3D

$$M\left(r,\ \theta,\ z^{*}\right)_{(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta},\ \vec{e_{z^*}})} \implies M\left(x,\ y,\ z\right)_{(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z})}$$

- $x = r \cdot \cos(\theta)$
- $y = r \cdot \sin(\theta)$
- $z = z^{*}$

- $\vec{e_x} = \cos(\theta) \cdot \vec{e_{r_M}} - \sin(\theta) \cdot \vec{e_{\theta_M}}$
- $\vec{e_y} = \sin(\theta) \cdot \vec{e_{r_M}} + \cos(\theta) \cdot \vec{e_{\theta_M}}$
- $\vec{e_z} = \vec{e_{z^*}}$

6.2.2) Cartésien 3D ⇒ Cylindrique

$$M\left(x,\ y,\ z\right)_{(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z})} \implies M\left(r,\ \theta,\ z\right)_{(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta},\ \vec{e_z})}$$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = \operatorname{atan2}(y, x) = 2\operatorname{atan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$
- $z = z$

- $\vec{e_{r_M}} = \cos(\theta) \cdot \vec{e_x} + \sin(\theta) \cdot \vec{e_y}$
- $\vec{e_{\theta_M}} = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e_x} + \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e_y}$

  $= -\sin(\theta) \cdot \vec{e_x} + \cos(\theta) \cdot \vec{e_y}$
- $\vec{e_z} = \vec{e_z}$

6.3) Correspondances [Sphérique (RLC) ↔ Cartésien 3D]

6.3.1) Sphérique convention (Rayon, Longitude, Colatitude) ⇒ Cartésien 3D

$$M\left(r,\ \theta,\ \phi\right)_{(O,\ \vec{e_\phi},\ \vec{e_\theta},\ \vec{e_r})} \implies M\left(x,\ y,\ z\right)_{(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z})}$$

- $x = r \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$\\\\\\
- $y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi)$
- $z = r \cdot \cos(\phi)$

- $\vec{e_x} = [\cos(\theta) \cdot \sin(\phi)] \cdot \vec{e_{r_M}} - [\sin(\theta) \cdot \sin(\phi)] \cdot \vec{e_{\theta_M}} + [\cos(\theta) \cdot \cos(\phi)] \cdot \vec{e_{\phi_M}}$
- $\vec{e_y} = [\sin(\theta) \cdot \sin(\phi)] \cdot \vec{e_{r_M}} + [\cos(\theta) \cdot \sin(\phi)] \cdot \vec{e_{\theta_M}} + [\sin(\theta) \cdot \cos(\phi)]\, \vec{e_{\phi_M}}$
- $\vec{e_z} = [\cos(\phi)] \cdot \vec{e_{r_M}} - [\sin(\phi)] \cdot \vec{e_{\phi_M}}$

6.3.2) Cartésien 3D ⇒ Sphérique convention (Rayon, Longitude, Colatitude)

$$M\left(x,\ y,\ z\right)_{(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z})} \implies M\left(r,\ \theta,\ \phi\right)_{(O,\ \vec{e_\phi},\ \vec{e_\theta},\ \vec{e_r})}$$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\theta = \operatorname{atan2}(y, x) = 2\operatorname{atan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$
- $\phi = \operatorname{acos}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \operatorname{acos}\left(\dfrac{z}{r}\right)$

- $\vec{e_{r_M}} = [\cos(\theta) \cdot \sin(\phi)] \cdot \vec{e_x} + [\sin(\theta) \cdot \sin(\phi)] \cdot \vec{e_y} + [\cos(\phi)] \cdot \vec{e_z}$
- $\vec{e_{\theta_M}} = -[\sin(\theta) \cdot \sin(\phi)] \cdot \vec{e_x} + [\cos(\theta) \cdot \sin(\phi)] \cdot \vec{e_y}$
- $\vec{e_{\phi_M}} = [\cos(\theta) \cdot \cos(\phi)] \cdot \vec{e_x} + [\sin(\theta) \cdot \cos(\phi)] \cdot \vec{e_y} - [\sin(\phi)] \cdot \vec{e_z}$

6.4) Correspondances [Sphérique (RLL) ↔ Cartésien 3D]

6.4.1) Sphérique convention (Rayon, Longitude, Latitude) ⇒ Cartésien 3D

$$M\left(r,\ \theta,\ \delta\right)_{\left(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta},\ \vec{e_\delta}\right)} \implies M\left(x,\ y,\ z\right)_{\left(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z}\right)}$$

- $x = r\cos\left(\theta\right)\cos\left(\delta\right)$
- $y = r\sin\left(\theta\right)\cos\left(\delta\right)$
- $z = r\sin\left(\delta\right)$

- $\vec{e_x} =$
- $\vec{e_y} =$
- $\vec{e_z} =$

6.4.2) Cartésien 3D ⇒ Sphérique convention (Rayon, Longitude, Latitude)

$$M\left(x,\ y,\ z\right)_{\left(O,\ \vec{e_x},\ \vec{e_y},\ \vec{e_z}\right)} \implies M\left(r,\ \theta,\ \delta\right)_{\left(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta},\ \vec{e_\delta}\right)}$$

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\theta = \operatorname{atan2}\left(y, x\right) = 2\operatorname{atan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$
- $\delta = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{acos}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{acos}\left(\dfrac{z}{r}\right)$

- $\vec{e_{r_M}} =$
- $\vec{e_{\theta_M}} =$
- $\vec{e_{\delta_M}} =$

6.5) Correspondances [Sphérique (RLC) ↔ Sphérique (RLL)]

6.5.1) Sphérique convention (Rayon, Longitude, Colatitude) ⇒ Sphérique convention (Rayon, Longitude, Latitude)

$$M\left(r^*,\ \theta^*,\ \phi\right)_{(O,\ \vec{e_\phi},\ \vec{e_{\theta^*}},\ \vec{e_{r^*}})} \implies M\left(r,\ \theta,\ \delta\right)_{(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e_\delta})}$$

- $r = r^*$
- $\theta = \theta^*$
- $\delta = \dfrac{\pi}{2} - \phi$

- $\vec{e_{r_M}} =$
- $\vec{e_{\theta_M}} =$
- $\vec{e_{\delta_M}} =$

6.5.2) Sphérique (Rayon, Longitude, Latitude) ⇒ Sphérique (Rayon, Longitude, Colatitude)

$$M\left(r^*,\ \theta^*,\ \delta\right)_{(O,\ \vec{e_{r^*}},\ \vec{e_{\theta^*}},\ \vec{e_\delta})} \implies M\left(r,\ \theta,\ \phi\right)_{(O,\ \vec{e_\phi},\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e_r})}$$

- $r = r^*$
- $\theta = \theta^*$
- $\phi = \dfrac{\pi}{2} - \delta$

- $\vec{e_{r_M}} =$
- $\vec{e_{\theta_M}} =$
- $\vec{e_{\phi_M}} =$

6.6) Correspondances [Cylindrique ↔ Sphérique (RLC)]

6.6.1) Cylindrique ⇒ Sphérique convention (Rayon, Longitude, Colatitude)

$$M\left(r^*,\ \theta^*,\ z\right)_{\left(O,\ \vec{e_{r^*}},\ \vec{e_{\theta^*}},\ e_z\right)} \implies M\left(r,\ \theta,\ \phi\right)_{\left(O,\ \vec{e_\phi},\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e_r}\right)}$$

- $r = \sqrt{\left(r^*\right)^2 + z^2}$
- $\theta = \theta^*$
- $\phi = \operatorname{atan}\left(\dfrac{z}{\sqrt{\left(r^*\right)^2 + z^2}}\right) = \operatorname{acos}\left(\dfrac{r^*}{z}\right)$

- $\vec{e_{r_M}} =$
- $\vec{e_{\theta_M}} =$
- $\vec{e_{\phi_M}} =$

6.6.2) Sphérique convention (Rayon, Longitude, Colatitude) ⇒ Cylindrique

$$M\left(r,\ \theta,\ \phi\right)_{\left(O,\ \vec{e_\phi},\ \vec{e}_\theta,\ \vec{e_r}\right)} \implies M\left(r,\ \theta,\ z\right)_{\left(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta},\ e_z\right)}$$

- $r = r^* \cdot \sin\left(\phi\right)$
- $\theta = \theta^*$
- $z = r^* \cos\left(\phi\right)$

- $\vec{e_{r_M}} =$
- $\vec{e_{\theta_M}} =$
- $\vec{e_{z_M}} =$

6.7) Correspondances [Cylindrique ↔ Sphérique (RLL)]

6.7.1) Cylindrique ⇒ Sphérique convention (Rayon, Longitude, Latitude)

$$M\left(r^*,\ \theta^*,\ z\right)_{\left(O,\ \vec{e_{r^*}},\ \vec{e_{\theta^*}},\ \vec{e_z}\right)} \implies M\left(r,\ \theta,\ \delta\right)_{\left(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta},\ \vec{e_\delta}\right)}$$

- $r = \sqrt{\left(r^*\right)^2 + z^2}$
- $\theta = \theta^*$
- $\delta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{atan}\left(\frac{z}{\sqrt{\left(r^*\right)^2 + z^2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{acos}\left(\frac{r^*}{z}\right)$

- $\vec{e_{r_M}} =$
- $\vec{e_{\theta_M}} =$
- $\vec{e_{\delta_M}} =$

6.7.2) Sphérique convention (Rayon, Longitude, Latitude) ⇒ Cylindrique

$$M\left(r^*,\ \theta^*,\ \delta\right)_{\left(O,\ \vec{e_{r^*}},\ \vec{e_{\theta^*}},\ \vec{e_\delta}\right)} \implies M\left(r,\ \theta,\ z\right)_{\left(O,\ \vec{e_r},\ \vec{e_\theta},\ \vec{e_z}\right)}$$

- $r = r^* \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = r^* \cdot \cos\left(\delta\right)$
- $\theta = \theta^*$
- $z = r^* \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = r^* \sin\left(\delta\right)$

- $\vec{e_{r_M}} =$
- $\vec{e_{\theta_M}} =$
- $\vec{e_{z_M}} =$