Les fonctions (réelles) univariées

0) Introduction

En gros l’objectif c’est de comprendre le principe des fonctions réelles à une variable , genre:

$$\mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix}\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\ \rightarrow\ x^2\end{pmatrix}$$

ou genre:

$$\mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix}\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}\\ x\ \rightarrow\ \frac{3x-3^x}{a_{\in\mathbb{R}^*}}\end{pmatrix}$$

Il y aura des exemples avec des fonctions définies ou à valeur dans $\mathbb{C}$ mais ça sera pour comprendre le principe de la définition / déclaration de fonctions.

1) Les fonctions

1.1) Définition

En gros une fonction c’est une relation entre 2 ensemble.

C’est la mise en correspondance d’un élément d’un ensemble (l’ensemble de départ ou de définition) avec un élément d’un autre ensemble (l’ensemble d’arrivée ou image).

Genre on peut imaginer une fonction définie sur $\{1,\ 2\}$ et à valeurs dans $\{3,\ 4\}$ qui associe 1 à 3 et 2 à 4.

Une fonction se déclare comme ça:

$$\mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix}E_f\rightarrow I_f\\ x\ \rightarrow\ f(x)=\mathrm{Expr}(x)\end{pmatrix}$$

où:

- E_f est l’ensemble de départ de la fonction = ensemble de définition de la fonction

- I_f est l’ensemble d’arrivée de la fonction= ensemble image de la fonction

- $f\ (x)$ est l’expression de la fonction (on va voir la définition d’une expression plus bas)

Du coup, pour la fonction de l’exemple plus haut, elle se noterait:

$$\mathrm{f}^{\circ}\left(\begin{matrix}\{1,\ 2\}\!\rightarrow\!\{3,\ 4\} \\ x \quad \rightarrow \ \cdot\substack{(x=1)\rightarrow 3 \\ (x=2)\rightarrow 4}\end{matrix}\right)$$

Une expression, c’est tout simplement des objets mathématiques liés entre eux par des opérateurs, genre $\left(\dfrac{1+3.2}{4^5-a_{\in\mathbb{R}}}\right)\times\displaystyle\int(2x)\,\mathrm{d}x$

Une expression peut contenir des variables, c’est à dire des objets mathématiques définis (genre un réel, une fonction, etc). A ce moment-là on peut donc la noter, si elle met en jeu les variables a, b et c préalablement déclarées:

$$\mathrm{Expr}\,(a,\ b,\ c)$$

Par exemple $\mathrm{Expr}\,(a,\ b,\ c)=2a+\dfrac{b}{c}$

Ça permet de faire la distinction entre l’objet mathématique « fonction » et l’objet mathématique « expression », la **fonction** étant définie par un ensemble de départ, un ensemble d’arrivée, un ensemble de variables nommées et une **expression** mettant en jeu les éléments de l’ensemble de départ pour retourner un élément de l’ensemble d’arrivée.

Cette distinction sera utile++ plus tard pour comprendre la distinction entre la dérivation d’une fonction et la dérivation d’une expression.

1.2) <u>Fonctions généralisées VS fonctions restreintes</u>

1.2.1) <u>Domaine de définition d’une expression</u>

Comme dit précédemment, une fonction se définit avec un ensemble de départ, un ensemble d’arrivée, une variable ou un ensemble de variables, et une expression mettant en jeu ces variables.

Mais parfois pour aller plus vite, on ne précise pas l’ensemble de départ et l’ensemble d’arrivée. Du coup ça sous-entend que l’ensemble de départ est le domaine de définition de l’expression de la fonction, et l’ensemble d’arrivée est $\mathbb{R}$.

Le domaine de définition d’une expression $\mathrm{Expr}\,(x)$, en gros c’est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (ou de manière générale, d’un ensemble qu’on précisera) dans lequel x peut prendre toutes les valeurs de telle sorte que $\mathrm{Expr}\,(x)$ soit un réel (ou de manière générale, un élément d’un ensemble qu’on précisera).

Genre le domaine de définition de l’expression $\dfrac{1}{x}$, c’est $\mathbb{R}^*$, le domaine de définition de l’expression $\sqrt{x}$ c’est $\mathbb{R}_+$.

On note le domaine de définition d’une expression $\mathrm{Expr}\,(x)$:

$$\mathrm{D}_{\text{entree}\to\text{sortie}}\left(\mathrm{Expr}\left(x\right)\right)$$

Genre $\mathrm{D}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(\mathrm{Expr}\left(x\right)\right)$ si on veut que la valeur de sortie soit réelle.

Cependant la valeur de sortie pourrait très bien être un complexe, genre par exemple, $\mathrm{D}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(\sqrt{x}\right)=\mathbb{R}_{+}$ mais $\mathrm{D}_{\mathbb{R}\to\mathbb{C}}\left(\sqrt{x}\right)=\mathbb{R}$ et $\mathrm{D}_{\mathbb{C}\to\mathbb{C}}\left(\sqrt{x}\right)=\mathbb{C}$.

D'une certaine manière, l'opérateur D c'est une fonction qui prend en argument, une expression $\mathrm{Expr}\left(a,\ b,\ c\right)$, un ensemble d'entrée « maximal » $\mathrm{E}_{\text{entree}}$ de la ou les variables de l'expression, un ensemble de sortie « maximal » $\mathrm{E}_{\text{sortie}}$ de la valeur de l'expression, et qui retourne le sous-ensemble de $\mathrm{E}_{\text{entree}}$ tel que $\forall x\in\mathrm{E}_{\text{entree}},\ \ \mathrm{Expr}\left(x\right)\in\mathrm{E}_{\text{sortie}}$

1.2.2) <u>Fonction généralisée et fonction restreinte</u>

En gros une fonction généralisée sur un ensemble (en général sur $\mathbb{R}$), c'est une fonction dont l'ensemble de définition est le domaine de définition de son expression.

Genre la fonction $\mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix}\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}\\ x\ \to\sqrt{x}\end{pmatrix}$ c'est une fonction **généralisée sur** $\mathbb{R}$, tandis que la fonction $\mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix}\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{C}\\ x\ \to\sqrt{x}\end{pmatrix}$ est une fonction **restreinte sur** $\mathbb{R}$.

Du coup pour déclarer une fonction généralisée sur un ensemble, on fait directement

$$\mathrm{f}^{\circ}\left(x\quad\to\quad f\left(x\right)=\mathrm{Expr}\left(x\right)\right)$$

(par défaut c'est généralisé sur $\mathbb{R}$ parce que c'est le plus couramment utilisé mais si on veut généraliser sur un autre ensemble, on note $\mathrm{f}^{\circ}\left(\ x\to f\left(x\right)=\mathrm{Expr}\left(x\right)\right)_{\mathbb{R}}$ ou $\mathrm{f}^{\circ}\left(\ x\to f\left(x\right)=\mathrm{Expr}\left(x\right)\right)_{\mathbb{C}}$ par exemple),

genre

$\mathrm{f}^{\circ}\left(x\quad\to\quad f\left(x\right)=2x+3\right)$ est équivalent à $\mathrm{f}^{\circ}\binom{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{x\to 2x+3}$

ou genre

$\mathrm{f}^{\circ}\left(x\to f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}\right)$ est équivalent à $\mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix}\mathbb{R}^{*}\to\mathbb{R}\\ x\ \to\ \frac{1}{x}\end{pmatrix}$

Enfin, il est possible d'obtenir une fonction généralisée sur un ensemble à partir d'une fonction restreinte sur un ensemble, genre si on avait

$f=\mathrm{f}^{\circ}\binom{\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}}{x\to 2x}$, alors on pourrait avoir une généralisation $\hat{f}_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}=\mathrm{f}^{\circ}\binom{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{x\to 2x}$

1.2.3) Fonction définie « au voisinage d'un point »

Si on considère une fonction:

$$\text{Let } f = \text{f}^{\circ} \begin{pmatrix} E_f & \to & F_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$$

Quand on dit qu'une fonction est définie « au voisinage de x_0 », ça veut dire que la fonction est définie « aux points directement en contact avec x_0 ». Plus formellement, ça veut dire qu'il existe 2 intervalles ouverts bornés par x_0 qui sont inclus dans E_f, genre $]a,\ x_0[$ et $]x_0,\ b[$, ou alors, dit différemment, qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que $(I - \{x_0\}) \subseteq E_f$. S'il n'y a qu'un intervalle I genre $]a,\ x_0[$, on dit que f n'est définie qu'au **voisinage gauche** de x_0, et s'il n'existe qu'un intervalle I genre $]x_0,\ b[$, on dit que f n'est définie qu'au **voisinage droit** de x_0.

La vraie définition serait:

$$f \text{ définie au voisinage gauche de } x_0 \\ \Leftrightarrow \\ \exists I \subseteq E_f \mid (I =]x_\lambda,\ x_0[)$$

$$f \text{ définie au voisinage droit de } x_0 \\ \Leftrightarrow \\ \exists I \subseteq E_f \mid (I =]x_0,\ x_\lambda[)$$

$$f \text{ définie au voisinage de } x_0 \\ \Leftrightarrow \\ (f \text{ définie au voisinage gauche de } x_0) \land (f \text{ définie au voisinage droit de } x_0) \\ \Leftrightarrow \\ (\exists I_1 \in E_f \mid (I_1 =]x_{\lambda_1},\ x_0[)) \land (\exists I_2 \in E_f \mid (I_2 =]x_0,\ x_{\lambda_2}[))$$

2) Continuité d'une fonction

La notion de continuité c’est que quand t’as une fonction:

$$\text{Let } f = \text{f}^{\circ}\begin{pmatrix} E_f & \rightarrow & F_f \\ x & \rightarrow & f(x) \end{pmatrix}$$

qui est **définie en** x_0 **et au voisinage de** x_0,

$$(\exists I_1 \subseteq E_f \mid (I =]x_{\lambda_1},\ x_0[)) \land (\exists I_2 \subseteq E_f \mid (I =]x_0,\ x_{\lambda_1}[))$$

et bien:

$$f \text{ continue en } x_0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad | \quad (\forall x \in E_f,\ (|x - x_0| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon))$$

Du coup concrètement, si $x_0 \notin E_f$, alors c’est évident que la fonction f n’est pas continue en x_0.

Et aussi du coup, une fonction qui est continue pour tout élément d’un intervalle, on dit qu’elle est continue sur cet intervalle.

Pour aller plus vite, faut savoir qu’il y a des fonctions de références où il n’y a pas de débat elles sont continues sur leur domaine de définition, genre:

- les polynômes ($a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, en gros n’importe quelle fonction dont l’expression $\in \mathbb{R}[X]$)
- les fonctions rationnelles $\left(\dfrac{(P(x))_{\in \mathbb{R}[X]}}{(Q(x))_{\in \mathbb{R}[X]}}\right)$
- les fonctions trigonométriques $(\sin,\ \cos,\ \tan,\ \sec,\ \text{cosec},\ \text{cotan},\ \ldots)$
- les fonctions exponentielles $\left(e^x,\ (a_{\in \mathbb{R}})^x,\ \ldots\right)$
- les fonctions logarithme $\left(\ln(x),\ \log_{b \in \mathbb{R}_+^*}(x),\ \ldots\right)$
- la fonction valeur absolue $(|x|)$
- toutes les fonctions x puissance un réel, genre $\left(\sqrt{x},\ x^{\frac{1}{3}},\ x^{\pi},\ \ldots\right)$

Ensuite, il faut savoir que **toute fonction dont l’expression est le résultat d’opérations** $(+,\ -,\ \times,\ \div,\ \text{pow},\ \circ)$ **de fonctions continues sur leur ensemble de définition, est une fonction continue sur son ensemble de définition**.

3) Limite d'une fonction en un « point »

3.1) Définition de la limite d'une fonction en un point

(Remarque: on parle ici de limite épointée parce que je trouve que c'est 100 fois plus cohérent).

La notion de limite c'est que quand t'as une fonction:

$$\text{Let } f = \text{f}^\circ \begin{pmatrix} E_f & \to & F_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$$

définie au voisinage de x_0 (mais pas forcément en x_0)

$$\exists I \subseteq E_f \mid \quad \big((I =]x_\lambda,\ x_0[) \vee \big(I =]x_0,\ x_\lambda[_{E_f}\big)\big)$$

et qu'on a un élément L de $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{Let } L \in \overline{\mathbb{R}}$$

et bien si f admet une limite L en x_0, ça veut dire que:

- soit c'est une limite réelle $\Leftrightarrow L \in \mathbb{R}$ (1)
- soit c'est une limite en $+\infty \Leftrightarrow L = +\infty$ (2)
- soit c'est une limite en $-\infty \Leftrightarrow L = -\infty$ (3)

C'est à dire, de manière formelle:

$$\begin{gathered} f \text{ admet une limite } L \text{ en } x_0 \\ \Leftrightarrow \\ \forall V \in \nu(L),\ \exists U \in \nu(x_0) \mid f(U) \subset V \\ \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall x \in E_f,\ (|x - x_0| \le \eta) \Rightarrow (|f(x) - L| \le \varepsilon)) \quad (1) \\ \vee \\ \forall M \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall x \in E_f,\ (x > \varepsilon) \ \Rightarrow\ (f(x) > M)) \quad (2) \\ \vee \\ \forall m \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_-^* \mid (\forall x \in E_f,\ (x < \varepsilon) \Rightarrow (f(x) < m)) \quad (3) \end{gathered}$$

Du coup, une autre façon de voir / définir la continuité d'une fonction définie en x_0 ainsi qu'au voisinage de x_0, c'est de dire que la limite de f en x_0 est réelle et égale à $f(x_0)$.

3.2) <u>Définition de la limite « à gauche » d'une fonction en un point</u>

Soit la fonction f:

$$\text{Let } f = \text{f}^{\circ}\begin{pmatrix} E_f & \to & F_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$$

qui est **définie au voisinage gauche de** x_0, c'est-à-dire que:

$$\exists I \subseteq E_f \mid (I =]x_\lambda,\ x_0[)$$

On peut alors déterminer la limite de f en x_0^- suivant les mêmes règles que celles expliquées plus haut (je passe un peu vite mais pour le coup cette notion-là est assez claire pour moi donc go forward).

3.3) <u>Définition de la limite « à droite » d'une fonction en un point</u>

Soit la fonction f:

$$\text{Let } f = \text{f}^{\circ}\begin{pmatrix} E_f & \to & F_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$$

qui est **définie au voisinage droit de** x_0, c'est-à-dire que:

$$\exists I \subseteq E_f \mid (I =]x_0,\ x_\lambda[)$$

On peut alors déterminer la limite de f en x_0^+ suivant les mêmes règles que celles expliquées plus haut (je passe un peu vite mais pour le coup cette notion-là est assez claire pour moi donc go forward).

Du coup, quand on a $\left(\lim_{x \to x_{0-}} (f(x)) = \lim_{x \to x_{0+}} (f(x))\right)$, alors on peut dire que la limite $\left(\lim_{x \to x_0} (f(x))\right)$ existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}$.

Petite remarque personnelle, je pense que si on a une limite qui nous sort un nombre, c'est important de préciser si c'est ce nombre est parvenu « par dessus » ou « par dessous », notamment dans le cas où les limites seraient combinées (genre préciser 0^+ ou 0^- etc)

Pour rappel, dans le calcul des limites, les formes indéterminées sont:

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{0}{0}$ ⇒ levables avec la règle de l'Hôpital
-
- $\frac{\infty}{\infty}$
- ∞^0
- 0^0
- 1^∞

3.4) Définition d'un « trou isolé » d'une fonction en un point

Un trou isolé d'une fonction en un point x_0, en gros c'est le fait que $x_0 \notin E_f$ mais que f soit tout de même définie au voisinage de x_0 (ça fait un trou du coup). la vraie définition formelle ça serait:

$$x_0 \text{ est un trou isolé de l'ensemble de définition } E_f \text{ de la fonction } f$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x_0 \notin E_f) \wedge (f \text{ est définie au voisinage de } x_0)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(x_0 \notin E_f) \wedge ((\exists I_1 \in E_f \mid (I_1 =]x_{\lambda_1},\ x_0[)) \wedge \exists I_2 \in E_f \mid (I_2 =]x_0,\ x_{\lambda_2}[))$$

3.5) Points de prolongeabilité par continuité d'une fonction

Un point de prolongeabilité par continuité d'une fonction, c'est un point x_p de E_f qui est un trou isolé de f, et tel que la limite de f en x_p soit une limite réelle. En gros ça te fait un vrai trou dans la courbe qu'on a envie de combler avec un petit coup de crayon.

Formellement ça donne:

$$x_p \text{ est un point de prolongeabilité par continuité, de } f$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_p \text{ est un trou isolé de l'ensemble de définition de } f$$
$$\wedge$$
$$\left(\lim_{x \to x_p} (f(x))\right) \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des points de prolongeabilité d'une fonction $f$peut se noter $\psi_{\to\leftarrow}(f)$, et ça peut bien évidemment être un ensemble vide.

3.6) <u>Définition du prolongement par continuité d'une fonction</u>

Du coup quand t'as une fonction f qui admet un point de prolongeabilité x_0, (c est à die que la fonction f admet un trou isolé en x_0, ET que la fonction converge vers un réel y_0 donné au fur et à mesure qu'on se rapproche de x_0 que ce soit par la gauche ou par la droite), alors on peut créer une fonction « wrapper » qui pour tout x, vaut f(x) et qui pour x_0, vaut la limite réelle en x_0 c'est-à-dire y_0.

Formellement ça donne:

$$\text{Let } f = \mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix} E_f & \to & F_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$$
$$\wedge$$
$$f \text{ admet un point de prolongeabilité par continuité en } x_0$$
$$\Rightarrow$$
$$\text{on peut définir une nouvelle fonction}$$
$$\hat{f}_{\to\{x_0\}\leftarrow} = \mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix} E_f \cup \{x_0\} & \to & F_f \cup \left\{\lim_{x\to x_0}(f(x))\right\} \\ x & \to & \begin{matrix} x \in E_f & \to & f(x) \\ x \notin E_f & \to & \lim_{x\to x_0}(f(x)) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Du coup la notation du prolongement par continuité d'une fonction f, c'est $\hat{f}_{\to E_p\leftarrow}$ où E_p est l'ensemble des points de prolongeabilité de f sur lesquels on veut prolonger.

Du coup, $\hat{f}_{\to\varnothing\leftarrow} = f$ logiquement.

Par commodité, quand on ne précise pas l'ensemble des points de prolongeabilité dans la notation, genre $\hat{f}$, ça veut dire qu'on fait le prolongement sur TOUS les points de prolongeabilité par continuité de f.

$$\hat{f} = \hat{f}_{\to(\Psi_{\to\leftarrow}(f))\leftarrow}$$

<u>Du coup 2 remarques</u>:

1) La notation « chapeau », genre $\hat{f}$, $\hat{g}$, etc, est en fait un **opérateur** qui prend en argument une fonction f, et optionnellement un ensemble de points qui sont des points de prolongeabilité de f (s'il n'y a ne serait-ce qu'un seul point qui n'appartienne pas à $\Psi_{\to\leftarrow}(f)$ ça raise error) et qui retourne le prolongement par continuité de f sur l'ensemble passé en argument (ou sur $\Psi_{\to\leftarrow}(f)$ si l'ensemble n'est pas précisé).

2) C’est pas tout à fait pareil que la généralisation de fonctions restreintes sur un ensemble qu’on a vue plus haut, car la généralisation de fonction comble des intervalles et pas uniquement des trous isolés «convergeants», cependant j’imagine qu’il doit y avoir un concept qui puisse relier les deux.

4) Asymptote d'une fonction sur un point de $\overline{\mathbb{R}}$

En gros, une asymptote c’est une droite vers laquelle la courbe de la fonction se rapproche à l’infini sans la toucher quand x tend vers un nombre particulier.

Du coup il y a des endroits où une fonction peut admettre une asymptotes, ou pas, ça dépend de la fonction.

Quand on a $\lim_{x \to x_0^{\pm}} (f(x)) = \pm\infty$,

alors $f$admet une **asymptote verticale** en x_0 **d’équation** $x = x_0$

Quand on a $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x)) = L_{\in \mathbb{R}}$

alors f admet une **asymptote horizontale** en $\pm\infty$ ($+\infty$ si la limite est calculée en $+\infty$, $-\infty$ si la limite est calculée en $-\infty$), **d’équation** $y = L$.

Quand on a $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) \ - \ ((a_{\in \mathbb{R}^*}) \cdot x \ + \ (b_{\in \mathbb{R}}))) = 0$

alors f admet une **asymptote oblique** en $\pm\infty$ ($+\infty$ si la limite est calculée en $+\infty$, $-\infty$ si la limite est calculée en $-\infty$), d’équation $y = a \cdot x + b$.

En l’occurrence:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$$

5) Dérivabilité d'une fonction en un « point »

5.1) Taux d'accroissement d'une fonction entre 2 « points »

On a une fonction f:

$$\text{Let } f = \text{f}^{\circ}\begin{pmatrix} E_f & \to & F_f \\ x & \to & f(x) \end{pmatrix}$$

et 2 points $(x_1,\ x_2) \in (E_f)^2$avec $x_1 \neq x_2$

Le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 c'est:

$$\Gamma(f,\ x_1,\ x_2) = \Gamma_{f,x_1,x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

En fait, le taux d'accroissement de f, c'est tout simplement la quantité de croissance de f entre 2 points, par rapport à la quantité de croissance de x nécessaire pour avoir cet accroissement de f.

Remarque: on a forcément $\Gamma_{f,x_1,x_2} = \Gamma_{f,x_2,x_1}$

5.2) Nombre dérivé d'une fonction en un « point »

Du coup le taux d'accroissement de f entre 2 points c'est bien, mais ce qui serait cool c'est d'avoir un taux d'accroissement « instantané », pas entre 2 points mais en un point donné cette fois-ci. Intuitivement ca voudrait dire qu'il nous faudrait la limite épointée en ce point du taux d'accroissement de la fonction, et c'est bien de ça dont il s'agit.

Du coup, le nombre dérivé de f en un point $x_0 \in E_f$, noté $f'(x_0)$, c'est

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (\ \Gamma(f,\ x,\ x_0)) = \lim_{x \to x_0} (\ \Gamma_{f,\ x,\ x_0}) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Remarque: une autre façon de définir le nombre dérivé est d'exprimer l'égalité du dessus avec un changement de variable où on pose $h = (x - x_0)$.
Du coup ça nous donne:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (\ \Gamma_{f,\ x,\ x_0}) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

À ce moment-là, de 2 choses l'une:

- Soit la **limite est réelle**, à ce moment-là on peut dire que **f est dérivable en** x_0
- Soit la **limite n'est pas réelle ou n'existe pas**, et donc **f n'est pas dérivable en** x_0

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Rightarrow f \text{continue en } x_0$$

Et du coup quand f est dérivable en x_0, la tangeante à la courbe de f représentée dans un repère $(O, \vec{e_x},\ \vec{e_y})$ a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0)\ +\ f(x_0)$

Attention cependant: il peut arriver que la limite du taux d'accroissement en x_0 soit réelle à droite et indéfinie / infinie à gauche, ou inversement.

Par conséquent, on parlera de **nombre dérivé à droite** ou de **nombre dérivé à gauche**, et de **dérivabilité à droite** et de **dérivabilité à gauche**.

On les note (R pour Right et L pour Left):

Nombre dérivé à droite de f:

$$f'_{\mathrm{R}}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} (\ \Gamma_{f,\ x,\ x_0}) = \lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

⇒Si cette limite est réelle, alors f est dérivable à droite en x_0

Nombre dérivé à gauche de f:

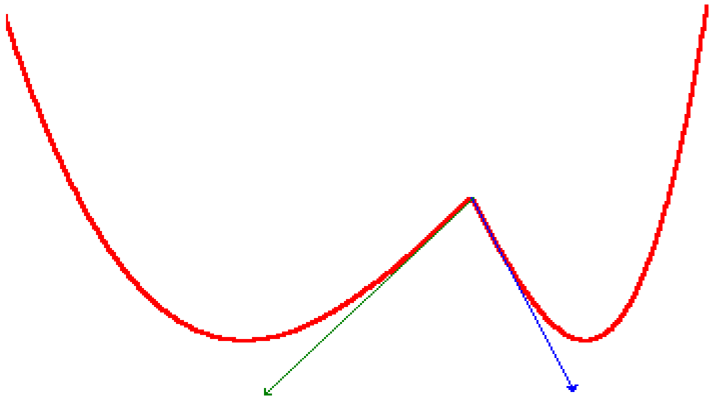
$$f'_{\mathrm{L}}(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} (\ \Gamma_{f,\ x,\ x_0}) = \lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

⇒Si cette limite est réelle, alors f est dérivable à gauche en x_0

Et du coup:

$$\begin{gathered}
f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \left(\Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \in \mathbb{R} \right) \right) \\
\wedge \\
f \text{ est dérivable à gauche en } x_0 \left(\Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \in \mathbb{R} \right) \right) \\
\wedge \\
f'_{\mathrm{R}}(x_0) = f'_{\mathrm{L}}(x_0) \\
\Leftrightarrow \\
f \text{ est dérivable en } x_0
\end{gathered}$$

Du coup quand on a une fonction f dérivable à droite uniquement (ou respectivement, dérivable à gauche uniquement), en x_0, alors la courbe de f admet une **demie-tangeante à droite** en x_0 (respectivement une **demie-tangeante à gauche** en x_0)



Courbe qui admet deux demi-tangentes

(https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./d/demitangente.html)

Du coup pour résumer, pour un $x_0 \in E_f$:

$$\left(\lim_{x \to x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow f \text{ est dérivable à droite de } x_0$$

$$\left(\lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow f \text{ est dérivable à gauche de } x_0$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow f \text{ est dérivable en } x_0$$

Le domaine de dérivabilité d'une fonction f est donc le sous-ensemble de son ensemble de définition contenant tous les éléments de E_f où f est dérivable, et il peut se noter $\mathrm{D}_\partial(f)$

Du coup $\mathrm{D}_\partial(f) \subseteq E_f$

6) Dérivation d'une fonction

La dérivation d’une fonction, c’est tout simplement prendre une fonction, et retourner une nouvelle fonction dont l’ensemble de départ est le domaine de dérivabilité de la fonction (c’est-à-dire un sous-ensemble), l’ensemble image est le domaine image de l’expression dérivée, et qui à tout x, associe le nombre dérivé de f en x.

Autrement dit:

$$f' = \frac{\partial}{\partial x}\left(f\right) = \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{f}^{\circ}\begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\partial}(f) \rightarrow \Im_{\mathrm{D}_{\partial}(f)}(f(x)) \\ x \ \rightarrow \ \lim_{a\rightarrow x}\left(\frac{f(a)-f(x)}{a-x}\right) \end{pmatrix}$$

Comme on peut le voit, il y a plusieurs notations possibles.

La notation avec le « prime » est la **notation de Lagrange**. L’idée est que le prime est un opérateur de dérivation qui va dériver la fonction par rapport à as variable, variable qui est indiquée dans la définition de la fonction.

La notation avec les « d ronds » est la **notation de Leibniz.** L’idée est que c’est un opérateur de dérivation qui va dériver la fonction par rapport à la variable qu’on lui indique ⇒ beaucoup plus puissant, notamment quand on va commencer à bosser sur des fonctions à plusieurs variables ou sur la notion de différentielle.

Remarque: en réalité la notation de Leibniz utilise un « d droit », genre $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\right) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, mais en réalité cela représente un quotient et pas une simple notation, quotient entre la différentielle de f et la différentielle de x, l’opérateur d étant un opérateur de différentiation ce qui est différent de la dérivation, on va voir ça plus tard. En gros c’est beaucoup plus intuitif de mon point de vue d’utiliser la notation d rond pour la dérivation car pour le coup c’est une notation et pas une opération et il faut bien faire la différence pour bien être conscient de ce qu’on est en train de faire.

6) Dérivation d’une expression

Alors en réalité, l’opérateur de dérivation il prend en argument une fonction, mais bien évidemment qu’on a déjà vu des trucs comme $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = 2x$, alors que normalement on aurait dû écrire, au pire, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{f}^{\circ}\left(x \rightarrow x^2\right)\right) = \mathrm{f}^{\circ}\left(x \rightarrow 2x\right)$.

En fait il y a une surcharge de l’opérateur de dérivation qui permet de prendre en argument une expression, et de retourner une **expression dérivée** (qui est l’expression de la fonction dérivée de la fonction qui à tout x associe l’expression de départ).

En gros, vu que c’est une expression, les variables sont obligatoirement déclarées préalablement (en spécifiant à quel ensemble elles appartiennent), sinon ça raise error (genre variable indéfinie).

Du coup, quand on passe l’expression à l’opérateur de dérivation, ça va caster l’expression en une fonction définie sur l’ensemble auquel appartient x (d’après sa définition préalable) qui à tout x associe l’expression fonction de x, puis définir la fonction dérivée de cette dernière, et retourner l’expression de la fonction dérivée en question.

7) Développement d'une fonction

7.1) Développement limité d'une fonction au voisinage d'un point

7.2) Développement asymptotique d'une fonction au voisinage d'un point de $\{-\infty, +\infty\}$