

Mathématiques – Licence 1

Table des matières

1	Fondements - Objets de base	4
1.1	Ensembles	4
	Axiome 1 : d'extensionnalité	4
	Axiome 2 : d'existence de l'ensemble vide	4
	Axiome 3 : du singleton	4
	Axiome 4 : de la paire	4
	Axiome 5 : d'extension	5
	Définition 1 : d'un ensemble par la compréhension	6
	Axiome 6 : de séparation	7
	Définition 2 : de l'opérateur d'inclusion d'ensembles \subseteq	7
	Axiome 7 : du caractère collectivisant de l'inclusion	8
	Définition 3 : de l'opérateur d'union d'ensembles \cup	8
	Définition 4 : de l'opérateur d'intersection d'ensembles \cap	10
	Définition 5 : de l'opérateur de différence d'ensembles $-$	11
	Définition 6 : de l'opérateur de différence symétrique d'ensembles Δ	11
	Résumé des propriétés des opérateurs sur les ensembles	12
	Définition 8 : du produit cartésien fondamental \times_f	16
	Définition 9 : du produit cartésien fusionnant \times	17
	Définition 10 : de l'ensemble des parties d'un ensemble	19
	Définition 11 : de la diagonale d'un ensemble	20
1.2	Fonctions et applications	22
	Définition 12 : d'une fonction	22
	Définition 13 : d'une application	22
	Définition 14 : de l'égalité de 2 fonctions	23
	Définition 15 : du graphe d'une application	24
	Définition 16 : du domaine de définition d'une fonction	25
	Définition 17 : du domaine image d'une fonction	29
	Définition 18 : d'une fonction surjective	35
	Définition 19 : d'une fonction injective	35
	Définition 20 : d'une fonction bijective	36
	Définition 22 : de la composition de 2 fonctions	37
	Axiome 8 : Ensemble des applications de E dans F	38
	Définition 23 : de la somme de 2 fonctions	40

	Définition 24 : de la différence de 2 fonctions	41
	Définition 25 : du produit de 2 fonctions	42
	Définition 26 : du quotient de 2 fonctions	43
	Définition 27 : de la puissance d'une fonction	44
1.3	Suites et familles d'éléments	45
	Définition 28 : d'une suite	45
	Définition 29 : d'une famille d'éléments	48
	Définition 30 : d'une famille d'ensembles	53
	Axiome 9 : du choix	53
	Définition 31 : du recouvrement d'un ensemble	54
	Définition 32 : d'une partition d'un ensemble	56
	Théorème 2 : Bijection du générateur d'application caractéristique de $A_{\subseteq E}$	57
1.4	Lois de composition	58
	Définition 33 : d'une LCI sur un ensemble C	58
	Définition 34 : d'un ensemble stable pour une LCI donnée	60
	Définition 35 : d'une LCI produit de 2 LCI	62
	Définition 36 : d'une LCI produit de $n_{\in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}}$ LCI	62
	Définition 37 : de l'associativité d'une LCI	64
	Définition 38 : de la commutativité d'une LCI	64
	Définition 39 : de l'élément neutre à gauche pour une LCI	64
	Définition 40 : de l'élément neutre à droite pour une LCI	65
	Définition 41 : de l'élément neutre pour une LCI	65
	Définition 42 : d'un élément inversible à gauche pour une LCI	66
	Définition 43 : d'un élément inversible à droite pour une LCI	66
	Définition 44 : d'un élément inversible pour une LCI	67
	Définition 45 : d'un élément simplifiable à gauche pour une LCI	68
	Définition 46 : d'un élément simplifiable à droite pour une LCI	69
	Définition 47 : d'un élément simplifiable pour une LCI sur un ensemble	70
	Définition 48 : d'un élément absorbant à gauche pour une LCI	72
	Définition 49 : d'un élément absorbant à droite pour une LCI	72
	Définition 50 : d'un élément absorbant pour une LCI	73
	Définition 51 : d'un élément idempotent pour une LCI	73
	Définition 52 : d'un morphisme d'une LCI vers une autre LCI	74
	Définition 53 : d'un magma	77
1.5	Relations	87
	Définition 54 : d'une relation binaire	87
	Définition 55 : du domaine à gauche d'une relation binaire	92
	Définition 56 : du domaine à droite d'une relation binaire	92
	Définition 57 : de l'ensemble des relié de x par R	93
	Définition 58 : d'une relation binaire induite par R de $E'_{\subseteq E} \rightarrow F'_{\subseteq F}$	94
	Définition 59 : d'une relation binaire inverse d'une relation binaire	95
	Définition 60 : d'une relation binaire complémentaire d'une relation binaire	97
	Définition 61 : de la composition de 2 relations binaires	99

Définition 62 : de la réflexivité d'une relation binaire interne	100
Définition 63 : de l'antiréflexivité d'une relation binaire interne	101
Définition 64 : de la transitivité d'une relation binaire interne	102
Définition 65 : de l'antitransitivité d'une relation binaire interne	103
Définition 66 : de la symétrie d'une relation binaire interne	104
Définition 67 : de l'antisymétrie (faible) d'une relation binaire interne . .	105
Définition 68 : de l'asymétrie d'une relation binaire interne	106
Définition 69 : d'une relation binaire interne totale	108
Définition 70 : d'une relation binaire interne d'équivalence	109
Définition 71 : d'une classe d'équivalence	109
Définition 72 : de l'ensemble des représentants d'une relation d'équivalence	111
Définition 73 : d'une relation binaire interne d'ordre	113
Définition 74 : d'une relation binaire interne d'ordre strict	114
Définition 75 : d'un ensemble ordonné par une relation d'ordre	115
Définition 76 : d'un élément maximum.al/minimum.al de E pour \preceq	116
Définition 77 : d'un élément majorant / minorant de E pour \preceq	121
Définition 78 : de la borne supérieure / inférieure de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq	123
Définition 79 : d'une application \nearrow te / \searrow te / monotone	127
Définition 80 : d'une application strictement \nearrow te / \searrow te / monotone . .	129
Définition 81 : d'une application strictement \nearrow te / \searrow te / monotone . .	131
Définition 82 : d'un isomorphisme entre 2 ensembles ordonnés	133
Définition 83 : d'une relation binaire interne acyclique	134
Définition 84 : d'une relation binaire interne R' plus forte qu'une relation R	136
Définition 85 : de la clôture d'une relation binaire interne	138
Définition 86 : des relations n -naires	141
1.6 Cardinaux	144
Définition 87 : d'une suite stationnaire	144
Définition 88 : d'un ensemble ordonné noethérien	145
Définition 89 : d'un ensemble ordonné artinien	147
Définition 90 : d'un ensemble bien ordonné et d'un bon ordre pour E . .	149
Définition 91 : de la condition d'hérédité d'une propriété sur E_{\preceq}	150
Théorème 3 : Principe d'induction noetherienne	151

1 Fondements - Objets de base

1.1 Ensembles

Axiome 1. "Axiome d'extensionnalité"

$$[\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)] \Leftrightarrow (E = F)$$

Dit autrement : « si le fait qu'un objet mathématique appartienne à E signifie qu'il appartient forcément aussi à F , et vice versa, alors c'est que les ensembles E et F sont identiques ».

Axiome 2. "Axiome d'existence de l'ensemble vide"

$$\exists! E \mid (\forall x, x \notin E)$$

$$\wedge$$

$$E = \emptyset$$

Dit autrement : « Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément. On le note \emptyset et il est unique compte tenu de l'axiome 1 (axiome d'extensionnalité) ».

Axiome 3. "Axiome du singleton"

$$\forall a, \exists! E \mid (E = \{a\})$$

Dit autrement : « Pour tout objet mathématique, il exist un ensemble ne contenant que cet objet mathématique et cet ensemble est unique ».

Dit autrement : « Tout objet mathématique peut être wrappé dans un ensemble ».

Axiome 4. "Axiome de la paire"

$$\forall a, b, \exists E \mid (E = \{a, b\})$$

Dit autrement : « Pour tout couple d'objets mathématiques, il existe un ensemble qui les contient tous les deux exclusivement et qui est unique ».

Dit autrement : « Tout couple d'objets mathématiques peut être wrappé dans un ensemble ».

Remarques : $\forall a, b :$

- $(\{a, b\} = \{b, a\})$
- $\{a, a\} = \{a\}$
- $(x \in \{a, b\}) \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b))$

Axiome 5. "Axiome d'extension"

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_{n \in \mathbb{N}^*}, \exists! E \mid E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Dit autrement : « Ce qui est vrai pour 2 éléments dans le cadre de l'axiome 4 (axiome de la paire) est également vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. On peut voir l'axiome d'extension comme une extension de l'axiome de la paire ».

Dit autrement : « Pour tout tout n -uplet d'objets mathématiques, il existe un ensemble qui contient exclusivement tous ces éléments et qui est unique ».

Généralement quand on voit des produits d'ensembles, il s'agit de produits cartésiens fusionnant et non de produits cartésiens fondamentaux, sauf mention contraire

Du coup le produit cartésien

Dit autrement : « tout n -uplet d'objets mathématiques peut être wrappé dans un ensemble ».

Remarque :

- Le fait que tout objet ou multitude d'objets puisse systématiquement être wrappé en un ensemble fait que quand on travaillera sur des fonctions qui prennent en argument des ensembles, vu que l'ensemble contenant tous les ensembles n'existe pas, on raisonnera systématiquement sur un ensemble "wrapper" qu'on appellera généralement W .

Définition 1. *"Définition d'un ensemble par la compréhension"*

Soit P une propriété collectivisante.

$$\exists E \Rightarrow (\exists P : (E = \{x \mid P(x)\}))$$

Dit autrement : « Si un objet mathématique E existe, alors il existe une propriété collectivisante P qui s'applique à chaque élément de l'ensemble E et qui permet de générer ce dernier via la feature "tous les éléments qui ont telle(s) propriété(s)" ».

Remarques :

- Une propriété collectivisante c'est une propriété qui permet de générer un ensemble de manière fiable, sans paradoxe. Par exemple la propriété "est pair" est collectivisante (et sous-entend "objet qui dispose d'une méthode intrinsèque permettant de déterminer s'il est pair, et dont la valeur de retour est True"), tandis que la propriété "est inclus dans lui-même" (le fameux paradoxe du barbier) n'est pas collectivisante.
- Il est important lors de la création d'un ensemble par compréhension, de bien utiliser une propriété collectivisante.
- Une propriété est donc une fonction qui prend un objet mathématique en argument et qui retourne un booléen. Cette fonction peut être absolue, pouvant prendre en argument les objets mathématiques qui lui sont spécifiés dans sa définition, ou relative à un objet, en tant que méthode de ce dernier (plus flexible).
- Les principales propriétés collectivisantes $P(x)$ sont :
 - $x \in E$ avec $x \neq E$
 - $x = y$
 - $x \subseteq y$
 - ...

Axiome 6. "Axiome de séparation"

Soit A un ensemble contenant des ensembles dont les éléments disposent d'une propriété P qui peut valoir *True* ou *False*

$$\forall E \in A, ((x \in E) \wedge P(x)) \text{ est collectivisante}$$

Dit autrement : « N'importe quel ensemble dont les éléments disposent d'une propriété, peut être filtré à l'aide de cette propriété pour obtenir un nouvel ensemble ne contenant que certains éléments sans prendre le risque de se retrouver avec un paradoxe ».

Remarques :

- Du coup on a $\{ x \mid ((x \in E) \wedge P(x)) \}$ qui est souvent utilisé, et pour simplifier la lecture, on peut l'écrire comme ceci $\{ x \in E \mid P(x) \}$. Donc

$$\{ x \in E \mid P(x) \} = \{ x \mid ((x \in E) \wedge P(x)) \}$$

- Ça veut donc dire que tout ensemble $\{ x \in E \mid P(x) \}$ existe dès lors que E existe et que P est une propriété de chaque élément de E (pouvant valoir *True* ou *False*), pas de galère.

Définition 2. "Inclusion d'un ensemble dans un autre"

$$F \subseteq E \Leftrightarrow \forall x, (x \in F \Rightarrow x \in E)$$

Dit autrement : « Quand $F \subseteq E$, tout élément de F est aussi dans E et F est un sous-ensemble de E ».

Remarques :

- \emptyset est un sous-ensemble de tous les ensembles
- Tout ensemble est un sous-ensemble de lui-même
- Ici, l'opérateur \subseteq est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W , on peut le faire en faisant :

$$\subseteq_W = F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow \\ (A, B) & \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \{0, 1\} \\ \left(\begin{array}{c} A \subseteq B : 1 \\ A \not\subseteq B : 0 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

ou, sans utiliser l'opérateur \subseteq :

$$\subseteq_W = F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow \\ (A, B) & \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \{0, 1\} \\ \left(\begin{array}{c} (\forall x \in A, x \in B) : 1 \\ (\exists x \in A \mid x \notin B) : 0 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

- \subseteq_W est une relation d'ordre.

Axiome 7. "La propriété d'inclusion est collectivisante"

Soit P une propriété sur les éléments d'un ensemble E

$(P(x) := (x \subseteq E))$ est collectivisante.

Dit autrement : « Si on a un ensemble $\{ E' \mid E' \subseteq E \}$ c'est ok. D'ailleurs ça correspond à l'ensemble des sous-ensembles de E , encore appelé ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$ ».

Définition 3. "Définition de l'opérateur d'Union / Réunion d'ensembles \cup "

$$\forall E, F, \exists! G \mid (\forall x, (x \in G) \Leftrightarrow ((x \in E) \vee (x \in F)))$$

Dit autrement : «

$$\forall E, F, \exists! G \mid G = \{ x \mid (x \in E) \vee (x \in F) \} = E \cup F$$

Dit autrement : « Pour tout couple d'ensemble, il existe un 3^e ensemble qui contient tous les éléments des 2 premiers ensemble réunis. Ça veut dire que l'opérateur de réunion \cup fonctionne pour tout couple d'ensemble sans bug ».

Dit autrement : « Tout couple d'ensemble peut être fusionné en un 3^e ensemble contenant tous les éléments des 2 premiers ensembles ».

Dit autrement :

$$G = E \cup F = \{ x \mid (x \in E) \vee (x \in F) \}$$

Remarque :

- L'opérateur d'union peut s'utiliser comme un opérateur binaire classique, genre $A \cup B$, mais il peut aussi s'utiliser comme l'opérateur de somme :

$$\text{à l'instar de } \sum_{i=a}^b (Expr(i)) \text{ ou } \sum_{i \in I} (Expr(i))$$

$$\text{on peut faire } \bigcup_{i=a}^b (Expr(i)) \text{ ou } \bigcup_{i \in I} (Expr(i))$$

Cependant attention, dans les notations avec les bornes " $\in I$ ", si I est un ensemble non ordonné (genre $\{a, b, c\}$ plutôt que (a, b, c)), vu que ça prendra les éléments dans l'ensemble selon un ordre aléatoire, l'opération ne sera pas la même et si les opérateurs ne sont pas commutatifs, le résultat sera variant. Attention donc à choisir un ensemble I ordonné pour éviter des effets de bord.

De même, si I est un ensemble fini on a l'assurance que le retour de l'expression est défini, c'est sécurisé. Par contre si I est infini, il n'est pas dit que l'expression existe et la somme ou le produit ou l'union ou l'intersection ou autre ne sera pas défini ce qui peut causer moult bug.

- Ici, l'opérateur \cup est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W , on peut le faire en faisant :

$$\cup_W = F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto A \cup B \end{array} \right)$$

ou, sans utiliser l'opérateur \cup :

$$\cup_W = F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto \{x \in W \mid ((x \in A) \vee (x \in B))\} \end{array} \right)$$

Définition 4. "Définition de l'opérateur d'Intersection d'ensembles \cap "

$$\forall E, F, \exists! G \mid (\forall x \in G, ((x \in E) \wedge (x \in F)))$$

Dit autrement :

$$\forall E, F, \exists! G \mid G = \{x \in E \mid x \in F\} = E \cap F$$

Dit autrement : « Pour tout couple d'ensemble, il existe un 3^e ensemble qui contient tous les éléments compris à la fois dans l'un et dans l'autre ensemble. Ça veut dire que l'opérateur d'intersection \cap fonctionne pour tout couple d'ensemble sans bug ».

Remarque :

- $E \cap F$ existe du fait de l'axiome 6 (axiome de séparation) et est unique du fait de l'axiome 1 (axiome d'extensionnalité)
- L'opérateur d'intersection peut s'utiliser comme un opérateur binaire classique, genre $A \cap B$, mais il peut aussi s'utiliser comme l'opérateur de somme :

$$\text{à l'instar de } \sum_{i=a}^b (\text{Expr}(i)) \text{ ou } \sum_{i \in I} (\text{Expr}(i))$$

$$\text{on peut faire } \bigcap_{i=a}^b (\text{Expr}(i)) \text{ ou } \bigcap_{i \in I} (\text{Expr}(i))$$

Cependant attention, dans les notations avec les bornes " $\in I$ ", si I est un ensemble non ordonné (genre $\{a, b, c\}$ plutôt que (a, b, c)), vu que ça prendra les éléments dans l'ensemble selon un ordre aléatoire, l'opération ne sera pas la même et si les opérateurs ne sont pas commutatifs, le résultat sera variant. Attention donc à choisir un ensemble I ordonné pour éviter des effets de bord.

De même, si I est un ensemble fini on a l'assurance que le retour de l'expression est défini, c'est sécurisé. Par contre si I est infini, il n'est pas dit que l'expression existe et la somme ou le produit ou l'union ou l'intersection ou autre ne sera pas défini ce qui peut causer moult bug.

- Ici, l'opérateur \cap est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W , on peut le faire en faisant :

$$\cap_W = F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto A \cap B \end{array} \right)$$

ou, sans utiliser l'opérateur \cap :

$$\cap_W = F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto \{x \in W \mid ((x \in A) \wedge (x \in B))\} \end{array} \right)$$

Définition 5. "Définition de l'opérateur de différence d'ensembles – "

$$\forall x, x \in (E - F) \Leftrightarrow ((x \in E) \wedge (x \notin F))$$

Dit autrement :

$$-(E, F) = E - F = \{ x \mid ((x \in E) \wedge (x \notin F)) \}$$

Dit autrement : « C'est l'ensemble des éléments de E auxquels on a retiré les éléments de F ».

Remarques :

- $E - F$ existe du fait de l'axiome 6 (axiome de séparation) et est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionnalité)
- Si $F \subseteq E$, alors $E - F$ est égal au complémentaire de F par rapport à E , noté $\mathbb{C}_E(F)$
- On peut voir l'opérateur – entre 2 ensembles comme l'extension de la notion de complémentaire entre 2 ensembles, vu que $\mathbb{C}_E(F) = E - F$
- Ici, l'opérateur – est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W , on peut le faire en faisant :

$$-_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto & A - B \end{pmatrix}$$

ou, sans utiliser l'opérateur – :

$$-_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto & \{x \in W \mid ((x \in A) \wedge (x \notin B))\} \end{pmatrix}$$

Définition 6. "Définition de l'opérateur différence symétrique d'ensembles"

$$\forall x, x \in (E \Delta F) \Leftrightarrow (x \in (E \cup F - E \cap F))$$

Dit autrement :

$$\Delta(E, F) = (E \cup F - E \cap F)$$

Dit autrement : « La différence symétrique entre 2 ensembles, c'est la réunion de ces 2 ensembles à laquelle on retire les éléments communs aux 2 ensembles ».

Remarque :

- Ici, l'opérateur Δ est défini pour tout ensemble. Si on veut l'utiliser comme une fonction binaire sur un ensemble wrapper W , on peut le faire en faisant :

$$\Delta_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto & A \Delta B \end{pmatrix}$$

ou, sans utiliser l'opérateur Δ ni \cup ni \cap :

$$\Delta_W = F^\circ \begin{pmatrix} (\mathcal{P}(W))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ (A, B) & \mapsto & \{x \in W \mid ((x \in A) \oplus (x \in B))\} \end{pmatrix}$$

Résumé des propriétés des opérateurs \cup et \cap

- Associativité de \cup :
 $E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$

- Commutativité de \cup :
 $E \cup F = F \cup E$

- \emptyset élément neutre de \cup :
 $\emptyset \cup E = E$

- $\forall E$, E est idempotent pour \cup :
 $E \cup E = E$

- Associativité de \cap :
 $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$

- Commutativité de \cap :
 $E \cap F = F \cap E$

- \emptyset élément absorbant de \cap :
 $\emptyset \cap E = \emptyset$

- $\forall E$, E est idempotent pour \cap :
 $E \cap E = E$

- Distributivité de \cup par rapport à \cap :
 $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

- Distributivité de \cap par rapport à \cup :
 $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

- Inclusion et union :
 $E \subseteq F \Leftrightarrow E \cup F = F$

- Inclusion et intersection :
 $E \subseteq F \Leftrightarrow E \cap F = E$

- $-$ est un morphisme de $\cup \rightarrow \cap$:
 $E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G)$

- $-$ est un morphisme de $\cap \rightarrow \cup$:
 $E - (F \cap G) = (E - F) \cup (E - G)$

Définition 7. "Définition d'un uplet"

Un uplet est une collection d'éléments rangés dans un ordre précis. Il se note comme ceci :

$$u := (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

-
- Certains auteurs parlent également de "tuple".
 - Un uplet de 2 élément est un couple, de 3 éléments est un triplet, de 4 éléments est un quadruplet, etc.
 - De manière générale un uplet de $n \in \mathbb{N}^*$ éléments est appelé un n -uplet. Si on a un uplet avec un infinité d'éléments, on peut parler de ∞ -uplet, c'est ergonomique mais pas standard.
 - On peut voir un uplet comme un objet mathématique qui associe à chacun de ses emplacement un objet mathématique précis. Genre dans le cas de (A, B, C, D) , on a le premier emplacement pour A , le second pour B , le 3^e pour C et le 4^e pour D .
 - Cela signifie qu'un uplet **fini** se définit par une application (qui est donc une suite), de $[1, n \in \mathbb{N}^*]_{\mathbb{N}} \rightarrow W$ où W est l'ensemble wrapper contenant tous les objets mathématiques de la collection. On a donc, par exemple :

$$u = (a, b, a, b, c, d) = F^\circ \left(\begin{array}{cc} [1, 6]_{\mathbb{N}} & \rightarrow \\ & \left(\begin{array}{l} \{a, b, c, d\} \\ (i=1) : a \\ (i=2) : b \\ (i=3) : a \\ (i=4) : b \\ (i=5) : c \\ (i=6) : d \end{array} \right) \\ i & \mapsto \end{array} \right)$$

- Cela signifie également qu'un uplet **infini** se définit par une application (qui est donc une suite), de $[1, +\infty[_{\mathbb{N}} \rightarrow W$ où W est l'ensemble wrapper contenant tous les objets mathématiques de la collection. On a donc, par exemple :

$$u = (a, b, a, b, c, d, \dots) = F^\circ \left(\begin{array}{cc} [1, +\infty[_{\mathbb{N}} & \rightarrow \\ & \left(\begin{array}{l} \{a, b, c, d\} \\ (i=1) : a \\ (i=2) : b \\ (i=3) : a \\ (i=4) : b \\ (i=5) : c \\ (i=6) : d \\ \dots \end{array} \right) \\ i & \mapsto \end{array} \right)$$

- Ainsi, dans le cas où on a par exemple $u = (a, b, c, a, d)$, on a donc $u(3) = u_3 = c$
- Quand on voit écrit $x \in (x_1, x_2, x_3)$, cela signifie que x est au moins un des éléments de l'uplet. Il s'agit d'une fonctionnalité de l'opérateur \in qui normalement opère de $(W \times \mathcal{P}(W)) \rightarrow \{0, 1\}$ et qui du coup va caster l'uplet en un ensemble et le traiter comme tel lors de l'opération.
- Pour conclure, un n -uplet d'éléments de W est donc une suite définie sur $[1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans W .
- Certains appellent $p_{k_{\in \mathbb{N}^*}}$ l'application telle que :

$$p_k((x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)) = x_k$$

appelée "application k -ième coordonnée" ou " k -ième application coordonnée" ou " k -ième projection", qui en gros prend un n -uplet et retourne son k -ième élément, genre $p_3(1, 3, 42, a, b, c)$ retourne 42. Bien évidemment il faut que $k \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ sinon ça crash. Du coup on compte à partir de 1 et non de 0 comme en informatique.

La fonction $p_{k_{\in \mathbb{N}^*}}$ est implémenté comme suit au sein d'un ensemble wrapper W :

$$p_k := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \left(\bigcup_{i \in [k, +\infty[_{\mathbb{N}}} (W^i) \right) & \rightarrow & W \\ (x_1, x_2, \dots) & \rightarrow & x_k \end{array} \right)$$

Et de manière plus générale, on a la fonction p qui est implémentée comme suit :

$$p = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathcal{F}_A \left(\bigcup_{i \in [k, +\infty[_{\mathbb{N}}} (W^i) \rightarrow W \right) \\ k & \mapsto & F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \bigcup_{i \in [k, +\infty[_{\mathbb{N}}} (W^i) & \rightarrow & W \\ ((x_j)_{j \in [1, (n_{\in [k, +\infty[_{\mathbb{N}})]_{\mathbb{N}}})}) & \mapsto & x_k \end{array} \right) \end{array} \right)$$

p est donc une application qui permet de prendre un uplet et de retourner un élément particulier de l'uplet en connaissant son index. Finalement on a $p_3((a, b, a, c)) = a = (a, b, a, c)_3$, vu que (a, b, a, c) est une suite sur \mathbb{N}^* .

On peut aussi remarquer que la fonction p est elle-même une suite sur \mathbb{N}^* , donc elle-même un ∞ -uplet!

- Il existe un opérateur unaire $\underline{}$ (c'est-à-dire "underline", genre \underline{f}) qui prend en argument une fonction $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$ et qui retourne un uplet contenant tous les éléments de $\text{Im}(f)$, ordonnés suivant leur antécédent. Si l'ensemble I_f n'est pas ordonné, l'ordre des éléments dans l'uplet est aléatoire.

C'est donc un moyen pratique pour ré-indexer une suite, par exemple si on a

$$u := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} [3, 7]_{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \left(\begin{array}{cc} (n=3) & : & 42 \\ (n \neq 3) & : & u_n + 8 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

c'est-à-dire, dit autrement, $\left(u_{n \in [3, 7]_{\mathbb{N}}} \right) := \left(\begin{array}{cc} (n=3):42 \\ (n \neq 3):(u_n+8) \end{array} \right)_{\in \mathbb{N}}$

$$\text{alors on a } \underline{u} = (42, 50, 58, 66, 74) = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} [1, 5]_{\mathbb{N}} & \rightarrow & \{42, 50, 58, 66, 74\} \\ n & \mapsto & \left(\begin{array}{cc} (n=1) & : & 42 \\ (n \neq 1) & : & (u_n + 8) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\text{Enfin, si on a par exemple une fonction } f := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} [1, 5]_{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (3 \cdot x - \cos(\pi x)) \end{array} \right),$$

et bien on aura $\underline{f} = f = (4, 5, 10, 11, 16)$

- On peut instancier un uplet particulier directement en faisant $u := (u_1, u_2, \dots, u_n)$, ou bien on peut l'instancier à partir d'une suite genre $u := \underline{s}$ (cf page 48).

On peut également instancier un uplet général, élément d'un produit cartésien, comme ceci :

$$\text{Soit } x \in \left(\prod_{i \in [1, n]} (E_i) \right)$$

Dès lors, x est un uplet quelconque de ce produit cartésien et les notations x_1, x_k , etc, s'appliquent.

De même, on peut utiliser la notation ci-dessous qui lui est équivalente :

$$\text{Soit } \left((x_i)_{i \in [1, n]} \right) \in \left(\prod_{i \in [1, n]} (E_i) \right)$$

Définition 8. "Définition du produit cartésien fondamental / restreint"

$$\forall E, F, \exists ! G = E \times_f F = \{ (a, b) \mid ((a \in E) \wedge (b \in F)) \}$$

Dit autrement :

$$E \times_f F = \{ (a, b) \mid ((a \in E) \wedge (b \in F)) \}$$

Dit autrement : « Quand on a 2 ensembles, on peut créer un nouvel ensemble contenant tous les couples qu'il est possible de former avec un élément du premier ensemble et un élément du second ensemble ».

Remarques :

- $E \times_f F$ est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionnalité)
- Il s'agit d'un opérateur binaire
- Cet opérateur N'EST PAS associatif, $E \times_f F \neq F \times_f E$
- $(E \times_f F = \emptyset) \Leftrightarrow ((E = \emptyset) \vee (F = \emptyset))$
- $((a_1, a_2) = (b_1, b_2)) \Leftrightarrow ((a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2))$

Définition 9. "Définition du produit cartésien fusionnant"

$$\forall E_1, E_2, \dots, E_{(n \in \mathbb{N}^*)},$$

$$\begin{aligned} \exists! G = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge \dots \wedge (a_n \in E_n)) \} \\ \text{et } G = (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \end{aligned}$$

Dit autrement :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n \in \mathbb{N}^*} (E_i) &= (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \\ &= \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge \dots \wedge (a_n \in E_n)) \} \end{aligned}$$

Dit autrement : « Quand on a $n \in \mathbb{N}^*$ ensembles, on peut créer un nouvel ensemble contenant tous les n -uplets qu'il est possible de former avec un élément de chaque ensemble ».

Remarques :

- $\prod_{i=1}^{n \in \mathbb{N}^*} (E_i)$ est unique d'après l'axiome 1 (axiome d'extensionnalité)
- Il s'agit d'un opérateur n -naire
- Généralement quand on voit des produits d'ensembles, il s'agit de produits cartésiens fusionnant et non de produits cartésiens fondamentaux, sauf mention contraire
- Du coup le produit cartésien fusionnant est d'une certaine manière un moyen de rendre le produit cartésien fondamental associatif
- $(\prod_{i=1}^{n \in \mathbb{N}^*} (E_i) = \emptyset) \iff (\exists k \in \mathbb{N}^* \mid (E_k = \emptyset))$
- Ça permet de définir l'opérateur puissance appliqué aux ensembles, avec $E^{(n \in \mathbb{N}^*)} = (E \times E \times \dots \times E)$ (n fois)
- La diagonale de $E^{(n \in \mathbb{N}^*)}$ est $\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (a_1 = a_2 = \dots = a_n) \}$, c'est-à-dire $\{ (x, x, \dots, x) \in E^n \}$
- $((a_1, a_2, \dots, a_{(n \in \mathbb{N}^*)}) = (b_1, b_2, \dots, b_n))$
 $\iff ((a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \dots \wedge (a_n = b_n))$

- Il faut bien comprendre la différence entre le produit cartésien fondamental et le produit cartésien fusionnant. Avec le produit cartésien fondamental, on a :

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 \times E_3 &= (E_1 \times E_2) \times E_3 \\ &= \{ (a_1, a_2) \mid ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2)) \} \times E_3 \\ E_1 \times E_2 \times E_3 &= \{ (b, a_3) \mid ((b \in \{ (a_1, a_2) \mid ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2)) \}) \wedge (a_3 \in E_3)) \} \end{aligned}$$

Ce qui donne donc un ensemble de couples du type $((a_1, a_2), a_3)$, tandis qu'avec le produit cartésien fusionnant on aura :

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid ((a_1 \in E_1) \wedge (a_2 \in E_2) \wedge (a_3 \in E_3)) \}$$

Ce qui donne un ensemble de triplets du type (a_1, a_2, a_3)

- Pour un ensemble fini E , on a

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$

Définition 10. "Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble"

Soit $E \in W$ un ensemble.

L'ensemble des parties de E est :

$$\mathcal{P}(E) = \{A \in W \mid A \subseteq E\}$$

Dit autrement : « Il n'y a pas de piège, l'ensemble des parties de E c'est l'ensemble des sous-ensembles possibles de E ».

Remarques :

- On peut donc voir \mathcal{P} comme un opérateur unaire sur les ensembles d'un ensemble wrapper W , qui prend donc en argument un ensemble de W et retourne l'ensemble de toutes ses parties possibles. Je ne vois pas trop comment définir cette fonction sans l'utiliser elle-même.

- On a pour tout ensemble fini E ,

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$

- On a, pour tout couple d'ensembles finis $(E, F) \in W^2$,

$$\text{card}(\mathcal{P}(E \times F)) = 2^{(\text{card}(E) \cdot \text{card}(F))}$$

- On a, pour tout uplet d'ensembles finis $((E_i)_{i \in [1, n]_{\mathbb{N}}}) \subseteq W^n$,

$$\text{card}\left(\mathcal{P}\left(\prod_{i=1}^n (E_i)\right)\right) = 2^{(\prod_{i=1}^n (\text{card}(E_i)))}$$

Définition 11. "Définition de la diagonale d'un ensemble"

Soient E un ensemble et $n \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}$

La diagonale de l'ensemble E^n se note :

$$\searrow_{E^n} = \{(x, x, \dots, x) \in E^n\}$$

Dit autrement : «

Soient E un ensemble et $n \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}$

La diagonale de l'ensemble E^n se note :

$$\searrow_{E^n} = \left\{ \left((x)_{i \in [1, n]_{\mathbb{N}}} \right) \in E^n \right\}$$

Dit autrement : «

On appelle la diagonale d'un ensemble E^n , le sous-ensemble de E^n contenant tous les uplets dont les éléments sont identiques ».

Remarques :

- Ici l'opérateur \searrow est défini pour un ensemble wrapper W ,

$$\searrow = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) \times [2, +\infty[_{\mathbb{N}} & \rightarrow & (\mathcal{P}(W))^2 \\ (E, n) & \mapsto & \searrow_E = \{(x, y) \in \mid (x = y)\} \end{array} \right)$$

- Généralement les auteurs notent la diagonale de E , Δ_E , mais comme cela peut poser problème dans le parsing avec une confusion avec l'opérateur Δ de la différence symétrique et que l'on ne sait pas de quelle taille d'uplets il est question, on va utiliser la notation \searrow_{E^n} qui est non standard mais univoque (genre \searrow_{E^4}).
- Ainsi, quand on a un ensemble E^2 , ça comprend tous les couples qu'il est possible de constituer avec 2 éléments issus de E , mais si on veut un ensemble qui ne contient aucun couple où les 2 éléments sont identiques, genre si on veut quelque chose comme $\{(x, y) \in E^2 \mid (x \neq y)\}$, ou "Soit $(x, y) \in E^2 \mid x \neq y$ ", on peut utiliser la notation / opération

$$E_{\neq}^2 = \{(x, y) \in E^2 \mid (x \neq y)\} = E^2 - (\searrow_{E^2})$$

Genre "Soit $(x, y) \in E_{\neq}^2$ "

De manière générale, L'opérateur \neq^n avec $n \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}$ est donc un opérateur qui s'applique au sein d'un ensemble wrapper W et défini par :

$$\neq^n = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(W^n) \\ A & \mapsto & A^n - (\searrow_{A^n}) \end{array} \right)$$

Et de manière encore plus générale, l'opérateur \neq est un opérateur qui s'applique au sein d'un ensemble wrapper W et défini par :

$$\neq = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} [2, +\infty[_{\mathbb{N}} & \rightarrow & \bigcup_{k \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}} (\mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W^k))) \\ n & \mapsto & \neq(n) =_n \neq = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(W^n) \\ A & \mapsto & A^n - (\setminus_{A^n}) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Donc d'un point de vue parsing, E_{\neq}^n est en fait $(\neq(n))(E)$.

1.2 Fonctions et applications

Définition 12. "Définition d'une fonction"

Une fonction est un objet mathématique constitué :

- d'un ensemble de départ E
- d'un ensemble d'arrivée F
- d'une variable muette
- d'une expression sur cette variable muette

On la déclare comme ça :

Soient E et F 2 ensembles

$$f := F^\circ \left(\begin{array}{cc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & Expr(x) \end{array} \right)$$

Dit autrement : « Une fonction c'est un objet mathématique qui permet de prendre un élément de son ensemble de départ et, si c'est possible, lui appliquer un procédé pour le transformer en un élément de son ensemble de sortie ».

Remarques :

- L'ensemble des fonctions de E à valeurs dans F existe et est noté $\mathcal{F}(E \rightarrow F)$, ou encore F^E
- L'ensemble de départ d'une fonction f s'obtient avec l'opérateur unaire I qui prend en argument une fonction et retourne son ensemble de départ $I(f)$
- L'ensemble d'arrivée d'une fonction f s'obtient avec l'opérateur unaire O qui prend en argument une fonction et retourne son ensemble de départ $O(f)$

Définition 13. "Définition d'une application"

Une application est une fonction donc tous les éléments de l'ensemble de départ disposent d'une image dans l'ensemble d'arrivée.

Dit autrement : « Une application est une fonction dont l'ensemble de départ est égal à son ensemble de définition. ».

Remarques :

- L'ensemble des applications de E à valeurs dans F existe et se note $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F)$
- On a donc logiquement $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F) \subseteq \mathcal{F}(E \rightarrow F)$
- L'ensemble des fonctions de E à valeurs dans F qui ne sont pas des applications se note $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(E \rightarrow F)$.
- On a donc logiquement $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(E \rightarrow F) \subseteq \mathcal{F}(E \rightarrow F)$
- On a également logiquement $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F) \cup \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(E \rightarrow F) = \mathcal{F}(E \rightarrow F)$

Définition 14. "Définition de l'égalité de 2 fonctions"

$$\text{Soient } f = F^\circ \left(\begin{array}{c} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right) \text{ et } g = F^\circ \left(\begin{array}{c} I_g \rightarrow O_g \\ t \mapsto g(t) \end{array} \right)$$

$$f = g \Leftrightarrow ((I_f = I_g) \wedge (O_f = O_g) \wedge (\forall x \in I_f, f(x) = g(x)))$$

Dit autrement : « 2 fonctions sont égales si elles ont le même ensemble d'entrée, le même ensemble de sortie et que pour une même entrée elles donnent une même sortie (qu'elles ont la même expression quoi) ».

Remarques :

- La restriction de f à I'_f se note $f|_{I'_f}$ (la fonction aura alors le même ensemble image que f , sauf si ce dernier est égal à son domaine image auquel cas la nouvelle fonction aura pour ensemble de sortie son nouveau domaine image), ou bien $f|_{I'_f \rightarrow O_f}$ (dans ce dernier cas la situation est univoque)
- La co-restriction de f à O'_f se note $f|_{I_f \rightarrow O'_f}$
- De manière générale, on peut prendre une fonction f et créer une nouvelle fonction en modifiant ses ensembles d'entrée et de sortie en faisant $f|_{I'_f \rightarrow O'_f}$
- L'opérateur "produit cartésien fondamental" \times des fonctions fonctionne comme suit :

$$f_1 \times f_2 := F^\circ \left(\begin{array}{c} (I_{f_1} \times I_{f_2}) \rightarrow (O_{f_1} \times O_{f_2}) \\ (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{array} \right)$$

En gros ça retourne une fonction qui prend 2 arguments et retourne un couple de valeurs. L'opérateur "produit cartésien fusionnant" \times a le même fonctionnement mais c'est un opérateur n -naire et pas un opérateur binaire comme le produit cartésien fondamental.

- Quand $I_{f_1} = I_{f_2}$, certains définissent

$$(f_1, f_2) := F^\circ \left(\begin{array}{c} I_{f_1} \rightarrow (O_{f_1} \times O_{f_2}) \\ x \mapsto (f_1 \times f_2)(x, x) \end{array} \right)$$

En gros c'est juste un moyen d'avoir une fonction à une variable mais la notation peut porter à confusion avec le couple de 2 fonctions (f_1, f_2) donc pas génial du tout.

Définition 15. "Graphe d'une application"

Soit $f := F^\circ \begin{pmatrix} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix}$

Le graphe de f est :

$$\mathcal{G}_f := \{ (x, y) \in (I_f \times O_f) \mid y = f(x) \}$$

Dit autrement :

$$\mathcal{G}_f := \{ (x, f(x)) \mid x \in I_f \}$$

Dit autrement : « Le graphe d'une application c'est l'ensemble des "points" de cette application, c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x, f(x)) \forall x \in I_f$ ».

Remarques :

- Certains ouvrages définissent une application par un triplet (I_f, Γ, O_f) où Γ vérifie que $\forall x \in I_f, \exists! y \in O_f \mid ((x, y) \in \Gamma)$, c'est-à-dire en français : « Tout élément de I_f a une unique image dans O_f par f »
- Le graphe de l'application identité sur E , $\text{Id}_E = F^\circ \begin{pmatrix} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{pmatrix}$ est la diagonale de E^2
- Le graphe de $f|_{(I'_f) \subseteq I_f}$ est $\mathcal{G} \begin{pmatrix} f|_{(I'_f) \subseteq I_f} \end{pmatrix} = \mathcal{G}_f \cap (I'_f \times O_f)$
- Le graphe d'une application vide f_\emptyset (c'est-à-dire une application dont l'ensemble de départ est \emptyset) est l'ensemble vide \emptyset
- \mathcal{G} est donc un opérateur qui peut prendre en argument une application, avec la syntaxe $\mathcal{G}(f)$ ou \mathcal{G}_f et retourner le graphe de l'application. Si on lui passe en argument une fonction qui n'est pas en application, ça cast la fonction en application en restreignant l'ensemble de départ au domaine de définition de la fonction et ça retourne le graphe de l'application ainsi obtenue.

Définition 16. "Domaine de définition d'une fonction"

$$\text{Soit } f = F^\circ \left(\begin{array}{c} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right)$$

$$D(f) = \{ x \in I_f \mid (\exists y \in O_f : (f(x) = y)) \}$$

Dit autrement : « Le domaine de définition d'une fonction est un sous-ensemble de son ensemble de départ, dont TOUS les éléments ont au moins une image dans l'ensemble d'arrivée, par la fonction ».

Remarques :

- Le domaine de définition d'une fonction f est donc noté $D(f)$. D est un opérateur qui peut prendre en argument obligatoire, soit une fonction, soit une expression.
- Sa syntaxe exhaustive dans le cas où on lui passe une fonction est $D_{A \rightarrow B}(f)$ où A est l'ensemble de départ que l'on impose (restreint ou étend) à la fonction, et B est l'ensemble d'arrivée que l'on impose (co-restreint ou co-étend) à la fonction. Ça donne plus de flexibilité en permettant d'obtenir un domaine de définition compte tenu d'un ensemble de départ et d'un ensemble d'arrivée. En l'absence de précision du domaine de départ et d'arrivée, genre $D(f)$, l'opérateur considère que l'ensemble de départ à considérer est l'ensemble de départ de la fonction et l'ensemble d'arrivée à considérer est l'ensemble d'arrivée de la fonction. On a donc :

$$D_{A \rightarrow B}(f) = D(f|_{A \rightarrow B})$$

et

$$D(f) = D_{I_f \rightarrow O_f}(f)$$

- Sa syntaxe exhaustive dans le cas où on lui passe une expression est $D_{\text{variable}:A \rightarrow B}(\text{Expr}(\text{variable}, \text{variable}_2, \dots))$, par exemple : $D_{x:A \rightarrow B}(3ax + b)$, la variable précisée étant celle dont on veut l'ensemble d'appartenance inclus dans A tel que l'expression appartienne à un ensemble inclus dans B .

En gros l'opérateur D va caster l'expression en fonction, en considérant que la variable est celle passée en argument et que les ensembles de départ et d'arrivée sont ceux passés en argument, pour ensuite traiter la fonction comme vu plus haut. Donc on a par exemple :

$$D_{x:A \rightarrow B}(3x + 6) = D(F^\circ \left(\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ x \mapsto 3x+6 \end{array} \right))$$

S'il y a plusieurs variables dans l'expression, il faudra que les autres variables soient définies en amont (genre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) où à la volée dans l'expression (genre $D_{x:A \rightarrow B}(3(a_{\in \mathbb{R}})x + (b_{\in \mathbb{R}}))$). Cela signifie qu'une expression du type $D_{x:A \rightarrow B}(3ax + b)$ où a et b n'ont pas été préalablement définis dans le scope va raise error.

Si une des autres variables est déclarée telle que l'expression ne peut pas appartenir à B , par exemple $D_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}\left(\frac{3}{(a_{\in \mathbb{R}})} + 6x\right)$, vu que a peut être nul et qu'on veut un résultat toujours réel, ça va raise error. De manière générale, si on a quelque chose d'indécidable, ça raise error. C'est donc de notre responsabilité, lorsqu'il y a des constantes dans l'expression, de bien les définir en amont pour s'assurer que l'expression passée en argument ne fera pas tout crasher.

Si l'expression est telle qu'il est impossible qu'elle appartienne à B , alors ça renverra \emptyset . Par exemple, $D_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}\left(\frac{x}{a-a}\right) = \emptyset$

Si la variable précisée en argument n'est pas présente dans l'expression, alors ça retournera A ou \emptyset , en fonction de si l'expression appartient à A d'emblée ou non. Par exemple $D_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+}\left(3(a_{\in \{3,4\}})^2 + 6\right) = \mathbb{R}$, et pour $a \in \{3, 4\}$, $D_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^}((3-a)(4-a)) = \emptyset$*

Ça peut tout à fait gérer des fonction à plusieurs variables, donc on peut par exemple faire

$$D_{(x, a, b):\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^*}(3ax^2 + bx + 42)$$

Enfin, si on ne précise pas les ensembles A et B , il est considéré qu'il s'agit de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De même, si la variable n'est pas précisée, il est considéré que c'est la ou les variable.s non déclarée.s de l'expression (avec un tuple classé par ordre d'apparition des variables dans l'expression). par exemple :

$$D_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*}(3x^2 + 6x + 42) = D_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*}(3x^2 + 6x + 42)$$

ou

$$D_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}}(3ax^2 + 6(b_{\in \{1, 6, 42\}})x + 42) = D_{(a, x):\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}}(3ax^2 + 6(b_{\in \{1, 6, 42\}})x + 42)$$

ou

$$D_{\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}}(3ax^2 + 6bx + 42) = D_{(a, x, b):\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}}(3ax^2 + 6bx + 42)$$

Du coup, logiquement, on a $D(3a^2 + bx + 42) = D_{(a, b, x):\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}}(3a^2 + bx + 42)$

Bien entendu, si l'ensemble de départ ne correspond pas (par exemple $D_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}(3x + a^2)$ au lieu de $D_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}}(3x + a^2)$), ça raise error.

Mais dans ces derniers cas, il est préférable de passer par une fonction correctement déclarée plutôt que par une expression.

- Du coup, l'opérateur $D_{A \rightarrow B}$ est la fonction suivante :

$$D_{A \rightarrow B} = D(A, B) = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \\ f & \mapsto & \{x \in A \mid (\exists y \in B : f|_{A \rightarrow B}(x) = y)\} \end{array} \right)$$

- De manière plus générale, l'opérateur D au sein d'un ensemble wrapper W est la fonction suivante :

$$D = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(W) \times \mathcal{P}(W)) & \rightarrow & \mathcal{F}((\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} \rightarrow \mathcal{P}(W)) \\ (A, B) & \mapsto & D_{A \rightarrow B} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A \rightarrow B) & \rightarrow & \mathcal{P}(A) \\ f & \mapsto & \{x \in A \mid (\exists y \in B : f|_{A \rightarrow B}(x) = y)\} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

C'est-à-dire que l'opérateur D est une fonction qui prend 2 ensembles A et B et renvoie une fonction, cette dernière prenant en argument une fonction d'ensemble de départ A et d'ensemble d'arrivée B et retourne le domaine de définition de cette fonction.

Donc d'un point de vue parsing, l'instruction $D_{A \rightarrow B}(f)$ correspond en réalité à $(D(A, B))(f)$

J'ai préféré designer le truc en 2 fonctions qui se chaînent plutôt qu'une seule qui prend un triplet pour permettre plus de flexibilité. Mais sinon en effet on aurait tout aussi bien pu avoir

$$D = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(W))^2 \times (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ (A, B, f) & \mapsto & \{x \in A \mid (\exists y \in B : f|_{A \rightarrow B}(x) = y)\} \end{array} \right)$$

- Enfin, il y a une notation particulière qui parfois peut être pratique. Il s'agit de la notation f_* , genre $f_*(A)$, qui est une façon raccourcie d'obtenir le domaine de définition de f co-restreint à A . Du coup, on a

$$f_*(A) = D_{I_f \rightarrow A}(f) = D(f|_{I_f \rightarrow A})$$

$$f_*(O_f) = D(f)$$

- Du coup on peut voir la notation $*$ comme un opérateur qui s'applique à la fonction nommée juste avant, et qui retourne une fonction prenant un ensemble en argument et retournant le domaine de définition correspondant. On a donc, au sein d'un ensemble wrapper W :

$$* = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} & \rightarrow & (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} \\ f & \mapsto & f_* = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ A & \mapsto & D_{|I_f \rightarrow A}(f) = \{x \in I_f \mid (\exists y \in A : f(x)=y)\} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Cette notation $f_*(A)$, certains auteurs l'appellent le "domaine image réciproque", parfois noté $f^{-1}(B)$ mais cela porte à confusion avec la bijection réciproque d'autres auteurs, ou l'opérateur puissance des fonctions.

- Il y a également des flemmards qui notent $f_*(y)$ au lieu de $f_*(\{y\})$, c'est également à éviter dans l'idéal.
- Il y a donc différentes choses notables concernant f_* :

- $f_*(\emptyset) = \emptyset$ $\left(\Leftrightarrow D(f_{|I_f \rightarrow \emptyset}) = \emptyset \right)$
- $f_*(A - B) = f_*(A) - f_*(B)$ $\left(\Leftrightarrow D(f_{|I_f \rightarrow (B-A)}) = D(f_{|I_f \rightarrow B}) - D(f_{|I_f \rightarrow A}) \right)$
- $A \subseteq B \Rightarrow f_*(A) \subseteq f_*(B)$ $\left(\Leftrightarrow (A \subseteq B \Rightarrow D(f_{|I_f \rightarrow A}) \subseteq D(f_{|I_f \rightarrow B})) \right)$
- $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$ $\left(\Leftrightarrow D(f_{|I_f \rightarrow (A \cup B)}) = D(f_{|I_f \rightarrow A}) \cup D(f_{|I_f \rightarrow B}) \right)$
- $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ $\left(\Leftrightarrow D(f_{|I_f \rightarrow (A \cap B)}) = D(f_{|I_f \rightarrow A}) \cap D(f_{|I_f \rightarrow B}) \right)$

Définition 17. "Domaine image d'une fonction"

$$\text{Soit } f = F^\circ \left(\begin{array}{c} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right)$$

$$\text{Im}(f) = \{ y \in O_f \mid (\exists x \in I_f : (f(x) = y)) \}$$

Dit autrement : « Le domaine image d'une fonction est un sous-ensemble de son ensemble d'arrivée, dont TOUS les éléments ont au moins un antécédent dans l'ensemble de départ, par la fonction ».

Remarques :

- L'ensemble des antécédents d'un $y \in O_f$ par f est donc $\{ x \in I_f \mid f(x) = y \}$
- Le domaine image d'une fonction f est donc noté $\text{Im}(f)$. Im est un opérateur qui peut prendre en argument obligatoire, soit une fonction, soit une expression. C'est le même principe que l'opérateur D
- Sa syntaxe exhaustive dans le cas où on lui passe une fonction est $\text{Im}_{A \rightarrow B}(f)$ où A est l'ensemble de départ que l'on impose (restreint ou étend) à la fonction, et B est l'ensemble d'arrivée que l'on impose (co-restreint ou co-étend) à la fonction. Ça donne plus de flexibilité en permettant d'obtenir un domaine image compte tenu d'un ensemble de départ et d'un ensemble d'arrivée. En l'absence de précision du domaine de départ et d'arrivée, genre $\text{Im}(f)$, l'opérateur considère que l'ensemble de départ à considérer est l'ensemble de départ de la fonction et l'ensemble d'arrivée à considérer est l'ensemble d'arrivée de la fonction. On a donc :

$$\text{Im}_{A \rightarrow B}(f) = \text{Im}(f|_{A \rightarrow B})$$

et

$$\text{Im}(f) = \text{Im}_{I_f \rightarrow O_f}(f)$$

- Sa syntaxe exhaustive dans le cas où on lui passe une expression est $\text{Im}_{\text{variable}:A \rightarrow B}(\text{Expr}(\text{variable}, \text{variable}_2, \dots))$, par exemple : $\text{Im}_{x:A \rightarrow B}(3ax + b)$, la variable précisée étant celle dont le fait qu'elle appartienne à A fait que l'expression appartient au sous-ensemble de B que l'on recherche.

En gros l'opérateur Im va caster l'expression en fonction, en considérant que la variable est celle passée en argument et que les ensembles de départ et d'arrivée sont ceux passés en argument, pour ensuite traiter la fonction comme vu plus haut. Donc on a par exemple :

$$\text{Im}_{x:A \rightarrow B}(3x + 6) = \text{Im}\left(F^\circ \left(\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ x \mapsto 3x+6 \end{array} \right)\right)$$

S'il y a plusieurs variables dans l'expression, il faudra que les autres variables soient définies en amont (genre $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) où à la volée dans l'expression (genre $\text{Im}_{x:A \rightarrow B} (3(a \in \mathbb{R})x + (b \in \mathbb{R}))$). Cela signifie qu'une expression du type $\text{Im}_{x:A \rightarrow B} (3ax + b)$ où a et b n'ont pas été préalablement définis dans le scope va raise error.

Si une des autres variables est déclarée telle que l'expression ne peut pas appartenir à B , par exemple $\text{Im}_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \left(\frac{3}{(a \in \mathbb{R})} + 6x \right)$, vu que a peut être nul et qu'on veut un résultat toujours réel, ça va raise error. De manière générale, si on a quelque chose d'indécidable, ça raise error. C'est donc de notre responsabilité, lorsqu'il y a des constantes dans l'expression, de bien les définir en amont pour s'assurer que l'expression passée en argument ne fera pas tout crasher.

Si l'expression est telle qu'il est impossible qu'elle appartienne à B , alors ça renverra \emptyset . Par exemple, $\text{Im}_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \left(\frac{x}{a-a} \right) = \emptyset$

Si la variable précisée en argument n'est pas présente dans l'expression, alors ça retournera l'ensemble des valeurs possibles de l'expression. Par exemple

$$\text{Im}_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+} \left(3(a \in \{3, 4\})^2 + 6 \right) = \{33, 54\},$$

et pour $a \in \{3, 4\}$, $\text{D}_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^} ((3-a)(4-a)) = \emptyset$*

Ça peut tout à fait gérer des fonction à plusieurs variables, donc on peut par exemple faire

$$\text{Im}_{(x, a, b):\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^*} (3ax^2 + bx + 42)$$

Enfin, si on ne précise pas les ensembles A et B , il est considéré qu'il s'agit de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De même, si la variable n'est pas précisée, il est considéré que c'est la ou les variable.s non déclarée.s de l'expression (avec un tuple classé par ordre d'apparition des variables dans l'expression). par exemple :

$$\text{Im}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*} (3x^2 + 6x + 42) = \text{Im}_{x:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*} (3x^2 + 6x + 42)$$

ou

$$\text{Im}_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}} (3ax^2 + 6(b \in \{1, 6, 42\})x + 42) = \text{Im}_{(a, x):\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}} (3ax^2 + 6(b \in \{1, 6, 42\})x + 42)$$

ou

$$\text{Im}_{\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}} (3ax^2 + 6bx + 42) = \text{Im}_{(a, x, b):\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}} (3ax^2 + 6bx + 42)$$

Du coup, logiquement, on a $\text{Im} (3a^2 + bx + 42) = \text{Im}_{(a, b, x):\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}} (3a^2 + bx + 42)$

Bien entendu, si l'ensemble de départ ne correspond pas (par exemple $\text{Im}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} (3x + a^2)$ au lieu de $\text{Im}_{\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}} (3x + a^2)$), ça raise error.

Mais dans ces derniers cas, il est préférable de passer par une fonction correctement déclarée plutôt que par une expression.

- Du coup, l'opérateur $\text{Im}_{A \rightarrow B}$ est la fonction suivante :

$$\text{Im}_{A \rightarrow B} = \text{Im}(A, B) = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)) & \rightarrow & \mathcal{P}(B) \\ f & \mapsto & \{y \in B \mid (\exists x \in A : f_{|A \rightarrow B}(x) = y)\} \end{array} \right)$$

- De manière plus générale, l'opérateur Im au sein d'un ensemble wrapper W est la fonction suivante :

$$\text{Im} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(W) \times \mathcal{P}(W)) & \rightarrow & \mathcal{F}((\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} \rightarrow \mathcal{P}(W)) \\ (A, B) & \mapsto & \text{Im}_{A \rightarrow B} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A \rightarrow B) & \rightarrow & \mathcal{P}(B) \\ f & \mapsto & \{y \in B \mid (\exists x \in A : f_{|A \rightarrow B}(x) = y)\} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

C'est-à-dire que l'opérateur Im est une fonction qui prend 2 ensembles A et B et renvoie une fonction, cette dernière prenant en argument une fonction d'ensemble de départ A et d'ensemble d'arrivée B et retourne le domaine image de cette fonction.

Donc d'un point de vue parsing, l'instruction $\text{Im}_{A \rightarrow B}(f)$ correspond en réalité à $(\text{Im}(A, B))(f)$

De la même manière que pour l'opérateur D , j'ai préféré designer le truc en 2 fonctions qui se chaînent plutôt qu'une seule qui prend un triplet pour permettre plus de flexibilité. Mais sinon en effet on aurait tout aussi bien pu avoir

$$\text{Im} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(W))^2 \times (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ (A, B, f) & \mapsto & \{y \in B \mid (\exists x \in A : f_{|A \rightarrow B}(x) = y)\} \end{array} \right)$$

- Enfin, il y a une notation particulière qui parfois peut être pratique. En principe quand on écrit $f(x)$, ça correspond à l'élément de O_f correspondant. Cependant, une feature des applications est de pouvoir passer un ensemble en argument, genre $f(A)$, ce qui va renvoyer $\text{Im}(f_{|A \rightarrow O_f})$. Cependant comme ça peut porter à confusion, je préfère utiliser la notation f^* , genre $f^*(A)$. Du coup, on a

$$f^*(A) = \text{Im}(f_{|A})$$

$$f^*(I_f) = \text{Im}(f)$$

- Du coup on peut voir la notation $*$ comme un opérateur qui s'applique à la fonction nommée juste avant, et qui retourne une fonction prenant un ensemble en argument et retournant le domaine image correspondant. On a donc, au sein d'un ensemble wrapper W :

$$* = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} & \rightarrow & (\mathcal{P}(W))^{\mathcal{P}(W)} \\ f & \mapsto & f^* = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ A & \mapsto & \text{Im}_{|A \rightarrow O_f}(f) = \{y \in O_f \mid (\exists x \in A : f(x)=y)\} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

- Il y a donc différentes choses notables concernant f^* :

- $f^*(\emptyset) = \emptyset$ $(\Leftrightarrow \text{Im}(f|_{\emptyset}) = \emptyset)$
- $(f^*(B) - f^*(A)) \subseteq f^*(B - A)$ $(\Leftrightarrow (\text{Im}(f|_B) - \text{Im}(f|_A)) \subseteq \text{Im}(f|_{B-A}))$
- $(A \subseteq B) \Rightarrow (f^*(A) \subseteq f^*(B))$ $(\Leftrightarrow ((A \subseteq B) \Rightarrow \text{Im}(f|_A) \subseteq \text{Im}(f|_B)))$
- $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$ $(\Leftrightarrow \text{Im}(f|_{A \cup B}) = \text{Im}(f|_A) \cup \text{Im}(f|_B))$
- $f^*(A \cap B) \subseteq (f^*(A) \cap f^*(B))$ $(\Leftrightarrow \text{Im}(f|_{A \cap B}) \subseteq \text{Im}(f|_A) \cap \text{Im}(f|_B))$
- $f \text{ injective} \Rightarrow (f^*(A \cap B) = (f^*(A) \cap f^*(B)))$

Pour résumer :

- $D_{x:A \rightarrow B}(f(x)) = \text{domaine de définition de l'expression } f(x) \text{ par rapport à } x, \text{ en considérant une fonction d'ensemble d'entrée } A \text{ et d'ensemble de sortie } B$
 - $D_{A \rightarrow B}(f(x)) = \text{idem mais on considère implicitement que la variable est } x, \text{ plus lisible quand l'expression passée en argument ne contient qu'une seule variable car c'est univoque}$
 - $D(f(x)) = \text{idem et on considère que c'est avec les wrappers } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - $D_{A \rightarrow B}(f) = D(f|_{A \rightarrow B}) = \text{domaine de définition de la fonction } f \text{ avec restriction et co-restriction}$
 - $D(f) = \text{idem mais on considère, comme c'est une fonction passée en argument, que quand on ne précise pas les wrappers, les wrappers sont } I_f \rightarrow O_f \text{ (et non } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ comme quand on passe une expression)}$
 - $f_*(A) = D_{I_f \rightarrow A}(f) = \text{Domaine de définition de } f \text{ co-restreinte à } A$
-

- $\text{Im}_{x:A \rightarrow B}(f(x)) = \text{domaine image de l'expression } f(x) \text{ par rapport à } x, \text{ en considérant une fonction d'ensemble d'entrée } A \text{ et d'ensemble de sortie } B$
 - $\text{Im}_{A \rightarrow B}(f(x)) = \text{item mais on considère implicitement que la variable est } x, \text{ plus lisible quand l'expression passée en argument ne contient qu'une seule variable car c'est univoque}$
 - $\text{Im}(f(x)) = \text{idem et on considère que c'est avec les wrappers } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 - $\text{Im}_{A \rightarrow B}(f) = \text{Im}(f|_{A \rightarrow B})$
 - $\text{Im}(f) = \text{domaine image de la fonction } f$
 - $f^*(A) = \text{Im}_{A \rightarrow O_f}(f) = \text{Domaine image de } f \text{ restreinte à } A$
-

- $\hat{f}_{\rightarrow\{x_0\}\leftarrow} = \text{prolongement par continuité de } f \text{ en } x_0$
- $\hat{f} = \hat{f}_{\rightarrow(\Psi_{\rightarrow\leftarrow}(f))\leftarrow} = \text{prolongement par continuité de } f \text{ sur tous ses points de prolongeabilité (l'ensemble des points de prolongeabilité étant } \Psi_{\rightarrow\leftarrow}(f))$

- $f_*(\emptyset) = \emptyset$ $\left(\Leftrightarrow D(f|_{I_f \rightarrow \emptyset}) = \emptyset \right)$
 - $f_*(A - B) = f_*(A) - f_*(B)$ $\left(\Leftrightarrow D(f|_{I_f \rightarrow (B-A)}) = D(f|_{I_f \rightarrow B}) - D(f|_{I_f \rightarrow A}) \right)$
 - $A \subseteq B \Rightarrow f_*(A) \subseteq f_*(B)$ $\left(\Leftrightarrow (A \subseteq B \Rightarrow D(f|_{I_f \rightarrow A}) \subseteq D(f|_{I_f \rightarrow B})) \right)$
 - $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$ $\left(\Leftrightarrow D(f|_{I_f \rightarrow (A \cup B)}) = D(f|_{I_f \rightarrow A}) \cup D(f|_{I_f \rightarrow B}) \right)$
 - $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ $\left(\Leftrightarrow D(f|_{I_f \rightarrow (A \cap B)}) = D(f|_{I_f \rightarrow A}) \cap D(f|_{I_f \rightarrow B}) \right)$
-

- $f^*(\emptyset) = \emptyset$ $\left(\Leftrightarrow \text{Im}(f|_{\emptyset}) = \emptyset \right)$
- $(f^*(B) - f^*(A)) \subseteq f^*(B - A)$ $\left(\Leftrightarrow (\text{Im}(f|_B) - \text{Im}(f|_A)) \subseteq \text{Im}(f|_{B-A}) \right)$
- $(A \subseteq B) \Rightarrow (f^*(A) \subseteq f^*(B))$ $\left(\Leftrightarrow ((A \subseteq B) \Rightarrow \text{Im}(f|_A) \subseteq \text{Im}(f|_B)) \right)$
- $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$ $\left(\Leftrightarrow \text{Im}(f|_{A \cup B}) = \text{Im}(f|_A) \cup \text{Im}(f|_B) \right)$
- $f^*(A \cap B) \subseteq (f^*(A) \cap f^*(B))$ $\left(\Leftrightarrow \text{Im}(f|_{A \cap B}) \subseteq \text{Im}(f|_A) \cap \text{Im}(f|_B) \right)$
- $f \text{ injective} \Rightarrow (f^*(A \cap B) = (f^*(A) \cap f^*(B)))$.

Définition 18. "Fonction surjective"

$$\text{Soit } f := F^\circ \begin{pmatrix} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix}$$

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow (\forall y \in O_f, \exists x \in I_f \mid (y = f(x)))$$

Dit autrement : « Une fonction f est surjective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont AU MOINS un antécédent dans son ensemble d'entrée ».

Remarques :

- On parle de surjection ou de fonction surjective, de I_f SUR O_f (plutôt que "dans" O_f)
- L'application identité sur I_f , $\text{Id}_{I_f} = f^\circ \begin{pmatrix} I_f \rightarrow I_f \\ x \mapsto x \end{pmatrix}$, est surjective (en fait elle est même bijective)

Théorème 1. "Théorème de Cantor"

Il n'existe AUCUNE application de $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ qui soit surjective

Définition 19. "Fonction injective"

$$\text{Soit } f := F^\circ \begin{pmatrix} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix}$$

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall (x, x') \in (I_f)^2, ((f(x) = f(x')) \Leftrightarrow (x = x'))$$

Dit autrement : « Quand la fonction f est injective, si on prend 2 éléments de I_f , si leur image par f donne le même élément de O_f , alors c'est que ces 2 éléments sont le même élément ».

Dit autrement : « Une fonction f est injective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont AU PLUS un antécédent dans son ensemble d'entrée ».

Remarque :

- On parle de fonction injective ou d'injection
- $\left(f = F^\circ \begin{pmatrix} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix} \text{ strictement monotone} \right) \Leftrightarrow f \text{ injective}$

Définition 20. "Fonction bijective"

$$\text{Soit } f := F^\circ \begin{pmatrix} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) \end{pmatrix}$$

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \forall y \in O_f, (\exists! x \in I_f \mid y = f(x))$$

Dit autrement : « Une fonction f est bijective quand tous les éléments de son ensemble de sortie ont EXACTEMENT un antécédent dans son ensemble d'entrée ».

Dit autrement : « Une fonction f est bijective quand elle est surjective et injective ».

Remarques :

- L'application identité sur E , $Id_E := F^\circ \begin{pmatrix} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{pmatrix}$ est bijective
- $(f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f) \text{ injective}) \Rightarrow (f|_{I_f \rightarrow \text{Im}(f)} \text{ bijective})$, autrement dit pour toute fonction injective, si on restreint son ensemble image à son domaine image on obtient une fonction bijective

Définition 21. "Application réciproque d'une application bijective"

Soit $f \in \mathcal{F}_A(I_f \rightarrow O_f)$ bijective

f_{-1} est l'application réciproque de f

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in (I_f \times O_f), (y = f(x) \Leftrightarrow x = f_{-1}(y))$$

Dit autrement : « L'application réciproque f_{-1} d'une application bijective f est celle qui permet de défaire ce que f a fait. ».

Remarques :

- $f_{-1}(f(x)) = x$
- $f(f_{-1}(y)) = y$
- $(f_{-1})_{-1} = f$
- L'application réciproque d'une application bijective est aussi bijective
- On peut voir l'indice -1 comme un opérateur qui prend en argument une fonction bijective (ou qui est une méthode intrinsèque à l'objet fonction bijective) et qui retourne sa fonction réciproque

Définition 22. "Composition de fonction"

Soient $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$ et $g \in \mathcal{F}(O_f \rightarrow O_g)$

$$g \circ f = F^\circ \left(\begin{array}{c} I_f \rightarrow O_g \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array} \right)$$

Dit autrement : « L'opérateur \circ prend 2 fonctions définies comme ci-dessus et retourne une nouvelle fonction qui chaîne les 2 premières. Si les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions passées en paramètres ne sont pas corrects alors ça crash. ».

Remarques :

- $\forall f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f), Id_{O_f} \circ f = f \circ Id_{I_f} = f$
- L'opérateur \circ est associatif, c'est-à-dire que

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g \circ f)$$

- Si f est constante et g est constante, alors $f \circ g$ est constante
- $f \circ f$ est possible si $I_f = O_f$

- $((f \text{ surjective}) \wedge (g \text{ surjective})) \Rightarrow (f \circ g \text{ surjective})$
- $((f \text{ injective}) \wedge (g \text{ injective})) \Rightarrow (f \circ g \text{ injective})$
- $((f \text{ bijective}) \wedge (g \text{ bijective})) \Rightarrow (f \circ g \text{ bijective})$
et $(f \circ g)_{-1} = f_{-1} \circ g_{-1}$

- $((g \circ f) \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective})$
- $((g \circ f) \text{ injective}) \Rightarrow (f \text{ injective})$

- Beaucoup d'auteurs considèrent que l'opérateur puissance appliqué à une fonction correspond à la composition de fonction, genre $f^{n \in \mathbb{N}^*} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Pour ma part je définis cette opération comme retournant une fonction qui retourne l'expression de la fonction élevée à la puissance spécifiée en argument, c'est-à-dire : $f^{n \in \mathbb{N}} = F^\circ \left(\begin{array}{c} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto (f(x))^n \end{array} \right)$. Du coup la fonction retournée n'est pas forcément une application malgré le fait que ce soit une application qui lui soit passée en argument et c'est à nous de gérer cette problématique là.

- De même que pour l'opérateurs $\sum_{i \in I} (Expr(i))$ ou $\prod_{i \in I} (Expr(i))$ qui permet d'opérer de manière itérative, on a également un opérateur \bigcirc qui permet d'utiliser l'opérateur de composition de manière itérative. Il s'utilise comme ceci :

$$\bigcirc_{i \in I} (Expr(i)) \text{ , genre } \bigcirc_{i \in I} (f_i)$$

Axiome 8. "Ensemble des fonctions de E dans F "

Les applications de l'ensemble E dans l'ensemble F existe et se note $\mathcal{F}(E \rightarrow F)$

Remarques :

- Certains auteurs notent cet ensemble $\mathcal{F}(E, F)$, ou F^E
- On peut désigner l'ensembles des fonctions (respectivement, des applications) de $E \rightarrow F$ qui sont surjectives par $\mathcal{F}(E \rightarrow F)_{\rightarrow}$ (respectivement $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F)_{\rightarrow}$). C'est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E \rightarrow F)$ (respectivement de $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F)$)
- On peut désigner l'ensembles des fonctions (respectivement, des applications) de $E \rightarrow F$ qui sont injectives par $\mathcal{F}(E \rightarrow F)_{\leftarrow}$ (respectivement $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F)_{\leftarrow}$). C'est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E \rightarrow F)$ (respectivement de $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F)$)
- On peut désigner l'ensembles des fonctions (respectivement, des applications) de $E \rightarrow F$ qui sont bijectives par $\mathcal{F}(E \rightarrow F)_{\leftrightarrow}$ (respectivement $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F)_{\leftrightarrow}$). C'est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E \rightarrow F)$ (respectivement $\mathcal{F}_A(E \rightarrow F)$)
- $\forall E \neq \emptyset, \mathcal{F}_A(E \rightarrow \emptyset) = \emptyset$
- $\forall A, \text{card}(\mathcal{F}_A(\emptyset \rightarrow A)) = 1$
En effet, on a
 $\mathcal{F}_A(\emptyset \rightarrow A) = \{f_{\emptyset} = F^{\circ}(\emptyset \rightarrow A)\}$
- $\forall a, E, \text{card}(\mathcal{F}_A(E \rightarrow \{a\})) = 1$
En effet, on a
 $\mathcal{F}(E \rightarrow \{a\}) = \left\{ F^{\circ} \left(\begin{smallmatrix} E & \rightarrow & \{a\} \\ x & \mapsto & a \end{smallmatrix} \right) \right\}$
- $\forall a, A, \text{ l'application}$

$$F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\{a\} \rightarrow A) & \rightarrow & A \\ f & \mapsto & f(a) \end{array} \right)$$

est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(\{a\} \rightarrow A)$ est en bijection naturelle avec A par cette application, vu que connaître une application f de $\mathcal{F}(\{a\} \rightarrow A)$ revient à connaître $f(a) \in A$, et inversement).

- $\forall a, b, F, \text{ l'application}$

$$F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\{a, b\} \rightarrow F) & \rightarrow & F^2 \\ f & \mapsto & (f(a), f(b)) \end{array} \right)$$

est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(\{a, b\} \rightarrow F)$ est en bijection naturelle avec F^2 par cette application, vu que connaître une application f de $\mathcal{F}(\{a, b\} \rightarrow F)$ revient à connaître $(f(a), f(b)) \in F^2$, et inversement).

- $\forall E$, l'application

$$F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\}) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ f & \mapsto & (E_0 = f_*(\{0\})) \end{array} \right)$$

est bijective (autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\})$ est en bijection naturelle avec $\mathcal{P}(E)$ par cette application, vu que connaître une application f de $\mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\})$ revient à connaître $E_{0 \subseteq E}$ contenant tous les antécédents de 0 par f , (et par déduction, $E_{1 \subseteq E}$ contenant tous les antécédents de 1 par f vu que $E_1 = E - E_0 = \mathbb{C}_E(E_0)$), et inversement).

- $\forall (E \neq \emptyset), (F \neq \emptyset), \text{card}(\mathcal{F}(E \rightarrow F)) = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$

C'est-à-dire que quand on prend 2 ensembles E et F non vides, le nombre de fonction possibles de E dans F est le nombre d'éléments dans F élevé à la puissance du nombre d'éléments dans E .

C'est pourquoi certains auteurs notent $\mathcal{F}(E \rightarrow F)$ comme ceci : F^E .

Définition 23. "Somme de fonctions"

Soient $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$
 et $g \in \mathcal{F}(O_f \rightarrow O_g)$
 avec $O_f \subseteq W$ et $O_g \subseteq W$

$$f +_W g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W} (f(x) + g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right)$$

Dit autrement : « La somme, relativement à un ensemble wrapper d'arrivée W , de f et g , c'est une fonction définie sur $I_f \cap I_g$, qui à tout x associe $f(x) + g(x)$, et dont l'ensemble d'arrivée est le domaine image de l'expression $f(x) + g(x)$ en considérant $x \in (I_f \cap I_g)$ et $(f(x) + g(x)) \in W$ ».

Remarques :

- Si l'ensemble wrapper d'arrivée W n'est pas précisé, ça considère que cet ensemble est \mathbb{R} . On a donc

$$f + g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow \mathbb{R}} (f(x) + g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right)$$

Attention cependant, si on réalise cette opération avec des fonctions f et g qui n'ont pas de sorties dans \mathbb{R} , le résultat de l'opération sera donc une fonction avec un ensemble d'arrivée vide. Il faut le savoir.

- J'aimerais bien définir de manière générale l'opérateur $+_W$, mais je ne vois pas comment le faire avec une fonction étant donné qu'il me semble incorrect de considérer qu'une fonction appartenant à $\mathcal{F}(A_{\subseteq W_A} \rightarrow B_{\subseteq W_B})$ appartient également toujours à $\mathcal{F}(W_A \rightarrow W_B)$. Autrement on pourrait avoir quelque chose comme ça (avec W_I un ensemble wrapper input et W_O un ensemble wrapper output) :

$$+_{W_I \rightarrow W_O} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O))^2 & \rightarrow & \mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O) \\ (f, g) & \mapsto & f + g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W_O} (f(x) + g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Définition 24. "Différence de fonctions"

Soient $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$
 et $g \in \mathcal{F}(O_f \rightarrow O_g)$
 avec $O_f \subseteq W$ et $O_g \subseteq W$

$$f -_W g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W} (f(x) - g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) - g(x) \end{array} \right)$$

Dit autrement : « La différence, relativement à un ensemble wrapper d'arrivée W , de f et g , c'est une fonction définie sur $I_f \cap I_g$, qui à tout x associe $f(x) - g(x)$, et dont l'ensemble d'arrivée est le domaine image de l'expression $f(x) - g(x)$ en considérant $x \in (I_f \cap I_g)$ et $(f(x) - g(x)) \in W$ ».

Remarques :

- Si l'ensemble wrapper d'arrivée W n'est pas précisé, ça considère que cet ensemble est \mathbb{R} . On a donc

$$f - g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow \mathbb{R}} (f(x) - g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) - g(x) \end{array} \right)$$

Attention cependant, si on réalise cette opération avec des fonctions f et g qui n'ont pas de sorties dans \mathbb{R} , le résultat de l'opération sera donc une fonction avec un ensemble d'arrivée vide. Il faut le savoir.

- J'aimerais bien définir de manière générale l'opérateur $-_W$, mais je ne vois pas comment le faire avec une fonction étant donné qu'il me semble incorrect de considérer qu'une fonction appartenant à $\mathcal{F}(A_{\subseteq W_A} \rightarrow B_{\subseteq W_B})$ appartient également toujours à $\mathcal{F}(W_A \rightarrow W_B)$. Autrement on pourrait avoir quelque chose comme ça (avec W_I un ensemble wrapper input et W_O un ensemble wrapper output) :

$$_{W_I \rightarrow W_O}^- = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O))^2 & \rightarrow & \mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O) \\ (f, g) & \mapsto & f - g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W_O} (f(x) - g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) - g(x) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Définition 25. "Produit de fonctions"

Soient $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$

et $g \in \mathcal{F}(O_f \rightarrow O_g)$

avec $O_f \subseteq W$ et $O_g \subseteq W$

$$f \times_W g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W} (f(x) \times g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right)$$

Dit autrement : « Le produit, relativement à un ensemble wrapper d'arrivée W , de f et g , c'est une fonction définie sur $I_f \cap I_g$, qui à tout x associe $f(x) \times g(x)$, et dont l'ensemble d'arrivée est le domaine image de l'expression $f(x) \times g(x)$ en considérant $x \in (I_f \cap I_g)$ et $(f(x) \times g(x)) \in W$ ».

Remarques :

- Si l'ensemble wrapper d'arrivée W n'est pas précisé, ça considère que cet ensemble est \mathbb{R} . On a donc

$$f \times g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow \mathbb{R}} (f(x) \times g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right)$$

Attention cependant, si on réalise cette opération avec des fonctions f et g qui n'ont pas de sorties dans \mathbb{R} , le résultat de l'opération sera donc une fonction avec un ensemble d'arrivée vide. Il faut le savoir.

- J'aimerais bien définir de manière générale l'opérateur \times_W , mais je ne vois pas comment le faire avec une fonction étant donné qu'il me semble incorrect de considérer qu'une fonction appartenant à $\mathcal{F}(A_{\subseteq W_A} \rightarrow B_{\subseteq W_B})$ appartient également toujours à $\mathcal{F}(W_A \rightarrow W_B)$. Autrement on pourrait avoir quelque chose comme ça (avec W_I un ensemble wrapper input et W_O un ensemble wrapper output) :

$$\times_{W_I \rightarrow W_O} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O))^2 & \rightarrow & \mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O) \\ (f, g) & \mapsto & f \times g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W_O} (f(x) \times g(x)) \\ x & \mapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Définition 26. "Quotien de fonctions"

Soient $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$
 et $g \in \mathcal{F}(O_f \rightarrow O_g)$
 avec $O_f \subseteq W$ et $O_g \subseteq W$

$$f /_W g = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right)$$

Dit autrement : « Le quotient, relativement à un ensemble wrapper d'arrivée W , de f et g , c'est une fonction définie sur $I_f \cap I_g$, qui à tout x associe $\frac{f(x)}{g(x)}$, et dont l'ensemble d'arrivée est le domaine image de l'expression $f(x) - g(x)$ en considérant $x \in (I_f \cap I_g)$ et $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \in W$ ».

Remarques :

- Si l'ensemble wrapper d'arrivée W n'est pas précisé, ça considère que cet ensemble est \mathbb{R} . On a donc

$$\frac{f}{g} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow \mathbb{R}} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right)$$

Attention cependant, si on réalise cette opération avec des fonctions f et g qui n'ont pas de sorties dans \mathbb{R} , le résultat de l'opération sera donc une fonction avec un ensemble d'arrivée vide. Il faut le savoir.

- J'aimerais bien définir de manière générale l'opérateur $/_W$, mais je ne vois pas comment le faire avec une fonction étant donné qu'il me semble incorrect de considérer qu'une fonction appartenant à $\mathcal{F}(A_{\subseteq W_A} \rightarrow B_{\subseteq W_B})$ appartient également toujours à $\mathcal{F}(W_A \rightarrow W_B)$. Autrement on pourrait avoir quelque chose comme ça (avec W_I un ensemble wrapper input et W_O un ensemble wrapper output) :

$$\frac{f}{g} /_{W_I \rightarrow W_O} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O))^2 & \rightarrow & \mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O) \\ (f, g) & \mapsto & \frac{f}{g} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f \cap I_g & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W_O} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Définition 27. "Puissance de fonctions"

Soient $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$

et $n \in E$

avec $O_f \subseteq W$

$$f \hat{\ }_W n = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f & \rightarrow & \text{Im}_{x:I_f \rightarrow W}((f(x))^n) \\ x & \mapsto & (f(x))^n \end{array} \right)$$

Dit autrement : « La puissance, relativement à un ensemble wrapper d'arrivée W , de f , c'est une fonction définie sur I_f , qui à tout x associe $(f(x))^n$, et dont l'ensemble d'arrivée est le domaine image de l'expression $(f(x))^n$ en considérant $x \in I_f$ et $(f(x))^n \in W$ ».

Remarques :

- Si l'ensemble wrapper d'arrivée W n'est pas précisé, ça considère que cet ensemble est \mathbb{R} . On a donc

$$f^n = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f & \rightarrow & \text{Im}_{x:I_f \rightarrow \mathbb{R}}((f(x))^n) \\ x & \mapsto & (f(x))^n \end{array} \right)$$

Attention cependant, si on réalise cette opération avec des fonctions f et g qui n'ont pas de sorties dans \mathbb{R} , le résultat de l'opération sera donc une fonction avec un ensemble d'arrivée vide. Il faut le savoir.

- J'aimerais bien définir de manière générale l'opérateur $\hat{\ }_W$, mais je ne vois pas comment le faire avec une fonction étant donné qu'il me semble incorrect de considérer qu'une fonction appartenant à $\mathcal{F}(A_{\subseteq W_A} \rightarrow B_{\subseteq W_B})$ appartient également toujours à $\mathcal{F}(W_A \rightarrow W_B)$. Autrement on pourrait avoir quelque chose comme ça (avec W_I un ensemble wrapper input et W_O un ensemble wrapper output) :

$$\hat{\ }_{W_I \rightarrow W_O} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O) \times E) & \rightarrow & \mathcal{F}(W_I \rightarrow W_O) \\ (f, n) & \mapsto & f^n = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I_f & \rightarrow & \text{Im}_{x:(I_f \cap I_g) \rightarrow W_O}((f(x))^n) \\ x & \mapsto & (f(x))^n \end{array} \right) \end{array} \right)$$

1.3 Suites et familles d'éléments

Définition 28. "Suites"

On appelle une "suite" une application de $I_{\subseteq \mathbb{N}} \rightarrow O$.

Si on appelle la suite u , on a donc $u \in \mathcal{F}_A(I \rightarrow O)$, et l'image de $n \in I$, $u(n)$, se note, par convention, u_n , et s'appelle "n-ième terme de la suite u "

Remarques :

- $\mathcal{F}_A(\mathbb{N} \rightarrow O)$ (encore noté $O^{\mathbb{N}}$) désigne donc l'ensemble de toutes les suites possibles définies sur \mathbb{N} à valeur dans O .
- Il existe un opérateur $[\subseteq]$, qui signifie que l'ensemble à gauche de l'opérateur est inclus dans celui à droite de l'opérateur (comme pour l'opérateur \subseteq), mais que l'ensemble de gauche est un intervalle joint fermé. On a donc
 - ▶ $[1, 3]_{\mathbb{N}} [\subseteq] \mathbb{N}$
 - ▶ $[1, 4[_{\mathbb{N}} [\subseteq] \mathbb{N}$, car $[1, 4[_{\mathbb{N}} = [1, 3]_{\mathbb{N}}$
 - ▶ $\{1, 2, 3\} [\subseteq] \mathbb{N}$, car $\{1, 2, 3\} = [1, 3]_{\mathbb{N}}$
 - ▶ $\{1, 2, 4\} [\not\subseteq] \mathbb{N}$
- u désigne donc l'objet mathématique "suite", qui est une application, tandis que u_n désigne $u(n)$, la valeur de retour de u pour un $n \in I_u$ donné
- Certains auteurs désignent l'objet suite u comme ceci :

$$(u_n)_{n \in I_u}$$

genre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Parfois certains auteurs utilisent juste la notation (u_n) avec les parenthèses mais c'est pas très cohérent d'un point de vue "parsing".

C'est un peu comme la déclaration des fonctions. La façon la plus précise de déclarer une fonction c'est avec la syntaxe

$$f = F^\circ \left(\begin{array}{c} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto f(x) = \text{Expr}(x) \end{array} \right)$$

mais dans le cas où on ne veut pas spécifier son expression, on peut faire " $f = F^\circ(I_f \rightarrow O_f)$ " ou " $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$ " ou " $f \in (O_f)^{I_f}$ ", et dans le cas où on ne veut pas spécifier ses ensembles d'entrée et de sortie pour sous-entendre qu'ils correspondent aux domaines de définition et image de l'expression, on peut faire " $f = F^\circ(x \mapsto \text{Expr}(x))_{W_I \rightarrow W_O}$ " où W_I et W_O sont les ensembles wrapper de l'entrée et de la sortie respectivement, voire " $f = F^\circ(x \mapsto \text{Expr}(x))$ " si on a la flemme car par défaut les wrappers d'entrée et de sortie valent \mathbb{R} . Mais il y a aussi une syntaxe que certains jugent plus ergonomique qui est " $f(x_{\in I_f}) = (\text{Expr}(x))_{\in O_f}$ " qui donne toutes les infos nécessaire à la définition précise de la fonction.

Pour les suites c'est pareil, on peut utiliser les syntaxes des fonctions pour déclarer une suite, par exemple " $u = F^\circ \left(\begin{array}{c} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n = \text{Expr}(n) \end{array} \right)$ ", ou " $u(n_{\in \mathbb{N}}) = (\text{Expr}(n))_{\in \mathbb{R}}$ ",

ou alors on peut, pour un peu plus de lisibilité et de contextualisation du domaine des suites, utiliser la notation

$$u_{n \in \mathbb{N}} = (\text{expr}(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

voire " $((u_n)_{n \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ " si on veut utiliser la notation vue plus haute (bien que de mon point de vue elle ne soit pas ergonomique), et si on ne veut pas spécifier son expression, voire " $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ " si on a la maxi-flemme vu que par défaut quand l'ensemble d'arrivée n'est pas spécifié ça considère que c'est \mathbb{R} .

- Il y a des suites finies (cas où $\text{card}(I_u) \in \mathbb{N}$) et des suites infinies (cas où $\text{card}(I_u) = +\infty$).
- On peut bien-sûr créer des sous-suites ou des sur-suites à partir de suites existantes par restriction ou extension de l'ensemble de départ de ces dernières, par exemple $u' = u|_{I_{u'} \subseteq \mathbb{N}}$, et on peut la définir aussi avec la syntaxe $(u_{n_k})_{k \in I_{u'} \subseteq \mathbb{N}}$, genre $(u_{n_k})_{k \in [1,5]_{\mathbb{N}}}$ ou $(u_{n_k})_{k \in \{1, 3, 7, 42, 324\}}$ mais ces syntaxes commencent à être un peu équivoque de mon point de vue donc je préfère utiliser les syntaxes des fonctions lors de la créations de sous-suites ou de sur-suites.
- On peut bien-entendu composer les suites comme on compose les fonctions vu que les suites sont aussi des fonctions. Par exemple si on a :

$$\varphi = F^\circ \left(\begin{array}{c} K \subseteq \mathbb{N} \rightarrow I \subseteq \mathbb{N} \\ k \mapsto \varphi(k)=i \end{array} \right)$$

et

$$x = F^\circ \left(\begin{array}{c} I \rightarrow O \\ i \mapsto x_i \end{array} \right)$$

On a donc :

$$x \circ \varphi = F^\circ \left(\begin{array}{c} K \rightarrow O \\ k \mapsto x(\varphi(k))=x_{\varphi(k)}=x_{(\varphi_k)} \end{array} \right)$$

Mais certains auteurs le notent comme suit, ce qui est un peu plus lisible mais pas cohérent avec la syntaxe de départ : $x \circ \varphi = (x_{\varphi(k)})_{k \in K}$ genre $(x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ au lieu de $(x_i)_{i \in 2\mathbb{N}}$. Personnellement cette dernière syntaxe est plus contre-intuitive pour moi d'autant qu'elle porte à confusion avec la notation des uplets.

- Concernant les suites multi-indexées, (c'est-à dire disposant de plusieurs index, donc dont l'ensemble de départ est le résultat d'un produit cartésien de sous-ensembles de \mathbb{N}), par exemple $x = \mathcal{F}(I \rightarrow O)$ avec $I = J_{\subseteq \mathbb{N}} \times K_{\subseteq \mathbb{N}}$, dans la notation portant à confusion avec la notation des uplets, les auteurs préfèrent souvent noter les index comme suit : $x = (x_{j,k})_{j \in J, k \in K}$, mais personnellement j'aime beaucoup la notation $x = (x_i)_{i \in I}$ qu'on peut expliciter en $x = (x_{(j,k)})_{(j,k) \in (J \times K)}$ qui respecte la logique de la syntaxe et qui est très lisible.
- Pour conclure, j'aime bien déclarer une suite générale en faisant $u \in \mathcal{F}(I_{\subseteq \mathbb{N}} \rightarrow O)$, et déclarer explicitement en faisant $u_{i \in I} = (\text{Expr}(i))_{i \in O}$ et je réserve la notation $(u_i)_{i \in I}$ pour les familles (cf définition suivante)

Définition 29. "Famille d'éléments"

Une famille x d'éléments de l'ensemble O indexée par l'ensemble I est simplement une application de $I \rightarrow O$. C'est une autre façon d'appréhender les applications en leur appliquant la logique et la notation des suites (genre x_{42} pour $x(42)$, le fait de considérer les valeurs x_i que prend l'application plutôt que l'application elle-même, etc)

On l'instancie comme ceci (avec $f \in \mathcal{F}_A(I \rightarrow O)$) :

$$x := \text{Fam}^\circ(f)$$

ou, dans le cas où on veut générer une famille quelconque (c'est-à-dire une famille d'éléments de O indexés par I générée par une fonction quelconque) :

$$u := \text{Fam}^\circ(f_{\in \mathcal{F}_A(I \rightarrow O)}) = ((u_i)_{i \in I})_{i \in I}$$

La dernière notation est de mon point de vue la plus intuitive pour exprimer un uplet quelconque de $\text{card}(I)$ éléments de O , d'autant plus que si O n'est pas précisé, c'est considéré que c'est \mathbb{R} . Genre si je veux dire "soit l'uplet de réels $(x_1, x_2, \dots, x_{n_{\in \mathbb{N}^*}})$ ", je peux dire "soit l'uplet $((x_i)_{i \in [1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}})$ " ou "soit l'uplet $(x_i)_{i \in I}$ ", vu que la famille de réels indexée par $[1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$ est une application de $[1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ donc un n -uplet.

Remarques :

- Les familles d'éléments, c'est simplement une autre façon d'écrire et d'exprimer les applications. Ça présente 3 grands intérêts :
 1. Ça permet de se focaliser sur les valeurs de retour de l'application (les x_i) plutôt que sur l'application x elle-même
 2. Ça permet d'utiliser les notations des suites pour toute fonction, genre une fonction f définie sur un ensemble de relations d'ordre et qui retourne un ensemble, on aurait par exemple l'ensemble f_{\preceq} pour exprimer l'ensemble $f(\preceq)$
 3. Ça permet d'avoir une notation intuitive pour parler d'un uplet quelconque ou d'un élément d'un produit cartésien, par exemple "Soit $((x_i)_{i \in [1, 8]_{\mathbb{N}}}) \in E^8$ ". On pourra alors parler de x_3 pour désigner le 3^e élément de l'uplet.
- Une chose importante concernant la notation $a((x_i)_{i \in O})_{i \in I}$, le fait d'écrire "Soit une famille x d'éléments de O indexée par I " est équivalent à "Soit $x := ((x_i)_{i \in I})_{i \in O}$ " et est équivalent à "Soit $((x_i)_{i \in O})_{i \in I}$ ".

C'est-à-dire que quand on écrit "Soit $((x_i)_{i \in O})_{i \in I}$ ", ça **déclare la variable x dans le scope** ! C'est un peu contre-intuitif mais c'est comme ça que ça fonctionne. Du coup si j'écris "Soit $((x_i)_{i \in O})_{i \in I}$ ", plus tard j'ai le droit de faire $3 \cdot x_3$ par exemple (dès lors que $3 \in I$).

Cependant, si la variable x est déjà préalablement déclarée dans le scope comme étant une famille d'éléments indexée par $I = [1, 1000]_{\mathbb{N}}$ par exemple, la notation $((x_i)_{i \in I})$ va désigner cette famille en question, et la notation $((x_i)_{i \in \{1,3,42\}})$ va désigner une nouvelle famille ne contenant que x_1, x_3 et x_{42} , c'est-à-dire une application définie sur $\{1, 3, 42\} \rightarrow \{x_1, x_3, x_{42}\}$ (un peu difficile à capter au début mais très très utile).

Par exemple, si on a une suite $u := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 3 \cdot n \end{array} \right),$

On aura $((u_i)_{i \in \{2, 8, 20\}}) = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \{2, 8, 20\} & \rightarrow & \{6, 24, 60\} \\ n & \mapsto & u_n \end{array} \right)$

- Une remarque importante concernant la notation de famille $((x_i)_{i \in O})_{i \in I} : l'ensemble O spécifié pour l'appartenance des x_i peut être constant (genre O et voila), mais il peut aussi être variable en fonction de i , ce qui est ultra utile.$

Par exemple, typiquement, si on a une famille E de sous-ensembles de W , $((E_i)_{i \in \mathcal{P}(W)})_{i \in I}$ et qu'on veut déclarer une famille x d'éléments dont chaque x_i est un élément de E_i , on peut bien évidemment la déclarer en faisant $((x_i)_{i \in W})_{i \in I}$, mais si on veut restreindre plus précisément l'ensemble d'arrivée, on peut l'exprimer comme ceci : $((x_i)_{i \in E_i})_{i \in I}$

Par conséquent, quand on utilise la notation

$$((x_i)_{i \in f(i)})_{i \in I}$$

Cela correspond à la déclaration

$$\text{Soit } x := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \bigcup_{i \in I} (f(i)) \\ i & \mapsto & x_i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I \rightarrow \bigcup (f(i)) \\ i \mapsto x_i \end{array} \right)$$

(avec $f \in \mathcal{F}(I \rightarrow \mathcal{P}(W))$, c'est-à-dire que f est une fonction qui associe à chaque élément de I un ensemble inclus dans l'ensemble wrapper W considéré)

- Les suites sont donc un cas particulier de famille d'éléments indexée par un sous-ensemble de \mathbb{N}

- Les n -uplets sont également un cas particulier de famille d'éléments indexée par un ensemble $[1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$, de même que les ∞ -uplets sont un cas particulier de famille d'éléments indexée par \mathbb{N}^*

On peut donc déclarer des uplets quelconques en utilisant les notations suivantes (avec $I = [1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$ s'il est question d'un n -uplet, ou $I = [1, +\infty[_{\mathbb{N}}$ s'il est question d'un ∞ -uplet) :

$$\text{Soit } x \in \left(\prod_{i \in I} (E_i) \right)$$

ou :

$$\text{Soit } ((x_i)_{i \in I}) \in \left(\prod_{i \in I} (E_i) \right)$$

ou, avec la notation $S4M$:

$$\text{Soit } ((x_i)_{i \in E_i})_{i \in I}$$

- De même qu'une relation binaire est une fonction, une famille d'éléments est également une fonction (une application pour être précis), cependant on les instancie avec la fonction Fam° parce que ça permet qu'il n'y ai pas d'ambiguïté sur les notations avec indice. En effet, on a vu qu'une application bijective f dont on affublait l'indice -1 correspondant à l'application réciproque de f , c'est-à-dire f_{-1} . Or si l'on a une famille $((x_i)_{i \in \mathbb{Z}})_{i \in \mathbb{O}}$, alors x_{-1} peut aussi bien désigner $x(-1)$ que l'application réciproque de x dans le cas où cette dernière est bijective.

Ainsi, si on a une application bijective f , alors f_{-1} désignera l'application réciproque de f sauf si c'est une famille d'éléments (c'est-à-dire un objet mathématique instancié par Fam° ou par la notation $S4M$ de familles) définie en -1 auquel cas ce sera $f(-1)$.

- Du coup pour résumer l'utilisation des notations de famille d'éléments pour une suite, si on a une suite $u := F^\circ \left(\begin{smallmatrix} I_{\subseteq \mathbb{N}} & \rightarrow O \\ i & \mapsto u_i \end{smallmatrix} \right)$, alors :
 - u désigne la suite en elle-même
 - u_k désigne le k -ième terme de la suite
 - \underline{u} désigne l'uplet contenant tous les termes de la suite u ordonnés par index
 - $((u_i)_{i \in I})$ désigne aussi la suite en elle-même, on a $u = ((u_i)_{i \in I})$
 - $((u_i)_{i \in \{1, 3, 42\}})$ désigne $u|_{\{1, 3, 42\}}$

- Une famille qui contient tous les éléments d'un ensemble E en un seul exemplaire est dite "**famille canoniquement associée à E** ".
- Il y a une notation de flemmard où, quand on ne précise pas de borne de l'opérateur itératif $(\sum, \prod, \bigcup, \bigcap, \dots)$, alors ça considère que l'opération se fait sur tout l'ensemble de départ de la famille dont il est question dans l'expression dès lors que la famille et son index sont univoque dans l'expression, genre " $\sum(x_i)$ " où un parsing comprend que x , déclaré dans le scope, est bien une famille d'éléments, qu'aucun i n'est déclaré dans le scope et qu'aucune borne n'est spécifiée. Cette notation est équivalente à " $\sum(x)$ " qui est un peu moins lisible mais moins sujette à conflit. Personnellement je préfère cette dernière.
- Concernant les opérateurs itératifs $(\sum, \prod, \bigcup, \bigcap, \dots)$, quand on leur passe un objet sans préciser de bornes, si c'est un ensemble, alors ça va opérer tous les éléments de l'ensemble dans un ordre aléatoire. Si l'ensemble est ordonné, alors ça va opérer dans l'ordre spécifié. On peut donc faire :

$\sum(u)$ qui somme tous les termes de la suite

$\bigcup(X)$ qui réunie tous les éléments contenus dans X

$\sum(E)$ qui est la somme de tous les éléments de E

...

- De la même manière que dans une déclaration de fonction, $f := F^\circ \left(\begin{smallmatrix} I_f \rightarrow O_f \\ x \mapsto 3x \end{smallmatrix} \right)$, dans l'expression de x on ne précise pas l'ensemble auquel appartient x vu que dans la syntaxe de la définition, on considère d'emblée que c'est un élément de I_f , dans le cadre d'une définition de fonction définie sur un produit cartésien, genre $g := F^\circ \left(\begin{smallmatrix} E^n \rightarrow O_f \\ x \mapsto 3x \end{smallmatrix} \right)$, si on veut expliciter le n -uplet en entrée, on pourra utiliser la notation de n -uplet comme ça :

$$g := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} E^n & \rightarrow & O_f \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & 3 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right)$$

de même que comme ça :

$$g := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} E^n & \mapsto & O_f \\ x = ((x_i)_{i \in [1, n]_{\mathbb{N}}}) & \mapsto & 3 \cdot x \end{array} \right)$$

On ne précise pas à quel ensemble appartiennent les éléments de la famille mais comme on est dans le cadre d'une déclaration de fonction, ça considère d'emblée que le n -uplet est un élément de l'ensemble de départ de la fonction, et non un ensemble de réels comme c'est le cas en situation habituelle.

- Il est possible de générer un ensemble à partir d'une famille d'éléments x , il suffit de faire $\text{Im}(x)$, et ça supprimera les doublons.
- Il existe un opérateur unaire $\underline{}$ (c'est-à-dire "underline", genre f) qui prend en argument une fonction $f \in \mathcal{F}(I_f \rightarrow O_f)$ et qui retourne un uplet contenant tous les éléments de $\text{Im}(f)$, ordonnés suivant leur antécédent. Si l'ensemble $I(f)$ n'est pas ordonné, l'ordre des éléments dans l'uplet est aléatoire.

C'est donc un moyen pratique pour ré-indexer une suite, par exemple si on a

$$u := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} [3, 7]_{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{pmatrix} (n=3) & : & 42 \\ (n \neq 3) & : & u_n + 8 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

c'est-à-dire, dit autrement, $\left(u_{n \in [3, 7]_{\mathbb{N}}} \right) := \left(\begin{smallmatrix} (n=3):42 \\ (n \neq 3):(u_n+8) \end{smallmatrix} \right)_{\in \mathbb{N}}$

$$\text{alors on a } \underline{u} = (42, 50, 58, 66, 74) = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} [1, 5]_{\mathbb{N}} & \rightarrow & \{42, 50, 58, 66, 74\} \\ n & \mapsto & \begin{pmatrix} (n=1) & : & 42 \\ (n \neq 1) & : & (u_n + 8) \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$\text{Enfin, si on a par exemple une fonction } f := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} [1, 5]_{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (3 \cdot x - \cos(\pi x)) \end{array} \right),$$

et bien on aura $\underline{f} = f = (4, 5, 10, 11, 16)$

Définition 30. *"Famille d'ensembles"*

On a parlé des familles d'éléments, les éléments peuvent également être des ensembles. Il s'agit juste d'un cas particulier de famille d'éléments où les éléments sont des ensembles. On pourrait imaginer une famille de sous-ensembles de W avec I un ensemble quelconque :

$$\left((E_i)_{i \in P(W)} \right)_{i \in I}$$

On est plus ou moins obligé de définir les ensembles en question par rapport à un ensemble générique W parce qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles. Beaucoup d'auteurs ne précisent pas l'ensemble W dans la déclaration, un peu pour dire que ça pourrait être n'importe quel ensemble ou n'importe quels objets mathématiques mais ça contredit la règle plus haut qui dit qu'en l'absence de précision de l'ensemble de sortie, on considère que c'est \mathbb{R} , et le but est d'avoir une syntaxe univoque pour un plus large panel de circonstance possibles, donc si possible préciser W .

Axiome 9. *"Axiome du choix"*

Soient I un ensemble infini

et $\left((E_i)_{i \in P(W)} \right)_{i \in I}$ une famille infinie d'ensembles.

$$(\forall i \in I, E_i \neq \emptyset) \implies \left(\prod_{i \in I} (E_i) \neq \emptyset \right)$$

Dit autrement : « Si la famille d'ensembles ne compte aucun ensemble vide, alors le produit cartésien de tous ses ensembles n'est pas \emptyset . ».

Dit autrement : « Plus généralement, il est possible de construire des ensembles en répétant une infinité de fois une action de choix, même non spécifiée explicitement »

Dit autrement :

$$\forall X, (X \neq \emptyset) \implies \left(\exists f \in \mathcal{F}_A \left(X \rightarrow \bigcup (X) \right) \mid (\forall A \in X, f(A) \in A) \right)$$

C'est un peu évident en soi mais c'est un axiome qui permet de trancher le cas où on applique le "choix" (ici le produit cartésien) sur un ensemble qui contient une infinité d'ensembles.

Définition 31. "Recouvrement d'un ensemble"

Soient E un ensemble

et $P \subseteq \mathcal{P}(E)$

P est un recouvrement de E

\Longleftrightarrow

$$(\forall e \in P, e \neq \emptyset) \wedge \left(\bigcup (P) = E \right)$$

Dit autrement : Un recouvrement d'un ensemble E est un ensemble contenant des ensembles non vides dont la réunion donne E »

Remarques :

- Certains auteurs définissent le recouvrement d'un ensemble E , non pas comme un ensemble P , mais comme une famille d'ensembles $\left((P_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$ avec $I = [1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$, qui est donc une famille de n sous-ensembles non vides de E tels que $\bigcup_{i \in I} (P_i) = E$.

En vrai c'est assez équivalent si ce n'est qu'il ne s'agit pas du même objet mathématique. Si on avait la famille P et qu'on voulait coller à la première définition, on devrait plutôt dire que $\text{Im}(P)$ est un recouvrement de E .

Leur définition serait donc la suivante :

Soient E un ensemble

et $I := [1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$

et $\left((P_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$

P est un recouvrement de E

\Longleftrightarrow

$$(\forall i \in I, (P_i \neq \emptyset)) \wedge \left(\bigcup_{i \in I} (P_i) = E \right)$$

- Certains autres auteurs, considèrent la définition de la remarque ci-dessus, mais étendent même en considérant que la réunion peut être E , mais doit surtout **contenir** E (et peut donc être un ensemble plus large que E). C'est un peu plus logique avec le terme de "recouvrement", personnellement je préfère cette définition mais ça ne semble pas être la définition majoritaire.

Leur définition serait donc la suivante :

Soient W un ensemble (wrapper)

et $E \subseteq W$

et $I := [1, n_{\in \mathbb{N}^}]_{\mathbb{N}}$*

et $\left((P_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$

P est un recouvrement de E

\Longleftrightarrow

$$(\forall i \in I, (P_i \neq \emptyset)) \wedge \left(E \subseteq \bigcup_{i \in I} (P_i) \right)$$

Définition 32. "Partition d'un ensemble"

Soient E un ensemble

et $P \subseteq \mathcal{P}(E)$

P est une partition de E

\Longleftrightarrow

$$\left(\forall (e_1, e_2) \in (P^2)_{\neq}, (e_1 \cap e_2 = \emptyset) \right) \wedge (\forall e \in P, e \neq \emptyset) \wedge \left(\bigcup (P) = E \right)$$

Dit autrement :

P est une partition de E

\Longleftrightarrow

$$(\forall (e_1, e_2) \in P^2, (e_1 \neq e_2) \Leftrightarrow (e_1 \cap e_2 = \emptyset)) \wedge (\forall e \in P, e \neq \emptyset) \wedge \left(\bigcup (P) = E \right)$$

Dit autrement : « Une partition d'un ensemble E est un ensemble contenant des ensembles non vides et tous disjoints dont la réunion donne E ».

Dit autrement : « C'est un recouvrement de E mais dont les ensembles contenus dedans sont tous disjoints ».

Remarques :

- Certains auteurs définissent la partition d'un ensemble E , non pas comme un ensemble P , mais comme une famille d'ensembles $\left((P_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$ avec $I = [1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$, qui est une famille de n sous-ensembles disjoints et non vides de E tels que $\bigcup_{i \in I} (P_i) = E$.

En vrai c'est assez équivalent si ce n'est qu'il ne s'agit pas du même objet mathématique. Si on avait la famille P et qu'on voulait coller à la première définition, on devrait plutôt dire que $\text{Im}(P)$ est une partition de E .

Leur définition serait donc la suivante :

Soient E un ensemble

et $I := [1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$

et $\left((P_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$

P est une partition de E

\Longleftrightarrow

$$(\forall i \in I, (P_i \neq \emptyset)) \wedge (\forall (i_1, i_2) \in I_{\neq}^2, (P_{i_1} \cap P_{i_2} = \emptyset)) \wedge \left(\bigcup_{i \in I} (P_i) = E \right)$$

Théorème 2. "Bijection du générateur d'application caractéristique de $A_{\subseteq E}$ "
 Soit E un ensemble

$$\Gamma_{\mathcal{X}_E} := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{F}_A(E \rightarrow \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \in A : 1 \\ x \notin A : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \end{array} \right) \text{ est bijective}$$

Dit autrement : « Soient un ensemble E , un ensemble $A_{\subseteq E}$ et une fonction $\mathcal{X}_{(A,E)}$ (qu'on pourrait appeler "isInA"), qui s'appelle la "fonction caractéristique de A par rapport à E ", qui prend un élément de E et dit si celui-ci est aussi dans A . Et bien la fonction qui permet de prendre cet ensemble $A_{\subseteq E}$ quelconque pour lui associer son application caractéristique, elle est bijective ».

Dit autrement : « Il n'y a qu'une seule application caractéristique pour chaque sous-ensemble de E , et il n'y a qu'un seul sous-ensemble de E pour chaque application caractéristique possible ».

Dit autrement :

$$\forall E, F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{F}_A(E \rightarrow \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \in A : 1 \\ x \notin A : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \end{array} \right) \in \mathcal{F}_A(\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}_A(E \rightarrow \{0,1\}))_{\leftrightarrow}$$

Remarque :

- Le fait que $\Gamma_{\mathcal{X}_E}$ soit bijective fait qu'il y a une bijection naturelle entre $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F}_A(E \rightarrow \{0,1\})$. Connaître $A \in \mathcal{P}(E)$ revient à connaître la fonction caractéristique de A , $\mathcal{X}_{(A,E)}$
- La fonction caractéristique d'un ensemble A par rapport à un ensemble E est donc :

$$\mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} (x \in A) : 1 \\ (x \notin A) : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Cette fonction $\mathcal{X}_{(A,E)}$ est donc équivalente à l'ensemble $A_{\subseteq E}$

1.4 Lois de composition

Définition 33. "Loi de composition sur un ensemble C "

$$\star \text{ est une loi de composition sur } C \iff \star \in \mathcal{F}_A((A \times_f B) \rightarrow C_{\in\{A,B\}})$$

Dit autrement : « Une loi de composition sur C c'est une fonction de $(A \times_f B) \rightarrow C$ où C est, soit A , soit B »

Dit autrement : « Une loi de composition sur A (respectivement B) c'est une fonction de $(A \times_f B) \rightarrow A$ (respectivement de $(A \times_f B) \rightarrow B$ ».

Dit autrement : « C'est un opérateur binaire, tout simplement, qui prend un élément d'un ensemble, un autre élément d'un autre ensemble et qui renvoie en conséquence un 3^e élément. Ce 3^e élément est soit systématiquement issu du premier ensemble, soit systématiquement issu du second. Du coup on peut le noter classiquement comme ça " $\star(a_{\in A}, b_{\in B})$ ", mais on peut aussi le noter comme un opérateur binaire " $a_{\in A} \star b_{\in B}$ " ».

Remarques :

- La définition utilise le produit cartésien fondamental \times_f plutôt que le produit cartésien fusionnant \times parce qu'une LCI est un opérateur binaire et prend donc en argument des couples et non des uplets généraux. Par exemple, si on utilisait le produit cartésien fusionnant pour une LCI $\star \in \mathcal{F}_A(A \times B \rightarrow A)$ avec $A = A_l \times A_r$ et $B = B_l \times B_r$, alors vu que A serait un ensemble de couples $((a_1)_{\in A_l}, (a_2)_{\in A_r})$ et B un ensemble de couples $((b_1)_{\in B_l}, (b_2)_{\in B_r})$, le produit cartésien fusionnant $A \times B$ serait un ensemble de quadruplets $((a_1)_{\in A_l}, (a_2)_{\in A_r}, (b_1)_{\in B_l}, (b_2)_{\in B_r})$ et non un ensemble de couples de couples $((a_1)_{\in A_l}, (a_2)_{\in A_r}), ((b_1)_{\in B_l}, (b_2)_{\in B_r})$. Or, une LCI prend en arguments un couple d'éléments quels qu'ils soient, et non un quadruplet d'éléments, d'où la nécessité d'utiliser le produit cartésien fondamental.
- L'ensemble qui reste le même, (par exemple A si $\star \in \mathcal{F}_A((A \times B) \rightarrow A)$, B si $\star \in \mathcal{F}_A((A \times B) \rightarrow B)$) est appelé **ensemble de stabilité de la loi de composition**.
- Si $A = B$, c'est-à-dire si $\star \in \mathcal{F}_A(A^2 \rightarrow A)$, on parle de **loi de composition interne** sur A , abrégée LCI sur A .

- Si $A \neq B$, c'est-à-dire si $\star \in \mathcal{F}_A((A \times B) \rightarrow A)$ (respectivement $\star \in \mathcal{F}_A((A \times B) \rightarrow B)$) avec $A \neq B$, on parle de **loi de composition externe** sur A (respectivement sur B), abrégée LCE sur A , respectivement sur B
- On peut citer comme exemple de lois de compositions internes les applications "+" et "×" sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , ou aussi \cup et \cap sur $\mathcal{P}(E)$.
- Il y a une utilisation ultra pratique des LCI, un peu difficile à comprendre au premier abord mais très importante au demeurant, c'est qu'avec une LCI \star sur un ensemble E , on peut toujours construire une LCI \star_F sur $\mathcal{F}_A(I \rightarrow E)$.

Cela est dû à une feature des fonctions qui est que quand on a une fonction f et une fonction g , $(f + g)$ renvoie une fonction qui à tout x associe $f(x) + g(x)$, et ça fonctionne avec n'importe quel type d'opérateur, pour peu que la méthode de l'opérateur soit définie au sein des objets de l'ensemble d'arrivée des fonctions utilisées dans l'expression.

En l'occurrence, quand on a une expression $f \star g$, si la fonction \star est définie sur un ensemble de fonctions, genre $\mathcal{F}(I \rightarrow O)$, alors ça va opérer normalement en utilisant l'opérateur binaire \star , donc renvoyer $\star(f, g)$, en revanche si ce n'est pas le cas, alors ça utilisera la feature des fonctions qui renverra la nouvelle fonction $F^\circ \left(\begin{smallmatrix} I \rightarrow O \\ x \mapsto f(x) \star g(x) \end{smallmatrix} \right)$. C'est ce qui permet de trancher les ambiguïtés.

Par exemple, si on a une LCI $\star := F^\circ \left(\begin{smallmatrix} E^2 \rightarrow E \\ (a, b) \mapsto \star(a, b) \end{smallmatrix} \right)$,
et I un ensemble quelconque,
on pourrait créer une LCI

$$\star_F := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(I \rightarrow E))^2 & \rightarrow & \mathcal{F}(I \rightarrow E) \\ (f, g) & \mapsto & f \star_F g = f \star g = F^\circ \left(\begin{smallmatrix} I \rightarrow E \\ x \mapsto f(x) \star g(x) \end{smallmatrix} \right) \end{array} \right)$$

En gros c'est la LCI \star appliquée aux 2 fonctions.

Il y a beaucoup d'auteurs qui ne changent même pas le nom de la LCI, genre qui définissent \star comme on vient de le faire et puis qui disent que "par construction générale, \star est aussi une LCI sur $\mathcal{F}_A(I \rightarrow E)$ " vu qu'on a le droit d'écrire $f \star g$, cependant cette notation n'est pas une opération de f et g mais une feature particulière des fonctions qui font que quand on écrit ça, le "parseur" le traduit en une déclaration d'une nouvelle fonction mettant en jeu $f(x) \star g(x)$, donc personnellement je préfère nommer la LCI différemment vu qu'il ne s'agit pas du même objet mathématique. On verra plus tard des situations où cette technique peut être mise en pratique.

Définition 34. "Ensemble stable pour une LCI donnée"

Soit \star une LCI sur E ,

$$A_{\subseteq E} \text{ stable pour la LCI } \star \iff \forall (a, b) \in A^2, ((a \star b) \in A)$$

Dit autrement : « Un ensemble est stable pour une LCI donnée quand la LCI appliquée à 2 éléments de cet ensemble donne systématiquement un résultat dans ce même ensemble ».

Dit autrement :

$$A_{\subseteq E} \text{ stable pour la LCI } \star \iff \text{Im}(\star|_{A^2 \rightarrow E}) \subseteq A$$

Dit autrement : « Un ensemble A est stable pour une LCI donnée quand la LCI restreinte à cet ensemble a son domaine image inclus dans ce même ensemble ».

Remarques :

- Quand $A_{\subseteq E}$ est stable pour \star (LCI sur E), la LCI restreinte sur A^2 et co-restreinte sur A , $\star|_{A^2 \rightarrow A}$, est appelée "LCI sur E induite sur A "
- Une LCI induite est généralement notée de la même manière que la LCI initiale, ici \star , mais c'est la maxi-galère parce qu'on ne parle pourtant pas du même objet et le fait de désigner par le même identifiant 2 objets distincts est le meilleur moyen de plus savoir où on habite. Le plus rigoureux et ergonomique selon moi est de la noter en cohérence avec les notations / opérateurs de restriction de fonctions, à savoir $\star|_{A^2 \rightarrow A}$, ou bien \star_A pourquoi pas.
- Du coup, si on considère la LCI sur \mathbb{C} , $+$, avec $+$ = $F^\circ \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & z_1 + z_2 \end{smallmatrix} \right)$, on a \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z} et \mathbb{N} qui sont stables par $+$. Même chose pour \times = $F^\circ \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & z_1 \times z_2 \end{smallmatrix} \right)$
- De même, en considérant les LCI \cup et \cap sur $\mathcal{P}(E)$, E étant un ensemble quelconque, si on prend un ensemble $(E')_{\subseteq E}$, et bien l'ensemble $\mathcal{P}(E')$, sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$, est stable pour \cup de même que pour \cap .
- De même que, quand on a une fonction $f = F^\circ \left(\begin{smallmatrix} I_f & \rightarrow & O_f \\ x & \mapsto & f(x) \end{smallmatrix} \right)$ et un ensemble A , certains auteurs notent $f(A)$ le domaine image de $f|_A$ (et que je préfère noter $\text{Im}(f|_A)$ ou $f^*(A)$), on peut noter le domaine image d'une LCI $\star \in \mathcal{F}_A(E^2 \rightarrow E)$ restreinte comme ceci :

$$A \star B = \text{Im}(\star|_{(A \times B) \rightarrow E}) = \star^*(A \times B)$$

- Enfin, concernant la définition des lois de compositions de manière générale, et notamment les LCI, la définition officielle d'une LCI sur E , par exemple \star , c'est une application de E^2 vers E . Seulement il est possible d'utiliser cette LCI sur tout sous-ensemble $E' \subseteq E$ dès lors que ce sont des ensembles stables pour \star . Mais alors il est incorrect de dire que \star est une LCI sur E' , c'est $\star|_{(E')^2 \rightarrow E'}$ qui l'est. Ça induit des notations lourdingues et une utilisation absolument pas ergonomique, ou alors des non-dits comme expliqué ci-dessus, où on va utiliser la même LCI mais sous-entendre que celle-ci est restreinte et corestreinte au sous-ensemble mais c'est crado.

Par conséquent on va adapter un peu la définition d'une LCI sur E , en disant que c'est une application de $W^2 \rightarrow W$ avec E stable pour \star .

De manière formelle, on aura donc :

$$\begin{aligned} & \star \text{ est une loi de composition interne sur } E \\ & \iff \\ & \left(\star \in \mathcal{F}_A \left((W_E)^2 \rightarrow W_E \right) \right) \wedge (E \subseteq W_E) \wedge (\forall (a, b) \in E^2, ((a * b) \in E)) \end{aligned}$$

Définition 35. "LCI produit de deux LCI"

Soient E et F deux ensembles, $\star_E \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow E)$ et $\star_F \in \mathcal{F}(F^2 \rightarrow F)$

La LCI produit des LCI \star_E et \star_F est : (attention ici il est question de produit cartésien fondamental noté \times_f et de produit cartésien fusionnant noté \times) :

$$\star_\Pi = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (E \times F) \times_f (E \times F) & \rightarrow & (E \times F) \\ ((a_1, a_2), (a_3, a_4)) & \mapsto & (a_1 \star_E a_2, b_1 \star_F b_2) \end{array} \right)$$

Dit autrement : « Soient E et F deux ensembles, \star_E une LCI sur E et \star_F une LCI sur F . La LCI produit de \star_E et \star_F est une LCI sur $(E \times F)$, qui prend 2 couples $(a_{\in E}, b_{\in F})$ et qui retourne un couple $(c_{\in E}, d_{\in F})$ où c est le résultat de l'opération des 2 éléments de E par la LCI sur E et d est le résultat de l'opération des 2 éléments de F par la LCI sur F ».

Définition 36. "LCI produit de $n_{\in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}}$ LCI"

Soient W un ensemble

et $n \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}$,

et $I := [1, n]_{\mathbb{N}}$

et $E := \left((E_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de W

et $\star := \left((\star_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$ une famille de LCI sur chaque ensemble de E spécifiquement

La LCI produit des LCI de \star est : (attention ici il est question de produit cartésien fondamental noté \times_f et de produit cartésien fusionnant utilisé par l'opérateur \prod) :

$$\star_\Pi = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \prod (E_i) \times_f \prod (E_i) & \rightarrow & \prod (E_i) \\ ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) & \mapsto & (x_i \star_i y_i)_{i \in I} \end{array} \right)$$

Dit autrement :

Soient W un ensemble

et $n \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}$,

et $I := [1, n]_{\mathbb{N}}$

et $E := \left((E_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de W

et $\star := \left((\star_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$ une famille de LCI sur chaque ensemble de E spécifiquement

La LCI produit des LCI de \star est : (attention ici il est question de produit cartésien fondamental noté \times_f et de produit cartésien fusionnant utilisé par l'opérateur \prod) :

$$\star_\Pi = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \times_f (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) & \rightarrow & (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \mapsto & ((x_1 \star_1 y_1), \dots, (x_n \star_n y_n)) \end{array} \right)$$

Dit autrement : « Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille de $n \geq 2$ ensembles et $((\star_i)_{i \in I})$ une famille de LCI sur chaque ensemble de la famille précédente. La LCI produit des LCI de cette dernière est une LCI sur $\prod (E_i)$, qui prend 2 n -uplets de $\prod (E_i)$ et qui retourne un n -uplet de $\prod (E_i)$ où chaque élément de ce dernier est le résultat de l'opération des 2 éléments de chaque E_i par la LCI sur E_i . ».

Remarques :

- Du coup $((x_i)_{i \in I})_{i \in I} \star_{\Pi} ((y_i)_{i \in I})_{i \in I} = ((x_i \star_i y_i)_{i \in I})_{i \in I}$
- Dans la famille de LCI sur laquelle on crée la LCI produit, il peut y avoir plusieurs fois la même LCI. Par exemple on peut faire une LCI produit de $n \in [2, +\infty[$ fois la même LCI, genre si on a un ensemble E et \star une LCI sur E , on peut faire une LCI produit de \star et \star qui donnera

$$\star_{\Pi} = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} (E^2) \times_f (E^2) & \rightarrow & E^2 \\ ((a_1, b_1), (a_2, b_2)) & \mapsto & (a_1 \star a_2, b_1 \star b_2) \end{array} \right)$$

De manière générale, la LCI produit sur n LCI \star donnera tout simplement, avec $I = [1, n]_{\mathbb{N}}$

$$\star_{\Pi} = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} (E^n) \times_f (E^n) & \rightarrow & E^n \\ ((x_i)_{i \in I}), ((y_i)_{i \in I}) & \mapsto & ((x_i \star y_i)_{i \in I}) \end{array} \right)$$

Ça veut dire qu'on aura $((x_i)_{i \in I})_{i \in E} \star_{\Pi} ((y_i)_{i \in I})_{i \in E} = ((x_i \star y_i)_{i \in I})_{i \in E}$

- Un truc intéressant que je me permet de redire : si on a un ensemble E et \star une LCI sur E , alors l'ensemble $\mathcal{F}(I \rightarrow E)$ dispose d'une LCI \star_F sur celui-ci :

$$\star_F = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(I \rightarrow E) \times_f \mathcal{F}(I \rightarrow E) & \rightarrow & \mathcal{F}(I \rightarrow E) \\ (f, g) & \mapsto & f \star_F g = f \star g = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} I \rightarrow E \\ x \mapsto f(x) \star g(x) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Définition 37. "Associativité d'une LCI"

Soient \star une LCI sur un ensemble E

$$\star \text{ associative} \iff \forall (a, b, c) \in E^3, (a \star b) \star c = a \star (b \star c) = a \star b \star c$$

Remarques :

- Les LCI $+$ et \times sur \mathbb{C} , ainsi que \cup et \cap sur un ensemble wrapper W sont associatives
- Quand on a une LCI \star sur un ensemble E qui n'est pas associative, alors pour chaque $a \in E$ on peut créer une suite $c \in \mathcal{F}(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ qui prend en input un nombre d'opérations mettant en jeu a (c'est-à-dire le nombre de fois -1 où a est présent dans le calcul), et qui retourne le nombre de résultats "à priori" distincts en fonction des possibilités de placement des parenthèses. Concrètement, pour $n = 0$, on a $c_n = c_0 = 1$ vu que notre calcul est a . Pour $n = 1$, on a $c_n = c_1 = 1$ vu que notre calcul est $a \star a$, pour $n = 2$, on a $c_n = c_2 = 2$ vu que notre calcul est $a \star a \star a$ donc les parenthèses peuvent se placer suivant $(a \star a) \star a$ ou $a \star (a \star a)$, pour $n = 3$ on a $c_n = c_3 = 5$, etc.

L'uplet \underline{c} est ce qu'on appelle **les nombres de Catalan**.

On a $\underline{c} = (1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots)$

Définition 38. "Commutativité d'une LCI"

Soient \star une LCI sur un ensemble E

$$\star \text{ commutative} \iff \forall (a, b) \in E^2, a \star b = b \star a$$

Remarque :

- les LCI $+$ et \times sur \mathbb{C} , ainsi que \cup et \cap sur un ensemble wrapper W sont commutatives

Définition 39. "Élément neutre à gauche pour une LCI sur un ensemble"

Soient \star une LCI sur un ensemble E

et $e \in E$

$$e \text{ est l'élément neutre à gauche pour } \star \iff \forall a \in E, (e \star a = a)$$

Dit autrement : « C'est l'élément de E tel que quand on l'opère avec un autre élément, l'élément neutre à gauche, ça donne toujours cet autre élément. Il est neutre dans le sens où il n'altère aucun élément de E par la LCI. Il n'existe pas forcément pour la LCI en question. Certains disent qu'une LCI qui dispose d'un élément neutre à gauche dans son ensemble de stabilité qu'elle est **unifère à gauche**. ».

Définition 40. "Élément neutre à droite pour une LCI sur un ensemble"

Soient \star une LCI sur un ensemble E

et $e \in E$

$$e \text{ est l'élément neutre à droite pour } \star \iff \forall a \in E, (a \star e = a)$$

Dit autrement : « C'est un élément de E tel que quand on l'opère avec un autre élément, l'élément neutre à droite, ça donne toujours cet autre élément. Il est neutre dans le sens où il n'altère aucun élément de E par la LCI. Il n'existe pas forcément pour la LCI en question. Certains disent qu'une LCI qui dispose d'un élément neutre à droite dans son ensemble de stabilité qu'elle est **unifère à droite**. ».

Définition 41. "Élément neutre pour une LCI sur un ensemble"

Soient \star une LCI sur un ensemble E

et $e \in E$

$$e \text{ est l'élément neutre de } \star \iff \forall a \in E, (a \star e = e \star a = a)$$

Dit autrement :

Soient \star une LCI sur un ensemble E

et $e \in E$

$$e \text{ est l'élément neutre de } \star$$

$$\iff$$

$$(e \text{ est un élément neutre à gauche de } \star) \wedge (e \text{ est un élément neutre à droite de } \star)$$

Dit autrement : « C'est un élément de E tel que quand on l'opère avec un autre élément, ça donne toujours cet autre élément. Il est neutre dans le sens où il n'altère aucun élément de E par la LCI. Il n'existe pas forcément pour la LCI en question. Certains disent qu'une LCI qui dispose d'un élément neutre dans son ensemble de stabilité qu'elle est **unifère**. ».

Remarques :

- L'élément neutre de la LCI $+$ sur \mathbb{C} est 0
- L'élément neutre de la LCI \times sur \mathbb{C} est 1
- L'élément neutre de la LCI \cup sur un ensemble $\mathcal{P}(E)$ est \emptyset
- L'élément neutre de la LCI \cap sur un ensemble $\mathcal{P}(E)$ est $\mathcal{P}(E)$
- S'il y a un élément neutre pour une LCI, alors il est unique
- Si pour une LCI, il y a un élément neutre à gauche et un élément neutre à droite, alors ils sont forcément égaux, constituant donc l'élément neutre pour la LCI

Définition 42. "Élément inversible à gauche pour une LCI sur un ensemble"

Soient \star une LCI sur un ensemble E admettant un élément neutre
et $e \in E$ l'élément neutre pour \star

$$a \in E \text{ est un élément inversible à gauche pour } \star \Leftrightarrow (\exists a' \in E \mid (a' \star a = e))$$

Dit autrement : « Un élément est inversible à gauche pour une LCI donnée quand on peut l'opérer avec un autre élément de l'ensemble, placé à gauche, pour obtenir l'élément neutre (par exemple pour la LCI $+$ sur \mathbb{R} , on a 42 qui est inversible à gauche car on a -42 dans \mathbb{R} qui est tel que $(-42) + 42 = 0$)

L'élément a' est appelé **élément inverse à gauche de a par \star** , ou encore **élément symétrique à gauche de a par \star** , ».

Dit autrement : « Un élément est inversible à gauche pour une LCI ssi il admet un élément inverse à gauche par la LCI ».

Définition 43. "Élément inversible à droite pour une LCI sur un ensemble"

Soient \star une LCI sur un ensemble E admettant un élément neutre
et $e \in E$ l'élément neutre pour \star

$$a \in E \text{ est un élément inversible à droite pour } \star \Leftrightarrow (\exists a' \in E \mid (a \star a' = e))$$

Dit autrement : « Un élément est inversible à droite pour une LCI donnée quand on peut l'opérer avec un autre élément de l'ensemble, placé à droite, pour obtenir l'élément neutre (par exemple pour la LCI $+$ sur \mathbb{R} , on a 42 qui est inversible à droite car on a -42 dans \mathbb{R} qui est tel que $(42) + (-42) = 0$)

L'élément a' est appelé **élément inverse à droite de a par \star** ou encore **élément symétrique à droite de a par \star** , ».

Dit autrement : « Un élément est inversible à droite pour une LCI ssi il admet un élément inverse à droite par la LCI ».

Définition 44. "Élément inversible pour une LCI sur un ensemble"

Soient \star une LCI sur un ensemble E admettant un élément neutre et $e \in E$ l'élément neutre pour \star

$$a \in E \text{ est un élément inversible pour } \star \Leftrightarrow (\exists a' \in E \mid (a' \star a = a \star a' = e))$$

Dit autrement : « Un élément est inversible pour une LCI donnée quand on peut l'opérer avec un autre élément de l'ensemble pour obtenir l'élément neutre (par exemple pour la LCI $+$ sur \mathbb{R} , on a 42 qui est inversible car on a -42 dans \mathbb{R} qui est tel que $(-42) + 42 = 42 + (-42) = 0$)

L'élément a' est appelé **élément inverse de a par \star** ».

Dit autrement : « Un élément est inversible pour une LCI ssi il admet un élément inverse par la LCI ».

Dit autrement : « Un élément est inversible pour une LCI ssi il est inversible à gauche et inversible à droite et que les éléments inverses à gauche et à droite sont égaux ».

Remarques :

- Souvent, les LCI commutatives sont notées $+$ parce que ça permet de faire des analogies avec l'addition qu'on connaît bien depuis tout petit (pour peu que ses propriétés se retrouvent également dans la LCI en question). Dans ce cas le symétrique d'un élément a est appelé "l'opposé" de a , plutôt que "l'inverse" de a , noté $-a$, histoire de rester dans le même registre.
- Parfois la LCI est notée \times ou \cdot voire elle n'apparaît pas entre les termes lors d'une opération (par exemple avec ab au lieu de $a \cdot b$), parce qu'elle permet de faire des analogies avec la multiplication qu'on connaît bien aussi depuis tout petit. Dans ce cas le symétrique d'un élément a est appelé "l'inverse", plutôt que "l'opposé", noté a^{-1} , histoire de rester dans le même registre.
- Si la LCI \star sur E est associative, alors si a dispose d'un élément inverse à gauche par \star (disons a') et d'un élément inverse à droite par \star (disons a''), alors il s'agit du même élément, et donc a est inversible pour \star (c'est logique car à ce moment-là, $a' \star a \star a'' = (a' \star a) \star a'' = a' \star (a \star a'') = a' \star a'' = a''$)
- De ce qui a été dit ci-dessus, il découle que si une LCI est associative, alors tout élément inverse (à gauche ou à droite ou général) d'un élément de l'ensemble est unique.

Définition 45. "Élément simplifiable à gauche pour une LCI sur un ensemble "

Soient \star une LCI sur un ensemble E

$a \in E$ est simplifiable à gauche pour $\star \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, ((a \star x = a \star y) \Rightarrow (x = y))$

Dit autrement : Soient \star une LCI sur un ensemble E

$a \in E$ est simplifiable à gauche pour $\star \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, ((a \star x = a \star y) \Leftrightarrow (x = y))$

Dit autrement : « Un élément est simplifiable à gauche pour une LCI donnée ssi quand on prend 2 éléments x et y de E , le fait d'avoir $a \star x = a \star y$ fait qu'obligatoirement $x = y$. L'inverse est toujours vrai mais la définition originelle ne précise qu'une implication au lieu d'une équivalence, possiblement pour suggérer que l'inverse peut être vrai en dehors de la définition de l'élément simplifiable à gauche. Pourquoi pas. ».

Remarque :

- Si on a \star , LCI unifère à gauche sur E , d'élément neutre e , qui est associative, alors tout élément $a \in E$ inversible à gauche par \star est également simplifiable à gauche par \star . Autrement dit :

Soient E un ensemble et \star une LCI associative et unifère à gauche sur E

$\forall a \in E, (a \text{ inversible à gauche par } \star) \Rightarrow (a \text{ simplifiable à gauche par } \star)$

En effet, dans ce cas, on aura

$(a \star x = a \star y) \Leftrightarrow (a' \star a \star x = a' \star a \star y) \Leftrightarrow (x = y)$

Il s'agit d'une relation d'implication et non d'équivalence, l'inverse n'est donc pas forcément vrai, c'est-à-dire que si a est simplifiable, il n'est pas forcément inversible. On peut prendre l'exemple de la LCI \times sur \mathbb{N} , on a bien 3 qui est simplifiable à gauche car $3 \times x = 3 \times y \Leftrightarrow x = y$, malgré le fait que 3 ne soit pas inversible pour \times car $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

Définition 46. "Élément simplifiable à droite pour une LCI sur un ensemble "

Soient \star une LCI sur un ensemble E

$a_{\in E}$ est simplifiable à droite pour $\star \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, ((x \star a = y \star a) \Rightarrow (x = y))$

Dit autrement : Soient \star une LCI sur un ensemble E

$a_{\in E}$ est simplifiable à droite pour $\star \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, ((x \star a = y \star a) \Leftrightarrow (x = y))$

Dit autrement : « Un élément est simplifiable à gauche pour une LCI donnée ssi quand on prend 2 éléments x et y de E , le fait d'avoir $x \star a = y \star a$ fait qu'obligatoirement $x = y$. L'inverse est toujours vrai mais la définition originelle ne précise qu'une implication au lieu d'une équivalence, possiblement pour suggérer que l'inverse peut être vrai en dehors de la définition de l'élément simplifiable à droite. Pourquoi pas. ».

Remarque :

- Si on a \star , LCI unifère à droite sur E , d'élément neutre e , qui est associative, alors tout élément $a_{\in E}$ inversible à droite par \star est également simplifiable à droite par \star . Autrement dit :

Soient E un ensemble et \star une LCI associative et unifère à droite sur E

$\forall a \in E, (a \text{ inversible à droite par } \star) \Rightarrow (a \text{ simplifiable à droite par } \star)$

En effet, dans ce cas, on aura

$(x \star a = y \star a) \Leftrightarrow (x \star a \star a' = y \star a \star a') \Leftrightarrow (x = y)$

Il s'agit d'une relation d'implication et non d'équivalence, l'inverse n'est donc pas forcément vrai, c'est-à-dire que si a est simplifiable, il n'est pas forcément inversible. On peut prendre l'exemple de la LCI \times sur \mathbb{N} , on a bien 3 qui est simplifiable à droite car $x \times 3 = y \times 3 \Leftrightarrow x = y$, malgré le fait que 3 ne soit pas inversible pour \times car $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

Définition 47. "Élément simplifiable pour une LCI sur un ensemble"

Soient \star une LCI sur un ensemble E

$a_{\in E}$ est simplifiable pour \star

\Longleftrightarrow

$$\forall (x, y) \in E^2, (((a \star x = a \star y) \Rightarrow (x = y)) \wedge ((x \star a = y \star a) \Rightarrow (x = y)))$$

Dit autrement : Soient \star une LCI sur un ensemble E

$a_{\in E}$ est simplifiable pour \star

\Longleftrightarrow

$$\forall (x, y) \in E^2, (((a \star x = a \star y) \Leftrightarrow (x = y)) \wedge ((x \star a = y \star a) \Leftrightarrow (x = y)))$$

Dit autrement : Soient \star une LCI sur un ensemble E

$a_{\in E}$ est simplifiable pour \star

\Longleftrightarrow

$$(a \text{ est simplifiable à gauche pour } \star) \wedge (a \text{ est simplifiable à droite pour } \star)$$

Dit autrement : « Un élément est simplifiable pour une LCI donnée ssi quand on prend 2 éléments x et y de E , le fait d'avoir $x \star a = y \star a$ ou $a \star x = a \star y$ fait qu'obligatoirement $x = y$. L'inverse est toujours vrai mais la définition originelle ne précise qu'une implication au lieu d'une équivalence, possiblement pour suggérer que l'inverse peut être vrai en dehors de la définition de l'élément simplifiable à droite. Pourquoi pas. ».

Remarque :

- Tous les éléments de \mathbb{N} sont simplifiables pour la LCI $+$ sur \mathbb{N} mais aucun à part 0 n'est inversible
- Tous les éléments de \mathbb{Z} sont simplifiables pour la LCI \times sur \mathbb{Z} mais aucun à part $+1$ et -1 n'est inversible
- Tous les éléments de \mathbb{C} sont inversibles pour la LCI $+$ sur \mathbb{C}
- Tous les éléments de \mathbb{C}^* sont inversibles pour la LCI \times sur \mathbb{C}

- Si on a \star , LCI unifère sur E , d'élément neutre e , qui est associative, alors tout élément $a \in E$ inversible pour \star est également simplifiable pour \star . Autrement dit :

Soient E un ensemble et \star une LCI associative et unifère sur E

$$\forall a \in E, (a \text{ inversible pour } \star) \Rightarrow (a \text{ simplifiable pour } \star)$$

En effet, dans ce cas, on aura par exemple

$$(x \star a = y \star a) \Leftrightarrow (x \star a \star a' = y \star a \star a') \Leftrightarrow (x = y)$$

Il s'agit d'une relation d'implication et non d'équivalence, l'inverse n'est donc pas forcément vrai, c'est-à-dire que si a est simplifiable, il n'est pas forcément inversible. On peut prendre l'exemple de la LCI \times sur \mathbb{N} , on a bien 3 qui est simplifiable car $x \times 3 = y \times 3 \Leftrightarrow x = y$, malgré le fait que 3 ne soit pas inversible pour \times car $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

Définition 48. "Élément absorbant à gauche pour une LCI sur un ensemble"

Soit \star une LCI sur un ensemble E

$a \in E$ est un élément absorbant à gauche pour $\star \Leftrightarrow \forall x \in E, (a \star x = a)$

Dit autrement : « Un élément est absorbant à gauche pour une LCI donnée ssi quand on l'opère à gauche avec n'importe quel élément de l'ensemble de stabilité, ça le renvoie toujours lui. »

Dit autrement : « On peut dire que c'est le contraire de l'élément neutre à gauche. L'élément neutre à gauche quand on l'opère à gauche avec $x \in E$ ça retourne systématiquement x , l'élément absorbant à gauche a quand on l'opère avec $x \in E$ ça retourne systématiquement a . »

Remarque :

- 0 est l'élément absorbant à gauche de la LCI \times sur \mathbb{C} . En effet, $\forall x \in \mathbb{C}, (0 \times x = 0)$

Définition 49. "Élément absorbant à droite pour une LCI sur un ensemble"

Soit \star une LCI sur un ensemble E

$a \in E$ est un élément absorbant à droite pour $\star \Leftrightarrow \forall x \in E, (x \star a = a)$

Dit autrement : « Un élément est absorbant à droite pour une LCI donnée ssi quand on l'opère à droite avec n'importe quel élément de l'ensemble de stabilité, ça le renvoie toujours lui. »

Dit autrement : « On peut dire que c'est le contraire de l'élément neutre à droite. L'élément neutre à droite quand on l'opère à droite avec $x \in E$ ça retourne systématiquement x , l'élément absorbant à droite a quand on l'opère avec $x \in E$ ça retourne systématiquement a . »

Remarque :

- 0 est l'élément absorbant à droite de la LCI \times sur \mathbb{C} . En effet, $\forall x \in \mathbb{C}, (x \times 0 = 0)$

Définition 50. "Élément absorbant pour une LCI sur un ensemble"

Soit \star une LCI sur un ensemble E

$a \in E$ est un élément absorbant pour $\star \Leftrightarrow \forall x \in E, (a \star x = x \star a = a)$

Dit autrement : « Un élément est absorbant pour une LCI donnée ssi quand on l'opère avec n'importe quel élément de l'ensemble de stabilité, ça le renvoie toujours lui. »

Dit autrement : « On peut dire que c'est le contraire de l'élément neutre. L'élément neutre quand on l'opère avec $x \in E$ ça retourne systématiquement x , l'élément absorbant a quand on l'opère avec $x \in E$ ça retourne systématiquement a . »

Dit autrement : « Un élément est absorbant pour une LCI donnée ssi il est absorbant à gauche et absorbant à droite pour la LCI en question. ».

Remarque :

- 0 est l'élément absorbant de la LCI \times sur \mathbb{C} . En effet,
 $\forall x \in \mathbb{C}, (0 \times x = x \times 0 = 0)$

Définition 51. "Élément idempotent pour une LCI sur un ensemble"

Soit \star une LCI sur un ensemble E

$a \in E$ est un élément idempotent pour $\star \Leftrightarrow (a \star a = a)$

Dit autrement : « Un élément est idempotent pour une LCI donnée ssi quand on l'opère avec lui-même il retourne lui-même ».

Remarque :

- Tout élément neutre pour une LCI est idempotent pour cette LCI
- Pour la LCI $+$ sur \mathbb{C} , seul l'élément neutre 0 est idempotent
- Pour la LCI \times sur \mathbb{C} , seuls 0 et l'élément neutre 1 sont idempotents

Définition 52. "Morphisme d'une LCI vers une autre LCI"

Soient E_1 et E_2 des ensembles,
et \star_1 une LCI sur E_1
et \star_2 une LCI sur E_2
et $\varphi \in \mathcal{F}(E_1 \rightarrow E_2)$

φ est un morphisme de \star_1 vers \star_2

\Longleftrightarrow

$$\forall (a, b) \in (E_1)^2, (f(a \star_1 b) = f(a) \star_2 f(b))$$

Dit autrement : « Un morphisme d'une LCI vers une autre LCI, c'est une application définie sur l'ensemble de stabilité de la première LCI, à valeurs dans l'ensemble de stabilité de la seconde LCI, et qui, quand elle prend en argument 2 éléments opérés par la première LCI, retourne ces 2 éléments opérés par la fonction puis opérés par la seconde LCI ».

Dit autrement : « Un morphisme d'une LCI vers une autre LCI, c'est une application qui est capable de transformer un calcul mettant en jeu la première LCI en un calcul mettant en jeu la seconde LCI ».

Remarques :

- Certains utilisent le terme d'homomorphisme pour parler de morphisme
- Quand les 2 LCI sont identiques, on parle d'endomorphisme. On dira alors, par exemple dans le cas où il s'agit d'un morphisme de \star vers \star , que c'est un endomorphisme sur \star
- Quand le morphisme est bijectif, on parle d'isomorphisme
- Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme
- S'il existe un isomorphisme d'une LCI vers une autre LCI, on dit que ces 2 LCI sont isomorphes
- La composée d'un morphisme φ_2 de \star_2 vers \star_3 avec un morphisme φ_1 de \star_1 vers \star_2 donne un morphisme φ_{comp} de \star_1 vers \star_3
En effet, $\varphi_1(a \star_1 b) = \varphi_1(a) \star_2 \varphi_1(b)$
et $\varphi_2(c \star_2 d) = \varphi_2(c) \star_3 \varphi_2(d)$
donc

$$\begin{aligned}\varphi_{comp}(a \star_1 b) &= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a \star_1 b) \\ &= \varphi_2(\varphi_1(a \star_1 b)) \\ &= \varphi_2(\varphi_1(a) \star_2 \varphi_1(b)) \\ &= \varphi_2(\varphi_1(a)) \star_3 \varphi_2(\varphi_1(b)) \\ &= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a) \star_3 (\varphi_2 \circ \varphi_1)(b) \\ \varphi_{comp}(a \star_1 b) &= \varphi_{comp}(a) \star_3 \varphi_{comp}(b)\end{aligned}$$

- Par ailleurs, si les 2 morphismes évoqués ci-dessus sont des isomorphismes, alors la composition sera également un isomorphisme
- L'identité sur E , c'est-à-dire l'application $\text{Id}_E = F^\circ \left(\begin{smallmatrix} E & \rightarrow \\ x & \rightarrow x \end{smallmatrix} \right)$ est un isomorphisme de toute LCI sur E vers elle-même (c'est donc un automorphisme)
- L'application réciproque d'un isomorphisme d'une première LCI vers une seconde LCI, est également un isomorphisme, de la seconde LCI vers la première
- La relation "être isomorphe" est une relation d'équivalence
- De même que la notation $\mathcal{F}(E \rightarrow F)$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur E à valeur dans F , la notation $\mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)$ désigne l'ensemble des morphismes de \star_1 vers \star_2 , avec $\mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)_\rightarrow$ l'ensemble des morphismes surjectifs, $\mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)_\leftarrow$ l'ensemble des morphismes injectifs et $\mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)_{\leftrightarrow}$ l'ensemble des morphismes bijectifs.

- Si 2 LCI sont isomorphes, alors :
 - l'une des 2 LCI est associative \Leftrightarrow l'autre LCI est aussi associative (donc quand 2 LCI sont isomorphes, elles sont soit toutes les 2 associatives, soit toutes les 2 pas associatives)
 - l'une des 2 LCI est commutative \Leftrightarrow l'autre LCI est aussi commutative (donc quand 2 LCI sont isomorphes, elles sont soit toutes les 2 commutatives, soit toutes les 2 pas commutatives)
- Un isomorphisme transforme toujours l'élément neutre (tout court ou à gauche ou à droite) en l'élément neutre (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). C'est-à-dire que si on a $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)_{\leftrightarrow}$ et e_1 l'élément neutre de \star_1 et e_2 l'élément neutre de \star_2 , alors

$$\varphi(e_1) = e_2$$

- Un isomorphisme transforme toujours un élément absorbant (tout court ou à gauche ou à droite) en élément absorbant (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)_{\leftrightarrow}$

a_1 est un élément absorbant de \star_1

$$\Longleftrightarrow$$

$\varphi(a_1)$ est un élément absorbant de \star_2

- Un isomorphisme transforme toujours un élément idempotent en élément idempotent. Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)_{\leftrightarrow}$

i_1 est un élément idempotent de \star_1

\Longleftrightarrow

$\varphi(i_1)$ est un élément idempotent de \star_2

- Un isomorphisme transforme toujours un élément inversible (tout court ou à gauche ou à droite) en élément inversible (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)_{\leftrightarrow}$

a'_1 inversible (tout court ou à gauche ou à droite) par \star_1

\Longleftrightarrow

$\varphi(a'_1)$ inversible (respectivement tout court ou à gauche ou à droite) par \star_2

- Un isomorphisme transforme toujours un élément simplifiable (tout court ou à gauche ou à droite) en élément simplifiable (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)_{\leftrightarrow}$

a simplifiable (tout court ou à gauche ou à droite) par \star_1

\Longleftrightarrow

$\varphi(a)$ simplifiable (respectivement tout court ou à gauche ou à droite) par \star_2

Définition 53. "Définition d'un Magma"

Un magma est un objet mathématique constitué d'un ensemble et d'une LCI sur cet ensemble. On le déclare comme ça :

Soient E un ensemble et \star une LCI sur E

$$M := \mathcal{M}^\circ(E, \star)$$

Dit autrement : « C'est le fait de packer une LCI avec son ensemble de stabilité pour créer un objet mathématique. C'est plus simple à manipuler plutôt que de devoir dealer avec l'ensemble à certains moments et la LCI à d'autres moments. ».

Remarque :

- L'ensemble du vocabulaire utilisé pour les LCI et les éléments particuliers des ensemble de stabilité sont exportés à ce nouveau type d'objet mathématique
- L'ensemble du magma est appelé **ensemble de stabilité du magma** (vu que c'est l'ensemble de stabilité de la LCI du magma)
- Pour un élément faisant partie de l'ensemble de stabilité du magma, on peut dire que l'élément "appartient au magma"
- La LCI du magma est simplement appelée "LCI du magma"
- L'élément neutre (tout court ou à gauche ou à droite) pour la LCI du magma est dit "élément neutre (tout court ou à gauche ou à droite) du magma", le magma est donc dit **unifère** (tout court ou à gauche ou à droite).
- Dans la méthode constructeur du magma, on doit toujours préciser l'ensemble de stabilité et la LCI, genre $\mathcal{M}^\circ(E, \star)$, (c'est un peu un pléonasme mais c'est le standard), et optionnellement on peut spécifier l'élément neutre quand on veut déclarer un magma unifère, genre $\mathcal{M}^\circ(E, \star, e)$. La raison pour laquelle on doit préciser l'ensemble sur lequel s'applique la LCI est que ça permet de restreindre ou d'étendre la LCI passée en argument sans avoir à le mentionner explicitement. Par exemple si on a une LCI \star sur E et qu'on a $F \subseteq E$, on peut créer un magma $\mathcal{M}^\circ(F, \star)$ qui est équivalent à $\mathcal{M}^\circ(F, \star|_F)$, la LCI de stabilité du magma sera bien $\star|_F$ (c'est géré par la méthode constructeur) et non \star . Cependant il faut faire très attention quand on utilise cette syntaxe parce que si la LCI n'est pas restreignable ou étendable ça fera tout exploser.
- Un élément absorbant (tout court ou à gauche ou à droite) pour la LCI du magma est dit "élément absorbant (tout court ou à gauche ou à droite) du magma"
- Si la LCI du magma est associative, on dit que le magma est associatif
- Si la LCI du magma est commutative, on dit que le magma est commutatif
- Si tous les éléments du magma sont inversibles (tout court ou à gauche ou à droite), on dit que le magma est **symétrique** (tout court ou à gauche ou à droite)
- Un magma associatif est appelé un "demi-groupe"
- Un magma associatif et unifère est appelé "un monoïde"
- Un magma associatif, unifère et symétrique est appelé "un groupe"

- Si on a 2 magmas et qu'on a un morphisme de la LCI du premier magma vers la LCI du second magma, on dit qu'il s'agit d'un morphisme du premier magma vers le second magma, et que les 2 magmas sont isomorphes.

Donc quand on a une LCI \star_1 sur E_1 et une LCI \star_2 sur E_2 et un morphisme φ de \star_1 vers \star_2 , on peut aussi dire que φ est un morphisme du magma $\mathcal{M}^\circ(E_1, \star_1)$ vers $\mathcal{M}^\circ(E_2, \star_2)$ et que ces derniers sont isomorphes. Les règles de nommage du morphismes s'appliquent de la même manière (morphisme, homomorphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, ...)

- De même que la notation $\mathcal{M}(\star_1 \rightarrow \star_2)$ désigne l'ensemble des morphismes de \star_1 vers \star_2 , la notation $\mathcal{M}(\mathcal{M}^\circ(E_1, \star_1) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(E_2, \star_2))$ désigne l'ensemble des morphismes du magma $\mathcal{M}^\circ(E_1, \star_1)$ vers $\mathcal{M}^\circ(E_2, \star_2)$. Une façon de dire que φ est un morphisme d'un magma M_1 vers un magma M_2 serait de noter $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)$
- La composée d'un morphisme φ_2 de M_2 vers M_3 avec un morphisme φ_1 de M_1 vers M_2 donne un morphisme φ_{comp} de M_1 vers M_3
En effet, $\varphi_1(a \star_1 b) = \varphi_1(a) \star_2 \varphi_1(b)$
et $\varphi_2(c \star_2 d) = \varphi_2(c) \star_3 \varphi_2(d)$
donc

$$\begin{aligned}\varphi_{comp}(a \star_1 b) &= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a \star_1 b) \\ &= \varphi_2(\varphi_1(a \star_1 b)) \\ &= \varphi_2(\varphi_1(a) \star_2 \varphi_1(b)) \\ &= \varphi_2(\varphi_1(a)) \star_3 \varphi_2(\varphi_1(b)) \\ &= (\varphi_2 \circ \varphi_1)(a) \star_3 (\varphi_2 \circ \varphi_1)(b) \\ \varphi_{comp}(a \star_1 b) &= \varphi_{comp}(a) \star_3 \varphi_{comp}(b)\end{aligned}$$

- Par ailleurs, si les 2 morphismes évoqués ci-dessus sont des isomorphismes, alors la composition sera également un isomorphisme

- L'identité sur un ensemble E , c'est-à-dire l'application $\text{Id}_E = F^\circ \left(\begin{smallmatrix} E & \rightarrow \\ x & \mapsto x \end{smallmatrix} \right)$ est un isomorphisme de tout magma dont l'ensemble de stabilité est E , vers lui-même. Dit autrement, l'application identité sur un ensemble E , Id_E , est un automorphisme sur tout magma dont l'ensemble de stabilité est E .
- L'application réciproque d'un isomorphisme d'un magma vers un second magma est également un isomorphisme, du second magma vers le premier
- La relation "être isomorphe" est une relation d'équivalence
- De même que la notation $\mathcal{F}(E \rightarrow F)$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur E à valeur dans F , la notation $\mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)$ désigne l'ensemble des morphismes du magma M_1 vers M_2 , avec $\mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)_{\rightarrow}$ l'ensemble des morphismes surjectifs, $\mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)_{\leftarrow}$ l'ensemble des morphismes injectifs et $\mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)_{\leftrightarrow}$ l'ensemble des morphismes bijectifs.
- Si 2 magmas sont isomorphes, alors :
 - l'un des 2 magma est associatif \Leftrightarrow l'autre magma est aussi associatif (donc quand 2 magmas sont isomorphes, ils sont soit tous les 2 associatifs, soit tous les 2 pas associatifs)
 - l'un des 2 magmas est commutatif \Leftrightarrow l'autre magma est aussi commutatif (donc quand 2 magmas sont isomorphes, ils sont soit tous les 2 commutatifs, soit tous les 2 pas commutatifs)
- Un isomorphisme transforme toujours l'élément neutre (tout court ou à gauche ou à droite) en l'élément neutre (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). C'est-à-dire que si on a $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)_{\leftrightarrow}$ et e_1 l'élément neutre de M_1 et e_2 l'élément neutre de M_2 , alors

$$\varphi(e_1) = e_2$$

- Un isomorphisme transforme toujours un élément absorbant (tout court ou à gauche ou à droite) en élément absorbant (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)_{\leftrightarrow}$

a_1 un élément absorbant de M_1

$$\Longleftrightarrow$$

$$\varphi(a_1)$$

- Un isomorphisme transforme toujours un élément idempotent en élément idempotent. Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)_{\leftrightarrow}$

i_1 est un élément idempotent de M_1

\Longleftrightarrow

$\varphi(i_1)$ est un élément idempotent de M_2

- Un isomorphisme transforme toujours un élément inversible (tout court ou à gauche ou à droite) en élément inversible (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)_{\leftrightarrow}$

a'_1 est un élément inversible (tout court ou à gauche ou à droite) de M_1

\Longleftrightarrow

$\varphi(a'_1)$ est un élément inversible

(respectivement tout court ou à gauche ou à droite) de M_2

- Un isomorphisme transforme toujours un élément simplifiable (tout court ou à gauche ou à droite) en élément simplifiable (respectivement tout court ou à gauche ou à droite). Dit autrement : $\varphi \in \mathcal{M}(M_1 \rightarrow M_2)_{\leftrightarrow}$

a est un élément simplifiable (tout court ou à gauche ou à droite) de M_1

\Longleftrightarrow

$\varphi(a)$ est un élément simplifiable

(respectivement tout court ou à gauche ou à droite) de M_2

- L'application exponentielle (népérienne) $\exp = \exp_e = F^\circ \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x \end{smallmatrix} \right)$ est un morphisme de $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}, +) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times)$. En effet, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (e^{a+b} = e^a \times e^b)$

- L'application logarithme népérien $\ln = \log_e = F^\circ \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{smallmatrix} \right)$ est un morphisme de $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}, +)$. En effet,

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, (\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b))$. Par ailleurs, c'est totalement logique que ce soit le cas car la fonction \ln est l'application réciproque de la fonction exponentielle, cette dernière étant un isomorphisme, sa fonction réciproque est également un isomorphisme.

- De manière générale, l'application exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$,
 $\exp_a = F^\circ \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \end{array} \right)$ est un morphisme de $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}, +) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
En effet, $\forall (b, c) \in \mathbb{R}^2$, $a^{b+c} = a^b \times a^c$. C'est la généralisation du cas de la fonction exponentielle décrit ci-dessus, où on avait $a = e$.
- Également de manière générale, l'application logarithme de base $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a = F^\circ \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \log_a(x) \end{array} \right)$ est un morphisme de $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}, +)$. En effet, $\forall (b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $(\log_a(b \times c) = \log_a(b) + \log_a(c))$. Par ailleurs, c'est totalement logique que ce soit le cas car la fonction \log_a est l'application réciproque de la fonction exponentielle de base a , cette dernière étant un isomorphisme, sa fonction réciproque est également un isomorphisme. Enfin, c'est la généralisation du cas de la fonction logarithme népérien décrit ci-dessus, où on aurait $a = e$.
- L'application $F^\circ \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^* \rightarrow \{1\} \\ x \mapsto (0)^x \end{array} \right)$ est un morphisme de $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}^*, +) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(1, \times)$. En effet, $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $0^{a+b} = 0^a \times 0^b$. C'est une extension du cas de la fonction exponentielle décrit plus haut, avec $a = 0$, mais qui nous impose de restreindre l'ensemble de départ du morphisme (et donc du magma de départ) à \mathbb{R}^* (donc à retirer 0) vu que 0^0 est une expression sujette à débat (valant 1 ou undefined en fonction des domaines et des auteurs).
- L'application $F^\circ \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto x^{(n \in \mathbb{N}^*)} \end{array} \right)$ est un automorphisme sur $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times)$, c'est-à-dire un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathbb{R}_+^*, \times)$. En effet, $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $((a \times b)^n = a^n \times b^n)$.
- L'application $F^\circ \left(\begin{array}{c} P(E) \rightarrow P(E) \\ A \mapsto (C_E(A) = E - A) \end{array} \right)$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap)$, ainsi que de $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup)$ (cf page 12).

En effet, $\forall (A, B) \in (P(E))^2$, $(E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B))$

De même, $\forall (A, B) \in (P(E))^2$, $(E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B))$

C'est ce qu'on appelle la loi de Morgan, le fait qu'en logique, $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$ et que $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.

- *Attention là le cervelas va fumer. On a évoqué page 57 le générateur d'application caractéristique des ensembles de $\mathcal{P}(E)$ par rapport à E . On va voir que cette application peut être un isomorphisme d'un magma vers un autre. Pour rappel, en considérant un ensemble quelconque E , l'application caractéristique d'un ensemble $A \subseteq E$ c'est l'application, qu'on pourrait aussi bien appeler "isInA", qui prend un élément de E et retourne 1 s'il est aussi dans A et 0 sinon, c'est-à-dire*

$$\mathcal{X}_{(A,E)} := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \notin A : 0 \\ x \in A : 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

On peut donc créer une application $\Gamma_{\mathcal{X}_E}$ qui, pour chaque sous-ensemble A de E , retourne son application caractéristique par rapport à E , $\mathcal{X}_{(A,E)}$, ce qu'on pourrait appeler le "générateur d'application caractéristique des sous-ensembles de E " :

$$\Gamma_{\mathcal{X}_E} := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \in A : 1 \\ x \notin A : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

On avait vu, d'après le théorème 2 ("Bijection du générateur d'application caractéristique de $A \subseteq E$ "), que cette application $\Gamma_{\mathcal{X}_E}$ est bijective. Bien, le rappel est fait.

Maintenant, on va créer les 3 LCI sur $\mathcal{P}(E)$ suivantes :

$$\cup_E := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(E))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (A, B) & \mapsto & A \cup B \end{array} \right) \text{ qui utilise la réunion d'ensembles}$$

$$\cap_E := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(E))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (A, B) & \mapsto & A \cap B \end{array} \right) \text{ qui utilise l'intersection d'ensembles}$$

$$\Delta_E := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}(E))^2 & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (A, B) & \mapsto & A \Delta B \end{array} \right) \text{ qui utilise la différence symétrique d'ensembles}$$

On va également créer les 3 LCI sur $\{0, 1\}$ suivantes :

$$\vee_1 := F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\{0, 1\})^2 & \rightarrow \\ (a, b) & \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \{0, 1\} \\ \left(\begin{array}{l} (a = 0 \wedge b = 0) : 0 \\ (a = 1 \wedge b = 1) : 1 \\ (a = 1 \wedge b = 0) : 1 \\ (a = 0 \wedge b = 1) : 1 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

En fait, la LCI \vee_1 c'est un opérateur "OR" tout simplement, on peut résumer son fonctionnement avec la table ci-dessous :

\vee_1	0	1
0	0	1
1	1	1

$$\wedge_2 := F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\{0, 1\})^2 & \rightarrow \\ (a, b) & \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \{0, 1\} \\ \left(\begin{array}{l} (a = 0 \wedge b = 0) : 0 \\ (a = 1 \wedge b = 1) : 1 \\ (a = 1 \wedge b = 0) : 0 \\ (a = 0 \wedge b = 1) : 0 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

En fait, la LCI \wedge_2 c'est un opérateur ET tout simplement, on peut résumer son fonctionnement avec la table ci-dessous :

\wedge_2	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\oplus_3 := F^\circ \left(\begin{array}{cc} (\{0, 1\})^2 & \rightarrow \\ (a, b) & \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \{0, 1\} \\ \left(\begin{array}{l} (a = 0 \wedge b = 0) : 0 \\ (a = 1 \wedge b = 1) : 0 \\ (a = 1 \wedge b = 0) : 1 \\ (a = 0 \wedge b = 1) : 1 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

En fait, la LCI \oplus_3 c'est un opérateur "XOR" tout simplement, on peut résumer son fonctionnement avec la table ci-dessous :

\oplus_3	0	1
0	0	1
1	1	0

Pour chacune des LCI sur $\{0, 1\} \vee_1, \wedge_2$ et \oplus_3 , on peut utiliser chacune d'elle pour créer 3 LCI sur $\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\})$ avec la méthode abordée page 59, que sont :

$$\vee_{1_F} := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}))^2 & \rightarrow & \mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}) \\ (f, g) & \mapsto & f \vee_1 g = F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \rightarrow f(x) \vee_1 g(x) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\wedge_{2_F} := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}))^2 & \rightarrow & \mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}) \\ (f, g) & \mapsto & f \wedge_2 g = F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \rightarrow f(x) \wedge_2 g(x) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\oplus_{3_F} := F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}))^2 & \rightarrow & \mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}) \\ (f, g) & \mapsto & f \oplus_3 g = F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \rightarrow f(x) \oplus_3 g(x) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

On peut donc créer les 6 magmas suivants :

$$M_{E_1} := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup_E)$$

$$M_{E_2} := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap_E)$$

$$M_{E_3} := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \Delta_E)$$

$$M_1 := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}), \vee_{1_F})$$

$$M_2 := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}), \wedge_{2_F})$$

$$M_3 := \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}), \oplus_{3_F})$$

Et bien accrochez-vous bien, on peut remarquer que l'application $\Gamma_{\mathcal{X}_E}$ est :

1. un isomorphisme de $M_{E_1} \rightarrow M_1$, c'est-à-dire de $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup_E) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}), \vee_{1_F})$.
2. un isomorphisme de $M_{E_2} \rightarrow M_2$, c'est-à-dire de $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap_E) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}), \wedge_{2_F})$
3. un isomorphisme de $M_{E_3} \rightarrow M_3$, c'est-à-dire de $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \Delta_E) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0, 1\}), \oplus_{3_F})$

1. un isomorphisme de $M_{E_1} \rightarrow M_1$, c'est-à-dire de $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cup_E) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\}), \vee_{1_f})$.

En effet, $\forall (A, B) \in (P(E))^2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{X}_E}(A \cup_E B) &= \mathcal{X}_{((A \cup B), E)} \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{l} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \in A \cup B : 1 \\ x \notin A \cup B : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{l} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} (x \in A) \vee (x \in B) : 1 \\ (x \notin A) \wedge (x \notin B) : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{l} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto (\mathcal{X}_{(A,E)}(x)) \vee_1 (\mathcal{X}_{(B,E)}(x)) \end{array} \right) \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \vee_1 \mathcal{X}_{(B,E)} \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \vee_{1_f} \mathcal{X}_{(B,E)} \\
\Gamma_{\mathcal{X}_E}(A \cup_E B) &= \Gamma_{\mathcal{X}_E}(A) \vee_{1_f} \Gamma_{\mathcal{X}_E}(B)
\end{aligned}$$

2. un isomorphisme de $M_{E_2} \rightarrow M_2$, c'est-à-dire de $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \cap_E) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\}), \wedge_{2_f})$

En effet, $\forall (A, B) \in (P(E))^2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{X}_E}(A \cap_E B) &= \mathcal{X}_{((A \cap B), E)} \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{l} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \in A \cap B : 1 \\ x \notin A \cap B : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{l} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} (x \in A) \wedge (x \in B) : 1 \\ (x \notin A) \vee (x \notin B) : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{l} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto (\mathcal{X}_{(A,E)}(x)) \wedge_2 (\mathcal{X}_{(B,E)}(x)) \end{array} \right) \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \wedge_2 \mathcal{X}_{(B,E)} \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \wedge_{2_f} \mathcal{X}_{(B,E)} \\
\Gamma_{\mathcal{X}_E}(A \cap_E B) &= \Gamma_{\mathcal{X}_E}(A) \wedge_{2_f} \Gamma_{\mathcal{X}_E}(B)
\end{aligned}$$

3. un isomorphisme de $M_{E_3} \rightarrow M_3$, c'est-à-dire de
 $\mathcal{M}^\circ(\mathcal{P}(E), \Delta_E) \rightarrow \mathcal{M}^\circ(\mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\}), \oplus_{3_F})$

En effet, $\forall (A, B) \in (P(E))^2$,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{X}_E}(A \Delta_E B) &= \mathcal{X}_{((A \Delta_E B), E)} \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \in A \Delta B : 1 \\ x \notin A \Delta B : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} (x \in (A \cup B - A \cap B)) : 1 \\ (x \notin (A \cup B - A \cap B)) : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
&= F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto (\mathcal{X}_{(A,E)}(x)) \oplus_3 (\mathcal{X}_{(B,E)}(x)) \end{array} \right) \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \oplus_3 \mathcal{X}_{(B,E)} \\
&= \mathcal{X}_{(A,E)} \oplus_{3_F} \mathcal{X}_{(B,E)} \\
\Gamma_{\mathcal{X}_E}(A \Delta_E B) &= \Gamma_{\mathcal{X}_E}(A) \oplus_{3_F} \Gamma_{\mathcal{X}_E}(B)
\end{aligned}$$

1.5 Relations

Définition 54. "Définition d'une relation binaire"

R est une relation binaire de E vers F de graphe de correspondance G

$$R = F^\circ \begin{matrix} \Longleftrightarrow \\ \left(\begin{array}{l} E \times F \rightarrow \{0,1\} \\ (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} (a, b) \in G : 1 \\ (a, b) \notin G : 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Dit autrement : « Une relation binaire R d'un ensemble E vers un ensemble F est une application qui décrit l'existence ou la non existence d'un lien orienté entre chaque élément de E et chaque élément de F . Il est défini par :

- un ensemble de gauche, ou 1^{er} ensemble E
- un ensemble de droite, ou 2^e ensemble F
- un graphe de correspondance G qui n'est ni plus ni moins que l'ensemble des couples d'éléments en relation les uns avec les autres

».

Dit autrement : « Une relation binaire R d'un ensemble E vers un ensemble F est un objet mathématique qui décrit l'existence ou la non existence d'un lien orienté entre chaque élément de E et chaque élément de F .

Si $(x, y) \in G$, alors x est en relation avec y . Autrement, x n'est pas en relation avec y , ce qui ne signifie par forcément que y n'est pas en relation avec x .

Remarques :

- On définit une relation binaire R de E vers F de graphe de correspondance G comme ceci :

$$R := \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$$

- On peut accéder au graphe de correspondance d'une relation binaire R en faisant

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \text{ ou } \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(R)$$

Attention donc, il s'agit de l'opérateur $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ qui prend en argument une relation, à ne pas confondre avec l'opérateur \mathcal{G} qui retournerait le graphe de la fonction R . Par exemple, si j'ai le graphe de correspondance suivant :

$$G := \{(a, b), (a, c), (b, d)\}$$

et que je crée la relation binaire suivante :

$$R := \mathcal{R}^\circ (\{a, b, e\} \rightarrow \{b, c, d\}, G)$$

on aura alors

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} = G = \{(a, b), (a, c), (b, d)\}$$

Tandis qu'on aura

$$\mathcal{G}_R = \{((a, b), 1), ((a, c), 1), ((a, d), 0), ((b, b), 0), ((b, c), 0), ((b, d), 1), ((e, c), 0), ((e, d), 0)\}$$

- L'ensemble des relations binaires de E vers F est donc $\mathcal{F}((E \times F) \rightarrow \{0, 1\})$.
- Quand la relation a son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée identiques, on dit que c'est une relation binaire **interne sur E** , ou simplement une relation binaire sur E . Dans ce cas, on ne parlera pas vraiment d'ensemble de gauche ou d'ensemble de droite (vu que l'ensemble de gauche c'est E et l'ensemble de droite aussi), mais tout simplement d'ensemble de la relation binaire interne. Cet ensemble peut s'obtenir avec la fonction / notation $\text{setOf}(R) = \sqrt{I_R} = E$
- Si on veut définir une relation binaire interne sur E de graphe de correspondance G , on peut utiliser la syntaxe $R := \mathcal{R}^\circ(E, G)$ qui est équivalente à $R := \mathcal{R}^\circ(E \rightarrow E, G)$
- L'assertion " x est en relation avec y via R " peut se noter $R(x, y)$ comme elle peut se noter

$$xRy$$

vu que R est un opérateur binaire.

- La méthode constructeur \mathcal{R}° exige qu'on précise les 2 ensembles d'où on prend les éléments en possible lien les uns avec les autres. Ça pourrait sembler être une information inutile étant donné que tout ce qu'on a besoin de faire pour savoir si 2 objets mathématiques sont en relation l'un avec l'autre, c'est de vérifier que le couple se trouve dans le graphe de la relation binaire, graphe également passé en argument à la méthode constructeur. Cependant, vu qu'il s'agit d'une fonction, il faut donc définir un ensemble de départ pour prendre les éléments à tester et c'est pourquoi ces ensembles doivent être spécifiés lors de la construction de l'objet.

- Vu qu'une relation binaire utilise un ensemble de couples pour déterminer quels éléments sont relation les uns avec les autres, on peut aussi passer directement une fonction en argument de la méthode constructeur pour définir une relation. Par exemple si on a

$$f = F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow F \\ x \rightarrow f(x) \end{array} \right), \text{ alors on peut faire}$$

$$R := \mathcal{R}^\circ(f)$$

qui est équivalent à

$$R := \mathcal{R}^\circ(I_f \rightarrow O_f, \mathcal{G}_f)$$

On parle alors de **relation fonctionnelle**.

Bien entendu, ce sera alors une relation où chaque élément de I_f ne pourra être en relation qu'avec, au plus, 1 élément de O_f

- Pour tout ensemble E , la relation d'égalité $=$ est une relation binaire interne sur E
- Pour tout ensemble E , la relation d'appartenance \in est une relation binaire de $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$
- Pour tout ensemble E , la relation d'inclusion \subseteq est une relation binaire de $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$
- Une relation binaire est donc une application, mais dans certains cas, des opérateurs tels que \circ ou $_{-1}$ ou \bar{R} vont devoir réaliser une action différente de celle réalisée d'habitude avec des fonctions (composition de relation binaire plutôt que composition de fonction, retourner la relation binaire inverse plutôt que la fonction réciproque, retourner la relation binaire complémentaire, ...). Pour trancher, ces opérateurs devront savoir qu'il s'agit d'une relation, et ils le sauront si la fonction appartient à $\mathcal{F}((E \times F) \rightarrow \{0,1\})$
- Normalement, l'utilisation standard quand on crée une relation $\mathcal{R}^\circ(E \rightarrow F, G)$, c'est d'utiliser un graphe de correspondance G qui soit un sous-ensemble de $E \times F$, cependant rien ne nous empêche en réalité d'utiliser n'importe quel ensemble de couples. Par contre il faudra tester l'existence d'une relation avec des éléments de $(E \times F)$ forcément vu que la fonction a son ensemble de départ dans cet ensemble.

- Pour rappel (cf page 57), une application caractéristique d'un ensemble A par rapport à un ensemble E est $\mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \in A: 1 \\ x \notin A: 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$. Par conséquent, une relation $\mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$ est une application caractéristique de G par rapport à $(E \times F)$ dès lors que $G \subseteq (E \times F)$. On a donc $\mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G) = \mathcal{X}_{(G,(E \times F))}$
- Beaucoup d'auteurs considèrent qu'une relation binaire n'est pas une fonction mais un ensemble, en l'occurrence, le graphe de correspondance. Ils considèrent donc que la relation binaire et le graphe de correspondance de la relation binaire sont la même chose, et que le fait d'écrire xRy est un "raccourci", un "alias" pour dire " $(x, y) \in R$ ". C'est une approche qui est d'une certaine manière équivalente dès lors que le graphe est inclus dans le produit cartésien des ensembles de gauche et de droite de la relation, car étant donné qu'il y a une bijection naturelle entre $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\})$ via l'application génératrice d'application caractéristiques sur E (cf pages 39 et 57) :

$$\Gamma_{\mathcal{X}_E} := F^\circ \left(\begin{array}{cc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{F}(E \rightarrow \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathcal{X}_{(A,E)} = F^\circ \left(\begin{array}{c} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x \in A: 1 \\ x \notin A: 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

le fait de considérer un ensemble $A \subseteq E$ revient à considérer son application caractéristique $\mathcal{X}_{(A,E)}$ et inversement.

Ainsi, le fait de considérer une relation $\mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$, qui est donc $\mathcal{X}_{(G,(E \times F))}$, revient à considérer l'ensemble $G \subseteq (E \times F)$

- Du coup, vu qu'il y a bijection naturelle entre une relation binaire et son graphe de correspondance, il est possible de faire du cast implicite pour utiliser les opérateurs d'ensembles sur les relations. Chaque opérateur sur des ensembles, si on lui passe en argument une relation, opérera le graphe de correspondance de la relation. Ainsi :
 - $(R \subseteq R') \Leftrightarrow (\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{R}'_R})$
 - $((a, b) \in R) \Leftrightarrow ((a, b) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R})$
 - $R \cup R' = \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}'_R}$
 - $R \cap R' = \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{R}'_R}$
 - ...
- Cependant, si ce sont des relations binaires internes qui sont opérées, l'opération renverra une nouvelle relation sur le même ensemble dont le graphe sera le résultat de l'opération mettant en jeu les 2 graphes des relations passées en argument.
- Pour une relation binaire R de E vers F , chaque élément $y \in F$ qui est en relation avec un élément $x \in E$ donné est appelé **lié de x par R**

- *L'ensemble des relations binaires d'un ensemble E vers un ensemble F est donc l'ensemble $\mathcal{F}((E \times F) \rightarrow \{0, 1\})$*
- *L'ensemble des relations binaires internes sur un ensemble E est donc l'ensemble $\mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$*

Définition 55. "Domaine à gauche d'une relation binaire"

Soit $R \in \mathcal{F}(E \times F \rightarrow \{0, 1\})$

On appelle "domaine à gauche de R " l'ensemble

$$D_L(R) = \{x \in E \mid (\exists y \in F : xRy)\}$$

Dit autrement : « C'est l'ensemble contenant tous les éléments de l'ensemble de gauche de la relation, qui sont en relation avec au moins un élément de l'ensemble de droite de la relation ».

Remarque :

- Certains parlent d'ensemble de définition de la relation, ou de domaine de la relation, mais cela peut porter à confusion étant donné qu'une relation est une fonction et que techniquement, son domaine de définition est le produit cartésien de son ensemble à gauche avec son ensemble à droite.

Définition 56. "Domaine à droite d'une relation binaire"

Soit $R \in \mathcal{F}(E \times F \rightarrow \{0, 1\})$

On appelle "domaine à droite de R " l'ensemble

$$D_R(R) = \{y \in F \mid (\exists x \in E : xRy)\}$$

Dit autrement : « C'est l'ensemble contenant tous les éléments de l'ensemble de droite de la relation qui sont en relation avec au moins un élément de l'ensemble de gauche de la relation ».

Remarque :

- Certains parlent d'ensemble de définition de la relation, ou de domaine de la relation, mais cela peut porter à confusion étant donné qu'une relation est une fonction et que techniquement, son domaine de définition est le produit cartésien de son ensemble à gauche avec son ensemble à droite.

Définition 57. "Ensemble des reliés de x par la relation binaire R "

Soit $R := \mathcal{R}^\circ(E \rightarrow F, G)$

L'ensemble des reliés d'un élément $x \in E$ par R est

$$[x]_R = \{y \in F \mid xRy\}$$

Dit autrement : « L'ensemble des reliés de x par R c'est l'ensemble contenant tous les éléments de l'ensemble de droite de R qui sont en relation avec x par R ».

Remarques :

- Quand la relation binaire R est une relation binaire interne d'équivalence, l'ensemble des reliés de x par R est appelé "classe d'équivalence de x par R "

Définition 58. "Relation binaire induite par R de $E'_{\subseteq E} \rightarrow F'_{\subseteq F}$ "
 Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$

R' est une relation binaire induite par R

$$\begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ & R' = \mathcal{R}^\circ (E' \rightarrow F', G') \\ & \quad \wedge \\ & (E' \subseteq E) \wedge (F' \subseteq F) \\ & \wedge (\forall (a, b) \in (E \times F), xR'y \Rightarrow xRy) \end{aligned}$$

Dit autrement :

Soient $R := \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$

et $E' \subseteq E$

et $F' \subseteq F$

On peut alors créer une relation de E' vers F' de graphe de correspondance G' :

$$R' := \mathcal{R}^\circ (E' \rightarrow F', G')$$

qui est telle que $\forall (a, b) \in (E \times F), xR'y \Rightarrow xRy$

Dit autrement : « Une relation binaire R' induite par R , c'est une "sous-relation" de R , on pourrait dire que c'est R restreinte à $E' \times F'$, mais il est possible d'avoir une relation binaire induite par une relation sans forcément avoir le même graphe de correspondance, que ce graphe de correspondance G' soit inclus dans G par exemple, ou qu'une partie soit incluse dans G et que le reste utilise des éléments qui n'appartiennent pas à $E \times F$, etc ».

Remarques :

- On n'a pas forcément besoin de changer (en l'occurrence, restreindre) le graphe G dans la relation induite vu que l'ensemble de départ de la fonction sera déjà restreint, donc la fonction donnera le bon résultat.
- Dans le cas où on a R une relation binaire interne sur E de graphe de correspondance G , avec $E' \subseteq E$, on pourra donc également créer une relation binaire induite par R sur E' : $R' := \mathcal{R}^\circ (E', G)$

Définition 59. "Relation binaire inverse d'une relation binaire R "

Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$

R' est la relation inverse de R

\Longleftrightarrow

$$R' = \mathcal{R}^\circ (F \rightarrow E, G')$$

avec

$$G' = \{(y, x) \in (F \times E) \mid ((x, y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R})\}$$

Dit autrement : « En gros c'est la même relation mais avec les flèches qui ont un sens inversé. Du coup l'ensemble de gauche devient l'ensemble de droite et inversement, et le graphe de correspondance est le même mais en inversant l'ordre des éléments dans les couples ».

Remarques :

- Attention à ne pas confondre une relation binaire inverse d'une relation binaire, avec une relation binaire réciproque d'une relation binaire, qui serait la fonction réciproque de cette dernière. Du reste, une relation binaire ne pourrait admettre une fonction réciproque que si ses ensembles à gauche et à droite comptent 3 éléments en tout (répartis en 2 éléments d'un côté et 1 élément de l'autre), afin que le cardinal du produit cartésien soit égal à 2 pour rendre possible la bijection.
- Certains auteurs parlent d'ailleurs de relation binaire réciproque pour désigner les relations binaires inverses, histoire de bien embrouiller le monde
- Pour toute relation binaire, il existe une relation binaire inverse unique (qui peut parfois être une relation binaire identique)
- Concernant la notation de la relation binaire inverse d'une relation binaire R , On la note parfois R^{-1} , mais étant donné que R est une application, cela peut aussi être vu/parsé comme l'opération $\frac{1}{R}$ ce qui crée une situation équivoque. De même, on pourrait la noter R_{-1} mais cela pourrait être vu/parsé comme l'opération qui retourne la fonction réciproque de R , ce qui crée également une situation équivoque.

Du fait qu'il y a infiniment plus de situations où une relation n'est pas bijective que de situations où elle l'est et admet une fonction réciproque, dans une situation où l'on a une relation R instanciée avec la méthode constructeur \mathcal{R}° , la notation R_{-1} désignera systématiquement la relation inverse de R sauf si la relation est bijective, auquel cas ça désignera la fonction réciproque de R (et alors il faudra nommer explicitement la relation inverse de R si on en a besoin).

D'une certaine manière, on peut donc dire que l'opérateur $-_1$ appliqué à une fonction :

- retourne la fonction réciproque si la fonction opérée est bijective*
- sinon, si c'est une relation, c'est-à-dire un objet instancié avec \mathcal{R}° , retourne la relation inverse*
- sinon, raise error*

- *Les relations binaires \leq et \geq sur un ensemble quelconque sont toutes deux des relations binaires inverses l'une de l'autre, de même que les relations binaires $<$ et $>$.*
- *Les relations binaire "aime" et "est aimé par" sont toutes deux des relations binaires inverses l'une de l'autre.*
- *Une relation binaire interne est symétrique ssi sa relation binaire inverse est symétrique*

Définition 60. "Relation binaire complémentaire d'une relation binaire"

Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$

R' est la relation binaire complémentaire de R

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{R'}} = \{(x, y) \in (E \times F) \mid (x, y) \notin \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}\}$$

Dit autrement :

Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$

R' est la relation binaire complémentaire de R

$$\Longleftrightarrow$$

$$R' = \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, ((E \times F) - G))$$

Dit autrement :

Soit $R := \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, G)$

R' est la relation binaire complémentaire de R

$$\Longleftrightarrow$$

$$R' = \mathcal{R}^\circ (E \rightarrow F, \mathcal{C}_{(E \times F)}(G))$$

Dit autrement : « La relation binaire complémentaire d'une relation binaire R c'est tout simplement une relation binaire avec le même ensemble de gauche, le même ensemble de droite, et un graphe de correspondance qui contient uniquement tous les couples que le graphe de correspondance de R ne contient pas ».

Remarques :

- Toute relation binaire dispose d'une relation binaire complémentaire
- Pour toute relation binaire R , sa relation binaire complémentaire peut se noter \overline{R} , ou \cancel{R} . On peut donc voir "overline" ou "cancel" comme un opérateur unaire qui prend en argument une relation binaire et qui retourne sa relation binaire complémentaire.

Ainsi, l'assertion $\neg(xRy)$ est équivalente à $x\overline{R}y$ ou $x\cancel{R}y$, ce qui fait que la notation "cancel" prend tout son sens, comme dans \notin ou \neq

- Les relations binaires \leq et $>$ sur un ensemble quelconque sont complémentaires
- Les relations binaires "aime" et "n'aime pas" sur un ensemble quelconque sont complémentaires

- Une relation binaire interne est réflexive ssi sa relation binaire complémentaire est réflexive
- Une relation binaire interne est symétrique ssi sa relation binaire complémentaire est symétrique
- Pour toute relation R , $\overline{\overline{R}} = R$

Définition 61. "Composition de 2 relations binaires"

Soient $R_1 := \mathcal{R}^\circ(E \rightarrow F, G_1)$

et $R_2 := \mathcal{R}^\circ(F \rightarrow H, G_2)$

$$R_1 \circ R_2 = \mathcal{R}^\circ(E \rightarrow H, G_3)$$

avec

$$G_3 = \left\{ (x, y) \in (E \times H) \mid \left(\exists z \in F : \left((x, z) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{R_1}} \right) \wedge \left((z, y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{R_2}} \right) \right) \right\}$$

Dit autrement : «

Soient $R_1 := \mathcal{R}^\circ(E \rightarrow F, G_1)$

et $R_2 := \mathcal{R}^\circ(F \rightarrow H, G_2)$

$$R_1 \circ R_2 = \mathcal{R}^\circ(E \rightarrow H, G_3)$$

avec

$$G_3 = \{ (x, y) \in (E \times H) \mid (\exists z \in F : (xR_1z \wedge zR_2y)) \}$$

Dit autrement : « La composition de 2 relations binaires (qui n'est pas la composition fonctionnelle qu'on a pu voir plus haut), c'est une nouvelle relation dont l'ensemble de gauche est celui de la première relation, l'ensemble de droite est celui de la seconde relation et le graphe de correspondance est l'ensemble des couples dont le premier élément est relié au second élément par l'intermédiaire d'un 3e élément. C'est donc l'ensemble des couples (x, y) tels qu'on a xR_1z et zR_2y ».

Remarque :

- L'opérateur de composition utilisé ici réalise une composition de relations et non une composition de fonction. De toute façon la composition fonctionnelle de 2 relations binaires n'est pas possible vu que l'ensemble d'arrivée d'une relation binaire ne pourra jamais être égal à l'ensemble de départ d'une autre relation binaire. En effet, l'ensemble d'arrivée d'une relation binaire est systématiquement $\{0, 1\}$, un ensemble qui ne peut pas être obtenu par le produit cartésien de 2 ensembles.

L'opérateur de composition \circ fonctionne donc comme suit :

- Si les 2 fonctions passées en argument sont composables, alors ça réalise une composition de fonction
 - Sinon, si les fonctions passées en argument sont des relations (des objets instantanciés par \mathcal{R}°), alors ça les compose comme indiqué ci-dessus,
 - Sinon ça raise error
- Dans le cas d'une relation binaire interne R sur E , on aura

$$R \circ R = \mathcal{R}^\circ(E, \{ (x, y) \in E^2 \mid (\exists z \in E : (xRz \wedge zRy)) \})$$

Définition 62. "Réflexivité d'une relation binaire interne"

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est réflexive

\Longleftrightarrow

$\forall x \in E, xRx$

Dit autrement : « Une relation binaire interne est réflexive ssi tous les éléments de son ensemble sont en relation avec eux-même ».

Remarque :

- Du coup, toute relation binaire interne réflexive est forcément **totale**.
- Une relation binaire interne est réflexive ssi sa relation binaire complémentaire est antiréflexive
- R non réflexive $\Leftrightarrow (\exists x \in E \mid \neg(xRx))$
- la relation "est égal à" sur un ensemble wrapper W , $=_W$ est réflexive

Définition 63. "Antiréflexivité d'une relation binaire interne"

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antiréflexive

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall x \in E, \neg(xRx)$$

Dit autrement : « Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antiréflexive

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall x \in E, x\bar{R}x$$

Dit autrement : « Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antiréflexive

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall x \in E, x\cancel{R}x$$

Dit autrement : « Une relation binaire interne est antiréflexive ssi tous les éléments de son ensemble ne sont pas en relation avec eux-même ».

Remarques :

- Certains auteurs parlent de relation binaires internes **irréflexives**
- Une relation binaire interne peut n'être ni réflexive, ni antiréflexive.
- Une relation binaire interne non réflexive n'est pas forcément antiréflexive
- Une relation binaire interne est antiréflexive ssi sa relation binaire complémentaire est réflexive.
- R non antiréflexive $\Leftrightarrow (\exists x \in E \mid xRx)$
- La relation "n'est pas égal à" sur un ensemble wrapper W , \neq_W , est antiréflexive
- La relation "est enfant de" est antiréflexive

Définition 64. "Transitivité d'une relation binaire interne"

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est transitive

\Longleftrightarrow

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est transitive

\Longleftrightarrow

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R \circ R)}} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}$$

Dit autrement : « Une relation binaire interne est transitive ssi le graphe de correspondance est tel que le fait qu'un élément x soit en relation avec un élément y et qu'un élément y soit en relation avec un élément z implique que forcément x est en relation avec z ».

Remarques :

- Pour $R = \mathcal{R}^\circ(E, G)$, $R \circ R = \mathcal{R}^\circ(E, G')$ avec
 $G' = \{(x, y) \in E^2 \mid (\exists z \in E : (xRz \wedge zRy))\}$
 Du coup, si R est transitive, tous les couples (x, y) qui répondent à cette condition étaient déjà dans $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}$ ce qui fait que $\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R \circ R)}} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}$
- R non transitive $\Leftrightarrow (\exists (x, y, z) \in E^3 \mid (xRy \wedge yRz \wedge \neg(xRz)))$
- La relation "est égal à" sur un ensemble wrapper W , $=_W$ est transitive

Définition 65. "Antitransitivité d'une relation binaire interne"

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antitransitive

\Longleftrightarrow

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow \neg (xRz))$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antitransitive

\Longleftrightarrow

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow x\bar{R}z)$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antitransitive

\Longleftrightarrow

$$\forall (x, y, z) \in E^3, ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow x\cancel{R}z)$$

Dit autrement : « Une relation binaire interne est antitransitive ssi le graphe de correspondance est tel que le fait qu'un élément x soit en relation avec un élément y et qu'un élément y soit en relation avec un élément z implique que forcément x n'est pas en relation avec z ».

Remarques :

- Une relation binaire interne peut n'être ni transitive, ni antitransitive.
- La relation "est le père de" est antitransitive

Définition 66. "Symétrie d'une relation binaire interne"

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est symétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (xRy \Rightarrow yRx)$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est symétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (xRy \Leftrightarrow yRx)$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est symétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$R = \bar{R}$$

Dit autrement : « Une relation binaire interne est symétrique ssi tout élément en relation avec un second veut dire que forcément le second est en relation avec le premier ».

Remarques :

- Sur \mathbb{N} , la relation "forme un produit pair avec" est symétrique (vu que la multiplication sur \mathbb{N} est commutative)

Définition 67. "Antisymétrie (faible) d'une relation binaire interne"

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antisymétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, ((xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y))$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antisymétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (xRy \Rightarrow yRx)$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est antisymétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R_{-1})}} \subseteq (\setminus_E)$$

Dit autrement : « Une relation binaire interne est antisymétrique ssi tout élément en relation avec un second veut dire que forcément le second n'est pas en relation avec le premier, ou alors si c'est le cas, c'est que c'est le même élément. ».

Remarques :

- C'est un peu contre-intuitif parce que si on suit la logique des définitions précédentes de réflexivité/antiréflexivité et transivité/antitransitivité, on devrait définir l'antisymétrie par le fait que $\forall (x, y) \in E^2, (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$, mais cela priverait de la réflexivité et donc toute relation antisymétrique serait forcément non réflexive. Du coup la définition exclut les cas où les 2 éléments sont les mêmes, et l'intégration des cas où les 2 éléments sont les mêmes, correspondant à la définition "logique" ci-dessus, est la définition de l'asymétrie d'une relation binaire (cf ci-dessous).
- On parle donc d'antisymétrie car quand on regarde le graphe, les relations ne sont que à sens unique (sauf quand il est question d'éléments identiques).
- Certains auteurs parlent d'**antisymétrie faible** pour l'antisymétrie, et d'**antisymétrie forte** pour l'asymétrie. C'est un peu plus logique compte tenu de ce qu'on a dit plus haut.

Définition 68. "Asymétrie (antisymétrie forte) d'une relation binaire interne"
 Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est asymétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est asymétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (xRy \Rightarrow y\bar{R}x)$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est asymétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (xRy \Rightarrow y\cancel{R}x)$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est asymétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$G_{\mathcal{R}_R} \cap G_{\mathcal{R}_{(R_{-1})}} = \emptyset$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est asymétrique

$$\Longleftrightarrow$$

$$(R \text{ est antisymétrique}) \wedge (R \text{ est antiféflexive})$$

Dit autrement : « Une relation binaire interne est asymétrique ssi tout élément en relation avec un second veut dire que forcément le second n'est pas en relation avec le premier ».

Remarques :

- On utilise aussi le terme d'**antisymétrie forte** pour parler de l'asymétrie d'une relation binaire interne
- Ça veut donc dire que toute relation binaire asymétrique est forcément antisymétrique
- La relation binaire interne "est le successeur de" est asymétrique
- La relation binaire interne "est enfant de" est asymétrique
- Une relation binaire interne ne peut pas être à la fois symétrique et antisymétrique sauf si son graphe de correspondance est \emptyset
- Dans un ensemble E à $n \in \mathbb{N}$ éléments, il y a $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations binaires internes asymétriques sur E possibles

Définition 69. "Définition d'une relation binaire interne totale"

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est une relation binaire interne totale

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\forall (x, y) \in E^2, (xRy \vee yRx))$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est une relation binaire interne totale

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R^{-1})}} = E \times F$$

Dit autrement : « Une relation binaire est totale ssi tous les éléments de l'ensemble sont reliés dans au moins un sens ».

Remarques :

- Dans le cas d'une relation binaire interne sur E , on écrirait :

$$R \text{ est une relation binaire totale} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, (xRy \vee yRx)$$

ou

$$R \text{ est une relation binaire totale} \Leftrightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{(R^{-1})}} = E^2$$

- Toute relation binaire totale est réflexive

Définition 70. *"Relation binaire interne d'équivalence"*

Une relation binaire interne d'équivalence est une relation binaire interne :

- réflexive
- transitive
- symétrique

Remarques :

- Une relation d'équivalence est souvent notée \sim
- Sur tout ensemble W , la relation d'égalité est une relation d'équivalence, et c'est la plus forte des relations d'équivalence sur l'ensemble W , c'est-à-dire que son graphe est inclus dans celui de n'importe quelle autre relation d'équivalence sur cet ensemble
- La relation de congruence modulo $a \in \mathbb{Z}$ sur \mathbb{Z} est une relation d'équivalence
- La relation de congruence modulo 2π sur \mathbb{R} est une relation d'équivalence
- La relation de congruence modulo H sur G est une relation d'équivalence (avec G qui est un groupe commutatif et H qui est un sous-groupe de G)
-

Définition 71. *"Classe d'équivalence d'une relation binaire interne d'équivalence"*

Soit \sim une relation binaire interne d'équivalence sur un ensemble E
et $x \in E$

La classe d'équivalence de x pour la relation \sim est :

$$[x]_{\sim} = \{y \in E \mid x \sim y\}$$

Dit autrement : « La classe d'équivalence d'un élément x par rapport à une relation d'équivalence \sim , c'est juste l'ensemble des éléments de E avec lesquels x est en relation via \sim ».

Remarques :

- Quand la relation concernée est évidente, souvent on ne la précise pas dans la notation entre crochets, genre on écrit $[x]$
- Du coup, $y \in [x]_{\sim} \Leftrightarrow x \sim y$
- Tout élément de $[x]_{\sim}$ est appelé "représentant de $[x]$ "
- $(x \sim y) \Leftrightarrow ([x]_{\sim} = [y]_{\sim})$
- Dit autrement, $(y \in [x]_{\sim}) \Leftrightarrow ([y]_{\sim} = [x]_{\sim})$

- L'ensemble contenant toutes ces classes d'équivalence est ce qu'on appelle un **ensemble quotient** de E par \sim , c'est donc le résultat de l'opération E/\sim ou $\frac{E}{\sim}$. Donc d'une certaine manière, la division d'un ensemble E par un sous-ensemble de E^2 , $G_{\subseteq E^2}$, est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}^\circ(E, G)$. Dit autrement,

$$\frac{E}{G_{\subseteq E^2}} = \{[x_{\in E}]_{\sim}\} = \{[x]_{\sim} \mid x \in E\} = \{\{y \in E \mid x \sim y\} \mid x \in E\}$$

- L'ensemble de toutes les classes d'équivalences pour une relation d'équivalence \sim sur E (c'est-à-dire l'ensemble quotient de E par \sim) est une partition de E .
- Inversement, toute partition d'un ensemble E définit une unique relation d'équivalence sur E . Il y a donc bijection naturelle entre les partitions d'un ensemble et les relations d'équivalence sur cet ensemble.

Le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments est donc égal au nombre de Bell B_n , qui peut se calculer par récurrence (cf page 135).

- L'ensemble des relations d'équivalence sur un ensemble E se note $\mathcal{R}_{\sim}(E)$ et est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$. On a donc

$$\mathcal{R}_{\sim}(E) = \{R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\}) \mid (R \text{ est une relation d'équivalence})\}$$

De manière générale, on a la fonction \mathcal{R}_{\sim} qui se définit, au sein d'un ensemble wrapper W , par

$$\mathcal{R}_{\sim} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})) \\ E & \mapsto & \{R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\}) \mid (R \text{ est une relation d'équivalence})\} \end{array} \right)$$

Définition 72. "Ensemble des représentants d'une relation binaire d'équivalence"

Soit \sim une relation binaire interne d'équivalence sur un ensemble E

On appelle "ensemble des représentants pour \sim " l'ensemble

$$A \subseteq E \mid (\forall x \in E, (\exists! y \in A : x \sim y)) = \{y \in [x]_{\sim} \mid x \in E\}$$

Dit autrement : « Un ensemble des représentants de \sim c'est un sous-ensemble de E qui a la particularité que quand on l'intersecte avec une classe d'équivalence de R , quelle qu'elle soit, ça donne un singleton spécifique de la classe d'équivalence en question. Il y aura donc bijection entre l'ensemble des classes d'équivalences de \sim (c'est-à-dire l'ensemble quotient de E par \sim) et l'ensemble des représentants de \sim ».

Dit autrement : « Un ensemble des représentants de \sim s'obtient en collectant dans chaque classe d'équivalence de \sim un élément particulier uniquement présent dans cette classe d'équivalence ».

Remarques :

- Un représentant d'une classe d'équivalence est donc un élément de cette classe d'équivalence qui n'est présent que dans cette dernière (c'est-à-dire dans cet ensemble particulier, on fait fi des doublons de classe genre tous les cas où $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$)
- Vu que dans le cadre d'une relation d'équivalence, $\forall y \in E, y \in [x]_{\sim} \Leftrightarrow [y]_{\sim} = [x]_{\sim}$, le représentant d'une classe d'équivalence donnée sera n'importe quel élément de cette classe. Du coup c'est facile à déterminer+++ et pratique à mort. Pour constituer un ensemble de représentants, il suffit donc de prendre un élément quelconque de chaque classe d'équivalence distincte.
- Ça signifie également qu'il peut y avoir plusieurs ensembles de représentants possibles, parfois une infinité, pour une relation d'équivalence donnée.
- Dans le cas de la relation de congruence modulo 9 sur \mathbb{Z} , notée \equiv , on aura donc un ensemble des représentants de \equiv qui sera

$$A = [0, 8]_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\text{En effet, } \forall n \in \mathbb{Z}, [n]_{\equiv} = \{n + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} = (n + 9\mathbb{Z})$$

Or, étant donné que \equiv est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} , ça veut dire que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, [n]_{\equiv} = [n + 9m]_{\equiv}$ vu que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, (n + 9m) \in [n]_{\equiv}$

Par ailleurs, on peut également voir par calcul que $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned} [n + 9m]_{\equiv} &= \{(n + 9m + 9k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(n + 9(m + k)) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(n + 9l) \mid l \in \mathbb{Z}\} \\ [n + 9m]_{\equiv} &= [n]_{\equiv} \end{aligned}$$

Donc vu que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $[n]_{\equiv} = [n + 9m]_{\equiv}$,
il y a donc 9 classes d'équivalences distinctes pour \equiv , genre on prend un $a \in \mathbb{Z}$
quelconque et on a les 9 classes d'équivalences distinctes

$$\begin{aligned} [a]_{\equiv} &= \{a + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 0) + 9\mathbb{Z}) \\ [a + 1]_{\equiv} &= \{(a + 1) + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 1) + 9\mathbb{Z}) \\ [a + 2]_{\equiv} &= \{(a + 2) + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 2) + 9\mathbb{Z}) \\ [a + 3]_{\equiv} &= \{(a + 3) + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 3) + 9\mathbb{Z}) \\ [a + 4]_{\equiv} &= \{(a + 4) + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 4) + 9\mathbb{Z}) \\ [a + 5]_{\equiv} &= \{(a + 5) + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 5) + 9\mathbb{Z}) \\ [a + 6]_{\equiv} &= \{(a + 6) + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 6) + 9\mathbb{Z}) \\ [a + 7]_{\equiv} &= \{(a + 7) + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 7) + 9\mathbb{Z}) \\ [a + 8]_{\equiv} &= \{(a + 8) + 9k \mid k \in \mathbb{Z}\} &= ((a + 8) + 9\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre $a = 0$ et on a un ensemble de représentants de \equiv qui est $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

De manière générale, un ensemble de représentants de \equiv sera un ensemble

$$\begin{aligned} &\{(a + 9k_0), (a + 1 + 9k_1), (a + 2 + 9k_2), \\ &\quad (a + 3 + 9k_3), (a + 4 + 9k_4), (a + 5 + 9k_5), \\ &\quad (a + 6 + 9k_6), (a + 7 + 9k_7), (a + 8 + 9k_8) \\ &\mid \left((a \in \mathbb{Z}) \wedge (k_i)_{i \in [0, 8]_{\mathbb{N}}} \in \mathbb{Z}^9 \right)\} \end{aligned}$$

ou plus sobrement,

$$\left\{ (a + i + k_i) \mid \left((i \in [0, 8]_{\mathbb{N}}) \wedge \left((k_i)_{i \in [0, 8]_{\mathbb{N}}} \in \mathbb{Z}^9 \right) \right) \right\}$$

- $[0, 2\pi]_{\mathbb{R}}$ et $] - \pi, \pi]_{\mathbb{R}}$ sont des ensembles de représentants pour la relation de congruence modulo 2π sur \mathbb{R}

Définition 73. "Relation binaire interne d'ordre"

Une relation binaire interne d'ordre est une relation binaire interne :

- réflexive
- transitive
- antisymétrique

Remarque :

- On note souvent une relation d'ordre \preceq au même titre qu'on note souvent une relation d'équivalence \sim
- Une relation binaire d'ordre qui est aussi une relation totale est une relation d'ordre totale. Quand la relation d'ordre n'est pas totale on peut la qualifier de partielle.
- La relation \leq sur \mathbb{R} est une relation d'ordre totale, de même que la relation induite par cette dernière sur \mathbb{Q} , \mathbb{Z} et \mathbb{N}
- La relation binaire inverse d'une relation d'ordre est également une relation d'ordre
- Certains auteurs parlent des relations binaires internes réflexives et antisymétriques comme de relations d'ordre "large"

- Quand on a une famille d'ensembles ordonnées $\left((E_i)_{\preceq_i} \right)_{i \in I} \in \mathcal{P}(W)$ avec $I = [1, n_{\in \mathbb{N}^*}]_{\mathbb{N}}$, on peut définir une relation d'ordre "produit",
 $\preceq_{\Pi} := \mathcal{R}^\circ \left(\prod_{i \in I} (E_i), G \right)$ avec

$$G = \left\{ ((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \in \left(\prod_{i \in I} (E_i) \times_f \prod_{i \in I} (E_i) \right) \mid (\forall i \in I, x_i \preceq_i y_i) \right\}$$

En général, \preceq_{Π} n'est pas une relation d'ordre totale

- L'ensemble des relations d'ordre sur un ensemble E se note $\mathcal{R}_{\preceq}(E)$ et est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$. On a donc

$$\mathcal{R}_{\preceq}(E) = \{ R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\}) \mid (R \text{ est une relation d'ordre}) \}$$

De manière générale, on a la fonction \mathcal{R}_{\preceq} qui se définit, au sein d'un ensemble wrapper W , par

$$\mathcal{R}_{\preceq} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})) \\ E & \mapsto & \{ R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\}) \mid (R \text{ est une relation d'ordre}) \} \end{array} \right)$$

Définition 74. "Relation binaire interne d'ordre strict"

Une relation binaire interne d'ordre strict est une relation binaire interne :

- antiréflexive
- transitive
- antisymétrique

Remarque :

- Une relation binaire d'ordre strict qui est aussi une relation totale est une relation d'ordre strict totale
- Toute relation d'ordre strict étant antiréflexive et antisymétrique, elle est donc également asymétrique (vu que le fait d'être antisymétrique signifie que $\forall (x, y) \in E^2, ((xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y))$ et qu'au sein d'une relation binaire antiréflexive, la situation où $x = y$ est impossible, la situation $(xRy \wedge yRx)$ est donc impossible ce qui veut dire que $\forall (x, y) \in E^2, (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$ ce qui est la définition de l'asymétrie d'une relation binaire interne)
- La relation $<$ sur \mathbb{R} est une relation d'ordre strict totale, de même que la relation induite par cette dernière sur \mathbb{Q} , \mathbb{Z} et \mathbb{N}
- La relation \subseteq sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une relation d'ordre non totale.
- La relation de divisibilité $|$ sur \mathbb{N} est une relation d'ordre non totale également.
- L'ensemble des relations d'ordre strict sur un ensemble E se note $\mathcal{R}_{<}(E)$ et est logiquement un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$. On a donc

$$\mathcal{R}_{<}(E) = \{R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\}) \mid (R \text{ est une relation d'ordre strict})\}$$

De manière générale, on a la fonction $\mathcal{R}_{<}$ qui se définit, au sein d'un ensemble wrapper W , par

$$\mathcal{R}_{<} = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})) \\ E & \mapsto & \{R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\}) \mid (R \text{ est une relation d'ordre strict})\} \end{array} \right)$$

Définition 75. "Ensemble ordonné par une relation d'ordre"

Un ensemble E (partiellement ou totalement) ordonné par la relation d'ordre \preceq est un ensemble dont on considère que tous ou certains ou aucuns de ses éléments sont ordonnés par la relation d'ordre \preceq .

En gros un ensemble ordonné par une relation d'ordre donnée, c'est un ensemble, on peut lui faire tout ce qu'on peut faire avec les ensembles, mais on considère ses éléments sous le spectre de cette relation d'ordre qui permet de trier certains ou tous ou aucuns ses éléments suivant un ordre précis.

On peut le définir comme ça : "Soit E un ensemble ordonné par \preceq ", ou bien en précisant en indice une relation d'ordre à l'ensemble, genre E_{\preceq} ou $\{1, 2, 3\}_{\preceq}$ ou

$\{1, 2, 3\}_{\mathcal{R}^\circ(\{1,2,3\},\{(1, 3), (1, 2), (3, 2)\})}$. On peut également utiliser la méthode constructeur \mathcal{S}° comme ceci :

$$E_{\preceq} = \mathcal{S}^\circ(E, \preceq)$$

On peut aussi packer l'ensemble et sa relation d'ordre dans un couple (E, \preceq) , si on a une suite d'ensembles et une suite de relations d'ordres qu'on veut combiner pour faire une suite d'ensembles ordonnés par exemple, etc.

Implicitement, on considère les ensembles \mathbb{N}, \mathbb{Z} , etc comme ordonnés par \leq sauf mention contraire.

Remarques :

- Tout ensemble sans précision d'une relation d'ordre, contenant des éléments d'un ensemble usuellement implicitement ordonné par une relation d'ordre (genre \mathbb{R}) sera implicitement ordonné suivant la même relation d'ordre
- Quand on a un ensemble E partiellement ordonné par \preceq , si on a $A_{\subseteq E}$ qui est totalement ordonné par \preceq , on dit que A est une **chaîne de E_{\preceq}**

Définition 76. "Élément maximum / minimum / maximal / minimal de E pour \preceq "
 Soit $\preceq \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0,1\})$ une relation d'ordre sur E

$x_{\in E}$ est un élément maximum de E pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall y \in E, y \preceq x$$

Dit autrement : « Un élément de E est un maximum pour \preceq ssi tous les autres éléments de E lui sont inférieurs via \preceq ».

$x_{\in E}$ est un élément minimum de E pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall y \in E, x \preceq y$$

Dit autrement : « Un élément de E est un minimum pour \preceq ssi tous les autres éléments de E lui sont supérieurs via \preceq ».

$x_{\in E}$ est un élément maximal de E pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall y \in E, ((x \preceq y) \Rightarrow (x = y))$$

Dit autrement : « Un élément maximal de E pour \preceq est un élément de E qui n'est pas forcément en relation avec tous les éléments de E , et dont tous les éléments qui sont en relation avec lui, lui sont inférieurs via \preceq . Donc un élément maximum pour \preceq est un élément maximal pour \preceq mais l'inverse n'est pas forcément vrai (ça l'est dès lors que l'élément maximal est en relation avec tous les éléments de E) ».

$x_{\in E}$ est un élément minimal de E pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall y \in E, ((y \preceq x) \Rightarrow (x = y))$$

Dit autrement : « Un élément minimal de E pour \preceq est un élément de E qui n'est pas forcément en relation avec tous les éléments de E , et dont tous les éléments qui sont en relation avec lui, lui sont supérieurs via \preceq . Donc un élément minimum pour \preceq est un élément minimal pour \preceq mais l'inverse n'est pas forcément vrai (ça l'est dès lors que l'élément minimal est en relation avec tous les éléments de E) ».

Remarques :

- Tout ensemble **fini non vide** admet au moins un élément maximal et un élément minimal, quelle que soit la relation d'ordre considérée sur celui-ci.
- Tout ensemble E ordonné par une relation d'ordre totale \preceq , qui admet au moins un élément maximal m , n'en admet en réalité qu'un seul qui est également l'élément maximum de E pour \preceq .
- Tout ensemble E ordonné par une relation d'ordre totale \preceq , qui admet au moins un élément minimal m , n'en admet en réalité qu'un seul qui est également l'élément minimum de E pour \preceq .
- Les ensembles \mathbb{Z}, \mathbb{Q} et \mathbb{R} n'admettent aucun élément maximal ni minimal pour \leq
- L'ensemble \mathbb{N} , pour \leq , n'admet aucun élément maximal, et admet un élément minimal qui est 0 (la relation \leq sur \mathbb{N} étant totale, 0 est donc aussi le minimum de \mathbb{N} pour \leq)
- Un élément maximum pour une relation d'ordre est toujours unique. Certains auteurs le notent $\max E$ mais je trouve ça incomplet car on ne sait pas de quelle relation d'ordre il est question dans l'absolu. Je préfère la notation $\max_{\preceq}(E)$, et quand la relation d'ordre n'est pas spécifiée en indice ça veut dire que c'est l'opérateur \leq des objets de l'ensemble E qui est utilisé par la fonction (donc $\max(E) = \max_{\leq}(E)$). On a donc

$$\max_{\preceq}(E) = (x \in E \mid (\forall a \in E, a \preceq x))$$

Bien évidemment si la relation d'ordre n'a pas de maximum, ça crash de la plus catastrophique des manières donc il faut vraiment être sûr de ce qu'on fait quand on utilise cette fonction pour le bien du futur de l'humanité. Sinon on préférera utiliser la fonction *maxal* présentée plus bas.

La fonction *max* est implémentée comme suit (au sein d'un ensemble wrapper W) :

$$\text{max} = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\preceq} & \rightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow W) \\ \preceq & \mapsto & F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & W \\ E & \mapsto & (x \in E \mid (\forall a \in E, a \preceq x)) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Donc d'un point de vue "parsing", quand on écrit $\max_{\preceq}(E)$, en fait ça correspond à $\max(\preceq)(E)$

- Un élément minimum pour une relation d'ordre est toujours unique. Certains auteurs le notent $\min E$ mais je trouve ça incomplet car on ne sait pas de quelle relation d'ordre il est question dans l'absolu. Je préfère la notation $\min_{\preceq}(E)$, et quand la relation d'ordre n'est pas spécifiée en indice ça veut dire que c'est l'opérateur \leq des objets de l'ensemble E qui est utilisé par la fonction (donc $\min(E) = \min_{\leq}(E)$). On a donc

$$\min_{\preceq}(E) = (x \in E \mid (\forall a \in E, x \preceq a))$$

Bien évidemment si la relation d'ordre n'a pas de minimum, ça crash de la plus désastreuse des façons donc il faut vraiment être sûr de ce qu'on fait quand on utilise cette fonction pour le bien de la stabilité de notre univers. Sinon on préférera utiliser la fonction *minal* présentée plus bas.

La fonction *min* est implémentée comme suit (au sein d'un ensemble wrapper W) :

$$\min = F^{\circ} \left(\begin{array}{cc} \mathcal{R}_{\preceq} & \rightarrow \\ \preceq & \mapsto \end{array} F^{\circ} \left(\begin{array}{cc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow \\ E & \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow W) \\ W \\ (x \in E \mid (\forall a \in E^2, x \preceq a)) \end{array} \right) \right)$$

Donc d'un point de vue "parsing", quand on écrit $\min_{\preceq}(E)$, en fait ça correspond à $\min(\preceq)(E)$

- On peut obtenir l'ensemble des maximaux d'un ensemble A pour une relation d'ordre \preceq en utilisant la fonction *maxal* comme ceci : $\maxal_{\preceq}(E)$, et quand la relation d'ordre n'est pas spécifiée en indice ça veut dire que c'est l'opérateur \leq des objets de l'ensemble E qui est utilisé par la fonction (donc $\maxal(E) = \maxal_{\leq}(E)$). Dans le cas où l'ensemble dispose d'un maximum pour \preceq , logiquement on aura $\maxal_{\preceq}(E) = \{\max_{\preceq}(E)\}$. On a donc

$$\maxal_{\preceq}(E) = \{x \in E \mid (\forall a \in E, ((x \preceq a) \Rightarrow (x = a)))\}$$

La fonction *maxal* est implémentée comme suit (au sein d'un ensemble wrapper W) :

$$\maxal = F^{\circ} \left(\begin{array}{cc} \mathcal{R}_{\preceq} & \rightarrow \\ \preceq & \mapsto \end{array} F^{\circ} \left(\begin{array}{cc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow \\ E & \mapsto \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)) \\ \mathcal{P}(W) \\ \{x \in E \mid (\forall a \in E, ((x \preceq a) \Rightarrow (x = a)))\} \end{array} \right) \right)$$

Donc d'un point de vue "parsing", quand on écrit $\maxal_{\preceq}(E)$, en fait ça correspond à $\maxal(\preceq)(E)$

- On peut obtenir l'ensemble des minimaux d'un ensemble E pour une relation d'ordre \preceq en utilisant la fonction minal comme ceci : $\text{minal}_{\preceq}(E)$, et quand la relation d'ordre n'est pas spécifiée en indice ça veut dire que c'est l'opérateur \leq des objets de l'ensemble E qui est utilisé par la fonction (donc $\text{minal}(E) = \text{minal}_{\leq}(E)$). Dans le cas où l'ensemble dispose d'un minimum pour \preceq , logiquement on aura $\text{minal}_{\preceq}(E) = \{\min_{\preceq}(E)\}$. On a donc

$$\text{minal}_{\preceq}(E) = \{x \in E \mid (\forall a \in E, ((x \preceq a) \Rightarrow (x = a)))\}$$

La fonction minal est implémentée comme suit (au sein d'un ensemble wrapper W) :

$$\text{minal} = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\preceq} & \rightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)) \\ \preceq & \mapsto & F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ E & \mapsto & \{x \in E \mid (\forall a \in E, ((a \preceq x) \Rightarrow (a = x)))\} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Donc d'un point de vue "parsing", quand on écrit $\text{minal}_{\preceq}(E)$, en fait ça correspond à $\text{minal}(\preceq)(E)$

- Si on considère l'ensemble $E := (\mathcal{P}(\{0,1\}) - \{\emptyset\})$, on a donc $E = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Ensuite si on considère la relation $R := \mathcal{R}^{\circ}(E, \{(A, B) \in E^2 \mid A \subseteq B\})$, son graphe de correspondance est donc $\{(\{0\}, \{0\}), (\{1\}, \{1\}), (\{0\}, \{0,1\}), (\{1\}, \{0,1\}), (\{0,1\}, \{0,1\})\}$.

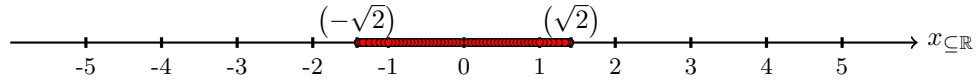
R est bien une relation d'ordre car elle est réflexive ($\forall A \in E, (A \subseteq A)$), transitive ($\forall (A, B, C) \in E^3, (((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C))$) et antisymétrique ($\forall (A, B) \in E^2, (((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Rightarrow (A = B))$), donc R est une relation d'ordre, et cette relation d'ordre est non totale car par exemple $\{0\}$ et $\{1\}$ ne sont pas reliés via R .

On peut constater que $\{0\}$ et $\{1\}$ sont tous deux des éléments minimaux de E pour R et E n'admet aucun élément minimum pour R .

E admet également un élément maximal pour R qui est $\{0,1\}$ et n'admet pas d'élément maximum pour R ,

- Concernant la relation d'ordre totale \leq sur l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 < 2)\}$, A n'admet pas de maximum ni de minimum.

En effet, si on représente la droite des réels ci-dessous, et que l'on positionne des points rouges correspondant à chaque élément de A ,



à première vue on pourrait se dire qu'il devrait y avoir un maximum et un minimum, cependant en réalité ça converge vers $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ avec une infinité de nombres de A sans jamais les atteindre. C'est dû au fait que les nombres rationnels sont "denses dans les nombres réels", ce qui signifie qu'on peut toujours rajouter un nombre rationnel entre un nombre rationnel et un nombre réel distinct de ce premier.

Définition 77. "Élément majorant / minorant de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq "
 Soient $\preceq \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0,1\})$ une relation d'ordre sur E
 et $A \subseteq E$

$x_{\in E}$ est un élément majorant de A pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall a \in A, (a \preceq x)$$

Dit autrement : « Un élément de E est un élément majorant de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq ssi il est supérieur à tous les éléments de A via \preceq ».

$x_{\in E}$ est un élément minorant de A pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall a \in A, (x \preceq a)$$

Dit autrement : « Un élément de E est un élément minorant de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq ssi il est inférieur à tous les éléments de A via \preceq ».

Remarques :

- Dans le cas où $A_{\subseteq E}$ admet au moins un élément majorant x_{maj} , on dit que A est majorée (par x_{maj} pour \preceq), et que x_{maj} majore A pour \preceq
- Dans le cas où $A_{\subseteq E}$ admet au moins un élément minorant x_{min} , on dit que A est minorée (par x_{min} pour \preceq), et que x_{min} minore A pour \preceq
- On peut obtenir l'ensemble des majorants d'un ensemble $A_{\subseteq E}$ pour une relation d'ordre \preceq sur E en utilisant la fonction majors comme ceci : $\text{majors}_{\preceq}(A)$ et quand la relation d'ordre n'est pas spécifiée en indice ça veut dire que c'est l'opérateur \leq des objets de l'ensemble A qui est utilisé par la fonction (donc $\text{majors}(A) = \text{majors}_{\leq}(A)$). On a donc

$$\text{majors}_{\preceq}(A) = \{x \in E \mid (\forall a \in A, (a \preceq x))\}$$

La fonction majors est implémentée comme suit (dans un ensemble wrapper W) :

$$\text{majors} = F^{\circ} \left(\begin{array}{cc} \mathcal{R}_{\preceq} & \rightarrow \\ \preceq & \mapsto \end{array} F^{\circ} \left(\begin{array}{cc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow \\ A & \mapsto \end{array} \begin{array}{cc} \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)) & \\ \mathcal{P}(W) & \end{array} \{x \in \text{setOf}(\preceq) \mid (\forall a \in A, (a \preceq x))\} \right) \right)$$

- On peut obtenir l'ensemble des minorants d'un ensemble $A \subseteq E$ pour une relation d'ordre \preceq sur E en utilisant la fonction minors comme ceci : $\text{minors}_{\preceq}(A)$ et quand la relation d'ordre n'est pas spécifiée en indice ça veut dire que c'est l'opérateur \leq des objets de l'ensemble E qui est utilisé par la fonction (donc $\text{minors}(A) = \text{minors}_{\leq}(A)$). On a donc

$$\text{minors}_{\preceq}(A) = \{x \in E \mid (\forall a \in A, (x \preceq a))\}$$

La fonction minors est implémentée comme suit (dans un ensemble wrapper W) :

$$\text{minors} = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\preceq} & \rightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)) \\ \preceq & \mapsto & F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & \mathcal{P}(W) \\ A & \mapsto & \{x \in \text{setOf}(\preceq) \mid (\forall a \in A, (x \preceq a))\} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

- Un ensemble $A \subseteq E$ qui est à la fois majoré et minoré pour \preceq et dit **borné**
- Ces notions s'étendent à d'autres types d'objets mathématiques, comme les uplets et les fonctions.

Par exemple, si on prend une famille de réels $u := (x_i)_{i \in I}$, dire que u est majorée / minorée / bornée (pour \leq) signifie que $\text{Im}(u)$ est majoré / minoré / borné (pour \leq).

Du coup, pour les fonctions de manière générale, si on prend une fonction quelconque f , dire que f est majorée / minorée / bornée (pour \leq) signifie que $\text{Im}(f)$ est majoré / minoré / borné (pour \leq).

Définition 78. "Borne supérieure / inférieure de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq "
 Soient $\preceq \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$ une relation d'ordre sur E
 et $A \subseteq E$

$x_{\in E}$ est la borne supérieure de A pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$(x \in \text{majors}_{\preceq}(A)) \wedge (\forall y \in \text{majors}_{\preceq}(A), x \preceq y)$$

Dit autrement : « Un élément de E est la borne supérieure de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq ssi il est le plus petit des majorants de A ».

Dit autrement :

$x_{\in E}$ est la borne supérieure de A pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \min_{\preceq}(\text{majors}_{\preceq}(A))$$

Dit autrement : « Un élément de E est la borne supérieure de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq ssi il est l'élément minimum de $\text{majors}_{\preceq}(A)$ ».

$x_{\in E}$ est la borne inférieure de A pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$(x \in \text{minors}_{\preceq}(A)) \wedge (\forall y \in \text{minors}_{\preceq}(A), y \preceq x)$$

Dit autrement : « Un élément de E est la borne inférieure de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq ssi il est le plus grand des minorants de A ».

Dit autrement :

$x_{\in E}$ est la borne inférieure de A pour \preceq

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \max_{\preceq}(\text{minors}_{\preceq}(A))$$

Dit autrement : « Un élément de E est la borne inférieure de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq ssi il est l'élément maximum de $\text{minors}_{\preceq}(A)$ ».

Remarques :

- La borne supérieure de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq , quand elle existe, est notée $\sup A$, cependant je trouve cette notation incomplète car on ne sait pas de quelle relation d'ordre il est question dans l'absolu. Je préfère la notation $\sup_{\preceq}(A)$, et quand la relation d'ordre n'est pas spécifiée en indice ça veut dire que c'est l'opérateur \leq des objets de l'ensemble A qui est utilisé par la fonction (donc $\sup(A) = \sup_{\leq}(A)$). On a donc

$$\sup_{\preceq}(A) = (x \in \text{majors}(A) \mid (\forall m \in \text{majors}(A), x \preceq m))$$

La fonction \sup est implémentée comme suit (au sein d'un ensemble wrapper W) :

$$\sup = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\preceq} & \rightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow W) \\ \preceq & \mapsto & F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & W \\ A & \mapsto & (x \in \text{majors}_{\preceq}(A) \mid (\forall m \in \text{majors}_{\preceq}(A), x \preceq m)) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Donc d'un point de vue "parsing", quand on écrit $\sup_{\preceq}(A)$, en fait ça correspond à $\sup(\preceq)(A)$

Bien évidemment, comme toute fonction qui renvoie un élément et non un ensemble, il faut faire attention car si $\text{majors}(A)$ n'admet pas de minimum pour \preceq , ça va crash, donc utiliser la fonction \sup que lorsqu'on est sûr qu'elle renvoie un élément.

- La borne inférieure de $A_{\subseteq E}$ pour \preceq , quand elle existe, est notée $\inf A$, cependant je trouve cette notation incomplète car on ne sait pas de quelle relation d'ordre il est question dans l'absolu. Je préfère la notation $\inf_{\preceq}(A)$, et quand la relation d'ordre n'est pas spécifiée en indice ça veut dire que c'est l'opérateur \leq des objets de l'ensemble A qui est utilisé par la fonction (donc $\inf(A) = \inf_{\leq}(A)$). On a donc

$$\inf_{\preceq}(A) = (x \in \text{minors}(A) \mid (\forall m \in \text{minors}(A), m \preceq x))$$

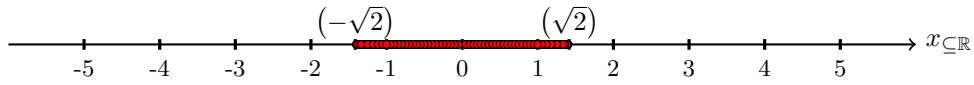
La fonction \inf est implémentée comme suit (au sein d'un ensemble wrapper W) :

$$\inf = F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\preceq} & \rightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P}(W) \rightarrow W) \\ \preceq & \mapsto & F^{\circ} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(W) & \rightarrow & W \\ A & \mapsto & (x \in \text{minors}_{\preceq}(A) \mid (\forall m \in \text{minors}_{\preceq}(A), m \preceq x)) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Donc d'un point de vue "parsing", quand on écrit $\sup_{\preceq}(A)$, en fait ça correspond à $\sup(\preceq)(A)$

Bien évidemment, comme toute fonction qui renvoie un élément et non un ensemble, il faut faire attention car si $\text{minors}(A)$ n'admet pas de maximum pour \preceq , ça va crash, donc il faut utiliser la fonction \inf que lorsqu'on est sûr qu'elle renvoie un élément.

- Concernant la relation d'ordre totale \leq sur \mathbb{Q} , l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 < 2)\}$ n'admet pas de borne supérieure ni inférieure, du fait que A admet une infinité de majorants et de minorants pour \leq et que comme ça converge vers $\sqrt{2}$ comme vers $-\sqrt{2}$ par l'extérieur (vu que les rationnels sont denses dans les réels), A n'est donc pas borné si on considère \leq sur \mathbb{Q} . En revanche A l'est avec \leq sur \mathbb{R} bien sûr (et on aura $\sup(A) = \sqrt{2}$ et $\inf(A) = -\sqrt{2}$).



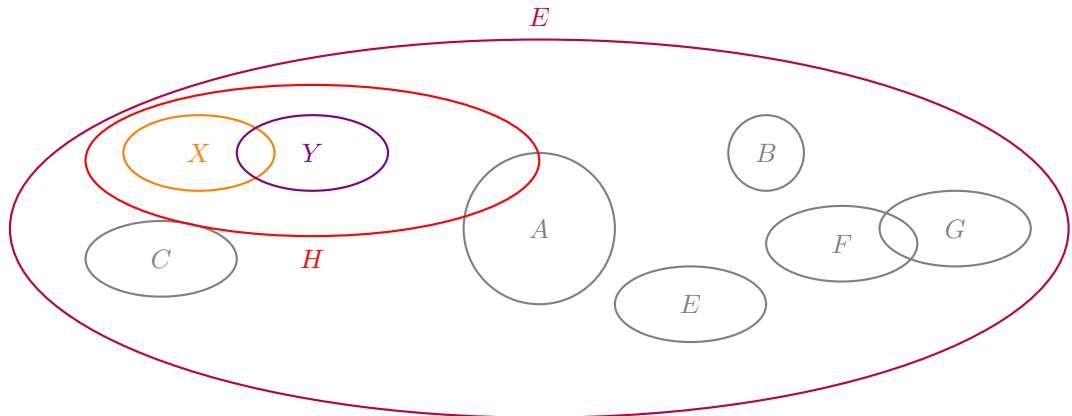
- Concernant la relation d'ordre totale \subseteq sur $\mathcal{P}(E)$, on a $\min_{\subseteq}(\mathcal{P}(E)) = \emptyset$ et $\max_{\subseteq}(\mathcal{P}(E)) = E$

Si on prend $(X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$, on a $\{X, Y\} \subseteq \mathcal{P}(E)$, et donc

$$\begin{aligned} \text{majors}_{\subseteq}(\{X, Y\}) &= \{M \in \mathcal{P}(E) \mid (\forall S \in \{X, Y\}, (S \subseteq M))\} \\ &= \{M \in \mathcal{P}(E) \mid ((X \subseteq M) \wedge (Y \subseteq M))\} \\ \text{majors}_{\subseteq}(\{X, Y\}) &= \{M \in \mathcal{P}(E) \mid ((X \cup Y) \subseteq M)\} \end{aligned}$$

Or, $\min_{\subseteq}(\{M \in \mathcal{P}(E) \mid ((X \cup Y) \subseteq M)\}) = (X \cup Y)$, c'est-à-dire que l'élément minimum pour \subseteq , de l'ensemble contenant toutes les parties de E qui contiennent $(X \cup Y)$, c'est évidemment $(X \cup Y)$.

Donc $\min_{\subseteq}(\text{majors}_{\subseteq}(\{X, Y\})) = (X \cup Y)$, donc $\sup_{\preceq}(\{X, Y\}) = (X \cup Y)$, c'est-à-dire que la borne supérieure de $\{X, Y\}$ pour \subseteq c'est $(X \cup Y)$.



- Concernant la relation d'ordre partielle $|$ sur \mathbb{N} , de graphe de correspondance $G = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists k \in \mathbb{N} \mid (b = a \cdot k))\}$, \mathbb{N} admet 0 comme maximum et 1 comme minimum pour $|$.

Par ailleurs, soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $A := \{a, b\}$. On a donc $A \subseteq \mathbb{N}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{majors}_|(A) &= \{m \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in A, (n|m))\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \{a, b\}, (n|m))\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid ((a|m) \wedge (b|m))\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid ((m \text{ est un multiple de } a) \wedge (m \text{ est un multiple de } b))\} \\ \text{majors}_|(A) &= \{m \in \mathbb{N} \mid (m \text{ est un multiple commun de } a \text{ et de } b)\} \end{aligned}$$

Par conséquent, on aura, vu que le PPCM(a, b) est par définition "le multiple commun de a et b qui divise tous les autres multiples communs de a et b ",

$$\sup_|(A) = \min_|(\text{majors}_|(A)) = \text{PPCM}(a, b)$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \text{minors}_|(A) &= \{m \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in A, (m|n))\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \{a, b\}, (m|n))\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid ((m|a) \wedge (m|b))\} \\ &= \{m \in \mathbb{N} \mid ((m \text{ est un diviseur de } a) \wedge (m \text{ est un diviseur de } b))\} \\ \text{minors}_|(A) &= \{m \in \mathbb{N} \mid (m \text{ est un diviseur commun de } a \text{ et de } b)\} \end{aligned}$$

Par conséquent, on aura, vu que le PGCD(a, b) est par définition "le diviseur commun de a et b qui est multiple de tous les autres diviseurs communs de a et b ",

$$\inf_|(A) = \max_|(\text{minors}_|(A)) = \text{PGCD}(a, b)$$

Définition 79. "Application croissante / décroissante / monotone"

Soient W_I et W_O deux ensembles
et \preceq_I une relation d'ordre sur W_I et \preceq_O une relation d'ordre sur W_O
et $E \subseteq W_I$ et $F \subseteq W_O$
et $f \in \mathcal{F}_A(E \rightarrow F)$

f est croissante sur $A_{\subseteq E}$ pour (\preceq_I, \preceq_O)

\iff

$\forall (x, y) \in A^2, ((x \preceq_I y) \Rightarrow (f(x) \preceq_O f(y)))$

Dit autrement : « f est croissante sur $A_{\subseteq E}$ pour (\preceq_I, \preceq_O) ssi le fait de passer à f des arguments croissants pour \preceq_I de A retourne des éléments croissants pour \preceq_O de F , et inversement ».

f est décroissante sur $A_{\subseteq E}$ pour (\preceq_I, \preceq_O)

\iff

$\forall (x, y) \in A^2, ((x \preceq_I y) \Rightarrow (f(y) \preceq_O f(x)))$

Dit autrement : « f est décroissante sur $A_{\subseteq E}$ pour (\preceq_I, \preceq_O) ssi le fait de passer à f des arguments croissants pour \preceq_I de A retourne des éléments décroissants pour \preceq_O de F , et inversement ».

f est monotone sur $A_{\subseteq E}$ pour (\preceq_I, \preceq_O)

\iff

$(\forall (x, y) \in A^2, ((x \preceq_I y) \Rightarrow (f(x) \preceq_O f(y))) \vee (\forall (x, y) \in A^2, ((x \preceq_I y) \Rightarrow (f(y) \preceq_O f(x))))$

Dit autrement : « f est monotone sur $A_{\subseteq E}$ pour (\preceq_I, \preceq_O) ssi elle est croissante ou décroissante sur A pour (\preceq_I, \preceq_O) ».

Remarque :

- Si la relation d'ordre est la même dans le couple, on peut écrire " f est croissante / décroissante / monotone sur A pour \preceq "
- Si le couple de relations d'ordre n'est pas spécifié, ça considère qu'il s'agit de la relation d'ordre par défaut des éléments de l'ensemble (genre \leq si c'est \mathbb{R} par exemple) et on peut écrire " f est croissante / décroissante / monotone sur A "

- Une application **croissante** composée avec une application **croissante** donne une application **croissante** ($\nearrow \circ \nearrow = \nearrow$)
- Une application **décroissante** composée avec une application **décroissante** donne une application **croissante** ($\searrow \circ \searrow = \nearrow$)
- Une application **croissante** composée avec une application **décroissante** donne une application **décroissante**, de même qu'une application **décroissante** composée avec une application **croissante** donne une application **décroissante** ($\nearrow \circ \searrow = \searrow \circ \nearrow = \searrow$)

Définition 80. "Application strictement croissante / décroissante / monotone"

Soient W_I et W_O deux ensembles
et \preceq_I une relation d'ordre sur W_I et \preceq_O une relation d'ordre sur W_O
et $E \subseteq W_I$ et $F \subseteq W_O$
et $f \in \mathcal{F}_A(E \rightarrow F)$

f est strictement croissante sur $A_{\subseteq E}$ pour (\prec_E, \prec_F)

\Longleftrightarrow

$\forall (x, y) \in A^2, ((x \prec_E y) \Rightarrow (f(x) \prec_F f(y)))$

Dit autrement : « f est strictement croissante sur $A_{\subseteq E}$ pour (\prec_E, \prec_F) ssi le fait de passer à f des arguments strictement croissants pour \prec_E de A retourne des éléments strictement croissants pour \prec_F de F , et inversement ».

f est strictement décroissante sur $A_{\subseteq E}$ pour (\prec_E, \prec_F)

\Longleftrightarrow

$\forall (x, y) \in A^2, ((x \prec_E y) \Rightarrow (f(y) \prec_F f(x)))$

Dit autrement : « f est décroissante sur $A_{\subseteq E}$ pour (\prec_E, \prec_F) ssi le fait de passer à f des arguments strictement croissants pour \prec_E de A retourne des éléments strictement décroissants pour \prec_F de F , et inversement ».

f est strictement monotone sur $A_{\subseteq E}$ pour (\preceq_I, \preceq_O)

\Longleftrightarrow

$(\forall (x, y) \in A^2, ((x \prec_E y) \Rightarrow (f(x) \prec_F f(y))) \vee (\forall (x, y) \in A^2, ((x \prec_E y) \Rightarrow (f(y) \prec_F f(x))))$

Dit autrement : « f est strictement monotone sur $A_{\subseteq E}$ pour (\prec_E, \prec_F) ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur A pour (\preceq_I, \preceq_O) ».

Remarque :

- Si la relation d'ordre est la même dans le couple, on peut écrire " f est strictement croissante / décroissante / monotone sur A pour \preceq "
- Si le couple de relations d'ordre n'est pas spécifié, ça considère qu'il s'agit de la relation d'ordre par défaut des éléments de l'ensemble (genre \leq si c'est \mathbb{R} par exemple) et on peut écrire " f est strictement croissante / décroissante / monotone sur A "

- Une application *strictement croissante* composée avec une application *strictement croissante* donne une application *strictement croissante*
 $(\nearrow \circ \nearrow = \nearrow)$
- Une application *strictement décroissante* composée avec une application *strictement décroissante* donne une application *strictement croissante*
 $(\searrow \circ \searrow = \nearrow)$
- Une application *strictement croissante* composée avec une application *strictement décroissante* donne une application *strictement décroissante*, de même qu'une application *strictement décroissante* composée avec une application *strictement croissante* donne une application *strictement décroissante*
 $(\nearrow \circ \searrow = \searrow \circ \nearrow = \searrow)$

Définition 81. "Intervalle d'un ensemble E ordonné par \preceq "

Soient E un ensemble ordonné par une relation d'ordre \preceq
et $(a, b) \in E^2$

L'intervalle (**fermé**) de E_{\preceq} borné par a et b , est l'ensemble :

$$[a, b]_{E_{\preceq}} = \{x \in E \mid ((a \preceq x) \wedge (x \preceq b))\}$$

Dit autrement : « $[a, b]_{E_{\preceq}}$ c'est tous les éléments de E compris entre a et b d'après \preceq ».

L'intervalle **ouvert** de E_{\preceq} borné par a et b , est l'ensemble :

$$]a, b[_{E_{\preceq}} = \{x \in E \mid ((a \preceq x) \wedge (x \preceq b) \wedge (x \neq a) \wedge (x \neq b))\}$$

Dit autrement : « $]a, b[_{E_{\preceq}}$ c'est tous les éléments de E compris entre a et b d'après \preceq , a et b non compris ».

L'intervalle **ouvert à gauche** de E_{\preceq} borné par a et b , est l'ensemble :

$$]a, b]_{E_{\preceq}} = \{x \in E \mid ((a \preceq x) \wedge (x \preceq b) \wedge (x \neq a))\}$$

Dit autrement : « $]a, b]_{E_{\preceq}}$ c'est tous les éléments de E compris entre a et b d'après \preceq , a non compris ».

L'intervalle **ouvert à droite** de E_{\preceq} borné par a et b , est l'ensemble :

$$[a, b[_{E_{\preceq}} = \{x \in E \mid ((a \preceq x) \wedge (x \preceq b) \wedge (x \neq b))\}$$

Dit autrement : « $[a, b[_{E_{\preceq}}$ c'est tous les éléments de E compris entre a et b d'après \preceq , b non compris ».

Remarques :

- Si on a une relation d'ordre $\preceq = \mathcal{R}^\circ(E, \emptyset)$ par exemple, du coup $\forall (a, b) \in E^2$,
 $[a, b]_{E_{\preceq}} =]a, b[_{E_{\preceq}} =]a, b]_{E_{\preceq}} = [a, b[_{E_{\preceq}} = \emptyset$

- *Si l'ensemble en indice de l'intervalle n'est pas spécifié, genre si on écrit $[a, b]$, alors il est considéré que l'ensemble en question est \mathbb{R} ordonné par \leq .*
- *Si la relation d'ordre en indice de l'ensemble n'est pas spécifiée, genre si on écrit $[a, b]_{\mathbb{N}}$, alors il est considéré que la relation d'ordre en question est la relation d'ordre standard de l'ensemble (ici \leq).*

Définition 82. "Isomorphisme entre 2 ensembles ordonnés"

Soient E et F 2 ensembles quelconques

et \preceq_E une relation d'ordre sur E

et \preceq_F une relation d'ordre sur F

et $f \in \mathcal{F}_A(E \rightarrow F)_{\leftrightarrow}$ une application bijective de $E \rightarrow F$

f est un isomorphisme de E vers F

$$\Longleftrightarrow$$

$(f \text{ est croissante pour } (\preceq_E, \preceq_F)) \wedge (f_{-1} \text{ est croissante pour } (\preceq_F, \preceq_E))$

Dit autrement : « 2 ensembles ordonnés sont isomorphes quand il existe une application bijective croissante pour les relations d'ordres considérées et dont sa réciproque est également croissante pour les relations d'ordres considérées »

Remarques :

- Le fait que 2 ensembles ordonnés soient isomorphes exprime le fait que les 2 relations d'ordres sont similaires
- Si E est totalement ordonné par \preceq_E et que f est une application bijective croissante, alors f_{-1} est forcément également croissante, c'est-à-dire qu'alors f est **forcément** un isomorphisme.

Définition 83. "Relation binaire interne acyclique"

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est une relation binaire interne acyclique

\Longleftrightarrow

$$\nexists (x_i)_{i \in [1, n]_{\mathbb{N}}} \in E_{\neq}^n \mid \left((n \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}] \wedge \left(\bigwedge_{i \in [2, n]_{\mathbb{N}}} (x_{i-1}) R x_i \wedge x_n R x_1 \right) \right)$$

Dit autrement :

Soit $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R est une relation binaire interne acyclique

\Longleftrightarrow

$$\nexists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_{\neq}^n \mid ((n \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}] \wedge (x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_3 \wedge \dots \wedge x_n R x_1))$$

Dit autrement : « Une relation binaire interne acyclique est une relation dont il n'y a aucune chaîne relationnelle qui boucle, genre aRb, bRc, \dots, zRa ».

Remarques :

- Une relation binaire est acyclique ssi sa clôture transitive est antisymétrique
- Une relation binaire est acyclique ssi sa clôture réflexive et transitive est une relation d'ordre
- Une relation binaire est **strictement** acyclique ssi sa clôture transitive est asymétrique
- Une relation binaire est **strictement** acyclique ssi sa clôture transitive est une relation d'ordre stricte

Dénombrement dans les relations binaires entre ensembles finis

Soient E et F 2 ensembles finis,

et $n := \text{card}(E)$

et $p := \text{card}(F)$

(Remarque : ici on se restreint aux relations de graphes $G \subseteq (E \times F)$)

Le nombre :

- de relations binaires de $E \rightarrow F$ est de $\text{card}(\mathcal{P}(E \times F)) = 2^{np}$
- de relations binaires internes sur E est de $\text{card}(E^2) = 2^{(n^2)}$
- de relations binaires internes sur E réflexives est de $2^{n(n-1)}$
- de relations binaires internes sur E symétriques est de $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
- de relations binaires internes sur E antisymétriques est de $2^n \times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$
- de relations binaires internes sur E totales est de $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$
- de relations binaires internes sur E d'ordre totale est de $n!$
- de relations binaires internes sur E d'équivalence est de B_n , le nombre de Bell, une suite définie par $B_0 = 1$ et

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \times B_k \right)$$

Définition 84. "Relation binaire interne R sur E plus faible/forte que R' "

Soient $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

et $R' \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R plus faible que R'

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}'_R} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{R}_R}$$

$$\Longleftrightarrow$$

R' plus forte que R

Dit autrement :

Soient $R \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

et $R' \in \mathcal{F}(E^2 \rightarrow \{0, 1\})$

R plus faible que R'

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (xR'y \Rightarrow xRy)$$

$$\Longleftrightarrow$$

R' plus forte que R

Dit autrement : « Quand on a 2 relations binaires internes sur le même ensemble, le fait qu'une des 2 a son graphe inclus dans l'autre fait que c'est une relation binaire interne dite "plus faible" que l'autre. En gros si on prend toute les relations binaires internes possibles sur E , plus le graphe de correspondance sera "petit", plus on dira que la relation binaire est "forte" et plus ce graphe sera "grand", plus on dira que la relation est "faible". C'est étrange d'utiliser ce vocabulaire qui fait appel à des notions mélioratives / péjoratives mais bon. En gros l'idée pas géniale derrière ce vocabulaire est que plus une relation binaire interne est discriminante, plus elle est forte ».

Dit autrement : « Plus le graphe d'une relation binaire interne est inclus dans celui d'une autre, plus la première est forte par rapport à la seconde ».

Remarques :

- Compte tenu de ce qu'on a dit concernant la surcharge des opérateurs sur les ensembles et le cast implicite des relations en leur graphe de correspondance page 90, une autre façon de dire que R' est plus forte que R c'est de dire $R' \subseteq R$
- La relation de congruence modulo 2 sur \mathbb{Z} est plus faible que la relation de congruence modulo 4 sur \mathbb{Z}
- La plus faible des relations binaires sur E est celle de graphe E^2

- La plus forte des relations binaires sur E est celle de graphe \emptyset
- Si on prend une famille de relations binaires sur E , $\left((R_i)_{i \in I}\right)_{i \in I}$, et qu'on pose

$$R_{int} = \bigcap (R) = \bigcap_{i \in I} (R_i)$$

on a R_{int} qui est la plus faible des relations parmi toutes les relations plus fortes que toutes les R_i .

Par exemple, l'intersection de toutes les relations binaires internes de congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ sur \mathbb{Z} donne la relation d'égalité sur \mathbb{Z}

- L'intersection de relations binaires internes réflexives est réflexive
- L'intersection de relations binaires internes transitives est transitive
- L'intersection de relations binaires internes symétriques est symétrique
- L'intersection de relations binaires internes antisymétriques est antisymétrique
- L'intersection de relations binaires internes d'équivalences est une relation d'équivalence
- L'intersection de relations binaires internes d'ordre est une relation d'ordre

Définition 85. "Clôture d'une relation binaire interne"

La clôture d'une relation binaire interne R , est la plus faible relation binaire possible contenant R . On la note $\langle R \rangle$.

Remarques :

- Du coup, logiquement pour toute relation binaire interne R sur E , la clôture de R c'est la relation de graphe de correspondance E^2 , sauf qu'on peut créer des clôtures avec des critères de restriction, genre la clôture réflexive de R qui est donc la plus faible des relations binaires réflexives contenant R
- La clôture réflexive d'une relation binaire interne R sur E , c'est-à-dire la relation binaire réflexive la plus faible contenant R , est donc la relation

$$R_{\text{refl}} = \langle R \rangle_r = \mathcal{R}^\circ(E, (\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cup \setminus_{E^2}))$$

Du coup, $\forall (x, y) \in E^2, (x (R_{\text{refl}}) y \Leftrightarrow (xRy \vee (x = y)))$

La clôture réflexive de R est également l'intersection de toutes les relations binaires réflexives contenant R . Cette clôture existe forcément.

- La clôture transitive d'une relation binaire interne R sur E , c'est-à-dire la relation binaire transitive la plus faible contenant R , est donc la relation (avec $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre précis à déterminer, c'est là toute la galère)

$$R_{\text{trans}} = \langle R \rangle_t = R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \dots$$

c'est-à-dire

$$R_{\text{trans}} = \langle R \rangle_t = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcirc_{j \in [1, i]_{\mathbb{N}}} (R) \right)$$

La clôture transitive est très utile en théorie des graphes, par exemple si on a un sommet a qui est relié à un sommet b et que le sommet b est relié au sommet c , alors le sommet a est relié indirectement au sommet c . On peut donc générer le graphes de connectivité des sommets du premier graphe qui sera le graphe de la clôture transitive de la relation mettant en jeu le premier graphe.

$$\begin{array}{ccc} a & & a \\ \downarrow & & \downarrow \searrow \\ b \rightarrow c & \implies & b \rightarrow c \end{array}$$

La clôture transitive de R est également l'intersection de toutes les relations binaires transitives contenant R . Cette clôture existe forcément.

- La clôture réflexive et transitive d'une relation binaire interne R sur E , c'est-à-dire la relation binaire réflexive et transitive la plus faible contenant R , est donc la relation

$$R_{\text{reflTrans}} = \langle R \rangle_{rt} = \mathcal{R}^\circ \left(E, \left(\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{\text{trans}}} \cup \setminus_{E^2} \right) \right)$$

$$R_{\text{reflTrans}} = \langle R \rangle_{rt} = \langle R \rangle_t \cup \setminus_{E^2}$$

Ça veut dire que la clôture réflexive et transitive de R est la clôture réflexive de la clôture transitive de R , R_{trans} , mais également la clôture transitive de la clôture réflexive de R , R_{refl}

La clôture réflexive et transitive de R est également l'intersection de toutes les relations binaires réflexives et transitives contenant R .

- La clôture symétrique d'une relation binaire interne R sur E , c'est-à-dire la relation binaire symétrique la plus faible contenant R , est donc la relation

$$R_{\text{sym}} = \langle R \rangle_s = \mathcal{R}^\circ \left(E, \left(\mathcal{G}_{\mathcal{R}_R} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{R^{-1}}} \right) \right)$$

$$R_{\text{sym}} = \langle R \rangle_s = R \cup R^{-1}$$

- La clôture réflexive, transitive et symétrique (ou d'équivalence) d'une relation binaire interne R sur E , c'est-à-dire la relation binaire d'équivalence la plus faible contenant R , est donc la relation

$$R_{\text{equiv}} = \langle R \rangle_{rts} = \mathcal{R}^\circ \left(E, \left(\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{\text{trans}}} \cup \setminus_{E^2} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}_{R^{-1}}} \right) \right)$$

$$R_{\text{equiv}} = \langle R \rangle_{rts} = R_{\text{trans}} \cup \setminus_{E^2} \cup R^{-1}$$

Certains mathématiciens appellent la clôture d'équivalence d'une relation R la relation d'équivalence engendrée par R .

- La clôture antiréflexive (respectivement antitransitive ou antisymétrique) d'une relation R c'est assez simple, soit R est antiréflexive (respectivement antitransitive ou antisymétrique) et donc la clôture antiréflexive (respectivement antitransitive ou antisymétrique) de R c'est R , soit R n'est pas antiréflexive (respectivement antitransitive ou antisymétrique) auquel cas sa clôture antiréflexive (respectivement antitransitive ou antisymétrique) n'existe pas, puisque son graphe contient des couples qui font que la relation est de facto non antiréflexive (respectivement non antitransitive ou non antisymétrique).

C'est la particularité des "anti" tels que l'antiréflexivité, l'antitransitivité ou l'antisymétrie par rapport aux autres genre de relations binaires, vu que pour leur attribuer cette nature, il faut retirer des couples de leur graphe là où pour la réflexivité, la transitivité ou la symétrie il suffit d'en rajouter.

- *On peut créer des clôtures avec d'autres contraintes en fonction des problèmes qui s'offrent à nous*

Définition 86. "Relations n -naires"

On peut extrapoler tout ce qu'on a abordé concernant les relations binaires avec les relations ternaires, quaternaires, n -naires de manière générale.

Ainsi, on peut définir une relation n -naire T définie par la famille de relations R comme suit :

Soient $n \in [2, +\infty[_{\mathbb{N}}$
 et $I = [1, n]_{\mathbb{N}}$
 et $E := \left((E_i)_{i \in I} \right)_{i \in I}$ une famille de n ensembles,
 et $R := \left((R_i)_{i \in I} \right)_{i \in [1, (n-1)]_{\mathbb{N}}}$ une famille de $(n-1)$ relations binaires de E_i vers E_{i+1}

Une relation n -naire T définie sur $\prod_{i \in I} (E_i)$ par la famille de relations R est l'application :

$$T = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} (E_i) & \rightarrow & \{0, 1\} \\ x := ((x_i)_{i \in I}) & \mapsto & \begin{pmatrix} (x \in G) & : & 1 \\ (x \notin G) & : & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Avec

$$G = \left\{ ((x_i)_{i \in I}) \in \left(\prod_{i \in I} (E_i) \right) \mid \left(\bigwedge_{i \in [1, (n-1)]_{\mathbb{N}}} (x_i R_i x_{(i+1)}) \right) \right\}$$

Dit autrement : Une relation n -naire T définie sur $\prod_{i \in I} (E_i)$ par la famille de relations R est l'application :

$$T = F^\circ \left(\begin{array}{ccc} (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) & \rightarrow & \{0, 1\} \\ x := (x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} (x \in G) & : & 1 \\ (x \notin G) & : & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Avec

$$G = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \left(\prod_{i \in I} (E_i) \right) \mid ((x_1 R_1 x_2) \wedge (x_2 R_2 x_3) \wedge \dots \wedge (x_{(n-1)} R_{(n-1)} x_n)) \right\}$$

Remarques :

- On pourrait avoir l'impression qu'il y a un lien entre la relation n -naire T définie sur $\prod_{i \in I} (E_i)$ par la famille de relation R , et la relation composée

$$\bigcirc_{i \in [1, (n-1)]_{\mathbb{N}}} (R_i) = (R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_{(n-1)})$$

Il n'en est rien (à part la tronche du calcul au premier coup d'oeil), et voici pourquoi.

Pour rappel, la composition de 2 relation binaires $R_1 := \mathcal{R}^\circ(E \rightarrow F, G_1)$ et $R_2 := \mathcal{R}^\circ(F \rightarrow H, G_2)$, c'est la relation binaire

$$R_1 \circ R_2 = \mathcal{R}^\circ(E \rightarrow H, G_3)$$

avec

$$G_3 = \{(x, y) \in (E \times H) \mid (\exists z \in F : (xR_1z \wedge zR_2y))\}$$

Dit autrement : « La composition de 2 relations binaires (qui n'est pas la composition fonctionnelle qu'on a pu voir plus haut), c'est une nouvelle relation dont l'ensemble de gauche est celui de la première relation, l'ensemble de droite est celui de la seconde relation et le graphe de correspondance est l'ensemble des couples dont le premier élément est relié au second élément par l'intermédiaire d'un 3e élément. C'est donc l'ensemble des couples (x, y) tels qu'on a xR_1z et zR_2y ».

Sachant que le graphe de correspondance de T est

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}_T} = \left\{ ((x_i)_{i \in I}) \in \left(\prod_{i \in I} (E_i) \right) \mid \left(\bigwedge_{i \in [1, (n-1)]_{\mathbb{N}}} (x_i R_i x_{(i+1)}) \right) \right\}$$

On pourrait se dire, à tort, que, $\forall ((x_i)_{i \in I}) \in \left(\prod_{i \in I} (E_i) \right)$,

$$\left(\bigwedge_{i \in [1, (n-1)]_{\mathbb{N}}} (x_i R_i x_{(i+1)}) \right) \iff x_1 \left(\bigcirc_{i \in [1, (n-1)]_{\mathbb{N}}} (R_i) \right) x_n$$

autrement dit, que le fait que x_1 soit en relation avec x_2 via R_1 , et que x_2 soit en relation avec x_3 via R_2 , etc..., et que $x_{(n-1)}$ soit en relation avec x_n via $R_{(n-1)}$, revient au fait que x_1 soit en relation avec x_n via $(R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_{(n-1)})$, ce qui est inexact.

En effet, le fait que x_1 soit en relation avec x_n via $(R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_{(n-1)})$ signifie qu'il existe un uplet $((y_i)_{i \in I}) \in \left(\prod_{i \in I} (E_i) \right)$ tel que $y_1 = x_1$ et que $y_n = x_n$ et que $((x_1 R_1 y_2) \wedge (y_2 R_2 y_3) \wedge \dots \wedge (y_{(n-1)} R_{(n-1)} y_n))$, mais il n'y a aucune garantie que dans cet uplet, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ etc.

Du coup, cela voudrait dire que l'on ajouterait dans le graphe de la relation des uplets qui ne correspondent pas à la définition de la relation d'origine. Dit autrement, la relation $\left(\bigcirc_{i \in [1, (n-1)]_{\mathbb{N}}} (R_i) \right)$ est plus faible que T .

1.6 Cardinaux

Définition 87. "Définition d'une suite stationnaire"

Soit $u \in \mathcal{F}(I_{\subseteq \mathbb{N}} \rightarrow O)$ une suite quelconque.

$$\begin{aligned} &u \text{ est stationnaire} \\ &\iff \\ &((\exists n_s \in I) \mid ((\forall n \in I \mid (n \geq n_s)), u_n = u_{n_s})) \end{aligned}$$

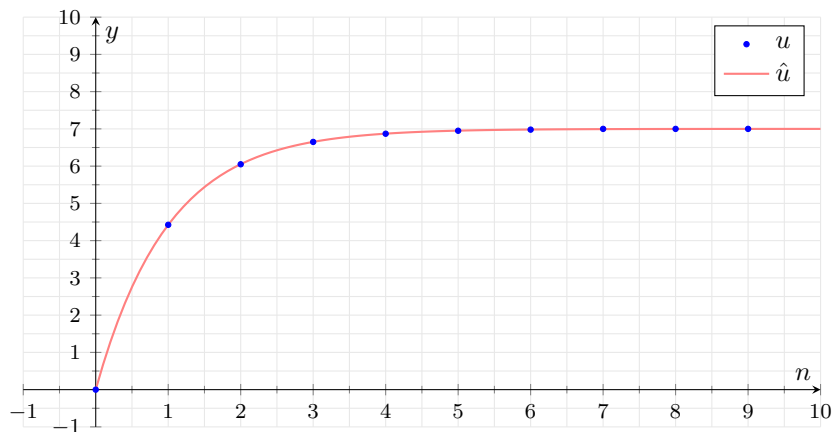
Dit autrement : Soit $u \in \mathcal{F}(I_{\subseteq \mathbb{N}} \rightarrow O)$ une suite quelconque.

$$\begin{aligned} &u \text{ est stationnaire} \\ &\iff \\ &((\exists n_s \in I) \mid (\forall n \in ([n_s, +\infty[_{\mathbb{N}} \cap I), u_n = u_{n_s})) \end{aligned}$$

Dit autrement : « Une suite u est stationnaire ssi elle dispose d'un index n_s au-delà duquel elle ne change plus de valeur (on aura alors $u_n = u_{n_s}$ pour tout $n \geq n_s$) ».

Remarques :

- On appelle l'index n_s d'une suite stationnaire "index de stationnement"
- Une suite stationnaire, on dit d'elle qu'elle "stationne en n_s "
- Par exemple, si on prend une suite $u := F^\circ \left(\begin{array}{cc} [0, 10]_{\mathbb{N}} & \rightarrow \\ n & \mapsto \left(\begin{array}{cc} [0, 7]_{\mathbb{R}} & \\ (n \geq 7) & : 7 \\ (n < 7) & : 7(1 - e^{-n}) \end{array} \right) \end{array} \right)$,
et bien cette suite u stationne en 7



Définition 88. "Ensemble ordonné noetherien"

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre \preceq .

E_{\preceq} est un ensemble ordonné noetherien

\Longleftrightarrow

$\forall A \in \mathcal{P}(E), ((A \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists m \in A \mid (\forall x \in A, (m \preceq x) \Rightarrow (x = m))))$

Dit autrement : « Un ensemble ordonné E_{\preceq} est dit noetherien ssi tout sous-ensemble non vide de E admet au moins un élément **maximal** pour \preceq ».

Dit autrement :

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre \preceq .

E_{\preceq} est un ensemble ordonné noetherien

\Longleftrightarrow

$\forall u \in \mathcal{F}_A(\mathbb{N} \rightarrow E),$

$((\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, ((n_1 \leq n_2) \Rightarrow (u_{n_1} \preceq u_{n_2}))) \Rightarrow (\exists n_s \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_s) \Rightarrow (u_n = u_{n_s}))))$

Dit autrement : « Un ensemble ordonné E_{\preceq} est dit noetherien ssi toutes les suites définies sur \mathbb{N} à valeurs dans E qui sont croissantes pour (\leq, \preceq) , sont stationnaires ».

Dit autrement :

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre \preceq .

E_{\preceq} est un ensemble ordonné noetherien

\Longleftrightarrow

$\nexists u \in \mathcal{F}_A(\mathbb{N} \rightarrow E) \mid (\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, (n_1 \leq n_2) \Rightarrow ((u_{n_1} \preceq u_{n_2}) \wedge (u_{n_1} \neq u_{n_2})))$

Dit autrement : « Un ensemble ordonné E_{\preceq} est dit noetherien ssi toutes les suites définies sur \mathbb{N} à valeurs dans E ne sont jamais strictement croissantes (du coup elles sont soit décroissantes, soit croissantes stationnaires) ».

Remarques :

- Un ensemble ordonné E_{\preceq} qui est **noetherien**, on dit de lui qu'il **satisfait la condition de chaîne ascendante** (condition qui est que tout ses sous-ensembles ont un élément maximal, autrement dit que toutes les suites croissantes à valeurs dans lui sont stationnaires, autrement dit que toutes les suites à valeurs dans lui ne sont jamais strictement croissantes).

- Un ensemble noetherien c'est donc un ensemble ordonné dont il est impossible de faire une séquence infinie d'éléments strictement croissants de celui-ci. Si on fait une séquence infinie d'éléments croissants de celui-ci, ça va forcément stationner à un moment vu qu'il y a forcément un élément maximal quel que soit le sous-ensemble de E considéré
- Si on prend un ensemble noetherien E_{\preceq} et qu'on a \succeq la relation d'ordre inverse de \preceq , et bien l'ensemble E_{\succeq} est artinien.
- L'ensemble ordonné \mathbb{N}_{\leq} est noetherien. En effet, dès lors qu'on prend n'importe quel sous-ensemble de \mathbb{N} , il y a toujours un élément maximal (qui est d'ailleurs l'élément maximum de l'ensemble en question vu que la relation d'ordre \leq est une relation d'ordre totale sur \mathbb{R}).
- Tout ensemble ordonné fini est noetherien (satisfait la condition de chaîne ascendante). Du reste, il est aussi artinien (satisfait la condition de chaîne descendante).
- \mathbb{N}_{\leq} est artinien mais pas noetherien.
- \mathbb{Z}_{\leq} n'est ni noetherien, ni artinien.
- Le terme de "noetherien" nous vient d'**Emmy Noether** (1882 - 1935), une mathématicienne allemande spécialiste d'algèbre abstraite et de physique théorique, considérée par Albert Einstein comme « le génie mathématique créatif le plus considérable produit depuis que les femmes ont eu accès aux études supérieures ».

Définition 89. "Ensemble ordonné artinien"

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre \preceq .

E_{\preceq} est un ensemble ordonné artinien

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), ((A \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists m \in A \mid (\forall x \in A, (x \preceq m) \Rightarrow (x = m))))$$

Dit autrement : « Un ensemble ordonné E_{\preceq} est dit artinien ssi tout sous-ensemble non vide de E admet au moins un élément **minimal** pour \preceq ».

Dit autrement :

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre \preceq .

E_{\preceq} est un ensemble ordonné artinien

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall u \in \mathcal{F}_A(\mathbb{N} \rightarrow E),$$

$$((\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, ((n_1 \leq n_2) \Rightarrow (u_{n_2} \preceq u_{n_1}))) \Rightarrow (\exists n_s \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_s) \Rightarrow (u_n = u_{n_s}))))$$

Dit autrement : « Un ensemble ordonné E_{\preceq} est dit artinien ssi toutes les suites définies sur \mathbb{N} à valeurs dans E qui sont décroissantes pour (\leq, \preceq) , sont stationnaires ».

Dit autrement :

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre \preceq .

E_{\preceq} est un ensemble ordonné artinien

$$\Longleftrightarrow$$

$$\nexists u \in \mathcal{F}_A(\mathbb{N} \rightarrow E) \mid (\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2, (n_1 \leq n_2) \Rightarrow ((u_{n_2} \preceq u_{n_1}) \wedge (u_{n_2} \neq u_{n_1})))$$

Dit autrement : « Un ensemble ordonné E_{\preceq} est dit artinien ssi toutes les suites définies sur \mathbb{N} à valeurs dans E ne sont jamais strictement décroissantes (du coup elles sont soit croissantes, soit décroissantes stationnaires) ».

Remarques :

- Un ensemble ordonné E_{\preceq} qui est **artinien**, on dit de lui qu'il **satisfait la condition de chaîne descendante** (condition qui est que tout ses sous-ensembles ont un élément minimal, autrement dit que toutes les suites décroissantes à valeurs dans lui sont stationnaires, autrement dit que toutes les suites à valeurs dans lui ne sont jamais strictement décroissantes).

- Un ensemble artinien c'est donc un ensemble ordonné dont il est impossible de faire une séquence infinie d'éléments strictement décroissants de celui-ci. Si on fait une séquence infinie d'éléments décroissants de celui-ci, ça va forcément stationner à un moment vu qu'il y a forcément un élément minimal quel que soit le sous-ensemble de E considéré
- Si on prend un ensemble artinien E_{\preceq} et qu'on a \succeq la relation d'ordre inverse de \preceq , et bien l'ensemble E_{\succeq} est noethérien.
- Tout ensemble ordonné fini est artinien (satisfait la condition de chaîne descendante). Du reste, il est aussi noethérien (satisfait la condition de chaîne ascendante).
- \mathbb{N}_{\leq} est artinien mais pas noethérien.
- \mathbb{Z}_{\leq} n'est ni noethérien, ni artinien.
- Le terme d'"artinien" nous vient d'**Emil Artin** (1898 - 1962), un mathématicien autrichien.

Définition 90. "Ensemble bien ordonné et bon ordre pour un ensemble"

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre \preceq .

E_{\preceq} est bien ordonné

\Longleftrightarrow

$\forall A \in \mathcal{P}(E), (\exists m \in A \mid (\forall x \in A, m \preceq x))$

Dit autrement : « Un ensemble ordonné E_{\preceq} est dit bien ordonné ssi toute partie non vide de E dispose d'un élément **minimum** pour \preceq ».

Dit autrement : « Un ensemble ordonné E_{\preceq} est dit bien ordonné ssi il est artinien et totalement ordonné par \preceq ».

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre \preceq .

\preceq est une bonne relation d'ordre pour E

\Longleftrightarrow

$\forall A \in \mathcal{P}(E), (\exists m \in A \mid (\forall x \in A, m \preceq x))$

Dit autrement : « Une relation d'ordre \preceq est dite bonne pour un ensemble E ssi E_{\preceq} est bien ordonné ».

Dit autrement : « Une relation d'ordre \preceq est dite bonne pour un ensemble E ssi toute partie non vide de E dispose d'un élément **minimum** pour \preceq ».

Remarques :

- Dire que E_{\preceq} est bien ordonné est équivalent à dire que E est bien ordonné par \preceq .
- Si E_{\preceq} est bien ordonné, alors \preceq est forcément un ordre total
- Si E_{\preceq} est bien ordonné, alors tout sous-ensemble de E est également bien ordonné par \preceq
- \emptyset est bien ordonné par la relation d'ordre $\mathcal{R}^\circ(\emptyset, \emptyset)$.
- Tout ensemble fini et totalement ordonné par une relation d'ordre \preceq est bien ordonné par cette dernière.
- \mathbb{N}_{\leq} est bien ordonné (il est totalement ordonné et artinien), certains notent d'ailleurs cet ensemble ordonné ω dans ce contexte.

Définition 91. "Condition d'hérédité d'une propriété sur un ensemble ordonné"

Soit E_{\preceq} un ensemble ordonné

et P une propriété sur E

P vérifie la condition d'hérédité sur E_{\preceq}

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall y \in E, ((\forall x \in E, ((x \preceq y) \Rightarrow (P(x)))) \Rightarrow P(y))$$

Dit autrement :

Soit E_{\preceq} un ensemble ordonné

et P une propriété sur E

P vérifie la condition d'hérédité sur E_{\preceq}

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (((x \preceq y) \Rightarrow (P(x))) \Rightarrow P(y))$$

Dit autrement : « P vérifie la condition d'hérédité sur E_{\preceq} ssi, dès lors que la propriété est vraie pour un $x \in E$, elle l'est forcément pour tous les $y \in E$ supérieurs à x pour \preceq ».

Remarque :

- C'est la notion de base dans les raisonnements par récurrence
- On dit que P sur E vérifie la condition d'hérédité pour \preceq , ou que P vérifie la condition d'hérédité sur E_{\preceq}

Théorème 3. "Principe d'induction noetherienne"

Soit E_{\preceq} un ensemble artinien

et P une propriété sur E vérifiant la condition d'hérédité pour \preceq

P vérifie la condition d'hérédité sur E_{\preceq}

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall y \in E, ((\forall x \in E, ((x \preceq y) \Rightarrow (P(x)))) \Rightarrow P(y))$$

Dit autrement :

Soit E_{\preceq} un ensemble ordonné

et P une propriété sur E

P vérifie la condition d'hérédité sur E_{\preceq}

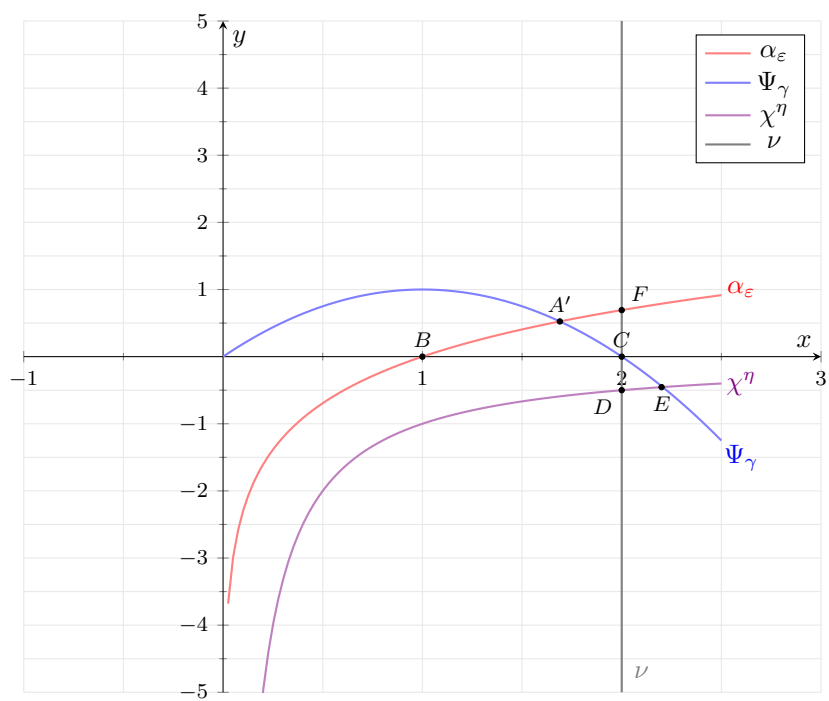
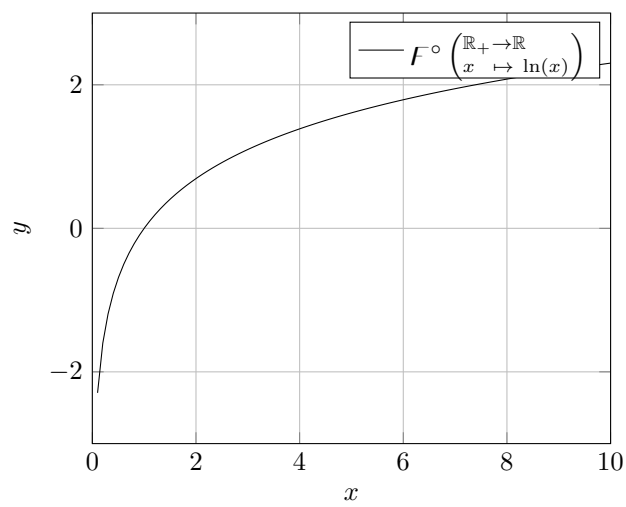
$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (x, y) \in E^2, (((x \preceq y) \Rightarrow (P(x))) \Rightarrow P(y))$$

Dit autrement : « P vérifie la condition d'hérédité sur E_{\preceq} ssi, dès lors que la propriété est vraie pour un $x \in E$, elle l'est forcément pour tous les $y \in E$ supérieurs à x pour \preceq ».

Remarque :

- C'est la notion de base dans les raisonnements par récurrence



$$\overrightarrow{\nabla}(\chi(\varepsilon)) \cdot \overrightarrow{\sigma} := \oint \left(\overrightarrow{\zeta\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)} \wedge \overrightarrow{\Psi(\eta^\varepsilon)} \right) d\varepsilon$$