



۱. فرض کنید

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

الف) ماتریس قطری D و ماتریس وارون پذیر P را به گونه ای بیابید که $P^{-1}MP = D$.ب) تجزیه طیفی M را بنویسید.

(۲۰ نمره)

۲. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

الف) تجزیه مقادیر تکین ماتریس A را بنویسید.ب) فرض کنید W بهترین زیرفضای دوبعدی در \mathbb{R}^4 است که می توانیم سطرهاى این ماتریس را در آن تصویر کنیم.یک پایه برای W بدست آورید. با این تصویر چند درصد داده ها حفظ می شود؟

(۲۵ نمره)

۳. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه های حقیقی باشد. ثابت کنید حداقل یک و حداکثر n عدد c وجود داردکه $A + cI$ وارون ناپذیر است.

(۱۰ نمره)

۴. فرض کنید A یک ماتریس متقارن حقیقی است و D یک ماتریس قطری حقیقی است که برای هر i داریم $|D_{ii}| \leq \epsilon$. همچنین فرض کنید λ و μ به ترتیب بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A و ماتریس $A + D$ باشد. ثابت

کنید

$$|\mu - \lambda| \leq \epsilon.$$

(۱۰ نمره)

راهنمایی: از قضیه کورانت-فیشرا استفاده کنید.

۵. الف) فرض کنید U یک ماتریس حقیقی $n \times n$ یکه باشد یعنی $U^t U = I$. ثابت کنید برای هر مقدار ویژه λ ازماتریس U داریم $|\lambda| = 1$. (توجه کنید که λ ممکن است عدد مختلط باشد).

۱۰

ب) بدون استفاده از بسط دترمینان، مقدار دترمینان زیر را بدست آورید (با اثبات).

۵

$$\left| \det \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \right|$$

(۱۵ نمره)

راهنمایی: از الف استفاده کنید.