

ساختمان گسته

تمرین سری ۳

۱ نفره

تحويل دوشنبه ۴ اردیبهشت ۱۴۰۲ - ساعت ۱۲:۳۰ (بعد از امتحانات میان ترم هم تحويل شود، نمره‌ای کسر نمی‌شود)

۱- در این ترم ۷ درس ارایه شده است و هر دانشجو ملزم بوده است که ۴ و یا ۵ درس اخذ کند. تعداد دانشجویان ۶۰ نفر است. نشان دهید ۲ دانشجو وجود دارند که دقیقا درسهای مشابهی اخذ کرده‌اند.

۲- الف) می‌خواهیم ۷ کیک را بین ۱۰ کودک تقسیم کنیم (به ۳ کودک کیک نمی‌رسد). به چند روش ممکن است؟

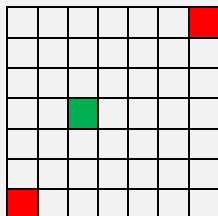
ب) می‌خواهیم ۱۰ کیک را بین ۷ کودک تقسیم کنیم، به صورتی که به هر کودک حداقل یک کیک و حداکثر ۲ کیک برسد. به چند طریق ممکن است.

پ) می‌خواهیم ۱۰ کیک را بین ۷ کودک تقسیم کنیم که به هر کودک حداقل یک کیک برسد، به چند روش ممکن است؟

۳- ۱۲ عدد دو رقمی دلخواه متمایز داریم. نشان دهید دو عدد در این مجموع وجود دارند که تفاضل آنها دارای ۲ رقم مشابه است.

۴- می‌خواهم در یک جدول 7×7 از گوشه پایین سمت چپ به گوشه بالا سمت راست برویم به صورتی که حتما

از خانه (۲،۳) رد نشویم. به چند روش ممکن است؟



۵- می‌خواهیم در یک کلاس ۲۰ نفره، همه افراد را به گروه‌های ۲ نفره تقسیم کنیم. به چند روش این کار ممکن است؟

۶- با استفاده از استدلال ترکیبیاتی ثابت کنید:
$$\binom{m+n}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn$$

۷- با استفاده از استدلال ترکیبیاتی ثابت کنید:

$$\binom{3n}{3} = 3 \binom{n}{3} + 6n \binom{n}{2} + n^3$$

۸- چند عدد کوچکتر از یک میلیون داریم که مجموع ارقام آنها ۱۰ است؟

۹- چند عدد ۷ رقمی داریم که ارقام آنها از چپ به راست نزولی است، مانند ۹۸۸۸۵۴۴

سوالات اضافه

۱۰- با روش ترکیبیاتی ثابت کنید

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

(راهنمایی: تمام دنباله های n تایی از 0 و 1 و یک عدد $*$ را در نظر بگیرید)

۱۱- نشان دهید در هر زیر مجموعه $n+1$ عضوی از مجموعه $\{1,2,3,...,2n\}$ حداقل دو عدد هستند ب. م. م. آنها 1 است.

۱۲- در یک کمیته دانشجویی n نفر از دانشجویان ورودی 1400 و n نفر از دانشجویان ورودی 1401 حضور دارند. میخواهیم یک کمیته n نفره از بین این $2n$ نفر انتخاب کنیم به نحوی که تعداد اعضای ورودی 1400 در این زیرکمیته بیشتر از تعداد اعضای ورودی 1401 باشد. این کار به چند روش امکان پذیر است؟ (برای n دو حالت زوج و فرد را جدا بررسی کنید)

۱۳- ۱۰ کشتی گیر در قالب یک تورنمنت با هم به صورت round-robin مسابقه میدهند (یعنی هر نفر با هر نفر دیگر دقیقاً یکبار مسابقه میدهد). در ورزش کشتی حالت مساوی وجود ندارد و حتی در صورت برابر بودن امتیاز طرفین، نهایتاً بر اساس قوانینی (مثلاً اینکه آخرین امتیاز را کدام ورزشکار گرفته و یا کدام یک امتیاز درشت کسب کرده) به هر حال برنده مشخص میشود. حال با فرض هیچ یک از این 10 نفر در همه بازی های شکست نمیخورند، نشان دهید در پایان مسابقات حتماً دو کشتی گیر هستند که تعداد بردهای برابری کسب کرده اند.