



۱. فرض کنید

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

رتبه (رنک) و پوچی ماتریس Q و یک پایه برای فضای سطری Q و یک پایه برای هسته Q پیدا کنید. (کلیه جزییات محاسبات را بنویسید.)

سطرهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را خط بزنید و سطرهای ۵ و ۶ را بنویسید.

۲. تبدیل خطی $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ را بصورت $T(f) = \int_0^x f(t) dt$ در نظر بگیرید. هم‌چنین پایه $B_1 = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ برای $\mathbb{R}_2[x]$ و $B_2 = (1, x, x^2)$ برای $\mathbb{R}_2[x]$ را در نظر بگیرید.

($\mathbb{R}_k[x]$ فضای برداری همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر k است.)

الف) ماتریس نمایش T در این پایه‌ها یعنی $[T]_{B_1, B_2}$ را بدست آورید.

ب) رتبه (رنک) و پوچی T را بدست آورید.

۳. الف) فرض کنید $v = [a, b, c]^t \in \mathbb{R}^3$ یک بردار دلخواه باشد که $b \neq 0$. ثابت کنید $B' = (k, i, v)$ یک پایه برای \mathbb{R}^3 است.

ب) فرض کنید $B = (i, j, k)$ پایه استاندارد \mathbb{R}^3 باشد. ماتریس تبدیل پایه از پایه قدیمی B به پایه جدید B' و برعکس را بدست آورید.

ج) می‌دانیم که مختصات دوران نقطه $u = [u_1, u_2, u_3]^t$ حول محور z (بردار k) به اندازه زاویه θ در جهت مثلثاتی از رابطه $u' = Ru$ بدست می‌آید که

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

با کمک (ب) ماتریس دوران حول بردار $v = [a, b, c]^t \in \mathbb{R}^3$ (که $b \neq 0$) به اندازه زاویه θ را بدست آورید.

۴. فرض کنید V فضای برداری همه توابع حقیقی پیوسته روی بازه $[-1, 1]$ باشد که با ضرب داخلی زیر مجهز شده است،

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

W را زیرفضای تولید شده توسط توابع $v_1 = 1$, $v_2 = x$ و $v_3 = x^2$ در نظر بگیرید. با کمک الگوریتم گرام-اشمیت یک پایه اورتونرمال برای W بدست آورید.

۵. فرض کنید $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$. ماتریس P را ماتریس تصویر روی W_1 در راستای W_2 در نظر بگیرید (یعنی برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم Px تصویر x روی W_1 در راستای W_2 است). ثابت کنید

$$R(P) = N(I - P) = W_1 \quad \text{و} \quad R(I - P) = N(P) = W_2.$$