# ساختمان گسسته

تمرین سری۲
۱ نفره
تحویل یکشنبه ۲۰ فروردین ۱۴۰۲ – ساعت ۱۲:۳۰

۱- با استفاده از استقرا نامعادله زیر را ثابت کنید.

$$\forall n>1 : n! < n^n$$

۲- با استفاده از استقرا تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sum_{i=1}^{n} i \times i! = (n+1)! - 1$$

۳- نشان دهید مجموع توان سوم اعداد از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$s[n] = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{A} n^2 (n+B)^2$$

$A$ و $B$ را بدست آورده و رابطه را به کمک استقرا ثابت کنید.

۴- به کمک استقرا نشان دهید جمله $n$ ام دنباله فیبوناتچی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$F[n] = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ و $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ هستند. (یادآوری: هر جمله دنباله فیبوناچی از جمع دو جمله قبلی به دست می‌آید.)

۵- ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ و هر عدد حقیقی $x$ ، نامعادله زیر برقرار است:

$$|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$$

(راهنمایی: فرمول سینوس جمع: $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A)$)

۶- ثابت کنید برای هر $n>0$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

۷- محمدرضا ادعا می‌کند با استقرای قوی اثبات کرده برای تمام $n$های صحیح نامنفی، اگر $a$ یک عدد صحیح ناصفر باشد داریم $a^n = 1$. با دیدن اثبات او توضیح دهید چه مشکلی در این اثبات وجود دارد و چرا این نتیجه درست نیست.

گام پایه: می‌دانیم برای هر عدد صحیح ناصفر $a$ تساوی $a^0 = 1$ برقرار است، بنابراین $P(0)$ درست است.

فرض استقرا: $P(k)$ برای هر $k \leq n$ برقرار است یعنی $\forall k \leq n : a^k = 1$

گام استقرا: براساس فرض استقرا داریم:

$$a^{n+1} = \frac{a^n . a^n}{a^{n-1}} = \frac{1.1}{1} = 1$$

که نشان می‌دهد $P(n+1)$ نیز صحیح است. بنابراین بر اساس اصل استقرا نتیجه می‌گیریم که $P(n)$ برای هر عدد صحیح نامنفی $n$ صحیح است.

۸- یک ورقه شکلات $1\times n$ دارید. در هر روز می تواند یک تکه **به ابعاد دلخواه** از سمت راست شکلات بخورید و روزهای بعد همین روند ادامه می‌یابد تا شکلات تمام شود. به چند روش مختلف می‌توانید شکلات را بخورید؟ شاید بد نباشد ابتدا تعداد روش را برای ابعاد کوچک بشمارید.

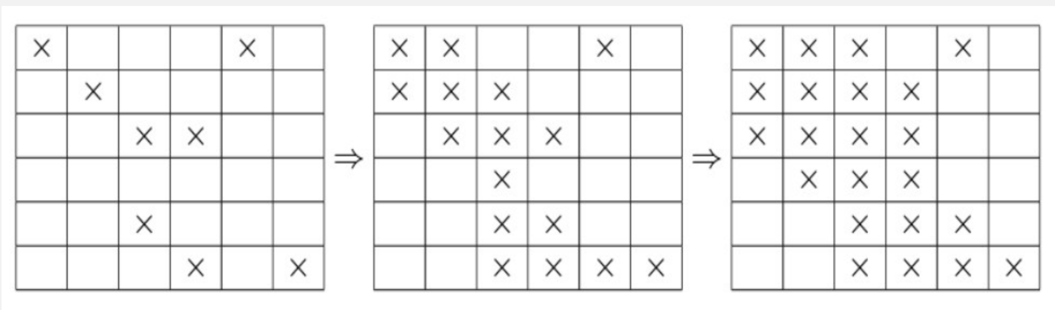
**۹**- یک رشته اعداد به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$f[1]=3$$
$$f[2]=5$$
$$f[k]=2f[k-1]-f[k-2]$$

$f[8^8]$ را محاسبه نمایید.

۱۰- با موج جدید کرونا، دانشجویان ورودی **۱۴۰۱** برای حضور در کلاس گسسته به یکی از تالارها رفته‌اند که صندلی‌های آن به شکل یک مربع $n\times n$ چیده شده است. بعضی از دانشجویان در کلاس به بیماری کووید=**۱۹** مبتلا هستند. در هر دقیقه، اگر دانشجویی حداقل با دو دانشجوی بیمار همسایه باشد به بیماری مبتلا خواهد شد. دو دانشجو همسایه هستند اگر در یک ضلع مشترک باشند و دانشجویانی که به صورت قطری در کنار هم هستند همسایه نیستند.

اثبات کنید اگر در شروع کلاس کمتر از $n$ دانشجو مبتلا باشند، هیچ‌گاه کل کلاس به بیماری مبتلا نمی‌شوند. مثال زیر نحوه پخش بیماری برای $n=6$ را نشان می‌دهد. در این مثال تعداد بیماران اولیه از ضلع مربع بیشتر بوده‌اند و اگر مراحل را ادامه دهیم، مشاهده می‌شود که در نهایت تمام کلاس بیمار می‌شوند.



اگر به اندازه کافی برای سوال زمان گذاشتید و به راه‌حل نرسیدید، می‌توانید از راهنمایی صفحه بعد استفاده کنید.

راهنمایی سوال ۱۰: با استقرا نشان دهید محیط افراد بیمار همواره کمتر از $4n$ است. برای مثال در شکل سمت چپ خطوط قرمز محیط افراد بیمار را نشان می‌دهد. اگر هر مربع کوچک به ضلع واحد باشد، محیط افراد بیمار در این شکل برابر ۳۰ است. اگر تنها یک نفر بیمار باشد محیط افراد بیمار برابر ۴ است.