باسمه تعالی

تاریخ: ۲۳ آبان ۱۴۰۳

امتحان میان‌ترم درس جبر خطی کاربردی

مدت امتحان: ۲/۵ ساعت

---

۱. درستی یا نادرستی هر کدام از گزاره‌های زیر را مشخص کنید. (در صورت درستی اثبات کنید و در صورت نادرستی مثال نقض بزنید)

الف) اگر B یک پایه برای فضای برداری V باشد و W زیرفضایی از V باشد که $B\cap W \neq \emptyset$، آن‌گاه $B\cap W$ یک پایه برای W است.

ب) در $\mathbb{R}^n$ حداکثر $n-۱$ بردار دو به دو متعامد وجود دارد که جمع مولفه‌های هر کدام برابر صفر باشد.

ج) اگر W یک زیرفضای k-بعدی از V باشد و تصویر متعامد k بردار در W مستقل خطی باشند، آن‌گاه خود k بردار در V نیز مستقل خطی اند.

د) اگر A یک ماتریس دلخواه باشد، آن‌گاه پوچی(A)= پوچی(A^t).

ه) اگر A یک ماتریس مربعی باشد که $A^۲ = O$، آن‌گاه A فول رنک نیست.

۲. فرض کنید W زیرفضایی از $\mathbb{R}^۶$ باشد که توسط بردارهای $v_۱, \ldots, v_۴$ تولید می شود. یک پایه برای W و یک پایه برای $W^\perp$ بنویسید و بعد هرکدام را مشخص کنید. (جزییات محاسبات را بنویسید)

$$v_۱ = (۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۰)$$

$$v_۲ = (۱, ۰, ۳, ۴, -۱, ۱)$$

$$v_۳ = (۱, ۱, ۴, ۶, ۶, ۰)$$

$$v_۴ = (۰, -۱, -۱, -۲, ۱, -۱)$$

۳. یک تابع به فرم $f(x) = a + bx + c\,۲^x$ داریم و مقادیر تقریبی زیر را محاسبه کرده ایم.

x	-۱	۰	۱	۲
$f(x)$	۱	۶	۴	۰

بهترین تابع $f(x)$ را پیدا کنید. پیش بینی شما از $f(۳)$ چیست؟

۴. تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را بصورت $T(x, y, z) = (x + ۲y - z, z - y, x + ۳z)$ در نظر بگیرید. هم‌چنین پایه $B = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \right\}$ را برای $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید. ماتریس نمایش تبدیل T را در پایه B را بنویسید.

۵. فرض کنید ماتریس تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ در پایه استاندارد برابر A باشد و داریم $AA^t = I$.

الف) ثابت کنید T یک به یک و پوشا است.

ب) ثابت کنید T حافظ زاویه است، یعنی زاویه بین دو بردار u, v با زاویه دو بردار $T(u)$ و $T(v)$ برابر است.