دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی:.................... شماره دانشجوئی:.................... نام درس:....................

گروه درس:.................... نام استاد:.................... تاریخ:.................... نمره:....................

۱- الف) نادرست. مثلاً $V=\mathbb{R}^3$ و $B=\{i, j, k\}$ و $W=\langle i, k+j\rangle$

$W\cap B=\{i\}$ پایه W نیست. ۵

ب) درست. اگر $v_1,\dots,v_k$ بردارهای دو به دو متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند که جمع مولفه‌هایشان صفر است، همگی به بردار 1 عمودند پس $\{v_1,\dots,v_k,1\}$ متعامدند پس مستقل اند ۵

یعنی $k+1\le n$ یعنی $k\le n-1$

ج) درست. $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k=0$ ۵

$$\Rightarrow 0=\text{Proj}_W(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k)=\alpha_1 \text{Proj}_W v_1+\dots+\alpha_k \text{Proj}_W v_k$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_k=0$$

د) غلط، اگر A ، $m\times n$ باشد آنگاه

پوچی $A = n-\text{rank}(A)$

پوچی $A^t = m-\text{rank}(A)$ ۵

پس اگر $m\neq n$ حکم درست نیست.

ه) درست. اگر $A^2=0$ آنگاه $R(A)\subseteq N(A)$ پس $\text{rank}\,A\le \text{null}(A)$ ۵

پس $2\,\text{rank}(A)\le n$ یعنی $\text{rank}(A)\le \frac{n}{2}$ پس A فول رنک نیست.

سوال ۲ -

۲۰

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

W فضای سطری A و $W^\perp$ فضای پوچ A است

$$\xrightarrow[-R_1+R_3]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_4]{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim W = 3$

$\dim W^\perp = 3$

پایه W = (فضای سطری A): $(1,0,3,4,-1,1)$ و $(0,1,1,2,3,0)$ ، $(0,0,0,0,4,-1)$

محاسبه پایه $W^\perp$ (فضای پوچ A)

متغیرهای آزاد = x_3 , x_4 , x_6

متغیرهای وابسته = x_1, x_2, x_5

$$\begin{cases} 4x_5 = x_6 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_1 = -3x_3 - 4x_4 + x_5 - x_6 \end{cases}$$

$x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_6 = 0$

$\Downarrow$

$x_5 = 0,\ x_2 = -1,\ x_1 = -3$

$\boxed{u_1 = (-3, -1, 1, 0, 0, 0)}$

$x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_6 = 0$

$\Downarrow$

$x_5 = 0,\ x_2 = -2,\ x_1 = -4 \Rightarrow \boxed{u_2 = (-4, -2, 0, 1, 0, 0)}$

$x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_6 = 4 \Rightarrow x_5 = 1,\ x_2 = -3,\ x_1 = -3$

$\boxed{u_3 = (-3, -3, 0, 0, 1, 4)}$

پایه $W^\perp = \{u_1, u_2, u_3\}$

سوال ۳-

10

$$f(-1) = a - b + \frac{c}{2}$$

$$f(0) = a + c$$

$$f(1) = a + b + 2c$$

$$f(2) = a + 2b + 4c$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

باید دستگاه $A^t A x = A^t b$ را حل کنیم

$$A^t A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7.5 \\ 2 & 6 & 9.5 \\ 7.5 & 9.5 & 21.25 \end{bmatrix} \qquad A^t b = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 14.5 \end{pmatrix}$$

$$[A^t A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 7.5 & 11 \\ 2 & 6 & 9.5 & 3 \\ 7.5 & 9.5 & 21.25 & 14.5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 7.5 & 11 \\ 0 & 5 & 5.75 & -2.5 \\ 0 & 5.75 & 7.18 & -6.125 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7.5 & 11 \\ 0 & 5 & 5.75 & -2.5 \\ 0 & 0 & 0.567 & -3.25 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{-3.25}{0.567} = -۵,۷۳$$

$$5b + 5.75c = -2.5 \Rightarrow b = 30.44$$

$$4a + 2b + 7.5c = 11 \Rightarrow a = -6.905$$

$$f(x) = -6.905 + 30.44x - ۵,۷۳ \times ۲^x \Rightarrow f(۳) = ۳۸,۵۷۵$$

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ ‏۴-

$$Tv_1 = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = v_3 - v_2 + v_1$$

۱۰

$$Tv_2 = T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} = v_3 - 2v_2 + 4v_1$$

$$Tv_3 = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} = 4v_3 - 4v_2 + 2v_1$$

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

۵- الف) چون $AA^t = I$ پس A وارون‌پذیر است پس $\operatorname{rank}(A)=n,\ \operatorname{null}(A)=0$

پس A یک به یک و پوشا است.

۵

ب)

$$\forall u,v \quad \langle Au, Av\rangle = (Au)^t (Av)$$
$$= u^t A^t A v$$
$$= u^t v$$
$$= \langle u, v\rangle$$

۱۰

پس A حافظ ضرب داخلی است. امّا

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2$$

پس A حافظ طول هم هست. از طرفی $\theta = \cos^{-1}\dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$ پس A حافظ زاویه است.