باسمه تعالی

تاریخ: ۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۷

امتحان میان‌ترم درس جبر خطی کاربردی

مدت امتحان: ۲/۵ ساعت

---

۱. فرض کنید

$$Q = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۶ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{pmatrix}.$$

الف) رتبه (رنک) و پوچی ماتریس Q و یک پایه برای فضای تصویر Q و هسته Q پیدا کنید.

ب) کلیه جواب‌های دستگاه $Qx = b$ را بدست آورید.

۲. تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را بصورت $T(x,y,z) = (x+۲y-z, -y, x+۷z)$ در نظر بگیرید. هم‌چنین پایه $B = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \right\}$ را برای $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. ماتریس نمایش تبدیل T در پایه استاندارد و در پایه B را بنویسید.

۳. فرض کنید برای ماتریس A داریم $A^۲ = A$. فرض کنید $B_۱ = \{x_۱, \dots x_r\}$ یک پایه برای $Image(A)$ و $B_۲ = \{y_۱, \dots, y_{n-r}\}$ یک پایه برای $Ker(A)$ باشند.

الف) ثابت کنید برای هر $۱ \leq i \leq r$، $Ax_i = x_i$.

ب) ثابت کنید $B = B_۱ \cup B_۲$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

ج) ثابت کنید $[A]_{B,B} = \begin{pmatrix} I_r & o \\ o & o \end{pmatrix}$.

۴. فرض کنید k, n دو عدد طبیعی باشند که $۱ \leq k \leq n - ۱$.

الف) ثابت کنید ماتریس $n \times n$، $(k-۱)I + J$ فول رنک است (J ماتریس همه یک است).

راهنمایی: دستگاه معادلات خطی $((k-۱)I + J)x = O$ را بنویسید و معادله اول را از بقیه معادله‌ها کم کنید.

ب) فرض کنید $S_۱, \dots, S_m$ تعداد m زیرمجموعه متمایز k عضوی از مجموعه $\{۱, \dots, n\}$ باشد به طوری که برای هر $i \neq j$، $|A_i \cap A_j| = ۱$. ماتریس $m \times n$، A را به‌صورت زیر تعریف کنید.

$$A_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{if } j \in S_i, \\ ۰ & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

ثابت کنید $AA^t = (k-۱)I + J$.

ج) با استفاده از الف و ب ثابت کنید $m \leq n$.