

Definition 0.1 (Kategorie). Eine Kategorie \mathcal{C} besteht aus den folgenden Daten:

- (1) Eine Klasse von Objekten $\text{Ob}(\mathcal{C})$.
- (2) Für alle $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Klasse von Morphismen $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$.
- (3) Für alle $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen Identitätsmorphismus $\text{id}_x \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x)$.
- (4) Für alle $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Verkettungsabbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, z), (g, f) \mapsto g \circ f.$$

Dabei fordern wir, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für alle $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ ist $f \circ \text{id}_x = f = \text{id}_y \circ f$.
- (2) Für alle $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(w, x), g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ und $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, z)$ ist

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Wir nennen eine Kategorie \mathcal{C} lokal klein, falls für alle $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ die Klasse $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ eine Menge ist, und klein, falls zusätzlich auch die Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

Definition 0.2 (Mono-,Epi-,Isomorphismus). Sei $f: x \rightarrow y$ ein Morphismus in einer Kategorie \mathcal{C} .

- (1) Wir sagen f ist ein Monomorphismus, falls für alle $z \in \mathcal{C}$ die Abbildung

$$f_*: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(z, x) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(z, y), g \mapsto f \circ g$$

injektiv ist. Dual dazu sagen wir f ist ein Epimorphismus, falls für alle $z \in \mathcal{C}$ die Abbildung

$$f^*: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, z), g \mapsto g \circ f$$

injektiv ist.

- (2) Wir sagen f ist ein spaltender Monomorphismus, falls es einen Morphismus $g: y \rightarrow x$ gibt mit $g \circ f = \text{id}_x$. Wir nennen dann g eine Retraktion von f .
Dual dazu sagen wir f ist ein spaltender Epimorphismus falls es einen Morphismus $g: y \rightarrow x$ mit $f \circ g = \text{id}_y$. Wir nennen dann g einen Schnitt von f .
- (3) Wir sagen f ist ein Isomorphismus falls es einen Morphismus $f': y \rightarrow x$ gibt der gleichzeitig Retraktion und Schnitt von f ist. So ein f' ist dann eindeutig und wir schreiben $f^{-1} = f'$.

Lemma 0.3. Sei $f: x \rightarrow y$ ein Morphismus in einer Kategorie \mathcal{C} . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (1) f ist ein Isomorphismus.
- (2) f ist sowohl ein Monomorphismus als auch ein spaltender Epimorphismus.
- (3) f ist sowohl ein Epimorphismus als auch ein spaltender Monomorphismus.
- (4) Für alle $z \in \mathcal{C}$ ist die Abbildung $f_*: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(z, x) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(z, y)$ bijektiv.
- (5) Für alle $z \in \mathcal{C}$ ist die Abbildung $f^*: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, z)$ bijektiv.

Beweis. Gelte 1). Dann ist für alle $z \in \mathcal{C}$:

$$f_*^{-1} f_* = (f^{-1} f)_* = \text{id}_{\text{Mor}_{\mathcal{C}}(z, x)}$$

also ist f_* injektiv und damit ist f ein Monomorphismus. Also gilt 2).

Gelte 2). Dann sei $g: y \rightarrow x$ ein Schnitt. Es gilt für $z = x$ dass $f_*(\text{id}_x) = f = f \circ g \circ f = f_*(g \circ f)$ also ist $\text{id}_x = g \circ f$. Damit gilt 1). Gelte 1). Dann ist für Retraktion und Schnitt $g: y \rightarrow x$ und alle $z \in \mathcal{C}$: $\text{id}_x = (\text{id}_x)_* = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ und analog $\text{id}_y = f_* \circ g_*$. Also ist f_* injektiv und surjektiv. Also gilt 4). Gelte 4). Dann ist f ein Monomorphismus. Zu $z = y$ gibt es $g: y \rightarrow x$ mit $f_*(g) = \text{id}_y$ also $f \circ g = \text{id}_y$. Dann ist g ein Schnitt und es gilt 2). Das zeigt 1) \iff 2) \iff 4). Analog zeigt man 1) \iff 3) \iff 5). \square

0.1. Funktoren.

Definition 0.4 (Funktorkategorie). Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ besteht aus folgenden Daten:

- (1) Eine Abbildung

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), x \mapsto F(x).$$

- (2) Für alle Objekte $x, y \in \mathcal{C}$ eine Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y)), f \mapsto F(f).$$

Dabei fordern wir, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für alle $x \in \mathcal{C}$ ist $F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}$.

- (2) Für alle $f: x \rightarrow y$ und $g: y \rightarrow z$ in \mathcal{C} ist $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist *treu* (bzw. *volltreu*), falls für alle $x, y \in \mathcal{C}$ die Abbildung

$$F: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y))$$

injektiv (bzw. bijektiv) ist.

Bemerkung 0.5. Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein treuer Funktor. Dann reflektiert F Mono- und Epimorphismen. Wenn F volltreu ist, dann reflektiert F auch spaltende Mono- und Epimorphismen.

Definition 0.6. Sei \mathbf{Cat} die Kategorie deren Objekte kleine Kategorien \mathcal{C} sind mit Morphismen sind die Funktoren.

Definition 0.7. Sei I eine partiell geordnete Menge (zB. $[n] = \text{Set} 0, 1, \dots, n$). Dann definiere eine Kategorie NP durch

$$\text{Ob}(NP) = P \text{ und } \text{Mor}_{NP}(p, q) = \begin{cases} \{*\} & \text{falls } p \leq q \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das gibt einen volltreuen Funktor $N: \mathbf{CatOrd} \rightarrow \mathbf{Cat}$

0.2. Natürliche Transformationen.

Definition 0.8. Seien $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren zwischen Kategorien. Eine natürliche Transformation $\tau: F \rightarrow G$ besteht aus den folgenden Daten:

- (1) Für alle $x \in \mathcal{C}$ ein Morphismus $\tau_x: F(x) \rightarrow G(x)$ in \mathcal{D} .

Dabei fordern wir, dass folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(1) \text{ Für alle Morphismen } f: x \rightarrow y \text{ in } \mathcal{C} \text{ kommutiert das Diagramm}$$

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\tau_x} & G(x) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(y) & \xrightarrow{\tau_y} & G(y) \end{array}$$

Wir schreiben $\text{Nat}(F, G)$ für die Klasse der natürlichen Transformationen $\tau: F \rightarrow G$.

Definition 0.9 (Funktorkategorie). Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien. Dann definieren wir die Funktorkategorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ wie folgt

- (1) Die Objekte sind Funktoren $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

- (2) Morphismen $\tau: F \rightarrow G$ sind natürliche Transformationen mit Verkettung $(\nu \circ \tau)_x = \nu_x \circ \tau_x$ für $x \in \mathcal{C}$.

Lemma 0.10. Sei \mathcal{C} eine kleine und \mathcal{D} eine lokal kleine Kategorie. Dann ist $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ wieder lokal klein.

Beweis. Seien $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Dann ist

$$\text{Nat}(F, G) \subseteq \prod_{x \in \mathcal{C}} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(x), G(x))$$

und das letzte ist eine Menge. □

Lemma 0.11. Eine natürliche Transformation $\tau: F \rightarrow G$ ist natürlicher Isomorphismus, wenn τ_x ein Isomorphismus für alle $x \in \mathcal{C}$ ist.

Beweis. Behauptung: $(\tau_x^{-1})_x$ ist eine natürliche Transformation. Sei $f: x \rightarrow y$ ein Morphismus. Dann ist

$$\begin{aligned}\tau_y^{-1} \circ G(f) &= \tau_y^{-1} \circ (G(f) \circ \tau_x) \circ \tau_x^{-1} \\ &= \tau_y^{-1} \circ (\tau_y \circ F(f)) \circ \tau_x^{-1} \\ &= F(f) \circ \tau_x^{-1}\end{aligned}$$

□

Satz 0.12. Sei $i: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ ein volltreuer Funktor und $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor mit $\text{im}(F) \subseteq \text{im}(i)$. Dann existiert ein Paar (F', κ) bestehend aus einem Funktor $F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$ und einen natürlichen Isomorphismus $\kappa: i \circ F' \cong F$. Weiter gibt es für zwei solcher Paare (F'_1, κ_1) und (F'_2, κ_2) einen eindeutigen natürlichen Isomorphismus $\nu: F'_1 \cong F'_2$ sodass $\kappa_2 \circ i(\nu) = \kappa_1$, das heißt das Paar (F', κ) ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Lemma 0.13. Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} und \mathcal{E} Kategorien. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus von Kategorien

$$\text{Fun}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \cong \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})).$$

Beweis. Klar. □

Definition 0.14 (Kategorienäquivalenz). Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Ein Quasiinverses zu F ist ein Funktor $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ zusammen mit natürlichen Isomorphismen $\alpha: G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ und $\beta: F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$ sodass

$$F(\alpha) = \beta_F: FGF \cong F \text{ und } G(\beta) = \alpha_G: GFG \cong G.$$

Falls ein Quasiinverses existiert dann nennen wir F eine Kategorienäquivalenz.

Satz 0.15. Für einen Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (1) F ist eine Kategorienäquivalenz.
- (2) Es existiert ein Funktor $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit natürlichen Isomorphismen $\alpha: G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ und $\beta: F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$.
- (3) F ist volltreu und essentiell surjektiv.

Außerdem ist ein Quasiinverses zu F eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis. 1) nach 2) ist klar. Gelte 2). Für $y \in \mathcal{D}$ ist $\beta_y^{-1}: y \cong F(G(y))$ also ist F essentiell surjektiv. Außerdem sind für $x, y \in \mathcal{C}$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccccc}\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y) & \xrightarrow{F} & \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y)) & \xrightarrow{G} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(GF(x), GF(y)) \\ & & & & \downarrow \alpha_y \circ (-) \circ \alpha_x^{-1} \\ & & & & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)\end{array}$$

□

Bemerkung 0.16. Sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist äquivalent

- (1) F ist Kategorienäquivalenz
- (2) Für alle Kategorien \mathcal{E} ist $F_*: \text{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ eine Kategorienäquivalenz
- (3) Für alle Kategorien \mathcal{E} ist $F^*: \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ eine Kategorienäquivalenz

0.3. Yoneda Lemma.

Satz 0.17 (Yoneda Lemma). *Sei \mathcal{C} eine lokal kleine Kategorie. Sei $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ ein Funktor und $x \in \mathcal{C}$. Dann ist die Abbildung*

$$\text{Nat}(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, x), F) \rightarrow F(x), \tau \mapsto \tau_x(\text{id}_x)$$

bijektiv.

Beweis. Für $s \in F(x)$ definiere $\tau^{(s)}: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, x) \rightarrow F$ durch

$$\tau_y^{(s)}: \text{Mor}_{\mathcal{C}}(y, x) \rightarrow F(y), f \mapsto F(f)(s)$$

für $y \in \mathcal{C}$.

Es gilt $\tau_x^{(s)}(\text{id}_x) = s$ und $\tau_y^{(\tau_x(\text{id}_x))}(f) = \tau_y(f)$. Also gilt die Aussage. \square

Korollar 0.18 (Yoneda-Einbettung). *Sei \mathcal{C} eine lokal kleine Kategorie. Dann ist der Funktor*

$$Y_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set}), x \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, x)$$

volltreu.

Beweis. Seien $x, y \in \mathcal{C}$. Zeige

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Nat}(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, x), \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, y)), f \mapsto f_*$$

ist eine Bijektion. Das ist aber genau die Inverse Abbildung aus dem [Yoneda Lemma](#) für den Funktor $F = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, y)$. \square

Bemerkung 0.19. Es gibt eine duale Version vom Yoneda Lemma. Sei \mathcal{C} eine lokal kleine Kategorie und $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ ein Funktor und $x \in \mathcal{C}$. Dann ist die Abbildung

$$\text{Nat}(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, -), F) \rightarrow F(x), \tau \mapsto \tau_x(\text{id}_x)$$

bijektiv. Dann ist die duale Yoneda Einbettung $Y^{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}, \text{Set}), x \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, -)$ volltreu.

Definition 0.20. Sei \mathcal{C} eine lokal kleine Kategorie. Ein Funktor $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ heißt darstellbar falls er im essentiellen Bild der Yoneda Einbettung liegt. Analog heißt ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ kodarstellbar, wenn er im essentiellen Bild von $Y^{\mathcal{C}}$ liegt.

0.4. Adjunktionen.

Definition 0.21 (Adjungiertes Objekt). Sei $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und $x \in \mathcal{C}$. Ein unter G zu x linksadjungiertes Objekt ist ein Objekt $y \in \mathcal{D}$ zusammen mit einem Morphismus $\eta: x \rightarrow G(y)$ sodass für alle $y' \in \mathcal{D}$ die Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{D}}(y, y') \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, G(y')), f \mapsto G(f) \circ \eta$$

bijektiv ist.

Bemerkung 0.22. sei $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor sodass \mathcal{C}, \mathcal{D} lokal kleine Kategorien sind. Dann ist ein zu x linksadjungiertes Objekt das gleiche wie ein kodarstellendes Objekt für den Funktor

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, G(-)): \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$$

Satz 0.23 (Adjungierter Funktor). *Sei $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und sei $i: \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie, sodass alle Objekte in \mathcal{C}' unter G ein linksadjungiertes Objekt besitzen. Dann existiert ein Funktor $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ und eine natürliche Transformation $\eta: i \rightarrow G \circ F$ sodass $(F(x)\eta_x)$ für jedes $x \in \mathcal{C}$ ein unter G zu x linksadjungiertes Objekt ist. Das Paar (F, η) ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus. Wir nennen F , zusammen mit der natürlichen Transformation, einen partiellen links adjungierten Funktor zu G . Wenn $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ dann nennen wir $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ auch einfach einen linksadjungierten Funktor zu G .*

Beweis. Wähle ein linksadjungiertes Objekt $(F(x), \eta_x)$ für jedes $x \in \mathcal{C}$. Für einen Morphismus $f: x \rightarrow y$ in \mathcal{C} definiere $F(f): F(x) \rightarrow F(y)$ als das eindeutige Urbild von $\eta_y \circ f$ unter der bijektiven Abbildung

$$\text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(x), F(y)) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, G(F(y)), g \mapsto G(g) \circ \eta_x;$$

wir haben also $G(F(f)) \circ \eta_x = \eta_y \circ f$. Wir behaupten nun noch, dass diese Daten einen Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ definieren; danach ist es dann sofort klar, dass die η_x eine natürliche Transformation $\eta: i \rightarrow G \circ F$ definieren. Für ein Objekt $x \in \mathcal{C}$ ist

$$G(\text{id}_{F(x)}) \circ \eta_x = \eta_x = \eta_x \circ \text{id}_x$$

und somit $F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}$. Weiter ist für Morphismen $f: x \rightarrow y$ und $g: y \rightarrow z$

$$\begin{aligned} G(F(g) \circ F(f)) \circ \eta_x &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \circ \eta_x \\ &= G(F(g)) \circ \eta_y \circ f \\ &= \eta_z \circ g \circ f \end{aligned}$$

und somit $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Die Eindeutigkeit von (F, η) bis auf eindeutigen Isomorphismus folgt aus der Eindeutigkeit von linksadjungierten Objekten. \square

Bemerkung 0.24. Sei $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor und sei $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ die volle Unterkategorie der Objekte die unter G ein linksadjungiertes Objekt besitzen. Wir nehmen außerdem an, dass \mathcal{C} und \mathcal{D} lokal klein sind. Dann ist ein partieller Linksadjungierter $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ von G das Gleiche wie eine Faktorisierung des Funktors

$$\mathcal{C}' \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{D}, \text{Set})^{\text{op}}, x \mapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, G(-))$$

durch die (volltreue) duale Yoneda-Einbettung

$$Y^{\mathcal{D}, \text{op}}: \mathcal{D} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{D}, \text{Set})^{\text{op}}.$$

In dieser Situation ist also Satz 0.23 eine Folgerung aus Satz 0.12.

Definition 0.25. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Wir definieren die Pfeilkategorie von \mathcal{C} als

$$\text{Arr}(\mathcal{C}) = \text{Fun}(N[1], \mathcal{C}).$$

Lemma 0.26. Sei $\text{codom}: \text{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ der Funktor, der $\phi: A \rightarrow B$ auf B schickt und ein kommutatives Diagramm auf den rechten Morphismus. Dann ist codom links-adjungiert zum Funktor $R: \mathcal{C} \rightarrow \text{Arr}(\mathcal{C}), C \mapsto (\text{id}: C \rightarrow C)$

Beweis. Klar \square

0.5. Moduln.

Definition 0.27. Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit Pullbacks und sei $A \in \mathcal{C}$. Ein Modul ist ein abelsches Gruppenobjekt in der Slice Kategorie $\mathcal{C}_{/A}$.

1. MENGEN

Lemma 1.1 (Zornsches Lemma). Sei M eine partiell geordnete Menge, sodass jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke in M hat. Dann hat M ein maximales Element.

2. GRUPPEN

Satz 2.1 (Gruppenordnung). Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist $|G| = |H| \cdot [G : H]$

Beweis. Es ist $[G : H] = |G/H| = \{aH \mid a \in G\}$ und

$$G = \bigcup_{aH \in G/H} aH$$

disjunkte Vereinigung, denn wenn $g \in G$ dann ist $g \in gH$ und $aH \cap bH = \emptyset \iff aH \neq bH$. Es ist $|H| \neq |aH|$ für alle $a \in G$. \square

Korollar 2.2 (Satz von Lagrange). *Es gilt $|H| \mid |G|$*

Korollar 2.3. *Für $a \in G$ ist $\text{ord}(a) \mid |G|$. Also $a^{|G|} = e$.*

Korollar 2.4. *Sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ sodass $p \nmid a$. Dann ist $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Beweis. Sei $G = \mathbb{F}_p^*$. Dann ist $|G| = p - 1$ also gilt $\bar{a}^{p-1} = 1$. □

Satz 2.5 (Struktursatz endlicher abelscher Gruppen). *Jede endliche abelsche Gruppe G mit $|G|$ lässt sich schreiben als*

$$|G| \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$$

mit $m_1 \mid \cdots \mid m_r$

2.1. Bahnenformel und Klassengleichung.

Definition 2.6. Sei G eine Gruppe, X eine Menge und $G \times X \rightarrow X$ eine Gruppenwirkung.

- (1) Für $x \in X$ ist $Gx = \{ax \mid a \in G\}$ die Bahn von x .
- (2) Für $x \in X$ ist $\text{Stab}_G(x) = G_x = \{a \in G \mid ax = x\}$ der Stabilisator von x .
- (3) Die Wirkung heißt transitiv, wenn $X = Gx$ für ein $x \in X$ ist.
- (4) $x \in X$ heißt Fixpunkt der Wirkung, wenn $\text{Stab}_G(x) = G$ ist.
- (5) X^G sei die Menge der Fixpunkte von G auf X .
- (6) Die Operation heißt treu, wenn der Homomorphismus $G \rightarrow S(X)$ injektiv ist.

Bemerkung 2.7. Sei $G \times X \rightarrow X$ eine Gruppenwirkung. Dann ist $X = \coprod_{i \in I} Gx_i$ für x_i ein Vertretersystem aller Bahnen.

Lemma 2.8. *Für $x \in X$ gibt es eine natürliche Bijektion*

$$G/\text{Stab}_G(X) \rightarrow G_x, a \text{Stab}_G(X) \mapsto ax$$

Beweis. Man prüft, dass das wohldefiniert ist. Die Abbildung ist surjektiv nach Definition und wenn $ax = bx$ ist, dann ist $a^{-1}b \in \text{Stab}_G(X)$ also $a \text{Stab}_G(X) = b \text{Stab}_G(X)$. □

Korollar 2.9. *Sei $G \times X \rightarrow X$ eine Gruppenwirkung. Dann ist*

$$|Gx| = [G : \text{Stab}_G(X)].$$

Satz 2.10 (Bahnengleichung). *Sei $G \times X \rightarrow X$ eine Gruppenwirkung wobei X eine endliche Menge ist. Seien x_1, \dots, x_r Vertreter der Bahnen. Dann ist*

$$|X| = \sum_{i=1}^r [G : \text{Stab}_G(X_i)].$$

Beweis. Da $X = \coprod_{i=1}^r Gx_i$ eine disjunkte Vereinigung ist, folgt

$$|X| = \sum_{i=1}^r |Gx_i| = \sum_{i=1}^r [G : \text{Stab}_G(x_i)].$$

□

Definition 2.11. Sei G eine Gruppe. Dann ist das Zentrum von G definiert als

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \ \forall b \in G\}.$$

Das ist ein abelscher Normalteiler. $Z(G)$ sind Fixpunkte der Operation

$$G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto aba^{-1}.$$

Definition 2.12. Der Zentralisator von $a \in G$ ist

$$C_G(a) = \{b \in G \mid ba = ab\}.$$

Das ist eine Untergruppe von G und $a \in Z(C_G(a))$. Es ist $a \in Z(G)$ genau dann wenn $C_G(a) = G$. Es ist $C_G(a) = \text{Stab}_G(a)$ für die Wirkung $G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto aba^{-1}$

Satz 2.13 (Klassengleichung). Sei G eine endliche Gruppe und a_1, \dots, a_r Vertreter der Konjugationsklassen von nicht-zentralen Elementen. Dann ist

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r [G : C_G(a_i)]$$

Beweis. Das ist die **Bahnengleichung** für die Wirkung $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto aba^{-1}$, denn wenn x_i ein Vertreter einer Bahn mit zentralen Element, dann ist $\text{Stab}_G(x_i) = C_G(x_i) = G$ \square

Definition 2.14. Sei p eine Primzahl. Eine p -Gruppe ist eine Gruppe G mit $|G| = p^r$ für $r \geq 0$.

Satz 2.15. Sei $G \times X \rightarrow X$ eine Wirkung einer p -Gruppe auf eine endliche Menge X . Dann ist

$$|X| \equiv |X^G| \pmod{p}.$$

Beweis. Nach Satz 2.10 ist

$$|X| = |X^G| + \sum_{i=1}^r [G : \text{Stab}_G(x_i)]$$

wobei x_i Vertreter von Bahnen mit mindestens zwei Elementen sind. Da G eine p -Gruppe ist, gilt $p \mid [G : \text{Stab}_G(x_i)] = |X| - |X^G|$. \square

Satz 2.16. Eine nicht-triviale p -Gruppe G hat ein nicht-triviales Zentrum.

Beweis. Betrachte Wirkung $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto aba^{-1}$. Nach Satz 2.15 gilt $|G| = |Z(G)| \pmod{p}$. Also $|Z(G)| \geq p$. \square

Beweis. Das ist der ?? zusammen mit dem Fakt, dass endliche Gruppen Torsionsmoduln sind. \square

2.2. Sylowsätze. Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl.

Definition 2.17. Eine p -Sylowgruppe von G ist eine p -Gruppe $P \subseteq G$ mit $p \nmid [G : P]$. Das heißt wenn $|G| = p^r \cdot m$ mit $p \nmid m$ dann ist $P \subseteq G$ eine p -Sylowgruppe von G genau dann wenn $|P| = p^r$.

Lemma 2.18. Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl mit $p \mid |G|$. Dann gibt es ein $a \in G$ mit $\text{ord}(a) = p$.

Beweis. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ operiert auf der Menge $M = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdot g_2 \cdots g_p = e\}$ durch $k \cdot (g_1, \dots, g_p) = (g_{1+k \bmod p}, \dots, g_{p+k \bmod p})$. Es ist $|M| = |G|^{p-1}$. Nach Satz 2.15 ist

$$0 \equiv |G|^{p-1} \equiv |M^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}| \pmod{p}$$

. Das heißt es gibt Fixpunkt (g_1, \dots, g_p) wobei $g_i \neq e$. Dann ist aber $g_i = g_j$ für alle i, j also ist dieses Tupel (g, \dots, g) für ein $g \in G$. Dann ist $g^p = e$. \square

Korollar 2.19. Sei G eine p -Gruppe, $|G| = p^n$. Dann gibt es für jedes $k \leq n$ eine normale Untergruppe $H \subseteq G$ der Ordnung p^k .

Beweis. Da $|Z(G)| \mid p^n$ und $Z(G)$ nach Satz 2.16 nicht trivial ist, gibt es nach Lemma 2.18 ein $a \in Z(G)$ von der Ordnung p . Wenn $k = 1$ dann ist $N = \langle a \rangle$ die Lösung denn N ist normal. Wenn $k > 1$ ist, dann hat G/N hat Ordnung p^{n-1} . Nach Induktion hat $\bar{G} = G/N$ eine normale Untergruppe \bar{H} der Ordnung p^{k-1} . Sei $H = \pi^{-1}\bar{H}$ wobei $\pi: G \rightarrow G/N$ die Projektion ist. Dann ist $H/N \cong \bar{H}$ also ist H normal von Ordnung p^k . \square

Satz 2.20 (1. Sylowsatz). G hat eine p -Sylowgruppe.

Beweis. Sei $|G| = p^r \cdot m$ mit $p \nmid m$. Sei ohne Einschränkung $r \geq 1$. Angenommen $p \mid |Z(G)|$ wobei $Z(G)$ das Zentrum von G ist. Wähle $a \in Z(G)$ mit $\text{ord}(a) = p$. Dann ist $N = \langle a \rangle \subseteq G$ ein Normalteiler, da a zentral ist. Es ist $|G/N| = p^{r-1} \cdot m$ und nach Induktion gibt es eine p -Sylowgruppe $Q \subseteq G/N$. Sei $P = \pi^{-1}(Q)$ wobei $\pi: G \rightarrow G/N$ die Projektion ist. Dann ist

$P/N \cong Q$ also $|P| = p^r$. Somit ist $P \subseteq G$ eine p -Sylwogruppe. Angenommen $p \nmid |Z(G)|$. Dann gibt es die [Klassengleichung](#)

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^r [G : C_G(a_i)].$$

Also gibt es ein i sodass $p \nmid [G : C_G(a_i)]$. Da

$$|G| = |C_G(a_i)| \cdot [G : C_G(a_i)]$$

ist $p^r \mid |C_G(a_i)|$. Da a_i nicht zentral ist, ist $C_G(a_i) \neq G$. Nach Induktion gibt es eine P -Sylowgruppe $P \subseteq C_G(a_i)$. \square

Satz 2.21 (2. Sylowsatz). *Sei $P \subseteq G$ eine P -Sylowgruppe und $H \subseteq G$ eine p -Gruppe. Dann gibt es ein $a \in G$ sodass $aHa^{-1} \subseteq P$.*

Beweis. H operiert auf G/P durch $h \cdot (aP) = haP$. Nach Satz 2.15 ist

$$|G/P| \equiv |(G/P)^H| \pmod{p}.$$

Also ist $p \nmid |(G/P)^H|$ und somit gibt es einen Fixpunkt aP . Das heißt $HaP = aP$ und somit $a^{-1}HaP = P$ also $a^{-1}Ha \subseteq P$. \square

Korollar 2.22. *Wenn H eine weitere p -Sylowgruppe ist, dann folgt $aHa^{-1} = P$ wegen Anzahl der Elemente. somit sind alle p -Sylowgruppen konjugiert.*

Bemerkung 2.23. Eine p -Sylowgruppe $P \subseteq G$ ist normal $\iff P$ die einzige p -Sylowgruppe ist.

Satz 2.24 (3. Sylowsatz). *Sei $G = p^r \cdot m$ mit $p \nmid m$. Sei s die Anzahl der p -Sylowgruppen von G . Dann gilt*

- (1) $s \equiv 1 \pmod{p}$
- (2) $s \mid m$

Beweis. Zeige 1). Sei P eine p -sylowgruppe. P operiert auf der Menge X der p -Sylowgruppen von G durch Konjugation $P \times X \rightarrow X, (a, Q) \mapsto aQa^{-1}$. [Bahnengleichung](#) liefert

$$|X| = \sum_{i=1}^r [P : \text{Stab}_P(P_i)]$$

wobei P_i Verteter der Bahnen sind. Sei $P = P_1$. Dann ist $[P : \text{Stab}_P(P_1)] = 1$ und für $i \geq 2$ gilt, dass P_i normal ist in $H_i = \{a \in G \mid aP_i a^{-1} = P_i\} = \text{Stab}_G(P_i)$. Also ist P_i die einzige p -Sylowgruppe von H_i . Also ist $P \subsetneq H_i$ und damit $P \neq \text{Stab}_P(P_i)$ also $p \mid [P : \text{Stab}_P(P_i)]$. Damit ist

$$s = |X| = 1 + \sum_{i \geq 2} [P : \text{Stab}_G(P_i)] \equiv 1 \pmod{p}.$$

Zeige 2). Sei X wie oben. Wegen [2. Sylowsatz](#) operiert G transitiv auf X durch Konjugation. Sei $H = \text{Stab}_G(P)$ der Normalisator von P . Es ist $P \subseteq H$ und somit $p^r \mid |H|$. Es ist $|H| = p^r \cdot \ell$ mit $p \nmid \ell$. Nach ist Dann ist $s = |X| = \text{Bahn}(P) = |G|/|H| = \frac{m}{\ell}$. Also ist s ein Teiler von m . \square

Satz 2.25. *Seien p, q Primzahlen und $p < q$ und $p \nmid q - 1$. Dann ist jede Gruppe der Ordnung $p \cdot q$ zyklisch.*

Beweis. Sei s die Anzahl der p -Sylwogruppen und t die Anzahl der q -Sylowgruppen. Nach [3. Sylowsatz](#) gilt $s = t = 1$. Seien also P eine p -Sylowgruppe und Q eine q -Sylowgruppen. Es ist $P \cap Q = \{e\}$ denn die Ordnung von $P \cap Q$ teilt p und q nach Korollar 2.3. Also gilt für $a \in P, b \in Q$ dass $ab = ba$, denn $b^{-1}aba^{-1} \in P \cap Q$ wegen Normalität von P und Q . Es sind P, Q zyklisch. Seien also $a \in P$ und $b \in Q$ Erzeuger. Es ist

$$(ab)^n = a^n b^n = e \iff a^n = b^{-n} \iff a^n = e = b^n \iff pq \mid n$$

Also ist $\text{ord}(ab) = pq = |G|$ und somit $G = \langle ab \rangle$. \square

Lemma 2.26. *Jede endliche abelsche Gruppe ist isomorph zum Produkt ihrer Sylowgruppen.*

Beweis. Sei $|G| = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}$ wobei p_i verschiedene Primzahlen sind und $e_i \geq 1$. Da G abelsch ist, sind alle Untergruppen normal somit gibt es genau eine p_i -Sylowgruppe $P_i \subseteq G$. Die Abbildung

$$f: \prod_{i=1}^r P_i \rightarrow G, (a_1, \dots, a_r) \mapsto a_1 \cdot \dots \cdot a_r$$

ist Gruppenhomomorphismus. Wegen der Gruppenordnung ist f bijektiv wenn f injektiv ist. Angenommen $a_i \in P_i$ sodass $a_1 \cdot \dots \cdot a_r = e$. Es ist $a_1 = (a_2 \cdot \dots \cdot a_r)^{-1}$ und $\text{ord}(a_1) = \text{ord}(a_2 \cdot \dots \cdot a_r) \mid \prod_{i=2}^r p_i^{e_i}$. Somit $\text{ord}(a_1) \mid \text{ggT}(p_1^{e_1}, \prod_{i=2}^r p_i^{e_i}) = 1$. Also $e_1 = e$ und genauso $a_i = e$ für alle i . Also ist f injektiv. \square

Lemma 2.27 (Chinesischer Restsatz). *Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ und $d = \text{ggT}(n, m)$ und $k = \text{kgV}(n, m)$. Dann ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei $xn + ym = d$ für $x, y \in \mathbb{Z}$. Definiere

$$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, (a, b) \mapsto (a - b \frac{xn}{d} + n\mathbb{Z}, a + b \frac{ym}{d} + m\mathbb{Z}).$$

Angenommen $f(a, b) = (0, 0)$. Dann ist

$$b \frac{xn}{d} \equiv a \pmod{n}$$

und

$$-b \frac{ym}{d} \equiv a \pmod{m}.$$

Also gilt

$$b \frac{xn}{d} \equiv -b \frac{ym}{d} \pmod{d}$$

und somit

$$b \left(\frac{xn}{d} + \frac{ym}{d} \right) \equiv 0 \pmod{d}.$$

Da

$$\frac{xn}{d} + \frac{ym}{d} \equiv 1 \pmod{d}$$

gilt, ist

$$b \equiv 0 \pmod{d}.$$

Sei also $b = s \cdot d$. Dann ist

$$a \equiv \frac{xn}{d} \cdot b = xns \equiv 0 \pmod{n}$$

und analog $a \equiv 0 \pmod{n}$. Also ist $a \equiv 0 \pmod{k}$. Das zeigt $\ker(f) = k\mathbb{Z} \times d\mathbb{Z}$ und somit ist $\tilde{f}: \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ injektiv und damit surjektiv wegen gleicher Anzahl der Elemente. \square

2.3. Semidirekte Produkte.

Definition 2.28. Sei G eine Gruppe und $N, H \subseteq G$ Untergruppen sodass N normal ist und $H \cap N = \{e\}$ und $G = NH$. Dann heißt G das innere semidirekte Produkt von N und H .

Bemerkung 2.29. Wenn G das semidirekte Produkt von N und H ist, dann ist die Abbildung $N \times H \rightarrow G, (n, h) \mapsto n \cdot h$ bijektiv. Das Verleiht $N \times H$ mit der Gruppenstruktur $(n, h) \cdot (n', h') = (n \cdot hn'h^{-1}, h \cdot h')$. Das heißt wenn

$$\alpha: H \rightarrow \text{Aut}(N), \alpha(h) = (N \rightarrow N, n \mapsto hn'h^{-1})$$

dann ist $(n, h) \cdot (n', h') = (n \cdot \alpha(h)(n'), hh')$

Beweis. Wenn $nh = n'h'$ dann ist $n^{-1}n = h'^{-1} \in N \cap H = \{e\}$. \square

Definition 2.30. Seien N, H Gruppen und $\alpha: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Definiere $N \rtimes H = N \rtimes_\alpha H$ als Menge $N \times H$ und Gruppenstruktur $(n, h)(n', h') = (n\alpha(h)(n'), hh')$. Das ist eine Gruppe. (Z.B. ist $(n, h)^{-1} = (\alpha(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$). $N \rtimes_\alpha H$ heißt semidirektes Produkt von N und H bezüglich α . Es ist $N \subseteq N \rtimes H, n \mapsto (n, e)$ und $H \subseteq N \rtimes H, h \mapsto (e, h)$.

Lemma 2.31. $N \subseteq N \rtimes H = G$ ist normale Untergruppe, $G = NH$ und $N \cap H = \{e\}$.

Beweis. Es sei $\tau = (\star, g) \in G$. Dann ist $\tau^{-1} = (\star, g^{-1})$. Es ist $\tau(n, e)\tau^{-1} = \tau \cdot (\star, g^{-1}) = (\star, e) \in N$ also ist N normal. Sei $\tau = (n, h) \in G$. Dann ist $(n, e) \cdot (e, h) = \tau$. \square

Definition 2.32. Sei **GroupActions** die Kategorie mit Objekten (H, N, α) wobei H, N Gruppen sind und $\alpha: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Morphismen

$$(H, N, \alpha) \rightarrow (H', N', \alpha')$$

in **GroupActions** sind (f_H, f_N) wobei $f_H: H \rightarrow H'$ und $f_N: N \rightarrow N'$ H -equivariante Gruppenhomomorphismen sind. Das heißt $f_N(\alpha(h)(n)) = \alpha'(f_H(h))(f_N(n))$ for all $h \in H$ and $n \in N$.

Lemma 2.33. Sei $\text{Arr}(\text{Grp})$ die ?? von Grp . Der

$$R: \text{Arr}(\text{Grp}) \rightarrow \text{GroupActions}, (\phi: H' \rightarrow N') \mapsto (H', N', \alpha')$$

wobei α' die Konjugation in N' ist, das heißt $\alpha'(h')(n') = \phi(h')n'\phi(h')^{-1}$ für alle $h' \in H'$ und $n' \in N'$.

Der Funktor

$$L: \text{GroupActions} \rightarrow \text{Arr}(\text{Grp}), (H, N, \alpha) \mapsto (H \subseteq N \rtimes_\alpha H)$$

ist linksadjungiert zu U .

Beweis. Sei

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & & \downarrow i_N \\ H & \xrightarrow{i_H} & N \rtimes_\alpha H \\ \downarrow f_H & & \downarrow f_{N \rtimes H} \\ H' & \xrightarrow{\phi} & N' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppen. Definiere $f_N = i_N \circ f_{N \rtimes H}: N \rightarrow N'$ und sei $(H', N', \alpha') = R(\phi)$. Dann ist

$$(f_H, f_{N \rtimes H} \circ i_N): (H, N, \alpha) \rightarrow (H', N', \alpha')$$

ein Morphismus in **GroupActions**, denn

$$\alpha'(f_H(h))(f_{N \rtimes H}(n, e)) = f_{N \rtimes H}((e, h) \cdot (n, e) \cdot (e, h)^{-1})$$

und da

$$(e, h)(n, e)(e, h)^{-1} = (\alpha(h)(n), h)(e, h^{-1}) = (\alpha(h)(n), e)$$

ist

$$\alpha'(f_H(h))(f_N(n)) = f_N(\alpha(h)(n))$$

für alle $h \in H$ und $N \in N$.

Wenn andersrum $\phi: H' \rightarrow N'$ Gruppenhomomorphismus ist und

$$(f_H, f_N): (H, N, \alpha) \rightarrow R(\phi) = (H', N', \alpha')$$

ein Morphismus in **GroupActions** ist, dann definiere $f_{N \rtimes H}: N \rtimes_\alpha H \rightarrow N'$ durch

$$f_{N \rtimes H}(n, h) = f_N(n)\phi(f_H(h)).$$

Man prüft dass das folgende Diagramm kommutiert, das heißt wir haben einen Morphismus in $\text{Arr}(\text{Grp})$:

$$\begin{array}{ccc}
H & \xrightarrow{i_H} & N \rtimes_{\alpha} H \\
\downarrow f_H & & \downarrow f_{N \rtimes H} \\
H' & \xrightarrow{\phi} & N'
\end{array}$$

Man prüft das diese Zuordnungen einen natürlichen Isomorphismus der Hom-Funktoren definieren. □

Lemma 2.34. Sei $\text{codom}: \text{Arr}(\text{Grp}) \rightarrow \text{Grp}$ der Codomain Funktor aus Lemma 0.26 mit Recht-adjungiertem $R': \text{Grp} \rightarrow \text{Arr}(\text{Grp})$. Seien L, R wie in Lemma 2.33. Dann ist

$$\text{codom} \circ L: \text{GroupActions} \rightarrow \text{Grp}, (H, N, \alpha) \mapsto N \rtimes_{\alpha} H$$

linksadjungiert zu

$$R \circ R': \text{Grp} \rightarrow \text{GroupActions}, G \mapsto (G, G, \alpha')$$

wobei $\alpha'(h)(g) = hgh^{-1}$ für alle $h, g \in G$.

Beweis. Klar. □

2.4. Einfache und auflösbare Gruppen. Sei G eine Gruppe.

Definition 2.35.

(1) Eine Normalreihe in G ist eine Folge

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$$

sodass $G_i \subseteq G$ eine normale Untergruppe ist.

(2) Eine abelsche Normalreihe ist eine Normalreihe sodass G_i/G_{i-1} abelsch ist für alle i .

(3) G ist auflösbar, wenn G eine abelsche Normalreihe hat.

Beispiel 2.36. Wenn G abelsch ist, dann ist G auflösbar denn $G_0 = \{e\} \subseteq G_1 = G$ ist abelsche Normalreihe.

Lemma 2.37. Sei $H \subseteq G$ normal. Es gilt

$$H \text{ auflösbar und } G/H \text{ auflösbar} \implies G \text{ auflösbar}$$

Beweis. Sei

$$\{e\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = H$$

eine abelsche Normalreihe und

$$\{e\} = \bar{G}_n \subseteq \bar{G}_{n+1} \subseteq \dots \subseteq \bar{G}_m = G/H$$

eine abelsche Normalreihe. Sei $\pi: G \rightarrow G/H$ Projektion und setze $G_i = H_i$ für $0 \leq i \leq n$ und $G_i = \pi^{-1}\bar{G}_i$ für $n \leq i \leq m$. Dann bilden die G_i eine abelsche Normalreihe. □

Satz 2.38. Seien $p < q$ Primzahlen. Jede Gruppe der Ordnung $p \cdot q$ ist auflösbar.

Beweis. Sei s die Anzahl der q -Sylowgruppen. Dann ist $s \equiv 1 \pmod{q}$ und $s \mid p$. Also ist $s = 1$ denn $p < q$. Somit ist eine q -Sylowgruppe $Q \subseteq G$ normal und $G/Q \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $Q \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Dann ist $\{e\} \subseteq Q \subseteq G$ eine abelsche Normalreihe. □

Satz 2.39. Jede p -Gruppe G ist auflösbar

Beweis. Wenn $G \neq \{e\}$ ist, dann ist $Z(G) \neq \{e\}$. $Z(G)$ ist abelscher Normalteiler und somit auflösbar. Nach Induktion ist $G/Z(G)$ auflösbar. Nach Lemma 2.37 folgt die Aussage. □

Definition 2.40. Sei G eine Gruppe. Der Kommutator von $a, b \in G$ ist $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$. Die Kommutatorgruppe oder derigierte Gruppe von G ist $D(G) = [G, G] = \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$. Die Abelsierung von G ist $G^{\text{ab}} = G/D(G)$.

Lemma 2.41. $D(G)$ ist normaler Untergruppe und G^{ab} ist abelsch.

Beweis. Klar, Rechnung □

Satz 2.42 (Universelle Eigenschaft der Abolisierung). *Abolisierung wird zu einem Funktor $(-)^{\text{ab}}: \text{Gr} \rightarrow \text{An}$ der linksadjungiert ist zum Vergiss-Funktor $U: \text{An} \rightarrow \text{Grp}$*

Beweis. Sei $f: G \rightarrow U(H)$ Gruppenhomomorphismus. Da $U(H)$ abelsch ist, ist $D(G)$ im Kern von f . Das induziert also $\bar{f}: G/D(G) \rightarrow H$. □

Definition 2.43. Sei $D^n(G) = D(D^{n-1}(G))$ und $D^0(G) = G$.

Bemerkung 2.44. Wenn $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$ abelsche Normalreihe ist, dann gilt $D^n(G) \subseteq G_n$ für alle n .

Beweis. Da G_n/G_{n+1} abelsch ist, ist $D(G_n) \subseteq G_{n+1}$. Damit folgt die Aussage per Induktion. □

Satz 2.45. G ist auflösbar $\iff D^n(G) = \{e\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wenn G auflösbar ist, dann ist $G = G_0 \supseteq \dots \supseteq G_n = \{e\}$ und somit $D^n(G) \subseteq \{e\}$. Wenn $D^n(G) = \{e\}$, dann ist $G \supseteq D(G) \supseteq \dots \supseteq D^n(G)$ eine abelsche Normalreihe. □

Beispiel 2.46. S_3 ist auflösbar, denn für $p = \langle (1, 2, 3) \rangle \subseteq S_3$ ist $G/P \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und somit $\{e\}, P, S_3$ eine abelsche Normalreihe. Es gibt surjektiven Homomorphismus $\psi: S_4 \rightarrow S_3$ mit $\ker(\psi) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Das ist abelsch und da $S_4/\ker(\psi) = S_3$ auflösbar ist, ist S_4 auflösbar.

Satz 2.47. A_n ist nicht auflösbar für $n \geq 5$.

Beweis. Es ist

$$[(1, 2, 3), (3, 4, 5)] = (1, 4, 3).$$

Somit enthält $D(A_n)$ alle 3-Zykel, also $D(A_n) = A_n$ und $D^m(A_n) \neq \{e\}$ für alle m . □

Definition 2.48. Eine Gruppe G heißt einfach, wenn $G \neq \{e\}$ und G keine Normalteiler außer $\{e\}$ und G hat.

Bemerkung 2.49. Wenn G abelsch und einfach ist, dann ist $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p .

Beweis. Es gibt $a \in G$ sodass $\text{ord}(a) = p$ prim ist. Sei $H = \langle a \rangle \subseteq G$. Dann ist H normal und da $H \neq \{e\}$ ist $H = G$. □

Bemerkung 2.50. Wenn G einfach ist und nicht abelsch, dann ist G nicht auflösbar.

Bemerkung 2.51. In A_n mit $n \geq 5$ sind alle 3-Zykel konjugiert. Denn sei $\tau_1 = (a \ b \ c)$ und $\tau_2 = (1 \ 2 \ 3)$. Sei $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c$ und setze σ fort zu $\sigma \in A_n$. Dann ist $\sigma\tau_2\sigma^{-1} = \tau_1$.

Satz 2.52. Für $n \geq 5$ ist A_n einfach.

Beweis. Sei $N \subseteq A_n$ normale Untergruppe und $N \neq \{e\}$. Sei $\sigma \in N$ sodass die Anzahl der Fixpunkte von σ maximal ist und $\sigma \neq e$. Behauptung: Alle Zykel in der Zykeldarstellung von σ haben die gleiche Länge d . Denn wenn Längen $m < d$ vorkommen, dann hat σ^m mehr Fixpunkte und $\sigma^m \neq e$. Behauptung: σ ist ein 3-Zykel. Dann enthält N als normale Untergruppe alle 3-Zykel, somit $N = A_n$. Sei $\sigma = (a \ b \ c \dots)(\dots)\dots$. Wenn $d \geq 3$ bilde $s = (\tau\sigma\tau^{-1})\sigma^{-1}$ für $\tau = (a \ b)(d \ e)$. Dann ist $s = (c \ d \ e)$ ein 3-Zykel. Wegen Maximalität ist dann σ dieser 3-Zykel. Wenn $d = 2$ dann ist $\sigma = (a \ b)(c \ d) \dots = \sigma^{-1}$. Sei $\tau = (b \ c)(e \ f)$. Dann ist $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (a \ d)(b \ e)$. Wegen der Maximalität von σ ist $\sigma = (a \ b)(c \ d)$. Dann ist aber für $\tau = (d \ e)(a \ b)$ der Folgende 3-Zykel $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (c \ d \ e)$ was ein Widerspruch zur Maximalität ist. □

Satz 2.53 (Burnside 1911). *Jede endliche Gruppe der Ordnung $p^a q^b$ wobei p, q Primzahlen sind ist auflösbar.*

Satz 2.54 (Feit-Thomson 1963). *Jede Gruppe ungerader Ordnung ist auflösbar.*

3. GALOISTHEORY

3.1. Galoisextensions.

Definition 3.1. Sei K ein Körper. Der Primkörper von K ist der Schnitt aller Teilkörper von K . Es gibt $\mathbb{Z}/(p) \subseteq K$ für $p = \text{char } K$. Wenn $p = 0$, dann ist $\mathbb{Q} \subseteq K$ und \mathbb{Q} ist der Primkörper. Wenn $p \neq 0$, dann ist $\mathbb{F}_p \subseteq K$ der Primkörper.

Definition 3.2. Seien L, K Körper sodass $K \subseteq L$ Teilring ist. Dann heißt K Teilkörper von L und L eine Erweiterung von K . Wir setzen $[L : K] = \dim_K(L)$.

Satz 3.3. Sei L/K eine Körpererweiterung und V ein L -Vektorraum. Dann ist

$$\dim_K(V) = \dim_L(V) \cdot [L : K].$$

Beweis. Wenn $\dim_L(V) = \infty$ dann ist alles klar. Sonst wähle Isomorphismus $V = L^n$. Das ist Isomorphismus von K -Vektorräumen. Also gilt die Aussage. \square

Korollar 3.4. Wenn $M/L/K$ Körpererweiterungen sind, dann ist

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$$

3.1.1. Algebraische und transzendente Erweiterungen.

Definition 3.5. Sei L/K eine Körpererweiterung und $a \in L$ und $\phi: K[X] \rightarrow L$ der Ringhomomorphismus gegeben durch $\phi(f) = f(a)$.

- (1) Das Element a heißt algebraisch, falls $\ker(\phi) \neq 0$. Andererseits nennen wir a transzental über K .
- (2) L/K heißt algebraisch, wenn jedes $a \in L$ algebraisch über K ist.
- (3) $K[X]$ ist Euklidisch, somit Hauptidealring. Also ist $\ker(\phi) = (f)$ für ein normiertes Polynom f . Das Polynom f heißt das Minimalpolynom von a .

Definition 3.6. Sei L/K eine Körpererweiterung und $a_1, \dots, a_r \in L$.

- (1) Die Algebra erzeugt von a_1, \dots, a_r ist

$$\begin{aligned} K[a_1, \dots, a_r] &= \bigcap_{R \in M} R \\ &= \text{im}(\phi: K[X_1, \dots, X_r] \rightarrow L, X_i \mapsto a_i) \end{aligned}$$

wobei M die Menge aller Unterringe von L ist, die K und die Elemente a_1, \dots, a_r enthalten.

- (2) Der Körper erzeugt von a_1, \dots, a_r ist

$$\begin{aligned} K(a_1, \dots, a_r) &= \bigcap_{K' \in M'} K' \\ &= \text{Quot}(K[a_1, \dots, a_r]) \end{aligned}$$

wobei M' die Menge aller Teilkörper von L ist, die K und die Elemente a_1, \dots, a_r enthalten.

Satz 3.7. Sei L/K Körpererweiterung und $a \in L$.

- (1) a ist algebraisch über $K \iff K[a] = K(a) \iff \dim_K(K[a]) < \infty$
- (2) Wenn a algebraisch über K ist, dann ist $K[a] = K(a) \cong K[X]/(f)$ wobei f (irreduzibel) das Minimalpolynom von a ist und

$$\deg(f) = [K(a) : K].$$

Beweis. Sei a algebraisch. Dann ist das Minimalpolynom f irreduzibel sodass

$$(f) = \text{Ker}(\phi: K[X] \rightarrow L, x \mapsto a).$$

Dann ist $K[a] \cong K[X]/(f)$ ein Körper, also ist auch $K[a] = K(a)$. Wenn $K[a] \cong K[X]/(f)$ ein Körper ist, dann ist f irreduzibel also $f \neq 0$ und $f(a) = 0$. Also ist a algebraisch. In dem Fall ist $\infty > \deg(f) = [K[a] : K]$. Wenn a nicht algebraisch ist, dann ist $K[a] \cong K[X]$ und $\dim_K(K[X]) = \infty$. \square

Beispiel 3.8. $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i] \cong \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$

Satz 3.9. Sei L/K eine Körpererweiterung.

$$\begin{aligned} L/K \text{ ist endlich} &\iff L/K \text{ ist algebraisch und } L = K(a_1, \dots, a_n) \\ &\iff L = K(a_1, \dots, a_n) \text{ für } K\text{-algebraische } a_i \in L \end{aligned}$$

In dem Fall gilt $K(a_1, \dots, a_n) = K[a_1, \dots, a_n]$

Beweis. Sei L/K endlich. Dann ist L als K -Vektorraum erzeugt und insbesondere als Körpererweiterung. Für $a \in L$ gilt $K[a] \subseteq L$ und

$$\dim_K(K[a]) \leq \dim_K L < \infty$$

also ist a algebraisch. Sei $L = K(a_1, \dots, a_n)$ sodass a_i algebraisch über K ist. Wenn $n = 0$ ist, dann ist $L = K$ also ist L/K endlich. Sei $K[a_1] = K'$. Das ist ein Körper und somit endlich über K und $L = K'[a_2, \dots, a_n]$. Nach Induktion folgt $K'[a_2, \dots, a_n] = K'(a_2, \dots, a_n)$. \square

Korollar 3.10. Sei L/K eine Körpererweiterung und $a_1, \dots, a_n \in L$. Es gilt

$$a_1, \dots, a_n \text{ algebraisch über } K \iff K(a_1, \dots, a_n) = K[a_1, \dots, a_n]$$

Beweis. Die eine Richtung folgt aus Satz 3.9, die andere aus dem Satz 4.105. \square

Korollar 3.11. Seien $M/L/K$ Körpererweiterungen. Es gilt

$$M/L \text{ und } L/K \text{ algebraisch} \iff M/K \text{ algebraisch}$$

Beweis. Sei $a \in M$ algebraisch über L und $f \in L[X]$ ein Polynom mit $f(a) = 0$. Sei

$$f = \sum_{i=0}^n b_i X^i$$

für $b_i \in L$ und $b_n = 1$. Dann ist $L' = K[b_0, \dots, b_{n-1}]$ ein Körper sodass L'/K endlich ist. Da a algebraisch ist über L' , ist $L'(a)$ endlich über L' . Also ist $L'(a)$ endlich über K und somit algebraisch. \square

Satz 3.12. Sei K Körper und $f \in K[X]$ irreduzibel. Dann gibt es eine Körpererweiterung L/K mit $[L : K] = \deg(f)$ und $a \in L$ mit $f(a) = 0$.

Beweis. Klar, $L = K[X]/(f)$. \square

Korollar 3.13. Zu endlich vielen $f_1, \dots, f_r \in K[X]$ mit $\deg(f_i) \geq 1$ gibt es eine endliche Erweiterung L/K , sodass $f_i \in L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Angenommen es gibt L/K sodass f_1 in $L[X]$ zerfällt und L_r/L_1 sodass f_2, \dots, f_r in $L_r[X]$ zerfällt. Dann zerfällt f_1, \dots, f_r in L_r/K . Also sei nach Induktion $r = 1$. Sei $f = g_1, \dots, g_s$ mit g_i irreduzibel. Nach letztem Satz gibt es L'/K endlich und $a \in L'$ mit $g_1(a) = 0$. In $L'[X]$ gilt $f = (X - a)f_1$. Induktion über $\deg(f)$ gibt die Aussage. \square

Beispiel 3.14. $f = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel nach Eisenstein.

$$L_1 = \mathbb{Q}[X]/(f) \cong \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}).$$

In $L_1[X]$ ist $f = (X - a) \cdot g$ wobei $a = \sqrt[3]{2}$ und g irreduzibel ist (Irreduzibel in \mathbb{R} also in L_1). Wenn $L = L_1[X]/(g)$ dann hat L/\mathbb{Q} Grad 6 und $x^3 - 2$ zerfällt in Linearfaktoren in L .

Lemma 3.15 (Algebraisch Abgeschlossen). *Für einen Körper K ist äquivalent:*

- (1) *Jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[X]$ hat eine Nullstelle*
- (2) *Jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$ hat Grad 1*
- (3) *Für jede algebraische Erweiterung L/K gilt $L = K$*

In dem Fall heißt K algebraisch abgeschlossen.

Beweis. 1 \implies 2 ist klar.

Gelte 2. Dann sei f nicht-konstant. Also gibt es ein irreduzibles Polynom P mit $P|f$. Da $P = aX + b$ für ein $a \neq 0$, ist $P(-\frac{b}{a}) = 0$ also hat f eine Nullstelle.

Gelte 2 und sei $a \in L$ algebraisch mit Minimalpolynom $f \in K[X]$. f ist irreduzibel, also ist $f = X - a$ und somit $a \in K$.

Gelte 3. und sei f irreduzibel. Dann ist $L = K[X]/(f) \cong K$. Also ist $\deg(f) = 1$ und f linear. \square

Definition 3.16. Sei K ein Körper. Ein algebraischer Abschluss von K ist eine algebraische Körpererweiterung L/K sodass L algebraisch abgeschlossen ist. Notation $L = \bar{K}$

Satz 3.17 (Existenz algebraischer Abschluss). *Jeder Körper hat einen algebraischen Abschluss*

Beweis. Sei I die Menge aller irreduziblen Polynome $f \in K[X]$ und sei $R = K[X_f \mid f \in I]$. Sei $J \subseteq R$ das Ideal, das von allen Elementen der Form $f(X_f)$ mit $f \in I$ erzeugt wird.

Es gilt die Behauptung $J \subsetneq R$. Denn angenommen $J = R$, dann ist $1 \in J$ also gibt es Darstellung

$$(3) \quad 1 = \sum_{j=1}^r g_j f_j(X_{f_j})$$

wobei $g_j \in R$ und $f_1, \dots, f_r \in I$. In g_1, \dots, g_r kommen nur endlich viele X_{f_i} vor, somit gibt es eine endliche Menge $I' \subseteq I$, sodass die Gleichung 3 in $R' = K[X_f \mid f \in I']$ stattfindet. Nach Korollar 3.13 gibt es eine endliche Erweiterung M/K , sodass jedes $f \in I'$ in M eine Nullstelle a_f hat. Betrachte die Abbildung

$$\phi: R' \rightarrow M, \quad \phi(X_f) = a_f.$$

Dann ist $\phi(f(X_f)) = f(a_f) = 0$ also $f(X_f) \in \ker(\phi)$. Die Gleichung 3 würde zeigen, dass $1 \in \ker(\phi)$, was ein Widerspruch ist zu $1 \neq 0$ in M . Also ist gilt die Behauptung $J \subsetneq R$.

Also ist $\bar{R} = R/J \neq 0$ und nach Satz 4.4 gibt es maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq \bar{R}$. Für den Quotienten $L = \bar{R}/\mathfrak{m}$, ist L/K eine Körpererweiterung und L ist erzeugt von \bar{X}_f für $f \in I$. Es ist $f(X_f) = 0$ in \bar{R} und somit auch in L . Also ist $\bar{X}_f \in L$ algebraisch über K und damit ist auch L/K algebraisch und jedes $f \in I$ hat in L eine Nullstelle, nämlich \bar{X}_f . Sei $L_1 = L$. L_1/K ist algebraisch, sodass jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$ in L_1 eine Nullstelle hat. Konstruiere Analog $K \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \dots$ sodass jedes irreduzible Polynom in L_i in L_{i+1} eine Nullstelle hat. Sei $\tilde{L} = \bigcup_{i \geq 1} L_i$. Das ist ein Körper und \tilde{L}/K ist algebraisch. Der Körper \tilde{L} ist algebraisch

abgeschlossen, denn wenn $f \in \tilde{L}[X]$ irreduzibel dann gibt es $i \in \mathbb{N}$ sodass $f \in L_i[X]$ und dann hat f in L_{i+1} eine Nullstelle. Also hat f in \tilde{L} eine Nullstelle. \square

3.2. Körperhomomorphismen.

Definition 3.18. Ein Körperhomomorphismus ist ein Ringhomomorphismus zwischen Körpern. Seien L/K und M/K zwei Körpererweiterungen. Ein K -Homomorphismus ist ein Homomorphismus von K -Algebren. $\text{Aut}_K(L) = \text{Aut}(L/K)$ sei die Menge der invertierbaren K -Homomorphismen $f: L \rightarrow L$

Lemma 3.19. *Seien $L = K(a)/K$ eine Körpererweiterungen und sei f das Minimalpolynom von a . Sei M ein Körper mit einem Homomorphismus $\sigma: K \rightarrow M$. Sei*

$$\Sigma = \{K\text{-Homomorphismen } \sigma': L \rightarrow M\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$\Sigma \rightarrow \{b \in M \mid f(b) = 0\}, \sigma' \mapsto \sigma'(a) = b$$

bijektiv

Beweis. Wir haben die Abbildung $\phi: K[X] \rightarrow M, X \mapsto b$. Es gilt ϕ lässt sich eindeutig fortsetzen zu $\sigma': K[X]/(f) \rightarrow M$ genau dann, wenn $f \in \ker(\phi)$ ist, das heißt wenn $f(b) = 0$. Dann ist $\sigma'(a) = \sigma'(\bar{X}) = b$. \square

Beispiel 3.20. $L = M = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{\mathbb{R} - \text{Hom } \sigma': \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\} \xrightarrow{\sim} \{b \in \mathbb{C} \mid b^2 + 1 = 0\}, \sigma' \mapsto \sigma'(i)$$

also $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\text{id}, \sigma'\}$ wobei σ' komplexe Konjugation ist.

Satz 3.21. Sei L/K eine algebraische Erweiterung und M ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei weiter $\sigma: K \rightarrow M$ ein Körperhomomorphismus. Dann existiert eine Fortsetzung von σ zu einem Körperhomomorphismus $\sigma': L \rightarrow M$ sodass

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma'} & M \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & K & \end{array}$$

kommutiert

Beweis. Fall 1: Sei $L = K(a) = K[a] = K[X]/(f)$. Die Menge der σ' ist bijektiv zur Menge der Nullstellen von f in M . Also existiert σ' .

Fall 2: Sei L/K allgemein. Sei X die Menge der Paare (L', σ') wobei L' ein Körper ist mit $K \subseteq L' \subseteq L$ und σ' eine Fortsetzung von σ . Definiere partielle Ordnung $(L', \sigma') \leq (L'', \sigma'')$ durch $L' \subseteq L''$ und $\sigma''|_{L'} = \sigma'$. Sei $X' \subseteq X$ total geordnet. Dann ist

$$\tilde{L} = \bigcup_{(L', \sigma') \in X'} L'$$

ein Körper und zusammen mit $\tilde{\sigma}: \tilde{L} \rightarrow M$ definiert durch $\tilde{\sigma}(b) = \sigma'(b)$ für $b \in L'$ eine obere Schranke von X' . Nach [Zornsches Lemma](#) hat X ein maximales Element (L', σ') . Angenommen $L' \neq L$. Dann wähle $a \in L \setminus L'$ und setze $L'' = L'(a)$. Nach Fall 1 existiert eine Fortsetzung $\sigma'': L'' \rightarrow M$ was ein Widerspruch ist. Also ist $L' = L$. \square

Korollar 3.22. Seien L/K und M/K zwei algebraische Abschlüsse von K . Dann gibt es einen K -Isomorphismus $L \rightarrow M$

Beweis. Nach Satz 3.21 gibt es K -Homomorphismus $\sigma: L \rightarrow M$. Dadurch wird M eine algebraische Erweiterung von L . Also ist M/L triviale Erweiterung, dh. σ ist bijektiv. \square

3.3. Zerfällungskörper und normale Erweiterungen.

Definition 3.23. Sei K ein Körper und $\mathcal{F} \subseteq K[X]$ eine Menge von nicht-konstanten Polynomen. Ein Zerfällungskörper ist eine Körpererweiterung L/K sodass jedes $f \in \mathcal{F}$ in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt und $L = K(a \in \bar{K} \mid f(a) = 0 \text{ für ein } f \in \mathcal{F})$

Lemma 3.24. Für eine Menge $\mathcal{F} \subseteq K[X]$ nicht-konstanter Polynome existiert ein Zerfällungskörper und ein Zerfällungskörper ist eindeutig bis auf K -Isomorphismus.

Beweis. Sei $L = K(a \in \bar{K} \mid f(a) = 0 \text{ für ein } f \in \mathcal{F}) \subseteq \bar{K}$. Dann ist L ein Zerfällungskörper. Sei M ein weiterer Zerfällungskörper. Dann gibt es nach Satz 3.21 einen K -Homomorphismus $\sigma: M \rightarrow \bar{K}$. Seien $f \in \mathcal{F}$ und a_1, \dots, a_n die Nullstellen in \bar{K} von f und b_1, \dots, b_n die Bilder der Nullstellen von f in M unter σ . Da $\prod_{i=1}^n (X - a_i) = f = \prod_{i=1}^n (X - b_i)$ in $\bar{K}[X]$ ist ohne Einschränkung $a_i = b_i$ für alle i . Somit ist $\sigma(M) = L$ und σ ist ein Isomorphismus $M \rightarrow L$. \square

Bemerkung 3.25. Das zeigt: Alle K -Homomorphismen $\sigma: M \rightarrow \bar{K}$ haben Bild L .

Beispiel 3.26. Sei $K = \mathbb{Q}$ und $f = X^3 - 2$. In $\bar{\mathbb{Q}}[X]$ gilt $f = (X - a)(X - \zeta a)(X - \zeta^2 a)$ für $a = \sqrt[3]{2}$ und $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Also ist der Zerfällungskörper $L = \mathbb{Q}(a, \zeta a, \zeta^2 a) = \mathbb{Q}(a, \zeta)$. Es ist $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(a) \subsetneq \mathbb{Q}(a, \zeta a)$ und $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 3$ da f das Minimalpolynom ist. Es ist $g = (X - \zeta a)(X - \zeta^2 a)$ das Minimalpolynom von ζa über $\mathbb{Q}(a)$, also ist $[\mathbb{Q}(a, \zeta a) : \mathbb{Q}] = 6$.

Definition 3.27. Eine algebraische Körpererweiterung L/K ist normal, wenn jedes irreduzible Polynom in $K[X]$, das in L eine Nullstelle hat in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Lemma 3.28. Sei L/K algebraisch und $\varphi: L \rightarrow L$ ein K -Homomorphismus. Dann ist ϕ bijektiv.

Beweis. Immer ist ϕ injektiv. Sei $a \in L$. Dann gibt es $f \in K[X]$ sodass $K(a) = K[X]/(f)$. Seien $a = a_1, \dots, a_n$ die Nullstellen von f in L . $\varphi|_{K(a_i)}: K(a_i) \rightarrow L$ gibt n verschiedene K -Homomorphismen $K[X]/(f) \rightarrow L$ da $\varphi(a_i) \neq \varphi(a_j)$ für $i \neq j$. Da diese in Bijektion zu der Menge der $\{a_1, \dots, a_n\}$ stehen gilt für ein i : $\varphi|_{a_i}(a_i) = a_1 = a$. Also ist φ bijektiv. \square

Satz 3.29. Sei L/K algebraisch. Dann ist äquivalent:

- (1) L/K ist normal
- (2) L/K ist Zerfällungskörper einer Menge $\mathcal{F} \subseteq K[X]$.
- (3) Für jede Körpererweiterung M/L und jeden K -Homomorphismus $\varphi: L \rightarrow M$ gilt $\phi(L) = L$
- (4) Für Jeden K -Homomorphismus $\varphi: L \rightarrow \bar{L}$ gilt $\phi(L) = L$.

Beweis. Gelte 1. Dann sei

$$\mathcal{F} = \{f \in K[X] \mid f \text{ ist irreduzibel und hat eine Nullstelle in } L\}.$$

Jedes $f \in \mathcal{F}$ zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren. Sei $a \in L$ mit Minimalpolynom $f \in K[X]$. Dann ist $f \in \mathcal{F}$ also ist L von allen Nullstellen erzeugt. Also ist L Zerfällungskörper. Gelte 2. Sei L/K Zerfällungskörper von \mathcal{F} und $\varphi: L \rightarrow M$ ein K -Homomorphismus. Für $f \in \mathcal{F}$ und $a \in L$ mit $f(a) = 0$ gilt $f(\varphi(a)) = 0$ also ist $\phi(a)$ Nullstelle von f in M . Dann ist $L = K(a \in M \mid f(a) = 0 \text{ für ein } f \in \mathcal{F})$ und somit $\phi(L) \subseteq L$. Da L/K algebraisch ist, ist φ bijektiv und $\varphi(L) = L$.

3. \implies 4 ist klar. Gelte 4. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel mit $f(a) = 0$ für $a \in L$. Die Menge der K -Homomorphismen $\sigma: K(a) \rightarrow \bar{L}$ ist bijektiv zur Menge $\{b \in \bar{L} \mid f(b) = 0\}$. Zu $b \in \bar{L}$ wähle also $\sigma: K(a) \rightarrow \bar{L}$. Nach Satz 3.21 gibt es ein $\varphi: L \rightarrow \bar{L}$, das σ fortsetzt. Dann ist $\varphi(L) = L$. Also ist $b = \sigma(a) = \varphi(a) \in L$. Also zerfällt f in $L[X]$. \square

Lemma 3.30 (Normalität in Türmen). Seien $M/L/K$ Körpererweiterungen. Es gilt

$$M/K \text{ normal} \implies M/L \text{ normal}.$$

Beweis. Sei M ein Zerfällungskörper von $\mathcal{F} \subseteq K[X]$. Dann ist M/L ein Zerfällungskörper von \mathcal{F} als Teilmenge von $L[X]$. \square

Definition 3.31. Sei L/K algebraisch. Eine normale Hülle von L/K ist eine Erweiterung M/L sodass M/K normal ist und für jede andere Erweiterung M'/L mit M'/K normal gibt es einen L -Homomorphismus $M \rightarrow M'$. Das zeigt: Eine normale Hülle ist eindeutig bis auf Isomorphismus

Satz 3.32. Die normale Hülle einer algebraischen Erweiterung L/K existiert

Beweis. Sei

$$\mathcal{F} = \{f \in K[X] \mid f \text{ irreduzibel sodass } f \text{ eine Nullstelle in } L \text{ hat}\}.$$

Sei M/L Zerfällungskörper von $\mathcal{F} \subseteq L[X]$. Dann ist M/K Zerfällungskörper der selben Menge und somit M/K normal. Sei M'/L mit M'/L normal. Wähle \bar{M}'/M' algebraischen Abschluss. Nach Satz 3.21 gibt es einen L -Hom $\varphi: M \rightarrow \bar{M}'$. Jedes $f \in \mathcal{F}$ zerfällt in $M'[X]$ und da M von allen Nullstellen erzeugt gilt $\phi(M) \subseteq M'$. \square

Beispiel 3.33. Eine normale Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta a)$, der Zerfällkörper von $x^3 - 2$.

3.4. Separable Erweiterungen.

Definition 3.34. $f \in K[X]$ heißt separable, wenn $f \in \bar{K}[X]$ keine mehrfachen Nullstellen hat.

Definition 3.35. Die formale Ableitung von $f \in K[X]$ ist $f' = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ ist $f' = \sum_{i=0}^n i \cdot a_i X^{i-1}$

Lemma 3.36 (Leibniz-Regel).

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Beweis. Reduziere auf $f = X^n$ und $g = X^m$. Dann ist alles klar. \square

Lemma 3.37. Sei $f \in K[X]$.

- (1) $b \in \bar{K}$ ist mehrfache Nullstelle von $f \iff f(b) = 0 = f'(b) \iff (X - b) \mid \text{ggT}(f, f')$
- (2) f ist separable $\iff \text{ggT}(f, f') = 1$

Beweis. Der ggT ändert sich nicht bei Übergang zu einer Erweiterung L/K , also auch nicht bei \bar{K}/K . 1. ist eine Rechnung und 2. folgt aus 1. \square

Satz 3.38. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel.

- (1) f ist separable $\iff f' \neq 0$ in $K[X]$.
- (2) Wenn K Charakteristik 0 hat, ist f separable.

Beweis.

$$f \text{ separable} \iff \text{ggT}(f, f') = 1 \iff f' \neq 0$$

da $f' \neq 0$. Wenn K Charakteristik 0 hat, dann ist $f' \neq 0$ also ist f separable. \square

Bemerkung 3.39. Für f irreduzibel gilt: $f' = 0 \iff \text{char } K = p > 0$ und $f = \sum_{i=0}^n b_i X^{pi}$ für $b_i \in K$

Bemerkung 3.40. Sei p Primzahl und $K = \text{Quot}(\mathbb{F}_p[Y])$. Das Polynom $f = X^p - Y \in K[X]$ ist irreduzibel nach Eisenstein für das Primelement $Y \in \mathbb{F}_p[X]$ und in-separable.

Definition 3.41. Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung.

- (1) $a \in L$ ist separable über K , wenn das Minimalpolynom von a separable ist.
- (2) L/K ist separable, wenn jedes $a \in L$ separable ist.
- (3) Der Separabilitätsgrad von L/K ist $[L : K]_s = |\{K - \text{Hom. } L \rightarrow \bar{K}\}|$

Lemma 3.42. Sei $L = K(a)$ algebraisch über K . Dann gilt

- (1) $[L : K]_s \leq [L : K]$
- (2) $[L : K]_s = [L : K] \iff a \text{ separable über } K$

Beweis. Sei f Minimalpolynom von a sodass $L \cong K[X]/(f)$. Es gilt

$$|\{K - \text{Hom } L \rightarrow \bar{K}\}| = |\{b \in \bar{K} \mid f(b) = 0\}| \leq \deg(f)$$

und " $=$ " genau dann, wenn f separable. \square

Lemma 3.43. Sei $M/L/K$ endlich. Dann ist $[M : L]_s \cdot [L : K]_s = [M : K]_s$

Beweis. \bar{K} kann als algebraischer Abschluss von M und L aufgefasst werden. Dann gilt

$$[M : L]_s = |\{\psi : M \rightarrow \bar{K} \mid \psi|_L = \varphi\}|$$

für jeden $\phi : L \rightarrow \bar{K}$ erfüllt die Abbildung

$$R : \{\psi : M \rightarrow \bar{K} \mid \psi|_K = id\} \rightarrow \{\varphi : L \rightarrow \bar{K} \mid \varphi|_K = id\}, \psi \mapsto \psi|_L$$

$$|R^{-1}\{\varphi\}| = [M : L]_s.$$

Also

$$[M : K]_s = |\{\psi : M \rightarrow \bar{K} \mid \psi|_K = id\}| = [M : L]_s \cdot [L : K]_s$$

\square

Satz 3.44. *Sei L/K endlich.*

- (1) $[L : K]_s \leq [L : K]$
- (2) *Es ist äquivalent:*
 - (a) $[L : K]_s = [L : K]$
 - (b) L/K ist separable
 - (c) L/K ist von separablen Elementen erzeugt

Beweis. (1) Wähle a_1, \dots, a_r sodass $L = K(a_1, \dots, a_r)$. Es gilt

$$[L : K] = [L : K(a_1)] \cdot [K(a_1) : K]$$

und

$$[L : K]_s = [L : K(a_1)]_s \cdot [K(a_1) : K]_s$$

Jetzt folgt 1. mit Induktion.

- (2) b) \implies c) ist klar. Gelte c). $L = K(a_1, \dots, a_r)$ mit a_i separable. Dann ist

$$[K(a_1) : K]_s = [K(a_1) : K]$$

und nach Induktion $[L : K(a_1)]_s = [L : K(a_1)]$. Also gilt a). Gelte a) und sei $a \in L$. Dann ist

$$\begin{aligned} [L : K] &= [L : K(a_1)] \cdot [K(a_1) : K] \\ &\geq [L : K(a_1)]_s \cdot [K(a_1) : K]_s \\ &= [L : K]_s = [L : K] \end{aligned}$$

Also ist $[K(a_1) : K] = [K(a_1) : K]_s$ und somit ist a separable. Also gilt b). □

Korollar 3.45. *Seien $M/L/K$ algebraisch.*

$$M/K \text{ separable} \iff M/L \text{ und } L/K \text{ separable}$$

Beweis. Sei M/K separable und $a \in M$. Sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom über K und $g \in L[X]$ das Minimalpolynom über L . Dann $g|f$ in $L[X]$ also ist g separable und damit auch a separable über L .

Seien M/L und L/K separable. Sei $a \in M$ und $g \in L[X]$ das Minimalpolynom. Wähle $K \subseteq L' \subseteq L$ sodass L'/K endlich ist und $g \in L'[X]$. Sei $M' = L'(a)$. Dann ist $M'/L'/K$ endlich. Minimalpolynom von a über L' ist g und das ist separable, da M/L separable. Somit ist M'/L' separable. L'/K ist separable da L/K separable. Somit ist ohne Einschränkung $M/L/K$ endlich. Dann zeigt eine Rechnung mit den Graden der Erweiterungen, dass M/K separable ist. □

Korollar 3.46. *Der Zerfällungskörper einer Menge von separablen Polynomen ist eine separable Erweiterung.*

Beweis. Sei L/K Zerfällungskörper von $\mathcal{F} \in K[X]$ bestehend aus separablen Polynomen. Zu $a \in L$ gibt es endliche Teilmenge $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ sodass $a \in L'$ wobei $L' \subseteq L$ Zerfällungskörper von \mathcal{F}' . L'/K ist endlich und von separablen Elementen erzeugt. Somit ist L'/K separable. Insbesondere ist a separable über K . □

Korollar 3.47. *Die normale Hülle einer separablen Erweiterung ist ebenfalls separable*

Beweis. Folgt aus der Konstruktion der normalen Hülle. □

3.5. Endliche Körper.

Lemma 3.48. *Sei K ein beliebiger Körper der Charakteristik $p > 0$. Die Abbildung $\phi: K \rightarrow K$, $\phi(x) = x^p$ ist ein Ringhomomorphismus. Wenn K endlich ist, dann ist ϕ bijektiv.*

Beweis. Es ist

$$\phi(x + y) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} x^i y^{p-i} = y^p + x^p = \phi(x) + \phi(y)$$

ϕ ist immer injektiv. Wenn K endlich ist, dann automatisch bijektiv. \square

Definition 3.49. Sei $q = p^r$ und \mathbb{F}_q ein Zerfällungskörper von $x^q - x$ über \mathbb{F}_p .

Satz 3.50. *Sei $q = p^r$ für eine Primzahl p . \mathbb{F}_q ist ein endlicher Körper mit q Elementen und jeder endlich Körper ist isomorph zu \mathbb{F}_q für ein $q = p^r$ wobei $p = \text{char } K$.*

Beweis. Sei K irgendein endlicher Körper der Charakteristik $p > 0$ und $b \in K$. Es ist $(X^q - X)(b) = 0 \iff \phi^r(b) = b$. Dann ist $\{x \in K \mid \phi^r(x) = x\}$ ein Teilkörper von K . In $\mathbb{F}_q[X]$ zerfällt $X^q - X$ in Linearfaktoren. Die Ableitung ist $(X^q - X)' = -1$ was teilerfremd ist zu $X^q - X$. Also ist $X^q - X$ separable. Also hat $X^q - X$ q -viele verschiedene Nullstellen, die einen Teilkörper $L \subseteq \mathbb{F}_q$ bilden. Somit $\mathbb{F}_q = L$ und $|\mathbb{F}_q| = q$. Sei K ein endlicher Körper der Charakteristik p . Dann ist $[K : \mathbb{F}_p] = r < \infty$ und damit $|K| = p^r = q$. Für $a \in K$ gilt $a^q = a$. Denn wenn $a = 0$ dann ist das richtig und wenn $a \neq 0$ dann ist $a \in K^*$ und $|K^*| = q - 1$. Nach gilt $a^{q-1} = 1$ also $a^q = a$ für alle $a \in K$. Das heißt $x^q - x$ zerfällt in $K[X]$ und somit gibt es Homomorphismus $\mathbb{F}_q \rightarrow K$ mit $|\mathbb{F}_q| = q = |K|$ also ist $\mathbb{F}_q \cong K$. \square

Satz 3.51. *Sei K ein beliebiger Körper und $G \subseteq K^*$ eine endliche Untergruppe. Dann ist G zyklisch.*

Beweis. Sei $n = |G|$. Der Struktursatz für endlich abelsche Gruppen impliziert

$$G \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$$

mit $m_1 | m_2 | \dots | m_r$ und $n = \prod_{i=1}^r m_i$. Für jedes $a \in G$ gilt $a^{m_r} = 1$. Sei also $f = X^{m_r} - 1$. Jedes $a \in G$ ist Nullstelle von f und f hat höchstens m_r verschiedene Nullstellen. Somit ist $n = m_r$ und $G \cong \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$ zyklisch. \square

Korollar 3.52. *Wenn K ein endlicher Körper ist, dann ist K^* zyklisch mit $K^* \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$*

Beispiel 3.53. Sei $K = \mathbb{C}$ und $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \mu_n(\mathbb{C})$. Dann ist G zyklisch. $x^n - 1$ ist separable da die Ableitung nicht 0 ist. Somit ist $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $G = \{e^{2\pi i k/n} \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ erzeugt von $e^{2\pi i/n}$. Es gilt: $e^{2\pi i k/n}$ erzeugt $\mu_n(\mathbb{C})$ genau dann wenn $\text{ggT}(k, n) = 1$.

3.6. Galoiserweiterungen.

Definition 3.54. Eine Körpererweiterung L/K ist eine Galoiserweiterung, wenn L/K normal und separable ist. In dem Fall ist $\text{Gal}(L/K) = \text{Aut}_K(L)$

Satz 3.55. *Sei L/K endlich. Dann ist $|\text{Aut}_K(L)| \leq [L : K]$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn L/K Galoisch.*

Beweis. Wähle algebraischen Abschluss \bar{L}/L . Es gilt

$$\text{Aut}_K(L) = \text{Hom}_K(L, L) \subseteq \text{Hom}_K(L, \bar{L})$$

Somit $|\text{Aut}_K(L)| \leq [L : K]_s \leq [L : K]$. Gleichheit in 1 ist genau dann, wenn L/K normal und Gleichheit in 2 genau dann, wenn L/K separable. \square

Beispiel 3.56. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)/\mathbb{Q}$ wobei $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Es ist $[L : K] = 6$ und L/K Galoisch. Sei $N = \{a, \zeta a, \zeta^2 a\}$ und $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ $\sigma(N) \subseteq N$. Haben also

$$\psi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow S(N) \cong S_3, \sigma \mapsto \sigma|_N$$

ψ ist injektiv denn σ ist Identität auf \mathbb{Q} also muss es sich auf Erzeugern unterscheiden. Da $|\text{Gal}(L/K)| = [L : K] = 6 = |S_3|$ ist ψ bijektiv.

Definition 3.57. Sei L ein Körper und $G \subseteq \text{Aut}(L)$ Untergruppe. Der Körper der G -Invarianten ist $L^G = \{x \in L \mid \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in G\}$

Lemma 3.58. Wenn L/K endlich Galoisch ist mit $G = \text{Gal}(L/K)$, dann ist $K = L^G$.

Beweis. Es gilt $K \subseteq L^G \subseteq L$ und $G \subseteq \text{Aut}_{L^G}(L)$. Es ist L/L^G Galoisch und deshalb

$$[L : K] \geq [L : L^G] = |\text{Aut}_{L^G}(L)| \geq |G| = [L : K]$$

Somit $[L^G : K] = 1$ und $L^G = K$. □

Satz 3.59. Sei $G \subseteq \text{Aut}(L)$ eine endliche Untergruppe und $K = L^G$. Dann ist L/K Galoisch und $[L : K] = |G|$ und $\text{Gal}(L/K) = G$.

Beweis. Sei $b \in L$ und $N \subset L$ die G -Bahn von b , das heißt $N = \{\sigma(b) \mid \sigma \in G\} = \{b_1, \dots, b_r\}$ wobei $r = |N|$. Sei $f = \prod_{i=1}^r (X - b_i) \in L[X]$. Es ist

$$f^\sigma = \prod_i (X - b_i)^\sigma = \prod_i (X - \sigma(b_i)) = \prod_i (X - b_i) = f$$

für alle $\sigma \in G$. Also ist $f \in K[X]$ und b algebraisch über K und separable da f in verschiedene Nullstellen zerfällt. Also ist L/K Galoisch. Angenommen $[L : K] > |G|$. Sei $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Wähle $y_1, \dots, y_m \in L$ K -linear unabhängig und sei A die Matrix $A = (\sigma_i(y_j))_{i,j} \in M_{n \times m}(L)$. Aus $m > n$ folgt es gibt ein $b \in L^m \setminus \{0\}$ im Kern von A . Sei $b = (b_1, \dots, b_m)$ und $\sigma(b) = (\sigma(b_1), \dots, \sigma(b_m))$. Dann ist $A \cdot \sigma(b) = 0$. Sei $\ell(b)$ die Anzahl der j mit $b_j \neq 0$. Wähle also $b \neq 0$ mit $Ab = 0$ und $\ell(b)$ minimal. Ohne Einschränkung $b_j = 1$ für ein j . Für $\sigma \in G$ ist $\ell(b - \sigma(b)) < \ell(b)$ da $\sigma(1) = 1$ und $A(b - \sigma(b)) = 0$. Da $\ell(b)$ minimal ist $b = \sigma(b)$ und somit $b \in K^m$. Da $Ab = 0$ ist $\sum_{j=1}^m y_j b_j = 0$ und somit sind die y_i linear abhängig Was ein Widerspruch darstellt. Also ist $[L : K] = |G|$ und damit

$$|G| \leq |\text{Gal}(L/K)| = [L : K] = |G|$$

also $G = \text{Gal}(L/K)$ □

Beispiel 3.60. \mathbb{F}_q ist Galoisch über \mathbb{F}_p . Sei $\phi: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q, \phi(x) = x^p$ der Frobenius. Es ist $G = \text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p) = \langle \phi \rangle$, denn $\phi(x) = x \iff x^p - x = 0$ hat nur p verschiedene Lösungen. Also ist $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q^{(\phi)}$ eine Gleichheit. Der Satz zeigt, dass G von ϕ erzeugt ist.

Satz 3.61 (Galoiskorrespondenz). Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und $G = \text{Gal}(L/K)$.

(1) Folgende Abbildungen sind zueinander inverse Bijektionen:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Untergruppen } H \subseteq G \} & \xrightarrow{H \mapsto L^H} & \{ \text{Zwischenkörper } K \subseteq M \subseteq L \} \\ & \xleftarrow{\text{Gal}(L/M) \mapsto M} & \end{array}$$

(2) Wenn H mit M korrespondiert, dann ist $[M : K] = [G : H]$ oder äquivalent $[L : M] = |H|$

(3) Wenn $\sigma \in G$ ist und M zu H korrespondiert, dann korrespondiert $\sigma(M)$ zu $\sigma H \sigma^{-1}$

(4) wenn H_1 zu M_1 korrespondiert und H_2 zu M_2 korrespondiert, dann ist

$$H_1 \subseteq H_2 \iff M_1 \supseteq M_2$$

(5) $M = K$ korrespondiert zu $H = G$ und $M = L$ korrespondiert zu $H = \{e\}$.

Beweis.

(1) Man prüft leicht, dass beide Abbildungen wohldefiniert sind. Wenn $K \subseteq M \subseteq L$ Zwischenkörper ist, dann ist $M = L^{\text{Gal}(L/M)}$ wegen Lemma 3.58. Wenn $H \subseteq G$ eine Untergruppe ist, dann ist $H = \text{Gal}(L/L^H)$ nach Satz 3.59.

(2)

$$[M : K][L : M] = [L : K] = |G| = |H|[G : H]$$

und $[L : M] = |\text{Gal}(L/M)| = H$ (3) Sei $\tau \in G$

$$\begin{aligned} \tau \in \text{Gal}(L/M) &\iff \tau(b) = b, \forall b \in M \\ &\iff \sigma\tau\sigma^{-1}\sigma(b) = \sigma(b), \forall b \in M \\ &\iff \sigma\tau\sigma^{-1}(c) = c, \forall c \in \sigma(M) \\ &\iff \sigma\tau\sigma^{-1} \in \text{Gal}(L/\sigma(M)) \end{aligned}$$

(4) Klar

(5) klar

□

Satz 3.62. Sei L/K endlich Galoisch. Korrespondiere M zu H in der Galoiskorrespondenz. Es gilt

$$\begin{aligned} M/K \text{ Galoisch} &\iff M/K \text{ normal} \\ &\iff H \subseteq G \text{ ist normale Untergruppe.} \end{aligned}$$

In dem Fall gilt $\text{Gal}(M/K) \cong G/H$.

Beweis. L/K separable $\implies M/K$ separable. Somit gilt die erste Äquivalenz. Jeder K -Homomorphismus

$$\sigma: M \rightarrow \bar{L}$$

hat Fortsetzung zu einem K -Homomorphismus

$$\tilde{\sigma}: L \rightarrow \bar{L}.$$

Da L/K normal ist, gilt $\tilde{\sigma}(L) = L$ das heißt $\tilde{\sigma} \in \text{Aut}(L/K) = \text{Gal}(L/K) = G$

$$\begin{aligned} M/K \text{ normal} &\iff \forall \sigma \in \text{Hom}_K(M, \bar{L}) : \sigma(M) = M \\ &\iff \forall \tilde{\sigma} \in G : \tilde{\sigma}(M) = M \\ &\iff \text{Für jedes } \tilde{\sigma} \in G : \tilde{\sigma}H\tilde{\sigma}^{-1} = H \\ &\iff H \subseteq G \text{ normal.} \end{aligned}$$

Sei M/K normal. Für $g \in G$ ist $g(M) = M$. Somit haben wir einen Homomorphismus von Gruppen $\psi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(M/K), \sigma \mapsto \sigma|_M$. Jedes $\tau \in \text{Gal}(M/K) = \bar{G}$ hat Fortsetzung zu $\bar{\tau} \in \text{Gal}(L/K)$. Somit ist ψ surjektiv. ψ induziert $\text{Gal}(L/K)/\ker(\psi) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(M/K)$ und

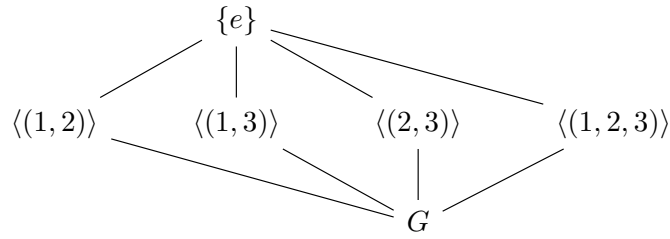
$$\ker(\psi) = \{g \in G \mid g|_M = \text{id}\} = \{g \in \text{Aut}(L) \mid g|_M = \text{id}\} = \text{Gal}(L/M) = H.$$

□

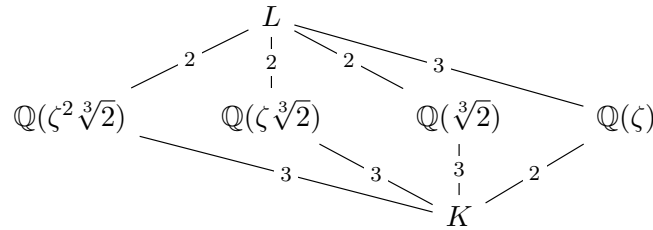
Korollar 3.63. Wenn L/K endlich separable ist, dann hat L/K nur endlich viele Zwischenkörper.

Beweis. Sei \bar{L}/K eine normale Hülle von L/K . \bar{L}/K ist Galoisch. Zwischenkörper von L/K sind Zwischenkörper von \bar{L}/K . Diese korrespondieren zu Untergruppen von $G = \text{Gal}(\bar{L}/K)$. Die letzte Menge ist endlich. □

Beispiel 3.64. Sei L Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $K = \mathbb{Q}$. Die Abbildung $\psi: G \rightarrow S_3$ sei definiert durch Formel $\sigma(a_i) = a_{\psi(\sigma)(i)}$ für $a_1 = \sqrt[3]{2}, a_2 = \zeta a_1, a_3 = \zeta^2 a_1$. Untergruppen von G sind



Das entspricht den Teilkörpern



Satz 3.65 (Satz vom primitiven Element). *Sei L/K eine endliche separable Erweiterung. Dann gibt es ein $a \in L$ mit $L = K(a)$.*

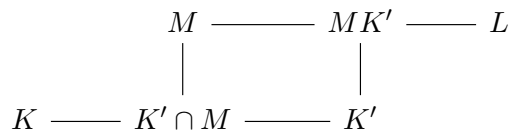
Beweis. Wenn K endlich ist, dann ist $L = \mathbb{F}_q$ endlich. $L^* = \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ ist zyklisch. Sei $a \in L^*$ Erzeuger als Gruppe. Dann ist $L = \{0\} \cup \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und somit $L = K(a)$. Wenn K unendlich, wähle $a \in L$ sodass $[K(a) : K]$ maximal ist und sei $b \in L$. Für $c \in K$ sei $M_C = K(a + cb)$. Da es nach Korollar 3.63 nur endlich viele Zwischenkörper gibt, gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für M_C . Somit gibt es $c_1 \neq c_2$ mit $M_{c_1} = M_{c_2}$. Dann ist $a + c_1 b, a + c_2 b \in K(a + c_1 b) = K(a + c_2 b)$. Also ist $(c_1 - c_2)b \in M_{c_1}$ also ist $b \in M_{c_1}$ und damit $a \in M_{c_1}$. Somit $K(a) \subseteq K(a + c_1 b)$ und wegen Maximalität von $[K(a) : K]$ ist $K(a) = M_{c_1}$. Somit $b \in K(a)$ also $L = K(a)$. \square

Definition 3.66. Sei L/K eine Körpererweiterung und M_1, M_2 zwei Zwischenkörper. Die Komposition $M_1 M_2$ ist der kleinste Teilkörper von L , der M_1 und M_2 enthält.

Satz 3.67. *Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und $G = \text{Gal}(L/K)$. Wenn M_1, M_2 jeweils zu H_1, H_2 korrespondieren, dann korrespondiert $M_1 M_2$ zu $H_1 \cap H_2$ und $M_1 \cap M_2$ korrespondiert zu $\langle H_1, H_2 \rangle$.*

Beweis. Der kleinste Teilkörper der M_1 und M_2 enthält korrespondiert zu größten Untergruppe von G , die in H_1 und H_2 liegt. Analog folgt die andere Aussage. \square

Satz 3.68 (Translationssatz). *Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und $K \subseteq M \subseteq L$ sodass M/K Galoisch. Sei $K \subseteq K' \subseteq L$ ein Zwischenkörper und $M' = MK'$ Kompositum. Dann ist M'/K' Galoisch und $\text{Gal}(M'/K') \cong \text{Gal}(M/M \cap K')$. Insbesondere ist $[M' : K'] = [M : K' \cap M]$*



Beweis. M/K ist der Zerfällungskörper von separablen Polynomen $f \in K[X]$. Dann ist M'/K' der Zerfällungskörper von den selben Polynomen aufgefasst in $K'[X]$. Somit ist M'/K' Galoisch. Für $\sigma \in \text{Gal}(M'/K')$ ist $\sigma|_K = \text{id}_K$. Da M/K normal ist, folgt $\sigma(M) = M$ das heißt $\sigma|_M \in \text{Gal}(M/K)$. Das gibt Gruppenhomomorphismus

$$\psi: \text{Gal}(M'/K') \rightarrow \text{Gal}(M/K), \sigma \mapsto \sigma|_M$$

. Angenommen $\psi(\sigma) = id$ Dann ist $\sigma|_{MK'} = id$ also $\sigma = id$. Also ist ψ injektiv. Sei $H \subseteq \text{Gal}(M/K)$ das Bild. Dann ist

$$\begin{aligned} M^H &= M^{\psi(\text{Gal}(M'/K'))} \\ &= \{x \in M \mid \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in \text{Gal}(M'/K')\} \\ &= M \cap \{x \in M' \mid \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in \text{Gal}(M'/K')\} \\ &= M \cap K' \end{aligned}$$

Also ist $H = \text{Gal}(M/M \cap K')$ □

3.7. Galoisgruppe einer Gleichung.

Definition 3.69. Sei $f \in K[X]$ ein separables Polynom und L/K ein Zerfallskörper von f . Die Galoisgruppe von f ist $\text{Gal}(L/K)$

Bemerkung 3.70. Sei N die Menge der Nullstellen von f in L . Haben injektiven Gruppenhomomorphismus $\text{Gal}(L/K) \rightarrow S(N) \cong S_n$, $\sigma \mapsto \sigma|_N$ wobei $n = \deg(f) = |N|$. Das zeigt

Satz 3.71. Wenn L/K Zerfällungskörper eine separablen Polynoms f von Grad n ist, dann $\text{Gal}(L/K) \rightarrow S_n$ injektiv.

Definition 3.72 (Diskriminante). Sei $f \in K[X]$ ein normiertes Polynom,

$$f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$$

in $\bar{K}[X]$ und $n = \deg(f)$. Sei

$$\delta = \prod_{\substack{i,j \in \{1,\dots,n\} \\ i < j}} (\alpha_i - \alpha_j) \in \bar{K}.$$

Dann ist $\Delta = \delta^2 \in \bar{K}$ die Diskriminante von f

Lemma 3.73. Es ist $\Delta \in K$ und es gilt

$$\Delta \neq 0 \iff f \text{ ist separable.}$$

Beweis. Sei $\Delta \neq 0$ und L/K Zerfällungskörper von f . Dann ist L/K Galois und für $\sigma \in G = \text{Gal}(L/K)$ gilt

$$\sigma(\alpha_i) - \sigma(\alpha_j) = \alpha_{i'} - \alpha_{j'} = -(\alpha_{j'} - \alpha_{i'})$$

und einer der letzten beiden Terme taucht als Faktor in δ auf. Also ist $\sigma(\delta) = \pm\delta$ und damit $\sigma(\Delta) = \Delta$. Also gilt $\Delta \in L^G = K$. □

Bemerkung 3.74. Wenn f separabel, dann ist für $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$

$$\sigma(\delta) = \text{sign}(\sigma)\delta$$

wobei wir σ als Element in S_n auffassen.

Bemerkung 3.75. sei $f \in K[X]$ und $n = \deg(f)$.

(1) Sei $n = 2$ und $f = X^2 + pX + q = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X + \alpha_1\alpha_2$ und

$$\Delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = p^2 - 4q$$

(2) Sei $n = 3$ und $\text{char}(K) \notin \{2, 3\}$ und $f = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Für $Y = X + \frac{1}{3}a_2$ erhalten wir können wir X ersetzen und behalten die gleiche Diskriminante. Wir bekommen

$$\begin{aligned} f &= (Y - \frac{1}{3}a_2)^3 + a_2(Y - \frac{1}{3}a_2)^2 + a_1(Y - \frac{1}{3}a_2) + a_0 \\ &= Y^3 + aY + b \end{aligned}$$

für irgendwelche $a, b \in K$. Sei also $f = X^3 + aX + b$. Eine ähnliche Rechnung wie für $n = 2$ ergibt $\Delta = -4a^3 - 27b^2$

Satz 3.76. Sei $\text{char}(K) \notin \{2, 3\}$ und $f = X^3 + aX + b \in K[X]$ irreduzibel. Dann ist ein Zerfällungskörper L/K von f Galois. Es ist $\text{Gal}(L/K) \subseteq S_3$.

- (1) Δ ist Quadrat in $K \implies G = A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
- (2) Δ kein Quadrat in $K \implies G = S_3$

Beweis. Da f irreduzibel gilt für eine Nullstelle α von f dass $[K(\alpha) : K] = 3$ ist. Also ist $[L : K] \in \{3, 6\}$. Die einzigen Untergruppen von S_3 mit 3 bzw. 6 Elementen sind A_3 bzw. S_3

$$\begin{aligned} G = A_3 &\iff G = \ker(\text{sign}: S_3 \rightarrow \{\pm 1\}) \\ &\iff \forall \sigma \in G : \text{sign}(\sigma) = 1 \\ &\iff \forall \sigma \in G : \sigma(\delta) = \delta \\ &\iff \delta \in L^G = K \\ &\iff \Delta \text{ ist Quadrat in } K \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.77. Sei $f = X^3 - a$ wobei a keine dritte Potenz in $K = \mathbb{Q}$ ist. f hat keine Nullstelle also ist f irreduzibel. $\Delta = -27a^2$ ist kein Quadrat in \mathbb{Q} . Also ist $\text{Gal}(L/K) = S_3$

Lemma 3.78. Sei R faktoriell und $g, h \in K[X]$ normiert und sei $K = \text{Quot}(R)$. Wenn $g \cdot h \in R[X]$ dann ist $g, h \in R[X]$.

Beweis. Es ist $g/c(g), h/c(h) \in R[X]$. Also sind $1/c(g), 1/c(h) \in R$ da g, h normiert. Es ist $1 = c(gh) = c(g)c(h)$ also ist $1/c(g), 1/c(h) \in R^*$ also ist $c(g), c(h) \in R^*$ also ist $h, g \in R[X]$. □

Korollar 3.79. Wenn $f \in \mathbb{Z}[X]$ normiert ist und $a \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f , dann ist $f = (X - a) \cdot g$, wobei g normiert ist. Dann ist $a \in \mathbb{Z}$ und $g \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 3.80. $X^3 - 3x + 1$ mögliche Nullstellen in \mathbb{Q} sind Teiler von 1 in \mathbb{Z} . Das sind aber keine Nullstellen, also ist f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$. $\Delta = -4(-3)^3 - 27 \cdot 1^2 = 3^4$ ist Quadrat, also $\text{Gal}(L/K) = A_3$

Definition 3.81. Sei K ein Körper und $\mu_n(K) = \{x \in K \mid x^n = 1\}$ Gruppe der n -ten Einheitswurzeln in K .

Satz 3.82. Sei $\text{char}(K) \nmid n$. Dann ist $\mu_n(\bar{K})$ zyklisch von Ordnung n .

Beweis. $f = X^n - 1$ und $f' = nX^{n-1} \neq 0$. Einzige Nullstelle von f' ist $x = 0$ aber $f(0) \neq 0$. Somit ist $\text{ggT}(f, f') = 1$ und damit f separabel. □

Definition 3.83. Sei $\text{char}(K) \nmid n$. Ein $\zeta \in \mu_n(K)$ heißt primitive n -te Einheitswurzel, wenn ζ die Gruppe $\mu_n(\bar{K})$ erzeugt. Sei $K(\zeta_n) = K(\mu_n(\bar{K}))$ der Zerfällungskörper von $x^n - 1$. $K(\zeta_n)$ heißt der n -te Kreisteilungskörper über K .

Lemma 3.84. Sei G eine zyklische Gruppe mit $|G| = n$. Dann ist $\text{End}(G) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Ring und $\text{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ als Gruppe.

Beweis. Wähle Isomorphismus $\psi: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow G$ Wenn $f: G \rightarrow G$ Endomorphismus ist, dann ist $\psi^{-1}f\psi$ ein Endomorphismus von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. somit $\text{End}(G) \cong \text{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ denn Endomorphismen eindeutig bestimmt durch $f(1) = a$. □

Definition 3.85. Die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen in $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ist

$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|.$$

Die Funktion φ heißt Eulersche φ -Funktion

Lemma 3.86. Es gilt

- (1) $\text{ggT}(n, m) = 1 \implies \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$
- (2) $\varphi(\text{kgV}(n, m))\varphi(\text{ggT}(n, m)) = \varphi(n)\varphi(m)$

(3) Wenn $n = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}$ wobei p_i paarweise verschiedene Primzahlen, dann ist

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^r \varphi(p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^r (p_i - 1)p_i^{e_i-1}$$

Beweis. Nach Chinesischem Restsatz ist $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ also gilt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt aus der ersten. Für die dritte reicht $\varphi(p^e) = p^{e-1}(p-1)$ für eine Primzahl p . Nicht-Einheiten in $\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ sind $0, p, 2p, \dots, (p^{e-1}-1)p$, das sind also p^{e-1} viele. Somit $|(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^*| = p^e - p^{e-1}$ \square

Satz 3.87. Sei $L = K(\zeta_n)/K$. Die Abbildung

$$\psi: \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Aut } \mu_n(\bar{K}), \sigma \mapsto \sigma|_{\mu_n(L)}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Beweis. ψ ist injektiv, da L/K von $\mu_n(L)$ erzeugt ist. \square

Korollar 3.88. Sei

$$\phi: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \rightarrow \text{Aut}(\mu_n(\bar{K})), a \mapsto (\mu_n(\bar{K}) \rightarrow \mu_n(\bar{K}), \zeta \mapsto \zeta^a)$$

der Isomorphismus aus Lemma 3.84. Dann ist

$$\chi = \phi^{-1}\psi: G \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$$

gegeben durch

$$\zeta^{\chi(\sigma)} = \zeta^{\phi^{-1}(\sigma|_{\mu_n(\bar{K})})} = \sigma(\zeta).$$

Insbesondere ist χ injektiv und $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{\chi(\sigma)}$ und dadurch $\chi(\sigma)$ schon bestimmt.

Korollar 3.89. $\text{Gal}(K(\zeta_n)/K)$ ist eine abelsche Gruppe.

Beispiel 3.90. $K = \mathbb{R}$ and $n \geq 3$. Dann ist $\mu_n(\mathbb{C}) \subsetneq \mathbb{R}$ und somit $K(\mu_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}$. $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\text{id}, \sigma\}$ wobei σ die komplexe Konjugation ist. Es ist $\chi(\sigma) = -1$ denn für $\zeta \in \mu_n(\mathbb{C})$ ist $\sigma(\zeta) = \bar{\zeta} = \zeta^{-1}$

Satz 3.91. Sei $q = p^r$ für eine Primzahl p und L/\mathbb{F}_q eine endliche Galois-erweiterung. Dann ist $G = \text{Gal}(L/\mathbb{F}_q)$ von ϕ_q erzeugt, wobei $\phi_q(x) = x^q$.

Beweis. \mathbb{F}_q ist Zerfällungskörper von $X^q - x$ über \mathbb{F}_p und $\mathbb{F}_q = \{x \in L \mid \phi_q(x) = x\}$. Somit ist $\phi_q \in G$. Für $H = \langle \phi_q \rangle \subseteq G$ ist dann $L^H = \mathbb{F}_q = L^G$ also ist $H = G$. \square

Korollar 3.92. Sei $q = p^r$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid n$. Sei $L = \mathbb{F}_q(\zeta_n)$ wobei $\zeta_n \in \bar{\mathbb{F}}_q$ primitive n -te Einheitswurzel. Sei $\chi: \text{Gal}(L/\mathbb{F}_q) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \phi_q \mapsto k = \chi(\phi_q)$ wie in Korollar 3.88. Dann ist

$$|\text{Gal}(L/\mathbb{F}_q)| = \text{ord}(\phi_q) = \text{ord}(\chi(\phi_q)) = \text{ord}(q \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$$

Beispiel 3.93. Sei $n = 12$ und $p = 7$. Es ist $7^2 = 49 = 48 + 1$ also ist die Ordnung von 7 gleich 2. Also $[\mathbb{F}_7(\zeta_{12}) : \mathbb{F}_7] = |\text{Gal}(\cdot)| = 2$ und somit $\mathbb{F}_7(\zeta_{12}) = \mathbb{F}_{49}$

Satz 3.94. Der Homomorphismus $\chi: \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ aus Korollar 3.88 ist bijektiv, das heißt $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

Beweis. Sei $\zeta_n \in \bar{\mathbb{Q}}$ eine primitive n -te Einheitswurzel und $f \in \mathbb{Q}[x]$ das Minimalpolynom von ζ_n . Wir zeigen, dass jede andere primitive n -te Einheitswurzel auch Nullstelle von f ist. Dann ist $\deg(f)$ die Anzahl der primitiven n -ten Einheitswurzeln und somit $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$. Denn wenn m eine Einheit ist in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dann ist ζ_n^m eine primitive Einheitswurzel. Ohne Einschränkung $m = p$ prim. Sei also $p \nmid n$ und g Minimalpolynom von ζ_n^p . Angenommen $f \neq g$. Es ist $\zeta_n^{pn} - 1 = 0$ also teilt $f \mid X^n - 1$, $g \mid X^n - 1$ also $f \cdot g \mid X^n - 1$. Nach Lemma 3.78 folgt $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ und außerdem ist ζ_n eine Nullstelle von $g(X^p)$ also $f \mid g(X^p)$ und $g(X^p) = f \cdot h$ für ein $h \in \mathbb{Z}[X]$. In $\mathbb{F}_p[X]$ gilt $f \mid g(X^p) = g(X)^p$ also sind f und g nicht teilerfremd in $\mathbb{F}_p[X]$. Da aber $f \cdot g \mid X^n - 1$ kommt ein irreduzibler Faktor von $X^n - 1$ doppelt vor, was ein Widerspruch dazu ist, dass $X^n - 1$ separabel ist über \mathbb{F}_p . Also ist $f = g$ \square

Korollar 3.95. Für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(n, m) = d$ und $\text{kgV}(n, m) = k$ gilt

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_d)$$

und

$$\mathbb{Q}(\zeta_n)\mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_k)$$

Beweis. Es ist $\mathbb{Q}(\zeta_k) \supseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)\mathbb{Q}(\zeta_m)$. Sei ζ_n eine primitive n -te Einheitswurzel und ζ_m primitive m -te Einheitswurzel und sei $d = an + bm$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\xi = \zeta_n^b \zeta_m^a$ primitive k -te Einheitswurzel, denn $\xi^k = 1$ und wenn $\xi^s = 1$ ist, dann ist $\zeta_n^{sb} = \zeta_m^{-sa}$ woraus $n \mid sbm$ und somit $n \mid sd$ folgt. Also $n/d \mid s$. Analog $m/d \mid s$ also folgt zusammen $k \mid s$. Also gilt

$$\mathbb{Q}(\zeta_k) = \mathbb{Q}(\zeta_n)\mathbb{Q}(\zeta_m).$$

Außerdem gilt $\mathbb{Q}(\zeta_d) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Für $M = \mathbb{Q}(\zeta_n)$, $K' = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, $K = \mathbb{Q}$ und $M' = MK'$ gilt nach Satz 3.68

$$\begin{aligned} \varphi(k)\varphi(d) &= \varphi(n)\varphi(m) \\ &= [M : K] \cdot [K' : K] \\ &= [M' : K][K' \cap M : K] \\ &= \varphi(k)[K' \cap M : K] \end{aligned}$$

Also $K' \cap M = \mathbb{Q}(\zeta_d)$ □

Definition 3.96. Sei $n \in \mathbb{N}$. Das n -te Kreisteilungspolynom ist

$$\phi_n = \prod_{\substack{\zeta \in \mu_n(\mathbb{C}) \\ \text{primitiv}}} (X - \zeta) = \prod_{k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} (X - \zeta_n^k) \in \mathbb{C}[X]$$

für $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$

Lemma 3.97. Es gilt

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$$

Beweis. Es ist

$$X^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mu_n(\mathbb{C})} (X - \zeta)$$

und jedes ζ ist eine primitive d -te Einheitswurzel für $d = \text{ord}(\zeta)$ und jede primitive d -te Einheitswurzel für $d \mid n$ ist ein Element von $\mu_n(\mathbb{C})$. Dann impliziert

$$\mu_n(\mathbb{C}) = \coprod_{d|n} \{\zeta_d \text{ primitive } d\text{-te Einheitswurzel}\}$$

die Aussage. □

Lemma 3.98. Es ist $\phi_d \in \mathbb{Z}[X]$ und ϕ_d ist das Minimalpolynom von ζ_d über \mathbb{Q} .

Beweis. Klar □

Bemerkung 3.99. Für $n = p$ prim gilt $\phi_p = (X^p - 1)/(X - 1) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$

Beispiel 3.100. $\mathbb{Q}(\zeta_9)/\mathbb{Q}$ hat Galoisgruppe $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ mit $\phi(9) = 6$ Elementen. Der ??Satz:StuktEndlAb] liefert

$$G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

und das hat die vier Untergruppen $\{0\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Das entspricht den Untergruppen $\{1\}, \langle -1 \rangle, \langle 4 \rangle, G$. Es ist $\chi(\sigma) = -1$ für die komplexe Konjugation $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Also ist für $L = \mathbb{Q}(\zeta_9)$

$$L^{\langle -1 \rangle} = L \cap \mathbb{C}^{\langle \sigma \rangle} = L \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta_9 + \zeta_9^{-1})$$

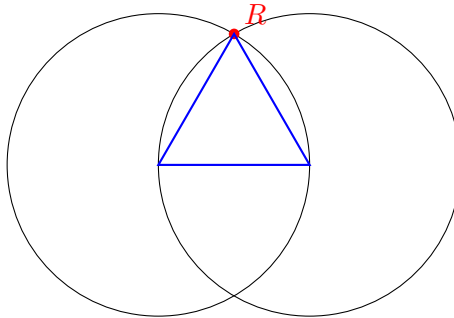
Wobei die letzte Gleichung gilt, da für $b = \zeta_9 + \zeta_9^{-1}$

$$b\zeta_9 = \zeta_9^2 + 1$$

also ist $\zeta_9^2 - b\zeta + 1 = 0$ und somit $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}(b)] \leq 2$. Da $\mathbb{Q}(\zeta_3) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_9)$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}] = 2$ folgt $L^{(4)} = \mathbb{Q}(\zeta_3)$.

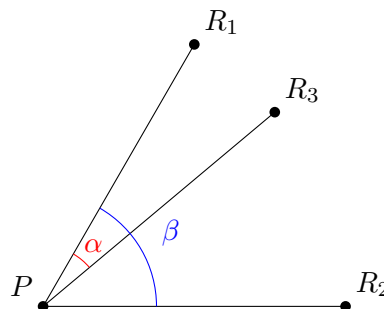
3.8. Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Starte mit einer Menge von Punkten in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$
Erlaubte Konstruktionen: Geraden durch 2 Verschiedene Punkte die gegeben sind und Kreise durch 2 Punkte, einer davon der Mittelpunkt, und Schnittpunkte von 2 Objekten dieser Art.

Beispiel 3.101. Man kann gleichseitige Dreiecke konstruieren.



Bemerkung 3.102. Klassische Probleme sind

- (1) Winkeldreiteilung: Wenn P, R_1, R_2, R_3 gegeben sind, suche R_3 sodass $3\alpha = \beta$.



- (2) Würfeldoppelung: Gegeben P, Q suche Q' sodass $|PQ'|^3 = 2|PQ|^3$.
 (3) Quadratur des Kreises: Gegeben P, Q suche Q' sodass $|PQ'|^2 = \pi|PQ|^2$.
 (4) Kubatur der Kugel: Suche Q' sodass Würfel mit Kante PQ' das gleiche Volumen hat wie Kugel mit Radius PQ .
 (5) Konstruktion des regulären n -Ecks mit 2 gegebenen benachbarten Ecken.

Definition 3.103. Für $z, w \in \mathbb{C}$ sei

$$\ell(z, w) = \{z + \lambda(w - z) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade durch z, w und

$$k(z, w) = \{w' \in \mathbb{C} \mid |z - w| = |z - w'|\} = \{z + \lambda(w - z) \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$$

der Kreis mit Mittelpunkt z durch w .

Definition 3.104. Für $M \subseteq \mathbb{C}$ sei $K(M) \subseteq \mathbb{C}$ die kleinste Menge sodass

- (1) $M \subseteq K(M)$
 (2) Wenn $z, w, z', w' \in K(M)$ mit $z \neq w$ und $z' \neq w'$ dann

$$\ell(z, w) \cap \ell(z', w') \subseteq K(M)$$

$$\ell(z, w) \cap k(z', w') \subseteq K(M)$$

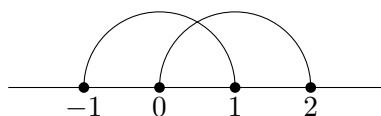
$$k(z, w) \cap k(z', w') \subseteq K(M)$$

falls die Schnitte jeweils endlich sind.

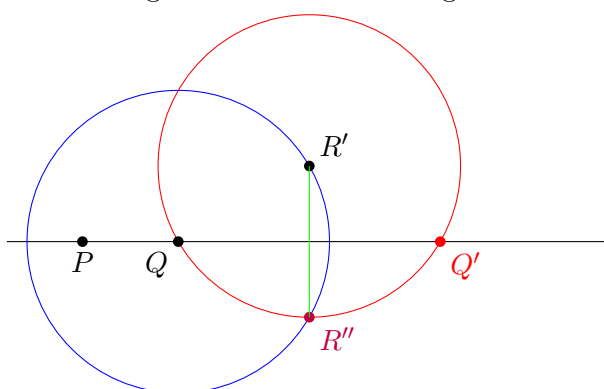
$K(M)$ ist die Menge aller Elemente von \mathbb{C} die durch endlich viele Schnitte in M wie oben gewonnen werden können. Wir nennen $K(M)$ die Menge der aus M konstruierbaren Zahlen.

Bemerkung 3.105. Wenn $M \neq \emptyset$ oder $|M| = 1$ dann ist $K(M) = M$. Sei $|M| \geq 2$. Ohne Einschränkung $0, 1 \in M$. Es gilt

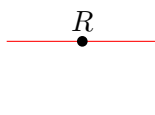
- (1) $\mathbb{Z} \subseteq K(0, 1)$



- (2) Man kann Orthogonalen zu einer Geraden durch einen Punkt konstruieren. Seien P, Q und $\bar{P}Q$ gegeben. Sei R' nicht auf $\bar{P}Q$. Bilde den roten Kreis und danach den blauen. Das gibt Schnittpunkt R'' . Die grüne Gerade ist Orthogonale.



- (3) Parallele zu Geraden durch Punkt R

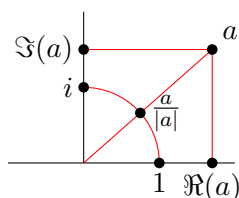


Verfahren: Bestimme Orthogonale durch R . Dann konstruiere gleichseitiges Dreieck wo R der Mittelpunkt einer Seite ist. Das gibt Parallele.

- (4) Verschiebung von Vektoren. Seien P, Q, R gegeben. Suche $R + (Q - P)$. Klar, Konstruiere Parallele, Verbinde Punkte und konstruiere parallel.

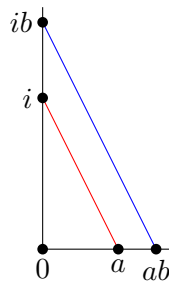
Lemma 3.106. Sei $0, 1 \in M$ und $a \in \mathbb{C}$. Es ist äquivalent:

- (1) $a \in K(M)$
- (2) $\bar{a} \in K(M)$
- (3) $\Re(a), \Im(a) \in K(M)$
- (4) $|a|, \frac{a}{|a|} \in K(M)$

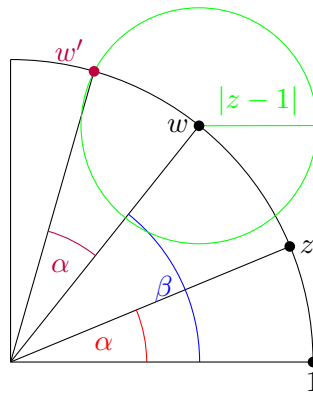


Lemma 3.107. Sei $0, 1 \in M$. Dann ist $K(M)$ ein Körper. Insbesondere ist $\mathbb{Q} \subseteq K(M)$.

Beweis. Zeige, dass $K(M)$ abgeschlossen ist unter Multiplikation und Inverse. Für Multiplikation reicht die Multiplikation von reellen Zahlen und von Zahlen mit Betrag 1 (dh. Addition von Winkeln).



Addition von Winkeln:



□

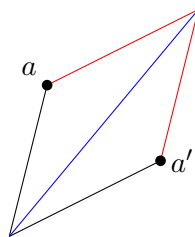
Bemerkung 3.108. Sei $0, 1 \in M$. Dann ist $\mathbb{Q}(M \cup \bar{M}) \subseteq K(M)$.

Satz 3.109 (Konstruierbare Zahlen). Sei $0, 1 \in M$ und $a \in \mathbb{C}$. Es gilt

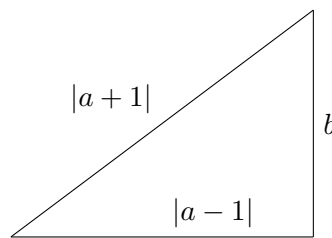
$$a \in K(M) \iff \exists \mathbb{Q}(M \cup \bar{M}) = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r \text{ mit } [K_i : K_{i-1}] = 2 \text{ und } a \in K_r.$$

Insbesondere ist $[\mathbb{Q}(M \cup \bar{M} \cup \{a\}) : \mathbb{Q}(M \cup \bar{M})]$ eine Zweierpotenz, das heißt a ist algebraisch über $\mathbb{Q}(M \cup \bar{M})$.

Beweis. Kurzform: Schnitt von Geraden vergrößert den Körper nicht. Schnitt von Geraden mit Kreisen führt auf quadratische Gleichung. Das heißt K_i/K_{i-1} hat Grad 2. Das zeigt: $a \in K(M)$ impliziert, dass eine Kette wie im Satz existiert. Zeige: Wenn L/K eine quadratische Erweiterung ist mit $L \subseteq \mathbb{C}$ und $K \subseteq K(M)$ dann ist auch $L \subseteq K(M)$. Sei $L = K(b)$ wobei b eine Nullstelle von $X^2 + cX + d$ ist. Die Substitution $X = X - \frac{c}{2}$ erreicht $c = 0$. Also sei ohne Einschränkung das Polynom $X^2 + d$ und $b' = \sqrt{d'}$. Zeige also: Quadratwurzeln in \mathbb{C} sind konstruierbar. Es ist $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$. Zeige also: Wurzeln aus reellen Zahlen und Winkelhalbierungen sind konstruierbar.



Sei $a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$.



$$\begin{aligned} b^2 &= (a+1)^2 - (a-1)^2 \\ &= 4a \end{aligned}$$

also $b = 2\sqrt{a}$ □

Lemma 3.110. Sei K ein Körper und $K = K_0 \subseteq K_1 \cdots \subseteq K_n$, $K = L_0 \subseteq L_1 \cdots \subseteq L_m$ Ketten quadratischer Körpererweiterungen. Dann ist $K = L_0 \subseteq \cdots \subseteq L_m \subseteq K_1 L_m \subseteq \cdots \subseteq K_n L_m$ Kette höchstens quadratischer Körpererweiterungen.

Beweis. Es ist $[K_i L_n : K_{i-1} L_n] \leq [K_i : K_{i-1}] = 2$ □

Satz 3.111. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $a \in \bar{K}$. Dann sind äquivalent:

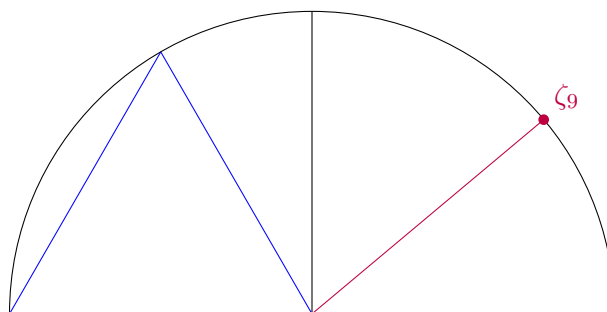
- (1) Es gibt Kette quadratischer Erweiterungen $K = K_0 \subseteq \cdots \subseteq K_n$ and $a \in K_n$
- (2) Es gibt Galoiserweiterung L/K mit $a \in L$ und $[L : K] = 2^r$.

Beweis. Gelte 1 und sei K_n/K gegeben. Dann ist K_n/K separabel und nach Satz 3.65 gilt $K_n = K(b)$ für ein $b \in K_n$. Sei L/K die normale Hülle von K_n/K . Nach Konstruktion ist L/K der Zerfällungskörper vom Minimalpolynom f von b . Seien b_1, \dots, b_n die Nullstellen von f in L mit $b = b_1$. Es ist $L = K(b_1) \cdots K(b_n)$ Komposition. Da f das Minimalpolynom von b_i ist, ist $K_n = K(b) = K(b_i)$ für alle i und somit ist $K(b_i)/K$ durch Kette quadratischer Erweiterungen erreichbar. Nach Lemma 3.110 ist L als Kompositum durch quadratische Kette erreichbar. Gelte 2. und sei L/K Galois vom Grad 2^r . Dann ist $G = \text{Gal}(L/K)$ eine p -Gruppe für $p = 2$. G ist auflösbar somit gibt es nach Korollar 2.19 eine normale Untergruppe $H \subseteq G$ mit $[G : H] = 2$. Sei $K_r = L$ und $K_1 = L^H$. Dann ist $[K_1 : K_0] = 2$ und K_r/K Galois vom Grad 2^{r-1} . Also folgt die Aussage nach Induktion. □

Satz 3.112. $\pi \in \mathbb{R}$ ist transzendent über \mathbb{Q} .

Korollar 3.113. $\pi \notin K(0,1)$ da $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] = \infty$.

Korollar 3.114. Wäre Winkeldrittung immer möglich, so wäre $\zeta_9 \in K(0,1)$.



Aber $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}] = 6$ ist keine Zweierpotenz also Widerspruch und die Aussage ist falsch.

Korollar 3.115 (Würfelverdoppelung). Ist $\sqrt[3]{2} \in K(0,1)$? Es ist

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$$

keine Zweierpotenz, also nein.

Definition 3.116.

- (1) Ein Körper L heißt quadratisch abgeschlossen, wenn jedes quadratische Polynom in $L[X]$ in L eine Nullstelle hat.
- (2) Ein quadratischer Abschluss von K ist eine Erweiterung L/K sodass L quadratisch abgeschlossen ist und jede endliche Zwischenerweiterung $L/L'/K$ lässt sich durch Kette quadratischer Erweiterungen erreichen.

Bemerkung 3.117 (Konstruktion eines quadratischen Abschlusses). Sei

$$L = \{a \in \bar{K} \mid K(a)/K \text{ ist durch Kette quadratischer Erweiterungen erreichbar}\}.$$

Wir haben gesehen: $K(M)$ ist der quadratische Abschluss von $\mathbb{Q}(M \cup \bar{M})$

3.9. Konstruktion des regulären n -Ecks. Sei E die Menge der Ecken des regulären n -Ecks mit $E \subseteq S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Es gilt $E = \mu_n(\mathbb{C})$. Sei $\zeta_n \in \mu_n(\mathbb{C})$ primitiv. Ist $\zeta_n \in K(0, 1)$? Bekannt ist: $[Q(\zeta_n)/\mathbb{Q}]$ ist Galois mit $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ und $|G| = \varphi(n)$. Antwort:

$$\zeta_n \in K(0, 1) \iff \varphi(n) = 2^r.$$

Wenn $n = \prod_i p_i^{e_i}$ für verschiedene Primzahlen p_i , dann ist $\varphi(n) = \prod (p_i - 1)p_i^{e_i-1}$. Das ist Zweierpotenz genau dann wenn $e_i < 2$ für $p_i \neq 2$ und $e_i = 1$ nur wenn $p_i - 1$ eine Zweierpotenz ist.

Definition 3.118 (Fermatsche Primzahl). Eine Fermatsche Primzahl ist eine Primzahl der Form $p = 2^m + 1$.

Bemerkung 3.119. Wenn p prim dann ist ζ_p konstruierbar $\iff p$ ist Fermatsche Primzahl

Lemma 3.120. $2^m + 1$ prim $\implies m = 2^r$

Beweis. Sei $m = qm'$ wobei q ungerade. Dann ist nach geometrischer Summe

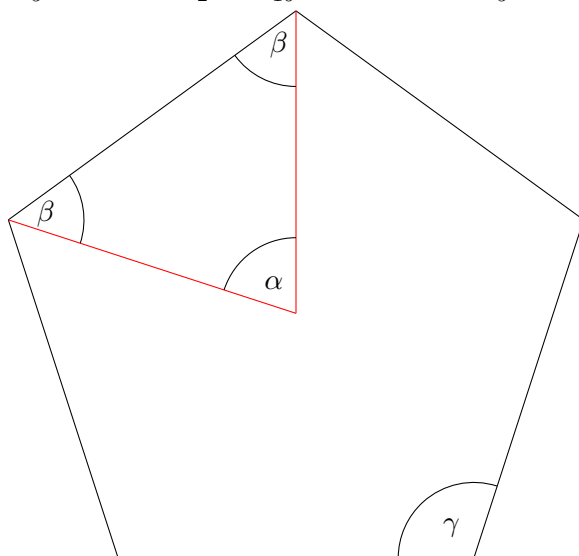
$$\frac{2^m + 1}{2^{m'} + 1} = \frac{1 - (-2^{m'})^q}{1 - (-2^{m'})} = \sum_{k=0}^{q-1} (-2^{m'})^k = \sum_{k=1}^q (-1)^{k+1} 2^{m-km'}$$

also $2^m + 1$ nicht prim. □

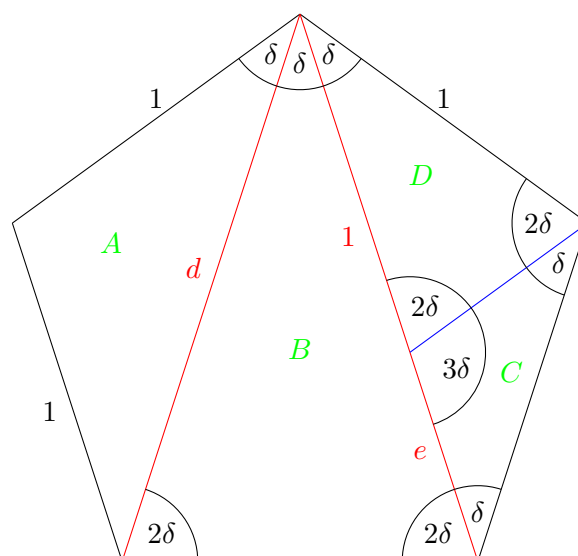
Bemerkung 3.121. $2^{2^r} + 1$ ist prim für $r = 0, 1, 2, 3, 4$ aber für $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$

Bemerkung 3.122. Fazit: Reguläre 3, 5, 17 Eck ist konstruierbar. Reguläre 7, 11, 13, 19-Eck nicht.

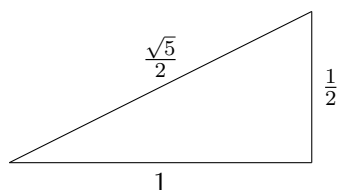
Beispiel 3.123. Sei $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ und $\beta = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{3\pi}{16}$ und $\gamma = 2\beta = \frac{3}{5}\pi$



Sei weiter $\delta = \frac{\pi - \gamma}{2}$. Dann ist $\delta = \frac{1}{5}\pi$ und $\gamma - 2\delta = \frac{1}{5}\pi = \delta$



Die Dreiecke A und C sind ähnlich und die Dreiecke B und D sind ähnlich, da sie gleiche Winkel haben. Sei d die Länge der Diagonalen und $e = d - 1$. Es gilt also $\frac{1}{d} = \frac{1}{e} = \frac{1}{d-1}$. Also ist $d^2 - d = 1$ was $d = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ impliziert. Konstruiere also



und dann konstruiere 5-Eck.

3.10. Auflösbarkeit durch Radikale.

Definition 3.124. Sei K ein Körper der Charakteristik 0.

- (1) Eine einfache Radikalerweiterung ist eine Körpererweiterung L/K sodass $L = K(a)$ für ein a mit $a^n \in K$ für ein $n \in \mathbb{N}_1$
- (2) L/K heißt Radikalerweiterung, wenn es eine Kette $K = K_0 \subseteq \dots \subseteq K_r = L$ gibt sodass K_i/K_{i-1} eine einfache Radikalerweiterung ist.
- (3) L/K ist auflösbar durch Radikale, wenn es für jedes $a \in L$ eine Radikalerweiterung L'/K und Einbettung $K(a) \subseteq L'$ existiert.

Bemerkung 3.125. Wenn L/K endlich, dann ist $L = K(a)$ für ein $a \in L$. Dann

L/K ist auflösbar durch Radikale $\iff L$ ist in einer Radikalerweiterung enthalten

Bemerkung 3.126. Notation: Wenn L/K einfache Radikalerweiterung, $L = K(a)$ und a Nullstelle von $X^n - b$ könnte schreiben $a = \sqrt[n]{b}$ aber das ist ungenau da $X^n - b$ n verschiedene Nullstellen hat.

Beispiel 3.127. Sei $f = X^3 - 2$ und sei $a = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$. Wenn $K = \mathbb{Q}(a)$ dann ist $[K(a) : K] = 1$ aber $[K(\zeta_3 a) : K] = 2$

Bemerkung 3.128. Angenommen K ist ein Körper von Charakteristik $\neq n$ und $\mu_n(\bar{K}) \subseteq K$. Dann sei $\zeta_n \in \mu_n(\bar{K})$ primitiv. Die Nullstellen von $f = X^n - b$ sind $a, \zeta_n a, \zeta_n^2 a, \dots, \zeta_n^{n-1} a$ also $X^n - b = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \zeta_n^k a)$ und $K(a) = K(\zeta_n^k a)$ für jedes k da K ζ_n enthält. In diesem Fall ist die Bezeichnung $K(\sqrt[n]{b}) = K(a)$ für irgendein a mit $a^n = b$. Das ist ein Zerfallskörper von $X^n - b$.

Lemma 3.129. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq n$ und $\mu_n(\bar{K}) \subseteq K$. Dann gibt es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\text{Gal}(K(\sqrt[n]{a})/K) \rightarrow \mu_n(K) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $G = \text{Gal}(L/K)$ zyklisch.

Beweis. Sei $\sigma \in G$ und $b = \sqrt[n]{a}$. Es ist $\sigma(b)$ ist eine Nullstelle von $X^n - a$ also ist $\sigma(b) = \zeta b$ für ein $\zeta \in \mu_n(K)$. Da $\mu_n(\bar{K}) \subseteq K$ ist für $\zeta' \in \mu_n(\bar{K})$:

$$\sigma(\zeta' b) = \zeta' \sigma(b) = \zeta' \zeta b.$$

Sei $\psi: G \rightarrow \mu_n(\bar{K})$, $\psi(\sigma) = \frac{\sigma(b)}{b}$. Eine Rechnung zeigt, dass das ein Gruppenhomomorphismus ist. Angenommen $\psi(\sigma) = 1$. Dann ist $\sigma = \text{id}$ auf Menge der Nullstellen und da $K(\sqrt[n]{a})/K$ Zerfällungskörper ist, ist $\sigma = \text{id}$. \square

Definition 3.130. Sei E eine Eigenschaft von Gruppen (z.B. zyklisch, auflösbar, abelsch...) Eine Körpererweiterung L/K hat die Eigenschaft E , wenn L/K Galois ist und $\text{Gal}(L/K)$ diese Eigenschaft E hat.

Satz 3.131. Sei $\text{Char}(K) \neq n$ und $\mu_n(\bar{K}) \subseteq K$. Wenn L/K zyklisch von Grad n , dann ist $L = K(\sqrt[n]{a})$ für ein $a \in K$.

Beweis. Sei $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ ein Erzeuger. Als Endomorphismus gilt $\sigma^n - \text{id} = 0$. Sei μ_σ Minimalpolynom von σ . Dann gilt $\mu_\sigma \mid X^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mu_n} (X - \zeta)$. Somit ist σ diagonalisierbar und die Eigenwerte sind die Nullstellen von μ_σ . Sei $B \subseteq \mu_n$ die Menge dieser Nullstellen. Für $\zeta \in \mu_n(\bar{K})$ sei $V_\zeta = \{x \in L \mid \sigma(x) = \zeta x\}$. Es gilt $V_\zeta \neq 0 \iff \zeta \in B$ und $L = \bigoplus_{\zeta \in \mu_n} V_\zeta$. Sei $x \in V_\zeta$ mit $x \neq 0$. Dann gilt $x^{-1} \in V_{\zeta^{-1}}$ und somit haben wir inverse Abbildungen

$$V_{\zeta'} \xrightarrow{x} V_{\zeta \zeta'} \xrightarrow{x^{-1}} V_{\zeta'}$$

somit ist $V_{\zeta'} \cong V_{\zeta \zeta'}$. Das zeigt: $B \subseteq \mu_n(\bar{K})$ ist Untergruppe und wenn $\zeta \in B$ Erzeuger ist, dann ist $V_1 \cong V_\zeta \cong V_{\zeta^2} \cong \dots$. Also ist

$$\dim(V_{\zeta^i}) = \dim(V_1)$$

und $\dim(V_1) = [\mu_n : B]$ denn $n = \dim(L) = |B| \cdot \dim(V_1)$. Es ist

$$V_1 = \{x \in L \mid \sigma(x) = x\} = L^{(\sigma)} = L^G = K$$

also $\dim(V_1) = 1$ und somit $\mu_n = B$ und $\dim(V_\zeta) = 1$ für alle $\zeta \in \mu_n$. Sei $\zeta_n \in \mu_n$ primitiv. Wähle $b \in V_{\zeta_n}$ mit $b \neq 0$. Es ist $\langle b^i \rangle = V_{\zeta_n^i}$ somit erzeugen $1, b, \dots, b^{n-1}$ den K -Vektorraum L . Also ist $L = K(b)$. Es ist $\sigma(b) = \zeta_n b$ also $\sigma(b^n) = b^n$ und somit ist $a = b^n \in L^G = K$. Das zeigt: b ist Nullstelle von $X^n - a \in K[X]$ \square

Lemma 3.132. Die Komposition von Radikalerweiterungen ist eine Radikalerweiterung.

Beweis. Seien $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r$ und $K = L_0 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_n$ Ketten von einfachen Radikalerweiterungen. Dann ist $K = K_0 \subseteq \dots K_r = K_r L_0 \subseteq K_r L_1 \subseteq \dots \subseteq K_r L_n$ Kette von einfachen Radikalerweiterungen, denn wenn $L_i = L_{i-1}(a_i)$ mit $a_i^n \in L_{i-1}$ dann ist $K_r L_i = K_r L_{i-1}(a_i)$ und $a_i^n \in K_r L_{i-1}$ \square

Lemma 3.133. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung in Charakteristik 0.

- (1) L/K ist Radikalerweiterung \implies normale Hülle von L/K ist Radikalerweiterung.
- (2) L/K ist auflösbar durch Radikale \iff normale Hülle von L/K ist auflösbar durch Radikale.

Beweis. 1): Sei $L = K(a)$ und seien $a = a_1, \dots, a_r \in \bar{K}$ die Nullstellen vom Minimalpolynom von a . Also ist die normale Hülle gegeben durch $M = K(a_1) \cdots K(a_r)$. Es ist $K(a_i) \cong K(a)$ Radikalerweiterung über K . Nach Section 3.10 ist also M/K eine Radikalerweiterung.

2): Sei $L = K(a_1)/K$ auflösbar durch Radikale, dh. es gibt L'/L sodass L'/K Radikalerweiterung ist. Sei M/K bzw M'/K die normale Hülle von L/K bzw L'/K . Dann ist $M \subseteq M'$. Nach 1) ist M'/K Radikalerweiterung also M/K auflösbar durch Radikale. Sei andersrum M/K die

normale Hülle von L/K und M/K auflösbar durch Radikale, dh. Es gibt M'/M sodass M'/K Radikalerweiterung. Dann ist L/K auflösbar durch Radikale nach Definition. \square

Satz 3.134. Sei L/K endliche Körpererweiterung in Charakteristik 0 und M/K eine normale Hülle. Dann ist L/K auflösbar durch Radikale $\iff L/K$ auflösbar.

Beweis. Nach Lemma 3.133 ist ohne Einschränkung L/K Galois. Sei $n = [L : K]$ und $K' = K(\mu_n)$ und $L' = L(\mu_n)$. Da L/K Galois ist L'/K' Galois und L'/K Galois. Es sind $\text{Gal}(K'/K)$ und $\text{Gal}(L'/L)$ abelsch, insbesondere auflösbar. Es ist

$$\text{Gal}(L/K) \cong \text{Gal}(L'/K) / \text{Gal}(L'/L)$$

und $\text{Gal}(L'/K) / \text{Gal}(L'/K') \cong \text{Gal}(K'/K)$. Also ist

$$\begin{aligned} \text{Gal}(L/K) \text{ auflösbar} &\iff \text{Gal}(L'/K) \text{ auflösbar} \\ &\iff \text{Gal}(L'/K') \text{ auflösbar} \end{aligned}$$

und K'/K und L'/L sind Radikalerweiterungen. Somit ist L/K auflösbar durch Radikale $\iff L'/K'$ auflösbar durch Radikale. Somit ist ohne Einschränkung $L = L'$ und $K = K'$. Sei L/K auflösbar. Wähle Normalreihe in $\text{Gal}(L/K)$ mit primzyklischen Quotienten. Das entspricht $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n = L$ mit K_i/K_{i-1} Galois und $\text{Gal}(K_i/K_{i-1}) \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$. Satz 3.131 impliziert, dass K_i/K_{i-1} eine einfache Radikalerweiterung ist. Somit ist L/K eine Radikalerweiterung. Insbesondere ist L/K auflösbar durch Radikale.

Sei andersrum L/K auflösbar durch Radikale. Es gibt L'/L , sodass L'/K Radikalerweiterung ist. Ohne Einschränkung ist L'/K Galois. Es gibt Kette $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n = L'$ sodass K_i/K_{i-1} einfache Radikalerweiterung ist. Behauptung: $\text{Gal}(L'/K)$ ist auflösbar. Dann ist $\text{Gal}(L/K)$ als Quotient von $\text{Gal}(L'/K)$ auch auflösbar. Lemma 3.129 impliziert, dass K_i/K_{i-1} Galois ist mit zyklischer Galoisgruppe. Die Körperkette entspricht Kette von Untergruppen in $\text{Gal}(L'/K)$. Das ist eine abelsche Normalreihe. \square

Korollar 3.135. Jede Gleichung von Grad ≤ 4 in Charakteristik 0 ist durch Radikale auflösbar, dh. $f \in K[X]$ mit $\deg(f) \leq 4$ und L/K Zerfällungskörper von f , dann ist $G = \text{Gal}(L/K)$ auflösbar.

Beweis. Haben injektiven Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow S_4$. Da S_4 auflösbar ist, ist G auflösbar. \square

Satz 3.136. Für jede endliche Gruppe G gibt es eine Galoiserweiterung L/K in Charakteristik 0 mit $G = \text{Gal}(L/K)$.

Beweis. Wähle $G \rightarrow S_n$ injektiv mit $|n| = G$. Wenn L/K' existiert mit $\text{Gal}(L/K') = S_n$ dann gilt für $K = L^G$ dass $\text{Gal}(L/K) = G$ ist. S_n operiert auf $L = \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_n)$ durch Permutation der Variablen. Das gibt Homomorphismus $S_n \rightarrow \text{Aut}(L)$ der injektiv ist. Der Körper $K = L^{S_n}$ gibt $\text{Gal}(L/K) = S_n$. \square

Bemerkung 3.137. S_5 ist nicht auflösbar.

Bemerkung 3.138.

- (1) Es gibt eine Definition von Auflösbar durch Radikale in beliebiger Charakteristik, für die der letzte Satz gilt
- (2) Frage: Wenn K gegeben, welche Gruppen G sind als Galoisgruppen über K realisierbar, dh. gibt es L/K Galois mit $\text{Gal}(L/K) = G$.
 - (a) $K = \mathbb{R}$ Dann ist $G = \{1\}$ und $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ möglich.
 - (b) Wenn K endlich ist: Genau die zyklischen Gruppen sind möglich, denn

$$\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q) \cong \langle Fr \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

- (c) $K = \mathbb{Q}$ Frage ist offen. $G = S_p$ nach Übungsaufgabe? $G = S_n$ möglich (Hilbert).

Satz 3.139. Es gibt Gleichungen vom Grad 5 die nicht auflösbar sind

Beweis. S_5 ist Galoisgruppe von M/\mathbb{Q} für ein M/\mathbb{Q} Galois. Es ist $H = S_4 = \text{Stab}(1) \subseteq S_5$ also $[G : H] = 5$ und somit $[M^H : K] = 5$. Es ist $M = K(a)$ für ein a . Die normale Hülle von M^H/K entspricht nach Galois-Korrespondenz $\bigcap_{g \in S_5} gHg^{-1} = \{e\}$, also ist M/K die normale Hülle von $M^H = \mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}[X]/(f)$ wobei f das Minimalpolynom von a ist. Damit ist S_5 Galoisgruppe von f und S_5 ist nicht auflösbar. Es ist $\deg(f) = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 5$ \square

4. KOMMUTATIVE ALGEBRA

Definition 4.1. testtest hallo Ein Ring R heißt Integritätsbereich (oder nullteilerfrei), wenn $R \neq 0$ und $ab = 0 \implies a = 0$ oder $b = 0 \forall a, b \in R$.

Lemma 4.2. Sei R ein kommutativer Ring.

- (1) Ein Ideal $I \subseteq R$ ist ein Primideal $\iff R/I$ ist Integritätsbereich.
- (2) R ist ein Körper $\iff R$ hat genau zwei Ideale $\{0\}$ und R .
- (3) Ein Ideal $I \subseteq R$ ist maximal $\iff R/I$ ist ein Körper.

Beweis. 1) ist klar. Zeige 2). Wenn R ein Körper ist und $I \subsetneq \{0\}$ ein Ideal, dann gibt es $x \in I$ mit $x \neq 0$. Dann ist $1 = x^{-1}x \in I$, also ist $I = R$. Andersrum zeige, dass $x \neq 0$ invertierbar ist. Es ist $R = (x)$ also gibt es Inverses. Zeige 3). $I \subseteq R$ ist maximal $\iff R/I$ hat genau zwei Ideale $\{0\}, R/I \iff R/I$ ist Körper. \square

Lemma 4.3. Seien R_1, R_2 Ringe und $R = R_1 \times R_2$. Jedes Ideal von R hat die Form $I = I_1 \times I_2$ wobei $I_1 \subseteq R_1$ und $I_2 \subseteq R_2$ Ideale sind. I ist genau dann prim wenn entweder I_1 prim und $I_2 = R_2$ oder $I_1 = R_1$ und I_2 prim ist. Folglich ist $\text{Spec}(R) = \text{Spec}(R_1) \amalg \text{Spec}(R_2)$.

Beweis. Die erste Behauptung ist klar. Es ist $R/I \cong R_1/I_1 \times R_2/I_2$ und I ist prim, genau dann wenn R/I nullteilerfrei ist. Da $(a, 0) \cdot (0, b) = (0, 0)$ ist, ist das genau dann der Fall, wenn eines der $I_j = R_j$ ist und das andere prim. \square

Satz 4.4. Sei R ein kommutativer Ring, $R \neq 0$. Dann hat R ein maximales Ideal.

Beweis. Sei M die Menge aller Ideale $I \subseteq R$ mit $I \neq R$ und sei $M' \subseteq M$ eine totale geordnete Teilmenge. Ohne Einschränkung ist $(0) \in M'$. Sei

$$J = \bigcup_{I \in M'} I.$$

Dann ist J ein Ideal mit $1 \notin J$ also $J \in M$. Das ist eine obere Schranke für M' . Also hat M ein maximales Element nach Lemma von Zorn. \square

Definition 4.5. Sei R ein kommutativer Ring. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben sodass $(n) = \ker(\mathbb{Z} \rightarrow R)$. Dann heißt n die Charakteristik von R . Wenn R nullteilerfrei ist, dann ist $n = 0$ oder n eine Primzahl.

Definition 4.6. Ein Ring R heißt lokal, wenn es genau ein maximales Ideal gibt.

Satz 4.7. Sei $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ein Ideal. Es ist äquivalent:

- (1) R ist lokal mit maximalem Ideal \mathfrak{m}
- (2) $\forall a \in R \setminus \mathfrak{m} : a \in R^*$
- (3) \mathfrak{m} ist maximales Ideal und jedes Element $a = 1 + m$ mit $m \in \mathfrak{m}$ ist eine Einheit.

Beweis. Gelte 1. Wenn a keine Einheit, dann ist a in einem maximalen Ideal enthalten. Also in \mathfrak{m} . Gelte 3. Sei $a \notin \mathfrak{m}$ das heißt $a + \mathfrak{m}$ ist Einheit in R/\mathfrak{m} . Also gibt es x sodass $ax + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$ also ist $1 = ax + m$ für ein $m \in \mathfrak{m}$. Dann ist $ax \in R^*$ also auch a . \square

Lemma 4.8. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist lokal genau dann wenn $n = p^r$ für eine Primzahl p und $r > 1$.

Beweis. Sei $n = p^r$. Primideale in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sind Primideale in \mathbb{Z} die $n\mathbb{Z}$ enthalten. Das ist nur (p) . Also ist der Ring lokal. Andersrum wenn $n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ die Primfaktorzerlegung von n ist mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ dann korrespondiert mit selber Begründung jedes (p_i) zu einem maximalen Ideal in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. \square

4.1. Euklidische Ringe, Hauptidealringe und faktorielle Ringe.

Definition 4.9. Sei R ein Ring. R ist Euklidisch wenn R ein Integritätsbereich ist und es eine Abbildung $\delta: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt sodass für $a, q \in R$ mit $q \neq 0$ es $b, c \in R$ gibt mit $a = bq + c$ und $\delta(x) < \delta(q)$ oder $c = 0$.

Definition 4.10. Ein Ring R ist ein Hauptidealring, wenn R ein Integritätsbereich ist und jedes Ideal ein Hauptideal ist.

Satz 4.11. Jeder Euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

Beweis. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal, $I \neq \{0\}$. wähle $q \in I$ sodass $\delta(q)$ minimal ist. Dann ist $I = (q)$. \square

Beispiel 4.12. $R = \mathbb{Z}[X]$ ist kein Hauptidealring, also auch nicht Euklidisch. Denn $(2, X)$ ist kein Hauptideal.

Definition 4.13. Sei R nullteilerfrei und $a \in R$. Wir nennen $a \in R$ Primelement, wenn $\{0\} \subsetneq (a) \subsetneq R$ ist und wenn für alle $b, c \in R$ mit $a \mid bc$ folgt, dass $a \mid b$ oder $a \mid c$.

Wir nenne $a \in R$ irreduzibel, wenn $\{0\} \subsetneq (a) \subsetneq R$ und für alle $b, c \in R$ folgt, dass $b \in R^*$ oder $c \in R^*$.

Bemerkung 4.14. Es gilt $a \in R$ prim $\implies a \in R$ irreduzibel und wenn $\{0\} \subsetneq (a)$ ist, dann ist a prim $\iff (a)$ Primideal ist.

Beweis. Sei $a \in R$ prim und $a = bc$ für $b, c \in R$. Dann ist $a \mid b$ oder $a \mid c$. Wenn $a \mid b$ dann ist $b = ad = bcd$. Da $b \neq 0$ und R nullteilerfrei ist, ist $1 = cd$ und $c \in R^*$. \square

Lemma 4.15. Sei R nullteilerfrei und $a \in R$ mit $a \neq 0$. Es gilt

$$a \text{ ist irreduzibel} \iff (a) \text{ ist maximal unter Hauptidealen} \neq R.$$

Beweis. Das ist eine direkte Übersetzung der Eigenschaft irreduzibel zu sein. \square

Definition 4.16. Ein faktorieller Ring R ist ein Integritätsbereich R , sodass jedes $a \in R$ mit $\{0\} \subsetneq (a) \subsetneq R$ eine Darstellung $a = p_1 \cdots p_r$ hat mit $r \in \mathbb{N}$ und p_i Primelementen. Die Darstellung ist automatisch eindeutig bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit.

Lemma 4.17. Sei R ein Integritätsbereich.

$$\begin{aligned} R \text{ ist faktoriell} &\iff \text{Jedes irreduzible Element von } R \text{ ist prim und} \\ &\quad \text{Jedes } a \in R \text{ mit } \{0\} \subsetneq (a) \subsetneq R \text{ ist Produkt von} \\ &\quad \text{irreduziblen Elementen} \end{aligned}$$

Beweis. Sei R faktoriell und $a \in R$ irreduzibel. Sei $a = p_1 \cdots p_r$ mit Primelementen p_i . Da a irreduzibel ist, ist $p_1 \in R^*$ oder $p_2 \cdots p_r \in R^*$. Da beides nicht der Fall ist, muss $a = p_1$ prim sein. \square

Satz 4.18. Jeder Hauptidealring R ist faktoriell. Für $a \in R$ prim ist $R/(a)$ ein Körper.

Beweis. Zeige: Jedes irreduzible $a \in R$ ist prim. Es gilt

$$\begin{aligned} a \text{ ist irreduzibel} &\iff (a) \text{ ist maximal unter echten Hauptidealen} \\ &\stackrel{R \text{ HIR}}{\iff} (a) \text{ ist maximales Ideal} \\ &\iff R/(a) \text{ ist Körper} \\ &\implies a \text{ ist Primelement.} \end{aligned}$$

Sei $n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ die Primfaktorzerlegung in paarweise verschiedene Primzahlen. Dann ist nach ?? $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \prod \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$ und nach Lemma 4.3 haben maximale Ideale die Form $\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathfrak{m}_i \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{e_s}\mathbb{Z}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$. Da Primideale von $\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$ den Primidealen in \mathbb{Z} entsprechen, die $(p_i^{e_i})$ enthalten, folgt, dass der Ring lokal ist. also folgt die Aussage. \square

Lemma 4.19. *Es Sei R ein Ring und $I, J \subseteq R$ beliebige Ideale und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Dann gilt $IJ \subseteq \mathfrak{p} \implies I \subseteq \mathfrak{p}$ oder $J \subseteq \mathfrak{p}$*

Beweis. Wenn $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ dann gibt es $x \in I \setminus \mathfrak{p}$. Für $y \in J$ gilt dann $xy \in \mathfrak{p}$ also $y \in \mathfrak{p}$ \square

Korollar 4.20. *Für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ hat der Ring R/\mathfrak{m}^n genau ein Primideal und ist insbesondere lokal.*

Beweis. Primideale in R/\mathfrak{m} entsprechen den Primidealen \mathfrak{m}' in R mit $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{m}'$. Nach Lemma 4.19 folgt $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$ also $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. \square

Beispiel 4.21. Es sei R der Ring der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathfrak{m}_x = \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal von R , denn betrachte Abbildung $eval_x : R \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$. Das ist surjektiv mit $\ker(eval_x) = \mathfrak{m}_x$. da \mathbb{R} ein Körper ist, ist folgt die Behauptung. Weiter ist die Menge I aller $f \in R$ mit kompaktem Träger ein echtes Ideal von R , das in keinem \mathfrak{m}_x enthalten ist, denn definiere

$$f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \begin{cases} y - (x - 1), & y \in [x - 1, x] \\ -y + x + 1, & y \in [x, x + 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

. Dann ist f_x stetig mit kompaktem Träger $K = [x - 1, x + 1]$ also ist $f_x \in I$. Da aber $f_x(x) = 1$ folgt $I \not\subseteq \mathfrak{m}_x$. Also hat R maximale Ideale die nicht von der Form \mathfrak{m}_x sind.

Definition 4.22. Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikative Menge, das heißt $1 \in S$ und $s, s' \in S$ impliziert $ss' \in S$. Definiere Äquivalenzrelation auf $R \times S$ durch

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists t \in S : (as' - a's)t = 0$$

. Notation: $R_S = S^{-1}R = (R \times S)/\sim$ und schreibe $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse $[(a, s)]$. $S^{-1}R$ wird Ring durch

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} &= \frac{at + bs}{st} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} &= \frac{ab}{st} \end{aligned}$$

$S^{-1}R$ heißt Lokalisierung von R mit S . Es gibt Ringhomomorphismus $\tau : R \rightarrow S^{-1}R, a \mapsto \frac{a}{1}$. Es ist $\ker(\tau) = \{a \in R \mid \exists s \in S : as = 0\}$ und $S^{-1}R \neq 0 \iff 0 \notin S$ und τ ist bijektiv wenn $S \subseteq R^*$. Wenn R ein Integritätsbereich ist, dann ist $S = R \setminus \{0\}$ multiplikativ und wir definieren $\text{Quot}(R) = S^{-1}R$. Das ist ein Körper. Wenn $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein primideal ist, dann ist $S = R \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ. Definiere $R_{\mathfrak{p}} = S^{-1}R$.

Satz 4.23. *Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ. Dann existiert ein kommutatives Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subseteq R \text{ Ideal}, S \cap \mathfrak{a} = \emptyset\} & \xrightarrow{\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}S^{-1}R} & \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \subseteq S^{-1}R \text{ Ideal}\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \subseteq R \text{ Primideal}, S \cap \mathfrak{p} = \emptyset\} & \xrightarrow{\sim} & \{\mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \subseteq S^{-1}R \text{ Primideal}\} \end{array}$$

Beweis. Angenommen $\frac{a}{s} = 1$ für $a \in \mathfrak{a}$ und $s \in S$. Das heißt $\exists t \in S$ sodass $(a - s)t = 0$ also $at = ts \in S$. Dann ist aber $at \in \mathfrak{a} \cap S$. wenn $\mathfrak{b} \subseteq S^{-1}R$ ein Ideal ist, definiere $\mathfrak{a} = \tau^{-1}(\mathfrak{b})$. Dann ist $\mathfrak{a}S^{-1}R = \mathfrak{b}$ und $S \cap \mathfrak{a} = \emptyset$. Wenn $\mathfrak{p} \subseteq R$ prim ist mit $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ dann ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}S^{-1}R$ prim, denn wenn $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'} \in S^{-1}R$ mit $\frac{aa'}{ss'} = \frac{b}{t} \in \mathfrak{q}$ mit $b \in \mathfrak{p}$ dann ist

$$(aa't - ss'b)r = 0$$

für ein $r \in S$ also $aa't \in \mathfrak{p}$. Dann ist $a \in \mathfrak{p}$ oder $a' \in \mathfrak{p}'$ also $\frac{a}{s} \in \mathfrak{q}$ oder $\frac{a'}{s'} \in \mathfrak{q}$. Wenn \mathfrak{p} prim ist, dann ist $\mathfrak{p} = \tau^{-1}(\mathfrak{p}S^{-1}R)$ denn wenn $x \in \mathfrak{p}$ sodass $\frac{x}{1} = \frac{a}{s}$ für ein $a \in \mathfrak{p}$ dann folgt wie oben dass $x \in \mathfrak{p}$. Wenn $\mathfrak{q} \subseteq S^{-1}R$ prim ist, dann ist $\tau^{-1}(\mathfrak{q})$ prim. Somit ist untere Abbildung Bijektion. \square

Beispiel 4.24. Sei $R = \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{a} = (2)$ sowie $\mathfrak{a}' = (6)$ und $S = \{1, 3, 3^2, 3^3, \dots\}$. Dann ist $\mathfrak{a}S^{-1}\mathbb{Z} = \{\frac{2x}{3^n} \mid x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathfrak{a}'S^{-1}\mathbb{Z} = \{\frac{6y}{3^m} \mid y \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\} = \mathfrak{a}S^{-1}\mathbb{Z}$.

Korollar 4.25. $\tau: R \rightarrow S^{-1}R$ induziert Isomorphismus

$$\text{Spec}(S^{-1}R) \rightarrow \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R \mid \mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset\}. \mathfrak{q} \mapsto \tau^{-1}(\mathfrak{q})$$

Korollar 4.26. Für alle $\mathfrak{p} \subseteq R$ prim ist $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$

Beweis. $R_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ besteht aus Einheiten. □

Satz 4.27 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung). *Es ist $\tau(S) \subseteq (S^{-1}R)^*$. Wenn $\varphi: R \rightarrow R'$ Ringhomomorphismus ist, dann gilt $\varphi(S) \subseteq (R')^*$ genau dann, wenn es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\varphi': S^{-1}R \rightarrow R'$ gibt sodass $\varphi = \varphi' \circ \tau$.*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & R' \\ \tau \downarrow & \nearrow \varphi' & \\ S^{-1}R & & \end{array}$$

Wenn $\varphi: R \rightarrow R'$ dieselbe Eigenschaft erfüllt wie τ , dann ist φ' Isomorphismus.

Beweis. Definiere $\varphi'(\frac{a}{s}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$. Prüfe dass das wohldefiniert und eindeutig ist. Angenommen τ, φ sind beide universell, das heißt es existiert $\varphi': S^{-1}R \rightarrow R'$ mit $\varphi = \varphi' \circ \tau$ und $\tau': R' \rightarrow S^{-1}R$ mit $\tau = \tau' \circ \varphi$. Dann ist

$$\text{id}_{R'} \circ \varphi = \varphi' \circ \tau = (\varphi' \circ \tau') \circ \varphi$$

also $\text{id}_{R'} = \varphi' \circ \tau'$ wegen Eindeutigkeit. Analog ist $\text{id}_{S^{-1}R} = \tau' \circ \varphi'$ □

Lemma 4.28. Sei R ein Ring und $F = (f_i)_{i \in I}$ eine Familie in R und $S \subseteq R$ eine multiplikative Menge von F erzeugt. Seien Variablen $T = (t_i)_{i \in I}$ gegeben. Dann existiert ein Isomorphismus

$$R_S \rightarrow R[T]/(1 - f_i t_i \mid i \in I)$$

Inbesondere ist $R_f \cong R[X]/(1 - fX)$

Beweis. Sei $\varphi: R \rightarrow R'$ Ringhomomorphismus sodass $\varphi(S) \subseteq (R')^*$. Definiere $\tilde{\varphi}: R[T] \rightarrow R'$ durch φ und $t_i \mapsto \varphi(f_i)^{-1}$. Dann ist $\ker(\tilde{\varphi}) = (1 - f_i t_i \mid i \in I)$ was $\varphi': R[T]/(1 - f_i t_i \mid i \in I) \rightarrow R'$ induziert sodass $\varphi = \varphi' \circ \tau$ wobei $\tau: R \rightarrow R[T]/(1 - f_i t_i \mid i \in I)$. φ' ist eindeutig da $1 = \varphi'(f_i t_i) = \varphi(f_i)\tilde{\varphi}(t_i)$ ist. Also gibt es Isomorphismus nach Satz 4.27 □

Satz 4.29. Seien $f, g \in R$ und $d, e \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 1$. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{fg} & \xrightarrow{\sim} & (R_f)_{f^{-e}g^d} \end{array}$$

Beweis. Die Abbildung $R \rightarrow R_f \rightarrow (R_f)_{f^{-e}g^d}$ schickt f, g und somit fg auf Einheiten. Das gibt $R_{fg} \rightarrow (R_f)_{f^{-e}g^d}$ $R \rightarrow R_{fg}$ schickt f auf Einheit, das gibt also $R_f \rightarrow R_{fg}$ und der schickt $f^{-e}g^d$ auf eine Einheit. Das gibt $(R_f)_{f^{-e}g^d} \rightarrow R_{fg}$ invers zu oben. □

Satz 4.30. Sei \mathfrak{p} Primideal, $f \in R \setminus \mathfrak{p}$. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\sim} & (R_f)_{\mathfrak{p}R_f} \end{array}$$

Beweis. Analog wie in Satz 4.29 □

Beispiel 4.31. Es gibt Isomorphismus $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[3^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und jeder Zwischenring $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$ ist eine Lokalisierung von \mathbb{Z} .

Beweis. Sei $\varphi: \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Einheiten von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind 1, 5, 7, 11 und diese gehen auf Einheiten in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Sei $\tau': \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}[3^{-1}]$, $x + 4\mathbb{Z} \mapsto \frac{x+12\mathbb{Z}}{1}$. Das ist wohldefiniert wie man prüft und τ' ist eindeutig sodass $\tau' \circ \varphi = \tau$. also ist beides Isomorph. Sei $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$ Zwischenring und S die multiplikative Menge erzeugt von allen Primzahlen p sodass $\frac{1}{p} \in R$. Dann ist $S^{-1}\mathbb{Z} \subseteq R$. Sei $\frac{a}{b} \in R$ mit a, b teilerfremd. sei p eine Primzahl mit $p \mid b$. Dann ist $\frac{a}{p} \in R$ und da a, p teilerfremd, gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$ sodass $1 = ma + np$ ist. Also ist

$$\frac{1}{p} + n = \frac{ma}{p} \in R$$

also ist $\frac{1}{p} \in R$. Dann ist $\frac{1}{b} \in S^{-1}R$ und somit $\frac{a}{b} \in S^{-1}\mathbb{Z}$. □

Definition 4.32. Sei R ein Ring und $j(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Specm}(R)} \mathfrak{m}$ das Jacobson Radikal von R . Wenn $R = \{0\}$ dann setze $j(R) = \{0\}$. Es ist $j(R)$ maximal genau dann wenn R lokal ist

Bemerkung 4.33. Für $a \in R$ ist äquivalent:

- (1) $a \in j(R)$
- (2) $1 - ab \in R^*$ für alle $b \in R$

Beweis. Angenommen $1 - ab \in R^*$ für alle b . Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal. Setze $\mathfrak{n} = (a, \mathfrak{m})$. Wenn $a \notin \mathfrak{m}$ dann ist $\mathfrak{n} = R$ und es gibt $b \in R$ und $m \in \mathfrak{m}$ sodass $1 = ab + m$. Aber dann ist m eine Einheit. Also muss $a \in \mathfrak{m}$ sein für alle maximalen Ideal \mathfrak{m} . Also ist $a \in j(R)$. □

Definition 4.34. Sei $\text{rad}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} \mathfrak{p}$ das Nilradikal. R heißt reduziert, wenn $\text{rad}(R) = 0$.

Satz 4.35. $\text{rad}(R) = \{a \in R \mid a \text{ nilpotent}\}$

Beweis. Sei a nicht nilpotent. Dann ist $0 \notin S = 1, a, a^2, \dots$ also $S^{-1}R \neq 0$. Das heißt es gibt ein maximales Ideal in $S^{-1}R$ das zu Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ korrespondiert mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Das heißt $a \notin \mathfrak{p}$ und $a \notin \text{rad}(R)$. Die andere Inklusion ist klar. □

Lemma 4.36. Es ist äquivalent:

- (1) R hat genau ein Primideal
- (2) $a \in R \implies a \in R^*$ oder a ist nilpotent
- (3) $R/\text{rad}(R)$ ist ein Körper

Beweis. klar. □

Definition 4.37. Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. $j(\mathfrak{a}) := \pi^{-1}(j(R/\mathfrak{a}))$ und $\text{rad}(\mathfrak{a}) = \pi^{-1}(\text{rad}(R/\mathfrak{a}))$ wobei $\pi: R \rightarrow R/\mathfrak{a}$ kanonische Abbildung.

Satz 4.38. sei K Körper. $j(K[X_1, \dots, X_n]) = 0$

Beweis. sei \bar{K} der algebraische Abschluss von K . Sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \bar{K}^n$$

. Betrachte

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid f(x) = 0\} = \ker(K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \bar{K}, g \mapsto g(x))$$

Die letzte Abbildung ist surjektiv auf den Körper $K(x_1, \dots, x_n)$ (Betrachte Minimalpolynom und dann modifiziere um Element zu erhalten). Also ist $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{m}_x \cong K(x_1, \dots, x_n)$ Körper und somit \mathfrak{m}_x maximales Ideal in $K[X_1, \dots, X_n]$. $f \in j(K[X_1, \dots, X_n])$ impliziert dass $f \in \mathfrak{m}_x$ ist also $f(x) = 0$ für alle $x \in \bar{K}^n$. Also ist f das Nullpolynom nach Induktion. □

Lemma 4.39 (Primvermeidung). Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Wenn $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale sind mit $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ dann ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ für ein i .

Beweis. Induktion: $n = 1$ ist klar. Gelte die Behauptung für $n - 1$. Angenommen $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ für alle i . Das heißt es gibt $f_i \in \mathfrak{a}$ mit $f_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ und $f_i \in \mathfrak{p}_i$. Es ist $f_1 + f_2 \cdots f_n \in \mathfrak{a}$ aber $f_1 + f_2 \cdots f_n \notin \mathfrak{p}_1$ und $f_1 + f_2 \cdots f_n \notin \mathfrak{p}_i$ für $i \geq 2$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ für ein i . Also folgt die Aussagen mit Induktion. \square

Lemma 4.40 (Nakayama). Sei $I \subseteq R$ ein Ideal mit $I \subseteq j(R)$. Sei M ein endlich erzeugter R -Modul. Es gilt:

- (1) Wenn $IM = M$ ist dann ist $M = 0$.
- (2) Wenn $N, N' \subseteq M$ und $M = N + IN'$ wobei N' endlich erzeugt dann ist $M = N$.
- (3) Wenn $N \rightarrow M$ eine Abbildung sodass $N/IN \rightarrow M/IM$ surjektiv ist dann ist $N \rightarrow M$ surjektiv.
- (4) Wenn $x_1, \dots, x_n \in M$ M/IM erzeugen dann erzeugen x_1, \dots, x_n schon M .

Beweis. Angenommen $M \neq 0$. Da M endlich erzeugt ist, betrachte minimales Erzeugendensystem $x_1, \dots, x_n \in M$. Da $\mathfrak{a}M = M$ gilt, ist $x_n = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ für $a_i \in \mathfrak{a}$. Dann ist $(1 - a_n)x_n = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ und da $(1 - a_n)$ eine Einheit ist, folgt x_n ist im Erzeugnis von (x_1, \dots, x_{n-1}) was ein Widerspruch ist. Das zeigt 1. Wenn N' endlich erzeugt ist, dann auch M/N . Anwenden von 1 auf M/N liefert die Aussage. Es ist $M = \text{im}(N \rightarrow M) + IM$ und nach 2. folgt, dass $M = \text{im}(N \rightarrow M)$. Sei $R^n \rightarrow M, (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Nach 3. folgt, dass die Abbildung surjektiv ist also gilt 4. \square

Definition 4.41. Eine partiell geordnete Menge Σ hat die aufsteigende Kettenbedingung, falls jede Kette $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_k \leq \dots$ irgendwann stationär wird.

Lemma 4.42. Sei Σ partiell geordnet. Σ hat die aufsteigende Ketten-Bedingung genau dann wenn für alle $S \subseteq \Sigma$ mit $S \neq \emptyset$ gilt, dass S ein maximales Element hat.

Beispiel 4.43. Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums oder Ideale in \mathbb{Z} erfüllen aufsteigende Kettenbedingung.

Satz 4.44. Sei A ein Ring. Es ist äquivalent:

- (1) Die Menge Σ der Ideale von A hat die aufsteigende Ketten-Bedingung.
- (2) Jede nicht-leere Menge $S \subseteq \Sigma$ hat ein maximales Element
- (3) Jedes Ideal $I \in \Sigma$ ist endlich erzeugt.

In dem Fall heißt A noethersch.

Beweis. Zeige 3 nach 1. Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ Kette von Idealen. Dann ist $I = \bigcup_k I_k$ endlich erzeugt, $I = (f_1, \dots, f_n)$ dann ist $f_1, \dots, f_n \in I_k$ für ein k und somit wird Kette stationär nach k . \square

Satz 4.45. Sei M ein A -Modul. Es ist äquivalent:

- (1) Die Menge Σ der Untermoduln von M hat die aufsteigende Ketten-Bedingung.
- (2) Jede nicht-leere Menge $S \subseteq \Sigma$ hat ein maximales Element
- (3) Jeder Untermodul $N \in \Sigma$ ist endlich erzeugt.

In dem Fall heißt M noethersch.

Satz 4.46. Sei M ein A -Modul. Es ist äquivalent:

- (1) Die Menge Σ der Untermoduln von M hat die absteigende Ketten-Bedingung.
- (2) Jede nicht-leere Menge $S \subseteq \Sigma$ hat ein minimales Element
- (3) Für Jede Familie $\{M_i\}_{i \in I}$ von Untermoduln gibt es $I_0 \subseteq I$ endlich sodass

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I_0} M_i$$

In dem Fall heißt M artinsch.

Beweis. Zeige 1 nach 3. Wähle $i_1 \in I$ sodass $M_{i_1} \neq \bigcap_{i \in I} M_i$ (falls möglich). Für M_{i_1}, \dots, M_{i_k} gegeben wähle $M_{i_{k+1}}$ so, dass $\bigcap_{j=1}^{k+1} M_{i_j} \neq \bigcap_{j=1}^k M_{i_j}$. Das gibt $M_{i_1} \supsetneq M_{i_1} \cap M_{i_2} \supsetneq \dots$. Also gibt es ein k sodass $\bigcap_{j=1}^k M_{i_j} \neq \bigcap_{i \in I} M_i$. Sei $I_0 = \{i_1, \dots, i_k\}$. \square

Lemma 4.47. Sei $0 \rightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von A -Moduln und $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M$ Untermoduln. Es gilt

$$L \cap M_1 = L \cap M_2 \text{ und } \beta(M_1) = \beta(M_2) \implies M_1 = M_2$$

Satz 4.48. Sei $0 \rightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von A -Moduln. Dann ist

$$M \text{ noethersch} \iff M \text{ und } L \text{ noethersch}$$

Beweis. Angenommen $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ ist aufsteigende Kette von Untermoduln von M . Das gibt aufsteigende Ketten $L \cap M_1 \subseteq L \cap M_2 \subseteq \dots$ und $\beta(M_1) \subseteq \beta(M_2) \subseteq \dots$ in L und N . Beide Ketten werden stationär. Nach Lemma 4.47 wird also die ursprüngliche Kette stationär. \square

Korollar 4.49. (1) M_i noethersch impliziert $\bigoplus_{i=1}^r M_i$ noethersch.

(2) Wenn A noetherscher Ring dann ist A -Module M noethersch genau dann wenn M endlich ist über A .

(3) sei A noetherscher Ring und $\varphi: A \rightarrow B$ Ringhomomorphismus sodass B endlicher A -Modul ist. Dann ist B noetherscher Ring.

Beweis. Zeige 2. sei M endlich erzeugt von f_1, \dots, f_r und $A^r \rightarrow M$ surjektiv mit

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 f_1 + \dots + a_n f_n.$$

Sei N der Kern. Das gibt exakte Sequenz $0 \rightarrow N \rightarrow A^r \rightarrow M \rightarrow 0$ und nach 1 ist A^r noethersch also auch M . \square

Satz 4.50 (Hilbert Basis Theorem). Sei A Ring. Dann ist $A[X]$ noethersch genau dann wenn A noethersch ist.

Beweis. Sei A noethersch. Sei $I \subseteq A[X]$. Definiere

$$J_n = \{a \in A \mid \exists f \in I: f = aX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_0\}.$$

J_n ist Ideal da I Ideal ist. Es ist $J_n \subseteq J_{n+1}$ und da A noethersch ist, ist $J_n = J_{n+1} = \dots$ für ein n . Für $m \leq n$ ist $J_m \subseteq A$ endlich erzeugt, $J_m = (a_{m,1}, \dots, a_{m,r_m})$. Sei $f_{m,j} \in I$ mit Leitkoeffizient $a_{m,j}$. Dann erzeugt $\{f_{m,j}\}_{\substack{m \leq n \\ 1 \leq j \leq r_m}}$ das Ideal I . Sei nämlich $f \in I$ vom Grad m

und a der Leitkoeffizient von f , $a \in J_m$. Wenn $m \geq n$ dann ist $a \in J_n$ sodass $a = \sum b_i a_{n,i}$ für $b_i \in A$ und $f - \sum b_i X^{m-n} f_{n,i}$ hat Grad $< n$. Wenn $m \leq n$ dann ist $a \in J_m$ sodass $a = \sum b_i a_{m,i}$ für $b_i \in A$ und $f - \sum b_i f_{m,i}$ hat Grad $< m$. Mit Induktion folgt die Behauptung. Sei $A[X]$ noethersch. Dann ist $0 \rightarrow K \rightarrow A[X] \rightarrow R \rightarrow 0$ exakt, wobei K der Kern ist von $X \mapsto 0$. Also ist A noethersch. \square

Lemma 4.51. Eine Lokalisierung von noetherschen Ringen ist noethersch.

Beweis. Klar, betrachte aufsteigende Kette die zu aufsteigender Kette im Ring korrespondiert. \square

Lemma 4.52. Wenn $I \subseteq R$ ein endlich erzeugtes Ideal ist mit $I^2 = 0$ und wenn R/I noethersch ist, dann ist R noethersch.

Beweis. I ist R/I Modul und da endlich erzeugt, ist I als R/I Modul noethersch. Das heißt jeder R/I -Untermodul $J \subseteq I$ ist endlich erzeugt und dann auch endlich erzeugt als R -Modul. Also ist I noetherscher R -Modul. Exakte Sequenz liefert, dass R noethersch ist da R/I endlicher R -Modul. \square

Lemma 4.53. Sei M noetherscher R -Modul. Zeigen Sie, dass jeder surjektive Endomorphismus $f: M \rightarrow M$ bijektiv ist.

Beweis. Sei $I_i = \ker(f^{(i)})$. Es ist $I_i \subseteq I_{i+1}$ also gibt es k sodass $I_k = I_{k+1}$. Da f jedoch surjektiv ist, folgt $\ker(f) = 0$ \square

Satz 4.54. Sei $S \subseteq R$ multiplikative Menge, M R -Modul. $\tau: M \rightarrow S^{-1}M, m \mapsto \frac{m}{1}$. Dann gilt

- (1) $\ker(\tau) = \{m \in M \mid \exists u \in S: um = 0\}$
- (2) Wenn M endlich erzeugt ist, dann ist $S^{-1}M = 0 \iff M$ wird annulliert von einem $M \in S$.

Beweis. Wähle Erzeuger und multipliziere deren Annihilatoren. \square

Lemma 4.55. $S^{-1}R \otimes_R M \rightarrow S^{-1}M, \frac{r}{u} \otimes m \mapsto \frac{rm}{u}$ ist ein Isomorphismus.

Satz 4.56 (Lokalisierung ist flach). Sei $\varphi: M \rightarrow N$ injektiv. $\frac{\varphi(x)}{s} = 0$ Dann gibt es $t \in S$ sodass $t\varphi(x) = \varphi(tx) = 0$ also ist $tx = 0$ und somit $\frac{x}{s} = 0$

Korollar 4.57 (Lokalisierung erhält endliche Schnitte). Seien $M_1, \dots, M_t \subseteq M$ Untermoduln. Dann ist $S^{-1}(\bigcap_i M_i) = \bigcap_i S^{-1}M_i$.

Beweis. Es ist exakt $0 \rightarrow \bigcap_i M_i \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_i M/M_i \rightarrow 0$ also auch

$$0 \rightarrow S^{-1}\bigcap_i M_i \rightarrow S^{-1}M \rightarrow \bigoplus_i S^{-1}M/S^{-1}M_i \rightarrow 0$$

und somit gilt die Aussage. \square

Definition 4.58. Eine Kompositionsreihe ist Kette $M = N_0 \supsetneq \dots \supsetneq N_n = 0$ sodass N_i/N_{i+1} keine echten Untermodule ungleich 0 hat.

Definition 4.59. Sei M ein R -Modul. Definiere $\text{length}(M)$ als das Minimum aller Längen einer Kompositionsreihe bzw als ∞ falls das nicht existiert.

Beispiel 4.60. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension n . Dann ist $n = \text{length}(V)$.

Lemma 4.61. Sei $M' \subsetneq M$ ein echter Untermodul, $\text{length}(M) = n < \infty$. Dann ist $\text{length}(M') < \text{length}(M)$

Beweis. Sei $M = M_0 \supsetneq \dots \supsetneq M_n = 0$ eine Kompositionsreihe. Es ist

$$(M' \cap M_i)/(M' \cap M_{i+1}) \cong (M' \cap M_i + M_{i+1})/M_{i+1} \subseteq M_i/M_{i+1}.$$

Also ist $(M' \cap M_i)/(M' \cap M_{i+1}) = 0$ oder $(M' \cap M_i)/(M' \cap M_{i+1})$ hat keine echten Untermoduln und $M' \cap M_i + M_{i+1} = M_i$. Letzteres gilt nicht für alle i , denn angenommen doch. Es ist $M_n = 0 \subseteq M'$ und angenommen $M_{i+1} \subseteq M'$. Dann ist $M' \cap M_i = M' \cap M_i + M_{i+1} = M_i$ also $M_i \subseteq M'$ und mit Induktion $M \subseteq M'$. Also kann $M' \supsetneq M' \cap M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M' \cap M_n = 0$ kann verändert werden durch Weglassen der Terme $M' \cap M_i$ sodass $M' \cap M_i = M' \cap M_{i+1}$. Das gibt $\text{length}(M') < \text{length}(M)$ \square

Lemma 4.62. sei $\text{length}(M) = n < \infty$ und $M = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \dots \supsetneq N_k$ Kette von Untermoduln. Dann ist $k \leq \text{length}(M)$.

Beweis. Induktion: $\text{length}(M) = 0 \implies M = 0 \implies k = 0$. Allgemein ist

$$\text{length}(N_1) < \text{length}(M)$$

also ist $k - 1 \leq \text{length}(N_1)$ und damit $k \leq \text{length}(M)$. \square

Korollar 4.63. $\text{length}(M)$ ist das maximal aller Längen einer Kette in M .

Korollar 4.64. Alle Kompositionsreihen haben die gleiche Länge

Satz 4.65. Sei M ein R -Modul.

$$\text{length}(M) < \infty \iff M \text{ ist artinsch und noethersch}$$

Beweis. Sei M artinsch und noethersch. Wähle maximalen Untermodul $M_1 \subsetneq M$ und maximalen Untermodul $M_2 \subsetneq M_1$ usw. Das gibt $M \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \dots$. Da M artinsch wird das stationär also $M_n = 0$ für ein n . Dann ist das Kompositionsreihe. Angenommen M hat endliche Länge n . Das heißt jede aufsteigende oder absteigende Kette bricht ab also ist M artinsch und noethersch. \square

Satz 4.66. *Sei M ein R -Modul. Es ist äquivalent:*

- (1) M hat keine echten Untermoduln $\neq 0$
- (2) $\text{length}(M) = 1$
- (3) $M \cong R/\mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$.

Beweis. Gelte a. sei $x \in M$ mit $x \neq 0$. $x \cdot R \neq 0 \implies xR = M$ also ist

$$0 \rightarrow \mathfrak{m} \rightarrow R \xrightarrow{x} M \rightarrow 0$$

exakt mit $\mathfrak{m} = \ker(x)$. Da $M \cong R/\mathfrak{m}$ keine echten Ideale hat, ist \mathfrak{m} maximal. \square

Satz 4.67. *Sei $\text{length}(M) < \infty$ und $M = M_0 \supsetneq \dots \supsetneq M_n = 0$ Kompositionsreihe. Es ist $M \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}}$ wobei die Summe über alle maximalen Ideale $\mathfrak{p} \subseteq R$ geht sodass $M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{p}$. Die Anzahl der M_i/M_{i+1} isomorph zu R/\mathfrak{p} ist $\text{length}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$.*

Beweis. Angenommen $\text{length}(M) = 1$. Dann ist $M \cong R/\mathfrak{p}$ für ein maximales Ideal \mathfrak{p} . Sei \mathfrak{q} ein maximales Ideal. Wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ dann ist $M_{\mathfrak{q}} = (R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}} = R/\mathfrak{p} = M$. Wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ dann ist $(R/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}} = 0$. Somit ist $(M_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}'} = 0$ für zwei verschiedene maximalen Ideale $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$. Allgemein für $\text{length}(M) = n$ gilt dass die Kompositionsreihe $M = M_0 \supsetneq \dots \supsetneq M_n = 0$ gibt $M_{\mathfrak{q}} = (M_0)_{\mathfrak{q}} \supsetneq \dots \supsetneq (M_n)_{\mathfrak{q}} = 0$ und $\text{length}(M_i/M_{i+1}) = 1$. Also ist

$$(M_i/M_{i+1})_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} M_i/M_{i+1}, & M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Behalte in Reihe nur die $(M_i)_{\mathfrak{q}}$ aus oberen Fall, das gibt Kompositionsreihe von $M_{\mathfrak{q}}$. Sei $\alpha: M \rightarrow \bigoplus M_{\mathfrak{p}}$ Summe der Lokalisierungsabbildungen. Sei $Q \subseteq R$ maximales Ideal. Es ist $\alpha_Q: M_Q \rightarrow (\bigoplus M_Q)_{\mathfrak{q}}$ die Identität für alle Q . \square

Satz 4.68. *Sei $\text{length}(M) < \infty$. Dann gilt*

$$M = M_{\mathfrak{p}} \iff M \text{ wird von einer Potenz von } \mathfrak{p} \text{ annulliert}$$

Beweis. Sei $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ maximales Ideal, $x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Dann ist $\frac{x}{1}M_{\mathfrak{q}} = M_{\mathfrak{q}}$ aber $x^n = 0$ für ein n , also $M_{\mathfrak{q}} = 0$. Nach Satz 4.67 folgt $M = M_{\mathfrak{p}}$. Sei andererseits $M \cong M_{\mathfrak{p}}$ und $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_n$ Kompositionsreihe, $M_i/M_{i+1} \cong R/\mathfrak{p}$. Es ist $\mathfrak{p}M = M = M_0$ und wenn $\mathfrak{p}^i M \subseteq M_i$ dann ist $\mathfrak{p}^{i+1}M \subseteq \mathfrak{p}M_i \subseteq M_{i+1}$. Nach Induktion ist also $\mathfrak{p}^n M \subseteq M_n = 0$. \square

Satz 4.69. *Sei R ein Ring. Es ist äquivalent:*

- (1) R ist noethersch und alle Primideale in R sind maximal
- (2) R ist als R -Modul von endlicher Länge
- (3) R ist artinsch.

Wenn das gilt, dann hat R nur endlich viele maximale Ideale.

Beweis. Gelte 1. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal maximal mit der Eigenschaft dass R/I keine endliche Länge hat. Dann ist I prim, denn seien $a \cdot b \in I$ und $a \notin I$. Haben exakte Sequenz

$$0 \rightarrow R/(I : a) \rightarrow R/I \rightarrow R/(I + (a)) \rightarrow 0$$

wobei $(I : a) = \{x \in R \mid ax \in I\}$. Da $I \subsetneq I + (a)$ hat $R/(I + (a))$ endliche Länge. Falls $b \notin I$ dann $I \subsetneq (I : a)$ also hat $R/(I : a)$ endliche Länge und damit auch R/I was nicht sein kann. Also ist I prim. Damit ist I maximal und somit R/I ein Körper. Ein Körper hat Länge = 1 was ein Widerspruch ist. Also hat R endliche Länge. Gelte 2. 3. Folgt mit Satz Satz 4.65. gelte 3. Sei also R artinsch. Zeige: 0 ist Produkt maximaler Ideal von R . sei $J \subseteq R$ minimal sodass J Produkt maximaler Ideale ist. Zeige $J = 0$. Sei \mathfrak{m} maximales Ideal in R . Dann ist $\mathfrak{m}J = J$

wegen Minimalität von J also $J \subseteq \mathfrak{m}$. Es ist $J^2 = J$. Falls $J \neq 0$ wähle I minimal unter Idealen, die J nicht annihilieren. Es gilt $(IJ)J = IJ^2 = IJ \neq 0$ und $IJ \subseteq I$. Wegen Minimalität von I ist $IJ = I$. Das heißt es gibt $f \in I$ mit $fJ \neq 0$. Da I minimal ist, ist $(f) = I$. Es gibt ein $g \in J$ mit $f = fg$ und somit $(1 - g)f = 0$. g ist in allen maximalen Idealen enthalten also ist $1 - g$ eine Einheit. Also ist $f = 0$ und damit $I = 0$. Also ist $J = 0$. Somit ist $0 = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_t$ für maximale Ideale $\mathfrak{m}_i \subseteq R$. Der Quotient $V_s = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_s / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{s+1}$ ist Vektorraum über R/\mathfrak{m}_{s+1} . Untermodule von V_s sind Ideale in R , die $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{s+1}$ enthalten. Absteigende Kette von Untermoduln sind absteigende Kette in R . Da R artinsch ist, muss Kette endlich sein. Also ist V_s endlich-dimensional über R/\mathfrak{m}_{s+1} und hat also endliche Kompositionsreihe. Alle Ketten Vereinigen gibt endliche Kompositionsreihe von R . Also hat R endliche Länge und ist noethersch. Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ Primideal. Da $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_t = 0 \subseteq \mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{p}$ für ein i . Also ist jedes Primideal maximal. \square

Korollar 4.70. *Jeder Artinsche Ring ist Produkt allseiner Lokalisierungen an maximalen Idealen.*

Lemma 4.71. *Sei R ein Ring.*

- (1) *Jeder Untermodul eines Artinschen R -Modules ist artinsch*
- (2) *Jeder artinsche \mathbb{Z} -Modul ist torsionsmodul*
- (3) *Sei p eine Primzahl. Die echten Untermoduln des Moduls $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ sind K_n wobei K_n erzeugt ist von $\frac{1}{p^n}$ und $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ ist artinsch.*

Beweis. (1) Klar

- (2) Sei M artinscher \mathbb{Z} -Modul. Es gibt absteigende Kette $m\mathbb{Z} \supseteq 2m\mathbb{Z} \supseteq 4m\mathbb{Z} \supseteq 8m\mathbb{Z} \supseteq \dots$ von Untermoduln für $m \in M$. Da M artinsch ist, ist $2^k m\mathbb{Z} = 2^{k+1} m\mathbb{Z}$ für ein k . Das heißt $2^k m = 2^{k+1} xm$ für ein $x \in \mathbb{Z}$. das heißt $m2^k(1 - 2x) = 0$. Alternativ kann man sehen dass

$$0 \rightarrow n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} m\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

exakt ist für ein $n \in \mathbb{Z}$. Wenn $n = 0$ dann ist $m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ artinsch nach 1 was ein Widerspruch ist. also ist $n \neq 0$ und $m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dann ist $n \cdot m = 0$ also M torsionsmodul.

- (3) Sei M ein Untermodul. Dann ist $\frac{a}{p^n} \in M$ für ein $p \nmid a$. Damit gibt es $1 = p^n x + ay$ nach Lemma von Bezout ??? für $x, y \in \mathbb{Z}$. Also ist

$$\frac{ay}{p^n} = \frac{1 - p^n x}{p^n} = \frac{1}{p^n} \in M$$

Es gilt $\max\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{p^n} \in M\}$ ist ∞ oder $m \in \mathbb{N}$. Falls ∞ dann ist $M = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$. Wenn das maximum m ist dann ist $M = K_m$. Also sind die einzigen Untermoduln $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots$ also muss jede absteigende Kette stationär werden und $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ ist artinsch. \square

Lemma 4.72. *Sei $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein maximales Ideal und $n \in \mathbb{N}$.*

- (1) *Wenn R noethersch ist, dann ist R/\mathfrak{m}^n artinsch.*
- (2) *Wenn \mathfrak{m} endlich erzeugt ist, dann ist R/\mathfrak{m}^n artinsch*

Beweis. (1) Es ist R/\mathfrak{m}^n noethersch. sei \mathfrak{p} ein Primideal von R mit $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p} \subseteq R$. Dann ist $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ also $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ und alle Primideale in R/\mathfrak{m}^n sind maximal. Also ist R/\mathfrak{m}^n artinsch.

- (2) Sei \mathfrak{m} endlich erzeugt. Dann ist $\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ endlich erzeugt über R/\mathfrak{m} , das heißt ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Damit hat es endliche Kompositionsreihe nach ???. all diese Kompositionsreihen Vereinigen ergibt Kompositionsreihe von R/\mathfrak{m}^n . Also hat R/\mathfrak{m}^n endliche Länge und ist artinsch. \square

Beweis. Nach Satz Satz 4.69 R ein R -Modul von endlicher Länge. Nach Satz Satz 4.67 ist $R \cong \prod R_{\mathfrak{p}}$ wobei \mathfrak{p} maximal ist. \square

Definition 4.73. Sei M ein R -Modul. Dann ist $\text{Supp } M = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ der Support von M .

Lemma 4.74. Sei R ein Ring M ein R -Modul.

- (1) Für $m \in M$ ist $m = 0 \iff \frac{m}{1} = 0 \in M_{\mathfrak{m}}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq R$
- (2) $M = 0 \iff M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale \mathfrak{m} von R .

Beweis. Sei I der Annihilator von M . $m = 0 \iff I = R \iff I \not\subseteq \mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideal \mathfrak{m} . 2. folgt direkt aus 1 □

Korollar 4.75. $\varphi: M \rightarrow N$ Homomorphism von R -Moduln. φ ist injektiv (surjektiv, bijektiv) $\iff \forall \mathfrak{m} \subseteq R$ maximal ist $\varphi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ injektiv (surjektiv, bijektiv)

Beweis. φ injektiv $\iff \ker(\varphi) = 0 \iff \ker(\varphi)_{\mathfrak{m}} = \ker(\varphi_{\mathfrak{m}}) = 0 \forall \mathfrak{m}$. Surjektiv geht analog mit Cokern statt kern. □

Lemma 4.76. Sei M ein R -Modul. Dann ist äquivalent:

- (1) $M \oplus M' = \bigoplus_{i \in I} R/f_i R$ für $f_i \in R$ und ein R -Modul M' .
- (2) Für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

von R -Moduln sodass $fA = A \cap fB$ ist für alle $f \in R$ ist die Abbildung

$$\text{Hom}_R(P, B) \rightarrow \text{Hom}_R(P, C)$$

surjektiv.

Beweis. Gelte 1 und sei eine exakte Sequenz wie im Satz gegeben. Es reicht der Fall $M = R/fR$. Sei $\psi: R/fR \rightarrow C$ eine Abbildung und sei $b \in B$ mit $b \mapsto \psi(1)$ in C . Dann ist $fb \in A$ und es gibt $a \in A$ sodass $fa = fb$ also $f(b - a) = 0$. Das gibt $\varphi: R/fR \rightarrow B, 1 \mapsto b - a$ das ψ liftet. Wenn andersrum 2 gilt, sei I die Menge der Paare (f, φ) wobei $f \in R$ ist und $\varphi: R/fR \rightarrow M$. Für $i \in I$ sei (f_i, φ_i) das entsprechende Paar. Betrachte $B = \bigoplus_{i \in I} R/f_i R \rightarrow M$ induziert durch φ_i . Sei $A = \ker(B \rightarrow M)$. Wenn die Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow 0$ exakt ist wie in 2. dann spaltet sie also folgt (1). Sei also $f \in R$ und $a \in A$ mit $a \mapsto fb$ Sei $b = (r_i)_{i \in I}$ wobei $r_i = 0$ für fast alle i . dann ist $f \sum \varphi_i(r_i) = 0$ in M . Also gibt es $i_0 \in I$ sodass $f_{i_0} = f$ und $\varphi_{i_0}(1) = \sum \varphi_i(r_i)$. sei $x_{i_0} \in R/f_{i_0}R$ die Klasse von 1. Dann ist

$$a' = (r_i)_{i \in I} - (0, \dots, 0, x_{i_0}, 0, \dots)$$

ein Element von A und $f'a = a$. □

Lemma 4.77. Sei $R \neq 0$ ein Ring. Dann ist äquivalent:

- (1) Für $a, b \in R$ gilt $a \mid b$ oder $b \mid a$
- (2) Jedes endlich erzeugte Ideal ist ein Hauptideal und R ist lokal
- (3) Die Menge der Ideale ist linear geordnet durch Inklusion

Das ist insbesondere erfüllt durch einen Bewertungsring

Beweis. Angenommen 2. gilt und $a, b \in R$. Dann ist $(a, b) = (c)$. Wenn $c = 0$ ist, dann ist $a = b = 0$ und a teilt b . Wenn $c \neq 0$ sei $c = ua + vb$ und $a = wc$ und $b = zc$. Dann ist $c(1 - uw - vz) = 0$. Da R lokal ist, ist $1 - uw - vz \in \mathfrak{m}$. Also ist entweder w oder z eine Einheit. Also gilt 1. Wenn 1. gilt und R hat zwei maximale Ideal $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ Dann wähle $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{n}$ und $b \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{m}$. Dann teilen a und b einander nicht. Also hat R nur ein maximales Ideal und ist lokal. Sei $I = (f_1, \dots, f_n)$ und $I' = (f_2, \dots, f_n)$. Es ist nach Induktion $I' = (c)$ und somit $I = (f_1, c) = (c')$. Es ist klar dass 1 und 3 äquivalent sind.

Die letzte Behauptung gilt in einem Bewertungsring, da im Quotientenkörper für $a, b \neq 0$ gilt, dass $\frac{a}{b} = x$ ist und $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$. Das heißt $a = bx$ oder $b = ax$ für ein $x \in R$. □

Lemma 4.78. Sei $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann gilt

- (1) M_1, M_3 endlich erzeugt $\implies M_2$ endlich erzeugt.
- (2) M_1, M_3 endlich präsentiert $\implies M_2$ endlich präsentiert.
- (3) M_2 endlich erzeugt $\implies M_3$ endlich erzeugt.
- (4) M_2 endlich präsentiert und M_1 endlich erzeugt $\implies M_3$ ist endlich präsentiert.
- (5) M_3 endlich präsentiert und M_2 endlich erzeugt $\implies M_1$ endlich erzeugt.

Beweis. 1 und 3 klar. Zeige 2.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R^{n+m} & \longrightarrow & R^m \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Snake Lemma liefert exakte Sequenz $0 \rightarrow \ker(R^n \rightarrow M_1) \rightarrow \ker(R^{n+m} \rightarrow M_2) \rightarrow \ker(R^m \rightarrow M_3) \rightarrow 0$. Nach (5) sind die beiden äußeren endlich erzeugt also der innere auch. Nach (4) ist dann M_2 endlich präsentiert.

Zeige 5. Wähle Auflösung $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M_3 \rightarrow 0$. Da R^n projektiv ist nach ??? gibt es eine Abbildung $R^n \rightarrow M$ sodass das solide Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & R^m & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & M_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \vdots & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Das gibt dann gestrichelten Pfeil. Nach Schlangenlemma ist $\text{coker}(R^m \rightarrow M_1) \cong \text{coker}(R^n \rightarrow M_2)$. Also ist $\text{coker}(R^m \rightarrow M_1)$ endlich erzeugt. Nach (3) ist $\text{im}(R^m \rightarrow M_1)$ endlich erzeugt also ist M_1 endlich nach (1). Zeige 4. Wähle Auflösung $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ und Surjektion $R^k \rightarrow M_1$. Dann gibt es nach ?? $R^k \rightarrow R^n$ und $R^{k+m} \rightarrow R^n \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ ist eine Auflösung. \square

Lemma 4.79. Sei R ein Ring sodass die Menge der Ideale linear geordnet ist durch Inklusion. Dann ist jeder endlich-präsentierte R -Modul isomorph zu einer endlichen direkten Summe von Moduln der Form R/fR .

Beweis. Es werden die Äquivalenten Bedingungen in Lemma 4.77 Benutzt. Sei M ein endlich präsentierter R -Modul. Sei $\mathfrak{m} \subseteq R$ das maximale Ideal und $\kappa = R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper. Sei $I = \{r \in R \mid rM = 0\}$. Wähle Basis y_1, \dots, y_n des endlich-dimensionalen κ -Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$. Nach Lemma 4.40 erzeugen Lifts x_1, \dots, x_n von y_1, \dots, y_n schon M . Es gibt i sodass für alle Wahlen von x_i gilt $I = \{r \in R \mid rx = 0\} =: I_i$. Denn angenommen nicht. Dann gibt es Wahlen von x_1, \dots, x_n sodass $I_i \neq I$ für alle i . Aber da $I \subseteq I_i$ gilt $I \subsetneq I_i$ für alle i . Da Ideale total geordnet sind, wäre auch $I = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$ größer als I , was ein Widerspruch ist. Nach Umordnen ist $i = 1$ und jeder Lift x_i von y_i erfüllt $I_1 = I$. Sei $A = RX_1 \subseteq M$ und betrachte die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow M/A \rightarrow 0$$

. Da A endlich erzeugt ist, ist M/A endlich präsentiert nach Lemma 4.78 mit weniger Erzeugern. Nach Induktion ist also $M/A \cong \bigoplus_{j=1, \dots, m} R/f_jR$. Es gilt das wenn $f \in R$ dann ist $fA = A \cap fM$. Sei also $x \in A \cap fM$. dann ist $x = gx_1 = fy$ für ein $g \in R$ und $y \in M$. wenn $f \mid g$ dann ist $x \in fA$. Wenn nicht, dann ist $f = hg$ für $h \in \mathfrak{m}$. Dann ist $x'_1 = x_1 - hy$ ein Lift von y_1 also ist $g \in I$ und $x = 0$. Nach Lemma Lemma 4.76 spaltet die exakte Sequenz von oben und $M \cong A \oplus \bigoplus_{j=1, \dots, m} R/f_jR$. Dann ist $A = R/I$ endlich präsentiert als Summand von M und deswegen ist I endlich generiert nach beides nach Lemma 4.78 und also I ein Hauptideal. Das zeigt den Satz. \square

Lemma 4.80. *Sei R ein Ring sodass alle Ideale von $R_{\mathfrak{m}}$ total geordnet sind für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$. Dann ist jeder endlich präsentierte R -Modul direkter Summand von $\bigoplus_{i \in I} R/f_i R$ wobei I endlich.*

Beweis. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln sodass $fA = A \cap fB$ für alle $f \in R$. Nach Lemma 4.76 reicht es, zu zeigen dass $\text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C)$ surjektiv ist. Es reicht, dass es surjektiv ist nach lokalisieren an maximalen Idealen \mathfrak{m} nach Korollar 4.75. Da Lokalisierung nach Satz 4.56 exakt ist $0 \rightarrow A_{\mathfrak{m}} \rightarrow B_{\mathfrak{m}} \rightarrow C_{\mathfrak{m}} \rightarrow 0$ exakt und $fA_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}} \cap fB_{\mathfrak{m}}$. Da M endlich präsentiert ist, gilt $\text{Hom}_R(M, B)_{\mathfrak{m}} = \text{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, B_{\mathfrak{m}})$ und $\text{Hom}_R(M, C)_{\mathfrak{m}} = \text{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, C_{\mathfrak{m}})$ nach ???. $M_{\mathfrak{m}}$ ist endlich präsentierter $R_{\mathfrak{m}}$ Modul und nach Lemma 4.79 gilt dass $M_{\mathfrak{m}}$ direkte Summe von Moduln der Form $R_{\mathfrak{m}}/fR_{\mathfrak{m}}$ ist. Nach Lemma 4.76 ist Abbildung der Lokalisierung surjektiv. Also ist M direkter Summand von $\bigoplus_{i \in I'} R/f_i R$. Betrachte $M \rightarrow \bigoplus_{i \in I'} R/f_i R$. Da M endlich erzeugt ist, ist das Bild von M in $\bigoplus_{i \in I} R/f_i R$ für eine endliche Teilmenge $I \subseteq I'$. \square

Definition 4.81. Sei R nullteilerfrei.

- (1) R ist ein Bézout Ring, wenn jedes endlich erzeugte Ideal ein Hauptideal ist.
- (2) R ist ein Elementarteiler Ring, falls für alle $n, m \geq 1$ und jede $n \times m$ matrix A es invertierbare Matrizen U, V der Größe $n \times n$ bzw. $m \times m$ gibt sodass

$$UAV = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & f_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

mit $f_1, \dots, f_{\min(n,m)} \in R$ und $f_1 \mid f_2 \mid \dots$.

Lemma 4.82. *Ein Elementarteilerring ist Bézout Ring.*

Beweis. Seien $a, b \in R$ nicht-null. Betrachte $A = (ab)$. Dann gibt es $u \in R^*$ und $V = (g_{ij}) \in \text{GL}_2(R)$ sodass $u(a, b)V = (f, 0)$. Dann ist $f = uag_{11} + ubg_{21}$. Es ist auch

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = u^{-1} \begin{pmatrix} f & 0 \end{pmatrix} V^{-1}$$

Also ist $(a, b) = (f)$. Induktion zeigt das Ergebnis. \square

Satz 4.83. *Die Lokalisierung eines Bezout-Rings ist Bezout. Ein lokaler Integritätsbereich ist Bezout genau dann wenn es ein Bezout ring ist.*

Beweis. Erste Aussage ist klar und zweite gilt nach ??? was genau die Aussage ist. \square

Lemma 4.84. *Sei R Bézout ring. Dann gilt*

- (1) *Jeder endliche Untermodul eines freien Moduls ist frei*
- (2) *Jeder endlich präsentierte R -Modul M ist direkte Summe eines endlich freien Moduls und einem torsions Modul M_{tors} der Summand ist einer direkten Summe $\bigoplus_{i=1, \dots, n} R/f_i R$ wobei f_i nicht-null sind.*

Beweis. Sei $M \subseteq F$ endlich erzeugter Untermodul, F frei. Da M endlich ist, ist ohne Einschränkung F auch endlich, $F = R^n$. Wenn $n = 1$ dann ist M ein endlich erzeugtes Ideal, also ein Hauptideal. Wenn $n > 1$ betrachte $pr_n: R^n \rightarrow R$ und $I = \text{im}(pr_n|_M: M \rightarrow R)$. Wenn $I = (0)$ dann ist $M \subseteq R^{n-1}$ und man ist fertig nach Induktion. Wenn $I \neq 0$ dann ist $I = (f) \cong R$. also $M \cong R \oplus \ker(M \rightarrow I)$ und Induktion.

Sei M also endlich präsentiert. Nach ??? sind lokalisierungen von R an maximalen Idealen Bewertungsringe, also können wir mit Lemma 4.80 folgern, dass M direkter Summand ist von

$$R^r \oplus \bigoplus_{i=1, \dots, n} R/f_i R$$

wobei $f_i \neq 0$. Dann ist M_{tors} ein Summand von $\bigoplus_{i=1, \dots, n} R/f_i R$ und M/M_{tors} ist ein Summand von R^r . Nach erstem Teil ist M/M_{tors} endlich frei und also $M \cong M_{\text{tors}} \oplus M/M_{\text{tors}}$. \square

Satz 4.85 (Struktursatz endlicher Moduln über Hauptidealringen). *Sei R ein Hauptidealring. Dann ist jeder endliche R -Modul M isomorph zu einem Modul der Form*

$$R^n \oplus \bigoplus_{i=1, \dots, n} R/f_i R$$

für $r, n \geq 0$ und f_i nicht-null mit $f_1 \mid f_2 \mid \dots$

Beweis. Ein Hauptidealring ist ein noetherscher Bézout Ring. Nach Lemma 4.84 reicht der Fall wo M torsion ist. Da M endlich erzeugt, gibt es $f \in R \setminus \{0\}$ sodass $fM = 0$. Dann ist M ein R/fR Modul und R/fR ist noethersch und jedes Primideal ist maximal. Also ist nach Korollar 4.70

$$R/fR = \prod R_j$$

endliches Produkt wobei R_j lokal artinsch. Die Projektion $R/fR \rightarrow R_j$ gibt dass $R_j = R/f_j R$ für ein f_j . Dann erfüllt R_j die Bedingungen von Lemma 4.77. Schreibe $M = \prod M_j$ mit $M_j = e_j M$ wobei $e_j \in R/fR$ das idempotente Element ist dass zu $1 \in R_j$ correspondiert. Nach Lemma 4.79 ist $M_j = \bigoplus_{i=1, \dots, n_j} R_j/\bar{f}_{ij} R_j$ für $\bar{f}_{ij} \in R_j$. wähle Lifts $f_{ij} \in R$ und $g_{ji} \in R$ mit $(g_{ji}) = (f_j, f_{ji})$. Dann ist

$$M \cong \bigoplus R/g_{ji} R$$

als R -Modul. □

Lemma 4.86. *Sei R ein Hauptidealring und $a \in R \setminus \{0\}$.*

- (1) *Es ist $\text{length}(R/aR)$ gleich der Anzahl der Primfaktoren in der Primfaktorzerlegung von a .*
- (2) *Wenn M endlich erzeugter R -Modul ist und $M[a] = \{m \in M \mid am = 0\}$ dann sei*

$$h_a(M) = \text{length}(M/aM) - \text{length}(M[a]).$$

Alle Zahlen in der Gleichung sind endlich.

- (3) *Wenn $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ exakt ist von endlichen R -Moduln, dann ist $h_a(M) = h_a(M') + h_a(M'')$.*
- (4) *Sei $K = \text{Quot}(R)$ und M ein endlich-erzeugter R -Modul. Dann ist*

$$h_a(M) = \dim_K(M \otimes_R K) \cdot \text{length}(R/aR)$$

Beweis. (1) Sei $a = p_1 \cdots p_r$ die Primfaktorzerlegung. Dann ist

$$(p_1) \supseteq (p_1 p_2) \supseteq \cdots \supseteq (p_1 \cdots p_r) = (a)$$

und

$$(p_1 \cdots p_k)/(p_1 \cdots p_{k+1}) \cong R/p_{k+1} R$$

ein Körper, hat also keine echten Untermoduln ungleich 0. Somit ist

$$(\bar{p}_1) \supseteq (\bar{p}_1 \bar{p}_2) \supseteq \cdots \supseteq (\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_r) = 0$$

Kompositionsreihe in R/aR . Also ist $\text{length}(R/aR) = r$.

- (2) Da M endlich erzeugt ist, ist M noethersch. Also ist $M[a]$ auch endlich erzeugt. Es ist

$$M[a] \cong R^d \oplus \bigoplus R/a_i R$$

und da $M[a]$ Torsionsmodul ist, ist $d = 0$. Nach 1. ist $\text{length}(R/a_i R) < \infty$ also auch die $\text{length}(M[a]) < \infty$. M/aM ist auch endlich erzeugt und Torsionsmodul. Also ist analog die Länge auch endlich.

- (3) Betrachte kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cdot a & & \downarrow \cdot a & & \downarrow \cdot a \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nach Schlangenlemma gibt das eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M'[a] \rightarrow M[a] \rightarrow M''[a] \rightarrow M'/aM' \rightarrow M/aM \rightarrow M''/aM'' \rightarrow 0$$

Es gilt

$$0 = \text{length}(M'[a]) - \text{length}(M[a]) + \text{length}(M''[a]) - \text{length}(M'/aM') + \text{length}(M/aM) - \text{length}(M''/aM'') \rightarrow 0$$

Also gilt die Aussage.

- (4) Nach 3. reicht es, die Aussage für $M = R$ und M Torsionsmodul zu zeigen wegen Struktursatz ???. Es ist $\dim(R \otimes_R K) = 1$ und $R[a] = 0$ also ist $h_a(R) = \text{length}(R/aR) = \dim(R \otimes_R K) \cdot \text{length}(R/aR)$. Wenn M Torsionsmodul ist, dann hat M endliche Länge nach Struktursatz und somit ergibt die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M[a] \rightarrow M \xrightarrow{a} M \rightarrow M/aM \rightarrow 0$$

dass

$$0 = \text{length}(M[a]) - \text{length}(M) + \text{length}(M) - \text{length}(M/aM) = h_a(M)$$

. und

$$\dim(M \otimes_R K) = 0$$

□

Definition 4.87. Sei $\varphi: R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus. $x \in R'$ heißt ganz über R , wenn es eine Ganzheitsgleichung $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ erfüllt für $a_1, \dots, a_n \in R$. R' heißt ganz über R , falls jedes $x \in R'$ ganz ist. φ heißt endlich, wenn es R' mit einer endlichen R -Modulstruktur versieht.

Beispiel 4.88. Wenn $R = K, R' = K'$ Körper sind, dann ist K'/K algebraisch wenn es ganz ist über K .

Lemma 4.89. Sei $\varphi: R \rightarrow R'$ injektive und R, R' Integritätsbereiche und R' ganz über R . Dann ist R ein Körper genau dann wenn R' ein Körper ist.

Beispiel 4.90. Sei K/\mathbb{Q} eine endliche Körpererweiterung und $a \in K$. Für einen Körperhomomorphismus $\sigma: K \rightarrow \bar{K}$ gilt a ist ganz über \mathbb{Z} genau dann wenn $\sigma(a)$ ganz ist über \mathbb{Z} und a ist ganz über \mathbb{Z} genau dann wenn das Minimalpolynom von a in $\mathbb{Z}[X]$ ist. Wenn $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ wobei $n > 1$ quadratfrei ist, dann ist $a + b\sqrt{n}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ganz über \mathbb{Z} genau dann, wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ oder $a, b \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ und $n \equiv 1 \pmod{4}$.

Beweis. Wenn $a^n + b_1a^{n-1} + \dots + b_n = 0$ mit $b_i \in \mathbb{Z}$ dann ist auch $\sigma(a)^n + b_1\sigma(a)^{n-1} + \dots + b_n = 0$ also ist $\sigma(a)$ ganz. Die Rückrichtung geht genauso unter Verwendung dass σ injektiv ist. Wenn a ganz ist, Sei $F \in \mathbb{Z}[X]$ Ganzheitsgleichung. Sei μ das Minimalpolynom von a . Dann ist $F = \mu g$. Nach Lemma von Gauß ??? ist $\mu \in \mathbb{Z}[X]$. Andere Richtung ist klar. Mipol von $a + b\sqrt{n}$ ist $(X - (a - b\sqrt{n}))(X - (a + b\sqrt{n})) = X^2 - 2aX + a^2 - b^2n$. Also ist $a \in \mathbb{Z}$ oder $a \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Wenn $a \in \mathbb{Z}$ dann ist $b^2n \in \mathbb{Z}$ und da n quadratfrei ist, ist $b \in \mathbb{Z}$. Wenn $a \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ Dann ist $a = \frac{1}{2} + x$ für ein $x \in \mathbb{Z}$. also ist $a^2 = \frac{1}{4} + x + x^2$ und somit $b^2n \in \frac{1}{4} + \mathbb{Z}$ also $b \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ und außerdem $b^2n \in \frac{1}{4} + \mathbb{Z} \implies n \equiv 1 \pmod{4}$. □

Beweis. Sei R' ein Körper und $x \in R \setminus \{0\}$ Es ist $x^{-1} = x \in R'$ und es gibt $a_1, \dots, a_n \in R$ sodass

$$y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ist. Also ist

$$y^n = -a_1y^{n-1} - \dots - a_n$$

und somit

$$y = x^{n-1}y^n = -a_1y^{n-1}x^{n-1} - \dots - a_nx^{n-1} \in R$$

. also ist R Körper. Sei andersrum R ein Körper und $x \in R'$ mit $x \neq 0$. Dann gibt es $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ mit $a_i \in R$. Da R' Integritätsbereich ist ohne Einschränkung $a_n \neq 0$. Im Quotientenkörper gilt

$$-x^{-1}a_n = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \in R'$$

. Also ist

$$x^{-1} = -a_n^{-1}(x^{n-1} + \dots + a_{n-1}) \in R'$$

also ist R' ein Körper. □

Lemma 4.91. Sei $\varphi: R \rightarrow R'$ ein ganzer (bzw. endlicher) Ringhomomorphismus.

- (1) Seien $I \subseteq R, J \subseteq R'$ Ideale mit $\varphi(I) \subseteq J$. Dann ist $R/I \rightarrow R'/J$ ganz (bzw. endlich)
- (2) Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Menge. dann ist $R_S \rightarrow R'_S$ ganz (bzw. endlich)

Beweis. Klar □

Lemma 4.92. Sei $\varphi: R \rightarrow R'$ ein Ringhom und $x \in R'$. Es ist äquivalent

- (1) x ist integral über R .
- (2) Der Unterring $R[x] \subseteq R'$ ist endlich erzeugt als R -Modul.
- (3) Es gibt endlich-erzeugten R -Untermodule $M \subseteq R'$ sodass $1 \in M$ und $xM \subseteq M$.
- (4) Es gibt eine $R[x]$ -Modul M sodass M ein endlicher R -Modul ist und $aM = 0 \implies a = 0$ für alle $a \in R[x]$.

Beweis. Gelte 1. Die Ganzheitsgleichung $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ zeigt, dass x^n Element ist von $M = \sum_{i=0}^{n-1} Rx^i$ und per Induktion ist $x^m \in M$ für alle m . Also ist $M = R[x]$ und $R[x]$ ist endlich erzeugt. Die Richtung von 2 nach 3 und von 3 nach 4 ist klar. Gelte 4. Sei M ein $R[x]$ -Modul mit $y_1, \dots, y_n \in M$ Erzeuger über R . Es ist $xM \subseteq M$ also gibt es Gleichungen

$$xy_i = a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n$$

für alle i mit $a_{ji} \in R$. Sei also Δ die Matrix über $R[x]$ sodass

$$\Delta \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

Es ist $\Delta^{adj} \Delta = \det(\Delta)E_n$ und somit

$$\det(\Delta) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Delta^{adj} \Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

also ist $\det(\Delta)y_i = 0$ für alle i . Also ist $\det(\Delta)M = 0$ und somit $\det(\Delta) = 0$. Also ist $\det(\delta_{ij}X - a_{ij})$ Polynom über R das bei x verschwindet. □

Korollar 4.93. Jeder endliche Ringhomomorphismus $R \rightarrow R'$ ist ganz

Beweis. sei $M = R'$ Dann ist M endlich erzeugt. Nach Teil 3 von ?? ist $R \rightarrow R'$ ganz. □

Korollar 4.94. sei $\varphi: R \rightarrow R'$ Ringhomomorphismus und $y_1, \dots, y_r \in R'$ ganz über R sodass $R' = R[y_1, \dots, y_r]$. dann ist φ endlich und insbesondere ganz.

Beweis. Es ist $\varphi(R) \subseteq \varphi(R)[y_1] \subseteq \dots \subseteq \varphi(R)[y_1, \dots, y_r] = R'$ und alle Inklusionen sind endlich nach Lemma ??. Also ist inst R' endlich. □

Korollar 4.95. Seien $\varphi: R \rightarrow R'$ und $\varphi': R' \rightarrow R''$ endlich (bzw ganz). dann ist die Komposition $\varphi'\varphi$ auch endlich (bzw ganz)

Beweis. Endlich ist klar wie zuvor. Seien beide ganz. $z \in R''$ erfüllt Ganzheitsgleichung $z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = 0$ mit $b_i \in R'$. also ist z ganz über $R[b_1, \dots, b_n]$ und $R[b_1, \dots, b_n, z]$ ist endlich über $R[b_1, \dots, b_n]$ was endlich ist über R da alle b_i ganz über R . Also ist $R \rightarrow R[b_1, \dots, b_n, z]$ endlich und damit ganz. Also ist $R \rightarrow R''$ ganz. \square

Beweis. Sei $R \rightarrow R'$ injektiv und $\bar{R} = \{x \in R' \mid x \text{ ganz}\}$. Dann ist $R \subseteq \bar{R} \subseteq R'$ Unterring, gennant der ganze Abschluss von R in R' . \bar{R} ist ganzabgeschlossen in R' \square

Beweis. Seien $x, y \in R'$ ganz. Dann ist $R[x, y]$ ganz über R also sind $x + y, x \cdot y \in \bar{R}$. Es ist $R \rightarrow \bar{R} \rightarrow \bar{R}$ ganz also $\bar{R} = \bar{\bar{R}}$. \square

Definition 4.96. Ein Integritätsbereich R heißt normal, falls R ganz-abgeschlossen ist in seinem Quotientenkörper.

Bemerkung 4.97. Ein faktorieller Ring ist normal.

Lemma 4.98. Sei $S \subseteq R \setminus \{0\}$ eine multiplikative Menge und R normal. Dann ist R_S normal.

Beweis. Es ist $R \subseteq R_S \subseteq \text{Quot}(R)$ und $\text{Quot}(R_S) = Q(R)$. Sei $x \in \text{Quot}(R)$ ganz über R_S und

$$x^n + \frac{a_1}{s_1} x^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s_n} = 0$$

Ganzheitsgleichung. Sei $s = s_1 \cdots s_n$. Dann ist sx ganz über R also $sx \in R$ und somit $x = \frac{1}{s} sx \in R_S$ und somit R_S normal. \square

Lemma 4.99. Sei A nullteilerfrei und $K = \text{Quot}(A)$ und L/K eine Körpererweiterung. sei $B \subseteq L$ der ganze Abschluss von A in L und $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge. Dann ist $S^{-1}B$ der ganze Abschluss von $S^{-1}A$ in L .

Beweis. sei $x = \frac{b}{s} \in S^{-1}B$ dann ist $sx = b$ ganz über A also gibt es

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

dann ist

$$x^n + \frac{a_1}{s} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{s^n} = 0$$

und somit x ganz über $S^{-1}A$. Sei $x \in L$ ganz über $S^{-1}A$

$$x^n + \frac{a_1}{s_1} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{s_0} = 0$$

sei $s = s_1 \cdots s_n$ dann ist sx ganz über A also $sx \in B$ und $x \in S^{-1}B$. \square

Satz 4.100. Für einen Integritätsbereich R ist äquivalent:

- (1) R ist normal
- (2) $R_{\mathfrak{p}}$ ist normal für alle primideale $\mathfrak{p} \subseteq R$.
- (3) $R_{\mathfrak{m}}$ ist normal für alle $\mathfrak{m} \subseteq R$ maximal.

Beweis. 1 impliziert 2 nach Lemma ?? 2 nach 3 ist klar. Gelte 3. und Sei $x \in \text{Quot}(R)$ ganz über R . Da $R_{\mathfrak{m}}$ normal ist, ist $x \in \bigcap_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$. Zeige also $\bigcap_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}} = R$. sei $x \in \bigcap_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}$. Wähle $a_{\mathfrak{m}} \in R$ und $b_{\mathfrak{m}} \in R \setminus \mathfrak{m}$ sodass $x = \frac{a_{\mathfrak{m}}}{b_{\mathfrak{m}}}$. Es ist $\sum (b_{\mathfrak{m}}) = R$ da es in keinem maximalen Ideal enthalten ist. Also gibt es Gleichung $\sum_{\mathfrak{m}} c_{\mathfrak{m}} b_{\mathfrak{m}} = 1$ mit $c_{\mathfrak{m}} \in R$ und $c_{\mathfrak{m}} = 0$ fast immer 0. Also ist

$$x = \left(\sum_{\mathfrak{m}} c_{\mathfrak{m}} b_{\mathfrak{m}} \right) x = \sum_{\mathfrak{m}} c_{\mathfrak{m}} a_{\mathfrak{m}} \in R.$$

Also ist R normal. \square

Definition 4.101. Sei K ein Körper und R eine K -Algebra. $y_1, \dots, y_n \in R$ heißen algebraisch unabhängig über K , falls die Surjektion

$$K[Y_1, \dots, Y_n] \rightarrow K[y_1, \dots, y_n]$$

ein Isomorphismus ist.

Lemma 4.102 (Horrible Lemma). *Sei I eine endliche Menge von Tupeln $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$. Es gibt $r_1, \dots, r_{n-1} \in \mathbb{N}$ und $r_n = 1$ sodass $m \neq m' \in I \implies \sum_{i=1}^n r_i m_i \neq \sum_{i=1}^n r_i m'_i$*

Beweis. Wenn $n = 1$ dann ist das klar. Sei $\bar{I} = \{\bar{m} = (m_2, \dots, m_n) \mid \exists m_1: (m_1, m_2, \dots, m_n) \in I\}$
Nach Induktion gibt es r_2, \dots, r_n mit $r_n = 1$ sodass

$$(m_2, \dots, m_n) \neq (m'_2, \dots, m'_n) \implies \sum_{i=2}^n r_i m_i \neq \sum_{i=2}^n r_i m'_i$$

Wähle $r_1 > \max\{\sum_{i=2}^n r_i m_i \mid \bar{m} = (m_2, \dots, m_n) \in \bar{I}\}$. Dann ist für $m \neq m'$ entweder $m_1 \neq m'_1$ oder $\bar{m} = (m_2, \dots, m_n) \neq \bar{m}' = (m'_2, \dots, m'_n)$. In beiden Fällen ist $\sum_{i=1}^n r_i m_i \neq \sum_{i=1}^n r_i m'_i$. \square

Lemma 4.103. *sei K ein Körper und $A = K[y_1, \dots, y_n]$ sodass*

$$K[Y_1, \dots, Y_n] \rightarrow K[y_1, \dots, y_n]$$

kein Isomorphismus ist. Dann gibt es $y_1^, \dots, y_{n-1}^* \in A$ sodass y_n ganz über $A^* = K[y_1^*, \dots, y_{n-1}^*]$ und $A = A^*[y_n]$*

Beweis. seien $r_1, \dots, r_{n-1} \geq 1$ mit $r_i \in \mathbb{Z}$ und setze $r_n = 1$. Setze

$$y_i^* = y_i - y_n^{r_i}$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Sei F im Kern von

$$K[Y_1, \dots, Y_n] \rightarrow K[y_1, \dots, y_n]$$

. Definiere Relation G über $K[y_1^*, \dots, y_{n-1}^*]$ durch

$$G(y_1^*, \dots, y_{n-1}^*, y_n) = F(y_1^* + y_n^{r_1}, \dots, y_{n-1}^* + y_n^{r_{n-1}}, y_n) = F(y_1, \dots, y_n) = 0$$

Schreibe $F = \sum_{m=(m_1, \dots, m_n) \in I} a_m Y^m = \sum_m a_m \prod Y_i^{m_i}$. Dann ist

$$\begin{aligned} G &= \sum a_m y_n^{m_n} \prod_{i \neq n} (y_i^* + y_n^{r_i}) \\ &= \sum_m a_m (y_n^{\sum_{i=1}^n r_i m_i} + \text{Rest}_m) \end{aligned}$$

wobei der Rest ein Polynom in y_n ist von Grad echt kleiner als $m_n + \sum r_i m_i$. Nach Lemma ??? kann man r_i so wählen, dass $m \neq m' \implies \sum_{i=1}^n r_i m_i \neq \sum_{i=1}^n r_i m'_i$. Dann wird $\max\{\sum r_i m_i \mid a_m \neq 0\}$ nur in einem Summanden angenommen, sodass sich nicht alle Terme wegheben. Da $a_m \neq 0$ wo das Maximum angenommen wird und $a_m \in K$ ist, folgt dass y_n ganz ist über $K[y_1^*, \dots, y_{n-1}^*]$ \square

Satz 4.104 (Noether Normalisierung). *Sei K ein Körper und A eine K -Algebra von endlichem Typ. Dann gibt es $z_1, \dots, z_m \in A$ sodass*

- (1) z_1, \dots, z_m algebraisch unabhängig über K sind und
- (2) A ist endlich über $K[z_1, \dots, z_m] \subseteq A$

Beweis. Es ist $A = K[y_1, \dots, y_n]$. Wenn $n = 0$ ist, ist nichts zu zeigen. Sei $n > 0$ Wenn y_1, \dots, y_n algebraisch unabhängig sind über K , dann ist nichts zu zeigen. Seien y_1, \dots, y_n also algebraisch abhängig. Das heißt

$$K[Y_1, \dots, Y_n] \rightarrow K[y_1, \dots, y_n]$$

hat nicht triviale Kern. Nach Lemma ?? gibt es also $y_1^*, \dots, y_{n-1}^* \in A$ sodass y_n ganz über $A^* = K[y_1^*, \dots, y_{n-1}^*]$ und $A = A^*[y_n]$. Nach Induktion gibt es $z_1, \dots, z_m \in A^*$ algebraisch unabhängig sodass A^* endlich ist über $B = K[z_1, \dots, z_m]$ da y_n ganz über A^* ist ist $A^*[y_n]$ endlich über A sodass A endlich über B ist. \square

Satz 4.105 (Schwacher Nullstellensatz). *Sei K ein Körper, L eine K -Algebra von endlichem Typ die ein Körper ist. Dann ist L/K endlich.*

Beweis. Nach [Noether Normalisierung](#) gibt es $z_1, \dots, z_m \in L$ algebraisch unabhängig sodass L endlich ist über $A = K[z_1, \dots, z_m]$. Dann ist $A \subseteq L$ ganz und da L ein Körper ist, ist A ein Körper. Da z_1, \dots, z_m algebraisch unabhängig sind, ist A ein Polynomring in m Variablen. Also ist $m = 0$ und L ist endlich über K . \square

Korollar 4.106. Sei K ein Körper und $f: A \rightarrow B$ ein Homomorphismus von K -algebren sodass B eine K -Algebra vom endlichen Typ ist. sei $\mathfrak{m} \subseteq B$ ein maximales Ideal. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{m})$ maximal.

Beweis. Es ist $K \rightarrow A/f^{-1}(\mathfrak{m}) \rightarrow B/\mathfrak{m}$ injektiv, da B/\mathfrak{m} eine endliche Körpererweiterung nach Schwachen NstSatz. Dann sind $K \rightarrow A/f^{-1}(\mathfrak{m}) \rightarrow B/\mathfrak{m}$ alle ganz und damit $A/f^{-1}(\mathfrak{m})$ \square

Beispiel 4.107. Sei K ein Körper und $R = K[X_1, \dots, X_m]$ und $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein maximales Ideal und $L = R/\mathfrak{m}$. Nach Schwachem Nullstellensatz ist L/K endliche, algebraische Erweiterung.

Korollar 4.108. Sei K algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{m} \subseteq R = K[X_1, \dots, X_m]$ ein maximales Ideal. Dann ist $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \dots, X_m - a_m)$ für a_1, \dots, a_m in K und die Projektion $\pi: R \rightarrow R/\mathfrak{m}$ ist $f \mapsto f(a_1, \dots, a_m)$. Das heißt es gibt Bijektion $K^m \rightarrow \text{Specm}(R)$, $(a_1, \dots, a_m) \mapsto (X_1 - a_1, \dots, X_m - a_m)$.

Beweis. Sei $L = K[X_1, \dots, X_m]/\mathfrak{m}$. Dann ist nach ??? L/K algebraisch also $L = K$. Das heißt $\pi: K[X_1, \dots, X_m] \rightarrow K$ und sei $a_i = \pi(X_i)$. Dann ist $\pi(X_i - a_i) = 0$ also $X_i - a_i \in \mathfrak{m}$ für alle i . Also ist $\mathfrak{m} \supseteq (X_1 - a_1, \dots, X_m - a_m)$ und letzteres ist maximal denn die Abbildung $K[X_1, \dots, X_m] \rightarrow K, f \mapsto f(a_1, \dots, a_m)$ hat dieses Ideal als Kern. \square

Definition 4.109. Sei K ein Körper. Eine Varietät $V \subseteq K^n$ ist eine Teilmenge $V = V(J) = \{p = (a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f(p) = 0 \forall f \in J\}$ für ein Ideal $J \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal. Da $J = (f_1, \dots, f_m)$ endlich erzeugt ist, ist V definiert durch $f_1(p) = \dots = f_m(p) = 0$.

Satz 4.110. Sei K algebraisch abgeschlossen und $A = K[X_1, \dots, X_n]/J$ für ein Ideal $J \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$. Dann hat jedes maximale Ideal von A die Form

$$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

für ein $(a_1, \dots, a_n) \in V(J)$. Das heißt es gibt Bijektion von $V(J)$ und $\text{Specm} A$ gegeben durch $(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.

Beweis. Ideal von A sind Ideale in $K[X_1, \dots, X_n]$ die J enthalten. Also haben alle maximalen Ideale von A die Form $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ für a_1, \dots, a_n sodass $J \subseteq (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Da jedoch

$$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) = \ker(f \mapsto f(a_1, \dots, a_n))$$

ist, ist $J \subseteq (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \iff f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall f \in J$ also ist $(a_1, \dots, a_n) \in V(J)$. \square

Bemerkung 4.111. Es gibt zwei Abbildungen

$$\{J \subseteq K[X_1, \dots, X_n] \text{ Ideal}\} \xrightleftharpoons[I]{V} \{X \subseteq K^n \text{ Teilmenge}\}$$

wobei $I(X) = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid f(p) = 0 \forall p \in X\}$ ein Ideal ist. Es gilt

- (1) $J \subseteq J' \implies V(J) \supseteq V(J')$
- (2) $X \subseteq Y \implies I(X) \supseteq I(Y)$
- (3) $X \subseteq V(I(X))$
- (4) X ist Varietät $\iff X = V(I(X))$
- (5) $J \subseteq I(V(J))$.

Bemerkung 4.112. Sei K algebraisch abgeschlossen und $R = K[X_1, \dots, X_n]$ und $Y \subseteq R$ eine Teilmenge. Dann gilt

- (1) $V(Y) = V(\langle Y \rangle)$
- (2) $V(f) = V(f^n)$

- (3) $I \subseteq R \text{ Ideal} \implies V(\sqrt{I}) = V(I)$
 (4) $Y \subseteq Y' \subseteq R \implies V(Y') \subseteq V(Y)$
 (5) $Y_i \subseteq R \implies V(\bigcup_i Y_i) = \bigcap_i V(Y_i)$

Satz 4.113 (Nullstellensatz). *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

- (1) *wenn $J \subsetneq K[X_1, \dots, X_n]$ dann ist $V(J) \neq \emptyset$.*
 (2) $I(V(J)) = \text{rad}(J)$

Das heißt I und V induzieren inverse Bijektionen

$$\{\text{Radikale } J = \sqrt{J} \subseteq K[X_1, \dots, X_n]\} \xrightleftharpoons[I]{V} \{\text{Varietäten } V \subseteq K^n\}$$

Beweis. Sei $J \subseteq \mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Dann ist $P = (a_1, \dots, a_n) \in V(J)$. Angenommen $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ sodass $f(p) = 0$ für alle $p \in V(J)$. Sei $J' = (J, fY - 1) \subseteq K[X_1, \dots, X_n, Y]$. Ein Punkt $p \in V(J')$ ist $(n+1)$ -Tupel $(a_1, \dots, a_n, b) \in K^{n+1}$. Angenommen $V(J') \neq \emptyset$. Dann gibt es so einen Punkt p und $p' = (a_1, \dots, a_n)$ ist dann in $V(J)$. Da aber $bf(a_1, \dots, a_n) = 1$ ist, ist das ein Widerspruch. Also ist $V(J') = \emptyset$ und somit $J' = K[X_1, \dots, X_n, Y]$. Also gibt es Gleichung

$$1 = \sum g_i h_i + g_0(fY - 1)$$

mit $g_i \in K[X_1, \dots, X_n, Y]$ und $h_1 \in J$. Multipliziere die Gleichung mit f^m sodass Y nur in Kombination mit f auftritt und erhalte

$$f^m = \sum G_i(X_1, \dots, X_n, fY) h_i + G_0(X_1, \dots, X_n, fY)(fY - 1)$$

Gleichung gilt auch mod $(fY - 1)$ was zeigt, dass $f^m \in J$. Wenn $f^n(a) = 0$ ist dann ist $f(a) = 0$ also $\text{rad}(J) \subseteq I(V(J))$. Denn wenn $f^n \in J$ dann ist $f^n \in I(V(J))$ also $f^n(p) = 0$ für alle $p \in V(J)$. also $f(p) = 0$ also $f \in I(V(J))$. \square

Bemerkung 4.114. (1) Der Satz hat den Namen wegen 1. Sei M eine Menge von Polynomen in $K[X_1, \dots, X_n]$ gegeben. Dann gibt es eine gemeinsame Nullstelle. Der Satz ist falsch, wenn K nicht algebraisch abgeschlossen ist, denn wenn f ein Polynom $K[X]$ ohne Nullstelle ist, dann ist $f \neq K[X]$ aber $V(f) = \emptyset$ und $I(V(f)) = K[X]$.

- (2) Es ist $\text{rad } J = \bigcap_{J \subseteq \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)} \mathfrak{p}$ aber der Nullstellensatz ist stärker, denn 2. sagt es reichen die maximalen Ideale, die J enthalten.

Definition 4.115. Seien $X \subseteq K^n$ und $Y \subseteq K^m$ abgeschlossene Teilmengen. Eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$ heißt polynomiell, wenn es $f_1, \dots, f_m \in K[X_1, \dots, X_m]$ gibt sodass $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ für alle $x \in X$. Die Polynome f_i sind nicht eindeutig, denn sie können um ein Element von $I(X)$ verändert werden. Für eine Teilmenge $X \subseteq K^n$ definiere $A(X) = K[X_1, \dots, X_n]/I(X)$.

Für abgeschlossene $X \subseteq K^n$ und $Y \subseteq K^m$ gibt es Bijektion

$$\{\varphi: X \rightarrow Y \text{ polynomiell}\} \rightarrow \text{Hom}_{K\text{-Alg}}(A(Y), A(X))$$

Beweis. Angenommen $g \in \text{Hom}_{K\text{-Alg}}(A(Y), A(X))$ gegeben. Betrachte

$$\begin{array}{ccc} K[X_1, \dots, X_m] & \xrightarrow{\quad} & K[X_1, \dots, X_m] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(Y) & \xrightarrow{\quad g \quad} & A(X) \end{array}$$

Sei $f_i \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Urbild von $g(\bar{X}_i)$. Dann definieren f_1, \dots, f_m eine polynomielle Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Wenn andersrum φ gegeben ist, dann ist $\varphi^*: A(Y) \rightarrow A(X), \varphi^*(f) = f \circ \varphi$ eine Abbildung von K -Algebren. \square

Bemerkung 4.116. Sei K ein Körper und $R = K[X_1, \dots, X_n]$. Dann ist für J, J' Ideale von R

$$V(J) = V(J') \iff \sqrt{J} = \sqrt{J'}$$

Denn $V(J) = V(J') \implies I(V(J)) = I(V(J'))$ und wenn $\sqrt{J} = \sqrt{J'}$ dann ist $I(V(J)) = I(V(J'))$ also $V(J) = V(I(V(J))) = \dots = V(J')$

Definition 4.117. Sei K algebraisch abgeschlossener Körper. Eine Varietät $X \subseteq K^n$ ist irreduzibel, falls $X \neq \emptyset$ und nicht die Vereinigung zweier echter Untervarietäten ist.

Satz 4.118. Eine Varietät X ist irreduzibel genau dann wenn $I(X)$ prim ist.

Beweis. Sei $I = I(X)$. Angenommen es gibt $f, g \in A = K[X_1, \dots, X_n] \setminus I$ sodass $fg \in I$ Sei $J_1 = (I, f)$ und $J_2 = (I, g)$. Es ist $V(J_1) = X \cap V(f)$ und da $f \notin I(X)$ ist $V(J_1) \subsetneq X$ und analog $V(J_2) \subsetneq X$. Es ist also

$$X = V(J_1) \cup V(J_2)$$

reduzibel. Wenn $I(X)$ prim ist und

$$X = V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 J_2)$$

ist, dann ist $J_1 J_2 \subseteq I(X)$ Also ist $J_1 \subseteq I(X)$ oder $J_2 \subseteq I(X)$, d.h. $X = V(J_1)$ oder $X = V(J_2)$. \square

Beispiel 4.119.

- (1) Primideale in $K[X]$ sind (0) und $(X - a)$ für $a \in K$. Die Zugehörigen irreduziblen Varietäten sind K bzw. $\{0\}$.
- (2) Primideale in $K[X, Y]$ sind (0) , f für irreduzible Polynome f und $(X - a, X - b)$ für $a, b \in K$. Zugehörige irreduzible Varietäten sind K^2 , die durch $f = 0$ definierte Kurve und die Einpunktmenge (a, b) .

Korollar 4.120. Sei K algebraisch abgeschlossen. Dann gibt es mit V, I bijektive Korrespondenz

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \text{Radikale } J = \sqrt{J} \subseteq K[X_1, \dots, X_n] \right\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \xleftarrow{I} \end{array} & \left\{ \text{Varietäten } X \subseteq K^n \right\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \left\{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subseteq K[X_1, \dots, X_n] \right\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \left\{ \text{irreduzible Varietäten } X \subseteq K^n \right\} \end{array}$$

Also ist $\text{Spec } K[X_1, \dots, X_n] = \{ \text{irreduzible Varietäten } X \subseteq K^n \}$.

Satz 4.121. Sei K algebraisch abgeschlossen und $A = K[X_1, \dots, X_n]/J$ für ein Ideal $J \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$. Dann gibt es Bijektive Korrespondenz

$$\text{Spec } A \leftrightarrow \{ \text{irreduzible Varietäten } X \subseteq V(J) \}$$

Definition 4.122 (Zariski Topologie). Die Varietäten $X \subseteq K^n$ bilden abgeschlossene Mengen einer Topologie auf K^n .

Bemerkung 4.123. Auf \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n ist das nicht die Standardtopologie. Zwar sind Varietäten in der Standardtopologie abgeschlossen, da Polynome stetig sind, aber $B_\epsilon(o)$ ist nicht Zariski-offen.

Beispiel 4.124. Ideale $\neq 0$ in $K[X]$ sind von der Form (f) und $V(f)$ ist endlich. Die Zariski Topologie entspricht hier der Co-endlichen Topologie. Die Zariski-Topologie ist nicht Hausdorff, für $X = V(J)$ irreduzibel ist X nicht die Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen. Also haben zwei nicht-leere offene Teilmengen von X nicht-leeren Schnitt. Somit X nicht Hausdorff und damit auch nicht K^n .

Satz 4.125 (Zariski Topologie ist noethersch).

- (1) Jede absteigende Kette $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ von Varietäten von K^n wird stationär.
- (2) Eine nicht-leere Menge von Varietäten von K^n hat minimales Element.

Beweis. 1 und 2 sind äquivalent. Zeige also 1. Die absteigende Kette der Varietäten korrespondiert zu absteigender Kette von Idealen in $K[X_1, \dots, X_n]$ und das ist noethersch, wird also stationär. \square

Satz 4.126. Sei $X \subseteq K^n$ Varietät. Dann hat X Zerlegung

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$$

wobei jedes X_i irreduzibel ist und $X_i \subsetneq \bigcup_{j \neq i} X_j$.

Beweis. Wenn X nicht irreduzibel ist, dann ist $X = X_1 \cup X_2$ mit $X_1, X_2 \subsetneq X$. Fahre so fort mit X_1 und X_2 und erhalte absteigende Kette von Untervarietäten von X . Da X noethersch ist, muss diese abbrechen. \square

Korollar 4.127. Ein Radikal Ideal J von $K[X_1, \dots, X_n]$ ist Schnitt von endlich vielen Primidealen.

Beweis. Irreduzible Zerlegung von $V(J)$ entspricht Schnitt von Primidealen da $I(V(J)) = \sqrt{J} = J$ \square

Definition 4.128. Sei A ein Ring. Die Zariski-Topologie auf $\text{Spec } A$ ist gegeben durch die abgeschlossenen Mengen $V(J) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid J \subseteq \mathfrak{p}\}$ wobei $J \subseteq A$ ein Ideal ist.

Bemerkung 4.129. $J \subseteq \mathfrak{p}$ bedeutet, dass $f \in J$ auf 0 geschickt wird durch $A \rightarrow A/\mathfrak{p}$.

Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$. Es gilt

- (1) $V(\mathfrak{p})$ ist der Abschluss von $\{\mathfrak{p}\}$.
- (2) $\{\mathfrak{p}\} \subseteq \text{Spec}(R)$ ist abgeschlossen genau dann wenn \mathfrak{p} maximal ist.

Beweis. Sei $V = V(J)$ abgeschlossen mit $\{\mathfrak{p}\} \subseteq V$, d.h. $J \subseteq \mathfrak{p}$. Dann ist $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(J)$ und somit $V(\mathfrak{p})$ der Abschluss. Die zweite Aussage folgt aus der ersten. \square

Bemerkung 4.130. Sei $X \subseteq \text{Spec } A$ und $I(X) := \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$. Es gilt

$$\sqrt{J} = \bigcap_{J \subseteq \mathfrak{p} \text{ prim}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} = I(V(J))$$

Wenn J, J' Radikale Ideale, dann

$$V(I) = V(J') \implies J = \sqrt{J} = \sqrt{J'} = J'$$

. Das gibt Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \text{Radikale } J = \sqrt{J} \subseteq K[X_1, \dots, X_n] \right\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \xleftarrow{I} \end{array} & \left\{ \text{abgeschlossene } X \subseteq \text{Spec } A \right\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \left\{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subseteq K[X_1, \dots, X_n] \right\} & \xrightarrow{\quad} & \left\{ X \subseteq \text{Spec } A \text{ irreduzibel} \right\} \end{array}$$

und analog impliziert A noethersch, dass $\text{Spec } A$ noethersch ist und in dem Fall jede abgeschlossene Menge von $\text{Spec } A$ Vereinigung endlich vieler irreduziblen Mengen ist.

Korollar 4.131. Sei A noethersch.

- (1) $J \subseteq A$ Ideal dann hat $V(J)$ endliche Anzahl minimaler Elemente.
- (2) $\text{rad } J$ ist Schnitt endlich vieler Primideale.
- (3) Wenn A Nullteiler hat, dann hat A entweder nicht-triviale nilpotente Elemente oder endliche Anzahl ≥ 2 von minimalen Primidealen

Beweis. 1 und 2 sind klar. Angenommen $\text{rad } A = 0$. Es ist $\text{rad } A = \bigcap \mathfrak{p}_i$ wobei \mathfrak{p}_i die minimalen Primideale von A sind. Fall es nur ein \mathfrak{p} gibt, dann ist $\mathfrak{p} = 0$ also A nullteilerfrei. \square

Ein Topologischer Raum X ist noethersch genau dann, wenn jede offene Menge quasi-kompakt ist.

Beweis. Sei X noethersch und $U \subseteq X$ offen mit $U = \bigcup_i U_i$. Sei $V_1 = U_{i_1}^c$. Angenommen V_1, \dots, V_k gegeben. Wenn $U = \bigcup_{i=1}^k U_{i_k}$ dann ist man fertig. Sonst wähle $U_{i_{k+1}}$ mit

$$\bigcup_{i=1}^k U_{i_k} \subsetneq \bigcup_{i=1}^{k+1} U_{i_k}$$

und setze

$$V_{k+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} U_{i_k} \right)^c \subsetneq V_k$$

. Das ist abgeschlossen und gibt absteigende Kette abgeschlossener Mengen $V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \dots$ was stationär wird. Also ist U quasi-kompakt. Wenn andersrum jede offene Menge quasi-kompakt ist und $V_1 \supsetneq \dots$ Kette von abgeschlossenen Mengen ist, dann setze $U_i = V_i^c$. Dann hat $\bigcup U_i$ endliche Teilüberdeckung und die Kette wird stationär. \square

Sei R ein Ring. Dann ist $\text{Spec } R$ quasi-kompakt.

Beweis. Sei $\text{Spec } R = \bigcup U_i$ offene Überdeckung. Dann ist

$$\begin{aligned} \emptyset &= \bigcap U_i^c \\ &= \bigcap V(J_i) \\ &= \bigcap (J_i) \end{aligned}$$

Dann gibt es also Darstellung

$$1 = \sum_{k=1}^n f_{i_k} x_{i_k}$$

mit $f_{i_k} \in R$ und $x_{i_k} \in J_{i_k}$. Also ist schon

$$\emptyset = V\left(\sum_{i=1}^n J_{i_k}\right)$$

und somit $\text{Spec } R = \bigcup_{i=1}^n U_{i_k}$ \square

Beispiel 4.132. Sei $R = K[X_1, X_2, \dots]/J^2$ mit $J = (X_1, X_2, \dots)$. Es ist

$$\text{Spec}(R) = \{J/J\}$$

noethersch aber R ist nicht noethersch da $(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \dots$ aufsteigende Kette ist, die nicht stationär wird.

Definition 4.133 (Dimension).

- (1) Die Dimension einer Varietät $X \subseteq K^n$ ist das Supremum aller Längen von Ketten von irreduziblen Varietäten $V_0 \subsetneq \dots \subsetneq V_d \subseteq X$.
- (2) Die Krull-Dimension eines Ringes R ist das Supremum aller Längen d von Ketten von Primidealen $P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_d$ in R .

Beispiel 4.134. Körper haben die Dimension 0. Es ist $\dim(\mathbb{Z}) = 1$ und $\dim(K[X]) = 1$. Ein artinscher Ring ist ein noetherscher Ring mit Krull-Dimension 0

Für einen Körper K gilt

$$\dim(K[X_1, \dots, X_n]) = n.$$

Beweis. Primideale $\mathfrak{p}_i = (X_1, \dots, X_i)$ bilden Kette der Länge n . Der Fall $n = 0$ ist klar. Sei $R = K[X_1, \dots, X_n]$ und $d = \dim(R)$. Wenn $n \geq 1$ dann ist $d \geq 1$ und sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_d$ eine Kette von Primidealen. Sei $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_{d-1}$ und $R_i = K[X_i] \subseteq R$ und $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q} \cap R_i$. Angenommen $\mathfrak{q}_i \neq 0$ für alle i . Dann enthält \mathfrak{q}_i ein Polynom $g_i(X_i)$ mit $g_i \neq 0$ für alle i . Sei $J = (g_1, \dots, g_n)$. Es ist R/J ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, also ist R/J artinscher Ring also null-dimensional. Wir haben aber eine Kette

$$\mathfrak{p}_{d-1}/J \subsetneq \mathfrak{p}_d/J$$

in R/J . Also muss es in i gegeben sodass $\mathfrak{q}_i = 0$. Nach Umordnen ist das ohne Einschränkung \mathfrak{q}_n . Sei $S = R_n \setminus \{0\}$ multiplikative Menge. Dann ist $S \cap \mathfrak{p}_{d-1} = \emptyset$. Also gibt es Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{d-1}$ von Primidealen der Länge $d - 1$ in Lokalisierung

$$S^{-1}R = (S^{-1}K[X_n])[X_1, \dots, X_{n-1}] = K(X_n)[X_1, \dots, X_{n-1}].$$

Das ist Polynomring in $n - 1$ Variablen über Körper. Nach Induktion ist also $d - 1 \leq n - 1$ also $d \leq n$. □

- (1) Ein Hauptidealring, der kein Körper ist hat Dimension 1.
- (2) $R = K[X_1, X_2, \dots]$ hat Dimension ∞ .

Definition 4.135. Sei $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$. Dann ist (\mathfrak{p}) definiert als die Länge der absteigenden Ketten von Primidealen, die bei \mathfrak{p} beginnen.

Es ist $(\mathfrak{p}) = \dim(R_{\mathfrak{p}})$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$ und

$$\dim(R) = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R} (\mathfrak{p}) = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Specm}} (\mathfrak{p})$$

Beweis. 1. ist klar. Ohne Einschränkung sei $\dim(R) < \infty$ und $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ maximale Kette. Dann ist $\dim(R) = d$ und

$$\sup \dim(R_{\mathfrak{p}}) = \sup (\mathfrak{p}) = (\mathfrak{p}_d) = d$$

□