

3.3 Planimetrie III - zobrazení

Definice 3.3.1 Geometrické zobrazení

Geometrické zobrazení je zobrazení z bodové množiny V do bodové množiny O .

Pokud pro množiny platí, že $V = O$ jedná se o zobrazení v množině a pokud $D_Z = H_Z = V$ jedná se o transformaci prostoru V .

Definice 3.3.2 Shodná zobrazení

Pokud pro všechny dvojice bodů X, Y a jejich obrazy X', Y' v zobrazení Z platí, že $|XY| = |X'Y'|$, nazýváme zobrazení shodností.

Samodružné body a přímky

Samodružným bodem zobrazení Z nazveme každý bod, který se zobrazí sám na sebe.

Samodružnou přímkou zobrazení Z nazveme každou přímku, která se zobrazí sama na sebe. (Samodružná přímka se nemusí skládat ze samodružných bodů.)

Definice 3.3.3 Identické zobrazení

Existuje právě jedno zobrazení I , v němž je každý bod samodružný. Toto zobrazení nazveme identickým zobrazením neboli identitou.

Involuce

Involutorní zobrazení je takové zobrazení, kde pro všechny body X, Y platí:

Když obrazem bodu X je bod Y , potom obrazem bodu Y je bod X .

V případě involutorních shodností mluvíme o souměrnostech.

Přímá a nepřímá shodnost

Dva objekty jsou přímo shodné právě tehdy, když jeden mohu ztotožnit s druhým pouhým přesunem v příslušné rovině. V opačném případě mluvíme o nepřímé shodnosti.

Osová souměrnost O

Definice 3.3.4

Nechť je dána pevná přímka o (osa souměrnosti). Každému bodu X roviny je přiřazen jeho obraz X' tak, že platí: $XX' \perp o \wedge |XX_0| = |X_0X'|$, kde X_0 je průsečík osy s úsečkou XX' .

Vlastnosti:

- Involuce
- Množinou SB je osa souměrnosti, množinu SP tvoří osa se všemi svými kolmicemi
- Nepřímá shodnost
- O lze zadat též dvojicí sobě odpovídajících si bodů

Užití:

- Konstrukce příčky mezi dvěma objekty, která je kolmá na danou přímku a je jí půlena
- Úlohy o odraze
- Úlohy s minimálním součtem vzdáleností
- Úlohy s danou osou úhlu

Translace (posunutí) T **Definice 3.3.5**

Nechť je dána orientovaná úsečka AB (tj. \overrightarrow{AB}). Každému bodu X roviny je přiřazen jeho obraz X' tak, že platí: $XX' \parallel AB \wedge |XX'| = |AB|$.

Vlastnosti:

- SB nejsou pokud se nejedná o identitu
- SP rovnoběžky s úsečkou AB
- Přímá shodnost
- T lze zadat též dvojicí sobě odpovídajících si bodů

Užití:

- Konstrukce příčky mezi dvěma objekty, která je shodná a rovnoběžná s danou úsečkou

Rotace (otáčení) R **Definice 3.3.6**

Nechť je dán pevný bod S a orientovaný úhel α . Každému bodu X roviny je přiřazen jeho obraz X' tak, že platí: $|XS| = |X'S| \wedge |\sphericalangle XSX'| = \alpha, \alpha \in \langle -360^\circ, 360^\circ \rangle$.

Vlastnosti:

- SB je pouze bod S , pokud se nejedná o identitu
- SP nejsou, pokud se nejedná o identitu nebo středovou souměrnost
- Přímá shodnost
- R lze zadat též dvojicí sobě odpovídajících si shodných úseček a to buď antiparalelních nebo různoběžných

Užití:

- Konstrukce příčky mezi dvěma objekty, pokud krajní body X, Y příčky mají stejnou vzdálenost od pevného bodu S a je určena velikost $|\sphericalangle XSY|$

Středová souměrnost S **Definice 3.3.7**

Nechť je dán pevný bod S . Každému bodu X roviny je přiřazen jeho obraz X' tak, že platí:

$$X' \in \overleftrightarrow{SX} \wedge |SX| = |SX'|$$

Definice – varianta

Středová souměrnost se středem S je rotace okolo bodu S o úhel $\pm 180^\circ$.

Vlastnosti:

- Involuce
- SB je bod S
- SP jsou přímky procházející bodem S
- Přímá shodnost
- S lze zadat též dvojicí sobě odpovídajících si bodů

Užití:

- Konstrukce příčky mezi dvěma objekty, která je daným bodem půlena

Skládání shodných zobrazení**Věta 3.3.1**

Každou shodnost v rovině lze složit z nejvýše tří osových souměrností.

Věta 3.3.2

V rovině existuje právě šest shodností.

Jsou to: osová souměrnost, identita, posunutí, rotace, středová souměrnost, posunuté zrcadlení.

Posunuté zrcadlení P_z **Definice 3.3.8**

Posunuté zrcadlení je zobrazení složené z osové souměrnosti a posunutí ve směru její osy.

Vlastnosti:

- SB nejsou
- SP je osa příslušné osové souměrnosti
- Nepřímá shodnost

Neshodná zobrazení**Stejnolehlost H** **Definice 3.3.9**

Nechť je dán pevný bod S a pevné číslo $\kappa \neq 0, \pm 1$. Každému bodu X roviny je přiřazen jeho obraz X' tak, že body S, X, X' leží v přímce a platí: $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$ a) $X' \in \overrightarrow{SX}$ pro $\kappa > 0$

b) $X' \notin \overrightarrow{SX}$ pro $\kappa < 0$

Vlastnosti:

- SB bod je bod S
- SP jsou přímky procházející bodem S
- Pro přímku a její obraz platí: $p \parallel p'$
- Pro velikost úsečky a jejího obrazu platí: $|X'Y'| = |\kappa| \cdot |XY|$
- Pro obsah obrazce a jeho obrazu platí: $S' = \kappa^2 \cdot S$

Užití:

- Zvětšení, zmenšení v daném poměru
- Konstrukce příčky mezi dvěma objekty, která prochází daným bodem jenž ji dělí v daném poměru
- Při vepisování určeného objektu zadaným prvkům

Rozšířením definice o $\kappa = \pm 1$ dostáváme identitu a středovou souměrnost.

Stejnolehlost kružnic

Pokud uvažujeme rozšířenou definici stejnoolehlosti, jsou každé dvě kružnice stejnoolehle.

Podobnost P **Definice 3.3.10**

Když každému bodu X roviny je přiřazen jeho obraz X' tak, že platí: $|SX'| = k \cdot |SX|$, kde $k \in R^+$, hovoříme o podobnosti.

Užití:

- V úlohách s daným poměrem podobnosti

Věta 3.3.3

Každou podobnost lze složit ze stejnoolehlosti a shodného zobrazení.

Stejně jako shodnosti rozdělujeme podobnosti na přímé a nepřímé.

Poznámka:

Afinity v rovině

Perspektivní zobrazení

Maticová reprezentace analytického vyjádření shodností

$$x' = A \cdot x + b$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \text{ kde } a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \wedge a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0.$$

Nelineární zobrazení - kruhová inverze

Definice

Nechť je dána kružnice $\omega(S, r)$. Každému bodu X roviny je přiřazen jeho obraz X' tak, že body S, X, X' leží v přímce a platí: $|SX'| \cdot |SX| = r^2$.