7.4 Posloupnosti

Definice 7.4.1
Posloupností v množině A nazveme libovolné zobrazení z množiny N do množiny A.

Příklad 7.4.1
A,B,A,B,A,B,A
A,B,B,A,A,B,B,A,A,B,B,A,…

Pokud je $A = R$, nekonečnou (resp. konečnou) číselnou posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení definované na množině všech přirozených čísel N (resp. $\{1,2,3,...,n\}$).

Příklad 7.4.2
5,5,5,5,5,5,5
1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,…

Číselné posloupnosti

Definice 7.4.2
Posloupnost reálných čísel je tedy každá funkce f s definičním oborem $D_f = N$.
Posloupnost reálných čísel lze psát $[[1, f(1)], [2, f(2)], [3, f(3)], ..., [n, f(n)], ...]$, což obvykle zapisujeme stručněji $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... = \{a_n\}_{n=1}^{k} \quad k \in N^*$,
kde $a_n = f(n)$ je n - tý člen posloupnosti, mluvíme o zadání vzorcem pro n - tý člen.

Posloupnost kromě toho může být zadána graficky nebo tzv. rekurentně, což znamená znalost prvního nebo několika prvních členů společně s předpisem, kterým je možné jednoznačně určit bezprostředně následující člen .

Příklad 7.4.3
Určete deset prvních členů posloupností a posloupnosti znázorněte

a) $\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\}_1^{\infty}$

b) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Na posloupnosti lze přirozeně rozšířit celou řadu vlastností, které známe z nauky o funkcích.

Příklad 7.4.4
Definujte posloupnost klesající, nerostoucí, neklesající a rostoucí.
Definujte posloupnost monotónní a ryze monotónní.
Definujte posloupnost omezenou shora, omezenou zdola a posloupnost omezenou.
Definujte prostou posloupnost.

Pokud $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, potom lze vytvořit součet, rozdíl a součin posloupností jako posloupnosti $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a v případě, že $b_n \neq 0$ i podíl posloupností $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice 7.4.3 (vybraná posloupnost)
Nechť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, potom posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Aritmetická a geometrická posloupnost

Definice 7.4.4 Aritmetická posloupnost
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická právě tehdy, když platí: $\forall n \in N : a_{n+1} - a_n = d$, kde d je konstanta zvaná diference aritmetické posloupnosti.

Věta 7.4.1
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost. Pak platí:

I. $\forall n \in N : a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

II. $\forall r, s \in N : a_r = a_s + (r-s)\cdot d$

III. $\forall n \in N : s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$, kde s_n je součet prvních n členů této posloupnosti

Definice 7.4.5 Geometrická posloupnost
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická právě tehdy, když platí: $\forall n \in N : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde q je konstanta zvaná kvocient geometrické posloupnosti.

Věta 7.4.2
Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost. Pak platí:

I. $\forall n \in N : a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1}$

II. $\forall r, s \in N : a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

III. $\forall n \in N : s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, pokud $q \neq 1$ a pokud $q = 1$ je $s_n = a_1 \cdot n$,
kde s_n je součet prvních n členů této posloupnosti,

!!!!!Nejdůležitější pojem matematické analýzy – limita!!!!!

Definice 7.4.6 Limita posloupnosti

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnou reálnému číslu a právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Zapisujeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Pro úplnost dodejme symbolický zápis definice

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N : \ \forall n > n_0 : \ |a_n - a| < \varepsilon$$

Jestliže posloupnost má limitu, pak říkáme, že je konvergentní, nebo též, že konverguje k a.
Jestliže posloupnost nemá limitu, pak říkáme, že je divergentní, nebo též, že diverguje.

Věty o limitách

Věta 7.4.3

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 7.4.4

Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti a existuje-li $k \in N$ takové, že pro všechna $n > k$ platí, že $a_n = b_n$, pak pokud je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, potom je i posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

Věta 7.4.5

Každá vybraná posloupnost z konvergentní posloupnosti je konvergentní a má tutéž limitu.

Důsledkem čehož je, že pokud z dané posloupnosti existují dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, potom původní posloupnost je divergentní.

Věta 7.4.6

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 7.4.7

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě konvergentní posloupnosti, potom:

I. je konvergentní i posloupnost $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

II. je konvergentní i posloupnost $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

III. za podmínek $b_n \neq 0$ a $b \neq 0$ je konvergentní i posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Definice 7.4.7 Nevlastní limity

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $+\infty(-\infty)$, jestliže

$\forall h \in R : \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 : a_n > h(a_n < h)$.

Zapisujeme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ a říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k nekonečnu.

Poznámky:

I. *Každá monotónní posloupnost má limitu (vlastní, nebo nevlastní).*
Každá omezená posloupnost, která je monotónní je konvergentní.
Speciálně: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045...$

II. *Hromadné body a hromadné hodnoty*

Diferenční rovnice

Definice diference

Nechť je dána posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{m}$, *kde* $m \in \{1,2,3,...,\infty\}$.
Diferencí dané posloupnosti v bodě n *nazveme číslo* $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$.
Posloupnost $\{\Delta y_n\}_{n=1}^{m}$ *nazveme diferencí posloupnosti* $\{y_n\}_{n=1}^{m}$.

Věta 7.4.8

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ *a* $\{b_n\}_{n=1}^{m}$ *jsou posloupnosti a* $c \in R$ *je pevné číslo. Potom platí:*

I. $\Delta(a_n + b_n) = \Delta a_n + \Delta b_n$

II. $\Delta(c \cdot a_n) = c \cdot \Delta a_n$

III. $\Delta(a_n \cdot b_n) = (\Delta a_n)\cdot b_n + a_n \cdot (\Delta b_n) + \Delta a_n \cdot \Delta b_n$

IV. $\Delta\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{(\Delta a_n)\cdot b_n - a_n \cdot (\Delta b_n)}{b_n \cdot b_{n+1}}$

Druhá diference (nebo diference druhého řádu) posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{m}$ *je* $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n)$ *a obecně o* $\Delta^k a_n = \Delta(\Delta^{k-1} a_n)$ *mluvíme jako o diferenci* $k-$*tého řádu.*

Věta 7.4.9 *O* $k-$*té diferenci*

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ *a* $k \in N$ *je pevné číslo. Pak pro všechna* $n \in N$ *platí, že*

$$\Delta^k y_n = y_{n+k} - \binom{k}{1}\cdot y_{n+k-1} + \binom{k}{2}\cdot y_{n+k-2} - ... + (-1)^k \cdot y_n \ .$$

Diferenční rovnice $k-$*tého řádu představují rekurentní určení posloupnosti rovnicí* $\Delta^k y_n = f\left(n, y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n, ..., \Delta^{k-1} y_n\right)$, *přičemž řešením rozumíme vzorec pro* $n-$*tý člen příslušné posloupnosti, tedy* y_n .

Věta 7.4.10
Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ *řešením diferenční rovnice, potom je řešením i libovolná posloupnost* $\{y_n + C\}$, *kde* $C \in R$.

Řešení obsahující obecnou konstantu se nazývá obecné řešení, při konkrétní volbě hodnoty konstanty C *dostaneme tzv. partikulární řešení.*

Lineární diferenční rovnice k-tého řádu
Lineární diferenční rovnice je dána lineární funkcí $k+1$ *proměnných definovanou na množině* NxR^k *rovnicí* $\Delta^k y_n = f\left(n, y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n, ..., \Delta^{k-1} y_n\right)$.

Pokud diference v příslušném předpisu nahradíme podle věty 7.4.x dostáváme diferenční rovnici ve tvaru $y_{n+k} = f'(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k-1})$.
Po úpravě $y_{n+k} + p_1(n)\cdot y_{n+k-1} + p_2(n)\cdot y_{n+k-2} + ... + p_{k-1}(n)\cdot y_{n+1} + p_k(n)\cdot y_n = q(n)$

Věta 7.4.11
Všechna řešení lineární diferenční rovnice k-tého řádu dostaneme tak, že k jednomu pevně zvolenému partikulárnímu řešení této rovnice přičteme všechna řešení příslušné rovnice zkrácené tj. rovnice kde $q(n) = 0$.
Všechna řešení zkrácené rovnice k-tého řádu vyjádříme jako lineární kombinaci „ k “ nezávislých posloupností $c_1 \cdot a_1(n) + c_2 \cdot a_2(n) + ... + c_k \cdot a_k(n)$, *kde* $c_i \in R$.

Zkrácená lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty
$y_{n+k} + p_1 \cdot y_{n+k-1} + p_2 \cdot y_{n+k-2} + ... + p_{k-1} \cdot y_{n+1} + p_k \cdot y_n = 0$, *kde* $p_i \in R$

Předpokládáme řešení ve tvaru $y_n = \lambda^n$. *Po dosazení do rovnice vydělíme* $\lambda^n \neq O$, *čímž dostaneme charakteristickou rovnici příslušnou ke zkrácené rovnici:*
$\lambda^k + p_1 \cdot \lambda^{k-1} + p_2 \cdot \lambda^{k-2} + ... + p_{k-1} \cdot \lambda + p_k = 0$

Řešení potom závisí na stanovení kořenů charakteristické rovnice:

I. „ k “ různých reálných kořenů

Každé řešení takové rovnice je tvaru $c_1 \cdot (\lambda_1)^n + c_2 \cdot (\lambda_2)^n + ... + c_k \cdot (\lambda_k)^n$

II. „ k “ násobný reálný kořen λ_i

Každé řešení takové rovnice je tvaru
$c_1 \cdot (\lambda_i)^n + c_2 \cdot n \cdot (\lambda_i)^n + c_2 \cdot n^2 \cdot (\lambda_i)^n + ... + c_k \cdot n^{k-1} \cdot (\lambda_i)^n$

III. dvojice komplexně sdružených kořenů $a \pm bi$

Pokud $a + bi = \lambda_1 = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ *je každé řešení takové rovnice*
$c_1 \cdot (r)^n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_2 \cdot (r)^n \sin(n \cdot \varphi)$

Věta 7.4.12 *O partikulárním řešení*
Pokud pravá strana rovnice tj. $q_n = (\rho)^n \cdot P_m(n)$, *kde* $P_m(n)$ *je polynom* $m-$*tého stupně, potom je jedno partikulární řešení tvaru* $y(n) = (n)^k \cdot (\rho)^n \cdot Q_m(n)$, *kde* $Q_m(n)$ *je vhodný polynom* $m-$*tého stupně a „ k “ je násobnost čísla* ρ *jako kořene charakteristické rovnice.*