9.2 Derivace funkce

Definice 9.2.1a
Limitu $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nazveme derivací funkce f v bodě a.
Definice 9.2.1b
Limitu $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ nazveme derivací funkce f v bodě a.
Značíme $f'(a) = \frac{df(a)}{dx}$.

Geometrický význam derivace funkce v bodě
Má-li tečna grafu funkce f v bodě a rovnici $t: y = k \cdot x + q$, kde k nazýváme směrnicí tečny, platí $k = f'(a)$. Je to tudíž tangens úhlu, který svírá tečna grafu v bodě a s kladným směrem osy x.

Fyzikální význam derivace funkce v bodě
Platí-li, že fyzikální veličina u závisí na čase t explicitním vztahem $u = u(t)$, je hodnota derivace této funkce v čase t_0 rychlostí změny příslušné veličiny.
Speciálně pokud $\vec{r}$ je polohový vektor hmotného bodu a $\vec{r} = \vec{r}(t)$ představuje jeho závislost na čase udává $\frac{d\vec{r}}{dt}$ vektor okamžité rychlosti a jeho velikost pak její velikost.

Věta 9.2.1
Jestliže má funkce f v bodě a derivaci, potom je funkce f v bodě a spojitá.

Věta 9.2.2
Nechť f, g jsou funkce, c libovolné reálné číslo a nechť existují derivace $f'(a), g'(a)$.
Potom existují též derivace v bodě a funkcí:
$(c \cdot f(a))' = c \cdot f'(a)$ $\quad$ $(f(a) + g(a))' = f'(a) + g'(a)$
$(f(a) \cdot g(a))' = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
a pokud $g(a) \neq 0$ též $\left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)' = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$
A dále:
Nechť má funkce f v bodě $a \in D(f)$ derivaci a funkce g má derivaci v bodě $f_a = f(a)$.
Pak má derivaci i složená funkce $y = g(f(a)) = f \circ g$ a platí
$y' = (g(f(a)))' = g'(f_a) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Věta 9.2.3
Nechť má funkce f v bodě $a \in D(f)$ derivaci zleva i zprava a tyto derivace se sobě rovnají. Potom má funkce f v bodě a derivaci.

Definice 9.2.2
Má-li funkce f derivace ve všech bodech $a \in M \subseteq D(f)$, potom hovoříme o derivaci na množině M.

Derivaci potom můžeme chápat ve dvojím významu. Za prvé jako číslo odávající směrnici tečny v daném bodě tečny grafu příslušné funkce a za druhé jako novou funkci, kterou nám určují výše uvedené hodnoty na množině M. Tuto novou funkci nazýváme derivace funkce a označujeme $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$.

Tabulka 9.2.1 Na základě definice a věty 9.2.2 platí

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	$D(f)$
1.	$c, c \in R$	0	R
2.	$x^n, n \in N, n \in Z, n \in R$	$n \cdot x^{n-1}$	$R, R - \{0\}, R^+$
3.	e^x	e^x	R
4.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	R^+
5.	$\sin x$	$\cos x$	R
6.	$\cos x$	$-\sin x$	R
7.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
8.	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
9.	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	R
10.	$arc\cot gx$	$\frac{-1}{1+x^2}$	R

Definice 9.2.3 **Derivace vyšších řádů**
Nechť má funkce f' derivaci na množině M derivaci, potom tuto funkci nazveme druhá derivace a zapisujeme f'' nebo $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$. Analogicky definujeme n-tou derivaci $f^{(n)} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Derivace funkce zadané implicitně
Někdy není jednoduché nebo dokonce možné algebraicky vyjádřit neznámou funkci z předpisu $F(x, y) = 0$, potom hovoříme o funkci $f : y = f(x)$ zadané implicitně. Je-li fce F na nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ ryze monotónní, potom existuje derivace funkce f a při jeho

výpočtu derivujeme obě strany implicitní rovnice funkce, přičemž se symbolem y zacházíme jako se složenou funkcí $y = f(x)$.

Příklad 9.2.1
Určete tečnu kružnice o obecné rovnici $x^2 + y^2 = r^2$ *v bodě* $x = x_0 < r, y = ? > 0$.
Dosazením x_0 *do rovnice kružnice s přihlédnutím k podmínce kladené na* y *platí:*
$y_0 = \sqrt{r^2 - x_0^2}$. *Derivací obou stran rovnice dostáváme* $2 \cdot x + 2 \cdot y \cdot y' = 0$, *odkud* $y' = \dfrac{-x}{y}$.

Proto $y'_{[x_0, y_0]} = \dfrac{-x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}}$. *Pro tečnu dosazením do vztahu* $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$

dostáváme $y - \sqrt{r^2 - x_0^2} = \dfrac{-x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^2}} \cdot (x - x_0)$.

Pár důležitých vět na závěr:

Rolleova věta
Nechť funkce f má tyto vlastnosti:
1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$
2) má derivaci v každém bodě intervalu (a, b)
3) $f(a) = f(b) = 0$

Potom existuje takový bod $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$.

a její zobecnění

Věta Lagrangeova
Nechť funkce f má tyto vlastnosti:
1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$
2) má derivaci v každém bodě intervalu (a, b)

Potom existuje takový bod $c \in (a, b)$, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.