Věta

Pokud má funkce v daném bodě limitu, pak je tato limita jednoznačná.

Poznámka

Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = A$ a $\lim_{x\to c} f(x) = B$. Potom platí $A = B$.

Věta o limitě dvou funkcí

Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = A$ a $\exists\delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a,\, \delta)$ platí $f(x) = g(x)$. Potom $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A$.

Poznámka

Jsou-li si rovny funkční hodnoty funkcí f a g na prstencovém okolí bodu a, pak se limity rovnají. Nezáleží na funkčních hodnotách v bodě a.

Věta o strážích (někdy také o policistech či o třech limitách)

Nechť $\exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{P}(a,\, \delta)$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$.
Pak $\exists \lim_{x\to a} g(x)$ a platí $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Poznámka

Když jsou na nějakém prstencovém okolí bodu a splněny nerovnosti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a limity funkcí f a h jsou v bodě a rovny hodnotě L, pak můžeme ihned říci, čemu se rovná limita funkce g v bodě a.

Věta

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A < B = \lim_{x\to a} g(x)$.
Pak $\exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{P}(a,\, \delta)$ platí $f(x) < g(x)$.

Poznámka

Když jsou hodnoty limit funkcí f a g v bodě a v ostré nerovnosti, pak víme, že existuje prstencové okolí bodu a, ve kterém jsou ve stejné nerovnosti funkční hodnoty těchto funkcí.

Věta

Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathrm{P}(a,\, \delta)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$.
Potom platí $A \leq B$.

Poznámka

Když existuje nějaké prstencové okolí bodu a takové, že jsou v něm funkční hodnoty funkcí f a g v neostré nerovnosti a když má funkce f v bodě a limitu rovnu číslu A a funkce g v bodě a limitu rovnu číslu B, pak víme, že pro tato čísla (a tedy pro příslušné limity) platí stejná neostrá nerovnost.

Poznámka

Věta je v jakémsi smyslu doplňkem k předchozí větě, je ale nutné si uvědomit, že se v ní hovoří pouze o neostré nerovnosti. To je podstatný rozdíl od předchozí věty.

Věta

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $A \in \mathbb{R}$.
Potom $\exists\delta > 0$ tak, že funkce f je omezená na $\mathrm{P}(a,\ \delta)$.

Věta

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $\exists\delta > 0$ tak, že funkce $g(x)$ je omezená na $\mathrm{P}(a,\ \delta)$. Pak $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Poznámka

Když je limita funkce f v bodě a nulová a funkce g je na prstencovém okolí bodu a omezená, pak ihned víme, že limita součinu těchto dvou funkcí v bodě a je také nulová.

Věta

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Potom $\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$.

Věta

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Potom

1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$
3. Je-li $B \neq 0 \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Poznámka

Známe-li limity funkcí f a g v bodě a, pak můžeme ihned určit limitu součtu, rozdílu, součinu a s dodatečnou podmínkou také podílu funkcí f a g.

Věta

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $\exists\delta > 0 \quad x \in \mathrm{P}(a,\ \delta) \Rightarrow f(x) > 0$, pak $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Věta

Je-li $\lim_{x\to a} g(x) = A$ a funkce f je spojitá v bodě A, potom $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(A)$.

Poznámka

Limitu složené funkce $f \circ g$ můžeme spočítat tak, že spočteme limitu vnitřní funkce g a výsledek dosadíme do předpisu vnější spojité funkce f.

Věta

Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = A$ a $\lim_{y\to A} f(y) = B$ a $\exists\delta > 0 \quad x \in \mathrm{P}(a,\ \delta) \Rightarrow g(x) \neq A$. Potom $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.