

URČITÝ INTEGRÁL

Definice: Necht' F je primitivní funkce k funkci f v intervalu J . Rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu se nazývá **určitý integrál funkce f v mezích od a do b** a značí se

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Příklady 1: Vypočítejte:

- a) $\int_2^3 5x^2 dx =$
- b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$
- c) $\int_{-5}^2 (2x - 3) dx =$

Příklady 2: Vypočítejte:

- a) $\int_a^b 2 dx =$
- b) $\int_0^b -\frac{x}{2} dx =$
- c) $\int_1^3 (x - 2) dx =$

Věty o určitém integrálu:

1. Je-li f spojitá a nezáporná funkce v $\langle a; b \rangle$, pak

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

2. Při záměně mezí určitého integrálu se mění znaménko:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

3. Jsou-li f, g funkce spojité v $\langle a; b \rangle$ a pro každé $x \in \langle a; b \rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$, pak

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

4. (*Aditivita určitého integrálu*) Je-li funkce f spojitá v intervalu J , který obsahuje libovolně položené body a, b, c , pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Příklady k procvičení

1. Vypočítejte:

- a) $\int_0^2 3x^2 - 2x + 5 dx =$
- b) $\int_1^4 -x + \frac{4}{x} dx =$
- c) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} =$
- d) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2} =$
- e) $\int_1^4 \sqrt{x}(1 + 2\sqrt{x})dx =$
- f) $\int_a^{2a} \frac{dx}{2\sqrt{ax}} =$ (pro $a > 0$)
- g) $\int_1^8 \frac{\sqrt{x} - x^2}{\sqrt[3]{x}} dx =$

2. Vypočítejte:

- a) $\int_{-1}^1 (x + 1)^3 dx =$
- b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx =$
- c) $\int_{-4}^2 \sqrt{17 + 4x} dx =$
- d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx =$
- e) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx =$
- f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \cos x dx =$

3. Vypočítejte $\int_1^4 f(x)dx$, kde

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \langle 1; 2 \rangle; \\ \frac{8}{x}, & x \in \langle 2; 4 \rangle. \end{cases}$$

4. Vypočítejte $\int_{-2}^2 f(x)dx$, kde $f(x) = x + |x - 1|$.

5. Vypočítejte:

- a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\sqrt{1 - \sin^2 x} - \cos x \right) dx =$
- b) $\int_{-3}^3 \left(\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{4 + 4x + x^2} \right) dx =$

Řešení:

1. a) 18; b) $4 \ln 4 - \frac{15}{2}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{59}{3}$; f) $\sqrt{2} - 1$; g) $\frac{48}{7}\sqrt{2} - \frac{5403}{56}$.
2. a) 4; b) $\frac{7}{24}$; c) $\frac{62}{3}$; d) $\ln 2$; e) $\ln(e + 1) - \ln 2$; f) $-\frac{1}{2}$.
3. a) $\frac{7}{3} + 8 \ln 2$; b) 5.
4. a) 4; b) -3 .