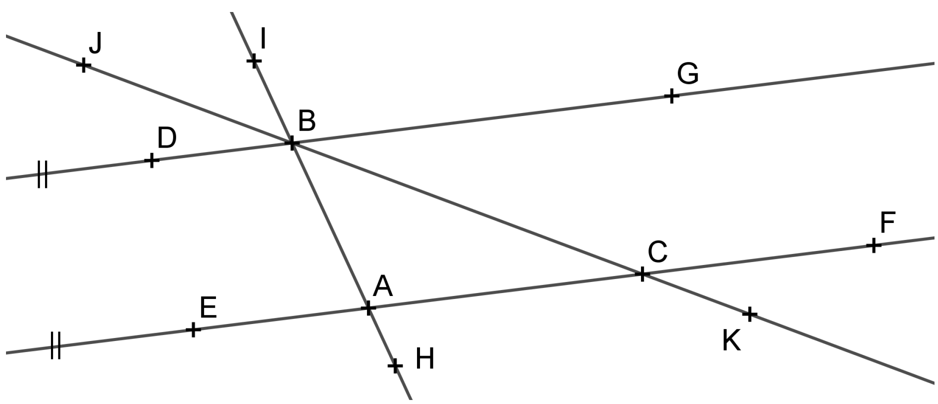
15. ZÁKLADY PLANIMETRIE A KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

1 Základní pojmy

1. Následující vztahy zapište celými větami:
   (a) $A \in p$
   (b) $KL \subset \mapsto STR$
   (c) $B \in p_1 \cap p_2$
   (d) $k(E; |JK|)$
   (e) $|\sphericalangle BGH| = 45°$
   (f) $\mapsto PR \not\subset \mapsto qP$
   (g) $FG \not\subset \sphericalangle MNO$
   (h) $a||b$

2. Zapište symbolicky:
   (a) Úsečka c leží na přímce KL.
   (b) Přímka p se protíná s kružnicí k v bodě H.
   (c) Polopřímka s vnitřním bodem T a počátečním bodem W není částí poloroviny s hraniční přímkou a a vnitřním bodem N.
   (d) vektor s koncovým bodem A a počátečním bodem B je kolmý k přímce p.

3. Podle následujícího obrázku doplňte ve větách chybějící termíny:



   (a) Polopřímky AE a AC jsou polopřímky ....
   (b) Přímka JK je .... rovnoběžek AC a BD.
   (c) Úhly EAB a HAC jsou shodné a ....
   (d) Úhly ACB a BCF jsou ....
   (e) Úhly KCF a DBJ jsou shodné a ....
   (f) Poloroviny ABG a ABD jsou poloroviny ....
   (g) Úhel BCF obsahující bod G bychom podle jeho velikosti označili jako ....
   (h) Úhel BCF obsahující bod A bychom podle jeho velikosti označili jako ....

4. Máte v rovině sestrojeny úhel α. Vysvětlete, jak pomocí kružítka a pravítka sestrojit úhly 3α, $150° - \alpha$ a $\frac{1}{2}\alpha$.

5. V rovině je dáno 10 bodů, z nichž právě 6 leží v jedné přímce, žádná jiná trojice z nich na přímce neleží. Určete, kolik určují různých:

   (a) úseček;

   (b) přímek;

   (c) polopřímek;

   (d) trojúhelníků;

   (e) kružnic.

6. Načrtněte všechny možné vzájemné polohy poloroviny a pravého úhlu.

7. Sestrojte osu úhlu, které svírají dvě různoběžky, jestliže:

   (a) jejich průsečík je dostupný;

   (b) jejich průsečík dostupný není.

2 Trojúhelníky

1. Jestliže v trojúhelníku ABC splývá těžnice na stranu AB s osou této strany, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný. Dokažte.

2. Je dán trojúhelník ABC a v něm libovolný vnitřní bod U. Dokažte, že pak platí:

$$|AU| + |BU| + |CU| > \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |AC|)$$

3. V trojúhelníku KLM s těžištěm T platí: $k = 7{,}8$ cm, $l = 11{,}7$ cm, $m = 13$ cm, $t_k = 11{,}7$ cm, $t_l = 9$ cm, $t_m = 7{,}5$ cm. Určete obvod trojúhelníku $KS_{KL}T$.

4. Vnitřní úhly trojúhelníku jsou v poměru $1 : 4 : 5$. V jakém poměru jsou jeho vnější úhly?

5. Úsečku AB rozdělte body C, D tak, aby platilo $|AC| : |CD| : |DB| = 2 : 3 : 5$.

6. Určete délky stran a, b, c trojúhelníku ABC, je-li $a - b = 4$ cm, $v_a = 6$ cm, $v_b = 9$ cm.

7. V rovnoramenném trojúhelníku ABC platí: $|AC| = |BC| = 13$ cm, $|AB| = 10$ cm. Vypočítejte poloměr kružnice trojúhelníku vepsané a poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

8. V pravoúhelném trojúhelníku ABC s přeponou c dělí pata výšky na stranu c tuto stranu v poměru $2 : 5$. Určete délky stran trojúhelníku, jestliže $v = 10$ cm.

3 Čtyřúhelníky

1. Charakterizujte rovnoběžníky podle délek stran, velikosti vnitřních úhlů, vlastností úhlopříček či možnosti jim vepsat nebo opsat kružnici.

2. V obdélníku $ABCD$ úsečky $S_{AB}D$ a BS_{CD} protínají úhlopříčku AC postupně v bodech K, L. Dokažte, že $|AK| = |KL| = |LC|$.

3. Vnitřní úhly čtyřúhelníku $ABCD$ jsou v poměru

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = n : (n+1) : (n+2) : (n+3), \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je lichoběžník.

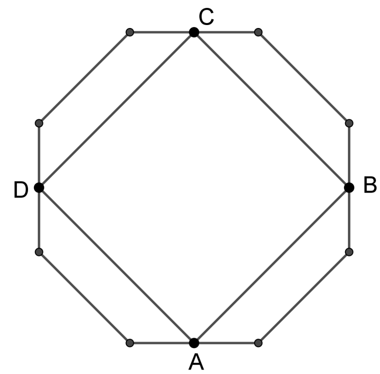
4. Je dán deltoid $KLMN$. Ukažte, že čtyřúhelník $S_{KL}S_{LM}S_{MN}S_{NK}$ je obdélník.

4 Mnohoúhelníky a jejich vlastnosti

1. V pravidelném n-úhelníku určete:
   (a) velikost vnitřního úhlu;
   (b) počet úhlopříček;
   (c) počet os souměrnosti.

2. Pravidelný šestiúhelník má obsah $48\sqrt{3}$ m^2. Určete délku jeho nejkratší úhlopříčky.

3. Je dán čtverec $ABCD$ s délkou hrany a. Je mu opsán pravidelný osmiúhelník jako na následujícím obrázku – vrcholy čtverce splývají se středy čtyř stran osmiúhelníku. Vyjádřete délku strany pravidelného osmiúhelníku v závislosti na a.



4. Pomocí pravítka a kružítka sestrojte:
   (a) pravidelný šestiúhelník;
   (b) pravidelný pětiúhelník;
   (c) pravidelný osmiúhelník.

5 Kružnice, kruh

1. Je dán kružnicový oblouk, u kterého není znám jeho střed. Sestrojte ho.

2. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Z bodu A je opsána kružnice, která prochází bodem B. Z bodu C k ní veďte tečny.

3. Jsou dány kružnice $k(S_1;\ 5\ cm)$ a $l(S_2;\ \sqrt{65}\ cm)$, kde délka středné je 10 cm. Určete vzdálenost jejich průsečíků.

4. Určete poloměr kruhové dráhy, kterou musí běžec uběhnout pětkrát, aby uběhl celkem 2 km.

5. Na ciferníku hodin vyznačíme spojnice bodů 5–2 a 4–12. Jaký úhel spojnice svírají?

6. Je dán deltoid $ABCD$ vepsaný do kružnice, který je souměrný podle úhlopříčky AC. Jestliže $|\sphericalangle BDC| = 15°$, vypočítejte velikosti všech vnitřních úhlů deltoidu.

7. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ $(AB||CD)$ je vepsána kružnice. Dále víme, že $|AB| = 5$ cm, $|CD| = 8$ cm. Vypočítejte délky zbývajících stran.

6 Obvody a obsahy

1. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou c je $b = 8$ cm, $t_b = 5$ cm. Určete obvod a obsah trojúhelníku ABC.
2. Čtyřúhelník má délky stran v poměru $1 : 2 : 4 : 5$ a odvod 60 mm. Jak dlouhá je jeho nejdelší strana?
3. Lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD má obsah $S = 32$ cm^2, dále $|AB| = 6$ cm, $|CD| = 10$ cm. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC.
4. Vypočítejte obsah kosočtverce, kterému je vepsána kružnice s poloměrem 5 cm a jedna úhlopříčka má délku 18 cm.
5. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AC platí: $b = 8$ cm, $v_b = 10$ cm. Vypočítejte obsah trojúhelníku a délku v_a.
6. Je dána kruhová výseč se středovým úhlem $60°$ a obvodem 32 dm. Určete její obsah.
7. Jsou dány čtverec a pravidelný šestiúhelník, kde úhlopříčka čtverce je shodná s nejkratší úhlopříčkou šestiúhelníku. Jaký je poměr obsahů čtverce a šestiúhelníku?

7 Konstrukční úlohy

1. Vysvětlete rozdíl mezi polohovými a nepolohovými úlohami a jak se u nich určuje počet řešení.
2. V rovině ϱ je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Sestrojte následující množiny bodů:

$$\begin{aligned}
A &= \{X \in \varrho;\ |AX| = |BX|\} \\
B &= \{X \in \varrho;\ \leftrightarrow AX \perp AC\} \\
C &= \{X \in \varrho;\ |AX| = |BC|\} \\
D &= \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle BCA|\} \\
E &= \{X \in \varrho;\ |X, \leftrightarrow AB| = |X, \leftrightarrow BC|\} \\
F &= \{X \in \varrho;\ |X, \leftrightarrow CB| = \frac{1}{2}|AB|\} \\
G &= \{X \in \varrho;\ |\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle CAB|\}
\end{aligned}$$

3. Jsou dány úsečky délek a, b, c, kde $a < b < c$. Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečky délek:

$$\frac{3}{5}c, \quad \frac{5}{3}b, \quad a+b, \quad \frac{ab}{c}, \quad \sqrt{b^2 - a^2}, \quad \sqrt{bc}, \quad \sqrt{3}a.$$

4. Jsou dány úsečky a, b a úsečka délky 1. Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečky délek:

$$\frac{b}{a}, \quad \sqrt{c}, \quad \sqrt{a^2+1}$$

5. Jsou dány rovnostranný trojúhelník ABC a Thaletova kružnice τ nad průměrem AB. Sestrojte tečny z bodu C ke kružnici τ.
6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $c = 4$ cm, $t_c = 6$ cm, $v_b = 3{,}5$ cm.
7. Je dána úsečka AB, $|AB| = 5$ cm. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $v_c = 3$ cm, $\gamma = 50°$.
8. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li $b = 5$ cm, $v_c = 4$ cm a poloměr kružnice vepsané $\varrho = 1$ cm.
9. Je dána úsečka AX délky 5 cm. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod X byl středem strany BC.
10. Sestrojte lichoběžník $KLMN$ se základnami LM, KN, ve kterém platí: $|KL| = 4$ cm, $|LM| = 3$ cm, $|LN| = 6$ cm, $v = 3$ cm.
11. Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém $a = 5$ cm, $\beta = 120°$, $e = 7$ cm, $f = 7$ cm.