Řešení vzorového testu příjmacích zkoušek na FEL ČVUT - VZOR01

1. Množina všech řešení nerovnice $2^{|x+3|} < 2$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ je...

$$\begin{aligned} 2^{|x+3|} &< 2 \\ 2^{|x+3|} &< 2^1 \\ |x+3| &< 1 \end{aligned}$$

$x \in (-\infty,\ -3\rangle$	$x \in (-3,\ \infty)$
$-(x+3) < 1$	$(x+3) < 1$
$x > -4$	$x < -2$
$x \in (-4, -3\rangle$	$x \in (-3, -2)$

Výsledek: $x \in (-4, -2)$.

2. Maximální definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ je...

$$\begin{aligned} \sin x &\neq 0 \\ x &\neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Výsledek: $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,\ (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k nabízeným odpovědím je správná odpověď „stejný jako pro funkci $g(x) = \operatorname{cotg} x$“.

3. Jestliže $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}$ a $\alpha \in (\pi,\ 2\pi)$, pak $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ je...

$$\begin{aligned} \sin\alpha \cdot \cos\alpha &= \tfrac{1}{2} \\ 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 1 \\ 2\alpha &= \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha &= \tfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \in (\pi,\ 2\pi) \Rightarrow \quad \alpha &= \tfrac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

$\operatorname{tg}(\pi - \frac{5\pi}{4}) = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$.
Výsledek: $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -1$.

4. V intervalu $\langle 0,\ 2\pi\rangle$ má rovnice $\sin x = \cos x - 1$ (kolik řešení)...
Ze znalostí hodnot goniometrických funkcí v „základních bodech“ ihned vidíme rovnost pro $x = 0$ a $x = 2\pi$. Dále si uvědomíme, že v intervalu $(0, 2\pi)$ je $\cos x - 1 < 0$. Možná další řešení lze tedy hledat pouze v intervalu $(\pi, 2\pi)$, kde je funkce $\sin x$ záporná. V tomto intervalu platí $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$.

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos x - 1 \\ -\sqrt{1-\cos^2 x} &= \cos x - 1 \\ 1 - \cos x &= \sqrt{1 - \cos^2 x} && /^2\ L > 0,\ P > 0 \\ 1 - 2\cos x + \cos^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ 2\cos^2 x - 2\cos x &= 0 \\ \cos x(\cos x - 1) &= 0 && / : (\cos x - 1) \neq 0 \\ \cos x &= 0 \\ x &= \tfrac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Výsledek: Rovnice má v intervalu $\langle 0,\ 2\pi\rangle$ právě 3 řešení ($x \in \{0; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\}$).

5. Algebraický tvar komplexního čísla $z = \dfrac{1+i}{1+2i}$ je...

$$\frac{1+i}{1+2i} = \frac{1+i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i+i+2}{1+4} = \frac{3-i}{5}$$

Výsledek: $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i$.

6. Jestliže $\log_2 y = 3\log_2 \dfrac{x-2}{2} - 2\log_2 \dfrac{x^2-4}{2}$, pak číslo y je rovno...

$$\begin{aligned} \log_2 y &= 3\log_2 \frac{x-2}{2} - 2\log_2 \frac{x^2-4}{2} \\ \log_2 y &= \log_2 \frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^3}{\left(\frac{x^2-4}{2}\right)^2} \\ y &= \frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^3}{\left(\frac{x^2-4}{2}\right)^2} = \frac{(x-2)^3}{8} \cdot \frac{4}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{x-2}{2(x+2)^2} \end{aligned}$$

Výsledek: $y = \dfrac{x-2}{2(x+2)^2}$.

7. Jsou dány dvě rekurentní posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ následujícími vztahy: $a_1 = 3, b_1 = 0$ a pro $n \geq 2$ platí $a_n = 2 \cdot a_{n-1}, b_n = b_{n-1} + a_n$. Určete b_{11}.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je očividně geometrická posloupnost s kvocientem $q = 2$. Lze tedy vyjádřit n-tý člen pomocí prvního členu a kvocientu $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$. Z posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ si postupně začneme vypisovat první členy.

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= b_1 + a_2 \\ b_3 &= b_2 + a_3 = b_1 + a_2 + a_3 \\ b_4 &= b_3 + a_4 = b_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ b_n &= b_1 + \textstyle\sum_{i=2}^{n} a_i \end{aligned}$$

$b_{11} = 0 + \sum_{i=2}^{11} 3 \cdot 2^{i-1} = 3 \cdot \sum_{i=1}^{10} \cdot 2^i = 3 \cdot (2^{11} - 2) = 3 \cdot (2048 - 2) = 6138$

Výsledek: $b_{11} = 6138$.

8. Mezi čísla 7 a 22 jsou vložena čtyři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří prvních šest po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Součet prvních osmi členů této posloupnosti je...

$$a_1 = 7,\ a_6 = 22 = a_1 + 5d \ \Rightarrow\ d = 3 \ \Rightarrow\ a_8 = a_1 + 7d = 7 + 7 \cdot 3 = 28$$

$s_8 = a_1 + a_2 + \ldots a_8 = \dfrac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \dfrac{7+28}{2} \cdot 8 = 140$

Výsledek: $s_8 = 140$.

9. Výraz $\dfrac{6x^3b^3}{25y^4} \cdot \dfrac{15y}{b^2}$ je roven...

Výraz pouze zkrátíme a ošetříme podmínky.

Výsledek: $\dfrac{18bx^3}{5y^3}$, pokud $y \neq 0 \wedge b \neq 0$.

10. Graf funkce $y = \left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}\right)^2$ je částí...

$$y = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}\right)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x},\ x > 0$$

Grafem lomené funkce $\frac{1}{x}$ je hyperbola.

Výsledek: Graf zadané funkce je částí hyperboly.

11. Množinou všech řešení nerovnice $|x+5| \geq 4 + |3-2x|$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ je...

$x \in (-\infty, -5\rangle$	$x \in (-5, \frac{3}{2}\rangle$	$x \in (\frac{3}{2}, \infty)$
$-(x+5) \geq 4+(3-2x)$	$(x+5) \geq 4+(3-2x)$	$(x+5) \geq 4-(3-2x)$
$-x-5 \geq 4+3-2x$	$x+5 \geq 4+3-2x$	$x+5 \geq 4-3+2x$
$x \geq 12$	$3x \geq 2$	$-x \geq -4$
	$x \geq \frac{2}{3}$	$x \leq 4$
$\emptyset$	$x \in \langle\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\rangle$	$x \in (\frac{3}{2}, 4\rangle$

Výsledek: $x \in \langle\frac{2}{3}, 4\rangle$.

12. Směrnice přímek, které procházejí bodem $A = [0, -5]$ a mají od počátku souřadné soustavy vzdálenost $\sqrt{5}$, jsou...

Hledáme přímku, která je tečnou ke kružnici se středem v počátku O a poloměrem $\sqrt{5}$ z bodu A ležícího na ose y. Situace tedy bude symetrická podle osy y a směrnice budou mít hodnoty $\pm k$. Hledejme tedy pouze přímku s kladnou směrnicí. Ta protne osu x v bodě $B = [b, 0]$. Obsah trojúhelníku AOB lze spočítat pomocí odvěsen jako $\frac{5 \cdot b}{2}$ nebo také pomocí přepony a výšky $\frac{|AB| \cdot \sqrt{5}}{2}$, kde velikost přepony $|AB| = \sqrt{25+b^2}$. Z rovnosti obsahů spočteme b:

$$\begin{aligned}
\frac{5 \cdot b}{2} &= \frac{\sqrt{25+b^2} \cdot \sqrt{5}}{2} \\
25b^2 &= (25+b^2) \cdot 5 \\
5b^2 &= 25 + b^2 \\
b^2 &= \tfrac{25}{4} \\
b &= \tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

Sice jsme rovnici umocňovali, ale předpokládali jsme, že pracujeme s kladnými čísly a zkouška proto není nutná. Směrnice přímky procházející body $A = [0, -5]$ a $B = [\frac{5}{2}, 0]$ je $k = 5 : \frac{5}{2} = 2$. Druhý bod $B' = [-b, 0]$ bude symetrický k bodu B podle osy y a směrnice přímky procházející body A a B' bude mít hodnotu $k' = -2$.

Výsledek: Směrnice hledaných přímek jsou čísla -2 a 2.

13. Jsou dány množiny A, B, C a D následovně: $A = \{1, 2, \ldots, 1000\}$, $B = \{x \in A : \dfrac{x}{6} \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \in A : \dfrac{x}{8} \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{x \in A : 237 \leq x \leq 356\}$. Kolik prvků obsahuje množina $(B \cap C) \cup D$? (Množina $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel).

Množina B obsahuje dělitele 6, množina C dělitele 8 a jejich průnik $B \cap C$ dělitele 24. Těch je mezi čísly 1 a 1000 přesně 41. Dále množina D obsahuje čísla od 237 do 356, tedy 120 prvků.

$$B \cap C = \{24, 48, \ldots,\ 216, \underline{240}, \underline{264}, \underline{288}, \underline{312}, \underline{336}, 360, \ldots 984\}$$

$$D = \{237, 238, 239, \underline{240}, 241, \ldots 355, 356\}$$

Množiny $(B \cap C)$ a D mají 5 společných prvků (240, 264, 288, 312, 336) a jejich sjednocení tedy obsahuje 41+120-5=156 prvků.

Výsledek: Množina $(B \cap C) \cup D$ obsahuje 156 prvků.

14. Rovnice $x^2 - (p+1)x + 4 = 0$ (s neznámou x) nemá reálný kořen právě tehdy, když…

Kvadratická rovnice nemá žádný reálný kořen právě tehdy, když diskriminant D je záporný.

$$D = (p+1)^2 - 4 \cdot 4 = p^2 + 2p - 15 = (p+5)(p-3) < 0$$

Výsledek: $p \in (-5, 3)$.

15. Kolik znaků Morseovy abecedy lze vytvořit, sestavují-li se tečky a čárky ve skupiny po jedné až pěti?

Znaky délky jedna až pět sestavujeme ze dvou symbolů (tečka, čárka). Celkový počet S bude součtem všech takových možností.

$$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

Výsledek: Celkem lze vytvořit 62 znaků.

Správné odpovědi v testu: ceddbacabbedeca