Kapitola 3 Planimetrie

Axiomatický základ
Primitivní pojmy: bod, přímka, rovina, incidence,uspořádání, shodnost
Axiomy: 1) incidence (8)
Každými dvěma body prochází aspoň jedna přímka.…
2) uspořádání (4)
Ze tří různých bodů ležících na přímce, leží nejvýše jeden mezi zbývajícími dvěma. …
3) shodnosti (5)
Jestliže $(U \equiv V \wedge V \equiv W) \Rightarrow (U \equiv W)$ *, kde* U, V, W *jsou buď úsečky nebo úhly.*
4) spojitosti (2) – Archimédův a Cantorův
5) V.-tý Euklidův postulát
'Nechť je p *libovolná přímka a bod* P *neleží na této přímce. Potom existuje nejvýše jedna přímka ležící v rovině určené přímkou a bodem,procházející bodem* P*, která nemá s přímkou* p *společný bod.'*

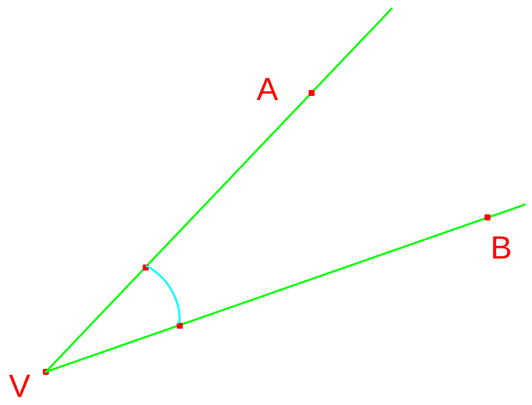
Základní symbolika

A, B, T … body	$\overleftrightarrow{AB} = p$ … přímka	α, β, ρ … roviny
$\overrightarrow{AB}$ … polopřímka	$pC = \overrightarrow{ABC}$ … polorovina	
AB … úsečka	$\lvert AB \rvert$ … velikost úsečky	

Úkol:
Definujte polopřímku, úsečku, polorovinu.

3.1 Planimetrie I – základní objekty a jejich vlastnosti

Úhel a jeho velikost
Definice 3.1.1
Dvě polopřímky se společným počátkem rozdělí rovinu na dvě části, které nazveme úhlem.
Značíme $\prec AVB$



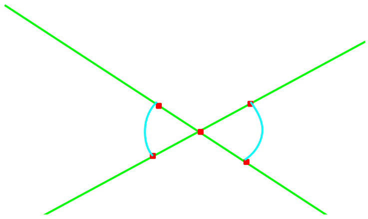
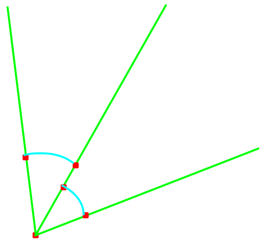
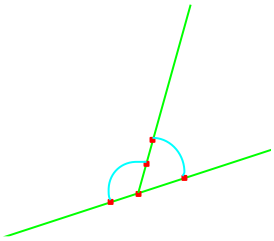
V planimetrii měříme úhel ve stupních, případně úhlových minutách nebo vteřinách.
$\lvert \prec AVB \rvert = \alpha$

Plný úhel měří 360^0.
$1^0 = 60'$ $1' = 60''$

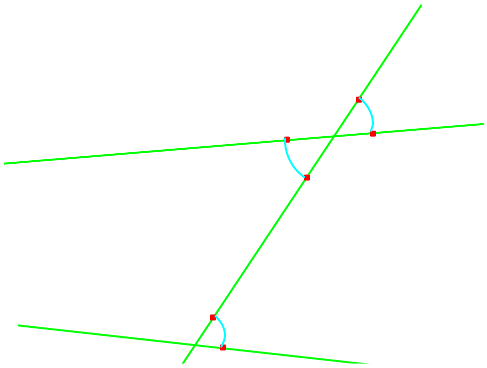
Poznámka: Úhlové vteřiny se dělí již desetinně.

Nulový, ostrý, pravý, tupý, přímý, plný úhel

Dvojice úhlů
- vrcholové
- styčné
- vedlejší

Úhly souhlasné a střídavé



Věta 3.1.1
Souhlasné a střídavé úhly při dvou rovnoběžkách jsou shodné.

Vzdálenost v E_1, E_2, E_3
Metrika,Euklidovská metrika

Okolí bodu
Okolím bodu M *rozumíme všechny body, které mají od něj vzdálenost nejvýše rovnou danému kladnému číslu* δ.

Vnitřní, vnější a hraniční body
Bod I *nazveme vnitřním bodem objektu, existuje-li takové okolí bodu* I*, které je podmnožinou objektu.*
Bod E *nazveme vnějším bodem objektu, existuje-li takové okolí bodu* E*, které je podmnožinou doplňku objektu.*
Bod H *nazveme hraničním bodem objektu, pokud každé jeho okolí obsahuje vnitřní i vnější body objektu.*

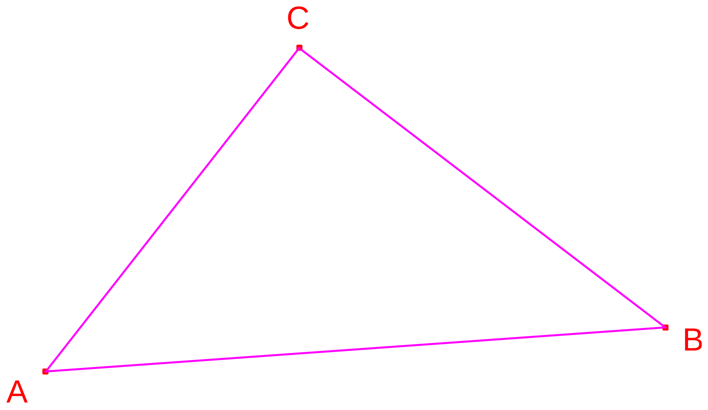
Konvexní a nekonvexní objekty

Opěrná přímka, průměr obrazce

Trojúhelník

Definice 3.1.2

Nechť body A, B, C neleží v přímce. Potom trojúhelníkem ABC nazveme průnik polorovin $\overrightarrow{ABC}, \overrightarrow{BCA}, \overrightarrow{CAB}$.



Definice - varianta

Uzavřená, jednoduchá (neprotínající sama sebe) lomená čára ze tří úseček ohraničuje část roviny, kterou nazveme trojúhelníkem.

Věta 3.1.2

Součet libovolných dvou stran je větší než strana třetí. (trojúhelníkové nerovnosti)

$$a+b>c \wedge a+c>b \wedge b+c>a$$

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180^0.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0$$

Součet dvou vnitřních úhlů je roven vnějšímu úhlu u zbývajícího vrcholu trojúhelníku.

$$\alpha+\beta=\gamma' \wedge \alpha+\gamma=\beta' \wedge \beta+\gamma=\alpha'$$

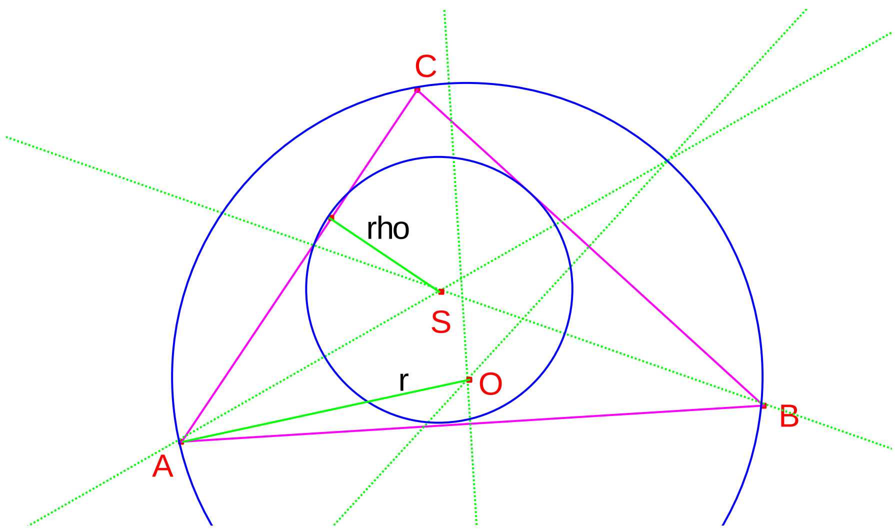
Dělení trojúhelníků

- podle velikostí stan – obecný, rovnoramenný, rovnostranný
- podle velikostí úhlů – ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý

Kružnice trojúhelníku opsaná a vepsaná

Věta 3.1.3

Střed O kružnice trojúhelníku opsané se nalézá v průsečíku os stran.
Střed S kružnice trojúhelníku vepsané se nalézá v průsečíku os úhlů.

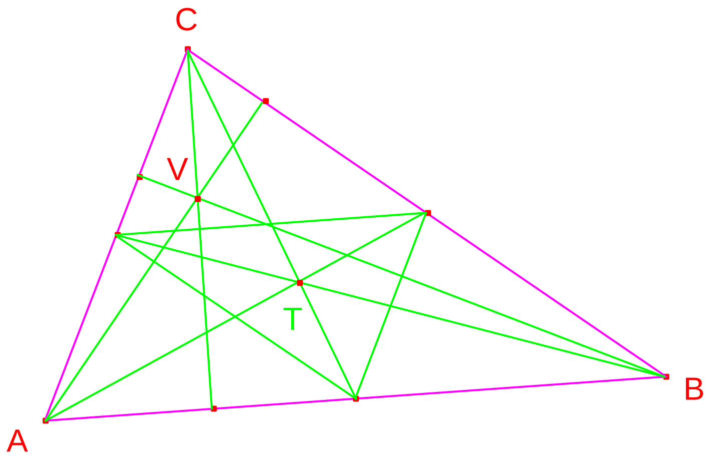


Poznámka: Kružnice trojúhelníku připsané

Střední příčky – spojnice středů stran trojúhelníku
Věta 3.1.4
Střední příčka je rovnoběžná s protější stranou trojúhelníku a má velikost její poloviny.
Střední příčky dělí trojúhelník na čtyři stejné trojúhelníky stejného tvaru jako původní.

Výšky a ortocentrum trojúhelníka v_a, v_b, v_c, V
Věta 3.1.5
Výšky se v trojúhelníku protínají v jediném bodě, ortocentru trojúhelníku.

Těžnice a těžiště trojúhelníka t_a, t_b, t_c, T
Věta 3.1.6
Těžnice se v trojúhelníku protínají v jediném bodě, těžišti trojúhelníku,
který dělí každou z nich v poměru $2:1$, kdy větší díl přiléhá k příslušnému vrcholu.



Shodnost trojúhelníků – sss, sus, usu, Ssu
Věta 3.1.7
Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když:
a) se shodují ve všech třech stranách
b) se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném
c) se shodují ve straně a úhlech k ní přilehlých
d) se shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich

Podobnost trojúhelníků - sss, sus,uu,Ssu

Úkol: Zformulujte věty o podobnosti trojúhelníků.

Pravoúhlý trojúhelník

Podobnost pravoúhlých trojúhelníků – goniometrické funkce ostrého úhlu
Věta 3.1.8
Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou sobě podobné pokud se rovnají poměry libovolných dvou stran.

Definice 3.1.3 Goniometrické funkce ostrého úhlu
V pravoúhlém trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholu C nazýváme:

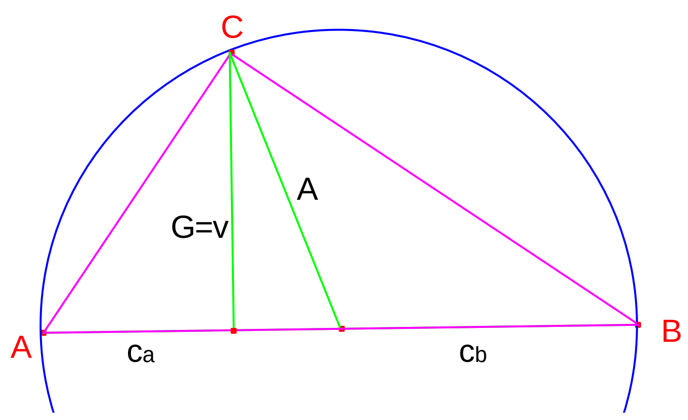
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, tg\alpha = \frac{a}{b}, ctg\alpha = \frac{b}{a}.$$

Euklidovy věty
Věta 3.1.9
V pravoúhlém trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholu C, výškou v na přeponu a úseky c_a, c_b na něž přeponu dělí pata příslušné výšky platí:

a) Euklidova věta o výšce $v^2 = c_a \cdot c_b$

b) Euklidova věta o odvěsnách $a^2 = c \cdot c_a, b^2 = c \cdot c_b$

Pythagorova věta
Věta 3.1.10
Trojúhelník je pravoúhlý právě tehdy, když platí $a^2 + b^2 = c^2$.



AG nerovnost

Pro libovolná kladná reálná čísla a, b *platí:* $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Obecný trojúhelník

Sinová a kosinová věta

V libovolném trojúhelníku platí: a) $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \langle CZ \rangle$

c) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \langle CZ \rangle$

Obvod a obsah trojúhelníka

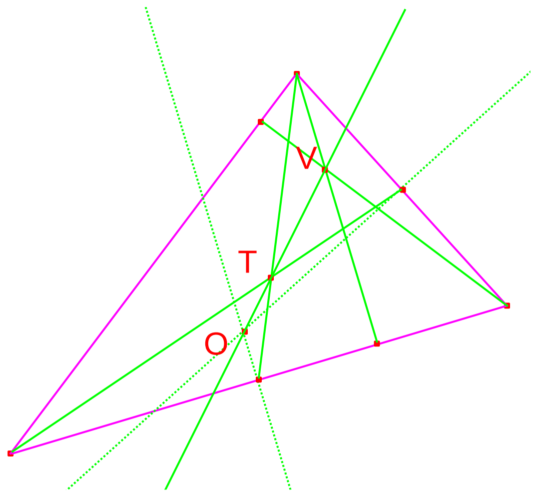
$o = a + b + c$

$S = \frac{a \cdot v_a}{2} \langle CZ \rangle, S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$

$r = \frac{abc}{4S}, \rho = \frac{S}{s}$

Eulerova přímka

V libovolném trojúhelníku leží střed kružnice opsané, ortocentrum a těžiště na jedné přímce (Eulerově přímce), nebo splývají.



Feuerbachova kružnice

V libovolném trojúhelníku leží na jedné kružnici středy stran, paty výšek a středy spojnic ortocentra s vrcholy trojúhelníku.

Úkol: Diskutujte vlastnosti rovnostranného, rovnoramenného a tupoúhlého trojúhelníku.

Poznámka: Menelaova věta, Cevova věta, Simsonova přímka, Nagelův bod, Lemoinův bod, Napoleonovy trojúhelníky

Kruh a kružnice

Definice 3.1.4

Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od daného pevného bodu vzdálenost právě rovnou danému kladnému reálnému číslu. Symbolicky $k = \{X \in \rho : |X, S| = r\}$.

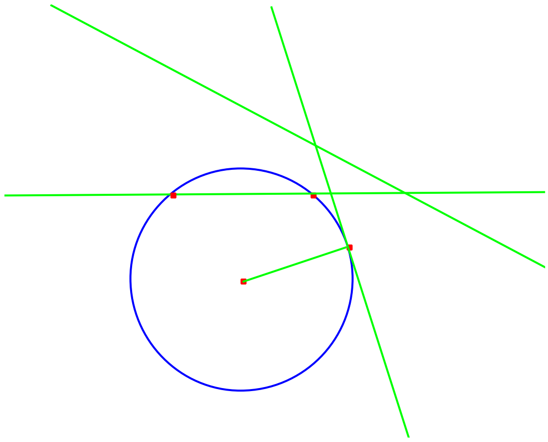
Kruh je množina bodů v rovině, které mají od daného pevného bodu vzdálenost nejvýše rovnou danému kladnému reálnému číslu. Symbolicky $K = \{X \in \rho : |X, S| \leq r\}$.

Bod S nazýváme středem kružnice (resp. kruhu), číslo r poloměrem.

Vzájemná poloha přímky a kružnice

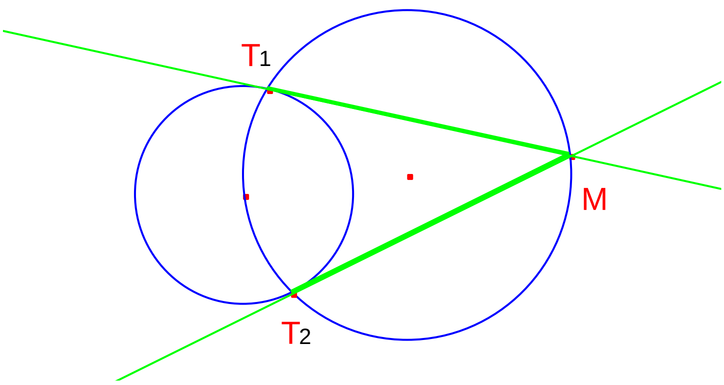
- sečna
- tečna
- vnější přímka

Vzájemná poloha přímky a kružnice se posuzuje podle společných bodů, nebo podle vzdálenosti středu kružnice a příslušné přímky.



Věta 3.1.11

Vedeme-li z vnějšího bodu M tečny k dané kružnici, jsou úsečky MT_1, MT_2 shodné.

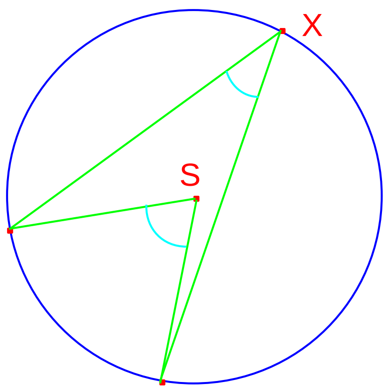


Vzájemná poloha dvou kružnic
Vzájemná poloha dvou kružnic závisí na vztahu mezi vzdáleností středů daných kružnic (středná) a velikostmi poloměrů obou kružnic.

Kruhová výseč a úseč, kruhový oblouk, mezikruží
Úkol: Definujte příslušné objekty a určete vzorce pro jejich obvody a obsahy.

Obvod a obsah kruhu, délka kružnice
$o = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$
$S = \pi \cdot r^2$, kde π je iracionální transcendentní číslo $\pi \doteq 3{,}141592\ldots$.

Obvodové a středové úhly
Definice 3.1.5
Nechť je dána kružnice $k(S,r)$ a dva její body A, B. Body A, B určují oblouk $\widehat{AB}$.
Nechť úhel $\prec ASB$ obsahuje oblouk $\widehat{AB}$.
Potom tento úhel nazveme středový úhel k oblouku $\widehat{AB}$.
Nechť úhel $\prec AXB$ obsahuje oblouk $\widehat{AB}$, přičemž bod X náleží příslušné kružnici.
Potom tento úhel nazveme obvodovým úhlem příslušným k oblouku $\widehat{AB}$.



Věta 3.1.12
Označme velikosti úhlů takto: $|\prec ASB| = \omega$ a $|\prec AXB| = \varphi$.
Potom pro obvodový a středový úhel k danému oblouku platí: $\omega = 2 \cdot \varphi$

Poznámka: Úsekový úhel

Thaletova věta
Věta 3.1.13
Množinou vrcholů pravých úhlů pravoúhlých trojúhelníků s přeponou AB, je kružnice sestrojená nad průměrem AB, kromě bodů A, B. (Speciální případ věty 3.1.12)

Mocnost bodu ke kružnici
Věta 3.1.14
Nechť je dána kružnice $k(S,r)$ a bod M .
Jestliže bodem M vedeme libovolnou sečnu kružnice k s průsečíky X, Y, pak platí:

a) $m = |PX| \cdot |PY|$, pokud bod M je vnějším bodem příslušného kruhu

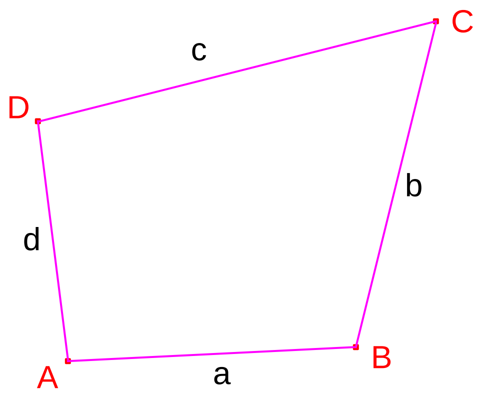
b) $m = -|PX| \cdot |PY|$, pokud bod M je vnitřním bodem kruhu

Poznámka:

Křivost kružnice ${}^1k = \frac{1}{r}$
Kružnice je křivka konstantní křivosti.
Kruh je obrazec konstantního průměru – vzdálenost mezi opěrnými přímkami.
Releauxův trojúhelník

Čtyřúhelníky

Definice 3.1.6
Uzavřená, jednoduchá, lomená čára ze čtyř úseček ohraničuje část roviny, kterou nazveme čtyřúhelník.



Definice – varianta
Čtyřúhelníkem nazveme sjednocení dvou trojúhelníků se společnou stranou, přičemž žádné ze zbývajících stran neleží v jedné přímce.

Obecný čtyřúhelník

Základní vlastnosti

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$ $\quad$ $o = a + b + c + d$ $\quad$ $S = S_{1\Delta} + S_{2\Delta}$

Čtyřúhelníky mohou být nekonvexní.

Spojnici nesousedních vrcholů nazveme úhlopříčkou. Každý čtyřúhelník má dvě úhlopříčky. Obvykle značíme $e = AC, f = BD$.

Věta 3.1.15 Ptolemaiova věta
Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že součet součinů protějších stran je větší nebo roven součinu úhlopříček, tj. $a \cdot c + b \cdot d \geq e \cdot f$
Rovnost nastává pro tětivový čtyřúhelník.

Lichoběžníky
Definice 3.1.7
Lichoběžníkem nazveme čtyřúhelník s právě jednou dvojicí rovnoběžných stran, které nazýváme základny. Zbývající dvojici stran pak ramena.

Základní vlastnosti

$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^0$ $\quad o = a + b + c + d$ $\quad S = \frac{(a+c)v}{2}$

Úkol: Uvažte vlastnosti pravoúhlého a rovnoramenného lichoběžníka

Střední příčka lichoběžníku

Spojnice středů ramen lichoběžníku je rovnoběžná se základnami a má velikost $\frac{a+c}{2}$.

Rovnoběžka se základnami procházející průsečíkem úhlopříček má velikost $\sqrt{a \cdot c}$.

Rovnoběžníky
Definice 3.1.8
Rovnoběžníkem nazveme čtyřúhelník se dvěma dvojicemi rovnoběžných stran.

Základní vlastnosti

$\alpha + \beta = \alpha + \delta = 180^0 \langle CZ \rangle$ $\quad o = 2(a+b)$ $\quad S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2}$

Úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí.

Úkol: Diskutujte vlastnosti kosodélníku a kosočtverce.

Pravoúhelníky
Definice 3.1.9
Rovnoběžník s pravým úhlem nazveme pravoúhelníkem.

Základní vlastnosti

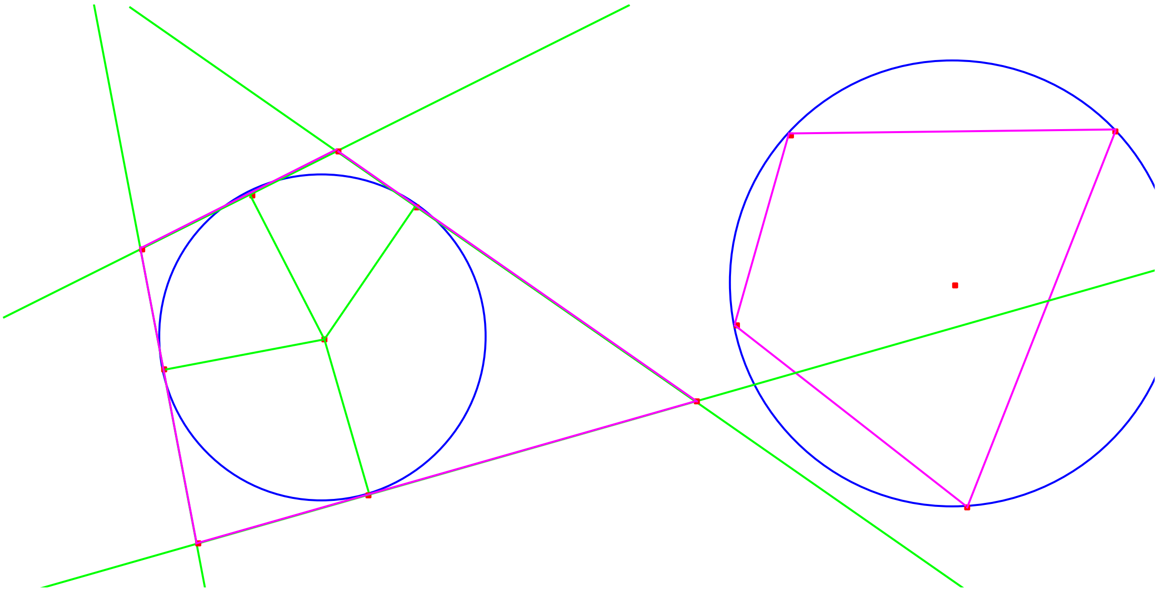
$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^0$ $\quad o = 2(a+b)$ $\quad S = ab$

Úkol: Diskutujte vlastnosti obdélníku a čtverce.

Tětivové a tečnové čtyřúhelníky
Definice 3.1.10
Tětivovému čtyřúhelníku lze opsat kružnici.
Tečnovému čtyřúhelníku lze vepsat kružnici.

Věta 3.1.16
V tětivovém čtyřúhelníku pro vnitřní úhly platí: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0$
V tečnovém čtyřúhelníku pro strany platí: $a + c = b + d$

Úkol: Nalezněte tětivové a tečnové čtyřúhelníky.



Mnohoúhelníky

Definice 3.1.11

Uzavřená, jednoduchá, lomená čára z n - úseček ohraničuje část roviny, kterou nazveme n - úhelník (mnohoúhelník, polygon).

Mnohoúhelníky mohou být konvexní a nekonvexní obrazce.

Základní vlastnosti

$$\alpha = 360^0 - \frac{360^0}{n} \qquad \Sigma = (n-2) \cdot 180^0 \qquad o = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad S = \sum_{j=1}^{n-2} S_{j\Delta}$$

Počet úhlopříček

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

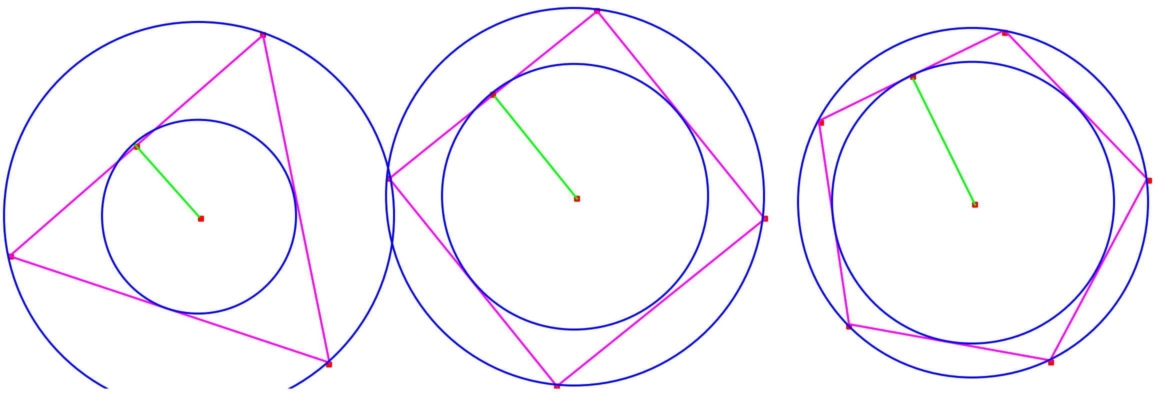
Pravidelné mnohoúhelníky

Definice 3.1.12

Pravidelným mnohoúhelníkem nazveme mnohoúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly stejně velké.

Věta 3.1.17

Pravidelné mnohoúhelníky jsou tětivové a tečnové zároveň.



Obvod a obsah

$o = n \cdot a = n \cdot 2r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$ $S = n \cdot S_{\Delta} = n \cdot \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$

Konstrukce pravidelných n-úhelníků

Euklidovská konstrukce je možná pro 2^n-úhelníky, $3 \cdot 2^n$-úhelníky a $5 \cdot 2^n$-úhelníky,
tj. úloha je řešitelná pro n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, …
a neřešitelná pro n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, … .

Poznámka
Pravidelné mnohoúhelníky v prostoru