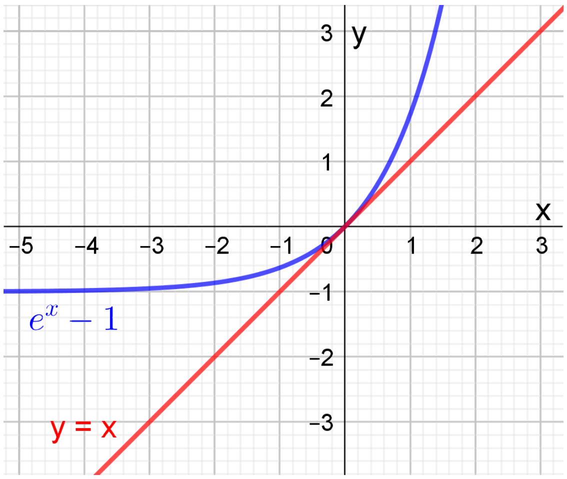
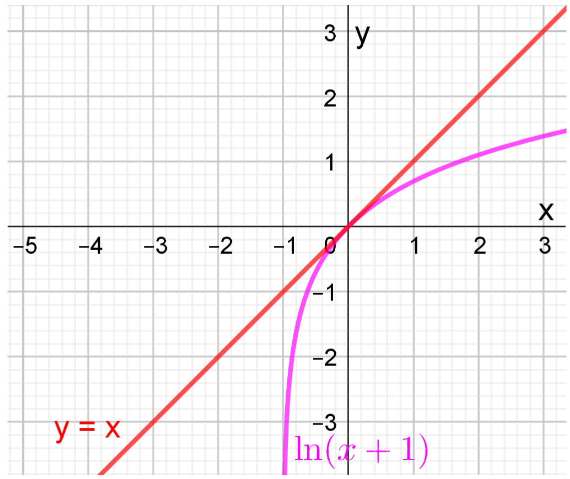
Limity s exponenciální a logaritmickou funkcí

Podobně jako pro sinus platí důležitá limita pro x jdoucí k nule, i pro exponenciální a logaritmickou funkci platí důležité limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

Jakési nastínění smyslu těchto limit opět vidíme z grafů funkcí, kde je vidět, že v okolí nuly mají dvojice funkcí přibližně stejné hodnoty:





Příklad 1. *Vypočítejte limitu:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{7x}=$$

Řešení: Dosadit přímo opět nemůžeme, vyšla by limita typu „$\frac{0}{0}$“. Limitu připravíme na výpočet pomocí výše uvedené limity a posléze dosadíme:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\frac{1}{7}=1\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{7}$$

Příklad 2. *Vypočítejte limitu:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+9}-3}{\ln(x+1)}=$$

Řešení: Dosadit přímo opět nemůžeme, vyšla by limita typu „$\frac{0}{0}$“. Rozepíšeme si limitu na součin „logaritmické“ části a „odmocninové“ části a každou z nich si připravím zvlášť pro dosazení:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+9}-3}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+9}-3}{x}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+9}-3\right)\left(\sqrt{2x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{2x+9}+3\right)}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+9-9}{x\left(\sqrt{2x+9}+3\right)}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{2x+9}+3\right)}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+9}+3}\cdot\frac{x}{\ln(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+9}+3}\cdot\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

A nyní nějaké příklady na procvičení:

Příklad 3. *Vypočítejte limity:*

$$\text{a)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)}{x} =$$

$$\text{b)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x + \ln \mathrm{e})}{x \cdot \ln \mathrm{e}^8} =$$

$$\text{c)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{5x+1}} =$$

$$\text{d)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+1}}{\ln(x+1)} =$$

Řešení: a) 1; b) $\frac{1}{8}$; c) -1; d) $-\frac{3}{4}$.