4.3 Goniometrie a trigonometrie

4.3.1 Goniometrické funkce ostrého úhlu

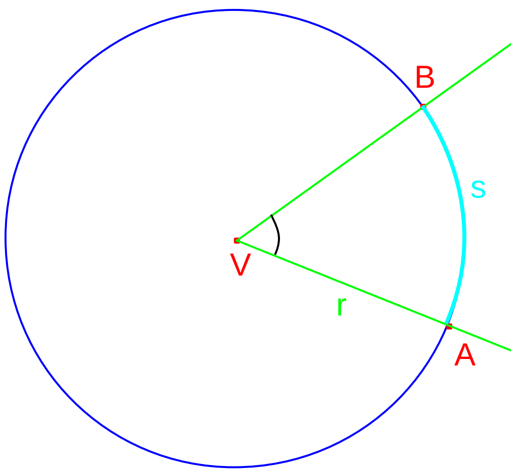
Definice 4.3.1
Nechť v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB jsou strany a úhly označeny běžným způsobem. Potom přiřazujeme dále uvedeným poměrům názvy sinus, kosinus, tangens a kotangens a označujeme $\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, tg\alpha = \tan\alpha = \frac{a}{b}, \cot g\alpha = \cot an\alpha = \frac{b}{a}$.

Poznámka
Sekans a cosekans

4.3.2 Oblouková míra úhlu
Definice 4.3.2
Orientovaný úhel $\angle AVB$ je určen uspořádanou dvojicí polopřímek $\left[\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}\right]$, přičemž $\overrightarrow{VA}$ je počáteční a $\overrightarrow{VB}$ koncové rameno. Každému orientovanému úhlu lze jednoznačně přiřadit základní velikost, tj. reálné číslo $\alpha = \frac{s}{r}$ tzv. obloukovou míru úhlu, kde r je poloměr kružnice a s je délka oblouku , který daný úhel na kružnici vytíná. Pokud je nenulový úhel orientován proti směru hodinových ručiček přiřazujeme mu kladné reálné číslo α, v opačném případě číslo $-\alpha$.
Jednotkou obloukové míry je úhel velikosti $\alpha = 1$, hovoříme o 1 radianu s označením 1 rad.

0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0	$57^0 17' 45''$
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	1

Každý orientovaný úhel má nekonečně mnoho velikostí $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, kde $k \in Z$.



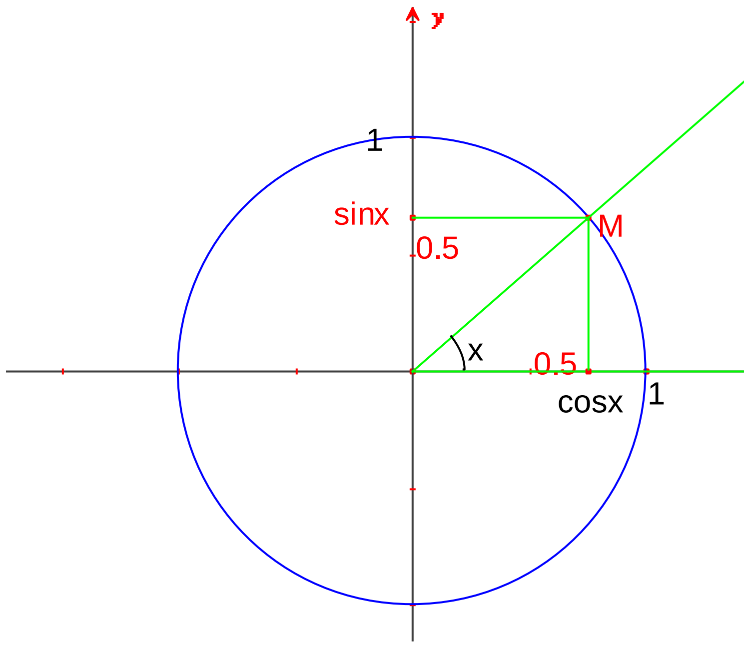
Věta 4.3.2.1

Je-li v rovině dána pevně polopřímka $\overrightarrow{VA}$ a libovolné reálné číslo x, potom v této rovině existuje právě jeden orientovaný úhel $\angle AVB$, jehož jedna velikost v obloukové míře se rovná číslu x.

4.3.3 Goniometrické funkce

Sinus a kosinus
Definice 4.3.3.1
V jednotkové kružnici existuje ke každému reálnému číslu jediný orientovaný úhel, jehož velikost v obloukové míře je rovna číslu x, jehož počáteční rameno splývá s kladnou poloosou x. Průsečík koncového ramene s touto kružnicí nechť je M. Pro souřadnice tohoto bodu definujeme $M = [x_M, y_M] = [\cos x, \sin x]$.

Funkcí sinus resp. kosinus pak nazýváme funkci určenou předpisem $y = \sin x$ resp. $y = \cos x$.



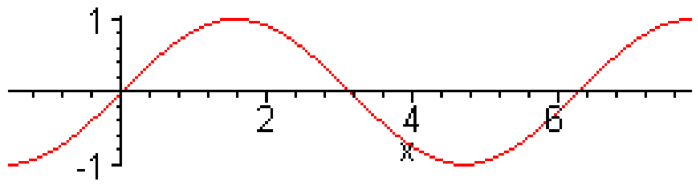
Vlastnosti:		**sin**	**cos**
1)	D	R	R
2)	H	$\langle -1,1 \rangle$	$\langle -1,1 \rangle$
3)	parita	lichá	sudá
4)	periodicita	2π	2π
5)	znaménka	I+,II+,III-,IV-	I+,II-,III-,IV+
6)	monotonie	není	není
7)	omezenost	ano	ano
8)	max,min	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$	$2k\pi, \pi + 2k\pi$
9)	spojitost	ano	ano

Tabulka význačných hodnot

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

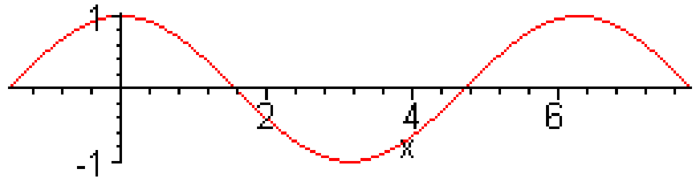
Grafy

```
> plot(sin(x),x=-Pi/2..5*Pi/2);
```




```
>
```

```
> plot(cos(x),x=-Pi/2..5*Pi/2);
```



Vztahy pro různé argumenty

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

1) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

2) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

3) $\sin x = \sin(\pi - x)$

4) $\sin x = -\sin(\pi + x)$

5) $\sin x = -\sin(2\pi - x)$

6) $\cos x = -\cos(\pi - x)$

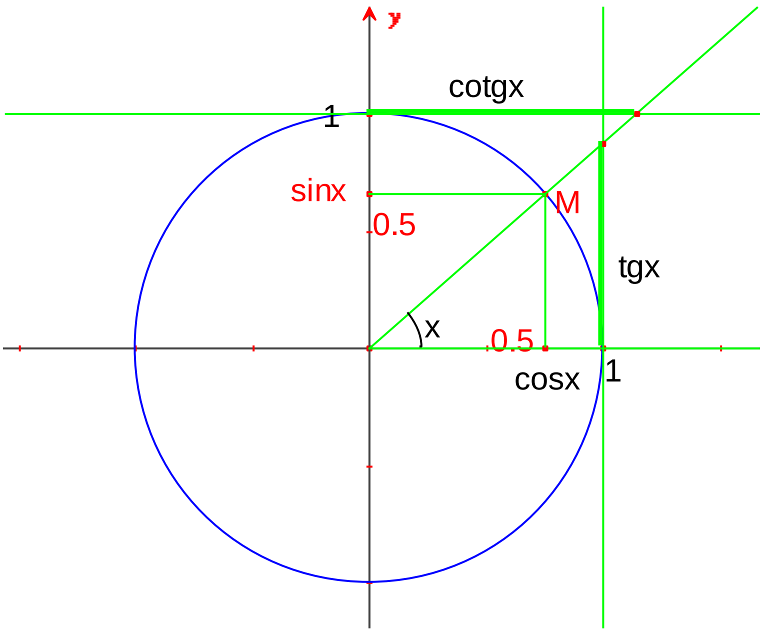
4) $\cos x = -\cos(\pi + x)$

5) $\cos x = \cos(2\pi - x)$

Tangens a kotangens
Definice 4.3.3.2

Funkce tangens je definována vztahem $y = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

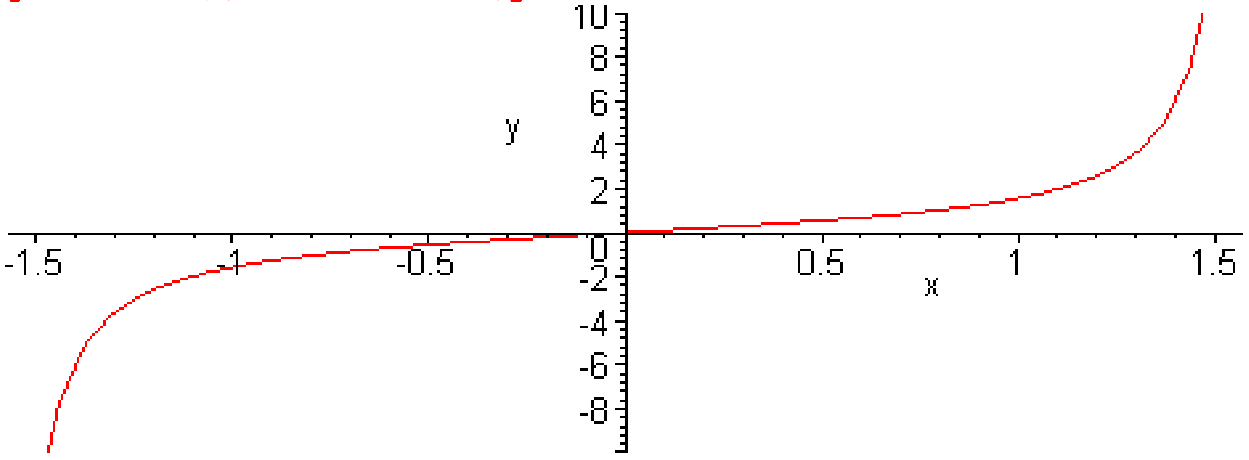
Funkce kotangens je definována vztahem $y = \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, pro $x \neq k\pi$, $k \in Z$.



Vlastnosti:		**tg**	**cotg**
1)	D	$R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$R-\{k\pi\}$
2)	H	R	R
3)	parita	lichá	lichá
4)	periodicita	π	π
5)	znaménka	I+,II-,III+,IV-	I+,II-,III+,IV-
6)	monotonie	není	není
7)	omezenost	ne	ne
8)	max,min	není	není
9)	spojitost	ne	ne

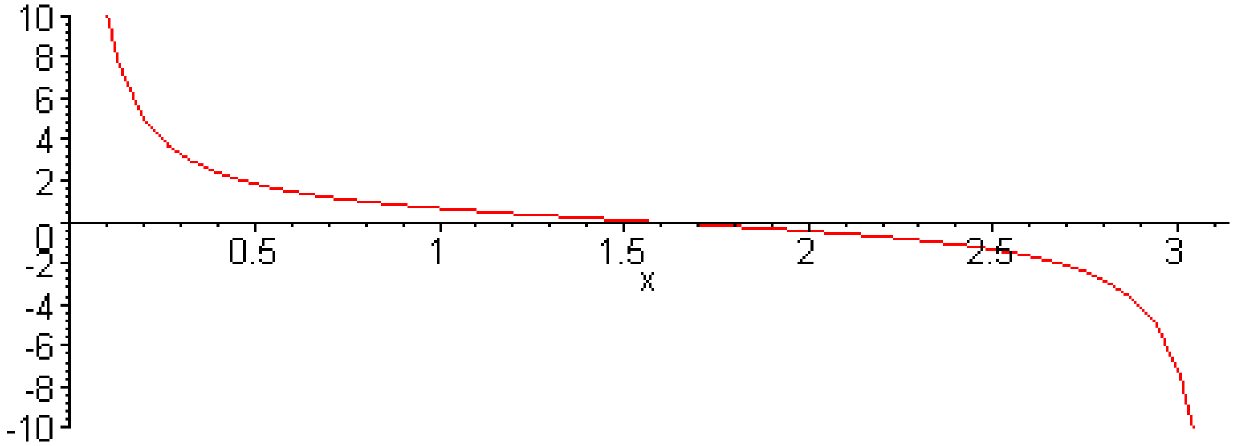
Grafy

```
> plot(tan(x),x=-Pi/2..Pi/2,y=-10..10);
```



>

```
> plot(1/tan(x),x=0..Pi,y=-10..10);
```



>

Zřejmě platí: $\forall x \in R - \left\{k \cdot \frac{\pi}{2}\right\} : tgx = \frac{1}{\cot gx}$

Vztahy pro různé argumenty

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right):$

$1) tgx = -tg(\pi - x)$

$2) \cot gx = -\cot g(\pi - x)$

Příklad 4.3.3.1

Určete hodnoty goniometrických funkcí pro argumenty $\frac{7}{6}\pi, -\frac{7}{6}\pi, -\frac{38}{3}\pi$.

Jednoduché rovnice a nerovnice

Základní rovnice a nerovnice jsou všechny typů $GF\Re a$, kde $GF \in \{\sin x, \cos x, tgx, \cot gx\}$, $\Re \in \{\leq, <, >, \geq, \neq\}$ a $a \in R$.

Postup řešení rovnice:

1) Vyřešíme přiřazenou rovnici pro x' na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
2) Převedeme předchozí výsledek na zadanou rovnici řešenou v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$
3) Vezmeme v potaz periodicitu

Postup řešení nerovnice:

1) Vyřešíme přiřazenou rovnici pro pomocnou neznámou x' na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
2) Převedeme předchozí výsledek na rovnici řešenou v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$
3) Z grafu odvodíme řešení příslušné nerovnice na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$
4) Vezmeme v potaz periodicitu

Poznámka

Pro funkce tangens a kotangens v bodě dva uvažujeme pouze interval $\langle 0, \pi \rangle$, *resp.* $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Parametrické systémy goniometrických funkcí

Příklad 4.3.3.2

Načrtněte grafy složených funkcí pro konkrétní hodnoty parametrů a diskutujte parametrické systémy příslušných funkcí obecně a uvažte též vliv záměny goniometrické funkce:

$y = \sin x + c, y = c \cdot \cos x, y = tgcx, y = \cot g(x + c)$

$y = |\sin x|, y = tg|x|$

$y = \cos x^2, y = \cot g^2 x$

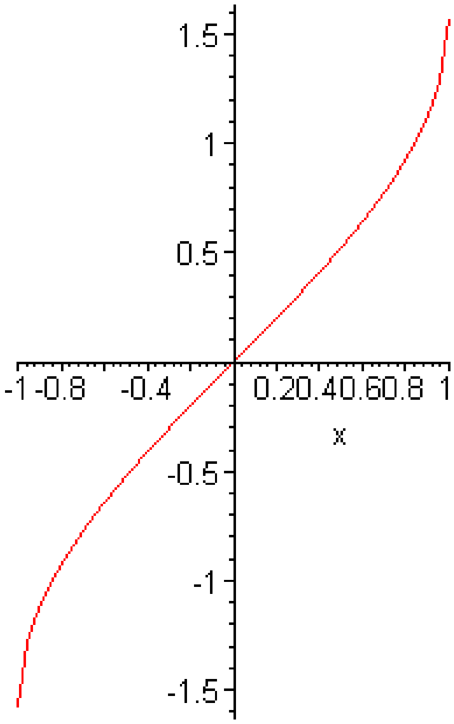
4.3.4 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní k funkcím goniometrickým.
Protože žádná z goniometrických funkcí není prostá je nutné provést před tvorbou inverzní funkce tzv. zúžení příslušné goniometrické funkce na interval, na němž je tato prostá.

I. Funkce sinus je prostá na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Proto k ní existuje na tomto intervalu funkce inverzní ($x = \sin y$),
což se zapisuje $y = \arcsin x$
Funkce $f_{-1} : y = \arcsin x$ <čti arkussínus>

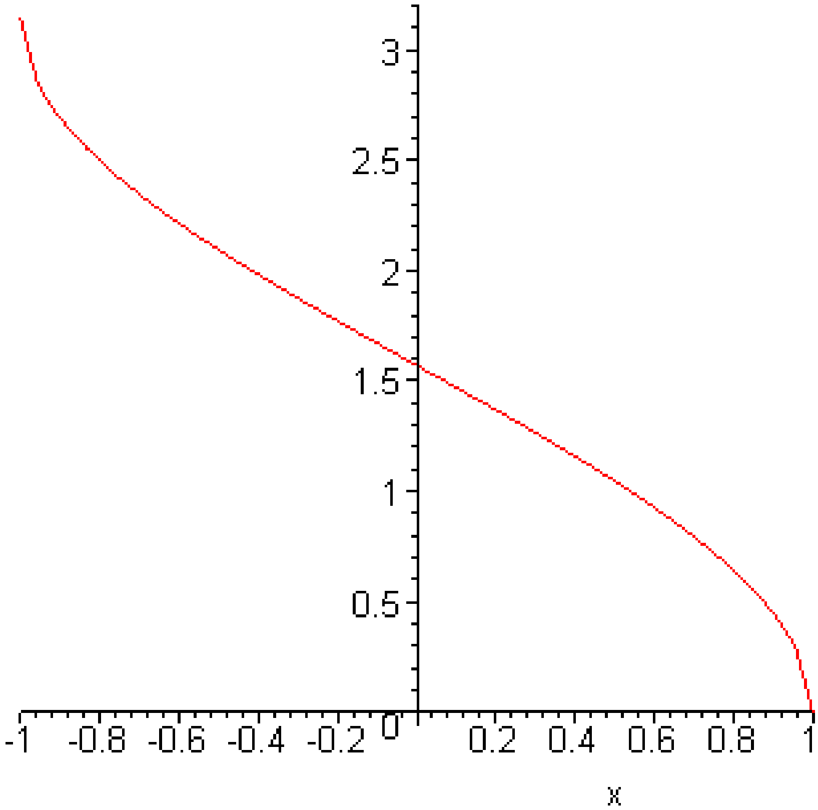
```
> plot(arcsin(x),x=-1..1);
```



\>

II. Funkce cosinus je prostá na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
Proto k ní existuje na tomto intervalu funkce inverzní ($x = \cos y$),
což se zapisuje $y = \arccos x$
Funkce $f_{-1} : y = \arccos x$ <čti arkuskosínus>

```
> plot(arccos(x),x=-1..1);
```



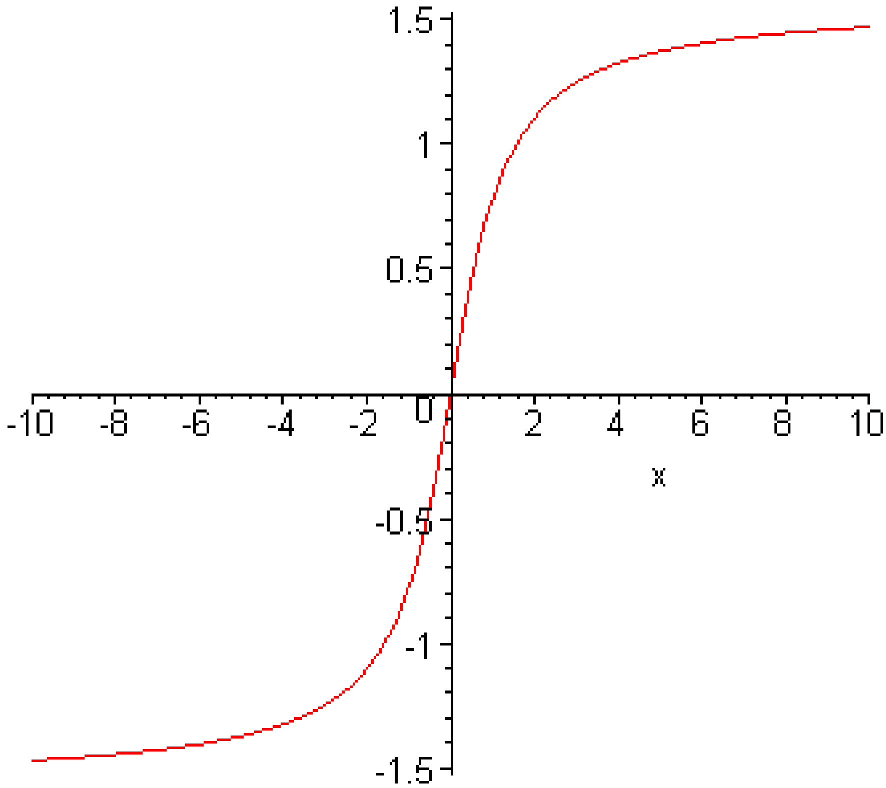

```
>
```

III. Funkce tangens je prostá na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Proto k ní existuje na tomto intervalu funkce inverzní ($x = tgy$), což se zapisuje $y = arctgx$

Funkce $f_{-1}: y = arctgx$ <čti arkustangens>

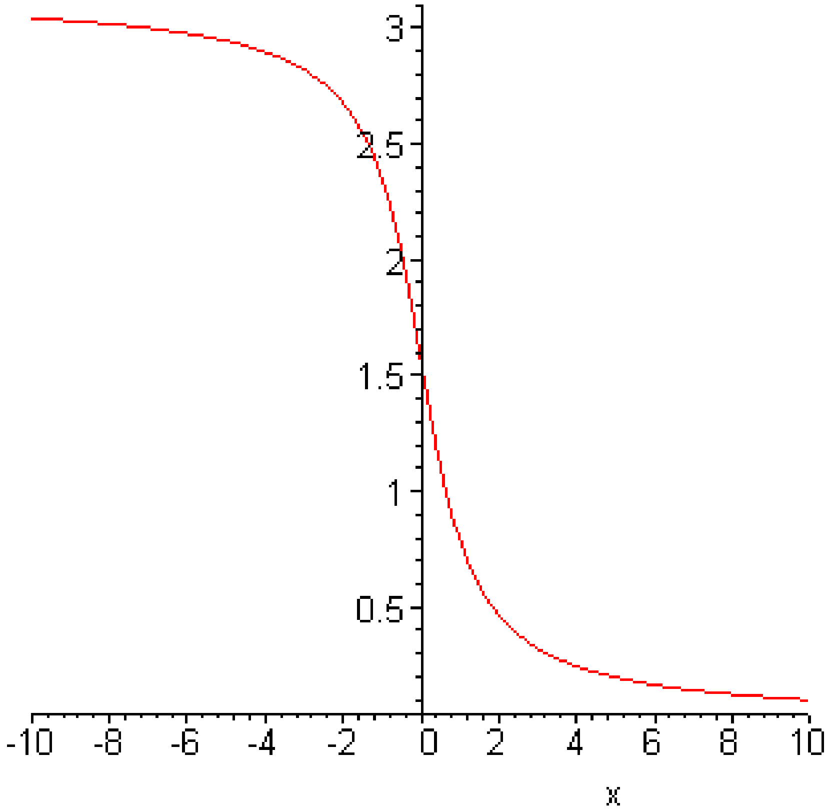
```
> plot(arctan(x),x=-10..10);
```



>

IV. Funkce kotangens je prostá na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$.
Proto k ní existuje na tomto intervalu funkce inverzní ($x = \cot gy$),
což se zapisuje $y = arc\cot gx$
Funkce $f_{-1} : y = \arcsin x$ <čti arkussínus>

```
> plot(arccot(x),x=-10..10);
```



\>

Přehled vzorců

Základní vztahy

1. $\forall x \in R - \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in Z \right\} : tgx \cdot \cot gx = 1$

$\forall x \in R : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Součtové vzorce

2. $\forall x, y \in R : \sin(x \pm y) = \sin x \cos x \pm \cos x \sin y$

$\forall x, y \in R : \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

a za vhodných podmínek 3. $tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgxtgy}$.

Vzorce dvojnásobného a polovičního úhlu

$\forall x \in R : \sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\forall x \in R : \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

4. $\forall x \in R : \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\forall x \in R : \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Součet a rozdíl goniometrických funkcí

$\forall x, y \in R : \sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$

5. $\forall x, y \in R : \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

$\forall x, y \in R : \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

4.3.5 Goniometrické rovnice a nerovnice a jejich soustavy

Využíváme řešení jednoduchých goniometrických rovnic a nerovnic, goniometrických vzorců, substitucí a případně speciálních postupů.

Příklad 4.3.5.1

Řešte v R:

$\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$

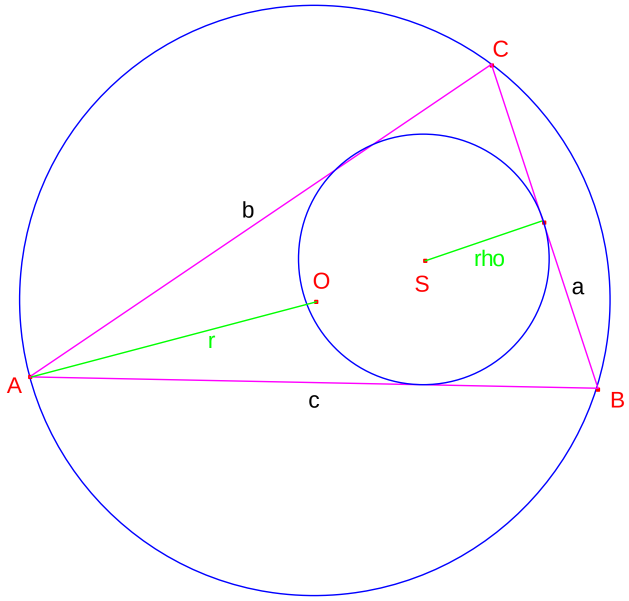
$2\sin x + \cos^2 x = 0$

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \cdot$

$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.3.6 Trigonometrie

Řešení obecného trojúhelníku



1) Sinová věta $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$
2) Kosinová věta $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ <CZ>
3) Tangentová věta $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$ <CZ>
4) $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$
5) $r = \dfrac{abc}{4S}$ $\rho = \dfrac{S}{s}$, když $s = \dfrac{a+b+c}{2}$
6) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta$
7) $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Poznámka:
Při použití sinové věty je třeba provést trojí zkoušku.

1) Součet úhlů roven 180^0
2) Platnost trojúhelníkové nerovnosti
3) Proti většímu úhlu leží větší strana