Analytická geometrie - Geometrie v prostoru

Vzájemná poloha přímek a rovin

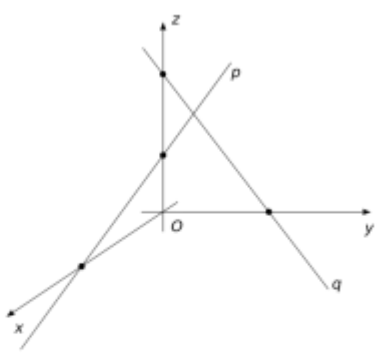
V této kapitole se budeme budeme zabývat vzájemnou polohou přímek a rovin v prostoru.

Vzhledem k tomu, že výpočty s obecnou rovnicí roviny jsou u tohoto typu úloh jednodušší, budeme v následujícím textu používat právě tento způsob vyjádření roviny.

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Vzájemnou polohu dvou přímek v rovině jsme zkoumali v **předchozí kapitole**. V prostoru rozlišujeme čtyři vzájemné polohy dvou přímek p a q.

- $p \cap q = \emptyset$
  Pokud přímky p a q nemají žádný společný bod, mohou být **rovnoběžné různé** nebo **mimoběžné**.
    - Přímky $p(A$, u) a $q(B$, v) jsou **rovnoběné různé**, pokud nemají žádný společný bod a u = kv, pro nějaké $k \in \mathbb{R}$.
    - Přímky jsou **mimoběžné**, pokud nemají žádný společný bod a zároveň nejsou rovnoběžné. Tato vzájemná poloha přímek nemůže nastat v rovině. Zapisujeme $p \nparallel q$.
- $p \cap q = \{P\}$
  Přímky p a q jsou **různoběžné**, mají jeden společný bod P. Zapisujeme $p \times q$.
- $p \cap q = p$
  Přímky p a q jsou **totožné**. Zapisujeme $p = q$.



Obr. 4.5: Mimoběžky

Poznámka

Totožnost přímek je speciální případ rovnoběžnosti. Tj. dvě totožné přímky jsou i rovnoběžné, ale dvě rovnoběžné přímky nemusí být totožné.

Úmluva: Rovnoběžnost přímek p a q budeme značit jako $p \parallel q$. Nadále budeme jako rovnoběžné přímky označovat přímky rovnoběžné různé i přímky totožné. Bude-li potřeba polohy rozlišit, použije se příslušný pojem.

Samotný postup, kterým řešíme vzájemnou polohu dvou přímek v prostoru, je téměř stejný jako ten, který jsme používali v rovině. Je třeba si uvědomit, že přímka je v prostoru zadána jen parametricky a od toho se musí odvíjet i naše řešení.

Příklad 4.6

Určete vzájemnou polohu přímek $p(A, u)$ a $q(B, v)$, je-li $A[1; 3; 5]$, $B[-1; -2; 2]$, $u = (2; 1; 1)$ a $v = (-1; 2; 1)$.

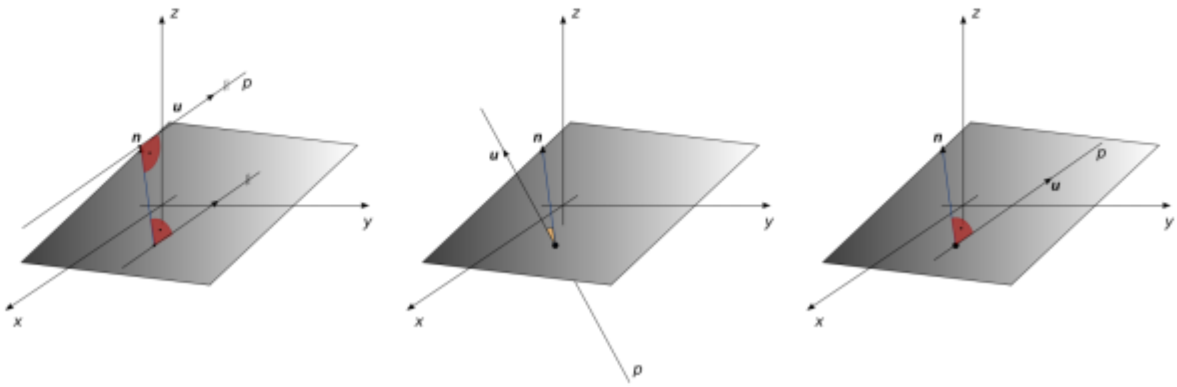
Řešení

- Podíváme-li se na směrové vektory u a v zadaných přímek, vidíme, že vektor u není násobkem vektoru v. To napovídá, že přímky p a q jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné. Pokud jsou mimoběžné, nemají žádný společný bod, pokud jsou různoběžné, mají společný bod jeden.
- Hledáme společné body přímek p a q:
- Abychom určili společné body p a q, musíme vyřešit soustavu rovnic:
  $1 + 2t = -1 - s$,
  $3 + t = -2 + 2s$,
  $5 + t = 2 + s$.
- Z druhé rovnice vyjádříme $t = -5 + 2s$. Dosadíme za t do třetí rovnice a vypočítáme $s = 2$ a zpětně potom $t = - 1$. Spočtené hodnoty parametrů s a t dosadíme zpět do první rovnice:
  $1 - 2 = -1 - 2$,
  $-1 \neq -3$.
- Protože soustava nemá žádné řešení, znamená to, že přímky p a q nemají žádný společný bod. To s přihlédnutím k úvaze na začátku řešení znamená, že přímky p a q jsou mimoběžné.

Vzájemná poloha přímky a roviny

V prostoru rozlišujeme tři možné vzájemné polohy roviny ρ a přímky p.

- $p \cap \rho = \emptyset$ Přímka p je s rovinou ρ **rovnoběžná různá**. Přímka a rovina nemají žádný společný bod.
- $p \cap \rho = \{P\}$ Přímka p a rovina ρ jsou **různoběžné**. Přímka rovinu protíná v jednom bodě, bodě P. Zapisujeme $p \times \rho$.
- $p \cap \rho = p$ Přímka p **leží** v rovině ρ. Společnými body jsou všechny body přímky p. Zapisujeme $p \subset \rho$.



Obr. 4.6: Vzájemná poloha přímky a roviny

Poznámka

Poloha, kdy přímka leží v rovině je speciální případ jejich rovnoběžnosti. Tj. přímky, která leží v rovině je s ní i rovnoběžná, ale přímka rovnoběžná s rovinou v ní nemusí ležet.

Úmluva: Rovnoběžnost přímky p a roviny ρ budeme značit jako $p \parallel \rho$. Nadále budeme jako přímky rovnoběžné s rovinou označovat přímky, které jsou s ní rovnoběžné různé i přímky, které v ní leží. Bude-li potřeba polohy rozlišit, použije se příslušný pojem.

Z *obr 4.6* je vidět, že vzájemná poloha závisí na vztahu normálového vektoru roviny a směrového vektoru přímky. Pokud jsou tyto na sebe kolmé, je přímka s rovinou rovnoběžná. Jestliže kolmé nejsou, přímka a rovina jsou různoběžné.

Pokud je přímka s rovinou rovnoběžná, je třeba zjistit, zda přímka v rovině náhodou neleží. Zvolíme jeden bod přímky a zkoumáme, zda v rovině leží, nebo neleží. Pokud ano, tak celá přímka leží v rovině, pokud ne, tak je přímka s rovinou rovnoběžná různá.

Příklad 4.7

Určete vzájemnou polohu přímky $p(A, \mathrm{u})$ a roviny δ určené bodem B a jejím normálovým vektorem n, je-li $A[1; 4; 2]$, $B[4; 1; 0]$, u = (1; 1; 2) a n = (1; -1; 2). Jsou-li různoběžné, najděte jejich průsečík.

Řešení

- Nejprve zkontrolujeme, zda je vektor u kolmý na vektor n:
  un = 1·1 + 1·(-1) + 2·2 = 4.
- Vektor u není na v kolmý a to znamená, že $p \times \delta$. Má smysl hledat jejich průsečík. Určíme parametrickou rovnici přímky p a obecnou rovnici roviny δ.

p:	
$x = 1 + t,$	δ:
$y = 4 + t,$	$x - y + 2z - 3 = 0.$
$z = 2 + 2t;\ t \in \mathbb{R}.$	

- Do obecné rovnice roviny δ, dosadíme, za x, y, z vztahy z parametrické rovnice přímky p:
  $(1 + t) - (4 + t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0,$
  $1 + t - 4 - t + 4 + 4t - 3 = 0,$
  $4t = 2,$
  $t = ½.$
- To je hodnota parametru t odpovídající průsečíku P roviny δ a přímky p. Dosadíme-li do parametrické rovnice přímky $t = ½$, vypočítáme jeho souřadnice. Rovina δ a přímka p jsou různoběžné a jejich průsečíkem je bod $P[3/2; 9/2; 3]$.

Úloha

Určete vzájemnou polohu přímky $p(A, \mathrm{u})$ a roviny xy , je-li $A[1; 2; 1]$ a u = (2; -1; 0).

Řešení

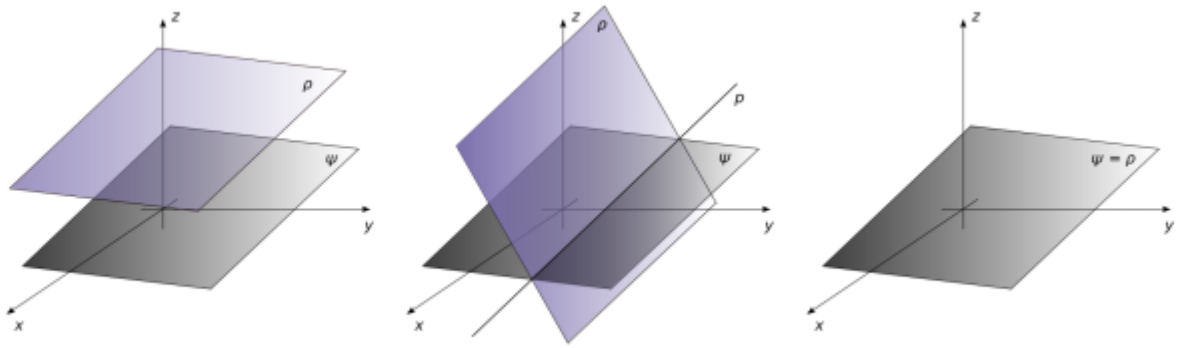
- Nejprve zkontrolujeme, zda je vektor u kolmý na normálový vektor roviny xy - například n = (0; 0; 2):
  un = 2·0 - 1·0 + 0·2 = 0.
- To znamená, že přímka p, je s rovinou xy rovnoběžná. Zkusíme do obecné rovnice roviny xy:
  $z = 0$
  dosadit souřadnice bodu A, abychom zjistili, zda v ní bod A leží. Získáme
  1 = 0.
  To neplatí a bod A tedy neleží v rovině xy.
- Přímka p a rovina xy jsou rovnoběžné různé.

Vzájemná poloha dvou rovin

Hledání vzájemné polohy dvou rovin v prostoru je téměř shodné s hledáním vzájemné polohy dvou přímek v rovině, když jsou tyto určené obecnými rovnicemi. Vzájemné polohy dvou rovin ρ a ψ jsou stejné jako u přímek v rovině.

- $\rho \cap \psi = \emptyset$
  Roviny ρ a ψ jsou **rovnoběžné různé**. Nemají žádný společný bod.

- $\rho \cap \psi = p$
  Roviny ρ a ψ jsou **různoběžné**. Jejich průnikem je přímka p, kterou nazýváme **průsečnice**. Zapisujeme $\rho \times \psi$.
- $\rho \cap \psi = \rho$
  Roviny jsou **totožné**. Zapisujeme $\rho = \psi$.



Obr. 4.7: Vzájemná poloha dvou rovin

Poznámka

Totožnost rovin je speciální případ rovnoběžnosti. Tj. dvě totožné roviny jsou i rovnoběžné, ale dvě rovnoběžné roviny nemusí být totožné.

Úmluva: Rovnoběžnost rovin ρ a ψ budeme značit jako $\rho \parallel \psi$. Nadále budeme jako roviny rovnoběžné označovat roviny, které jsou rovnoběžné různé i totožné. Bude-li potřeba polohy rozlišit, použije se příslušný pojem.

Příklad 4.8

Určete vzájemnou polohu rovin ρ: $x - y + z = 0$ a σ: $2x - 3y + z - 1 = 0$. Jsou-li různoběžné, určete jejich průsečnici.

Řešení

- Nejprve zjistíme, zda jsou roviny ρ a σ rovnoběžné, nebo různoběžné. Normálový vektor roviny ρ, $n\rho = (1; -1; 1)$ a normálový vektor roviny σ, $n\sigma = (2; -3; 1)$. Je vidět, že $n\rho$ není násobkem $n\sigma$, a proto $\rho \times \sigma$. Má tedy smysl hledat jejich průsečnici. Řešíme soustavu dvou rovnic o třech neznámých:
  $x - y + z = 0$,
  $2x - 3y + z = 1$.
- Jednu z neznámých si zvolíme za parametr. Neznámou, kterou zvolíme za parametr musíme vybrat obezřetně, abychom mohli vypočítat zbylé proměnné. Kdyby například rovnice roviny σ byla $2x - 2y + z - 1 = 0$ a my položili $z = t$, měli bychom problém, protože bychom soustavu nemohli dopočítat.
  V našem příkladě položíme $x = t$ a vypočítáme soustavu:
  $t - y + z = 0$,
  $2t - 3y + z = 1$.
- Z první rovnice vyjádříme $z = y - t$ a dosadíme do druhé rovnice:
  $2t - 3y + y - t = 1$,
  $-2y = 1 - t$,
  $y = (1 - t)/(-2)$.
- Zpětně dopočítáme $z = (1 + t)/(-2) = -1/2 - (1/2)t$.
- Zvolený parametr t, je zároveň parametrem v rovnici průsečnice p rovin ρ a σ.
  p:

$x = t$,
$y = -1/2 + (1/2)t$,
$z = -1/2 - (1/2)t$; $t \in \mathbb{R}$.