MASARYKOVA UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY

Vektory a jejich užití

Bakalářská práce

Brno 2020

Vedoucí práce:
RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

Autor práce:
Barbora Sklářová

Bibliografický záznam

SKLÁŘOVÁ, Barbora. *Vektory a jejich užití: bakalářská práce*. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, 2020. Vedoucí bakalářské práce RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

Anotace

Bakalářská práce „Vektory a jejich užití“ je soubor teoretických a praktických poznatků učiva vektorů na středoškolské úrovni, které je rozšířené o definice a věty z vysokoškolské algebry. Jedná se o podpůrný učební materiál pro studenty na vysoké škole do algebry a analytické geometrie. Veškeré příklady jsou doplněné o názorné grafické zpracování. Užití vektorů je aplikováno v analytické geometrii a jistých partiích fyziky.

Annotation

My bachelor’s thesis "Vectors and their usage", is a set of teoretical and practical truths about vectors at high school level, which is extended to definitions and theorems of university level. It is a supportive material for students of algebra and analytic geometry. Examples are supplemented with pictures. Usage of vectors is applied to analytic geometry and certain parts of physics.

Klíčová slova

Vektor, analytická geometrie, užití vektorů, řešené příklady, středoškolská matematika, algebra

Keywords

Vector, analytic geometry, usage of vectors, solved examples, highschool level of math, algebra

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Vektory a jejich užití zpracovala *s využitím pouze citovaných pramenů, dalších informací a zdrojů v souladu s Disciplinárním řádem pro studenty Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity a se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.*

V Brně dne 8. dubna 2020 Barbora Sklářová

Poděkování

Velké poděkování patří RNDr. Břetislavu Fajmonovi, PhD., za poskytnutí podpory, za jeho osobní přístup, ochotu a trpělivost, s níž vedl celou bakalářskou práci. Též bych chtěla poděkovat mé rodině a přátelům za jejich podporu během psaní.

Obsah

Úvod 7

Použité značení 8

1 Algebra ve vektorech 9

1.1 Vymezení pojmu vektor 9

1.2 Pojem vektorového prostoru 19

Vektorový prostor 21

Afinní prostor 22

Lineární závislost vektorů 22

1.3 Definice skalárního a vektorového součinu vektorů 23

2 Využití vektorů v analytické geometrii -- vybrané partie vektorového počtu na úrovni střední školy 33

2.1 Využití vektorů v analytické geometrii – v rovině 33

Řešené příklady v rovině 45

2.2 Využití vektorů v analytické geometrii – v prostoru 49

Řešené příklady v prostoru 57

3 Využití vektorů v některých partiích fyziky 62

Závěr 68

Seznam použité literatury 69

Seznam obrázků 70

Úvod

Vektorová algebra v kombinaci s analytickou geometrií je učivo, které mě během studia velmi zaujalo. Zároveň jsem si uvědomila, že na odborných školách se probírá v samém závěru studia a nepřikládá se mu příliš velká důležitost. Dané učivo je pak na vysokých školách pro studenty z odborných středních škol složité a náročné; přitom se jedná o kapitolu z matematiky, kterou je možné názorně prezentovat a vysvětlit její princip pomocí grafické podpory.

Cílem práce je proto vytvoření podpůrného materiálu pro budoucí studenty, který by eventuálně pomohl rozšířit jejich znalosti a pomohl jim s přechodem mezi střední a vysokou školou.

Práce je rozdělena na tři části. První část se zabývá vysokoškolským vymezením vektoru, vektorového prostoru, skalárním a vektorovým součinem. Už i v této části jsou uváděny též příklady a grafický názor. Druhá část je zaměřena na analytickou geometrii na středoškolské úrovni. Kapitola je rozdělena na dvě podkapitoly – Analytická geometrie v rovině a Analytická geometrie v prostoru. Poslední kapitola je zaměřena na využití vektorů v některých partiích fyziky.

Vzhledem k mému druhému oboru výtvarná výchova budu grafické zpracování příkladů a definic sama tvořit v programu Geogebra.

Použité značení

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ – orientovaná úsečka AB

$\boldsymbol{u}$ – označení vektoru

$\boldsymbol{v_n}$ – normálový vektor

$\boldsymbol{v_s}$- směrový vektor

$\boldsymbol{o}$ – nulový vektor

$\|\boldsymbol{u}\|$ – velikost vektoru

$\boldsymbol{u}$ = $(u_{1;}u_2)$ – souřadnice vektoru

$\in$ - náleží do

$-\boldsymbol{u} -$ opačný vektor

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ – vektorová báze

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ skalární součin vektorů

$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ vektorový součin

$\perp -$ kolmost

$|pq|$– vzdálenost přímek

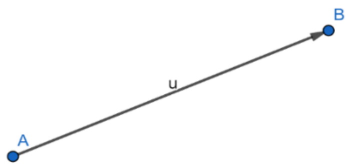
1 Algebra ve vektorech

1.1 Vymezení pojmu vektor

A. Pojem vektor

V rovině, v níž je definován kartézský souřadný systém (dvojice kolmých souřadných os, které se protínají v obrazech bodu 0 a délka jednotky na obou osách je stejná), lze zavést pojem vektoru jako orientované úsečky s počátečním a koncovým bodem.

Grafické znázornění orientované úsečky je tvořeno body a šipkou u koncového bodu (obr. 1).



Obr. 1

Orientovanou úsečku, která má počátek v bodě A a koncový bod v bodě B, budeme zapisovat pomocí značení $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Vzdálenost bodů A, B určuje velikost orientované úsečky.

Nezapomínáme, že úsečka, u které je počáteční bod shodný s koncovým bodem, je také orientovaná úsečka. Tato orientovaná úsečka je rovna nulové orientované úsečce.

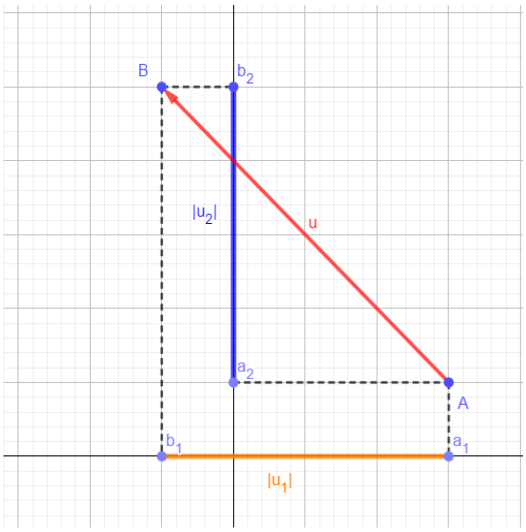
Definice 1.1

Je-li vektor $\boldsymbol{u}$ určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, nazývají se čísla $\mathrm{u}_1 = \mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_{1,}\mathrm{u}_2 = \mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2$ souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$.

Zapisujeme $\boldsymbol{u} = (u_{1;}u_2)$.

Vektor tedy udává směr a velikost orientované úsečky zadané body A a B.

Zjednodušeně $\boldsymbol{u} = B - A$ někdy píšeme $B = A + \boldsymbol{u}$ i vektor $\boldsymbol{u}$ takto vymezený lze geometricky chápat jako posunutí bodu A do bodu B (obr. 2).



Obr. 2

Příklad 1.1

Je dán bod $A = [2{,}4]$ a bod $B = [-1{,}2]$. Určete souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$, který je určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Postup:

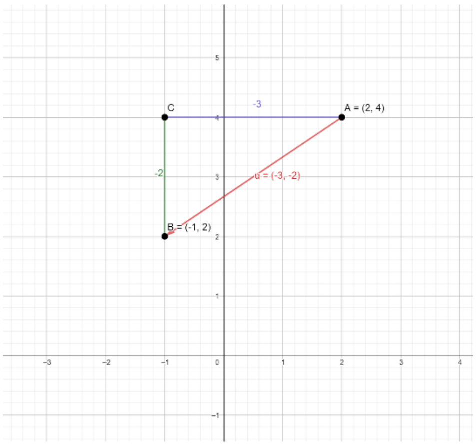
$a_1 = 2\,, a_2 = 4, b_1 = (-1\,), b_2 = 2$

Dosazením do vzorce z definice 1.1.($u_1 = b_1 - a_{1,} u_2 = b_2 - a_2$) získáme:

$$u_1 = (-1) - 2 = -3 \;\; u_2 = 2 - 4 = -2$$

$$\boldsymbol{u} = (-3;\ -2)$$

Grafický: (obr. 3):



Obr. 3

Cvičení 1.1

1. V rovině je dán vektor $\boldsymbol{u}$ určete souřadnice vektoru, který je dán orientovanou úsečkou $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

a) $A = [5; 6],\ B = [2; 2]$

b) $A = [-6; 5],\ B = [3; 7]$

c) $A = [0; 0], B[-3; -6]$

2. Jsou dány body $A[0; 0], B[3; 5], C[7; 1]$. Určete souřadnice bodu X tak, aby platilo:

a) čtyřúhelník ACBX byl rovnoběžník;
b) čtyřúhelník AXCB byl rovnoběžník;
c) čtyřúhelník ACXB byl rovnoběžník.

Řešení:

1. cvičení

a) $u_1 = 2 - 5 = (-3); u_2 = 2 - 6 = 4 \quad \boldsymbol{u} = (-3; -4)$

b) $u_1 = 3 - (-6) = 9; u_2 = 7 - 5 = 2$ $\boldsymbol{u}$ =(9;2)
c) $u_1 = -3 - 0 = -3; u_2 = -6 - 0 = -6$ $\boldsymbol{u} = (-3; -6)$

2. cvičení

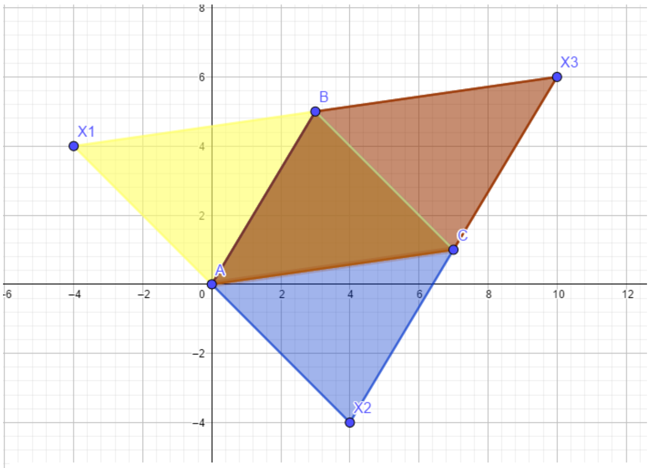
a) $X_1 = [-4; 4]$

b) $X_2 = [4; -4]$

c) $X_3 = [10; 6]$

Graficky vyznačené řešení:

Viditelnost rovnoběžníků je zřejmá (obr. 4).

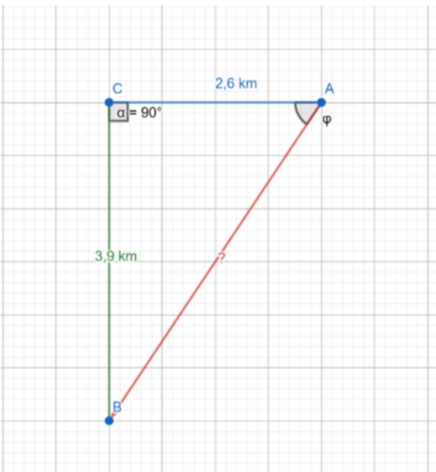


Obr. 4

Nyní se podíváme na příklad z praxe, kde nejsou uvedeny počáteční a koncové body orientovaných úseček, ale velikosti vektorů a úhlů vzhledem k vodorovné rovině a směru označeného jako přímý v této rovině. Ze stylu řešení můžeme vidět, jak je interpretace řešení náročná bez souřadného systému.

Příklad 1.2

Skupina speleologů, která v roce 1972 objevila spojení mezi Mamutí jeskyní a jeskyním systémem Flint Ridge, ušla od Austinova vstupu 2,6 km západním směrem, 3,9 km na jih a vystoupila o 25 m svisle vzhůru. Jaký vektor posunutí odpovídá této cestě?



Obr. 5

Postup řešení:

Nejdříve určíme velikost posunutí ve vodorovném směru. Zakreslíme si daný posun do pravoúhlého trojúhelníku ABC (obrázek 5), kde $|AC| = 2{,}6\ km, |BC| = 3{,}9\ km$, délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty:

$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{2{,}6^2 + 3{,}9^2} = 4{,}68722$

Graficky (obr. 5):

Pro popis si zjistíme i velikost úhlu alfa, který svírán vektory posunutí $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, pro nějž platí v pravoúhlém trojúhelníku ABC

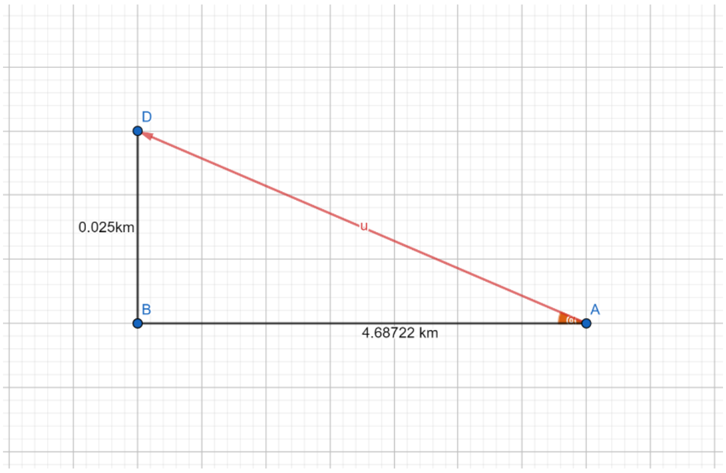
$$\text{tg}\varphi = \frac{\text{délka odvěsny protilehlé úhlu } \varphi}{\text{délka odvěsny přilehlé úhlu } \varphi} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3{,}9}{2{,}6} = 1{,}5$$

Z rovnice $\text{tg}\varphi = 1{,}5$ vypočítáme velikost úhlu φ:

$$\varphi = \text{arctg } 1{,}5 = 56{,}3°$$

Svislé posunutí vypočítáme také pomocí Pythagorovy věty stejným způsobem jako v přechozím případě: trojúhelník ADB je také pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu B a odvěsnami délky $|AB| = 4,68722\ km$ a $|BD| = 0,025\ km.$

Graficky: (obr. 6)



Obr. 6

$$|AD| = \sqrt{|AB|^2 + |BD|^2} = \sqrt{0{,}025^2 + 4{,}68722^2} = 4,68722\ km$$

Zjistíme i v nynějším případě velikost uhlu α, který svírají vektory posunutí $|AB|$ a $|AD|$.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{0{,}025}{4{,}68722} = 0,0053$$

tedy

$$\alpha = \text{artg } 0{,}0053 = 0{,}3°$$

Vektor posunutí speleologické skupiny má velikost 4,7 km (|AD| = 4, 68729 km), svírá se směrem východozápadním úhel 56° (φ = 56°) a posunutí od vodorovné roviny je odkloněno směrem vzhůru o úhel 0,3°. (α=0,3°).

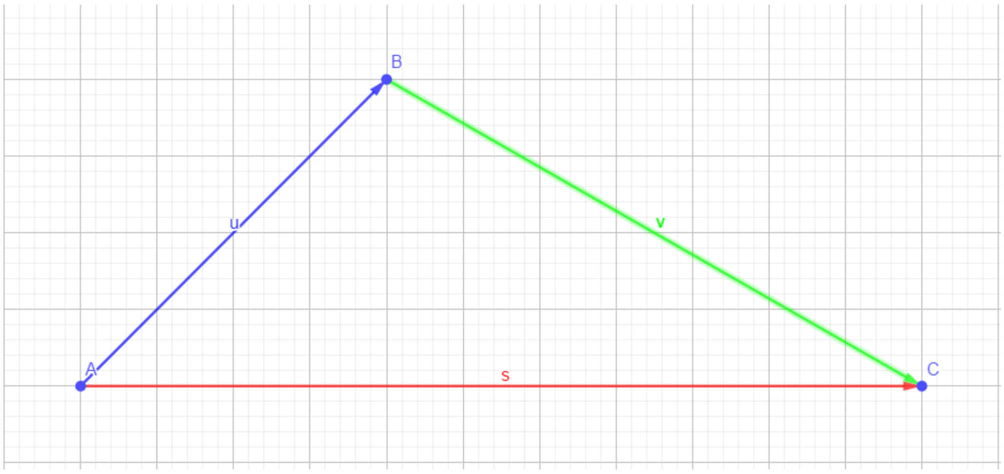
Je nutné podotknout, že vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$ není přesný popis skutečné cesty, ale je zadán počátečním a koncovým bodem – skutečná cesta by pravděpodobně nevedla přímočaře.

B. Sčítání vektorů

Graficky: (obr. 7)

Uvažujeme předmět, který se pohybuje z bodu A do bodu B, a poté jeho další cesta povede z B do C. Celkový posun předmětů je veden dílčími posuny z $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$. Dané dvě po sobě jdoucí posunutí nám dává posunutí z A do C. Právě daný posun $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ nám dává vektorový součet posunutí $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$. Součet vektorů $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = C - B$ je vektor $\boldsymbol{s} = C - A$.

$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$



Obr. 7

Součet vektorů $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = C - B$ je vektor $\boldsymbol{s} = C - A$.

Věta1.1: Pro všechny vektory s operací sčítání platí komutativní zákon: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

Věta 1.2: Pro všechny vektory s operací sčítání platí asociativní zákon: $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

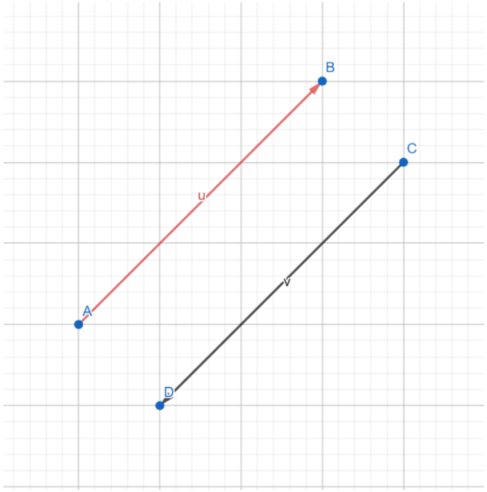
Početně:

Pro každé dva vektory:

$\boldsymbol{u} = (u_1; u_2), \boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$, případně $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; u_3), \boldsymbol{v} = (v_1; v_2; v_3)$

platí: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_3)$ případně $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$

Pro následující příklad je dobré porozumět pojmu inverzní vektor, vzhledem k operaci sčítání vektorů, tzn. opačný vektor. Symbolem $-\boldsymbol{u}$ rozumíme opačný neboli inverzní vektor vektoru, který má stejnou velikost jako vektor u, ale opačný směr (obr.8).



Obr. 8

Opačný vektor k opačnému vektoru je opět původní vektor $-(-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$.

Z vymezení opačného vektoru plyne následující věta:

Věta 1.3: součet navzájem opačných vektorů je roven nulovému vektoru $\boldsymbol{o}$. Nulový vektor $\boldsymbol{o}$ je vektor s nulovou velikostí a žádným směrem. Tedy nulový vektor je posun nulové délky.

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$$

V případě $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v})$ budeme nadále psát $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Pak se jedná o rozdíl vektorů.

Příklad 1.3

V prostoru jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (1; 3; -5), \boldsymbol{v} = (5; 6; 7;)$

Vypočítejte součet a rozdíl zadaných vektorů:

Postup:

$$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = -5$$

$$v_1 = 5, v_2 = 6, v_3 = 7$$

$$c = u + v = (1 + 5; 3 + 6; -5 + 7) \rightarrow c = (6; 9; 2)$$

$$w = u - v = (1 - 5; 3 - 6; -5 - 7) \rightarrow w = (-4; -3; -12)$$

Příklad 1.4

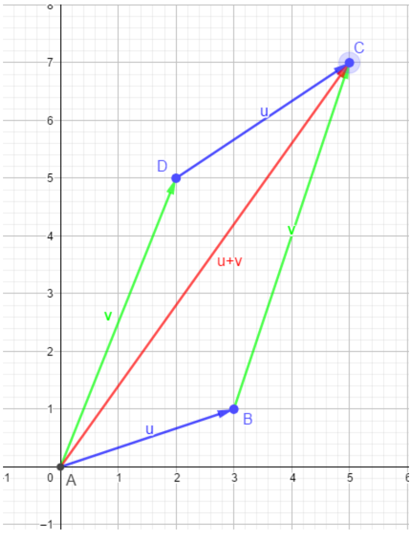
Jsou zadány vektory $\boldsymbol{u} = (3; 2), \boldsymbol{v} = (2; 5)$

Vypočtěte součet a rozdíl vektorů.

Řešení:

Součet $\quad \boldsymbol{c} = (5; 7)$

Graficky: (obr.9)



Obr. 9

Při konstrukci součtu vektoru graficky můžeme umístit vektor v tak, aby počáteční bod byl v bodě B. Je i možné to řešit naopak, že nejprve umístíme vektor v a k němu přičteme vektor u, tedy počáteční bod vektoru u bude v bodě D. Na obrázku 9 vidíme, že Výsledek součtu vektorů je v obou případech stejný.

Rozdíl $\quad \boldsymbol{w} = (1; -3)$

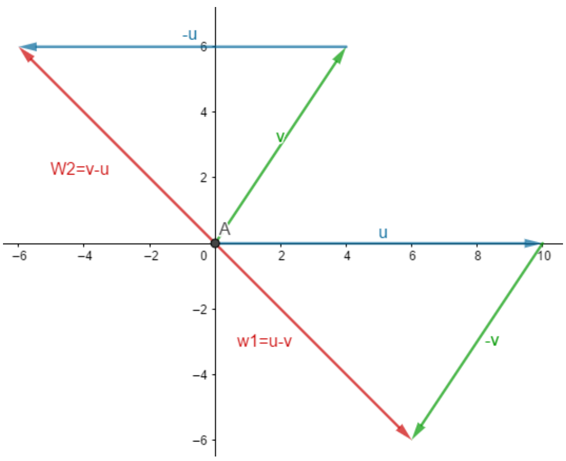
Graficky: (obr. 10)

Pro lepší pochopení grafického významu je možné se na grafické zakreslení dívat jako:

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.

Pro grafické odečtení vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, tj. určit $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, musíme vektory umístit tak, aby měly společný počáteční bod.

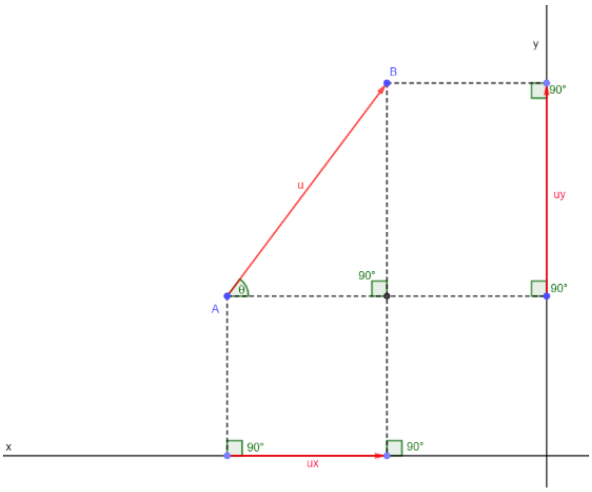
Vektor w má počáteční bod v koncovém bodu vektoru $\boldsymbol{v}$.



Obr. 10

C. Složky vektorů

Složky vektorů se využívají v algebraickém sčítání a odečítání vektorů. Vektor $\boldsymbol{u}$ leží v rovině x, y (obr.11), určený body A a B. Povedeme-li jeho počátečním a koncovým bodem kolmice k souřadnicovým osám x, y vzniknou na souřadnicových osách úseky $\boldsymbol{u_x}$ a $\boldsymbol{u_y}$. Právě ty budeme nazývat složky vektoru $\boldsymbol{u}$ ve směrech x, y. Pomocí kolmic k souřadným osám nám vznikl pravoúhlý trojúhelník.



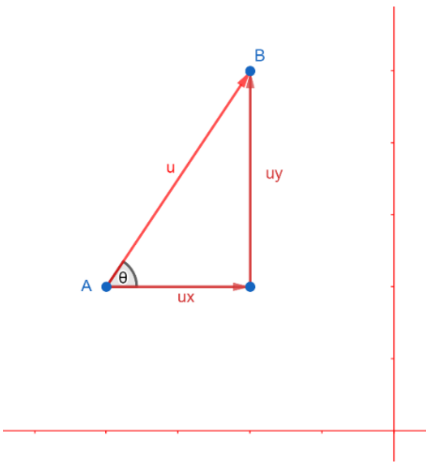
Obr. 11

Pomocí pravoúhlého trojúhelníka snadno určíme výrazy pro složky vektoru u,

$$|\boldsymbol{u_x}| = |\boldsymbol{u}|\, cos\theta \qquad a \qquad |\boldsymbol{u_y}| = |\boldsymbol{u}| \sin\theta$$

kde θ je úhel, který vektor $\boldsymbol{u}$ svírá s kladným směrem osy x a $|\boldsymbol{u}|$ je velikost vektoru.

Na obrázku 12 vidíme, že vektor a jeho složky ve směru x a ve směru y tvoří pravoúhlý trojúhelník.



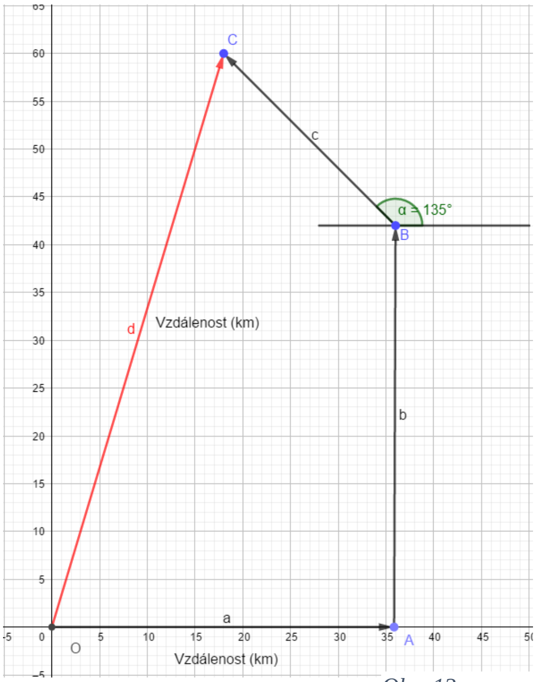
Obr. 12

Je také zřejmé, jak lze podle obrázků a poznatků o složkách vektorů sestrojit samotný vektor: Použijeme stejnou geometrickou konstrukci jako při sčítání vektorů.
V závislosti na hodnotě úhlu θ mohou být složky vektoru kladné, záporné nebo nulové.

Příklad 1.5

Trasa motoristů je vymezena: Od startu jeďte do bodu A, které je od startu vzdáleno 36 km východním směrem. Další zastávka bude v bodě B 42 km severně od bodu A. Cíl celkové cesty bude v bodě C, který je od B vzdálen 25 km severozápadně (obr. 13).

Určete velikost posunutí d od startu do cíle C.



Obr. 13

Postup řešení:

Vhodně zvolíme soustavu souřadnic v rovině trasy. Vektory jsou již znázorněné na obrázku výše. Budeme využívat sčítání vektorů a rozložení vektorů na jejich složky.

Vektor $\boldsymbol{d}$ si rozložíme do složek:

$$d_x = a_x + b_x + c_x$$

$$= 36km + 0 + (25km)(\cos 135°) = (36 + 0 - 17{,}7km) = 18{,}3km$$

$$d_{y=}a_y + b_y + c_y = 0 + 42km + (25km)(sin135°) = (0 + 42 + 17{,}7km) = 59{,}7km$$

Po vypočtení složek vektoru d je zřejmé, že jsme dospěli k délce stran pravoúhlého trojúhelníku, a proto velikost vektoru $\boldsymbol{d}$ můžeme vypočítat pomocí Pythagorovy věty.

Tedy:

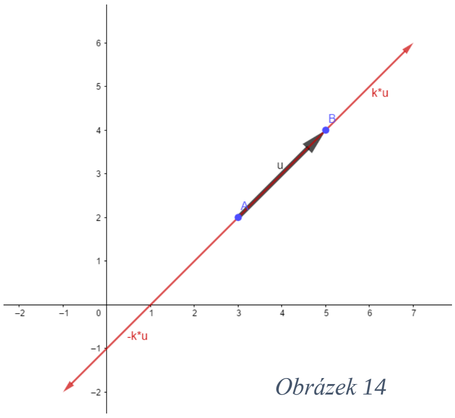
$$\boldsymbol{d} = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(18{,}3km)^2 + (59{,}7km)^2} = 62km$$

D. Násobení vektoru číslem

Věta 1.4: Násobení nulového vektoru reálným číslem k je nulový vektor, kde nulový vektor je určen nulovou orientovanou úsečkou.

Násobek vektoru $\boldsymbol{u} = B - A$ číslem k je operace jejímž výsledkem je vektor $\boldsymbol{v}$:

1. $|\boldsymbol{v}| = |k| \cdot |\boldsymbol{u}|$,
2. je-li $k \leq 0$, má výsledný vektor $\boldsymbol{v}$ má opačný směr než počáteční vektor $\boldsymbol{u}$,
3. je-li $k \geq 0$, má výsledný vektor $\boldsymbol{v}$ stejný směr jako počáteční vektor $\boldsymbol{u}$.



Obrázek 14

Vektor $\boldsymbol{v}$ označujeme $k \cdot \boldsymbol{u}$. Ukázání orientace výsledného vektoru je na obrázku 14.

Určení souřadnice vektoru $\boldsymbol{v} = k \cdot \boldsymbol{u}$ ze souřadnic původního vektoru $\boldsymbol{u}$. Násobení vektoru číslem k je vynásobení každé jeho souřadnice číslem k.

Cvičení 1.2

1. Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (4; 2), \boldsymbol{v} = (-1; -5)$:
   a) Zakreslete v soustavě souřadnic orientované úsečky. Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ mají počátek v bodě $O\ [0; 0]$. Následně vyznačte graficky vektor $\boldsymbol{w}$ tak, aby platilo:

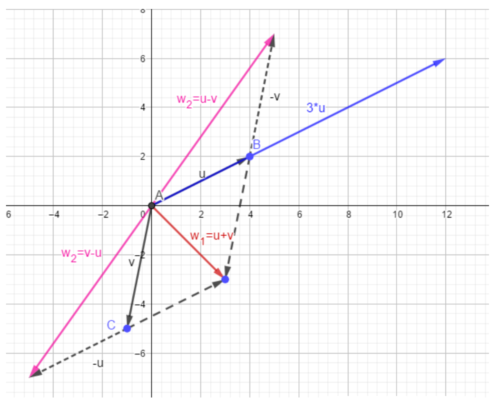
   $$\boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{w_3} = 3 \cdot \boldsymbol{u}$$

   b) Vypočtěte souřadnice vektorů $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}$.
2. Určete lineární kombinaci $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$ vektorů $\boldsymbol{u} = (2; 5), \boldsymbol{v} = (-3; 9), \boldsymbol{w} = (4; 8)$, je-li:
   a) $a = -3, b = 0, c = 5$
   b) $a = 1, b = 2, c = -2$
   c) $a = 2, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{2}$

Výsledky:

1)
   a) Obrázek 15
   b) $\boldsymbol{w_1}$ = (3; -3)
      $\boldsymbol{w_2} = (5; 7)$
      $\boldsymbol{w_2} = (-5; -7)$
      $\boldsymbol{w_3} = (12; 6)$

2) $a)\ (14; 25); b)(-12; 7); c)(1; 9)$



Obr. 15

1.2 Pojem vektorového prostoru

Pojem vektoru dosud vymezený pouze intuitivně jako orientovaná úsečka lze definovat i přesněji na základě vlastností operací sčítání a násobení vektoru prvkem z tělesa skalárů, které výše uvedená intuitivní definice splňuje. Nejprve definujeme těleso skalárů – s tím souvisí následující tři definice.

Okruh je množina $(M, +, *)$ s operacemi + a $*$ ($*$ představuje násobení), které splňují vlastnosti:

a) operace + splňuje vlastnosti

(1) - Uzavřenost množiny M vzhledem k operaci +

$$\forall x, y \in M : x + y \in M$$

(2) - Asociativita operace

$$\forall x, y, z \in M : (x + y) + z = x + (y + z)$$

(3) - Existence jednotkového prvku vzhledem k operaci

$$\exists e \in M : x + e = e + x = x, \forall x \in M$$

(4) – Existence inverzních prvků vzhledem k operaci

$$\forall x \in M \, \exists \, x^{-1} \in M : x + x^{-1} = x^{-1} + x = e$$

(5) – Operace + se nazývá komutativní na množině M, pokud platí vlastnost (5)

$$\forall x, y \in M : x + y = y + x$$

tj. (M, +) je komutativní grupa;

b) operace $*$ splňuje vlastnosti

(1) - Uzavřenost množiny M vzhledem k operaci $*$

$$\forall x, y \in M : x * y \in M$$

(2) - Asociativita operace $*$

$$\forall x, y, z \in M : (x * y) * z = x * (y * z)$$

(3) - Existence jednotkového prvku vzhledem k operaci $*$

$$\exists e \in M : x * e = e * x = x \, \forall x \in M$$

c) interakce operací + a $*$ splňuje tzv. distributivní zákony = vlastnost (6):

$$\forall \, x, y, z \in M : x * (y + z) = x * y + x * z, (y + z) * x = y * x + z * x$$

(rovnice jsou dvě díky tomu, že operace $*$ není obecně komutativní).

Se dvěma distributivními zákony je vlastností v definici okruhu celkem deset.

Obor integrity (M, +, $*$) s operacemi + a $*$, je okruh, kde jsou navíc splněny vlastnosti:

a) operace + nesplňuje nic navíc;

b) operace $*$ splňuje navíc:

- M neobsahuje netriviální dělitele nuly (vzhledem k operaci $*$);
- vlastnost (5), tj. operace $*$ je komutativní na M;

Pozn: díky komutativitě operace $*$ lze distributivní zákon psát v jediné rovnici: $\forall\, x, y, z \in M : x * (y + z) = x * y + x * z = y * x + z * x = (y + z) * x.$

Těleso je algebraická struktura (M, +, $*$), která je okruhem, a dále platí:

a) operace + nesplňuje nic nového;

b) operace $*$ splňuje navíc

vlastnost (4) – existence inverzních prvků vzhledem k operaci $*$ na množině M $-$ {0},

vlastnost (5) komutativita na množině M;

d) počet distributivních zákonů se redukuje na jeden díky komutativitě operace $*$.

Tedy komutativní okruh (M, +, $*$) s alespoň dvěma prvky je těleso tehdy, když ke každému nenulovému prvku a existuje inverzní prvek a^{-1} takový, že $a * a^{-1} = a^{-1} * a$.

Příklady:

Okruh:

- Příkladem nekonečného okruhu je (Z, +, $*$), tedy množina celých čísel s tradičními operacemi sčítání a násobení.

Obor integrity:

- (Z, +, $*$) je nejen nekonečný okruh, ale i nekonečný obor integrity, protože neobsahuje netriviální dělitele nuly a násobení je komutativní, a tedy distributivní zákon lze psát v jedné rovnici.

Těleso:

- (Z, +, $*$) je nekonečný obor integrity, který není tělesem, protože množina Z neobsahuje většinu inverzních prvků vzhledem k operaci násobení,
- (Z_7, $\oplus$, $*$) je konečný obor integrity, ale též i konečné těleso, protože v případě konečné množiny M pojmy obor integrity a těleso splývají,
- nejdůležitějším pro další úvahy je těleso reálných čísel (R, +, $*$).

Pro lepší pochopení vztahů mezi pojmy je dobré si pamatovat, že všechny obory integrity jsou současně i okruhy, a všechna tělesa jsou současně i obory integrity, z čehož i vyplývá, že každé těleso je okruhem. Nicméně naopak už říci nelze, že obor integrity je tělesem; např. $(Z, +,*)$ je obor integrity, ale není tělesem.

Vektorový prostor

Nechť T je libovolné těleso. *Vektorovým prostorem nad tělesem T* rozumíme neprázdnou množinu V, na níž je definováno sčítání dvojic prvků (tj. každé dvojici prvků $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ je jednoznačně přiřazen prvek $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ a násobení prvků z V prvky z tělesa T (tj. každému $\boldsymbol{u} \in V$ a každému $r \in T$ je jednoznačně přiřazen prvek $r * \boldsymbol{u} \in V$. Přitom pro všechny $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a všechny $r, s \in T$ musí být splněny tyto podmínky:

1. $r * \boldsymbol{u} \in V$
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita operace +)
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
4. existuje takový prvek $\boldsymbol{o} \in V$ takový, že $0 * \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ pro každé $\boldsymbol{u} \in V$
    - Vektor $\boldsymbol{o}$ se nazývá nulový vektor
    - $0 \in$ T je nulový prvek
5. $r * (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = r * \boldsymbol{u} + r * \boldsymbol{v}$
6. $(r + s) * \boldsymbol{u} = r * \boldsymbol{u} + s * \boldsymbol{u}$
7. $1 * \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
8. $r * (s * \boldsymbol{u}) = (r * s) * \boldsymbol{u}$.

Poznámka: existence inverzních vektorů vzhledem ke sčítání plyne z vlastnosti 1 volbou $r = -1$.

Prvky vektorového prostoru nazýváme vektory.

Věta 1.5. Aritmetický vektorový prostor R^n nad tělesem T rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel s operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem definovanými:

$$(u_1; u_2; \dots; u_n) + (v_1; v_2; \dots; v_n) = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; \dots; u_n + v_n)$$

Jako první příklad si uvedeme triviální neboli nulový vektorový prostor, který se skládá pouze z nulového vektoru a který budeme značit stejně jako nulový prvek, tj. o. Stejné označení budeme vést i pro nulový vektor.

Příklady vektorových prostorů:

1. Aritmetická vektorový prostor R^2 nad tělesem T. Je množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel s operacemi sčítání po složkách, násobení vektoru reálným číslem po složkách.
2. Uvedená obecná definice vektorového prostoru dovoluje definovat jako vektorový prostor i některé množiny, na něž jsme se jako na vektory dosud nedívali, jako např. množina spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, společně s operacemi sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem, je vektorovým prostorem.
3. Těleso T spolu s operacemi sčítání a násobení definovanými na T je vektorový prostor nad sebou samotným. V tomto konkrétním příkladě skaláry i vektory jsou prvky téže množiny – v tomto smyslu o tělesech většinou neuvažujeme, ale z tohoto příkladu je vidět, že pojem vektoru je zobecněním pojmu skalár.

Afinní prostor

Afinní prostor je neprázdná množina $\boldsymbol{A}$ se zobrazením $A \times A$ do nějakého vektorového prostoru V (dvěma bodům A a B je přiřazen vektor $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$), která splňuje:

Pro libovolný bod $A \in \boldsymbol{A}$ a libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in V$ jednoznačně určují bod B tak, že platí: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{u}$

Pro libovolné body A, B, C platí: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$

Vektorového prostoru V se nazývá zaměření afinní prostoru $\boldsymbol{A}$ a značí se $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$**.**

Lineární závislost vektorů

Jsou dány vektory ve vektorovém prostoru R^n $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Vektory jsou lineárně závislé, pokud je možné jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů.

Dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ ve vektorovém prostoru R^n jsou lineárně závislé, pokud je možné jeden vyjádřit jako násobek druhého vektoru:

$$\boldsymbol{u} = k * \boldsymbol{v}$$

Pokud nenalezneme číslo k jsou vektory lineárně nezávislé.

Tři vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ ve vektorovém prostoru R^n jsou lineárně závislé, pokud je možné jeden vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů:

$$\boldsymbol{w} = l * \boldsymbol{u} + k * \boldsymbol{v}$$

Pokud nenalezneme číslo l a k jsou vektory lineárně nezávislé.

Množina vektorů je lineárně závislá, jestliže je možné jeden z vektorů množiny vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů. Množina vektorů je lineárně nezávislá, jestliže žádný z vektorů z dané množiny není lineární kombinací ostatních vektorů

1.3 Definice skalárního a vektorového součinu vektorů

E. Skalární součin vektorů

Skalární součin vektorů je velmi důležité zobrazení.

Budeme jej zapisovat $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ nebo $\boldsymbol{uv}$.

Definice 1.2. Skalární součin ve vektorovém prostoru je zobrazení $VxV \to R$, když splňuje vlastnosti

1) symetričnost $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ (prohození vektorů nezmění výsledek),
2) linearitu $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$,
   $(r * \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = r * (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$,
3) pozitivně definitní forma, tedy pro $u \neq o$ platí $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} > o$.

Příklad: V aritmetickém vektorovém prostoru reálných čísel lze definovat skalární součin vektorů takto: dvěma vektorům $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \dots)$ $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2; \dots)$ přiřazujeme reálé číslo

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots = r$,

kde r je reálné číslo.

Definice 1.3.

Pro dva nenulové vektory v, u platí, že pokud se skalární součin těchto vektoru rovná 0, pak jsou navzájem kolmé. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$

Díky cizojazyčné literatuře se někdy skalárnímu součinu říká vnitřní součin.

Příklad 1.6

Ve vektorovém prostoru R^3 jsou zadány dva vektory: $\boldsymbol{u} = (1; 5; 5)$ a $\boldsymbol{v} = (5; 3; -4)$. Vypočítejte skalární součin vektorů u a v.

Řešení:

$$\boldsymbol{uv} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot (-4)$$

$$\boldsymbol{uv} = 0$$

Výsledek skalárního součinu vektorů se může rovnat nule.

Na příkladu vektorového prostoru R^n lze ověřit, že tradičně definovaný skalární součin splňuje vlastnosti symetričnost a linearitu:

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$$

$$\boldsymbol{w}(u + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv}$$

Pro ověření platnosti si obě strany obou rovnic vypočítáme pro vektory ve vektorovém prostoru R^2: $\boldsymbol{u} = (1; 2), \boldsymbol{v} = (2; 5)$,

$\boldsymbol{w} = (4; 7)$:

$\boldsymbol{uv}$=$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 2 + 10 = 12$

$\boldsymbol{vu}$=$2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 2 + 10 = 12$

$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$=$4 \cdot (1 + 2) + 7 \cdot (2 + 5) = 12 + 49 = 61$

$\boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv}$=$4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 5 = 4 + 14 + 8 + 35 = 61$

Dané rovnosti jsme snadno ověřili pomocí výše použitých příkladu.

Dále pro příslušné vektory platí:

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{uw} + \boldsymbol{uz} + \boldsymbol{vw} + \boldsymbol{vz}$$

F. Velikost vektoru

Velikostí vektoru u se rozumí velikost orientované úsečky $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ určující vektor $\boldsymbol{u}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{u}$ značíme $\|\boldsymbol{u}\|$

Jestliže $\|\boldsymbol{u}\|$ = 1, nazýváme jej jako jednotkový vektor.

V příkladu se speleology jsme velikost hledaného vektoru počítali pomocí Pythagorovy věty, tj. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Z toho vyplývá, že vzdálenost bodů A, B v prostoru R^n je rovna

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

Těchto poznatků lze využít pro odvození velikosti vektoru, kde víme, že $\boldsymbol{u} = B - A$ a ze vzorečku dokážeme vypočítat $\boldsymbol{u} = (u_1; u_{2;} u_3; . . ; u_n)$.

Velikost vektoru vypočítáme poté podle vzorečku

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Velikost vektoru je chápána jako odmocnina skalárního součinu vektoru se sebou samým.

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + \cdots + u_n \cdot u_n}$$

Po úpravě dostaneme již známý vzorec pro velikost vektoru.

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Příklad 1.7

Ve vektorovém prostoru R^3 je dán vektor $\boldsymbol{u} = (4; -4; 7)$.

Určete velikost vektoru $\boldsymbol{u}$.

Řešení:

Postup při řešení takto zadaného vektoru je velice snadný, jedná se o dosazení do již známého vzorce: $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} =$

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{16 + 16 + 49}$

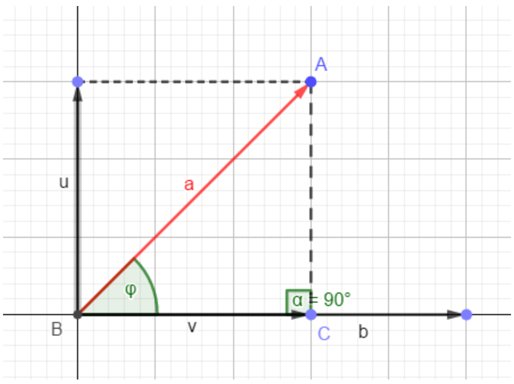
$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{81}$

$\|\boldsymbol{u}\| = 9$

Pro lepší pochopení významu skalárního součinu si uvedeme názorný příklad.

Příklad 1.8

Ve vektorovém prostoru R^2 vektor $\boldsymbol{a}$ (obr. 16) rozložíme na součet vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ (tj. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$) tak, aby $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{b}$, tj. vektor $\mathbf{u}$ je kolmý na vektor $\boldsymbol{b}$, vektor $\boldsymbol{v}$ je násobkem vektoru $\boldsymbol{b}$, tedy pravoúhlý průmět vektoru $\boldsymbol{a}$ do směru vektoru $\boldsymbol{b}$.



Obr. 16

Z věty 1.5 víme, že navzájem kolmé vektory mají skalární součin roven 0. Pokud mají vektory $\boldsymbol{v}$ a $\mathbf{b}$ stejný směr, platí pro jejich skalární součin: $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|$, tj. jejich skalární součin je roven součinu jejich velikostí. Pro skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ tedy dostáváme: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|$. Z pravoúhlého trojúhelníka ABC platí:

$cos\varphi = \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, tedy $\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{a}\| \cdot cos\varphi$. Vztah pro skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je následující:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot cos\varphi$$

kde je úhel φ, který svírají vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Z daného vzorce vyplývá vzorec následující:

$$cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|}$$

Poznámka: Geometrický význam skalárního součinu: skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ je roven obsahu obdélníka o stranách délky $\|\boldsymbol{b}\|$ a$\|\boldsymbol{v}\|$**,** tedy délky vektoru b a délky kolmého průmětu vektoru $\boldsymbol{a}$ do směru vektoru $\boldsymbol{b}$. Další možnost: skalární součin je součin dvou délek v jednom směru délky vektoru $\boldsymbol{b}$ a délky průmětu vektoru a do směru vektoru $\boldsymbol{b}$.

Schwarzova nerovnost

Odchylka vektorů vyplývá ze Schwarzovy nerovnosti: $|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$:

Tedy pro dva libovolné vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ platí:

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|} \leq 1$$

Ze vzorce vyplývá, že existuje jedno reálné číslo, pro které platí:

$$cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|} \quad a\ 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Důkaz platnosti:

$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$

Jestliže $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$, pak $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{o}| = 0 = \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{o}\|$ ⇒věta platí

Jestliže $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$, vezmeme vektor $(\boldsymbol{u} - r \cdot \boldsymbol{v})$, kde $r \in R$

Díky skalárnímu součinu máme:

$$0 \leq (\boldsymbol{u} - r \cdot \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} - r \cdot \boldsymbol{v})$$

Po roznásobení se nerovnost změní na:

$$0 \leq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) - 2r \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + r^2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})$$

Zvolíme si r:

$$r = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$$

Daný krok můžeme udělat, neboť $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o} \Rightarrow (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) > 0$

Po dosazení:

$$0 \leq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) - 2\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) + \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^{2}}{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})^2} \ (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})$$

$$0 \leq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) - 2\frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} \cdot + \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2}{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})}$$

$$0 \leq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) - \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2}{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$$

Rovnici vynásobíme kladným číslem $(v \cdot v)$ a dostaneme nerovnici,

$$0 \leq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$$

neboli

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 \leq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})$$

a odmocněním této nerovnosti plyne tvrzení, které známe z odchylky vektorů.

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$$

$$\sim$$

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|} \leq 1$$

Rovnost nastane tehdy když, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ nebo $\boldsymbol{u} - r \cdot \boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{u} = r \cdot \boldsymbol{v}$ tzn, když vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou lineárně závislé.

Příklad 1.9

Ve vektorovém prostoru R^3Jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (1; 5; 6)$ a $\boldsymbol{v} = (4; 2; 1)$, které mají velikost $\|\boldsymbol{u}\| = 7{,}87$, $\|\boldsymbol{v}\| = 4{,}58$. Určete úhel $\cos\varphi$ jimi svíraný.

Postup řešení:

Daný příklad se řeší pouze dosazením do výše uvedeného vzorce:

$$cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \ \cdot \ \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|}$$

$$cos\varphi = \frac{1 \ \cdot \ 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{7{,}87 \cdot \ 4{,}58}$$

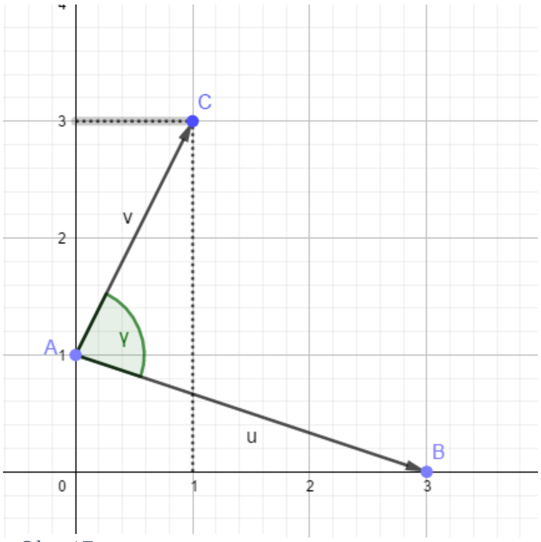
$$cos\varphi = \frac{20}{36,04}$$

$$cos\varphi = \frac{20}{36,04}$$

$$cos\varphi = 56°$$

Příklad 1.10

Ve vektorovém prostoru R^2 jsou dány body A [0; 1], B[3; 0], C[1; 3]. Určete velikost úhlu γ v trojúhelníku při vrcholu A.



Obr. 17

Postup řešení:

Graficky vyznačený příklad je na obrázku 17. Vyznačíme si vektory u a v, kde vektor $\boldsymbol{v} = C - A$ a vektor $\boldsymbol{u} = B - A$. Vypočítáme si souřadnice vektorů.

$\boldsymbol{u} = (3; -1)$,$v = (1; 2)$

Následně vypočítáme velikost vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Velikost úhlu spočítáme podle vzorce na výpočet velikosti úhlů.

$$cos\gamma = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|} = cos\gamma = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Z toho $\gamma \triangleq 1{,}4289$ (ve stupních 81°52`12``).

Cvičení 1.3

1. Je dán vektor $\boldsymbol{u} = (3; 2)$ Určete reálné číslo m tak, aby pro vektor $\boldsymbol{v}$ platilo $\boldsymbol{v} = (6; m)$ platilo $|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}| = 5$.
2. Jsou dány body $A[3; 2; 1], B[1; -3; 0], C[0; 2; 5]$. Určete skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{u} = B - A, \boldsymbol{v} = C - A$.

Řešení:

1) $m_1 = -2, m_2 = 6$
2) 2

G. Vektorový součin

Báze vektorového prostoru

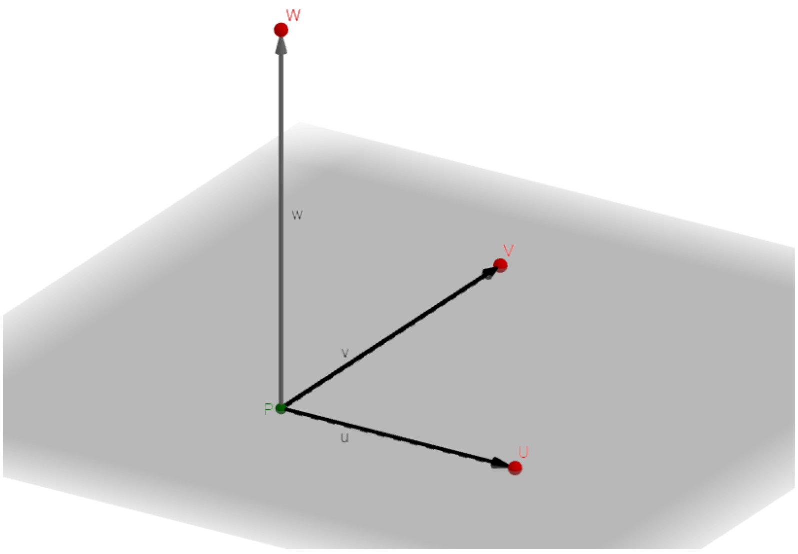
Ve vektorovém prostoru $\boldsymbol{V}$ nad tělesem T mějme posloupnost vektorů B.

B je báze vektorového prostoru, pokud:

- Prvky posloupnosti B jsou lineárně nezávislé vektory
- Lineární obal báze vektorového prostoru je roven celému prostoru $\boldsymbol{V}$.

Pravotočivá a levotočivá báze

Dříve než se budeme zabývat vektorovým součinem, definujeme si bázi ve vektorovém prostoru – uspořádanými trojicemi vektorů. Báze je tvořena trojicí vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ a budeme takovou bázi označovat $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Budeme přepokládat, že trojce vektorů je tvořena orientovanými úsečkami se společným počátečním bodem $\boldsymbol{P}$.



Obr. 18

Na obrázku 18 máme zakresleny vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, které máme určeny orientovanými úsečkami $\overrightarrow{PU}, \overrightarrow{PV}, \overrightarrow{PW}$. Pro určení pravotočivé či levotočivé báze použijeme následující pomůcku. Představme si, že položíme pravou ruku na rovinu $\boldsymbol{PUV}$ tak, aby malíček je vytvarován do orientovaného oblouku, (od paty ke špičce.), a tato orientace je v tom též směru, jako otáčení vektoru $\boldsymbol{u}$do směru vektoru $\boldsymbol{v}$. Ruka se přesouvá po menším úhlu. Jestliže při přesouvání z jednoho vektoru na druhý je palec ve stejném poloprostoru jako v našem případě (obr. 18), báze vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ je báze pravotočivá. V případě, že palec směřuje do opačného poloprostoru než vektor $\boldsymbol{w}$, je báze $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ levotočivá.

Vektorový součin

U skalárního součinu víme, že dvěma vektorům přiřazuje reálné číslo (skalár). Vektorový součin dvěma vektorům v prostoru přiřadí opět vektor v prostoru.

Definice 1.3 Vektorový součin v prostoru je zobrazení $V \times V \to V$, které přiřadí vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ (v tomto pořadí) jejich vektorový součin $\boldsymbol{w}$ tak, že:

1. Pokud $\boldsymbol{u}$ nebo $\boldsymbol{v}$ je nulový vektor, vektorový součin $\boldsymbol{w}$ je roven nulovému vektoru.
2. Pro $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ různé od nulového vektoru je vektor $\boldsymbol{w}$ kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.
3. Pro $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ různé od nulového vektoru tvoří vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ pravotočivou bázi.
4. $\|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \cdot sin\alpha$, kde α je úhel vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

Vektorový součin $\boldsymbol{w}$ vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ značíme $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, tedy $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Vektorový součin vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor. Vektorový součin vektorů neležících na jedné přímce je vektor $\boldsymbol{w}$. Vektor **w** má dané vlastnosti.

Je zřejmé, že z uvedených vlastností je vektorový součin dvou vektorů přesně určen.

Věta 1.6. Ve vektorovém součinu záleží na pořadí násobených vektorů. Tedy u vektorového součinu neplatí komutativní zákon.

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$$

Výpočet vektorového součinu:

Vektorový součin $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ máme zadané v trojrozměrném prostoru v kartézské soustavě souřadnic. $\boldsymbol{u} = (u_1, u_{2,} u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Pro výpočet si pomůžeme vzorcem na výpočet determinantu, který se počítá na pravé straně rovnosti. Jelikož se naše matice skládá ze tří sloupců a tří řádků, jedná se o determinant 3. řádu V tomto případě si uvedeme Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinant 3. řádu, které nám pomůže právě při výpočtu vektorového součinu.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3$$

$$\boxed{a_1 \cdot b_2 \cdot c_3} + \boxed{a_2 \cdot b_3 \cdot c_1} + \boxed{a_3 \cdot b_1 \cdot c_2} - \boxed{a_3 \cdot b_2 \cdot c_1} - \boxed{a_1 \cdot b_3 \cdot c_2} - \boxed{a_2 \cdot b_1 \cdot c_3}$$

Sarrusovo pravidlo nyní využijeme u počítání vektorového součinu vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i \cdot u_2 \cdot v_3 + j \cdot u_3 \cdot v_1 + k \cdot u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2 \cdot k - v_2 \cdot u_3 \cdot i - v_3 \cdot u_1 \cdot j$$

Vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jsou jednotkové a na pravé straně rovnice je můžeme vytknout a poté se rovnice změní na:

$$\boldsymbol{i} \cdot u_2 \cdot v_3 + \boldsymbol{j} \cdot u_3 \cdot v_1 + \boldsymbol{k} \cdot u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2 \cdot \boldsymbol{k} - v_2 \cdot u_3 \cdot \boldsymbol{i} - v_3 \cdot u_1 \cdot \boldsymbol{j} =$$
$$= \boldsymbol{i} \cdot (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3) + \boldsymbol{j} \cdot (u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1) + \boldsymbol{k} \cdot (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2)$$

Nyní je zřejmé, že hodnoty v závorkách nám dávají reálné číslo a nikoli vektor. Za jednotkové vektory dosadíme jejich souřadnice $\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)$.

$$\boldsymbol{i} \cdot (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3) + \boldsymbol{j} \cdot (u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1) + \boldsymbol{k} \cdot (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2) =$$
$$(1,0,0) \cdot (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3) + (0,1,0) \cdot (u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1) + (0,0,1) \cdot (u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2)$$
$$= \text{vektor } (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3; u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1; u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2)$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 \cdot v_3 - v_2 \cdot u_3; u_3 \cdot v_1 - v_3 \cdot u_1; u_1 \cdot v_2 - v_1 \cdot u_2)$$

Věta 1.7 Velikost vektorového součinu dvou vektorů je rovna obsahu rovnoběžníku jimi určeného

Příklad 1.11

Ve vektorovém prostoru R^3 jsou dány vektory $\boldsymbol{u} = (3; 1; 2), \boldsymbol{v} = (-1; 1; 2)$ vypočítejte vektorový součin vektorů.

Řešení:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2; 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3; 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = (0; -8; 4)$$

Cvičení 1.4

a) Vypočítejte vektorový součin vektorů ve vektorovém prostoru R^3 $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, je-li dáno:

   a. $\boldsymbol{u} = (2; 1; 3), \boldsymbol{v} = (-1; 4; 2)$
   b. $\boldsymbol{u} = (0; 3; 1), \boldsymbol{v} = (1; 2; 0)$
   c. $\boldsymbol{u} = (2; -1; 3), \boldsymbol{v} = (4; -2; 6)$

Řešení:

1) $a)(-10; -7; 9), b)(-2; 1; -3), c)(0; 0; 0)$

2 Využití vektorů v analytické geometrii -- vybrané partie vektorového počtu na úrovni střední školy

2.1 Využití vektorů v analytické geometrii – v rovině

2.1.1 Směrový vektor

Nalezneme dva body A, B, které leží na přímce p. Směrový vektor přímky p je orientovaná úsečka $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Směrový vektor značíme $\boldsymbol{u_s}$.

2.1.2 Normálový vektor

Nenulový vektor nazveme normálovým vektorem přímky p, jestliže je kolmý na směrový.

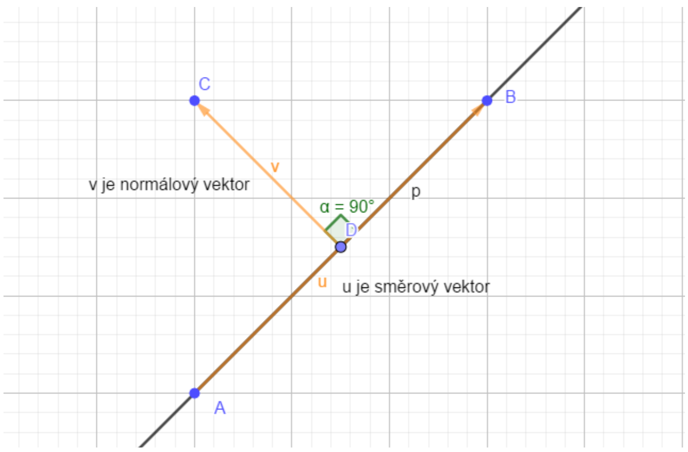
Normálový vektor značíme $\boldsymbol{u_n}$.

Graficky vyznačený význam normálového vektoru je prezentován na obrázku 19.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ určuje vektor $\boldsymbol{u}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$ určuje vektor $\boldsymbol{v}$.

Pro směrový a normálový vektor platí:

$$\boldsymbol{u_s} \perp \boldsymbol{u_n}$$



Obr. 19

2.1.3 Parametrická rovnice přímky

Přímku p nám určují dva body nebo jeden bod $A = [a_1; a_1]$ a směrový vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$. Parametrické určení přímky tvoříme z právě zmíněných údajů

$$p: x = a_1 + t \cdot u_1$$
$$y = a_2 + t \cdot u_2,$$

kde t je reálné číslo, kterému říkáme parametr – parametrická rovnice přímky.

Pro bod $X[x; y]$ na přímce p, pro známý bod $A[a_1; a_1] \in p$ a směrový vektor $\boldsymbol{u}(u_1; u_2)$ platí:

$$X = A + tu, t \in R$$

$$X = \left\{ \begin{matrix} x = a_1 + t \cdot u_1 \\ y = a_2 + t \cdot u_2 \end{matrix} \middle| \, t \in R \right\}$$

Pro parametrické vyjádření roviny se doplňuje ještě jeden vektor a parametr; přitom vektor $\boldsymbol{v}$ musí být nezávislý na vektoru $\boldsymbol{u}$:

$$X = A + t \cdot \boldsymbol{u} + s \cdot \boldsymbol{v}, \quad t, s \in R.$$

2.1.4 Obecná rovnice přímky

Lineární rovnice tvaru:

$$ax + by + c = 0,$$

kde $a, b, c \epsilon R$ a alespoň jedno z čísel $a, b \neq 0$, je rovnice přímky v roviny a nazýváme ji obecnou rovnici přímky.

Čísla (a, b) jsou souřadnice normálového vektoru přímky p a c je reálné číslo.

Příklad 2.1.1

Ve vektorovém prostoru R^2. Napište obecnou rovnici přímky p, která je dána orientovanou úsečkou $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$, kde:

$P = [1; 3]$, $Q = [5; 2]$.

Řešení:

Pro zjištění obecné rovnice přímky je třeba znát její normálový vektor, který zjistíme ze směrového vektoru.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \boldsymbol{u_s} = (4; -1)$$

$$\boldsymbol{u_n} = (1; 4)$$

Hodnotu koeficientu c vypočítáme po dosazení normálového vektoru za koeficienty a a b do rovnice a dosazením libovolného bodu ze zadání za proměnné x , y.

$$1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + c = 0$$

$$1 + 12 + c = 0$$

$$13 + c = 0$$

$$c = -13$$

Obecná rovnice přímky p má tvar:

$$1x + 4y - 13 = 0$$

2.1.5 Převedení parametrické rovnice přímky na obecnou

Při převodu parametrické rovnice přímky na obecnou je třeba si uvědomit, že parametrické vyjádření je soustava dvou rovnic o proměnných x, y, t a potřebuje získat jednu rovnici o dvou proměnných.

Příklad 2.1.2

Ve vektorovém prostoru R^2 napište obecnou rovnici přímky p, pokud její parametrické rovnice jsou

$$p: x = 1 - t$$
$$y = 3 + 2t, t \in R$$

1. Způsob řešení (dosazovací metoda)

Určíme si z první rovnice parametr t a ten dosadíme do druhé rovnice a následným vypočítáním získáme obecnou rovnici přímky,

$$p: x = 1 - t \quad \rightarrow t = 1 - x$$

t dosadíme do druhé rovnice,

$$y = 3 + 2(1 - x)$$

nyní rovnici upravíme na požadovaný tvar.

$$y = 3 + 2(1 - x)$$
$$y = 3 + 2 - 2x$$
$$y - 3 - 2 + 2x = 0$$
$$y - 5 + 2x = 0$$

Obecná rovnice přímky p:

$$p: 2x + y - 5 = 0$$

2. Způsob řešení (sčítací metoda)

Rovnici si vynásobíme vhodně zvoleným číslem abychom při sečtení rovnic vyloučili parametr t.

$$p: x = 1 - t \quad / \cdot 2$$
$$y = 3 + 2t$$

Po vynásobení:

$$2x = 2 - 2t$$
$$y = 3 + 2t$$

Nyní se rovnice sečtou:

$$2x + y = 5 - 0t$$

Zbývá již jen rovnici upravit do požadovaného tvaru a získáme obecnou rovnici přímky p:

$$p: 2x + y - 5 = 0$$

3. Způsob řešení (pomocí směrového a normálového vektoru)

Z parametrického určení přímky p zjistíme směrový vektor a libovolný bod P, který na přímce leží. Ze souřadnic směrového vektoru určíme souřadnice normálového vektoru, ten dosadíme do obecné rovnice přímky společně s bodem P a dopočítáme hledaný koeficient c.

$$p: x = 1 - t$$
$$y = 3 + 2t, t \in R$$

$\boldsymbol{p_s} = (-1; 2)$

$\boldsymbol{p_n} = (2; 1)$

$P = [1; 3]$

Dosadíme do obecné rovnice přímky normálový vektor přímky:

$$2x + 1y + c = 0$$

Poté dosadíme souřadnice bodu $P \in p$:

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + c = 0$$
$$2 + 3 + c = 0$$
$$c = -5$$

Obecná rovnice přímky p:

$$p: 2x + y - 5 = 0$$

2.1.6 Převedení obecné rovnice přímky na parametrickou

Při převádění obecné rovnice přímky na parametrickou víme, že obecná rovnice přímky nám udává normálový vektor přímky. Pro parametrické vyjádření přímky potřebujeme znát směrový vektor přímky, který určíme snadno, a poté vypočítat libovolný bod, který leží na dané přímce, a dosadit.

Příklad 2.1.3

Převeďte přímku p, která je dána rovnicí $3x + y + 4 = 0$, na parametrické vyjádření.

1. Způsob řešení

Z obecné rovnice přímky známe normálový i směrový vektor:

$$p_n = (3; 1)$$

$$p_s = (-1; 3)$$

Nyní je třeba vyřešit konkrétní bod P na přímce. Jedna z metod je určení si jedné souřadnice a dopočítání druhé. Zvolíme si proto $x_p = 1$

$P = [1; y_p]$

Bod dosadíme do obecné rovnice přímky a dopočítáme:

$$3 \cdot 1 + y_p + 4 = 0$$

$$3 + y_p + 4 = 0$$

$$y_p = -4 - 3$$

$$y_p = -7$$

$$P = [1; -7]$$

Když máme všechny potřebné údaje, vložíme je do parametrického vyjádření přímky:

$$p: x = 1 - t$$

$$y = -7 + 3t, t \in R$$

2. Způsob řešení

Jednu z proměnných zvolíme za parametr, např. $x = t$, a dostaneme:

$$3x + y + 4 = 0$$

$$3t + y + 4 = 0$$

Pomocí úprav si vyjádříme y:

$$y = -4 - 3t$$

Doplníme rovnice do parametrického vyjádření přímky p:

$$p: x = t$$

$$y = -4 - 3t, t \in R$$

Parametrické vyjádření přímky p je rozdílné, ale popisuje to opravdu jednu a tutéž přímku. Ověření platnosti provedeme doplněním bodu z jednoho parametrického vyjádření do druhého.

Bod P je z prvního způsobu řešení:

$$P = [1; -7]$$

Parametrické vyjádření přímky je z druhého způsobu řešení:

$$p: x = t$$

$$y = -4 - 3t, t \in R$$

Souřadnice bodu P dosadíme do rovnic a vypočítáme:

$$1 = t$$
$$-7 = -4 - 3t$$

Ze soustavy rovnic je zřejmé $t = 1$, hodnotu dosadíme do rovnice druhé:

$$-7 = -4 - 3 \cdot 1$$
$$-7 = -7$$

Jedná se o stejnou přímku při řešení obojím způsobem.

2.1.7 Vzájemná poloha bodu a přímky

Bod P leží na přímce p, jestliže jeho souřadnice vyhovují rovnici přímky:

Máme-li rovnici přímky zadanou parametricky, nalezneme jedinou hodnotu parametru, která při dosazení do rovnice dává souřadnice bodu P. Jestliže se parametry sobě nerovnají, bod přímce nenáleží.

Při řešení u obecné rovnice přímky se souřadnice bodu P dosadí do rovnice přímky $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a dostaneme platnou rovnici.

Příklad 2.1.4

a) Ve vektorovém prostoru R^2 zjistěte, zda body $A = [1; 2]\ a\ B = [3; 1]$ leží na přímce p, které má parametrické vyjádření:

$$p: x = 2 - t,$$
$$y = 3 + 2t |\ t \in R$$

b) Ve vektorovém prostoru R^2 zjistěte, zda body $A = [2; 1]\ a\ B = [3; -4]$ leží na přímce p, obecný tvar:

$$p: 3x + 2y - 1 = 0$$

Řešení a)

Je nám znám směrový vektor $\boldsymbol{u} = (-1; 2)$. Pro ověření, zda daný bod náleží přímce, je třeba dosadit souřadnice bodu do parametrického vyjádření přímky. Bod se dosadí do levé strany rovnice a vypočítají se hodnoty parametru z obou rovnic – ty se musí sobě rovnat. V případě, že se parametr v obou rovnicích sobě nerovná, bod neleží na přímce p.

Bod A:

Souřadnice bodu A dosadíme do parametrické rovnice přímky:

$$p: 1 = 2 - t,$$
$$2 = 3 + 2t$$

První rovnice nám říká, že $t = 1$, v druhé rovnici $t = -\frac{1}{2}$

Proto bod A nenáleží přímce p.

Bod B:

$$p: 3 = 2 - t,$$
$$1 = 3 + 2t$$

První rovnice nám říká, že $t = -1$, v druhá rovnice nám říká $t = -1$, neboť t se v obou rovnicích rovná stejné hodnotě, B náleží přímce p.

Řešení b)

Pro zjištění, zda daný bod náleží či nenáleží dané přímce, se jeho souřadnice dosadí do rovnice přímky a ověří se její platnost.

Pro bod A:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 = 0$$
$$6 + 3 - 1 = 0$$
$$8 = 0$$

Bod A nenáleží přímce p.

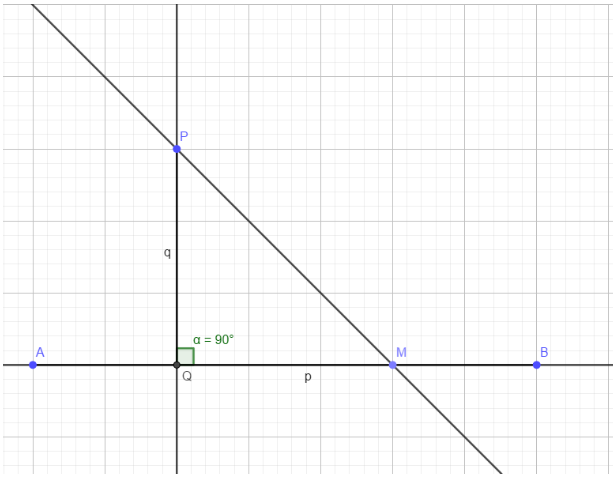
Pro bod B:

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) - 1 = 0$$
$$9 + (-8) - 1 = 0$$
$$0 = 0$$

Bod B náleží přímce p.

2.1.8 Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu P od přímky p určenou body A a B je vždy rovna délce úsečky PQ, kde Q je průsečík přímky p a kolmice vedené z bodu k dané přímce, neboť tak se zaručí zjištění nejkratší vzdálenosti d. Na obrázku 20 je zřejmé, že na základě Pythagorovy věty je počítáním kolmice zaručená nejkratší vzdálenost bodu od přímky.



Obr. 20

Pro zjištění vzdálenosti bodu od přímky je třeba seskládat tři početní úkoly dohromady.

1. Bodem P vedeme kolmici q k přímce p.
2. Nalezení průsečíku Q přímek p, q.
3. Určení vzdálenosti $d = |PQ|$.

Celý postup zle zkrátit do následujícího vzorce:

Vzdálenost d bodu $P[p_1; p_2]$ od přímky $p: ax + by + c = 0$ je rovna $d = \frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Důkaz platnosti vzorce:

Budeme předpokládat $P[p_1; p_2]$ a $p: ax + by + c = 0$; odtud

$$q: x = p_1 + at$$
$$y = p_2 + bt$$

Nyní je třeba spočítat průsečík $Q[q_1, q_2]$přímek p, q

$$a(p_1 + at) + b(p_2 + bt) + c = 0$$
$$ap_1 + a^2t + bp_2 + b^2t + c = 0$$

Nyní

$$t = -\frac{ap_1 + bp_2 + c}{a^2 + b^2}$$
$$q_1 = p_1 + at$$
$$q_2 = p_2 + bt$$

Vypočítáním t získáme hodnotu parametru.

$$d = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

$$d = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2}$$

$$d = |t|\sqrt{a^2 + b^2}$$

Po dosazení hodnoty parametru t dostaneme již zkrácený vzorec uvedený výše.

Příklad 2.1.5

Zjistěte vzdálenost d bodu $P[-3; 1]$ od přímky $p: 2x + y - 2 = 0$.

Řešení

Řešení je zřejmé po dosazení do vzorce:

$$d = \frac{|2 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + (-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

2.1.9 Vzájemná poloha přímek zadaných parametricky

Dvě přímky p a q jsou spolu rovnoběžné právě tehdy, když směrový vektor $\boldsymbol{v}$ je násobkem směrového vektoru $\boldsymbol{u}$, tedy:

$$p: X = P + t \cdot u \quad q: X = Q + s \cdot v, t; s \in R$$

$$p \| q \text{ } jestliže \text{ } u = k \cdot v; k \in R$$

Pokud $Q \in p$, pak jsou totožné.

$u \neq k \cdot v; k \in R$ jedná se o různoběžky.

Dvě přímky p a q jsou rovnoběžné nebo totožné, jestliže pro směrový vektor přímky p a normálový vektor přímky q platí:

Směrový vektor přímky p ... $\boldsymbol{u_s}$

Normálový vektor přímky q … $\boldsymbol{v_n}$

Možnost a) $\boldsymbol{u_s} \cdot \boldsymbol{v_n} = 0$

Pokud $Q \in p$, pak jsou totožné.

Pokud $Q \notin p$, pak jsou rovnoběžné různé.

Možnost b) Pokud $\boldsymbol{u_s} \cdot \boldsymbol{v_n} \neq 0$, pak jsou přímky různoběžné.

Příklad 2.1.6

Ve vektorovém prostoru R^2 Zjistěte, zda přímky p $(P, \boldsymbol{u_s})$ a $q(Q, \boldsymbol{v_s})$ jsou rovnoběžné: $P = [2; 3]$, $\boldsymbol{u_s} = (1; -2)$, $Q = [1; 0]$, $\boldsymbol{v_s} = (-\frac{1}{2}; 1)$.

Řešení:

Pro zjištění rovnoběžnosti hledáme nějaké k tak, aby platilo $\boldsymbol{u_s} = k \cdot \boldsymbol{v_s}$.

$\left(-\frac{1}{2}; 1\right) = k \cdot (1; -2)$, tj. $-\frac{1}{2} = k \cdot 1,\ 1 = k \cdot (-2)$.

Oběma rovnicím vyhovuje $k = -\frac{1}{2}$, proto jsou dané přímky (vektory) rovnoběžné.

2.1.10 Vzdálenost přímek

Vzdálenost dvou různoběžných přímek a přímek, které jsou totožné, je rovna nule.

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je rovna vzdálenosti libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.

Vzdálenost přímek p, q značíme $|pq|$.

Při výpočtu je třeba mít ověřené z výpočtu vzájemné polohy přímek, že se jedná o rovnoběžky. Poté na jedné přímce si určíme libovolný bod a následně počítáme vzdálenost bodu od přímky.

Příklad 2.1.7

Ve vektorovém prostoru R^2 vypočítejte vzdálenost přímek $p: x - 4y + 6 = 0$ a $q: -1x + 4y + 7 = 0$.

Řešení:

Zadání je zadané obecnými rovnicemi přímek, určíme si normálové vektory:

$$\boldsymbol{p_n} = (1; -4)$$

$$\boldsymbol{q_n} = (-1; 4)$$

Je vidět, že $\boldsymbol{p_n} = -1 \cdot \boldsymbol{q_n}$, přímky p a q jsou rovnoběžné.

Na přímce p si vypočítáme libovolný bod P:

$$P \in p;\ P = [2; 1]$$

Nyní již jen dosadíme do známého vzorce vzdálenosti bodu od přímky $d = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$|pq| = |Pq| = \frac{|(-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2}}$$

$$|Pq| = \frac{|(-2) + 4 + 7|}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2}}$$

$$|Pq| = \frac{9}{\sqrt{50}}$$

Vzdálenost přímek p, q je $\frac{9}{\sqrt{50}}$.

2.1.11 Odchylka přímek

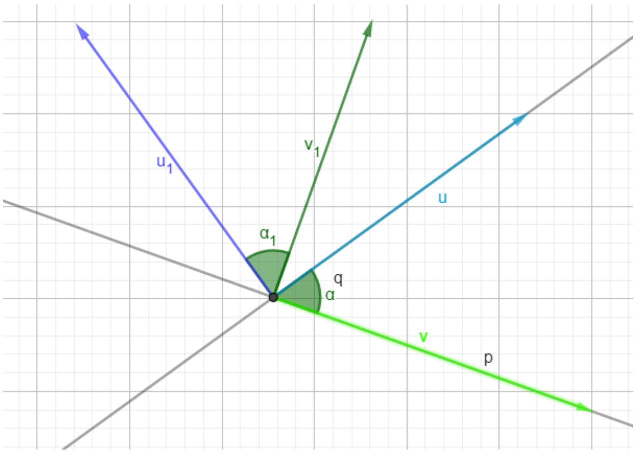
Při počítání odchylek dvou přímek je třeba brát na zřetel, že odchylka se pohybuje v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, tedy se jedná o velikost ostrého nebo pravého úhlu přímkami sevřeného.

Výpočet je možný za pomoci směrových či normálových vektorů.

Výpočet odchylky přímek se směrovými vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je:

$cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|}$ pro $\varphi \epsilon \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

Odchylku lze počítat i pomocí normálových vektorů, neboť odchylka směrových vektorů a normálových vektorů je sobě rovna. Nicméně je třeba do vzorce dosadit vždy vektory stejného druhu.



Obr. 21

Jak je z obrázku 21 zřejmé, odchylka α směrových vektorů u, v je rovna odchylce α_1 normálových vektorů u_1, v_1 .

Poznámka:

Mezi odchylkou přímek a vektorů je značný rozdíl.

Odchylka vektorů se pohybuje v rozmezí $0° \leq \alpha \leq 180°$, proto není v čitateli absolutní hodnota. Odchylka přímek se pohybuje pouze v rozmezí $0° \leq \alpha \leq 90°$, proto je ve vzorci v čitateli absolutní hodnota.

Příklad 2.1.8

Ve vektorovém prostoru R^2 , vypočítejte odchylku přímek p, q:

$$p: x = 1 + t \qquad\qquad q: 2x + y - 1 = 0$$

$$y = 2 + 3t, t \in R$$

Řešení:

Směrový vektor přímky p je $\boldsymbol{u} = (1; 3)$.

Normálový vektor přímky q je $\boldsymbol{v_n} = (2; 1)$. Směrový vektor přímky q je tedy vektor $\boldsymbol{v} = (1; -2)$. Výpočet je nyní zřejmý dosazením do vzorce.

$$cos\varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}\sqrt{1^2(-3)^2}}$$

$$cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}}$$

$$cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 45°$$

2.1.12 Kolmost přímek

Kolmost je významný případ různoběžnosti přímek.

Pro určení, zda jsou různoběžné p, q přímky kolmé či nikoli, je třeba si uvědomit následující:

- Skalární součin směrových vektorů dvou přímek je roven nule právě tehdy, když jsou přímky kolmé.

$$\boldsymbol{p_s} \cdot \boldsymbol{q_s} = 0 \Leftrightarrow p \perp q$$

- Skalární součin normálových vektorů dvou přímek je roven nule právě tehdy, když jsou přímky kolmé.

$$\boldsymbol{p_n} \cdot \boldsymbol{q_n} = 0 \Leftrightarrow p \perp q$$

- Nyní si zavedeme ještě jednu podmínku – že přímky jsou kolmé právě tehdy, když směrový vektor je roven násobku normálového vektoru přímky druhé.

$$\boldsymbol{p_s} = k \cdot \boldsymbol{q_n}, k \in R \Leftrightarrow p \perp q$$

Pro praktické počítání si poslední podmínku zjednodušíme na $\boldsymbol{p_s} = \boldsymbol{q_n}$, tedy $k = 1$.

Příklad 2.1.9

Určete, zda zadané přímky ve vektorovém prostoru R^2 p, q jsou kolmé:

$$p: -4x + 5y - 1 = 0, q: 5x + 4y + 1 = 0$$

Řešení:

Přímky jsou zadané obecnými rovnicemi, proto budeme pracovat s normálovými vektory, které z rovnic vidíme hned:

$$\boldsymbol{p_n} = (-4; 5)$$

$$\boldsymbol{q_n} = (5; 4)$$

$$\boldsymbol{p_n} \cdot \boldsymbol{q_n} = (-4) \cdot 5 + 5 \cdot 4$$

$$\boldsymbol{p_n} \cdot \boldsymbol{q_n} = (-20) + 20$$

$$\boldsymbol{p_n} \cdot \boldsymbol{q_n} = 0$$

Přímky p a q jsou kolmé, tedy $p \perp q$.

Řešené příklady v rovině

Příklad 2.1.10

Napište parametrický tvar přímky p, která prochází bodem $M = [1; 2]$ a je rovnoběžná s přímkou m: $2x - 3y - 3 = 0$.

Řešení:

Je třeba znát normálový vektor přímky $\boldsymbol{m_n} = (2; -3)$, neboť je-li $p \| m$, normálový vektor jedné přímky je násobkem druhého vektoru, takže přímka p bude mít tvar p: $2x - 3y + c = 0$.

Pro konečný tvar musíme vypočítat koeficient c, který získáme dosazením bodu M do rovnice.

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + c = 0$$

$$2 - 6 + c = 0$$

$$c = +4$$

Rovnice přímky p: $2x - 3y + 4 = 0$

Příklad 2.1.11

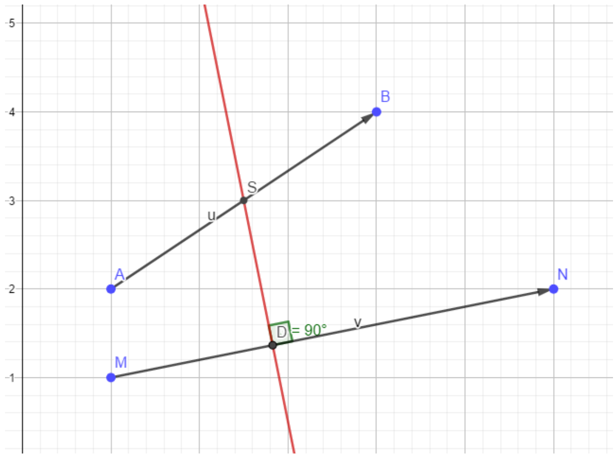
Body $A = [1; 2], B = [4; 4]$ určují ve vektorovém prostoru R^2 orientovanou úsečku $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. Napište obecnou rovnici přímky p procházející středem úsečky AB, která je zároveň kolmá na přímku MN, $M = [1; 1], N = [6; 2]$.

Řešení:

Nejprve si určíme střed úsečky AB,

$S = \frac{a_1+b_1}{2} + \frac{a_2+b_2}{2} = [2{,}5; 3]$.

Pro splnění podmínky, aby výsledná přímka byla kolmá na úsečku MN, musí výsledná přímka obsahovat ve své rovnici právě směrový vektor $\boldsymbol{m_s}$ úsečky MN. Vysvětlení je zřejmé, neboť právě směrový vektor přímky MN bude ve výsledné přímce normálovým vektorem obsažený v obecné rovnici přímky (obr 22.).



Obr. 22

$$MN = \boldsymbol{m_s} = (5; 1)$$

$$\boldsymbol{m_n} = (-1; 5)$$

Přímka p bude obsahovat normálový vektor přímky MN, ten můžeme již do rovnice přímky doplnit.

$$p: -1x + 5y + c = 0$$

Pro splnění podmínky, aby daná přímka p procházela bodem S, doplníme jeho souřadnice do rovnice a dopočítáme parametr c.

$$-1 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 3 + c = 0$$

$$-2{,}5 + 15 + c = 0$$

$$c = 12{,}5$$

Rovnice přímky p:

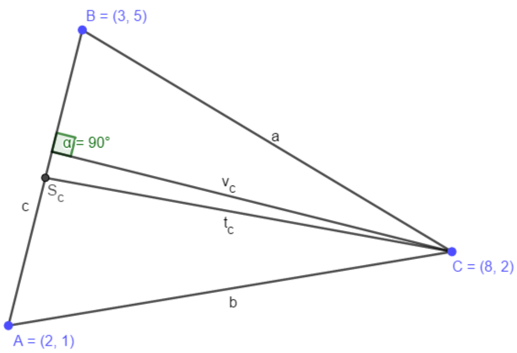
$$-1x + 5y + 12{,}5 = 0$$

Příklad 2.1.12

Z bodů $A = [2; 1], B[3; 5], C[8; 2]$ sestrojíme trojúhelník. Určete parametrické rovnice přímek strany c, výšky v_c těžnici t_c (obr. 23).

Řešení:

Pro parametrické vyjádření strany, výšky a těžnice budeme potřebovat směrnicové vektory přímek a počáteční bod.



Obr. 23

Parametrický tvar strany c. Strana c je určena orientovanou úsečkou $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1; 4)$.

$$c: x = 2 + 1t$$

$$y = 1 + 4t | t \in R$$

Parametrický tvar těžnice t_c je určen středem strany c S_c a orientovanou úsečkou $\overrightarrow{\boldsymbol{S_c C}}$.

$$S_c = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = [2{,}5; 3]$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{S_c C}} = C - S_c = (5{,}5; -1)$$

Parametrický tvar těžnice je již snadné určit pomocí dosazení.

$$t_c: x = 2{,}5 + 5{,}5s$$

$$y = 3 - 1s | s \in R$$

Pro výpočet výšky v_c je důležitým faktorem, že je kolmá na stranu c. Proto na parametrické vyjádření těžnice je třeba použít normálový vektor strany $c = c_n = (-4; 1)$.

Jako počáteční bod si zvolíme C a pro zachování orientace je třeba do vzorce dát vektor opačný normálovému vektoru $\boldsymbol{c_n}$.

Opačný vektor $\boldsymbol{c_n} = \boldsymbol{u} = (1; -4)$

Parametrické vyjádření výšky $v_c: x = 8 + 1k$

$$y = 2 - 4k | k \in R$$

Příklad 2.1.13

Určete vzájemnou polohu přímek $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, jestliže znáte určující body:

$$A = [-1; -1], B = [3; 1], C = [-2; 1], D = [4; 4]$$

Řešení:

Nejprve si vypočítáme směrové vektory orientovaných úseček (obr. 24).

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (4; 2)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = (6; 3)$$

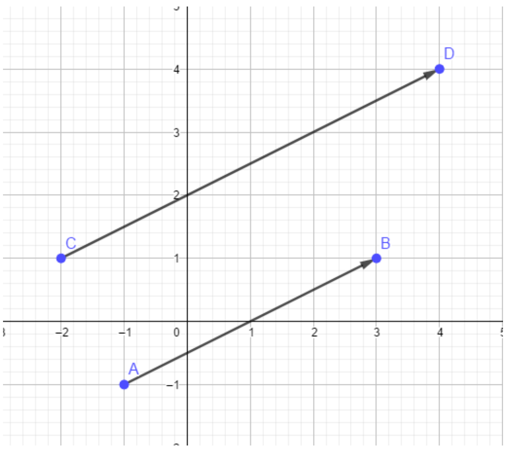
$$(4; 2) = k \cdot (6; 3)$$

$$4 = k \cdot 6$$

$$2 = k \cdot 3$$

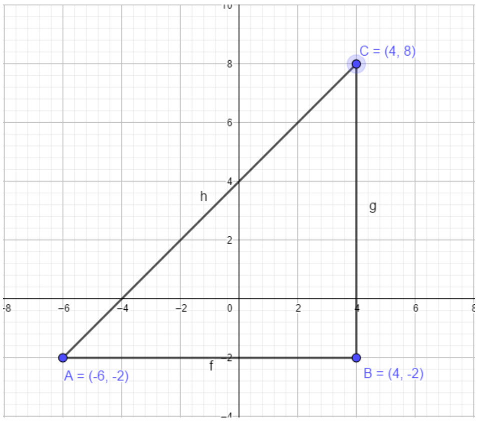
$$k = 1{,}5$$

$$AB || CD$$



Obr. 24

Příklad 2.1.14



Obr. 25

Vypočítejte obvod a obsah trojúhelníku ABC, kde $A = [-6; -2], B = [4; -2], C = [4; 8]$ (obr. 25).

Řešení:

Pro zjištění obvodu je třeba vypočítat velikosti všech stran:

$a = \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = (0; 10)\ \|\boldsymbol{a}\| = 10$

$b = \overrightarrow{\boldsymbol{CA}} = (-10; -10)\ \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{200}$

$c = \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} = (-10; 0)\ \|\boldsymbol{c}\| = 10$

Obvod je roven $\sqrt{32} + \sqrt{26} + \sqrt{10} = 13{,}9j$

Pro výpočet obsahu využijeme zjištění velikosti stran trojúhelníku:

$$S = \frac{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{c}\|}{2}$$

Po doplnění:

$$S = \frac{10 \cdot 10}{2}$$

$$S = \frac{100}{2}$$

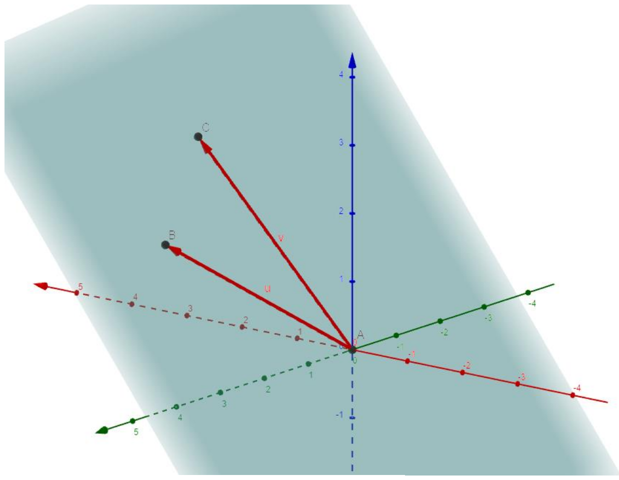
$$S = 50j^2$$

2.2 Využití vektorů v analytické geometrii – v prostoru

Při řešení metrických úloh v analytické geometrii v prostoru se pracuje s přímkami a rovinami. Parametrické vyjádření přímky v prostoru se nijak zásadně nemění, rozdíl je v rozšíření o třetí souřadnicovou složku pro prostor.

Parametrické vyjádření roviny

Rovina je popisována třemi různými body A, B, C, které neleží na jedné přímce nebo přímkou a bodem, který leží mimo tuto přímku. Pomocí třech bodů sestrojíme dva lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Tyto dva vektory společně s jedním z bodů nám popisují rovinu. (obr. 26).



Obr. 26

Pro parametrické vyjádření roviny potřebujeme tedy směrové vektory $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \boldsymbol{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ a souřadnice bodu A,

Parametrické vyjádření roviny ABC je:

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v} | t, s \in R,$$

kde $X = [x; y; z]$ je nějaký bod roviny.

Jedná se tady o parametrické vyjádření roviny, kde $B = A + u, C = A + v$.

Příklad 2.2.1

Ve vektorovém prostoru R^3 zjistěte, zda bod $X = [-2; -2{,}6]$ leží v rovině ABC, kde $A = [2; 4; -2], B = [6; 2; 2], C = [-2; 2; 0]$

Řešení:

Pro zjištění, zda bod X leží v rovině, lze snadno určit dosazením do parametrického vyjádření roviny společně s vektory a bodem určujícím roviny.

Nejprve vyjádříme parametricky rovinu ABC. Dosazením vektorů $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (4; -2; 4), \boldsymbol{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = (-4; -4; 2)$ a bodu $A = [2; 4; -2]$.

$$x = 2 + 4t + (-4)s$$
$$y = 4 + (-2)t + (-4)s$$
$$z = -2 + 4t + 2s$$

Nyní stačí jen dosadit bod X a vyřešit daný systém rovnic:

$$-2 = 2 + 4t + (-4)s$$
$$-2 = 4 + (-2)t + (-4)s$$

$$6 = -2 + 4t + 2s$$

Čísla t a s vyjádříme úpravou například prvních dvou rovnic:

$$-2 = 2 + 4t + (-4)s$$

$$-2 = 4 + (-2)t + (-4)s \quad | \cdot (-1)$$

$$-1 = 2 + 4t - 4s$$

$$2 = -4 + 2t + 4s$$

$$1 = -2 + 6t + 0s$$

$$3 = 6t$$

$$\frac{1}{2} = t$$

$$-1 = 2 + 4\frac{1}{2} + (-4)s$$

$$-1 - 2 + 4\frac{1}{2} = (-4)s$$

$$-3 = (-4)s$$

$$\frac{3}{4} = s$$

Dosazením s a t do třetí rovnice ověříme, zda se jedná o řešení, protože i třetí rovnost musí být splněna:

$$-2 = 2 + 4\frac{1}{2} + (-4)\frac{3}{4}$$

$$-2 = 4 + (-2)\frac{1}{2} + (-4)\frac{3}{4}$$

$$6 = -2 + 4\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4}$$

$$-2 = 1$$

$$-2 = 0$$

$$6 = 1{,}5$$

Levá a pravá strana rovnice se nerovná, bod X neleží v rovině ABC.

2.2.2 Obecná rovnice roviny

Rovnice $\rho: ax + by + cz + d = 0$ se nazývá obecná rovnice roviny, kde a, b, c jsou reálná čísla, přičemž alespoň jedno je nenulové, jedná se o rovnici roviny. Reálné číslo d je koeficient.

Příklad 2.2.2.

Napište obecnou rovnici roviny určené body $A = [1; 0; 2], B = [1; 1; 2], C = [3; -2; 0]$.

Řešení:

Stejně jak u obecné rovnice přímky rovnice obsahuje normálový vektor k rovině.

Určíme dva směrové vektory roviny $\boldsymbol{u_s} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (0; -1; 0)$, $\boldsymbol{v_s} = \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = (2; -2; -2)$.

Nyní je třeba vypočítat normálový vektor $\boldsymbol{w_n}$ na zadanou rovinu ABC, musí tedy vektor $\boldsymbol{w_n}$ být kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u_s}, \boldsymbol{v_s}$. Výpočet normálového vektoru k rovině je snadný přes vektorový součin.

$$\boldsymbol{w_n} = (2; 0; 2)$$

Normálový vektor dosadíme do obecné rovnice roviny:

$$2x + 0y + 2z + d = 0$$

Pro vypočítání čísla d dosadíme libovolný bod z roviny ABC do rovnice a dopočítáme.

Zvolíme si například bod $A = [1; 0; 2]$

$$2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + d = 0$$

$$2 + 0 + 4 + d = 0$$

$$6 = -d$$

$$-6 = d$$

Obecná rovnice roviny ABC:

$$2x + 0y - 2z - 6 -= 0$$

2.2.3 Polohové úlohy v prostoru

Ukážeme si několik příkladů s danou problematikou. Zde neplatí žádný vzoreček, který by daný problém řešil jednoduše, je třeba postupovat po postupných krocích. Na vysokoškolské úrovni vzájemnou polohu afinních podprostorů vystihuje vysokoškolský text [Janyška, Horák, 1997].

Příklad 2.2.3

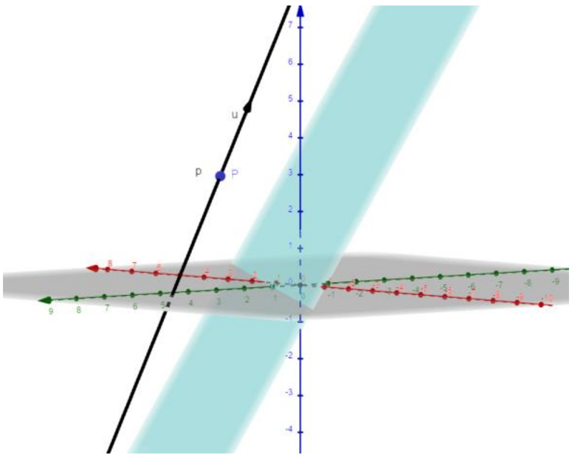
Ve vektorovém prostoru R^3 určete vzájemnou polohu roviny $\rho: 2x + 3y + 2z - 3 = 0$ a přímky p dané bodem

$P = [1; 2; 3]$ a vektorem $\boldsymbol{u} = (1; -2; 2)$.

Poznámka k řešení:

Je třeba zjistit normálový vektor roviny ρ.

Je třeba si uvědomit, že pokud normálový vektor roviny je kolmý k vektoru přímky u, je přímka s rovinou rovnoběžná (obr. 27). Není-li kolmý, přímka je různoběžná s rovinou.



Obr. 27

Řešení:

Normálový vektor roviny $\boldsymbol{n} = (2; 3; 2)$.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 2 + (-6) + 4 = 0$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ.

Nyní je třeba zjistit, zda bod P náleží rovině ρ. P dosadíme do rovnice roviny a dopočítáme.

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 = 0$$

$$2 + 6 + 6 - 3 = 0$$

$$11 \neq 0$$

$$P \notin \rho$$

Příklad 2.2.4

Ve vektorovém prostoru R^3 Určete průsečík roviny $\rho: 2x + 4y - 2z + 1 = 0$ a přímky p dané bodem $P = [1; 0; 2]$ a vektorem $\boldsymbol{u} = (1; -1; 2)$

Poznámka k řešení:

Budeme hledat bod X s parametrem t, který náleží jak přímce p, tak i rovině ρ.

Pomocí parametrického vyjádření si vyjádříme bod X a ten následně dosadíme do rovnice roviny ρ. Z výpočtu určíme parametr t. Vypočítaný parametr dosadíme do parametrického vyjádření přímky p a vypočítáme konkrétní souřadnice průsečíku X.

Řešení:

$$p: x = 1 + 1t$$
$$y = -1t$$
$$z = 2 + 2t$$

Dosadíme do rovnice roviny:

$$2(1 + 1t) + 4(-1t) - 2(2 + 2t) + 1 = 0$$

Vypočítáním dostaneme hodnotu parametru t:

$$2 + 2t - 4t - 4 - 4t + 1 = 0$$
$$2t - 4t - 4t = -2 + 4 - 1$$
$$-6t = 1$$
$$t = \frac{-1}{6}$$

Vypočítaný parametr t dosadíme do parametrického vyjádření přímky p, po dopočítání máme hledaný průsečík X roviny a přímky.

$$p: x = 1 - \frac{1}{6}$$
$$y = -1 \cdot \frac{-1}{6}$$
$$z = 2 + 2 \cdot \left(\frac{-1}{6}\right)$$
$$X = \left[\frac{5}{6}; \frac{1}{6}; \frac{10}{6}\right]$$

Příklad 2.2.5

Ve vektorovém prostoru R^3 Určete vzájemnou polohu a průsečík rovin ρ a σ, kde

$$\rho: 2x - y + 3z + 1 = 0$$
$$\sigma: 4x + y - 2z + 2 = 0$$

Poznámka k řešení:

Roviny jsou totožné, jestliže jedna rovnice je pouze násobkem té druhé rovnice roviny.

Roviny jsou rovnoběžné, jestliže normálový vektor jedné roviny je násobkem normálového vektoru té druhé.

Řešení:

Určíme si normálové vektory obou rovin, které jsou zřejmé přímo ze zadání díky formě zadání obou rovin.

Normálový vektor roviny $\rho = \boldsymbol{u} = (2; -1; 3)$

Normálový vektor roviny $\sigma = \boldsymbol{n} = (4; 1; -2)$

Vidíme, že vektory u n nejsou svými násobky, proto jsou roviny různoběžné.

Nyní je třeba zjistit průsečík rovin.

Pro výpočet průsečíku si zavedeme místo jedné neznámé v rovnicích parametr t. Například $z = t$. Zbývající neznámé vypočítáme. Po provedení všech výpočtů jsme získali parametrické vyjádření průsečíku dvou rovin.

Nyní počítáme pomocí úprav rovnic. Potřebujeme získat dvě rovnice, kde v jedné nám zbude neznámá x a parametr t a v druhé neznámá y a parametr t.

$$2x - y + 3t + 1 = 0$$

$$4x + y - 2t + 2 = 0$$

Obě rovnice sečteme a vyloučíme si neznámou y:

$$6x + 1t + 3 = 0$$

Nyní je třeba x ještě osamostatnit:

$$x = \frac{1t}{6} + \frac{3}{6}$$

Od druhé rovnici odečteme dvounásobek rovnice první a vyloučíme neznámou x:

$$3y - 8t + 0 = 0$$

Osamostatníme i neznámou y:

$$y = \frac{-8t}{3}$$

Parametrické vyjádření průsečíku rovin je:

$$x = \frac{3}{6} + \frac{1t}{6}$$

$$y = \frac{-8t}{3}$$

$$z = t$$

Průsečnici máme určenou bodem $P = [\frac{3}{6}; 0; 0]$ a směrovým vektorem $u = (\frac{1t}{6}; \frac{-8t}{3}; 1)$.

2.2.4 Vzdálenost bodu od roviny

Určení vzdálenosti bodu od roviny je postup podobný hledání vzdálenosti bodu od přímky. Důležité hledisko je, že počítáme velikost úsečky vedený od daného bodu k dané rovině. Úsečku popíšeme pomocí přímky p procházející bodem P a zároveň je přímka kolmá na rovinu ρ. Kolmost přímky nám zaručí počítání nejmenší vzdálenosti mezi bodem a rovinou.

Pro výpočet vzdálenosti nám poslouží několik vzorečků:

- Nejprve je třeba určit přímku p, která je vedena bodem P a kolmá k rovině ρ.

Obecná rovnice roviny má tvar $\rho: ax + by + cz + d = 0$.

Bod P je dán souřadnicemi - $P[p_1; p_2; p_3]$.

Přímka p má poté tvar

$$p: x = p_1 + at$$
$$y = p_2 + bt$$
$$z = p_3 + ct\,, t \in R$$

- Průsečík přímky p a roviny ρ:

$$a(p_1 + at) + b(p_2 + bt) + c(p_3 + ct) + d = 0$$
$$t = -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

  Dosazením vypočítané hodnoty t do přímky p získáme souřadnice průsečíku přímky p a roviny $\rho = X$

$$X - P = (at; bt; ct)$$

- Výpočet vzdálenosti $d = |PX|$

$$d = |X - P|$$
$$d = |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Pro zkrácení lze celý postup zkrátit do jednoho vzorce:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Příklad:

Ve vektorovém prostoru R^3 vypočítejte vzdálenost bodu $P = [1; 3; 6]$ od roviny $\rho: 2x + 5y - z + 1 = 0$

Řešení:

Postup je velmi jednoduchý. Získané údaje pouze dosadíme do již známého vzorce.

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 + 1|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-1)^2}}$$

$$d = \frac{|2 + 15 + (-6) + 1|}{\sqrt{4 + 25 + 1}}$$

$$d = \frac{|12|}{\sqrt{30}}$$

$$d = \frac{12}{\sqrt{30}}$$

Odchylka dvou rovin

Odchylka dvou rovin se rovná odchylce jejich normálových vektorů. Při výpočtu odchylky přímek využíváme buď odchylku směrových, nebo normálových vektorů. U odchylky rovin je třeba brát v potaz, že rovina je definována dvěma směrovými vektory, a proto je třeba počítat odchylku normálových vektorů.

Výpočet je stejný jak při výpočtu odchylky přímek, a proto nám stačí i stejný vzoreček.

$$cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|} \text{ pro } \varphi \epsilon \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

Příklad:

Ve vektorovém prostoru R^3 vypočítejte odchylku dvou rovin:

$$\rho: 2x + 5y + z + 3 = 0$$

$$\sigma: x + 3y + 2z + 1 = 0$$

Normálové vektory obou rovin jsou zřejmé přímo z rovnic:

Rovina ρ má normálový vektor $\boldsymbol{u_n} = (2; 5; 1)$.

Rovina σ má normálový vektor $\boldsymbol{v_n} = (1; 3; 2)$.

Nyní normálové vektory dosadíme do již známého vzorce o odchylce.

$$cos\varphi = \frac{|2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2|}{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 1| \cdot |1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2|}$$

$$cos\varphi = \frac{|2 + 15 + 2|}{|4 + 25 + 1| \cdot |1 + 9 + 4|}$$

$$cos\varphi = \frac{|19|}{|30| \cdot |14|}$$

$$cos\varphi = \frac{19}{420} \cong 0{,}0452380$$

Odchylka je 87°

Řešené příklady v prostoru

Příklad 2.2.6

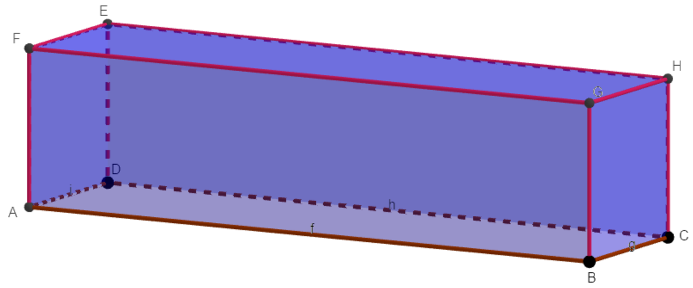
Ve vektorovém prostoru R^3je dán kvádr ABCDFGHE (obr. 28).

Určete velikost vektoru $\overrightarrow{\boldsymbol{AH}}$**,** jestliže známe vektory

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \ = \ (4{,}0{,}0),$

$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \ = \ (0{,}1{,}0),$

$\overrightarrow{\boldsymbol{CH}} \ = \ (0{,}0{,}1).$



Obr. 28

Řešení:

Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{AH}}$ si označíme $\boldsymbol{v}$. Vektor $\boldsymbol{v}$ si můžeme vyjádřit jako kombinaci vektorů $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{CH}}$.

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CH}}$$

Tedy:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AH}} = (4{,}1{,}1)$$

Nyní se podle vzorečku vypočítá velikost vektoru $\boldsymbol{v}$:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{18}$$

Příklad 2.2.7

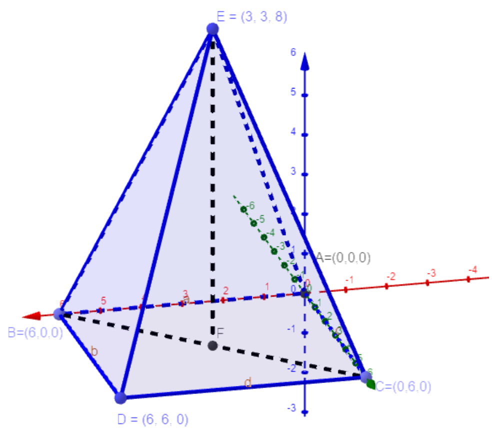
Ve vektorovém prostoru R^3 je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDE$, jehož výška je $8j$, délka podstatné hrany $a = 6j$ (obr.29).

Zvolte vhodně soustavu souřadnic a určete:

a) Velikost boční hrany jehlanu;

b) Velikost úhlu vektoru $\overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$;

c) Odchylku roviny podstavy a roviny boční stěny jehlanu.



Obr. 29

Řešení:

Zvolíme si soustavu tak, že bod $A = [0{,}0{,}0]$ tedy O_{xyz}

a) Vzhledem k tomu, že budeme počítat stěnu pravidelného čtyřbokého jehlanu, je třeba si uvědomit, že má všechny boční strany stejně dlouhé. Proto si můžeme zvolit, jakou hranu budeme počítat. Boční hrana je rovna velikosti vektoru

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$.

$$\boldsymbol{a} = E - A$$

$$\boldsymbol{a} = (3 - 0{,}3 - 0{,}8 - 0)\ a = (3{,}3{,}8)$$

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 9 + 64} = \sqrt{82}$$

b) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\boldsymbol{AE}}\ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$

$$\boldsymbol{a} = (3{,}3{,}8)$$

$$\boldsymbol{b} = (-6{,}6{,}0)$$

Velikost úhlu vektorů a a b určíme ze vztahu:

$$cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\ \cdot\ \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot\ \|\boldsymbol{b}\|}$$

$$\cos\delta = \frac{3 \cdot (-6) + 3 \cdot 6 + 8 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 8^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2}} = 0 = \delta = 90°$$

c) Odchylku roviny boční stěny určíme pomocí normálových vektorů $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{m}$: (tj. vektorů kolmých k daným rovinám). Rovina podstavy je souřadnicová rovina xy a její normálový vektor je $\boldsymbol{n} = (0{,}0{,}1)$. Normálový vektor m roviny boční stěny ABE určíme pomocí vektorového součinu vektorů $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}} = (3{,}3{,}8)$ a $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (6{,}0{,}0)$

$$\boldsymbol{m} = \overrightarrow{\boldsymbol{AE}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (30 - 08{,}86 - 03{,}30 - 63) = (0{,}48, -18)$$

Protože se jedná o určení úhlu vektorů, můžeme použít i vektor šestkrát kratší $\boldsymbol{m} = (0{,}8. -3)$.

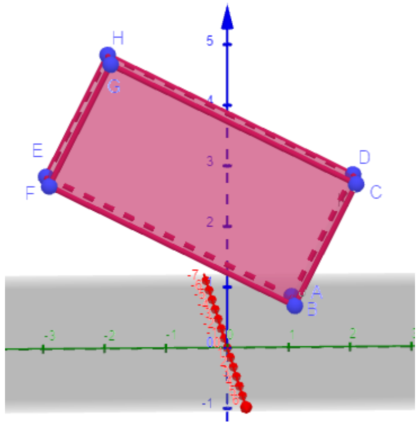
Pak platí: $cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}|}{\|\boldsymbol{n}\| \cdot \|\boldsymbol{m}\|}$

(absolutní hodnota zajistí, že odchylka rovin bude $\alpha = \langle 0°, 90° \rangle$.)

$$cos\alpha = \left| \frac{0 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{0^2 + 8^2 + (-3)^2}} \right| = 0{,}35112 \rightarrow \alpha = 69°27$$

Příklad 2.2.8

Ve vektorovém prostoru R^3 je dán kvádr $ABCDEFGH$, kde $A = [1;1;1], B = [2;1;1], C = [2;2;3], D = [1;2;3], E = [1;-3;3], F = [2;-3;3], G = [2;-2;5], H = [1;-2;5]$ (obr. 30). Určete odchylku roviny p, která je tvořena body ABD, s rovinou tvořenou osou x a y.



Obr. 30

Řešení:

Pro zjištění odchylky je třeba znát normálové vektory všech rovin.

Normálový vektor na rovinu danou osou x a y je osa z, tedy $z = (0;0;1)$.

Normálu roviny p si označíme $\boldsymbol{p_n}$:

$$\boldsymbol{p_n} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (1;0;0)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = (0;1;2)$$

$$\boldsymbol{p_n} = (0;-2;1)$$

Když známe normálové vektory obou rovin, stačí dosadit do známého vzorce.

$$cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{p_n}|}{\|\boldsymbol{z}\| \cdot \|\boldsymbol{p_n}\|}$$

$$cos\varphi = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}}$$

$$cos\varphi = 63°26$$

Odchylka roviny je 63°.

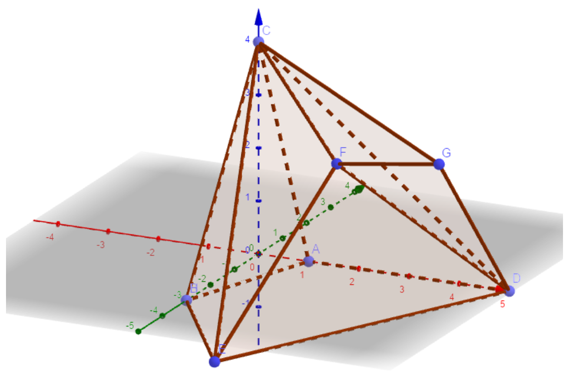
Příklad 2.2.9

Ve vektorovém prostoru R^3 Je dán nepravidelný mnohostěn $ABCDEFG$ (obr 31).

$A = [1;0;0], B = [0;-3;0], C = [0;0;4],$

$D = [5;0;0], E = [2;-6;0], F = [3;-3;3],$

$G = [6;-5;4].$



Obr. 31

Vypočítejte:

a) Odchylku roviny ABC a DGC

b) Obsah strany FGC

c) Vzdálenost bodu F od roviny EDC.

Řešení:

a) Pro odchylku roviny budeme opět postupovat pomocí odchylky normálových vektorů dané roviny.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (-1; -3; 0), \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = (-1; 0; 4)$$

Normálový vektor roviny $ABC = \boldsymbol{a_n} = (-12; -4; 3)$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{DG}} = (1; -5; 4), \overrightarrow{\boldsymbol{DC}} = (-5; 0; 4)$$

Normálový vektor roviny $DGC = \boldsymbol{d_n} = (-20; -24; 25)$

$$cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{a_n} \cdot \boldsymbol{d_n}|}{\|\boldsymbol{a_n}\| \cdot \|\boldsymbol{d_n}\|}$$

$$cos\varphi = \frac{|411|}{|169| \cdot |1601|}$$

$$cos\varphi = \frac{411}{270\,569}$$

$$cos\varphi = 0{,}0015$$

$$cos\varphi = 89°$$

b) Obsah stěny FGC je roven obsahu trojúhelníku. Řešení je jednoduché přes velikost vektorového součinu (obsah rovnoběžníku) vydělenou dvěma.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{FG}} = (3; -8; 1), \overrightarrow{\boldsymbol{FC}} = (-3; 3; 1)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{FG}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{FC}} = (-11; -6; -15)$$

Velikost vektorového součinu nám udává obsah rovnoběžníku; pro určení obsahu trojúhelníku je třeba podělit výsledek 2.

$$S = \frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{FG}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{FC}}\right|}{2}$$

$$S = \frac{|382|}{2}$$

$$S = 191j$$

c) Pro výpočet nám poslouží známý vzorec, ale je třeba si vyjádřit obecnou rovnici roviny EDC.

Pro obecný tvar je třeba znát normálový vektor roviny:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{ED}} = (3; 6; 0), \overrightarrow{\boldsymbol{EC}} = (-2; 6; 4)$$

Přes vektorový součin zjistíme normálový vektor roviny e_n.

Normálový vektor roviny $\boldsymbol{e_n} = (24; 12; 30)$.

Dosadíme do obecné rovnice roviny společně s jedním z bodů, které rovině náleží a dopočítáme neznámý parametr d:

$$EDC: 24 \cdot 2 + 12 \cdot (-6) + 30 \cdot 0 + d = 0$$

$$44 - 72 = -d$$

$$-28 = -d$$

$$28 = d$$

Nyní máme všechny potřebné údaje pro dosazení do vzorce:

$$d = \frac{|24 \cdot 3 + 12 \cdot (-3) + 30 \cdot 3 + 28|}{\sqrt{24^2 + 12^2 + 30^2}}$$

$$d = \frac{|154|}{\sqrt{1620}}$$

$$d = 40{,}2j$$

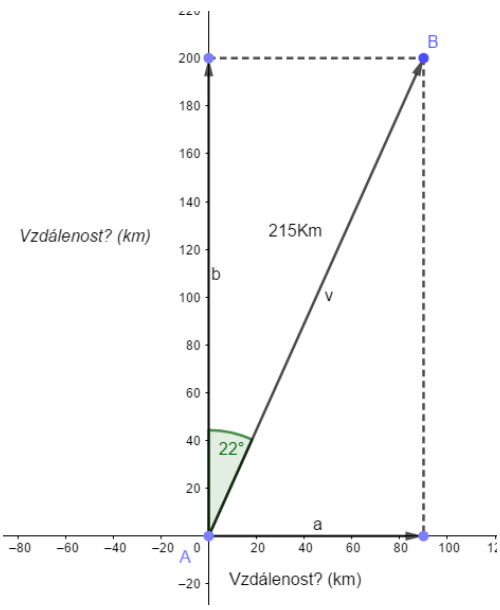
3 Využití vektorů v některých partiích fyziky

Přímočarý pohyb

Příklad 3.1

Malé letadlo odstartovalo za nevlídného počasí. Později bylo spatřeno ve vzdálenosti 215 km od letiště v severovýchodním směru, svírajícím s místním poledníkem úhel 22°.

Jaká byla jeho vzdálenost od letiště v severním směru a vzdálenost od letiště ve východním směru?



Obr. 32

Řešení:

Situaci si umístíme do pravoúhlé soustavě souřadnic xy, jako počátek soustavy zvolíme letiště. Osa x směřuje na východ a osa y směřuje na sever. Trasu letadla z letiště do místa, kde se nyní nachází, označíme vektorem $\boldsymbol{v}$ (obr. 32).

Známe skutečnou vzdálenost letadla od letiště $|\boldsymbol{v}| = 215\ km$, pro určení "severní" a "východní" vzdálenosti letadla od letiště vyjdeme z obrázku:

"Severní" vzdálenost letadla od letiště je dána: $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{v}| \cdot \cos 22° = 199{,}3\ km.$

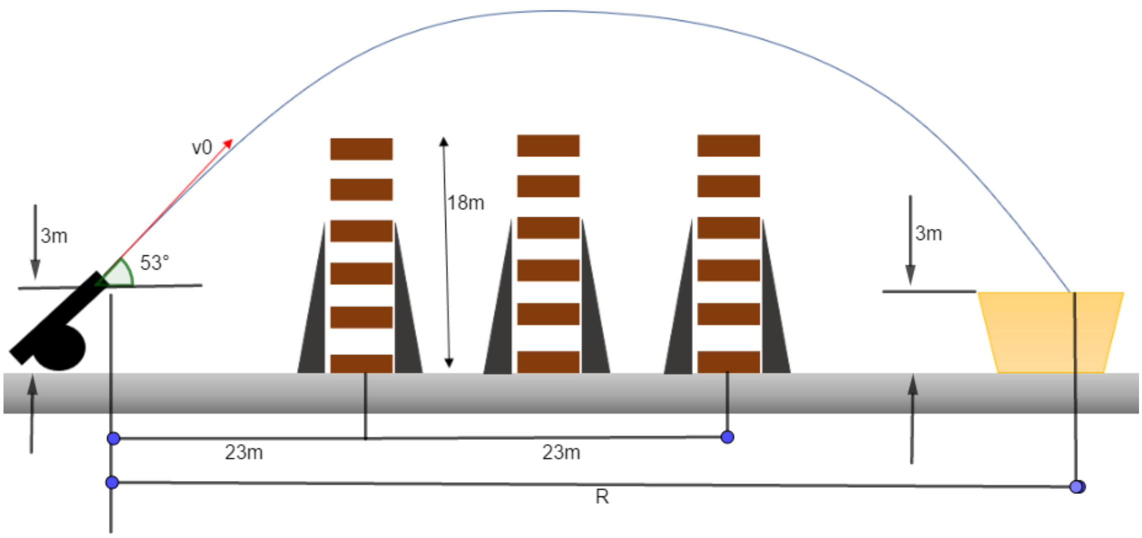
"Východní" vzdálenost letadla od letiště je dána: $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{v}| \cdot \sin 22° = 80{,}5\ km.$

Vzdálenost letadla v severním směru byla $199{,}3\ km$ a ve východním směru $80{,}5\ km.$

Pohyb se zrychlením

Příklad 3.2

Do Brna přijel cirkus s velmi specifickým cirkusovým kouskem, kde klaun přeletí tři ruská kola vysoká 18 m. Na obrázku 33 je ukázané jejich rozmístění. Klaun je vystřelen z děla rychlostí $26{,}5 m \cdot s^{-1}$ pod elevačním úhlem $\theta_0 = 53°$. Ústí hlavně i záchranná síť se nacházely ve výšce $3m$ nad zemí.



Obr. 33

a) Ověřte si, že artista skutečně přeletí přes první kolo.
b) Určete celkovou dobu letu.
c) Určete vrchol trajektorie.
d) Určete, jak daleko je třeba umístit záchranou síť.

Řešení:

Počátek souřadné soustavy si umístíme na ústní hlavně.

Je důležité znát hodnotu zrychlení volného pádu, se kterým budeme počítat:

$g = 9{,}8 m \cdot s^{-2}$

Pro následující počítání si určíme rychlost po ose x a y.

rychlost po ose $y = v_{y_0} = cos\theta = 0{,}602$

vynásobíme rychlostí střely $0{,}602 \cdot 26{,}5 = 21{,}17$

rychlost po ose $x = v_{x_0} = sin\theta = 0{,}799$

vynásobíme rychlostí střely $0{,}799 \cdot 26{,}5 = 15{,}95$

a) Pro určení vzdálenosti klauna nad prvním kolem si vypočítáme rychlost letu po ose x, tedy za jak dlouho bude $23m$ od děla.

$$\frac{v_x}{v_{x_0}} = \frac{23}{15{,}95} = 1{,}44 sekundy$$

Nyní je třeba vypočítat, jak vysoko se klaun posune po ose y za $1{,}44s$.

Jedná se o rovnoměrně zpomalený pohyb, neboť počáteční rychlost s rostoucím časem bude snižovat, proto použijeme ve vzorečku mínus.

$$l_{y_1} = v_{y_0} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2$$

$$l_{y_1} = 21{,}17 \cdot 1{,}44s - \frac{1}{2}9{,}8 \cdot 1{,}44^2$$

$$l_{y_1} = 30{,}4848 - 10{,}16064$$

$$l_{y_1} = 20{,}3241m$$

Vzdálenost klauna od země je $20{,}3241 + 3m$, neboť ústí děla je $3m$ nad zemí. Takže klaun proletí $23{,}3241 - 18 = 5{,}3m$ nad prvním kolem.

b) Pro celkovou dobu letu si označíme t_2.

$$t_2 \cdot v_{y_0} = \frac{1}{2}g \cdot t_2^2$$

$$0 = \left(\frac{1}{2}g \cdot t_2^2\right) - \left(t_2 \cdot v_{y_0}\right)$$

kvadratická rovnice

$$0 = t_2 \cdot \left(\frac{1}{2}gt_2 - v_{y_0}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}gt_2 - v_{y_0}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}gt_2 = v_{y_0}$$

$$\frac{1}{2}(9{,}8)t_2 = 21{,}17$$

$$\frac{1}{2}(9{,}8)t_2 = 21{,}17$$

$$4{,}9t_2 = 21{,}17$$

$$t_2 = 4{,}32s$$

Celková doba letu bude trvat $4{,}32s$.

e) Určete vrchol trajektorie.

Nejprve zjistíme čas, za který se klaun dostane do vrcholu trajektorie. Čas doletu na vrchol trajektorie je roven polovině času celkového letu:

$$4{,}32s : 2 = 2{,}16s$$

Pro výpočet vrcholu trajektorie bude stejný postup jak v bodě a). Vypočítáme postup po ose y za dobu $2{,}16s$:

$$l_{y_2} = v_{y_0} \cdot t_2 - \frac{1}{2} g \cdot t_2^2$$

$$l_{y_2} = 21{,}17 \cdot 2{,}16s - \frac{1}{2} 9{,}8 \cdot 2{,}16^2$$

$$l_{y_2} = 45{,}7272 - 22{,}8661$$

$$l_{y_2} = 22{,}9m$$

Vrchol trajektorie je $22{,}9m$ nad zemí.

f) Jak daleko je třeba umístit záchranou síť?

Pro umístění záchranné sítě je tedy třeba spočítat dopad klauna na ose x.

Známe délku celkového letu

$$t_2 = 4{,}32s$$

a rychlost letu po směru osy x, $v_{x_0} = 15{,}95$.

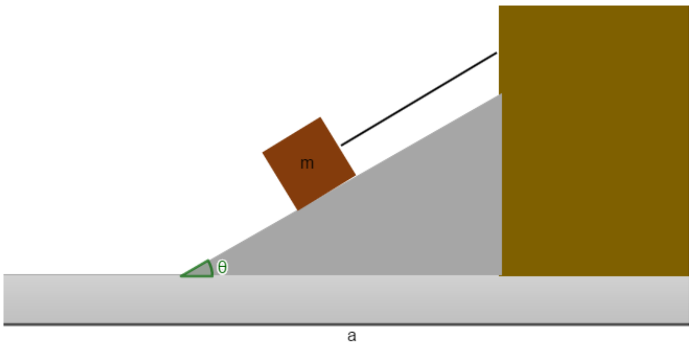
$$l_{x_2} = v_{x_0} \cdot t_2$$

$$l_{x_2} = 15{,}95 \cdot 4{,}32$$

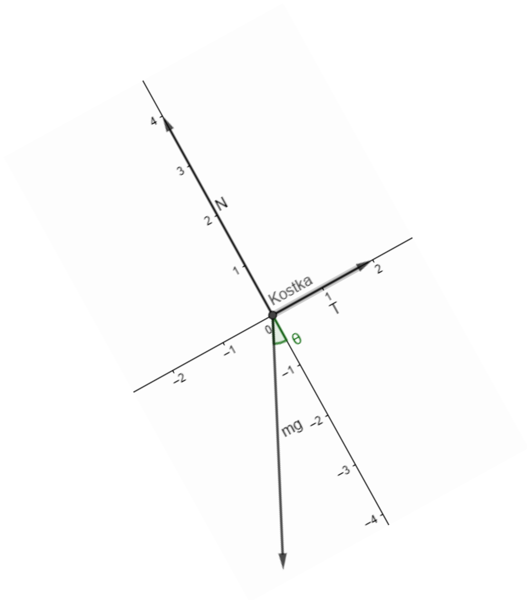
$$l_{x_2} = 68{,}904m$$

Záchrannou síť je třeba umístit ve vzdálenosti 69 m od děla.

Síla



Obr. 34



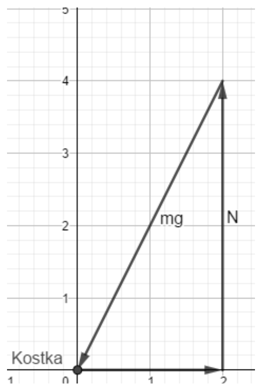
Obr. 36

Příklad 3.3

Na nakloněné plošině (obr 34) je na vlákně zavěšená kostka o hmotnosti $m = 15kg$.

a) Jakou silou je napínáno lano, je-li $\theta = 27°$?

b) Jakou silou působí nakloněná rovina na kostku?



Obr. 37

Řešení:

Součet všech sil podle druhého Newtonova zákona má být roven nule. Danou vlastnost si můžeme ověřit pomocí grafického sčítání vektorů. (obr 36, 37)

$$\Sigma F = T + N + mg = 0$$

Souřadnou soustavu souřadnic umístíme tak, aby osa x byla rovnoběžně s nakloněnou rovinou. Díky tomuto umístění máme hned dvě síly souběžně se směrem souřadnicových os: síla N normálové podložky působící na kostku působí tedy vlastně ve směru osy y (dokonce v kladném směru osy y), síla tahová T působí ve směru osy x (v kladném směru osy x). Zároveň úhel mezi tíhovou silou (působící kolmo k zemskému povrchu) a zápornou poloosou y (kolmou na nakloněnou rovinu) je stejný jako uhel nakloněné roviny. Složky síly mg si určíme přes pravoúhlý trojúhelník (obr. 36).

a) Neznámá je pro nás hodnota T:

$$\Sigma F_x = T - mg \cdot sin\theta$$

Po úpravě na výpočet neznáme T, dostaneme:

$$T = mg \cdot sin\theta = (15kg) \cdot (9{,}8m \cdot s^{-2}) sin27° = 67N$$

Lano je napínáno silou $67N$.

b) Neznámou ve výpočtu se nyní stává N.

$$\Sigma F_x = N - mg \cdot cos\theta$$

$$\sim$$

$$N = mg \cdot cos\theta = (15kg) \cdot (9{,}8m \cdot s^{-2}) cos27° = 130{,}9N$$

Rovina působí na kostku silou $130{,}9N$.

Práce

Příklad 3.4

Bedna ujíždí směrem k ženě po vodorovné podlaze. Žena se snaží bednu zbrzdit tak, že se ji snaží od sebe odtlačit silou $F = (2{,}0N)i + (-6{,}0N)j$ a ustupuje před ní. Bedna se i přesto posune o vektor $d = (-30, m)i$.

Jakou práci vykonala síla F při posunutí d?

Řešení:

Podle vztahu se práce rovná:

$$W = F \cdot d$$

$$W = [(2{,}0N)i + (-6{,}0N)j] \cdot [(-30, m)i]$$

Z jednotkových kolmých vektorů je skalární součin pouze $i \cdot i, j \cdot j, k \cdot k$ nenulové. Vektory i j jsou navzájem kolmé vektory, proto jejich skalární součin je roven nule. Proto:

$$W = [(2{,}0)(-30, m)i \ \cdot i + (-6{,}0N)(-30, m)j \cdot i] =$$

$$= (-6{,}0J)(1) + 0 = -6{,}0J$$

Síla F vykonává práci $-6{,}0J$.

Závěr

Bakalářská práce byla realizována podle plánu a navrženého rozdělení. Dříve než jsem se začala zabývat samotnou tématikou, vypracovala jsem seznam značení, které jsem následně využívala v celém textu.

Za cíl jsem si stanovila vypracovat soubor vektorový počet na úrovni střední školy rozšířený o vysokoškolské učivo lineární algebry. Právě vysokoškolskému učivu se věnuje první kapitola a následně na ni navazuje druhá kapitola aplikací vektorů na úrovni střední školy. Stejná hierarchie učiva je dána v rámci studijního programu učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol, proto by daný materiál mohl studentům posloužit při studiu. Pro názornou prezentaci využití vektorů v praxi je třetí kapitola věnována vektorům v některých partiích fyziky.

Poznatky jsou demonstrovány na praktických příkladech, které jsou ve většině případů doprovázeny vysvětlením a grafickým znázorněním. Grafickou podporu považuji u učiva o vektorech za velmi důležitou a program Geogebra za vynikající podpůrný nástroj. Všechny operace s vektory, které jsem v bakalářské práci využila, lze naleznout v daném programu Geogebra. Program umožňuje simulovat mnoho situací, které nám vektory nabízejí.

Během studia středoškolských učebnic o vektorech jsem nalezla mnoho odlišností mezi prezentováním daného učiva a rozsah učebnic, které je danému tématu věnováno. Učebnice pro gymnázia pracují s důkazy a mnohem náročnějšími příklady a pro studium na vysokých školách poskytují velmi kvalitní základ. Nicméně učebnice pro střední školy pracují více s memorováním vzorečků bez důkazů či vysvětlení platnosti daného vzorce. Při odvozování náročnějších kapitol vektorových početních operací mohou pak studentům unikat logické souvislosti.

Téma vektorového počtu nekončí v nižších dimenzích, ale teprve začíná, proto doufám, že právě takový úvod může pomoci ve studiu o vektorech ve vyšších dimenzích, kde se matematické operace a úlohy zjišťování vzájemné polohy podprostorů pohybují na abstraktní úrovni.

Seznam použité literatury

BUŠEK, Ivan. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia: analytická geometrie*. Praha: Prometheus, 2016. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-055-1.

HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Brno: VUTIUM, 2000. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 80-214-1868-0.

HORÁK, Pavel a Josef JANYŠKA. *Analytická geometrie*. Brno: Masarykova univerzita, 1997. ISBN 80-210-1623-x.

HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-318-9.

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2010. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-390-5.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 2018. ISBN 80-7196-099-3.

POOLE, David. *Linear algebra: a modern introduction*. Fourth edition. Stamford, CT: Cengage Learning, [2015]. ISBN 978-1-285-46324-7.

VONDRA, Jan, Jana KALOVÁ a Václav ZEMEK. *Matematika pro střední školy*. Brno: Didaktis, 2016. ISBN 978-80-7358-236-4.

VOŠICKÝ, Zdeněk. *Matematika v kostce*. 3. vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 2004. V kostce (Fragment). ISBN 80-7200-964-8.

Seznam obrázků

Obrázek 1: Grafické znázornění orientované úsečky

Obrázek 2: Grafické znázornění souřadnice vektoru

Obrázek 3: Grafické řešení příkladu 1.1. (1)

Obrázek 4: Grafické řešení příkladu 1.1 (2)

Obrázek 5: Grafické řešení příkladu 1.2 (1)

Obrázek 6: Grafické řešení příkladu 1.2. (2)

Obrázek 7: Grafické sčítání vektorů

Obrázek 8: Graficky opačný vektor

Obrázek 9: Grafické řešení příkladu 1.4.

Obrázek 10. Grafické řešení příkladu 1.4.

Obrázek 11. Graficky složky vektorů

Obrázek 12. Graficky složky vektorů

Obrázek 13. Grafické řešení příkladu 1.5.

Obrázek 14. Grafické násobení vektorů

Obrázek 15. Grafické řešení cvičení 1.2.

Obrázek 16 Grafické řešení příkladu 1.8.

Obrázek 17. Grafické řešení příkladu 1.10.

Obrázek 18. Báze vektoru

Obrázek 19. Normálový vektor

Obrázek 20. Vzdálenost bodu od přímky

Obrázek 21. Odchylka přímek

Obrázek 22. Příklad 2.1.11.

Obrázek 23. Příklad 2.1.12.

Obrázek 24. Příklad 2.1.13.

Obrázek 25. Příklad 2.1.14.

Obrázek 26. Parametrické vyjádření roviny

Obrázek 27. Příklad 2.2.3.

Obrázek 28. Příklad 2.2.6.

Obrázek 29. Příklad 2.2.7.

Obrázek 30. Příklad 2.2.8.
Obrázek 31. Příklad 2.2.9.
Obrázek 32. Příklad 3.1.
Obrázek 33. Příklad 3.2.
Obrázek 34. Příklad 3.3.
Obrázek 35. Příklad 3.3.
Obrázek 36. Příklad 3.3.