7.5 Řady

Ukazuje se účelné zobecnit součet na nekonečný počet sčítanců.

Definice 7.5.1
Nekonečnou řadou nazveme symbol $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

kde $a_i, i = 1,2,3,\ldots$ nazýváme členy řady.

Řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je přiřazena tzv. posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

...

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

...

Definice 7.5.2
Součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme limitu posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Součet řady lze označit stejně jako samotnou řadu, tudíž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Pokud má posloupnost částečných součtů vlastní limitu, říkáme, že řada konverguje.
Pokud tomu tak není, říkáme, že řada diverguje.

Věta 7.5.1 Nutná podmínka konvergence
Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak se členy řady blíží nule, tj. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pro řady platí komutativní, asociativní a distributivní zákon pouze do jisté míry.

Aritmetická řada
Věta 7.5.2
Aritmetická řada, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2 \cdot d) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + (n-1) \cdot d)$
konverguje právě tehdy, když diference mezi členy řady je nulová a první člen též.
Tudíž platí, že $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Poznámka
Pro diferenci $d > 0$ *řada diverguje k* $+\infty$, *pro diferenci* $d < 0$ *diverguje k* $-\infty$.

Věta 7.5.3
Geometrická řada, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$ a pro součet pak platí $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Pokud $|q| \geq 1$ řada diverguje.