Goniometrické triky

Vojta Miloš

Při řešení se jistě budou hodit tyto vzorce:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 - \sin^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos x \qquad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin x$$

Často užívané triky:

- Při řešení soustav rovnic se dá umocnit na druhou a šikovně sečíst tak, aby vzniklo $\sin^2 x + \cos^2 x$. Víme totiž, že takový součet je vždy roven jedné.
- Vhodně zvolená goniometrická substituce může znamenat přímočaré řešení i ve složité úloze, která původně žádnou goniometrii neobsahuje.
- Užitečný postřeh: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.
- Je dobré vzít v úvahu omezenost funkcí sinus a kosinus. Šikovné odhady mohou vyřešit nejednu úlohu.

Lehčí úlohy

Příklad 1. Určete hodnotu $\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ$ bez výpočtu hodnot dílčích sinů.

Příklad 2. Najděte všechna $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ taková, že

$$\sin x + \sin y = \sin(xy).$$

Příklad 3. Vyřešte soustavu pro $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin x + \sin y = \sin(x + y)$$
$$\cos x + \cos y = \cos(x + y).$$

Nápověda. Typická ukázka pro trik „umocni a sečti“.

Příklad 4. Najděte n, je-li dáno

$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ)\cdots(1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^n.$$

(AMC12P 2002)

Příklad 5. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla, která splňují $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ a $ac + bd = 0$. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat výraz $ab + cd$.

Nápověda. Substituce je mocná zbraň.

Příklad 6. Spočítejte:

(a) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$;

(b) $\cos 36° - \cos 72°$;

(c) $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$.

Příklad 7. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla v intervalu $[0, \pi]$ taková, že

$$\sin a + 7 \sin b = 4(\sin c + 2 \sin d),$$
$$\cos a + 7 \cos b = 4(\cos c + 2 \cos d).$$

Dokažte, že $2 \cos(a - d) = 7 \cos(b - c)$.

Těžší úlohy

Příklad 8. Určete nejmenší hodnotu výrazu

$$\left| \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos y} \right|$$

pro reálná čísla x. (Putnam 2003)

Příklad 9. Reálná čísla a, x, y, z vyhovují podmínce

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x + y + z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x + y + z)} = a.$$

Dokažte, že platí

$$\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(x + z) = a.$$

Příklad 10. Nechť a a b jsou reálná čísla taková, že

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Zjistěte hodnotu $\sin(a + b)$. (AMC12 2002)

Literatura

[1] Zuming Feng, Titu Andreescu: *103 Trigonometry Problems*, Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin, 2005.