Zadávání s pomocí parametru

Přímku v analytické geometrii můžeme zadat parametricky takto:

- Vezmeme nějaký bod **[x_0; y_0; ...]** kterým přímka prochází. Počet souřadnic bodu je **2** nebo **3** podle dimenze prostoru, ve kterém pracujeme.
- Ostatní body přímky budou mít souřadnice ve tvaru **[x_0 + a*t; y_0 + b*t; ...]**, kde:
  - **a**, **b**, **...** jsou konstanty, z nichž alespoň jedna musí být $\neq 0$,
  - **t** je parametr (reálné číslo) vyjadřující, že všechny souřadnice se mění současně, čili body přímky získáváme dosazováním různých hodnot **t**.

Tak získáme tzv. **parametrické rovnice souřadnic přímky**:

- $x = x_0 + a * t$,
- $y = y_0 + b * t$,
- **...**

Poznámky

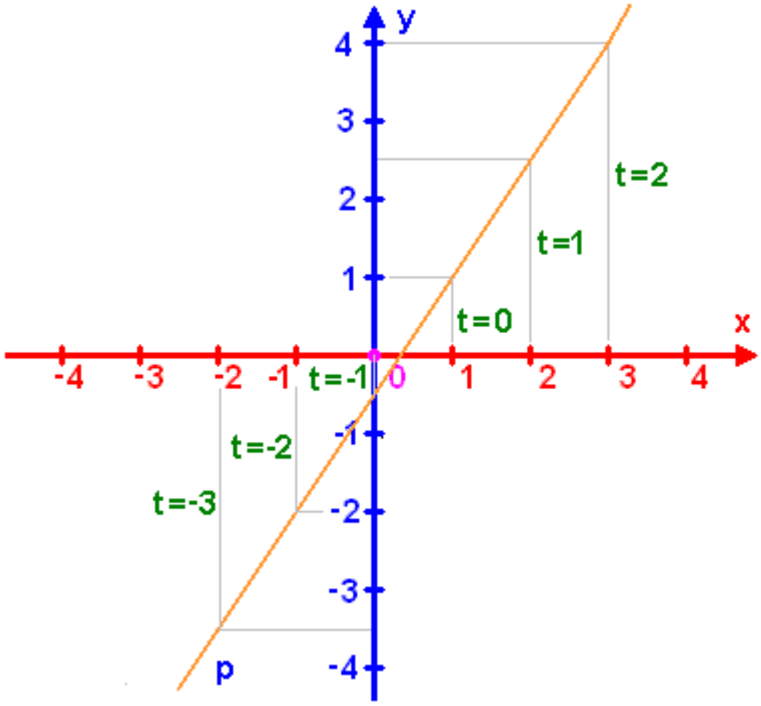
- Pokud některé z konstant **a**, **b**, **...** jsou nulové, příslušné souřadnice bodů přímky se se změnami **t** nemění, tj. přímka je kolmá na příslušné osy (viz příklad).
- Pro každou přímku s parametrickými rovnicemi
  - $x = x_0 + a * t$,
  - $y = y_0 + b * t$,
  - **...**

  existuje nekonečně mnoho sad parametrických rovnic:
  - 1) sady s posunem počátku o konstantu t_0:
    - $x = x_0 + a * t_0 + a * t$,
    - $y = y_0 + b * t_0 + b * t$,
    - **....**
  - 2) sady s koeficienty vynásobenými konstantou **c**:
    - $x = x_0 + a * c * t$,
    - $y = y_0 + b * c * t$,
    - **....**

Příklad v rovině

Jsou zadány vzorce $x = 1 + t$, $y = 1 + 1{,}5 * t$. Narýsujte jimi určenou přímku **p**.

Řešení



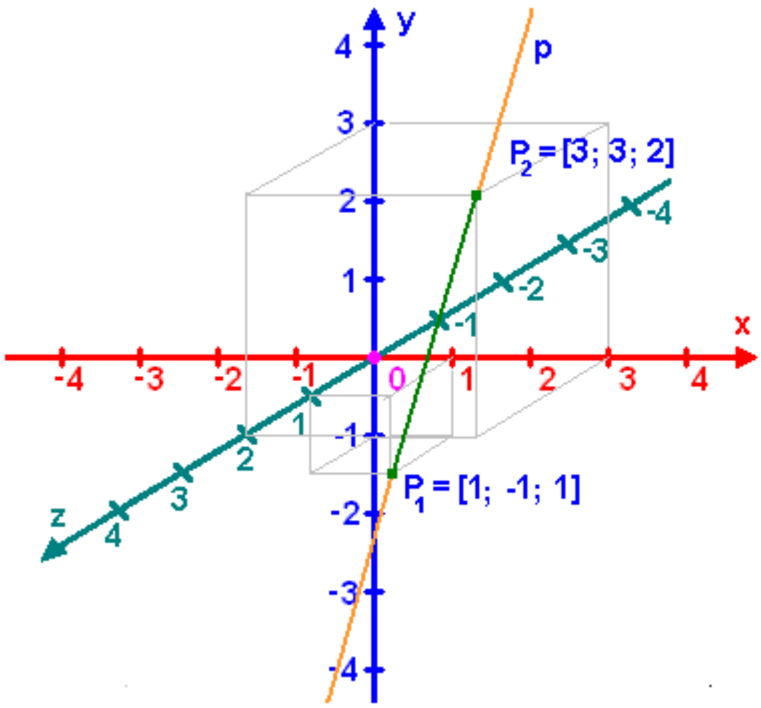
Na obrázku je zakresleno několik bodů přímky **p** pro několik hodnot **t**. Je vidět, že pro celočíselná **t** jsou jejich obrazy na přímce ve stejných vzdálenostech.

Přímka prochází m.j. body **[1; 1]**, **[3; 4]**, **[1/3; 0]**, **[0; -1/2]**.

Příklad v prostoru

Jsou zadány vzorce **x = 1 + 2 * t**, **y = -1 + 4 * t**, **z = 1 + t**.
Narýsujte jimi určenou přímku **p**.

Řešení

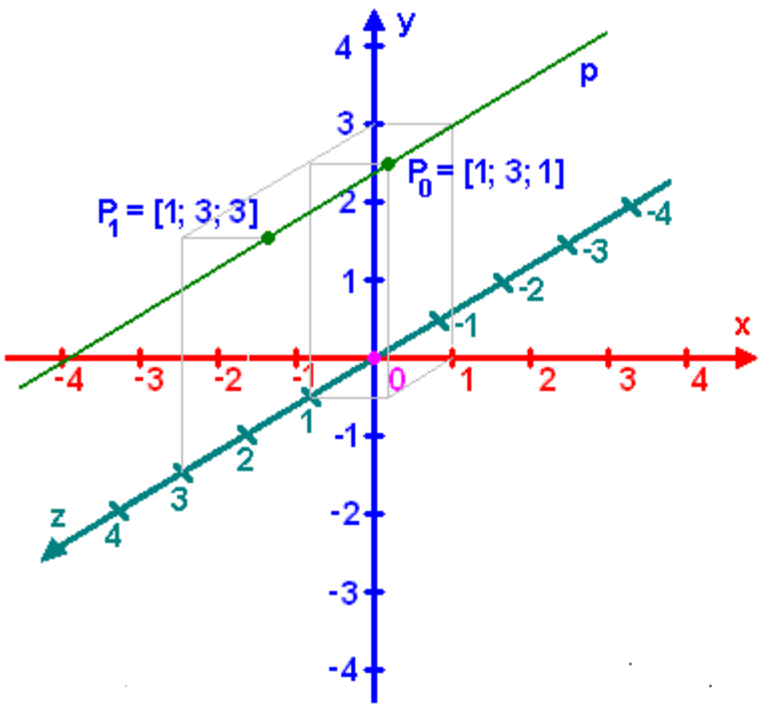


Na obrázku je zakreslena přímka **p** procházející bodem **P_1 = [1; -1; 1]**, jejíž souřadnice mají tvar **[1 + 2*t; -1 + 4*t; 1 + 1*t]**. Bod **P_2 = [3; 3; 2]** získáme při dosazení **t = 1**.

Příklad přímky v prostoru se dvěma nulovými koeficienty

Jsou zadány vzorce **$x = 1$**, **$y = 3$**, **$z = 1 + 2 * t$**. Narýsujte jimi určenou přímku **p**.

Řešení



Takto zadaná přímka **p** prochází bodem **$P_0 = [1; 3; 1]$**. Její další bod **$P_1 = [1; 3; 3]$** získáme při dosazení **$t = 1$**. Tím, že v parametrickém vyjádření jsou dvě konstanty u parametru **t** nulové, přímka je kolmá na osy **x** a **y** a je rovnoběžná s osou **z**.

Další způsoby zadávání přímky

Tyto způsoby jsou založeny na různých vlastnostech přímky. Pro každý ze způsobů si uvedeme jeho převod na zadání parametrické.

- Zadání použitelné v rovině i v prostoru:
  - bodem a vektorem.
- Zadání použitelná pouze v rovině:
  - obecnou rovnicí,
  - úsekovou rovnicí,
  - funkčním předpisem.

Zadání přímky bodem a vektorem

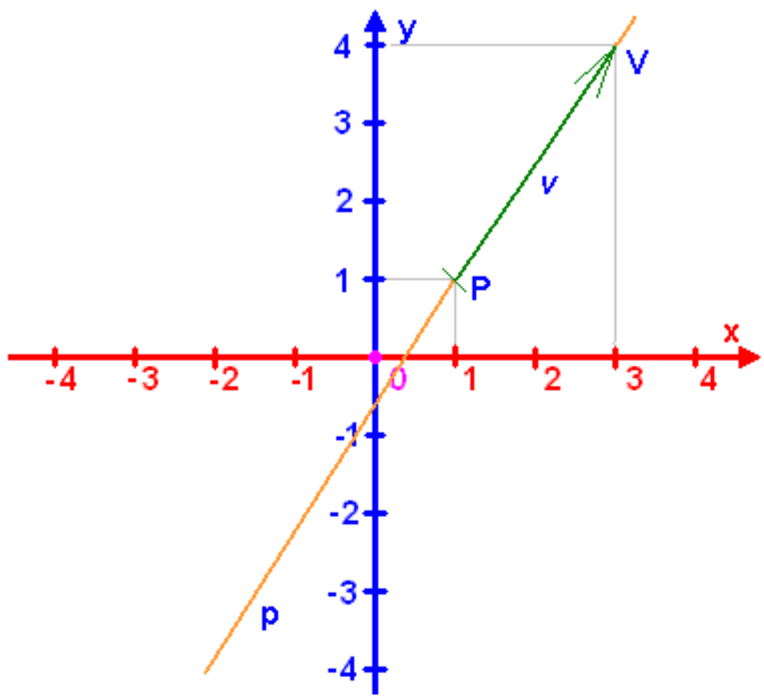
Bod **$P = [x_0; y_0]$** je počátkem vázaného vektoru daného vektorem $\vec{v}$ = **(a; b)**. Body přímky **p** jsou koncové body vázaných vektorů daných všemi možnými násobky $\vec{v}$ reálným číslem.

Vektor $\vec{v}$ udává směr přímky **p** a proto se nazývá **směrový vektor přímky p**.

Příklad

Máme zadán bod **P = [1; 1]** a vektor $\vec{v}$ **= (2; 3)**. Narýsujte jimi určenou přímku **p**.

Řešení



Přímka **p** vpravo od bodu **P** vznikla jako množina vrcholů vázaného vektoru při jeho násobení číslem **> 0** (body přímky jsou vyznačeny zeleně a žlutě).
Přímka **p** vlevo od bodu **P** vznikla jako množina vrcholů vázaného vektoru při jeho násobení číslem **< 0** (body přímky jsou vyznačeny žlutě).

Zadání převedeme na parametrické snadno:

- $x = x_0 + 2 * t$,
- $y = y_0 + 3 * t$,

protože obě zadání fungují podobně.

Zadání přímky obecnou rovnicí v rovině

Toto zadání v množinovém zápisu vypadá takto:

$$M = \{ [x; y]; x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R} \mid u * x + v * y + w = 0, u \neq 0 \vee v \neq 0 \}$$

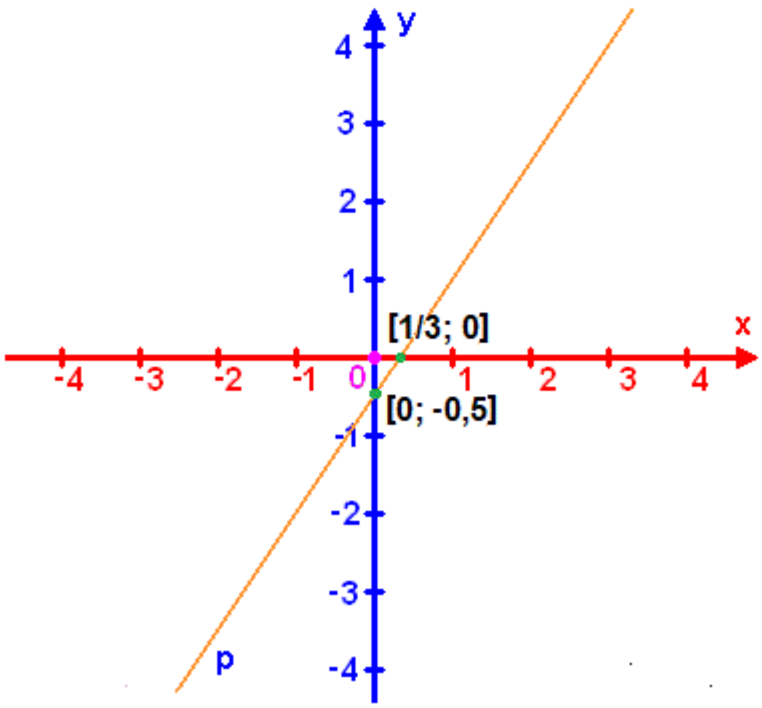
Příklad

Je zadán předpis **-3/2 * x + 1 * y + 0,5 = 0**. Narýsujte jím určenou přímku **p**.

Řešení

- Pro narýsování přímky potřebujeme znát alespoň dva body jejího grafu.
- První získáme například volbou **x = 0**, dostaneme **y = -0,5**, tedy bod **[0; -0,5]**.

- Druhý získáme například volbou **$y = 0$**, dostaneme **$x = 1/3$**, tedy bod **[1/3; 0]**.



Převod parametrických rovnic na obecnou rovnici

Jsou-li zadány parametrické rovnice přímky:

$$x = x_0 + a * t,$$
$$y = y_0 + b * t$$

vyloučíme z nich **t**. Protože **a** nebo **b** může být nulové a mohli bychom mít problémy s dělením nulou, úlohu si rozdělíme na tři podúlohy:

- **$a \neq 0$ & $b \neq 0$**:
  - $x = x_0 + a * t$
    $y = y_0 + b * t$
  - $(x - x_0) / a = t$
    $(y - y_0) / b = t$
  - $(x - x_0) / a = (y - y_0) / b$ // vynásobíme a * b a přerovnáme
  - $b * x - b * x_0 = a * y - a * y_0$
  - $b * x - a * y + (-b * x_0 + a * y_0) = 0$ // (-b * x_0 + a * y_0) je konstanta
- **$a = 0$ & $b \neq 0$**:
  - $x = x_0 + a * t$
    $y = y_0 + b * t$
  - $x = x_0$ // upravíme první rovnici
  - $x - x_0 = 0$ // upravíme ji
  - $b * x - b * x_0 = 0$ // upravíme ji vynásobením nenulovým b
  - $b * x - b * x_0 = a * y - a * y_0$ // 0 vpravo nahradíme jinou nulou
  - $b * x - a * y + (-b * x_0 + a * y_0) = 0$ // po úpravě máme výsledek
- **$a \neq 0$ & $b = 0$**:
  - $x = x_0 + a * t$
    $y = y_0 + b * t$
  - $y = y_0$ // upravíme druhou rovnici

- $0 = y - y_0$ // upravíme ji
    - $0 = a * y - a * y_0$ // upravíme ji vynásobením nenulovým a
    - $b * x - b * x_0 = a * y - a * y_0$ // 0 vpravo nahradíme jinou nulou
    - $b * x - a * y + (-b * x_0 + a * y_0) = 0$ // po úpravě máme výsledek

Tak jsme se chytře vyhnuli dělení nulou a dostali ve všech případech stejný výsledek

$$b * x - a * y + (-b * x_0 + a * y_0) = 0.$$

Poznámka

Některé prováděné úpravy byly hodně krkolomné, protože cílem bylo dosáhnout shodného výsledku ve všech třech podúlohách.

Převod zadání obecného na parametrické

Provedeme jej jednoduchým propočtem:

- Nechť je dáno $a * x + b * y + c = 0$. Protože buď a nebo b mohou být nulové, úlohu si rozdělíme na dvě podúlohy, abychom se vyhnuli problémům s dělením nulou:
- Je-li $a \neq 0$, vybereme si:
    - $y_0 = 0$ a výpočtem určíme $x_0 = -c / a$,
    - $y_1 = 1$ a výpočtem určíme $x_1 = (-c - b) / a$,
    - parametrické rovnice budou:
        - $x = x_0 + (x_1 - x_0) * t = x_0 + ((-c - b) / a - (-c / a)) * t$
          $= x_0 + (((-c - b - (-c)) / a) * t = x_0 + (((- b)) / a) * t$
        - $y = y_0 + (y_1 - y_0) * t = y_0 + (1 - 0) * t$
          $= y_0 + t$
    - Aby tyto rovnice byly symetrické, t vynásobíme a:
        - $x = x_0 - b * t$,
        - $y = y_0 + a * t$.
- Jinak je $b \neq 0$ a my si vybereme:
    - $x_0 = 0$ a výpočtem určíme $y_0 = -c / b$,
    - $x_1 = 1$ a výpočtem určíme $y_1 = (-c - a) / b$,
    - parametrické rovnice budou:
        - $y = y_0 + (y_1 - y_0) * t = y_0 + ((-c - a) / b - (-c / b)) * t$
          $= y_0 + (((-c - a - (-c)) / b) * t = y_0 + (((- a)) / b) * t$
        - $x = x_0 + (x_1 - x_0) * t = x_0 + (1 - 0) * t$
          $= x_0 + t$
    - Aby tyto rovnice byly symetrické, t vynásobíme $-b$:
        - $y = y_0 + a * t$,
        - $x = x_0 - b * t$.
- Pro obě podúlohy jsme dostali stejný vzorec.

Zadání přímky úsekovou rovnicí v rovině

- Jsou zadány body $P = [p; 0]$ a $Q = [0; q]$, $p, q \neq 0$.
- Vztah $x / p + y / q = 1$ se nazývá **úsekový tvar přímky**.

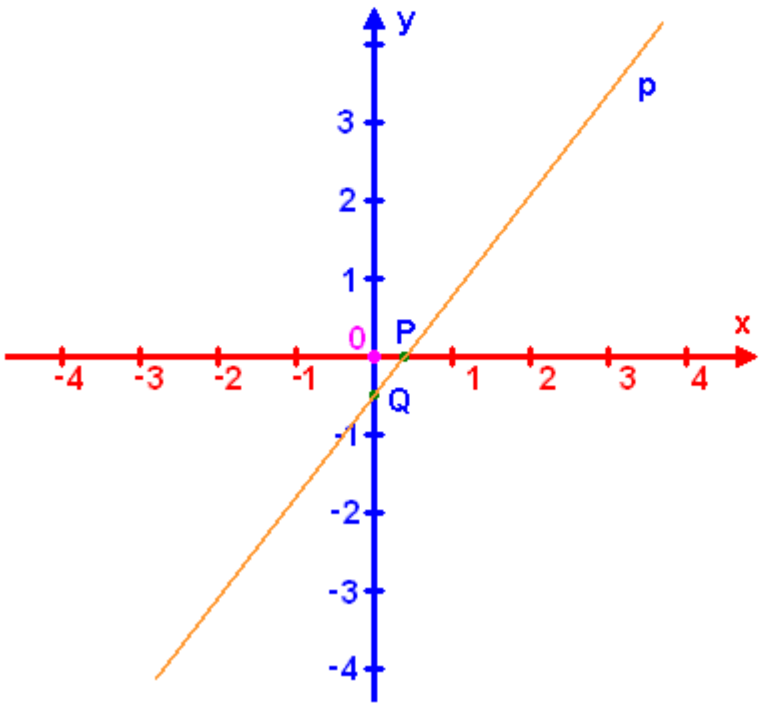
Postupným dosazením $x = 0$ a $y = 0$ zjistíme, že přímka prochází body P a Q, takže toto zadání je velmi názorné - stačí dosadit p a q do vzorečku a jsme hotovi.

Úsekovou rovnicí nelze zadat ani přímky kolmé na osu **x** ani přímky kolmé na osu **y**.

Příklad

Jsou zadány body **[1/3; 0]**, **[0; -1/2]**. Narýsujte jimi určenou přímku **p**.

Řešení



Převod zadání úsekového na parametrické provedeme snadno:

- **x / p + y / q = 1**
- Za výchozí bod **[x_0; y_0]** vezmeme bod **P** průsečík přímky s osou **x.**
- Složky vektoru pro parametrické rovnice dostaneme odečtení souřadnic dvou bodů na přímce, tedy bodů **Q** a **P**:
  x = p + (0 - p) * t = p - p * t,
  y = 0 + (q - 0) * t = q * t.

Zadání přímky funkčním předpisem v rovině

Přímka **f** je zadána jako funkce s předpisem ve tvaru **y = k * x + q**, kde **k** a **q** jsou reálná čísla, tedy

$$f = \{ [x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = k * x + q \}.$$

Body **[x; y]** přímky dostáváme dosazováním různých hodnot za **x**.

V tomto způsobu zadání můžeme zadat přímku rovnoběžnou s osou **x** tak,
že položíme **k = 0**.
Nelze však zadat přímku rovnoběžnou s osou **y**, neboli přímku kolmou na osu **x**.

Poznámka

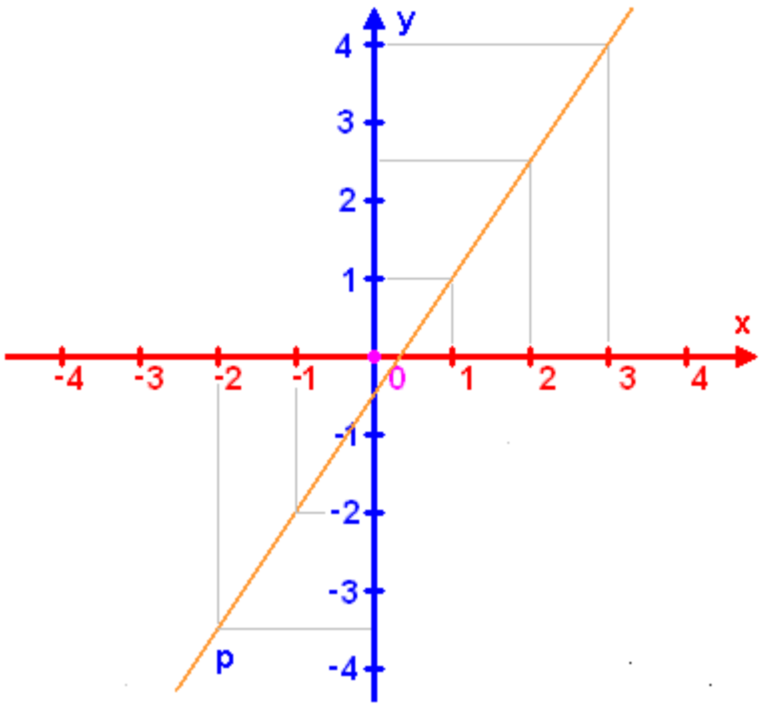
Takto zadaná funkce se nazývá **funkce lineární**. Je zobecněním mocninné funkce s exponentem 1. Koeficienty lineární funkce mají svá jména:

- **k** se nazývá **směrnice**,
- **q** se nazývá **úsek na ose y**.

Příklad

Je zadán předpis **y = 3/2 * x - 0,5**. Narýsujte jím určenou přímku **p**.

Řešení



Přímka **p** vznikne jako množina **[x; y]** tak, že ke každému reálnému **x** se vyčíslí **y**.

Převod funkčního zadání **y = k * x + q** na parametrické provedeme takto:

- Za výchozí bod $[x_0; y_0]$ vezmeme **[0; q]** - ten na přímce leží.
- Za další bod $[x_1; y_1]$ vezmeme bod **[1; q + k]** - ten na přímce rovněž leží.
- Koeficienty pro parametrické rovnice dostaneme odečtení souřadnic těchto dvou bodů:
  x = 0 + (1 - 0) * t = t,
  y = q + (q + k - q) * t = q + k * t.

V našem příkladu bude **x = t**, **y = 0,5 + 1,5 * t**.