Analytická geometrie - Geometrie v prostoru

V této kapitole se při zavádění pojmů a řešení úloh přesuneme do prostoru. Úlohy, které budeme řešit, se podobají těm, které jsme řešili v kapitole **Geometrie v rovině**, a i postupy budou obdobné. Mezi úlohy, které budeme řešit, patří zkoumání vzájemné polohy přímky a roviny nebo třeba výpočet vzdálenosti dvou rovin.

Začneme vyjádřením přímky v prostoru. Přímku v prostoru můžeme vyjádřit jen parametricky, protože obecná rovnice přímky v prostoru neexistuje.

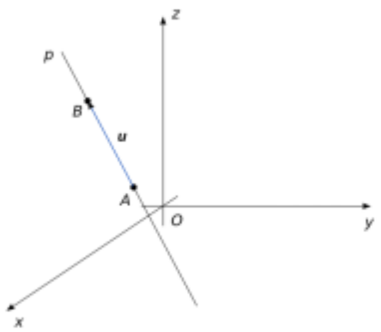
Parametrické vyjádření přímky

Parametrické vyjádření přímky v prostoru zavedeme podobným způsobem jako v rovině.

Úmluva: Přímku p v prostoru, určenou bodem P a vektorem u, budeme zapisovat jako $p(P, \mathrm{u})$.

Definice

Jestliže A, B jsou dva různé body, pak vektor $\mathrm{u} = B - A$ nazýváme **směrový vektor** přímky AB.



Obr. 4.1: Směrový vektor přímky v prostoru

V prostoru zůstávají všechny úvahy i řešení z *příkladu 3.1* platné.

Definice

Rovnice $X = A + t\mathrm{u}$; $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{u} \neq \mathrm{o}$,
se nazývá **parametrická rovnice** nebo také **parametrické vyjádření** přímky $p(A, \mathrm{u})$. Proměnná t se nazývá **parametr**.

Když parametrickou rovnici přímky $p(A, \mathrm{u})$, kde $A[a1; a2; a3]$ a $\mathrm{u} = (u1; u2; u3)$ zapíšeme v souřadnicích, získáme vyjádření souřadnic bodů $X[x; y; z]$ této přímky v závislosti na parametru t.
$x = a1 + tu1$,
$y = a2 + tu2$,
$z = a3 + tu3$; $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka

Protože bodů a směrových vektorů pro vyjádření jedné přímky můžeme zvolit nekonečně mnoho, můžeme jednu přímku vyjádřit nekonečně mnoha parametrickými rovnicemi.

Příklad 4.1

Určete parametrické vyjádření přímky AB, je-li $A[2; 3; -1]$ a $B[0; -1; 5]$.

Řešení

- Pro určení parametrické rovnice přímky AB použijeme bod A a směrový vektor u = AB:
  u = AB = (0 - 2; -1 - 3; 5 + 1) = (-2; -4; 6).
- Parametrická rovnice pak vypadá následovně:
  $x = 2 - 2t$,
  $y = 3 - 4t$,
  $z = -1 + 6t$; $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.2

Zjistěte, zda body $A[1; 5; -2]$, $B[2; 3; 0]$ a $C[0; 7; -3]$ leží na jedné přímce.

Řešení

- Ze zadaných bodů zvolíme dva, pomocí kterých vyjádříme parametrickou rovnici přímky, která jimi prochází. Do získané rovnice dosadíme souřadnice třetího bodu a hledáme hodnotu parametru t, pro kterou bude parametrická rovnice splněna - pokud taková hodnota existuje, body na přímce leží, pokud ne, body na jedné přímce neleží.
- Z bodů A a B získáme parametrickou rovnici přímky AB:
  $x = 1 + t$,
  $y = 5 - 2t$,
  $z = -2 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$.
- Za x, y a z dosadíme souřadnice bodu C:
  $0 = 1 - t$,
  $7 = 5 - 2t$,
  $-3 = -2 + 2t$.
- Z první rovnice vyjádříme $t = -1$. Pro $t = -1$ je splněna i druhá rovnice, ale po dosazení do rovnice třetí vidíme:
  $-3 = -4$.
  Soustava nemá řešení, proto bod C neleží na přímce AB. To samozřejmě znamená, že body A, B, C neleží na jedné přímce.
- Celý příklad by se dal vyřešit i rychleji způsobem podobným tomu, který jsme použili v *příkladě 3.3*. Body A, B, C leží na jedné přímce, právě tehdy, když je vektor AB nenulovým reálným násobkem vektoru AC, tj. existuje nějaké reálné číslo k, pro které platí AB = kAC.
  AB = (1; -2; 2),
  AC = (-1; 2; -1).
  Ze souřadnic vektorů AB a AC je vidět, že jeden není násobkem druhého, a proto body A, B a C neleží na jedné přímce.

Poznámka

Interval, ve kterém leží parametr t, ovlivňuje stejně jako v rovině, co parametrická rovnice vyjadřuje.