Limity s odmocninami

V některých příkladech odmocnina nijak nenaruší výpočet limity:

Příklad 1. *Vypočítejte:*

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x-3} =$$

Řešení: Dosazením ihned dostáváme:

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x-3} = \frac{\sqrt{(-3)^2+7}}{-3-3} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

Podívejme se na řešení následujících příkladů:

Příklad 2. *Vypočtěte:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} =$$

Řešení: Pokud zkusíme dosadit za x, dostaneme podíl typu „$\frac{0}{0}$“, což nedokážeme přímo spočítat. Proto budeme muset nejprve výraz upravit a zbavit se tak činitelů, které „nulují“ čitatele i jmenovatele. Usměrníme výraz pomocí vzorce $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(x+1)-1^2} =$$

Po úpravě jmenovatele a zkrácení se postupně dopracujeme k výsledku:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2$$

V některých příkladech je nutné použít vzorec $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ na zbavení se odmocniny v čitateli:

Příklad 3. *Vypočtěte:*

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$$

Řešení: Dosazením opět zjistíme, že vychází podíl typu „$\frac{0}{0}$“. Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$