př: vyjádřit parametricky $x - 3y - 4 = 0$

$u = (1; -3)$

$n = (3; 1)$

$x = 1$:

$1 - 3y - 4 = 0$

$-3 = 3y$

$y = -1$

$X = A + t\vec{u}$

$$\begin{vmatrix} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \end{vmatrix}$$

$2 - 3y - 4 = 0$

$-2 - 3y = 0$

$-2 = 3y$

$y = -\frac{2}{3}$

$2 = 1 + 3t$ $\quad$ $-\frac{2}{3} = -1 + t$

$1 = 3t$

$t = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{3} = t$

př: $P[3;5]$, $Q[2;1]$, $\vec{u} = (1;2)$, $\vec{v} = (3;6)$

$p(P;\vec{u})$, $q(Q;\vec{v})$ - jsou rovnoběžné?

$\vec{u} \cdot k = \vec{v}$ $\Rightarrow$ ano

- jsou totožné?

$P \in q \lor Q \in p$

$X = A + t \cdot \vec{u}$ $\quad$ $\Rightarrow Q[2;1]$

p: $x = 3 + t \cdot 1$ $\quad$ $2 = 3 + t$ $\quad$ $t = -1$

$y = 5 + t \cdot 2$ $\quad$ $1 = 5 + 2t$ $\quad$ $t = -2$ $\quad$ $\Rightarrow$ nejsou

př: $p(P;\vec{u})$, $q(Q;\vec{v})$, $P[2;-1]$, $u = (1;2)$, $Q = [0;-2]$, $\vec{v} = (1;1)$

- určit vzájemnou polohu, popř. průsečík

p: $x = 2 + t$ $\quad$ q: $x = s$

$y = -1 + 2t$ $\quad$ $y = -2 + s$

$\Downarrow$

$2 + t = s$

$-1 + 2t = -2 + s$

$-1 + 2t = -2 + 2 + t$

$-1 + 2 - 2 = t - 2t$

$-1 = -1t$

$t = 1$

$\Rightarrow 2 + 1 = s$

$s = 3$

p: $x = 2 + 1 = 3$ $\quad$ q: $x = 3$

$y = -1 + 2 = 1$ $\quad$ $y = -2 + 3 = 1$

$\Rightarrow$ průsečík $[3;1]$

př: Rovina, param. vyj. na obecnou rovnici:

$x = 2 + 2t - s$
$y = 3 - t + 3s$
$z = -1 - 2t - s$

$X = A + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow A[2;3;-1]$
$\vec{u} = (2;-1;-2)$
$\vec{v} = (-1;3;-1)$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ .... normálový vektor

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3;\ 2 \cdot (-1) - (-2)(-1);\ 2 \cdot 3 - (-1)(-1)) =$
$= (1 + 6;\ -2 - 2;\ 6 - 1) = (7; 4; 5)$

$\Downarrow$

$7x + 4y + 5z + d = 0$
A: $7 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + d = 0$
$21 + d = 0$
$d = -21$

$\Rightarrow \underline{\underline{7x + 4y + 5z - 21 = 0}}$

př: přímka AB, leží na ní bod P? $A[1;1]$, $B[5;-3]$, $P[-3;5]$

$X = A + t \cdot \vec{u}$
$\vec{u} = AB = B - A = (5-1; -3-1) = (4; -4)$
$x = 1 + 4t \quad -3 = 1 + 4t \Rightarrow t = -1$
$y = 1 - 4t \Rightarrow 5 = 1 - 4t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow$ <u>leží</u>

př: obecná rce přímky, $A[3;1]$, $B[1;2]$

$ax + by + c = 0$
$AB = B - A = (1-3; 2-1) = (-2;1)$
$\Rightarrow \vec{n} = (1;2)$
$\Downarrow$
$1x + 2y + c = 0$
$1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$
$c = -5$

př: nalézt obecnou rci přímky $x = 3 - 2t$, $y = 2 + t$

$A[3;2]$
$\vec{u} = (-2;1) \Rightarrow \vec{n} = (1;2)$

$\Rightarrow x + 2y + c = 0$
$3 + 2 \cdot 2 + c = 0$
$c = -7 \Rightarrow x + 2y - 7 = 0$

př: Určit param. vyj. přímky AB, $A[2;3;-1]$, $B[0;-1;5]$

$x = A + t\cdot\vec{u}$

$\vec{u} = AB = B - A = [0-2; -1-3; 5+1] = [-2;-4;6]$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2-2t \\ y &= 3-4t \\ z &= -1+6t \end{aligned}}$$

př: Leží body A, B, C na jedné přímce - $A[1;5;-2]$, $B[2;3;0]$, $C[0;7;-3]$

$\vec{u} = AB = B - A = [2-1; 3-5; 0+2] = [1;-2;2]$

$x = 1+t \qquad 0 = 1+t \Rightarrow t = -1$

$y = 5-2t \qquad 7 = 5-2\cdot(-1) = 7 \quad V$

$z = -2+2t \qquad -3 = -2+2\cdot(-1) = -4 \quad X$ <u>neleží</u>

př: Převést obecnou rovnici roviny $5x - 8y - 6z + 11 = 0$ na param.

$\Rightarrow$ potřebuju buď 1 bod a 2 vektory // nemám jak

nebo 3 body

třeba $x=3; y=4$: $\quad x=2; y=1$: $\quad x=1; y=2$:

$5\cdot3 - 8\cdot4 - 6z + 11 = 0 \qquad 5\cdot2 - 8\cdot1 - 6z + 11 = 0 \qquad 5\cdot1 - 8\cdot2 - 6z + 11 = 0$

$15 - 32 + 11 = 6z \qquad z = \frac{13}{6} \qquad z = 0$

$z = -1$

$A[3;4;-1] \qquad B[2;1;\frac{13}{6}] \qquad C[1;2;0]$

param. vyj:

$X = A + s\vec{u} + t\cdot\vec{v}$

$AB = \vec{u} = B - A = (2-3; 1-4; \frac{13}{6}+1) = (-1; -3; \frac{19}{6})$

$AC = \vec{v} = C - A = (1-3; 2-4; 0+1) = (-2;-2;1)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3 + s\cdot(-1) + t\cdot(-2) \\ y &= 4 + s\cdot(-3) + t\cdot(-2) \\ z &= -1 + s\cdot\left(\tfrac{19}{6}\right) + t\cdot 1 \end{aligned}}$$

př: rovina → obecná rce

$A[2;-2;1]$

$B[1;-1;4]$

$C[0;0;1]$

→ normálový vektor – $\boxed{\text{vektorový součin}}$ AB a AC

$\vec{u} = AB = (1-2;\ -1-(-2);\ 4-1) = (-1;\ 1;\ 3)$

$\vec{v} = AC = (0-2;\ 0-(-2);\ 1-1) = (-2;\ 2;\ 0)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (1\cdot 0 - 2\cdot 3;\ 1\cdot 0 - 3\cdot(-2);\ 1\cdot 2 - 1\cdot(-2)) = (-6;\ -6;\ 0)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (-6;\ -6;\ 0) \Rightarrow -6x - 6y + 0z + d = 0$

$-6\cdot 2 - 6\cdot(-2) + 0\cdot 1 + d = 0$

$-12 + 12 + 0 + d = 0$

$d = 0$

př: Určit param. rci roviny ABC; $A[0;2;1]$, $B[-1;3;2]$, $C[4;-1;3]$

$\vec{u} = AB = B - A = (-1-0;\ 3-2;\ 2-1) = (-1;\ 1;\ 1)$

$\vec{v} = AC = C - A = (4-0;\ -1-2;\ 3-1) = (4;\ -3;\ 2)$

$$\begin{aligned} x &= 0 + s\cdot(-1) + t\cdot 4 \\ y &= 2 + s\cdot 1 + t\cdot(-3) \\ z &= 1 + s\cdot 1 + t\cdot 2 \end{aligned}$$

př: leží bod $K[3;2;0]$ v rovině, kde $A[2;1;5]$, $B[2;-1;2]$, $\vec{u} = (1;3;3)$

$\vec{v} = AB = B - A = (2-2;\ -1-1;\ 2-5) = (0;\ -2;\ -3)$

$x = 2 + s\cdot 1 + t\cdot 0$ $\quad 3 = 2 + s \quad \rightarrow s = 1$

$y = 1 + s\cdot 3 + t\cdot(-2)$ $\quad 2 = 1 + 3s - 2t \quad \Rightarrow 2 = 1 + 3 - 2t$

$z = 5 + s\cdot 3 + t\cdot(-3)$ $\quad 0 = 5 + 3s - 3t \quad -2 = -2t$

$t = 1$

⇓

$0 = 5 + 3\cdot 1 - 3\cdot 1$

⇒ neleží

př: vzájemná poloha, popř. průsečík:

$p: x + 2y - 1 = 0$

$q: 3x + 6y = 2$

$\vec{n_p} = (1; 2)$

$\vec{n_q} = (3; 6)$ → <u>rovnoběžné, netotožné</u> (protože koeficient)

př: vzájemná poloha, popř. průsečík:

$p: x - y - 1 = 0$

$q: 3x + 3y - 6 = 0$

$\vec{n_p} = (1; -1)$

$\vec{n_q} = (3; 3)$ → nejsou rovnoběžné

průsečík:

$x - y - 1 = 0$

$3x + 3y - 6 = 0$

$x = 1 + y$

$3(1 + y) + 3y - 6 = 0$

$3 + 3y + 3y - 6 = 0$

$6y = 3$

$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}}}$

$x - \frac{1}{2} - 1 = 0$

$\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$

př: vzájemná poloha, popř. průsečík: $p(P; \vec{u})$; $q(Q; \vec{v})$

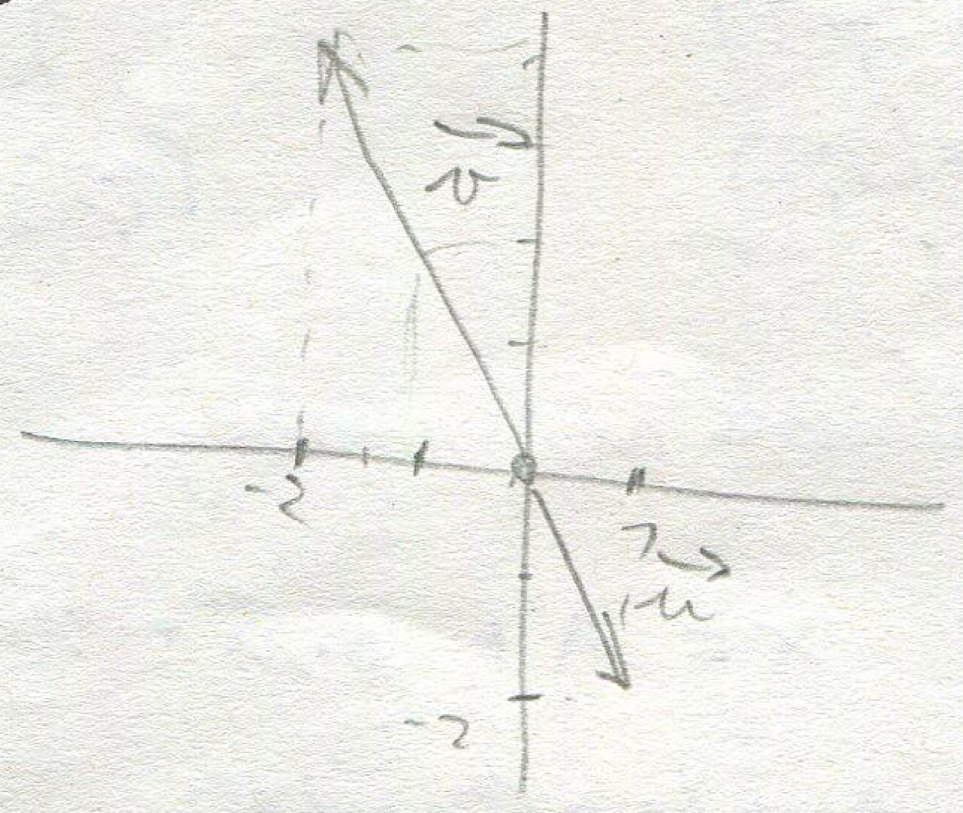
$P[1; 2]$, $Q[-1; 6]$, $\vec{u} = (1; -2)$, $\vec{v} = (-2; 4)$

$p: x = 1 + t$

$y = 2 - 2t$

$q: x = -1 - 2s$

$y = 6 + 4s$



$1 + t = -1 - 2s$

$2 - 2t = 6 + 4s$

$t = -1 - 2s - 1 = -2 - 2s$

$2 - 2(-2 - 2s) = 6 + 4s$

$2 + 4 + 4s = 6 + 4s$

$6 + 4s = 6 + 4s$

$s = s$

⇒ nekonečně mnoho společných bodů → $\underline{\underline{p = q}}$

Test:

① $A[1;3]$, $B[-2;4]$, $C[2;3]$

a) neleží na stejné přímce - ~~nejsou~~ vektory nejsou lin. násobky

$AB = B - A = (-2-1; 4-3) = (-3;1)$

$AC = C - A = (2-1; 3-3) = (1;0)$

b) t_a

$S = \left[\frac{-2+2}{2}; \frac{4+3}{2}\right] = \left[0; \frac{7}{2}\right]$

$AS = S - A = \left(0-1; \frac{7}{2}-3\right) = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ = směrový vektor

$\frac{1}{2}x + 1y + c = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x + y - \frac{7}{2} = 0$

$\frac{1}{2}\cdot 1 + 1\cdot 3 + c = 0$

$\frac{1}{2} + 3 + c = 0$

$c = -\frac{7}{2}$

② $K[4;2;1]$, $L[9;5;2]$, $M[0;1;1]$ leží v $\rho: x - 2y + z - 1 = 0$?

$4 - 2\cdot 2 + 1 - 1 = 0$ ~~ne~~ ano

$9 - 2\cdot 5 + 2 - 1 = 0$ ano

$0 - 2 + 1 - 1 = 0$ ne

③ $\measuredangle ab = ?$

$a: 2x - y + 3 = 0$

$\vec{n_a} = (2;-1)$

$\vec{u} = (1;2)$

$b: x = 1 - t$

$y = 2 + 2t$

$[1;2]$; $(-1;2)$

$\cos\alpha = \frac{|u\, v|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|1\cdot(-1) + 2\cdot 2|}{|\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{-1^2+2^2}|} =$

$= \frac{3}{5}$ $\arccos\frac{3}{5} = 53°7'48{,}37''$

④ obecnou rci roviny - $P[5;4;7]$, $s: x = 1 + u$

$y = 1 - u$ $\Rightarrow S[1;1;1]$

$z = 1 + 2u$ $(1;-1;2)$

$X = A + s\cdot\vec{u} + t\cdot\vec{v}$

$ax + by + cz + d = 0$

$3a + 4b + 5c + d = 0$