7.1 Kombinatorika (a diskrétní matematika)

Kombinatorika

Základní kombinatorická pravidla

Součtu
Lze-li množinu M rozdělit na n po dvou disjunktních podmnožin M_i, kde $i = 1,2,3,...,n$, potom počet prvků množiny M je součtem počtů prvků jednotlivých množin M_i.

Součinu
Počet uspořádaných $k-$tic, jejichž první člen je možné vybrat n_1 způsoby, druhý člen n_2 způsoby, … až $k-$tý člen n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.
Varianta
Počet prvků kartézského součinu množin A, B je roven $|A| \cdot |B| = a \cdot b$.

Definice 7.1.1
Mějme $n-$prvkovou množinu a $k \in N, k \leq n$.

Potom uspořádaným $k-$ticím navzájem různých prvků z $n-$prvkové množiny říkáme variace $k-$té třídy z $n-$prvků ($k-$prvkové variace z $n-$prvků).
Jejich počet označujeme $V_k(n)$ či $V(k,n)$.

Neuspořádaným $k-$ticím navzájem různých prvků z $n-$prvkové množiny, tedy $k-$prvkovým podmnožinám $n-$prvkové množiny, říkáme kombinace $k-$té třídy z $n-$prvků ($k-$prvkové kombinace z $n-$prvků).
Jejich počet označujeme $K_k(n)$ či $K(k,n)$.

Věta 7.1.1
Pro počet variací $k-$té třídy z $n-$prvků platí:
$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$
Pro počet kombinací $k-$té třídy z $n-$prvků platí:
$$K(k,n) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Definice 7.1.2
Uvažujme případ $k = n$. Potom uspořádanou $n-$tici navzájem různých prvků z $n-$prvkové množiny nazýváme permutací (pořadím) množiny.
Jejich počet $V_n(n)$ označujeme $P(n)$.

Proto $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Protože každá množina má právě jednu nula prvkovou podmnožinu, tedy prázdnou množinu, má smysl určovat čísla $V(k,n)$, $K(k,n)$ a $P(k)$ i pro $k=0$.
Zřejmě $V(0,n)=K(0,n)=V(0,0)=K(0,0)=P(0)=1$.

Definice 7.1.3
Pro všechna přirozená čísla n označme $P(n)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$
(čteme n faktoriál).

Odtud

$$V(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!} \qquad K(k,n)=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \qquad P(n)=n!$$

Pro obecnou platnost těchto vztahů je vhodné dodefinovat $0!=1$.