7.2 Pravděpodobnost

Teorie pravděpodobnosti studuje zákonitosti náhodných událostí.

Pokusy – deterministické – za daných podmínek nastává konkrétní určitý výsledek
- náhodné – nejednoznačnost výsledku za daných podmínek

7.2.1 Základní pojmy

Náhodný pokus – pokus, jehož výsledek závisí na náhodě
Výsledek náhodného pokusu – nastalá konkrétní „hodnota" při náhodném pokusu
- obvykle značíme ω_i

Množina všech výsledků náhodného pokusu - obvykle značíme Ω
Náhodný jev – libovolná podmnožina množiny Ω
- značíme $A, B, C, ...$
- zřejmě $A \subseteq \Omega$

Na náhodné jevy můžeme proto nahlížet jako na množiny a mnohé znalosti o množinách převádíme do pravděpodobnostní oblasti s obměnou terminologie

$A, B, ...$	náhodné jevy
$\omega \in A$	výsledek ω náhodného pokusu je příznivý jevu A
$A \cap B$	průnik náhodných jevů A, B
$A \cup B$	sjednocení náhodných jevů A, B
A'	jev opačný k náhodnému jevu A (přesněji A'_Ω)
$\emptyset$	nemožný jev
Ω	jistý jev
$A \cap B = \emptyset$	neslučitelné jevy

Věta 7.2.1
Pokud je množina všech výsledků náhodného pokusu konečná tj. $|\Omega| = n$, kde $n \in N_0$, potom existuje 2^n různých náhodných jevů, které lze uvažovat.

7.2.2 Pravděpodobnost

Definice 7.2.2.1 Klasická pravděpodobnost

A priori definice
Pokud je množina Ω všech výsledků náhodného pokusu konečná, přičemž obsahuje n stejně možných výsledků, pak pokud $n(A)$ je počet výsledků příznivých jevu A, řekneme, že pravděpodobnost p náhodného jevu A je dána vztahem $p(A) = \frac{n(A)}{n}$.

A posteriori definice
Jestliže daný náhodný pokus opakujeme za stejných podmínek ν - krát a v μ případech nastal výsledek příznivý, pak relativní četností nazveme poměr $\frac{\mu}{\nu}$. Pravděpodobností p jevu A pak nazveme číslo $p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mu}{\nu}$.

Vlastnosti pravděpodobnosti

I. $p(\emptyset)=0$ a $p(\Omega)=1$

II. $\forall A\subset\Omega, A\neq\emptyset: 0<p(A)<1$

III. $\forall A\subseteq\Omega: p(A')=1-p(A)$

IV. $\forall A,B\in\Omega, A\subseteq B: p(A)\leq p(B)$

V. $\forall A,B\in\Omega: p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

V′. Princip inkluze a exkluze

$\forall A_i\in\Omega, i=1,2,\ldots,n:$

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)-\sum_{i<j}p(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}p(A_i\cap A_j\cap A_k)+\ldots+(-1)^{n+1}p(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

VI. Podmíněná pravděpodobnost
Pokud je B náhodný jev pro který $p(B)>0$.Potom pravděpodobnost nastání jevu A za podmínky, že nastal náhodný jev B je dána vztahem $p(A|B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

Definice 7.2.2.2

Jestliže A,B jsou náhodné události, pro které platí, že $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$, potom říkáme, že náhodné jevy A,B jsou navzájem nezávislé.

V tomto případě podmíněná pravděpodobnost $p(A|B)=p(A)$, resp. $p(B|A)=p(B)$ a nezávisí na pravděpodobnosti náhodného jevu B , resp. A.

Geometrická pravděpodobnost

Nechť množina všech možných výsledků náhodného pokusu je nekonečná. Pokud lze výsledkům přiřadit bijekcí geometrickou množinu v rovině nebo v prostoru o obsahu resp. objemu $|\Omega|$ a zároveň odpovídá ve stejném zobrazení náhodnému jevu A množina o obsahu resp. objemu $|A|$, potom je pravděpodobnost jevu A rovna $p(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}$.