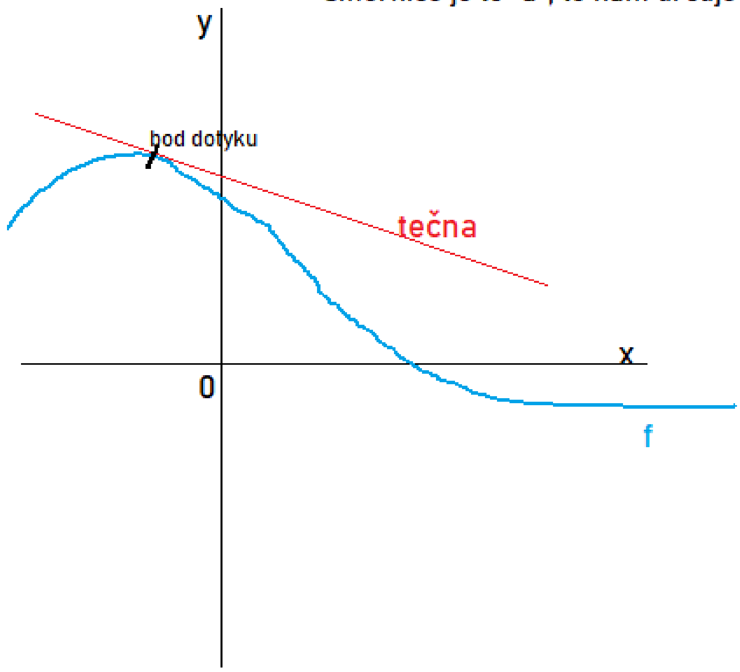
DERIVACE = směrnice tečny funkce

tečna je lineární funkce, takže má basic předpis y = ax + b

směrnice je to "a", to nám určuje směr



Jak se derivace počítají (to je základ, bez toho se nehneš, prostě soupis aplikovatelných vzorečků):

$f: y = c \quad c \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 0$

$f: y = x \qquad f'(x) = 1$

$f: y = x^2 \qquad f'(x) = 2x$

$f: y = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2$

$f: y = x^n \quad n \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f: y = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2}$

$f: y = \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad n \in \mathbb{N} \qquad f'(x) = -n \frac{1}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$

$f: y = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$f: y = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

$f: y = \operatorname{tg} x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f: y = \operatorname{cotg} x \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$f: y = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

$(a \cdot f)'(x) = a \cdot f'(x); \quad a \in \mathbb{R}$

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{vnější}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{vnitřní}}$

$\circ$ = dosadíme g do f

$f: y = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$f: y = a^x \qquad f'(x) = a^x \cdot \ln a$

$f: y = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$f: y = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Derivace funkce v bodě (= máš zadaný bod, pro který tu derivaci počítáš):
- derivace pro funkci *f* se značí *f'*

derivace v bodě

derivace fce v bodě

př: $f: y = x$; určit $f'(x_0)$; $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

př: $f: y = 3x - 1$; určit $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(3x-1) - (3x_0 - 1)}{x - x_0} = \frac{3x - 1 - 3x_0 + 1}{x - x_0} = \frac{3(x - x_0)}{x - x_0} = 3$$

Jinak se derivace počítají pro celé funkce, tj. že pro celou funkci vypočítáš předpis (vlastně vznikne ti předpis další funkce), do kterého když dosadíš, tak ti vyjde derivace pro ten který konkrétní bod.

Derivace, pak derivace součinu, podílu a složené funkce:

ZÁKLADNÍ DERIVACE (za použití dřív uvedených vzorečků).

př: $f: \; y = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$3-1 \qquad 2\cdot 1 \qquad x^0 \cdot 1$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x^2 - 5 \cdot 2 \cdot x^1 + 7 - 0$$

DERIVACE SOUČINU:

$$(f \cdot g)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

zderivovaný f · nezderivovaný g + nezderivovaný f · zderivovaný g

př: $f: y = \underbrace{x^3}_{f} \cdot \underbrace{\ln|x|}_{g}$

$$f'(x) = (x^3)' \cdot \ln|x| + x^3 \cdot (\ln|x|)' =$$
$$= 3x^2 \cdot \ln|x| + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$
$$= x^2 \cdot (3\ln|x| + 1)$$

DERIVACE PODÍLU:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

př: $f: y = \frac{x^4+1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{(x^4+1)'\cdot x^2 - (x^4+1)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{4x^3\cdot x^2 - (x^4+1)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{4x^5 - 2x^5 - 2x}{x^4} = 2x - \frac{2}{x^3}$$

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

- zderivovaná vnější · zderivovaná vnitřní funkce

např: $y = \underline{\sin}\,\underline{(3x^2+2)}$

vnější

namísto jednoho argumentu celý výraz ⇒ vnitřní

př: $f: y = \sin(3x^2+2)$

$$f'(x) = (\sin(3x^2+2))'\cdot(3x^2+2)' =$$

$$= \cos(3x^2+2)\cdot 2\cdot 3x = \cos(3x^2+2)\cdot 6x$$

Ještě se počítá přímo rovnice tečny nebo sečny ke grafu, ne pouze derivace (její tečna).
(normála = kolmice k dané čáře, v našem případě k tečně, to se dělá přes vektorovou algebru)

Tečna ke grafu + normála k tečně

$f: y = -x^2 - 6x + 4 \quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -2x - 6$

$-2x - 6 = 0 \qquad y = -(-3)^2 - 6\cdot(-3) + 4$

$-2x = 6 \qquad y = 13$

$x = -3$

$V[-3; 13]$

tečna ke grafu s bodem dotyku $T[-2; ?]$:

$$\boxed{\begin{array}{l} t: y = kx + q \quad [x_0; y_0] \\ k = f'(x_0) \\ q \in \mathbb{R} \end{array}}$$

$f'(x_0) = f'(-2) = -2\cdot(-2) - 6 = -2$

$\Rightarrow k = -2$

$y_0 = -x_0^2 - 6\cdot x_0 + 4$

$y_0 = -(-2)^2 - 6\cdot(-2) + 4$

$y_0 = 12 \qquad \Rightarrow T[-2; 12]$

$y = kx + q$

$12 = (-2)\cdot(-2) + q$

$q = 8$

$\Rightarrow y = -2x + 8$

normála:

$y = -2x + 8 \qquad [-2; 12]$

$2x + y - 8 = 0$

$\vec{n}_t = (2; 1) \qquad -x + 2y + c = 0$

$\Downarrow \qquad -(-2) + 2\cdot 12 + c = 0$

$\vec{n}_n = (-1; 2) \qquad c = -26$

$-x + 2y - 26 = 0$

Sečna:

sečny ke grafu

př.: $y = \log x \quad D_f = \mathbb{R}^+$, najít sečnu, která protíná graf v bodech $[1; f(1)]$ a $[10; f(10)]$

$$y_1 = \log 1 = 0 \quad \Rightarrow [1; 0]$$
$$y_2 = \log 10 = 1 \quad \Rightarrow [10; 1]$$

$$y = ax + b$$
$$1 = a \cdot 10 + b \quad \Rightarrow b = 1 - 10a$$
$$0 = a \cdot 1 + b \quad \Rightarrow b = -a$$

$$1 - 10a = -a$$
$$1 = 9a$$
$$a = \frac{1}{9}$$
$$b = -\frac{1}{9}$$

$$y = \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}$$

Toť asi k základům derivace vše. Inverzní funkcí k derivacím je integrální počet, který nám právě ze směrnice tečny, z té derivace, sadou podobných vzorečků, jako jsou ty pro tohle, dá tu původní funkci, ke které jsme počítali tu tečnu.

Praktické využití derivací:
Derivací funkce můžeme zjistit (pomocí nulových bodů), kde se mění monotonie funkce (kde se mění z rostoucí na klesající a naopak) - když je derivace funkce záporná, funkce je klesající, když vyjde derivace kladně, funkce na daném intervalu stoupá.
Dává to celkem smysl, když "a" jakožto derivace funkce v předpisu funkce y = ax + b bude záporné, tečna povede dolů, takže graf na daném úseku musí být taky z kopce; když "a" bude kladné, čára povede do kopce, tudíž graf původní funkce také musí stoupat.

Lokální a globální extrémy

$$f(x): y = x^5 - 10x^3 + 40x$$

zderivuju

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 40$$

chci nulové body ⇒ kořeny zderivované fce

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2; \pm\sqrt{2}$$

a dosazuju opět do zderivované

		-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2	
$f'(x)$	+		−		+		−		+
f	↗		↘		↗		↘		↗

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

⇒ glob. extrémy nejsou

Zjištění vrcholu funkce

$$f: y = 3x^2 + 4x + 4$$

$$f'(x) = 6x + 4$$

hledáme, kdy se to rovná nule

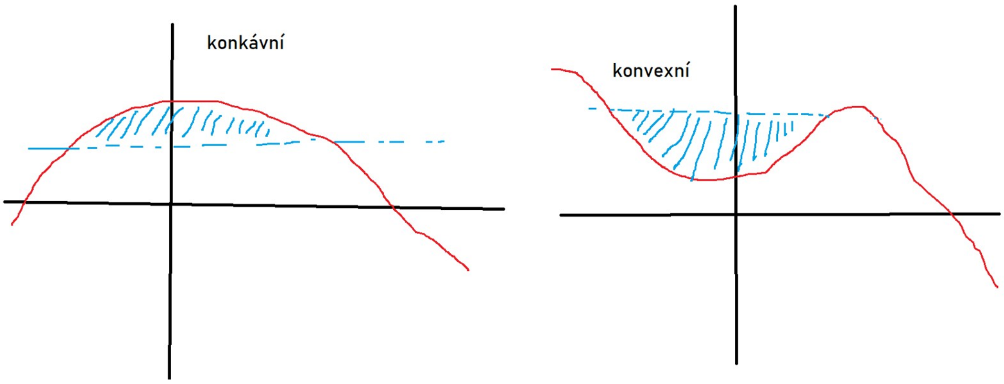
$$6x + 4 = 0$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

tohle vezmu, dosadím do původní rovnice fce

$$y = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 4$$
$$y = \frac{8}{3}$$

$$V\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

Pak existuje tzv druhá derivace. Použití je taky v souboru "základní aplikace", tady jenom stručný popis co to vlastně znamená. Druhou derivaci dostanu derivací již zderivované funkce. To znamená: mám nějakou funkci, tu zderivuju, a to zderivovaný co nám vyšlo zderivuju ještě jednou. Podle toho, jestli nám druhá derivace vyšla kladná nebo záporná, zjistím, jestli je derivace na daném úseku konvexní nebo konkávní.
konvexní = zakřivení U, konkávní = zakřivení ∩



Konvexnost + konkávnost

f: $y = \frac{x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1-x^2)' \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot ((1+x^2)^2)'}{(1+x^2)^4} = \dots = \frac{-2x \cdot (3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

nulové body:

$-2x(3-x^2) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = \pm\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}$ $\quad 0 \quad$ $\sqrt{3}$

$f''(x)$	−	+	−	+
f	∩	∪	∩	∪

inflexní bod = kde se konvexnost mění na konkávnost nebo naopak
- kde není def. druhá derivace
- kde druhá derivace je nulová

INFLEXNÍ BOD:

jedno z tohohle platí:
- konvexnost se mění na konkávnost
- není definovaná druhá derivace
- druhá derivace je nulová

STACIONÁRNÍ BOD:

= nulový bod derivací

BODY PODEZŘELÉ Z LOKÁLNÍHO EXTRÉMU:
- stacionární body
- body nespojitosti
- body, pro něž neexistuje derivace
- krajní body definičního oboru