Analytická geometrie - Geometrie v prostoru

Odchylka přímek a rovin

Odchylka dvou přímek

Definice

Odchylka přímek $p(P, \mathrm{u})$, $q(Q, \mathrm{v})$ je číslo $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, pro které platí:

$$\cos\varphi = \frac{|\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}|}{|\mathrm{u}||\mathrm{v}|}.$$

Úloha

Spočítejte odchylku dvou přímek $p(A; \mathrm{u})$ a $q(B; \mathrm{v})$, je-li $A[1; 6; 7]$, $B[4; -7; 4]$, $\mathrm{u} = (-7; -3; -8)$ a $\mathrm{v} = (0; 8; 9)$.

Řešení

- Dosadíme do vzorce a spočítáme $\cos\varphi$
  $$\cos\varphi = \frac{|(-7)\cdot 0 + (-3)\cdot 8 + (-8)\cdot 9|}{\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{0^2+8^2+9^2}} = \frac{|-96|}{\sqrt{17690}} \approx 0{,}72$$
- $\varphi \approx 44°$

Odchylka přímky a roviny

Odchylku přímky a roviny nepočítáme přímo, ale využijeme znalostí, které již máme.

Definice

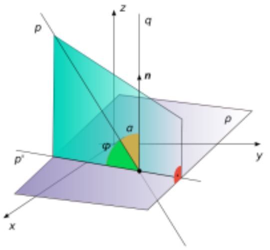
Je-li přímka p kolmá k rovině ρ, je jejich vzájemná **odchylka** $\varphi = \pi/2$.
Není-li přímka p kolmá k rovině ρ, je jejich **odchylka** rovna odchylce přímky p a průsečnice p' rovin ρ a ψ, kde $p \in \psi$ a $\rho \perp \psi$.

Poznámka

Ještě jednodušší je, sestrojit kolmici q k rovině ρ a počítat odchylku α přímek p a q. Vztah mezi hledanou a získanou odchylkou je: $\varphi = \pi/2 - \alpha$.

Pro výpočet odchylky φ přímky $p(A, \mathrm{u})$ a roviny $\rho(B, \mathrm{n})$ můžeme použít vzorec:

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{|\mathrm{u}\cdot\mathrm{n}|}{|\mathrm{u}||\mathrm{n}|}, \varphi \in \langle 0°; 90° \rangle.$$



Obr. 4.8: Odchylka přímky a roviny

Úloha

Spočítejte odchylku přímky $p(A; \mathrm{u})$ a roviny ρ: $-4x + 7y + 8 = 0$, je-li $A[-6; 4; -4]$, a $\mathrm{u} = (8; 6; 7)$.

Řešení

- Využijeme toho, že odchylka φ přímky p a roviny ρ je rovna $\pi/2 - \alpha$, kde α je odchylka kolmice na rovinu ρ a přímky p. Kolmice k rovině ρ má směrový vektor roven normálovému vektoru roviny ρ, který můžeme jednoduše určit z obecné rovnice této roviny.
- Dosadíme do vzorce a spočítáme $\cos\alpha$
  $$\cos\alpha = \frac{|(-4)\cdot 8 + 7\cdot 6 + 0\cdot 7|}{\sqrt{(-4)^2+7^2+0^2}\cdot\sqrt{8^2+6^2+7^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{9685}} \approx 0{,}10$$
- $\alpha \approx 84°$.
- $\varphi = \pi/2 - \alpha \approx 90° - 84° \approx 6°$.

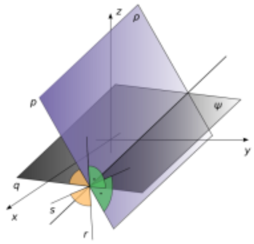
Odchylka rovin

Definice

Odchylka rovin ρ a ψ, je rovna odchylce přímek p a q, pro které platí $p = (\rho \cap \sigma)$, $q = (\psi \cap \sigma)$, kde σ je rovina kolmá na ρ i ψ.

Slovy bychom výše uvedenou definici mohli rozepsat takto:
Odchylku φ dvou rovin ρ a ψ, vypočítáme následujícím způsobem. Nejprve najdeme rovinu, která je k oběma kolmá . Tato rovina protne roviny ρ a ψ v přímkách p a q. Odchylka φ rovin ρ a ψ je rovna odchylce přímek p a q.

Podobně jako když jsme hledali odchylku přímky a roviny, můžeme využít normálových vektorů rovin ρ a ψ. Na *obr. 4.9* je vidět, že přímky r a s svírají úhel stejné velikosti jako p a q. Odchylku dvou rovin můžeme tedy snadno určit pomocí jejich normálových vektorů.



Obr. 4.9: Odchylka dvou rovin

Poznámka

Pro výpočet odchylky φ dvou rovin $\rho(A, n_\rho)$ a $\psi(B, n_\psi)$ můžeme použít vzorec vyplývající z předchozí úvahy:

$$\cos\varphi = \frac{|n_\rho n_\psi|}{|n_\rho|\,|n_\psi|}, \varphi \in \langle 0°; 90° \rangle.$$

Úloha

Spočítejte odchylku rovin ρ: $2x - 4y + 2z - 4 = 0$ a σ: $6x + 6y - 3y - 6 = 0$.

Řešení

- Normálové vektory rovin ρ i σ známe. Víme, že odchylka dvou rovin se rovná odchylce jejich normálových vektorů, můžeme tedy rovnou počítat jejich odchylku φ.
- Dosadíme do vzorce a spočítáme $\cos\varphi$
  $$\cos\varphi = \frac{|2\cdot 6 + (-4)\cdot 6 + 2\cdot(-3)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2}} = \frac{|-18|}{\sqrt{1944}} \approx 0{,}41$$
- $\varphi \approx 66°$.