25. Aplikace diferenciálního a integrálního počtu

1 Monotonie funkce

1. Určete monotonii funkce:

$$\begin{aligned} f: &\quad y = x^2 - 2x + 3 \\ g: &\quad y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \\ h: &\quad y = x + \sin x \\ k: &\quad y = \frac{1}{x^2+1} \\ l: &\quad y = x \cdot \ln x \end{aligned}$$

2. Určete číslo a tak, aby funkce $f:\ y = x^3 + ax^2 + 3$ byla klesající právě na intervalu $(0;\, 4)$.

2 Extrémy funkce

Určete extrémy funkce:

$$\begin{aligned} f: &\quad y = x^3 + 6x^2 - 15x + 2 \\ g: &\quad y = \sin x - x \\ h: &\quad y = \ln(x^2 + 4x + 5) \\ m: &\quad y = \sin^2 x \end{aligned}$$

3 Konvexnost a konkávnost

1. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkcí:

$$\begin{aligned} f: &\quad y = 3x^4 - 4x^3 \\ g: &\quad y = \frac{1}{x^2+10} \\ h: &\quad y = x^2 \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

2. Najděte reálná čísla a, b tak, aby bod $x = 1$ byl inflexním bodem funkce

$$f: y = x^3 + ax^2 - 3x + b$$

4 Průběh funkce

Vyšetřete průběhy funkcí:

$$\begin{aligned} f: &\quad y = 4x^3 + 9x^2 - 12x - 1 \\ g: &\quad y = \cos^2 x \\ h: &\quad y = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

5 Slovní úlohy na extrémy

1. Vypočtěte rozměry obdélníku vepsaného do půlkruhu v závislosti na jeho poloměru r.
2. Je dán kvádr, jehož rozměry podstavy jsou v poměru $2 : 3$ a jehož objem je $1{,}5$ m^3. Určete jeho rozměry, aby jeho povrch byl minimální.
3. V prostoru je umístěn bodový světelný zdroj. Určete poloměr x koule, jejíž střed má od světelného zdroje pevnou vzdálenost a, tak, aby osvětlená část povrchu koule měla maximální obsah.

6 Výpočty obsahů

1. Určete obsah plochy ohraničeného souřadnými osami a grafem funkce $y = 2^x - 4$.
2. Určete obsah plochy omezené grafy funkcí $y = x^2 - 1$ a $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.
3. Určete obsah plochy omezené grafy funkcí $y = x + |x|$ a $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

7 Výpočty objemů

1. Pomocí integrálního počtu odvoďte vztah pro objem rovnostranného rotačního kuželu.
2. Pomocí integrálního počtu určete objem komolého rotačního kuželu s výškou 4 cm a poloměry podstav o délkách 3 cm a 5 cm.
3. Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru omezeného křivkami $y = \sin x$ a $y = 0$, kde $x \in \langle 0;\ \pi \rangle$.