3.Vektorová algebra

1.Pojem vektoru

1.1 Definice

1. Vektorem rozumíme každou orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ .Bod A se nazývá počáteční bod a bod B je koncovým bodem vektoru $\overrightarrow{AB}$.
2. Nulovým vektorem rozumíme vektor, u něhož počáteční bod splývá s koncovým bodem.Značíme jej **O**.
3. Délkou (velikostí) vektoru $\overrightarrow{AB}$ rozumíme délku úsečky AB.Nulovému vektoru přiřazujeme nulovou délku.

1.2 První rozdělení vektorů

1. Volný vektor je určen velikostí, směrem a orientací, přičemž jeho počáteční bod může být umístěn v kterémkoli bodě prostoru.
2. Klouzavý vektor je určen velikostí, směrem, orientací a přímkou p, na níž leží.Jeho počáteční bod může ležet v kterémkoli bodě přímky p.
3. Vázaný vektor je určen velikostí, směrem, orientací a pevně určeným počátečním bodem.Vázané vektory vycházející ze stejného počátečního bodu budeme nazývat centrálními vektory.

1.3 Druhé rozdělení vektorů

1. Vektory ležící na rovnoběžných přímkách (nebo na téže přímce) se nazývají kolineární.
2. Vektory ležící v rovnoběžných rovinách (nebo v téže rovině) se nazývají komplanární.

2. Operace s vektory

2.1 Rovnost vektorů

Vektory **a, b** jsou sobě rovné, mají-li tyto dvě vlastnosti:

1. Jsou kolineární a mají touž orientaci
2. Mají stejnou délku

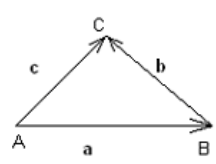
2.2 Součet vektorů

Součtem vektorů **a, b** nazýváme vektor **c**, jehož souřadnice jsou výsledky součtů souřadnic původních vektorů.Píšeme: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

Pro sčítání vektorů platí tyto zákony:

1. komutativní zákon: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. asociativní zákon: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Vektor **c** také obdržíme, když v koncovém bodě B vektoru $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ sestrojíme vektor $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ a pak určíme vektor **c** jako $\overrightarrow{AC}$ .Viz Obr.1.



obr.1.Sčítání vektorů

2.3 Násobní vektoru číslem

Součinem vektoru **a** a reálného čísla k rozumíme vektor **b**, který značíme $k \cdot \mathbf{a}$, a který má tyto vlastnosti:

1. Je kolineární s vektorem **a**
2. Má délku $|\mathbf{b}| = |k| \cdot |\mathbf{a}|$
3. Při k větší než 0 má touž orientaci, při k menší než 0 má opačnou orientaci než vektor **a**

Pro součin vektoru a reálného čísla platí tyto zákony:

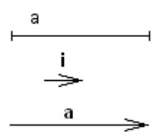
1. Komutativní zákon: $k \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot k$
2. Asociativní zákon: $k_1 \cdot (k_2 \cdot \mathbf{a}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \mathbf{a}$
3. Distributivní zákon I: $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$
4. Distributivní zákon II: $(k_1 + k_2) \cdot \mathbf{a} = k_1 \cdot \mathbf{a} + k_2 \cdot \mathbf{a}$

2.4 Odčítání vektorů

Vektor, který je třeba přičíst k vektoru **a** abychom dostali nulový vektor **0**, se nazývá opačný vektor k vektoru **a** a značí se **-a**. Rozdíl **a - b** vektorů **a, b** definujeme vztahem: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

2.5 Jednotkový vektor

Vektor délky rovné jedné se nazývá jednotkový.Je-li $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ nenulový vektor a **i** jednotkový vektor, který je kolineární a téže orientace jako vektor **a**, pak platí: $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{i}$. Jak ukazuje Obr.2.



Obr.2. Jednotkový vektor

2.6 Souřadnicová soustava v prostoru

2.6.1 Definice:

Mějme kartézskou soustavu Oxyz, kde O je počátkem soustavy a x, y, z jsou souřadnicové osy.Nechť **i, j, k** jsou jednotkové vektory na osách x, y, z, jsou stejně orientované a vycházejí z počátku O.Tyto vektory budeme nazývat základními vektory.

2.7 Souřadnice a složky vektoru

2.7.1 Definice

Mějme kartézskou soustavu souřadnic se základními vektory a libovolný bod A = (x; y; z). Vektory $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OA_1} = x\mathbf{i}, \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OA_2} = y\mathbf{j}, \mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OA_3} = z\mathbf{k}$ nazýváme složkami vektoru $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$.Čísla x, y, z nazýváme souřadnicemi vektoru **r**.

2.7.2 Délka vektoru

Délkou vektoru **r** rozumíme velikost úsečky OA. Platí: $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0.$

2.7.3 Věta

Pro vektory $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3), \mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ platí:

1. $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$,
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$,
3. $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$,
4. $m \cdot \mathbf{a} = (ma_1; ma_2; ma_3)$, kde m je libovolné reálné číslo.

2.8 Skalární součin vektorů

2.8.1 Definice

Úhlem nenulových vektorů **a, b** rozumíme neorientovaný, nekonvexní úhel φ , který svírají příslušné centrální vektory.

2.8.2 Definice1

Skalárním součinem nenulových vektorů **a, b** rozumíme skalár, který dostaneme ze vztahu: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$ .Je-li alespoň jede vektor nulový platí: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Pro vektory $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3), \mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ platí: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

2.8.3

Z předcházející definice snadno odvodíme vztah pro výpočet úhlu φ dvou nenulových vektorů **a, b**.Platí vztah: $\cos\varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$.
Dva nenulové vektory **a, b** jsou kolmé, právě když $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Vlastnosti skalárního součinu:

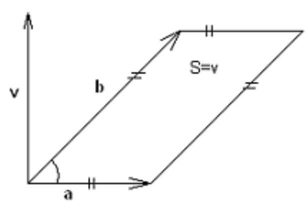
1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$,
3. $(m \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = m \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,
4. $m_1 \cdot a^0 \cdot m_2 \cdot a^0 = m_1 \cdot m_2$,
5. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$,
6. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

2.9 Vektorový součin vektorů

2.9.1 Definice

Jsou-li vektory **a, b** nenulové, rozumíme jejich vektorovým součinem vektor $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, který má tyto vlastnosti (Obr.3.):

1. Je kolmý k rovině již tvoří centrální vektory **a, b**.
2. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$.
3. Uspořádaná skupina vektorů **a, b, v** tvoří pravotočivou soustavu.



Obr.3.Vektorový součin

2.9.2 Poznámka

1. Je-li aspoň jeden z vektorů **a, b** nulový, pak je i jejich vektorový součin roven nule.
2. Vektorový součin dvou nenulových vektorů **a, b** je nulovým vektorem právě tehdy, když vektory **a, b** jsou kolineární.

Vlastnosti vektorového součinu

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$,
2. $m_1\mathbf{a} \times m_2\mathbf{b} = m_1 m_2 (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Pro základní vektory i, j, k platí:

1. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$,
2. $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$,
3. $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$,
4. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$,
5. $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$,
6. $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$,
7. $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$,
8. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$,

Pro vektory $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3), \mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ platí:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

2.10 Smíšený součin vektorů

2.10.1 Definice

Smíšeným součinem tří vektorů **a, b, c** rozumíme skalárně-vektorový součin tvaru $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.Značíme jej $[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}]$.

Pro vektory $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3), \mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3), \mathbf{c} = (c_1; c_2; c_3)$ je smíšený součin

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pro smíšený součin platí tyto vztahy: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

2.10.2 Věta

Nechť vektory **a, b, c** jsou nekomplanární.Rovnoběžnostěn vytvořený z příslušných centrálních vektorů má objem $V_1 = |\Delta|$, kdežto příslušný čtyřstěn má objem

$$V_2 = \frac{1}{6}\cdot|\Delta|$$

, přičemž

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$