Analytická geometrie - Geometrie v prostoru

Obecná rovnice roviny

Obecná rovnice roviny je další způsob vyjádření roviny v prostoru. Obecná rovnice roviny v prostoru je podobná obecné rovnici přímky v rovině.

Definice

Rovnice
$ax + by + cz + d = 0$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,
kde alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, se nazývá **obecná rovnice** roviny.

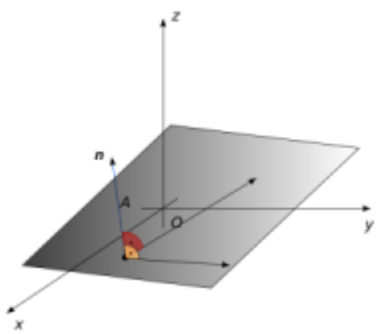
Poznámka

Všechny body $X[x; y; z]$, které splňují nějakou obecnou rovnici roviny tvoří rovinu a naopak každá rovina je určena nějakou obecnou rovnicí.

Z obecné rovnice roviny snadno zjistíme, jaké body v této rovině leží - jsou to všechny ty, jejichž souřadnice tuto rovnici splňují. Zajímavější a složitější bude zjistit, jak pro zadanou rovinu, určíme její obecnou rovnici. Stejně jako v předcházející kapitole, kdy jsme hledali obecnou rovnici přímky, k tomu budeme využívat normálový vektor.

Definice

Vektor n, který je kolmý ke všem vektorům ležícím v rovině, nazýváme **normálovým vektorem** této roviny.



Obr. 4.3: Normálový vektor roviny

Z definice a *obr. 4.3* plyne, že rovinu můžeme určit jedním bodem a jejím normálovým vektorem. Toho využijeme a vyslovíme následující větu.

Věta

V obecné rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny δ, určené bodem $P[p1; p2; p3]$ a normálovým vektorem n = $(n1; n2; n3)$, odpovídají koeficienty a, b, c souřadnicím jejího normálového vektoru n; $a = n1$, $b = n2$ a $c = n3$.

Úmluva: Rovinu ρ, určenou bodem A s normálovým vektorem n, budeme zapisovat jako $\rho(A, n)$.

Příklad 4.4

Určete obecnou rovnici roviny *ABC*, kde *A*[2; -2; 1], *B*[1; -1; 4] a *C*[0; 0; 1].

Řešení

- Nejprve určíme normálový vektor této roviny. Ten vypočítáme jako vektorový součin vektorů AB a AC. AB = (-1; 1; 3), AC = (-2; 2; 0),
  AB × AC = (-6; -6; 0).
- Podle předcházející věty tento vektor určuje koeficienty *a*, *b*, *c* obecné rovnice roviny *ABC*. Ta pak vypadá následovně:
  $-6x - 6y + 0z + d = 0$.
- Zbývá dopočítat koeficient *d*. Ten získáme, dosadíme-li do rovnice souřadnice některého z bodů *A*, *B*, *C*. Pro jednoduchost zvolíme bod *C* a dojdeme k $d = 0$. Hledaná obecná rovnice má tvar:
  $-6x - 6y = 0$.
- Výslednou rovnici si snadno můžeme ověřit dosazením souřadnic bodů *A* a *B*.

Mějme na souřadnicových osách dány body *P*[*p*; 0; 0], *Q*[0; *q*; 0] a *R*[0; 0; *r*], které jsou různé od počátku. Rovina *PQR* má potom rovnici:

xp+yq+zr=1.

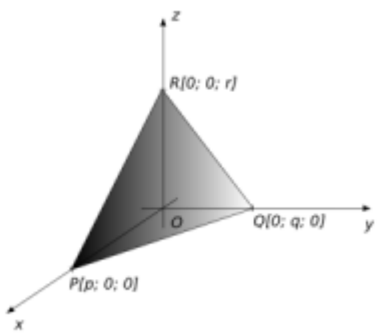
Definice

Rovnice

xp+yq+zr=1;p·q·r≠0,p,q,r∈R

se nazývá **úsekový tvar** rovnice roviny.

Z úsekového tvaru rovnice roviny tedy můžeme velmi jednoduše vyčíst průsečíky roviny se souřadnicovými osami nebo naopak z průsečíků se souřadnicovými osami můžeme snadno zjistit rovnici roviny, která osy v daných bodech protíná.



Obr. 4.4: Průsečíky roviny se souřadnicovými osami

Poznámka

Rovnici roviny v úsekovém tvaru lze psát právě tehdy, když rovina není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou a neprochází počátkem.

Příklad 4.5

1. Najděte úsekový tvar rovnice roviny: $x = 2 - 2s$, $y = 3 + 3t$, $z = 1 - t - s$; $t, s \in \mathbb{R}$.
2. Převeďte obecnou rovnici roviny: $5x - 8y - 6z + 11 = 0$ na parametrické vyjádření.
3. Určete obecnou rovnici roviny, která je dána parametricky: $x = 2 + 2t - s$, $y = 3 - t + 3s$, $z = -1 - 2t -$

s; $s, t \in \mathbb{R}$.

Řešení

1.
   - Úsekový tvar umíme určit z průsečíků roviny se souřadnicovými osami. Ty se pokusíme najít.
   - Průsečík s osou x musí mít y-ovou a z-ovou souřadnici rovnu nule, tedy
     $3 + 3t = 0$,
     $1 - t - s = 0$.
     Z první rovnice přímo vyjádříme $t = -1$. Po dosazení do rovnice druhé dopočítáme $s = 0$. Tyto hodnoty parametrů odpovídají bodu $P[2; 0; 0]$.
   - Průsečík s osou y musí mít x-ovou a y-ovou souřadnici rovnu nule, budeme řešit soustavu:
     $2 - 2s = 0$,
     $1 + t - s = 0$.
     Z první rovnice vyjádříme $s = 1$ a po dosazení do rovnice druhé dopočítáme $t = 0$. Hodnotám parametrů $s = 1$, $t = 0$ odpovídá bod $Q[0; 3; 0]$.
   - Nakonec nalezneme průsečík s osou z. Ten má nulovou x-ovou a y-ovou souřadnici. Vyřešíme soustavu:
     $2 - 2s = 0$,
     $3 + 3t = 0$.
     Tuto soustavu vyřešíme. Jejím řešením je $s = 1$, $t = -1$. To odpovídá bodu $R[0; 0; 1]$.
   - Protože průsečíky se všemi souřadnicovými osami existují, jsou to $P[2; 0; 0]$, $Q[0; 3; 0]$ a $R[0; 0; 1]$, můžeme zapsat úsekový tvar rovnice roviny:
     x2+y3−z=1.

2.
   - K získání parametrického vyjádření roviny potřebujeme znát jeden její bod a dva vektory, které v ní leží, přičemž jeden nesmí být násobkem druhého. Z obecné rovnice sice vyčteme souřadnice normálového vektoru, ale ty v tomto případě nemůžeme nijak využít. Místo toho využijeme obecnou rovnici roviny k tomu, abychom našli nějaké tři nekolineární body A, B, C této roviny.
   - Pro bod A zvolíme $x = 1$, $y = 2$ a dopočítáme z obecné rovnice roviny jeho z-ovou souřadnici, $A[1; 2; 0]$. Podobně určíme body $B[5; 3; 2]$ a $C[1; -1; 4]$. Tyto body jsou nekolineární.
   - Pro určení parametrické rovnice roviny použijeme bod A a vektory AB, AC:
     AB = (4; 1; 2),
     AC = (0; -3; 4).
   - Parametrickou rovnici pak můžeme psát jako:
     $x = 1 + 4t$,
     $y = 2 + t - 3s$,
     $z = 2t + 4s$; $s, t \in \mathbb{R}$.

3.
   - Z parametrického vyjádření můžeme určit souřadnice jednoho bodu roviny a dvou jejích vektorů. Tím bodem je bod $A[2; 3; -1]$ a vektory jsou u = (2; -1; -2), v = (-1; 3; -1). Normálový vektor roviny je kolmý ke všem vektorům roviny a tedy i k vektorům u a v. Takovou vlastnost má vektor w = u × v, který vypočítáme:
     u × v = (2; -1; -2) × (-1; 3; -1) = (7; 4; 5).
   - Obecnou rovnici roviny můžeme zapsat jako
     $7x + 4y + 5z + d = 0$.
     Po dosazení souřadnic bodu A do této rovnice dopočítáme $d = -21$. Hledaná obecná rovnice zadané přímky je:
     $7x + 4y + 5z - 21 = 0$.