8.5 Komplexní čísla

Zopakujme a doplňme k poznatkům o reálných číslech.

Pro libovolná reálná čísla a,b,c platí:

			sčítání $\oplus$	násobení $\otimes$
uzavřenost	U	$\forall a,b \in R:$	$a+b \in R$	$a \cdot b \in R$
neutrální prvek	NP	$\forall a \in R:$	$a+n=a$ $(n=0)$	$a \cdot e = a$ $(e=1)$
komutativnost	K	$\forall a,b \in R:$	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
asociativnost	A	$\forall a,b,c \in R:$	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
distributivnost	D	$\forall a,b,c \in R:$	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	
inverzní prvek	IP	$\forall a \in R:$	$\exists a^{-1} \in R: a+a^{-1}=0$ $\left(a^{-1}=-a\right)$	$\exists a^{-1} \in R: a \cdot a^{-1} = 1, a \neq 0$ $\left(a^{-1}=\frac{1}{a}\right)$

Definice 8.5.1
Množina A na níž jsou definovány dvě binární operace (sčítání a násobení $(\oplus,\otimes)$), které mají vlastnosti U, NP, K, A, D, IP , tedy struktura $(A,\oplus,\otimes)$ se nazývá těleso.

Věta 8.5.1
Struktura $(R.+,\cdot)$ je těleso.

Definice 8.5.2 Komplexních čísel
Komplexním číslem nazýváme libovolnou uspořádanou dvojici reálných čísel $[a,b]$. Množinu všech reálných čísel značíme C a zřejmě $C = R \times R$. Dále definujeme:

1) $\forall [a,b],[c,d] \in C: [a,b] \oplus [c,d] = [a+c, b+d]$
2) $\forall [a,b],[c,d] \in C: [a,b] \otimes [c,d] = [ac-bd, ad+bc]$

Věta 8.5.2
Struktura $(C,\oplus,\otimes)$ je těleso.

Definice 8.5.3
Každé komplexní číslo $[a,0]$ lze ztotožnit s reálným číslem a.
V komplexním čísle $z=[a,b]$ nazveme a reálnou složkou (částí) $\operatorname{Re} z$ a b imaginární složkou (částí) $\operatorname{Im} z$ komplexního čísla z.
Číslo $[a,b]$, kde $b \neq 0$ je číslo imaginární.
Číslo $[0,b]$, kde $b \neq 0$ je číslo ryze imaginární.
Číslo $[0,1]$ označujeme i a nazýváme (ryze) imaginární jednotkou.

Věta 8.5.3
Zřejmě: $\forall n \in N_0 : i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$

Věta 8.5.4
Každé komplexní číslo $[a,b]$ lze psát v tzv. algebraickém tvaru $[a,b] = a+bi$.

Komplexní čísla znázorňujeme v rovině, kdy $\operatorname{Re} z$ představuje x-ovou souřadnici a $\operatorname{Im} z$ y-ovou souřadnici. Hovoříme o tzv. komplexní nebo Gaussově rovině.

Definice 8.5.4
Absolutní hodnotou komplexního čísla $z = [a,b] = a + bi$ rozumíme reálné číslo
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Geometrický význam absolutní hodnoty z komplexního čísla z je vzdálenost jeho obrazu od počátku v Gaussově rovině.

Vlastnosti absolutní hodnoty:
1) $\forall z \in C : |z| \geq 0$
2) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3) $\forall a,b \in C : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4) $\forall a,b \in C, b \neq 0 : \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Všechna komplexní čísla jejichž absolutní hodnota se rovná 1 ,
se nazývají komplexní jednotky. Jejich obrazy vyplní jednotkovou kružnici.

Množinu komplexních čísel C nelze uspořádat.

Někdy nazýváme absolutní hodnotu komplexního čísla z modulem komplexního čísla z .

Protože každý bod v rovině o kartézských souřadnicích $[a_1, a_2]$ lze určit též pomocí polárních souřadnic $[|a|, \alpha]$, lze komplexní čísla vyjádřit též v tzv. goniometrickém tvaru.

Věta 8.5.5 Goniometrický tvar komplexního čísla
Pro všechna komplexní čísla z platí: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, kde $|z|$ je modul komplexního čísla a φ jeho argument, který není určen jednoznačně. Pro základní argument je $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Poznámka:
Pokud je φ argument komplexního čísla z , potom je jeho argumentem též libovolné číslo z množiny $\{\varphi + 2k\pi\}$, kde $k \in Z$.

Nechť $a = |a| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ a $b = |b| \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta)$ jsou dvě libovolná komplexní čísla. Potom:

1) $a \cdot b = |a \cdot b| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta))$

2) $\frac{a}{b} = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \sin(\alpha - \beta)), b \neq 0$

Věta 8.5.6 Moivrova věta
$\forall n \in N : \forall \varphi \in R : (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi$

Definice 8.5.5
Pokud je dáno komplexní číslo $z = a + b \cdot i$, potom číslo $a - b \cdot i$ nazýváme komplexně sdruženým číslem k číslu z a značíme jej $\bar{z}$.

Vlastnosti komplexně sdružených čísel
1) $\bar{\bar{z}} = z$
2) $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re} z$
3) $z - \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Im} z$
4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Příklad
Určete čemu se rovná $\frac{z}{\bar{z}}$, $\frac{\bar{z}}{z}$, $\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} - \overline{b}$, $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$.

Poznámka :
Exponenciální tvar komplexního čísla $[a,b] = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

Věta 8.5.7 Mocniny a odmocniny komplexních čísel
Pokud je libovolné komplexní číslo $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$,
pak pro každé přirozené číslo n zřejmě platí: $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$
a zároveň $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$, kde $k \in \{0,1,2,..., (n-1)\}$.

Navíc obrazy všech $\sqrt[n]{z}$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníku, vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměru $\sqrt[n]{|z|}$. (Pro $n = 1,2$ samozřejmě nikoli.)

Řešení rovnic v oboru komplexních čísel

I. Řešení kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel

a) $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, $a,b,c \in R, a \neq 0$
aa) rovnice bez absolutního členu

$c = 0 \quad a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \qquad x(a \cdot x + b) = 0 \qquad x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$

ab) ryze kvadratická rovnice

$b = 0 \quad a \cdot x^2 + c = 0 \qquad a \cdot c < 0 \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$a \cdot c > 0 \qquad x_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

ac) úplná kvadratická rovnice

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad D = b^2 - 4ac \qquad D > 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

$D < 0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

b) $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, $a, b, c \in C, a \neq 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

kde $\sqrt{b^2 - 4ac}$ je jedna ze dvou druhých odmocnin komplexního čísla $b^2 - 4ac$.

I v oboru komplexních čísel platí Vietovy vztahy.

II. Binomické rovnice v oboru komplexních čísel

$a \cdot x^n + b = 0$, $a, b \in C, a \neq 0$

Příklad

Řešte v množině a) reálných b) komplexních čísel

1) $x^3 - 1 = 0$ 2) $x^6 - 1 = 0$ 3) $x^5 - 1 = 0$

4) $(1 + i) \cdot x^5 = 1 - i$

III. Trinomické rovnice v oboru komplexních čísel

$a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$, $a, b, c \in C, a \neq 0$

Převedeme substitucí $s = x^n$, což představuje binomickou rovnici,
na kvadratickou rovnici $a \cdot s^2 + b \cdot s + c = 0$.

Příklad

Řešte v množině a) reálných b) komplexních čísel

$x^8 + 7 \cdot x^4 + 16 = 0$

IV. Algebraické rovnice

Algebraický polynom: $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$,

$a_i \in C, a_n \neq 0$, $i = 0,1,2,..., n$

Věta 8.5.8 Základní věta algebry

Každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty stupně $n \in N$ má vždy alespoň jeden komplexní kořen.

Libovolný mnohočlen n-tého stupně se rovná součinu lineárních kořenových činitelů. Vyskytuje-li se v uvedeném rozkladu dvojčlen $x-\alpha_i$ právě k-á krát, pak se α_i nazývá k-á násobný nulový bod polynomu.

$$P_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0=a_n\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)=$$
$$=a_n\cdot(x-\alpha_1)^{r_1}\cdot(x-\alpha_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{r_s}$$

Věta 8.5.9
Každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty stupně $n\in N$ má právě n kořenů, přičemž každý kořen se počítá se svou násobností.

Dále budeme uvažovat polynomy s reálnými koeficienty!
Věta 8.5.10
Má-li polynomická rovnice s reálnými koeficienty imaginární kořen, je jejím kořenem i číslo komplexně sdružené.

Věta 8.5.11
Každý mnohočlen s reálnými koeficienty lze rozložit na součin lineárních a kvadratických činitelů s reálnými koeficienty.

Komplexní funkce komplexní proměnné

S každou komplexní funkcí komplexní proměnné $w=f(z)$ je spojena vždy určitá transformace Gaussovy roviny.

Uveďme několik nejjednodušších:
I. $w=z+a$, $a\in C$
II. $w=C\cdot z$, $C\in R$
III. $w=z\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, $\varphi\in R$
IV. $w=a\cdot z$, $a\in C$
V. $w=\frac{1}{z}$
VI. $w=\frac{a\cdot z+b}{c\cdot z+d}$, $a,b,c,d\in C, a\cdot d\neq b\cdot c$

Poznámka
Věta: Eulerova
$\forall x\in R: e^{i\cdot x}=\cos x+i\cdot\sin x$

Pokud má funkce komplexní proměnné v nějaké oblasti první derivaci, má v této oblasti (oblastí v rovině nazveme otevřenou souvislou množinu) všechny derivace.(holomorfní fce)

Holomorfní funkci jde v každém bodě oblasti rozvinout v konvergentní Taylorovu řadu.