2
Reálné funkce jedné reálné proměnné

S funkcemi se setkáváme na každém kroku, ve všech přírodních vědách, ale i v každodenním životě. Každá situace, kdy jsou nějaký jev nebo veličina jednoznačně určeny jinými jevy nebo veličinami, se dá popsat pomocí funkce. Někdy je jednoduché takovou funkci sestavit. Snadno například dokážeme určit přírustek našich úspor ve spořitelně v závislosti na době spoření, pokud známe úrokou míru. Nebo dokážeme zjistit, jakou dráhu urazí automobil jedoucí známou rychlostí v závislosti na tom jak dlouho jede. Jindy je naopak skoro nemožné přijít nato, jak taková funkce vypadá, neboť nemáme dostatek informací o parametrech, které do jejího zápisu vstupují. Závisí-li zkoumaný jev na jediné veličině, jejíž hodnoty jsou reálné, hovoříme o funkci jedné reálné proměnné.

Definice 2.1. Nechť $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny A do množiny $\mathbb{R}$ ($f : A \to \mathbb{R}$) nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné* (dále jen *funkcí*). Množina A se nazývá *definiční obor funkce* f a značí se D_f.

Podle definice je funkce zobrazení, které každému $x \in A$ přiřadí právě jedno $y \in \mathbb{R}$, zapisujeme $y = f(x)$. Říkáme, že y je *hodnotou funkce f v bodě x*.

Definice 2.2. Množinu všech takových $y \in \mathbb{R}$, k nimž existuje $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$, nazýváme *obor hodnot* funkce f a označujeme H_f. Tj.

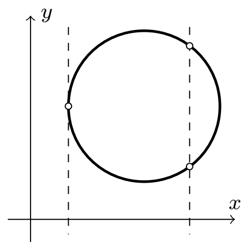
$$H_f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D_f \text{ takové, že } y = f(x)\}.$$

Definice 2.3. Je-li $y = f(x)$ nazýváme proměnnou x *nezávislou proměnnou* a proměnnou y *závislou proměnnou. Grafem* funkce rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ s vlastností $y = f(x)$.

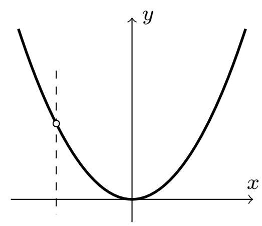
U rálných funkcí jedné proměnné hraje grafické znázornění funkce velkou roli. To souvisí s geometrickou interpretací pojmů uspořádaná dvojice, kartézský součin atd. Geometricky lze uspořádanou dvojici (x, y) chápat jako bod o souřadnicích x a y. Libovolnou množinu uspořádaných dvojic lze pak geometricky chápat jako množinu bodů v rovině. Aby množina v rovině byla grafem funkce, nesmí množina obsahovat body tvaru (x, y_1), (x, y_2), $y_1 \neq y_2$, tj. body, které leží nad sebou.

2.1 Zadání a graf funkce

Zadat funkci znamená udat její definiční obor a zobrazovací předpis. Často se stává, že je funkce zadána pouze předpisem a definiční obor není výslovně uveden. Pak pokládáme za definiční množinu všech takových $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný předpis „smysl“. Ukážeme jednotlivé možnosti na jednoduchém příkladu, kdy chceme hodnotám proměnné x z množiny D přiřadit jejich druhé mocniny.



Obrázek 2.1: Kružnice není grafem funkce



Obrázek 2.2: Parabola je grafem funkce

Zvolme pro náš příklad definiční obor výčtem, například

$$D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Nyní zadáme předpis:

- Zadání slovním předpisem: Předpis f přiřazuje každé z hodnot $x \in D_f$ její druhou mocninu.
- Zadání vzorcem: Jednoduchý vzorec $y = x^2$ pro $x \in D_f$ zadává zobrazení

$$f : D_f \ni x \to f(x) = x^2 \in \mathbb{R}.$$

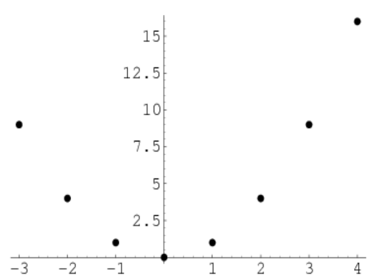
- Zadání tabulkou: Hodnoty obrazů pro všechny vzory z D_f vypíšeme do tabulky:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9	16

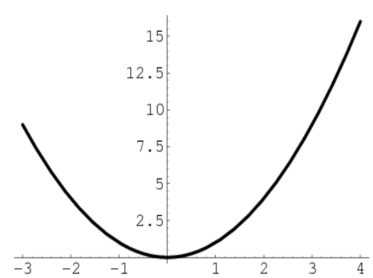
- Zadání grafem: Zadáme množinu

$$G_f = \big\{[x, f(x)] | x \in D_f\big\} = \big\{[x, x^2] : x \in D_f\big\}$$

tak, že dvojice $[x, f(x)]$ znázorníme jako body v rovině (obr. 2.3)



Obrázek 2.3: Zadání funkce grafem



Obrázek 2.4: Zadání funkce grafem

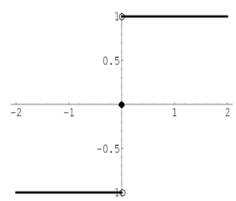
- Zadání pomocí rovnice, jíž funkce řešením, obecně $F(x, y) = 0$.
- Jiné způsoby zadání předpisu funkce přesahují v současnosti rámec našich znalostí, nebudeme se jim v textu věnovat.

Zadání definičního oboru je nepominutelnou součástí zadání funkce. Kdybychom například zadali funkci opět předpisem $y = x^2$, avšak za definiční obor stanovili uzavřený interval $D_f = [-3, 4]$, dostali bychom graf na obrázku 2.4. Jde o jinou funkci než na obrázku 2.3. Její úplnou tabulku bychom nedokázali napsat vůbec.

Příklad 2.4. Nakreslete graf funkce

$$f:\ y=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Graf:



Obrázek 2.5: $y=\operatorname{sign} x$

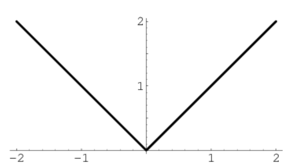
Tato funkce se nazývá *signum* a dále ji budeme značit sign, tj. $f: y=\operatorname{sign} x$. Přitom $D_f=\mathbb{R}$ a $H_f=\{-1,0,1\}$.

□

Příklad 2.5. Nakreslete graf funkce

$$f:\ y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geq 0.\end{cases}$$

Graf:



Obrázek 2.6: $y=|x|$

Tato funkce se nazývá *absolutní hodnota* a dále budeme používat zápis $f: y=|x|$. Přitom $D_f=\mathbb{R}$ a $H_f=[0,\infty)$.

□

Poznámka 2.6. S funkcí $y=|x|$ se budeme dále často setkávat. Uveďme si proto její nejdůležitější vlastnosti. Pro x, x_1, $x_2\in\mathbb{R}$ platí:

(1) $|x|\geq 0, \quad |x|\geq x, \quad |-x|=|x|,$
(2) $|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|,$
(3) $|x_1x_2|=|x_1||x_2|,$
(4) $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=\frac{|x_1|}{|x_2|}$ pro $x_2\neq 0.$

Příklad 2.7. Uvažujme funkci

$$f:\ y=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{I}.\end{cases}$$

Tato funkce se nazývá *Dirichletova funkce*, $D_f = \mathbb{R}$ a $H_f = \{0, 1\}$. Graf této funkce nelze nakreslit, protože množiny racionálních i iracionálních čísel jsou husté v množině reálných čísel.

□

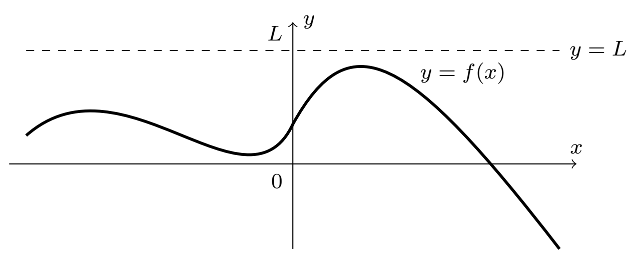
2.2 Vlastnosti funkcí

2.2.1 Ohraničené funkce

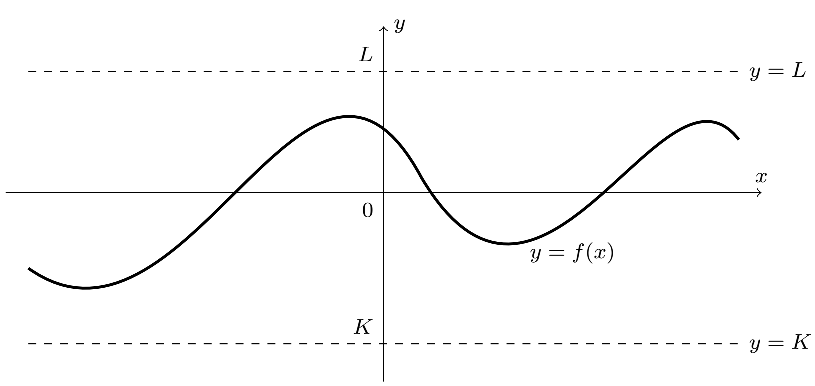
V kapitole 1 jsme definovali pojem ohraničená množina. Nyní si pojem ohraničenosti zavedeme také pro funkce.

Definice 2.8. Řekneme, že funkce f je *shora* (resp. *zdola*) *ohraničená na množině* $M \subset D_f$, je-li shora (resp. zdola) ohraničená množina $\{f(x) : x \in M\}$. Řekneme, že funkce f je *shora* (resp. *zdola*) *ohraničená*, je-li shora (resp. zdola) ohraničená na D_f. Funkce se nazývá *ohraničená*, je-li současně ohraničená shora i zdola.

Poznámka 2.9. Množina $\{f(x) : x \in D_f\}$ je shora ohraničená, právě když existuje horní závora této množiny. Tedy funkce f je shora ohraničená, jestliže lze najít konstantu $L \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leq L$ pro každé $x \in D_f$. Graf shora ohraničené funkce tedy leží celý pod přímkou $y = L$ - viz násl. obr.



Podobně si rozmyslete funkci ohraničenou zdola. Funkce je ohraničená, jestliže lze najít konstanty K a L tak, že $K \leq f(x) \leq L$ pro každé $x \in D_f$. Graf leží mezi rovnoběžkami ve výškách K a L.



Často budeme používat ekvivalentní vyjádření ohraničenosti: Funkce je ohraničená, jestliže existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každé $x \in D_f$ platí $|f(x)| \leq C$. Můžeme např. zvolit $C = \max\{K, L\}$.

2.2.2 Monotónní funkce

Definice 2.10. Řekneme, že funkce f je

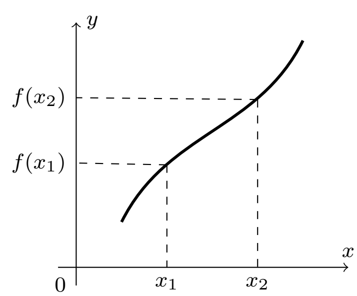
(1) *rostoucí* (resp. *klesající*) *na množině* $M \subset D_f$, jestliže pro každé $x_1,\, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

(2) *neklesající* (resp. *nerostoucí*) *na množině* $M \subset D_f$, jestliže pro každé $x_1,\, x_2 \in M$ takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

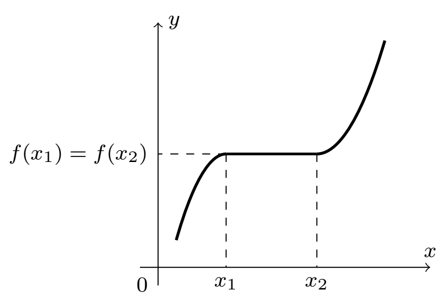
(3) *rostoucí* (resp. *klesající, neklesající, nerostoucí*), je-li rostoucí (resp. klesající, neklesající, nerostoucí) na celém svém definičním oboru.

Je-li funkce rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající, říkáme, že je *monotónní*. Speciálně, je-li rostoucí nebo klesající, říkáme, že je *ryze monotónní*.

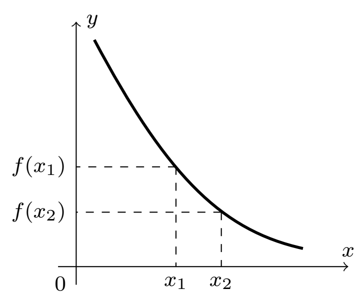
Zřejmě každá rostoucí funkce je i neklesající a každá klesající funkce je i nerostoucí. Opak ale neplatí (monotónní funkce mohou být na nějakém intervalu konstantní). Situace je znázorněna na následujících obrázcích.



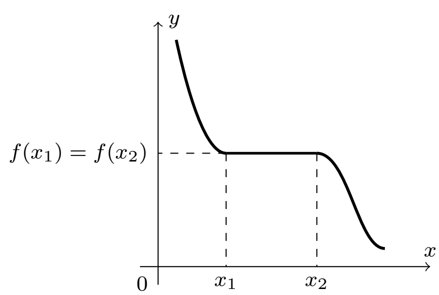
graf rostoucí funkce



graf neklesající funkce
(která není rostoucí)



graf klesající funkce



graf nerostoucí funkce
(která není klesající)

Zatím nemáme vhodné prostředky na ověřování monotónie (ty budeme mít až v kapitole týkající se průběhu funkce), a proto uvedeme pouze několik jednoduchých příkladů, kde situace bude zřejmá.

Příklad 2.11. Vyšetřete monotonii následujících funkcí

$$\text{a) } f: y = x^2,\ x \in [0,\infty], \quad \text{b) } g: y = x^2,\ x \in (-\infty, 0], \quad \text{c) } h: y = x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

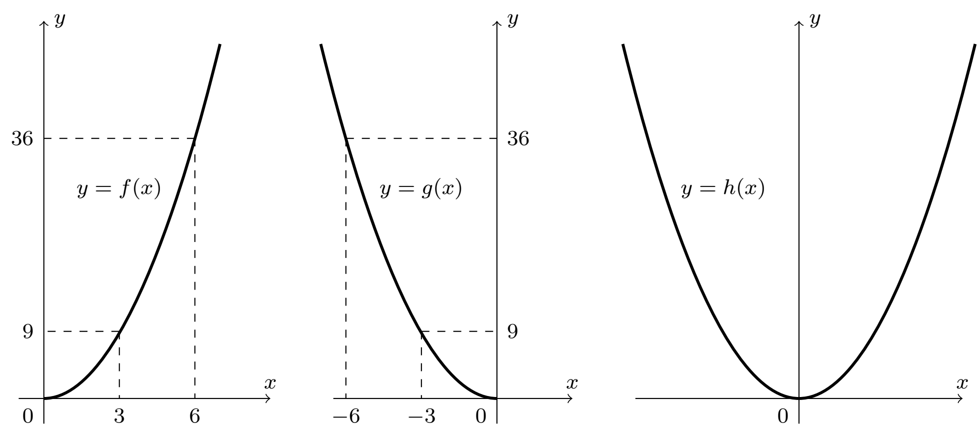
Řešení:

a) Nechť $x_1,\, x_2 \in [0,\infty]$, $x_1 < x_2$. Pak (vzhledem k tomu, že $x_1,\, x_2$ jsou nezáporná čísla) je $x_1^2 < x_2^2$, tj. $f(x_1) < f(x_2)$, a tedy f je rostoucí.

b) Nechť $x_1,\, x_2 \in (-\infty, 0]$, $x_1 < x_2$. Pak je $x_1^2 > x_2^2$, tj. $g(x_1) > g(x_2)$, a tedy g je klesající.

c) Vzhledem k předešlým výsledkům víme, že funkce h je na $(-\infty, 0]$ klesající a na $[0, \infty)$ rostoucí. Z toho vyplývá, že na $(-\infty, \infty)$ funkce h není monotónní. Grafem funkce h je parabola – viz následující obrázek.

□



2.2.3 Prostá funkce

Definice 2.12. Řekneme, že funkce f je *prostá*, jestliže pro každé x_1, $x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ověřujeme-li, zda je funkce prostá, využíváme často ekvivalentní podmínku:

Jestliže pro x_1, $x_2 \in D_f$ platí $f(x_1) = f(x_2)$, pak musí být $x_1 = x_2$.

Všimněme si, že každá ryze monotónní funkce je prostá (nemůže mít v různých bodech stejnou funkční hodnotu), ale opak neplatí, tj. ne každá prostá funkce musí být nutně monotónní. Např. funkce $y = \frac{1}{x}$.

2.2.4 Sudá a lichá funkce

Další dvě vlastnosti se týkají určité souměrnosti grafu. Budeme uvažovat takovou funkci f, jejíž definiční obor D_f je souměrný vzhledem k počátku, tj. s každým číslem x současně obsahuje i opačné číslo $-x$. Pak má smysl porovnávat funkční hodnoty $f(x)$ a $f(-x)$.

Definice 2.13. Funkce f se nazývá *sudá* (resp. *lichá*), jestliže platí

(1) je-li $x \in D_f$, pak $-x \in D_f$,
(2) $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pro každé $x \in D_f$.

Z definice vyplývá, že graf sudé funkce je souměrný podle osy y a graf liché funkce je souměrný podle počátku. Obecně nemusí být funkce sudá ani lichá. Funkce $y = 0$ je zároveň sudá i lichá.

2.2.5 Periodická funkce

Definice 2.14. Řekneme, že funkce f je *periodická* s periodou p, $p \in \mathbb{R}^+$, jestliže platí

(1) je-li $x \in D_f$, pak $x + p \in D_f$,
(2) $f(x + p) = f(x)$ pro každé $x \in D_f$.

Jinými slovy, v bodech majících od sebe vzdálenost p jsou stejné funkční hodnoty. Tedy stačí znát graf funkce f na nějakém intervalu délky p a celý graf dostaneme „kopírováním“ této části, kterou posouváme o p vpravo nebo vlevo (vlevo jen pokud to definiční obor připouští).

Funkce periodická s periodou p je též periodická s periodou $k \cdot p$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud existuje nejmenší perioda, nazývá se základní perioda.

Nejznámější periodické funkce jsou funkce goniometrické. Např. sinus a kosinus mají základní periodu 2π. Funkce $y = c$, $c \in \mathbb{R}$ je periodická funkce, která nemá základní periodu.

2.3 Operace s funkcemi

2.3.1 Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí

Definice 2.15. Nechť f a g jsou funkce. *Součtem* $f+g$, *rozdílem* $f-g$, *součinem* $f \cdot g$ a *podílem* f/g funkcí f a g nazveme funkce definované následujícími předpisy

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) && \text{pro } x \in D_f \cap D_g,\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) && \text{pro } x \in D_f \cap D_g,\\
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x) && \text{pro } x \in D_f \cap D_g,\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} && \text{pro } x \in D_f \cap D_g \setminus \{z \in \mathbb{R} : g(z)=0\}.
\end{aligned}
$$

Absolutní hodnotou funkce f nazýváme funkci $|f|$ definovanou předpisem: $|f|(x) = |f(x)|$ pro $x \in D_f$.

Je třeba si uvědomit, že například ve vztahu $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ vystupuje stejný symbol „+“ ve dvou různých významech. Na levé straně rovnosti znamená operaci mezi funkcemi (funkcím f a g je přiřazena funkce $f+g$) a na pravé straně má „+“ význam součtu dvou reálných čísel $f(x)$ a $g(x)$. Obdobně pro ostatní operace.

Speciálním případem součinu dvou funkcí je součin konstanty a funkce, tj. pro $c \in \mathbb{R}$ dostáváme

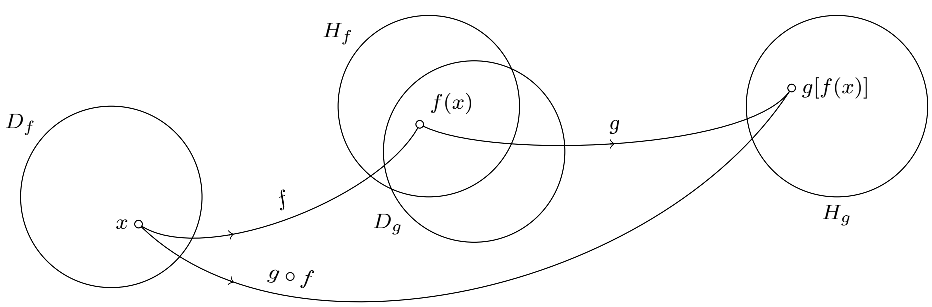
$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x), \quad x \in D_f.$$

2.3.2 Skládání funkcí

Uvažujme dvě funkce f a g. Funkce f každému prvku $x \in D_f$ přiřadí prvek $y = f(x) \in H_f$. Jestliže tento prvek y náleží definičnímu oboru funkce g ($y \in D_g$), pak jej funkce g zobrazí na prvek $z = g(y) \in H_g$. Přitom platí

$$z = g(y) = g(f(x)).$$

Dostáváme tedy novou funkci, která prvku x přiřazuje prvek $z = g(f(x))$.



Definice 2.16. Nechť f, g jsou funkce. *Složenou funkcí* $g \circ f$ nazýváme funkci definovanou předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{kde } x \in D_f \wedge f(x) \in D_g.$$

Funkci f nazýváme *vnitřní složka* a funkci g *vnější složka* složené funkce $g \circ f$.

Zápis $g \circ f$ čteme „g složena s f" (nejprve bereme funkci f a pak funkci g). Při určování $D_{g \circ f}$ (který je obecně pouze částí D_f) musíme vždy zvážit, která x je možno vzít, abychom mohli $f(x)$ dosadit do předpisu pro funkci g.

Poznámka 2.17.

(1) Lze jednoduše dokázat, že složením dvou prostých funkcí dostaneme funkci prostou. Speciálně, složením dvou rostoucích funkcí dostáváme rostoucí funkci, složením dvou klesajících funkcí dostáváme rostoucí funkci, složením funkce rostoucí a klesající v libovolném pořadí dostáváme funkci klesající.

(2) Složením dvou sudých funkcí dostáváme sudou funkci. Složením dvou lichých funkcí dostáváme lichou funkci. Složíme-li sudou a lichou funkci v libovolném pořadí, dostáváme sudou funkci.

2.3.3 Inverzní funkce

Definice 2.18. Nechť f je funkce. Funkce f^{-1} se nazývá *funkce inverzní k funkci* f, jestliže

(1) $D_{f^{-1}} = H_f$,

(2) pro každé $y \in D_{f^{-1}}$ platí $\quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$

Označení f^{-1} je pro inverzní funkci, pozor na $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$. Nezávislá proměnná je pro funkci f^{-1} označena písmenem y a pro funkci f označena jako x především kvůli praktickým výpočtům. Fakt, že funkce f^{-1} je inverzní k funkci f, závisí na tvaru těchto funkcí a ne na písmenu, kterým označujeme nezávisle proměnnou.

Věta 2.19. *Nechť f je funkce. Pak f^{-1} existuje právě tehdy, když f je prostá.*

Je-li f funkce, pak ke každému $x \in D_f$ existuje právě jedno $y \in H_f$ tak, že $y = f(x)$. Je-li navíc f prostá funkce, pak také ke každému $y \in H_f$ existuje právě jedno $x \in D_f$ tak, že $y = f(x)$.

Věta 2.20. *Nechť f je prostá funkce a f^{-1} funkce k ní inverzní. Potom platí:*

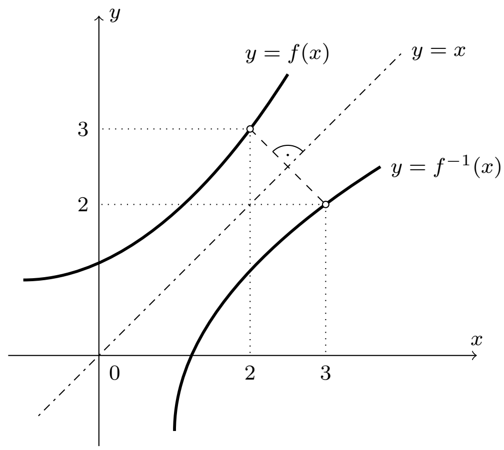
(1) *f^{-1} je prostá funkce.*

(2) *Je-li f rostoucí, resp. klesající, potom je i f^{-1} rostoucí, resp. klesající.*

(3) *Pro každé $x \in D_f$ platí $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Pro každé $x \in D_{f^{-1}}$ platí $(f \circ f^{-1})(x) = x$.*

(4) *Inverzní funkce k f^{-1} je f, tj. $(f^{-1})^{-1} = f$.*

(5) *Grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrné podle přímky $y = x$.*

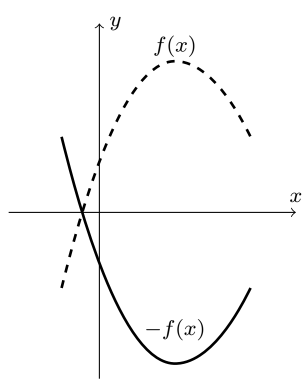


2.3.4 Transformace grafu

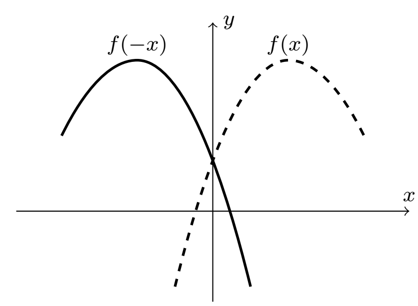
Nechť je dána funkce $f : y = f(x)$, $x \in D_f$. Připomeňme si, jak lze pomocí grafu funkce f sestrojit grafy následujících funkcí:

$$
\begin{array}{lll}
a)\ f_1 : y = -f(x), & b)\ f_2 : y = f(-x), & c)\ f_3 : y = f(x) + b, \\
d)\ f_4 : y = f(x-a), & e)\ f_5 : y = k \cdot f(x), & f)\ f_6 : y = f(mx),
\end{array}
$$

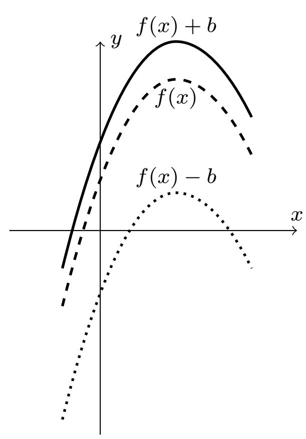
kde a, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $k > 0$, $m > 0$ jsou konstanty.



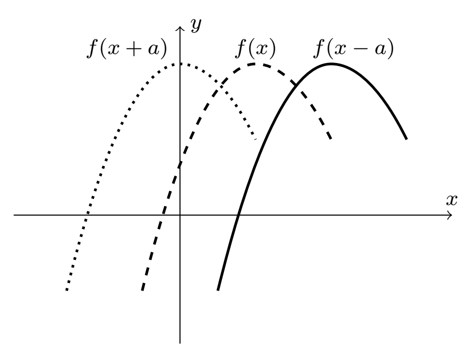
a)



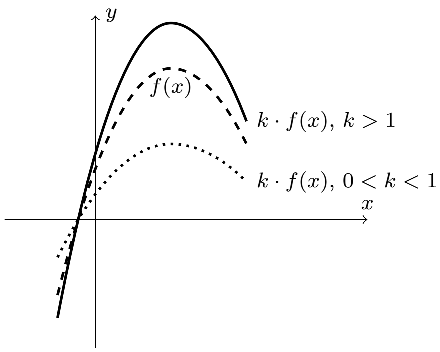
b)



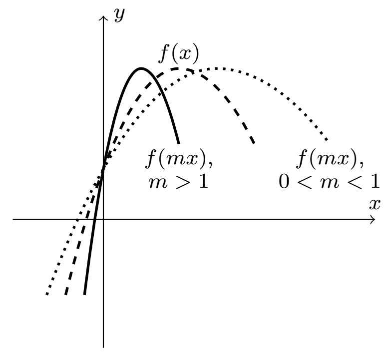
c)



d)



e)



f)

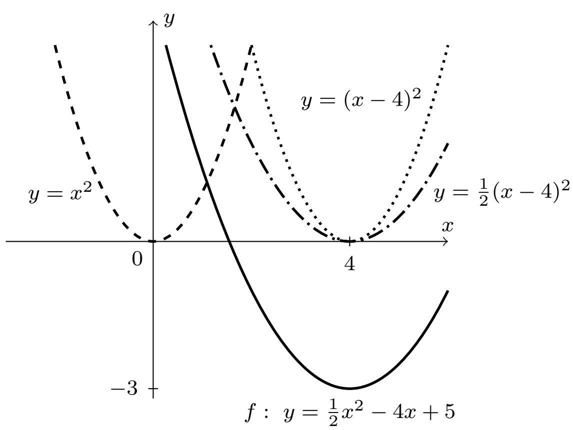
PŘÍKLAD 2.21. Nakreslete graf funkce $f:\ y = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 5$.

Řešení: Jedná se o kvadratickou funkci, jejímž definičním oborem je $\mathbb{R}$ a grafem je parabola. Doplněním kvadratického trojčlenu $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ na druhou mocninu lineárního dvojčlenu, tzv. doplnění na čtverec, získáme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 &= \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 10) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16 - 6) = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + \frac{1}{2}(-6) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3.\end{aligned}$$

Grafem je rozšířená parabola s vrcholem v bodě $(4, -3)$, graf sestrojíme podle výše uvedených pravidel.

□



2.4 Co je třeba znát z této kapitoly

Pojmy k zapamatování

– reálná funkce jedné reálné proměnné
– graf funkce
– ohraničená funkce
– monotónní funkce
– prostá funkce
– sudá a lichá funkce,
– periodická funkce
– složená funkce
– inverzní funkce

Kontrolní otázky

(1) Jak poznáte, že je daná množina bodů v rovině grafem nějaké funkce?
(2) Nakreslete graf libovolné ohraničené funkce.
(3) Jaký je rozdíl mezi rostoucí a neklesající funkcí?
(4) Uveďte příklad funkce, která není prostá.
(5) Jaké vlastnosti mají grafy sudých, resp. lichých funkcí?
(6) Uveďte příklad funkce, jejíž základní perioda je π.
(7) Kdy existuje k dané funkci f funkce inverzní f^{-1}?