1.Logické základy matematiky (a nejen ty)

Kapitola 1.1 Matematická logika

Dokonce ani politici nechtějí jednat nelogicky ...

Definice 1.1.1 Výrok
Každá oznamovací věta, o níž můžeme rozhodnout zda je pravdivá či nepravdivá se nazývá matematický výrok, stručně výrok.

Výroky označujeme velkými písmeny A, B, V, ...

Příklad 1.1.1

Dnes je sobota. ...... *jsou výroky*
Každý český král byl Čech.

Kolik je hodin? ...... *nejsou výroky*
Pondělí

Pravdivostní hodnota výroku A musí nabýt jedné ze dvou hodnot 0 či 1.
p(A) = 0 pro nepravdivý výrok
p(A) = 1 pro výrok pravdivý

Hypotéza
Oznamovací věta, o jejíž pravdivostní hodnotě sice neumíme rozhodnout, ale víme, že nastává právě jedna z uvedených dvou možností.

Příklad 1.1.2

Život byl na Zemi vytvořen zásahem vyšší inteligence.

Definice 1.1.2 Složené výroky a logické „spojky“
Nechť A, B jsou dva výroky.

Negací výroku A nazveme větu vyjadřující: „Není pravda, že A. $\neg A, (A')$
Konjunkcí výroků A, B nazveme vazbu: A a B $A \wedge B$
Alternativou (disjunkcí) výroků A, B nazveme vazbu: A nebo B $A \vee B$
Implikací výroků A, B nazveme vazbu: Jestliže A, pak B. $A \Rightarrow B$
Ekvivalencí Výroků A, B nazveme vazbu: A právě tehdy, když B $A \Leftrightarrow B$

Pravdivostní hodnoty složených výroků přehledně ukazuje **tabulka pravdivostních hodnot**

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

A	A'
1	0
0	1

tab.: 1.2

Příklad 1.1.3

Odcházím do světa a nevím kdy se vrátímu.
Vezmu s sebou knihu nebo walkmana.
Když se situace nezmění, nevrátím se.
Uvidíme se právě tehdy, když bude bezpečno.

Výroková formule
Zápis správně utvořený z označení výroků (konkrétních nebo proměnných), logických spojek a závorek.

Příklad 1.1.4

$(A \vee B') \Rightarrow A$

Tautologie – vždy pravdivá tvrzení výrokové logiky bez ohledu na pravdivost či nepravdivost jednotlivých výrokových proměnných.

Některé základní tautologie

1. $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ $\quad$ $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
2. $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ $\quad$ $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$
3. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
4. $p(A \vee A') = 1$ $\quad$ $p(A \wedge A') = 0$ vyloučení třetí
5. $(A \vee B)' \Leftrightarrow (A' \wedge B')$ $\quad$ $(A \wedge B)' \Leftrightarrow (A' \vee B')$ de Morganova p.
6. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
7. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B' \Rightarrow A')$
8. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$

Kontradikce
Vždy neplatná výroková formule

Příklad 1.1.5

$(A' \Rightarrow B) \wedge (A \wedge B)'$

Výrokový vzorec čili výroková forma
Výrokovým vzorcem $\varphi(x)$ (případně $\varphi(x_1, ..., x_n)$) rozumíme takový formální předpis obsahující znaky, za které pokud dosadíme vhodné konkrétní objekty dostaneme výrok.

Příklad 1.1.6

$x^3 \geq 99$

Kvantifikovaný výrok
Výrokový vzorec s určující nebo omezující podmínkou pro volbu dosazovaných objektů takovou, že dostáváme výrok.

Nejběžnější kvantifikátory jsou slovní vazby obsahující proměnnou a udávající počet nebo odhad počtu hodnot proměnné, pro které výrokový vzorec přechází v pravdivý výrok.

Alespoň tři ....
Nejvýše sedm ...
Právě dvacet ...
Žádný ...

Příklad 1.1.7

Je nejvýše pět jednociferných čísel pro něž je jejich třetí mocnina větší než 99.

Existenční (malý) kvantifikátor $\exists$
Existuje alespoň jeden prvek pro který platí, že ...

Všeobecný (velký) kvantifikátor $\forall$
Pro všechny prvky platí, že ....

Příklad 1.1.7

V České republice je alespoň dvacet lidí se stejným počtem vlasů na hlavě.
Každý atom obsahuje neutron.

Negace kvantifikovaných výroků

$$(\exists n \in M : T(n))' \Leftrightarrow (\forall n \in M : T'(n))$$
$$(\forall n \in M : T(n))' \Leftrightarrow (\exists n \in M : T'(n))$$

Poznámky:
Principy uvažování - Aristotelovy sylogismy, Boolova algebra, predikátorový počet

Kapitola 1.2 Axiomatická výstavba matematiky

Definice 1.2.1 Primitivní pojmy
Zvolené základní objekty, vlastnosti nebo termíny, které nedefinujeme.

Axiomy (postuláty)
Základní vztahy mezi primitivními pojmy, které se nedokazují a považují se za pravdivé.

Axiomatický systém
Souhrn primitivních pojmů a axiomů z dané oblasti matematiky

Na axiomatický systém se obvykle kladou následující tři požadavky:

nezávislost
bezespornost
úplnost

Poznámka
Rakouzský matematik Kurt Godel v první polovině 20. století prokázal, že každý axiomatický systém dost bohatý, aby v sobě obsahoval aritmetiku přirozených čísel je neúplný.

Příklad 1.2.1
Zermelův axiomatický systém teorie množin
Primitivní pojmy: množina, být prvkem množiny

Axiomy:

- *I. Jestliže množiny A, B mají stejné prvky, potom se sobě rovnají.*
- *II. K libovolným dvěma množinám existuje množina, která obsahuje právě pouze ty prvky, které patří do některé z uvedených množin.*
- *III. Ke každému systému množin existuje množina, která která obsahuje pouze prvky patřící do některé množiny systému.*
- *IV. Ke každé množině A existuje systém množin, jehož prvky jsou pouze ty množiny, které jsou podmnožinou množiny A.*
- *V. Nechť A je množina a $\varphi(x)$ výroková funkce definovaná na množině A. Potom existuje množina , jejíž prvky jsou pouze ty prvky z množiny A, pro které je $\varphi(x)$ pravdivý výrok.*
- *VI. Nechť A je množina a $\varphi(x,y)$ je výrokový vzorec s touto vlastností: Ke každému prvku x z množiny A existuje nejvýše jedno y tak, že platí $\varphi(x,y)$. Potom existuje množina, která obsahuje pouze ty prvky y pro něž $\varphi(x,y)$ platí.*
- *VII. Axiom výběru*
  Ke každému neprázném systému neprázdných navzájem disjunktních množin existuje množina, která má s každou množinou zmíněného systému společný právě jeden prvek.
- *VIII. Existuje alespoň jedna nekonečná množina.*
- *IX. Každé množině A můžeme přiřadit symbol $/A/$ (tzv. kardinální číslo neboli mohutnost množiny) tak, že rovnost $/A/=/B/$ nastane právě tehdy, když jsou množiny A, B ekvivalentní. (ekvivalenci lze definovat za použití primitivních pojmů a axiomů I –VIII)*
- *X. (se týká uspořádaných podobných množin)*

Definice 1.2.2 Matematická věta
Pravdivý matematický výrok, vyplývající, tudíž dokazatelný z axiomatického systému nebo za pomoci vět dokázaných dříve.

Nejčastěji mají matematické věty tvar všeobecného $(\forall x \in M : V(x))$nebo existenčního výroku $(\exists x \in M : V(x))$, kde $V(x)$ má navíc tvar implikace $V(x) = (A(x) \Rightarrow B(x))$.

$A(x)$ nazýváme předpokladem nebo postačující podmínkou pro platnost $B(x)$
$B(x)$ nazýváme závěrem nebo nutnou podmínkou pro platnost $A(x)$

Někdy,což mají matematici zvláště v oblibě, má tvrzení tvar
ekvivalence $V(x) = (A(x) \Leftrightarrow B(x))$.

$A(x)$ je nutnou i postačující podmínkou pro platnost $B(x)$ a naopak

Příklad 1.2.2
Když je rozdíl přirozených čísel dělitelný 7, pak tato čísla dávají při dělení 7 stejný zbytek.
Trojúhelník je pravoúhlý právě tehdy, když pro jeho strany platí, že $a^2 + b^2 = c^2$.

Důkaz je logicky správné odvození dané matematické věty z jiných pravdivých vět či axiomů.

Typy matematických důkazů

Důkaz přímý

Z předpokladů nebo jiných zřejmých pravd je třeba logicky správnými úsudky dostat tvrzení věty, což jinak řečeno znamená sestavit řetězec pravdivých implikací.
Schéma: $Z(x) \Rightarrow Z_1(x) \Rightarrow Z_2(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow V(x)$ nebo $A(x) \Rightarrow A_1(x) \Rightarrow A_2(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow B(x)$

Nepřímý důkaz

Můžeme použít pouze v případě implikací. Spočívá v přímém důkazu obměněné implikace tj. v důkazu $B'(x) \Rightarrow A'(x)$ namísto implikace $A(x) \Rightarrow B(x)$, přičemž využíváme tautologie mezi těmito výrokovými formulemi.

Důkaz sporem

Předpokládáme pravdivost negace dokazovaného tvrzení. Sestavujeme řetězec implikací dokud nenarazíme na rozpor. Z něho usoudíme na nepravdivost negace a tudíž pravdivost původní věty.
Schéma: Uvažujme tvrzení $T(x)$.

$$T'(x) \Rightarrow T_1'(x) \Rightarrow T_2'(x) \Rightarrow \ldots T_n'(x), \text{ kde } p(T_n'(x)) = 0$$

Důkaz matematickou indukcí

Můžeme použít v případě, že dané tvrzení spočívá na řadě přirozených čísel od nějakého nejmenšího n počínaje. Důkaz se skládá ze dvou kroků. V prvním dokážeme platnost tvrzení pro ono nejmenší možné přirozené číslo. V druhém, indukčním kroku předpokládáme platnost tvrzení pro libovolné povolené k a z tohoto se snažíme dokázat platnost pro číslo $k+1$.

Schéma: Uvažujme tvrzení $T(x)$.

I. $T(n)$ ... $p(T(n)) = 1$

II. $\forall k \in N, k \geq n : T(k) \Rightarrow T(k+1)$ ... $p(T(k+1)) = 1$

Poznámka
Důkaz a vyvrácení všeobecných a existenčních hypotéz.

Definice

Definice matematického termínu, objektu nebo vlastnosti určuje daný termín, objekt nebo vlastnost pomocí pojmů dříve uvedených nebo základních.

V podstatě se jedná o zestručnění či označení.