Analytická geometrie - Geometrie v rovině

Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky je další způsob, jak zapsat přímku v rovině.

Definice

Rovnice
$ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$,
kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové, se nazývá **obecná rovnice** přímky.

Poznámka

Všechny body $X[x; y]$, jejichž souřadnice splňují nějakou obecnou rovnici přímky, tvoří přímku a naopak každá přímka v rovině je určena nějakou obecnou rovnicí. Obecná rovnice přímky je stejně „silná” jako rovnice parametrická a umožňuje zapsat jakoukoliv přímku v rovině.

Obecná rovnice přímky je určena jednoznačně až na násobek. Rovnice $2x + 3y + 5 = 0$ určuje stejnou přímku jako rovnice $4x + 6y + 10 = 0$.

Příklad 3.5

Najděte 5 bodů ležících na přímce vyjádřené obecnou rovnicí: $2x - y + 3 = 0$.

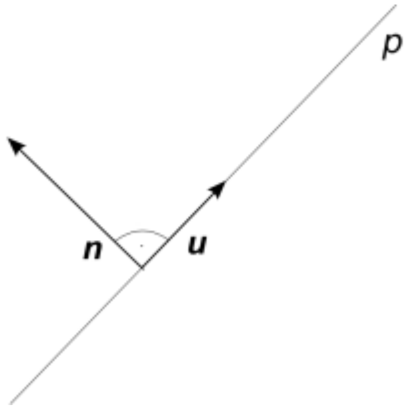
Řešení

- Jak určit body ležící na přímce je jednoduché - stačí zvolit jednu jeho souřadnici a z obecné rovnice dopočítat druhou. Zvolme si například hodnotu x-ové souřadnice jako 1. Dosadíme do obecné rovnice přímky a dopočítáme y-ovou souřadnici $2 \cdot 1 - y + 3 = 0$,
  $y = 5$.
- Na přímce, mimo nalezeného bodu [1; 5], leží například i body: [-2; -1], [-1; 1], [0; 3], [5; 13].

Z obecné rovnice konkrétní přímky snadno zjistíme, které body na ní leží. O něco složitější je to naopak: určit obecnou rovnici přímky, pokud víme, kterými body je určena. Jak nalezneme koeficienty a, b, c obecné rovnice hledané přímky? V parametrickém vyjádření přímky jsme využívali směrový vektor, nyní si zavedeme a použijeme vektor normálový.

Definice

Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky v rovině se nazývá **normálový vektor** této přímky.



Obr. 3.5: Normálový vektor n přímky p

Ukážeme si, jak jednoduše ze souřadnic směrového vektoru u získáme souřadnice normálového vektoru n. Označíme si normálový vektor n = (n1, n2), směrový vektor u = (u1, u2). Z definice plyne, že jsou na sebe kolmé, tedy jejich skalární součin je roven nule
$n1u1 + n2u2 = 0$.

Pokud n1 položíme rovno u2 a n2 rovno - u1 (případně $n1 = - u2$ a $n2 = u1$), snadno se přesvědčíme, že uvedená rovnost platí:
$n1n2 + n2(-n1) = 0$,
$n1(-n2) + n2n1 = 0$.

To platí pro libovolný vektor u = (u1; u2). Nalezený normálový vektor je n = (u1; -u1) případně n' = (-u2; u1). Při daném směrovém vektoru nám k získání vektoru normálového stačí prohodit souřadnice a u jedné z nich změnit znaménko.

Věta

V obecné rovnici $ax + by + c = 0$ přímky p(P, u), odpovídají koeficienty a, b souřadnicím jejího normálového vektoru n = (n1; n2); $a = n1$ a $b = n2$.

Příklad 3.6

Určete obecnou rovnici přímky p, která je určena body A[3; 1] a B[1; 2].

Řešení

- Nejprve nalezneme souřadnice směrového vektoru u = AB = (-2; 1). Normálový vektor přímky p je N = (1; 2) a obecná rovnice přímky p vypadá takto:
  $x + 2y + c = 0$.
- Zbývá určit koeficient c, ten získáme např. dosazením souřadnic bodu A do získané rovnice. Protože $A \in p$, musí platit:
  $3 + 2\cdot 1 + c = 0$, tedy
  $c = -5$.
- Obecná rovnice přímky p je:
  $x + 2y - 5 = 0$.
  Řešení si můžete snadno ověřit dosazením souřadnic bodů A, B do obecné rovnice, ta musí být splněna.

Příklad 3.7

1. Najděte obecnou rovnici přímky q: $x = 3 - 2t$, $y = 2 + t$; $t \in \mathbb{R}$.
2. Najděte obecnou rovnici přímky q: $x = 1$, $y = 2 + t$; $t \in \mathbb{R}$.
3. Určete parametrickou rovnici přímky q: $x - 3y - 4 = 0$.

Řešení

1. Parametrické vyjádření přímky q si můžeme představit jako soustavu dvou rovnic o třech neznámých x, y, t:
   $x = 3 - 2t$,
   $y = 2 + t$.
   Budeme se snažit eliminovat parametr t. V našem případě k první rovnici přičteme dvojnásobek rovnice druhé:
   $x + 2y = 3 - 2t + 4 + 2t$,
   $x + 2y = 7$,
   $x + 2y - 7 = 0$.
   Úpravami jsme získali obecnou rovnici přímky q.
2. V tomto případě nemůžeme použít postup z 1, protože parametru t se nezbavíme. Pokud se zamyslíte, tak uvidíte, že na přímce q leží body [1; 2], pro $t = 0$, [1; 3] pro $t = 1$, [1; 4] pro $t = 2$ atd.
   Z toho plyne, že rovnice přímky q určuje přímku $x = 1$, což je obecná rovnice přímky q (u přímek rovnoběžných s osou x by se postupovalo obdobně).
3. K parametrickému vyjádření potřebujeme znát alespoň jeden bod přímky q. Nejprve tedy spočítáme souřadnice nějakého bodu A, který leží na přímce q.
   Zvolíme si jeho x-ovou souřadnici jako $x = 1$ a dopočítáme souřadnici y-ovou; A[1; -1].
   Teď bychom mohli spočítat souřadnice dalšího bodu, určit směrový vektor a vyjádřit přímku parametricky nebo si uvědomíme, že umíme jednoduše převést normálový vektor na vektor směrový.
   Normálový vektor přímky q, nq = (1; -3) můžeme převést na směrový vektor této přímky uq = (3; 1).
   Pomocí bodu A a vektoru uq vyjádříme parametrickou rovnici přímky q:
   $x = 1 + t$,
   $y = -1 -3t$, $t \in \mathbb{R}$.