8.1 Vektorová algebra

Definice

Nechť V je množina libovolných prvků, T libovolné těleso a na množině V jsou definovány operace sčítání a násobení prvkem tělesa T takto:

1) $\forall u, v \in V : u + v \in V$

2) $\forall k \in T \forall u \in V : k \cdot u \in V$

a dále: 3) $u + v = v + u$

4) $(u + v) + t = u + (v + t)$

5) $\exists o \in V : u + o = u$

6) $\exists n \in V : u + n = o \qquad (n = -u)$

7) $j \cdot u = u$, když j je jednotkový prvek tělesa T

8) $a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$

9) $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$

10) $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$

Pak strukturu $(V, +, \cdot)$ nazýváme vektorovým prostorem nad tělesem T.
Prvky množiny V nazýváme vektory.

Příklady vektorových prostorů:

a) vektorový prostor vázaných vektorů na bod (orientovaných úseček)
b) vektorový prostor vázaných vektorů na přímku
c) vektorový prostor volných vektorů
d) aritmetický vektorová prostor nad tělesem reálných čísel

Definice

Nechť $u_i \in V \wedge k_i \in R$, pak $\sum_{i=1}^{l} k_i u_i$ nazýváme lineární kombinací vektorů $u_i \in V$, čísla $k_i \in R$ nazýváme koeficienty lineární kombinace a pokud jsou všechny nulové, mluvíme o triviální lineární kombinaci.

Definice

Množinu $W \subset V$ nazveme vektorovým podprostorem vektorového prostoru V, pokud je sama o sobě vektorovým prostorem.

Věta

W je vektorový prostor právě tehdy, když platí vlastnosti 1) a 2).
(Ostatní podmínky jsou splněny automaticky.)

Věta

Buď $S \subset V$. Potom její lineární obal $\langle S \rangle$, tj. množina všech lineárních kombinací prvků z množiny S, tvoří podprostor vektorového prostoru V.

Definice
Říkáme, že množina $\langle S \rangle$ je generovaná množinou S a prvky množiny S nazýváme generátory vektorového prostoru.

Definice
Konečnou množinu generátorů nazveme lineárně nezávislou právě tehdy, když nulovému vektoru se rovná pouze a jenom její triviální lineární kombinace. Jinak tvoří množinu generátory (vektory) lineárně závislé.

Věta
a) Každá (i jednoprvková) množina generátorů obsahující vektor o je lineárně závislá.
b) Vektory u, v jsou LZ, pokud je jeden násobkem druhého.

Každou konečnou lineárně nezávislou skupinu generátorů vektorového prostoru V nazveme báze. Každé dvě báze téhož vektorového prostoru mají týž počet prvků, který nazýváme dimenze daného vektorového prostoru.

Body a souřadnice
(afinní v prostoru bez metriky, prostor s metrikou)

Kartézské souřadné systémy
I. souřadnice na přímce
II. souřadnice v rovině
III. souřadnice v prostoru
IV. souřadnice V_n

Souřadnice v $n-$rozměrném prostoru přestavují uspořádanou $n-$tici reálných čísel, zapisujeme bod $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, resp. $A[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Poznámka
Polární souřadnice, cylindrické souřadnice, sférické souřadnice

Nadále budeme předpokládat kartézské souřadnice a euklidovskou metriku prostoru.

Vzdálenost bodů
Vzdálenost bodů A, B je rovna $|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$.

Střed úsečky
Střed S úsečky AB má souřadnice $[s_1, s_2, ..., s_n]$, kde $s_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ pro $i = 1,2,...,n$.

Poznámka
Symbolicky lze toto zapsat jako $S = \frac{A + B}{2}$.

Vektorový prostor volných vektorů

Definice
Nenulový vektor je množina všech orientovaných úseček stejně dlouhých a stejného směru.
Nulový vektor je množina všech nulových orientovaných úseček.

Souřadnice vektorů
Je-li vektor u určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ lze psát
$u = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n) = (u_1, u_2)$ a navíc zřejmě platí $u = B - A$.

Početní operace s volnými vektory
- geometricky - algebraicky (souřadnicově)

I. sčítání
- doplněním na rovnoběžník (v rovině)
- $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$

II. odčítání
- znamená přičítání vektoru opačného

III. násobení vektoru reálným číslem
- využitím stejnolehlosti v rovině
- $k \cdot u = (ku_1, ku_2, ..., ku_n)$

Velikost vektoru
Platí: $|u| = u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$.

IV. součin dvou vektorů

Skalární součin
Definice
Skalární součin dvou vektorů u, v definujeme jako $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$.

Vlastnosti skalárního součinu
1) $u \cdot u = u^2 = |u|^2$
2) $u \cdot v = v \cdot u$
3) $(k \cdot u) \cdot v = k \cdot (u \cdot v)$
4) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
5) $(u + v) \cdot (x + y) = u \cdot x + u \cdot y + v \cdot x + v \cdot y$
6) $(u \pm v)^2 = u^2 \pm 2 \cdot u \cdot v + v^2$
7) $u \cdot v = \frac{1}{2}\left(|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2\right)$
8) $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\varphi$,
φ je velikost konvexního úhlu, který svírají orientované úsečky
9) $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v \vee u = o \vee v = o$

Vektorový součin

Definice

Vektorový součin $u \times v$ dvou vektorů z V_3.

a) pokud leží v jedné přímce je $u \times v = o$
b) pokud neleží v jedné přímce $u \times v = w$, kdy platí:
   i) $w \perp u \wedge w \perp v$
   ii) u, v, w tvoří pravotočivou bázi
   iii) $|w| = |u| \cdot |v| \cdot \sin\varphi$

Vlastnosti vektorového součinu

1) $|w|$ je číselně roven obsahu rovnoběžníku vytvářeného vektory u, v
2) $u \times v = -v \times u$
3) $(k \cdot u) \times v = k \cdot (u \times v)$
4) $u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$

Smíšený součin

Definice

Smíšeným součinem vektorů u, v, w rozumíme $[u, v, w] = (u \times v) \cdot w$

Vlastnosti smíšeného součinu

1) Pro objem rovnoběžnostěnu generovaného třemi nekomplanárními vektory platí: $V = [u, v.w]$ tvoří-li u, v, w pravotočivou bázi a $V = -[u, v.w]$ pro levotočivou.
2) $[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v]$