23. DIFERENCIÁLNÍ POČET

1 Definice derivace

1. Vyslovte definici derivace funkce v bodě.

2. Z definice derivace vypočtěte derivaci funkce f v bodě x_0:

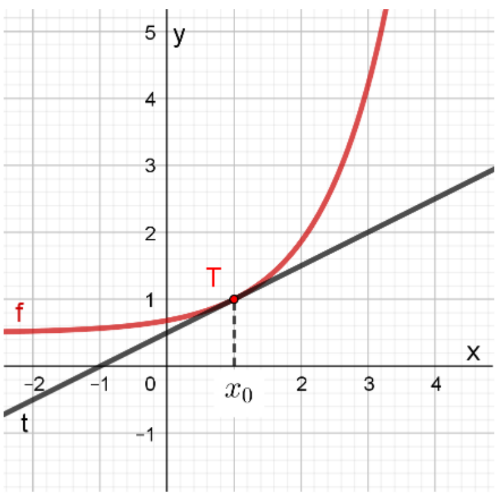
   (a) $f:\ y = x^2 - 1,\ x_0 = 5;$

   (b) $f:\ y = \sqrt{x},\ x_0 = 4;$

   (c) $f:\ y = ax + b,\ x_0 = \pi,\ a,\ b \in \mathbb{R};$

   (d) $f:\ y = \frac{1}{x},\ x_0 = -2.$

3. Podle obrázku určete derivaci funkce f v bodě x_0:



2 Derivace součtu, rozdílu, podílu

1. Vyslovte pravidla pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu.

2. Vypočítejte derivace funkcí a určete definiční obory derivací:

   (a) $y = 3x^4 - 5x + 6$

   (b) $y = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt{x^3} + 0$

   (c) $y = x^{-2} + x^{-1} - \frac{2}{x^3}$

   (d) $y = \log x - \ln x$

   (e) $y = 7\sin x + 8\cos x + 9\,\mathrm{tg}\,x + 10\,\mathrm{cotg}\,x$

   (f) $y = e^x + 0{,}2^x$

3. Zderivujte funkce a určete definiční obory derivací:

$$(a)\qquad f_1:\ y = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x + 2}$$

$$(b)\qquad f_2:\ y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$$

$$(c)\qquad f_3:\ y = \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$(d)\qquad f_4:\ y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$(e)\qquad f_5:\ y = \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

4. Zderivujte:

$$\begin{aligned}
f:&\quad y = x\sin x\\
g:&\quad y = (x^2 - 3x - 3)e^x\\
h:&\quad y = x^2 \ln x\\
k:&\quad y = \frac{\sin x}{x}\\
l:&\quad y = \frac{x^2}{x+3}\\
m:&\quad y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}
\end{aligned}$$

3 Derivace složené funkce

Vypočítejte derivace funkcí:

1. $y = (x-3)^5$

2. $y = \sin(5x + 6)$

3. $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 3}$

4. $y = e^{2x}$

5. $y = \cos(3x+1)^2$

6. $y = \cos^2(3x+1)$

7. $y = \sin(\mathrm{tg}(x+1))$

4 L'Hospitalova pravidla

1. Vysvětlete l'Hospitalova pravidla.

2. Užitím derivace vypočítejte limity:

$$(a) \qquad \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^{-}27} =$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi} =$$

$$(c) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 -x - 1}{x^2} =$$

$$(d) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{5x} =$$

$$(e) \qquad \lim_{x\to 1} \frac{3\ln x}{x-1} =$$

$$(f) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1} =$$

5 Lokální extrémy funkce

Najděte lokální extrémy funkcí:

$$(a) \qquad f:\ y = x^3 - 6x^2$$

$$(b) \qquad g:\ y = \sqrt{8x - x^2}$$

$$(c) \qquad h:\ y = \frac{x^2}{4+x^4}$$

6 Geometrická a fyzikální interpretace derivace

1. Napište rovnici tečny funkce $f : y = x^3 - 4$ v bodě $[2; ?]$.

2. Určete koeficienty b, c, aby funkce $f:\ y = x^2 + bx + c$ měla v bodě 3 tečnu o rovnici $y = 2x - 7$.

3. Pravoúhelník má obvod 100 cm. Určete délky jeho stran a, b tak, aby jeho obsah byl maximální.

4. Najděte výšku v a poloměr r válce, který má při daném povrchu S maximální objem.

5. Dvě chodby široké $2,4$ m a $1,6$ m se protínají pod pravým úhlem. Jaký nejdelší žebřík lze ve vodorovné poloze ještě přenést z jedné chodby do druhé?

6. Těleso se pohybuje tak, že jeho dráha je vyjádřena v závislosti na čase t jako $s(t) = 3t^2 - t + 1$, $t \in \langle 0;\ 5\rangle$. Vyjádřete jeho rychlost a zrychlení.

7. Dvě přímé silnice se křižují v pravém úhlu. V okamžiku, kdy opuští křižovatku auto jedoucí rychlostí $v_1 = 60$ km/h, je na druhé silnici auto ve vzdálenosti 5 km od křižovatky a jede k ní rychlostí $v_2 = 80$ km/h. Za jak dlouho budou obě auta k sobě nejblíže a jak velká bude jejich vzdálenost?