8.1 Vektorová algebra

Definice
Nechť V je množina libovolných prvků, T libovolné těleso a na množině V jsou definovány operace sčítání a násobení prvkem tělesa T takto:
1) $\forall \vec{u},\vec{v} \in V : \vec{u}+\vec{v} \in V$
2) $\forall k \in T \forall \vec{u} \in V : k \cdot \vec{u} \in V$
a dále: 3) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

4) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{t} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{t})$
5) $\exists \vec{o} \in V : \vec{u}+\vec{o} = \vec{u}$
6) $\exists \vec{n} \in V : \vec{u}+\vec{n} = \vec{o}$ $\qquad (\vec{n} = -\vec{u})$
7) $j \cdot \vec{u} = \vec{u}$, když j je jednotkový prvek tělesa T
8) $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u}$
9) $a \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$
10) $(a+b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$

Pak strukturu $(V,+,\cdot)$ nazýváme vektorovým prostorem nad tělesem T .
Prvky množiny V nazýváme vektory.

Příklady vektorových prostorů:

a) vektorový prostor vázaných vektorů na bod (orientovaných úseček)
b) vektorový prostor vázaných vektorů na přímku
c) vektorový prostor volných vektorů
d) aritmetický vektorová prostor nad tělesem reálných čísel

Definice
Nechť $\vec{u}_i \in V \wedge k_i \in R$, pak $\sum_{i=1}^{l} k_i \vec{u}_i$ nazýváme lineární kombinací vektorů $\vec{u}_i \in V$, čísla $k_i \in R$ nazýváme koeficienty lineární kombinace a pokud jsou všechny nulové, mluvíme o triviální lineární kombinaci.

Definice
Množinu $W \subset V$ nazveme vektorovým podprostorem vektorového prostoru V , pokud je sama o sobě vektorovým prostorem.

Věta
W je vektorový prostor právě tehdy, když platí vlastnosti 1) a 2).
(Ostatní podmínky jsou splněny automaticky.)

Věta
Buď $S \subset V$. Potom její lineární obal $\langle S \rangle$, tj. množina všech lineárních kombinací prvků z množiny S , tvoří podprostor vektorového prostoru V .

Definice
Říkáme, že množina $\langle S \rangle$ je generovaná množinou S a prvky množiny S nazýváme generátory vektorového prostoru.

Definice
Konečnou množinu generátorů nazveme lineárně nezávislou právě tehdy, když nulovému vektoru se rovná pouze a jenom její triviální lineární kombinace. Jinak tvoří množinu generátory (vektory) lineárně závislé.

Věta
a) Každá (i jednoprvková) množina generátorů obsahující vektor $\vec{o}$ je lineárně závislá.
b) Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou LZ, pokud je jeden násobkem druhého.

Každou konečnou lineárně nezávislou skupinu generátorů vektorového prostoru V nazveme báze. Každé dvě báze téhož vektorového prostoru mají týž počet prvků, který nazýváme dimenze daného vektorového prostoru.

Body a souřadnice
(afinní v prostoru bez metriky, prostor s metrikou)

Kartézské souřadné systémy
I. souřadnice na přímce
II. souřadnice v rovině
III. souřadnice v prostoru
IV. souřadnice V_n

Souřadnice v $n-$rozměrném prostoru přestavují uspořádanou $n-$tici reálných čísel, zapisujeme bod $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$, resp. $A[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Poznámka
Polární souřadnice, cylindrické souřadnice, sférické souřadnice

Nadále budeme předpokládat kartézské souřadnice a euklidovskou metriku prostoru.

Vzdálenost bodů
Vzdálenost bodů A, B je rovna $|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$.

Střed úsečky
Střed S úsečky AB má souřadnice $[s_1, s_2, ..., s_n]$, kde $s_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ pro $i = 1,2,...,n$.

Poznámka
Symbolicky lze toto zapsat jako $S = \frac{A + B}{2}$.

Vektorový prostor volných vektorů

Definice
Nenulový vektor je množina všech orientovaných úseček stejně dlouhých a stejného směru.
Nulový vektor je množina všech nulových orientovaných úseček.

Souřadnice vektorů
Je-li vektor $\vec{u}$ určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ lze psát
$\vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n) = (u_1, u_2)$ a navíc zřejmě platí $\vec{u} = B - A$.

Početní operace s volnými vektory
- geometricky - algebraicky (souřadnicově)

I. sčítání
- doplněním na rovnoběžník (v rovině)
- $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$

II. odčítání
- znamená přičítání vektoru opačného

III. násobení vektoru reálným číslem
- využitím stejnolehlosti v rovině
- $k \cdot \vec{u} = (ku_1, ku_2, ..., ku_n)$

Velikost vektoru
Platí: $|\vec{u}| = u = \sqrt{u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} + ... + u_n^{\ 2}}$.

IV. součin dvou vektorů

Skalární součin
Definice
Skalární součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ definujeme jako $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$.

Vlastnosti skalárního součinu
1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^{\,2} = |\vec{u}|^2$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3) $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
4) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
5) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{u} \cdot \vec{x} + \vec{u} \cdot \vec{y} + \vec{v} \cdot \vec{x} + \vec{v} \cdot \vec{y}$
6) $(\vec{u} \pm \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} \pm 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$
7) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2\right)$
8) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$,
φ je velikost konvexního úhlu, který svírají orientované úsečky
9) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{o} \vee \vec{v} = \vec{o}$

Vektorový součin

Definice

Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ dvou vektorů z V_3.

a) pokud leží v jedné přímce je $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$
b) pokud neleží v jedné přímce $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, kdy platí:
   i) $\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{w} \perp \vec{v}$
   ii) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tvoří pravotočivou bázi
   iii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$

Vlastnosti vektorového součinu

1) $|\vec{w}|$ je číselně roven obsahu rovnoběžníku vytvářeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$
2) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3) $(k \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$
4) $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$

Smíšený součin

Definice

Smíšeným součinem vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ rozumíme $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Vlastnosti smíšeného součinu

1) Pro objem rovnoběžnostěnu generovaného třemi nekomplanárními vektory platí: $V = [\vec{u}, \vec{v}.\vec{w}]$ tvoří-li $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ pravotočivou bázi a $V = -[\vec{u}, \vec{v}.\vec{w}]$ pro levotočivou.
2) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$