

# 4. ALGEBRAICKÉ ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH SOUSTAVY

## 1 Základní pojmy

1. Vyjmenujte ekvivalentní úpravy rovnic. Jaké znáte důsledkové úpravy rovnic?
2. Vyjmenujte ekvivalentní úpravy nerovnic.
3. Co je to definiční obor a množina kořenů rovnice (nerovnice)? Co je to kořen rovnice?
4. Kdy provádíme zkoušku u rovnic, nerovnic a jejich soustav? Jak taková zkouška vypadá?
5. Vysvětlete pojem algebraické rovnice.
6. Vysvětlete pojem polynomická rovnice. Vyslovte věty o kořenech polynomické rovnice.
7. Dokažte: Jestliže rovnice  $P(x) = 0$  má kořen  $c$ , pak mnohočlen  $x - c$  dělí mnohočlen  $P(x)$  beze zbytku.
8. Dokažte: Má-li polynomická rovnice s reálnými koeficienty (komplexní) kořen  $c$ , pak jejím kořenem je i číslo  $\bar{c}$ .

## 2 Lineární rovnice a nerovnice

1. Řešte početně v množině  $D$ :

$$\begin{aligned}(a) \quad & x[(x+1) - x] = x, \quad D = \mathbb{R} \\(b) \quad & (4x-1)(9x+10) = (2x-3)(18x-1) + 16, \quad D = \mathbb{N} \\(c) \quad & \frac{x-1}{4} - \frac{x-2}{3} = x, \quad D = (-0,3; 0,3)\end{aligned}$$

2. Řešte rovnici graficky (bez jakýchkoli algebraických úprav):  $3x - 2 = x + 2$
3. Řešte rovnice početně i graficky:

$$\begin{aligned}(a) \quad & |x-2| = 5 \\(b) \quad & |x-3| = |x+1| \\(c) \quad & |x+1| + |x-1| = 6 \\(d) \quad & |1 - |x+2|| = 2\end{aligned}$$

4. Řešte početně:  $x + 5 \leq 3(x-1) + 2$
5. Řešte graficky:

$$\begin{aligned}(a) \quad & 4x - 2 > 6 \\(b) \quad & |x-2| - 1 \leq x\end{aligned}$$

## 3 Kvadratická rovnice a nerovnice

1. Napište všechny kvadratické rovnice (s reálnými koeficienty):
  - (a) které mají kořeny 3 a 7;
  - (b) které jsou v obecném tvaru a jejichž kořeny jsou čísla převrácená ke kořenům rovnice  $x^2 + 3x - 2 = 0$ ;

- (c) jejichž dvojnásobný kořen je aritmetickým průměrem kořenů rovnice  $x^2 + 8x - 10 = 0$ ;
- (d) které jsou v normovaném tvaru, mají za kořeny převrácená čísla a součet jejich koeficientů je 0.
2. Pomocí Viétoových vztahů najděte koeficienty  $b, c$  rovnice  $2x^2 + bx + c = 0$ , jestliže jejími kořeny jsou čísla  $-4$  a  $3$ .
3. Řešte rovnici  $x^2 + 6x + 8 = 0$ :
- (a) rozkladem kvadratického trojčlenu;
- (b) doplněním levé strany na čtverec;
- (c) pomocí diskriminantu.
4. Řešte početně i graficky:

$$\begin{aligned}(a) \quad & x^2 - 4 = 0 \\(b) \quad & x^2 - 4x = 0 \\(c) \quad & x^2 - 4|x| = 0 \\(d) \quad & x \cdot |x - 4| = 0\end{aligned}$$

5. Řešte nerovnice početně i graficky:

$$\begin{aligned}(a) \quad & x^2 \leq 0 \\(b) \quad & x^2 - 7x > 0 \\(c) \quad & x^2 \geq 3x - 2 \\(d) \quad & x^2 < 2 - |x|\end{aligned}$$

## 4 Rovnice vyšších řádů. Rovnice a nerovnice vedoucí na polynommické rovnice a nerovnice

1. Řešte v  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}(a) \quad & (x^2 - 7)(x^2 + 16) = 0 \\(b) \quad & \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4} = 0 \\(c) \quad & (2x - 3)(x^2 + 10x + 21) = 0 \\(d) \quad & (x^2 - 3)(x^3 + x - 1) < x^3 - 3x \\(e) \quad & \frac{x + 3}{5 - 2x} \leq 1\end{aligned}$$

2. Řešte početně:

$$\begin{aligned}(a) \quad & \frac{x + 3}{x - 3} + \frac{x - 1}{x - 5} = 4 \\(b) \quad & \frac{2}{2x + 3} - \frac{2}{3 - 2x} = \frac{4x^2 - 21}{4x^2 - 9} \\(c) \quad & x^4 - 16 = 0 \\(d) \quad & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\(e) \quad & x^4 - 10x^2 + 16 = 0 \\(f) \quad & 15x^3 - 49x^2 + 49x - 15 = 0 \\(g) \quad & 6x^5 - 11x^4 - 33x^3 + 33x^2 + 11x - 6 = 0\end{aligned}$$

## 5 Iracionální rovnice a nerovnice

1. Řešte početně:

$$\begin{aligned}(a) \quad & \sqrt{2x+2} = 4 \\(b) \quad & \sqrt{12-x} = x \\(c) \quad & \sqrt{4-x} + \sqrt{x-6} = 7 \\(d) \quad & \sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2 \\(e) \quad & \sqrt{x + \sqrt{11x+4}} = 4\end{aligned}$$

2. Řešte graficky:

$$\begin{aligned}(a) \quad & \sqrt{x-2} = 1 \\(b) \quad & \sqrt{x^2+2x+1} = -3+x\end{aligned}$$

3. Řešte početně:

$$\begin{aligned}(a) \quad & \sqrt{x+5} > x+3 \\(b) \quad & \sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2 \\(c) \quad & \sqrt{2x+3} - 1 > \sqrt{x+1}\end{aligned}$$

## 6 Soustavy rovnic a nerovnic

1. Řešte soustavu (pomocí eliminační metody, matic i determinantů):

$$\begin{aligned}3x + 5y - z &= 8 \\x + 2y + z &= 3 \\y + z &= 1\end{aligned}$$

2. Řešte soustavu:

$$\begin{aligned}6x - 3y &= 12 \\10x - 5y &= 20\end{aligned}$$

3. Řešte soustavu (početně i graficky):

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 17 \\x + y &= 3\end{aligned}$$

4. Řešte soustavy nerovnic:

$$\begin{aligned}(a) \quad & 5x - 2 < 2x + 1 < 6x - 11 \\(b) \quad & |x| < x + 2 < 3\end{aligned}$$

## 7 Rovnice, nerovnice a jejich soustavy s parametry

1. Řešte rovnice v závislosti na parametru  $p \in \mathbb{R}$ :

$$(a) \quad p^2 x - 12 = 4px$$

$$(b) \quad \frac{2}{p} + 1 = \frac{2}{x+1}$$

$$(c) \quad px^2 + 4px + 4 = 0$$

$$(d) \quad (p^2 - 1)x = 2p^2 + p - 3$$

2. Pro které reálné hodnoty parametru  $m$  má rovnice  $mx^2 + x + m = 0$  alespoň jeden reálný kořen?

3. Pro které reálné hodnoty parametru  $m$  má rovnice  $mx^2 + 4mx - 1 = 0$  právě jeden reálný kořen?

4. Pro která  $m \in \mathbb{R}$  má následující rovnice záporný kořen?

$$\frac{x+m}{m} = mx - 1$$

5. Pro která reálná  $p$  má rovnice  $x(x+p) + x(x-p) = 2(x+p)^2$  kořen z intervalu  $(-1; 5)$ ?

6. Řešte soustavu v závislosti na reálném parametru  $p$ :

$$x + py = p$$

$$2x + y = 1$$

## 8 Algebraické rovnice v komplexních číslech

1. Řešte rovnice v  $\mathbb{C}$ :

$$(a) \quad (z - i)4 = (2 - i)^2$$

$$(b) \quad z \cdot \bar{z} = 3z$$

$$(c) \quad x^2 + 11 = 0$$

$$(d) \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(e) \quad x^2 = -5 + 12i$$

$$(f) \quad x^2 - (5 - 3i)x + 4 - 7i = 0$$

$$(g) \quad x^4 - 8x = 0$$

$$(h) \quad ix^3 + 8 = 0$$

2. Napište kvadratickou rovnici v normovaném tvaru s reálnými koeficienty, jejíž jeden kořen je  $3 - 2i$ .

3. Napište binomickou rovnici 4. stupně, jejíž jeden kořen je  $3 - i$ . Určete všechny ostatní kořeny.