1. LOGICKÁ VÝSTAVBA MATEMATIKY

1 Výstavba matematického textu

1. Co je to matematický výraz?
2. Vysvětlete pojmy: axiom, definice.
3. Vysvětlete pojmy: hypotéza, matematická věta, lemma.

2 Výroky

1. Určete, zda následující výpovědi jsou výroky:
   (a) Jak se jmenujete?
   (b) Každý čtverec má tři vrcholy.
   (c) $1 + \sqrt{2} < \sqrt{12}$
   (d) $x + 3 = 8$
   (e) Zjisti, kolik je $1 + 1$.
   (f) Klesla hvězda s nebes výše, mrtvá hvězda siný svit.
2. Určete negace výroků a pravdivostní hodnoty původních výroků i negací:
   (a) Číslo 73 není přirozené.
   (b) Přirozené číslo 9 je prvočíslo.
   (c) Trojúhelník se stranami délek 3 cm, 4 cm a 5 cm je ostroúhlý.
   (d) Česká republika má právě dva prezidenty.
   (e) Řeka Labe protéká alespoň dvěma státy.
   (f) Na notebooku může najednou být spuštěno méně než 5 aplikací.
   (g) Na Moravě leží právě jedna vinice.
3. Jsou dány výroky:
   a: Číslo 5 je kladné.
   b: číslo 5 je přirozené.
   c: Číslo 5 je dvojciferné.
   d: Číslo 5 je větší než 100.

   Vyslovte následující výroky celými větami a určete jejich pravdivostní hodnotu:
   $$a \wedge b, \quad a \vee c, \quad \neg c \wedge d, \quad \neg b \vee \neg d, \quad a \Rightarrow b, \quad c \Rightarrow \neg d, \quad b \Leftrightarrow c, \quad \neg d \Leftrightarrow \neg a$$
   Dále vyslovte obměněnou a obrácenou implikaci k $a \Rightarrow b$.
4. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ukažte, že výroky $a \wedge (b \vee \neg c)$ a $a \wedge b \vee \neg(a \Rightarrow c)$ mají stejné pravdivostní hodnoty.
5. Ředitel televizní stanice chce stvořit nový zábavní pořad, stanovil tyto požadavky:

   V pořadu se bude tančit právě tehdy, když v něm bude hrát jazz.

   Jestliže bude v pořadu hrát jazz, pak ho bude uvádět krásná moderátorka.

   V pořadu se nebude tančit nebo ho nebude uvádět krásná moderátorka.

   V pořadu se bude určitě tančit a nebude v něm hrát jazz.

   Jak by takový zábavní pořad měl podle ředitelových představ vypadat?

3 Číselné soustavy

1. Vysvětlete zápis přirozeného čísla v číselné soustavě. Vysvětlete pojmy základ soustavy, zkrácený a rozvinutý zápis.

2. Zapište:

   (a) číslo $(20)_{10}$ ve dvojkové a trojkové soustavě;

   (b) číslo $(120)_3$ v desítkové soustavě.

3. Určete základ soustavy x tak, aby číslo $(132)_x$ bylo násobkem šesti.

4. Neznámé číslo je zapsáno v desítkové soustavě jako dvojciferné. Jestliže v něm prohodíme cifry a k takto vzniklému číslu přičteme 9, dostaneme původní číslo – které to je?

5. Neznámé číslo je zapsáno v desítkové soustavě jako trojciferné. Jestliže zaměníme první a třetí číslici, dostaneme opět trojciferné číslo, které je o 99 menší. Určete počet takových neznámých čísel.

4 Dělitelnost přirozených čísel

1. Vyslovte definici dělitelnosti přirozených čísel.

2. U čísla 60:

   (a) určete samozřejmé dělitele;

   (b) určete počet všech dělitelů;

   (c) najděte všechny vlastní dělitele;

   (d) najděte všechna jednociferná čísla s ním soudělná;

   (e) určete všechny jeho násobky menší než 300.

3. Víte, že číslo $999\,496$ je dělitelné číslem 101. Najděte všechna přirozená čísla mezi $999\,500$ a $1\,000\,000$, která jsou také dělitelná číslem 101. Nepoužívejte kalkulačku.

4. Doplňte číslici místo otazníku všemi možnými způsoby tak, aby číslo $817?4$ bylo dělitelné:

   (a) dvěma;

   (b) třemi;

   (c) čtyřmi;

   (d) pěti;

   (e) šesti;

   (f) osmi;

   (g) devíti;

   (h) deseti;

   (i) jedenácti;

   (j) dvanácti.

5. Vyslovte Základní větu aritmetiky.

6. Najděte prvočíselné rozklady čísel $84\,700$ a $182\,520$.

7. Najděte největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek čísel 420 a 770.

8. Dva roboti se účastní Robotické olympiády v běhu na $100\,000$ km. Obíhají ovál na stadionu každý stálou rychlostí. Prvnímu trvá jeden oběh 48 vteřin, druhému 56 vteřin. Jak dlouho po startu se budou míjet právě v místě startu?

5 Důkazy

1. Vyjmenujte typy důkazů a uveďte jejich principy.

2. Dokažte přímo:

   (a) Součet dvou lichých přirozených čísel je sudý.

   (b) Součet šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný třemi.

   (c) Jestliže je číslo dělitelné třiceti, pak je dělitelné i šesti.

   (d) Součet prvních n přirozených čísel je roven $\frac{1}{2}n(n+1)$.

   (e) $\forall n \in \mathbb{N} : 3|n \Rightarrow 3 \nmid (n^3+1)$.

   (f) $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : a + b \geq 2\sqrt{ab}$

   (g) Posloupnost $(\frac{4n-1}{n+1})_{n=0}^{\infty}$ je omezená.

3. Dokažte nepřímo:

   (a) Pro každé přirozené číslo n platí: Jestliže číslo n^2 není dělitelné devíti, pak číslo n není dělitelné třemi.

   (b) Jestliže přirozené číslo n je liché, pak $n^2 + 4n$ je také liché číslo.

4. Dokažte sporem:

   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : a + b \geq 2\sqrt{ab}$

   (b) Jestliže je číslo n liché, pak je číslo $3n^2 + 5n - 1$ sudé.

   (c) $\sqrt{15} + \sqrt{2} > \sqrt{21}$ (Postupujte bez numerických výpočtů, tj. bez odhadů a zaokrouhlování.)

5. Dokažte:

   (a) Jestliže se ve čtyřúhelníku úhlopříčky navzájem půlí, pak čtyřúhelník je rovnoběžníkem.

   (b) V rovnoramenném trojúhelníku výška na základnu splývá s těžnicí k základně.

   (c) Jestliže bod C leží na kružnici k nad průměrem AB (tak, že $C \neq A$, $C \neq B$), pak je trojúhelník ABC pravoúhlý.

   (d) Počet úhlopříček pravidelného n-úhelníku je roven $\frac{1}{2}n(n-3)$.

   (e) Počet tělesových úhlopříček pravidelného n-bokého hranolu je $n(n-3)$.

6. Dokažte matematickou indukcí:

   (a) Součet prvních n přirozených čísel je roven $\frac{1}{2}n(n+1)$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N} : 1^3 + 2^3 + \cdot n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

   (c) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

   (d)
   $$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

   (e) Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_1 = 0$, $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2k(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že její vzorec pro n-tý člen lze napsat ve tvaru $a_n = \frac{n-1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.