Kapitola 1.3 Množiny

Množina
Množina je souhrn libovolných objektů, které nazýváme prvky množiny.

Množinu označujeme velkými písmeny A, B, M, ...
Příslušnost či nepříslušnost prvku k množině zapisujeme $x \in M, y \notin M$.

Určení množiny
Množinu lze zadat výčtem, zejména v případě konečných, nebo „logicky uspořádaných“ množin, nebo charakteristickou vlastností. V obou případech užíváme složených závorek.

Příklad 1.3.1

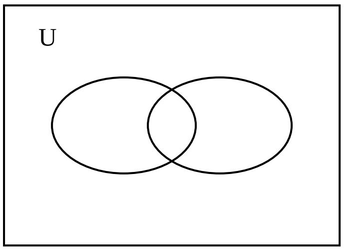
$$A = \{\text{červená}, \text{oranžová}, \text{žlutá}, \text{zelená}, \text{modrá}, \text{indigová}, \text{fialová}\}$$

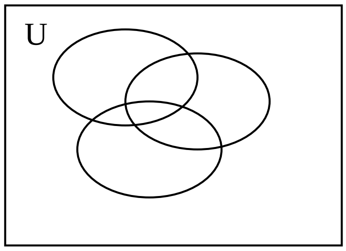
$$B = \{10, 100, 1000, 10000, ...\}$$

$$C = \{\text{obyvatel Čkyně, kteří jsou vyšší než } 158\,cm\}$$

Existuje jediná množina, která nemá žádný prvek – prázdná množina. Značíme ji $\emptyset$.

Vennovy diagramy
Slouží ke grafickému znázornění množin. Na obrázku jsou případy pro 2 a 3 množiny.





Vztahy mezi množinami

Definice 1.3.1 Rovnost
Říkáme, že množina A se rovná množině B právě tehdy, když každý prvek z množiny A je prvkem množiny B a naopak. Zapisujeme $A = B$.

Definice 1.3.2 Podmnožina čili vztah inkluze
Množina A je podmnožinou množiny B právě tehdy, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B.
Zapisujeme $A \subseteq B$.

Víme-li, že je množina A podmnožinou množiny B a zároveň neplatí rovnost, označíme vztah jako ostrou inkluzi, se zápisem $A \subset B$.

Operace s množinami

Definice 1.3.3
Průnikem množin A, B nazveme množinu prvků, které patří do každé z uvedených množin.
$A \cap B$

Sjednocením množin A, B nazveme množinu prvků, které patří aspoň do jedné z uvedených množin.
$A \cup B$

Doplňkem množiny A v množině B, nazveme množinu prvků které patří do množiny B a zároveň nepatří do množiny A.

A'_B

Není-li uvedeno v jaké množině je doplněk požadován, uvažujeme nejširší množinu – základní prostor.

Rozdílem množin A, B nazveme množinu prvků které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B.

$A - B$

Věta 1.3.1
Nechť A, B, C jsou libovolné podmnožiny základní množiny U. Potom platí:

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup A' = U \qquad A \cap A' = \emptyset$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow (A \subset C)$$

Poznámka
Obsah předcházející věty 1.3.1 porovnej s tabulkou na straně 3.

V množině nezáleží na pořadí prvků narozdíl od uspořádaných n-tic. Uspořádané n-tice budeme narozdíl od množin zapisovat do hranatých závorek - $[x_1, x_2, ..., x_n]$.

Definice 1.3.4 Kartézský součin
Kartézským součinem množin A, B rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$ takových, že $x \in A$ a $y \in B$. Značíme AxB.
Symbolickým zápisem $AxB = \{[x, y] : x \in A \wedge y \in B\}$.

Kartézskou mocninou označujeme případ, kdy platí $A = B$ a značíme $AxB = A^2$, resp. A^n.

Binární relace
Binární relací z množiny A do množiny B nazveme libovolnou podmnožinu kartézského součinu AxB. Zapisujeme $x\Re y$.

Binární relace v množině M znamená podmnožinu kartézské mocniny M^2.

Poznámka
$\Re$ označuje ve své podstatě nějaký vztah mezi prvkem x a prvkem y.

Grafické znázornění kartézských součinů a binárních relací

I. Kartézský graf
II. Uzlový graf (zejména u relace v M)

Definice 1.3.5 Vlastnosti binárních relací v množině M
Binární relaci v množině M nazveme:

I. reflexivní $\Leftrightarrow$ $\forall a \in M : a\Re a$
II. symetrická $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in M : (a\Re b) \Rightarrow (b\Re a)$
III. tranzitivní $\Leftrightarrow$ $\forall a,b,c \in M : ((a\Re b) \wedge (b\Re c)) \Rightarrow (a\Re c)$
IV. antireflexivní $\Leftrightarrow$ $\forall a \in M : a\Re' a$
V. antisymetrická $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in M : ((a\Re b) \wedge (b\Re a)) \Rightarrow (a = b)$
VI. souvislá $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in M : ((a\Re' b) \wedge (a \neq b)) \Rightarrow (b\Re a)$

Definice 1.3.6 Zobrazení
Zobrazením Z z množiny A do množiny B nazveme binární relaci právě tehdy, když ke každému prvku $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$.
Terminologie $[x, y]$ nazýváme x ... vzorem nebo první složkou
y ... obrazem nebo druhou složkou
Definiční obor zobrazení Z je $D_Z = \{x \in A : \exists y \in B : [x, y] \in Z\}$
Obor hodnot zobrazení Z je $H_Z = \{y \in B : \exists x \in A : [x, y] \in Z\}$

Zřejmě mluvíme o zobrazení z A do B, jestliže $D_Z \subset A$ a $H_Z \subset B$.
Speciální případy

I. Jestliže $D_Z = A$, pak mluvíme o zobrazení množiny A do množiny B.
II. Jestliže $H_Z = B$, pak mluvíme o zobrazení z množiny A na množinu B.
III. Když $D_Z = A$ a $H_Z = B$, pak mluvíme o zobrazení množiny A na množinu B.

Definice 1.3.7 Prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení čili bijekce

Zobrazení Z z množiny A do množiny B nazveme prostým právě tehdy, když ke každým dvěma různým vzorům existují též různé obrazy.
Zobrazení Z z množiny A do množiny B nazveme vzájemně jednoznačným neboli bijekcí právě tehdy, když je prosté a jedná se o zobrazení množiny A na množinu B čili (III).

Inverzní zobrazení
Jestliže Z je zobrazení prosté, existuje zobrazení v němž si vzor a obraz vymění vzájemně úlohu. Mluvíme o inverzním zobrazení Z_{-1} k zobrazení Z. (Obvyklé značení je Z^{-1}.)

Kartézský graf zobrazení Z a zobrazení k němu inverznímu jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu.

Definice 1.3.8 Složené zobrazení
Nechť U je zobrazení z množiny A do množiny B a V je zobrazení z množiny $U(A)$ do množiny C. Potom zobrazení Z z množiny A do množiny C, které je zapisováno $Z: y = V(U(x)) = V \circ U$ nazveme složeným zobrazením, kde U je vnitřní a V vnější zobrazení.

Definice 1.3.9
Množina A je ekvivalentní (má stejnou mohutnost) jako množina B právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B.

Vztah ekvivalence rozdělí všechny množiny na navzájem disjunktní skupiny podle počtu prvků bez ohledu na charakter jejich prvků (rozklad na třídy). Odtud by se mohla rozvíjet aritmetika tzv. kardinálních čísel.

Definice 1.3.10 Konečné a nekonečné množiny (Dedekindova)
Množina se nazývá nekonečnou právě tehdy, když je ekvivalentní s některou svojí vlastní podmnožinou, konečnou v případě, že není nekonečná.

Unární operací na množině M rozumíme zobrazení množiny M do množiny M.
Binární operací na množině M rozumíme zobrazení množiny MxM do množiny M.
n-ární operací na množině M rozumíme zobrazení množiny M^n do množiny M.

Definice 1.3.11 Uspořádaná množina
Nechť na A^2 je definována relace $\Re$. Jestliže pro každou dvojici různých prvků z A platí právě jedna z variant: $a\Re b$, nebo $b\Re a$ s následujícími vlastnostmi:

I. $\Re$ je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní

Potom se množina A nazývá uspořádaná. Značíme $[A, \leq]$.

II. $\Re$ je areflexivní a tranzitivní

Potom množinu A nazveme ostře uspořádanou. Značíme $[A, <]$.

Funkce
Funkce f jedné reálné proměnné je zobrazení v množině R.

Poznámka
Kartézský součin $A_1 x A_2 x ... x A_n$, *n-ární relace, první obor relace, druhý obor relace, inverzní relace*