Analytická geometrie

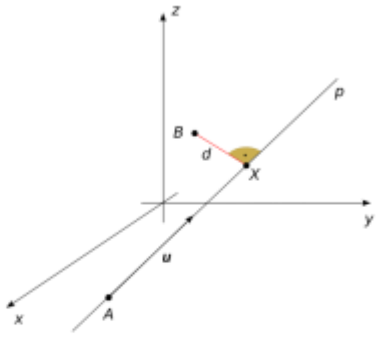
Portál středoškolské matematiky

Vzdálenost

V rovině jsme počítali vzdálenost bodu od přímky a vzdálenost dvou přímek. V prostoru se naučíme řešit tytéž úlohy a navíc budeme počítat vzdálenost bodu od roviny a vzdálenost dvou rovin.

Vzdálenost bodu od přímky

Mějme zadánu přímku $p(A, \mathrm{u})$ a bod B. Hledáme vzdálenost d bodu B od přímky p viz *obr. 4.10*.



Obr. 4.10: Vzdálenost bodu od přímky

Najdeme takový bod X přímky p, pro který platí $(B - X)\mathrm{u} = 0$. Že to musí platit je zřejmé z obrázku a je i vidět, že takový bod je jen jeden. Vzdálenost bodu B od přímky p je potom rovna $|XB|$.

Úmluva: Stejně jako v rovině budeme vzdálenost bodu B od přímky p značit $|Bp|$.

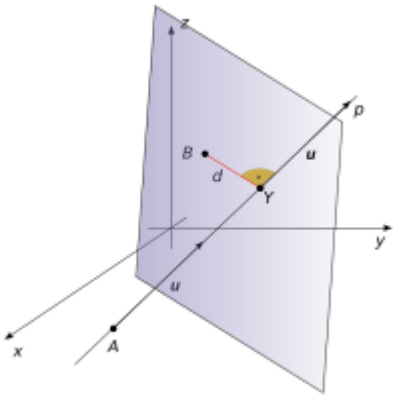
Příklad 4.9

Určete vzdálenost bodu B od přímky $p(A, \mathrm{u})$, je-li $A[3; 0; -1]$, $B[1; 2; 1]$ a $\mathrm{u} = (-1; 0; 1)$.

Řešení

- Jak jsme si vysvětlili, hledáme nejprve bod $X[x; y; z]$, který bude ležet na přímce p a pro který platí, $(B - X)\mathrm{u} = 0$. Protože bod X leží na přímce p, můžeme s využitím jejího parametrického vyjádření jeho souřadnice zapsat jako:
  $x = 3 - t$,
  $y = 0$,
  $z = -1 + t$,
  pro nějakou hodnotu parametru t. Vyjádříme druhou podmínku, $(B - X)\mathrm{u} = 0$:
  $(1 - 3 + t)\cdot(-1) + (2 - 0)\cdot 0 + (1 + 1 - t)\cdot 1 = 0$,
  $2 - t + 2 - t = 0$,
  $t = 2$.

- Zjistili jsme, že bod *X* má souřadnice *X*[1; 0; 1]. Vzdálenost *d*, bodu *B* od přímky *p*, je rovna $|d| = |Bp| = |XB| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2$.
- Celý příklad by se dal řešit ještě jinak. Bodem *B* můžeme vést rovinu kolmou na přímku *p*. Ta přímku *p* protne v nějakém bodě *Y*. Vzdálenost |*BY*| je vzdálenost bodu *B* od přímky *p*.



Obr. 4.11: Řešení příkladu 4.9

- Normálový vektor roviny kolmé na přímku *p* je směrovým vektorem přímky *p*, tedy u = (-1; 0; 1). Její obecná rovnice je -*x* + *z* + *d* = 0. Koeficient *d* určíme po dosazení souřadnic bodu *B* do této rovnice, *d* = 0. Hledáme bod *Y*, který je průsečíkem roviny -*x* + *z* = 0 a přímky *p*:
  -(3 - *t*) + (-1 + *t*) = 0,
  -3 + *t* - 1 + *t* = 0,
  2*t* - 4 = 0,
  t = 2.
- Bod *Y* má souřadnice *Y*[1; 0; 1]. Všiměte si, že body *X* a *Y* jsou ve skutečnosti jeden a tentýž bod: $|d| = |YB| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2$.

Vzdálenost bodu od roviny

Věta

Vzdálenost *d* bodu *P*[*p*1; *p*2; *p*3] od roviny *δ*: *ax* + *by* + *cz* + *e* = 0 je vyjádřena vzorcem:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

zobraz důkaz

Úmluva: Vzdálenost bodu *B* od roviny *ρ* budeme značit |*Bρ*|.

Úloha

Spočítejte vzdálenost bodu *B*[-6; 8; -7] od roviny *ρ*: -7*x* - 4*y* + 9*z* + 9 = 0.

Řešení

- Abychom spočetli vzdálenost bodu od roviny, stačí umět dosadit do vzorce pro její výpočet. $d = \dfrac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
- Dosadíme do vzorce a spočítáme *d*

$$d=|B\rho|=\frac{|(-7)\cdot(-6)+(-4)\cdot 8+9\cdot(-7)+9|}{\sqrt{(-7)^2+(-4)^2+9^2}}=\frac{|-44|}{\sqrt{146}}\approx 3,64$$

- $d \approx 3{,}64$.

Praze. Design by Free CSS Templates.