př: Najít průsečíky přímky $p(A;\vec{u})$ a kružnice $(x-3)^2+(y-2)^2=4$, $A[-1;5]$, $\vec{u}=(1;-1)$

$p:\ x=-1+t$
$y=5-t$

$(x-3)^2+(y-2)^2=4$
$(-1+t-3)^2+(5-t-2)^2=4$
$(t-4)^2+(2-t)^2=4$
$t^2-8t+16+4-4t+t^2=4$
$2t^2-12t+16-4=0$
$t^2-6t+8=0$
$t_1=4;\ t_2=2$

① $x=-1+4=3$
$y=5-4=0 \Rightarrow \underline{[3;0]}$

② $x=-1+2=1$
$y=5-2=2$ $\underline{[1;2]}$

př: Určete vzájemnou polohu přímky $p: x-y+5=0$ a kružnice
$k: x^2+2x+y^2-4y+1=0$.

$x=y-5$
$(y-5)^2+2(y-5)+y^2-4y+1=0$
$y^2-10y+25+2y-10+y^2-4y+1=0$
$2y^2-12y+16=0$
$y^2-6y+8=0$
$y_1=4;\ y_2=2$

$x_1=4-5=-1$
$x_2=2-5=-3$

$[-1;4]$
$[-3;2]$

př: Najít rovnici tečny kružnice $x^2-2x+y^2-4y-20=0$ v bodě $T[4;-2]$.

$x^2-2x+y^2-4y-20=0$
$(x-1)^2+(y-2)^2-20-1-4=0$
$x^2-2x+1 \qquad +4$
$(x-1)^2+(y-2)^2-25=0$
$(x-1)^2+(y-2)^2=25$
$(x-1)(x_0-1)+(y-2)(y_0-2)=25$
$(4-1)(4-1)+(y-2)(-2-2)=25$
$3(x-1)-4(y-2)=25$
$3x-3-4y+8=25$
$3x-4y+5-25=0$
$\underline{3x-4y-20=0}$

př: Najít rovnici kružnice $x^2-6x+y^2-4y-5=0$, která je rovnoběžná s přímkou p: $x+y+5=0$.

$(x-3)^2+(y-2)^2-9-4-9=0$

$(x-3)(x_0-3)+(y-2)(y_0-2)=18$

$\Rightarrow$ normál. vektor kružnice $= (x_0-3; y_0-2)$

$\Rightarrow \vec{n_p} = (1;1)$

$\Downarrow$

$(x_0-3; y_0-2) = k\cdot(1;1)$

$x_0 = k+3 \; ; \; y_0 = k+2$

- je to bod dotyku, takže platí

$(x_0-3)^2+(y_0-2)=18$

$(k+3-3)^2+(k+2-2)^2=18$

$2k^2=18$

$k^2=9$

$k=\pm 3$

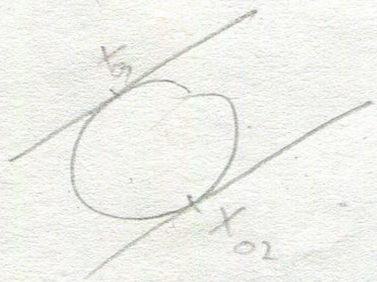
$x_0 = k+3 \qquad y_0 = k+2$

$x_{01} = 6 \qquad y_{01} = 5$

$x_{02} = 0 \qquad y_{02} = -1$

$X_{01}[6;5]$

$X_{02}[0;-1]$



$3(x-3)+3(y-2)=18$

$3x-9+3y-6=18$

$3x+3y-33=0$

$x+y-11=0$

$-3(x-3)-3(y-2)=18$

$-3x+9-3y+6=18$

$-3x-3y-3=0$

$x+y+1=0$

př: Určete tečnu elipsy $\frac{(x-2)^2}{10}+\frac{(y-3)^2}{40}=1$ v bodě $T[3;9]$

$\frac{(3-2)(x-2)}{10}+\frac{(9-3)(y-3)}{40}=1$

$\frac{x-2}{10}+\frac{6(y-3)}{40}=1$

$4x-8+6y-18=40$

$4x+6y-66=0$

$2x+3y-33=0$

př: Určit rovnici tečen elipsy $\frac{(x+1)^2}{32} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$, které jsou kolmé k přímce

$p: 4x - y + 5 = 0.$

$\Rightarrow \vec{n}_p = (4; -1)$

$$\frac{(x_0+1)(x+1)}{32} + \frac{(y_0-2)(y-2)}{2} = 1$$

$$(x_0+1)(x+1) + 16(y_0-2)(y-2) = 32$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{tečna} = (x_0+1; y_0-2)$$

$$\vec{n}_t \cdot \vec{n}_p = 0$$

$$4\cdot(x_0+1) + (-1)\cdot 16(y_0-2) = 0$$

$$(4x_0+4) - (16y_0-32) = 0$$

$$4x_0 + 4 - 16y_0 + 32 = 0$$

$$4x_0 - 16y_0 + 36 = 0$$

$$x_0 - 4y_0 + 9 = 0$$

$$x_0 = 4y_0 - 9$$

$$\Rightarrow (x_0+1)(x+1) + 16(y_0-2)(y-2) = 32$$

dosadíme 1

$$x + 4y + 1 = 0$$

$$x + 4y - 15 = 0$$

$$\frac{(x_0+1)^2}{32} + \frac{(y_0-2)^2}{2} = 1$$

$$\frac{(4y_0-9+1)^2}{32} + \frac{(y_0-2)^2}{2} = 1$$

$$(4y_0-8)^2 + 16\cdot(y_0-2)^2 = 1$$

$$16y_0^2 - 2\cdot 8\cdot 4y_0 + 64 + 16\cdot(y_0^2 - 4y_0 + 4) = 32$$

$$16y_0^2 - 64y_0 + 64 + 16y_0^2 - 64y_0 + 64 = 32$$

$$y_0^2 - 4y_0 + 4 + y_0^2 - 4y_0 + 4 = 2$$

$$2y_0^2 - 8y_0 + 6 = 0$$

$$y_0^2 - 4y_0 + 3 = 0$$

$$y_{01} = 3;\ y_{02} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_{01} = 3;\ x_{02} = -7$$

př: Najdi společné body přímky $2x - y + 5 = 0$ a paraboly $(y-3)^2 = 2(x-1)$

$$2x = y - 5$$

$$x = \frac{y-5}{2}$$

$$\frac{(y-3)^2}{2} = x - 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{2} + 1 = x$$

$$y - 5 - y^2 + 6y - 11 = 0$$

$$y^2 + 7y - 16 = 0$$

$$y^2 - 7y + 16 = 0$$

$$\frac{y-5}{2} = \frac{(y-3)^2}{2} + 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{2} = \frac{y-5}{2} - 1$$

$$y^2 - 7y + 16 = 0$$

$$y - 5 = y^2 - 6y + 9 + 2$$

$$(y-3)^2 = y - 5 - 2$$

$$y^2 - 6y + 9 = y - 7$$

$\Rightarrow$ NŘ - nemají spol. bod

$2x-1+5=0$; $(y-3)^2=2(x-1)$

$2x+5=y$ $\quad (2x+5-3)^2=2(x-1)$

$(2x+2)^2=2x-2$

$4x^2+2\cdot2\cdot2x+4=2x-2$

$4x^2+8x+4=2x-2$

$4x^2+8x-2x+4+2=0$

$4x^2+6x+6=0$

$2x^2+3x+3=0$

$NŘ \Rightarrow$ nemají společný bod

př: Určit vzájemnou polohu paraboly $(y-1)^2=-4x$ a přímky $-x+2y+2=0$, popř. společné body.

$(y-1)^2=-4x$

$x=2y+2$

$(y-1)^2=-4(2y+2)$

$y^2-2y+1=-8y-8$

$y^2-2y+8y+1+8=0$

$y^2+6y+9=0$

$y=-3$

$(-3-1)^2=-4x$

$(-4)^2=-4x$

$\frac{16}{-4}=x=-4$

$[-3;-4]$ $\Downarrow$ jeden společný bod

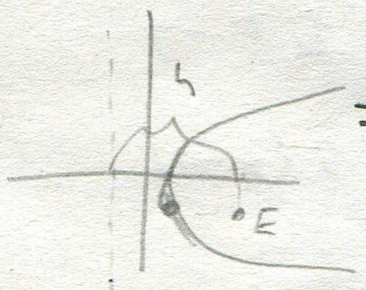
$\vec{n}_p=(-1;2)$

$osa \parallel x \Rightarrow \vec{n}_o=(0;1)$

$\vec{n}_p\cdot\vec{n}_o=-1\cdot0+2\cdot1=2 \neq 0 \Rightarrow$ nejsou kolmé

$\Rightarrow$ tečna

př: Parabola má řídicí přímku $x=-1$, $E[3;-1]$. Napiš rovnici tečny v $T[9;7]$



$\Rightarrow V[1;-1]$

$(y-m)^2=\pm2p(x-m)$

$(y-(-1))^2=2\cdot4(x-1)$

$(y+1)^2=8(x-1)$

tečna v $[9;7]$: $(y+1)(7+1)=4(x-1)+4(9-1)$

$8\cdot(y+1)=4(x-1)+32$

$8y+8=4x-4+32$

$-4x+8y+8+4-32=0$

$-4x+8y-20=0 \quad /\cdot(-4)$

$x-2y+5=0$

př: Najít řídicí přímku a ohnisko paraboly $x^2+4x-4y+16=0$, určit vzáj. polohu / příp. průsečíky s přímkou $3x-y+1=0$

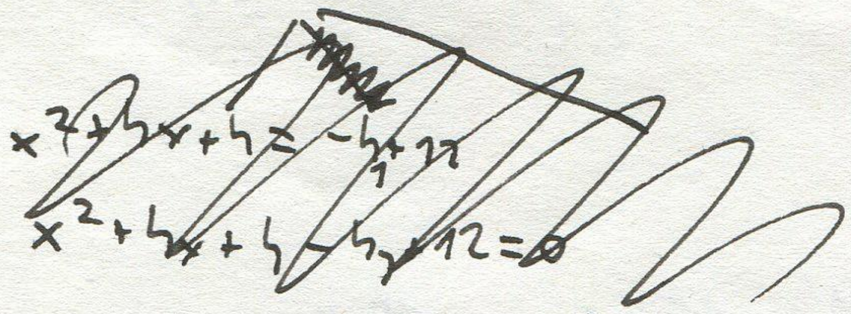
$$(x-m)^2 = \pm 2p\,(y-n)$$
$$(x-(-2))^2 = \pm 2\cdot(-2)\,(y-3)$$
$$(x+2)^2 = \pm\,-4(y-3)$$
$$x^2+4x+4 = \pm\,(-4y+12)$$

$-4y+12$

$x^2+4x+4 = (x+2)^2$

$\Rightarrow m=(-2)$

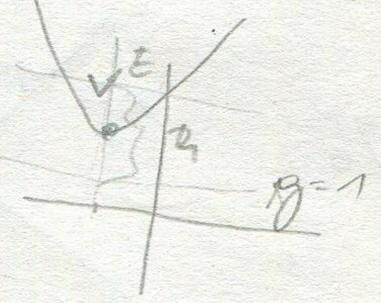
$V[-2,-+3]$



$(x+2)^2 = 4(y-3)$

$2p(y-n) = -4y+12$

$2\cdot(-2) \quad -4\cdot(y-3)$



"$2p = 2\cdot 2$

$p=1$

$\in [-2;5]$

$y = 3x+1$

$x^2+4x-4(3x+1)+16=0$

$x^2+4x-12x-4+16=0$

$x^2-8x+12=0$

$x_1=6$

$x_2=2$

$y_1 = 3\cdot 6+1=19$

$y_2 = 3\cdot 2+1=7$

$[6;19]$
$[2;7]$

$\Rightarrow$ řešení

př: Určit počet společných bodů hyperboly $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ a přímky $x+3y-1=0$

$x = 1-3y$

$$\frac{(1-3y+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

$$4(3-3y)^2 - 9(y-1)^2 = 36$$
$$4(3^2-18y+9y^2) - 9(y^2-2y+1) - 36 = 0$$
$$36-72y+36y^2-9y^2+18y-9-36=0$$
$$4-8y+4y^2-y^2+2y-1-4=0$$
$$3y^2-6y-1=0$$

2 řešení $\Rightarrow$ 2 společné body

př: Přímka $4x - 15y - 5 = 0$ a hyperbola $\frac{(x-1)^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$, určit vzáj. pol. a spol. body.

$4x = 15y + 5$

$x = \frac{15y+5}{4} \rightarrow \boxed{\frac{15y}{4} + 1}$

$\frac{\left(\frac{15y}{4}+1-1\right)^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$

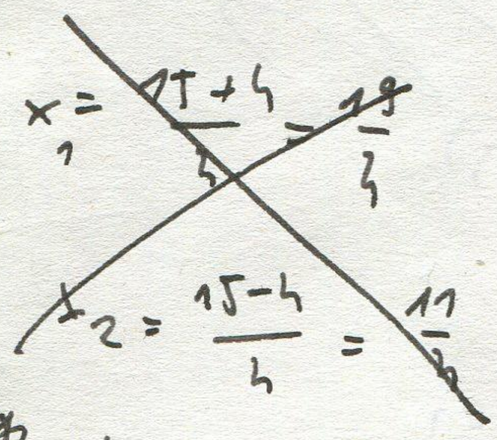
$\frac{225y^2}{16} - 9y^2 = 81 \quad / \cdot 16$

$225y^2 - 144y^2 = 1296$

$81y^2 = 1296$

$y^2 = 16$

$y = \pm 4$



$x_1 = \frac{15 \cdot 4}{4} + 1 = 16$

$x_2 = \frac{-4 \cdot 15}{4} + 1 = 11$

$[\frac{19}{4}; 4]$

$[\frac{11}{4}; -4]$

$[16; 4]$

$[11; -4]$

př: Najít rovnici tečny hyperboly $4x^2 - 5y^2 - 24x - 20y - 4 = 0$ v bodě $T[8; -6]$.

$4x^2 - 24x - 5y^2 - 20y - 3 = 1$

$4 \cdot (x^2 - 6x) - 5 \cdot (y^2 + 4y) - 3 = 1$

$x^2 - 6x + \boxed{9}$ $\quad (y^2 + 4y + \boxed{4})$

$(x-3)^2 \quad (y+2)^2$

$4 \cdot (x-3)^2 - 36 - 5 \cdot (y+2)^2 + 20 - 3 = 1$

$4(x-3)^2 - 5(y+2)^2 = 20 \quad / : 20$

$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

$\frac{(x-3)(8-3)}{5} - \frac{(y+2)(-6+2)}{4} = 1$

$\frac{1(x-3)}{5} - \frac{-8(y+2)}{4} = 1$

$(x-3) + 2(y+2) = 1$

$x - 3 + 2y + 4 = 1$

$x + 2y - 7 = 1$

$x + 2y - 8 = 0$