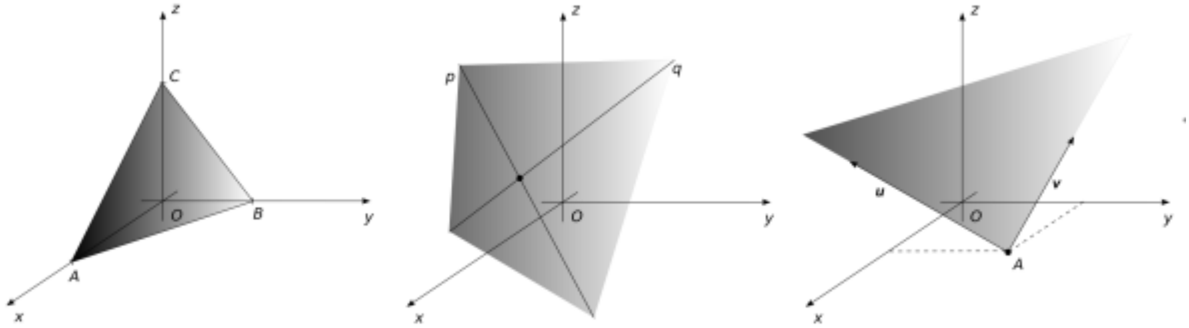
Analytická geometrie - Geometrie v prostoru

Parametrické vyjádření roviny

V prostoru je rovina jen jedním z mnoha objektů, a proto má smysl zabývat se jejím vyjádřením. Rovina je určena třemi nekolineárními body , nebo dvěma různými přímkami, které ale nejsou mimoběžné, nebo třeba bodem a dvěma různými vektory, z nichž jeden není reálným násobkem druhého.



Obr. 4.2: Určení roviny

Zavedeme si dvě různá vyjádření roviny v prostoru - parametrické vyjádření a později obecnou rovnici roviny.

Definice

Rovnice $X = A + s\mathrm{u} + t\mathrm{v}$, kde $s, t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{u} \neq \mathrm{o}$, $\mathrm{v} \neq \mathrm{o}$, a $\mathrm{u} \neq k\mathrm{v}$, pro libovolné $k \in \mathbb{R}$,
se nazývá **parametrická rovnice** nebo též **parametrické vyjádření** roviny ABC, kde $B = A + \mathrm{u}$ a $C = A + \mathrm{v}$. Neznámé s, t nazýváme **parametry**.

Zapíšeme-li parametrickou rovnici roviny určenou bodem A a vektory u a v, kde $A[a1; a2; a3]$, $\mathrm{u} = (u1; u2; u3)$ a $\mathrm{v} = (v1; v2; v3)$, pomocí souřadnic bodů a vektorů, získáme vyjádření souřadnic bodů $X[x; y; z]$ této roviny v závislosti na hodnotách parametrů s a t:
$x = a1 + su1 + tv1$,
$y = a2 + su2 + tv2$,
$z = a3 + su3 + tv3$; $s, t \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.3

Určete parametrickou rovnici roviny ABC, jestliže $A[0; 2; 1]$, $B[-1; 3; 2]$ a $C[4; -1; 3]$.

Řešení

Poznámka

Každá rovina v prostoru je vyjádřena nějakým parametrickým vyjádřením roviny a každé parametrické vyjádření roviny popisuje nějakou rovinu.

Úloha

Rozhodněte, zda bod $K[3; 2; 0]$ leží v rovině určené bodem $A[2; 1; 5]$ a přímkou $p(B, \mathrm{u})$, jestliže $B[2; -1; 2]$ a $\mathrm{u} = (1; 3; 3)$.

Řešení

- Ze souřadnic bodu A a vektorů u a AB určíme parametrické vyjádření zadané roviny
  $x = 2 + s$,
  $y = 1 + 3s - 2t$,
  $z = 5 + 3s - 3t$; $s, t \in \mathbb{R}$.
- Aby bod K byl bodem této roviny, musí nutně existovat hodnoty parametrů s a t, pro které bude parametrická rovnice určovat souřadnice bodu K. Za x, y, z dosadíme souřadnice bodu K: $3 = 2 + s$, $2 = 1 + 3s - 2t$, $0 = 5 + 3s - 3t$. Z první rovnice vyjádříme $s = 1$ a z druhé rovnice dopočítáme $t = 1$. Dosadíme-li získané hodnoty do třetí rovnice zjistíme, že $0 = 5 + 3 - 3$, $0 \neq 5$.
- Soustava nemá řešení, a proto bod K v zadané rovině neleží.