2.3 Lineární soustavy

Soustava má význam konjunkce rovnic a nerovnic z nichž se soustava skládá.
Řešením soustavy je číslo, uspořádaná dvojice, trojice, … , která je řešením všech rovnic nebo nerovnic soustavy zároveň.
Množina všech řešení soustavy je rovna průniku množin řešení jednotlivých rovnic a nerovnic soustavy.

Odbočka
Definice
Množina M se nazývá konvexní právě tehdy, když pro všechny body $X, Y \in M$ platí, že $XY \subset M$.
Pokud tomu tak není, nazveme množinu nekonvexní.

Příklad
Uveďte příklady typů konvexních množin na přímce, v rovině a v prostoru.

Věta
Průnik konvexních množin je konvexní množina.

Grafem soustavy lineárních rovnic a nerovnic je konvexní množina v příslušném prostoru (na přímce, v rovině, v prostoru).

Příklad
Řešte graficky soustavy:

a) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \\ 4x - y &< 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 1 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x - 3y &\geq 4 \\ 3x + 2y &\geq 5 \end{aligned}$

Příklad
Sestavte soustavu jejímž grafem je:
a) jednotková krychle se středem v počátku souřadné soustavy
b) trojúhelník s vrcholy o souřadnicích $[2,1], [3,5], [2,6]$
c) pás s osou $y = -x$ o šířce 2

Soustavy n lineárních rovnic pro n neznámých

Soustava má buď právě jedno řešení ve tvaru uspořádané n-tice ... regulární soustavy, nebo žádné či nekonečně mnoho řešení … singulární soustavy.

2.3.1 Soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé

$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$, kde $a, b, c, d, e, f \in R$ resp. $\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$, $a_i, b_i, c_i \in R, i = 1,2$

a) **Trojúhelníkové soustavy**

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ ey&=f \end{aligned}$$, kde $a,e\neq 0$.

Trojúhelníková soustava je vždy regulární a $K=\left\{\left[\dfrac{c-b\frac{f}{e}}{a},\dfrac{f}{e}\right]\right\}$.

b) **Soustavy převoditelné na trojúhelníkové** tzv. eliminací ekvivalentními úpravami

Ekvivalentní úpravy soustavy

I. Ekvivalentní úprava libovolné rovnice soustavy
II. Vzájemná záměna rovnic soustavy
III Nahrazení jedné rovnice součtem libovolných násobků první a druhé rovnice

c) **Soustavy nepřevoditelné na trojúhelníkové**

Buď přímo ze zadání, nebo po úpravě dostáváme $\begin{aligned} ax+by&=c \\ 0y&=f \end{aligned}$ resp. $\begin{aligned} ax+by&=c \\ 0x&=f \end{aligned}$.

Pokud $f=0$ má soustava nekonečně mnoho řešení nebo žádné řešení v závislosti na rovnici $ax+by=c$. Pokud $f\neq 0$ soustava řešení nemá. Analogicky pro druhou variantu.

Další způsoby řešení

I. Dosazovací metoda

Z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a vyjádření dosadíme do druhé rovnice, čímž dostáváme lineární rovnici pro jednu neznámou. V závislosti na jejím řešení potom určíme, zda má soustava jedno řešení ve tvaru uspořádané dvojice, nebo je řešením nekonečně mnoho uspořádaných dvojic jistého tvaru, nebo řešení soustavy neexistuje.

II. Srovnávací metoda

Vyjádříme z obou rovnic stejnou neznámou a obě vyjádření porovnáme. Opět v závislosti na řešení získané lineární rovnice pro jednu neznámou určíme výsledek .

2.3.1 Příklad

a) $\begin{aligned} 2x-3y&=4 \\ -x+y&=-8 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} -2x+5y&=8 \\ 4x-10y&=-16 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} -x-y&=21 \\ 5x+5y&=12 \end{aligned}$

2.3.2 Soustavy tří lineárních rovnic pro tři neznámé

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\,,\quad a_i,b_i,c_i,d_i\in R, i=1,2,3 \\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3 \end{aligned}$$

a) **Trojúhelníkové soustavy**

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y + c_2z &= d_2 \\ c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad \text{, kde } a_1, b_2, c_3 \neq 0.$$

Trojúhelníková soustava je vždy regulární a

$$K = \left\{ \left[\frac{d_1 - b_1 \dfrac{d_2 - c_2 \dfrac{d_3}{c_3}}{b_2} - c_1 \dfrac{d_3}{c_3}}{a_1}, \frac{d_2 - c_2 \dfrac{d_3}{c_3}}{b_2}, \frac{d_3}{c_3} \right] \right\}.$$

b) **Soustavy převoditelné na trojúhelníkové** tzv. eliminací ekvivalentními úpravami

c) **Soustavy nepřevoditelné na trojúhelníkové**

Jedná se o soustavy, které lze převést na následující typy:

i.
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ b_2y + c_2z &= d_2 \\ c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad \text{, kde } a_1, b_2 \neq 0, c_3 = 0.$$

Pokud $d_3 \neq 0$ soustava nemá řešení.

Pokud $d_3 = 0$ vyhovuje třetí rovnici soustavy každé reálné číslo z, které může ve druhé rovnici soustavy figurovat jako parametr a celá soustav je singulární a množina řešení je nekonečně mnoho uspořádaných trojic $K = \left\{ \left[\dfrac{d_1 - b_1 \dfrac{d_2 - c_2 z}{b_2} - c_1 z}{a_1}, \dfrac{d_2 - c_2 z}{b_2}, z \right], z \in R \right\}$.

ii.
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ c_2z &= d_2 \\ c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad \text{, kde } a_1 \neq 0.$$

Pokud budou druhá nebo třetí rovnice bez řešení, nebo budou dávat rozporné rovnosti, soustava nemá řešení.

Pokud z těchto rovnic vyplyne $z = \dfrac{-d_2}{c_2}$ nebo $z = \dfrac{-d_3}{c_3}$, dostáváme z první rovnice nekonečně mnoho uspořádaných trojic a množina řešení $K = \left\{ \left[\dfrac{d_1 - b_1 y - c_1 \dfrac{d_2}{c_2}}{a_1} \right], y \in R \right\}$

a analogicky pro druhou možnost.

iii. V soustavě též může vystupovat některá neznámá pouze formálně. V takových případech postupujeme jako při řešení tří rovnic o dvou neznámých, nebo tří rovnic o jedné neznámé (viz kapitola 2.3.5), přičemž při zápisu výsledku nezapomeneme na příslušnou volnou složku nebo volné složky uspořádané trojice.

2.3.3 Soustavy čtyř a více lineárních rovnic pro čtyři a více neznámých

Při řešení takovýchto úloh postupujeme analogicky jako v předchozích případech.
Úplné diskuze řešení jsou pro tento a vyšší případy příliš rozsáhlé.

Obecnou metodu řešení úloh z předchozích kapitol představí následující část textu.

2.3.4 Soustavy $n-$ lineárních rovnic pro $n-$ neznámých

Soustavu lze zapsat při dodržení úmluv o pořadí neznámých pomocí obdélníkového schématu koeficientů tzv. matice.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} & b_n \end{array}\right) = \left(A_n \middle| B_{n1}\right)$$

Každé čtvercové matici tj. schématu o n řádcích a n sloupcích je jednoznačně přiřazeno číslo nazývané determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pro jeho hodnotu pro $n=2$ lze dokázat $D = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$ a pro $n=3$
$D = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}$.
Pro rozsáhlejší matice musíme pro výpočet determinantu použít postup zvaný rozvoj matice podle $i-$ tého řádku nebo sloupce.

Pokud zaměníme $i-$ tý sloupec při výpočtu determinantu sloupcem pravých stran tj. maticí $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & . & . & b_n \end{pmatrix}^T$ dostáváme determinanty D_i , kde $i = 1,...,n$.

Věta 2.3.4.1

a) Pokud determinant soustavy $D = 0$ je soustava singulární a nemá řešení nebo jich má nekonečně mnoho.
b) Pokud determinant soustavy $D \neq 0$ je soustava regulární s jediným řešením ve tvaru uspořádané $n-$tice $K = \left\{ \left[\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, ..., \frac{D_n}{D} \right] \right\}$.

2.3.5 Soustavy $n-$ lineárních rovnic pro $m-$neznámých

Řeší se obraty, které jsou podobné postupům uvedeným v předchozích kapitolách.

2.4 Rovnice a nerovnice v součinovém nebo podílovém tvaru

2.4.1 Rovnice v součinovém a podílovém tvaru

Řešení některých rovnic je založeno na následujících dvou větách:

Věta 2.4.1
Pro libovolná dvě reálná čísla A, B platí:

a) $A \cdot B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \vee B = 0$

b) $\dfrac{A}{B} = 0, B \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$

Příklad 2.4.1
Řešte rovnice v množině R:

a) $(2x+5)(3-x) = 0$ b) $x^2 + xy - y - 1 = 0$ c) $\dfrac{7-5x}{x+3} = 0$

2.4.2 Nerovnice v součinovém a podílovém tvaru

Věta 2.4.2
Pro libovolná dvě reálná čísla A, B platí:

$$A \cdot B > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A > 0 \wedge B > 0) \vee (A < 0 \wedge B < 0)$$
$$A \cdot B \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A \geq 0 \wedge B \geq 0) \vee (A \leq 0 \wedge B \leq 0)$$
$$A \cdot B \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A \geq 0 \wedge B \leq 0) \vee (A \leq 0 \wedge B \geq 0)$$
$$A \cdot B < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A > 0 \wedge B < 0) \vee (A < 0 \wedge B > 0)$$

Pro libovolná dvě reálná čísla A, B, kde $B \neq 0$ platí:

$$\frac{A}{B} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A > 0 \wedge B > 0) \vee (A < 0 \wedge B < 0)$$
$$\frac{A}{B} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A \geq 0 \wedge B > 0) \vee (A \leq 0 \wedge B < 0)$$
$$\frac{A}{B} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A \geq 0 \wedge B < 0) \vee (A \leq 0 \wedge B > 0)$$
$$\frac{A}{B} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A > 0 \wedge B < 0) \vee (A < 0 \wedge B > 0)$$

Příklad 2.4.2
Určete maximální množinu P na níž jsou definovány výrazy:

a) $N(x) = \sqrt{(2+x)(x+3)}$ b) $M(x) = \sqrt{\dfrac{3x-5}{6+2x}}$

2.5 Kvadratické rovnice

Definice 2.5.1
Každá rovnice ekvivalentní s rovnicí $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, kde koeficienty $a, b, c \in R$ a $a \neq 0$.

Řešení kvadratických rovnic

I. Neúplné kvadratické rovnice

i. Rovnice bez absolutního členu

$$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$$
$$x \cdot (a \cdot x + b) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$$

ii. Rovnice bez lineárního členu $a \cdot x^2 + c = 0$

Pokud $a \cdot c > 0$, potom rovnice nemá řešení.

Pokud $a \cdot c < 0$, potom je řešení rovnice $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

II. Úplná kvadratická rovnice

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$
$$a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \quad .$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Po substituci $x + \frac{b}{2a} = t$ převedeme rovnici na tvar I ii, která pro

$D = b^2 - 4ac > 0$ má dva kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, pro

$D = b^2 - 4ac = 0$ má jeden dvojnásobný kořen $x = \frac{-b}{2a}$ a konečně pro

$D = b^2 - 4ac < 0$ nemá reálné kořeny.

Poznámka
Každý kvadratický trojčlen lze upravit na normovaný tvar jeho vynásobením převrácenou hodnotou koeficientu kvadratického členu.

Věta 2.5.1
Nechť kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ má dva různé reálné kořeny α_1, α_2.
Potom platí tzv. Vietovy vztahy pro kořeny a koeficienty kvadratické rovnice:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -p$$
$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = q$$

Věta 2.5.2

1. Jestliže se dá normovaný kvadratický trojčlen rozložit na součin normovaných lineárních dvojčlenů, pak je tento rozklad jednoznačný.
2. $x^2 + px + q = (x-u)(x-v)$ právě tehdy, když u, v jsou kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$.
3. Kvadratická rovnice má nejvýše dva různé reálné kořeny.

Příklady

a) $6x^2 + 3x = 0$, $2x^2 - 8 = 0$ b) $x^2 + 2x - 3 = 0$, $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ c) $px^2 + (2p+1)x + p - 4 = 0$

d) $7x^2 - |2x-3| + 2 = 0$

Rovnice vedoucí ke kvadratické rovnici
Příklady

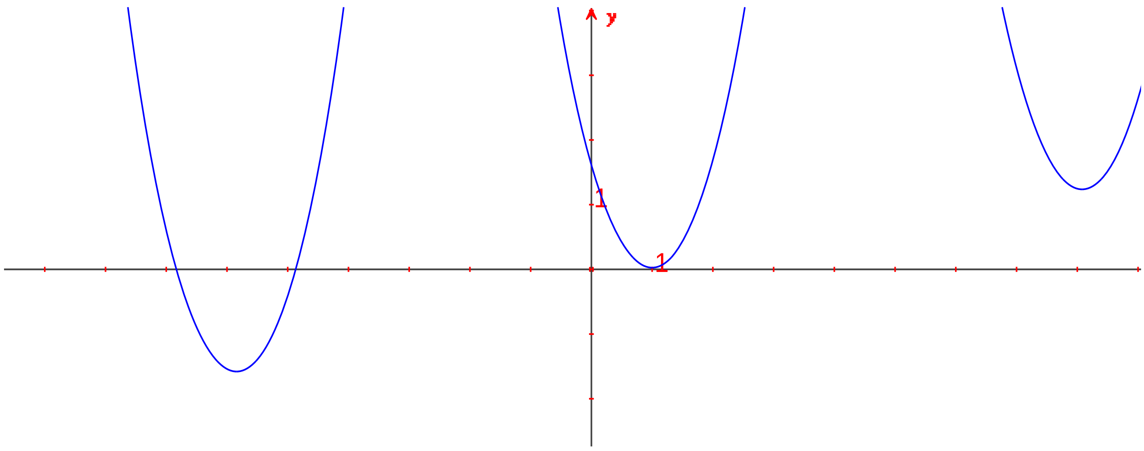
a) $\dfrac{x-1}{x} - (4x+3) = 4$ b) v

2.6 Kvadratické nerovnice

Grafem kvadratického trojčlenu v rovnici tvaru $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je parabola. Pak můžeme o řešení nerovnic typů $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Re 0$, kde $\Re \in \{<, \leq, \geq, >, \neq\}$, rozhodnout na základě polohy tohoto grafu vůči ose x. Rozdělme situaci podle znaménka koeficientu kvadratického členu:

Nechť kvadratická funkce $f : y = ax^2 + bx + c$ má graf pro

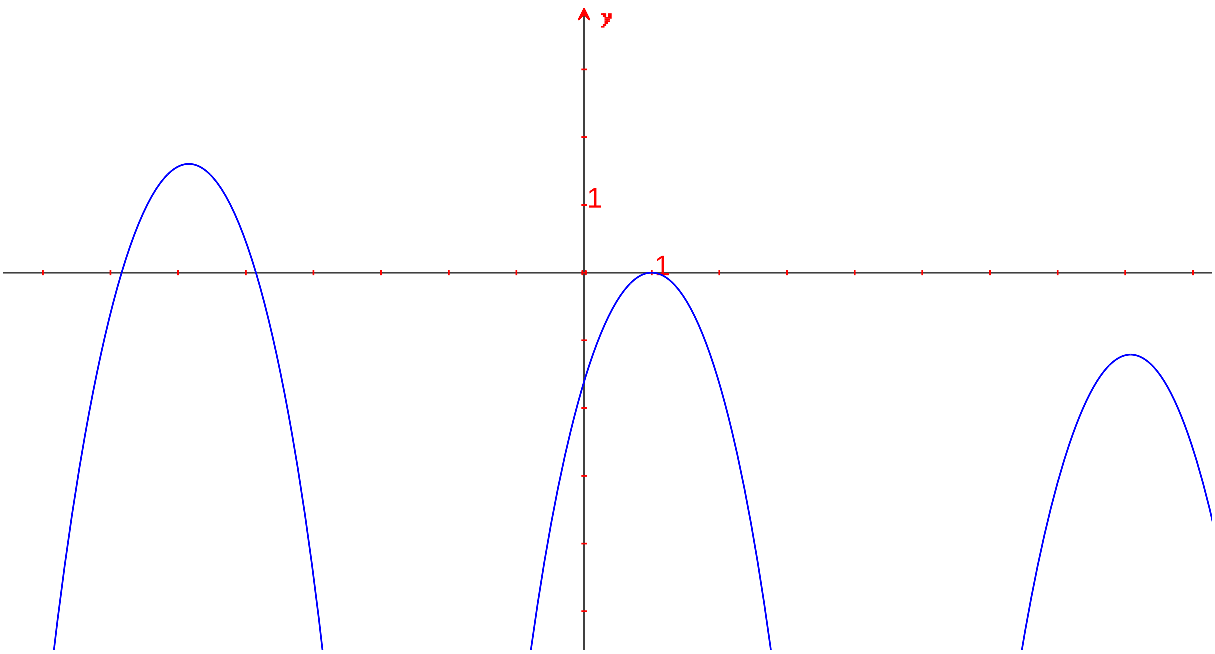
I. $a > 0$



$D > 0$ $D = 0$ $D < 0$

$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c>0$
$(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$	$R-\{x_{12}\}$	R
$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c\geq 0$
$(-\infty,x_1\rangle\cup\langle x_2,\infty)$	R	R
$ax^2+bx+c\leq 0$	$ax^2+bx+c\leq 0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$\langle x_1,x_2\rangle$	$\{x_{12}\}$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c<0$
(x_1,x_2)	$\varnothing$	$\varnothing$

II. $a<0$



$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c>0$
(x_1,x_2)	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c\geq 0$
$\langle x_1,x_2\rangle$	$\{x_{12}\}$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\leq 0$	$ax^2+bx+c\leq 0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$(-\infty,x_1\rangle\cup\langle x_2,\infty)$	R	R
$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c<0$
$(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$	$R-\{x_{12}\}$	R

Příklady 2.6.1

Řešte nerovnice: a) $2x^2-3x+10\leq 0$ b) $-x^2+x+10<0$ c) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-2}{x}\geq 3$

Poznámka: Změna znaménka v okolí kořenu kvadratické rovnice
V jednoduchých kořenech se mění znaménko mnohočlenu, v dvojnásobných nikoli.

2.7 Nelineární soustavy

I. Soustavy lineární a kvadratické rovnice
- řešíme dosazovací metodou

II. Soustavy dvou ryze kvadratických rovnic
- řešíme sčítací metodou

III. Soustavy obsahující pouze smíšené kvadratické členy
- řešíme kombinací sčítací a dosazovací metody

IV. Soustavy homogenních kvadratických rovnic
- řešíme substitucí $y = x \cdot z$

Příklad 2.7.1

I. $\begin{aligned} 2x - 4y &= 5 \\ x^2 + xy - 3y^2 + 3x - 3 &= 0 \end{aligned}$ II. $\begin{aligned} 2x^2 - y^2 &= 12 \\ -x^2 + 3y^2 &= 10 \end{aligned}$

III. $\begin{aligned} 2x + xy - y - 4 &= 0 \\ -xy &= x + 3y + 5 \end{aligned}$ IV. $\begin{aligned} 2x^2 - xy + y^2 &= 1 \\ 3x^2 + 3xy - 2y^2 &= 8 \end{aligned}$

2.8 Rovnice vyšších stupňů

2.8.1 Kubické rovnice

Věta 2.8.1
Každá kubická rovnice má alespoň jeden reálný kořen.

Rovnici $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a, b, c, d \in R$ lze normovat a po substituci $t = x - \frac{b}{3a}$ převést na tvar $t^3 + pt + q = 0$. Stačí tedy najít kořeny $t_{1,2,3}$ a z nich vypočítat $x_{1,2,3}$. Pokud $p = 0$ dostáváme pro t binomickou rovnici, pokud $q = 0$ vytýkáme, jinak použijeme větu:

Věta 2.8.2

Všechny kořeny rovnice $t^3 + pt + q = 0$, když $p \neq 0$ platí: $\begin{aligned} y_1 &= u - \frac{p}{3u} \\ y_2 &= \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2 p}{3u} \\ y_3 &= \varepsilon^2 u - \frac{\varepsilon p}{3u} \end{aligned}$, kde

$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right), \varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$ a u je libovolný kořen rovnice $u^6 + qu^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$.
Poslední rovnici lze substitucí $u^3 = z$ převést na kvadratickou rovnici.

Pro tento tvar odvodil Cardano vzorce:

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3}}$$

, kde hodnotu druhé odmocniny volíme libovolně, ale pevně a hodnoty třetích odmocnin udáme tak, aby se jejich součin rovnal $-\frac{1}{3}p$.

Poznámka

CArdanovy vzorce jsou nepraktické, zejména v tzv. případě cassus ireducibilis. Obvykle proto řešíme rovnici $t^3 + pt + q = 0$ substitucí $t = r + s$ a vhodným použitím Vietových vztahů.

.

2.8.2 Binomické rovnice a trinomické rovnice

2.8.2.1 Binomická rovnice

Rovnici $ax^n + b = 0, a, b \in R, n \in N$ lze upravit na tvar $x^n = -\frac{b}{a} = k$.

Pokud: $k < 0$ a n je sudé, nemá rovnice reálné řešení

$k < 0$ a n je liché, pak $x = \sqrt[n]{k}$

$k > 0$, potom $x = \sqrt[n]{k}$

2.8.2.2 Trinomická rovnice

Rovnici $ax^{2n} + bx^n + c = 0, a, b, c \in R, n \in N$ lze substitucí $s = x^n$ převést na kvadratickou rovnici $as^n + bs + c = 0, a, b, c \in R, n \in N$

2.8.3 Reciproká rovnice

Polynomická rovnice n-tého stupně se nazývá reciprokou právě tehdy, když pro koeficienty platí jedna z podmínek: a) $a_n = a_0, a_{n-1} = a_1, a_{n-2} = a_2, ...$ … reciproká rovnice I. druhu

b) $a_n = -a_0, a_{n-1} = -a_1, a_{n-2} = -a_2, ...$ … reciproká rovnice II. druhu

Věta 2.8.3.1

Pokud je kořenem reciproké rovnice číslo α, pak je jím též číslo (reciproké) $\frac{1}{\alpha}$.

Věta 2.8.3.2

+-1

2.9 Iracionální rovnice a nerovnice

Odmocniny odstraňujeme umocňováním.
Nutnou součástí řešení iracionálních rovnic a nerovnic za použití důsledkových úprav jsou zkoušky, nebo zajištění podmínek (existence výrazů a ekvivalentnosti úprav).

Příklad 2.9.1
Řešte v R:
a) $\sqrt{3x-2}=x$ b) $\sqrt{x+4}-\sqrt{8-2x}=3$ c) $3-\sqrt{8-x}\le x+1$

2.10 Další typy příkladů

Příklad 2.10.1
Úlohy s absolutní hodnotou
a) $\left|x^2-3\right|+3x-5=0$ b) $\sqrt{|2+x|}<|x-5|$

Příklad 2.10.2
Úlohy s parametrem
a) $a\cdot x^2+(a-2)x-2=0$ b) $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{x+a}{x}=2$

2.11 Numerické řešení rovnic

V mnohých případech je při určování řešení rovnice situace složitější. Buď vůbec neexistuje možnost řešení rovnice v radikálech (polynomické rovnice stupně alespoň pátého, algebraicko-goniometrické rovnice, …, či jiné transcendentní rovnice), nebo přesné (analytické) řešení má „nepohodlný“ tvar.
V těchto případech použijeme metody „přibližné“ (numerické), které umožňují zjistit řešení s libovolnou předem danou přesností.

Pokud víme, že v intervalu $\langle a,b\rangle$ leží právě jeden kořen rovnice $f(x)=0$ je možné použít následující metody. Jednotlivé metody mají své klady a zápory jejichž podrobnější rozbor nalezneme v odborných publikacích a jež přesahují středoškolský rámec. Uvedeme alespoň, že metody zastavíme buď v případě, že je příslušný intervalový odhad kořene dostatečně malý, nebo pokud vypočítaná funkční hodnota je dostatečně blízká nule.

2.11.1 Metoda půlení intervalu

Nechť je funkce $f: y=f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť platí: $f(a)\cdot f(b)<0$. Potom $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ a původní interval (odhadu kořene) nahradíme novým $\langle a,x_1\rangle$ resp. $\langle x_1,b\rangle$ tak, aby platilo, že součin funkčních hodnot krajních bodů intervalu je záporný. Geometricky to znamená, že postupně půlíme interval, přičemž zajišťujeme, že kořen padne do příslušné poloviny původního intervalu. Algoritmus opakujeme.
Tato metoda za uvedené podmínky vždy konverguje.

2.11.2 Metoda tětiv (regula falsi)

Nechť je funkce $f : y = f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť platí: $f(a)\cdot f(b) < 0$. Potom

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a) \text{ resp. } x_1 = b - \frac{a-b}{f(a)-f(b)}\cdot f(b).$$

Geometricky to značí, že funkci nahrazujeme na intervalu $\langle a,b\rangle$ úsečkou procházející body $[a, f(a)],[b, f(b)]$ a průsečík této úsečky s osou x se bere za přibližnou hodnotu kořene rovnice. Pokud je $f(x_1) = 0$, je x_1 hledaným kořenem. Pokud ne nahradíme původní interval (odhadu kořene) nahradíme novým $\langle a, x_1\rangle$ resp. $\langle x_1, b\rangle$ tak, aby platilo, že součin funkčních hodnot krajních bodů intervalu je záporný.
Tato metoda opět konverguje vždy.

Nevýhodou předchozích metod je pomalá konvergence, kterou odstraňuje například metoda tečen (Newtonova metoda), která ovšem nemusí konvergovat vždy. Pro její použití je navíc třeba znalost derivace, proto ji neuvedeme. Na konec zmíníme pro její jednoduchost metodu iterační.

2.11.3 Iterační metoda

Nechť v intervalu $\langle a,b\rangle$ leží právě jeden kořen rovnice $f(x) = 0$. Nahradíme-li rovnici rovnicí $x = \varphi(x)$, tato má stejný kořen. (Vyjádření je vždy dokonce možné vícero způsoby). Zvolíme přibližnou hodnotu kořene $x_0 \in \langle a,b\rangle$ a vytvoříme posloupnost čísel podle rekurentního vztahu $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, kde $n = 0,1,2,3,...$. Jestliže tato posloupnost konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L_x$, kde L_x je hledaný kořen původní rovnice.

Příklad
Nalezněte kořeny rovnice: $5x^3 + 12x^2 - 17x - 24 = 0$