9.3 Užití derivace funkce

9.3.1 Monotonie funkce

Lemma
Má-li funkce f v bodě $a \in D(f)$ kladnou limitu, potom existuje takové okolí bodu a, kde platí: $\forall x \in R : x \in O_a \Rightarrow f(x) > 0$.

Věta 9.3.1.1
Má-li funkce f v bodě $a \in D(f)$ kladnou derivaci, potom je funkce f v bodě a rostoucí.
Má-li funkce f v bodě $a \in D(f)$ zápornou derivaci, potom je funkce f v bodě a klesající.

9.3.2 Extrémy

Věta 9.3.2.1
Má-li funkce f v bodě $a \in D(f)$ derivaci různou od nuly, potom funkce f v bodě a nemá lokální extrém.

Věta 9.3.2.2
Mění-li derivace funkce f v bodě $a \in D(f)$ znaménko, potom funkce f v bodě a nabývá lokálního extrému. Při změně z mínus na plus lokální minimum, při změně z plus na mínus lokální maximum.

Věta 9.3.2.3
Nechť pro funkci f v bodě $a \in D(f)$ platí: $\forall k \in N, k < n : f^{(k)} = 0 \wedge f^{(n)} \neq 0$.

a) Když n je liché a $f^{(n)} > 0$, pak f je rostoucí v bodě a.
b) Když n je liché a $f^{(n)} < 0$, pak f je klesající v bodě a.
c) Když n je sudé a $f^{(n)} > 0$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.
d) Když n je sudé a $f^{(n)} < 0$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.

Věta 9.3.3.4
Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom funkce nabývá globálního maxima a minima a to v bodech, ve kterých má lokální extrém nebo v krajních bodech intervalu.

9.3.3 Konvexita

Definice 9.3.3.1
Nechť je funkce f definovaná na intervalu I.
Jestliže pro libovolnou trojici hodnot $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu platí, že bod $[x_2, f(x_2)]$ leží pod spojnicí bodů $[x_1, f(x_1)], [x_3, f(x_3)]$ nazveme funkci f konvexní na intervalu I .
Jestliže pro libovolnou trojici hodnot $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu platí, že bod $[x_2, f(x_2)]$ leží nad spojnicí bodů $[x_1, f(x_1)], [x_3, f(x_3)]$ nazveme funkci f konkávní na intervalu I .

Věta 9.3.3.1
Funkce f definovaná na intervalu I má první i druhou derivaci.
a) Potom je funkce f na tomto intervalu konvexní právě tehdy, když $f'' \geq 0$.
b) Potom je funkce f na tomto intervalu konkávní právě tehdy, když $f'' \leq 0$.

Věta 9.3.3.2
Funkce f definovaná na intervalu I má první i druhou derivaci.
a) Jestliže je $f'' > 0$, pak je funkce f ryze konvexní.
b) Jestliže je $f'' < 0$, pak je funkce f ryze konvexní.

9.3.4 L´Hospitalovo pravidlo

Věta 9.3.3.1
Nechť pro dvě libovolné funkce f, g , které mají definované derivace v bodě a platí:
Buď $f(a) = g(a) = 0$ nebo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. Pokud existuje limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existuje i limita $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a tyto limity se sobě rovnají.

9.3.5 Přibližné nahrazení funkce

Má-li funkce f derivaci v bodě a, pak platí: $dy = f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h = f'(a) \cdot dx$.

Taylorův rozvoj funkce
Nechť funkce f definovaná na intervalu I má v jeho vnitřním bodě a všechny derivace konečné. Potom pro každé a z intervalu I platí: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$.