9 Diferenciální počet

9.1 Limita

Definice 9.1.1 Okolí bodu
Vlastním ε-ovým okolím bodu a nazveme množinu O_a^ε takových čísel x, pro než platí $|x-a|<\varepsilon$.
Vlastním prstencovým ε-ovým okolím bodu a nazveme množinu $O_{\bar{a}}^\varepsilon$ takových čísel x, pro než platí $0<|x-a|<\varepsilon$.

Definice 9.1.2 Spojitost funkce
Funkce f je spojitá v bodě $a \in D(f)$ právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné reálné číslo δ tak, že pro každé $x \in O_a^\delta \cap D(f)$ je $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.
Funkce f je spojitá na množině M právě tehdy, když je spojitá v každém bodě množiny M.

Poznámka: jednostranná spojitost, okolí nevlastních bodů $\pm\infty$

Věta 9.1.1
Nechť jsou funkce f, g spojité v bodě a. Potom jsou též funkce $f+g, f-g, f\cdot g$ a pokud je $g(a)\neq 0$ i funkce $\dfrac{f}{g}$ spojité v bodě a.
Nechť je fce f spojitá v bodě a a funkce g spojitá v bodě $f_a = f(a)$, potom je též funkce $y=g(f(x))$ spojitá v bodě a.

Analogicky platí věty o spojitosti na množině M a navíc:
Nechť f je ryze monotónní a spojitá na množině M, potom je ryze monotónní a spojitá též funkce f_{-1} na množině M_{-1}.

Poznámka
Pomocí okolí bodu je možné precizně definovat monotonie a extremálnosti funkce v bodě, tedy i na množině.

Definice 9.1.3 Limita funkce
Funkce f má vlastní limitu L ve vlastním bodě $a \in D(f) \subseteq R$ právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné reálné číslo δ tak, že pro každé $x \in O_{\bar{a}}^\delta \cap D(f)$ je $|f(x)-L|<\varepsilon$. Zapisujeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.
Funkce f má nevlastní limitu $+\infty(-\infty)$ ve vlastním bodě $a \in D(f) \subseteq R$ právě tehdy, když ke každému reálnému číslu H existuje kladné reálné číslo δ tak, že pro každé $x \in O_{\bar{a}}^\delta \cap D(f)$ je $f(x)>H\,(f(x)<H)$. Zapisujeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Funkce f má vlastní limitu L v nevlastním bodě $+\infty(-\infty)$ právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné reálné číslo δ tak, že pro každé $x \in D(f) \wedge x > \delta(x < \delta)$ je $|f(x) - L| < \varepsilon$. Zapisujeme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$.

Sami formulujte definici nevlastní limity v nevlastním bodě.
Poznámka: jednostranné limity

Věta 9.1.2
Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$. Potom též $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = F + G$, $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = F - G$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G$ a pokud $G \neq 0$ rovněž $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$.

Věta 9.1.3
Funkce f má v bodě a limitu právě tehdy, když má v bodě a limity jednostranné a tyto se sobě rovnají

Věta 9.1.4
Nechť v jistém okolí bodu a pro následující funkce platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Dále nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. Potom existuje též limita $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ a platí $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

Věta 9.1.5 Souvislost mezi limitou a spojitostí
Funkce f je v bodě $a \in D(f)$ spojitá právě tehdy, když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

.