4.4 Nealgebraické funkce

4.4.1 Exponenciální funkce

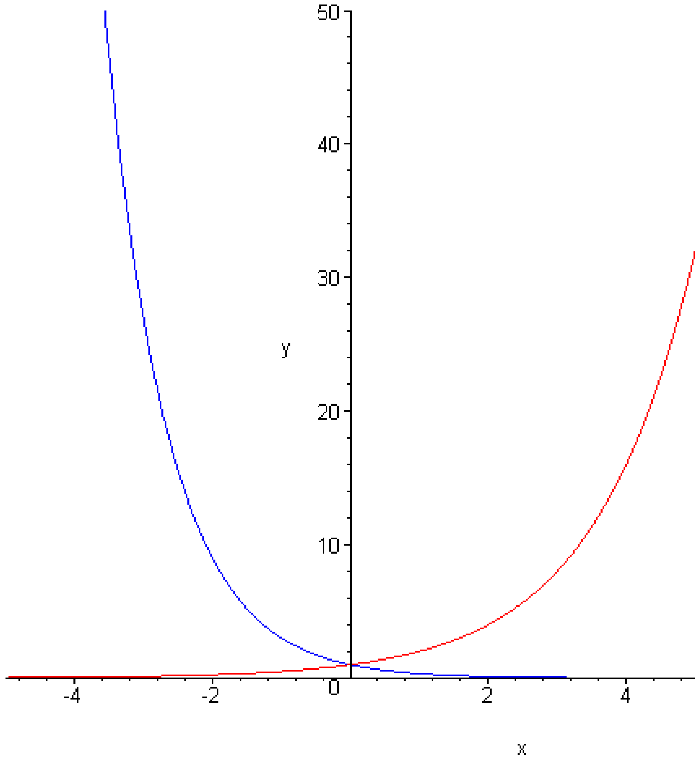
Definice 4.4.1

Exponenciální funkce je každá funkce daná předpisem $f: y = a^x$,
kde konstanta a se nazývá základ a platí, že $a \in R^+ - \{1\}$.

$D_f = R$

Grafem exponenciální funkce je exponenciální křivka (exponenciála).
Pro $0 < a < 1$ klesající, pro $a > 1$ rostoucí.

```
> plot([2^x,(1/3)^x],x=-5..5,y=0..50,color=[red,blue]);
```



\>

Parametrické systémy funkcí

Příklad 4.4.1

Určete vlastnosti funkcí:

$$y = a^x, y = a^x + c, y = c \cdot a^x, y = a^{x+c}, y = a^{c \cdot x}$$
$$y = a^{|x|}, y = a^{c \cdot |x|}, y = |a^x|, y = c \cdot |a^x|$$

Jednoduché exponenciální rovnice a nerovnice

Jednoduché exponenciální rovnice a nerovnice mají tvar $a^{f(x)} \Re^* a^{g(x)}$,
kde $\Re^* \in \{=\} \cup \{\Re = \{\neq, \leq, <, >, \geq\}\}$.

Při řešení využíváme zejména úprav výrazů s mocninami, substituce a těchto tří lemmat:

I. $(\forall a \in R^+ - \{1\}) \wedge (\forall f(x), g(x)):\quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

II. $(\forall a \in (0,1)) \wedge (\forall f(x), g(x)):\quad a^{f(x)} \Re a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \Re^T g(x)$, kde $\Re^T$ je obrácená relace.

III. $(\forall a \in (1,\infty)) \wedge (\forall f(x), g(x)):\quad a^{f(x)} \Re a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \Re g(x)$

Příklad 4.4.2

Řešte v R:

$$\frac{1}{5^{2x-4}} = 125 \qquad 3^{x+3} \geq 9^{x^2}$$

$$2^x + 2^{x+1} = 24 \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^{2-x} < \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+4}$$

$$2^{4x} - 50 \cdot 2^{2x} = 856$$

Přirozená exponenciální funkce
Zvláštním důležitým případem exponenciální funkce
je funkce $f: y = e^x$, kde e je Eulerovo číslo $e = 2{,}718281828459...$.

Poznámka:
I. Číslo e je definováno jako limita jisté speciální posloupnosti,

pro zvědavé $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

II. Uveďme například, že $f: y = e^x$ je jedinou exponenciální funkcí, jejíž tečna v bodě $[0,1]$ je rovnoběžná s osou I. a III. kvadrantu.

4.4.2 Logaritmická funkce

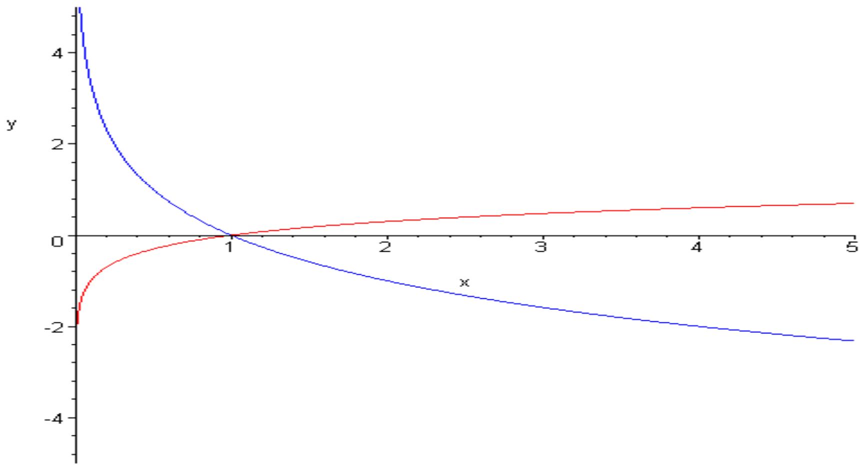
Jestliže každá exponenciální funkce $f: y = a^x$ je funkce prostá, pak k ní existuje vždy funkce inverzní f_{-1}, která se nazývá logaritmická o základu a.

Definice 4.4.2
Logaritmická funkce je každá funkce zapsaná předpisem $f: y = \log_a x$,
kde konstanta a se nazývá základ a platí, že $a \in R^+ - \{0\}$,
přičemž platí: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

$D_f = R^+$

Grafem logaritmické funkce je logaritmická křivka.
Pro $0 < a < 1$ klesající, pro $a > 1$ rostoucí.

```
> plot([log[10](x),log[1/2](x)],x=0..5,y=-
5..5,color=[red,blue]);
```



Úmluva
Logaritmus čísla x o základu 10 (dekadický logaritmus) zapisujeme $\log x$.
Logaritmus čísla x o základu e (přirozený logaritmus) zapisujeme $\ln x$.

Příklad 4.4.3
Určete vlastnosti funkcí:
$y = \log_a x, y = \log_a x + c, y = c \cdot \log_a x, y = \log_a x + c, y = \log_a c \cdot x$
$y = \log_a |x|, y = |\log_a x|$

Věty o logaritmech

I. $\forall x \in R^+ \forall a \in R^+ - \{1\} : a^{\log_a x} = x$
II. $\forall x, y \in R^+ \forall a \in R^+ - \{1\} : \log_a xy = \log_a x + \log_a y$
III. $\forall x, y \in R^+ \forall a \in R^+ - \{1\} : \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
IV. $\forall x \in R^+, y \in R \forall a \in R^+ - \{1\} : \log_a x^y = y \cdot \log_a x$
V. $\forall x \in R^+, y, z \in R^+ - \{1\} : \log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$

Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice
Při řešení exponenciálních a logaritmických rovnic, nerovnic a jejich soustav používáme úprav výrazů s mocninami, úprav logaritmických výrazů, substituce, logaritmování, odlogaritmování a následujících lemmat.
Lemma:
I. $\forall x, y \in R \forall a, b \in R^+ - \{1\}$: $a^x = b^y \Leftrightarrow \log a^x = \log b^y$
II. $\forall x, y \in R^+ \forall a \in R^+ - \{1\}$: $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$
III. $(\forall a \in (0,1)) \wedge (\forall f(x), g(x))$: $\log_a f(x) \Re \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \Re^T g(x)$, kde $\Re^T$ je obrácená relace.
IV. $(\forall a \in (1, \infty)) \wedge (\forall f(x), g(x))$: $\log_a f(x) \Re \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \Re g(x)$

Příklad 4.4.4

Řešte v R:

$$2 \cdot \log(x-1) = \frac{1}{2}\left(\log x^5 - \log x\right)$$

$$y^{\log y} = 100y$$

$$\frac{1}{3^{-(z+2)}} - 2 = 3^z$$

$$\log_2 x + \log_3 x = 1$$

$$\log_4 (x-2) \geq 3$$

$$\log_{\frac{3}{7}} x - \log_7\left(2 - x^2\right) < \log_3 2x$$

Poznámka
Případné soustavy obsahující exponenciální a logaritmické výrazy s neznámou nebo neznámými, řešíme analogickými způsoby jako soustavy lineárních rovnic, přičemž využíváme vlastností exponenciálních a logaritmických funkcí.