Kapitola 1.4 Přirozená čísla

Definice 1.4.1
Přirozená čísla udávají počet prvků neprázdných množin.

Množina všech přirozených čísel se označí N.

Zápis přirozených čísel je možný v nepozičních a pozičních číselných soustavách.

Nepoziční soustava – římská čísla
Znaky:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

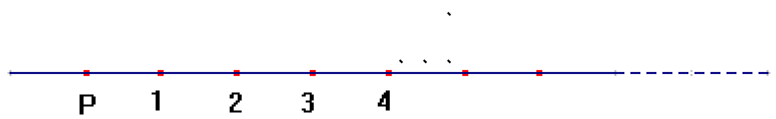
Příklad 1.4.1
MDCDLXXXVII

Poziční číselné soustavy
$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0)_z$ $z \geq 2$, $0 \leq a_i \leq z-1$, $i = 0,1,\ldots,n$
a_i nazýváme číslicí a hodnotu z základem číselné soustavy
rozvinutý zápis čísla v z-adické soustavě:
$a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z^1 + a_0$

Nadále budeme používat výhradně pozičního zápisu, přičemž u čísel v desítkové soustavě se vynechává označení soustavy.

$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots\}$

Znázornit přirozená čísla můžeme na číselnou osu tak, že zvolíme počátek a obraz čísla 1. Obrazy všech dalších přirozených čísel jsou touto volbou jednoznačně určeny.



Základní početní operace a jejich vlastnosti

			sčítání $\oplus$	násobení $\otimes$
uzavřenost	U	$\forall a,b \in N:$	$a+b \in N$	$a \cdot b \in N$
komutativnost	K	$\forall a,b \in N:$	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
asociativnost	A	$\forall a,b,c \in N:$	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
distributivnost	D	$\forall a,b,c \in N:$	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	
neutrální prvek	NP	$\forall a \in N:$		$a \cdot 1 = a$

Další početní operace: odčítání - dělení $\div$

$\forall a,b \in N, a > b:$ $(a - b = x) \Leftrightarrow x + b = a$ $(a \div b = x) \Leftrightarrow x \cdot b = a$

Ani jedna z těchto operací nemá vlastnost U.

mocnina a^b

$\forall a,b \in N:$ $a^b = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

Věta

$\forall a,b,n,r,s \in N:$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, r > s$

Peanův axiomatický systém (pro N_0)

Primitivní pojmy: přirozené číslo, nula, následovník

Axiomy:

I. *Nula je přirozené číslo*

II. *Jestliže n je přirozené číslo, pak též jeho následovník je přirozené číslo.*

I. *Následovník libovolného přirozeného čísla je různý od nuly.*

II. *Jesltliže dvě čísla mají stejné následovníky, pak se sobě rovnají.*

III. *Nechť N' je množina přirozených čísel s těmito vlastnostmi:*

a) *Nula patří do N'*

b) *Jestliže číslo patří do N', potom i jeho následovník patří do N'.*

Potom $N' = N$.

Věta 1.4.1

Množina N je nekonečná.

Libovolná neprázdná podmnožina množiny N má nejmenší prvek.

Definice 1.4.2

Každou nekonečnou množinu, která je ekvivalentní s množinou N nazveme spočetnou množinou.V opačném případě nespočetnou.

Příklad 1.4.2

Dokažte, že množina všech přirozených násobků čísla deset je spočetná.

Výrazy I

Definice 1.4.2 Výraz

Výrazem v číselné algebře budeme rozumět každý zápis (term), který je správně utvořen podle úmluv o zápisech čísel, proměnných , výsledků operací a hodnot funkcí. K výrazu musíme vždy připojit obor jednotlivých proměnných.

Dva výrazy se rovnají, můžeme-li do obou dosadit ze stejných množin za proměnné a dávají-li tyto výrazy pro stejné hodnoty proměnných stejné výsledky.

Úpravy výrazů v danné množině spočívají v tom, že jeden výraz nahradíme druhým, který je mu na této množině roven.
Úpravy sledují určitý cíl – zjednodušení (menší počet naznačených operací), úprava na součin, ...

Příklad 1.4.3
Upravte: $t^3 - t + 1 - t$

Algebraický výraz obsahuje pouze čísla, proměnné, znaky početních operací nebo závorky. Neobsahuje-li odmocniny mluvíme o racionálním algebraickém výrazu. Algebraický výraz s odmocninami je iracionální.
Ostatní výrazy jsou nealgebraické.
Další druhy rozdělení je na výrazy číselné a výrazy s proměnnými, nebo na výrazy celistvé a lomené.

Příklad 1.4.4
$\sqrt{3-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{2}}$ $\qquad$ $x^2 - \sin x$ $\qquad$ $\dfrac{x}{y^2 - z^2}$

Přehled vzorců
$\forall a, b, c \in N:$

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\qquad$ $a^2 + b^2$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$ $\qquad$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Dělitelnost v oboru N

Pokud nebude výslovně řečeno jinak, všechny hodnoty proměnných patří do oboru N.

Definice 1.4.3
Řekneme, že číslo a je dělitelem čísla n nebo že číslo n je násobkem čísla a právě tehdy, když existuje číslo k tak, že platí $n = a \cdot k$. Značíme $a|n$.

Definice 1.4.4
Má-li dané číslo právě dva dělitele nazveme jej prvočíslem.
Má-li dané číslo víc než dva dělitele, nazveme jej číslem složeným.
Číslo 1 není ani prvočíslo ani číslo složené.

Věta 1.4.2 Základní věta aritmetiky
Každé přirozené číslo větší než jedna lze zapsat jediným způsobem (až na pořadí) ve tvaru $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$, kde p_i jsou prvočísla.

Věta 1.4.3
Každé složené číslo n je dělitelné alespoň jedním pročíslem p, kde $p \leq \sqrt{n}$.

Definice 1.4.5
Přirozená čísla a, b jsou soudělná, jestliže mají alespoň jednoho společného dělitele většího než 1.

Kritéria dělitelnosti
2,4,8,..., 5,10,20,...
-využívají vhodného zápisu $n = 10 \cdot k + z$
3,9
- využívají úpravy $10^n = (9+1)^n$ v rozvinutém zápisu přirozeného čísla
6,12,14,15,...
- využívají rozklad na součin nesoudělných činitelů
7,11,13,...
- jiné metody

Věta 1.4.4
Největší společný dělitel čísel a,b je takové číslo $D(a,b)$, že má ve svém prvočíselném rozkladu každé prvočíslo s nejmenším mocnitelem, který se u něho vyskytuje v rozkladech čísel a,b.
Nejmenší společný násobek čísel a,b je takové číslo $n(a,b)$, které má ve svém prvočíselném rozkladu každé prvočíslo s největším mocnitelem, který se v rozkladech čísel a,b vyskytuje.

Věta 1.4.5 Eukliduv algoritmus
Nechť hledáme $D(a,b)$, kde $a > b$. Postupně určujeme $k_1, k_2, \ldots$ tak, aby platilo:

$$a = b \cdot k_1 + z_1$$

$$b = z_1 \cdot k_2 + z_2$$

.

.

$$z_r = z_{r+1} \cdot k_{r+2} + z_{r+2}$$

$$z_{r+1} = z_{r+2} \cdot k_{r+3} + 0$$

potom $D(a,b) = z_{r+2}$.

Věta 1.4.6
Pro libovolná čísla a,b platí: $a \cdot b = n(a,b) \cdot D(a,b)$

Věta 1.4.7 **Věta o dělení se zbytkem**

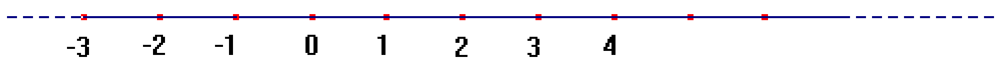
Každé přirozené číslo n lze pomocí přirozeného čísla $a, a > 1$ vyjádřit jediným způsobem ve tvaru $n = a \cdot k + z,\ k \in N_0,\ 0 \le z \le a - 1$.

Kapitola 1.5 Celá čísla

Celá čísla umožňují udávat změny.

Množina všech celých čísel obsahuje přirozená číslo, čísla k nim opačná a nulu. Značí se Z.

Znázornit celá čísla můžeme na číselnou osu tak, že zvolíme nulu v počátku a obraz čísla 1. Obrazy všech dalších přirozených čísel jsou touto volbou jednoznačně určeny.



$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Základní početní operace a jejich vlastnosti

			sčítání $\oplus$	násobení $\otimes$
uzavřenost	U	$\forall a, b \in Z:$	$a + b \in Z$	$a \cdot b \in Z$
komutativnost	K	$\forall a, b \in Z:$	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
asociativnost	A	$\forall a, b, c \in Z:$	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
distributivnost	D	$\forall a, b, c \in Z:$	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
neutrální prvek	NP	$\forall a \in Z:$	$a + 1 = a$	$a \cdot 1 = a$

Další početní operace: odčítání - dělení $\div$

$\forall a, b \in Z:$ $(a - b = x) \Leftrightarrow x + b = a$ $(a \div b = x, b \ne 0) \Leftrightarrow x \cdot b = a$

Zatímco odčítání již je uzavřená operace, dělení nikoli.

mocnina a^n

$\forall a \in Z, n \in N:$ $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

Věta 1.5.1

$\forall a, b \in Z; n, r, s \in N:$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \ne 0$ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, r > s, a \ne 0$

Pro rozšíření platnosti posledního vzorce, lze dodefinovat:

Definice 1.5.1
$\forall a \in Z - \{0\} : \forall n \in N : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, přičemž potom můžeme vypustit podmínku nerovnosti.

Důsledkem pak je vzorec platný pro všechna nenulová celá čísla: $a^0 = 1$
Navíc můžeme ve větě 1.5.1 změnit kvantifikaci vztahů takto:
$\forall a, b \in Z, a \neq 0, b \neq 0; n, r, s \in Z :$

Věta 1.5.1
Množina Z je nekonečná a spočetná.

Poznámka:
1) *Neplatí, že libovolná neprázdná podmnožina množiny N má nejmenší prvek.*
2) *Někdy je třeba rozlišovat dvojí význam znaménka mínus, jako znaménka čísla nebo označení početní operace.*
3) *V oboru celých čísel lze zavést dělitelnost podobným způsobem jako v oboru N.*

Výrazy II
Přehled vzorců
$\forall a, b, c \in Z :$

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, b \neq 0, c \neq 0$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

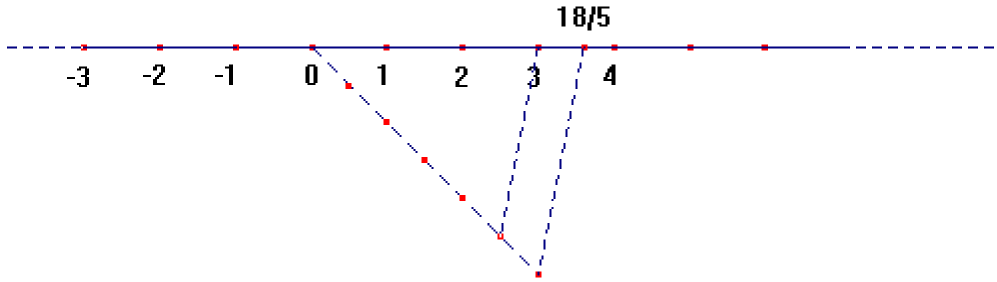
Kapitola 1.6 Racionální čísla

Racionální čísla slouží k vyjádření částí celku nebo též poměru.

Definice 1.6.1
Racionální číslo je každé číslo, které lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p \in Z$ a $q \in N$.

Množina všech racionálních čísel se označí Q.

Znázornit racionální čísla můžeme na číselnou osu tak, že zvolíme obraz nuly a obraz čísla 1. Obrazy všech dalších racionálních čísel jsou touto volbou jednoznačně určeny, když ke konstrukci obrazů využíváme redukční úhel.



Základní početní operace a jejich vlastnosti

			sčítání $\oplus$	násobení $\otimes$
uzavřenost	U	$\forall a,b \in Q:$	$a+b \in Q$	$a \cdot b \in Q$
komutativnost	K	$\forall a,b \in Q:$	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
asociativnost	A	$\forall a,b,c \in Q:$	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
distributivnost	D	$\forall a,b,c \in Q:$	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	
neutrální prvek	NP	$\forall a \in Q:$	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$

Další početní operace:	odčítání -	dělení $\div$
$\forall a,b \in Q:$	$(a-b=x) \Leftrightarrow$	$(a \div b = x, x \neq 0) \Leftrightarrow$
	$x+b=a$	$x \cdot b = a$

Odčítání a dělení racionálních čísel jsou operace uzavřené.
(S vyjímkou dělení nulou, které není vůbec definováno.)

mocnina a^n

$$\forall a \in Q, n \in N: \quad a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$$

Věta 1.6.1

$\forall a,b \in Q; n,r,s \in Z:$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0 \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, a \neq 0$$

Věta 1.6.2

Raždé racionální číslo, můžeme psát ve formě desetinného čísla s konečným nebo nekonečným periodickým rozvojem.
Podotkněme, že, kvůli jednoznačnosti, periodický rozvoj nesmí být složen ze samých devítek.

Rozeznáváme čísla ryze $n_0, \overline{a}_1\overline{a}_2 \ldots \overline{a}_k$ a neryze periodická $n_0, a_1 \ldots a_l \overline{a}_{l+1}\overline{a}_{l+2} \ldots \overline{a}_k$.
Pokud to situace umožňuje pracujeme vždy raději s „přesnými zlomky“ než s desetinnými čísly. V praxi ovšem lze použít zaokrouhlené hodnoty desetinných čísel a to jednak na určitý počet platných cifer, nebo na určitý řád (nejčastěji na jistý počet desetinných míst).

Věta 1.6.3

Množina Q je nekonečná, spočetná a hustá, tj. mezi libobolnými dvěmi racionálními čísly, existuje alespoň jedno další.
Množina Q není spojitá.

Výrazy III – lomené

Přehled vzorců

$\forall a,b,c \in Q:$

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, b \neq 0, c \neq 0$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

U lomených výrazů je třeba striktně dodržovat domluvu a uvádění podmínek.

Kapitola 1.7 Reálná čísla

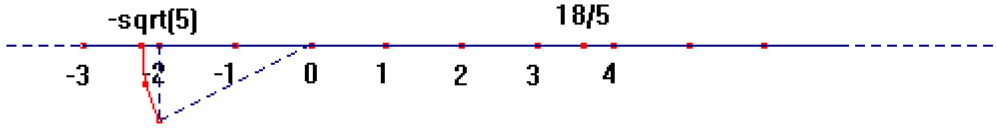
Reálná čísla slouží k zápisu výsledků měření světa kolem nás.

Definice 1.7.1
Čísla., která nejsou racionální se nazývají iracionální. Značíme je I.

Vyznačují se nekonečným neperiodickým rozvojem.

Definice 1.7.2
Množina reálných čísel R je sjednocením množin racionálních a iracionálních čísel, tj. $R = Q \cup I$.

Ke znázornění reálných čísel slouží číselná osa, kterou obrazy reálných čísel beze zbytku vyplní. Po volbě obrazů čísel 0 a 1 lze při konstrukci obrazů některých reálných čísel využít Pythagorovu větu nebo věty Euklidovy. Mnohá reálná čísla nemají přesně zkonstruovatelný obraz na číselné ose.



Základní početní operace a jejich vlastnosti

			sčítání $\oplus$	násobení $\otimes$
uzavřenost	U	$\forall a,b \in R:$	$a+b \in R$	$a \cdot b \in R$
komutativnost	K	$\forall a,b \in R:$	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
asociativnost	A	$\forall a,b,c \in R:$	$a+(b+c) = (a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
distributivnost	D	$\forall a,b,c \in R:$	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	
neutrální prvek	NP	$\forall a \in R:$	$a+0 = a$	$a \cdot 1 = a$

Další početní operace: odčítání - dělení $\div$

$\forall a,b \in R:$ $(a-b=x) \Leftrightarrow x+b=a$ $\quad (a \div b = x, b \neq 0) \Leftrightarrow x \cdot b = a$

Odčítání a dělení racionálních čísel jsou operace uzavřené.
(S vyjímkou dělení nulou, které není vůbec definováno.)

mocnina a^n

$\forall a \in R : n \in N :$ $\quad a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

Věta 1.7.1

$\forall a,b \in R; n,r,s \in Z :$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0 \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, a \neq 0$

Definice 1.7.3

N -tou odmocninou z nezáporného reálnéno čísla a nazveme takové nezáporné číslo x, pro než platí $x^n = a$. Zapisujeme $\sqrt[n]{a}$.

Věta 1.7.2

$\forall a,b \in R_0^+; m,n \in N :$ $\quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0 \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$

Věta 1.7.3

Pro všechna nezáporná čísla a a $\frac{m}{n} \in Q$ je možné chápat $a^{\frac{m}{n}}$ jako $\sqrt[n]{a^m}$.

Věta 1.7.4

$\forall a,b \in R^+; r,s \in R :$ $\quad \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{ab} \qquad \left(\sqrt[r]{a}\right)^s = \sqrt[r]{a^s} \qquad \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r \cdot s]{a}$

$\frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \sqrt[r]{\frac{a}{b}}, b \neq 0 \qquad \sqrt[r]{a} = \sqrt[s \cdot r]{a^s}$

Definice 1.7.4

Absolutní hodnota $|a|$ z reálného čísla a je definována takto: $|a| = a, a \geq 0$

$|a| = -a, a < 0$

Geometrický význam absolutní hodnoty z a je vzdálenost obrazu čísla a od počátku na číselné ose. Proto $|a-b|$ představuje vzdálenost obrazů čísel a,b.

Věta 1.7.4

$\forall a, b \in R:$ $|a| \geq 0$ $\sqrt{a^2} = |a|$ $|ab| = |a| \cdot |b|$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

$|a| + |b| \geq |a + b|$ $|a| - |b| \leq ||a| - |b||$

Intervaly

Souvislé podmnožiny množiny R se nazývají intervaly.
Rozeznáváme uzavřené, polouzavřené a otevřené intervaly, které mohou být omezené nebo neomezené.
Zapisujeme $\langle a, b \rangle, (a, b \rangle, \langle a, b), (a, b)$.

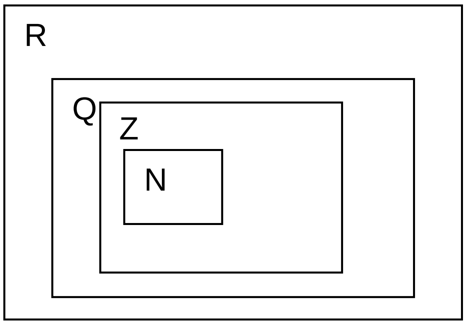
Věta 1.7.5

Množina R je nekonečná, nespočetná, hustá a spojitá.

Souvislost jednotlivých číselných množin

$N \subset Z \subset Q \subset R$

Znázornění vztahu mezi číselnými obory Vennovými diagramy



Výrazy IV -mnohočleny čili polynomy

Definice 1.7.5

Mnohočlenem nebo-li polynomem jedné reálné proměnné n-tého stupně nazveme každý výraz tvaru $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$, kde $a_i \in R, a_n \neq 0$.
$a_i \cdot x^i$ je člen polynomu (i-tého stupně), speciálně a_0 je absolutní člen, $a_1 \cdot x^1$ je lineární člen čísla $a_i, i = 0,1,...,n$ jsou koeficienty polynomu

Věta 1.7.6

Dva mnohočleny se sobě rovnají právě tehdy, když se sobě rovnají koeficienty stejných členů.

Mnohočleny se sčítají a odčítají tak, že se sečtou nebo odečtou odpovídající členy. Násobení se provádí roznásobením každého členu prvního činitele každým členem činitele druhého. Na dělení mnohočlenu mnohočlenem existuje algoritmus.

I. *Seřadíme dělenec i dělitel sestupně podle stupně jednotlivých členů*
II. *Vedoucí člen dělence vydělíme vedoucím členem dělitele*
III. *Zapíšeme podíl jako člen výsledku*
IV. *Roznásobíme tímto dělitele*
V. *Od dělence odečteme výsledek kroku IV*
VI. *Na výsledek kroku V aplikujeme algoritus opět, dokud stupeň rozdílu není menší než stupeň dělitele. Tento poslední mnohočlen představuje zbytek*

Dělitelnost polynomů s koeficienty z různých číselných oborů
V závislosti na číselné množině z níž jsou koeficienty polynomu lze postupovat dále. Podobně jako u přirozených a celých čísel lze i u výrazů hledat rozklad na součin dále nerozložitelných činitelů, zkoumat společné dělitele a násobky dvou či více výrazů, speciálně tedy největší společný dělitel a nejmenší společný násobek.
Pro hledání největšího společného dělitele lze použít variantu Euklidova algoritmu.

Poznámka:
Hornerovo schéma