2 Algebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy

Algebraickou rovnicí resp. nerovnicí budeme chápat zápis
$L(x_1, x_2, ..., x_n) = P(x_1, x_2, ..., x_n)$, kde L, P jsou algebraické výrazy n proměnných, resp. jeden ze zápisů $L(x_1, x_2, ..., x_n) \Re P(x_1, x_2, ..., x_n)$, kde $\Re \in \{<, \leq, \geq, >, \neq\}$.

Řešit rovnici resp. nerovnici v množině M znamená určit výčtem, charakteristickou vlastností nebo graficky množinu $K = \{x \in M : L(x) = P(x)\}$, resp.
$K = \{x \in M : L(x) \Re P(x)\}$.
Její prvky se nazývají kořeny rovnice resp. nerovnice

Ekvivalentní úpravy rovnic
vedou k rovnicím se stejnými množinami kořenů.
Jsou to:
0. Výměna stran rovnic
1. Úpravy výrazů L, P prováděné odděleně na každé straně rovnice
2. Přičtení nebo odečtení libovolného výrazu k oběma stranám rovnice zároveň
3. Násobení nebo dělení obou stran rovnice týmž výrazem různým od nuly

Každé rovnici resp. nerovnici je přiřazena množina všech jejích řešení. Každému řešení odpovídá bod v příslušném prostoru (na přímce, v rovině , v prostoru, …).
Rovnici resp. nerovnici je tak přiřazena určitá množina bodů v prostoru – **graf rovnice** resp. **nerovnice**.
Ve zbývající části druhé kapitoly, pokud není řečeno jinak, řešíme úlohy v R^n.

2.1 Lineární rovnice

2.1.1 Lineární rovnice o jedné neznámé

Lineární rovnicí o jedné neznámé nazveme každou rovnici, kterou lze upravit na ekvivalentní tvar $a \cdot x + b = 0$, kde jsou koeficienty $a, b \in R$, $a \neq 0$.
Terminologie: ax… lineární člen, b … je člen absolutní, a … je koeficient lineárního členu

Řešení lineárních rovnic $a \cdot x + b = 0$

i. Pokud $a = 0 \wedge b = 0$ dostáváme tvar $0 \cdot x = 0$ s nekonečně mnoha řešeními, kdy $K = R$. (rovnice nemá definovaný stupeň)

ii. Pokud $a = 0 \wedge b \neq 0$ dostáváme tvar $0 \cdot x = b, b \neq 0$ bez řešení, čili $K = \emptyset$. (rovnice nultého stupně)

iii. Pokud $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ dostáváme $a \cdot x = -b$ a tudíž právě jedno řešení $x = -\frac{b}{a}$, čili $K = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$. (rovnice 1. stupně)

Ke **grafickému řešení** v jednotlivých případech stačí **číselná osa**:

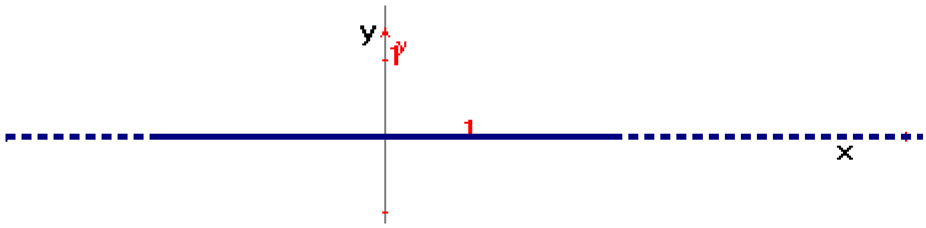
i. Grafickým znázorněním všech řešení je celá číselná osa, tedy osa x.

ii. Není co kreslit.

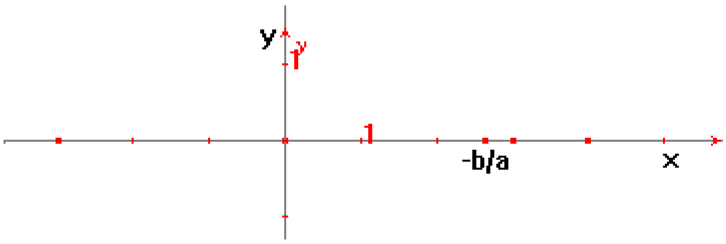
iii. Grafickým znázorněním všech řešení je bod na ose x o souřadnicích $\left[-\frac{b}{a},0\right]$

Obrázek 2.1.1

i



iii



2.1.2 Lineární rovnice se dvěmi neznámými

Lineární rovnicí se dvěmi neznámými nazveme každou rovnici, kterou lze upravit na ekvivalentní tvar $a\cdot x+b\cdot y+c=0$, kde jsou koeficienty $a,b,c\in R$.

Řešení lineárních rovnic $a\cdot x+b\cdot y+c=0$

i. Pokud $a=0\wedge b=0\wedge c=0$ dostáváme tvar $0\cdot x+0\cdot y=0$ s nekonečně mnoha řešeními ve tvaru libovolných uspořádaných dvojic, kdy $K=\{[x,y]\in R^2\}$.

ii. Pokud $a=0\wedge b=0\wedge c\neq 0$ dostáváme tvar $0\cdot x+0\cdot y=-c, c\neq 0$ bez řešení, čili $K=\emptyset$.

iii. Pokud $(a\neq 0\wedge b=0)\vee(a=0\wedge b\neq 0)$ dostáváme tvary $a\cdot x=-c$ nebo $b\cdot y=-c$ a tudíž řešením bude nekonečně mnoho uspořádaných dvojic, $K=\left\{\left[-\frac{c}{a},y\right],y\in R\right\}$ nebo $K=\left\{\left[x,-\frac{c}{b}\right],x\in R\right\}$.

iv. Pokud $a\neq 0\wedge b\neq 0$ dostáváme například, že $y=-\frac{a}{b}\cdot x-\frac{c}{b}$ a tudíž nekonečně mnoho řešení, kdy $K=\left\{\left[x,-\frac{a}{b}\cdot x-\frac{c}{b}\right],x\in R\right\}$.

Ke **grafickému řešení** jednotlivých případů je vhodný kartézský souřadný systém v **rovině**:

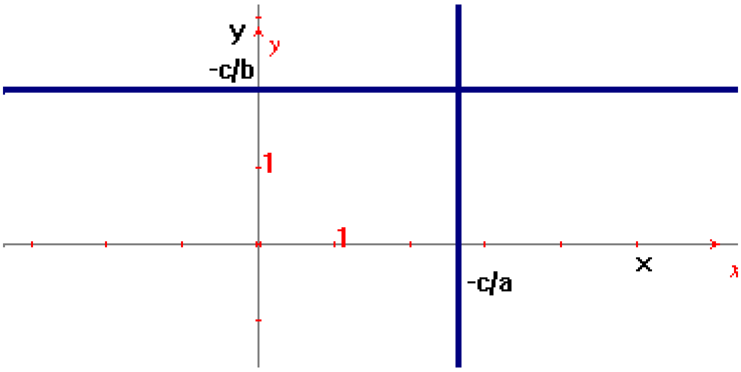
i V tomto případě by obrazy kořenů vyplnily celou rovinu.

ii Není co kreslit.

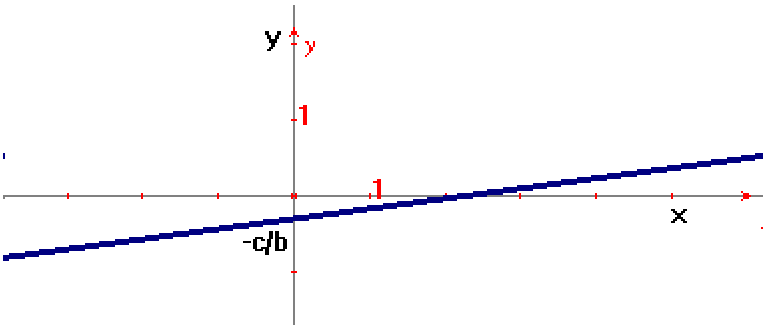
iii Uspořádané dvojice vyplní přímku o rovnici $x = -\frac{c}{a}$ kolmou k ose x nebo přímku s rovnici $y = -\frac{c}{b}$ kolmou k ose y.

iv Grafem rovnice je tu přímka různoběžná s osami souřadného systému.

Obrázek 2.1.2



iii



iv

2.1.3 Lineární rovnice se třemi neznámými

Lineární rovnicí se třemi neznámými nazveme každou rovnici, kterou lze upravit na ekvivalentní tvar $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$, kde jsou koeficienty $a, b, c, d \in R$.

Řešení lineárních rovnic $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$

i. Pokud $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0 \wedge d = 0$ dostáváme tvar $0 = 0$ s nekonečně mnoha řešeními ve tvaru libovolných uspořádaných trojic, kdy $K = \{[x, y, z] \in R^3\}$.

ii. Pokud $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0 \wedge d \neq 0$ dostáváme tvar $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -d, d \neq 0$ bez řešení, čili $K = \emptyset$.

iii. Pokud právě dva z koeficientů a, b, c jsou rovny nule, redukuje se úloha v podstatě na rovnici o jedné neznámé typu 2.1.2 iii, kdy řešením je ovšem nekonečně mnoho uspořádaných trojic a množina kořenů je rovna $K = \left\{\left[x, y, -\frac{d}{c}\right] : x, y \in R\right\}$ nebo

$K = \left\{\left[x, -\frac{d}{b}, z\right] : x, z \in R\right\}$ nebo $K = \left\{\left[-\frac{d}{a}, y, z\right] : y, z \in R\right\}$

iv. Pokud právě jeden z koeficientů a, b, c je roven nule, redukuje se úloha v podstatě na rovnici o dvou neznámých typu 2.1.2 iv, kdy řešením je ovšem nekonečně mnoho uspořádaných trojic a množina kořenů je rovna $K = \left\{\left[x, y, -\frac{c}{b} \cdot z - \frac{d}{b}\right] : x, y \in R\right\}$

nebo $K = \left\{\left[x, y, -\frac{a}{c} \cdot x - \frac{d}{c}\right] : x, y \in R\right\}$ nebo $K = \left\{\left[x, -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{d}{b}, z\right] : x, z \in R\right\}$

v. V případě nenulovosti koeficientů a, b, c dostáváme nekonečně mnoho řešení a množinu všech řešení lze vyjádřit například takto:

$$K = \left\{\left[x, y, -\frac{a}{c} \cdot x - \frac{b}{c} \cdot y - \frac{d}{c}\right] : x, y \in R\right\}$$

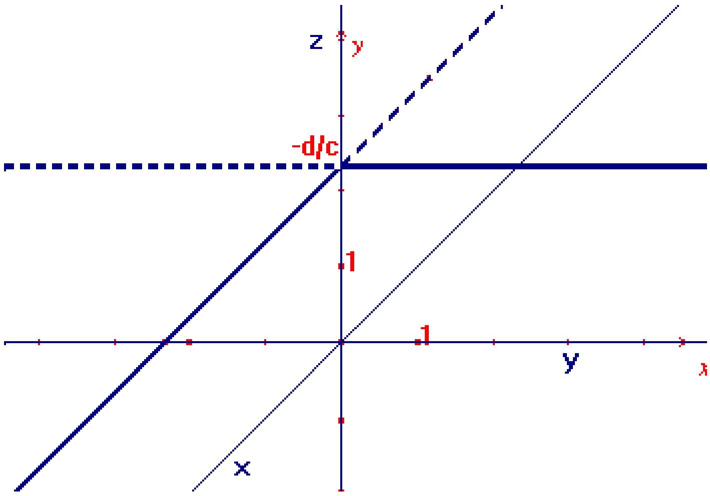
Ke **grafickému řešení** jednotlivých případů je vhodný kartézský souřadný systém v **prostoru**:

i V tomto případě by obrazy kořenů vyplnily celý prostor.

ii Není co kreslit.

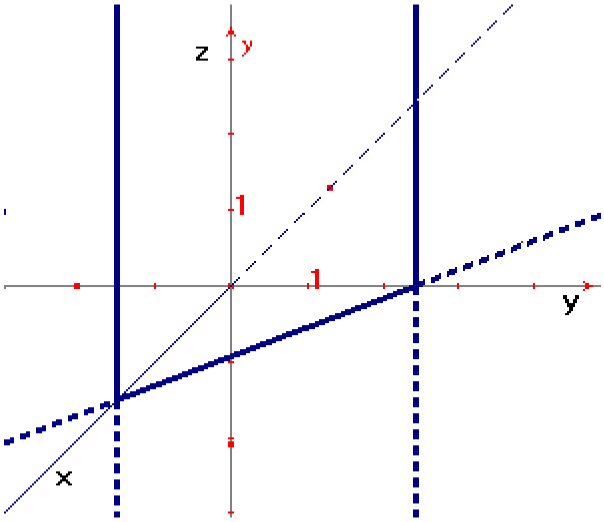
iii Jestliže například $K = \left\{\left[x, y, -\frac{d}{c}\right] : x, y \in R\right\}$ představuje množina všech řešení rovinu $z = -\frac{d}{c}$, která je kolmá k ose z.

Obrázek 2.1.3



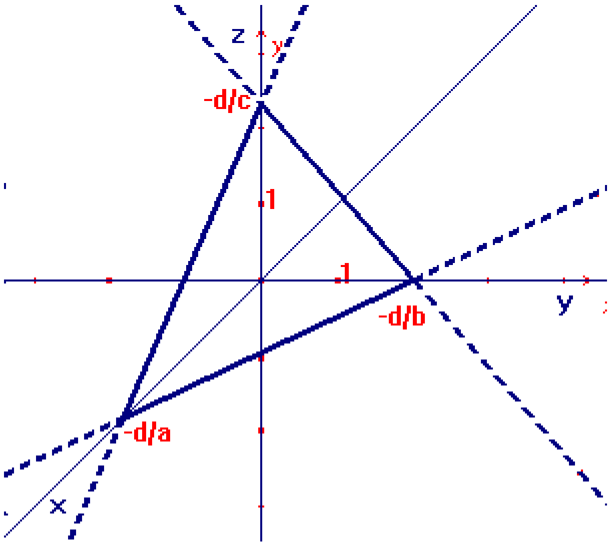
iv. Jestliže například $K = \left\{\left[x, -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{d}{b}, z\right] : x, z \in R\right\}$ představuje množina všech řešení rovinu rovnoběžnou s osou z, která protíná souřadnicovou rovinu xy v přímce $y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{d}{b}$.

Obrázek 2.1.4



v. Pro poslední možnost $K = \left\{ \left[x, y, -\frac{a}{c} \cdot x - \frac{b}{c} \cdot y - \frac{d}{c} \right] : x, y \in R \right\}$ představuje množina všech řešení rovinu v obecné poloze – různoběžnou s osami souřadného systému.

Obrázek 2.1.5



2.1.4 Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli

Při řešení lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli je zkouška nedílnou součástí řešení. Zkoušce se lze vyhnout uvážením podmínek řešitelnosti dané rovnice.

Příklad 2.1.4

Řešte rovnice s neznámou x *:*

a) $\frac{2}{x+3} = 4$ *b)* $2 + \frac{3}{x+7} = \frac{x+10}{x+7}$

2.1.5 Lineární rovnice s absolutní hodnotou

I. *V některých lineárních rovnicích s absolutní hodnotou lze pro řešení využít geometrický význam výrazu $|a-b|$ jako vzdálenosti obrazů čísel a,b na číselné ose a případně dalších vlastností absolutní hodnoty.*

Příklad 1.2.5.1
Řešte rovnice s neznámou x:
a) $|x-5|=2$ *b)* $|2x+5|=-1$ *c)* $3=|3x-6|$

II. *Ve složitějších případech odstraňujeme absolutní hodnoty z rovnice pomocí metody nulových bodů. Nulový bod lineárního výrazu v absolutní hodnotě rozděluje číselnou osu na dvě disjunktní části na nichž se nemění znaménko hodnot tohoto výrazu. V intervalu, kde výraz nabývá kladných hodnot, můžeme znaménko absolutní hodnoty nahradit závorkou, ve druhé části pak musíme zároveň s tímto nahrazením provést záměnu výrazu výrazem opačným. Tato metoda není v hodná v situaci, kdy uvnitř absolutní hodnoty je další absolutní hodnota vložená.*

III. *Obecně můžeme použít metodu rozpisu všech možností.*

Příklad 1.2.5.2
Řešte rovnice s neznámou x:
a) $\left|\frac{4}{7}\cdot x+4{,}5\right|=2\cdot x-3$ *b)* $3\cdot|2-x|-|2x+3|=x$ *c)* $\left|2x+3-2\cdot|x+1|\right|=3-x$

2.1.6 Lineární rovnice s parametrem

Pokud v zadání úlohy vyskytují ještě další proměnné kromě neznámé hovoříme o rovnici s parametry. V těchto případech lze řešit úlohu běžným způsobem, pouze je třeba důkladně zvažovat ekvivalentnost použitých úprav a případně provést dělení postupu na dílčí možnosti.

Příklad 1.2.6
Řešte rovnice s neznámou x a reálným parametrem p:
a) $3x+2p=1-p$ *b)* $5-px=2p+(3-2p)x$

2.1.7 Lineární rovnice s více neznámými

Řeší se obdobnými metodami.

2.2 Lineární nerovnice

V případě lineárních nerovnic jakéhokoli typu se postup při řešení neliší od řešení příslušného typu lineárních rovnic, pouze je třeba uvážit, zda při úpravě nedochází ke změně znaménka nerovnosti. Při násobení nebo dělení záporným číslem nebo výrazem se znaménko změní.

Typy lineárních rovnic: $L(x_1, x_2, ..., x_n) \Re P(x_1, x_2, ..., x_n)$, kde $\Re \in \{<, \le, \ge, >, \ne\}$.

2.2.1 Lineární nerovnice s jednou neznámou

Každá nerovnice, která je ekvivalentní s nerovnicí typu $a \cdot x + b \Re 0$.

Řešení

Pokud $a \ne 0$ je vždy řešením interval.

Pokud $a = 0 \wedge b \ne 0$ je pro nerovnosti:

i. $a \cdot x = 0 \cdot x < b < 0$ množina kořenů prázdná $K = \emptyset$

ii. $a \cdot x = 0 \cdot x \le b < 0$ množina kořenů prázdná $K = \emptyset$

iii. $0 < b \ge a \cdot x = 0 \cdot x$ množina kořenů nekonečná a $K = R$

iv. $0 < b > a \cdot x = 0 \cdot x$ množina kořenů nekonečná a $K = R$.

Pokud $a = 0 \wedge b = 0$ platí pro:

i. $0 \cdot x < 0$, že $K = \emptyset$

ii. $0 \cdot x \le 0$, že $K = R$

iii. $0 \cdot x \ge 0$, že $K = R$

iv. $0 \cdot x > 0$, že $K = \emptyset$.

Grafické znázornění řešení je vhodné provést na číselné ose. Pokud se nejedná o prázdnou množinu nebo množinu R, vyznačujeme polopřímku s nebo bez hraničního bodu.

2.2.1 Příklady

a) $2x - 5 \le 6 - 3x$ b) $0x - 6 > -2$ c) $0x \le 17$

2.2.2 Lineární nerovnice se dvěmi neznámými

Každá lineární nerovnice ekvivalentní s nerovnicí $a \cdot x + b \cdot y + c \Re 0$.

Řešením takových nerovnic je množina K korespondující s řešením příslušných rovnic.

I. Pokud přiřazená lineární rovnice pro dvě neznámé má přímku řešení, je řešením příslušné nerovnice množina uspořádaných dvojic ležících v polorovině určené příslušnou hraniční přímkou, která k polorovině nepatří u ostrých nerovností a patří v případě neostrých nerovností.

II. Pokud přiřazená lineární rovnice nemá řešení nebo jsou řešeními všechny uspořádané dvojice, je řešením příslušné lineární nerovnice prázdná množina nebo množina všech uspořádaných dvojic v rovině.

Grafické řešení se provádí v kartézském souřadném systému v rovině.

2.2.2 Příklady

a) $2x - 3y \leq 5$ b) $0x + 4y > 5$ c) $0x + 0y \geq -2$

2.2.3 Lineární nerovnice se třemi neznámými

Každá lineární nerovnice ekvivalentní s nerovnicí typu $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d \Re 0$.

Řešením takových nerovnic je množina K korespondující s řešením příslušných rovnic.

I. Pokud přiřazená lineární rovnice pro tři neznámé má rovinu řešení, je řešením příslušné nerovnice množina uspořádaných trojic ležících v poloprostoru určeném příslušnou hraniční rovinou, která k poloprostoru nepatří u ostrých nerovností a patří v případě neostrých nerovností.

II. Pokud přiřazená lineární rovnice nemá řešení nebo jsou řešeními všechny uspořádané trojice ($0x + 0y + 0z + d = 0$), je řešením příslušné lineární nerovnice prázdná množina nebo množina všech uspořádaných trojic v prostoru.

Grafické řešení se provádí v kartézském souřadném systému v prostoru.

2.2.3 Příklady

a) $x + 2y - 3z + 4 \geq 0$ b) $-2x + 0y + z < -3$ c) 0x+0y+0z+3<-2

Poznámka
Lineární nerovnice s více neznámými se řeší obdobnými postupy. Neexistuje však triviální a názorný způsob grafického řešení.