14. Posloupnosti a řady

1 Zadání a vlastnosti posloupnosti

1. Posloupnost $0; 1; 3; 7; 15; 31; 63$ zadejte jednak vzorcem pro n-tý člen, jednak rekurentně.

2. Zakreslete graf posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{6}$, $a_1 = 2$, $a_{k+1} = a_k - \frac{6}{k}$, $k \in \{1;\, 2; \ldots 5\}$.

3. Určete rekurentní zadání podloupnosti
$$\left(\frac{n+2}{n}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

4. Odhadněte vzorec pro n-tý člen následující posloupnosti a jeho platnost poté dokažte:
$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad a_1 = 2, \quad a_{k+1} = a_k + 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

5. Odhadněte vzorec pro n-tý člen následující posloupnosti a jeho platnost poté dokažte:
$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_{k+2} = a_k + a_{k+1} - 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

6. Určete, zda číslo 100 je členem posloupnosti $(n^2 - 3n + 2)_{n=1}^{\infty}$.

7. Určete monotónii a omezenost posloupností (příp. dokažte je):
$$\begin{array}{ll} (a) & \left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} \\ (b) & (a_n)_{n=1}^{\infty},\, a_1 = 2, a_{k+1} = \dfrac{a_k}{a_k - 1}, k \in \mathbb{N} \end{array}$$

2 Aritmetická a geometrická posloupnost

1. U následujících posloupností určete, zda mohou být aritmetické nebo geometrické. Pokud ano, určete diferenci, resp. kvocient, a součet prvních 20 členů:
$$\begin{array}{ll} (a) & 3;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19;\ \ldots 1199 \\ (b) & 36;\ -12;\ 4;\ -\dfrac{4}{3};\ \ldots \\ (c) & \dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{3};\ \dfrac{3}{4};\ \dfrac{4}{5};\ldots \\ (d) & \operatorname{tg} 30^\circ;\ \operatorname{tg} 45^\circ;\ \operatorname{tg} 60^\circ;\ \operatorname{tg} 75^\circ;\ldots \\ (e) & (e^{2n+1})_{n=1}^{\infty} \\ (f) & \left(\log\left(\dfrac{4\cdot 2^n}{5^{n-1}}\right)\right)_{n=1}^{\infty} \\ (g) & (n \cdot \log_\pi 1)_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

2. Určete reálné číslo x, aby a_1, a_2, a_3 byly tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti:
$$a_1 = x^2 + 1, \quad a_2 = x^2 - 2x + 5, \quad a_3 = 6.$$

3. Určete reálné číslo x, aby a_1, a_2, a_3 byly tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti:
$$a_1 = -2 + \log x, \quad a_2 = -1 + \log x, \quad a_3 = 1 + \log x.$$

4. V aritmetické posloupnosti platí $a_1 + a_3 = 12$, $a_4 + a_5 = 22$. Určete součet prvních pěti členů posloupnosti.

5. V geometrické posloupnosti je součet prvních tří členů roven 9, součet následujících tří členů je roven -72. Napište vzorec pro n-tý člen této posloupnosti.

6. Určete součet všech trojciferných čísel začínající číslicí 1.

7. Součet tří po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti je roven jejich součinu. Určete tyto členy, víte-li, že diference posloupnosti je -1. Najděte všechny možnosti.

8. Řešte rovnice:

$$\begin{array}{ll} (a) & x + 2x + 3x + \cdots + 20x = 700 \\ (b) & \sqrt{2}x + 2x + \sqrt{8}x + 4x + \cdots + 16x = 2 + \sqrt{2} \end{array}$$

9. Vyjádřete jako jednu mocninu: $7 \cdot 7^2 \cdot 7^3 \cdot \ \ldots \ \cdot 7^{15}$.

10. Půjčil jsem si $300\,000$ Kč při úrokové sazbě 4 % p. a. Úročí se ročně. Kolik korun budu muset po 5 letech vrátit, jestliže:

    (a) úročí se jednoduše;

    (b) úročí se složeně?

11. Uložil jsem si do banky $100\,000$ Kč na 4 roky při úrokové sazbě 2 % p. a. Úročí se pololetně a složeně. Sazba daně z příjmu je 15 %. Kolik peněz po 4 letech od banky dostanu?

12. Půjčil jsem si $20\,000$ Kč a po 5 letech mám vrátit $40\,000$ Kč. Úročí se ročně a složeně. Jaká je roční úroková míra?

13. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku tvoří tři členy aritmetické posloupnosti. Nejmenší úhel měří 20 stupňů. Kolik měří ostatní úhly?

14. Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte tři čísla tak, aby dohromady tvořila 5 členů geometrické posloupnosti. Najděte všechna řešení.

3 Konvergence. Limita posloupnosti

1. Rozhodněte, pro které hodnoty parametru p jsou následující posloupnosti jsou konvergentní:

    (a) Aritmetická posloupnost s prvním členem p a diferencí $p^2 - 4p - 5$.

    (b) Geometrická posloupnost s prvním členem $\frac{1}{p}$ a kvocientem $p + 2$.

    (c) Geometrická posloupnost s prvním členem $3p$ a kvocientem $p^2 + 2$.

2. Rozhodněte, zda posloupnost je konvergentní:

$$\begin{array}{ll} (a) & (5^n)_{n=1}^{\infty} \\ (b) & \left(3^n \cdot 5^{n-1} \cdot 0{,}04^{n+2}\right)_{n=1}^{\infty} \\ (c) & \left(\dfrac{\left(\sqrt{4}\right)^n}{(-2)^n}\right)_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

3. Vypočítejte:

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad & \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{n}{2} = \\
(b) \qquad & \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{2}{n} = \\
(c) \qquad & \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)^2}{n(4-5n)} = \\
(d) \qquad & \lim_{n\to\infty} \frac{(2-3n)^7}{(n+10)^3(2-n-9n^2)^2} = \\
(e) \qquad & \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-2}-n}{4} = \\
(f) \qquad & \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =
\end{aligned}
$$

4. Dokažte z definice, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

4 Suma

1. Zapište pomocí sumy:

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad & 3 + 13 + 23 + 33 + \cdots + 333 = \\
(b) \qquad & \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{8}{7} + \frac{16}{9} + \cdots + \frac{128}{15} = \\
(c) \qquad & 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots + 20 =
\end{aligned}
$$

2. Vypočítejte:

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad & \sum_{i=1}^{8} 3i = \\
(b) \qquad & \sum_{j=3}^{6} (j^2 - 20) = \\
(c) \qquad & \sum_{i=10}^{16} (0{,}25 \cdot 2^i) =
\end{aligned}
$$

3. Řešte rovnice:

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad & \sum_{i=1}^{x} i = 120 \\
(b) \qquad & \sum_{i=1}^{5} 2^{x+i} = 248
\end{aligned}
$$

5 Nekonečné řady

1. U následujících řad rozhodněte, zda by mohly být geometrické. Pokud ano, určete první člen a kvocient a zda jsou konvergentní. U konvergentních určete i jejich součet:

$$\begin{array}{ll}
(a) & 1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\dots \\
(b) & 1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots \\
(c) & \log 2+\log 4+\log 8+\log 16+\dots \\
(d) & \sin\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^3\frac{\pi}{10}+\sin^4\frac{\pi}{10}+\dots \\
(e) & 0{,}07+0{,}007+0{,}000\,7+0{,}000\,07+\dots \\
(f) & \binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}+\dots \\
(g) & \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2-i}=
\end{array}$$

2. Určete reálné číslo x tak, aby řada

$$\sum_{j=1}^{\infty}(3-x)^{2j+1}$$

   byla konvergentní a poté určete její součet.

3. Pomocí součtu geometrické řady převeďte číslo $2,4\overline{18}$ na zlomek v základním tvaru.

4. Je dána lomená čára tvořená úsečkami, kdy první úsečka má délku a, a vždy každá další je o čtvrtinu kratší než úsečka předcházející. Jaká je délka této lomené čáry?

5. Řešte rovnici:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x}{x+6}\right)^i=\frac{1}{3}$$