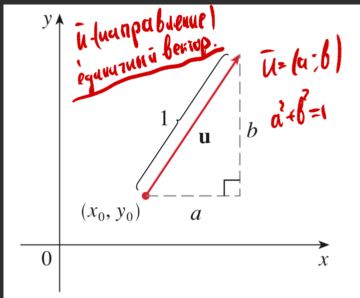
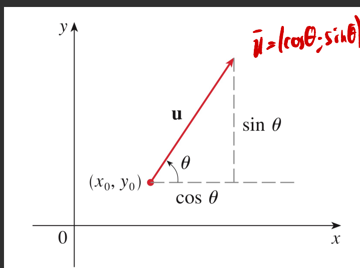
Веб 5. Градиент. Формула Тейлора. Экстремумы Ф.Н.П.

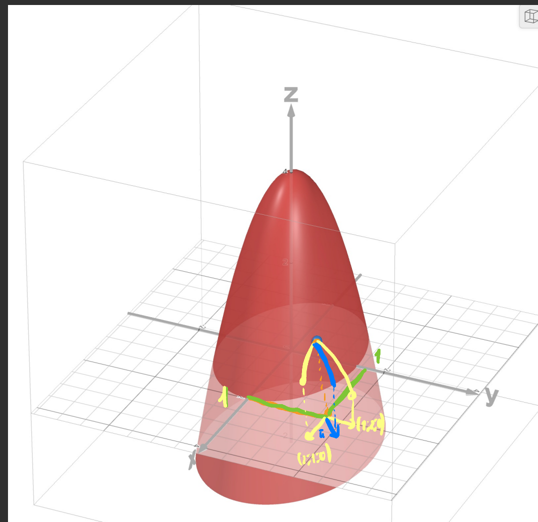
$f'_x;\ f'_y;\ f'_{\bar u}$ -?

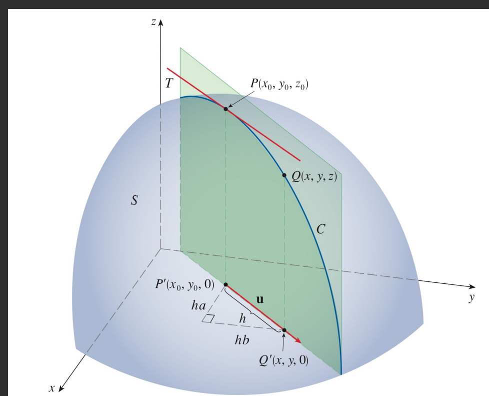


$|\bar u| = 1$

$\sqrt{a^2+b^2} = 1$







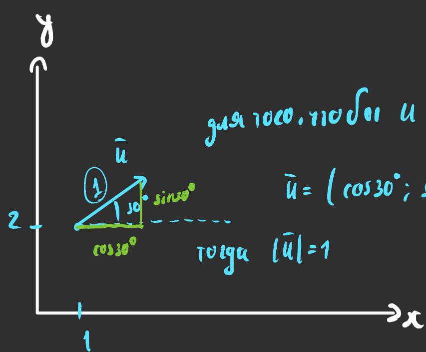
Как считать произв. по направлению?

$f(x,y)$, хотим найти произв. по напр. единичного вектора $\bar{u}(a,b)$ в точке $(x_0;y_0)$

$$\boxed{f'_{\bar{u}}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot a + f'_y(x_0,y_0)\cdot b}$$

Пример: $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$

Найти $f'_{\bar{u}}(1,2)$, где $\bar{u}$ имеет наклон в 30° отн. горизонта.



для того, чтобы и имело единичную длину

$\bar{u} = (\cos 30^\circ; \sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, где $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

тогда $|\bar{u}| = 1$

найдем $f'_x = 3x^2 - 3y \qquad f'_x(1,2) = -3$

$f'_y = -3x + 8y \qquad f'_y(1,2) = 13$

Итого: $f'_{\bar{u}}(1,2) = f'_x(1,2)\,a + f'_y(1,2)\,b$

$$f'_{\bar{u}}(1,2) = -3\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 13\,\frac{1}{2} = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

<u>Пример:</u> $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$

$f'_{\bar{u}}(2,-1)$, если $\bar{u} = (2;5)$ — <u>не единичный</u> !!

Отнормируем $\bar{u}$: $\bar{v} = \dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \dfrac{(2,5)}{\sqrt{2^2+5^2}} = \dfrac{(2;5)}{\sqrt{29}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{29}}; \dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$

$$f'_{\bar{u}}(2,-1) = f'_x(2,-1)\,a + f'_y(2,-1)\,b = -4\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} + 8\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{-8}{\sqrt{29}} + \frac{40}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

$$\begin{cases} f'_x = 2xy^3 \\ f'_y = 3x^2y^2 - 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} f'_x(2,-1) = -4 \\ f'_y(2,-1) = 8 \end{cases}$$

Градиент

$f'_{\bar u} = f'_x \cdot a + f'_y \cdot b$, где $\bar u = (a, b)$ и $|\bar u| = 1$

скорость изменения ф-ции вдоль единичного направления $\bar u$

$f'_{\bar u} = \boxed{(f'_x, f'_y)} \cdot \boxed{(a, b)}$

градиент функции $f(x,y)$

вектор $\bar u$

$\boxed{grad\, f = \nabla f = (f'_x; f'_y)}$ - градиент $f(x,y)$

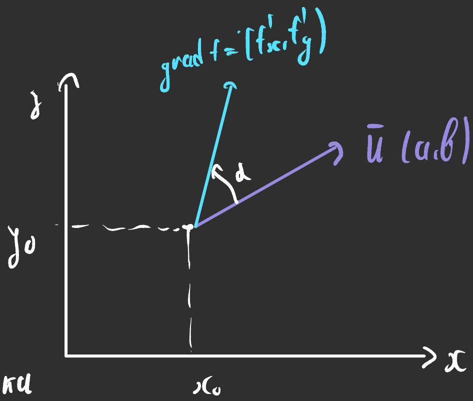
при $\cos\alpha = 1 \to \alpha = 0$

найдем макс. значение $|f'_{\bar u}| = |\overline{grad f} \cdot \bar u| = \big| |grad f| \cdot \overset{1}{|\bar u|} \cdot \overset{\le 1}{\cos\alpha} \big| \le |grad f|$

$|f'_{\bar u}| \le |grad f|$

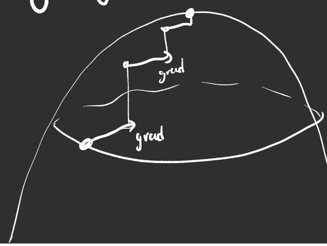
> наиб изменение ф-ции происходит вдоль направления вектора градиента ф-ции

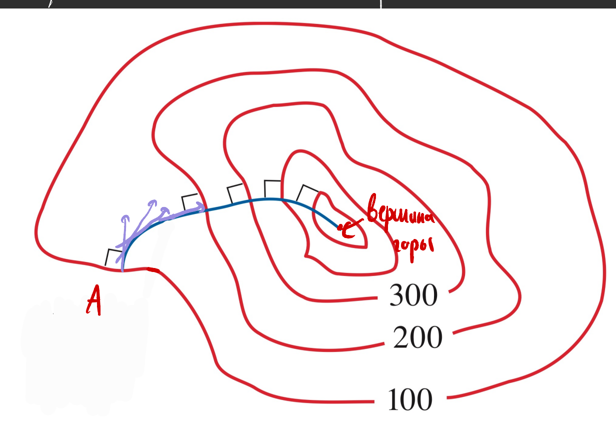
Пояснение



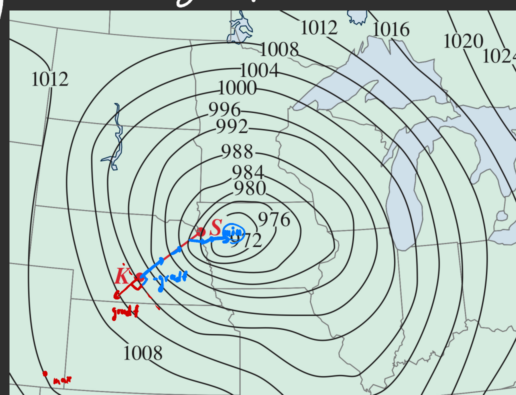
если α = 0

Метод градиентного спуска





grad f всегда ортогонален линиям уровня



оператор ∇

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} ; \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot f = \bar{\nabla} f$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

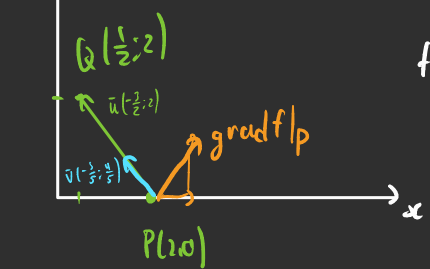
$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Как считать

$f(x,y) = xe^y$ в точке $P(2,0)$ $\qquad f'_x = e^y;\ f'_y = xe^y$

1) найти $f'_{\bar u}(2,0)$, где конец вектора $\bar u$ в точке $\left(\frac{1}{2};2\right) = Q$

2) вдоль какого напр $f(x,y)$ изм. наиб. образом из точки $P(2,0)$?

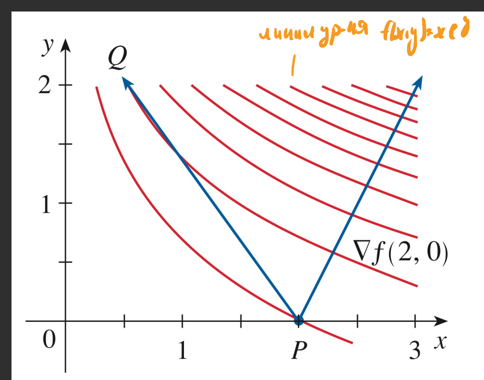


1) нормируем $\bar u \to \dfrac{\bar u}{|\bar u|} = \dfrac{\left(-\frac{3}{2};2\right)}{\sqrt{\frac{9}{4}+4}} = \dfrac{\left(-\frac{3}{2};2\right)}{\frac{5}{2}} = \left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right) = \bar v \qquad |\bar v| = 1$

$$f'_{\bar u}(2,0) = f'_x(2,0)\cdot a + f'_y(2,0)\, b = 1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\cdot\frac{4}{5} = 1$$

$$f'_x(2,0) = e^0 = 1$$

$$f'_y(2,0) = 2\cdot e^0 = 2$$



2) найдем $\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y) = (e^y, xe^y)$

$$\operatorname{grad} f|_P = (1;2)$$

Дифференциалы

$f(x,y) \in C^2$ - дважды непр. дифф

$$\boxed{df = f'_x dx + f'_y dy}$$

$$d^2 f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) = d(f'_x) dx + d(f'_y) dy =$$

$$= (f''_{xx} dx + f''_{xy} dy) dx + (f''_{yx} dx + f''_{yy} dy) dy =$$

$$= f''_{xx} dx^2 + f''_{xy} dx dy + f''_{yx} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

$$\text{//} \quad f'_x = g(x,y)$$

$$df'_x = dg(x,y) = g'_x dx + g'_y dy = (f'_x)'_x dx + (f'_x)'_y dy =$$

$$= f''_{xx} dx + f''_{xy} dy \quad \text{//}$$

$$\boxed{d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}}$$

Как запомнить?

$df = f'_x dx + f'_y dy$

мнемонически

$$d^2f \cong (f'_x dx + f'_y dy)^2 = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

$$d^3f \cong (f'_x dx + f'_y dy)^3 = f'''_{xxx}dx^3 + 3f'''_{xxy}dx^2dy + 3f'''_{xyy}dxdy^2 + f'''_{yyy}dy^3$$

Пример: найти $df(3,-1)$ и $d^2f(3,-1)$, где $f(x,y) = \ln(x^2+y)$; $f(3;-1) = \ln 8$

$df = f'_x dx + f'_y dy$

$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$

$f'_x = \dfrac{2x}{x^2+y}$ $\qquad f'_x(3;-1) = \dfrac{3}{4}$

$f'_y = \dfrac{1}{x^2+y}\cdot 1$ $\qquad f'_y(3;-1) = \dfrac{1}{8}$

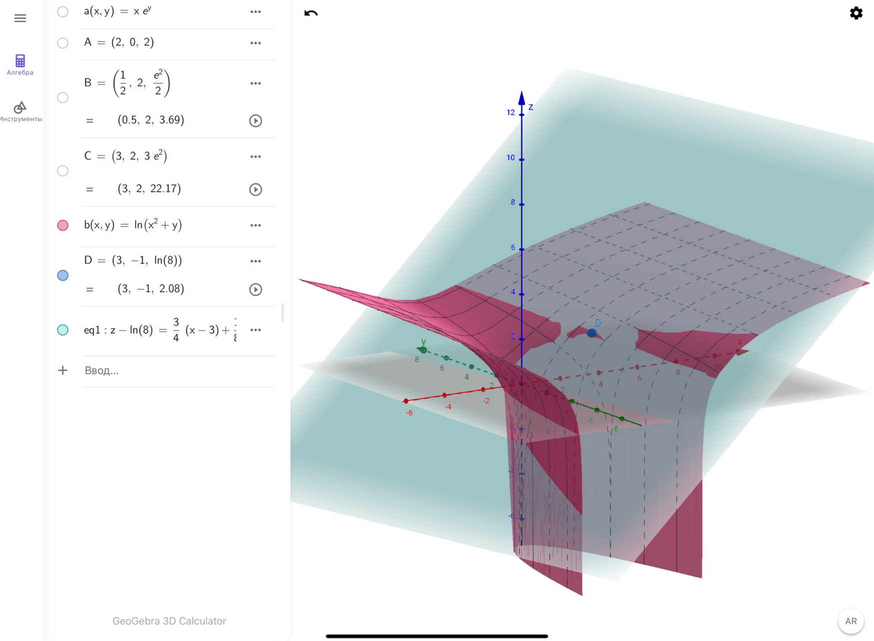
$f(x,y) - f(3,-1)$ $\quad (x-3)$ $\quad (y-(-1))$

$\boxed{df(3,-1) = \frac{3}{4}dx + \frac{1}{8}dy}$

$\boxed{z - \ln 8 = \frac{3}{4}(x-3) + \frac{1}{8}(y+1)}$

// df = приращ. ф-ции

dx и dy = приращ. аргументов //



$$\begin{cases} f''_{xx} = \dfrac{2(x^2+y) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y)^2} \\ f''_{xy} = \dfrac{0(x^2+y) - 2x \cdot 1}{(x^2+y)^2} = f''_{yx} \\ f''_{yy} = -\dfrac{1}{(x^2+y)^2} \end{cases}$$

в точке $(3;-1)$

$$\begin{cases} f''_{xx}(3;-1) = \dfrac{-20}{64} = -\dfrac{5}{16} \\ f''_{xy}(3,-1) = -\dfrac{6}{64} = -\dfrac{3}{32} \\ f''_{yy}(3,-1) = -\dfrac{1}{64} \end{cases}$$

Итого: $d^2f(3,-1) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$

$$\boxed{d^2f(3,-1) = -\frac{5}{16}dx^2 - \frac{3}{16}dxdy - \frac{1}{64}dy^2}$$

$$\boxed{d^2f(3,-1) = -\frac{5}{16}(x-3)^2 - \frac{3}{16}(x-3)(y+1) - \frac{1}{64}(y+1)^2}$$

Формула Тейлора

$f(x,y) \in C^n(x_0,y_0)$, тогда

огибающая поверхность

касательная плоскость

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0,y_0)}{3!} + \ldots \frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!} + o(\rho^n)$$

где $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $dx, dy \to 0$

Рассм. $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ в точке $(x_0,y_0) = (3,-1)$

Ф-ла Тейлора: $f(x,y) = \ln 8 + \frac{3}{4}dx + \frac{1}{8}dy + \dfrac{-\frac{5}{16}dx^2 - \frac{3}{16}dxdy - \frac{1}{64}dy^2}{2} + o(\rho^2)$, где $\rho = \sqrt{dx^2+dy^2}$

$$f(x,y) = \ln 8 + \frac{3}{4}(x-3) + \frac{1}{8}(y+1) - \frac{5}{32}(x-3)^2 - \frac{3}{32}(x-3)(y+1) - \frac{1}{128}(y+1)^2 + o\left((x-3)^2 + (y+1)^2\right), \text{ при } \begin{matrix} x \to 3 \\ y \to -1 \end{matrix}$$

Алгебра

нструменты

$a(x, y) = x\, e^{y}$

$A = (2, 0, 2)$

$B = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{e^2}{2}\right)$

$= (0.5, 2, 3.69)$

$C = (3, 2, 3\, e^2)$

$= (3, 2, 22.17)$

$b(x, y) = \ln(x^2 + y)$

$D = (3, -1, \ln(8))$

$= (3, -1, 2.08)$

eq1 : $z - \ln(8) = \frac{3}{4}(x - 3) + \ldots$

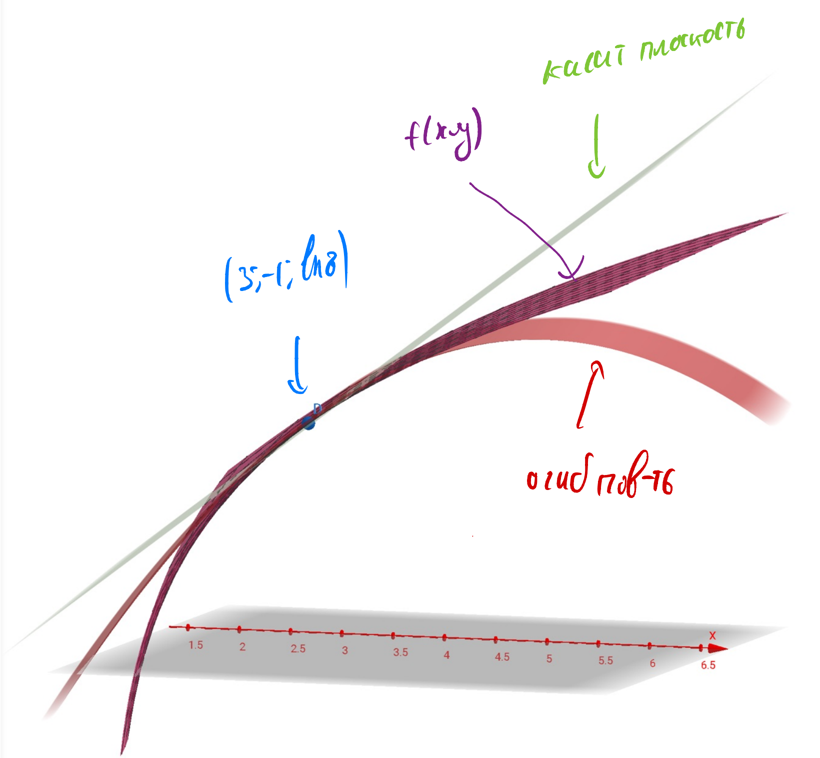
f : $z = \ln(8)$

g : $z = \ln(8) + \frac{3}{4}(x - 3) + \frac{1}{8}(\ldots$

$= 0.16x^2 + 0.01y^2 + 0z^2 + \ldots$

+ Ввод...

GeoGebra 3D Calculator



AR