2018 ～ 2019 学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷) (闭卷)

院(系)____________专业班级______________学号________________姓名____________

考试日期：2018 年 12 月 2 日　　　　　　　　　　　　考试时间：8:30 ~ 11:00

一、单项选择题 (每题 2 分，共 24 分).

1. 复数 $3-2i$ 的主辐角为：(　　)

A. $-\arctan\frac{3}{2}+\pi$，　B. $-\arctan\frac{2}{3}+\pi$，　C. $-\arctan\frac{2}{3}$，　D. $-\arctan\frac{3}{2}$.

2. $\left(\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{10}$ 的值为：(　　)

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　B. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　C. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 在复平面上，下列哪个方程不能表示以 z_0 为圆心，以 $r(>0)$ 为半径的圆周？ (　　)

A. $|z-z_0|=r$，　B. $|z|^2-z_0\bar{z}-\bar{z}_0z+|z_0|^2-r^2=0$，

C. $(z-z_0)^2=r^2$，　D. $z=z_0+re^{-i\theta}(0\le\theta\le 2\pi)$.

4. 若复变函数 $f(z)=v+ui$ 在区域 D 内解析，则在区域 D 内下列说法一定正确的是：(　　)

A. u 是 v 的共轭调和函数，　B. v 是 u 的共轭调和函数,

C. $-u$ 是 v 的共轭调和函数，　D. u 是 $-v$ 的共轭调和函数.

5. 若曲线 C 为 $z=t-t^2i, 0\le t\le 1$，则积分 $\int_C (z-1)dz$ 的值为：(　　)

A. 1，　B. -1，　C. $1+i$，　D. $1-i$.

6. 积分 $\oint_{|z|=1}(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z})\,dz$ 的值为：(　　)

A. $2\pi i$，　B. $4\pi i$，　C. 0，　D. $-2\pi i$.

7. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-1)^n$ 在点 $z=3$ 收敛，则该级数一定收敛的点为：(　)

A. $-2+\sqrt{3}i$，　B. $2+\sqrt{3}i$，　C. $-1+\sqrt{3}i$，　D. $1+\sqrt{3}i$.

8. 函数 $f(z)=\frac{1}{z}+1+2z$ 在无穷远点的留数为：(　　)

A. -1，　B. 1，　C. -2，　D. 2.

9. $z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 的 (　　).

A. 可去奇点，　B. 本性奇点，　C. 极点，　D. 非孤立奇点.

10. 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{2^n}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{3^{n+1}})$ 的收敛环域为：(　　)

A. $\frac{1}{2}<|z|<3$，　B. $2<|z|<3$，　C. $\frac{1}{3}<|z|<2$，　D. $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$.

11. 函数$F(\omega)=e^{\omega j}$的 Fourier 逆变换$f(t)$为：(　　)

A .$2\pi\delta(t-1)$，　B．$2\pi\delta(t+1)$，　C．$\delta(t-1)$，　D．$\delta(t+1)$.

12. 函数$f(t)=(t-1)\,(sint\,)\delta(t-2)$的 Fourier 变换$F(\omega)$为：（　）.

A． $e^{-2\omega j}\sin 2$，　B .0，　C .$e^{2\omega j}\sin 2$，　D．$\sin 2$.

二、(12 分) 已知$u(x,y)=2(x-1)y$，验证$u(x,y)$为调和函数，并求二元函数$v(x,y)$，使得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为解析函数，且满足$f(2)=-i$.

三、(12 分) 将函数$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-4)}$在点$z_0=3$展开为 Laurent 级数。

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^{10}}\,dz$.　　2. $\oint_{|z|=2}\frac{z}{1-z}e^{\frac{1}{z}}\,dz$.

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos\sqrt{2}x}{x^4+1}\,dx$.　　2. $\oint_{|z|=2}\frac{z^{33}}{(z^3+3)^3(z^5+5)^5}\,dz$.

六、(6 分) 求区域$D=\{z=x+yi：\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y>0\}$在映射$w=\sqrt{\frac{i+e^{iz}}{i-e^{iz}}}$下的像.（**答题过程需用图形表示**）

七、(10 分) 求一共形映射$w=f(z)$，将z平面上的区域$D=\{z：|z|<1，|z+\sqrt{3}|<2\}$映射到$w$平面的上半平面.（**答题过程需用图形表示**）

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$x''(t)+x(t)=-3\cos 2t,\quad x(0)=1,\ ,x'(0)=1.$$

九、(6 分) 设函数$f(z)$在$|z-z_0|<R$内满足条件：(1). 除一阶极点z_0外处处解析，(2). 只有一个一阶零点z_1，且$|z_1-z_0|<r<R$. 证明：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=z_1-z_0$.