# 华中科技大学 2019～2020 学年第一学期

# “ 复变函数与积分变换 ” 考试试卷(A 卷)

考试方式：＿闭 卷＿ 考试日期：＿2019-12-8＿ 考试时长：＿150＿分钟

院（系）：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 专业班级：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

学 号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓 名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

一、单项选择题（每题 2 分，共 24 分）.

1. $(1+i)^{i}$=(　　)　（下列 $k$ 均为任意整数）

A． $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\ln 2}$， B． $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\ln 2}$， C． $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$， D． $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$。

2. $z=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi-i\cos\frac{2}{3}\pi\right)$的指数表示为(　　)

A．$2e^{-\frac{2}{3}\pi i}$， B．$2e^{-\frac{1}{6}\pi i}$， C．$2e^{\frac{2}{3}\pi i}$， D． $2e^{\frac{1}{6}\pi i}$。

3. 下列命题中正确的是（　　）

A．如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 $z_0$ 解析。

B. 如果 $z_0$ 为 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 $z_0$ 不可导。

C．如果 $z_0$ 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的解析点，那么 $z_0$ 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的解析点。

D．如果 $f(z)$ 在点 $z_0$ 解析，那么 $f'(z)$ 在点 $z_0$ 也解析。

4. 设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，下列等式中错误的是(　　)

A. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$， B. $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$，

C. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$， D. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$。

5. 设 $f(z)$ 在闭路 $C$ 上及其内部解析，$z_0$ 在 $C$ 的内部，则 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz =$（　　）

A． $f'(z_0)\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^2}dz$，　　B． $\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz$，

C． $\frac{f'(z_0)}{2!}\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz$，　　D． $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$。

6. 设 $C$ 为正向圆周：$|z| = r > 1$，则 $\oint_C \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4}dz =$ (　　)

A． $\frac{\pi^4 i}{6}$，　B． $\frac{\pi^4 i}{3}$，　C． $-3\pi^2 i$，　D． 0 。

7. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ 的收敛半径是 (　　)

A．1，　B．$+\infty$，　C． $\frac{1}{e}$，　D． $e$ 。

8. 函数 $f(z) = e^{\frac{1}{z+2}} \cdot \ln(1+i+z^2)$ 在点 $z=0$ 展开成 Taylor 级数的收敛半径为(　　)

A．2，　B． $\sqrt{2}$，　C． $\sqrt[4]{2}$，　D． 以上都不对。　　九何

9. 如果 $z=a$ 分别为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的本性奇点和 n 阶极点，那么 $z=a$ 为 $f(z)g(z)$ 的 (　　)

A． 可去奇点，　B． 本性奇点，　C． n 阶极点，　D． 非孤立奇点。

10. 映射 $w = e^{iz^2}$ 在点 $z=i$ 处的伸缩率为 (　　)

A． 1，　B． 2，　C． $\frac{1}{e}$，　D． $e$ 。

11. 设 $f(t) = \sin t \cos t$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(f(t))$ 为(　　)

A． $\frac{j}{4}[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)]$，　B． $\frac{j}{4}[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)]$，

C． $\frac{j\pi}{2}[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)]$，　D． $\frac{j\pi}{2}[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)]$。

12. 函数 $F(\omega)=1+\delta(\omega+a)$ $(a\in\mathbf{R})$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)=F^{-1}(F(\omega))$ 为(　　)

A． $\delta(t)+e^{-jta}$，　　B． $\delta(t)+e^{jta}$，

C． $\delta(t)+\dfrac{1}{2\pi}e^{-jta}$，　　D． $\delta(t)+\dfrac{1}{2\pi}e^{jta}$ 。

二、(12 分) 已知 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为复平面上的解析函数，且满足

$$u(x,y)-v(x,y)=e^{-y}(\sin x+\cos x)$$，求函数 $f(z)$。

三、(12 分) 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$ 在下列圆环域内展开为 Laurent 级数：

（1） $0<|z+1|<2$；（2） $2<|z-1|<+\infty$。

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1． $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z(1-z)^2}dz$，　　2． $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$ 。

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1． $\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$，　　2． $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}dx$ 。

六、(6 分) 求区域 $D=\left\{z:|z|>1,0<\arg z<\frac{5}{4}\pi\right\}$ 在映射 $w=\dfrac{\left(\dfrac{1}{\left(\sqrt[5]{z}\right)^{2}}\right)^{2}+1}{\left(\dfrac{1}{\left(\sqrt[5]{z}\right)^{2}}\right)^{2}-1}$ 下的像。(**答题过程需用图形表示**)

七、(10 分) 求一共形映射 $w=f(z)$，将 $z$ 平面上的区域 $D=\{z:|z-i|>1,\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\}$ 映射到 $w$ 平面的上半平面。(**答题过程需用图形表示**)

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2-2t$，且 $x(0)=1$， $x'(0)=0$。

九、(6 分) 证明：若函数 $f(z)$ 在 $|z|>1$ 内解析，且满足 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=a$，则对于任何正数 $r>1$，积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}f(z)dz=a$，其中 $C_r$ 为正向圆周：$|z|=r$。