CHALMERS

Formelsamling i mekanik

M.M. Japp
Teknisk mekanik, Chalmers

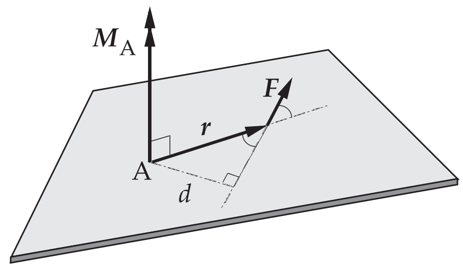
September 2003

Innehåll

1 Statik

1.1 Moment

Kraften $\boldsymbol{F}$:s moment m.a.p. punkten A:



$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_\mathrm{A} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\ &= (y\,F_z - z\,F_y,\, z\,F_x - x\,F_z,\, x\,F_y - y\,F_x)\end{aligned}$$

$$M_\mathrm{A} = r\,F\,\sin\alpha = F\,d$$

där $\boldsymbol{F} = (F_x,\, F_y,\, F_z)$ och $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$.

Samband mellan två momentsummor m.a.p. punkten A ($\Sigma\boldsymbol{M}_\mathrm{A}$) respektive punkten B ($\Sigma\boldsymbol{M}_\mathrm{B}$) på en kropp:

$$\Sigma\boldsymbol{M}_\mathrm{B} = \Sigma\boldsymbol{M}_\mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \times \Sigma\boldsymbol{F}$$

där $\Sigma\boldsymbol{F}$ är kraftsumman som verkar på kroppen.

1.2 Jämviktsvillkor

Ett materiellt system förblir i jämvikt om de yttre krafterna på varje del av systemet uppfyller jämviktsekvationerna

$$\Sigma\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}\,, \quad \Sigma\boldsymbol{M}_\mathrm{A} = \boldsymbol{0}$$

där A är en godtycklig punkt.

1.3 Masscentrum (MC)

- Masscentrum för kontinuerliga system: $$\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \boldsymbol{r}\,\rho\,\mathrm{d}V}{\int \rho\,\mathrm{d}V}$$
- Masscentrum för sammansatta system: $$\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{\boldsymbol{r}}_i\, m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

1.4 Friktion

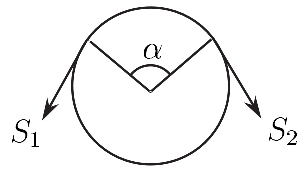
Vid vila gäller: $\dfrac{|\boldsymbol{F}|}{|\boldsymbol{N}|} < \mu_{\mathrm{s}}$, vid glidning gäller: $\dfrac{|\boldsymbol{F}|}{|\boldsymbol{N}|} = \mu_{\mathrm{k}}$

där

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \text{friktionskraft} , & \boldsymbol{N} &= \text{normalkraft} \\ \mu_{\mathrm{s}} &= \text{statisk friktionskoefficient} , & \mu_{\mathrm{k}} &= \text{kinetisk friktionskoefficient} \end{aligned}$$

Lina lindad kring fix, sträv cylinder:

$$S_1\,\mathrm{e}^{-\mu\,\alpha} < S_2 < S_1\,\mathrm{e}^{\mu\,\alpha}$$



2 Partikeldynamik

2.1 Kinematik

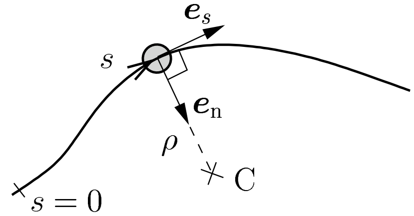
Omskrivning av accelerationen längs banan: $a_s = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$

Naturliga koordinater

$$v_s = v = \dot{s}, \qquad v_\mathrm{n} = 0$$

$$a_s = \dot{v} = \ddot{s}, \qquad a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

där ρ är krökningsradien.

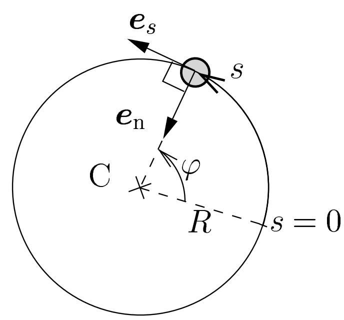


Cirkelrörelse

$$v_s = R\omega = R\dot{\varphi}, \qquad v_\mathrm{n} = 0$$

$$a_s = R\dot{\omega} = R\ddot{\varphi}, \qquad a_\mathrm{n} = R\omega^2 = R\dot{\varphi}^2$$

där $\omega = \dot{\varphi}$ är vinkelhastigheten.



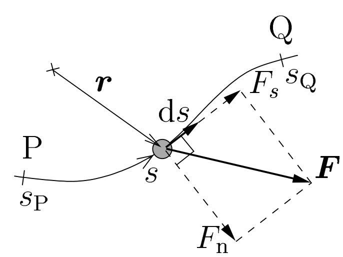
2.2 Kinetik

- Newtons andra lag: $\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

- Arbete:

  Infinitesimal förflyttning: $\mathrm{d}W = F_s \mathrm{d}s = \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

  Ändlig förflyttning: $W_\mathrm{PQ} = \displaystyle\int_{s_\mathrm{P}}^{s_\mathrm{Q}} F_s \,\mathrm{d}s$



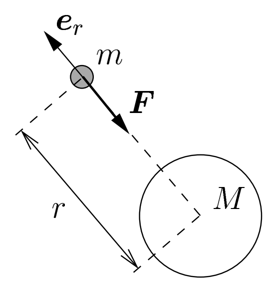
- Effekt: $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = F_s v = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$

- Potentiell energi: Tre viktiga exempel

Tyngdkraften:
$$\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$$
$$V(z) = mgz$$

Fjäderkraften:
$$\boldsymbol{F}(x) = -kx\boldsymbol{e}_x, \qquad k = \text{fjäderkonstanten}$$
$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \qquad x = \text{fjäderförlängningen}$$

Gravitationskraften:
$$\boldsymbol{F}(r) = -\frac{GmM}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$
$$V(r) = -\frac{GmM}{r}$$



- Kinetisk energi: $$T = \frac{1}{2}mv^2$$

- Lagen för kinetiska energin: $$W = \Delta T \quad \text{eller} \quad W^{(\mathrm{ik})} = \Delta T + \Delta V$$

W = arbetet som samtliga krafter uträttar
$W^{(\mathrm{ik})}$ = arbetet som samtliga icke-konservativa krafter uträttar

- Rörelsemängd: $$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

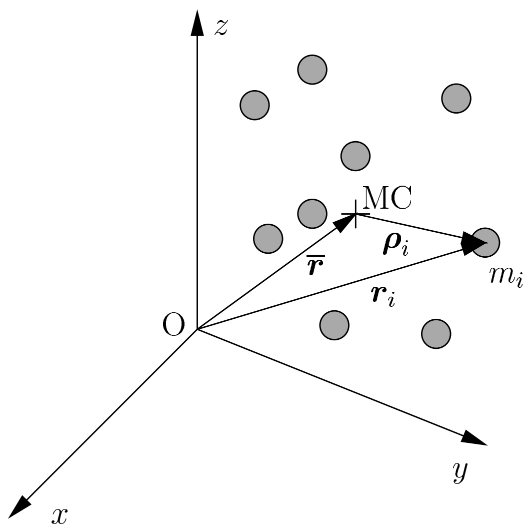
- Impulslagen: $$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1$$

- Rörelsemängdsmomentet m.a.p. punkten O: $$\boldsymbol{L}_\mathrm{O} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

- Impulsmomentlagen m.a.p. en fix punkt O: $$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\boldsymbol{M}_\mathrm{O}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{L}_{\mathrm{O},2} - \boldsymbol{L}_{\mathrm{O},1}$$

3 Partikelsystem

System av N stycken partiklar med total massa $m = \sum_i m_i$. Storheter med streck över refererar till masscentrum.



3.1 Kinetik

- Lagen för masscentrums rörelse: $\Sigma \boldsymbol{F} = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i = m\overline{\boldsymbol{a}}$

- Kinetisk energi: $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i {v_i}^2$

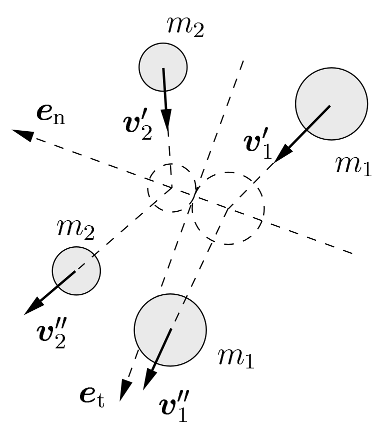
- Lagen för kinetiska energin: $W = \Delta T$ eller $W^{(\text{ik})} = \Delta T + \Delta V$

- Rörelsemängd: $\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = m\overline{\boldsymbol{v}}$

- Impulslagen: $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1$

- Rörelsemängdsmomentet m.a.p. punkten O: $\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$
- Rörelsemängdsmomentlagen m.a.p. en fix punkt O: $\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = \dot{\boldsymbol{L}}_{\mathrm{O}}$
- Impulsmomentlagen m.a.p. en fix punkt O: $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}\, \mathrm{d}t = \boldsymbol{L}_{\mathrm{O},2} - \boldsymbol{L}_{\mathrm{O},1}$
- Rörelsemängdsmomentet m.a.p. masscentrum: $\overline{\boldsymbol{L}} = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$
- Rörelsemängdsmomentlagen m.a.p. masscentrum: $\Sigma \overline{\boldsymbol{M}} = \dot{\overline{\boldsymbol{L}}}$
- Impulsmomentlagen m.a.p. masscentrum: $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{\boldsymbol{M}}\, \mathrm{d}t = \overline{\boldsymbol{L}}_2 - \overline{\boldsymbol{L}}_1$

3.2 Stöt



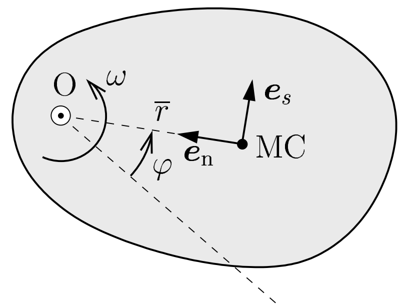
Stötkoefficient: $e = \dfrac{v_{2\mathrm{n}}'' - v_{1\mathrm{n}}''}{v_{1\mathrm{n}}' - v_{2\mathrm{n}}'}$

4 Plan stelkroppsdynamik

4.1 Rotation kring fix axel

- Lagen för masscentrums rörelse: $\Sigma F_\mathrm{n} = m\overline{r}\omega^2, \quad \Sigma F_s = m\overline{r}\dot{\omega}$

- Rörelsemängdsmomentet: $L_\mathrm{O} = I_\mathrm{O}\omega$



- Rörelsemängdsmomentlagen: $\Sigma M_\mathrm{O} = I_\mathrm{O}\dot{\omega}$

- Kinetiska energin: $T = \frac{1}{2}I_\mathrm{O}\omega^2$

- Vinkelhastigheten: $\omega = \dot{\varphi}$

- Arbetet: $\mathrm{d}W = M_\mathrm{O}\mathrm{d}\varphi$

- Effekten: $P = M_\mathrm{O}\omega$

4.2 Allmän plan rörelse, kinematik

Om A och B är kroppsfixa punkter, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ och $\boldsymbol{\omega}$ är kroppens vinkelhastighetsvektor så fås

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_\mathrm{B} &= \boldsymbol{v}_\mathrm{A} + \boldsymbol{v}_\mathrm{B/A} = \boldsymbol{v}_\mathrm{A} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \\
\boldsymbol{a}_\mathrm{B} &= \boldsymbol{a}_\mathrm{A} + \boldsymbol{a}_\mathrm{B/A} = \boldsymbol{a}_\mathrm{A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

Storleken på $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ är $c\omega$, där c är komponenten av $\boldsymbol{r}$ vinkelrät mot $\boldsymbol{\omega}$. Storleken på $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ är $c\omega^2$ och storleken på $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}$ är $c\dot{\omega}$.

4.3 Allmän plan rörelse, kinetik

- Lagen för masscentrums rörelse: $\Sigma \boldsymbol{F} = m\overline{\boldsymbol{a}}$

- Rörelsemängdsmomentlagen: $\Sigma \overline{M} = \overline{I}\,\dot{\omega}$

- Kinetiska energin: $T = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 + \frac{1}{2}\overline{I}\omega^2$ eller $T = \frac{1}{2}I_\mathrm{C}\omega^2$

där $\overline{I}$ är tröghetsmomentet m.a.p. masscentrum och C är momentancentrum.

5 Tredimensionell stelkroppsdynamik

5.1 Kinematik

Se kinematik för allmän plan rörelse 4.2.

5.2 Kinetik

- Lagen för masscentrums rörelse: $\Sigma \boldsymbol{F} = m\,\overline{\boldsymbol{a}}$

- Rörelsemängdsmomentlagen m.a.p. masscentrum: $\Sigma \overline{\boldsymbol{M}} = \dot{\overline{\boldsymbol{L}}}$

- Rörelsemängdsmomentlagen m.a.p. fix punkt O: $\Sigma \boldsymbol{M}_\mathrm{O} = \dot{\boldsymbol{L}}_\mathrm{O}$

Om kroppen roterar kring en fix punkt bör denna användas som momentpunkt. Annars används lämpligen masscentrum.

- Rotation kring den fixa punkten O:

  Rörelsemängdsmomentet: $\boldsymbol{L}_\mathrm{O} = \mathbf{I}_\mathrm{O}\boldsymbol{\omega}$

  Kinetiska energin: $T = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\mathrm{T}\mathbf{I}_\mathrm{O}\boldsymbol{\omega}$

där $\mathbf{I}_\mathrm{O}$ är tröghetsmatrisen m.a.p. O, $\boldsymbol{\omega}$ är vinkelhastighetsvektorn på kolonnmatrisform och $\boldsymbol{\omega}^\mathrm{T}$ är dess transponat.

- Allmän rörelse:

  Rörelsemängdsmomentet: $\boldsymbol{L}_\mathrm{O} = \overline{\boldsymbol{r}} \times m\overline{\boldsymbol{v}} + \overline{\boldsymbol{L}}, \quad \overline{\boldsymbol{L}} = \overline{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}$

  Kinetiska energin: $T = \dfrac{1}{2}m\overline{v}^2 + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\mathrm{T}\overline{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}$

där $\overline{\mathbf{I}}$ är tröghetsmatrisen m.a.p. masscentrum.

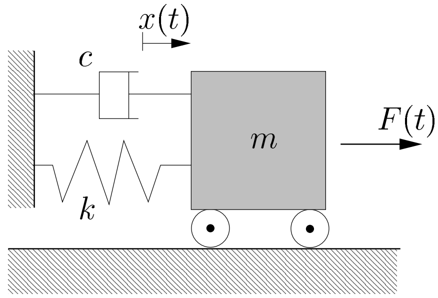
5.3 Tidsderivatan i roterande koordinatsystem

Tidsderivatan av en vektor $\boldsymbol{b}$ i ett roterande koordinatsystem:

$$\dot{\boldsymbol{b}} = \frac{\delta \boldsymbol{b}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{b}, \quad \frac{\delta \boldsymbol{b}}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x + \frac{\mathrm{d}b_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y + \frac{\mathrm{d}b_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z$$

där $\boldsymbol{\Omega}$ är koordinatsystemet xyz:s vinkelhastighetsvektor.

6 Svängningar



Principfigur för enfrihetsgradssystem

Rörelseekvationen för systemet kan skrivas om till standardformen

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = Q(t)$$

där ω är den odämpade egenvinkelfrekvensen, ζ är dämpningskoefficienten och $Q(t)$ är den yttre exciteringen.

6.1 Fria svängningar

Ingen excitering:

$$Q(t) = 0$$

• Ingen eller svag dämpning, $0 \le \zeta < 1$:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\left[C_1 \sin(\omega_\mathrm{d} t) + C_2 \cos(\omega_\mathrm{d} t)\right] = A\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \delta)$$

där $\omega_\mathrm{d} = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ och $\tan(\delta) = C_2/C_1$

Speciellt fås i det odämpade fallet, $\zeta = 0$:

$$x(t) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

• Kritisk dämpning, $\zeta = 1$:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\left[C_3 t + C_4\right]$$

• Stark dämpning, $\zeta > 1$:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\left[C_1 \mathrm{e}^{\omega t\sqrt{\zeta^2-1}} + C_2 \mathrm{e}^{-\omega t\sqrt{\zeta^2-1}}\right]$$

6.2 Påtvingade svängningar

Harmonisk excitering:

$$Q(t) = Q_0 \sin(\Omega t)$$

Lösningen ges av $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t)$, där x_{hom} ges av föregående avsnitt.

Partikulärlösningen (den stationära lösningen) x_{part} ges av

- Utan dämpning, $\zeta = 0$:

$$x_{\text{part}}(t) = C \sin(\Omega t), \quad C = \frac{Q_0}{\omega^2 - \Omega^2}$$

- Med dämpning, $\zeta > 0$:

$$x_{\text{part}}(t) = \lambda \frac{Q_0}{\omega^2} \sin(\Omega t - \psi)$$

$$\tan\psi = \frac{2\zeta\Omega\omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2\omega^2}}$$

6.3 Rörelseekvationen som ett första ordningens system

Vid numerisk lösning är det lämpligt att skriva rörelseekvationen på formen

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t)$$

där $\boldsymbol{y} = [y_1 \; y_2]^{\mathrm{T}} = [x \; \dot{x}]^{\mathrm{T}}$ och

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\omega^2 y_1(t) - 2\zeta\omega y_2(t) + Q(t) \end{bmatrix}$$

med begynnelsevillkor

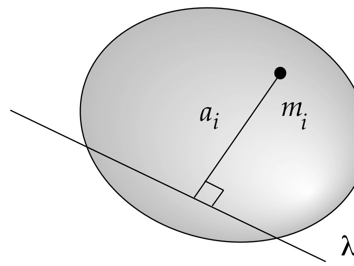
$$\boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix}$$

7 Massfördelningars kvadratiska moment

7.1 Tröghetsmoment

Tröghetsmomentet m.a.p. axeln λ definieras som

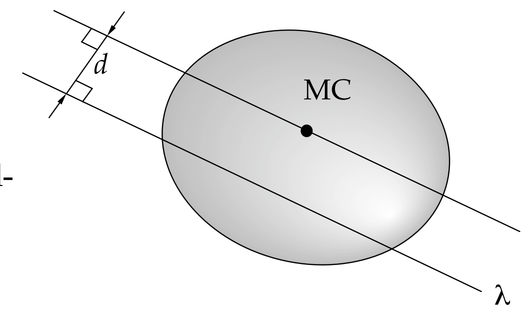
$$I_\lambda = \sum_i m_i a_i^2 = \int a^2 \mathrm{d}m$$



Steiners sats:

$$I_\lambda = \overline{I}_\lambda + md^2$$

där $\overline{I}_\lambda$ är tröghetsmomentet m.a.p. den med λ parallella axeln genom kroppens masscentrum (MC).

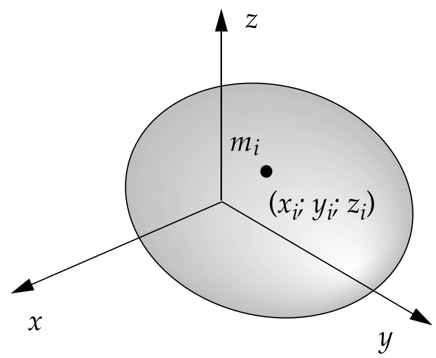


Tunn plan skiva i xy-planet: $I_z = I_x + I_y$

Definition av tröghetsradien m.a.p. axeln λ: $k_\lambda = \sqrt{\dfrac{I_\lambda}{m}}$

7.2 Tröghetsprodukter (deviationsmoment)

Tröghetsprodukterna definieras som



$$I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = \int xy \, \mathrm{d}m$$

$$I_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i = \int yz \, \mathrm{d}m$$

$$I_{zx} = \sum_i m_i z_i x_i = \int zx \, \mathrm{d}m$$

Parallellförflyttningssatser:

$$I_{xy} = \overline{I}_{xy} + m\overline{x}\,\overline{y}$$

$$I_{yz} = \overline{I}_{yz} + m\overline{y}\,\overline{z}$$

$$I_{zx} = \overline{I}_{zx} + m\overline{z}\,\overline{x}$$

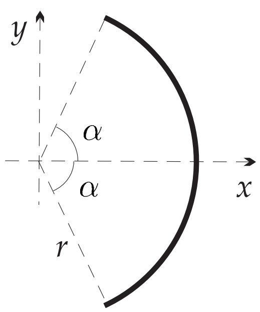
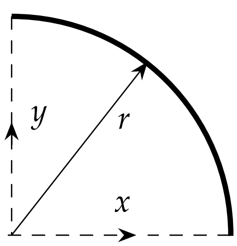
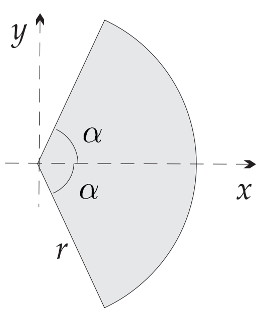
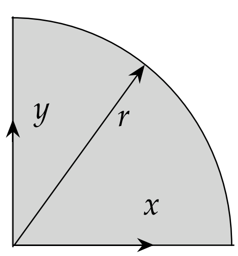
där symboler med streck över avser tröghetsprodukter m.a.p. axlar genom kroppens masscentrum med koordinaterna $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

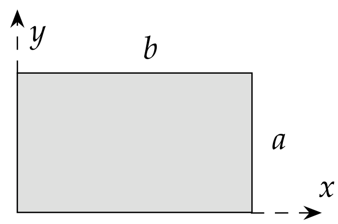
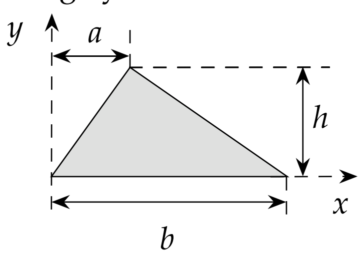
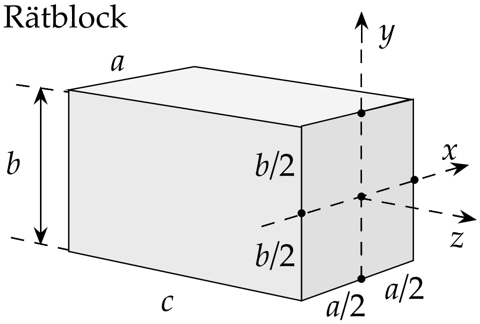
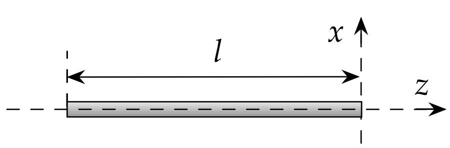
Tröghetsmatrisen ges av

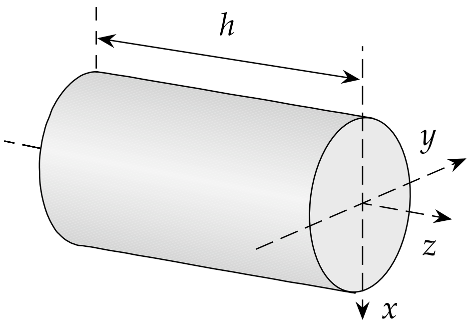
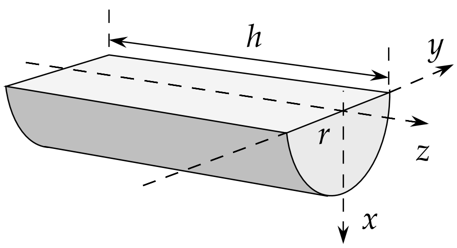
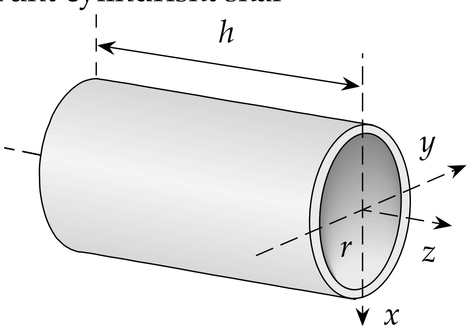
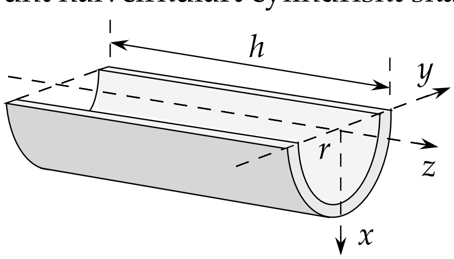
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix}$$

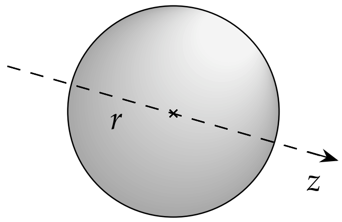
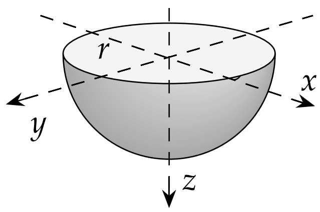
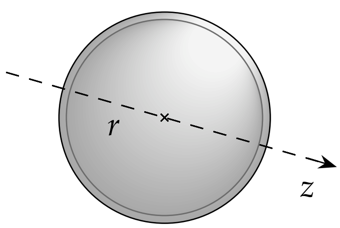
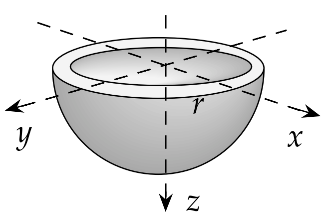
8 Tabeller

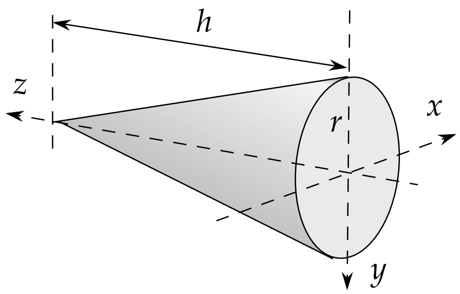
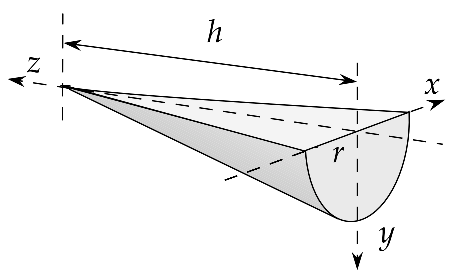
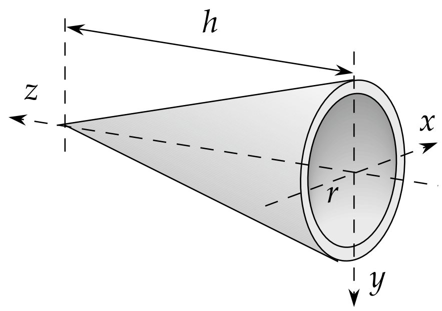
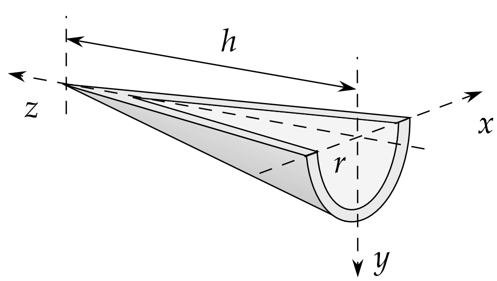
8.1 Masscentrum och masströghetsmoment

KROPP	MASS-CENTRUM	MASSTRÖGHETSMOMENT
Cirkelbåge 	$\overline{x} = \dfrac{r\sin\alpha}{\alpha}$	$I_x = \dfrac{mr^2}{2}\left(1 - \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$ $I_y = \dfrac{mr^2}{2}\left(1 + \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$
Kvartscirkelbåge 	$\overline{x} = \overline{y} = \dfrac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{mr^2}{2}$ $I_{xy} = \dfrac{mr^2}{\pi}$
Cirkelsektor (yta) 	$\overline{x} = \dfrac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	$I_x = \dfrac{mr^2}{4}\left(1 - \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$ $I_y = \dfrac{mr^2}{4}\left(1 + \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$
Kvartscirkelyta 	$\overline{x} = \overline{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \dfrac{mr^2}{4}$ $I_{xy} = \dfrac{mr^2}{2\pi}$

<table>
<tr><th>KROPP</th><th>MASS-
CENTRUM</th><th>MASSTRÖGHETSMOMENT</th></tr>
<tr><td>Rektangelyta

</td><td></td><td>$I_x = \dfrac{ma^2}{3}$
$\overline{I}_x = \dfrac{ma^2}{12}$
$\overline{I}_z = \dfrac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)$</td></tr>
<tr><td>Triangelyta

</td><td>$\overline{x} = \dfrac{a+b}{3}$
$\overline{y} = \dfrac{h}{3}$</td><td>$I_x = \dfrac{mh^2}{6}$
$\overline{I}_x = \dfrac{mh^2}{18}$</td></tr>
<tr><td>Rätblock

</td><td></td><td>$I_x = \dfrac{1}{12}mb^2 + \dfrac{1}{3}mc^2$
$I_y = \dfrac{1}{12}ma^2 + \dfrac{1}{3}mc^2$
$I_z = \dfrac{1}{12}m\left(a^2 + b^2\right)$
$\overline{I}_x = \dfrac{1}{12}m\left(b^2 + c^2\right)$</td></tr>
<tr><td>Smal rak stång

</td><td></td><td>$I_x = \dfrac{1}{3}ml^2$
$\overline{I}_x = \dfrac{1}{12}ml^2$</td></tr>
</table>

KROPP	MASS-CENTRUM	MASSTRÖGHETSMOMENT
Cirkulär cylinder 		$I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\overline{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $I_z = \frac{1}{2}mr^2$
Halvcirkulär cylinder 	$\overline{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $\overline{I}_z = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
Tunt cylindriskt skal 		$I_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $\overline{I}_x = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$ $I_z = mr^2$
Tunt halvcirkulärt cylindriskt skal 	$\overline{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}mh^2$ $I_z = mr^2$ $\overline{I}_z = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$

KROPP	MASS-CENTRUM	MASSTRÖGHETSMOMENT
Sfär 		$I_z = \frac{2}{5} m r^2$
Halvsfär 	$\overline{z} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m r^2$ $\overline{I}_x = \overline{I}_y = \frac{83}{320} m r^2$
Tunt sfäriskt skal 		$I_z = \frac{2}{3} m r^2$
Tunt halvsfäriskt skal 	$\overline{z} = \frac{r}{2}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} m r^2$ $\overline{I}_x = \overline{I}_y = \frac{5}{12} m r^2$

KROPP	MASS-CENTRUM	MASSTRÖGHETSMOMENT
Rak cirkulär kon 	$\overline{z} = \frac{h}{4}$	$I_x = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $\overline{I}_x = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
Rak halvcirkulär kon 	$\overline{z} = \frac{h}{4}$ $\overline{y} = \frac{r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $\overline{I}_z = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2$ $I_{yz} = \frac{1}{5\pi}mrh$
Tunt cirkulärt koniskt skal 	$\overline{z} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $\overline{I}_x = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
Tunt halvcirkulärt koniskt skal 	$\overline{z} = \frac{h}{3}$ $\overline{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $\overline{I}_z = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$

8.2 Konstanter

Allmänna gravitationskonstanten	$G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kgs^2}$
Jordens massa	$5{,}976 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Jordens radie (medelvärde)	$6371\,\mathrm{km}$
Jordens periodtid	$23{,}9344\,\mathrm{h}$
Tyngdaccelerationen vid jordens yta (medelvärde)	$g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$
Månens massa	$7{,}350 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$
Månens radie (medelvärde)	$1738\,\mathrm{km}$
Tyngdaccelerationen vid månens yta (medelvärde)	$1{,}62\,\mathrm{m/s^2}$
Solens massa	$1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Månens avstånd till jorden	$0{,}3844 \cdot 10^{6}\,\mathrm{km}$
Jordens avstånd till solen (medelvärde)	$149{,}6 \cdot 10^{6}\,\mathrm{km}$