Beräkningsuppgift del I: Kastmaskin

Beräkningsuppgiften får lösas i grupper om maximalt två personer. För godkänd uppgift krävs en muntlig redovisning där programmet skall köras, samt en kort informell rapport med härledningar och indata som presenteras vid samma tillfälle. Rapporten skall laddas upp på Canvas före redovisning. Båda gruppmedlemmarna måste vara närvarande och kunna svara på frågor. Redovisning sker vid handledningstillfällena och kan endast göras då den skriftliga rapporten har laddats upp på Canvas.

Läromål

Syftet med uppgiften är att stifta bekantskap med numeriska metoder för att kunna simulera mekaniska system som inte kan lösas analytiskt. Den skall också ge träning på alla steg från formulering av problem, etablering av differentialekvationer och val av lösningsmetod, till analys och reflektion över erhållna resultat. I syfte att stimulera till fortsatta studier finns ett antal frivilliga extrauppgifter.

Examination

Uppgiften är obligatorisk för godkänt slutbetyg i kursen. Godkänt resultat på denna uppgift tillsammans med godkänd redovisning av del II (Dubbelpendel i ADAMS) rapporteras till LADOK som ett separat kursmoment.

Anvisningar

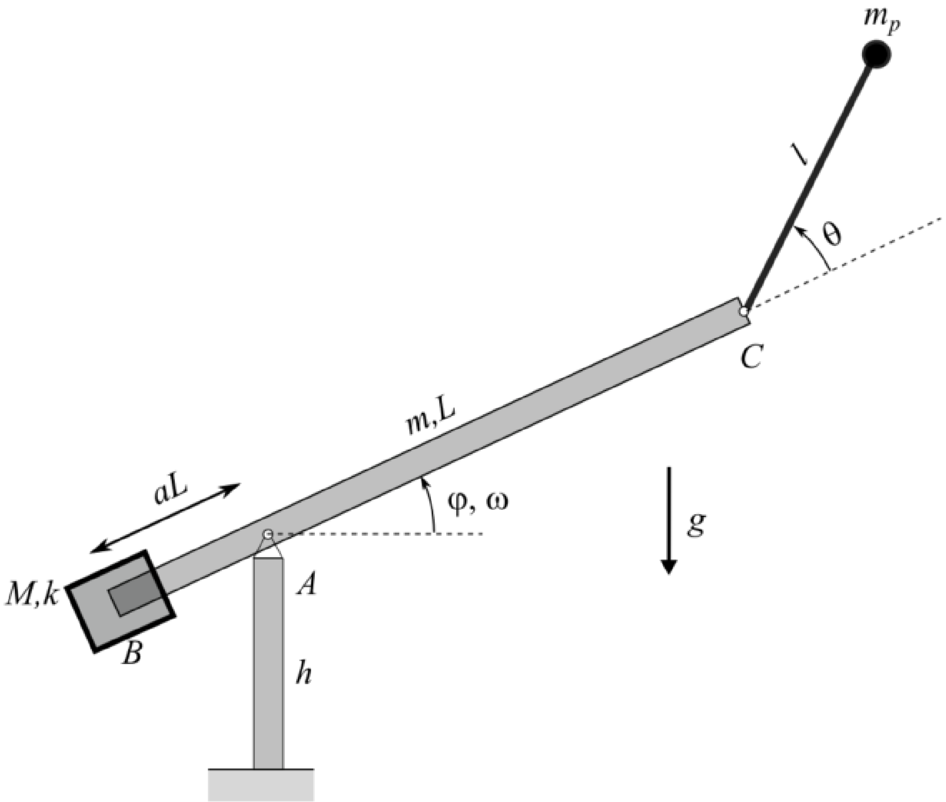
Handledning ges i huvudsak i de bokade salarna. Det går lika bra att använda egen dator som skolans datorer.

Uppgiften skall lösas individuellt eller i grupp om högst två studenter. Det är tillåtet och av värde att diskutera uppgift och lösningsgång även utanför grupperna, men det är inte tillåtet att kopiera programkod (kopiering faller under ”vilseledande i samband med examination” i Chalmers disciplinstadga). Båda gruppmedlemmarna skall vara delaktiga i lösningen och kunna svara på frågor.

Det kan vara svårt att hitta fel i programkod, men det är extra svårt om man inte har klart för sig vilka ekvationer man försöker implementera. Vid frågor till handledare om implementering etc., se till att ha ekvationer med härledningar tillgängliga och i god ordning.

Problembeskrivning

En kastmaskin (trebuchet eller blida) kan ses som ett mekaniskt system, som vi skall analysera under olika antaganden.



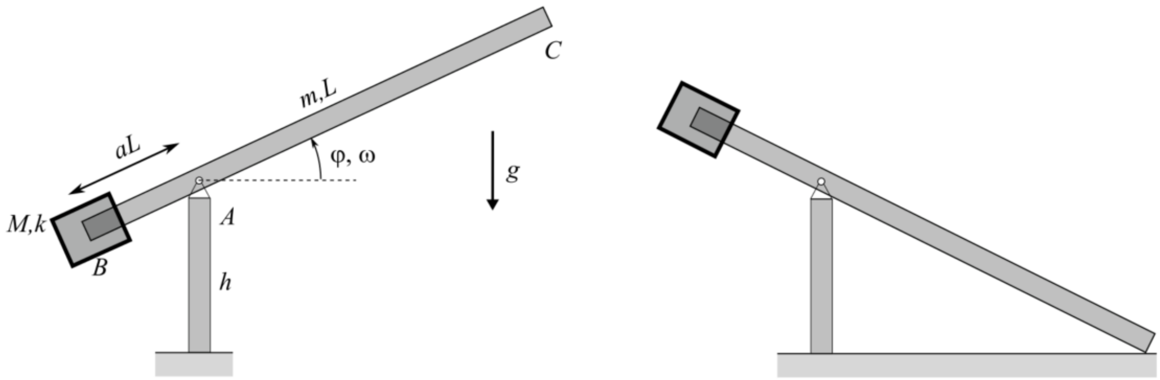
Figur 1: Modell av kastmaskin

Vi börjar med en kastarm, med massan *m* och längden *L*, som ses som en smal homogen stång. I ena änden B fästs en motvikt, med massan *M* och tröghetsradien *k*. Motviktens tyngdpunkt är precis vid kastarmens ände B. Kastarmen kan rotera utan friktion kring en gångjärnsled i A, som är på avståndet *aL* från änden B. Gångjärnsleden A befinner sig på avståndet *h* ovanför marken. I kastarmens ände C är fäst en slunga (med längd *l*), och längst ut på slungan är en partikel som utgör den projektil som skall kastas iväg.

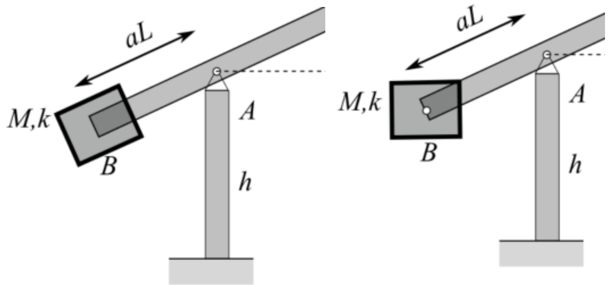
Systemet släpps från vila i ett läge så att kastarmens ände C nuddar marken. Gravitationen gör att motvikten drar kastarmen nedåt, varpå kastarmen börjar rotera kring A

Steg 1: Förenklad modell

Vi börjar med att analysera en förenklad modell (fig 2, vänster), där vi inte har med slungan.



Figur 2: Förenklad modell, samt startläge



Figur 3: Motvikten fast inspänd respektive fäst i gångjärnsled

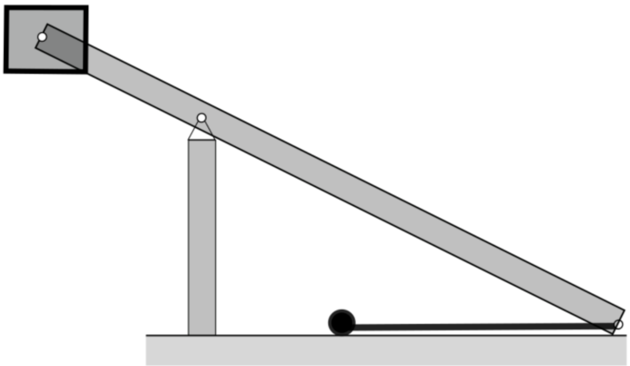
Vi skall jämföra två fall: 1) motvikten stelt inspänd i B samt 2) motvikten är fäst i en friktionsfri gångjärnsled i kastarmens ände B.

- I båda fallen visar det sig att den förenklade modellens läge helt beskrivs av en vinkel φ, som anger kastarmens vinkel relativt horisontalplanet. Tag fram en differentialekvation för φ, samt begynnelsevillkor (C nuddar marken samt systemet släpps från vila) för de båda fallen.
- Skriv om differentialekvationen till första ordningens form (inkl begynnelsevillkor), och programmera en numerisk lösning av differentialekvationerna med tex solve_ivp i Python (eller ode45 om du föredrar Matlab).
- Bestäm vinkel och vinkelhastighet som funktion av tiden fram till en tidpunkt då kastarmen når ca φ=180 grader (behöver inte sluta exakt då, utan mer att se till att det mesta av kaströrelsen fångas).
- Vilken av de båda fallen ger högst vinkelhastighet? Förklara varför! Gissa gärna innan du gjort beräkningen.
- Använd energilagen för att analytiskt bestämma vinkelhastigheten då kastarmen är vertikal (φ=90 grader). Stämmer det med simuleringen?

Vi betraktar inte situationen att motvikten eventuellt nuddar marken för stora värden på *a*

Steg 2: Utökad modell: Slunga

Vi kommer nu utöka modellen med en slunga fäst i kastarmens ände C. Vi kommer bara beakta fallet 2) att motvikten är fäst i en gångjärnsled i B. Slungan kan ses som en lätt stång med längden *l*, fäst med friktionsfri gångjärnsled i C (vi betraktar bara detta fall), och i andra änden en partikel (projektilen) med massa m_p. Vi inför vinkeln θ för att beskriva slungans vinkel relativt kastarmen (se fig 1).



Figur 4: Startläge för slungan

- Etablera rörelseekvationer för den utökade modellen, andra ordningens differentialekvationer i φ och θ. Utgå gärna från Figur 1 för att få vinklar och avstånd rätt.
    - Teckna partikelns läge, hastighet och acceleration i termer av φ och θ
    - Frilägg och ställ upp Newtons andra lag för partikeln (du kan välja i xy-riktning eller längs/vinkelrätt slungan) samt frilägg och etablera rörelseekvation för kastarmen.
    - Kraften i slungan (en inre tvångskraft i systemet) kommer dyka upp som obekant i kastarmens rörelseekvation, samt partikelns rörelseekvation. Substituera bort denna kraft ur ekvationerna för att få ett system av två oberoende ekvationer
- Skriv om systemet till första ordningens system och simulera rörelsen numeriskt på motsvarande sätt som i Steg 1. Plotta φ och θ som funktioner av tiden. Tänk på att båda vinklar är negativa i startögonblicket.
- Plotta partikelns rörelse i xy-planet (origo i markplan under stödet A)
- Stödet A:s placering ges av parametern *a*. Bestäm rimliga gränser för *a* utifrån att B inte skall nudda marken, men att C skall göra det i starten. Undersök olika värden på *a* och försök hitta ett värde på *a* som ger så stor fart hos partikeln som möjligt.

Vi bortser från att i början av rörelsen kan slungan/partikeln röra sig under markplan.

Steg 3: Frivillig extrauppgift: Kastvidd

Genom att fästa slungan i en hake med rätt vinkel kan det åstadkommas att projektilen lämnar kastmaskinen vid en viss vinkel relativt kastarmen och gör därefter istället en ohindrad kaströrelse. Dvs, då vinkeln θ =$\theta_{släpp}$ uppnås, så blir aktuell hastighet och läge för partikeln blir då begynnelsevärden för en kaströrelse (utan luftmotstånd)

- Utöka programmet så det identifierar läge och hastighetsvektor (i xy-koordinater) då θ =$\theta_{släpp}$.
- Utöka programmet att beräkna var partikeln landar. Det kan antingen göras med en formel (kastparabeln) eller med en simulering (löser system av ode för kaströrelse).
- Undersök vilket värde på $\theta_{släpp}$ som ger längst kast.

Steg 4: Förslag på utökningar (Frivilligt, ej nödvändigtvis i ordning)

- Gör en modell av kastmaskinen i Adams, och jämför resultaten
- Utöka modellen eller programkoden så att partikeln inte kan komma under markplan. I det fallet kan vi anta att det inte är någon friktion mellan partikeln och marken.
- För bestämda värden på kastarmens längd *L,* projektilens massa m_p och motviktens massa *M*, ändra alla eller några parametrar för att få så lång kastvidd som möjligt. Vem kan hitta de parametrar som ger allra längst kast?

Använd följande nominella parametervärden

Motviktens massa *M*=500 kg

Motviktens tröghetsradie *k*=2 m

Kastarmens massa *m*=50 kg,

Kastarmens längd *L*=15 m

Stödets placering *a*=0,25

Stödets höjd h=4 m

Projektilens (partikelns) massa m_p=5 kg

Slungans längd *l*=5 m