Rapport – Kastmaskin (MMS216)

Manne Johansson och Jonatan Nyström

1 november 2025

Innehåll

Nominella värden 1 Förenklad modell utan slunga 2
2 Utökad modell med slunga 4

Nominella värden

$M = 500kg, k = 2m, m = 50kg, L = 15m,$
$a = 0.25, h = 4m, m_p = 5kg, l = 5m, g = 9.81m/s^2.$

Startläge: änden C vid marken, systemet släpps från vila. Vinkeln ϕ mäts relativt horisontalplanet och θ mäts relativt till kastarmen, $\phi = 0$ är horisontellt åt höger.

1 Förenklad modell utan slunga

1.1 Problembeskrivning

Vi betraktar en kastmaskin bestående av en kastarm med massa m och längd L, som kan rotera friktionsfritt kring en led i punkten A. I änden B är en motvikt med massa M fäst. Systemets läge beskrivs av vinkeln ϕ.

1.2 Tröghetsmoment

Tröghetsmoment för stången (homogen) om A:

$I_{OA} = M(aL)^2 + Mk^2$ ($k = 0$, vid motvikt gångjärnsledd)

$I_{\text{arm}} = mL^2 \left(\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{2} - a \right)^2 \right)$.

steiners sats ger:

$I_{\text{tot}} = I_{\text{arm}} + I_{OA} \Rightarrow$

$$I_{\text{tot}} = \begin{cases} I_{\text{arm}} + M(aL)^2 + Mk^2 (\text{ motvikt stel}) \\ \\ I_{\text{arm}} + M(aL)^2 (\text{ motvikt gångjärnsledd}) \end{cases}$$

1.3 Initialvinkel

Villkoret C mot mark: $\sin \phi_0 = -\frac{h}{(1-a)L} \Rightarrow \phi_0 \approx -20.83°$.

1.4 Rörelseekvation

Vi använde Steiners sats för att flytta tröghetsmomenten till A.

1.5 Resultat

Lösning som funktion av tid (plot phi och omega vs tid).

2 Utökad modell med slunga

Vi studerar nu den utökade modellen där en slunga med längd l och en partikel med massa m$_p ärfästikastarmensändeC.Slunganärfästmedfriktionsfrigångjärnsledi Cochvinkeln\theta$ beskriver slungans vinkel relativt kastarmen.

2.1 Partikelns ekvationer

Partikelns position:
$x = (L - aL)\cos\phi + l\cos(\phi + \theta)$
$y = (L - aL)\sin\phi + l\sin(\phi + \theta)$
Deriverat för hastighet och acceleration i X,Y-koordinater med Sympy.

2.2 Transformation

Transformerade till accelerationer i normal- och tangentriktningar relativt partikeln och änden av kastarmen.

2.3 Eliminering

Skapade system av ekvationer för att lösa $\ddot{\phi}$ och $\ddot{\theta}$ med Sympy, verifierat för hand.

2.4 Matrisform

Systemet ger funktion för $\ddot{\phi}$ och $\ddot{\theta}$.

2.5 Resultat

Plottar $\phi(t)$, $\theta(t)$ samt partikelns bana.

$\left(\frac{d}{dt}\right)\begin{bmatrix}\phi\\ \omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega\\ \frac{M_m}{I}\end{bmatrix}$

$M_a = gMaL\sin(\phi)$

$M_s = mg(L/2 - aL)\sin(\phi)$

$M_m = M_a - M_s$

$F_n = \frac{mL}{2}\omega^2 - mg\cos(\phi)$

$F_s = \frac{mL}{2}\dot{\omega} - mg\sin(\phi)$

$F_x = F_s\cos(\phi) - F_n\sin(\phi)$

$F_y = -F_s\sin(\phi) - F_n\cos(\phi)$

$T = \frac{1}{2}I\omega^2$

$V = C\cos(\phi),\ \text{där } C = MgaL - mg(L/2 - aL)$

$E = T + V$ (Systemet är konservativt om den totala energin E är konstant över tid.)