Pumping Lemma Lösungen

Lösungen:

Zeigen Sie, dass die Sprache nicht regulär ist:

a) $L = \{a^n b^m a^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

1. Sei Schranke $p \in \mathbb{N}$

2. Wähle $x \in L$ mit $|x| \geq p$

$x = a^p b a^p$; $|x| = 2p + 1 \geq p$

3. x zerlegen in uvw mit $|uv| \leq p$ und $|v| \geq 1$

$x = \underbrace{a^l}_{u}\,\underbrace{a^r}_{v}\,\underbrace{a^{p-r-l} b a^p}_{w}$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ und $l + r \leq p$ wegen $|uv| \leq p$
$r \geq 1$ wegen $|v| \geq 1$

4. Pumpen von v mit $i \in \mathbb{N}_0$

$x_i = a^l\,(a^r)^i\,a^{p-r-l} b a^p$
Sei $i = 0$: $x_0 = a^l\,(a^r)^0\,a^{p-r-l} b a^p = a^{p-r} b a^p$
$a^{p-r} \neq a^p$, da $r \geq 1 \Rightarrow x_0 \notin L$. PL-Komplement gilt $\Rightarrow$ L ist nicht regulär

b) $L = \{a^m b^n \mid n, m \in \mathbb{N}, m < n\}$

1. Sei Schranke $p \in \mathbb{N}$

2. Wähle $x \in L$ mit $|x| \geq p$

$x = a^p b^{p+1}$; $|x| = 2p + 1 \geq p$

3. x zerlegen in uvw mit $|uv| \leq p$ und $|v| \geq 1$

$x = \underbrace{a^l}_{u}\,\underbrace{a^r}_{v}\,\underbrace{a^{p-r-l} b^{p+1}}_{w}$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ und $l + r \leq p$ wegen $|uv| \leq p$
$r \geq 1$ wegen $|v| \geq 1$

4. Pumpen von v mit $i \in \mathbb{N}_0$

$x_i = a^l\,(a^r)^i\,a^{p-r-l} b^{p+1}$
Sei $i = 2$: $x_2 = a^l\,(a^r)^2\,a^{p-r-l} b^{p+1} = a^{p-r+2r} b^{p+1} = a^{p+r} b^{p+1}$
$p + r \geq p + 1$, da $r \geq 1 \Rightarrow x_2 \notin L$. PL-Komplement gilt $\Rightarrow$ L ist nicht regulär

c) $L = \{a^m b^n c^i \mid n, m, i \in \mathbb{N}, m + i < n\}$

1. Sei Schranke $p \in \mathbb{N}$

2. Wähle $x \in L$ mit $|x| \geq p$

$x = a^p b^{p+2} c$; $|x| = 2p + 3 \geq p$

3. x zerlegen in uvw mit $|uv| \leq p$ und $|v| \geq 1$

$x = \underbrace{a^l}_{u}\,\underbrace{a^r}_{v}\,\underbrace{a^{p-r-1} b^{p+2} c}_{w}$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ und $l + r \leq p$ wegen $|uv| \leq p$
$r \geq 1$ wegen $|v| \geq 1$

4. Pumpen von v mit $i \in \mathbb{N}_0$

$x_i = a^l (a^r)^i a^{p-r-1} b^{p+2} c$
Sei $i = 3$: $x_3 = a^l (a^r)^3 a^{p-r-1} b^{p+2} c = a^{p+2r} b^{p+2} c$
$p + 2r \geq p + 2$, da $r \geq 1 \Rightarrow x_3 \notin L$. PL-Komplement gilt $\Rightarrow$ L ist nicht regulär

d) $L = \{xy^i z^k \mid i, k \in \mathbb{N}, i \geq k\}$

1. Sei Schranke $p \in \mathbb{N}$

2. Wähle $x \in L$ mit $|x| \geq p$

$x = xy^p z^p$; $|x| = 2p + 1 \geq p$

3. x zerlegen in uvw mit $|vw| \leq p$ und $|v| \geq 1$

$x = \underbrace{xy^p z^{p-r-1}}_{u}\,\underbrace{z^r}_{v}\,\underbrace{z^l}_{w}$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ und $l + r \leq p$ wegen $|vw| \leq p$
$r \geq 1$ wegen $|v| \geq 1$

4. Pumpen von v mit $i \in \mathbb{N}_0$

$x_i = xy^p z^{p-r-1} (z^r)^i z^l$
Sei $i = 2$: $x_2 = xy^p z^{p-r-1} (z^r)^2 z^l = xy^p z^{p+r}$
$p + r \geq p$, da $r \geq 1 \Rightarrow x_2 \notin L$. PL-Komplement gilt $\Rightarrow$ L ist nicht regulär

e) $L = \{x^p y x^k y \mid p, k \in \mathbb{N}, k > p\}$

1. Sei Schranke $s \in \mathbb{N}$

2. Wähle $x \in L$ mit $|x| \geq s$

$x = x^s y x^{s+1} y$; $|x| = 2s + 3 \geq s$

3. x zerlegen in uvw mit $|uv| \leq s$ und $|v| \geq 1$

$x = \underbrace{x^l}_{u}\,\underbrace{x^r}_{v}\,\underbrace{x^{s-r-1} y x^{s+1} y}_{w}$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ und $l + r \leq s$ wegen $|uv| \leq s$
$r \geq 1$ wegen $|v| \geq 1$

4. Pumpen von v mit $i \in \mathbb{N}_0$

$x_i = x^l (x^r)^i x^{s-r-1} y x^{s+1} y$
Sei $i = 2$: $x_2 = x^l (x^r)^2 x^{s-r-1} y x^{s+1} y = x^{s+r} y x^{s+1} y$
$s + r \geq s + 1$, da $r \geq 1 \Rightarrow x_2 \notin L$. PL-Komplement gilt $\Rightarrow$ L ist nicht regulär

f) $L = \{x^i y^j x^k \mid i \in \mathbb{N}_0;\ j, k \in \mathbb{N},\ j < k\}$

1. Sei Schranke $p \in \mathbb{N}$

2. Wähle $x \in L$ mit $|x| \geq p$

$x = y^p x^{p+1};\ |x| = 2p + 1 \geq p$

3. x zerlegen in uvw mit $|uv| \leq p$ und $|v| \geq 1$

$x = \underbrace{y^l}_{u}\underbrace{y^r}_{v}\underbrace{y^{p-r-l}x^{p+1}}_{w}$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ und $l + r \leq p$ wegen $|uv| \leq p$

$r \geq 1$ wegen $|v| \geq 1$

4. Pumpen von v mit $i \in \mathbb{N}_0$

$x_i = y^l (y^r)^i y^{p-r-l} x^{p+1}$

Sei $i = 2$: $x_2 = y^l (y^r)^2 y^{p-r-l} x^{p+1} = y^{p+r} x^{p+1}$

$p + r \geq p + 1$, da $r \geq 1 \Rightarrow x_2 \notin L$. PL-Komplement gilt $\Rightarrow$ L ist nicht regulär