离散数学

Somnia1337

符号说明:

- 💎 定义
- 🛡️ 定理
- 🔔 性质
- 📍 公式 / 方法

1 命题逻辑

逻辑联结词

💎 **联结词**:

- $\triangledown$：不可兼或（异或）.
- $\to$：条件，$P \to Q$ 取假 $\iff$ P 取真、Q 取假.
- $\stackrel{c}{\to}$：条件否定，$A \stackrel{c}{\to} B \Leftrightarrow \sim (A \to B)$.
- $\leftrightarrow$：双条件（同或）.
- $\uparrow$：与非.
- $\downarrow$：或非.

等价

📍 基本等价式:

- 双重否定律
  - $\sim (\sim P) = P$
- 蕴含律
  - $P \to Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$ ✨
- 幂等律
  - $P \vee P \Leftrightarrow P$
  - $P \wedge P \Leftrightarrow P$
- 交换律
  - $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

- $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
- 结合律
  - $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
  - $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
- 分配律
  - $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ ✨
  - $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ ✨
- 吸收律
  - $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ ✨
  - $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ ✨
- De Morgan 律
  - $\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$ ✨
  - $\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$ ✨
- 同一律
  - $P \vee F \Leftrightarrow P$
  - $P \wedge T \Leftrightarrow P$
- 零律
  - $P \wedge F \Leftrightarrow F$
  - $P \vee T \Leftrightarrow T$
- 矛盾律
  - $P \wedge \sim P \Leftrightarrow F$
  - $P \vee \sim P \Leftrightarrow T$
- 排中律
  - $P \triangledown Q \Leftrightarrow (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q)$
- 等价律
  - $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 逆反律
  - $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$

🛡️ 双条件：$A \Leftrightarrow B \iff A \leftrightarrow B$ 永真.

💎 **对偶公式**：设 A 是包含 $\vee$，$\wedge$，$\sim$ 的命题公式，将 A 中的 $\vee$ 换为 $\wedge$、$\wedge$ 换为 $\vee$、T 换为 F、F 换为 T，称得到的公式 A^* 与 A 互为对偶公式.

🛡️ 对偶公式：$A \Leftrightarrow B \iff A^* \Leftrightarrow B^*$.

📍 与非：

- $P \uparrow P \Leftrightarrow \sim P$.
- $(P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$.
- $(P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$.

📍 或非:

- $P \downarrow P \Leftrightarrow \sim P$.
- $(P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q) \Leftrightarrow P \vee Q$.
- $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$.

完备集

📍 最小功能完备集：$\{\uparrow\}$，$\{\downarrow\}$，$\{\sim, \wedge\}$，$\{\sim, \vee\}$.

范式表示

💎 **范式**:

- **句节**：原子公式及其否定. $\sim P$
- **子句**：有限 *句节* 构成的析取式. $P \vee \sim Q \vee P$
- **短语**：有限 *句节* 构成的合取式. $\sim P \wedge Q \wedge \sim P$
- **极大项**：出现全部命题变元或其否定、且都恰好出现一次的 *子句*. $P \vee \sim Q$
  - n 个命题变元可构成 2^n 个极大项，每个极大项只有一个成假赋值，将该赋值对应的二进制数转换为十进制数 i，该极大项记作 M_i.
- **极小项**：出现全部命题变元或其否定、且都恰好出现一次的 *短语*. $\sim P \wedge Q$
  - n 个命题变元可构成 2^n 个极小项，每个极小项只有一个成真赋值，将该赋值对应的二进制数转换为十进制数 i，该极小项记作 m_i.
- **合取范式**：有限 *子句* 构成的合取式. $(P \vee \sim Q) \wedge \sim P$
- **析取范式**：有限 *短语* 构成的析取式. $(\sim P \wedge Q) \vee Q$
- **主合取范式**：由 *极大项* 构成的合取式. $(P \vee \sim Q) \wedge (\sim P \vee Q)$
- **主析取范式**：由 *极小项* 构成的析取式. $(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)$

🛡️ 范式：任何命题都存在与之等价的合取范式与析取范式.

🔔 极大项与极小项:

- $\sim M_i \Leftrightarrow m_i$.
- 对 $i \neq j$，$M_i \vee M_j = \mathrm{T}$，$m_i \wedge m_j = \mathrm{F}$.
- $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = \mathrm{F}$，$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = \mathrm{T}$.

🛡 主范式:

- 在命题公式的真值表中——
  - 使公式真值取 0 的全部极大项构成的合取式为公式的主合取范式.
  - 使公式真值取 1 的全部极小项构成的析取式为公式的主析取范式.
- 凡不是永真式的命题公式都存在与之等价的主合取范式.
- 凡不是矛盾式的命题公式都存在与之等价的主析取范式.

蕴涵

💎 **蕴涵**: A, B 为公式, 如果 A 取值 1 时 B 也取值 1, 称 A 蕴涵 B, 记为 $A \Rightarrow B$.

🔔 蕴涵: 如果 $A \Rightarrow B$, 则在真值表中 B 取值 1 的数量不少于 A 取值 1 的数量.

📍 基本蕴含关系式:

- 简化法则
  - $P \wedge Q \Rightarrow P$, $P \wedge Q \Rightarrow Q$ ✨
  - $\sim (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$, $\sim (P \rightarrow Q) \Rightarrow \sim Q$
- 扩充法则
  - $P \Rightarrow P \vee Q$, $Q \Rightarrow P \vee Q$
  - $\sim P \Rightarrow P \rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
- 假言推理
  - $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ ✨
- 拒取式
  - $\sim Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \sim P$
- 析取三段论
  - $\sim P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ ✨
  - $P \wedge (\sim P \vee Q) \Rightarrow Q$ ✨
- 假言三段论
  - $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$ ✨
- 二难推论
  - $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$
  - $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$
- 等价三段论
  - $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$ ✨
- 归结原理
  - $(P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R) \Rightarrow Q \vee R$

🔔 蕴涵：

- $A \Rightarrow A.$
- $A \Rightarrow B \iff A \to B$ 永真 $\iff A \wedge \sim B$ 矛盾 $\iff \sim B \Rightarrow \sim A.$ ✨
- $A \Rightarrow B \,\&\, B \Rightarrow A \iff A \Leftrightarrow B.$
- $A \Rightarrow B \,\&\, A$ 永真 $\Longrightarrow B$ 永真.
- $A \Rightarrow B \,\&\, B \Rightarrow C \Longrightarrow A \Rightarrow C.$
- $A \Rightarrow B \,\&\, A \Rightarrow C \Longrightarrow A \Rightarrow B \wedge C.$ ✨
- $A \Rightarrow C \,\&\, B \Rightarrow C \Longrightarrow A \vee B \Rightarrow C.$ ✨
- $A \wedge B \Rightarrow C \iff A \Rightarrow B \to C.$

推理方法

💎 **逻辑结果**：设 A_1，$\cdots$，A_n，B 为合适公式，如果 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$，称 B 是前提 A_1，$\cdots$，A_n 的逻辑结果 / 有效结论，或称由 A_1，$\cdots$，A_n 推出结论 B.

💎 **演绎**：设 G 是由一组命题公式构成的集合，如果存在一个有限序列 A_1，$\cdots$，A_n，使得每个 A_i 或属于 G，或是由 A_1，$\cdots$，A_{i-1} 推出的结论，且 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$，称由 G 演绎出 B.

📍 演绎规则：

- P 规则：前提引用规则.
- T 规则：中间结果引用规则.
  - 如果依据等价变换，标为 TE.
  - 如果依据蕴涵变换，标为 TI.
- CP 规则：如果要推导的结果形如 $B \to C$，则将 B 作为附加前提，与给定前提共同推导出 C.

本步操作	使用规则
引用前提	P
引用前提，并将其作为附加前提	P(附加前提)
引用第 11 步的结论，且依据等价变换	T ⑪ E
引用第 12、13 步的结论，且依据蕴涵变换	T ⑫, ⑬ I
引用第 14 步的附加前提、第 15 步的结论	CP ⑭, ⑮

💎 **消解**：设 C_1，C_2 为子句，如果 C_1 中有句节 P_1，$\cdots$，P_n，C_2 中有句节 $\sim P_1$，$\cdots$，$\sim P_n$，则两两一组分别消去后由余下句节构成析取式 C_3，称 C_3 为 C_1 与 C_2 的消解式.

📍 消解证明法：

1. 将结论的否定作为附加前提.
2. 将由前提构成的合取式转化为合取范式.
3. 提取该合取范式的全部子句作为对象集.
4. 不断消解，直到导出矛盾式（称为空子句，记为 口），至此，由反证法证明了原蕴涵关系成立（消解证明法为反证法的特殊形式）.

2 一阶谓词逻辑

量词化逻辑

💎 量词化逻辑：

- **客体**：独立存在的具体事物或抽象概念.（主语）
- **谓语**：刻画客体的性质或描述客体间的关系.（属性）
- **个体域**：由客体构成的非空集合 D. 全部客体构成 **全论域**.
- **客体变元**：以个体域中的元素为值的变元.
- **谓词**：称形如 $\text{谓词标识符}(\text{客体变元}_1, \cdots, \text{客体变元}_n)$、值为真或假的表达式为 n 元谓词 / n 元命题函数.

🔔 谓词：

- 不指明论域时，默认为全论域，可用额外的谓词指明客体性质，如用 $MAN(x)$ 指代全体人类，称这种谓词为 **特性谓词**.
- 一元谓词表示客体的性质，多元谓词表示客体之间的关系.

💎 量词符号：

- $\forall$：**全称量词**.
  - 设 $Q(x)$ 为以 D 为论域的一元谓词，称 $(\forall x)Q(x)$ 为 **全称量化命题**.
- $\exists$：**存在量词**.
  - 设 $Q(x)$ 为以 D 为论域的一元谓词，称 $(\exists x)Q(x)$ 为 **存在量化命题**.
- 在谓词公式 $(\forall x)A(x)$，$(\exists x)A(x)$ 中，称变元 x 为 **指导变元**，称 $A(x)$ 为相应量词的 **辖域**. 在辖域 $A(x)$ 中，称与指导变元 x 相同的变元为 **约束变元**，称其他变元为 **自由变元**.
  - e.g. 辖域：$(\forall x)[A(x) \to B(x)]$ 中，$A(x)$、$B(x)$ 均为 $(\forall x)$ 的辖域；而 $(\forall x)A(x) \to B(x)$ 中，仅 $A(x)$ 为 $(\forall x)$ 的辖域.

🔔 辖域：在全称量化命题中，辖域为用 $\rightarrow$ 联结成的表达式；在存在量化命题中，辖域为用 $\wedge$ 联结成的表达式.

💎 换名规则与代入规则：

- **换名规则**：对应约束变元，使用未出现在辖域中的变元标识符替换原来的指导变元及所有同名约束变元.
- **代入规则**：对应自由变元，使用未出现在辖域中的变元标识符替换原来的所有同名自由变元.

谓词公式

💎 谓词公式的 4 种原子：

- **常量标识符**：a，c，$Mary$，π，4，2.3.
- **客体变元符**：x，y，x_1，y_1.
- **函数标识符**：f，g，h，plus.
- **谓词标识符**：P，Q，R，$LESS\_THAN$.

🔔 函数与谓词：

- 称含 n 个变量的函数为 n 元函数.
- 称含 n 个客体的谓词为 n 元谓词.
- 函数、谓词都定义在论域 D 上，它们的变元都以 D 中的元素为值.
- 函数的值仍为 D 中的元素（具有封闭性），而谓词的值为真或假.

💎 函数与谓词的构成：

- **项**：
  - 常量标识符为项.
  - 客体变元符为项.
  - 对 n 元函数标识符 f，如果 $t_1, \cdots, t_n$ 为项，则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 为项.
- **原子**：对 n 元谓词标识符 P，如果 $t_1, \cdots, t_n$ 为项，则 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 为原子.
- **公式**（谓词合适公式）：
  - 原子为（合适）公式.
  - 如果 P、Q 为公式，则 $(\sim P)$、$(P \wedge Q)$ 等均为公式.
  - 如果 A 为公式，x 为客体变元标识符，则 $(\forall x)[A(x)]$ 与 $(\exists x)[A(x)]$ 均为公式.

等价

等价：A，B 为以 D 为论域的谓词公式，如果在任一解释下，A、B 都取相同真值，称 A 和 B 在论域 D 上等价，记为 $A \overset{D}{\Leftrightarrow} B$，简记为 $A \Leftrightarrow B$.

等价：$A \Leftrightarrow B \iff A \leftrightarrow B$ 永真.

否定深入：否定一个含有量词的谓词公式时，互换 $\forall$、$\exists$，并将辖域内的公式否定.

否定深入：

- $\sim (\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)[\sim P(x)]$
- $\sim (\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)[\sim P(x)]$

辖域的收扩：Q 不含指导变元，

- $(\forall x)[P(x) \vee Q] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee Q$
- $(\forall x)[P(x) \wedge Q] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge Q$
- $(\exists x)[P(x) \vee Q] \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \vee Q$
- $(\exists x)[P(x) \wedge Q] \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \wedge Q$
- $(\forall x)P(x) \to Q \Leftrightarrow (\exists x)[P(x) \to Q]$（注意量词变化）
- $(\exists x)P(x) \to Q \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \to Q]$（注意量词变化）
- $Q \to (\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)[Q \to P(x)]$
- $Q \to (\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)[Q \to P(x)]$

其他等价式：

- $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]$
- $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)[P(x) \vee Q(x)]$
- $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[P(x) \vee Q(y)]$
- $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[P(x) \wedge Q(y)]$
- $(\exists x)[P(x) \to Q(x)] \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$
- $(\forall x)(\forall y)A(x,\ y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x,\ y)$
- $(\exists x)(\exists y)A(x,\ y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x,\ y)$

范式表示

前束范式：对谓词公式 $A = (Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)G$，如果 Q_ix_i 为 $\forall x_i$ 或 $\exists x_i$，且 G 为不含量词的公式，称 A 为前束范式，称 G 为 A 的 **母式**. 当 G 分别为合取范式 / 析取范式时，称 A 为 **前束合取范式** / **前束析取范式**.

前束范式：任何含量词的谓词公式都存在与之等价的前束范式.

💎 *Skolem 范式*：对前束合取范式 $A=(Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)G$，遍历 Q_ix_i，当 Q_k 为 $\exists$ 时，选择一个 G 中未出现的函数标识符 g，用 $g(x_1, \cdots, x_{k-1})$ 代换 G 中的所有 x_k，并删去 Q_kx_k. 遍历结束后，所得公式不包含 $\exists$，称为 *Skolem 范式*，称代换所用的 g_i 为 ***Skolem 函数***.

🛡 *Skolem 范式*：设 A 为谓词公式，S 为其 *Skolem 范式*，A 矛盾 $\iff$ S 矛盾. 但在一般情况下，A 与 S 不一定等价.

蕴涵

💎 **蕴涵**：设 A，B 为以 D 为论域的谓词公式，如果在任一解释下，A 取值真时 B 也取值真，称 A 蕴涵 B，记为 $A \overset{D}{\Rightarrow} B$，简记为 $A\Rightarrow B$.

🛡 蕴含：$A\Rightarrow B \iff A\to B$ 永真.

📍 蕴涵：

- $(\forall x)P(x)\Rightarrow P(x)\Rightarrow(\exists x)P(x)$.
- 设 $G(x)$ 为以 D 为论域的谓词公式，y 为未出现在 $G(x)$ 中的自由变元，c 为常量标识符：
  - 全称指定规则 US(Universal Specify)
    - $(\forall x)G(x)\Rightarrow G(y)$.
    - $(\forall x)G(x)\Rightarrow G(c)$.
  - 存在指定规则 ES(Existential Specify)
    - $(\exists x)G(x)\Rightarrow G(c)$.
  - 全称推广规则 UG(Universal Generalize)
    - $G(y)\Rightarrow(\forall x)G(x)$.
  - 存在推广规则 EG(Existential Generalize)
    - $G(y)\Rightarrow(\exists x)G(x)$.
    - $G(c)\Rightarrow(\exists x)G(x)$.
- $(\forall x)P(x)\lor(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)[P(x)\lor Q(x)]$.
- $(\exists x)[P(x)\land Q(x)]\Rightarrow(\exists x)P(x)\land(\exists x)Q(x)$.
- $(\forall x)[P(x)\to Q(x)]\Rightarrow(\forall x)P(x)\to(\forall x)Q(x)$.
- $(\exists x)P(x)\to(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)[P(x)\to Q(x)]$.
- $(\forall x)[P(x)\leftrightarrow Q(x)]\Rightarrow(\forall x)P(x)\leftrightarrow(\forall x)Q(x)$.
- $(\forall x)(\forall y)P(x, y)\Leftrightarrow(\forall y)(\forall x)P(x, y)$.
- $(\exists x)(\exists y)P(x, y)\Leftrightarrow(\exists y)(\exists x)P(x, y)$.
- $(\forall x)(\forall y)P(x, y)\Rightarrow(\exists y)(\forall x)P(x, y)\Rightarrow(\forall x)(\exists y)P(x, y)\Rightarrow(\exists x)(\exists y)P(x, y)$.

3 集合代数

集合的基本概念

💎 **特征函数**：称

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1,\ x\in A\\0,\ x\notin A\end{cases}$$

为集合 A 的特征函数.

📍 特征函数：

- $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)$.
- $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\chi_B(x)$.
- $\chi_{A-B}(x)=\chi_A(x)(1-\chi_B(x))$.
- $\chi_{\bar{A}}(x)=1-\chi_A(x)$.
- $\chi_{A\oplus B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-2\chi_A(x)\chi_B(x)$.

💎 **子集合**：如果 $\forall x\in A$，$x\in B$，称 A 为 B 的子集合. 如果 $\exists x_0\in B$，$x_0\notin A$，称 A 为 B 的 **真子集**.

💎 **相等**：如果 A、B 互为子集合，称 A 与 B 相等.

集合的运算

💎 **对称差集**：称 $\{x|(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$ 为 A 与 B 的对称差集，记为 $A\oplus B$.

📍 集合的运算：

- $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B\ \&\ A\cap B=A$
- $A-B=A\cup\bar{B}$
- $A\oplus B=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$

幂集，笛卡尔集

💎 **幂集合**：A 的所有子集构成的集合，记为 2^A.

🔔 幂集合：

- $A\subseteq B\Rightarrow 2^A\subseteq 2^B$.

- A 含有 n 个元素，则 2^A 含有 2^n 个元素.

💎 **笛卡尔集**：称 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 为 $A_1, \cdots, A_n$ 的笛卡尔集，称运算 $\times$ 为 **直积**.

📍 直积:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times B \subseteq C \times D \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D$

4 二元关系

二元关系

💎 **二元关系**：设 R 为 $A \times B$ 的一个合于 $R = \{(x, y) \in A \times B | xRy\}$ 的子集合，称 R 为 A 到 B 的一个二元关系.

💎 特殊的二元关系：

- **空关系**：$A \times B$ 的空子集 $\emptyset$.
- **全关系**：$A \times B$ 自身.
- **恒等关系**：A 上的关系 $R = \{(x, y) \in A \times A | x = y\}$，记为 I_A.

同余：如果 m，n 对 d 同余，记为 $m \equiv n (\bmod d)$ 或 $d | m - n$，其中 $|$ 表示整除.

关系的表示法：有向图，关系矩阵.

💎 **有向图**：设 $A = \{x_i\}$，$B = \{y_i\}$，$R \subseteq A \times B$，以 x_i、y_i 为结点，当 $(x_i, y_j) \in R$ 时，从 x_i 到 y_j 引一条有向边. 对于满足 xRx 的结点 x，需要从自身到自身引一条有向边，称为 **自环**.

💎 **关系矩阵**：设 $A = \{x_1, \cdots, x_m\}$，$B = \{y_1, \cdots, y_n\}$，$R \subseteq A \times B$，构造 m 行 n 列的矩阵 $\mathbf{M}_R = (m_{ij})_{m \times n}$，其中当 $(x_i, y_j) \in R$ 时 $m_{ij} = 1$.

关系的性质

讨论范围：集合 A 上的关系 R.

自反关系，反自反关系

💎 **自反关系**：$(\forall x \in A)[xRx]$.

🔔 自反关系的体现：

- 关系图中，每个结点均自环.
- 关系方阵中，主对角线上元素均为 1.

💎 **反自反关系**：$(\forall x \in A)[(x, x) \notin R]$.

🔔 反自反关系的体现：

- 关系图中，没有结点自环.
- 关系方阵中，主对角线上元素均为 0.

根据自反性可将关系分为 3 类：自反关系，反自反关系，都不是.

对称关系，反对称关系

💎 **对称关系**：$(\forall x, y \in A)[xRy \to yRx]$.

🔔 对称关系的体现：

- 关系图中，如果两个结点有边连接，则其为双向边.
- 关系矩阵为对称矩阵（每个 1 关于主对角线对称的位置上也为 1）.

💎 **反对称关系**：$(\forall x, y \in A)[((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \to x = y]$.

🔔 反对称关系的体现：

- 关系图中，除自环外，不存在双向边.
- 关系矩阵中，除主对角线上的 1 外，每个 1 关于主对角线对称的位置上为 0.

根据对称性可将关系分为 4 类：对称关系，反对称关系，都是，都不是.

可传递关系

💎 **可传递关系**：$(\forall x, y, z \in A)[xRy \wedge yRz \to xRz]$.

🔔 可传递关系的体现：

- 关系图中，如果存在从 x 到 y 的边、从 y 到 z 的边，则存在从 x 到 z 的边.
- 关系矩阵中，如果 $m_{ij} = 1$、$m_{jk} = 1$，则 $m_{ik} = 1$.

关系的运算

💎 **复合关系**：$A=\{(x,y)\}$，$B=\{(y,z)\}$，$A\circ B=\{(x,z)\}$.

🔔 复合关系：

- $R^0=I_A$，$R^1=R$，$R^m\circ R^n=R^{m+n}$
- 结合律：$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$
- 分配律（在集合 A 上）：
  - $R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$
  - $(S\cup T)\circ R=S\circ R\cup T\circ R$
  - $R\circ(S\cap T)=R\circ S\cap R\circ T$
  - $(S\cap T)\circ R=S\circ R\cap T\circ R$

💎 **逆关系**：$R^{-1}=\{(y,x)\in B\times A|(x,y)\in R\}$.

🔔 逆关系：

- $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$
- $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$
- $(\overline{R})^{-1}=\overline{R^{-1}}$
- $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$
- $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

关系的闭包

💎 **闭包**：如果另有 A 上的关系 R'，满足：

- R' 自反 / 对称 / 可传递
- $R\subseteq R'$
- 任何其他满足前 2 条的 R'' 必满足 $R'\subseteq R''$（最小性）

称 R' 为 R 的自反 / 对称 / 传递闭包，分别记为 $r(R)$ / $s(R)$ / $t(R)$.

📍 闭包：

- $r(R)=R\cup I_A$，即补充每个 (x_i,x_i).
- $s(R)=R\cup R^{-1}$，即对每个 (x_i,y_i) 补充 (y_i,x_i).
- $t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i$，即对每个 (x_i,y_i) 与 (y_i,z_i) 补充 (x_i,z_i).

🛡️ 闭包：

- 如果 $R_1\subseteq R_2$，有

    - $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
    - $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
    - $t(R_1) \subseteq t(R_2)$
- 如果 R 自反，则 $s(R)$、$t(R)$ 自反.
- 如果 R 对称，则 $r(R)$、$t(R)$ 对称.
- 如果 R 可传递，则 $r(R)$ 可传递.
- $rs(R) = sr(R)$
- $rt(R) = tr(R)$
- $st(R) \subseteq ts(R)$

5 特殊关系

等价关系

💎 **等价关系**：同时满足自反、对称、可传递的关系.

常见的等价关系：三角形的全等关系，整数的模 k 同余关系.

💎 **等价类**：R 为等价关系，对 $a \in A$，记 A 的子集 $[a]_R = \{x | x \in A \cap xRa\}$ 为 R 的一个等价类，简记为 $[a]$，称 a 为 $[a]$ 的代表元.

🛡 等价类：

- $\forall a, b \in A$，或者 $[a] = [b]$，或者 $[a] \wedge [b] = \emptyset$.
- $\bigcup\limits_a [a] = A$.

💎 **分划**：$S = \{A_i\}$，A_i 为 A 的非空子集，如果 $\forall i, j (i \neq j)$，$A_i \cap A_j = \emptyset$，且 $\bigcup A_i = A$，称 S 为 A 的一个分划.

🛡 分划：在 A 上，每个等价关系都决定一个分划，每个分划都能导出一个等价关系.

偏序关系

💎 **偏序关系**：同时满足自反、反对称、可传递的关系，A 关于偏序关系 $\preccurlyeq$ 的偏序集记为 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$.

常见的偏序关系：整数的整除关系，幂集的包含关系.

💎 *Hasse 图*：对关系图，

- 删去环
- 删去传递边（如果已经存在 (i,j) 与 (j,k)，则删去 (i,k)）
- 对边 (i,j)，将 i 放在 j 下面，删去方向

称得到的图为 *Hasse 图*.

💎 **盖住关系**：构成 *Hasse 图* 的偏序关系 $\preccurlyeq$ 的真子集，记为 $cover(\preccurlyeq)$.

💎 **可比较**：

- 元素 $a, b \in \langle A, \preccurlyeq \rangle$，如果 $a \preccurlyeq b$ 或 $b \preccurlyeq a$，称 a 与 b 可比较.
- 关系 $\preccurlyeq$，$\preccurlyeq'$ 为 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 上的偏序关系，如果 $\forall a, b \in \langle A, \preccurlyeq \rangle$，$a \preccurlyeq b$ 时必有 $a \preccurlyeq' b$，称 $\preccurlyeq$ 与 $\preccurlyeq'$ 可比较.

全序集，良序集

💎 **全序集**：如果 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 中的任意两个元素都可比较，称 $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为全序集，称 $\preccurlyeq$ 为全序关系.

💎 **链**：$\langle A, \preccurlyeq \rangle$ 为偏序集，称其全序子集 $\langle B, \preccurlyeq \rangle$ 为链，称链中元素数量减 1 为链的长度.

💎 元：$a \in A$，$\forall b \in A$，

- $b \preccurlyeq a$，称 a 为 A 的 **最大元**.
- $a \preccurlyeq b$，称 a 为 A 的 **最小元**.
- 或者 $b \preccurlyeq a$，或者 a 和 b 不可比较，称 a 为 A 的 **极大元**.
- 或者 $a \preccurlyeq b$，或者 a 和 b 不可比较，称 a 为 A 的 **极小元**.

💎 界：$a \in A$，$\forall b \in B \subseteq A$，

- $b \preccurlyeq a$，称 a 为 B 的 **上界**.
  - $\forall a'$，a' 为 B 的上界且 $a \preccurlyeq a'$，称 a 为 B 的 **最小上界**.
- $a \preccurlyeq b$，称 a 为 B 的 **下界**.
  - $\forall a'$，a' 为 B 的下界且 $a' \preccurlyeq a$，称 a 为 B 的 **最大下界**.

"元"是对整个 A 讲，"界"是对 $B \subseteq A$ 讲.

💎 **良序集**：如果 $\forall B \subseteq \langle A, \preccurlyeq \rangle$ 且 $B \neq \emptyset$，B 都有最小元，称 A 为良序集.

💎 **拓扑排序**：如果 $\preccurlyeq$ 与 $\preccurlyeq'$ 可比较，且 $\preccurlyeq'$ 为全序关系，称 $\preccurlyeq'$ 为 $\preccurlyeq$ 的拓扑排序.

6 函数

函数

💎 **函数**：X，Y 为集合，f 为 X 到 Y 的关系，如果 $\forall x \in X$，唯一地 $\exists y \in Y$，$\langle x, y\rangle \in f$，称 f 为 X 到 Y 的全函数.

$|A| = a$，$|B| = b$，可定义 b^a 个 $f: A \to B$.

💎 **单位函数** / **恒等函数**：$f: A \to A$，$\forall x \in A$，$f(x) = x$，称 f 为 A 上的单位函数，记为 I_A.

单射，满射，双射

💎 射：

- **单射**：$\forall a, b \in X$，$a \neq b \to f(a) \neq f(b)$，称 f 为单射.（异源 → 异像）
- **满射**：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，$f(x) = y$，称 f 为满射.（像必有源）
- **双射**：同时为单射和满射的 f.

复合，逆函数

💎 **复合函数**：称 $g \circ f$ 为 f 和 g 的复合函数，复合的顺序从右向左，$(g \circ f)(x)$ 即 $g(f(x))$.

🔔 复合函数：复合将保留射的性质，如果 f 和 g 都为某射，$g \circ f$ 也为该射.

💎 **置换**：非空有限集合上的双射. 称将每个元素映射到自身的置换为 **单位置换** / **恒等置换**，记为 I_A.

💎 **循环**：一组置换元素用括号包括，构成循环.

置换 $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 可表示为循环 $(236)(45)$.

循环的积 $(12)(456)(236)(45) = (12346)$，推导方法：每次选定一元素 a，从最右侧循环开始，在每个循环内：

- 如果出现，变为下个元素
- 如果未出现，不变

经过全部循环后变为 b，则在积中 $a \to b$，如下：

a	(45)	(236)	(456)	(12)	b
1	1	1	1	2	2
2	2	3	3	3	3
3	3	6	4	4	4
4	5	5	6	6	6
5	4	4	5	5	5
6	6	2	2	1	1

积为 $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$，即 (12346).

💎 **逆函数**：$f : X \to Y$，$g : Y \to X$，$(\forall x)[(g \circ f)(x) = x] \wedge (\forall y)[(f \circ g)(y) = y]$，称 f 与 g 互为逆函数，f 的逆函数记为 f^{-1}.

🔔 逆函数：$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$\ln(x) : R^+ \to R$ 与 $\exp(x) : R \to R^+$ 互为逆函数.

🛡️ 逆函数：f^{-1} 存在 $\iff$ f 为双射.

10 图的基本概念

图

💎 **图**：一个二元组 $(V(G), E(G))$，其中 $V(G)$ 为 G 的 **结点集**，$E(G)$ 为 G 的 **边集**.

💎 **阶**：图 G 的结点数，记为 n.

边数记为 m，一个边数为 m 的 n 阶图记为 (n, m) 图.

💎 图：

- **简单图**：无环、无平行边的图.
- **多重图**：有环或平行边的图.
- **基图**：从多重图删去环和平行边得到的简单图，称为原图的基图.

💎 **度**：与结点关联的边的数量，记为 $d(u)$，最大点度记为 Δ，最小点度记为 δ. 环计 2 度.

握手定理：对 (n,m) 图 $G=(V,E)$，有 $\sum_{u\in V} d(u)=2m$，即点度的总和为边数的 2 倍.

推论：对任何图，度为奇数的结点数量为偶数.

特殊无向图：

- **孤立结点**：度为 0 的结点.
- **零图**：只由孤立结点构成的图.
- **平凡图**：只有 1 个结点的零图.
- **正则图**：各点度相等的图.
- **完全图**：任何两个结点都邻接的简单图，n 阶完全图记为 $K_n=(n,\frac{n(n-1)}{2})$.

特殊有向图：

- **有向完全图**：每对结点 (u,v) 间均有边 (u,v) 和 (v,u).
- **竞赛图**：每对结点 (u,v) 间恰有边 (u,v) 或 (v,u) 中的一条.
- **二部图**：结点集可划分为两部分，使每条边的两端点各属于不同的一部分.

子图：

- **生成子图**：包含 G 中所有结点的子图.
- **点诱导子图**：仅保留结点集的子集 V' 及其相关边的子图.
- **边诱导子图**：仅保留边集的子集 E' 及其相关结点的子图.

同构：称结点及其相对关系都相同的两个图同构.

路

道路：称非空序列 $P=v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$ 为从结点 v_0 到 v_k 的道路，起点与终点不同时称为开道路，否则称为闭道路.

简单图的道路仅用结点序列 $v_0v_1\cdots v_k$ 表示即可.

- **简单道路**：无重复边的道路.
  - **回路**：闭简单道路.
- **基本道路**：无重复结点的道路.（基本道路必为简单道路）
  - **圈**：闭基本道路.

道路图：如果图 G 可用一条基本道路表示，称 G 为道路图，n 阶道路图记为 P_n.

连通性

💎 连通：

- **连通**：称存在道路的两结点是连通的.
  - 连通是图的结点集上的等价关系.
- **支**：极大连通子图，图 G 的支数记为 $\omega(G)$.
- **连通图**：$\omega = 1$ 的图.
- **距离**：两结点间的最短道路长度，记为 $d\langle u, v\rangle$，规定不连通的两结点距离为 ∞.

🛡 距离公理：

- 非负性：$d \geqslant 0$.
- 对称性：$d\langle u, v\rangle = d\langle v, u\rangle$.
- 三角不等式：$d\langle u, v\rangle + d\langle v, w\rangle \geqslant d\langle u, w\rangle$.

💎 割集：$G = (V, E)$ 为连通图，$\omega(G) = 1$，

- **点割集**：V 的使 $\omega(G - V_1) > 1$ 的子集 V_1.
  - **基本点割集**：如果删去 V_1 中的任何一个结点，V_1' 都不再是点割集，称 V_1 为基本点割集.（最小性）
  - **割点**：$\{v\}$ 为点割集，称 v 为割点.
- **边割集**：E 的使 $\omega(G - E_1) > 1$ 的子集 E_1.
  - **基本边割集**：如果删去 E_1 中的任何一条边，E_1' 都不再是边割集，称 E_1 为基本边割集.（最小性）
  - **割边**：$\{e\}$ 为边割集，称 e 为割边.

🛡 割点、割边：

- 结点 v 为割点 $\iff$ 存在结点 u，w，使 u 到 w 的每一条道路都包含 v.
- 边 e 为割边 $\iff$ e 不包含于任何圈中.

💎 连通度：

- **点连通度**：由连通图产生一个非连通子图或零图所需要删去的结点的最少数量，图 G 的点连通度记为 $\kappa(G)$.
  - $\kappa(K_n) = n - 1$.
- **边连通度**：由连通图产生一个非连通子图或零图所需要删去的边的最少数量，图 G 的边连通度记为 $\lambda(G)$.

- $\lambda(K_n)=n-1$，$\lambda(P_n)=1$.

🛡 连通度：$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta$.

💎 连通图：

- **单向连通图**：对每对结点，至少从其中一个可达另一个.
- **强连通图**：对每对结点，都双向可达.
- **弱连通图**：基图为连通图的图.

🛡 强连通图：一个简单有向图强连通 $\iff$ 存在一条包含每个结点的有向闭道路.

💎 分图：

- **强分图**：极大强连通子图.
- **单向分图**：极大单向连通子图.
- **弱分图**：极大弱连通子图.

🛡 强分图：在简单有向图中，每个结点位于且仅位于一个强分图中，即强分图可看作简单有向图的一种“分划”.

矩阵表示

矩阵	值	意义	用途
邻接矩阵	$0\,/\,1$	边的存在性	求道路数量，求结点距离
可达性矩阵 / 道路矩阵	$0\,/\,1$	结点的连通性	求强分图
关联矩阵	$0\,/\,1\,/\,-1$	结点与边的关系	

💎 **邻接矩阵**：图 G 的结点集为 $V=\{v_n\}$，矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，当且仅当边 (v_i,v_j) 存在时 $a_{ij}=1$，称 $\mathbf{A}$ 为 G 的邻接矩阵.

🛡 邻接矩阵：

- 对 $k\geqslant 1$，$\mathbf{A}^k$ 中的 a_{ij}^k 表示 G 中从 v_i 到 v_j 的长度为 k 的有向道路的数量.
- 使 $a_{ij}^{k_0}>0$ 的最小的 k_0 即为 $d(v_i,v_j)$.
- 如果 $a_{ij}^{(n-1)}=0$，说明 v_i 到 v_j 不可达.

💎 **可达性矩阵** / **道路矩阵**：图 G 的结点集为 $V=\{v_n\}$，矩阵 $\mathbf{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，当且仅当存在从 v_i 到 v_j 的非零有向道路时 $p_{ij}=1$，称 $\mathbf{P}$ 为 G 的可达性矩阵 / 道路矩阵.

📍 构造可达性矩阵：

- 原理方法：构造 $\mathbf{B}=\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^n$，当且仅当 $b_{ij}>0$ 时 $p_{ij}=1$.
- 实用方法：用 [Warshall 算法]() 求 $\mathbf{A}$ 的正闭包（传递闭包）.

📍 由可达性矩阵求图的所有强分图：构造矩阵 $\mathbf{P}\odot\mathbf{P}^T=(g_{ij})_{n\times n}$，当 $i=j$ 时 $g_{ij}=1$，当 $i\neq j$ 时 $g_{ij}=p_{ij}\wedge p_{ji}$，遍历每一行，其中 1 所在列号对应的结点集构成一个强分图.

💎 **关联矩阵**：图 G 的结点集为 $V=\{v_n\}$，边集为 $E=\{e_m\}$，矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times m}$，当 e_j 为 v_i 的出边时 $m_{ij}=1$，当 e_j 为 v_i 的入边时 $m_{ij}=-1$，否则 $m_{ij}=0$，称 $\mathbf{M}$ 为 G 的关联矩阵.

11 树及其应用

无向树

💎 **树**：无圈的连通图.

🔔 树：

- 非平凡树至少有 2 个叶.
- 阶 $\geqslant 3$ 的树必有割点.

生成树

💎 **生成树**：图的树生成子图.

🛡 生成树：

- 连通图必有生成树.
- 对连通图 (n,m)，$m\geqslant n-1$.

根树

💎 **有向树**：基图为树的有向图.

🛡 叉树：

- 完全 m 叉树的叶结点数为 t，枝结点数为 i，有 $(m-1)i=t-1$.
- 完全二叉树的枝结点数为 i，各枝结点道路长度之和为 I，各叶结点道路长度之和为 J，有 $J=I+2i$.

12 平面图及其应用

平面图

💎 **平面图**：如果 G 存在这样一种平面图形表示：

- 没有结点重合
- 边不自身相交
- 边之间不在公共结点以外相交

称 G 为平面图.

🔔 平面图：

- 平面图的子图为平面图.
- 非平面图的母图为非平面图.
- $K_n(n \geqslant 5)$，$K_{3,n}(n \geqslant 3)$ 为非平面图.

💎 **面**：平面图中由边围成的、无法再细分的封闭区域. 称围成面的边为面的 **边界**. 称边界的边数为面的 **度**，记为 $\deg(F)$，割边计 2 度.

🛡 平面图的面度和等于边数的 2 倍，即 $\sum \deg(F_i) = 2m$.

欧拉公式

🛡 **欧拉公式**：对面数为 f 的连通平面图 (n, m)，有 $n - m + f = 2$.

更一般地，对支数为 k 的平面图，有 $n - m + f = k + 1$.

🛡 对连通简单平面图 (n, m)：

- 如果 $n \geqslant 3$，有 $m \leqslant 3n - 6$.
- 至少存在一个度 $\leqslant 5$ 的结点.

💎 **围长**：图中最短圈的长度，记为 g. 对无圈图，$g = \infty$.

🛡 对 $g \geqslant 3$ 的连通平面图 (n, m)，有 $m \leqslant \frac{gn-2g}{g-2}$.

上 2 条定理常用于判定非平面图.

判定平面图

💎 **细分图**：称在边上增加有限个 2 度结点得到的新图为原图的细分图.

🛡 *Kuratowski 定理*：图 G 为平面图 $\iff$ G 不包含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 的细分图同构的子图.

对偶图

教材 P160

着色

💎 点着色:

- **点着色**：将图的顶点涂色，使相邻结点颜色不同.
- k **着色**：若能用 k 种颜色完成点着色，称对图进行了 k 着色，图是 k 点可着色的.
- k **色图**：取使图为 k 可着色的最小 k，称图为 k 色图.
- **点色数**：k 色图中的 k 称为图的色数，记为 $\chi(G)=k$.

🛡 点着色:

- $\chi(G)=1 \iff G$ 为零图.
- $\chi(K_n)=n$.
- 对任意无环图 G，$\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1$.

💎 面着色:

- **面着色**：将地图的国家涂色，使相邻国家颜色不同.
- k **着色**：若能用 k 种颜色完成面着色，称对图进行了 k 着色，图是 k 面可着色的.
- **面色数**：使图为 k 可着色的最小 k，记为 $\chi^*(G)=k$.

🛡 图 G 是 k 面可着色的 $\iff$ 其对偶图 G^* 为 k 点可着色的.

🛡 连通平面图都是 5 点可着色的.

13 欧拉图与哈密顿图

欧拉图

💎 欧拉图:

- **欧拉道路**：包含所有边的简单道路.
- **欧拉回路**：包含所有边的简单回路，称有欧拉回路的图为 **欧拉图**.

🛡 欧拉图：如果 n 阶图为——

- 连通无向图：
  - 有欧拉道路 $\iff$ 最多有 2 个（即 0 / 2 个）奇数度结点.
  - 为欧拉图 $\iff$ 所有点度均为偶数.
- 连通有向图：
  - 有有向欧拉道路 $\iff$ $n-2$ 个结点的入度等于出度，剩余的 2 个结点中，一个出度比入度多 1（起点），另一个入度比出度多 1（终点）.
  - 为欧拉图 $\iff$ 所有结点的入度等于出度.

📍 由欧拉图构造欧拉回路：从起点开始，每次从能够选择的边中优先选择非割边.

💎 **中国邮递员问题**：邮递员从邮局出发，走遍每条街道并返回邮局，求最短路径.

📍 中国邮递员问题的解法：将部分边复制为 2 条，构造欧拉回路.

哈密顿图

💎 哈密顿图：对连通图，

- **哈密顿道路**：包含所有结点的基本道路.
- **哈密顿圈**：包含所有结点的圈，称有哈密顿圈的图为 **哈密顿图**.

没有简单的充要条件判定哈密顿图.

🛡 哈密顿图：对 $G=(V,E)$，

- G 为哈密顿图 $\implies$ $\forall S\subset V$ 且 $S\neq\emptyset$，$\omega(G-S)\leqslant|S|$.
  - 常以逆否形式使用，判定非哈密顿图.
- G 为 n 阶简单图，且任意一对结点 u，v，$d(u)+d(v)\geqslant n-1$ $\implies$ G 有哈密顿道路.
  - G 为 n（$n\geqslant 3$）阶简单图，任意一对结点 u，v，$d(u)+d(v)\geqslant n$ $\implies$ G 为哈密顿图.

14 代数系统

二元运算

💎 n **元运算**：S 为非空集合，称映射 $f:S^n\to S$ 为 S 上的 n 元运算.

💎 运算的特性：$\cdot$ 为定义在 S 上的二元运算，$\forall x,y,z\in S$，

- **封闭**：$x\cdot y\in S$.

- **可交换**：$x \cdot y = y \cdot x$.
- **可结合**：$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- **幂等**：$x \cdot x = x$.

💎 运算间的关系：$\cdot$，$*$ 为定义在 S 上的二元运算，$\forall x, y, z \in S$，

- **可分配**：$x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$ 且 $(y \cdot z) * x = (y * x) \cdot (z * x)$，称 $*$ 关于 $\cdot$ 可分配.
- **吸收律**：两运算都可交换，$x * (x \cdot y) = x$ 且 $x \cdot (x * y) = x$，称两运算满足吸收律.

集合	运算	封闭	可交换	可结合	幂等	可分配	吸收律
$\mathbb{N}$	$+$	√	√	√			
	$-$						
	$\times$	√	√	√		关于 $+$	
2^A	$\cup$	√	√	√	√	关于 $\cap$	√
	$\cap$	√	√	√	√	关于 $\cup$	√

代数系统

💎 **代数系统**：一个非空集合 S 连同定义在 S 上的若干封闭运算 f_i 组成代数系统，记为 $\langle S, f_1, \cdots, f_n \rangle$.

要求 S 非空、f_i 对 S 封闭.

💎 特异元：$\langle S, \cdot \rangle$ 为代数系统，

- **幺元**：$e \in S$，$\forall x \in S$，$e \cdot x = x \cdot e = x$，称 e 为幺元.
- **零元**：$\theta \in S$，$\forall x \in S$，$\theta \cdot x = x \cdot \theta = \theta$，称 θ 为零元.
- **幂等元**：$a \in S$，$a \cdot a = a$，称 a 为幂等元.

💎 **逆元**：e 为 $\langle S, \cdot \rangle$ 的幺元，$a, b \in S$，$a \cdot b = b \cdot a = e$，称 a 与 b 互为逆元，记为 $a^{-1} = b$.

代数系统	幺元	零元	幂等元	逆元
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$	0		0（唯一）	$\forall a \in \mathbb{Z}$，$a^{-1} = -a$
$\langle \mathbb{Z}, \times \rangle$	1	0	1，0	$1^{-1} = 1$（唯一）
$\langle 2^S, \cup \rangle$	$\emptyset$	S	所有元素	
$\langle 2^S, \cap \rangle$	S	$\emptyset$	所有元素	

代数系统	幺元	零元	幂等元	逆元
$\langle M_n, \cdot\rangle$				$\forall A \in M_n$，$A^{-1}(\text{逆元}) = A^{-1}(\text{逆矩阵})$

特异元：如果代数系统 $\langle S, \cdot\rangle$——

- 存在幺元，则其唯一.
- 存在零元，则其唯一.
- 元 a 有逆元且 $\cdot$ 可结合，则 a^{-1} 唯一.

群：$\langle S, \cdot\rangle$ 为代数系统，

- **广群**：$\cdot$ 封闭（天然满足）.
- **半群**：$\cdot$ 可结合.
- **含幺半群**：存在幺元.
- **群**：$\forall a \in S$，$\exists b \in S$，$b = a^{-1}$.

以上关系层层递进，即

$$\langle S, \cdot\rangle : \text{广群} \overset{\text{可结合}}{\rightarrow} \text{半群} \overset{\text{幺元}}{\rightarrow} \text{含幺半群} \overset{\text{全可逆}}{\rightarrow} \text{群}$$

15 半群与群

半群

$\langle S, \cdot\rangle$ 为半群，$a \in S$，m，n 为正整数，

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- $(a^m)^n = a^{mn}$.

如果改为含幺半群，则 m，n 还可为 0.

$\langle S, \cdot\rangle$ 为半群，S 为有限集 $\implies$ 半群有幂等元.

子半群：$\langle S, \cdot\rangle$ 为半群，非空 $A \subseteq S$，且 $\langle A, \cdot\rangle$ 为半群，称 $\langle A, \cdot\rangle$ 为 $\langle S, \cdot\rangle$ 的子半群.

群，子群

群的另一种定义：$\langle G, \cdot\rangle$ 为半群，如果 $\forall a, b \in G$，$\exists x, y \in G$，$x \cdot a = a \cdot y = b$，则 $\langle G, \cdot\rangle$ 为群.

群的消去律：$a \cdot b = a \cdot c \implies b = c$.

推论：在群的运算表中，每个元素在所在的行、列中唯一.

群的幺元和幂等元是同一个元.

子群：$\langle G, \cdot \rangle$ 为群，非空 $S \subseteq G$，且 $\langle S, \cdot \rangle$ 为群，称 $\langle S, \cdot \rangle$ 为 $\langle G, \cdot \rangle$ 的子群.

子群：

- $\langle G, \cdot \rangle$ 为群，$a \in G$，$\langle S = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}, \cdot \rangle$ 为 $\langle G, \cdot \rangle$ 的子群.
- 子群与群的幺元相同.
- $\langle G, \cdot \rangle$ 为群，非空 $S \subseteq G$，$\langle S, \cdot \rangle$ 为 $\langle G, \cdot \rangle$ 的子群 $\iff \forall a, b \in S$，$a \cdot b^{-1} \in S$.

交换群，循环群

交换群：$\langle G, \cdot \rangle$ 为群，如果 $\cdot$ 满足交换律，称 $\langle G, \cdot \rangle$ 为交换群（*Abel 群* / 加群）.

交换群：$\langle G, \cdot \rangle$ 为交换群 $\iff \forall a, b \in G$，$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

循环群：$\langle G, \cdot \rangle$ 为群，如果 $\exists a \in G$，使得 G 能由 a 生成，即 $G = (a)$，称 $\langle G, \cdot \rangle$ 为循环群，称 a 为生成元.

循环群必为交换群.

周期：$\langle G, \cdot \rangle$ 为群，$a \in G$，称使得 $a^{t_0} = e$ 的最小正整数 t_0 为 a 的周期，如果 t_0 不存在，周期为 ∞.

周期：$\langle G, \cdot \rangle$ 为群，$a \in G$，t 为 a 的周期，

- $a^m = e \iff t | m$.
- $a^i = a^j \iff t | (i - j)$.
- 由 a 生成的子群有 t 个元素，即 $(a) = \{e, a, a^2, \cdots, a^{t-1}\}$.

陪集，拉格朗日定理

陪集：$\langle G, \cdot \rangle$ 为群，$\langle H, \cdot \rangle$ 为其子群，$a \in G$，记 $aH = \{a \cdot h | h \in H\}$，称 aH 为 H 在 G 中关于 a 的 **左陪集**，同理称 $Ha = \{h \cdot a | h \in H\}$ 为 **右陪集**，称构成陪集的集合的基数为 **子群的指数**.

陪集：

- 任何两个左 / 右陪集或者相同、或者没有公共元素（等价类）.
- $\langle G, \cdot \rangle$ 为群，$\langle H, \cdot \rangle$ 为其子群，$a, b \in G$，在 G 中建立二元关系 $aRb \Leftrightarrow b \in aH$，则 R 为 G 上的等价关系.

- 子群的所有左 / 右陪集等势.

🛡️ **拉格朗日定理**：n 阶群的任何子群的阶必为 n 的因子.

推论：n 元群 G 中任何元素的周期必为 n 的因子.

正规子群，商群

💎 **正规子群**：$\langle H,\cdot\rangle$ 为 $\langle G,\cdot\rangle$ 的子群，如果 $\forall a\in G$，$aH=Ha$，称 H 为 G 的正规子群.

🛡️ 正规子群：H 为 G 的正规子群 $\iff$ $\forall a\in G$，$aHa^{-1}\subseteq H$.

💎 **商群**：H 为 G 的正规子群，G/H 表示 G 的所有陪集的集合，称 $\langle G/H,\cdot\rangle$ 为商群，其中 $\cdot$ 为 $\forall aH,bH\in G/H$，$aH\cdot bH=(a*b)H$.

16 环与域

环

💎 **环**：如果 $\langle R,+,*\rangle$ 满足——

- $\langle R,+\rangle$ 为交换群
- $\langle R,*\rangle$ 为半群
- $*$ 对 $+$ 满足分配律

称其为环.

🛡️ 环：$\langle R,+,*\rangle$ 为环，$a,b,c\in R$，θ 为 $+$ 的幺元，$-a$ 为 a 关于 $+$ 的逆元，$a-b$ 为 $a+(-b)$ 的简写，

- $a+b=c\Leftrightarrow a+b-c=\theta.$
- $a*\theta=\theta*a=\theta$（$+$ 的幺元是 $*$ 的零元）.

💎 **零因子**：$\langle R,+,*\rangle$ 为环，$a,b\in R$，如果 $a\neq\theta$ 且 $b\neq\theta$，而 $a*b=\theta$，称 a 和 b 为 R 中的零因子.

🛡️ 零因子：$\langle R,+,*\rangle$ 为环，R 无零因子 $\iff$ $\forall a,x,y\in R$ 且 $a\neq 0$，$a*x=a*y$ $\Rightarrow x=y$.

整环，域

💎 $\langle R,+,*\rangle$ 为环，

- **交换环**：$*$ 可交换.
- **含幺环**：$\langle R, *\rangle$ 有幺元.
- **整环**：R 同时为交换环和含幺环，且无零因子.

💎 **域**：$\langle R, +, *\rangle$ 为环，如果 $\langle R, +\rangle$ 和 $\langle R-\{\theta\}, *\rangle$ 都是交换群，称 R 为域.

🛡 域：有限整环必为域.

17 格与布尔代数

格

💎 **代数格**：$\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 为代数系统，如果 $\vee$ 和 $\wedge$ 满足交换律、结合律、吸收律，称 L 为代数格.

由定义的吸收律，可证得 $\vee$ 和 $\wedge$ 也满足幂等律.

💎 **偏序格**：L 为集合，$\preccurlyeq$ 为 L 上的偏序关系，如果 $\forall a, b \in L$，子集 $\{a, b\}$ 在 L 中都有最大下界和最小上界，称 $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序格.

$\{a, b\}$ 的最大下界记为 $\operatorname{glb}(a, b)$，最小上界记为 $\operatorname{lub}(a, b)$.

🛡 格：$\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 为代数格，定义 L 上的自然偏序关系 $\preccurlyeq$：$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$，则 $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 为偏序格.

子格，同态

💎 **子格**：$\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 为格，S 为 L 的非空子集，如果 $\forall a, b \in S$，$a \wedge b, a \vee b \in S$，称 $\langle S, \vee, \wedge\rangle$ 为 L 的子格.

💎 **对偶**：$\langle L, \preccurlyeq\rangle$，$\langle L, \preccurlyeq'\rangle$ 为偏序格，如果 $\preccurlyeq$ 与 $\preccurlyeq'$ 互逆，称两偏序格互为对偶.

💎 **格同态**：$\langle L, \vee, \wedge\rangle$，$\langle P, \oplus, \otimes\rangle$ 为格，$f: L \rightarrow P$ 为映射，如果 $\forall a, b \in L$，有 $f(a \vee b) = f(a) \oplus f(b)$ 和 $f(a \wedge b) = f(a) \otimes f(b)$，称 f 为 L 到 P 的格同态. 当 f 为双射时，称其为 **格同构**.

🛡 格同构：f 为 $\langle L, \preccurlyeq\rangle$ 到 $\langle P, \subseteq\rangle$ 的格同构 $\Longleftrightarrow$ $\forall a, b \in L$，$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow f(a) \subseteq f(b)$.

分配格，有补格

💎 **分配格**：$\langle L, \vee, \wedge\rangle$ 为格，如果 $\forall a, b, c, d \in L$，有 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ 或 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$，称 L 为分配格.

根据对偶原理，两条件任一成立，则另一个也成立.

🔔 分配格：$\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 为分配格，$a, b, c \in L$，如果 $a \vee b = a \vee c$ 且 $a \wedge b = a \wedge c$，则 $b = c$.