ANÁLISE FUNCIONAL E SÉRIES DE FOURIER

Aluno: Luca Maciel Alexander [1]
Orientador: Adalberto Panobianco Bergamasco

Conteúdo

1. Introdução

O objetivo do trabalho foi determinar quando um operador diferencial linear da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial y},\ \alpha \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

atuando no espaço de funções periódicas no plano $\mathbb{R}^2$, é globalmente hipoelítico.

No escopo deste estudo, um operador L é denominado globalmente hipoelítico se dada uma função periódica u em C^1, Lu em C^∞ implica u em C^∞. A definição usual de hipoeliticidade global, que envolve conceitos da teoria das distribuições, não será usada.

A dúvida sobre a hipoeliticidade global do operador L foi resolvida relacionando o decaimento dos coeficientes da série de Fourier de $Lu = f,\ u \in C^1_{per},\ f \in C^\infty$ com a regularidade de u. Concluímos que L é globalmente hipoelítico quando (e somente quando) α, da definição do operador L, é irracional e não é um número de Liouville. Em outras palavras, α, além de ser irracional, não poderá sequer ser aproximado arbitrariamente bem por sequências de racionais.

[1]Este documento será submetido como relatório final de uma iniciação científica desenvolvida no ICMC, USP, sob apoio financeiro do PIBIC, CNPq, durante o período de 01/09/2020 a 31/08/2021.

Um problema relacionado envolve determinar se dada uma função f em C^∞, sequer existe uma função u de classe C^1 que solucione a equação diferencial

$$f = Lu. \tag{1.2}$$

Por exigir um aprofundamento sobre distribuições, deixamos o estudo desse problema de resolubilidade para outra oportunidade.

Operadores hipoelíticos compõem uma classe útil no estudo de equações diferenciais como a acima, visto que dada uma solução u satisfazendo uma condição de regularidade, se f é suave e o operador L é hipoelitico, obtemos a suavidade da solução u.

2. Análise Funcional

A Análise Funcional discorre sobre as propriedades de espaços vetoriais e de operadores sobre eles. Em muitos casos, os espaços vetoriais são munidos de uma norma. Os operadores são comummente lineares.

Desde seu intenso desenvolvimento no século XX por figuras eminentes como Banach e Hadamard, a Análise Funcional se tornou o principal contexto de estudo das equações diferenciais parciais - tanto por oferecer ferramentas que facilitam trabalhos sobre espaços de funções, quanto por generalizar técnicas já existentes para o estudo das EDP's, como a Análise de Fourier.

Definimos um espaço vetorial como um conjunto X de vetores, um corpo K de escalares e duas operações - a soma entre vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar - que devem satisfazer algumas regras.

É útil também ter uma noção de "tamanho" dos vetores. Para isto, em muitos casos é possível acoplar uma norma a um espaço vetorial, ou seja, definir uma operação $\|x\| : X \to K$ sobre um vetor que retorna um valor escalar, interpretado como a magnitude desse vetor. Com uma norma da diferença entre vetores, obtemos uma métrica, assim possibilitando a identificação das sequências de Cauchy no espaço. Se todas essas convergirem, o espaço vetorial normado é dito completo. Ademais, se a norma do espaço foi induzida por um produto interno (no sentido de $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$), o espaço completo é um espaço de Hilbert.

Espaços de Hilbert são conducentes à aplicação de técnicas da Análise, pois muitas delas são frutíferas no caso de limites (de sequências) existirem. Em espaços completos, limites de sequências de vetores existem no maior número possível de casos.

Um conceito fundamental para o desenvolvimento deste trabalho é o de conjuntos de vetores que geram um espaço. Um conjunto "Gerar" um espaço pode significar que todo vetor do espaço é uma combinação linear (única) dos vetores do conjunto (nesse caso, o conjunto é uma base de Hamel do espaço). Alguns espaços que nos interessam, entretanto, não são gerados por bases de Hamel, exigindo uma generalização dessa definição de base. Uma generalização cômoda estabelece que um conjunto é uma base de Schauder de um espaço se todo vetor do espaço é o limite de uma sequência de combinações lineares de vetores do conjunto (o espaço é o fecho das combinações lineares dos vetores do conjunto). Obs.: A base de Schauder generaliza a base de Hamel porque se um vetor de um espaço é uma combinação linear de vetores de um conjunto, este vetor também pode ser interpretado como o limite da sequência estacionária com termos iguais à combinação linear em questão. Desse ponto em diante, menções a bases de espaços se referem a bases de Schauder, a menos que o contrário seja dito.

Dada uma base ortonormal M (que contém vetores unitários e dois a dois ortogonais) de um espaço de Hilbert X, é desejável encontrar a forma dos coeficientes α_k das combinações lineares

$$f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k,\ e_k \in M,\ f \in X$$

para os vetores f que têm uma representação desse tipo.

Tomando o produto interno com um $e_j \in M$ de ambos os lados da equação acima, é revelada a série abstrata de Fourier (ainda com finitos termos)

$$f = \sum_{k=0}^{n} \langle f,\, e_k\rangle e_k,\ e_k \in M,\ f \in X.$$

Para representar todos os vetores $f \in X$ do espaço para o qual M é uma base ortonormal, consideramos o limite quando $n \to \infty$ das somas acima, e estudamos algumas propriedades de convergência dessas séries, para um f em X:

Teorema 2.1 (Convergência)**.** *Seja (e_k) uma base ortonormal para um espaço de Hilbert X. Então*

(1) *A série $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k$ converge (na norma de X) se e somente se $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2$ converge.*
(2) *Se $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k = f$, então $\alpha_k = \langle f,\, e_k\rangle$.*
(3) *Para todo $f \in X$, $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f,\, e_k\rangle e_k$ converge.*

Observação 2.2. Em outras palavras, foi dada uma condição para a convergência de uma série genérica, depois dito que quando esta série genérica converge, ela é a série abstrata de Fourier, depois dito que todo vetor do espaço admite representação como série abstrata de Fourier.

Também foram vistas desigualdades e identidades representativas da análise funcional, tal como:

Proposição 2.3 (Desigualdade de Bessel). *Seja* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência ortonormal do espaço vetorial com produto interno (EVPI)* X*. Então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x,\, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2\,,\ x \in X. \tag{2.1}$$

Demonstração. Seja $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal do EVPI X e $x \in X$. Definimos $y = \sum_{k=1}^{n} \langle x,\, e_k\rangle e_k$, para um n fixo. Definimos $z = x - y$. Mostramos que $z \perp y$:

$$\begin{aligned} \langle z,\, y\rangle = \langle x - y,\, y\rangle = \langle x,\, y\rangle - \langle y,\, y\rangle &= \\ \langle x, \sum \langle x,\, e_k\rangle e_k\rangle - \langle \sum \langle x,\, e_k\rangle e_k,\, \sum \langle x,\, e_i\rangle e_i\rangle &= \\ \sum \langle x,\, e_k\rangle \overline{\langle x,\, e_k\rangle} - \sum |\langle x,\, e_k\rangle|^2 &= \\ 0. \end{aligned}$$

Portanto é possível aplicar a relação de Pitágoras: $\|z\|^2 + \|y\|^2 = \|x\|^2$. De onde segue que $\|z\|^2 + \sum |\langle x,\, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$, e como $\|z\|^2 \geq 0$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x,\, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2\,.$$

As sequência das somas parciais (o termo da esquerda) conforme n cresce é monótona crescente e limitada por $\|x\|^2$, logo converge. Dessa forma obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x,\, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2\,.$$

□

Observação 2.4. Em espaços de Hilbert, se M é uma base ortonormal com $e_k \in M$, a desigualdade de Bessel se torna uma igualdade, a identidade de Parseval. Para os fins deste trabalho, a identidade em questão mostra sua utilidade ao relacionar um vetor a uma soma envolvendo os coeficientes de sua série de Fourier abstrata (além de possuir interessantes interpretações geométricas).

3. Séries de Fourier

Sendo desenvolvidas informalmente para resolver um problema físico de propagação de calor, as Séries de Fourier inspiraram o desenvolvimento da Análise como um todo e foram posteriormente formalizadas e generalizadas.

Voltamos a atenção para o espaço de funções contínuas e 2π-periódicas, com produto interno dado pela integral definida de funções, sobre um período. Tomando uma base ortonormal M de funções trigonométricas, aplicamos os estudos anteriores sobre séries de Fourier abstratas, de forma a interpretar a série

$$\sum_n \langle f,\, e_n\rangle e_n,\ e_n \in M \tag{3.1}$$

como

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt\, e^{inx} \tag{3.2}$$

sendo 3.2 a série de Fourier de f.

Essa construção foi empregada na resolução de algumas equações diferenciais parciais (do calor, da onda e de Laplace), em que soluções se apresentam naturalmente como séries de Fourier.

É importante saber para quais escolhas de f obtemos a convergência dessa série. O seguinte teorema foi o principal resultado estudado com esse viés.

Teorema 3.1 (Teorema de Fourier)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier de f converge em cada ponto x para o valor $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ (a média aritmética dos limites laterais de f no ponto x).*

Além disso, foram vistas condições mais restritivas sobre f, em troca da garantia de convergência uniforme de sua série de Fourier.

Teorema 3.2 (Convergência uniforme das séries de Fourier)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua (e derivável fora dos pontos de descontinuidade), tal que a derivada primeira (nos pontos em que existir) é integrável e absolutamente integrável. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f.*

Um operador linear rico em propriedades relacionadas aos tópicos desenvolvidos é a transformada de Fourier ($\mathcal{F}$):

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\, dx. \tag{3.3}$$

Pode-se usar este operador para definir automorfismos nos espaços L^2 e de Schwartz ($\mathcal{S}$). Além disso, foram conhecidas as propriedades dessa transformada de traduzir derivadas para polinômios e convoluções para produtos (e propriedades análogas de sua inversa):

$$\mathcal{F}[\frac{\partial^p f}{\partial x^p}] = (i\xi)^p \mathcal{F}[f] \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[(-ix)^p f(x)] = \frac{\partial^p \mathcal{F}[f]}{\partial \xi^p} \tag{3.4}$$

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[fg] = (\sqrt{2\pi})^{-1}\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[f] \tag{3.5}$$

4. Números de Liouville

Números transcendentes são definidos como os números reais que não são raízes de uma equação polinomial a coeficientes inteiros, ou seja, que não são algébricos. Essa definição é comumente atribuída ao Euler, século XVIII.

Demonstrações construtivas sobre a existência desses números foram expostas no século seguinte, desbravadas pelo Liouville, ao definir uma classe de números transcendentes: os números de Liouville, essencialmente os números irracionais melhor aproximados por sequências de racionais. Segue uma definição precisa.

Definição 4.1 (Número de Liouville)**.** Um número $\alpha \in \mathbb{R}$ é de Liouville se existir uma sequência de números racionais $(p_j/q_j)_{j\in\mathbb{N}}$, com todos os elementos distintos, p_j e q_j inteiros e $q_j > 0$, tal que para todo valor do índice j temos

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}. \tag{4.1}$$

Para fazer uso dos números de Liouville na resolução do problema proposto na seção 6, basta conhecer a definição acima (aliás, um enunciado parecido e equivalente). Apesar disso, estudamos a conexão dos números de Liouville com os números transcendentes, pela relevância histórica. Após o lema, segue o principal teorema que exprime essa conexão.

Lema 4.2. *Todo número de Liouville $\alpha \in \mathbb{R}$ é irracional.*

Demonstração. Mostraremos a contrapositiva. Representamos $\alpha \in \mathbb{Q}$ como a fração irredutível $c/d,\ c, d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0$. Dada uma sequência de racionais $(p_j/q_j)_{j\in\mathbb{N}}$, como na definição 4.1, obtemos

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{p_j}{q_j}\right| = \frac{|c \cdot q_j - p_j \cdot d|}{|d \cdot q_j|}.$$

Como $c, d, p_j, q_j \in \mathbb{Z}$, o numerador do lado direito é um inteiro não negativo. Caso o numerador não se anule dado um índice j, temos $|c \cdot q_j - p_j \cdot d| \geq 1$ e para todo j maior que uma ordem fixa, $|d \cdot q_j| < q_j^j$.

Como também sabemos que $|c \cdot q_j - p_j \cdot d|$ se anula para apenas um valor de j (pois o anulamento ocorrer é o mesmo que $p_j/q_j = c/d$, e os elementos da sequência $(p_j/q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ são distintos), concluímos que, para todo j maior que uma ordem fixa,

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| = \frac{|c \cdot q_j - p_j \cdot d|}{|d \cdot q_j|} > \frac{1}{q_j^j}. \tag{4.2}$$

Mostramos que para um $\alpha \in \mathbb{Q}$, não existe escolha de sequência $(p_j/q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que o faça um número de Liouville. $\square$

Teorema 4.3 (Teorema de Liouville sobre Aproximação Diofantina)**.** *Todo número de Liouville $\alpha \in \mathbb{R}$ é transcendente.*

Demonstração. Mostraremos a contrapositiva. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ algébrico, raiz do polinômio irredutível $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grau d.

Como f é uma função polinomial, estão satisfeitas as hipóteses necessárias para o uso do Teorema do Valor Médio, o qual garante que existe ξ entre α e p/q tal que

$$f'(\xi)(\alpha - \frac{p}{q}) = f(\alpha) - f(\frac{p}{q}).$$

Por $f(x)$ ser um polinômio a coeficientes inteiros de grau d, $f(p/q)$ é um número racional, com denominador no máximo q^d. Como f é irredutível, $f(p/q) \neq 0$, logo $|f(p/q)| \geq 1/q^d$. Com isso,

$$|f'(\xi)| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|0 - f(\frac{p}{q})\right| \geq \frac{1}{q^d} \implies \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1/|f'(\xi)|}{q^d}.$$

Como $f(x)$ é irredutível, sua raiz α tem multiplicidade um, portanto $f'(x) \neq 0$. Pela continuidade de f', uma escolha de ξ suficientemente próxima de α garante $f'(\xi) \neq 0$.

Assim, para todo racional p/q, existe um ξ entre α e p/q de forma que definimos $C = |f'(\xi)| > 0$ e afirmamos que α não é número de Liouville, pela seguinte expressão:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^d}.$$

□

5. EDP's

Motivados pela aplicação do conceito de hipoeliticidade apresentada no último parágrafo da seção 1, mostraremos que no exemplo simples de EDP abaixo (em particular, uma EDO), se f é suave e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u \in C^1_{per}$, então u também é suave.

$$f = \frac{du}{dx} \tag{5.1}$$

Como f é suave, é também contínua, portanto integrável:

$$\int f\, dx = \int \frac{du}{dx}\, dx = u + C, \text{ para C constante.}$$

Assim, como $\int f\, dx \in C^\infty$, vale que $u \in C^\infty$.

Existe, entretanto, outro método de resolução para esse problema. Seguem alguns pré-requisitos para esta discussão.

Definição 5.1 (Decaimento rápido)**.** Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decai rapidamente se decai mais rapidamente que o inverso multiplicativo de qualquer polinômio. Isto é,

$$\forall\, k>0\ \exists\, N>0\ \exists\, C>0\ :\ n>N \implies |a_n| \le Cn^{-k}\ ,\ n\in\mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Dada a definição acima, podemos investigar a conexão entre a regularidade de funções periódicas e o decaimento dos coeficientes de suas séries de Fourier, iniciando pela seguinte estimativa (obtida através de integração por partes sobre a expressão que define os coeficientes $\hat{f}(n)$):

$$\begin{aligned} &\text{Se}\ \ f\in C^k \\ &\text{Então}\ \exists\, N>0\ \exists\, C>0\ :\ n>N \implies \left|\hat{f}(n)\right| \le Cn^{-k}\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{5.3}$$

em que vale uma espécie de recíproca, restringindo a regularidade de uma função dado o comportamento dos seus coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} &\text{Se}\ \exists\, N>0\ \exists\, C>0\ :\ n>N \implies \left|\hat{f}(n)\right| \le Cn^{-k}\ ,\ n\in\mathbb{N}\ ,\ k\ge 2 \\ &\text{Então}\ \ f\in C^{k-2}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

O leitor pode notar que dada uma f em C^k, 5.3 garante um decaimento de coeficientes na ordem de n^{-k} (ou melhor), porém dado este decaimento, 5.4 não nos traz necessariamente de volta à hipótese inicial (de f em C^k). Por outra, as implicações acima não são capazes de fornecer uma relação suficientemente estreita entre a regularidade e o decaimento estudados, isto é, a menos do notável caso no qual f é suave:

$$f\in C^\infty \iff (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{N}}\ \text{decai rapidamente.} \tag{5.5}$$

Isso será indispensável nos estudos que seguem, por fortemente relacionar uma ideia central na definição de hipoeliticidade (a classe de funções C^∞) à análise de Fourier.

Voltamos agora ao problema de determinar a regularidade de u, na equação 5.1.

Primeiro escrevemos os coeficientes das séries de Fourier das funções em ambos os lados da igualdade, obtendo:

$$b(n) = a(n)\cdot n\cdot i$$

em que $b(n)$ são os coeficientes da série de Fourier de f, e $a(n)$ os coeficientes da série de Fourier de u.

$f\in C^\infty$ logo $b(n)$ decai rapidamente conforme $|n|\to\infty$. Assim, $b(n)/ni$ (equivalente a $a(n)$) também decai rapidamente. Portanto u, a função representada pelos coeficientes de Fourier $a(n)$, é suave.

6. Um Problema sobre Regularidade

Objetivamos por fim solucionar o problema dado na seção 1. As ferramentas da análise de Fourier desenvolvidas até o momento serão empregadas para estudar a regularidade das funções envolvidas na equação 1.2. Com isso revelaremos a influência dos valores do fator α sobre a hipoeliticidade do operador L. Veremos que dado α irracional, temos a hipoeliticidade global de L quando α não é um número de Liouville.

Recapitulando, gostaríamos de determinar sob quais condições o operador

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

atuando no espaço de funções periódicas no plano $\mathbb{R}^2$, é globalmente hipoelítico. Com este fim, relacionamos as funções $u \in C^1_{per}$ e $f \in C^\infty$ pela equação

$$f = Lu$$

e estudamos a regularidade de u, a depender de escolhas de α.

Primeiramente escrevemos os coeficientes das séries de Fourier das funções em ambos os lados da igualdade, obtendo:

$$b(n,m) = a(n,m) \cdot (n - \alpha m) \cdot i \tag{6.1}$$

ou, aproveitando o caso em que α é irracional para garantir que $n - \alpha m$ não se anula,

$$a(n,m) = \frac{b(n,m)}{(n - \alpha m) \cdot i} \tag{6.2}$$

em que $b(n,m)$ são os coeficientes da série de Fourier de f, e $a(n,m)$ os coeficientes da série de Fourier de u. Para facilitar os cálculos, mudamos o sinal de α, sem prejudicar o resultado final.

A seguir suporemos que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não seja um número de Liouville e conferiremos se L é globalmente hipoelítico nesse caso. Após isso, faremos o mesmo, mas assumindo que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ seja um número de Liouville. Por fim, comentaremos sobre o caso em que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não seja um número de Liouville. Por definição, para $|n|\, e\, |m|$ suficientemente grandes,

$$\exists M > 0 : \left|\alpha - \frac{n}{m}\right| \geq \frac{1}{m^M}. \tag{6.3}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por um fator de m, obtemos

$$\exists M > 0 : |n - \alpha m| \geq \frac{1}{m^M}. \tag{6.4}$$

Observação 6.1. Com a multiplicação por m, o lado direito permanece da forma $1/m^M$, em vez de $1/m^{M-1}$, pois $1/m^M < 1/m^{M-1}$.

Expomos agora uma um resultado análogo ao 5.5, para funções de domínio bidimensional. Sejam $x(n,m)$ os coeficientes da série de Fourier de g. Então:

$$g \in C^\infty \iff \sup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \frac{|x(n,m)|}{(n^2+m^2+1)^k} < +\infty,\ \forall k \in \mathbb{R}. \tag{6.5}$$

Logo, como $f \in C^\infty$, $b(n,m)$ satisfaz a condição de decaimento acima. Pela equação 6.1, $a(n,m)\cdot(n-\alpha m)\cdot i$ satisfaz esta mesma condição.

Como em 6.4 estabelecemos um limitante inferior para os valores de $|n-\alpha m|$ (para $|n|$ e $|m|$ grandes), segue que $a(n,m)$ também satisfaz a condição de decaimento, ou seja, $u \in C^\infty$.

Em suma, se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é um número de Liouville, L é globalmente hipoelítico.

Suponhamos agora que $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ é um número de Liouville.

Por definição, para todo $M > 0$ existe um conjunto infinito de racionais $\{n/m : n,m \in \mathbb{Z},\ m > 0\}$ tal que para $|n|$ e $|m|$ suficientemente grandes,

$$\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{m^M}. \tag{6.6}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por um fator de m, obtemos

$$|n-\alpha m| < \frac{1}{m^M}. \tag{6.7}$$

Observação 6.2. Com a multiplicação por m, o lado direito permanece da forma $1/m^M$, em vez de $1/m^{M-1}$, pois $1/m^M < 1/m^{M-1}$. Logo, os limitantes superiores em tanto 6.6 quanto 6.7 poderiam ser $1/m^{M-1}$, ou seja, ambos com m à mesma potência.

Atingido este limitante superior para $|n-\alpha m|$, é possível proceder de maneira análoga à acima para concluir que $a(n,m)$ não decai rapidamente, portanto não é suave (i.e. se $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ é um número de Liouville, L não é globalmente hipoelítico).

Por fim, consideramos o caso em que α é racional. Por simplicidade vamos redigir apenas o caso de $\alpha > 0$. Podemos escolher $\alpha = p/q$, p e q inteiros positivos. Definimos

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} e^{i(kpx+kqy)}$$

e obtemos $u \in C^1_{per} \setminus C^5$ e $Lu = 0 \in C^\infty$. Logo L não é globalmente hipoelítico.

Por questões de disponibilidade de tempo e de organização do relatório, alguns detalhes foram omitidos das argumentações contidas principalmente nesta seção.

7. Metodologia

A execução do trabalho se deu sobretudo com a pesquisa bibliográfica e resolução de exercícios por parte do aluno, junto à implementação de críticas e sugestões do orientador. O cronograma de estudos inicialmente proposto se desenvolveu sem entraves.

Referências

[1] R. Beals. *Advanced Mathematical Analysis*. Springer-Verlag, 1973.

[2] D.G. Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 1977.

[3] Paul Garrett. Liouville's theorem on diophantine approximation. University of Minnesota, September 2013.

[4] S. Greenfield and N. Wallach. Global hypoellipticity and liouville numbers. Proc. A.M.S., Vol. 31, 112-114, 1972.

[5] R. Iorio and V. Iorio. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge, 2001.

[6] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989.

[7] E. L. Lima. *Análise Real, vol.1*. IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2017.

[8] Ivan Niven. *Irrational Numbers*. The Mathematical Association of America, 1985.

[9] M.E. Taylor. *Partial Differential Equations I: Basic Theory*. Springer-Verlag, 2011.

[10] S. Zani. Hipoeliticidade global para operadores de segunda ordem. Master's thesis, ICMC - USP, 1988.