Notas de um Semestre de Monitoria

Luca M. Alexander *

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo

Julho 2020

Uma compilação dos textos "Curiosidade da Semana", direcionados aos alunos cursando a disciplina SMA0801 - Cálculo I durante o primeiro semestre realizado de forma virtual de 2020, redigidos com os fins de ensinar e estimular, frequentemente priorizando este último.

Semana 0: Introdução

Olá pessoal!

Este aviso visa esclarecer como será o andamento das monitorias durante o período de quarentena. Em princípio não teremos horários fixos de monitoria, mas não hesitem em mandar suas dúvidas, comentários, etc. ao meu e-mail (lucapitan72@usp.br).

Valendo o meio ponto na média, no lugar da aula prática, será postada semanalmente (normalmente quartas-feiras), como atividade no Moodle, uma curiosidade curta mas (muito) interessante relacionada à matéria. Basta ler e pensar alguns minutos sobre ela, por ventura pesquisar um pouco mais a

*Materializado com a permissão da professora e o incentivo dos alunos cursando SMA0801.

fundo na Wikipédia e, quem sabe, talvez acabar assistindo um vídeo temático no YouTube destrinchando o tópico melhor. No exato momento em que perceber que aprendeu algo legal, volte ao Moodle e confirme a realização da atividade (não haverá uma entrega objetiva).

Bons estudos :)

Semana 1: Indução

Andamos percebendo que a indução finita é uma ferramenta quase milagrosa na resolução de diversos problemas. Em geral, se quisermos saber se vale uma afirmação $p(n)$ para todo n natural, basta garantir que vale $p(1)$ e que $p(n) \implies p(n+1)$.

Os exercícios comuns desse tópico são usualmente concebidos com a ideia de que o passo indutivo ($p(n) \implies p(n+1)$) será resolvido com apenas manipulações algébricas/aritméticas, mas existem muitos problemas reais (e.g. o seguinte) em que o passo indutivo pode ser feito com nada mais que um pouco de criatividade.

Da mesma forma que o pi aparece sempre em cenários que envolvem círculos, a indução finita costuma brilhar em problemas de natureza recursiva/iterativa, como, notoriamente, na questão: o jogo das Torres de Hanói é sempre "resolvível" independentemente do número inicial de discos? (Pesquise!)

Obs. nesses tipos de exercícios menos dependentes de manipulações de equações, erros são propícios, gerando resultados engraçados, como o Paradoxo do Cavalo.

Semana 2: Epsilons e Deltas

Breve nota sobre continuidade:

O limite nos permite estudar o absurdamente pequeno e grande, sem ter que diretamente brigar com zeros e infinitos. Quando calculamos o limite de uma função em um ponto, não "brigamos com o zero" no sentido de que não nos interessa o valor da função *no ponto* - apenas nas menores proximidades dele. (Ela nem precisa estar definida por lá!)

A continuidade de uma função f em p é como um limite exigente. Ela já se importa com o valor de f em p, dizendo que $f(p)$ precisa ser vítima de uma espécie de efeito manada, "imitando" o comportamento dos pontos ao redor dela.

Agora a curiosidade principal: "Por que existe um delta para todo epsilon??".

A essa altura estamos muito íntimos com a definição formal de limite, usada para mostrar que "se isso se aproxima desse, então aquilo se aproxima daquele". Para exprimir essa mesma ideia, por que não bastaria mostrar, por exemplo:

1. $\exists\, \epsilon\, \exists\, \delta, \ldots$
2. $\forall\, \epsilon\, \forall\, \delta, \ldots$
3. $\exists\, \epsilon\, \forall\, \delta, \ldots$

**mantendo sempre epsilon como o valor que define o intervalo no eixo-y, e o delta definindo o intervalo no eixo-x.*

Resp.:

1. Muito permissivo. (Tente usar essa definição para encontrar múltiplos limites "válidos" onde deve haver apenas um.)
2. Muito restritivo. (Use esta para erroneamente mostrar que um limite que existe, na verdade (..na mentira), nao existe!)
3. Essa talvez seja útil para mostrar que uma função é limitada...

Bônus:

Pegue a definição de limite e simplesmente troque os epsilons por deltas e vice-versa. Intuitivamente, por ser "simétrica" à original, não deveria fazer a mesma coisa? Por que não faz? Pensando em termos de limites em funções, para qual tipo de função essa definição alternativa não mudaria nada?

Dica:

A natureza da função não é totalmente simétrica: podemos ter dois valores de f para um x?

Semana 3: Sobre Limites

Grande parte dos limites que calculamos até o momento existem, ou seja, equivalem a algum número real L. O mundo, entretanto, nem sempre é tão piedoso, pois existem limites em que isso não necessariamente vale. Para qualquer L real que escolhermos, existiria um epsilon tal que nenhum delta é bom. Em alguns casos, para todo epsilon que escolhermos, nenhum delta é bom!

Pensando nesses dois casos de não existência do limite em algum ponto, o primeiro caso descreve quais cenários? E o segundo? Seguem dicas que provavelmente geram mais dúvidas do que sanam (leia a seu próprio risco): O que os limites laterais tem a ver com a existência do limite? E se eles não forem iguais? E se um não existir? E se um não existir no sentido de ir para o infinito?!

Pequeno adendo “limite inexistente vs. limite indeterminado”:

Em mínimas palavras, limites ou existem ou não existem. Limites em si não são “indeterminados”, mas ao calcular um limite, podemos, usando apenas passos válidos (como a soma dos limites é o limite das somas, etc), chegar a uma expressão como $\frac{0}{0}$, que, aí sim, trata-se de uma “expressão indeterminada”. Felizmente, isso é nada mais que um limite brincando de esconde-esconde, não motivo de grande pânico. Basta respirar fundo, voltar ao seu limite inicial e tentar outra forma de calculá-lo.

Semana 4: Introdução à Derivada

O pensamento dessa semana se dedica a talvez o recurso mais importante/útil de todo o cálculo - a derivada! E tem notícias melhores: para quem conhece o limite, a derivada requer pouquíssimo esforço para entender, pois a derivada é nada mais que o limite de uma simples expressão. O problema que gera a necessidade dessa expressão é o de descobrir quanto que uma função "varia" em um ponto.

Intuitivamente, é fácil dizer, olhando para o gráfico de uma função, a velocidade em que ela cresce ou decresce (varia). Por exemplo, tome a função $f(x) = x^2$. Percebemos olhando para seu gráfico que (lendo de menos infinito para mais infinito) ela decresce muito, mas vai diminuindo o ritmo de decrescimento, chega a diminuir tanto o ritmo que chega a ser estacionária em um ponto! Quando entra em valores positivos há um "plot twist" e ela passa a querer subir, e daí vai aumentando o ritmo de crescimento indefinidamente.

A questão agora é como expressar essa intuição de velocidade de crescimento em um ponto? Podemos começar com uma expressão do tipo:

$$\frac{f(x) + f(x+h)}{h}$$

que nos fornece a inclinação da reta secante à curva da função nos pontos $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$. Essa inclinação é essencialmente a "velocidade de crescimento" ou "taxa de variação" dessa reta! (pondere)

Mas queremos a taxa de variação da função em um só ponto, não em uma reta que passa por dois pontos... Intuitivamente, qual limite podemos aplicar nessa expressão $\frac{f(x)+f(x+h)}{h}$ para que ela seja equivalente à "taxa de variação de f no ponto x"? Esse limite aplicado nessa expressão é a famosa: derivada de f em x!

Resp.:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x) + f(x+h)}{h}$$

Semana 5: Aplicação de Limite para o Infinito

O limite no infinito, apesar de envolver diretamente um conceito tão abstrato, tem um poder inigualável em resolver problemas práticos. Alguns notáveis estão em descobrir áreas de certas figuras estranhas. Hoje, vamos fingir que o triângulo retângulo é uma dessas figuras inusitadas, e tentar deduzir a área dele usando nada mais que a área de um quadrado e um limite no infinito.

Faça o seguinte:

1. Desenhe um quadrado 1×1 (área $= 1$).
2. Conecte o vértice superior esquerdo com o inferior direito e considere um dos triângulos retângulos formados.
3. Intuitivamente, pela simetria, sabemos que a área de ambos é $\frac{1}{2}$, mas vamos ignorar a intuição e confirmar esse fato com um limite legal.
4. Sabemos que a área total do quadrado é 1, mas se dividirmos o quadrado em 4 "quadradinhos" iguais e retirarmos um deles, esse formato "L" que sobra tem área $(1) - (\frac{1}{4}) = (\frac{3}{4})$.
5. Removendo esse canto do quadrado, estamos um passo mais próximo de transformá-lo naquele triângulo retângulo.
6. Agora faça o mesmo para os dois quadrados que tocam no vão do quadrado que retiramos. Agora já devemos conseguir visualizar um "triângulo" (em resolução bastante baixa). A área dele sendo: $(1) - (\frac{1}{4}) - (2 \cdot (\frac{1}{16}))$.
7. Repetindo para os quadradinhos que tocam o novo vão, a área da figura da próxima iteração seria: $(1) - (\frac{1}{4}) - (2 \cdot (\frac{1}{16})) - (4 \cdot (\frac{1}{64}))$.
8. Note que repetindo esse processo indefinidamente, parece que estamos montando uma série que converge para a área que queremos.
9. Para poupá-los os epsilons e deltas, matem o que resta desse problema com a seguinte fórmula que devem ter encontrado no ensino médio, $S = \frac{a_1}{1-q}$, para calcular a soma de uma progressão geométrica (razão q, termo inicial a_1) no infinito.

Conseguiu? Deu $\frac{1}{2}$? Parabéns!

Obs. Pense nesse limite como atuando sobre uma função dos naturais aos reais, sendo $f(i) =$ (nossa soma até a iteração i).

Encerra-se essa curiosidade notando o seguinte: essa área foi de uma figura "bonita" - mas a mesma ideia de somar infinitas áreas muito pequenas (usando limite no infinito) vai ser aplicada para achar áreas e volumes tão excêntricos quanto quisermos! Cheiro de integral...

Semana 6: Contextualização

Essa se dedica a quem sente falta das aulas de história, que há poucos meses foram violentamente substituídas por infindáveis horas de cálculo e programação (nunca a violência gerou um fim tão agradável).

No início das nossas jornadas matemáticas, é comum aprendermos coisas muito úteis e intuitivas: como contar, somar, multiplicar, etc. Conforme progredimos, pessoas começam a tentar nos convencer de que, por exemplo, o conjunto de todos os valores dos quadrados de um número real x pode ser visualizado no espaço como uma curva estranha (no caso, uma "parábola"). Ou mais forçadamente ainda, que uma fração envolvendo fatoriais que representa números de combinações de um conjunto está intimamente ligada com os coeficientes de certos polinômios (binômios de newton).

Nessa longa trajetória, não há falta de oportunidade de se perder, e de se convencer de que tudo isso está além dos limites do nosso raciocínio. Por isso é importante, de vez em quando, dar uma olhada para trás e apreciar o tanto de tempo que pessoas comuns, particularmente aficionadas por números, investiram numa só ideia para que ela acabasse imortalizada nas nossas apostilas. Afinal, se até os criadores dos teoremas suaram muito sobre ele, por que nós não nos concedemos esse privilégio? Com tempo e vontade, somos capazes de não só aprender, mas de inventar grande parte da matemática que conhecemos.

Para contextualizar, a ideia de tomar limites existe (pelo menos intuitivamente) há milênios! Ela surgiu como ferramenta para resolver perguntas não muito óbvias, mas que hoje respondemos instantaneamente. Como é o caso do método da exaustão, em que o "limite" das áreas de várias figuras parecidas com uma certa figura era usado para achar sua área (familiar?). E.g. Polígonos regulares de n lados com $n \to +\infty$ parecem muito com um círculo, não? Infelizmente, quando surgiram essas ideias, não vieram acompanhadas de computadores, para calcular o caso $n = 694726105647389$, muito menos de epsilons e deltas para calcular o caso... infinito.

Até isso acontecer, passou um bom tempo de confusão geral com relação a coisas que tendiam a outras. Isso é bem ilustrado com o Paradoxo de Zenão (A soma de infinitos intervalos de tempo cada vez menores realmente tende a infinito como Zenão propõe? Conferem o paradoxo!). Os matemáticos só se acalmaram quando um Karl Weierstrass (já vão acomodando seus ouvidos ao som desse nome, ele será ouvido muito ainda) teve a ideia de relacionar epsilons e deltas de uma forma muito específica, fornecendo um método rigoroso para achar limites. Isso abriu a porta para uma nova matemática, com uma utilidade sem precedentes - o Cálculo. Quem foi o primeiro a atravessar a porta? Mais fácil descobrir se Capitu traiu Bentinho do que se Newton traiu Leibniz. Deixo a leitura dessa disputa histórica para os curiosos.

Semana 7: Pontos de Acumulação

Aqui vai um cuidado importante para a vida (no que tange a limites). Você encontra um limite no infinito. Quer então descobrir para onde vai o valor de uma função definida nos reais, avaliada em pontos do domínio cada vez mais distantes do zero (na verdade, de qualquer outro número). O problema faz sentido e, melhor, conhece formas de resolvê-lo - é um dia feliz. Você diligentemente começa a atacá-lo com truques de cálculo, mas de repente, antes de conseguir finalmente achá-lo, ele tenta se fazer de difícil e magicamente muda o domínio da função para não ir aos infinitos! (i.e. domínio limitado) Você olha incrédulo/a para a folha, e tenta se convencer de que o sono te fez anotar errado o domínio da função. O limite se contenta. Acaba rasgando o prévio esboço de resolução e começa a pensar no novo problema.

Logo encontra a evidente barreira de que conforme vamos para o infinito, nada é definido! Pensa que não é possível que esse limite exista - mas os limites não existentes que encontrou até o momento eram os que tinham limites laterais diferentes (e.g. em funções escada) ou oscilações loucas (e.g. em $sen(\frac{1}{x})$) ou ainda que cresciam indefinidamente (e.g. $\frac{1}{x}$). Até hoje, a existência do limite era sempre culpa da lei da função, não do domínio! Pois saiba que o domínio também detém esse poder de influência.

Ok, pensa, "mas isso deve ser peculiaridade de limites no infinito, certamente no meu limite para um número real a, o domínio não causa problemas." Mas e se o a for um ponto isolado do domínio? Ou seja, existe um δ tal que não há pontos do domínio em $(a-\delta, a)$ ou $(a, a+\delta)$. O limite simplesmente não é calculável também. (e.g. Qual o limite para o ponto a, de uma função definida somente em a??)

Para esses limites a um certo a, podemos até dizer que o domínio não precisa ser a reta toda (nem precisa ser um intervalo) para podermos calcular o limite. Basta que o ponto a seja Ponto de Acumulação do domínio da sua função. Isso significa: a não é isolado do domínio. Ou ainda, que existe uma sequência de pontos do domínio (que não contém a), que converge para a. O conceito de Ponto de Acumulação (em inglês: "Limit Point") aparece bastante em outros lugares, e sua natureza infinitesimal cai como uma luva em cálculo!

Semana 8: Primitivas

Para acompanhar a seguinte história, é bom ter uma intuição básica sobre derivadas. Lembrar da curiosidade da semana 4 talvez ajude a aquecer seu hipocampo.

Era uma vez uma função F. Sua lei? $F(x) = x$. F um dia decide ter uma filha que, após contenciosas discussões familiares, nomea f. F pariu f, ou seja f é derivada de F. Portanto só faz sentido que a lei da pequena f seja $f(x) = 1$. (Por que?)

Passados poucos anos, F percebe que não tem condições de dar uma boa vida a f, e a abandona. f não lastima sua ida, ela sempre foi de temperamento constante... Já crescida, entretanto, decide que quer conhecer sua mãe biológica (analítica(?)).

Opta por fazer um teste de DNA, então chama um matemático. Explica a ele seu pepino: "Sou derivada de uma F, mas não a conheço!" O matemático confiantemente a consola e começa a pensar. Da perspectiva dele, conhecendo somente a $f(x) = 1$, como você faria para encontrar F: a função que quando derivada em todos os pontos nos fornece f nesses respectivos pontos?

Após uma pausa, a confiança do matemático se dissipa, pois conclui que F pode ser uma infinidade de funções! (Quais?) Mas após uma segunda pausa (ou melhor, uma continuação da primeira, pois duas pausas contíguas são, verdadeiramente, uma longa pausa), decide que a solução desse seu problema é clara! Basta angariar uma única pista, apenas um ponto da função-mãe para matar a charada. (Por que?)

Prontamente questiona a f sobre lembranças de sua infância, e consegue o que desejava. f acaba recordando que $F(0) = 0$ e, dentro de segundos, o matemático a dispensa com seu resultado: $F(x) = x$. f agradece e corre atrás de sua tão antecipada reconciliação.

Fim! Você acaba de aprender não só como derivar uma função, mas também fazer o "oposto", descobrir a tal da "Antiderivada" ou "Primitiva", ou seja, a função que, quando derivada, dá a sua função. Mais sobre F e f semana que vem... até!

Semana 9: Teorema Fundamental do Cálculo, Pt.1

Como prometido, vamos falar um pouco mais sobre funções F e f como vistas semana passada. Lembrando, dado um x, $f(x)$ seria a derivada de F em x. (Por isso batizamos f função derivada de F; e F primitiva de f.)

Confessadamente, o que segue é nada mais que um grande spoiler, sem base teórica/formal alguma, talvez até deixando a desejar no departamento da intuição. Pense no que está prestes a ler como uma vacina contra a surpresa horripilante, como um paraquedas na queda livre que é aprender cálculo. Deduz-se que essa ideia deve ser ou muito impenetrável ou muito importante, afinal, aparentemente achei necessário te expor a isso muito mais cedo que o previsto, simplesmente para amortecer o impacto. Impenetrável nem criptografia RSA é. Mas sobre a segunda hipótese, só digo que o nome oficial do seguinte raciocínio é: "O Teorema Fundamental do Cálculo".
Sem mais delongas, aqui está:

Na curiosidade da semana 5, resolvemos um problema com um limite que detinha um significado geométrico especial, somava áreas cada vez menores. Já que gostamos muito de funções, seria um desperdício de criatividade não conferir se podemos aplicar um limite desses em uma f. Então tome uma $f(x) = 1$. Queremos achar a área entre seus pontos e o eixo-x. Ok, precisamos de outra restrição para essa área ser finita, então queremos a área dessa faixa entre $x = 0$ e $x = 1$. Evidentemente um quadrado com área 1, mas vamos tentar achar essa área de uma forma mais estranha. Um bom começo seria dar a isso um nome estranho, então denominaremos qualquer área delimitada por uma função, o eixo-x, um $x = a$ e um $x = b$ de "Integral Definida de f, de a até b".

Uma forma comum de achar essas integrais definidas é fazer um limite como o mencionado acima, repartindo nosso intervalo $[a, b]$ em $[a, c]$ e $[c, b]$ por exemplo, e somando $f(a) * (c-a) + f(b) * (b-c)$. Repetindo esse processo indefinidamente com os dois intervalos novos, assim refinando nossa integral. Mas sempre fazer esse limite é cansativo, deve ter um jeito melhor de achar integrais como essa!

Ressuscitamos assim nossa F, antiderivada de f. A função F, por um milagre matemático, além de ser a função cuja derivada é f, codifica uma informação crucial sobre essas tais de integrais definidas de f: $F(b) - F(a) =$ integral de f de a até b (notação comum para esta integral definida abaixo).

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sim, leu isso corretamente - e que os incrédulos testem com suas próprias mãos, começando com a integral de $f(x) = 1$ de 0 até 1:

$$\int_a^b 1dx$$

Saber da existência desse teorema é a definição de poder. Brinque com ele, aprecie ele. Infelizmente estamos sem tempo para provar isso (vulgo a relação mágica entre a integral e a antiderivada). Quem sabe semana que vem ;)

Semana 10: Teorema Fundamental do Cálculo, Pt.2

Olá! O que segue é continuação direta da semana passada, então se ainda nao leu, essas palavras te aguardam por aqui. TLDR: semana passada foi enunciado a essência de um teorema famoso, sem muitas hipóteses, formalidades e até descartando o costumeiro apelo intuitivo! Dizia que a integral definida de uma função contínua f, de a até b, equivale a $F(b) - F(a)$, F primitiva de f. Emocionante.

Hoje vamos aludir a uma de suas demonstrações mais bonitas, de forma igualmente crua, para fins de familiarização. Para isto precisamos saber de apenas uma coisa, a base da "sacada central", comumente chamado de Teorema do Valor Médio (diferente do Teorema do Valor Intermediário, que também fala de funções contínuas). O TVM nos diz algo interessante sobre derivadas em funções contínuas: dado um intervalo $[a, b]$ no domínio de f, tome a inclinação $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, da reta que liga os pontos do gráfico da função f nos extremos do intervalo. Existe um c em $[a, b]$ tal que a derivada de f em c é igual a essa inclinação. Parece justo, afinal se a função não passasse pela inclinação média em algum ponto do intervalo, teria que sempre ter derivada acima ou abaixo desta. Mas se fosse assim, $f(b)$ provavelmente seria maior ou menor que o valor correto. Conseguimos o que nos interessa agora, mas os curiosos podem pesquisar mais sobre.

Ok, mas como em diabos este único teorema de derivadas vai casar integrais com antiderivadas? Imagine só o seguinte (auxiliando a imaginação com uma folha de papel se necessário): travou no bom e velho problema de querer achar a integral definida de a até b de sua função contínua preferida (vide texto da semana passada). Sem conhecimento do Teorema Fundamental do Cálculo, você prossegue da forma natural de achar integrais, particionando seu domínio $[a, b]$ em n "pedaços" $[a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}, b]$, que serão as bases de seus retângulos de área $A_n = (t_n - t_{n-1}) \cdot f(t_n)$. Pensa então que conforme n aumenta, a soma das áreas dos retângulos aproxima a integral! Começa a cansar após manualmente calcular a partição $n = 2713$, mas prestes a desistir, puxa a F, antiderivada de f, do bolso, e direciona um olhar desconfiado ao TVM, que diz simplesmente: $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = f(c)$, ou, rearranjando, $F(b) - F(a) = f(c) \cdot (b - a)$. (Note que como c está entre a e b, se a e b estiverem muito próximos, como f é contínua, $f(c)$ é praticamente $f(a)$ ou $f(b)$.)

Com isso volta o olhar para a soma dos retângulos: $(t_1 - a) \cdot f(t_1) + (t_2 - t_1) \cdot f(t_2) + \ldots + (b - t_{n-1}) \cdot f(b)$ e brota um sorriso de quem está prestes a descobrir algo histórico. Isso dado que podemos reescrever essa soma como:

$$F(t_1) - F(a) + F(t_2) - F(t_1) + \ldots + F(b) - F(t_{n-1})$$

Caso concorda, acontece a melhor coisa que poderia acontecer com qualquer soma (o que?), e temos imediatamente nosso resultado! Adeus limite de retângulos! Os já familiarizados com este teorema notariam que pulei alguns detalhes, mas espero que aos demais, o texto foi capaz de minimizar confusões e maximizar utilidade e intuição. Ah, e bem vindos ao mundo após TFC. Certamente vão concordar que é pra lá de mágico.

Semana 11: Aplicação de Derivadas

Sejam bem-vindos a mais uma semana, esta mais próxima do fim do semestre que todas antes dela. Sei que essas palavras provocam certo alívio, por significar uma trégua das constantes responsabilidades atreladas a conhecimentos teóricos. No entanto, também implica que, em breve, conceitos de cálculo 1 terão de ser internalizados o suficiente para servirem de ferramenta para lidar com problemas reais. Então hoje vamos fazer exatamente isso! Explorando uma aplicação bem divertida e ubíqua na estatística, especificamente em aprendizado de máquina: o algoritmo Gradient Descent. Sim, para criar um cérebro virtual que humilha jogadores profissionais de Go, precisamos saber de pouco além do que é uma derivada.

Primeiro, como funciona, em linhas gerais, uma máquina que aprende? Há várias formas de implementar uma, mas a maioria delas, em algum momento, tenta ensinar ao computador como diferenciar o certo do errado, através de exemplos / tentativa e erro. Assim, o modelo entende como fazer a tarefa a ele atribuída, minimizando ações que nós batizamos de "erradas". A palavra chave é "minimizar". Minimizar o que? Uma função que tem no eixo-x os estados da máquina e, no eixo-y, o quanto a máquina errou naquele determinado estado ("Loss Function" em inglês). Devem estar questionando: "Ok, podemos medir o erro do modelo com um número e fazer o eixo-y ser numerado dessa forma, mas como exatamente um número no eixo-x representa o estado de uma coisa tão complexa?". Na realidade essa função teria vários eixos-x, mas para nossos propósitos (enquanto não podemos usar Cálculo 2, que lida com funções em dimensões maiores) seja a Loss Function uma $f(x)$ cotidiana.

Uma forma limpa de fazer isso (achar os pontos de mínimo de f) seria encontrar os pontos x em que a derivada de f em x equivale a zero, e pegar o menor desses valores $f(x)$ (Por que?). Esses pontos de derivada zero são chamados de "pontos estacionários", ou mais legal ainda: "pontos críticos", ou mais epicamente: "singularidades" (apesar deste último não ser tão usado nesse contexto). Existem também formas "sujas" de minimizar f, que são usadas em problemas reais, seja por f ser muito complicada e difícil de derivar analiticamente, seja por minimizadores não corresponderem a pontos críticos (como?). Aqui entra o método Gradient Descent para salvar o dia. O algoritmo simplesmente escolhe um ponto x_0 arbitrário do domínio de f, aproxima a derivada de f naquele único ponto $f'(x_0)$, depois faz o mesmo com um novo ponto $x_1 = x_0 - a \cdot f'(x_0)$. E o mesmo com $x_2 = x_1 - a \cdot f'(x_1)$. E

$x_3, x_4, \ldots$ (Sendo esse a uma constante pequena.) Fazendo isso até alcançar um x que acreditamos ser o menor que vamos conseguir.

Como percebem, a única coisa que esse algoritmo faz é determinar qual lado desce: esquerda ou direita. Isso aparentemente faz milagres, apesar de alguns pequenos problemas (resolvíveis) como o de nem sempre encontrar mínimos globais (i.e. o menor dos mínimos). Encerramos por aqui, mas antes, considere o seguinte: se uma ferramenta tão acessível quanto a derivada é capaz de gerar uma aplicação incrível como essa, imagine quantos outros segredos o cálculo guarda que podem melhorar nossas vidas. (Para os curiosos: deem uma lida sobre o Método de Newton de achar raízes - bem parecido com Gradient Descent, portanto não tem como nao ser legal.)

Semana 12: Séries e Sequências

Algumas semanas atrás apresentei a essência da integral: somas de coisas pequenas. Em seguida fomos além, aprendendo sobre a íntima ligação com derivadas de funções. Surpreendentemente, com todo esse papo de somas infinitas, ainda não dediquei uma semana a dois personagens nascidos muito antes das "funções" e "integrais", porém quase análogos - e úteis para fortalecer a intuição: sequências e séries!

A analogia vem pelo fato de uma "sequência" literalmente ser uma função! Em particular, uma função dos números naturais $(1, 2, 3, \ldots)$ a algum conjunto. Tomando um exemplo famoso, a de Fibonacci é: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, \ldots$ (o próximo termo é a soma dos dois anteriores), então a "função" leva 1 para 1, 2 para 1, 3 para 2, 4 para 3, 5 para 5, 6 para 8, 7 para 12, etc. E para teóricos de conspiração, foi encontrado um osso na África, com idade estimada de 20000 anos (apelidado "Osso de Ishango") com marcações estranhas, que alguns estimam corresponder a uma sequência especial - a dos números primos! Que os primos nos iludem faz tempo já sabemos, mas desde a idade da pedra??

Digressões à parte, como então uma sequência pode nos ajudar a entender integrais? A resposta está nas séries: uma "soma infinita" de todos os termos de uma sequência. (A "soma infinita" na verdade se trata de um limite simples de "somas parciais" da sequência A: o limite com $n \to +\infty$ de $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.) Note que a integral também é um limite de uma soma, porém sobre um domínio contínuo (um subconjunto dos reais normalmente).

Aqui estamos lidando com algo mais discreto (os naturais). Isso é perfeito para nossos fins, acabamos de encontrar algo com a mesma "alma" porém menos intricado. Temos esperança de que a intuições montadas com base em séries generalizarão para integrais. A ideia que queremos enfrentar usando séries, é convergência (aparece bastante com integrais). A área debaixo do gráfico de certas funções pode ser infinita, como o caso da área embaixo de $f(x) = 1$, de $x = 0$ até x tendendo a infinito; mas também pode convergir para um valor, como o caso de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, no mesmo intervalo. Batendo o olho nos gráficos desses casos, parece até evidente quando a integral converge / não converge! Onde está o grande problema? Em casos como $f(x) = \frac{1}{x}$ (no mesmo intervalo):

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} dx$$

Esta integral diverge!! Logo, nossos olhos talvez nao sao a ferramenta mais apropriada para realizar essas detecções com acurácia, mas às vezes conseguimos deduzir muito sobre a convergência desses tipos de integrais, montando uma série parecida. Nesse último caso problema, a série determinada pela sequência $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ pode ajudar. Se descobrirmos que ela diverge, com certeza aquela integral de $f(x) = \frac{1}{x}$ de $x = 1$ para x tende a infinito diverge! (Por que?)

Se quiser pensar sobre, deixo aqui um "spoiler alert". O truque está em quebrar a série em infinitas "partes" que valem pelo menos 1. Por exemplo, 1 já vale pelo menos 1, então ele fecha uma parte. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ também vale ao menos 1 (note que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} \therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$). Aplique a mesma lógica para "partes" cada vez maiores, porém todas somando maiores que 1, e veja que $1 + 1 + 1 + \cdots$ diverge, então a série diverge! Brincar com séries é divertido, principalmente quando fazendo isso, nos esquivamos de brincar com uma integral esquisita. Essa série em particular se chama "Série Harmônica". Sabe-se muitas coisas sobre ela, mas se um de vocês porventura descobrir uma fórmula para a sua soma parcial S_n, publiquem. Matemáticos agradecem ;)

Semana 13: Equações Diferenciais

"Malditas equações diferenciais", sussurra o veterano cabisbaixo, enquanto tenta colocar uma boa distância entre si e a sala de prova.

O que são essas criaturas misteriosas que tão perfeitamente descrevem absolutamente tudo ao nosso redor e, ao mesmo tempo, são minimamente compreendidas? Analisando a etimologia, sabemos o que é uma equação, mas o que exatamente significa ser diferencial?? Coisas "diferenciais" simplesmente envolvem derivadas de alguma forma (afinal, o que é a derivada se não o limite de uma diferença). As equações vistas até o momento usualmente são montadas objetivando encontrar algum número. Para isso, dizemos que operações (e.g. soma, divisão, ...) sobre números de um lado igualam outras operações sobre outros números de outro. Uma equação diferencial segue o mesmo modelo, porém objetivando encontrar funções (não números), e agora incluindo uma operação importante: a derivada.

$$F''(x) = -F(x)$$

Esta por exemplo pergunta: "Qual a função cuja segunda derivada é ela, negativa?". Pense rumo trigonometria... Vários exemplos tangíveis encontram-se na física, como: $S'(t) = V_0 + a \cdot t$, ou seja, qual a função $S(t)$ cuja derivada é $V_0 + a \cdot t$? Usando o Teorema Fundamental do Cálculo (integral é a antiderivada), podemos integrar ambos os lados para obter:

$$S(t) = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

(não se preocupe se ainda não souber exatamente como integrar um expressão). Sabendo que $S'(t)$ é velocidade por tempo t é $S(t)$ é espaço por tempo t, acabamos de deduzir o "sorvetão" preferido dos vestibulares!

Agora detêm o poder da generalidade! Para que decorar macetes quando temos nossas caras amigas, equações diferenciais. Para quem se interessou no assunto, considere ler sobre as equações de Navier-Stokes (um dos Problemas do Milênio), mas prossiga com cautela, este já consumiu várias vidas humanas.

Semana 14: O Fim

Olá!

Julho está finalmente entre nós, trazendo consigo o fim do semestre ideal (apesar da discordância com a realidade). No início do semestre virtual, planejei parar de enchê-los em torno dessa data, portanto considerem este décimo-quarto texto mais uma despedida do que uma curiosidade. Espero que tenham se deleitado em ler tanto quanto me diverti em escrever! Estarei disponível para tirar qualquer dúvida e continuar compartilhando curiosidades até o fim do semestre alterado.

Saudações!

Comentários Notáveis [1]

- Muito interessante a forma como os assuntos se complementam.
- Legal! Realmente derivada é mais fácil de entender pensando assim!!!
- “Cheiro de integral” Eita kk
- Só pra não fica um “top” de novo: Fiz um código em Julia pra observar essa série convergindo, quem quiser dar uma olhada:
  ```
  # calc.jl
  function g(i)
  x = 1
  for j in 1:i
  println(x)
  x -= (2(̂j-1))*(1/4)ĵ
  end
  return x
  end
  println(“Entre com um número i”)
  println(g(parse(Int64, readline())))
  ```
- Muito bom!! Tive que reler duas vezes, mas finalmente peguei, kkkk!! Vlwww.
- Obrigado pela dedicação desses textos semanais.
- Não sinto falta das aulas de história... Mas gostei do texto!
- Muito legal e exposto com muita criatividade!!

[1] Coletados diretamente do fórum onde os textos foram originalmente postados.

– Ótimas palavras! Imagino o tempo que você se dedica para escrever estes textos, que além de instrutivos, sempre tem uma segunda intenção!
Destaco o texto motivacional: “Com tempo e vontade, somos capazes de não só aprender, mas de inventar grande parte da matemática que conhecemos.”
Em meio a tantas novidades, como você mesmo disse de que é fácil nos perdermos, muitas vezes me pego em pensamentos de que determinado conceito me foge ao entendimento e que não serei capaz de manipulá-lo... Certamente levarei comigo sua frase destacada acima, pois mesmo os grandes levaram seu tempo. Obrigado também pela curiosidade, sempre muito instrutiva.

– Nostálgico sentimento das humanidades!! :-)

– Maravilhosa mensagem, como sempre, Luca!

– Recentemente me peguei pensando sobre quanto tempo de nossos estudos, nos concedemos, como disse, o privilégio de pensar, suar, ou então meditar - segundo os antigos - sobre uma ideia. Por vezes - ou muitas, na realidade - parece que nos esquecemos de dialogar com o objeto de estudo e então nos sentimos perdidos e incapazes de perceber toda a história por trás de um limite que, às vezes, nem damos atenção.
Como disse Pe. Sertillanges em “A Vida Intelectual” : “O gênio é uma longa paciência.”

– Muito bons os textos que você escreve. Obrigado pela dedicação, Luca.

– Muito bom, a gente não faz ideia de como o curso de cálculo que cursamos hoje demorou uns 3-4 séculos e muito trabalho de gente genial para ficar pronto.

– É mto animado como tu escreve!!!! Bom demais!!!!!

– Criatividade: mode on.

– Mas olhe! Temos um cronista entre nós hahaha.

– Simplesmente perfeito e emocionante!

– Só faltou um “era uma vez ...” porque a estória tá incrível e tem até final feliz kkkk.

– Simplesmente mágico!

– Mesmo sem saber exatamente o que são os teoremas deu para entender tudo sim, e nossa é pura magia.

– TL... But I Read =)

– Muito bom ver essa aplicação tão interessante para as derivadas. Obrigado, Somsom.

– Do nada, cálculo e aprendizado de máquinas ... Adorei.

– Sincronicidade maluca hahaha!!! Assiti AlphaGo, anteontem =)
"A human plus a machine is the best combination" (Kasparov)

– Se tem Fibonacci, tem like!

– Obrigado pelo texto, Somsom. Eu fiquei brincando esses dias e encontrei a fórmula da soma parcial S_n, mas esse campo de mensagem não tem espaço suficiente pra que eu a escreva e muito menos a sua demonstração.
Atenciosamente,
Caique de Fermat

– Nunca tinha pensado na relação entre séries e integrais. Muito Bom.

– kkkkkkkkkk (socorro)

– Muita mágica e bruxaria essa ideia de "equacões diferenciais", mas achei legal kkkk

– Muito obrigado por todo conhecimento compartilhado!

– Parabéns pelos tópicos.

– Muito obrigado pela dedicação, ótimo trabalho!!

– Obrigado pelos excelentes texto que muitas vezes davam um "spoiler" do novo assunto e evitava o choque durante o primeiro contato.

– Obrigado! Deixará saudades!

– Obrigada por toda ajuda, Luca!

– Muito obrigado, não acredito que já está acabando!

– Vou sentir falta de rir com os textos :(

– Cria um blog com todas as curiosidades. Curiosidade = motivação.

– No final do semestre você deveria compilar esses textos e fazer um mini livro. São muito bons. [2]

– Parabéns pelos textos, Somsom. O que você fez foi mais do que uma monitoria, toda semana era um texto curioso e divertido. Você escreve muito bem, deveria considerar escrever um livro de pequenos contos matemáticos, haha.

[2] Boa ideia...