O LEMA DE RIESZ EM ESPAÇOS REFLEXIVOS

LUCA M. ALEXANDER

Resumo. Neste trabalho, caracterizamos os espaços reflexivos com uma versão fortalecida do lema de Riesz. Apresentamos dois exemplos práticos que ilustram o uso desse resultado.

1. Motivação

Dado um espaço vetorial normado X e um subespaço fechado próprio $Y \subset X$, o lema de Riesz garante a existência de vetores unitários suficientemente distantes de Y.

Lema 1.1 (Riesz)**.** *Seja X um espaço vetorial normado e $Y \subset X$ um subespaço fechado próprio de X. Então para cada $\theta \in (0,1)$, existe $x \in X$ unitário, tal que $\|x - y\| \geq \theta, \forall y \in Y$.*

Demonstração. Escolha $x_0 \in X \setminus Y$ arbitrário e note que $\mathrm{d}(x_0, Y) > 0$, pois $x_0 \notin \overline{Y} = Y$. Dado $\theta \in (0,1)$, pela definição da distância de ponto a conjunto, existe $y_0 \in Y$ tal que $0 < \mathrm{d}(x_0, Y) \leq \mathrm{d}(x_0, y_0) < \mathrm{d}(x_0, Y)/\theta$.

Definimos $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$ e conferimos que x satisfaz as propriedades desejadas. Primeiramente notamos que $\|x\| = 1$. Resta medir sua distância de Y. Seja $y \in Y$ qualquer. Então

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - \frac{y\,\|x_0 - y_0\|}{\|x_0 - y_0\|} \right\| \\ &= \frac{\|x_0 - (y_0 + y\,\|x_0 - y_0\|)\|}{\|x_0 - y_0\|} \geq \frac{\mathrm{d}(x_0, y)}{\mathrm{d}(x_0, y)/\theta} = \theta. \end{aligned}$$

□

Em espaços normados sem produto interno, é possível usar o lema acima para construir conjuntos de vetores "ortogonais" em certo sentido. Essa construção, em alguns casos, é suficiente para generalizar resultados em espaços com produto interno cujas demonstrações fazem uso da ortogonalidade. Um resultado desse tipo é o seguinte.

Proposição 1.2 (Bola Compacta)**.** *Seja X um espaço vetorial normado. Então X tem dimensão finita se e somente se a bola unitária fechada ($\overline{B_1(0)}$) é compacta.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se $\dim(X) = d$, há uma isometria linear de X para $\mathbb{R}^d$. Assim, a compacidade de $\overline{B_1(0)} \subset X$ segue da compacidade de $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^d$.

($\Longleftarrow$) Se X tem dimensão infinita, tome $x_1 \in X$ com $\|x_1\| = 1$ qualquer. O conjunto gerado por $\{x_1\}$, denotado por $\langle \{x_1\} \rangle$, é um subespaço de dimensão finita, logo é fechado e próprio.

O lema de Riesz garante que existe $x_2 \in X \setminus \langle\{x_1\}\rangle$ com $\|x_1\| = 1$ tal que $\mathrm{d}(x_2, \langle\{x_1\}\rangle) > 1/2$. Analogamente, existe $x_3 \in X \setminus \langle\{x_1, x_2\}\rangle$ com $\|x_3\| = 1$, tal que $\mathrm{d}(x_3, \langle\{x_1, x_2\}\rangle) > 1/2$.

Construímos indutivamente a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que não possui subsequência de Cauchy, pois $\|x_m - x_n\| > 1/2, m \neq n$. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não possui subsequência convergente, então $\overline{B_1(0)} \subset X$ não é compacta. □

Observação 1.3. É atribuido a Riesz um teorema que caracteriza os espaços normados (apenas espaço vetorial topológico Hausdorff basta) pela compacidade local.

Vejamos agora como o lema de Riesz pode ser fortalecido em espaços de Hilbert.

Definição 1.4 (Propriedade Forte de Riesz)**.** Um espaço vetorial X possui a propriedade forte de Riesz (PFR) se para cada subespaço fechado próprio $Y \subset X$, existe $x \in X$ unitário tal que $\|x - y\| \geq 1, \forall y \in Y$.

Proposição 1.5. *Seja H um espaço de Hilbert e $Y \subset H$ um subespaço fechado próprio. Então existe $h \in H$ tal que $\|h\| = 1$ e $\|h - y\| \geq 1, \forall y \in Y$. (Ou seja, se H é um espaço de Hilbert, H possui a PFR.)*

Demonstração. Como Y é subespaço fechado, temos $H = Y \oplus Y^\perp$. Fixe $h_0 \in H \setminus Y$ arbitrário. Então h_0 admite uma decomposição $h_0 = y_0 + {y_0}^\perp$, em que $y_0 \in Y$ e ${y_0}^\perp \in Y^\perp$.

Note que ${y_0}^\perp \neq 0$, pois $h_0 \notin Y$. Com isso, definimos $h = {y_0}^\perp / \left\|{y_0}^\perp\right\|$, observando que $\|h\| = 1$.

Conferimos que h é da forma desejada:

$\mathrm{d}(h, Y)^2 = \inf_{y\in Y} \mathrm{d}(h, y)^2 = \inf_{y\in Y} \|h - y\|^2 = \inf_{y\in Y} \|h\|^2 + \|-y\|^2 = \|h\|^2$, logo $\mathrm{d}(h, Y) = 1$. □

Observação 1.6. A noção de ortogonalidade foi fundamental em dois momentos na demonstração acima: ao expressar H como $Y \oplus Y^\perp$ e ao usar o teorema de Pitágoras para escrever $\|h - y\|^2 = \|h\|^2 + \|-y\|^2$.

Observação 1.7. A conclusão da proposição acima em particular vale se H é um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita, pois estes são completos. Outra forma interessante de obter o resultado nesse caso (dimensão finita) é observar que a função distância de ponto a conjunto $\mathrm{d}(x, Y) : \overline{B_1} \to \mathbb{R}$ é contínua e definida em um compacto (a bola unitária fechada $\overline{B_1}$ é compacta em dimensão finita), logo sua imagem é compacta na reta, portanto fechada. O lema de Riesz garante que esta imagem acumula em 1 e, como é fechada, contém 1.

Provado que sempre podemos usar o lema de Riesz com $\theta = 1$ em espaços de Hilbert, se levanta a dúvida de onde isso não é possível, isto é, de quais espaços não possuem a PFR. O espaço das sequências reais limitadas, ℓ^∞, é um destes, mas uma escolha de subespaço fechado Y que não satisfaça a condição pedida na definição da PFR não é imediata. Seguem algumas tentativas sem êxito.

(1) O subespaço $c_{00} \subset \ell^\infty$ das sequências nulas exceto em um suporte finito é próprio mas não é fechado (a sequência $((1,\ 0,\ 0,\ \ldots),\ (1,\ 1/2,\ 0,\ 0,\ \ldots),\ (1,\ 1/2,\ 1/3,\ 0,\ 0,\ \ldots),\ \ldots)$ converge, mas não para um elemento de c_{00}).
(2) O subespaço $c_0 \subset \ell^\infty$ é próprio e fechado, mas o elemento $(1, 1, 1, \ldots) \in \ell^\infty$ é unitário e dista pelo menos 1 de todo elemento em c_0.
(3) O subespaço $c \subset \ell^\infty$ é próprio e fechado, mas o elemento $(1, -1, 1, -1, \ldots) \in \ell^\infty$ é unitário e dista pelo menos 1 de todo elemento em c.

2. Fatos Preliminares

Para a construção do subespaço $Y \subset \ell^\infty$ desejado, precisamos definir um funcional que estenda a noção de limite de uma sequência para todas as sequências em ℓ^∞.

Definição 2.1 (Limite Generalizado)**.** Um limite generalizado (ou limite de Banach) L é um funcional linear limitado sobre o espaço das sequências reais limitadas, que satisfaz:

(1) $L((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} a_n$, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
(2) $L((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \geq 0$, se $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,
(3) $L((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = L((a_{n+k}))_{n\in\mathbb{N}}, \forall k \geq 1$.

É comum mostrar a existência de limites generalizados de forma não construtiva com o teorema de Hahn-Banach. Por exemplo, é possível conferir que $L((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ é um funcional sublinear definido em ℓ^∞, que majora o limite usual, no conjunto onde o limite usual é definido.

Vale observar que o limite generalizado não é único. Apesar disso, qualquer limite generalizado concorda sobre o valor atribuído às sequências convergentes (no sentido usual). As sequências convergentes não são as únicas com esta propriedade. Definimos uma sequência *quase convergente* como uma sequência sobre a qual todo limite generalizado é definido de forma idêntica. A sequência $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ é quase convergente, com limite $1/2$. Basta notar que para qualquer limite generalizado L, temos $1 = L((1, 1, 1, \ldots)) = L((1, 0, 1, 0, \ldots)+(0, 1, 0, 1, \ldots)) = L((1, 0, 1, 0, \ldots))+ L((0, 1, 0, 1, \ldots)) = 2L((1, 0, 1, 0, \ldots))$.

Definição 2.2 (Espaço Reflexivo)**.** Um espaço vetorial normado é reflexivo se a aplicação canônica ao bidual $J(x)(f) = f(x)$ é sobrejetora. Nesse caso, J define um isomorfismo com o bidual (contínuo).

Definição 2.3 (Atinge a Norma)**.** Um funcional linear limitado f, com norma M, atinge sua norma se existe x unitário tal que $|f(x)| = M$.

A proposição que segue o lema abaixo tem o propósito de caracterizar a reflexividade com uma condição que será prática no momento em que voltarmos a discutir a PFR. Sua demonstração é essencialmente observar que o teorema de Hahn-Banach garante que todo funcional linear limitado "atinge a norma" em um sentido diferente, envolvendo o espaço bidual. Daí, a reflexividade nos transporta à definição usual de atingir a norma.

Lema 2.4 (Corolário de Hahn-Banach)**.** *Seja X um espaço vetorial normado e X' o dual contínuo de X. Se $x_0 \in X$, então $\max_{y\in X', \|y\|=1} y(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Fixe $x_0 \in X$ arbitrário. Se $x_0 = 0$, a conclusão é imediata. Caso contrário, considere o funcional $\tilde{y_0} : \langle\{x_0\}\rangle \to \mathbb{R}$, com $\tilde{y_0} : \lambda x_0 \mapsto \lambda \|x_0\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Como $\tilde{y_0}$ é linear e limitado pela norma de X, o teorema de Hahn-Banach garante que existe $y_0 : X \to \mathbb{R}$ extensão linear de $\tilde{y_0}$, com $|y_0(x)| \leq \|x\|$. Como $|y_0(x)| / \|x\| \leq 1, \|x\| \neq 0$, temos $\|y_0\| \leq 1$. Como $|y_0(x_0/\|x_0\|)| = |\tilde{y_0}(x_0/\|x_0\|)| = 1$, temos $\|y_0\| \geq 1$. Portanto $\|y_0\| = 1$.

Resta observar que nenhum outro funcional linear limitado unitário de X ultrapassa o valor $y_0(x_0)$, quando avaliado em x_0. Suponha por contradição que existe $y \in X'$ tal que $\|y\| = 1$ e $|y(x_0)| > |y_0(x_0)| = \|x_0\|$. Então $|y(x_0)| / \|x_0\| > 1$, impossível, pois y é unitário. □

Proposição 2.5. *Seja X um espaço vetorial normado reflexivo. Então todo funcional linear limitado $f : X \to \mathbb{R}$ atinge sua norma.*

Demonstração. Denotamos o dual contínuo de X por X'. Seja $x_0' \in X'$ arbitrário. Aplicando o lema 2.4, $\|x_0'\| = \max_{y\in X'',\|y\|=1} |y(x_0')| = |y_0(x_0')|$.

Como X é reflexivo, existe $J : X \to X''$ isometria linear, definida pelo isomorfismo canônico $J(x)(x') = x'(x) = y(x')$, em que $x \in X$, $x' \in X'$ e $y \in X''$.

Pela isometria, temos $\sup_{x\in X,\|x\|=1} |x_0'(x)| = \max_{y\in X'',\|y\|=1} |y(x_0')|$, tal que o supremo do lado esquerdo da equação é atingido em $J^{-1}(y_0)$, pois o máximo do lado direito da equação é atingido em y_0. □

A recíproca também é verdadeira e leva o nome de teorema de James, porém a demonstração envolve ideias além do nosso escopo [1].

3. Caracterização de Espaços Reflexivos

Estamos prontos para enunciar a principal proposição, que caracteriza a reflexividade de um espaço com a PFR.

Teorema 3.1. *Seja X um espaço vetorial normado. Então X possui a PFR se e somente se X é reflexivo.*

Demonstração. Pelo teorema de James, vamos trocar a condição de reflexividade pela condição de não existirem funcionais lineares limitados que não atingem a norma.

($\Longrightarrow$) Mostraremos a contrapositiva. Suponha que existe um funcional linear limitado $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ que não atinge a norma. Então $f = \tilde{f}/\left\|\tilde{f}\right\|$ é um funcional linear limitado de norma 1, que não atinge a norma.

Denotamos o núcleo de f como $\mathrm{Ker}(f)$. É direto mostrar por argumentos da álgebra linear que $\mathrm{Ker}(f)$ é subespaço de X. Pela continuidade de f e como $\{0\}$ é um conjunto fechado, $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$ é fechado. Além disso, f é um funcional não nulo (pois se fosse nulo, atingiria a norma), então $\mathrm{Ker}(f)$ é subespaço próprio.

Vamos mostrar que $\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}(f)) < 1, \forall x \in X, \|x\| = 1$. Note que é suficiente mostrar que $\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}(f)) = |f(x)|, \forall x \in X$, pois $|f(x)| < 1$, se $\|x\| = 1$.

Escrevemos

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{z\in \mathrm{Ker}(f)} \frac{|f(y-z)|}{\|y-z\|}$$

em que a última igualdade vale para qualquer $y \in X \setminus \mathrm{Ker}(f)$. Vamos rapidamente justificar este fato. Observe que para todo $x \in X$, temos

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a-b)|}{\|a-b\|}$$

em que $a \in \langle y\rangle$, para algum $y \in X \setminus \mathrm{Ker}(f)$ previamente fixado, e $b \in \mathrm{Ker}(f)$. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda a = y$, logo

$$\frac{|f(a-b)|}{\|a-b\|} = \frac{|\lambda|}{|\lambda|}\frac{|f(a-b)|}{\|a-b\|} = \frac{|f(\lambda a-\lambda b)|}{\|\lambda a-\lambda b\|} = \frac{|f(y-z)|}{\|y-z\|}, z \in \mathrm{Ker}(f).$$

Prosseguindo,

$$\sup_{z\in \mathrm{Ker}(f)} \frac{|f(y-z)|}{\|y-z\|} = \sup_{z\in \mathrm{Ker}(f)} \frac{|f(y)|}{\|y-z\|} = \frac{|f(y)|}{\inf_{z\in \mathrm{Ker}(f)} \|y-z\|}$$

logo

$$\begin{aligned} &\|f\| = 1 = |f(y)| \,/\mathrm{d}(y, \mathrm{Ker}(f)) \\ &\implies \mathrm{d}(y, \mathrm{Ker}(f)) = |f(y)| \,, \forall y \in X \setminus \mathrm{Ker}(f). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\|y\| = 1$, mas $y \in \mathrm{Ker}(f)$, ainda temos $\mathrm{d}(y, \mathrm{Ker}(f)) = |f(y)| = 0$.

($\Longleftarrow$) Mostraremos que se todo funcional linear limitado atinge a norma, então para todo subespaço fechado próprio, existe um vetor unitário suficientemente distante.

Seja $Y \subset X$ um subespaço fechado próprio. Vamos construir um elemento $f \in X', \|f\| = 1$, tal que $Y \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Como Y é próprio, tome $x_0 \in X \setminus Y$. Definimos $\tilde{f} : \langle\{x_0\}\rangle \oplus Y \to \mathbb{R}$ com $\tilde{f} : (x + y) \mapsto \|x\|$, em que $x \in \langle\{x_0\}\rangle$ e $y \in Y$. Note que $\tilde{f}$ é um funcional linear limitado, majorado pela norma de X, logo estendemos $\tilde{f}$ para $f : X \to \mathbb{R}$, usando o teorema de Hahn-Banach. Como $|f(x)| \leq \|x\|$, temos $\|f\| \leq 1$. Como $|f(x_0/\|x_0\|)| = 1$, temos $\|f\| \geq 1$. Logo, $\|f\| = 1$.

Resta recordar que provamos $\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}(f)) = |f(x)| \,, \forall x \in X$, para $f \in X', \|f\| = 1$. Como f atinge a norma em $x_0/\|x_0\|$, temos $\mathrm{d}(x_0/\|x_0\|, \mathrm{Ker}(f)) = |f(x_0 \;\; \|x_0\|)| = 1$, como desejado. $\square$

Apresentaremos agora duas aplicações do teorema acima. Na primeira, mostraremos que um subespaço F (das funções que preservam a origem) do espaço $C[0,1]$ (das funções contínuas sobre o intervalo $[0,1]$, com a norma do supremo) não possui a PFR. Na segunda, mostraremos que o espaço ℓ^∞ (das sequências a valores reais limitadas, com a norma do supremo), não possui a PFR. Em ambos os casos, exibiremos um funcional linear limitado que não atinge a norma. No caso de ℓ^∞, essa demonstração não será construtiva.

Proposição 3.2 ($F \subset C[0,1]$ não é reflexivo)**.** *Considere o subespaço fechado* $F := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$ *de* $C[0,1]$. F *não possui a PFR.*

Demonstração. Definimos o funcional $\varphi : F \to \mathbb{R}$ com $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$. Basta mostrar que φ é linear, limitado e não atinge a norma.

A linearidade segue da linearidade da integral. Para mostrar que $\|\varphi\| = 1$, tome $f \in F, \|f\| = 1$. Temos

$$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx \leq \int_0^1 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| dx = \int_0^1 1dx = 1.$$

Além disso, para qualquer $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} x/\epsilon & \text{se } x \in [0,\epsilon) \\ 1 & \text{se } x \in [\epsilon, 1] \end{cases}$$

obtendo a estimativa

$$1 - \epsilon = \int_\epsilon^1 |f_\epsilon(x)|\, dx \leq \int_0^1 |f_\epsilon(x)|\, dx = |\varphi(f_\epsilon)| \,.$$

Como $f_\epsilon \in F$ e $\|f_\epsilon\| = 1$, está provado que $\|\varphi\| = 1$.

Por fim, não é difícil mostrar que se $g \in C[0,1]$ e $\|g\| = 1$, então para que $\left|\int_0^1 g(x)dx\right| = 1$, é necessário que $1 = g \notin F$ ou $-1 = g \notin F$. Assim, $|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \neq 1, \forall f \in F$, ou seja, φ não atinge sua norma. □

Observação 3.3. Como visto na demonstração do teorema 3.1, o núcleo de um funcional linear limitado que não atinge a norma é um subespaço fechado próprio que atesta o fato de o espaço não possuir a PFR. No nosso caso, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{f \in F : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ atesta o fato de F não possuir a PFR.

Proposição 3.4 (ℓ^∞ não é reflexivo)**.** *O espaço ℓ^∞ não possui a PFR.*

Demonstração. Vamos mostrar que existe um elemento de $f \in (\ell^\infty)'$ que não atinge a norma. Seja $L \in (\ell^\infty)'$ um limite generalizado e $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos tal que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$. Defina

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k - L(x),\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^\infty.$$

Mostraremos que $\|f\| = 2$. Primeiramente note que para $x \in \ell^\infty, \|x\| = 1$, temos $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k| \leq 1$ e $|L(x)| \leq 1$, logo $|f(x)| \leq 2$ e $\|f\| \leq 2$. Para ver que $\|f\| \geq 2$, considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$, em que $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, e $x_k^{(n)} = 1$, se $k \leq n$, mas $x_k^{(n)} = -1$ se $k > n$. Então $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k) + 1 = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + 1 = 2$.

Resta mostrar que f não atinge sua norma, ou seja, que $|f(x)| < \|f\|, \forall x \in \ell^\infty, \|x\| = 1$. Seja $x \in \ell^\infty, \|x\| = 1$ arbitrário. Se $x = (1,1,1,\ldots)$ ou $x = (-1,-1,-1,\ldots)$, então $|f(x)| = 0$. Caso contrário, fixe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k| < 1$. Se $f(x) \geq 0$, então por definição $|f(x + (1 - x_k)e_k)| > |f(x)|$. Analogamente, se $f(x) < 0$, temos $|f(x + (-1 - x_k)e_k)| > |f(x)|$. O resultado segue com a observação de que $\|x + (1 - x_k)e_k\| = \|x + (-1 - x_k)e_k\| = \|x\| = 1$. □

Referências

[1] Robert C. James. Reflexivity and the supremum of linear functionals. *Annals of Mathematics*, 1957.