DISTRIBUIÇÕES E TOPOLOGIA

Aluno: Luca Maciel Alexander [1]
Orientador: Adalberto Panobianco Bergamasco

Conteúdo

1. Introdução 1
2. Distribuições 2
3. Topologia 4
4. Distribuições e Topologia 6
5. Metodologia 15
Referências 15

1. Introdução

O objetivo deste trabalho é definir explicitamente uma topologia sobre o espaço das funções teste $C_0^\infty(\Omega)$, de modo que a convergência de sequências neste espaço coincida com a definição de convergência dada na definição corriqueira do espaço de funções teste.

Nosso estudo se inicia com um primeiro olhar sobre as distribuições, como apresentadas em [2], [5] e [7]. Este olhar nos dará uma definição prática, mas indireta e um tanto opaca, da teoria.

Para caminhar adiante em direção a nosso objetivo de caracterizar a topologia das funções teste, apresentamos, como em [1], uma quantidade suficiente de topologia geral para o entendimento de uma discussão sobre espaços vetoriais topológicos, especialmente espaços de Fréchet.

Finalmente, usamos a teoria de espaços de Fréchet para cumprir nosso objetivo inicial ao definir a topologia do limite indutivo (LF) sobre $C_0^\infty(\Omega)$, como visto em [2], [3] e [8].

[1] Este documento será submetido como relatório final de uma iniciação científica desenvolvida no ICMC - USP, sob apoio financeiro do PUB, durante o período de 01/09/2023 a 01/01/2024. O autor agradece ao professor Adalberto P. Bergamasco pela sugestão do tema deste projeto (e pelo excelente trabalho de orientação), e à Liliane Martins do Nascimento, pela ajuda indispensável nos (vários) momentos de confusão do autor a respeito da matemática aqui contida.

2. Distribuições

> “ No cálculo diferencial, encontramos imediatamente o fato desagradável de que nem toda função é diferenciável. O propósito da teoria de distribuições é remediar este defeito. De fato, o espaço das distribuições é essencialmente a menor extensão do espaço das funções contínuas tal que a diferenciação está sempre bem definida. Talvez seja autoevidente que é desejável definir tal extensão (...)”
>
> *L. Hörmander, 1983* [2]

Um dos principais (senão o principal) objetos de estudo da análise é a função. Uma distribuição de Schwartz, ou função generalizada, é um funcional definido sobre um espaço de funções especiais, que para os devidos fins faz o papel de uma função. Como se pode imaginar, as funções generalizadas de fato generalizam as funções ordinárias, mas além disso, seu uso permite contornar várias dificuldades técnicas. Esses novos objetos se mostram úteis, por exemplo, na resolução de EDP's. Mesmo as equações mais simples, como a equação da onda, possuem soluções “fracas”, que condizem com uma intuição física ou que satisfazem propriedades esperadas de uma solução, mas que não são soluções no sentido clássico, normalmente por falta de regularidade (e.g. a solução fraca da corda dedilhada, prevista pela fórmula de d'Alembert, não é diferenciável, portanto não é solução no sentido clássico).

Partiremos para a definição de uma distribuição. Seja $C_0^\infty(\Omega)$ a classe das funções infinitamente diferenciáveis, a valores complexos, de suporte compacto, e definidas sobre o aberto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{D}$ o espaço das “funções teste”, isto é, $C_0^\infty(\Omega)$ com a seguinte noção de convergência [3]. Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções teste, dizemos que $\varphi_n \to \varphi$ se os suportes de cada φ_n estão contidos em um compacto comum, e se para cada multi-índice α, $\partial_x^\alpha \varphi_n \to \partial_x^\alpha \varphi$ uniformemente em x.

Definição 2.1 (Distribuição)**.** Uma distribuição F sobre Ω é um funcional linear sequencialmente contínuo a valores complexos, definido como $\varphi \mapsto F(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$. Denotamos o espaço das distribuições por $\mathcal{D}'$.

Observação 2.2. Toda função ordinária f localmente integrável define uma distribuição F_f dada por $F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$, mas nem toda distribuição é uma função nesse sentido. Tome por exemplo a distribuição delta de Dirac, definida como $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

---

[2] Transcrito de [4], tradução própria.

[3] Como $\mathcal{D}$ não é um espaço sequencial, definir a convergência de sequências não é o suficiente para determinar sua topologia.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Equivalentemente, uma distribuição sobre Ω é um funcional linear

$$\mu : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$

tal que para todo K compacto em Ω, existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$|\mu(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \phi|$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(K) := \{\phi \in C_0^\infty(\Omega) : \text{supp}(\phi) \subseteq K\}$.

A convergência no espaço das distribuições é a pontual, dada pela topologia fraca-* (ou apenas fraca, que coincidem, pois $\mathcal{D}$ é reflexivo). Deixaremos o estudo da topologia de $\mathcal{D}'$ para outra oportunidade. Uma boa exposição da utilidade da topologia colocada sobre $\mathcal{D}'$ se encontra nos exemplos em [5], p.53.

Por fins de motivação, definiremos agora duas operações sobre distribuições de imensa utilidade prática: a derivada e a convolução (o leitor interessado apenas na discussão topológica pode pular o restante desta seção). Para definir a derivada, observe que se f, definida em Ω, é suave, e se $\varphi \in \mathcal{D}$, então $\int (\partial_x^\alpha f)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int f(\partial_x^\alpha \varphi) dx$. Portanto uma definição natural para a derivada da distribuição F, se desejarmos estender a derivada de funções de classe C^∞, é:

Definição 2.3 (Derivada). $(\partial_x^\alpha F)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} F(\partial_x^\alpha \varphi)$.

Observação 2.4. Essa definição fornece resultados intuitivamente esperados, como a derivada da distribuição degrau (Heaviside step) ser o delta de Dirac.

Na definição acima, exploramos a alta regularidade das funções teste para reduzir a derivada de uma distribuição a uma expressão que depende apenas de derivadas das funções teste. Dizemos portanto que definimos a derivada por "dualidade". Muitas operações sobre distribuições são definidas dessa forma. Por exemplo, o análogo de compor uma função com uma transformação linear (não singular) L é definida no contexto de distribuições como $F_L(\varphi) = |\det(L)|^{-1} F(\varphi_{L^{-1}})$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.

A convolução entre distribuições e funções teste é definida similarmente. Considere $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Podemos definir a convolução $F * \psi$ de duas formas, tanto como uma função quanto como uma distribuição.

Definição 2.5 (Convolução). $F * \psi$ é a função $(F * \psi)(x) = F(\psi(x - y))$ ou $F * \psi$ é a distribuição $(F * \psi)(\varphi) = F(\psi^\sim * \varphi)$, onde $\psi^\sim(x) = \psi(-x)$.

Observação 2.6. É verdade que ambas as definições coincidem. Isto é, a distribuição associada à função $F * \psi$ é a distribuição $F * \psi$.

Observação 2.7. Com essa definição, podemos construir uma espécie de aproximação à identidade para distribuições, usando as funções teste como núcleos. Essa construção prova que as funções suaves são "densas" em $\mathcal{D}'$ (temos cautela ao falar de densidade em $\mathcal{D}'$, pois não definimos formalmente uma topologia sobre esse espaço).

3. Topologia

> " Topologia pode ser encarada como uma forma de se apresentar a noção de proximidade de uma maneira qualitativa – apesar de, num primeiro momento, sua definição parecer bastante artificial e pouco dizer sobre proximidade."
>
> *L. Aurichi, 2022* [4]

Esta seção contém uma lista de algumas definições básicas em topologia geral que serão úteis na próxima seção.

Definição 3.1 (Topologia)**.** Seja X um conjunto. (X, τ) é um espaço topológico se τ é uma família de subconjuntos de X satisfazendo

(1) $\emptyset, X \in \tau$;
(2) Uma interseção finita de abertos é aberta;
(3) Uma união (qualquer) de abertos é aberta.

Dizemos que τ é uma topologia e que seus elementos são abertos.

Definição 3.2 (Topologia induzida)**.** $Y \subseteq X$ munido da topologia σ é um subespaço de (X, τ) se para todo $V \in \sigma$, existe $W \in \tau$ tal que $V = Y \cap W$. Nesse caso, σ é a topologia induzida por τ.

Definição 3.3 (Vizinhança)**.** Uma vizinhança de $x \in (X, \tau)$ é um conjunto V tal que existe $U \in \tau$ com $x \in U \subseteq V$.

Definição 3.4 (Base)**.** Uma família $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma base para (X, τ) se todo aberto não vazio pode ser escrito como uma união de elementos de $\mathcal{B}$.

Definição 3.5 (Base local)**.** Dado $x \in X$, a coleção $\mathcal{V}$ de vizinhanças de x é um sistema fundamental de vizinhanças se para todo aberto $U \ni x$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$. Se $\mathcal{V} \subseteq \tau$, então chamamos $\mathcal{V}$ de base local para x.

Definição 3.6 (Espaço de Hausdorff)**.** Um espaço (X, τ) é de Hausdorff (ou T_2, ou separador de pontos) se dados $x, y \in X$ pontos distintos, existem abertos $A \ni x$ e $B \ni y$ tal que $A \cap B = \emptyset$.

Definição 3.7 (Fecho)**.** Um conjunto fechado é o complemento de um aberto. O fecho de um subconjunto $A \subseteq X$, denotado por $\overline{X}$, é a interseção de todos os fechados que o contém.

Definição 3.8 (Denso)**.** O subconjunto $D \subseteq X$ é denso em X se $\overline{D} = X$.

[4] Transcrito de [1].

Definição 3.9 (Espaço separável)**.** Um espaço (X, τ) é separável (ou satisfaz o terceiro axioma de enumerabilidade) se admite um subconjunto denso enumerável.

Definição 3.10 (Espaço métrico)**.** Seja X um conjunto. Dizemos que (X, d) é um espaço métrico se $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz

(1) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0$, e $d(x, y) = 0 \iff x = y$; (positivo definido)
(2) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$; (simetria)
(3) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (desigualdade triangular)

Definição 3.11 (Espaço metrizável)**.** Um espaço topológico (X, τ) é metrizável se existe uma métrica sobre X que induz a topologia τ. A topologia induzida por uma métrica é a topologia gerada pelas bolas abertas determinadas pela métrica. Uma topologia induzida por uma coleção C de subconjuntos é a menor topologia que contém C.

Definição 3.12 (Função contínua)**.** Considere os espaços topológicos (X, τ) e (Y, σ). A função $f : X \to Y$ é contínua se para todo $U \in \sigma,\ f^{-1}(U) \in \tau$.

Definição 3.13 (Homeomorfismo)**.** Uma função contínua com inversa contínua é um homeomorfismo.

Definição 3.14 (Topologia produto)**.** Considere os espaços topológicos (X, τ) e (Y, σ). A topologia produto sobre $X \times Y$ é a gerada por abertos da forma $A \times B$, onde $A \in \tau$ e $B \in \sigma$.

Definição 3.15 (Espaço vetorial topológico)**.** Um espaço vetorial topológico ou EVT de Hausdorff sobre o corpo $\mathbb{L}$ é um espaço vetorial X munido de uma topologia τ, com as seguintes propriedades:

(1) Conjuntos unitários são fechados;
(2) A aplicação $(x, y) \mapsto x + y$, de $X \times X$ para X, é contínua;
(3) A aplicação $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{L} \times X$ para X, é contínua;

onde tanto $X \times X$ quanto $\mathbb{L} \times X$ estão munidos da topologia produto.

Observação 3.16. Desse ponto em diante, abreviamos "EVT de Hausdorff" por apenas EVT, a menos que o contrário seja dito.

Definição 3.17 (Seminorma)**.** Uma seminorma sobre um espaço vetorial X é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(1) $p(x) \geq 0$ para $x \in X$; (não negatividade)
(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para $x, y \in X$; (subaditividade)
(3) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ para $\lambda \in \mathbb{L}$ e $x \in X$. (homogeneidade absoluta)

Chamamos uma família P de seminormas de separadora quando, para cada $x \in X \setminus \{0\}$, existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) > 0$.

Definição 3.18 (Conjunto convexo)**.** Um subconjunto $Y \subseteq X$ é convexo quando para quaisquer $a, b \in Y$ e $t \in (0,1)$, temos $ta + (1-t)b \in Y$.

Definição 3.19 (Conjunto localmente convexo)**.** Dizemos que o EVT X é localmente convexo quando a origem possui uma base local de conjuntos convexos.

Definição 3.20 (Conjunto equilibrado)**.** Um subconjunto $Y \subseteq X$ é equilibrado se, para todo $y \in Y$ e $|\lambda| \leq 1$ temos $\lambda y \in Y$.

Definição 3.21 (Conjunto limitado)**.** Um subconjunto $Y \subseteq X$ é limitado (com relação a τ, independente de métrica) se para toda vizinhança V da origem, existe um real $t > 0$ tal que $Y \subset sV$, para todo escalar s com $|s| \geq t$.

Definição 3.22 (Espaço de Fréchet)**.** Uma EVT é espaço de Fréchet se é localmente convexo e completamente metrizável por uma métrica invariante sob translação.

4. Distribuições e Topologia

> “ (Neste livro) a teoria das distribuições foi desenvolvida praticamente sem referência explícita a espaços vetoriais topológicos. (Nesta seção) nosso propósito é explicar como a definição do espaço de funções teste por meio de estimativas de seminorma é relacionada à noção geral de uma mapa contínuo entre espaços topológicos.”
>
> *F. G. Friedlander, 1982* [5]

Nesta seção, provamos alguns resultados gerais sobre espaços de Fréchet, e em seguida aplicamos estes resultados ao caso particular do espaço vetorial topológico das funções teste. A topologia LF definida sobre as funções teste é repleta de propriedades interessantes. Por exemplo, é um espaço (topologicamente) completo, localmente convexo, Hausdorff, separável, mas não metrizável.

Mostramos primeiramente como definir um EVT a partir de uma família enumerável de seminormas.

Teorema 4.1. *Seja X um espaço vetorial e $\mathcal{P}$ uma família enumerável e separadora de seminormas. Defina uma topologia em X tomando como base local $\mathcal{B}$ da origem os conjuntos convexos e equilibrados*

$$V(p,\epsilon) = \{x : p(x) < \epsilon\},\ p \in \mathcal{P},\ \epsilon > 0$$

unidos com as interseções finitas

$$W(p_1, \cdots, p_N; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_N) = V(p_1, \epsilon_1) \cap \cdots \cap V(p_N, \epsilon_N), \tag{4.1}$$

[5] Transcrito de [2], tradução própria.

e defina uma base local para cada $x \in X$ como os conjuntos transladados

$$x + W(p_1, \cdots, p_N; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_N).$$

Com esta topologia (gerada pela base $\mathcal{B}$), X é um EVT. As seminormas $p \in \mathcal{P}$ são aplicações contínuas de X em $\mathbb{R}$. Um conjunto $E \subseteq X$ é limitado se e somente se $p(E)$ é limitado em $\mathbb{R}$, para todo $p \in \mathcal{P}$.

Demonstração. Mostraremos que X é um EVT.

Note primeiramente que de fato $\mathcal{B}$ é base, pois recobre X e, dado $x \in (x_1+W_1) \cap (x_2+W_2)$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x+W \subseteq W_1 \cap W_2$. Além disso, a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é invariante sob translações e multiplicações por escalares não nulos, além de X possuir bases locais enumeráveis. Estas ultimas propriedades são diretas de conferir.

Divagamos por um momento para mostrar a continuidade de cada p, que segue da subaditividade. Tome $p \in \mathcal{P}$ arbitrário. Para cada $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$, o conjunto

$$V(p, x_0, \epsilon) = x_0 + V(p, \epsilon)$$

é mapeado por p na vizinhança $B(p(x_0), \epsilon)$ de $p(x_0) \in \mathbb{R}$, pois

$$p(x) = p(x - x_0 + x_0) \leq p(x - x_0) + p(x_0)$$

logo

$$p(x) - p(x_0) \leq p(x - x_0) + p(x_0) - p(x_0) \leq p(x - x_0) < \epsilon.$$

Portanto p é contínuo (para todo $\epsilon > 0$, uma escolha de $\delta = \epsilon$ é suficiente).

Voltando à demonstração de que X é um EVT, note que o conjunto unitário $\{0\}$ é fechado, pois todo $x_0 \neq 0$ possui uma vizinhança disjunta do $\{0\}$, a saber, $V(p, x_0, \epsilon)$, onde $p \in \mathcal{P}$ é escolhido de modo que $p(x_0) \neq 0$ e $\epsilon < p(x_0)$. Podemos concluir de maneira análoga que $\{x\}$ é fechado, para qualquer $x \in X$.

Mostraremos agora a continuidade com respeito a soma e a produto.

Para a soma, vamos mostrar que para qualquer vizinhança $W + x + y$ existem vizinhanças $W_1 + x$ de x e $W_2 + y$ de y tais que

$$(W_1 + x) + (W_2 + y) \subset W + x + y$$

isto é, $W_1 + W_2 \subset W$. De fato, $W = W(p_1, \cdots, p_N; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_N)$ é uma vizinhança básica do 0, e podemos tomar

$$W' = \frac{1}{2}W(p_1, \cdots, p_N; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_N) = W\left(p_1, \cdots, p_N; \frac{1}{2}\epsilon_1, \cdots, \frac{1}{2}\epsilon_N\right).$$

O resultado segue do fato de que $W' + W' \subset W$, pela subaditividade.

Para o produto, vamos mostrar que para qualquer vizinhança $W + \alpha x$ de αx existem vizinhanças $B(0, r) + \alpha$ (de $\alpha \in \mathbb{L}$) e $W' + x$ (de $x \in X$) tais que

$$(B(0, r) + \alpha)(W' + x) \subset W + \alpha x. \tag{4.2}$$

Note que

$$(B(0, r) + \alpha)(W' + x) \subset B(0, r)W' + \alpha W' + B(0, r)x + \alpha x.$$

Estabeleceremos uma cota para cada um dos termos na soma ao lado direito da inclusão.

Seja $W(p_1, \cdots, p_N; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_N)$ e $W' = \delta W$, $\delta > 0$. Para $c > \epsilon^{-1} p_j(x)$, $j = 1, \cdots, N$, temos $x \in cW$, logo

$$B(0, r)x \subset rcW.$$

Além disso,

$$B(0, r)W' \subset rW' = r\delta W$$

e

$$\alpha W' \subset |\alpha| W' = |\alpha|\delta W.$$

Escolha δ tal que $|\alpha|\delta < \frac{1}{3}$. Escolha r tal que $r\delta < \frac{1}{3}$ e $rc < \frac{1}{3}$. Logo,

$$B(0, r)W' + \alpha W' + B(0, r)x \subset \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W \subset W,$$

isto é, (4.2) está satisfeita, provando a continuidade do produto e que X é um EVT.

Por fim, descreveremos os conjuntos limitados nesta topologia. Tome E é limitado e $p \in \mathcal{P}$. Pela definição de conjunto limitado em EVT, existe $t > 0$ tal que

$$E \subset tV(p, 1) = V(p, t).$$

Então $p(x) \in [0, t)$ para $x \in E$, portanto $p(E)$ é limitado. Reciprocamente, seja E um conjunto tal que para todo $p \in \mathcal{P}$, existe $t_p > 0$ com $p(x) < t_p$ para $x \in E$. Nesse caso, $E \subset tW$ para $t \geq \max\left\{\frac{tp_1}{\epsilon_1}, \cdots, \frac{tp_N}{\epsilon_N}\right\}$, isto é, E é limitado.

□

Observação 4.2. Os conjuntos da forma (4.1) são abertos, convexos e equilibrados. Além disso, uma sequência (x_k) de X converge para $x \in X$ se e somente e $p(x_k - x) \to 0$, para todo $p \in \mathcal{P}$.

Observação 4.3. Se a familia de seminormas possui a "propriedade do máximo" ([3], *Remark B.6*), então é possível verificar a continuidade de funcionais lineares definidos sobre o EVT por meio de estimativas pelas seminormas. Felizmente, toda família de seminormas pode ser aumentada de forma que o princípio do máximo é satisfeito e o EVT definido é o mesmo.

O EVT definido acima possui algumas propriedades adicionais que o aproxima de um espaço de Fréchet. Em especial, é metrizável.

Proposição 4.4. *Seja X um EVT com a topologia definida em 4.1. Então X é localmente convexo e metrizável, e a topologia em X é determinada pela métrica invariante*

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}. \tag{4.3}$$

As bolas $B(0,r)$ nessa métrica são conjuntos equilibrados. Por definição, se X é completo nessa métrica, é um espaço de Fréchet.

Demonstração. A convexidade local segue diretamente da definição da topologia de X e a série em 4.3 evidentemente converge para todo x, $y \in X$. Mostraremos agora que 4.3 define uma métrica. Para isso considere a função

$$f(a) = \frac{a}{1+a}, \quad a \geq 0.$$

Mostraremos que

$$f(a) \leq f(a+b) \leq f(a) + f(b). \tag{4.4}$$

A primeira desigualdade segue de

$$f(a) = \frac{a}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$$

e do fato de que $a, b \geq 0$, e $\dfrac{1}{1+a}$ é decrescente. A segunda desigualdade segue do resultado acima, juntamente a

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{1}{1+a}, \quad a > 0$$

fornecendo

$$\frac{f(a)}{a} \geq \frac{f(a+b)}{a+b} \text{ e } \frac{f(b)}{b} \geq \frac{f(a+b)}{a+b}, \quad a, b > 0.$$

Somando as desigualdades anteriores,

$$f(a) + f(b) \geq \frac{af(a+b)}{a+b} + \frac{bf(a+b)}{a+b} = f(a+b)$$

o que prova 4.4 (os casos $a = 0$ ou $b = 0$ são imediatamente verificáveis).

Defina

$$d_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(x)}{2^k(1+p_k(x))}. \tag{4.5}$$

Portanto, $d(x,y) = d_0(x-y)$. Vamos mostrar que $d(x,y)$ satisfaz a definição de métrica, isto é,

(1) $d_0(x) \geq 0, \; d_0(x) = 0 \iff x = 0;$

(2) $d_0(\lambda x) \le d_0(x)$, para $|\lambda| \ge 1$;
(3) $d_0(x+y) \ge d_0(x) + d_0(y)$.

As propriedades 1, 2 e 3 nos asseguram de que $d(x,y)$ é uma métrica cujas bolas são conjuntos equilibrados. A propriedade de simetria é trivialmente verificada, portanto não é enunciada. Para verificar 1, note que $\mathcal{P}$ é uma família separadora. A propriedade 2 segue de manipulações aritméticas simples. A propriedade 3 pode ser verificada aplicando 4.4. É também direto que $d(x,y)$ é invariante por translação.

Mostraremos agora que a topologia induzida pela métrica é a mesma que a topologia definida pelas seminormas. Note que, por um lado, para $\epsilon \in (0,1)$ e $N \in \mathbb{N}$, temos $d_0(x) \le \epsilon 2^{-N} \implies$

$$\begin{aligned} &\frac{p_k(x)}{2^k(1+p_k(x))} \le \epsilon 2^{-N}, \quad \forall k \\ &\Rightarrow \frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} \le \epsilon, \quad \text{para} \quad k \le N \\ &\Rightarrow p_k(x) \le \frac{\epsilon}{1-\epsilon}, \quad \text{para} \quad k \le N. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $2^{-N} < \epsilon/2$, então

$$p_k(x) \le \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para} \quad k \le N$$

implica

$$d_0(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k(x)}{2^k(1+p_k(x))} + \sum_{k=N+1}^{N} \frac{p_k(x)}{2^k(1+p_k(x))} \le \frac{\epsilon}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^N} \le \epsilon.$$

Portanto temos as seguintes inclusões entre as vizinhanças básicas $W(p_1, \cdots, p_N; \delta, \cdots, \delta)$ e as bolas $B(0,r)$, com $r, \delta > 0$ e $N \in \mathbb{N}$.

$$B(0,r) \subset W(p_1, \cdots, p_N; \delta, \cdots, \delta),$$

com δ e N dados e $\epsilon > 0$ é escolhido de modo que $\dfrac{\epsilon}{1-\epsilon} < \delta$, e r é tomado da forma $r = \epsilon 2^{-N}$.

$$B(0,r) \supset W(p_1, \cdots, p_N; \delta, \cdots, \delta),$$

onde r é dado e N é escolhido tal que $2^{-N} \le r/2$ e $\delta = r/2$. Isso mostra que $\{B(0,r),\ r > 0\}$ é um sistema de vizinhanças básicas de 0, na topologia definida pela família de seminormas $\mathcal{P}$. □

Observação 4.5. Ao abrir mão da hipótese de enumerabilidade em 4.1, é possível definir a topologia de um EVT localmente convexo arbitrário por meio de uma família de seminormas.

Se a completude de um EVT construído como em 4.1 é verificada, ele é de Fréchet. Espaços de Fréchet são importantes pois generalizam espaços de Banach, mas preservam a propriedade de Baire (são métricos e completos). Assim, alguns dos teoremas fundamentais da análise funcional (pelo menos os que seguem diretamente do teorema de Baire) possuem generalizações para espaços de Fréchet. Entre eles, o princípio da aplicação aberta, o teorema do gráfico fechado e o princípio da limitação uniforme. A seguir, mostraremos como obter uma topologia a partir de uma sequência de espaços de Fréchet.

Definição 4.6 (Topologia LF)**.** Seja

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_j \subset \cdots$$

uma sequência de espaços de Fréchet tal que para todo $j \in \mathbb{N}$, X_j é um subespaço de X_{j+1} e a topologia em X_j é a induzida por X_{j+1}. Defina

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$$

e considere os conjuntos $W \subseteq X$ tais que $W \cap X_j$ é aberto, convexo, equilibrado e uma vizinhança da origem em X_j, $\forall j$. Sob essas condições, X tem uma única topologia (a topologia LF) que o torna um EVT localmente convexo tal que as vizinhanças abertas, convexas e equilibradas da origem são precisamente os conjuntos W. Com esta topologia, as injeções $X_j \subseteq X$ são contínuas.

Observação 4.7. O nome "LF" abrevia "Limite indutivo de espaços de Fréchet". Se o motivo para a escolha do nome "limite indutivo" não está claro dada a definição acima, o leitor interessado pode pesquisar pelas definições algébricas mais gerais de limite indutivo ou limite direto.

Os espaços de Fréchet X_j são subespaços de X, e a topologia induzida em X_j por X coincide com a topologia original de X_j.

Proposição 4.8. *A topologia de subespaço induzida por X sobre X_n é a topologia original de X_n.*

Demonstração. Vamos mostrar que vizinhanças básicas em uma topologia são vizinhanças na outra topologia e vice-versa. Seja $V \in \mathcal{B}$ uma vizinhança básica (portanto convexa e equilibrada) de 0 em X. A interseção $W = V \cap X_n$ é uma vizinhança de 0 em X_n (em sua topologia original) pela definição de $\mathcal{B}$.

Reciprocamente, mostraremos que se W é uma vizinhança de 0 na topologia original em X_n, então existe V vizinhança de 0 em X, tal que $W = V \cap X_n$. É suficiente considerar apenas vizinhanças W convexas (pois cada X_n é de Fréchet). Como X_{n+1} induz a topologia original em X_n, existe uma vizinhança W_{n+1} de 0 em X_{n+1} tal que $W^{n+1} \cap X^n = W^n$. Usaremos sem prova o fato de que W_{n+1} pode sempre ser escolhido convexo.

Iterativamente, temos $W_{n+k+1} \subseteq X_{n+k+1}$ vizinhança convexa de 0 tal que

$$W_{n+k+1} \cap X_{n+k} = W_{n+k}.$$

Defina por fim

$$V = \bigcup_n W_n$$

que é uma vizinhança do 0 em X, pois é convexo e sua interseção com cada X_n é uma vizinhança do 0 em X_n. $\square$

Estabelecidos os resultados gerais necessários sobre espaços vetoriais topológicos, partimos para a descrição da topologia das funções teste $C_0^\infty(\Omega)$. Nossa inteção é a seguinte. Primeiramente, estabelecer uma topologia sobre $C_K^\infty(\Omega)$ usando 4.1 [6]. Em seguida, mostrar que cada $C_K^\infty(\Omega)$ é de Fréchet e aplicar 4.6 para obter a topologia desejada sobre $C_0^\infty(\Omega)$.

Seja $K \subseteq \Omega$ um compacto e $C_K^\infty(\Omega)$ o espaço das funções suaves com domínio Ω e suporte em K.

Começaremos definindo uma topologia em $C_K^\infty(\Omega)$ através de uma família de seminormas. Defina as aplicações

$$p_{K,n}(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)| \tag{4.6}$$

onde $n \in \mathbb{Z}_+$. Deixamos como exercício a verificação do fato de que cada 4.6 define uma seminorma. Além disso, é direto conferir que para cada $C_K^\infty(\Omega)$ fixo, a família definida em 4.6 (pela variação da ordem n) é separadora. Estamos portanto sob as hipóteses do teorema 4.1, logo cada $C_K^\infty(\Omega)$ é um EVT localmente convexo e metrizável (métrica explicitada em 4.4), com métrica invariante por translação.

Ao provar que a métrica explicitada em 4.4 torna o espaço $C_K^\infty(\Omega)$ completo, teremos provado que $C_K^\infty(\Omega)$ é de Fréchet. Faremos isso a seguir.

Lema 4.9. *O espaço $C_K^\infty(\Omega)$ é completo na métrica imposta acima.*

Demonstração. É direto mostrar que se uma sequência (ϕ_j) é de Cauchy em $C_K^\infty(\Omega)$, então $(\partial^\alpha \phi_j)$ é uma sequência de Cauchy na norma uniforme, para cada α. Portanto $\partial^\alpha \phi_j \to \phi_\alpha$ uniformemente e $\phi_\alpha = \partial^\alpha \phi_0$ (esta última igualdade não é imediata - confira usando derivação fraca iterada). Nesse caso, $\phi_0 \in C_K^\infty(\Omega)$ pois cada derivada é nula na fronteira de K. Então a sequência de Cauchy (ϕ_j) converge para ϕ_0, isto é, $C_K^\infty(\Omega)$ é completo. $\square$

Aplicaremos agora a construção 4.6 com os espaços definidos acima. Tome K_j com $j \in \mathbb{N}$ uma sequência aninhada crescente de compactos que se esgotam em Ω.

[6] Note que $C_K^\infty(\Omega)$ não é o mesmo que $C^\infty(K)$, pois os elementos do primeiro espaço são suaves em todo o domínio Ω, não apenas em K.

Considere $C^\infty_{K_j}(\Omega)$ uma sequência de espaços de Fréchet, onde para todo $j \in \mathbb{N}$, $C^\infty_{K_j}(\Omega)$ é um subespaço de $C^\infty_{K_{j+1}}(\Omega)$ e a topologia em $C^\infty_{K_j}(\Omega)$ é a induzida por $C^\infty_{K_{j+1}}(\Omega)$. Estamos portanto sob as hipóteses de 4.6. Definimos então, como em 4.6, o espaço

$$C^\infty_0(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} C^\infty_{K_j}(\Omega).$$

Conferimos abaixo que a topologia LF sobre $C^\infty_0(\Omega)$ está definida de forma única.

Proposição 4.10. *A topologia definida sobre $C^\infty_0(\Omega)$ independe da escolha de compactos K_j*

Demonstração. Sejam $K_1 \subset K_2 \subset \cdots K_j \subset \cdots$ e $K'_1 \subset K'_2 \subset \cdots K'_j \subset \cdots$ duas sequências de compactos que recobrem Ω, e as topologias correspondentes τ e τ'. Mostraremos que as vizinhanças básicas da origem coincidem em ambas as topologias. Fixe K'_n e V uma vizinhança convexa da origem em τ. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K'_n \subseteq K_m$. Então

$$V \cap C^\infty_{K'_n}(\Omega) = (V \cap C^\infty_{K_m}(\Omega)) \cap C^\infty_{K'_n}(\Omega).$$

Agora note que $V \cap C^\infty_{K_m}(\Omega)$ é uma vizinhança convexa da origem (em $C^\infty_{K_m}(\Omega)$) por definição. Além disso, $C^\infty_{K_m}(\Omega)$ induz a topologia (de subespaço) de $C^\infty_{K'_n}(\Omega)$, logo $V \cap C^\infty_{K'_n}(\Omega)$ é uma vizinhança convexa da origem em $C^\infty_{K'_n}(\Omega)$. Portanto V é uma vizinhança da origem em τ'. O argumento é simétrico, portanto a proposição segue sem mais esforços. $\square$

Por fim, a noção de convergência de sequências na topologia LF coincide com a definida na seção 2 (temporariamente chamaremos esta convergência de "convergência - $\wedge$").

Teorema 4.11. *Uma sequência $(\phi_j) \in C^\infty_0(\Omega)$ converge se e somente se converge-$\wedge$, isto é,*

1. *O suporte de cada ϕ_j está contido em um compacto fixo $K \subset \Omega$;*
2. *Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $\partial^\alpha \phi_j \to 0$ uniformemente quando $j \to \infty$.*

Demonstração. Seja (ϕ_j) uma sequência convergente para 0 (s.p.g) em $C^\infty_0(\Omega)$. Suponha por fim de contradição que não existe um compacto que contém todo supp ϕ_j. Seja K_j uma sequência aninhada crescente de compactos que se esgotam em Ω. Passando a uma subsequência se necessário, é possível encontrar pontos $x^{(1)} \in K_1, \cdots, x^{(j)} \in K_j \setminus K_{j-1}$, $j = 1, 2, \cdots$, tais que $\phi_j(x^{(j)}) \neq 0$.

Considere agora, com $K_0 = \emptyset$,

$$p(\phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sup \left\{ \left| \frac{\phi(x)}{\phi_j(x^{(j)})} \right| : x \in K_j \setminus K_{j-1} \right\}, \quad \phi \in C^\infty_0(\Omega).$$

Se supp $\phi \subset K$ para algum K compacto, então

$$p(\phi) \leq C \sup |\phi|$$

logo p restrito ao $C_K^\infty(\Omega)$ é uma seminorma contínua. Aplicando a definição da topologia LF, p é uma seminorma contínua em $C_0^\infty(\Omega)$ também. Portanto se $\phi_j \to 0$ em $C_0^\infty(\Omega)$, então $p(\phi_j) \to 0$. Mas, por construção, $p(\phi_j) \geq 1$ para todo j – uma contradição.

Logo supp $\phi_j \subset K$ para todo j e algum K compacto fixo. Isto implica que se uma sequência converge em $C_0^\infty(\Omega)$, então converge em $C_K^\infty(\Omega)$ para algum K, de onde segue que a sequência em questão converge-$\wedge$.

A recíproca é imediata, dado que as inclusões $C_K^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega)$ são contínuas. □

Com isso cumprimos o objetivo de definir explicitamente uma topologia sobre o espaço das funções teste. Com o fim de realizar um estudo mais completo deste espaço, enunciaremos a seguir algumas de suas propriedades principais (com as respectivas demonstrações esboçadas). As primeiras destas revelam semelhanças entre o espaço das funções teste e um espaço de Fréchet:

Proposição 4.12 (Convexidade local)**.** *O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é localmente convexo.*

Demonstração. A construção em 4.6 define $C_0^\infty(\Omega)$ por uma base local em 0 (portanto em cada ponto) composta de conjuntos convexos. □

Proposição 4.13 (Hausdorff)**.** *O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de Hausdorff.*

Demonstração. Como $C_0^\infty(\Omega)$ é um EVT, basta conferir que para cada $x \in C_0^\infty(\Omega)$ ($x \neq 0$), existe uma vizinhança N de 0 tal que $x \notin N$. A vizinhança N pode ser obtida pela união $\cup_n N_n$ de vizinhanças convexas de 0 em cada um dos espaços de Fréchet da sequência que define o espaço LF. É necessário usar o fato de que cada um destes espaços de Fréchet é de Hausdorff. O desafio principal desta demonstração é escolher cada convexo N_n tal que a uniao N também seja convexa (note que a união de convexos nem sempre é um convexo). Dica: utilizar envoltórios convexos. □

Além disso, o espaço das funções teste contém um enumerável denso:

Proposição 4.14 (Separabilidade)**.** *O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é separável.*

Demonstração. Primeiramente mostre que $C^\infty(K)$ (K compacto), com norma induzida pela seminormas de $C_K^\infty(\Omega)$, é separável. Para isto, aplique o teorema de Stone-Weierstrass para aproximar funções contínuas (uniformemente) por polinômios de coeficientes racionais, os quais são enumeráveis. Como $C_K^\infty(\Omega)$ é métrico e é subespaço de $C^\infty(K)$, também é separável. Como $C_0^\infty(\Omega)$ é a união de enumeráveis espaços $C_K^\infty(\Omega)$, o resultado segue. □

A próxima propriedade implica que $C_0^\infty(\Omega)$ não é um espaço de Fréchet:

Proposição 4.15 (Não-metrizabilidade)**.** *O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ não é metrizável.*

Demonstração. Usaremos o teorema de Baire, especialmente que todo espaço completamente metrizável é de Baire. Um espaço de Baire é definido pela propriedade de que coberturas enumeráveis por fechados possuem pelo menos um fechado com interior não vazio. Devemos prosseguir mostrando a contrapositiva do teorema de Baire, isto é, que $C_0^\infty(\Omega)$ não é de Baire, portanto não é completamente metrizável. É necessário provar que cada $C_K^\infty(\Omega)$ é subespaço fechado de $C_0^\infty(\Omega)$ com interior vazio.

Teríamos portanto que $C_0^\infty(\Omega)$ não é completamente metrizável. Nesse momento, fazemos uma digressão para sugerir ao leitor uma pesquisa rápida sobre completude topológica. É possível definir EVT's completos sem a noção de métrica, por meio de filtros. A saber, um EVT é completo se todo filtro de Cauchy converge. Todo espaço LF é completo nesse sentido. Além disso, se um EVT metrizável é completo nesse sentido, então é completamente metrizável no sentido usual.

Voltamos ao esboço de demonstração inicial para observar que como $C_0^\infty(\Omega)$ (um espaço LF) é topologicamente completo mas não é completamente metrizável, não pode ser metrizável. □

5. Metodologia

A execução do trabalho se deu sobretudo com a pesquisa bibliográfica e resolução de exercícios por parte do aluno, junto à implementação de críticas e sugestões do orientador. O cronograma de estudos inicialmente proposto se desenvolveu sem entraves, até a formatura do aluno e consequente interrupção do projeto.

Referências

[1] L. Aurichi. *Topologia Geral.* São Paulo, Livraria da Física, Série textuniversitários, 2022.
[2] F.G. Friedlander. *Introduction to the Theory of Distributions.* Cambridge University Press, 1982.
[3] G. Grubb. *Distributions and Operators.* Springer, 2009.
[4] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag, 1983.
[5] Jorge Hounie. *Teoria Elementar das Distribuições.* IMPA, 1979.
[6] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, 1989.
[7] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Functional Analysis: An Introduction to Further Topics in Analysis.* Princeton University Press, 2011.
[8] F. Treves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press Inc., 1967.