INTEGRAL DE LEBESGUE E SÉRIES DE FOURIER

Aluno: Luca Maciel Alexander [1]
Orientador: Adalberto Panobianco Bergamasco

Conteúdo

1. Introdução

O desenvolvimento da integral de Riemann (e das integrais similarmente definidas de Darboux e Stieltjes) no século XIX, possibilitou a reformulação do cálculo de Newton e Leibniz de uma forma mais rigorosa, tornando mais claras as demonstrações de grandes teoremas da época, enquanto preparando o âmbito da pesquisa em análise para as evoluções que viriam no começo do século XX, com a formalização da teoria dos conjuntos.

A análise de Fourier se beneficiou da integral de Riemann pois os coeficientes das séries de Fourier são definidos por meio de integrais. A teoria em torno da integral de Riemann não só facilitou o cômputo desse tipo de aproximação de funções, como contribuiu para estudar o comportamento dos coeficientes de Fourier, portanto a regularidade de funções e propriedades de operadores entre funções.

Apesar da utilidade da descoberta de Riemann, aparecem indícios de que seria proveitoso buscar uma forma mais geral de integrar. Entre esses indícios, a observação de que a série de Fourier não realiza uma boa ponte entre o espaço das funções de quadrado integrável a Riemann e o espaço das sequências de quadrado somável. Além disso, são raras as ocasiões em que a operação de integração comuta com a operação de limite.

[1]Este documento será submetido como relatório final de uma iniciação científica desenvolvida no ICMC - USP, sob apoio financeiro do PUB, durante o período de 01/09/2021 a 31/08/2022.

Definimos a série de Fourier de uma função f Riemann integrável, 2π-periódica, como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ em que os coeficientes são dados por $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$. Sob a restrição de funções de quadrado integrável, obtemos a identidade de Parseval: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt$. Para cada função f de quadrado integrável, é possível associar uma sequencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de quadrado somável. Pela identidade de Parseval, esta associação preserva a norma. É possível, entretanto, construir sequências de coeficientes que não possuem funções de quadrado Riemann integrável correspondentes. Ademais, o espaço das funções de quadrado Riemann integrável não é completo em sua norma, enquanto o espaço das sequências de quadrado somável é. Esses fatos colocam a dúvida de quais seriam as supostas funções acrescentadas ao completar o espaço de funções em questão, e de qual seria a norma mais apropriada sobre espaço obtido através do completamento.

Consideramos uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas e limitadas, definidas em um intervalo da reta. Sob a condição de convergência uniforme, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ é contínua portanto integrável. Um fato curioso é que se trocarmos a hipótese de convergência uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pela monotonicidade, a função limite f sempre existe, porém não será necessariamente contínua ou integrável. Como f nesse caso é limitada e definida em um intervalo, intuitivamente há a esperança de existir outra forma de obter a área debaixo de seu gráfico a não ser pela integral de Riemann.

O início do estudo dessas questões se dá com a resolução do problema da medida em $\mathbb{R}^d$. Nossa intenção é partir das propriedades fundamentais esperadas de uma função que designa volumes a conjuntos, para então determinar o domínio dessas funções (os chamados conjuntos mensuráveis, sobre os quais a maior parte da teoria incide). Resultados sobre os conjuntos mensuráveis são aplicados em domínios de funções para definir uma nova integral, que estende a de Riemann. Com ela, é possível redefinir a série de Fourier e completar o espaço das funções de quadrado Riemann integrável, de modo a revelar o conhecido espaço de Hilbert L^2.

2. A Medida de Lebesgue

> “ Em uma abordagem clássica da geometria, era comum computar a medida de um corpo particionando este corpo em finitos componentes, deslocando os componentes por moções rígidas (e.g. translação ou rotação) para formar um corpo mais simples, que presumidamente teria a mesma área. Pode-se também obter cotas inferiores e superiores para a medida de um corpo, computando a medida de corpos inscritos ou circunscritos. Esta ideia é pelo menos tão antiga quanto o trabalho de Arquimedes. (...) Usando esses fundamentos analíticos em vez de os clássicos geométricos, deixou de ser intuitivamente óbvio como definir a

medida $m(E)$ de um subconjunto E de $\mathbb{R}^d$. Vamos nos referir a este problema (vagamente definido), de determinar a definição correta de medida, como o problema da medida."

Tao, 2011 [2]

Vamos inicialmente nos ater ao problema da medida em $\mathbb{R}^d$. Fazemos uma tentativa de aproximar volumes de subconjuntos arbitrários utilizando coberturas por cubos fechados. Essa estratégia fornece uma forma de medir volumes, mas não satisfaz algumas propriedades desejáveis. Esse problema é remediado se restringirmos o olhar para uma coleção especial de subconjuntos, os subconjuntos Lebesgue mensuráveis. Funções mensuráveis são relacionadas aos conjuntos Lebesgue mensuráveis analogamente à forma com que as funções contínuas são relacionadas aos conjuntos abertos. Algumas propriedades envolvendo a convergência de sequências de funções mensuráveis e a aproximação de funções mensuráveis por funções mais simples serão úteis ao utilizar a teoria da medida em $\mathbb{R}^d$ para desenvolver a integral de Lebesgue.

Começamos definindo um retângulo fechado (ou simplesmente retângulo) como o produto de intervalos fechados $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, e o cubo fechado (ou simplesmente cubo) como o produto de intervalos fechados de mesmo comprimento $Q = [a_1, a_1 + k] \times \cdots \times [a_d, a_d + k]$, $k \in \mathbb{R}$. O volume de um cubo pode ser interpretado como $|Q| = k^d$.

Definição 2.1 (Quase disjunto)**.** Uma união de retângulos ou cubos é quase disjunta se os interiores de cada elemento da união são disjuntos.

O seguinte resultado estabelece progresso na direção de atribuir volumes através de coberturas por conjuntos de volume conhecido (nesse caso, cubos). Infelizmente o resultado exige que o conjunto coberto seja aberto. Além disso, a cobertura por cubos não é única, e não é evidente que as somas dos volumes dos elementos da cobertura sejam idênticas para todas as coberturas (do tipo especificado) do aberto considerado.

Proposição 2.2. *Todo conjunto aberto de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, é uma união enumerável de cubos quase disjuntos.*

Podemos definir $m_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$, caso particular de uma classe de funções chamadas de medidas exteriores, que objetivam associar uma medida a todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Notamos que a definição de m_* abaixo não exige que o conjunto medido seja uma união enumerável de cubos quase disjuntos, nem exige uma condição

[2]Transcrito de [7], tradução própria.

parecida.

$$m_*(E) = inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j| : \{Q_j\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é uma cobertura de } E \text{ por cubos.}\Big\}$$

Apesar da abrangência do domínio de definição da medida exterior, ela desfruta de três propriedades interessantes, considerando os objetivos da teoria da medida:

(1) *(Nulidade do vazio).* $m_*(\emptyset) = 0$
(2) *(Monotonicidade).* $E_1 \subseteq E_2 \implies m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$
(3) *(Sub-aditividade enumerável).* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \implies m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$

São essas as propriedades gerais que definem uma medida exterior. As seguintes propriedades (aditividade em alguns casos particulares), considerando a proposição 2.2, mostram que a função m_* merece nossa atenção.

(1) Se E é uma união enumerável de cubos Q_j quase disjuntos, então $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|$.
(2) Se $d(E_1, E_2) > 0$ então $m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.

Definição 2.3 (medida de Lebesgue)**.** Um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ é dito Lebesgue mensurável, ou apenas mensurável, se para toda escolha de $\epsilon > 0$, existe um aberto U, com $E \subseteq U$, de forma que $m_*(U \setminus E) \leq \epsilon$. Definimos a medida de Lebesgue m, ou apenas medida, sobre os conjuntos mensuráveis E, com valor $m(E) = m_*(E)$.

Os conjuntos mensuráveis são fechados sob várias operações de conjunto, como complemento, união enumerável e intersecção enumerável. A principal vantagem de restringir m_* aos conjuntos mensuráveis é que m possui a propriedade de aditividade enumerável:

Proposição 2.4 (Aditividade enumerável de m)**.** *Se $E_1, E_2, \ldots$ são conjuntos mensuráveis disjuntos, e $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, então $m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$.*

Mostramos agora, através de um exemplo clássico, que nem todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ é mensurável.

Seja $d = 1$. Definimos a relação de equivalência $x \sim y$ se $x - y$ é racional, sobre o intervalo $[0, 1]$. É possível conferir que $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva. Seja $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ o conjunto das classes de equivalência geradas por $\sim$, indexadas por A. Construímos o conjunto de Vitali $\mathcal{N}$ tomando, por meio do axioma da escolha, um representante x_α arbitrário de cada E_α.

Teorema 2.5 (O conjunto de Vitali não é mensurável)**.** *O conjunto $\mathcal{N}$ não é mensurável.*

Demonstração. Supomos por fim de contradição que $\mathcal{N}$ é mensurável. Seja $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma enumeração de todos os racionais no intervalo $[-1, 1]$. Definimos as translações $\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$, para todo k.

Vamos obter uma contradição ao limitar uma soma infinita de um termo constante (a suposta medida de $\mathcal{N}$), inferiormente e superiormente, por reais positivos. Para isso, precisamos estabelecer dois fatos: (1) que os conjuntos $\mathcal{N}_k$ são disjuntos e (2) que $[0,1] \subseteq \bigcup \mathcal{N}_k \subseteq [-1,2]$.

(1) Se $\mathcal{N}_k \cap \mathcal{N}_i$ não é vazio, existem racionais distintos $r_k \neq r_i$, e índices $\alpha, \beta \in A$, com $x_\alpha + r_k = x_\beta + r_i$, logo $x_\alpha - x_\beta$ é um racional não nulo, contradizendo a definição de $\mathcal{N}$.
(2) A segunda inclusão segue diretamente da definição das translações $\mathcal{N}_k$. A primeira inclusão segue da observação de que cada $x \in [0,1]$ está a um racional r de distância de algum elemento de $\mathcal{N}$, pela definição de $\mathcal{N}$. Como $r_k = r$, para algum k, então $x \in \mathcal{N}_k$.

Obtemos agora a contradição. Se $\mathcal{N}$ é (Lebesgue) mensurável, então as translações $\mathcal{N}_k$ também são. Por (1) e (2), usamos a propriedade de aditividade da medida m para escrever $1 \leq \sum m(\mathcal{N}_k) \leq 3$. Novamente, como cada $\mathcal{N}_k$ é uma translação de $\mathcal{N}$, temos $m(\mathcal{N}) = m(\mathcal{N}_k)$, logo $1 \leq \sum m(\mathcal{N}) \leq 3$, que é impossível. $\square$

Aplicamos o conceito de conjunto mensurável para generalizar a classe das funções contínuas:

Definição 2.6 (Função mensurável)**.** Uma função f a valores reais, definida em um subconjunto mensurável $E \subseteq \mathbb{R}^d$, é mensurável se para todo $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E : f(x) < a\}$ é mensurável.

A seguinte proposição torna mais precisa a afirmação feita no início desta seção, que compara funções mensuráveis a funções contínuas.

Proposição 2.7 (Caracterização de funções mensuráveis)**.** *A função f a valores reais é mensurável se e somente se $f^{-1}(U)$ é mensurável para cada aberto U.*

Entre várias propriedades envolvendo limites que as funções mensuráveis possuem, a seguinte se destaca no sentido de exibir um comportamento extremamente útil que as funções contínuas não demonstram.

Proposição 2.8 (Convergência pontual preserva mensurabilidade)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis, com $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Então f é mensurável.*

Outra propriedade interessante das funções mensuráveis é que elas são (por um sentido preciso) indiferentes a mudanças pequenas em suas definições. Para enunciar uma proposição que comprova isso, definimos a noção de igualdade em quase todo ponto.

Definição 2.9 (Quase todo ponto)**.** Uma propriedade vale para quase todo ponto de um conjunto E se o subconjunto dos pontos de E nos quais a propriedade em questão não vale tem medida nula.

Proposição 2.10 (Mudanças pequenas não afetam a mensurabilidade)**.** *Suponha que f seja mensurável. Se $f(x) = g(x)$ em quase todo ponto do domínio, então g também é mensurável.*

Na construção da integral de Lebesgue, é usado de forma central o fato de que funções mensuráveis são aproximáveis por funções simples, que são essencialmente combinações lineares de funções características de conjuntos mensuráveis.

Definição 2.11 (Função simples)**.** Uma função simples é uma soma finita da forma $f = \sum_{k=0}^{N} a_k \chi_{E_k}$, em que cada E_k é um conjunto mensurável de medida finita e cada a_k é uma constante real.

Proposição 2.12 (Mensurável é aproximável por simples)**.** *Se f é mensurável em $\mathbb{R}^d$, então existe uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)|$ e que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.*

Observação 2.13. Vale comentar que é possível trocar a hipótese de funções simples por funções escada (funções simples em que cada E_k de sua definição é um intervalo, ou produto de intervalos), se enfraquecermos a conclusão de forma garantir apenas a convergência pontual em quase todo ponto.

Por fim, expomos os princípios de Littlewood, que relatam três formas com que conjuntos e funções mensuráveis se relacionam com conceitos importantes da análise. A saber, como conjuntos mensuráveis se relacionam com coberturas finitas, como funções mensuráveis são parecidas com funções contínuas, e como a convergência pontual de funções mensuráveis é quase uma convergência uniforme:

(1) Seja $E \subseteq \mathbb{R}^d$ um subconjunto mensurável. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma união finita F de cubos, tal que $m(E \triangle F) \leq \epsilon$. (Onde $\triangle$ denota a diferença simétrica.)
(2) *(Teorema de Lusin).* Seja f uma função mensurável com domínio E de medida finita. Para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto fechado $F \subseteq E$, com $m(E \setminus F) \leq \epsilon$, tal que $f \restriction_F$ é contínua.
(3) *(Teorema de Egorov).* Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis com domínio E de medida finita. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ para quase todo $x \in E$. Então para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto fechado $F \subseteq E$, com $m(E \setminus F) \leq \epsilon$, tal que $f_n \restriction_F \to f \restriction_F$ uniformemente.

Observação 2.14. A condição de ocorrer para todo $\epsilon > 0$, comum a todos os princípios acima, é mais fraca que a condição de ocorrer em quase todo ponto.

3. A Integral de Lebesgue

> "Devo pagar uma dada quantia, que tenho no bolso. Retiro as notas e moedas do meu bolso e as entrego ao credor na ordem em que as encontro até alcançar a soma total. Esta é a integral de Riemann. Posso, entretanto, proceder de forma diferente. Após retirar todo o dinheiro do bolso, ordeno as notas e moedas de acordo com valores idênticos, e pago os montes um após o outro ao credor. Esta é minha integral."
>
> *Lebesgue, em uma carta a Paul Montel* [3]

Definimos a seguir uma forma de integrar as funções simples. Estendemos essa definição para incluir as funções mensuráveis, obtendo assim a integral de Lebesgue. Mostramos que de fato a integral de Lebesgue generaliza a integral de Riemann, e motivamos o uso dessa nova integral com propriedades do espaço L^1 das funções Lebesgue integráveis, teoremas de convergência e uma forma de "diferenciar" funções não diferenciáveis no sentido usual.

Seja $\varphi = \sum_{k=0}^{N} a_k \chi_{E_k}$ uma função simples. Definimos a integral de Lebesgue de φ como $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dm(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k m(\chi_{E_k})$. O valor desta soma independe da escolha de coeficientes a_k e conjuntos E_k, dada uma mesma φ. Não é difícil mostrar que a integral de Lebesgue, definida nas funções simples, satisfaz quatro importantes propriedades (*) também satisfeitas pela integral de Riemann: linearidade, aditividade, monotonicidade e a desigualdade triangular.

Consideramos agora uma função f mensurável, limitada e com suporte E de medida finita. Usando o teorema de Egorov e a proposição 2.12, obtemos que existe uma sequência de funções simples φ_n, limitadas por $M > 0$ e com suporte E, tal que o limite $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$ existe. Este limite é a integral de Lebesgue de f, e ela ainda satisfaz as propriedades (*).

Em uma nova extensão do domínio de definição da integral de Lebesgue, voltamos a atenção para as funções f mensuráveis, não negativas e a valores reais estendidos (incluindo o ponto $+\infty$). Definimos a integral (estendida) de Lebesgue de f como $\int f = \sup_g \int g$ em que g é mensurável, limitada, possui suporte de medida finita e seu valor em nenhum ponto ultrapassa o de f. Se o supremo é finito, dizemos que a função f é integrável. Nessa etapa na nossa sucessão de definições da integral, portanto, aparecem as primeiras funções mensuráveis mas não integráveis: funções f para as quais o supremo é infinito. As propriedades (*) permanecem válidas.

A definição mais geral que daremos à integral de Lebesgue se aplica às funções f em $\mathbb{R}^d$, mensuráveis e a valores reais. A função f é integrável se a função não negativa $|f|$ é integrável. Nesse caso, definimos as partes positivas e negativas de

[3] Transcrito de [3], tradução própria.

f como, respectivamente, $f^+(x) = max(f(x), 0)$ e $f^-(x) = max(-f(x), 0)$, de forma que $f^+ - f^- = f$. Como ambas as partes positivas e negativas de f são limitadas por $|f|$, são integráveis. Logo, podemos definir a integral de f como $\int f = \int f^+ - \int f^-$. As propriedades (*) ainda valem nesse caso geral, além de diversas outras propriedades da integral de Riemann, como a invariância sobre translações e a comutatividade do produto de convolução. Como esperávamos, é também possível conferir que quando uma função é tanto Riemann quanto Lebesgue integrável, os valores de ambas as integrais são iguais.

Um motivo prático para optar pelo uso da integral de Lebesgue é a possibilidade de comutar a ordem de um limite com uma integral. Enunciamos dois dos principais teoremas que fornecem condições para que isso possa ocorrer.

Teorema 3.1 (Convergência monótona)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis não negativas, com* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *em quase todo ponto e* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *em quase todo ponto. Então* $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

Teorema 3.2 (Convergência dominada)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis, com* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *em quase todo ponto e* $|f_n(x)| \leq g(x)$*, onde* g *é integrável. Então* $\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| = 0$ *logo* $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

Para usarmos as ferramentas da análise mais naturalmente na continuidade dos nossos estudos sobre as funções integráveis, espera-se que essa classe de funções forme um espaço vetorial. De fato forma, e diferentemente do espaço vetorial formado pelas funções Riemann integráveis, é completo.

Denotamos como $L^1(\mathbb{R}^d)$ o espaço das funções integráveis em $\mathbb{R}^d$, com norma $\|f\|_{L^1} = \int |f|$. O teorema abaixo tem conclusão válida para qualquer espaço $L^p,\ p \geq 1$.

Teorema 3.3 (Riesz-Fischer)**.** $L^1(\mathbb{R}^d)$ *é um espaço de Banach.*

Várias famílias de funções de interesse prático são densas em $L^1(\mathbb{R}^d)$, incluindo as funções simples, as funções escada e as funções contínuas de suporte compacto. Esse fato, considerando o teorema de Riesz-Fischer, garante não só que cada elemento de $L^1(\mathbb{R}^d)$ é o limite de uma sequência de Cauchy de funções mais simples, como também que cada limite de uma sequência de Cauchy de funções mais simples pertence a $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Desenvolvida uma teoria de integração mais geral que a teoria da integração de Riemann, é natural desejar generalizar o teorema fundamental do cálculo. Um resultado análogo (na verdade, um par de resultados) de fato existe na teoria da integração de Lebesgue, porém apenas enunciar todos os conceitos necessários para construir sua demonstração esgotaria qualquer cota razoável de espaço. Entre os conceitos, funções maximais, desigualdades de tipo fraco, coberturas de Vitali, integrabilidade local, ponto de densidade de Lebesgue, conjunto de Lebesgue, excentricidade limitada, aproximações à identidade, variação limitada e retificabilidade.

Essencialmente, a seguinte proposição mostra quando uma função mensurável f é a derivada de sua integral, e a próxima mostra quando uma função mensurável F é a integral de sua derivada (este último resultado é enunciado apenas para o caso em que o domínio de F é a reta).

Proposição 3.4. *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, ou seja, se f é localmente integrável, então, para quase todo x, $\lim_{m(B)\to 0,\ x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B f = f(x)$, em que B denota uma bola aberta.*

Proposição 3.5. *Se F é absolutamente contínua em $[a, b]$, então F' existe em quase todo ponto e é integrável. Temos ainda a igualdade $F(x) - F(a) = \int_a^x F'$, $\forall x : a \leq x \leq b$.*

4. Análise Funcional

> "Espaços com produto interno são espaços normados especiais, como veremos. Historicamente, são mais antigos que os espaços normados gerais. Sua teoria é mais rica e retém várias características do espaço euclidiano, um conceito central sendo a ortogonalidade."
>
> *Kreyszig, 1989* [4]

Estudos em análise funcional se dedicam às propriedades de espaços vetoriais, principalmente os de dimensão infinita, e aos operadores sobre estes, principalmente os lineares. Desde seu intenso desenvolvimento no século XX por figuras eminentes como Banach e Hadamard, a Análise Funcional se tornou um contexto recorrente para o estudo das equações diferenciais parciais - tanto por oferecer ferramentas que facilitam o trabalho sobre espaços de funções, quanto por generalizar técnicas já existentes na teoria das EDP's, como a Análise de Fourier.

Definimos um espaço vetorial como um conjunto X de vetores, um corpo K de escalares e duas operações: a soma entre vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar. É útil também ter uma noção de "tamanho" dos vetores. Para isto, acoplamos uma norma a um espaço vetorial, ou seja, definimos uma operação $\|x\| : X \to \mathbb{R}$ sobre um vetor que retorna um valor escalar não negativo, interpretado como a magnitude desse vetor. Com a norma da diferença entre dois vetores, obtemos uma métrica, possibilitando a identificação das sequências de Cauchy no espaço. Se todas essas convergem, o espaço vetorial normado é dito completo, ou de Banach. Ademais, se a norma do espaço é induzida por um produto interno

[4]Transcrito de [2], tradução própria.

(no sentido $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$), o espaço completo é um espaço de Hilbert. Espaços de Hilbert são conducentes à aplicação de técnicas da Análise, pois muitas destas dependem da existência de limites de sequências.

Um conceito fundamental para o desenvolvimento deste trabalho é o de conjuntos de vetores que geram um espaço. Um conjunto B "gerar" um espaço X pode significar que todo vetor de X é uma combinação linear (única) dos vetores de B (nesse caso, B é uma base de Hamel para X). Existe, entretanto, outra definição para o conceito de base, que será mais cômoda por abstrair as séries de Fourier naturalmente. Um subconjunto $B \subseteq X$ é uma base de Schauder para X se todo vetor de X é o limite (único) de uma sequência de combinações lineares de vetores de B (X é o fecho das combinações lineares de vetores de B). Desse ponto em diante, menções a bases para espaços se referem a bases de Schauder, a menos que o contrário seja dito.

Dada uma base ortonormal M (que contém vetores unitários e dois a dois ortogonais) de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, é desejável encontrar a forma dos coeficientes α_k das combinações lineares $f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k,\ e_k \in M,\ f \in X$. Tomando o produto interno com um $e_j \in M$ em ambos os lados dessa equação, é revelada uma soma parcial da série abstrata de Fourier: $f = \sum_{k=0}^{n} \langle f,\, e_k\rangle e_k,\ e_k \in M,\ f \in X$.

Para representar todos os vetores $f \in \mathcal{H}$ do espaço para o qual M é uma base ortonormal, consideramos o limite quando $n \to \infty$ das somas acima, e estudamos algumas propriedades de convergência dessas séries.

Teorema 4.1 (Convergência da série de Fourier abstrata)**.** *Seja (e_k) uma base ortonormal para um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então*

1. *A série $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k$ converge (na norma de $\mathcal{H}$) se e somente se $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2$ converge.*
2. *Se $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k = f$, então $\alpha_k = \langle f,\, e_k\rangle$.*
3. *Para todo $f \in X$, $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f,\, e_k\rangle e_k$ converge.*

Observação 4.2. Em outras palavras, foi dada uma condição para a convergência de uma série genérica, depois dito que quando esta converge, ela é a série abstrata de Fourier, depois dito que todo vetor do espaço admite representação como série abstrata de Fourier.

Em espaços de Hilbert, se M é uma base ortonormal com $e_k \in M$, a seguite desigualdade (de Bessel) se torna uma igualdade, a identidade de Parseval. Para nossos fins, a identidade de Parseval mostra sua utilidade ao relacionar um vetor de $\mathcal{H}$ a uma soma envolvendo os coeficientes de sua série de Fourier abstrata, ajudando no estudo da convergência da série (além de possuir interessantes interpretações geométricas, e.g. é possível interpretar a identidade como uma fórmula de Pitágoras em dimensão infinita).

Proposição 4.3 (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência ortonormal do espaço vetorial com produto interno* $\mathcal{H}$. *Então* $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$, $x \in X$.

Recordamos o seguinte fato de álgebra linear: qualquer subespaço de um espaço vetorial completo de dimensão finita é completo. Em dimensão infinita, um subespaço S de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é completo se S é subespaço fechado.

Definição 4.4 (Subespaço fechado)**.** Um subespaço S de um espaço vetorial normado X é fechado se toda sequência convergente formada por termos em S converge em S.

No contexto da definição acima, para qualquer $f \in X$, existe um único elemento $g_0 \in S$ mais próximo de f que qualquer outro elemento em S. Se X é um espaço de Hilbert, afirmamos ainda que a diferença $f - g_0$ é perpendicular a S (a todo elemento de S).

Proposição 4.5 (Vetor minimizante)**.** *Seja* S *um subespaço fechado de um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$, *e* $f \in \mathcal{H}$. *Então*

(1) $\exists! g_0 \in S$ *tal que* $\|f - g_0\| = \inf_{g\in S} \|f - g\|$
(2) $f - g_0 \perp g,\ \forall g \in S$.

Denotamos por $S^\perp$ o complemento ortogonal de S, ou seja, o conjunto de todos os vetores de $\mathcal{H}$ perpendiculares a S. Uma projeção ortogonal $P_S : \mathcal{H} \to S$ é uma função que leva vetores de um espaço a um subespaço, satisfazendo as seguintes propriedades: P_S é linear; $P_S(f) = f,\ \forall f \in S$; $P_S(f) = 0,\ \forall f \in S^\perp$; e $\|P_S(f)\| \leq \|f\|,\ \forall f \in \mathcal{H}$.

Os subespaços fechados e projeções ortogonais sobre eles se relacionam com as séries de Fourier de uma forma surpreendente. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Logo podemos encontrar uma base ortonormal enumerável $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para $\mathcal{H}$. Os primeiros $N > 0$ termos de (e_k) geram um subespaço fechado $\mathcal{H}_N$ de $\mathcal{H}$. Somas parciais S_N (de N termos) da série de Fourier abstrata de um vetor $f \in \mathcal{H}$ são nada mais que projeções ortogonais ao subespaço $\mathcal{H}_N$.

A linearidade é uma propriedade fundamental de vários operadores importantes definidos em espaços de Hilbert. Como vimos, a projeção ortogonal, ferramenta necessária para estudar as séries de Fourier em sua forma abstrata, é linear. Os operadores unitários, que preservam tanto a estrutura do espaço vetorial quanto o produto interno (por isso ditos isomorfismos isométricos), são lineares por definição. Os funcionais lineares sobre um espaço, quando considerados apenas os limitados (ou equivalentemente, os contínuos), definem o espaço dual, sobre o qual definimos o conceito de convergência fraca, ou então enunciamos teoremas clássicos da análise funcional, como o teorema de representação de Riesz. Como exemplo final, os operadores compactos, quando assumidos lineares, possuem autovalores com ótimas propriedades, dadas pelo teorema espectral.

Definimos agora dois espaços vetoriais nos quais a maior parte da teoria das séries de Fourier se concentra. Há alguns motivos para isso. Um é o fato de que sequências de coeficientes de Fourier residem em um, enquanto funções com sequências de Fourier convergentes residem no outro. Além disso, ambos são espaços de Hilbert separáveis, e existe um isomorfismo natural entre eles que ainda será discutido.

Definição 4.6 (Espaço ℓ^2)**.** O espaço vetorial $(\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|)$ é definido por o conjunto de sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $\sum |a_n|^2 < \infty$. A norma de um elemento (a_n) desse espaço é definida por $\|(a_n)\| = (\sum |a_n|^2)^{1/2}$.

Definição 4.7 (Espaço L^2)**.** O espaço vetorial $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$, é definido por o conjunto de classes de equivalência de funções mensuráveis f, iguais em quase todo ponto, tais que $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \ dm < \infty$. A norma de um elemento $\tilde{f}$ desse espaço é definida por $\left\|\tilde{f}\right\| = (\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \ dm)^{1/2}$, em que f é uma função representante qualquer, escolhida da classe $\tilde{f}$.

Concluímos esta seção com a observação de que se o espaço L^2 fosse definido com a integral de Riemann, não seria de Hilbert, pois não seria sequer completo.

5. Séries de Fourier

> "(da análise de Fourier) é difícil dizer se sua qualidade únicamente original, ou seu interesse matemático transcendentemente intenso, ou sua instrutividade perenemente importante à ciência física, merece mais exalto."
>
> *Kelvin, Encyclopaedia Britannica, 1878* [5]

A motivação inicial para estudar o comportamento das séries de Fourier abstratas foi a utilidade da série de Fourier de funções periódicas na reta em resolver o problema do calor em uma barra. Esse problema foi estudado por Fourier no início do século XIX. Seu trabalho, com aplicação imediata para as ciências naturais, e intenso interesse matemático, por introduzir uma nova representação analítica de funções, motivou gerações futuras a persistirem na tarefa de tornar a teoria de Fourier mais rigorosa e geral. Hoje, o uso das ferramentas derivadas dessa única ideia é quase sinônimo com trabalhar em análise.

Voltamos a atenção para o espaço das funções contínuas e 2π-periódicas, com produto interno dado pela integral definida de funções, sobre um período. Tomando uma base ortonormal M de funções trigonométricas, aplicamos os estudos anteriores

[5] Transcrito de [1], tradução própria.

sobre séries de Fourier abstratas, de forma a interpretar $\sum \langle f, e_n \rangle e_n,\ e_n \in M$ como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt\, e^{inx}$, a série de Fourier de f.

Como os coeficientes de Fourier são dados por uma integral, é comum pedir no mínimo a integrabilidade ou continuidade de f. Não é difícil mostrar que dada uma f contínua, os coeficientes de sua série são bem definidos. Isto não implica que a série convirja. O problema de obter condições para a convergência da série de Fourier de uma função é delicado. Há, entretanto, algumas noções enfraquecidas de convergência para as quais resultados nessa direção são mais acessíveis. Mencionamos duas dessas noções, após definir a principal ferramenta usada nos nossos estudos sobre convergência: as aproximações à identidade.

Definição 5.1 (Bom núcleo)**.** Uma família de núcleos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidos no círculo é uma família de bons núcleos se satisfaz as seguintes três propriedades.

(1) *(Soma para um).* $\forall n \geq 1 : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n dm = 1$
(2) *(Somas se concentram na origem).* $\forall \delta > 0 : \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n|\, dm \to 0$
(3) *(Evita problemas com frequências altas; desnecessário se usamos a integral de Lebesgue).* $\exists M > 0$ tal que $\forall n \geq 1 : \int_{-\pi}^{\pi} |K_n|\, dm \leq M$

Proposição 5.2 (Aproximação à identidade)**.** *Seja f uma função no círculo contínua e $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de bons núcleos. Então $f * K_n \to f$ uniformemente.*

Observação 5.3. Se f é apenas integrável, ainda vale a convergência pontual da aproximação à identidade $(f * K_n)$, nos pontos em que f é contínua.

Definimos agora as duas noções alternativas de convergência de séries. Em seguida, mostramos uma condição que garante esses tipos de convergência.

Definição 5.4 (Convergência a Cesàro)**.** Definimos o núcleo de Dirichlet como $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$. Este não é um bom núcleo, mas o núcleo de suas médias é. O chamamos de núcleo de Fejér: $F_N(x) = (D_0(x) + D_{-1}(x) + D_1(x) + \cdots + D_{1-N}(x) + D_{N-1}(x))/N$. Definimos a enésima média de Cesàro da série de Fourier de f como $\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x)$. A série de Fourier de f converge a Cesàro (para f) se $\sigma_N(f) \to f$.

Definição 5.5 (Convergência a Abel)**.** Definimos o bom núcleo de Poisson como $P_r(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx}$. A enésima média de Abel da série de Fourier de f é $A_r(f)(x) = (f * P_r)(x)$. A série de Fourier de f converge a Abel (para f) se $A_r(f) \to f$.

O fato de que as "somas parciais" $\sigma_N(f)(x)$ e $A_r(f)(x)$ são, respectivamente, as aproximações à identidade $(f * F_N)(x)$ e $(f * P_r)(x)$, leva ao resultado:

Proposição 5.6 (Convergência a Cesàro e Abel)**.** *Se a função f no círculo é contínua, então a série de Fourier de f converge para f uniformemente a Cesàro e a Abel.*

Trazemos nosso foco de volta às definições mais corriqueiras de convergência de série. Em particular, enunciamos dois dos principais resultados que se são obtidos em um estudo introdutório sobre a convergência das séries de Fourier, um que garante a convergência pontual e outro que garante a convergência uniforme.

Teorema 5.7 (Fourier)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente derivável e de período $2L$. Então a série de Fourier de f converge em cada ponto x para o valor $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ (a média aritmética dos limites laterais de f no ponto x).*

Teorema 5.8 (Convergência uniforme das séries de Fourier)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, seccionalmente derivável, tal que a derivada primeira, nos pontos em que existir, é integrável e absolutamente integrável (apenas integrável basta se considerar a integral de Lebesgue). Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f.*

Os teoremas acima restringem a classe de funções para que propriedades sobre convergência passem a existir. Em ambos os casos, a classe de funções obtida não forma imediatamente um espaço vetorial com boas propriedades (em especial a completude). Seria útil trabalhar em um espaço com boa estrutura, mas que também assegurasse a convergência das séries de Fourier em um sentido suficientemente forte. Esse espaço existe, e é o L^2: as funções de quadrado Lebesgue integráveis. A noção de convergência assegurada é a convergência na norma.

Teorema 5.9 (Convergência em L^2)**.** *Seja f uma função 2π-periódica de quadrado Lebesgue integrável. Então $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_N(f)|^2 dm = 0$, onde $S_N(f)$ denota uma soma parcial da série de Fourier de f.*

Demonstração. Tomamos um espaço de funções (classes de equivalência de funções quase idênticas) de quadrado integrável, definidas em $[-\pi, \pi]$, com produto interno $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dm(x)$ e norma definida por $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$. Vamos mostrar que $\|f - S_N(f)\| \to 0$ quando $N \to \infty$.

Notamos primeiramente que a família de funções $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é ortonormal, em que $e_n(x) = e^{inx}$. Isto é, $\langle e_n, e_m\rangle = 1$, se $n = m$, e $\langle e_n, e_m\rangle = 0$, se $n \neq m$.

Escrevemos os coeficientes de Fourier de uma função f como $a_n = \langle f, e_n\rangle$. Como (e_n) é uma família ortonormal, a projeção $\sum_{|n|\leq N} a_n e_n$, de f no subespaço fechado gerado por $(e_n)_{|n|\leq N}$ é ortogonal a $f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n$.

Por uma aplicação do teorema de Pitágoras, $\|f\|^2 = \left\|f - \sum_{|n|\leq N} a_n e_n\right\|^2 + \left\|\sum_{|n|\leq N} a_n e_n\right\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{|n|\leq N} |a_n|^2$. Com a observação de que a série $\sum |a_n|^2$ converge para $\|f\|^2$ (identidade de Parseval), encerramos a demonstração. □

Dados os resultados 5.7 e 5.8, é natural perguntar por que a continuidade não é suficiente para garantir a convergência pontual da série de Fourier, já que todos os coeficientes são bem definidos nesse caso e, além disso, o lema de Riemann-Lebesgue afirma que esses coeficientes decaem para zero. A seguir, uma demonstração não construtiva de que existe uma função contínua com série de Fourier divergente.

Usaremos um caso especial do princípio da limitação uniforme: se X é um espaço de Banach e $\Lambda \in X^*$, onde X^* denota o espaço dual (topológico) de X, então $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|\lambda\| = \infty \implies \exists x \in X : \sup_{\lambda\in\Lambda} |\lambda x| = \infty$.

Definimos $\lambda_n \in C([-\pi,\pi])^*$ (onde $C([-\pi,\pi])$ é o espaço das funções contínuas em $[-\pi,\pi]$), de forma que $\lambda_n f = S_N(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f D_n$. A função $D_n(x) = \sin((n+1/2)x)/\sin(x/2)$ é o núcleo de Dirichlet. Por uma manipulação da integral $\int_0^\pi |D_n|$, obtemos a desigualdade $\int_0^\pi |D_n| \geq \int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin(x)|/x$, mostrando que $\|D_n\|_{L^1} \to \infty$.

Pela desigualdade de Hölder, $\|D_n\|_{L^1} \leq \|\mathrm{Id}\|_{L^1} \|D_n\|_\infty = m([-\pi,\pi]) \|D_n\|_\infty$. Por isso, segue do teorema de representação de Riesz que $\|\lambda_n\|_{C([-\pi,\pi])^*} = \|D_n\|_\infty \geq \|D_n\|_{L^1}/m([-\pi,\pi])$. Logo $\|\lambda_n\|_{C([-\pi,\pi])^*} \to \infty$, então pelo princípio da limitação uniforme, existe f contínua tal que $\lambda_n f$ não é limitada, ou seja, a série de Fourier de f diverge em algum ponto do domínio.

Exibir um exemplo desse fenômeno é uma tarefa mais trabalhosa. Uma forma de fazer isso é explorar o comportamento da série de Fourier quando quebramos sua simetria. Uma ilustração dessa técnica está na construção da série de Fourier de uma função não integrável, a partir da quebra da simetria da série de Fourier de uma função integrável. Por exemplo, tomamos a série de Fourier de uma função f dente de serra, integrável: $f \sim \sum_{n\neq 0} \frac{e^{inx}}{n}$. É possível mostrar que $f \sim \sum_{n<0} \frac{e^{inx}}{n}$ não é a série de Fourier de uma função integrável.

Um operador linear rico em propriedades relacionadas aos tópicos desenvolvidos é a transformada de Fourier ($\mathcal{F}$), definida como $\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$.

Este operador define um automorfismo no espaço L^2 (pela fórmula de Plancherel) e no espaço de Schwartz ($\mathcal{S}$, das funções cujas derivadas de qualquer ordem decaem rapidamente). Além disso, essa transformada possui as propriedades práticas de traduzir derivadas para polinômios e convoluções para produtos (juntamente a propriedades análogas de sua inversa): $\mathcal{F}[\frac{\partial^p f}{\partial x^p}] = (i\xi)^p \mathcal{F}[f]$ e $\mathcal{F}[(-ix)^p f(x)] = \frac{\partial^p \mathcal{F}[f]}{\partial \xi^p}$; $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$ e $\mathcal{F}[fg] = (\sqrt{2\pi})^{-1}\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[f]$. Como um último comentário sobre isomorfismos entre espaços de Hilbert, o isomorfismo entre

L^2 e ℓ^2 pode ser demonstrado definindo um operador que leva funções em L^2 a sequências de seus coeficientes de Fourier, em ℓ^2.

6. Teoria da Medida

> "O que imediatamente se sugere, então, é que essas propriedades características sejam tratadas como o objeto principal de investigação, definindo e lidando com objetos abstratos que não precisam satisfazer quaisquer outras condições além daquelas necessárias para que a teoria seja desenvolvida. (...) É nossa intenção tratar das teorias de medida e de integração por meio do método axiomático aqui descrito."
>
> *Carathéodory, 1918* [6]

Traçamos novamente o desenvolvimento da teoria da medida, dessa vez descartando a restrição de que o conjunto a qual pertencem os conjuntos mensuráveis é $\mathbb{R}^d$. A teoria da integração sobre os espaços de medida (abstratos) se desenvolve de maneira análoga ao caso $\mathbb{R}^d$, possibilitando a integração em uma diversidade de espaços.

Primeiramente introduzimos o objeto principal de estudo, o espaço de medida.

Definição 6.1 (Espaço de medida)**.** Um espaço de medida é uma tripla $(X, \mathcal{M}, \mu)$, formada por um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ e uma medida μ. Em que:

Uma σ-álgebra é uma coleção não vazia de subconjuntos de X, fechada sob complemento, união enumerável e intersecção enumerável.

Uma medida $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tem as propriedades $\mu(\emptyset) = 0$ (nulidade do vazio) e $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ (aditividade enumerável), para $E_n \in \mathcal{M}$.

Observação 6.2. Uma condição comum de se pedir de uma medida é a σ-finitude, a garantia de que X é a união enumerável de conjuntos de medida finita.

Na prática é desejável possuirmos resultados que garantem a existência de uma medida, dada apenas a existência de funções mais fáceis de se construir. Definimos dois tipos de funções com menos imposições em suas definições, das quais é possível extrair uma medida. Observamos nesse momento que apesar de ser possível definir uma medida sobre qualquer σ-álgebra (e.g. a medida de contagem, que atribui a um subconjunto finito sua cardinalidade e, a um subconjunto infinito, o símbolo infinito), frequentemente precisamos de uma medida suficientemente informativa.

Definição 6.3 (Medida exterior)**.** Uma medida exterior μ_* sobre X é uma função do conjunto das partes de X até $[0, \infty]$, que satisfaz as três propriedades:

[6] Transcrito de [5], tradução própria.

(1) *(Nulidade do vazio).* $\mu_*(\emptyset) = 0$
(2) *(Monotonicidade).* $E_1 \subseteq E_2 \implies \mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$
(3) *(Sub-aditividade enumerável).* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \implies \mu_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_*(E_j)$.

Definição 6.4 (Pré-medida)**.** Definimos uma "álgebra" (ou anel) $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X como uma coleção de subconjuntos, fechada sob complemento, união finita e intersecção finita.

Uma pré-medida $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tem as propriedades $\mu_0(\emptyset) = 0$ (nulidade do vazio) e $\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n)$ (aditividade enumerável), para $E_n \in \mathcal{M}$.

Dada uma medida exterior, é possível restringir seu domínio de forma a obter uma medida especial: a medida de Carathéodory. Isso é uma analogia direta aos passos tomados para definir a medida e Lebesgue, em que restringimos uma medida exterior sobre $\mathbb{R}^d$, dada por coberturas por cubos, aos conjuntos aproximáveis por abertos. De fato, é possível mostrar que a medida de Lebesgue é um caso particular da medida de Carathéodory.

Proposição 6.5 (Restrição da medida exterior)**.** *Um subconjunto $E \subseteq X$ é Carathéodory mensurável (ou simplesmente mensurável) se satisfaz a seguinte condição de separação: $\forall A \in X,\ \mu_*(A) = \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A)$, onde E^c denota o complemento de E com relação a X.*

A medida exterior μ_*, restrita aos conjuntos mensuráveis, é uma medida.

Há também um resultado no sentido oposto, que permite estender qualquer pré-medida de forma a obter uma medida (não necessariamente a de Carathéodory).

Proposição 6.6 (Extensão de Carathéodory)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de X. Supomos também que μ_0 é uma pré-medida sobre $\mathcal{A}$ e que $\mathcal{M}$ é a σ-álgebra gerada por (a menor que contém) $\mathcal{A}$. Então existe uma medida μ sobre $\mathcal{M}$ que estende μ_0. Se μ é σ-finita, é única.*

No contexto de um espaço métrico, há um tipo especial de medida exterior que quando restrita aos conjuntos de Borel (a menor σ-algebra que contém os conjuntos abertos), é uma medida. Mais surpreendentemente, é uma restrição da medida de Carathéodory. Esse tipo especial de medida exterior é a medida exterior métrica, que deve ser aditiva para conjuntos separados positivamente:

Definição 6.7 (Medida exterior métrica)**.** Uma medida exterior μ_* é métrica se $\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B)$, quando $d(A, B) > 0$.

Observação 6.8. Chamamos qualquer medida sobre os conjuntos de Borel de "medida de Borel".

Observação 6.9. A medida exterior que usamos na definição da medida de Lebesgue é uma medida exterior métrica.

Proposição 6.10 (Restrição da medida exterior métrica)**.** *Seja μ_* uma medida exterior métrica sobre um espaço métrico X. Então os conjuntos de Borel $\mathcal{B}_X$ são mensuráveis, logo $\mu_* \restriction_{\mathcal{B}_X}$ é uma medida.*

Se a restrição de uma medida exterior métrica aos conjuntos de Borel é nada mais que a medida de Carathéodory, com domínio menos abrangente, pergunta-se o motivo de trabalhar apenas nos conjuntos de Borel. Uma resposta é encontrada na seguinte proposição, que fornece condições para que uma medida de Borel satisfaça uma boa propriedade de regularidade.

Proposição 6.11 (Regularidade da medida de Borel)**.** *Supomos que a medida de Borel μ sobre o espaço métrico X seja localmente finita, ou seja, finita em todas as bolas de raio finito. Então para qualquer conjunto de Borel E e qualquer $\epsilon > 0$, existe um U aberto e um F fechado tais que $F \subseteq E \subseteq U$, $\mu(U \setminus E) < \epsilon$ e $\mu(E \setminus F) < \epsilon$.*

Apresentamos agora um exemplo que testemunha o fato de que os conjuntos de Borel são um subconjunto dos conjuntos Carathéodory mensuráveis.

Seja $\phi : [0,1] \to [0,1]$ a função de Cantor (também conhecida como a "escadaria do diabo"). Definimos $\psi : [0,1] \to [0,2]$ como $\psi(x) = x + \phi(x)$. É uma propriedade conhecida da função de Cantor que $m(\phi(\mathcal{C})) > 0$, apesar de que $m(\mathcal{C}) = 0$ ($\mathcal{C}$ denota o conjunto de Cantor). Logo $m(\psi(\mathcal{C})) > 0$, então existe um subconjunto $S \subseteq \psi(\mathcal{C})$ não mensurável. A pré-imagem $\psi^{-1}(S)$, entretanto, por ser um subconjunto de $\mathcal{C}$, é mensurável (de medida nula). Usamos por fim o resultado: se uma função mensurável ψ é contínua e bijetora, mapeia conjuntos de Borel a conjuntos de Borel. Por esse fato, e notando que S não é mensurável portanto não é de Borel, $\psi^{-1}(S)$ não é de Borel. Mostramos assim a existência de um subconjunto mensurável da reta que não é de Borel.

Finalmente, enunciamos um teorema clássico da teoria da medida, que garante a existência de uma decomposição de qualquer medida em uma soma de duas medidas com propriedades interessantes. Antes disso, passamos por algumas definições necessárias.

Definição 6.12 (Singularidade mútua)**.** As medidas μ e υ são mutuamente singulares (escrevemos $\mu \perp \upsilon$) se existem conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{M}$ tais que para todo $E \in \mathcal{M}$, $\upsilon(E) = \upsilon(A \cap E)$ e $\mu(E) = \mu(B \cap E)$.

Definição 6.13 (Continuidade absoluta)**.** A medida υ é absolutamente contínua com relação a μ (escrevemos $\upsilon \ll \mu$) se $\mu(E) = 0,\ E \in \mathcal{M} \implies \upsilon(E) = 0$.

Observação 6.14. Uma definição talvez mais conhecida para a continuidade absoluta de υ com relação a μ é dada pela condição $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ \mu(E) < \delta \implies |\upsilon(E)| <$

ϵ. Esta condição é em geral mais forte que a primeira fornecida. São equivalentes quando $|\upsilon|$ é uma medida finita.

Observação 6.15. Intuitivamente, duas medidas são mutuamente singulares se medem regiões disjuntas, e são mútuamente absolutamente contínuas se medem regiões aninhadas.

Teorema 6.16 (Radon-Nikodym). *Seja μ uma medida σ-finita e υ uma medida σ-finita de imagem estendida (aos reais, incluindo valores negativos), ambas sobre a σ-álgebra $\mathcal{M}$. Então existe uma escolha única de medidas de imagem estendida υ_a e υ_s sobre $\mathcal{M}$, tal que $\upsilon_a \ll \mu$, $\upsilon_s \perp \mu$ e $\upsilon = \upsilon_a + \upsilon_s$. Além disso, $\upsilon_a(E) = \int_E f d\mu$, para alguma função μ-integrável (no sentido estendido, permitindo integrais de valor infinito).*

7. Metodologia

A execução do trabalho se deu sobretudo com a pesquisa bibliográfica e resolução de exercícios por parte do aluno, junto à implementação de críticas e sugestões do orientador. O cronograma de estudos inicialmente proposto se desenvolveu sem entraves.

Referências

[1] D.G. Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 1977.

[2] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989.

[3] Reinhard Siegmund-Schultze. *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton University Press, 2008.

[4] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003.

[5] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2005.

[6] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Functional Analysis: An Introduction to Further Topics in Analysis*. Princeton University Press, 2011.

[7] Terence Tao. *An Introduction to Measure Theory*. AMS, 2011.