EXERCÍCIOS DE TOPOLOGIA

LUCA MACIEL ALEXANDER

RESUMO

Alguns exercícios feitos para a disciplina de Topologia, professor Aurichi, 2022.

EXERCÍCIO 1

Proposição 0.1. *Seja (X, τ) regular e sem pontos isolados. Então X admite uma base $\mathcal{B}$ tal que $\forall D \subseteq X$ denso e $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $(A \cap D) \setminus B$ é vazio ou infinito.*

Vamos mostrar que a base $\mathcal{B} = \{Int(\overline{V}) : V \in \tau\}$ satisfaz a propriedade desejada. Primeiramente enunciamos um fato que será útil:

Lema 0.2. *Seja (X, τ) regular e sem pontos isolados. Seja $D \subseteq X$ denso. Se $V \in \tau$ não é vazio, então $V \cap D$ é infinito.*

Demonstração. Seja $V \in \tau$ um aberto não vazio. Como D é denso, V contém ao menos um elemento d de D. Suponhamos por fim de contradição que $V \cap D$ é finito com cardinalidade $N > 0$.

Observamos que $(V \cap D) \setminus d$ é fechado, pois é uma união finita de conjuntos unitários, que são fechados pelo axioma T_1. Logo, o axioma T_3 garante a existência de abertos disjuntos V_1 e V_2, com $d \in V_1$ e $(V \cap D) \setminus d \in V_2$.

Definimos o aberto $V_3 = V \cap V_1$, e notamos que V_3 contém d e não é unitário, pois X não possui pontos isolados. Tomamos então um ponto $p \neq d, p \in V_3$, e usamos outra vez o axioma T_1 para encontrar um aberto V_4 que contém p, mas não contém d. Por fim notamos que o aberto $V_4 \cap V_3$ está em V e contém ao menos um elemento q do denso D, distinto de d, e dos demais elementos de $V \cap D$, um absurdo pois assumimos que $V \cap D$ tem N elementos. Logo $V \cap D$ é infinito. □

Agora conferimos que $\mathcal{B}$ é uma base.

Proposição 0.3. *Seja (X, τ) regular. Então $\mathcal{B} = \{Int(\overline{V}) : V \in \tau\}$ é uma base para (X, τ).*

Demonstração. Seja $A \in \tau$ não vazio. Vamos mostrar que existe um subconjunto $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = A$.

Tomamos um ponto arbitrário $x \in A$. Como X é T_3, existem V e W abertos, com $x \in V$ e $A^c \in W$. Definimos $B_x = Int(\overline{V})$ para que $B_x \in \mathcal{B}$.

Notamos que $x \in B_x$, pois $x \in V$ e V é um aberto contido em $\overline{V}$ (vide definição de interior). Notamos também que $B_x \subseteq A$, pois $B_x = Int(\overline{V}) \subseteq \overline{V} \subseteq W^c \subseteq A$, em que $\overline{V} \subseteq W^c$ pois W^c é um fechado que contém V (vide definição de fecho).

Logo, podemos tomar $\mathcal{B}' = \{B_x : x \in A\}$. □

Por fim, observamos que se $A \setminus B$ é vazio, então $(A \cap D) \setminus B$ é vazio. Logo é suficiente mostrar que quando $A \setminus B$ não é vazio, $A \setminus B$ contém um aberto $V \in \tau$ não vazio, portanto $V \cap D \subseteq (A \setminus B) \cap D = (A \cap D) \setminus B$ é infinito pelo lema 0.2. Isto é feito na proposição derradeira:

Proposição 0.4. *Sejam $A, B \in \mathcal{B}$. Se $A \setminus B$ não é vazio, então existe um aberto não vazio U em $A \setminus B$.*

Demonstração. Suponhamos que $A \setminus B \neq \emptyset$. Como $B \in \mathcal{B}$, $B = Int(\overline{V}), V \in \tau$.

Primeiramente mostramos por contradição que se $x \in A \setminus B$ então $x \notin Int(\overline{B})$. Suponhamos portanto que $x \in Int(\overline{B})$. Então existe um aberto W tal que $x \in W \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{V}$ (em que $\overline{B} \subseteq \overline{V}$ pois $\overline{V}$ é por definição um fechado que contém B) o que é o mesmo que dizer $x \in Int(\overline{V}) = B$, que contradiz $x \in A \setminus B$.

Como $x \notin Int(\overline{B})$, todo aberto que contém x contém um ponto fora de $\overline{B}$. Em particular A contém x, logo $A \setminus \overline{B}$ não é vazio. Além disso, $A \setminus \overline{B}$ é a diferença entre um aberto e um fechado, logo é aberto, e encontramos o procurado $U = A \setminus \overline{B}$. □

Exercício 2

Proposição 0.5. *Seja (X, d) um espaço métrico não limitado. Então dadas duas funções $f : X \to [0, 1]$ e $g : X \to [0, 1]$, existe uma função contínua $h : X \to [0, 1]$, tal que $\{x \in X : h(x) = f(x)\}$ e $\{x \in X : h(x) = g(x)\}$ são ambos não limitados.*

Vamos apontar dois conjuntos F e G, disjuntos e não limitados, com $F \cup G$ fechado, e depois definir a função contínua $\tilde{h} : F \cup G \to [0, 1]$,

$$\tilde{h} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ g(x) & \text{se } x \in G. \end{cases}$$

Como todo espaço métrico é normal, o Teorema de Tietze garante que existe uma extensão contínua de $\tilde{h}$ para o domínio X, e podemos notar que essa extensão é a função h desejada.

Definimos F e G indutivamente:

(1) Fixamos um ponto arbitrário $x_1 \in X$ (a existência de x_1 segue de X ser não limitado, portanto não vazio).
(2) Fixamos um ponto arbitrário $x_2 \in X$ com $2R_1 + 1 \leq d(x_2, x_1)$, onde R_1 satisfaz $\{x_1\} \subseteq B_{R_1}(x_1)$ (a existência de x_2 segue de X não ser limitado, então uma bola de raio $2R_1 + 1$ centrada em x_1 não contém todo o conjunto X).
(3) Fixamos um ponto arbitrário $x_3 \in X$ com $2R_2 + 1 \leq d(x_3, x_2)$, onde $\{x_1, x_2\} \subseteq B_{R_2}(x_2)$ (a existência de x_3 segue de X não ser limitado, então uma bola de raio $2R_2 + 1$ centrada em x_3 não contém todo o conjunto X).

Enumeramos os elementos $x_n, n \in \mathbb{N}$ desta forma, e dizemos que $x_n \in F$ se n é ímpar e $x_n \in G$ se n é par. O seguinte lema fornece três corolários que encerram a demonstração.

Lema 0.6. *O conjunto $F \cup G$ é discreto.*

Demonstração. É suficiente mostrar que dado $x_n \in F \cup G$, $B_1(x_n) \cap \{x_k : k < n\} = \emptyset$.

Tomamos $y \in B_1(x_n)$. Pela construção de $F \cup G$, $2R_{n-1} + 1 \leq d(x_n, x_{n-1})$, e pela definição de bola, $d(x_n, y) < 1$. Temos então a desigualdade triangular:

$$d(x_n, x_{n-1}) - d(x_n, y) \leq d(x_{n-1}, y) \implies 2R_{n-1} + 1 - 1 < d(x_{n-1}, y) \implies 2R_{n-1} < d(x_{n-1}, y)$$

mas $\{x_k : k < n\} \subseteq B_{R_{n-1}}(x_{n-1})$, logo $y \notin \{x_k : k < n\}$. □

Corolário 0.7. *O conjunto $F \cup G$ é fechado.*

Demonstração. Basta lembrar que conjuntos fechados em espaços métricos são os conjuntos que contém seus pontos de acumulação, uma condição que conjuntos uniformemente discretos satisfazem por vacuidade. □

Corolário 0.8. *Os conjuntos F e G são disjuntos.*

Demonstração. Segue diretamente de $F \cup G$ ser um conjunto discreto. □

Corolário 0.9. *Os conjuntos F e G não são limitados.*

Demonstração. Um conjunto não vazio A é limitado se possui diâmetro, que definimos como $Diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$. De $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq B_{R_n}(x_n)$, temos $Diam\{x_1, \ldots, x_n\} \leq 2R_n$. De $2R_n + 1 \leq d(x_n, x_{n+1})$, temos $2R_n + 1 \leq Diam\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Logo,

$$\begin{aligned} Diam\{x_1, \ldots, x_n\} \leq 2R_n \leq 2R_n + 1 \leq Diam\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \\ \leq 2R_{n+1} \leq 2R_{n+1} + 1 \leq Diam\{x_1, \ldots, x_{n+2}\}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ou seja, nem F nem G possuem diâmetro. □

Observamos por fim que a função $\tilde{h}$ definida acima é contínua como queríamos, já que seu domínio é discreto.

Exercício 3

Proposição 0.10. *Seja $X = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \mid f$ é função$\}$. Considere X com a topologia produto (i.e. $X = \prod_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R}$). Então $\forall f \in X$ $\exists (\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\tilde{f}_n \in X$, $\tilde{f}_n \longrightarrow f$ e $\tilde{f}_n$ é contínua e ilimitada.*

Seja $f \in X$ uma função qualquer. Vamos exibir uma sequência de funções $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com as propriedades desejadas.

Definimos os conjuntos Q_n e $Q_n^{'}$ como

- $Q_n = \{\frac{l}{m} : m \leq n,\ l \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}\}$
- $Q_n^{'} = \{q \in \mathbb{Q} : q = \frac{a+b}{2},\ a, b \in Q_n$ t.q. $a < b$ e $\nexists c \in Q_n$ com $a < c < b\}$.

A partir desses conjuntos, definimos a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : Q_n \cup Q_n^{'} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in Q_n \\ x & \text{se } x \in Q_n^{'}. \end{cases}$$

Em seguida, por uma aplicação do Teorema de Tietze, estendemos o domínio de cada f_n para $\mathbb{Q}$. Conferimos as hipóteses do teorema:

(1) $\mathbb{Q}$ satisfaz T_4;
(2) $Q_n \cup Q_n^{'}$ é fechado, pois seu complemento é uma união de intervalos abertos da forma $(a,b) \cap \mathbb{Q}$, $a, b \in Q_n \cup Q_n^{'}$;
(3) cada f_n possui domínio discreto, portanto é contínua.

Logo, para cada f_n existe uma extensão contínua $\tilde{f}_n : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Como $\tilde{f}_n \restriction_{Q_n^{'}} = \mathrm{Id}$ e $Q_n^{'}$ é ilimitado, $\tilde{f}_n$ é ilimitada. Resta mostrar que a sequência $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f.

Definimos $g : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$,

$$g(n) = \begin{cases} \tilde{f}_n & \text{se } n \in \mathbb{N} \\ f & \text{c.c.} \end{cases}$$

Seja $\pi_q : X \to \mathbb{R}$ a projeção de X na coordenada $q \in \mathbb{Q}$ e suponha que $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ admita a topologia da sequência convergente. Então mostrar que $\tilde{f}_n \longrightarrow f$ é mostrar que g é contínua, que é mostrar que para todo $q \in \mathbb{Q}$, $\pi_q \circ g$ é contínua, que é mostrar que para todo $q \in \mathbb{Q}$, $\pi_q \circ g(n) \longrightarrow f(q)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_q"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{N} \cup \{\infty\} \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "\pi_q \circ g"'] & \end{tikzcd}$$

De fato, se fixamos um $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{l}{m}$, $l \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, notamos que $q \in Q_n$, para todo $n \geq m$. Logo $\pi_q \circ g(n) = f(q)$, para todo $n \geq m$, mostrando a convergência desejada $\pi_q \circ g(n) \longrightarrow f(q)$. $\square$

Exercício 4

Proposição 0.11. *Seja K compacto T_2 e $X \subseteq K$, com $\overline{X} = K$ e $K \setminus X = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, em que cada K_n é compacto. Então $\forall x \in X$ $\exists G$ compacto G_δ em K tal que $x \in G \subseteq X$.*

Vamos indutivamente construir uma intersecção de abertos e fechados aninhados que contêm o ponto x.

Como K é compacto T_2, é normal. Além disso, usaremos que compactos são fechados em K. Consideramos os fechados K_1 e $\{x\}$. Então existem abertos disjuntos V_1' e V_1 tal que $K_1 \subseteq V_1'$ e $\{x\} \subseteq V_1$. Como K é normal, existe um aberto U_1 tal que $x \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq V_1$.

Agora consideramos os fechados K_2 e $\{x\}$. Como anteriormente, os separamos tal que $K_2 \subseteq V_2'$ e $\{x\} \subseteq V_2$. Como K é normal, existe um aberto U_2 tal que $x \in U_2 \subseteq \overline{U_2} \subseteq U_1 \cap V_2 \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq V_1$. Simplificamos a cadeia de inclusões para $x \in U_2 \subseteq \overline{U_2} \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1}$. Continuando indefinidamente, obtemos $x \in \ldots \subseteq U_n \subseteq \overline{U_n} \subseteq \ldots \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1}$. Definimos o conjunto $G = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, observando que $x \in G$ e que G é G_δ são imediatos.

Notamos que $G \subseteq X$, pois $x \in G \implies x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \implies x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n \implies x \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n'$. Como $K \setminus X \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n'$, $x \notin K \setminus X$, logo $x \in X$.

Por fim, mostrar que G é fechado é mostrar que G é compacto. Notamos que $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$ é uma intersecção de fechados, portanto é fechado. Mostraremos que $G = \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$:

- Supomos que $x \in G = \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Então $x \in U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Fixamos um $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Se $x \in U_n$, então $x \in \overline{U_n}$. Logo, $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$.
- Supomos que $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$. Então $x \in \overline{U_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Fixamos um $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se $x \in \overline{U_n}$, então $x \in U_{n-1}$. Fixamos agora $n = 1$. Se $x \in \overline{U_1}$, como $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$, $x \in \overline{U_2}$ também, temos $x \in U_1$. Logo, $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, encerrando a demonstração. $\square$

Exercício 5

Consideramos $X = (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup E$, em que $E \subseteq \mathbb{R}^2$ é enumerável. X possui a topologia de subespaço induzida por $\mathbb{R}^2$.

Proposição 0.12. *X é desconexo.*

Demonstração. Vamos mostrar que uma cisão não trivial de X é dada pelos conjuntos abertos $A_\alpha = \{(x, y) \in X : y > \alpha\}$ e $B_\alpha = \{(x, y) \in X : y < \alpha\}$, para algum α irracional.

Supomos por fim de contradição que $A_\alpha \cup B_\alpha \neq X$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Como $A_\alpha \cup B_\alpha = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $\{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2\} \cup E \neq \emptyset$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Assim, definimos uma injeção dos irracionais ao conjunto E como $\alpha \mapsto e \in \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2\} \cap E$, cuja existência contradiz a hipótese de que E é enumerável.

$\square$

Proposição 0.13. *Dada uma reta $r \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $r \nsubseteq X$ e $r \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$, temos $X \cup r$ conexo.*

Demonstração. Mostraremos que $(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup r$ é conexo por caminhos, portanto conexo. Estabelecido isso, $X \cup r$ é conexo pois o fecho de $(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup r$ é $\mathbb{R}^2$, que contém $X \cup r$.

Para confirmar a segunda afirmação, basta notar que para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, temos $B_r(x) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Agora mostramos que $(\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup r$ é conexo por caminhos. Fixamos uma reta r que satisfaz as hipóteses da proposição. Sejam $a, b \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup r$, com $a = (x_a, y_a)$ e $b = (x_b, y_b)$. Definimos o caminho $f : [0, 1] \to (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup r$ de a até b por casos:

(1) Se $a, b \in r \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ ou se $y_a = y_b$, então $f(t) = a + t(b - a)$.
(2) Se $a \in r \setminus (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ e $b \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, então tomamos $c = r \cap \{(x, y_b) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ e observamos que o caso 1 garante a existência de um caminho entre a e c, e outro entre c e b. Definimos f como uma concatenação destes.

(3) Se $a, b \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $y_a \neq y_b$, tomamos $c = r \cap \{(x, y_a) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ e $d = r \cap \{(x, y_b) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. O caso 1 garante a existência de caminhos entre a e c, entre c e d e entre d e b. Definimos f como uma concatenação destes.

□

Exercício 6

Mostramos que a seguinte modificação do Teorema de Tietze não vale, por contraexemplo.

Proposição 0.14 (Tietze em S^1)**.** *Se (X, τ) é T_4, $F \subseteq X$ é fechado e $f : F \to S^1$ é contínua, então existe $\tilde{f} : X \to S^1$ extensão contínua de f.*

Fixamos $X = [0, 1] \times [0, 1]$ e $F = [0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1] \times \{1\}$.
Definimos $f : F \to S^1$ como

$$f(x, t) = \begin{cases} (cos(2\pi x), sin(2\pi x)) & \text{se } t = 0 \\ (1, 0) & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Observamos que X é T_4 e que F é fechado.

A função f é contínua pois suas restrições para ambas as componentes conexas do domínio são contínuas. Isto é, tanto $(cos(2\pi x), sin(2\pi x))$ quanto a função constante são contínuas.

Apesar disso, se houvesse uma extensão contínua de f, seria uma homotopia entre os laços $\gamma_1(t) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ e $\gamma_2(t) = (1, 0)$, a qual não existe, pois $\pi_1(S^1, (1, 0))$ não é trivial, e de fato γ_1 e γ_2 pertencem a classes de equivalência homotópica diferentes. □

Exercício 7

Exibiremos um exemplo que comprova o fato de que nem todo espaço de Hausdorff com denso completamente metrizável é normal. Tomamos o plano de Niemytskii Γ e $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

- D é denso, pois qualquer vizinhança de $x \in \Gamma \setminus D$ intersecta D.
- D é completamente metrizável, pois D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, que é completamente metrizável.
- Γ é conhecidamente de Hausdorff.
- Γ não é normal. Basta aplicar o lema de Jones no subconjunto $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \Gamma$, que é fechado, discreto e possui a cardinaliade do contínuo.

Exercício 8

Proposição 0.15. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas e localmente não constantes da forma $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Então $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $\exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_k \to x$ e $\forall k\ \forall n,\ f_n(x_k) \neq 0$.*

Demonstração. Fixamos f_n, $n \in \mathbb{N}$, e notamos que o conjunto $f_n^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}] \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto e denso.

(1) É aberto. Seja $x \in f_n^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$. Como $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é aberto em $\mathbb{R}$, $\exists \epsilon > 0 : 0 \notin B_\epsilon(f_n(x))$. Pela continuidade de f_n, concluímos que $\exists \delta > 0 : f_n[B_\delta(x)] \subseteq B_\epsilon(f_n(x))$, logo x está no interior de $f_n^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$.

(2) É denso. Seja $x \in \mathbb{R}^2$. Se $f_n(x) \neq 0$, não há o que mostrar. Se $f_n(x) = 0$, como f_n é localmente não constante, toda vizinhança de x contém ao menos um ponto de $f_n^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$.

$\mathbb{R}^2$ é um espaço métrico completo, logo é de Baire. Isto garante que a intersecção de abertos densos $D = \cap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$ é densa. Como $\mathbb{R}^2$ possui bases locais enumeráveis, a densidade de D implica que para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$, existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D$ que converge para x, o que é por definição da forma procurada. □

Exercício 9

Proposição 0.16. $\overline{\mathbb{N} \setminus \{0\}} \subseteq \beta\mathbb{N}$ *é homeomorfo a* $\beta\mathbb{N}$.

Proposição 0.17. $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \subseteq \beta\mathbb{R}$ *não é homeomorfo a* $\beta\mathbb{R}$.

Exercício 10

Exibiremos um exemplo que comprova o fato de que nem todo espaço de Hausdorff com aberto denso paracompacto é paracompacto. Tomamos o plano de Niemytskii Γ e $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

- D é aberto, pois $\forall d \in D \ \exists r > 0 : B_r(d) \in D$.
- D é denso, pois qualquer vizinhança de $x \in \Gamma \setminus D$ intersecta D.
- D é paracompacto, pois D é metrizável, por ser um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, que é metrizável.
- Γ é conhecidamente de Hausdorff.
- Γ é conhecidamente não normal (basta aplicar o lema de Jones no subconjunto $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \Gamma$, que é fechado, discreto e possui a cardinaliade do contínuo), portanto como também é de Hausdorff, não pode ser paracompacto.