TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E OPERADORES DIFERENCIAIS LINEARES

Aluno: Luca Maciel Alexander [1]
Orientador: Adalberto Panobianco Bergamasco

Conteúdo

1. Introdução

O descobrimento das séries de Fourier no começo do século XIX marcou o início de um período de evolução e formalização dos métodos em análise. Naturalmente, o estudo das equações diferenciais se desenvolveu concomitantemente, mostrando ser uma mina de ouro para quem dominasse as técnicas nascentes em análise.

A análise harmônica, estabelecida através de contribuições dos maiores nomes do século XX (Hardy, Hilbert, os irmãos Riesz, entre outros), é fruto direto do desenvolvimento da teoria de séries de Fourier. Da análise harmônica surgem tanto operadores importantes para o estudo de EDP's - como a transformada de Hilbert e a função maximal de Hardy-Littlewood - quanto espaços repletos de propriedades interessantes, como os espaços L^p, de Hardy H^p e o espaço BMO, para situar os estudos.

Um marco significante na pesquisa em EDP é a adoção das funções generalizadas, ou distribuições. Com o objetivo de dar sentido a operações não permitidas no sentido clássico, porém úteis no contexto de EDP, L. Schwartz definiu uma generalização da noção de função. Para ilustrar a utilidade desta teoria, a distribuição que generaliza qualquer função f, diferenciável ou não, é infinitamente diferenciável (no sentido distribucional). Os maiores conceitos da análise harmônica clássica foram

[1]Este documento será submetido como relatório final de uma iniciação científica desenvolvida no ICMC - USP, sob apoio financeiro do PUB, durante o período de 01/09/2022 a 31/08/2023.

traduzidos de forma natural para o contexto das distribuições. A transformada de Hilbert, por exemplo, ganha uma caracterização em termos da distribuição valor principal $\mathrm{pv}(\frac{1}{x})$, e a transformada de Fourier se torna uma ferramenta indispensável no estudo de uma classe de distribuições denominadas “temperadas”.

A definição da solução fundamental de uma EDP por meio das distribuções expandiu o horizonte de pesquisa em resolubilidade, generalizando a definição de solução enquanto fornecendo um meio prático de calculá-las através de uma convolução, quando existem. Nesta linguagem é enunciado o teorema de Malgrange-Ehrenpreis, por exemplo, o qual afirma que operadores diferenciais lineares a coeficientes constantes sempre possuem soluções fundamentais.

2. Resultados Preliminares

Antes de seguir para os principais conceitos desta seção, estabeleceremos superficialmente alguns fundamentos mais importantes. Vamos inicialmente nos ater ao problema da medida em $\mathbb{R}^d$. Fazemos uma tentativa de aproximar volumes de subconjuntos arbitrários utilizando coberturas por cubos fechados. Essa estratégia fornece uma forma de medir volumes, mas não satisfaz algumas propriedades desejáveis. Esse problema é remediado se restringirmos o olhar para uma coleção especial de subconjuntos, os subconjuntos Lebesgue mensuráveis. Funções mensuráveis são relacionadas aos conjuntos Lebesgue mensuráveis analogamente à forma com que as funções contínuas são relacionadas aos conjuntos abertos. Algumas propriedades envolvendo a convergência de sequências de funções mensuráveis e a aproximação de funções mensuráveis por funções mais simples são para desenvolver a integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$.

Começamos definindo um retângulo fechado (ou simplesmente retângulo) como o produto de intervalos fechados $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, e o cubo fechado (ou simplesmente cubo) como o produto de intervalos fechados de mesmo comprimento $Q = [a_1, a_1 + k] \times \cdots \times [a_d, a_d + k],\ k \in \mathbb{R}$. O volume de um cubo pode ser interpretado como $|Q| = k^d$.

Podemos definir $m_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$, caso particular de uma classe de funções chamadas de medidas exteriores, que objetivam associar um valor a todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Notamos que a definição de m_* abaixo não exige que o conjunto medido seja uma união enumerável de cubos quase disjuntos, nem exige uma condição parecida.

$$m_*(E) = inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : \{Q_j\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é uma cobertura de } E \text{ por cubos.}\Big\}$$

Apesar da abrangência do domínio de definição da medida exterior, ela desfruta de três propriedades interessantes, considerando os objetivos da teoria da medida:

(1) *(Nulidade do vazio).* $m_*(\emptyset) = 0$
(2) *(Monotonicidade).* $E_1 \subseteq E_2 \implies m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$
(3) *(Sub-aditividade enumerável).* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \implies m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$

São essas as propriedades gerais que definem uma medida exterior. As seguintes propriedades (aditividade em alguns casos particulares), mostram que a função m_* merece nossa atenção.

(1) Se E é uma união enumerável de cubos Q_j quase disjuntos (os interiores dos cubos são disjuntos), então $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$.
(2) Se $d(E_1, E_2) > 0$ então $m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.

Definição 2.1 (Medida de Lebesgue)**.** Um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ é dito Lebesgue mensurável, ou apenas mensurável, se para toda escolha de $\epsilon > 0$, existe um aberto U, com $E \subseteq U$, de forma que $m_*(U \setminus E) \leq \epsilon$. Definimos a medida de Lebesgue m, ou apenas medida, sobre os conjuntos mensuráveis E, com valor $m(E) = m_*(E)$.

Os conjuntos mensuráveis são fechados sob várias operações de conjunto, como complemento, união enumerável e intersecção enumerável. A principal vantagem de restringir m_* aos conjuntos mensuráveis é que m possui a propriedade de aditividade enumerável:

Proposição 2.2 (Aditividade enumerável de m)**.** *Se $E_1, E_2, \ldots$ são conjuntos mensuráveis disjuntos, e $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, então $m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$.*

Vários exemplos clássicos (e.g. Banach-Tarski) ilustram que nem todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ é mensurável.

Aplicamos o conceito de conjunto mensurável para generalizar a classe das funções contínuas:

Definição 2.3 (Função mensurável)**.** Uma função f a valores reais, definida em um subconjunto mensurável $E \subseteq \mathbb{R}^d$, é mensurável se para todo $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in E : f(x) < a\}$ é mensurável.

Uma propriedade interessante das funções mensuráveis é que elas são (por um sentido preciso) indiferentes a mudanças pequenas em suas definições. Para enunciar uma proposição que comprova isso, definimos a noção de igualdade em quase todo ponto.

Definição 2.4 (Quase todo ponto)**.** Uma propriedade vale para quase todo ponto de um conjunto E se o subconjunto dos pontos de E nos quais a propriedade em questão não vale tem medida nula.

Proposição 2.5 (Mudanças pequenas não afetam a mensurabilidade)**.** *Suponha que f seja mensurável. Se $f(x) = g(x)$ em quase todo ponto do domínio, então g também é mensurável.*

Na construção da integral de Lebesgue, é usado de forma central o fato de que funções mensuráveis são aproximáveis por funções simples, que são essencialmente combinações lineares de funções características de conjuntos mensuráveis.

Definição 2.6 (Função simples)**.** Uma função simples é uma soma finita da forma $f = \sum_{k=0}^{N} a_k \chi_{E_k}$, em que cada E_k é um conjunto mensurável de medida finita e cada a_k é uma constante real.

Proposição 2.7 (Mensurável é aproximável por simples)**.** *Se f é mensurável em $\mathbb{R}^d$, então existe uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)|$ e que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.*

Observação 2.8. Vale comentar que é possível trocar a hipótese de funções simples por funções escada (funções simples em que cada E_k de sua definição é um intervalo, ou produto de intervalos), se enfraquecermos a conclusão de forma garantir apenas a convergência pontual em quase todo ponto.

Definimos a seguir uma forma de integrar as funções simples. É possível estender naturalmente essa definição para incluir as funções mensuráveis (usando a aproximação de funções mensuráveis por funções simples), obtendo assim a integral de Lebesgue. A integral de Lebesgue generaliza a integral de Riemann, e motivamos o uso dessa nova integral com propriedades do espaço L^1 das funções Lebesgue integráveis e teoremas sobre convergência.

Seja $\varphi = \sum_{k=0}^{N} a_k \chi_{E_k}$ uma função simples. Definimos a integral de Lebesgue de φ como $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dm(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k m(\chi_{E_k})$. O valor desta soma independe da escolha de coeficientes a_k e conjuntos E_k, dada uma mesma φ. Não é difícil mostrar que a integral de Lebesgue, definida nas funções simples, satisfaz quatro importantes propriedades também satisfeitas pela integral de Riemann: linearidade, aditividade, monotonicidade e a desigualdade triangular.

Um motivo prático para optar pelo uso da integral de Lebesgue é a possibilidade de comutar a ordem de um limite com uma integral. Enunciamos dois dos principais teoremas que fornecem condições para que isso possa ocorrer.

Teorema 2.9 (Convergência monótona)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas, com $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ em quase todo ponto e $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ em quase todo ponto. Então $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.*

Teorema 2.10 (Convergência dominada)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis, com $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ em quase todo ponto e $|f_n(x)| \leq g(x)$, onde g é integrável. Então $\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| = 0$ logo $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.*

Para usarmos as ferramentas da análise mais naturalmente na continuidade dos nossos estudos sobre as funções integráveis, espera-se que essa classe de funções forme um espaço vetorial. De fato forma, e diferentemente do espaço vetorial formado pelas funções Riemann integráveis, é completo.

Denotamos como $L^1(\mathbb{R}^d)$ o espaço das funções integráveis em $\mathbb{R}^d$, com norma $\|f\|_{L^1} = \int |f|$. O teorema abaixo tem conclusão válida para qualquer espaço $L^p,\ p \geq 1$.

Teorema 2.11 (Riesz-Fischer)**.** *$L^1(\mathbb{R}^d)$ é um espaço de Banach.*

Várias famílias de funções de interesse prático são densas em $L^1(\mathbb{R}^d)$, incluindo as funções simples, as funções escada e as funções contínuas de suporte compacto. Esse fato, considerando o teorema de Riesz-Fischer, garante não só que cada elemento de $L^1(\mathbb{R}^d)$ é o limite de uma sequência de Cauchy de funções mais simples, como também que cada limite de uma sequência de Cauchy de funções mais simples pertence a $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Definida a integral de Lebesgue, podemos discutir conceitos preliminares da análise funcional. Estudos em análise funcional se dedicam às propriedades de espaços vetoriais, principalmente os de dimensão infinita, e aos operadores sobre estes, principalmente os lineares. Desde seu intenso desenvolvimento no século XX por figuras eminentes como Banach e Hadamard, a análise funcional se tornou um contexto recorrente para o estudo das equações diferenciais parciais - tanto por oferecer ferramentas que facilitam o trabalho sobre espaços de funções, quanto por generalizar técnicas já existentes na teoria das EDP's, como a análise de Fourier.

Definimos um espaço vetorial como um conjunto X de vetores, um corpo K de escalares e duas operações: a soma entre vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar. É útil também ter uma noção de "tamanho" dos vetores. Para isto, acoplamos uma norma a um espaço vetorial, ou seja, definimos uma operação $\|x\| : X \to \mathbb{R}$ sobre um vetor que retorna um valor escalar não negativo, interpretado como a magnitude desse vetor. Com a norma da diferença entre dois vetores, obtemos uma métrica, possibilitando a identificação das sequências de Cauchy no espaço. Se todas essas convergem, o espaço vetorial normado é dito completo, ou de Banach. Ademais, se a norma do espaço é induzida por um produto interno (no sentido $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$), o espaço completo é um espaço de Hilbert. Espaços de Hilbert são conducentes à aplicação de técnicas da análise, pois muitas destas dependem da existência de limites de sequências.

Um conceito fundamental para o desenvolvimento deste trabalho é o de conjuntos de vetores que geram um espaço. Um conjunto B "gerar" um espaço X pode significar que todo vetor de X é uma combinação linear (única) dos vetores de B (nesse caso, B é uma base de Hamel para X). Existe, entretanto, outra definição para o conceito de base, que será mais cômoda por abstrair as séries de Fourier naturalmente. Um subconjunto $B \subseteq X$ é uma base de Schauder para X se todo vetor de X é o limite (único) de uma sequência de combinações lineares de vetores de B (X é o fecho das combinações lineares de vetores de B). Desse ponto em diante, menções a bases para espaços se referem a bases de Schauder, a menos que o contrário seja dito.

Dada uma base ortonormal M (que contém vetores unitários e dois a dois ortogonais) de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, é desejável encontrar a forma dos coeficientes α_k das combinações lineares $f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k,\ e_k \in M,\ f \in X$. Tomando o produto interno com um $e_j \in M$ em ambos os lados dessa equação, é revelada uma soma parcial da série abstrata de Fourier: $f = \sum_{k=0}^{n} \langle f,\, e_k \rangle e_k,\ e_k \in M,\ f \in X$.

Para representar todos os vetores $f \in \mathcal{H}$ do espaço para o qual M é uma base ortonormal, consideramos o limite quando $n \to \infty$ das somas acima, e estudamos algumas propriedades de convergência dessas séries.

Teorema 2.12 (Convergência da série de Fourier abstrata)**.** *Seja (e_k) uma base ortonormal para um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então*

(1) *A série $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k$ converge (na norma de $\mathcal{H}$) se e somente se $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2$ converge.*
(2) *Se $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k = f$, então $\alpha_k = \langle f,\, e_k \rangle$.*
(3) *Para todo $f \in \mathcal{H}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f,\, e_k \rangle e_k$ converge.*

Observação 2.13. Em outras palavras, foi dada uma condição para a convergência de uma série genérica, depois dito que quando esta converge, ela é a série abstrata de Fourier, depois dito que todo vetor do espaço admite representação como série abstrata de Fourier.

A motivação inicial para estudar o comportamento das séries de Fourier abstratas foi a utilidade da série de Fourier de funções periódicas na reta em resolver o problema do calor em uma barra. Esse problema foi estudado por Fourier no início do século XIX. Seu trabalho, com aplicação imediata para as ciências naturais, e intenso interesse matemático, por introduzir uma nova representação analítica de funções, motivou gerações futuras a persistirem na tarefa de tornar a teoria de Fourier mais rigorosa e geral. Hoje, o uso das ferramentas derivadas dessa única ideia é quase sinônimo com trabalhar em análise.

Em espaços de Hilbert, se M é uma base ortonormal com $e_k \in M$, a seguinte desigualdade (de Bessel) se torna uma igualdade, a identidade de Parseval. Para nossos fins, a identidade de Parseval mostra sua utilidade ao relacionar um vetor de $\mathcal{H}$ a uma soma envolvendo os coeficientes de sua série de Fourier abstrata, ajudando no estudo da convergência da série (além de possuir interessantes interpretações geométricas, e.g. é possível interpretar a identidade como uma fórmula de Pitágoras em dimensão infinita).

Proposição 2.14 (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência ortonormal do espaço vetorial com produto interno* $\mathcal{H}$*. Então* $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x,\, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2\,,\ x \in X$*.*

Recordamos o seguinte fato de álgebra linear: qualquer subespaço de um espaço vetorial completo de dimensão finita é completo. Em dimensão infinita, um subespaço S de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é completo se S é subespaço fechado.

Definição 2.15 (Subespaço fechado)**.** Um subespaço S de um espaço vetorial normado X é fechado se toda sequência convergente formada por termos em S converge em S.

No contexto da definição acima, para qualquer $f \in X$, existe um único elemento $g_0 \in S$ mais próximo de f que qualquer outro elemento em S. Se X é um espaço de Hilbert, afirmamos ainda que a diferença $f - g_0$ é perpendicular a S (a todo elemento de S).

Proposição 2.16 (Vetor minimizante)**.** *Seja S um subespaço fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e $f \in \mathcal{H}$. Então*

(1) $\exists! g_0 \in S$ *tal que* $\|f - g_0\| = \inf_{g\in S} \|f - g\|$
(2) $f - g_0 \perp g,\ \forall g \in S$.

Denotamos por $S^{\perp}$ o complemento ortogonal de S, ou seja, o conjunto de todos os vetores de $\mathcal{H}$ perpendiculares a S. Uma projeção ortogonal $P_S : \mathcal{H} \to S$ é uma função que leva vetores de um espaço a um subespaço, satisfazendo as seguintes propriedades: P_S é linear; $P_S(f) = f,\ \forall f \in S$; $P_S(f) = 0,\ \forall f \in S^{\perp}$; e $\|P_S(f)\| \leq \|f\|\,,\ \forall f \in \mathcal{H}$.

Os subespaços fechados e projeções ortogonais sobre eles se relacionam com as séries de Fourier de uma forma surpreendente. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. Logo podemos encontrar uma base ortonormal enumerável $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para $\mathcal{H}$. Os primeiros $N > 0$ termos de (e_k) geram um subespaço fechado $\mathcal{H}_N$ de $\mathcal{H}$. Somas parciais S_N (de N termos) da série de Fourier abstrata de um vetor $f \in \mathcal{H}$ são nada mais que projeções ortogonais ao subespaço $\mathcal{H}_N$.

A linearidade é uma propriedade fundamental de vários operadores importantes definidos em espaços de Hilbert. Como vimos, a projeção ortogonal, ferramenta necessária para estudar as séries de Fourier em sua forma abstrata, é linear. Os operadores unitários, que preservam tanto a estrutura do espaço vetorial quanto o produto interno (por isso ditos isomorfismos isométricos), são lineares por definição. Os funcionais lineares sobre um espaço, quando considerados apenas os limitados (ou equivalentemente, os contínuos), definem o espaço dual, sobre o qual definimos o conceito de convergência fraca, ou então enunciamos teoremas clássicos da análise funcional, como o teorema de representação de Riesz. Como exemplo final, os operadores compactos, quando assumidos lineares, possuem autovalores com ótimas propriedades, dadas pelo teorema espectral.

Definimos agora dois espaços vetoriais nos quais a maior parte da teoria das séries de Fourier se concentra. Há alguns motivos para isso. Um é o fato de que sequências de coeficientes de Fourier residem em um, enquanto funções com sequências de Fourier convergentes residem no outro. Além disso, ambos são espaços de Hilbert separáveis, e existe um isomorfismo natural entre eles definido por as séries de Fourier.

Definição 2.17 (Espaço ℓ^2)**.** O espaço vetorial $(\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|)$ é definido por o conjunto de sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $\sum |a_n|^2 < \infty$. A norma de um elemento (a_n) desse espaço é definida por $\|(a_n)\| = (\sum |a_n|^2)^{1/2}$.

Definição 2.18 (Espaço L^2)**.** O espaço vetorial $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$, é definido por o conjunto de classes de equivalência de funções mensuráveis f, iguais em quase todo ponto, tais que $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \; dm < \infty$. A norma de um elemento $\tilde{f}$ desse espaço é definida por $\left\|\tilde{f}\right\| = (\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \; dm)^{1/2}$, em que f é uma função representante qualquer, escolhida da classe $\tilde{f}$.

Concluímos com a observação de que se voltarmos a atenção para o espaço das funções 2π-periódicas em L^2, tomando uma base ortonormal M de funções trigonométricas, podemos aplicar os estudos anteriores sobre séries de Fourier abstratas, de forma a interpretar $\sum \langle f, e_n\rangle e_n,\ e_n \in M$ como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt\, e^{inx}$, a série de Fourier de f. Todos os resultados obtidos no caso geral se aplicam ao caso particular.

3. Análise Harmônica

> " O papel importante das funções cujos quadrados são somáveis no tratamento de Hilbert da teoria de Fredholm é amplamente conhecido, e foi inevitável que os membros da escola de Göttingen se propuseram a tarefa de provar a recíproca do teorema de Parseval. Por outro lado, esforços feitos para estender esses resultados isolados para incluir casos nos quais o conhecido ou desconhecido índice de somabilidade é diferente de 2 aparentam ter falhado."
>
> *W. H. Young, 1912* [2]

Dos espaços L^p, o único espaço de Hilbert é fornecido fixando $p = 2$. Com a teoria dos espaços de Hilbert, obtemos estimativas e identidades icônicas, como a

[2]Transcrito de [6], tradução própria.

identidade de Parseval, dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta$$

para funções $f \in L^2([0, 2\pi])$, em que a_n denota o n-ésimo coeficiente de Fourier de f, a saber, $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$. Uma pergunta natural que surge é se existem identidades análogas para os casos $f \in L^p$, $p \neq 2$. Sem acesso imediato a um espaço de Hilbert, o problema parece muito mais difícil. Entretanto existe um resultado capaz de fazer uma ponte entre estimativas em L^p e estimativas em L^2 - o teorema de interpolação de M. Riesz.

Teorema 3.1 (Interpolação de Riesz)**.** *Seja $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$ um operador linear, onde L^{p_0} e L^{p_1} são definidos por funções com domínio em um espaço de medida (X, μ) e L^{q_0} e L^{q_1} são definidos por funções com domínio em um espaço de medida (Y, ν). Suponha que*

$$\begin{cases} \|T(f)\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}} \\ \|T(f)\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}} . \end{cases}$$

Então

$$\|T(f)\|_{L^q} \leq M \|f\|_{L^p}$$

i.e. é T limitado de L^p a L^q, ou "é de tipo (p, q)", onde o par (p, q) é dado por

$$\begin{cases} \frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \\ \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1} \end{cases}$$

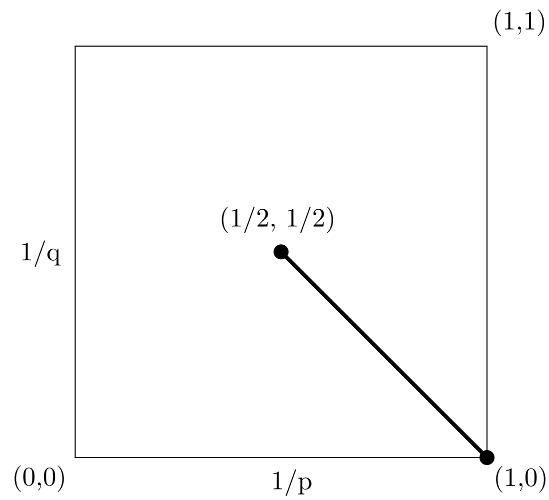
para algum $0 \leq t \leq 1$. Ademais, $M \leq M_0^{1-t} M_1^t$.

Essencialmente, se um operador linear é de tipo (p_0, q_0) e de tipo (p_1, q_1), então é de tipo (p, q), onde (p, q) está "entre" (p_0, q_0) e (p_1, q_1). Usamos esse fato para obter o que desejávamos, uma extensão do teorema de Parseval para L^p, $p \neq 2$.

Corolário 3.2 (Desigualdade de Hausdorff-Young)**.** *Seja $T : L^1([0, 2\pi]) \to L^\infty(\mathbb{Z})$, com $T(f) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, onde a_n é o n-ésimo coeficiente de Fourier de f. Se $1 \leq p \leq 2$ e $1/p + 1/q = 1$, então T é de tipo (p, q).*

Observação 3.3. A inversa de T possui uma desigualdade análoga, bem como o operador transformada de Fourier.

Como um operador pode ser de tipo (p, q) para mais de um par (p, q), é comum usar um recurso visual chamado diagrama de Riesz para visualizar de uma vez todos os pares (p, q) tais que um operador é deste tipo. O diagrama é construido com um quadrado unitário, onde cada ponto de seu interior é representado unicamente por coordenadas $(x, y) = (1/p, 1/q)$. Se o operador correspondente ao diagrama é de tipo (p, q), o ponto $(1/p, 1/q)$ é destacado. Segue o diagrama de Riesz para T, preenchido com apenas as informações dadas por 3.2.



Obtido um meio de estender resultados de L^2 para L^p, estamos preparados para introduzir um objeto de estudo da análise harmônica, a transformada de Hilbert. Motivamos sua definição afirmando que esta transformada está convenientemente definida na interseção entre a análise de Fourier e a análise complexa. Vejamos como.

Considere $\tilde{f} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(n)}{i} a_n e^{in\theta}$, a "função (ou série) conjugada" de $f \in L^2$, onde $\operatorname{sgn}(n)$ é 1 se $n > 0$, -1 se $n < 0$ e 0 se $n = 0$. Esta definição é valiosa por vários motivos. Alem de estar intimamente relacionada com a construção de uma função contínua com série de Fourier divergente, ela relaciona a série de Fourier de f com uma função complexa analítica especial: a projeção de Cauchy de f.

$$\frac{1}{2}(f(\theta) + i\tilde{f}(\theta) + a_0) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} = F(e^{i\theta})$$

onde

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{e^{i\theta} - z} i e^{i\theta} d\theta$$

é a função analítica definida em $|z| < 1$ chamada projeção (ou integral) de Cauchy (o nome vem do fato de que a integral acima pode ser interpretada como um operador que projeta espaços L^p a espaços de Hardy H^p).

Em outras palavras, descrevemos os valores da projeção de Cauchy de f na fronteira do disco unitário como a soma de uma parte real, dada pela série de Fourier de f, com uma parte imaginária, dada pela série conjugada de f.

Definimos novamente a projeção de Cauchy, dessa vez no ambiente paralelo em que o interior do disco unitário é substituído pelo semiplano complexo superior, e a fronteira do disco unitário é substituído pelo eixo real. De agora em diante, o uso da letra F se refere à definição abaixo.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} d\theta, \quad \mathrm{Im}(z) > 0$$

onde $f \in L^2(\mathbb{R})$, portanto a integral converge.

Como no caso do disco unitário, F também está associada à análise de Fourier, mas por meio da transformada de Fourier.

$$F(z) = \int_0^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi, \quad \mathrm{Im}(z) > 0$$

onde $\hat{f}$ é a transformada de Fourier de f. A integral converge pois $e^{-2\pi y \xi}$, como função de ξ e para $y > 0$, está em $L^2([0, \infty))$.

Estamos prontos para definir a transformada de Hilbert. Primeiramente considere o operador $P(f)(x)$, limite de $F(x + iy)$ quando $y \to 0$. P é a projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ no espaço das funções cujas transformadas de Fourier são nulas para quase todo valor negativo do domínio (podemos conjecturar isso notando que F é definida essencialmente pela transformada inversa de Fourier da transformada de Fourier de f, restrita aos valores positivos). Definido o operador P, multiplicamos o argumento de sua integral por $\frac{sgn(\xi)}{i}$, como na definição da série conjugada, e obtemos a transformada de Hilbert:

$$H(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \frac{\mathrm{sgn}(\xi)}{i} e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Vale comentar que H é repleto de propriedades interessantes do ponto de vista da análise funcional. Por exemplo, H é unitário sobre L^2 e $H^{-1} = -H$. Além disso, existe uma caracterização de H como integral singular, também enunciada no contexto de L^2:

Proposição 3.4 (H é uma integral singular)**.** *Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então $H_\epsilon(f)(x) \to H(f)(x)$ quando $\epsilon \to 0$ no sentido L^2, onde $H_\epsilon(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\epsilon} f(x-t) \frac{dt}{t}$.*

Observação 3.5. No sentido acima, $H(f)$ é praticamente uma convolução entre f e $1/x$.

Até o momento, as afirmações feitas sobre o operador H se situam em L^2. Destacamos a afirmação $\|H(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ (i.e. H é unitário em L^2). Gostaríamos de saber se H é similarmente limitado no caso geral L^p. Nos encontramos em uma situação de uso típico do teorema de interpolação de Riesz. A conclusão obtida é a seguinte.

Teorema 3.6 (H é limitado em L^p)**.** *Tome $1 < p < \infty$. Então a transformada de Hilbert H, originalmente definida em $L^2 \cap L^p$, satisfaz $\|H(f)\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$, com A_p independente de f. A transformada de Hilbert portanto possui uma extensão única para L^p satisfazendo a mesma desigualdade, pelo teorema da extensão linear limitada.*

A escolha do intervalo aberto $1 < p < \infty$ é uma hipótese ótima, pois a desigualdade não vale tanto para $p = 1$ quanto para $p = \infty$, vide o seguinte contraexemplo. A função característica $\chi_{[-1,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pertence tanto a L^∞ quanto a L^1, porém sua transformada de Hilbert é $H(f) = (1/x)\log(|(x+1)/(x-1)|)$, que não pertence a L^∞ ou L^1.

Vimos que H não é bem comportado em L^1. Isso motiva a busca de uma restrição de L^1 onde H seja limitado. Com esse fim em mente, introduzimos os espaços de Hardy H^p.

Definição 3.7 (Espaço de Hardy)**.** Definimos o espaço de Hardy complexo H^p como as funções analíticas F tais que $\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p \, dx < \infty$, com norma $\|F\|_{H^p}$ dada pela raiz p-ésima da quantidade ao lado esquerdo da desigualdade.

Podemos pensar em H^p como o espaço das funções complexas analíticas definidas no semiplano superior, tais que a norma L^p de suas "fatias" horizontais não explodem quando as fatias se aproximam do eixo real. É possível mostrar que se $F \in H^p$, então $F_0 = \lim_{y\to 0} F(x+iy) \in L^p(\mathbb{R})$, com norma preservada, quando $p < \infty$. Ademais, se $1 < p < \infty$, descrevemos F_0 como $F_0 = f + iH(f)$, para algum $f \in L^p(\mathbb{R})$ (evidenciando a escolha de definir H similarmente à série conjugada). Reciprocamente, cada elemento $F \in H^p$ é obtido dessa forma, partindo de algum $f \in L^p$. Mais que isso, L^p é isomorfo a H^p, quando $1 < p < \infty$.

Se $p = 1$, não há isomorfismo, pois como já foi enunciado, H não é limitado em L^1. Este é o problema que desejamos resolver, e resolvemos com a ajuda do espaço H^1. Considere o subespaço de L^1 que contém apenas as funções f tais que $(f + iH(f))/2 = F_0$, para algum $F \in H^1$. Intuitivamente, estamos considerando as funções reais que são equivalentes (a menos de uma expressão envolvendo a transformada de Hilbert) à restrição de uma função em H^1 a sua fronteira. Estas funções definem o espaço de Hardy real $H_r^1 < L^1$ na reta. Equivalentemente, H_r^1 contém exatamente as funções $f \in L^1$ tais que $H(f)$ são do tipo L^1 em um sentido fraco, que não definiremos aqui (observamos que se partirmos de $f \in H_r^1$, então não é necessário definir este sentido fraco, pois $H(f) \in L^1$ no sentido clássico).

O espaço H_r^1 pode ser definido para $\mathbb{R}^d$, e caracterizado em termos de uma "decomposição atômica". Mostraremos o conteúdo dessa importante caracterização (que enunciaremos como definição) antes de enunciar um resultado que afirma que

H^1_r resolve nosso problema de encontrar um subespaço de L^1 onde H é bem comportado.

Definição 3.8 (Átomo)**.** Uma função mensurável limitada $\mathfrak{a}$ sobre $\mathbb{R}^d$ é um átomo associado à bola $B \subset \mathbb{R}^d$ se

(1) $\mathfrak{a}$ tem suporte em B,
(2) $|\mathfrak{a}(x)| \leq 1/m(B)$,
(3) $\int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{a}(x)dx = 0$.

Definição 3.9 (Decomposição atômica de H^1_r)**.** O espaço H^1_r contém exatamente as funções de L^1 que são escritas como $f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathfrak{a}_k$, em que $\mathfrak{a}_k$ são átomos e λ_k são escalares tais que $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$. A norma $\|f\|_{H^1_r}$ é definida pelo ínfimo dessas somas de coeficientes, entre todas as possíveis decomposições atômicas.

Observação 3.10. Uma propriedade inicial importante sobre H^1_r é sua completude. Uma propriedade mais profunda sobre esse espaço é que um subconjunto significativo de seus elementos é caracterizado por ter integral zero. Mais especificamente, se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > 1$, f com suporte limitado, então $f \in H^1_r(\mathbb{R}^d) \iff \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = 0$. Entre as maiores descobertas recentes sobre o espaço H^1_r foi a de C. Fefferman, mostrando sua dualidade com o espaço BMO (das funções com oscilação média limitada). Esse fato consolidou o par dual de espaços H^1_r e BMO como uma alternativa ao par dual de espaços mais tradicionais L^1 e L^∞, quando os espaços tradicionais não cooperam em fornecer estimativas agradáveis (como é o caso da transformada de Hilbert em L^1).

Finalmente, o resultado prometido:

Teorema 3.11 (H é limitado em H^1_r)**.** *Seja $f \in H^1_r$. Então $H_\epsilon(f) \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall \epsilon > 0$. Além disso, $H_\epsilon(f)(x)$ converge quando $\epsilon \to 0$, no sentido L^1. Seu limite, definido como $H(f)$, satisfaz $\|H(f)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq A \|f\|_{H^1_r(\mathbb{R})}$.*

Observação 3.12. Tivemos que redefinir a transformada de Hilbert pois a definição original contemplava apenas $H(f)$ para $f \in L^2$.

Observação 3.13. É possível mostrar que não só $H : H^1_r \to L^1$, mas de fato $H : H^1_r \to H^1_r$.

Por fim, comentamos uma situação notável em que o uso do espaço H^1_r é mais conveniente que o uso de L^1. A situação envolve funções maximais, isto é, operadores definidos usando supremos ou máximos de valores dados por funções de seu domínio (esta definição é inevitavelmente imprecisa, pois a interseção das características de todos os operadores intitulados “maximais” é pequena). Talvez a função maximal mais conhecida seja a de Hardy-Littlewood. Este operador é conhecidamente limitado em L^p, $p > 1$, mas em L^1 essa estimativa falha e é substituida por uma estimativa de tipo fraco. Analogamente, existe uma função (operador) maximal M, cuja limitação não pode ser estabelecida em L^1. A solução, enunciada abaixo, é se ambientar em H^1_r.

Definição 3.14 (Função maximal $M(f)$)**.** A função maximal $M(f)$ de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ é dada por $M(f)(x) = \sup_{\epsilon>0} |(f * \phi_\epsilon)(x)|$, onde $\phi_\epsilon = \epsilon^{-d}\phi(x/\epsilon)$, com $\phi \in C^1(\mathbb{R}^d)$ de suporte compacto.

Teorema 3.15 (M é limitada em H^1_r)**.** *Se* $f \in H^1_r(\mathbb{R}^d)$ *então* $M(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *e* $\|M(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq A \|f\|_{H^1_r(\mathbb{R}^d)}$.

4. Distribuições

> “ No cálculo diferencial, encontramos imediatamente o fato desagradável de que nem toda função é diferenciável. O propósito da teoria de distribuições é remediar este defeito. De fato, o espaço das distribuições é essencialmente a menor extensão do espaço das funções contínuas tal que a diferenciação está sempre bem definida. Talvez seja autoevidente que é desejável definir tal extensão (...)”
>
> *L. Hörmander, 1983* [3]

Um dos principais (senão o principal) objetos de estudo da análise é a função. Uma distribuição de Schwartz, ou função generalizada, é um funcional definido sobre um espaço de funções especiais, que para os devidos fins faz o papel de uma função. Como se pode imaginar, as funções generalizadas de fato generalizam as funções ordinárias, mas além disso, seu uso permite contornar várias dificuldades técnicas. Esses novos objetos se mostram úteis, por exemplo, na resolução de EDP's. Mesmo as equações mais simples, como a equação da onda, possuem soluções “fracas”, que condizem com uma intuição física ou que satisfazem propriedades esperadas de uma solução, mas que não são soluções no sentido clássico, normalmente por falta de regularidade (e.g. a solução fraca da corda dedilhada, prevista pela fórmula de d'Alembert, não é diferenciável, portanto não é solução no sentido clássico).

Partiremos para a definição de uma distribuição. Seja $C_0^\infty(\Omega)$ a classe das funções infinitamente diferenciáveis, a valores complexos, de suporte compacto, e definidas sobre o aberto $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Denotamos por $\mathcal{D}$ o espaço das “funções teste”, isto é, $C_0^\infty(\Omega)$ com a seguinte noção de convergência. Se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções teste, dizemos que $\varphi_n \to \varphi$ se os suportes de cada φ_n estão contidos em um compacto comum, e se para cada multi-índice α, $\partial_x^\alpha \varphi_n \to \partial_x^\alpha \varphi$ uniformemente em x.

[3]Transcrito de [3], tradução própria.

Definição 4.1 (Distribuição)**.** Uma distribuição F sobre Ω é um funcional linear sequencialmente contínuo a valores complexos, definido como $\varphi \mapsto F(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$. Denotamos o espaço das distribuições por $\mathcal{D}'$.

Observação 4.2. Toda função ordinária f localmente integrável define uma distribuição F_f dada por $F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$, mas nem toda distribuição é uma função nesse sentido. Tome por exemplo a distribuição delta de Dirac, definida como $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

Definiremos agora duas operações sobre distribuições de imensa utilidade prática: a derivada e a convolução. Para definir a derivada, observe que se f, definida em Ω, é suave, e se $\varphi \in \mathcal{D}$, então $\int (\partial_x^\alpha f)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int f(\partial_x^\alpha \varphi)dx$. Portanto uma definição natural para a derivada da distribuição F, se desejarmos estender a derivada de funções de classe C^∞, é:

Definição 4.3 (Derivada)**.** $(\partial_x^\alpha F)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} F(\partial_x^\alpha \varphi)$.

Observação 4.4. Essa definição fornece resultados intuitivamente esperados, como a derivada da distribuição degrau (Heaviside step) ser o delta de Dirac.

Na definição acima, exploramos a alta regularidade das funções teste para reduzir a derivada de uma distribuição a uma expressão que depende apenas de derivadas das funções teste. Dizemos portanto que definimos a derivada por "dualidade". Muitas operações sobre distribuições são definidas dessa forma. Por exemplo, o análogo de compor uma função com uma transformação linear (não singular) L é definida no contexto de distribuições como $F_L(\varphi) = |\det(L)|^{-1} F(\varphi_{L^{-1}})$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.

A convolução entre distribuições e funções teste é definida similarmente. Considere $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Podemos definir a convolução $F * \psi$ de duas formas, tanto como uma função quanto como uma distribuição.

Definição 4.5 (Convolução)**.** $F * \psi$ é a função $(F * \psi)(x) = F(\psi(x - y))$ ou $F * \psi$ é a distribuição $(F * \psi)(\varphi) = F(\psi^{\sim} * \varphi)$, onde $\psi^{\sim}(x) = \psi(-x)$.

Observação 4.6. É verdade que ambas as definições coincidem. Isto é, a distribuição associada à função $F * \psi$ é a distribuição $F * \psi$.

Observação 4.7. Com essa definição, podemos construir uma espécie de aproximação à identidade para distribuições, usando as funções teste como núcleos. Essa construção prova que as funções suaves são "densas" em $\mathcal{D}'$ (temos cautela ao falar de densidade em $\mathcal{D}'$, pois não definimos uma topologia sobre esse espaço).

Ainda no espírito de transportar operações entre funções para a teoria das distribuições, é evidentemente desejável definir a transformada de Fourier de uma distribuição. Antes de fazer isto, nos ambientamos em um espaço mais apropriado: uma restrição de $\mathcal{D}'$ chamada de espaço de Schwartz.

Considere a família de normas de uma função suave definida por

$$\|\varphi\|_N = \sup_{x\in\mathbb{R}^d,\ |\alpha|,|\beta|\le N} \left|x^\beta(\partial_x^\alpha\varphi)(x)\right|,\ N\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

Definimos o novo espaço $\mathcal{S}$ de funções teste como as funções $\varphi\in C^\infty$ sobre $\mathbb{R}^d$, tais que $\|\varphi\|_N<\infty$, $\forall N$. São as funções suaves cujas derivadas decaem rapidamente. Definimos a convergência sequencial no espaço $\mathcal{S}$ como $\varphi_k\to\varphi$ se $\|\varphi_k-\varphi\|_N\to 0$, $\forall N$.

Definição 4.8 (Distribuição Temperada)**.** Uma distribuição temperada F é um funcional linear sequêncialmente contínuo a valores complexos, definido como $\varphi\mapsto F(\varphi)$, $\forall\varphi\in\mathcal{S}$. Denotamos o espaço das distribuições temperadas, por $\mathcal{S}'$.

Segue uma justificativa para pensar no espaço $\mathcal{S}'$ como um espaço de distribuições de crescimento lento, ou no máximo polinomial.

Proposição 4.9 (Cota para distriubições temperadas)**.** *Se $F\in\mathcal{S}'$ então existe $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ e $c\in\mathbb{R}_{>0}$ tais que $|F(\varphi)|\le c\,\|\varphi\|_N$, $\forall\varphi\in\mathcal{S}$,*

Passaremos agora para o estudo de um operador sobre espaço de Schwartz: a transformada de Fourier. Após sua definição e alguns fatos iniciais, definiremos classes importantes de distribuições, e mostraremos a relação entre a transformada de Fourier e estas classes.

Se $\varphi\in\mathcal{S}$, definimos sua transformada de Fourier por $\hat\varphi(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)e^{-2\pi x\xi}dx$, com inversa $\check\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\xi)e^{2\pi x\xi}d\xi$. A transformada de Fourier é um homeomorfismo de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$. Além disso, é possível mostrar que a transformada de Fourier é de certa forma limitada com relação às N-normas que usamos para definir convergência em $\mathcal{S}$. Precisamente, vale $\|\hat\varphi\|_N\le C_N\,\|\varphi\|_{N+d+1}$, $\forall\varphi\in\mathcal{S}$, $\forall N\ge 0$.

A principal pista sobre como generalizar esta definição para o contexto de distribuições se encontra na seguinte identidade de multiplicação. Se $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$, então $\int_{\mathbb{R}^d}\hat\psi(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\hat\varphi(x)dx$. Isso sugere uma definição da transformada de Fourier por dualidade, isto é, se $F\in\mathcal{S}'$, então $\hat F(\varphi)=F(\hat\varphi)$ (e uma definição análoga para a transformada inversa). Com esta definição, a transformada é um homeomorfismo de $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{S}'$, no sentido de continuidade dada pela convergência pontual dos funcionais. Não é difícil mostrar que esta definição de fato generaliza a definição no contexto de funções, isto é, se $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, então $\hat F_f=F_{\hat f}$. Ademais, são preservadas as conhecidas propriedades de diferenciação e convolução. Se $F\in\mathcal{S}'$, então $(\partial_x^\alpha F)^\wedge=(2\pi ix)^\alpha\hat F$ e $(-(2\pi ix)^\alpha F)^\wedge=\partial_x^\alpha(\hat F)$. Se $F\in\mathcal{S}'$ e $\psi\in\mathcal{S}$, então $(F*\psi)^\wedge=\hat\psi\hat F$.

Discutiremos agora as classes de distribuições mencionadas anteriormente. São três: as distribuições de suporte pontual, as homogêneas e as regulares.

Definição 4.10 (Suporte)**.** O suporte de uma função contínua f (denotado por $\text{supp}(f)$) é o complemento do maior conjunto aberto onde f se anula. O suporte de uma distribuição F é definido com as mesmas palavras, onde por F "se anular" em um aberto A, queremos dizer que $F(\varphi) = 0$ para todo φ com suporte contido em A.

Observação 4.11. O suporte de uma distribuição possui uma série de propriedades esperadas como: o suporte da derivada de F está contido no suporte de F; se $\text{supp}(F) \cap \text{supp}(\varphi) = \emptyset$ então $F(\varphi) = 0$, onde φ é uma função teste. Além disso, se nos restringirmos às distribuições de suporte compacto, é possível definir uma convolução entre duas distribuições.

Dada esta definição, a primeira classe de distribuições sob consideração serão as distribuições com suporte pontual (cujo suporte é um único ponto). Enunciaremos a principal caracterização desse tipo de distribuição.

Proposição 4.12 (Distribuições com suporte pontual)**.** *Distribuições com suporte pontual são escritas como combinações lineares (finitas) de derivadas do delta de Dirac. Formalmente, se o suporte de $F \in \mathcal{D}'$ é a origem, então $F = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial_x^\alpha \delta$.*

A segunda classe é das distribuições homogêneas. Uma função f sobre $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ é dita homogênea de grau λ se $f_a = a^\lambda f$, $\forall a > 0$, onde $f_a(x) = f(ax)$. Ou seja, uma dilatação do domínio de f é equivalente a uma dilatação da imagem de f, por um fator constante que depende do grau λ. Para captar o mesmo fenômeno ao redefinir homogeneidade no contexto distribucional, definimos a dilatação F_a de $F \in \mathcal{D}'$ por dualidade. Seja $F_a(\varphi) = F(\varphi^a)$, onde φ^a é a "dilatação dual" de φ, dada por $\varphi^a = a^{-d}\varphi_{a^{-1}}$. A definição desejada segue.

Definição 4.13 (Distribuição homogênea)**.** Uma distribuição F é homogênea de grau λ se $F_a = a^\lambda F$, $\forall a > 0$.

Uma distribuição homogênea notável é $\text{pv}(\frac{1}{x})$. Esta distribuição é, por um leve abuso de linguagem, a distribuição associada à função $x \mapsto 1/x$, definida sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como a função $1/x$ não é localmente integrável, não é possível definir sua distribuição associada da forma convencional, mas é possível naturalmente realizar a associação de uma distribuição. Seja $\text{pv}(\frac{1}{x})(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} (\varphi(x)/x) dx$. Um dos motivos que torna $\text{pv}(\frac{1}{x})$ especial é que ela caracteriza de forma simples a transformada de Hilbert, por $H(f) = (1/\pi)(\text{pv}(\frac{1}{x}) * f)$, $\forall f \in \mathcal{S}$. A demonstração é direta se lembrarmos da definição de H por uma integral singular.

A terceira e última classe de distribuições considerada são as distribuições regulares. Estas distribuições são, de certa forma, quase funções - pois quando testadas fora da origem, coincidem com uma função suave.

Definição 4.14 (Distribuição regular)**.** Uma distribuição $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ é regular se existe $k \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ de forma que $K(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x)\varphi(x)dx$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ com suporte disjunto da origem.

Observação 4.15. A distribuição $\text{pv}(\frac{1}{x})$ é regular, e sua função associada é $1/x$. Dada K regular, há uma única k associada, porém dada k suave, pode existir uma, múltiplas ou nenhuma distribuição regular associada. Existem condições para determinar a qual dos casos uma determinada k pertence, mas deixaremos essa discussão para outra oportunidade.

Finalmente, justificamos a importância das duas últimas definições com o fato de que a transformada de Fourier preserva tanto a homogeneidade quanto a regularidade (assumida a homogeneidade).

Proposição 4.16 (Transformada de Fourier de distribuições homogêneas e regulares)**.** *Seja $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Se F é homogênea de grau λ então $\hat{F}$ é homogênea de grau $-d-\lambda$. Se F é homogênea de grau λ e regular, então $\hat{F}$ é homogênea de grau $-d-\lambda$ e regular.*

5. Aplicações

> “ Sobre as pesquisas de d'Alembert e Euler, poderia dizer que se conhecessem esta expansão (série de Fourier), fizeram um uso muito imperfeito dela. Estavam ambos convencidos de que uma função arbitrária e descontínua nunca poderia ser representada por uma série desse tipo, e nem parece que alguém haveria desenvolvido uma constante em cossenos de arcos múltiplos - o primeiro problema que tive que resolver na teoria do calor.”
>
> *J. Fourier, 1808-9* [4]

Nesta seção exploraremos algumas aplicações das distribuições na análise de equações diferenciais, especialmente as lineares.

---

[4]Transcrito de [4], tradução própria. Justificamos esta epígrafe como motivadora para a presente seção, observando que todo o trabalho feito para generalizar o conceito de função encontra suas principais aplicações em problemas com raízes antigas, como o estudo do calor feito por Fourier. Este trabalho inspirou o estudo de outras EDP's lineares com o método de Fourier, e foi o estopim para um período de grande evolução nas técnicas da análise.

Definição 5.1 (Solução fundamental e polinômio característico)**.** Considere o operador diferencial $L = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha \partial_x^\alpha$ sobre funções definidas em $\mathbb{R}^d$, com constantes complexas a_α. Uma solução fundamental de L é uma distribuição F tal que $L(F) = \delta$. O polinômio característico de L é $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha$.

Esses conceitos têm utilidade na resolução de equações do tipo $Lu = f$, onde $f \in \mathcal{D}$ é dada. Se existe uma solução fundamental F, então $T : \mathcal{D} \to C^\infty$, $T : f \mapsto F * f$ é a inversa de L, isto é, $LT = TL = \text{Id}$ (com L, T e Id restritos a $\mathcal{D}$). De fato, note que $\partial_x^\alpha (F * f) = F * (\partial_x^\alpha f) = (\partial_x^\alpha F) * f \implies L(F * f) = F * (Lf) = (LF) * f \implies LT(f) = TL(f) = \delta * f = f$. Portanto, quando u e f são funções teste, a solução u de $Lu = f$ é $T(f) = F * f$.

Quanto ao polinômio característico, observe sua relação com a transformada de Fourier aplicada em L. Se $f \in \mathcal{S}$ então $(Lf)^\wedge = P\hat{f}$. É razoavel esperar, portanto, que em alguns casos seja possível obter uma solução fundamental F por meio de P, fixando $f = F$ e notando que $(Lf)^\wedge = P\hat{f} \implies \hat{\delta} = P\hat{F} \implies F = \int_{\mathbb{R}^d} (1/P(\xi)) e^{2\pi i x \xi} d\xi$. Este é um bom candidato a solução fundamental quando o anulamento do polinômio $P(\xi)$ não impede a interpretação da integral F como uma distribuição.

Um exemplo em que é possível obter F a partir de P dessa forma é o Laplaciano $L = \Delta = \sum_{j=1}^d \partial^2 / \partial x_j^2$ em $\mathbb{R}^d$. Nesse caso, $1/P(\xi) = 1/(-4\pi^2 |\xi|^2)$, e as soluções fundamentais obtidas através da transformada inversa de Fourier desta função coincidem com soluções radiais encontradas através dos métodos clássicos (separação de variáveis, fórmula de Poisson, etc.).

De forma geral, a expressão

$$F = \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{P(\xi)}) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

não define uma distribuição. Entretanto, é possível contornar este obstáculo e obter uma solução fundamental para qualquer operador diferencial linear a coeficientes constantes.

Teorema 5.2 (Malgrange-Ehrenpreis)**.** *Todo operador diferencial linear a coeficientes constantes L sobre $\mathbb{R}^d$ possui solução fundamental.*

Demonstração. Daremos um esboço de demontração. Note que se ignorarmos o potencial problema de convergência de F, temos, para $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{1}{P(\xi)}) e^{2\pi i x \xi} d\xi dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)} d\xi.$$

Definimos o polinômio $p(z) = P(z, \xi')$, para $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_d)$ fixo. Usando o fato de que p possui m raízes complexas, é possível encontrar, para cada valor de ξ', um correspondente valor $n(\xi')$ (uniformemente limitado sobre ξ') tal que $P(\xi_1, \xi')$

é distante de zero quando $\mathrm{Im}(\xi_1) = n(\xi')$. Além disso, $\xi' \mapsto n(\xi')$ é uma função mensurável. Estas propriedades nos permitem definir

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathrm{Im}(\xi_1)=n(\xi')} \frac{\hat{\varphi}(-\xi)}{P(\xi)} d\xi_1 d\xi'$$

que é a solução fundamental buscada, escrita de forma bem definida. □

Corolário 5.3. *Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, então existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $Lu = f$.*

Demonstração. Tome $u = F * f$, onde F é solução fundamental de L. □

Em alguns casos é conveniente trabalhar com uma aproximação à solução fundamental (e.g. é possível tomar uma aproximação com a intenção de iterativamente melhorá-la e obter uma solução fundamental). Essa aproximação, definida a seguir, é denominada parametriz. Uma classe especial de parametrizes, as regulares, nos levam a uma propriedade importante sobre a regularidade de soluções de equações diferenciais, enunciada mais adiante.

Definição 5.4 (Parametriz)**.** Seja L um operador diferencial linear a coeficientes constantes. Uma parametrix de L é uma distribuição Q que satisfaz $LQ = \delta + r$, em que $r \in \mathcal{S}$ é um termo de erro. Se Q é uma distribuição regular, chamamos de Q de parametriz regular.

A seguinte classe de operadores generaliza o operador de Laplace e é rico em propriedades interessantes. Por exemplo, sempre possui parametriz regular.

Definição 5.5 (Operador Elíptico)**.** Um operador diferencial linear a coeficientes constantes é elíptico se seu polinômio característico P satisfaz $c\,|\xi|^m \leq |P(\xi)|$, para algum $c > 0$ e todo ξ suficientemente grande.

Proposição 5.6. *Todo operador elíptico possui parametriz regular Q.*

Observação 5.7. Um detalhe técnico bastante útil é que para todo $\epsilon > 0$, é possível tomar Q com suporte na bola $\overline{B_\epsilon(0)}$.

Finalmente, mostramos a ligação das parametrizes regulares com uma propriedade que garante a suavidade das soluções de algumas equações diferenciais.

Definição 5.8 (Hipoeliticidade)**.** Seja $\Omega \in \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto e $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$. O operador diferencial linear a coeficientes constantes L é denominado hipoelítico se $LU \in C^\infty(\Omega) \implies U \in C^\infty(\Omega)$.

Observação 5.9. O prefixo "hipo" representa o fato de que todo operador elíptico é hipoelítico. O contrário não vale (e.g. o operador de calor). De fato, a seguinte proposição completa a cadeia de implicações: L é elíptico $\implies$ L possui parametriz regular $\implies$ L é hipoelítico.

Proposição 5.10. *Todo operador diferencial linear a coeficientes constantes com parametriz regular é hipoelítico.*

O leitor pode se perguntar neste momento se existe uma hipótese mais restritiva envolvendo parametrizes regulares, que fornece resultados mais quantitativos sobre as soluções da equação $Lu = f$. A resposta é afirmativa. As distribuições de Calderón-Zygmund são distribuições regulares, limitadas em um sentido especialmente engendrado para que os operadores $T(f) = f * K$ (onde K é de Calderón-Zygmund) generalizem a transformada de Hilbert ($K = \mathrm{pv}(1/x)$), mantendo a teoria L^p construída ao seu redor. Notavelmente, T se estende a um operador limitado em L^p, $1 < p < \infty$. Se L possui uma parametriz que é uma distribuição de Calderón-Zygmund, é possível aproveitar as cotas L^p desse tipo para obter estimativas sobre a solução u de $Lu = f$.

6. Metodologia

A execução do trabalho se deu sobretudo com a pesquisa bibliográfica e resolução de exercícios por parte do aluno, junto à implementação de críticas e sugestões do orientador. O cronograma de estudos inicialmente proposto se desenvolveu sem entraves.

Referências

[1] F.G. Friedlander. *Introduction to the Theory of Distributions.* Cambridge University Press, 1982.

[2] Jorge Hounie. *Teoria Elementar das Distribuições.* IMPA, 1979.

[3] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag, 1983.

[4] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Press, 2003.

[5] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces.* Princeton University Press, 2005.

[6] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Functional Analysis: An Introduction to Further Topics in Analysis.* Princeton University Press, 2011.

[7] Walter A. Strauss. *Partial Differential Equations: An Introduction.* Wiley, 2008.