Анализ на устойчивость по Ляпунову:

$N(0) = \frac{K}{C+1}$
$\frac{K}{C+1} = N_0$
$C = \frac{K}{N_0} - 1; K = (C+1)N_0;$
$N = \frac{(C+1)N_0 e^{ta}}{C+e^{ta}}$
$f(t) = \frac{Ke^{ta}}{(\frac{K}{N_0}-1)+e^{ta}}$
Частное решение в общем случае:
$\phi(t) = \frac{Ke^{ta}}{(\frac{K}{A}-1)+e^{ta}}$
Необходимо для любого ϵ, чтобы нашлось b, такое, что:
$|f(0) - \phi(0)| < b$
$|f(t) - \phi(t)| < \epsilon$
1.
$|f(0) - \phi(0)| = |N_0 - A| < b$
Очевидно найдется, т.к. константа и значение ϵ никак не ограничивает
2.
$|f(t) - \phi(t)| = |\frac{Ke^{ta}(\frac{K}{N_0}-1+e^{ta}-\frac{K}{A}+1-e^{ta})}{(\frac{K}{N_0}-1+e^{ta})(\frac{K}{A}-1+e^{ta})}|$
$= |\frac{Ke^{ta}(\frac{K}{N_0}-\frac{K}{A})}{(\frac{K}{N_0}-1+e^{ta})(\frac{K}{A}-1+e^{ta})}| =$
$= |\frac{K^2e^{ta}(\frac{1}{N_0}-\frac{1}{A})}{N_0A(\frac{K}{N_0}-1+e^{ta})(\frac{K}{A}-1+e^{ta})}| =$
$= |\frac{K^2e^{ta}(A-N_0)}{N_0A(\frac{K}{N_0}-(1-e^{ta}))(\frac{K}{A}-(1-e^{ta}))}| =$
а) При а $<$ 0: $e^{ta} \to 0$ при $t \to \infty$
$= |\frac{K^2e^{ta}(A-N_0)}{N_0A(\frac{K}{N_0}-1)(\frac{K}{A}-1)}|$

Очевидно e^{ta} будет стремиться к бесконечности в знаменателе - все выражение стремится к 0 - подходит для любого ϵ и асимптотически устойчиво

б) При а $>=$ 0
$= |\frac{K^2e^{ta}(A-N_0)}{N_0A(\frac{K^2}{N_0A}-\frac{K}{N_0}(1-e^{ta})-\frac{K}{A}(1-e^{ta})+(1-e^{ta})^2)}| =$

Поделим на e^{ta}. Зная, что оно стремится к ∞ мы можем уничтожить некоторые значения

$= |\frac{K^2(A-N_0)}{N_0A(\frac{K}{N_0}+\frac{K}{A}-2+e^{ta})}|$

Очевидно знаменатель стремится к ∞, а числитель константа - предел равен 0 - асимптотически устойчиво

———————————————————————————

Для $N(1)$

$N(1) = N_0$

$N_0 = \frac{Ke^a}{C+e^a}$

$f(t) = \frac{Ke^{ta}}{\frac{e^a(K-N_0)}{N_0}+e^{ta}}$

$f(t) = \frac{Ke^tN_0}{(K-N_0)+e^tN_0}$

Общий случай частного решения

$N(1) = A$

$\phi(t) = \frac{Ke^tA}{(K-A)+e^tA}$

Необходимо для любого ϵ, чтобы нашлось b, такое, что:

$|f(1) - \phi(1)| < b$

$|f(t) - \phi(t)| < \epsilon$

1.

$|\frac{KeN_0}{(K-N_0)+eN_0} - \frac{KeA}{(K-A)+eA}| < b$

Очевидно разность констант - можно найти b (Значения не ограничивает второе условие (вроде как так это работает))

2.

$|\frac{Ke^tN_0}{(K-N_0)+e^tN_0} - \frac{Ke^tA}{(K-A)+e^tA}| < \epsilon$

$|e^tK(\frac{N_0((K-A)+e^tA)-A((K-N_0)+e^tN_0)}{((K-N_0)+e^tN_0)((K-A)+e^tA)})| < \epsilon$

$|e^tK(\frac{N_0K-AN_0+e^tAN_0-AK+N_0A-e^tN_0A}{(K-N_0)(K-A)+(K-N_0)e^tA+(K-A)e^tN_0+AN_0e^{2t}})| < \epsilon$

Поделим на e^t:

$|\frac{K^2(N_0-A)}{\frac{(K-A)(K-N_0)}{e^t}+(K-N_0)A+(K-A)N_0+AN_0e^t}| < \epsilon$

При $t \to \infty$ очевидно знаменатель содержит e^t, а числитель является константой. Значит разность стремится к 0, значит всегда найдется значение, меньшее ϵ вне зависимости от параметров. Асимптотически устойчиво, потому что предел равен 0.

Вывод: асимптотически устойчиво для любых значений K и a (K $>$ 0, т.к. это максимальное значение популяции)