ĐÀO HỮU HỒ

HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TOÁN

XÁC SUẤT - THỐNG KÊ

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐÀO HỮU HỒ

HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TOÁN

XÁC SUẤT - THỐNG KÊ

(In lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Chịu trách nhiệm nội dung:

Hội đồng nghiệm thu giáo trình
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN

Người nhận xét: GS. TS NGUYỄN VĂN HỮU
TS PHAN VIẾT THƯ

Biên tập: LAN HƯƠNG

Kiểm tra can: BÙI SAO MAI

Trình bày bìa: NGUYỄN NGỌC ANH

HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT - THỐNG KÊ

Mã số: 1K-64 ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 cm tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội
Số xuất bản: 381 - 2007/CXB/10 - 64/ĐHQGHN, ngày 25/05/2007
Quyết định xuất bản số: 421 KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.

Mục lục

Lời nói đầu

Lý thuyết Xác suất và Thống kê toán học là môn học được đưa vào giảng dạy ở hầu hết các trường đại học và cao đẳng, bởi Xác suất Thống kê (XSTK) là công cụ để giải quyết các vấn đề chuyên môn của rất nhiều lĩnh vực. Nhưng XSTK cũng là môn toán khó. Rất dễ bị nhầm lẫn, bị sai khi giải các bài toán về XSTK nếu người giải phân tích vấn đề không chặt chẽ, chính xác. Không ít người khi học môn XSTK rơi vào tình trạng lúng túng khi xem hai cách giải khác nhau, trong đó có cách giải sai, nhưng không phân biệt được, và nói chung là nghe giảng thế nào thì biết như thế.

Để giúp bạn đọc nhanh chóng tìm được cách giải đúng của các bài toán XSTK, theo gợi ý của một số đồng nghiệp, tôi biên soạn cuốn "Hướng dẫn giải các bài toán Xác suất Thống kê". Trong mỗi vấn đề, tôi nêu một số nhận xét mang tính chất kinh nghiệm nhưng lại là chìa khoá để nhận biết ra cách giải chúng, cũng như một số sai lầm mà người học hay mắc phải, để giúp bạn đọc phân biệt được và biết giải các bài toán với các ngữ cảnh khác nhau nhưng thực chất chúng thuộc cùng một mô hình.

*Các bài toán ở mức độ khó đối với người học XSTK ở mức độ 45 – 60 tiết sẽ được đánh dấu *.*

Để hiểu được các điều viết ở cuốn sách này, đòi hỏi bạn đọc đã phải học các phần lý thuyết tương ứng.

Để sử dụng cuốn sách này một cách có hiệu quả, bạn đọc cần đọc kỹ phần hướng dẫn, hiểu được các ví dụ, vì đó là các bài toán mẫu, sau đó phải làm bài tập. Khi làm bài tập bạn đọc nhớ vận dụng theo phần hướng dẫn và theo như các ví dụ, thì bạn đọc sẽ khắc phục được nhiều điều lúng túng không đáng có và sẽ biết giải các bài toán XSTK một cách tự tin.

Cuốn sách được viết với sự động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện của Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội. Tác giả xin được nói lời cám ơn sâu sắc.

Tác giả bày tỏ lời cám ơn GS.TS. Nguyễn Văn Hữu và TS. Phan Viết Thư đã đọc và cho những đánh giá quý báu.

Cuốn sách được ra mắt bạn đọc là nhờ sự giúp đỡ tích cực và hiệu quả của Nhà xuất bản, đặc biệt là Ban biên tập, mà tác giả muốn nói lời cảm ơn chân thành.

Vì khả năng có hạn, giáo trình khó tránh khỏi sai sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc để cuốn sách được thêm hoàn thiện.

Hà Nội, ngày 16 tháng 11 năm 2002

Tác giả

Chương 1

Tính xác suất của một biến cố

Ở mức độ cơ bản, để tính xác suất của một biến cố ta thấy có các cách sau:

- Tính bằng định nghĩa (cổ điển, hình học);
- Dùng công thức cộng và nhân xác suất;
- Dùng công thức xác suất đầy đủ và Bayes;
- Dùng công thức Bernoulli.

Có bài toán có thể dùng được vài cách, nhưng có bài chỉ có thể dùng được một cách nào đó, vì vậy khi tiếp cận với từng cách tính bạn đọc cần lưu ý tới các đặc điểm dấu hiệu của nó để nhận dạng được mô hình.

Trước hết cần phải nhắc lại rằng: *Xác suất của biến cố A được ký hiệu P(A), là một con số nói lên khả năng xảy ra biến cố A,là phần xác định của biến cố ngẫu nhiên A, trong nhiều tình huống xác suất còn được hiểu là một tỷ lệ nào đó*. Vì xác suất là con số nói lên khả năng xảy ra, chính vì vậy mà con số này chỉ cần nằm trong đoạn từ 0 đến 1 (Trong đời thường người ta không nói "khả năng ngày mai trời mưa là âm 10%" và khi nói "Em này 100% đỗ" thì mọi người đều hiểu rằng em này chắc chắn đỗ (100% = 1), nghĩa là trong đời thường người ta dùng một con số dưới dạng phần trăm, phần nghìn từ 0 đến 100% để biểu thị khả năng xảy ra một hiện tượng nào đó).

1.1 Tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển

Với giả thiết về tính đồng khả năng của các biến cố sơ cấp, theo định nghĩa cổ điển P(A) được tính như sau:

$$P(A) = \frac{\text{Số biến cố sơ cấp (bcsc) thuận lợi cho biến cố A}}{\text{Số trường hợp (bcsc) có thể xảy ra khi phép thử được thực hiện}}$$

Như vậy để tìm P(A) ta chỉ cần tìm 2 con số ở tử và mẫu số với sự trợ giúp của giải tích tổ hợp. Đối với nhiều người học, tính P(A) bằng định nghĩa cổ điển là bài toán khó. Tôi xin nêu một cách phân tích và tính toán như sau:

Số có thể có của phép thử phụ thuộc vào phép thử, thế mà để tìm con số này nhiều bạn đã bỏ qua, không quan tâm gì đến phép thử của bài toán là thế nào. Đó là một sai lầm. Khi tìm số các trường hợp thuận lợi nếu ta đưa vào nhiều loại phép thử quá thì cũng làm cho bài toán rối lên.

Vì vậy khi giải bài toán này, đề nghị bạn hãy tư duy theo các bước như sau:

- Hãy trả lời cho được: Ở đây phép thử là thế nào? Chưa trả lời được điều này thì đừng vội đi tìm số có thể hay số thuận lợi làm gì, vì nếu tìm, bạn sẽ chỉ theo cảm tính, cho nên dễ bị sai hoặc không lý giải rõ ràng được.

Thực ra nếu phải dùng đến giải tích tổ hợp để tìm, thì phép thử của bài toán có thể đưa về chỉ có 2 loại. Đó là một lần thực hiện hay nhiều lần thực hiện? Bạn hãy đọc kỹ đầu bài để trả lời đúng câu hỏi này. (Bạn cần phân biệt số lần thực hiện với số cách thực hiện. Chẳng hạn nếu lấy ra k phần tử từ một tập gồm n phần tử ($k \leq n$), mà thứ tự của các phần tử không có ý nghĩa gì thì đó là lấy theo nghĩa tổ hợp, tức là một lần thực hiện (lấy cùng lúc hay lấy đồng thời). Số cách để thực hiện là C_n^k). Số cách của hoán vị, số cách thực hiện theo nghĩa của chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp,... đều có thể tìm được bằng cách dùng tổ hợp và luật tích (Xem [1]). Như vậy bạn hãy chọn lấy một trong hai loại phép thử chứ không phải phức tạp gì. Xác định được phép thử rồi, bạn sẽ trả lời được ngay:

- Số cách có thể của phép thử là bao nhiêu?

- Số thuận lợi cho biến cố A là bao nhiêu? Để tìm số thuận lợi cho A ta chỉ cần gắn ràng buộc của A vào phép thử, hạn chế bớt số trường hợp có thể, dẫn đến số trường hợp thuận lợi cho A. (Cách tìm như vậy sẽ dễ hơn là cách đưa vào một phép thử mới).

Với cách phân tích như trên, về giải tích tổ hợp ta chỉ cần dùng đến tổ hợp và luật tích (thế là đủ), không cần quan tâm đến hoán vị, chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp,... Lý giải cho điều đó, bạn đọc có thể xem trong [1].

Ví dụ 1. Lấy ngẫu nhiên ra 8 con bài từ bộ tú lơ khơ 52 con. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Lấy được 5 con màu đỏ.

b) Lấy được 1 con cơ, 2 con rô, 3 con pic.

c) Lấy được 1 con at, 2 con J, 3 con 9 và 2 con 2.

d) Lấy được 3 con chủ bài (3 con cùng một chất đã xác định trước).

Lời giải: Ở đây phép thử là: Lấy cùng lúc ra 8 con bài (nghĩa là 1 lần thực hiện) theo nghĩa của tổ hợp. Vậy số cách có thể là:

$$C_{52}^{8} = \frac{52.51.50.49.48.47.46.45.}{8.7.6.5.4.3.2} = 752538150$$

Gọi A = {Lấy được 5 con màu đỏ trong 8 con bài lấy ra}

= {Lấy được 5 con đỏ và 3 con đen}

Để A xảy ra ta phải thực hiện 2 bước: Lấy ra 5 con đỏ từ 26 con đỏ và lấy ra 3 con đen từ 26 con đen. Số cách tương ứng là: C_{26}^{5} và C_{26}^{3}. Theo luật tích, số trường hợp thuận lợi cho A là:

$C_{26}^{5}.C_{26}^{3} = 171028000$

Do đó P(A)=171028000/ 752538150 =0,227268

Tương tự B={Lấy được 1 con cơ, 2 con rô, 3 con pic và 2 con nhep}

Để tìm số thuận lợi cho B ta phải thực hiện 4 bước:

Lấy 1 con cơ trong số 13 con cơ. Có C_{13}^{1} =13 cách.

Lấy 2 con rô trong số 13 con rô. Có C_{13}^{2}=13.12/2=78 cách.

Tương tự có C_{13}^{3} =13.12.11/3.2.1=286 cách lấy ra 3 con pic và C_{13}^{2}=78 cách lấy ra 2 con nhép. Vậy số thuận lợi cho B là: 13.78.286.78=22620312

P(B)=22620312 / 752538150=0,03006

$$P(C)=\frac{C_4^1.C_4^2.C_4^3.C_4^2}{C_{52}^8} = 4.6.4.6 / 75253815$$

$$= 0,0000007654$$

$$P(D)=\frac{C_{13}^3.C_{39}^5}{C_{52}^8} = 286.575757 / 752538150 = 0,2188148$$

Ví dụ 2. Công ty kinh doanh nước sạch quay số thưởng trên máy tính cho các hoá đơn đã thanh toán bằng cách dùng hàm random chọn ngẫu nhiên 1 số trong 10 chữ số từ 0 đến 9. Số hoá đơn gồm 7 chữ số. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Số hoá đơn trúng thưởng (hđtt) là số chẵn.

b) Số hoá đơn trúng thưởng có chữ số 9 đầu tiên và các chữ số khác nhau.

c) Số hđtt có chữ số 9 đầu tiên, các chữ số còn lại khác nhau và là số lẻ.

d) Số hđtt có chữ số 8 đầu tiên và là một số đối xứng.

e) Số hđtt có 4 chữ số liên tiếp trùng với năm sinh của chủ hoá đơn.

f) Số hđtt có đúng 4 chữ số trùng nhau.

g) Số hđtt có đúng 4 chữ số trùng nhau và có chữ số 9 đầu tiên.

h) Số hđtt có tổng của 3 chữ số cuối lớn hơn 24 .

Lời giải: 7 chữ số của hoá đơn đều cấu tạo từ 10 chữ số: 0,1,2,...8,9. Nhưng ở đây không phải lấy 1 lần ra 7 chữ số từ 10 chữ số, bởi lẽ lấy cùng lúc thì 7 chữ số lấy ra đều phải khác nhau (không có số nào được trùng lại), trong khi đó số hoá đơn có thể có nhiều chữ số trùng nhau. Phép thử ở đây là: 7 lần chọn, mỗi lần chọn 1 chữ số trong 10 chữ số từ 0 đến 9. Vậy số có thể của phép thử là: $C_{10}^1.C_{10}^1....C_{10}^1=10^7$.

Ký hiệu các biến cố ở các câu a), b),...., g), h) là A,B,...,G,H tương ứng. Số trường hợp thuận lợi tương ứng là:

Thứ tự phép thử:		I	II	III	IV	V	VI	VII	Σ
Số th.lợi cho b/cố	A:	10.	10.	10	10	10	10	C_5^1	$\Rightarrow 10^6.5$
Số th.lợi -nt-	B:	1.	9.	8.	7	6	5	4	$\Rightarrow$ 60480
Số -nt-	C:	1.	9.	8.	7	6	5	5	$\Rightarrow$ 75600
Số -nt-	D:	1.	10.	10.	10.	1.	1.	1	$\Rightarrow$ 1000
Số -nt-	E:	1.	1.	1.	1.	10.	10.	10.4	$\Rightarrow$ 400
Số -nt-	F:	10.	1.	1.	1.	9.	9.	$9.C_7^4$	$\Rightarrow$255150

Số	-nt-	G:	1.	1.	1.	1.	9.	9.	$9.C_6^3$	
			1.	9.	1.	1.	1.	9.	$9.C_6^4$	$\Rightarrow 25515$
Số	-nt-	H:	10.	10.	10.	10.	10			$\Rightarrow 100000$

Làm các phép chia cho số có thể 10000000 ta nhận được các xác suất cần tìm:

P(A)= 0,50	P(B)= 0,006048	P(C) = 0,00756
P(D) = 0,0001	P(E) = 0,00004	P(F)=0,025515
P(G) = 0,0025515	P(H) = 0,01	

Bây giờ ta giải thích cách tìm số các trường hợp thuận lợi.

Để thuận lợi cho A chữ số hàng đơn vị phải là số chẵn. Do đó có 5 cách chọn. Các chữ số còn lại, số cách chọn vẫn như số có thể, tức là 10.

Để thuận lợi cho B chữ số thứ I có 1 cách chọn, chữ số thứ II có 9 cách chọn (phải trừ chữ số 9), chữ số thứ III có 8 cách chọn (trừ 2 chữ số đã chọn), v.v...

Để thuận lợi cho C chữ số thứ I có 1 cách chọn, chữ số thứ VII có 5 cách chọn (vì có 5 chữ số lẻ, không phải trừ chữ số 9), (thoả mãn tính lẻ trước dễ tìm hơn), chữ số thứ II có 9 cách chọn (vì chỉ trừ chữ số thứ VII đã chọn), chữ số thứ III có 8 cách chọn, v.v...

Để thuận lợi cho D chữ số thứ I có 1 cách chọn, chữ số thứ VII có 1 cách chọn (phải chọn chữ số 8 vì để đối xứng), chữ số thứ II có 10 cách chọn (vì không có ràng buộc gì), nhưng chữ số thứ VI lại chỉ có 1 cách (chọn chữ số mà chữ số thứ II đã chọn, để đối xứng), v.v...

Để thuận lợi cho E: Giả sử 4 vị trí đầu trùng với năm sinh của chủ hoá đơn. Năm sinh chưa biết, nhưng là một số xác định, vậy mỗi chữ số chỉ có một cách chọn, chữ số thứ V có 10 cách (vì không có ràng buộc gì), chữ số thứ VI có 10 cách, thứ VII có 10 cách. Nhưng năm sinh có thể ở 4 vị trí đầu tiên hoặc 4 vị trí liên tiếp từ vị trí II đến vị trí V, hoặc từ vị trí IV đến vị trí VII, tức là có 4 trường hợp.

Để thuận lợi cho F: Giả sử 4 vị trí đầu là 4 vị trí có chữ số trùng nhau. Khi đó vị trí I có 10 cách chọn, 3 vị trí sau đều có 1 cách chọn (phải chọn chữ số đã chọn ở vị trí I). Chữ số vị trí V có 9 cách chọn (phải trừ 1 chữ số trùng nhau đã chọn), chữ số vị trí VI có 9 cách, vị trí VII cũng có 9 cách (chỉ trừ 1 chữ số trùng nhau), 4 chữ số trùng nhau không nhất thiết ở 4 vị trí đầu, mà ở 4 vị trí tuỳ ý trong 7 vị trí, nên ta có $C_7^4=35$ cách.

Để thuận lợi cho G ta phải xét 2 trường hợp: chữ số trùng nhau là chữ số 9, khi đó số cách là:$1.1.1.1.9.9.9.C_6^3$ (vì vị trí đầu tiên là cố định, còn chọn 3 vị trí có thể thay đổi trong 6 vị trí); hoặc chữ số trùng nhau không phải là chữ số 9, khi đó số cách là:$1.9.1.1.1.9.9.C_6^4$ (vì 4 chữ số trùng nhau có thể ở trong 4 vị trí trong 6 vị trí).

Để thuận lợi cho H: Chữ số thứ I đến thứ IV đều có 10 cách (vì không có ràng buộc gì), còn 3 chữ số cuối có một ràng buộc chung với nhau là có tổng >24. Ba chữ số ấy chỉ có thể là: 999 (có 1 trường hợp), 998 (có 3 trường hợp), 997 (có 3 trường hợp 997;979;799), 988 (có 3 trường hợp). Vậy có 10 trường hợp.

Ví dụ 3. Đoàn tàu điện gồm 3 toa tiến vào một sân ga, ở đó đang có 12 hành khách chờ lên tàu. Giả sử hành khách lên tàu một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau; mỗi toa còn ít nhất 12 chỗ trống. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Tất cả cùng lên toa II.

b) Tất cả cùng lên một toa.

c) Toa I có 4 người, toa II có 5 người, còn lại toa III.

d) Toa I có 4 người.

e) Hai hành khách A và B cùng lên một toa.

f) Một toa 4 người, một toa 5 người, một toa 3 người.

Lời giải: Ở đây bài toán không quan tâm đến chỗ ngồi mà chỉ quan tâm đến toa. Phép thử ở đây là: Mỗi người chọn cho mình một toa. Do đó có 12 lần thực hiện (ai không chọn thì người đó không lên tàu). Mỗi lần chọn là chọn 1 trong 3 toa nên có $C_3^1 = 3$ cách chọn. (Cho mỗi toa còn ít nhất 12 chỗ trống để tất cả cùng lên một toa cũng được (cho bài toán đỡ phức tạp)). Theo luật tích ta có số có thể của phép thử là: 3^{12}.

Kí hiệu các biến cố ở các câu a),b),...,e) tương ứng là A,B,...,E,F.

Số trường hợp thuận lợi (thtl) cho A là: 1.1.1....1=1.

(Mỗi người chỉ có 1 cách chọn là chọn toa II).

Số thtl cho B là: C_3^1.1.1...1=3.

(Người đầu tiên có 3 cách chọn, vì không có ràng buộc gì, còn những người khác chỉ có 1 cách chọn là chọn toa mà người đầu đã chọn).

Số thtl cho C là: $C_{12}^4 . C_8^5 . C_3^3 = 12!/4!\,5!\,3!$

(Phải có được 4 người (ai cũng được) trong số 12 người lên toa I, nên số cách là C_{12}^4, 5 người trong số còn lại lên toa II, nên số cách là C_8^5, v.v... Theo luật tích ta có số cần tìm).

Ta có kết quả tổng quát hơn như sau: *Số cách chia n phần tử ra thành k nhóm nhỏ với số phần tử trong mỗi nhóm là $n_1,..,n_k$, tất nhiên $n_i \geq 1$ và $n_1+..+n_k = n$. Theo tổ hợp ta có số cách cần tìm là:* $C_n^{n1} . C_{n-n1}^{n2} ... 1 = n!/(n_1!n_2!..n_k!)$ (Ở đây thứ tự các nhóm là cố định trước và các phần tử luôn được coi là khác nhau, thậm chí chúng giống nhau hoàn toàn (còn nếu thứ tự nhóm thay đổi (như câu f) và không có sự phân biệt các phần tử hoàn toàn như nhau thì kết quả sẽ không phải như vậy).

Số thtl cho D là: $C_{12}^4 . 2^8$.

(Ta chọn 4 người trong số 12 người lên toa I, có C_{12}^4 cách. 8 người kia lên 2 toa còn lại, có 2^8 cách).

Số thtl cho E là: $3.1.3.3...3 = 3^{11}$.

(Người chọn trước sẽ có 3 cách chọn, người chọn sau sẽ chỉ có 1 cách, 10 người kia không có điều kiện gì nên mỗi người có 3 cách).

Số thtl cho F là 3! 12! / (4!5!3!).

(Tương tự như câu c) nhưng không nhất thiết theo một thứ tự là 4 - 5- 3, mà theo thứ tự bất kỳ cũng được; tức là ta có 3! cách đổi chỗ 3 vị trí cho nhau)

Vậy: $P(A) = 1/ 3^{12}$; $P(B) = 3 / 3^{12}$

$P(C) = 12! / (4!\ 5!\ 3!\ 3^{12})$; $P(D) = C_{12}^4\ 2^8 / 3^{12}$;

$P(E) = 1 / 3$; $P(F) = 12! /(4!5!\ 3^{12})$.

Ví dụ 4. Thang máy của một khách sạn 10 tầng xuất phát từ tầng 1 với 5 khách chờ vào thang máy lên tầng. Mỗi khách đều có chủ ý của họ, nhưng ta không biết, nên coi như mỗi khách chọn tầng một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau. Tìm khả năng xảy ra các tình huống sau:

a) Tất cả cùng lên tầng V.

b) Tất cả cùng ra một tầng.

c) 5 người ra 5 tầng khác nhau.

d) 5 người ra 4 tầng khác nhau.

e)* 5 người ra 3 tầng khác nhau.

Lời giải: Ở đây phép thử là: mỗi người chọn một tầng cho mình nên có 5 lần thực hiện (phép thử lại thuộc mô hình ví dụ 2). Mỗi lần thực hiện có 9 cách chọn (vì đang ở tầng I vào thang máy lên tầng, nên không ai chọn tầng I nữa). Do đó theo luật tích số cách thực hiện sẽ là: $9.9.9.9.9 = 9^5 = 59049$.

Tương tự như câu a);b) ví dụ 3 số thtl cho câu a) và b) là: 1 và 9.

Tương tự như câu b) ví dụ 2 số thtl cho câu c) là: 9.8.7.6.5 = 15120.

5 người ra 4 tầng khác nhau, nghĩa là có 2 người cùng ra một tầng (2 người này có một người chọn tầng, một người đi theo). Bài toán quy về có 4 người ra 4 tầng khác nhau, nên số cách sẽ là: 9.8.7.6; nhưng lại có $C_5^2 = 10$ cách ghép 2 người ra cùng một tầng, vì vậy số thtl cho câu d) là: 9.8.7.6.10 = 30240. (Có thể lý luận cách khác như sau: Giả sử A và B ra cùng tầng, 3 người còn lại C,D,E ra 3 tầng khác nhau và khác tầng của A và B, khi đó số cách là: 9.1.8.7.6; nhưng cặp ra cùng tầng không nhất thiết là A và B, mà có thể là các cặp khác, và có C_5^2 cặp như vậy).

5 người ra 3 tầng khác nhau, tức là 5 người chia thành 3 nhóm: hoặc là 2 nhóm 2 và 1 nhóm 1 hoặc 1 nhóm 3 và 2 nhóm 1. Mỗi nhóm coi như 1 người khổng lồ. Ba người khổng lồ ra 3 tầng khác nhau, nên số cách là: 9.8.7. Nhưng ta lại có $C_5^1 . C_4^2/2 + C_5^3 = 25$ cách ghép 5 người thành 3 người "khổng lồ". Vì vậy số thtl cho câu e) là: 9.8.7.25 = 12600. (Để được 2 nhóm 2 và 1 nhóm 1 ta chọn ra 1 người (C_5^1 cách), còn lại 4 người chia hai nhóm, mỗi nhóm 2 người, sẽ có $C_4^2 /2 = 3$ cách (vì trong $C_4^2 = 6$ cách sẽ có 3 cách trùng lại)).

Các xác suất cần tìm tương ứng là:

$P(A) = 1 / 9^5$ $\qquad$ $P(B) = 9 / 9^5 = 0{,}000152$

$P(C) = 15120 / 9^5 = 0{,}256$ $\qquad$ $P(D) = 30240 / 9^5 = 0{,}512$

$P(E) = 12600 / 9^5 = 0{,}2134.$

Ví dụ 5. Viết 5 chữ số 1,2,3,4,5 lên 5 quả cầu như nhau. Chọn hú hoạ liên tiếp ra 3 quả cầu và xếp theo thứ tự từ trái qua phải, ta được một số gồm 3 chữ số. Tìm xác suất để nhận được số chẵn.

Lời giải: Rõ ràng ở đây phép thử là 3 lần thực hiện, mỗi lần lấy 1 quả trong số còn lại và xếp theo thứ tự từ trái qua phải. Do đó số có thể của phép thử là: 5.4.3 = 60 cách.

Số thtl của biến cố "nhận được số chẵn" là: 4.3.1 + 4.3.1 = 4.3.1.2 = 24. (Nhiều bạn đọc sẽ tìm ra con số 24 nhưng cách lập luận thì sai hẳn: Có 2 cách lấy ra được chữ số chẵn, còn lại có 4 cách lấy được chữ số thứ I, 3 cách lấy ra chữ số thứ II. Lập luận như vậy là không bám vào phép thử của bài toán. Số tìm được không phải là số thtl của biến cố "nhận được số chẵn" ứng với phép thử đang xét, vì phép thử ở đây chữ số hàng đơn vị (mà để thuận lợi cho biến cố đang xét, thì nó phải là chữ số chẵn) phải được lấy sau khi đã lấy 2 số đầu, còn theo cách lý luận trên thì chữ số hàng đơn vị lại lấy đầu tiên!).

Cách lập luận đúng là như sau: Để thuận lợi thì chữ số thứ III phải chẵn, tức là chữ số 2 hoặc 4. Nếu chữ số thứ III là 2 thì khi lấy chữ số thứ I và II ta phải loại bỏ chữ số 2 ra, vì vậy chữ số thứ I chỉ có 4 cách lấy; chữ số thứ II chỉ còn 3 cách và chữ số thứ III có 1 cách duy nhất là chọn chữ số 2. Tương tự nếu chữ số thứ III là 4 thì số cách thực hiện là: 4.3.1.

Vậy P(nhận được số chẵn) = 4.3.1.2 / 5.4.3 =0,40.

(Cũng có bạn sẽ tìm ra P(nhận được số chẵn) = 2 / 5 = 0,40; nhưng 5 và 2 không phải là số có thể và số thuận lợi ứng với phép thử này, mà là số có thể và số thuận lợi ứng với phép thử: chọn ngẫu nhiên 1 chữ số trong 5 chữ số).

Một lần nữa bạn đọc thấy: Phép thử có thể đưa về một trong 2 loại và ta chỉ cần dùng tổ hợp và luật tích.