TẬP ĐOÀN BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG
HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

BÀI GIẢNG
GIẢI TÍCH HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

HÀ NỘI-2013

CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT

3.1. Tích phân đường loại 1.

3.1.1. Định nghĩa.

Cho hàm hai biến số $z = f(x, y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$

+ Phân hoạch P cung $\overset{\frown}{AB}$ bởi n điểm

$$A = C_0, C_1, C_2, ..., C_n = B.$$

Ký hiệu Δ_i là độ dài các cung $\overset{\frown}{C_{i-1}C_i}$ $\forall i = 1, 2, ..., n$ và $\Delta_P = \max\{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n\}$.

+ Chọn một điểm tùy ý $M_i \in \overset{\frown}{C_{i-1}C_i}$.

Khi đó

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_i$$

được gọi là *tổng tích phân đường loại 1* của hàm $f(x, y)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Nếu giới hạn

$$I = \lim_{\Delta_P \to 0} \sigma_P$$

tồn tại, không phụ thuộc vào phép phân hoạch P và chọn điểm M_i, thì I được gọi là *tích phân đường loại 1* của hàm $f(x, y)$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$ (hay ta còn nói $f(x, y)$ khả tích trên cung $\overset{\frown}{AB}$) và được ký hiệu là $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds$. Người ta chứng minh được rằng nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc (cung xác định hàm số khả vi liên tục từng khúc) và hàm $f(x, y)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ thì hàm số $f(x, y)$ khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$.

Dựa vào định nghĩa, ta có các tính chất:

3.1.2. Tính chất.

+ $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)ds$.

+ $\int_{\overset{\frown}{AB}} 1ds = |\overset{\frown}{AB}|$ là độ dài của cung $\overset{\frown}{AB}$.

+ Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng $\rho(x, y)$ thì $m_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x, y)ds$ là khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$.

3.1.3 Công thức tính.

a) Cung $\overset{\frown}{AB}$ có dạng tổng quát

Trường hợp 1: Cho cung trơn từng khúc $\overset{\frown}{AB}$ có dạng $y = \varphi(x)$ $x \in [a, b]$ và hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx. \tag{3.1}$$

Trường hợp 2: Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng $x = \phi(y) \;\; y \in [c, d]$ và hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{c}^{d} f(\phi(y), y)\sqrt{1 + \phi'^2(y)}dy. \tag{3.2}$$

Chứng minh: Ta chứng minh cho trường hợp 1, trường hợp 2 là tương tự. Theo định nghĩa, giả sử $C_i(x_i, y_i), \Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}, \Delta_{y_i} = y_i - y_{i-1} \;\; \forall i = 1, 2, ..., n$. Khi Δ_{x_i} đủ nhỏ, ta có

$$\Delta_i \approx C_{i-1}C_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \Delta_{x_i}\sqrt{1 - \frac{\Delta_{y_i}}{\Delta_{x_i}}}.$$

Theo công thức số gia giới nội

$$\frac{\Delta_{y_i}}{\Delta_{x_i}} = \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}}{\Delta_{x_i}} = \varphi'(\xi_i) \quad x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \;\; \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \varphi(\xi_i))\sqrt{1 - \varphi'^2(\xi_i)}\Delta_{x_i}.$$

Đặt $\Delta_x = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_n\}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x, y)ds = \lim_{\Delta_x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \varphi(\xi_i))\sqrt{1 - \varphi'^2(\xi_i)}\Delta_{x_i} = \int\limits_{a}^{b} f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}dx.$$

Ví dụ 3.1. Tính tích phân $\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds$, trong đó $A(2, 0), B(0, 1)$.

Bài giải.

+ Phương trình đường thẳng AB có dạng

$$y = 1 - \frac{x}{2}.$$

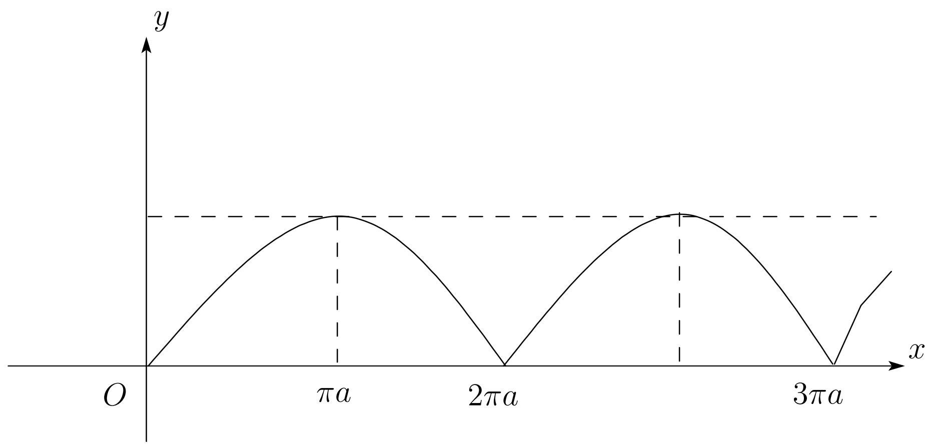
+ Theo công thức tính (3.1)

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds = \int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2\sqrt{1 + y'^2}dx = \int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2\sqrt{1 + \frac{1}{4}}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_{0}^{2} (1 - \frac{x}{2})^2 dx = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

b) Cung $\widetilde{AB}$ có dạng tham số trong mặt phẳng

Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng tham số

$$\widetilde{AB} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta. \tag{3.3}$$



Hình 1: Hình vẽ của ví dụ 3.2

và hàm số $f(x,y)$ liên tục trên cung $\widetilde{AB}$. Bằng cách thay $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ vào công thức (3.2), ta có

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt.$$

Ví dụ 3.2. Tính tích phân $\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds$, trong đó $\widetilde{AB}$ là một nhịp của cung cycloide

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad a > 0, 0 \le t \le 2\pi.$$

Bài giải.

Theo công thức (3.3), ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\widetilde{AB}} y^2 ds &= \int\limits_0^{2\pi} a^2\big(1-\cos t\big)^2\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} a^2\big(1-\cos t\big)^2 a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt \\
&= \sqrt{2}a^3\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^5}dt \\
&= 8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt \\
&= \frac{256a^3}{15}.
\end{aligned}$$

c) Cung $\widetilde{AB}$ có dạng tham số trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Cho cung trơn từng khúc $\widetilde{AB}$ có dạng tham số

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad \alpha \le t \le \beta. \\ x = z(t) \end{cases} \tag{3.4}$$

và hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trên cung $\widetilde{AB}$. Bằng cách hiểu tương tự như trong trường hợp cung $\widetilde{AB}$ trong mặt phẳng, ta có

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt.$$

Ví dụ 3.3. Tính $I = \int\limits_{\widetilde{AB}} (x^2 + y^2 + z^2)ds$, trong đó $\widetilde{AB}$ là đoạn xoắn có phương trình tham số

$$\widetilde{AB}\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at, \quad a > 0, 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Bài giải.

Theo công thức (3.4), ta có

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2(1 = t^2)$$

và

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = a\sqrt{2}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 + t^2)a\sqrt{2}dt \\ &= a^3\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 + t^2)dt \\ &= 2\sqrt{2}a^3(1 + \frac{4}{3}\pi^2). \end{aligned}$$

d) Cung $\widetilde{AB}$ được cho dưới dạng tọa độ cực bởi phương trình

$$r = r(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2.$$

Khi đó,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)\sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}d\varphi. \tag{3.5}$$

Ví dụ 3.4. Tính độ dài đoạn cong xác định bởi

$$\overset{\frown}{OA}\begin{cases} x^2 + y^2 = cz, \\ \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}, \quad \text{với } O(0,0,0), A(2,2,4). \end{cases}$$

Bài giải.

Đặt $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, khi đó phương trình đoạn cong $\overset{\frown}{OA}$ có dạng:

$$r^2 = cz, \tan\varphi = \tan\frac{z}{c}.$$

Từ $0 \le z \le 4$, suy ra rằng $0 \le \varphi \le \frac{4}{\varphi}$. Do đó,

$$\overset{\frown}{OA}\begin{cases} x = c\sqrt{\varphi}\cos\varphi, \\ y = c\sqrt{\varphi}\sin\varphi, \\ z = c\varphi, \quad \text{với } \ 0 \le \varphi \le \frac{4}{c}. \end{cases}$$

Theo công thức (3.4) và tính chất của tích phân đường loại 1, độ dài cung $\overset{\frown}{OA}$ được tính bởi

$$\begin{aligned} |\overset{\frown}{AB}| &= \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} ds \\ &= \int\limits_0^{\frac{4}{c}} \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi}d\varphi \\ &= \int\limits_0^{\frac{4}{c}} c\Big(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi}\Big)d\varphi \\ &= 2\sqrt{c}(1 + \frac{8}{3c}). \end{aligned}$$

e) Tọa độ trọng tâm của dây cung.

Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ có khối lượng riêng xác định bởi hàm số $f(x,y)$. Khi đó, tọa độ trọng tâm G của cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi công thức:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m}\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} xf(x,y)ds, \\ y_G = \frac{1}{m}\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} yf(x,y)ds, \end{cases} \tag{3.6}$$

trong đó, m là khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$.

Ví dụ 3.5. Xác định tọa độ trọng tâm của một nhịp của cung cycloide đồng chất

$$\widetilde{AB} \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad a > 0, 0 \le t \le \pi.$$

Bài giải.

Cung $\widetilde{AB}$ là đồng chất hay ta có thể giả thiết rằng $f(x, y) = c$ (hằng số). Theo công thức (3.6), tọa độ trọng tâm G của cung $\widetilde{AB}$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m} \int\limits_{\widetilde{AB}} x f(x, y) ds = \frac{c}{m} \int\limits_{\widetilde{AB}} x ds = \frac{4a}{3}, \\ y_G = \frac{1}{m} \int\limits_{\widetilde{AB}} y f(x, y) ds = \frac{c}{m} \int\limits_{\widetilde{AB}} y ds = \frac{4a}{3}. \end{cases}$$

3.2. Tích phân đường loại 2.

3.2.1. Định nghĩa.

Cho hàm véc tơ $\vec{F} = (P, Q, R)$ xác định trên cung $\widetilde{AB}$. Người ta còn viết F dưới dạng $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ hay

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Phép phân hoạch (P) cung $\widetilde{AB}$ bởi các điểm

$$A_0 = A, A_1, ..., A_n = B.$$

Chọn $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \widetilde{A_{i-1}A_i} \subset \widetilde{AB}$ với mỗi $i = 1, 2, ..., n$. Giả sử rằng $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta_{x_i}, \Delta_{y_i}, \Delta_{z_i})$. Khi đó,

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$$

được gọi là tổng tích phân đường loại 2 của hàm véc tơ $\vec{F}$ trên cung $\widetilde{AB}$ xác định bởi phân hoạch (P). Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta_{x_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0, \max \Delta_{y_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0, \max \Delta_{z_i} : i = 1, 2, ..., n \to 0$, tổng tích phân I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào phép phân hoạch (P) và phép chọn điểm M_i, thì I được gọi là *tích phân được loại 2* của hàm véc tơ $\vec{F}$ trên cung $\widetilde{AB}$ và ký hiệu

$$I = \int\limits_{\widetilde{AB}} P dx + Q dy + R dz.$$

Theo cách viết truyền thống, người ta còn viết dưới dạng

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Trong trường hợp đặc biệt khi cung $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong kín, tích phân đường loại 2 trên cung $\overset{\frown}{AB}$ được viết

$$\oint\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

3.2.2. Nhận xét.

Khi cung $\overset{\frown}{AB}$ trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), hàm véc tơ $\vec{F} = (P, Q)$, tích phân đường loại 2 của hàm $\vec{F}$ trên cung $\overset{\frown}{AB}$ được ký hiệu bởi

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Đặc biệt khi cung $\overset{\frown}{AB}$ là một đoạn $[a,b]$ nào đó trên $\mathbb{R}$, hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, tích phân đường loại 2 của hàm f trên $\overset{\frown}{AB}$ trở thành tích phân xác định.

3.2.3. Tích chất cơ học của tích phân được loại 2.

Để tính công sinh ra từ một điểm M chuyển động dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ từ điểm A tới điểm B dưới tác dụng của một lực $\vec{F} = \vec{F}(M)$, ta thực hiện phép phân hoạch (P) như trong định nghĩa trên. Phép chia cung $\overset{\frown}{AB}$ min tới mức ta có thể coi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ như đoạn thẳng, lực tác dụng vào chất điểm trên trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ không đổi và bằng $\vec{F}(M_i)$. Khi đó, công sinh ra trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ xấp xỉ với tích vô hướng $\vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Vậy I_n xác định bởi định nghĩa trên xấp xỉ với công sinh ra trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Do đó, giá trị của tích phân đường loại 2 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ chính là công sản sinh khi chất điểm M chuyển động dọc theo quỹ đạo $\overset{\frown}{AB}$ từ điểm A tới điểm B.

3.2.4. Cách tính tích phân được loại 2.

Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn và xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t : a \to b, A\big(x(a), y(a), z(a)\big), B\big(x(b), y(b), z(b)\big). \end{cases} \tag{3.7}$$

Các hàm số $P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t + Rz'_t\Big)dt.$$

Chứng minh.

Giả sử phân hoạch (P) trong định nghĩa được xác định bởi

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b.$$

Gọi $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i), z_i = z(t_i)$, và $A_i(x_i, y_i, z_i)$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ sao cho

$$\begin{cases} \Delta_{x_i} = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \\ \Delta_{y_i} = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \\ \Delta_{z_i} = z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\tau_i)\Delta_{t_i}, \end{cases}$$

trong đó $\Delta_{t_i} = t_i - t_{i-1}$. Khi đó, điểm $M_i\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big) \in \widetilde{A_{i-1}A_i}$ và

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(P\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)x'(\tau_i) + Q\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)y'(\tau_i) + R\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)z'(\tau_i)\Big)\Delta_{t_i}. \end{aligned}$$

Vế phải là tổng tích phân của hàm số

$$P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)$$

trên đoạn $[a, b]$. Đặt $\Delta_P = \max\{\Delta_{t_i} : i = 1, 2, ..., n\}$. Cho $\Delta_{t_i} \to 0$, ta có

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t + Rz'_t\Big)dt.$$

Ví dụ 3.6. *Tính* $I = \int\limits_{\widetilde{AB}} (ydx + zdy + xdz)$, *trong đó* $a > 0, \widetilde{AB} : \{x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, t : 0 \to 2\pi\}$.

Bài giải.

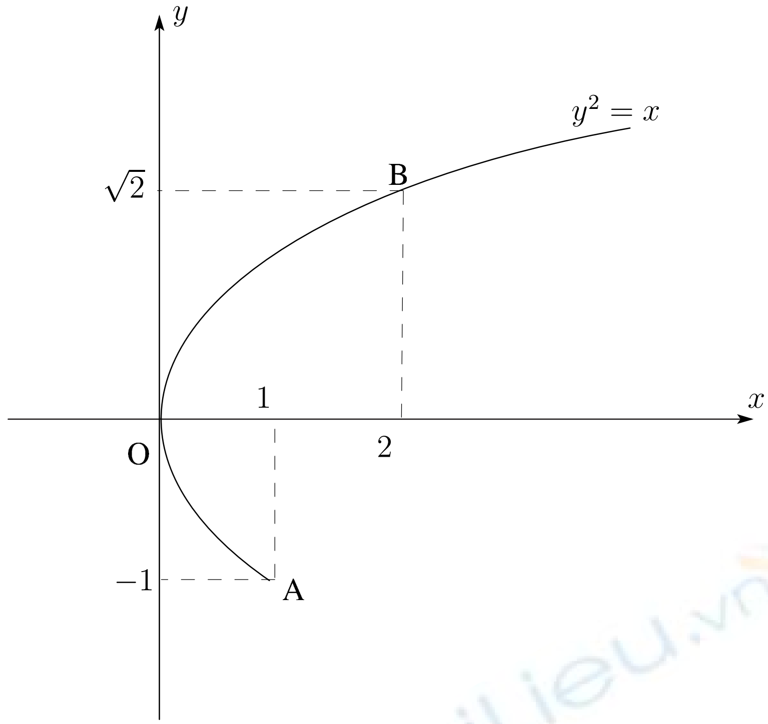
Theo công thức (3.7), ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} \Big(a\sin t(-a\sin t) + bt(a\cos t) + a\cos t.b\Big)dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \Big(- a^2\sin^2 t + ab(1+t)\cos t\Big)dt \\ &= -\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)dt + ab\int\limits_0^{2\pi}(1+t)\cos t dt \\ &= -\pi a^2. \end{aligned}$$

3.2.5. Chú ý.

Cho cung $\widetilde{AB} \subset (Oxy)$ trơn và xác định bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t : a \to b. \end{cases} \tag{3.8}$$



Hình 2: Hình vẽ của ví dụ 3.7

Các hàm số $P = P(x, y), Q = Q(x, y)$ liên tục trên $\widetilde{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b \Big(Px'_t + Qy'_t\Big)dt.$$

Ví dụ 3.7. Tính

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} x^2dx + xydy,$$

trong đó $\widetilde{AB} : x = y^2, A(1, -1), B(2, \sqrt{2})$.

Bài giải.

Theo công thức (3.8), nếu cung $\widetilde{AB} : x = \varphi(y), y \in [a, b]$, tích phân đường loại 2 được xác định bởi

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy &= \int\limits_a^b \Big(P(\varphi(y),y)\varphi'_y + Q(\varphi(y),y)\Big)dy \\
&= \int\limits_{-1}^{\sqrt{2}} (y^4 2y + y^3)dy \\
&= \int\limits_{-1}^{\sqrt{2}} (2y^5 + y^3)dy \\
&= (\frac{1}{3}y^6 + \frac{1}{4}y^4)\Big|_{-1}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{37}{12}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3.8. Tính

$$\oint\limits_{(E)} y^2dx - x^2dy,$$

trong đó $a > 0, b > 0, (E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Bài giải.

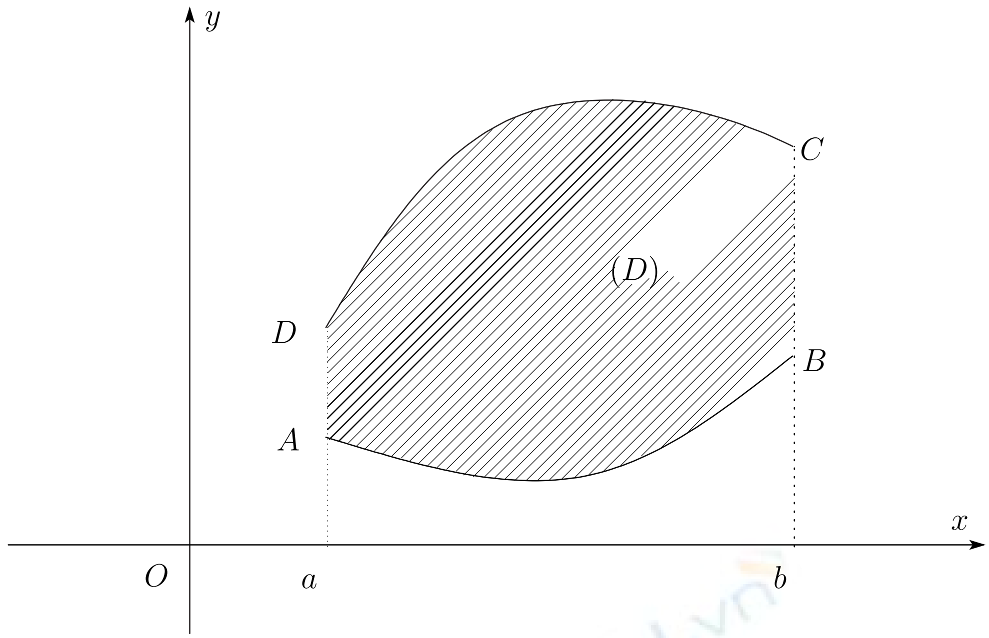
Ta chuyển đường elip (E) về dạng tham số. Đặt

$$x = a\cos t, y = b\sin t \quad \text{với} \quad t : 0 \to 2\pi.$$

Theo công thức (3.8), ta có

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{(E)} y^2dx - x^2dy &= \int\limits_0^{2\pi} \Big(b^2\sin^2 t(-a\sin t) - a^2\cos^2 t(b\cos t)\Big)dt \\
&= -ab\int\limits_0^{2\pi} (b\sin^3 t + a\cos^3 t)dt \\
&= -\frac{ab}{4}\int\limits_0^{2\pi} \Big(b(3\sin t - \sin 3t) + a(3\cos t + \cos 3t)\Big)dt \\
&= -\frac{ab}{4}\Big(b(-3\cos t + \frac{1}{3}\cos 3t) + a(3\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t)\Big)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3.2.6. Công thức Green.



Hình 3: Hình vẽ của *Trường hợp 1*.

Cho miền D trong mặt phẳng $\mathcal{R}^2$ là một miền liên thông, bị chặn và biên ∂D là một hay nhiều đường cong kín trơn từng khúc. Các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $D \cup \partial D$. Công thức Green được phát biểu như sau:

$$\iint\limits_{D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Chứng minh.

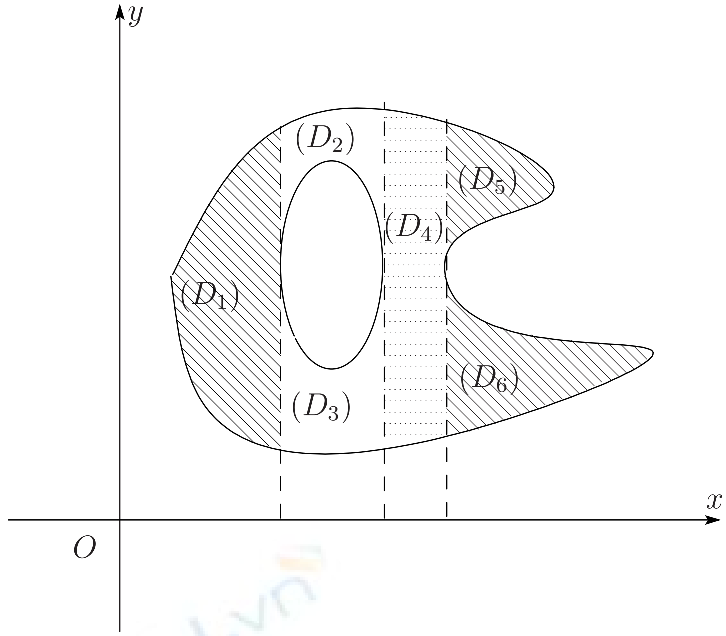
Ta xét các trường hợp của D như sau:

Trường hợp 1. $D = \{(x,y) : a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$.

Theo định lý Fubini, ta có

$$\begin{aligned}
-\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= -\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\
&= \int\limits_{a}^{b} \Big(P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))\Big) dx \\
&= \int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\widetilde{CD}} P(x,y)dx \\
&= \int\limits_{\widetilde{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\bar{BC}} P(x,y)dx + \int\limits_{\widetilde{CD}} P(x,y)dx + \int\limits_{\bar{DA}} P(x,y)dx \\
&= \oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

.



Hình 4: Hình vẽ của *Trường hợp 1*.

Bằng cách làm tương tự, ta cũng có

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} Q(x,y)dy. \tag{3.10}$$

Từ (3.9) và (3.10) kéo theo công thức Green được chứng minh.

Trường hợp 2. Miền (D) là miền đa liên.

+ Ta chia miền (D) thành các miền nhỏ $(D_1), (D_2), ...(D_n)$ bởi các đường thẳng song song với trục Oy

+ Theo trường hợp 1, công thức Green đúng với các miền nhỏ (D_i) với $i = 1, 2, ..., n$ hay

$$\iint_{D_i} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = \oint_{\partial D_i} Pdx + Qdy \ \ \forall i = 1, 2, .., n.$$

+ Tổng các tích phân đường của $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ trên cùng một dây cung theo hai chiều ngược nhau bằng không. Do đó,

$$\begin{aligned}\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy &= \iint_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy + ... + \iint_{D_n} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy \\ &= \oint_{\partial D_1} Pdx + Qdy + ... + \oint_{\partial D_n} Pdx + Qdy \\ &= \oint_{\partial D} Pdx + Qdy.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.9. Dùng công thức Green để tính tích phân đường sau

$$K = \oint_{\partial C} (xy + e^x \sin x + x + y)dx + (xy - e^{-y} + x - \sin y)dy,$$

trong đó $(C) : x^2 + y^2 \leq 2x$.

Bài giải.

Đặt $P(x, y) = xy + e^x \sin x + x + y, Q(x, y) = xy - e^{-y} + x - \sin y$. Khi đó,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (y + 1) - (x + 1) = y - x.$$

Theo công thức Green, ta có

$$\begin{aligned} K &= \iint_{(C)} (y - x)dxdy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (\sin\varphi - \cos\varphi) r^2 dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi - \cos\varphi) \cos^3 \varphi d\varphi \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

3.2.7. Định lý 4 mệnh đề tương đương.

Cho các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền đơn liên $D \subset \mathcal{R}^2$ (miền không có lỗ thủng nào). Khi đó, các mênh đề sau tương đương:

(i) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \;\; \forall (x, y) \in D$.

(ii) $\oint\limits_{\partial D_1} Pdx + Qdy = 0 \;\; \forall D_1 \subset D$.

(iii) $\int\limits_{\widetilde{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào 2 điểm A, B, với mọi $\widetilde{AB} \subset D$.

(iv) Tồn tại $u(x, y)$ xác định trên D sao cho $du = Pdx + Qdy$.

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$ Giả sử $D_1 \subset D$, Theo công thức Green, D là miền đơn liên và giả thiết (i), ta có

$$\oint_{\partial D_1} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dxdy = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Giả sử 2 đường cong bất kỳ nối A với B là $\widetilde{AmB}$ và $\widetilde{AnB}$. Theo giả thiết (ii), ta có

$$\oint\limits_{\widetilde{AmBnA}} Pdx + Qdy = 0.$$

Khi đó

$$\int\limits_{\widetilde{AmB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\widetilde{BnA}} Pdx + Qdy = 0.$$

Hay

$$\int\limits_{\widetilde{AmB}} Pdx + Qdy - \int\limits_{\widetilde{AnB}} Pdx + Qdy = 0.$$

Như vậy, tích phân đường loại 2 của $Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường cong nối điểm A với B.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Giả sử $M(x, y) \in D$ bất kỳ. Đặt

$$u(x, y) = \int\limits_{\widetilde{AM}} Pdx + Qdy \text{ (có thể sai khác một hằng số).}$$

Theo giả thiết (iii), ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{u(x + \Delta_x, y_u(x, y)}{\Delta_x} \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x}\Big(\int\limits_{\widetilde{AM_1}} Pdx + Qdy - \int\limits_{\widetilde{AM}} Pdx + Qdy\Big) \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int\limits_{x}^{x+\Delta_x} P(z, y)dz,
\end{aligned}$$

trong đó $M_1(x+\Delta_x, y) \in D$. Theo tính chất của tích phân xác định, tồn tại $z = x+\theta\Delta_x, 0 < \theta < 1$ sao cho

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{1}{\Delta_x} \int\limits_{x}^{x+\Delta_x} P(z, y)dz = P(z, y).$$

Khi $\Delta_x \to 0$ thì $z \to x$. Theo tính liên tục của $P(x, y)$, ta cũng có $P(z, y) \to P(x, y)$ và do đó

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y).$$

Bằng cách làm tương tự, ta cũng chứng minh được rằng

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Như vậy, tồn tại $u(x,y)$ xác định trên D sao cho $du = Pdx + Qdy$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Từ giả thiết tồn tại $u(x,u)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$ và các đạo hàm riêng của P, Q liên tục trên D. Khi đó

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Theo định lý Schwarz, ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ví dụ 3.10. *Tính tích phân đường*

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{(x+y)dy + (x-y)dx}{x^2+y^2},$$

trong đó $A(-1,-1), B(1,1)$.

Giải.

Dễ thử lại rằng $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\forall (x,y) \in \mathcal{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Theo định lý 4 mệnh đề tương đương, tích phân đường I không phụ thuộc vào đường cong nối A với B. Ta có nhiều cách chọn đường cong nối A với B. Dưới đây là một cách chọn

$$(C) : x^2 + y^2 = 2.$$

Đặt $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t$ $\; t : -\frac{3\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$. Khi đó

$$I = \int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \pi.$$

Hệ quả 3.11. *Nếu các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền $\mathcal{R}^2$ và tồn tại $u(x,y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$, thì*

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

hoặc

$$u(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} P(x_0,y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} Q(x,y)dx + C.$$

Ví dụ 3.12. *Xác định hàm $u(x,y)$, biết*

$$du = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}, u(0,1) = 5.$$

Giải:

Đặt

$$P(x, y) = \frac{(x + 2y)}{(x + y)^2}, Q(x, y) = \frac{y}{(x + y)^2}.$$

Theo hệ quả 3.11, ta chọn $x_0 = 1, y_0 = 0$ và

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy \\ &= \ln(x + y) - \frac{y}{x + y} + C. \end{aligned}$$

Từ $u(0, 1) = 5$, ta có

$$\ln(0 + 1) - \frac{1}{0 + 1} + C = 5 \Rightarrow C = 6.$$

Vậy

$$u(x, y) = \ln(x + y) - \frac{y}{x + y} + 6.$$

Hệ quả 3.13. *Nếu các hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền D, $\overset{\frown}{AB} \subset D$ và tồn tại $u(x, y)$ sao cho $du = Pdx + Qdy$, thì*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A).$$

Ví dụ 3.14. *Tính tích phân đường*

$$J = \int_{\overset{\frown}{AB}} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 1)dy,$$

trong đó $A(a, 0), B(0, a)$.

Giải:

Đặt

$$P(x, y) = e^x \sin y, Q(x, y) = e^x \cos y - 1.$$

Dễ thử lại rằng

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}^2.$$

Theo hệ quả 3.13, ta chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$ và

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy \\ &= e^x \sin y - y + C. \end{aligned}$$

Do vậy

$$J = \int_{\overset{\frown}{AB}} e^x \sin y dx + (e^x \cos y - 1)dy = u(0, a) - u(a, 0) = \sin a - a.$$

Ví dụ 3.15. *Tính tích phân đường*

$$J = \int\limits_{\widetilde{AB}} \Big(2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)\Big)dx - x^2\sin(x+y)dy,$$

trong đó $A(\pi, 0), B(0, \pi)$.

Giải.

Đặt

$$P(x,y) = 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y), Q(x,y) = x^2\sin(x+y).$$

Dễ thử lại rằng

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \;\; \forall (x,y) \in \mathcal{R}^2.$$

Bằng cách làm tương tự như ví dụ 3.14, ta nhận được

$$u(x,y) = x^2\cos(x+y).$$

Theo hệ quả 3.13

$$J = \int\limits_{\widetilde{AB}} e^x \sin y dx + (e^x\cos y - 1)dy = u(0,\pi) - u(\pi,0) = \pi^2.$$

Ví dụ 3.16. *Tìm* m, n *để tích phân sau không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nối điểm* $A(0,0)$ *với điểm* $B(1,1)$

$$K = \int\limits_{\widetilde{AB}} \frac{y(1-x^2+my^2)dx + x(1-y^2+nx^2)dy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Từ đó, hãy tính K.

Giải.

Đặt

$$P(x,y) = \frac{y(1-x^2+my^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, Q(x,y) = \frac{x(1-y^2+nx^2)}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Theo định lý 4 mệnh đề tương đương, ta cần tính

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1 - x^4 + 3(m+1)x^2y^2 + 3(m-1)y^2 - my^4}{(1+x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 + 3(n-1)x^2 - nx^4 + 3(n+1)x^2y^2 - y^4}{(1+x^2+y^2)^3}.$$

Các điều kiện của 4 mệnh đề tương đương được thỏa mãn. Do đó, muốn K không phụ thuộc vào đường công nối điểm A với điểm B điều kiện cần và đủ là

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Đồng nhất các hệ số, ta nhận được $m = n = 1$.

Để tính K, ta cần viết phương trình đường thẳng $AB : y = x$. Theo công thức tính tích phân đường, ta nhận được

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{y(1-x^2+y^2)dx + x(1-y^2+x^2)dy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2xdx}{(1+2x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(1+2x^2)}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.3. Tích phân mặt loại 1.

3.3.1. Các khái niệm về mặt.

Một mặt cong S trong $\mathcal{R}^3$ được tạo bởi một ánh xạ liên tục

$$g : D \subset \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3.$$

Giả sử rằng $g(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$. Khi đó

+ Mặt S được gọi là *trơn*, nếu các đạo hàm riêng của các hàm số $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ liên tục trên miền D.

+ Mặt S được gọi là *trơn từng mảnh*, nếu mặt S có thể chia thành hữu hạn các mảnh trơn.

+ *Véc tơ pháp tuyến* của mặt trơn S là $\vec{n} = (A, B, C)$, trong đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \\ B &= \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \\ C &= \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Trong trường hợp đặc biệt $S : z = g(x,y) \ \ (x,y) \in D$. Khi đó, véc tơ pháp tuyến của mặt S là

$$\vec{n} = (-g'_x, -g'_y, 1).$$

+ *Mặt định hướng được:* Mặt trơn S được gọi là định hướng được, nếu với mỗi điểm $M \in S$ xác định được một véc tơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$ (gốc tại điểm M) liên tục trên S.

+ *Diện tích mặt:* Trong không gian $\mathcal{R}^3$, ta xét mặt S có phương trình

$$z = f(x,y) \ \ (x,y) \in D.$$

trong đó, hàm số f và các đạo hàm riêng của nó liên tục trên miền D. Phân hoạch P chia miền D thành n mảnh nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$ có các diện tích tương ứng $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Lấy một điểm tùy ý $N_i(x_i, y_i) \in D_i$. Gọi T_i là một phần của mặt phẳng tiếp xúc với S tại điểm $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S$ và hình chiếu vuông góc trên (Oxy) là miền D_i. Diện tích của mảnh T_i được ký hiệu là ΔT_i. Tương tự, ta cũng có các mảnh nhỏ trên mặt S là $S_1, S_2, ..., S_n$ và các diện tích tương ứng là $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Gọi góc tạo bởi giữa trục Oz và véc tơ pháp tuyến của T_i tại điểm M_i là α_i. Khi đó, ta nhận thấy rằng

$$\Delta D_i = \Delta T_i |\cos \alpha_i| \ \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Mặt khác, theo công thức tính véc tơ pháp tuyến ở trên, ta có

$$\vec{n} = \Big(-f'_x(M_i), -f'_y(M_i), 1 \Big).$$

Do đó

$$|\cos \alpha_i| = |\cos(\vec{n}, \vec{k})| = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)}}.$$

Khi đường kính của phân hoạch P là $\delta_P = \max\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ (trong đó d_i là đường kính của D_i) đủ nhỏ, thì $\Delta S_i \approx \Delta T_i$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Vì vậy, diện tích của mặt S có thể được tính xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)} \Delta D_i.$$

Dấu bằng xảy ra, khi độ dài phân hoạch $\Delta_P \to 0$. Khi đó, diện tích mặt S được tính bởi công thức

$$dt(S) = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(M_i) + f'^2_y(M_i)} \Delta D_i = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy. \qquad (3.12)$$

Khi đó, biểu thức

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dxdy$$

được gọi là *vi phân mặt*.

Nếu mặt trơn S được cho dưới dạng phương trình tham số

$$S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \ \ (u, v) \in D.$$

Bằng cách làm tương tự, ta cũng có $dS = \sqrt{AC - B^2} dudv$ và diện tích mặt cong cho bởi công thức

$$dt(S) = \iint_D \sqrt{AC - B^2} dudv, \qquad (3.13)$$