TẬP ĐOÀN BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

BÀI GIẢNG
GIẢI TÍCH HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

HÀ NỘI-2013

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Trong hoạt động khoa học và kỹ thuật thường gặp nhiều vấn đề có liên quan đến hàm nhiều biến số và các ứng dụng của chúng. Do vậy, giải tích hàm nhiều biến số là một môn học đang giữ một vị trí quan trọng trong các lĩnh vực ứng dụng và trong hệ thống các môn học của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông. Các kiến thức và phương pháp tiếp cận của giải tích hàm nhiều biến số đã hỗ trợ hiệu quả các kiến thức nền tảng cho các môn học như vật lý, xác suất thống kê, toán kỹ thuật, toán rời rạc và các môn chuyên ngành khác.

Bài giảng "Giải tích hàm nhiều biến số" được biên soạn lại theo chương trình qui định của Học viện cho hệ đại học chuyên ngành Điện tử-Viễn thông-Công nghệ thông tin với hình thức đào tạo theo tín chỉ. Do đối tượng sinh viên rất đa dạng với trình độ cơ bản khác nhau, chúng tôi đã cố gắng tìm cách tiếp cận đơn giản và hợp lý để trình bày nội dung theo phương pháp dễ hiểu hơn, nhằm giúp cho sinh viên nắm được các kiến thức cơ bản nhất.

Để vừa ôn tập, vừa tự kiểm tra kiến thức và để hình dung được mức độ của một đề thi hết môn, sau mỗi phần lý thuyết quan trọng chúng tôi thường đưa ra các ví dụ minh họa chi tiết. Nội dung được chia thành 4 chương. Chương 1 dành cho phép tính vi phân của hàm nhiều biến số. Chương 2 và 3 trình bày chi tiết về tích phân đường và tích phân mặt. Phương trình vi phân và các phương pháp giải được đưa ra trong chương 4. Các khái niệm và công thức được trình bày tương đối đơn giản và được minh họa bằng nhiều ví dụ với các hình vẽ sinh động. Các chứng minh khó được lược bớt có chọn lọc để giúp cho giáo trình không quá cồng kềnh nhưng vẫn đảm bảo được, để tiện cho sinh viên học tập chuyên sâu và tra cứu phục vụ quá trình học tập các môn học khác. Cuối mỗi chương học đều có các bài tập để sinh viên tự giải nhằm giúp các em hiểu sâu sắc hơn về lý thuyết và rèn luyện kỹ năng thực hành.

Tác giả hy vọng rằng giáo trình này có ích cho các em sinh viên và các bạn đồng nghiệp trong quá trình học tập và giảng dạy về môn học giải tích hàm nhiều biến số. Tác giả cũng cám ơn mọi ý kiến góp ý để giáo trình bài giảng này được hoàn thiện hơn nhằm nâng cao chất lượng dạy và học môn học này.

11/2013, Tác giả: PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

CHƯƠNG 1. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1.1. Không gian $\mathcal{R}^n$

1.1.1. Các phép toán

Cho hai véc tơ

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}^n, y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathcal{R}^n.$$

Khi đó, ta nhắc lại các phép toán quen thuộc trong không gian n chiều $\mathcal{R}^n$:

+ Phép cộng và trừ:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, ..., x_n \pm y_n).$$

+ Phép nhân véc tơ với 1 số thực:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n), \quad \forall \lambda \in \mathcal{R}.$$

+ Phép nhân vô hướng 2 véc tơ:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Khi đó, ta có véc tơ x vuông góc với y khi và chỉ khi $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = 0$.

+ Góc giữa 2 véc tơ $x \neq 0$ và $y \neq 0$ xác định bởi công thức:

$$\cos(x, y) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}}.$$

1.1.2. Chuẩn và hàm khoảng cách.

Cho véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}^n$. Khi đó, *chuẩn* của véc tơ x là một số thực được ký hiệu bởi $\|x\|$ và được xác định bởi

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Chuẩn có các tính chất cơ bản sau:

+ $\|x\| \geq 0 \;\; \forall x \in \mathcal{R}^n$ và $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

+ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \;\; \forall x \in \mathcal{R}^n, \lambda \in \mathcal{R}$.

+ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall x, y \in \mathcal{R}^n$.

Khi đó, khoảng cách giữa $x \in \mathcal{R}^n$ và $y \in \mathcal{R}^n$ được xác định bởi công thức

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

1.1.3. Tôpô.

Cho $x \in \mathcal{R}^n, \epsilon > 0$. Khi đó

+ $B(x,\epsilon) = \{y \in \mathcal{R}^n :\ \|y - x\| < \epsilon\}$ gọi là *hình cầu mở* có tâm tại điểm x và bán kính là ϵ.

+ $\bar{B}(x,\epsilon) = \{y \in \mathcal{R}^n :\ \|y - x\| \leq \epsilon\}$ gọi là *hình cầu đóng* có tâm tại điểm x và bán kính là ϵ.

+ Điểm $x \in M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là điểm *trong*, nếu tồn tại một hình cầu mở $B(x,\epsilon)$ sao cho $B(x,\epsilon) \subseteq M$. Tập hợp các điểm trong của M được gọi là *phần trong* của M và ký hiệu bởi $intM$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là tập mở, nếu $intM = M$.

+ Cho $M \subseteq \mathcal{R}^n$. Điểm x được gọi là điểm *biên* của M, nếu với mọi $\epsilon > 0$ thì $B(x,\epsilon)$ chứa những điểm thuộc M và những điểm không thuộc M. Tập hợp các điểm biên của M được ký hiệu là ∂M.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là một tập *đóng*, nếu $\partial M \subseteq M$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là *bị chặn* bởi $\alpha > 0$, nếu $\|x\| \leq \alpha\ \ \forall x \in M$.

+ Tập $M \subseteq \mathcal{R}^n$ gọi là tập *compact*, nếu M là tập đóng và bị chặn.

1.2. Hàm số nhiều biến

Cho $\emptyset \neq D \subseteq \mathcal{R}^n$. Khi đó, ánh xạ

$$f : D \to \mathcal{R}$$

xác định bởi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \longmapsto y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}$$

được gọi là một *hàm số nhiều biến*, Tập D được gọi là *miền xác định* của hàm số f. Các số $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các *biến số* của hàm số f.

Ví dụ 1.1. *Cho $R > 0$. Tìm miền xác định của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}.$$

Giải.

Theo định nghĩa, miền xác định D được xác định bởi

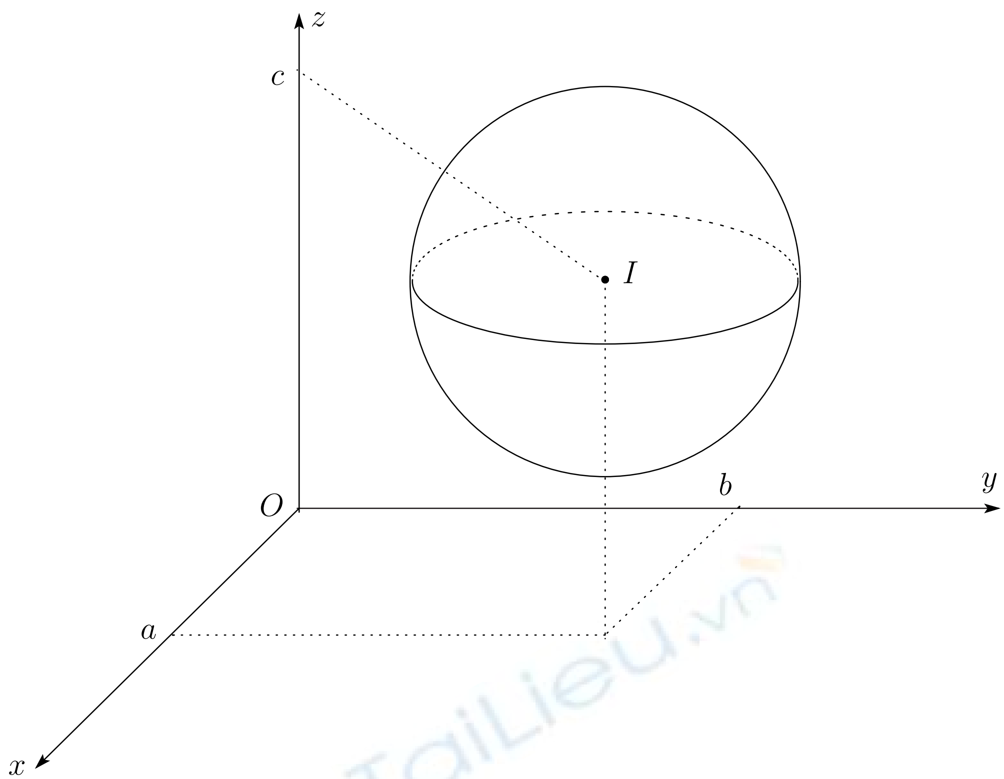
$$\begin{aligned} D =& \{x \in \mathcal{R}^n :\ R^2 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 \geq 0\} \\ =& \{x \in \mathcal{R}^n :\ \|x - 0\|^2 \leq R^2\} \\ =& \bar{B}(0, R). \end{aligned}$$

Dưới đây là một số mặt bậc 2 thường gặp trong không gian $\mathcal{R}^3$.

1.2.1. Mặt cầu

Phương trình:

$$(S) = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 :\ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2\}.$$



Hình 1: Mặt cầu.

Khi đó, điểm $I(a, b, c)$ gọi là *tâm* và R gọi là *bán kính* của mặt cầu (S).

1.2.2. Mặt Elipxoit

Phương trình:

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \; (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oxy) \; z = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$(Oyz) \; x = 0 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$(Oxz) \; y = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

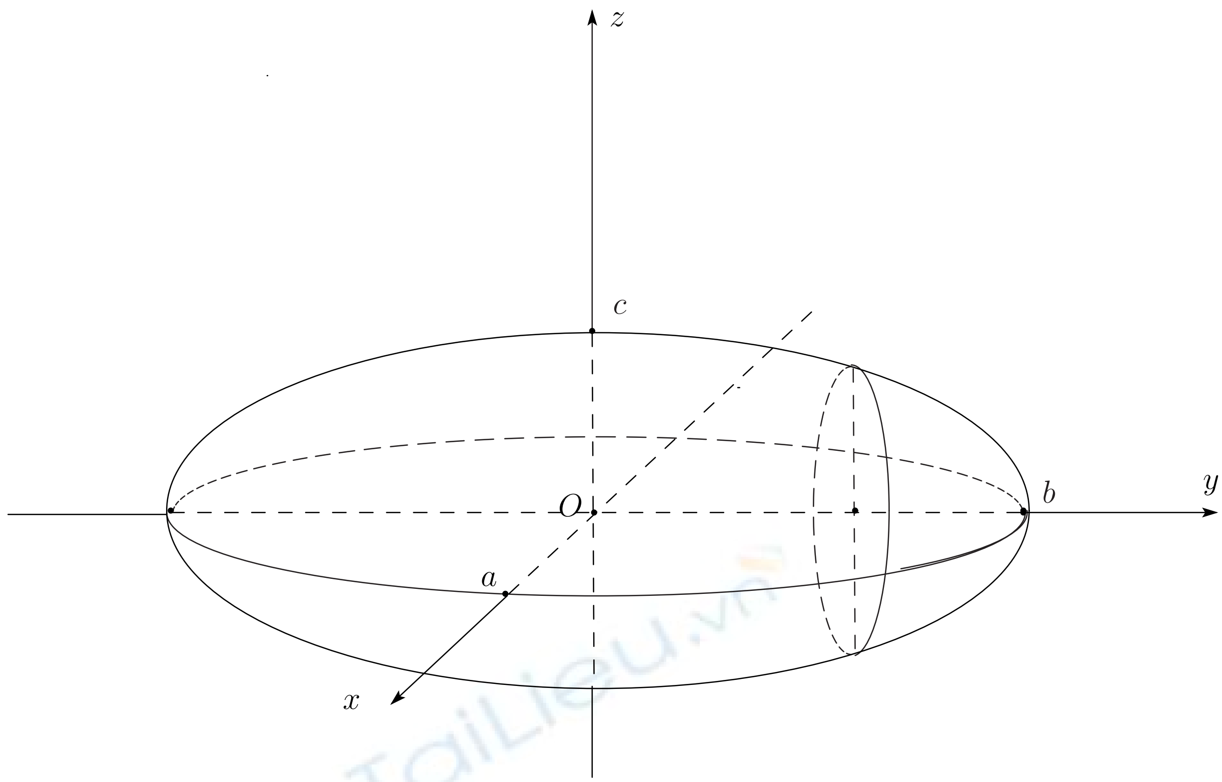
1.2.3. Mặt hypeboloit 1 tầng

Phương trình:

$$(H_1) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \; (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oxy) \; z = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Hình 2: Mặt elipxoit.

$$(Oyz)\ x = 0 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1.2.4. Mặt hypeboloit 2 tầng

Phương trình:

$$(H_2) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\ (a, b, c > 0).$$

Điều kiện

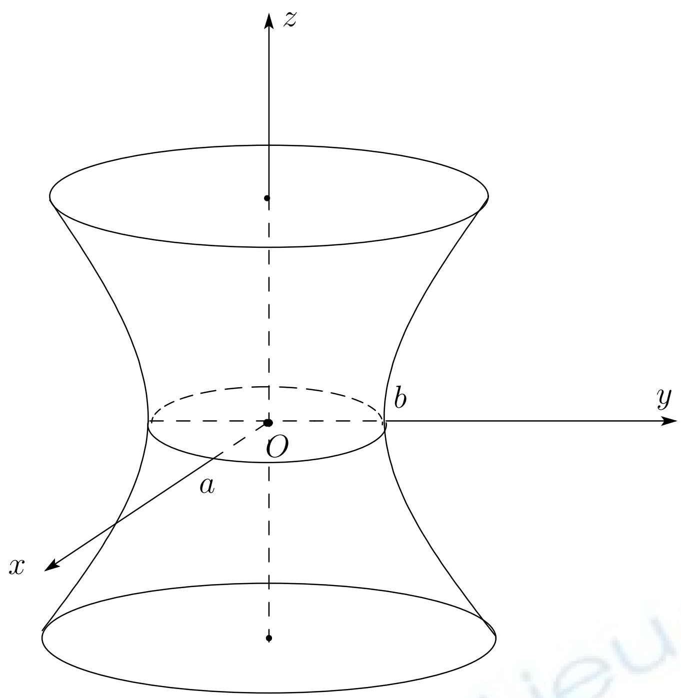
$$\frac{z^2}{c^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow z \in (-\infty, -c] \cup [c, +\infty).$$

Các mặt cắt

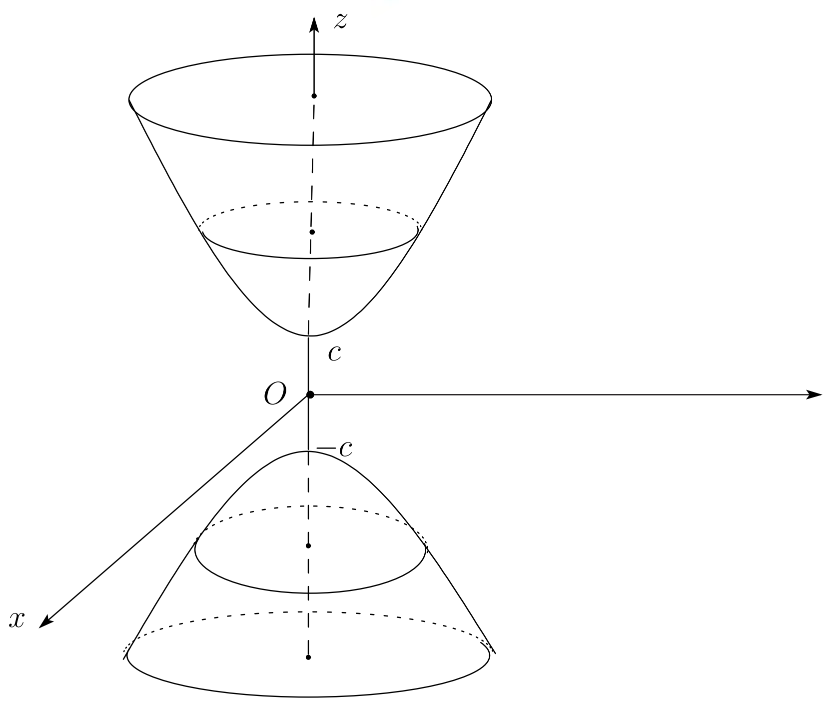
$$(Oyz)\ x = 0 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

$$(P)\ z = h > c : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$



Hình 3: Mặt hypeboloit 1 tầng.



Hình 4: Mặt hypeboloit 2 tầng.

1.2.5. Mặt paraboloit-eliptic

Phương trình:

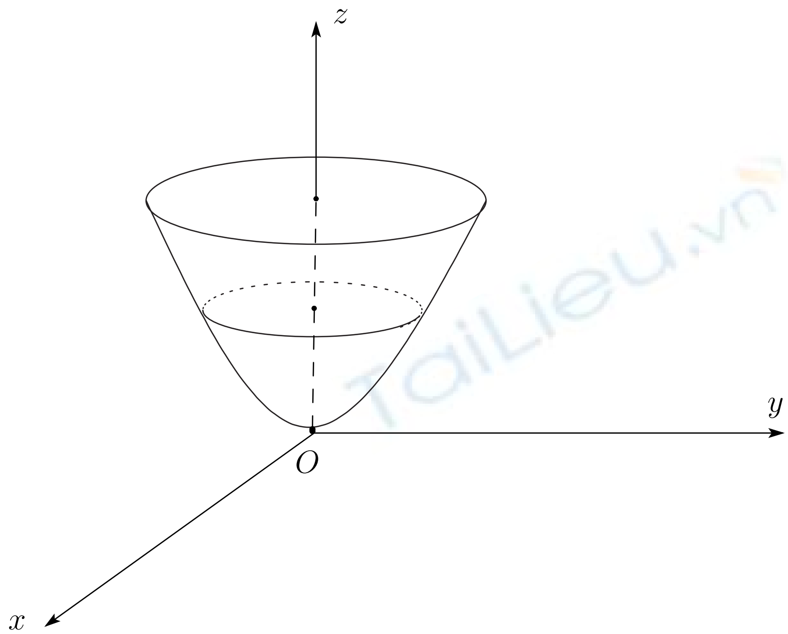
$$(PE) : \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \ (p, q > 0),$$

với điều kiện $z \geq 0$. Các mặt cắt

$$(Oyz)\ x = 0 : y^2 = 2qz.$$

$$(Oxz)\ y = 0 : x^2 = 2pz.$$

$$(P)\ z = h > 0 : \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h.$$



Hình 5: Mặt hypeboloit-eliptic.

1.2.6. Mặt trụ

Phương trình:

$$(T_z) : f(x, y) = 0 \text{ song song với trục } Oz,$$

$$(T_y) : g(x, z) = 0 \text{ song song với trục } Oy,$$

$$(T_x) : f(y, z) = 0 \text{ song song với trục } Ox,$$

trong đó $f, g, h : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$.

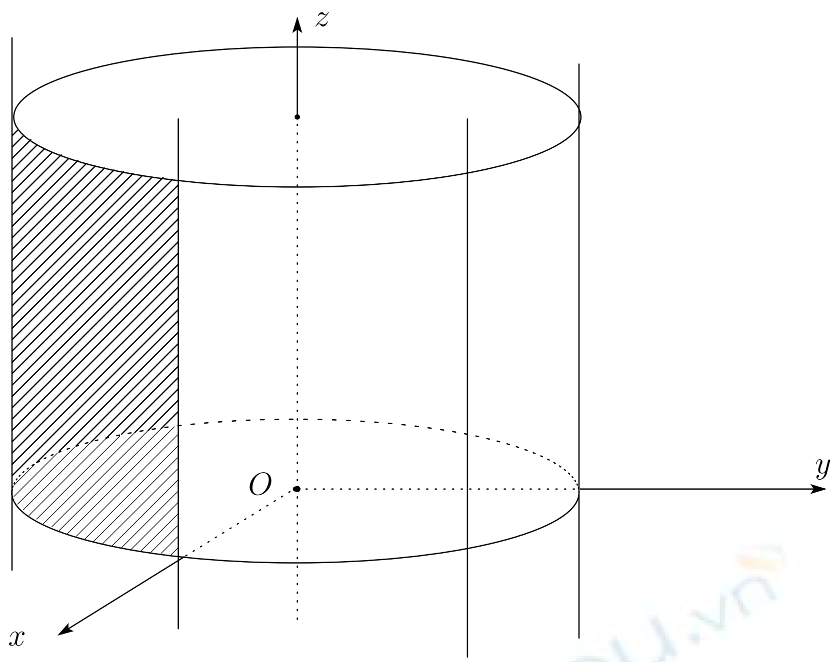
1.2.7. Mặt nón bậc hai

Phương trình:

$$(N) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\ (a, b, c > 0).$$

Các mặt cắt

$$(Oyz)\ x = 0 : y = \pm\frac{b}{c}z.$$



Hình 6: Mặt trụ song song Oz.

$$(Oxz)\ y = 0 : x = \pm\frac{a}{c}z.$$

$$(P)\ z = h > 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

1.3. Giới hạn hàm nhiều biến số

Để hiểu về giới hạn hàm nhiều biến số trong không gian $\mathcal{R}^n$, ta có thể nghiên cứu thông qua giới hạn của hàm hai biến số. Một dãy điểm $\{M_n\} \subset \mathcal{R}^2$ được gọi là *dần tới* điểm $M_0 \in \mathcal{R}^2$, viết tắt là $M_n \to M_0$ khi $n \to \infty$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$, nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên $n(\epsilon)$ sao cho

$$M_n \in B(M_0, \epsilon)\ \ \forall n \geq n(\epsilon).$$

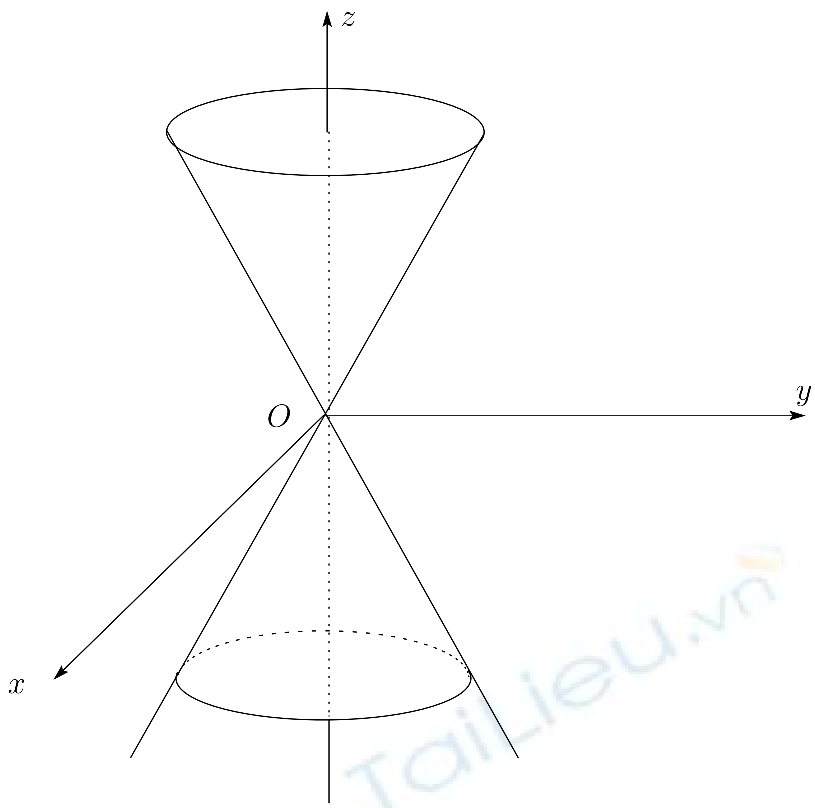
Trong trường hợp đặc biệt: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ thì điểm $M_n(x_n, y_n) \to M_0(x_0, y_0)$ khi $n \to \infty$.

Cho một hàm 2 biến số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0 \in \mathcal{R}^2$ có thể trừ điểm M_0. Khi đó, số m được gọi là giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi (x, y) dần tới $M_0(x_0, y_0)$, ký hiệu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = m$, nếu với mọi dãy điểm bất kỳ $\{M_n\} \subset \mathcal{R}^2$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n) = m.$$

Ta có thể chứng minh được rằng: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = m$ khi và chỉ khi

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall M \in B(M_0, \delta) \Rightarrow |f(M) - m| < \epsilon.$$



Hình 7: Mặt nón bậc hai.

Ví dụ 1.2. *Tìm giới hạn*

$$I_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2+y^2}.$$

Giải.

Hàm số $f(x,y) = \frac{x^2y}{2x^2+y^2}$ xác định trên $D = \mathcal{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Từ bất đẳng thức

$$\frac{x^2}{2x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in D,$$

ta có $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y|$ với mọi $(x,y) \in D$. Do đó

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2y}{2x^2+y^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|y| = 0.$$

Vậy $I_1 = 0$.

Ví dụ 1.3. *Tìm giới hạn*

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+y^2}.$$

Giải.

Hàm số $f(x,y) = \frac{xy}{2x^2+y^2}$ xác định trên $D = \mathcal{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Ta xét 2 trường hợp đặc biệt sau:

+ Điểm $(x,y) \in d : y = x$. Khi đó $(x,y) \to (0,0)$ khi và chỉ khi $x \to 0$. Khi đó, ta có

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2+x^2} = \frac{1}{3}.$$

+ Điểm $(x,y) \in d : y = 3x$. Khi đó $(x,y) \to (0,0)$ khi và chỉ khi $x \to 0$. Khi đó, ta có

$$I_2 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x^2+9x^2} = \frac{3}{11}.$$

Do vậy I_2 không tồn tại.

1.4. Hàm số liên tục

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trên miền D và điểm $M_0 \in D$. Khi đó,

+ Hàm số f liên tục tại điểm M_0 nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

+ Hàm số f liên tục trên miền D nếu f liên tục tại mọi điểm $M \in D$.

+ Hàm số f liên tục đều trên miền D nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\forall (x,y),(x',y') \in D : \|(x,y)-(x',y')\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x',y')| < \epsilon.$$

Bằng cách dùng định nghĩa, ta có nhận xét sau.

Nhận xét 1.4. + *Nếu hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ liên tục đều trên miền D, thì f liên tục trên miền D. Điều ngược lại không đúng.*

+ *Nếu f liên tục trên miền D và D là tập compact, thì f liên tục đều trên miền D.*

+ *Nếu f liên tục trên miền compact D, thì f đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên miền D.*

1.5. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến số

Cho hàm số $z = f(x)$ xác định trên miền $D \subseteq \mathcal{R}^n$ và điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in D$.

1.5.1. Đạo hàm riêng

Nếu hàm một biến số $x_1 \longmapsto f(x_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ có đạo hàm tại x_1, thì đạo hàm đó được gọi là *đạo hàm riêng của f theo ẩn x_1* tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu

$$f'_{x_1}(\bar{x}) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}).$$

Bằng cách hiểu tương tự, ta cũng có các *đạo hàm riêng của f theo ẩn x_i* $(i = 1, 2, ..., n)$ tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu

$$f'_{x_i}(\bar{x}) \text{ hay } \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).$$

Ví dụ 1.5. *Tìm các đạo hàm riêng của hàm số sau:*

$$f(x,y) = x^2 \tan(x^3 + 2y).$$

Giải.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\tan(x^3+2y) + x^2.\frac{1}{\cos^2(x^3+2y)}.3x^2 = 2x\tan(x^3+2y) + \frac{3x^4}{\cos^2(x^3+2y)}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2.\frac{1}{\cos^2(x^3+2y)}.2 = \frac{2x^2}{\cos^2(x^3+2y)}.$$

1.5.2. Hàm khả vi

Cho hàm nhiều biến $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ và điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in D$.

+ Với mỗi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$, đặt

$$\Delta_{x_i} = x_i - \bar{x}_i.$$

Khi đó

$$\Delta_f = f(\bar{x}_1 + \Delta_{x_1}, \bar{x}_2 + \Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n + \Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

được gọi là *số gia của hàm số* tại điểm $\bar{x}$.

+ Nếu số gia của hàm số có dạng

$$\Delta_f = A_1\Delta_{x_1} + A_2\Delta_{x_2} + ... + A_n\Delta_{x_n} + \alpha_1\Delta_{x_1} + \alpha_2\Delta_{x_2} + ... + \alpha_n\Delta_{x_n},$$

trong đó $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ chỉ phụ thuộc vào $\bar{x}$, không phụ thuộc vào $\Delta_x = (\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n})$ và

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \alpha_k = 0 \ \ \forall k = 1, 2, ..., n,$$

thì hàm số f được gọi là *khả vi* tại điểm $\bar{x}$. Khi đó

$$df = A_1\Delta_{x_1} + A_2\Delta_{x_2} + ... + A_n\Delta_{x_n}$$

được gọi là *vi phân toàn phần* của f tại điểm $\bar{x}$.

+ Hàm số f được gọi là khả vi trên miền D, nếu f khả vi tại mọi điểm $\bar{x} \in D$.

Định lý 1.6. *Nếu hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\bar{x} \in D$, thì f sẽ khả vi tại điểm $\bar{x}$ và*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})\Delta_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})\Delta_{x_2} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\Delta_{x_n}.$$

Chứng minh: Theo định nghĩa, ta có

$$\begin{aligned}
\Delta_f =& f(\bar{x}_1+\Delta_{x_1}, \bar{x}_2+\Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)\\
=& f(\bar{x}_1+\Delta_{x_1}, \bar{x}_2+\Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2+\Delta_{x_2}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n})\\
&+\cdots\\
&+ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ...\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n).
\end{aligned}$$

Theo công thức số gia giới nội, tồn tại các số $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n \in (0,1)$ sao cho

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i+\Delta_{x_i}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) - f(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}+\Delta_{x_{i+1}}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n})\\
= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i+\theta_i\Delta_{x_i}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n})\Delta_{x_i}.
\end{aligned}$$

Do các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm $\bar{x}$ nên

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i+\theta_i\Delta_{x_i}, ..., \bar{x}_n+\Delta_{x_n}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) + \alpha_i(\Delta_x),$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta_x} \alpha_i(\Delta_x) = 0 \ \ \forall i = 1, 2, ..., n$. Do vậy, định lý được chứng minh.

Nhận xét 1.7. *Trong trường hợp hàm 3 biến số $f(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm (x_0, y_0, z_0), theo định lý trên, ta có*

$$\Delta_f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta_z + \alpha\Delta_x + \beta\Delta_y + \gamma\Delta_z.$$

Đặt $\rho = \sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2}$ và $\epsilon = \frac{1}{\rho}(\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z)$. Khi đó, theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có

$$|\epsilon| = \frac{1}{\rho}|\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z| \le \frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2)}}{\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2}} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Do đó

$$\lim_{(\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z)\to 0} \epsilon = 0$$

và

$$\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y+\gamma\Delta_z = o(\rho).$$

Như vậy

$$\Delta_f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta_z + o(\rho).$$

Khi các số $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ khá nhỏ, ta có

$$\Delta_f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta_z. \tag{1.1}$$

Ví dụ 1.8. *Dùng vi phân, tính xấp xỉ giá trị biểu thức sau:*

$$S = \arctan \frac{1,02}{0,95}.$$

Giải: Từ

$$S = \arctan \frac{1+0,02}{1-0,05}$$

ta đặt $x_0 = 1, y_0 = 1, \Delta_x = 0,02, \Delta_y = -0,05$ và $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$. Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Theo công thức (1.1) cho hàm số có 2 biến, ta có

$$\Delta_f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta_y.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S &= \Delta_f + f(x_0,y_0) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta_y + f(x_0,y_0) \\ &= f(1,1) + \frac{1.0,02 + 1.0,05}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} + 0,035 \\ &= 0,82 rad. \end{aligned}$$

1.6. Đạo hàm theo phương

Cho véc tơ $d \in \mathcal{R}^n$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda},$$

thì giới hạn này được gọi là *đạo hàm theo phương* d của hàm f tại điểm $\bar{x}$ và được ký hiệu bởi $D_d f(\bar{x})$.

Ví dụ 1.9. *Tìm đạo hàm theo phương* $D_d f(\bar{x})$ *của hàm số* $f(x,y,z) = 2x + 3y + z^2$, *trong đó* $d = (1,2,0), \bar{x} = (3,-1,1)$

Giải:

Theo định nghĩa, đạo hàm $D_d f(\bar{x})$ được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned}
D_d f(\bar{x}) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(1 + 3\lambda, -1 + 2\lambda, 1) - f(3, -1, 1)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{2(1 + 3\lambda) + 3(-1 + 2\lambda) + 1^2 - (2.3 + 3.(-1) + 1^2)}{\lambda} \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Dựa vào định nghĩa, ta có nhận xét sau:

Nhận xét 1.10. *Giả sử $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một hệ cơ sở trực chuẩn trong $\mathcal{R}^n$, hàm số $f(x)$ tồn tại các đạo hàm riêng trên D và $\bar{x} \in D$. Khi đó*

$$D_{e_i} f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \ \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

1.7. Quan hệ giữa đạo hàm theo phương và đạo hàm riêng

Cho hàm $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ khả vi tại điểm $\bar{x} \in D$. Khi đó, đạo hàm theo phương $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ được xác định bởi công thức:

$$D_d f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) d_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) d_n. \qquad (1.2)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa, hàm số f khả vi tại điểm $\bar{x}$ hay

$$\Delta_f = A_1 \Delta_{x_1} + A_2 \Delta_{x_2} + ... + A_n \Delta_{x_n} + \alpha_1 \Delta_{x_1} + \alpha_2 \Delta_{x_2} + ... + \alpha_n \Delta_{x_n},$$

trong đó $\Delta_f = f(\bar{x} + \Delta_x) - f(\bar{x}), A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \alpha_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Dùng công thức trên với $\Delta_{x_i} = \lambda d_i$, ta có

$$\begin{aligned}
D_d f(\bar{x}) &= \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \\
&= \lim_{\Delta_x \to 0} (A_1 d_1 + ... + A_n d_n + \alpha_1 d_1 + ... + \alpha_n d_n) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) d_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) d_n.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.11. *Tìm đạo hàm theo phương $d = (-1, 3)$ tại điểm $\bar{x} = (e, e^2)$ của hàm số*

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y).$$

Giải.

Tính các đạo hàm theo phương

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y}.$$

Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = \frac{2x}{x^2+y}(\bar{x}) = \frac{1}{e},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) = \frac{1}{x^2+y}(\bar{x}) = \frac{1}{2e^2}.$$

Theo công thức (1.2), ta có

$$\begin{aligned} D_d f(\bar{x}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})d_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})d_2 \\ &= \frac{1}{e}(-1) + \frac{1}{2e^2}3 \\ &= \frac{3}{2e^2} - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

1.8. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Cho hàm véc tơ $f : D \subseteq \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ và hàm số $g : f(D) \to \mathcal{R}$. Khi đó hàm số $h = gof : D \to \mathcal{R}$ được xác định bởi

$$gof(x) = g\big(f(x)\big)$$

được gọi là *hàm hợp* của 2 hàm số g và f. Nếu các hàm số g, hàm số trong tọa độ thành phần của f và các đạo hàm riêng của chúng liên tục tại điểm $x = (x_1, ..., x_n)$ và $f(x)$ tương ứng. Khi đó các đạo hàm riêng của hàm hợp h được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_1} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial g}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ &... \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + ... + \frac{\partial g}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_n}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Chứng minh: