# Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

## Математическое моделирование уравнений математической физики

### Задание № 3

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Вариант № 2 - 13

Выполнил: студент группы ФПБ-803 Хитринцевва Валерия Вадимовна

# Содержание

1	Пос	становка задачи	3
2	Пол	тученные результаты и их анализ	5
	2.1	Решение тестовых задач	6
	2.2	Решение индивидуальной задачи	7
Заключение		8	
Список литературы		9	

## 1 Постановка задачи

- 1. Разработать программу для ЭВМ решения краевой задачи для уравнения теплопроводности, реализующую предложенный численный метод и дополнительные вычислительные процедуры. Численное решение задачи осуществить с использованием методом прямых, с дискретизацией по пространственным переменным.
- 2. С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение тестовой краевой задачи для уравнения теплопроводности для теплофизически однородного материала без внутренних источников.
- 3. С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение индивидуального задания с краевой задачи для уравнения теплопроводности. Построить зависимости решения u = u(r,t) от координат r для нескольких значений временной переменной t: в случае двумерной задачи требуется построить двумерные зависимости решения u(r,t) от координат r = (x,y).

Для выполнения данного задания требуется реализовать метод прямых. Основная идея метода прямых состоит в сведении уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод прямых может быть использован для решения уравнений в частных производных любого типа, но используется в основном для решения эллиптических и параболических уравнений. Уравнение теплопроводности задается в виде

$$c(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \lambda(\mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} \right) + f(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

где  $u=u({\bf r},t)$  — искомая функция, зависящая от координаты r и времени t;  $\frac{\partial}{\partial {\bf r}}\equiv \Delta$  — градиент; c=c(r) и  $\lambda=\lambda({\bf r})$  — заданные функции, определяющие пространственные зависимости удельной теплоемкости и коэффициента теплопроводности;  $f=f({\bf r},t)$  — заданная функция плотности источника.

Для двумерного уравнения:  $\mathbf{r} = (x, y), \ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}\right).$ 

Область определения решения:

$$t \ge 0 \quad 0 \le x \le L_x \quad 0 \le y \le L_y$$

Начальные условия задаются в виде:

$$u(\mathbf{r}, t = 0) = \phi(\mathbf{r});$$

В данной работе рассматриваются граничные условия в виде первой краевой задачи по x и второй краевой задачи по y:

$$u(x = 0, t) = \mu_L(t) \qquad u(x = L, t) = \mu_R(t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(y = 0, t) = \mu_L(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(y = L, t) = \mu_R(t)$$

Индивидуальное задание:

$$\lambda(x,y) = 1 + \frac{1}{2}xy(1 - xy)$$

$$c(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

$$f(x,y;t) = 40\sin(\pi x)\sin(\pi y) \text{th}(t)$$

$$\phi(x,y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$$

Область определения решения:

$$t \ge 0 \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1$$

Граничные условия:

$$u(x = 0, y, t) = \mu_L(y, t) \qquad \mu_L(y, t) = \cos(2\pi y)$$

$$u(x = 1, y, t) = \mu_R(y, t) \qquad \mu_R(y, t) = \cos(2\pi y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0, t) = \mu_B(x, t) \qquad \mu_B(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 1, t) = \mu_T(x, t) \qquad \mu_T(x, t) = 0$$

# 2 Полученные результаты и их анализ

Для всех приведенных далее результатов использовались следующие параметры моделирования:

- 1. Область определения:  $L_x = 1.0, \ L_y = 1.0.$
- 2. Количество узлов сетки:  $N_x = N_y = 50$ .
- 3. Временной диапазон  $t \in [0.0, 5.0]$ .
- 4.  $CFL \le 1$  условие Куранта, Фридрихса, Леви.
- 5. Для тестовой задачи  $\lambda = 1.0$  , c = 1.0 В индивидуальном задании  $\lambda$  и c являются функциями.

#### 2.1 Решение тестовых задач

$$c(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \lambda(\mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} \right) \tag{2}$$

Область определения решения:

$$t \ge 0 \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 0.5$$

Граничные условия:

$$u(x = 0, y, t) = \mu_L(y, t)$$
  $\mu_L(y, t) = 0$   
 $u(x = 1, y, t) = \mu_R(y, t)$   $\mu_R(y, t) = 0$   
 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0, t) = \mu_B(x, t)$   $\mu_B(x, t) = 0$   
 $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 1, t) = \mu_T(x, t)$   $\mu_T(x, t) = 0$ 

Начальные условия:  $\phi(x,y) = \sin(2\pi x/(\mu_R - \mu_L))\cos(2\pi y/(\mu_T - \mu_B))$ 

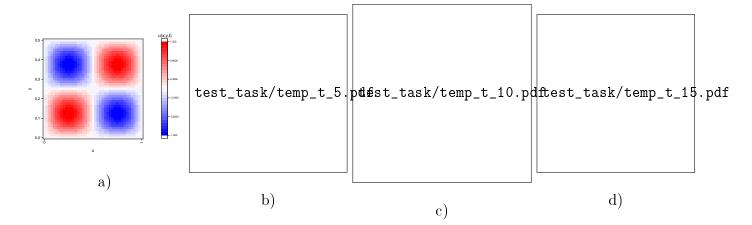


Рис. 2.1.1: Решение для моментов времени a) t = 0.0, b) t = 1.562, c) t = 3.125, d) t = 4.6875.

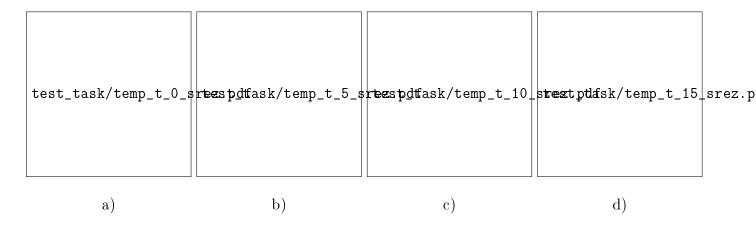


Рис. 2.1.2: Срезы решения для моментов времени а) t = 0.0, b) t = 1.562, c) t = 3.125, d) t = 4.6875.

#### 2.2 Решение индивидуальной задачи

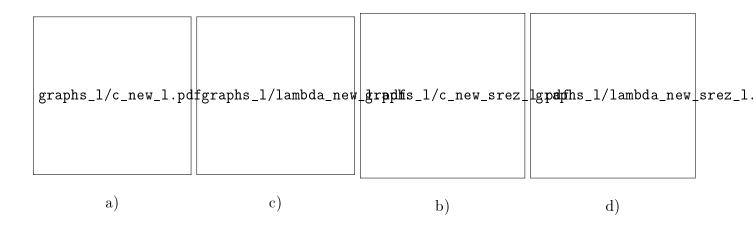


Рис. 2.2.1: а,b) График для  $\lambda$  и его срез; с,d) График для c и его срез

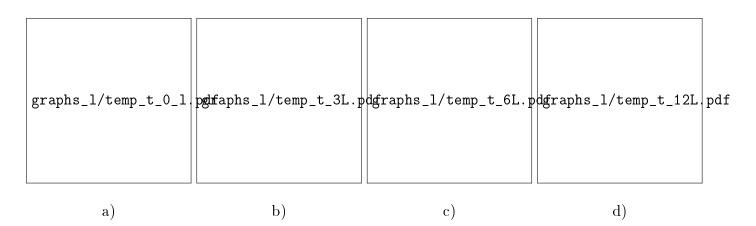


Рис. 2.2.2: Решение для моментов времени a) t = 0.0, b) t = 1.2, c) t = 2.4, d) t = 4.8.

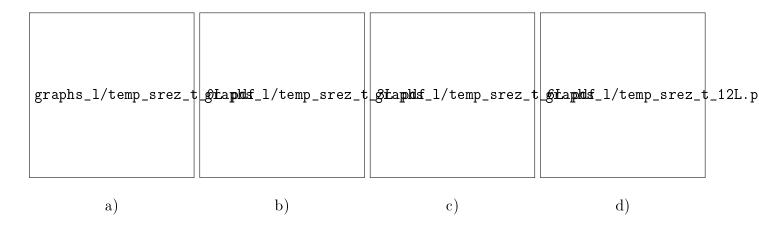


Рис. 2.2.3: Срезы решения для моментов времени a) t = 0.0, b) t = 1.2, c) t = 2.4, d) t = 4.8.

### Заключение

В данной работе были рассмотрены:

- 1. Тестовая краевая задача. Построены зависимости  $u(x) = u(\mathbf{r}, t)$ , построены срезы.
- 2. Индивидуальная задача. Получено решение индивидуального задания с краевой задачей для уравнения теплопроводности (2-13). Построены зависимости решения u=u(r,t) от координат r для нескольких значений временной зависимости t.

Для решения граничной задачи был реализован метод прямых. Задача Коши решается многошаговым методом Адамса-Мултона со стартовым методом Лобатто IIIC второго порядка точности.

## Список литературы

- [1] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Корякин П.В. Численные методы. Книга 1. Численный анализ. М.: Академия, 2013.
- [2] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. Методы математической физики. М.: Академия, 2013.
- [3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2003, 2012.
- [4] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
- [5] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
- [6] Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, 2016.