Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Математическое моделирование
уравнений математической физики

Задание № 3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Вариант № 2 - 13

Выполнил:
студент группы ФПБ-803
Хитринцевва Валерия Вадимовна

Омск-2021

Содержание

1 Постановка задачи

1. Разработать программу для ЭВМ решения краевой задачи для уравнения теплопроводности, реализующую предложенный численный метод и дополнительные вычислительные процедуры. Численное решение задачи осуществить с использованием методом прямых, с дискретизацией по пространственным переменным.
2. С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение тестовой краевой задачи для уравнения теплопроводности для теплофизически однородного материала без внутренних источников.
3. С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение индивидуального задания с краевой задачи для уравнения теплопроводности. Построить зависимости решения $u = u(r, t)$ от координат r для нескольких значений временной переменной t: в случае двумерной задачи требуется построить двумерные зависимости решения $u(r, t)$ от координат $r = (x, y)$.

Для выполнения данного задания требуется реализовать метод прямых. Основная идея метода прямых состоит в сведении уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод прямых может быть использован для решения уравнений в частных производных любого типа, но используется в основном для решения эллиптических и параболических уравнений. Уравнение теплопроводности задается в виде

$$c(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\lambda(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}\right)+f(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

где $u = u(\mathbf{r}, t)$ — искомая функция, зависящая от координаты r и времени t; $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \Delta$ — градиент; $c = c(r)$ и $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ — заданные функции, определяющие пространственные зависимости удельной теплоемкости и коэффициента теплопроводности; $f = f(\mathbf{r}, t)$ — заданная функция плотности источника.

Для двумерного уравнения: $\mathbf{r} = (x, y)$, $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Область определения решения:

$$t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq L_x \quad 0 \leq y \leq L_y$$

Начальные условия задаются в виде:

$$u(\mathbf{r}, t=0) = \phi(\mathbf{r});$$

В данной работе рассматриваются граничные условия в виде первой краевой задачи по x и второй краевой задачи по y:

$$\begin{array}{cc} u(x=0,t) = \mu_L(t) & u(x=L,t) = \mu_R(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(y=0,t) = \mu_L(t) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(y=L,t) = \mu_R(t) \end{array}$$

Индивидуальное задание:

$$\begin{array}{l} \lambda(x,y) = 1 + \frac{1}{2}xy(1-xy) \\ c(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \\ f(x,y;t) = 40\sin(\pi x)\sin(\pi y)\,\mathrm{th}(t) \\ \phi(x,y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y) \end{array}$$

Область определения решения:

$$t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

Граничные условия:

$$\begin{array}{lc} u(x=0,y,t) = \mu_L(y,t) & \mu_L(y,t) = \cos(2\pi y) \\ u(x=1,y,t) = \mu_R(y,t) & \mu_R(y,t) = \cos(2\pi y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y=0,t) = \mu_B(x,t) & \mu_B(x,t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y=1,t) = \mu_T(x,t) & \mu_T(x,t) = 0 \end{array}$$

2 Полученные результаты и их анализ

Для всех приведенных далее результатов использовались следующие параметры моделирования:

1. Область определения: $L_x = 1.0,\ L_y = 1.0$.
2. Количество узлов сетки: $N_x = N_y = 50$.
3. Временной диапазон $t \in [0.0, 5.0]$.
4. $CFL \leq 1$ – условие Куранта, Фридрихса, Леви.
5. Для тестовой задачи $\lambda = 1.0$, $c = 1.0$
   В индивидуальном задании λ и c являются функциями.

2.1 Решение тестовых задач

$$c(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\lambda(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}\right) \tag{2}$$

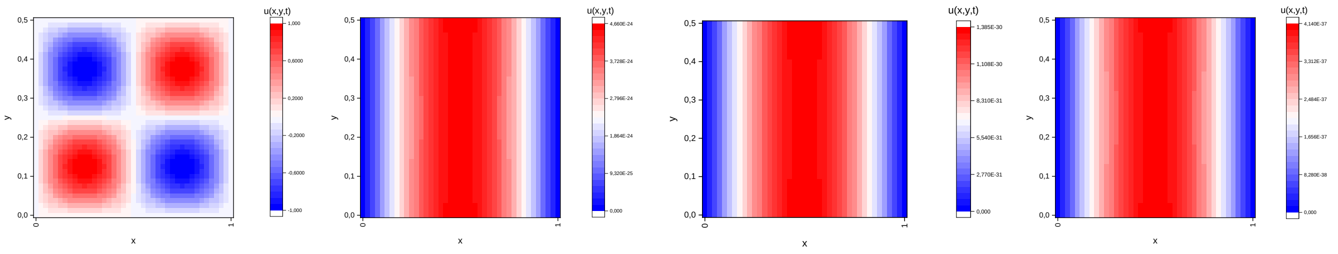
Область определения решения:

$$t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 0.5$$

Граничные условия:

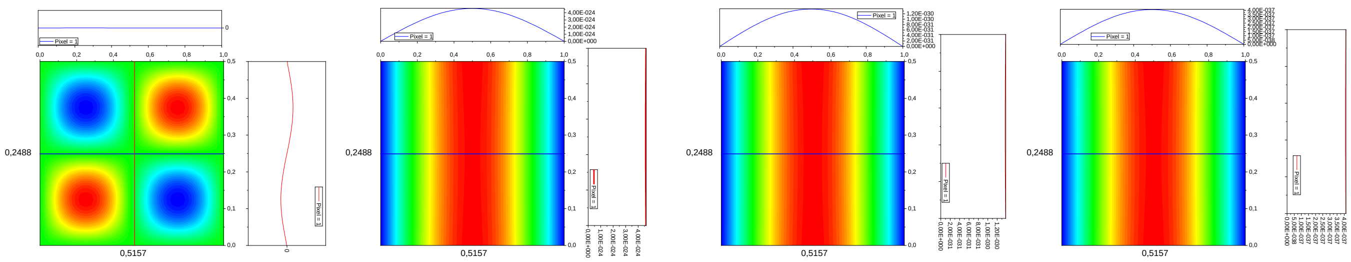
$$\begin{array}{ll} u(x=0,y,t) = \mu_L(y,t) & \mu_L(y,t) = 0 \\ u(x=1,y,t) = \mu_R(y,t) & \mu_R(y,t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y=0,t) = \mu_B(x,t) & \mu_B(x,t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y=1,t) = \mu_T(x,t) & \mu_T(x,t) = 0 \end{array}$$

Начальные условия: $\phi(x,y) = \sin(2\pi x/(\mu_R - \mu_L))\cos(2\pi y/(\mu_T - \mu_B))$



a) b) c) d)

Рис. 2.1.1: Решение для моментов времени a) $t = 0.0$, b) $t = 1.562$, c) $t = 3.125$, d) $t = 4.6875$.

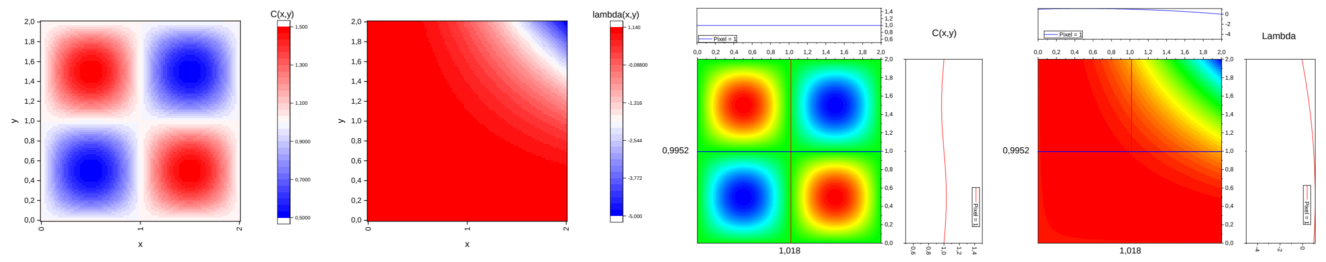


a) b) c) d)

Рис. 2.1.2: Срезы решения для моментов времени a) $t = 0.0$, b) $t = 1.562$, c) $t = 3.125$, d) $t = 4.6875$.

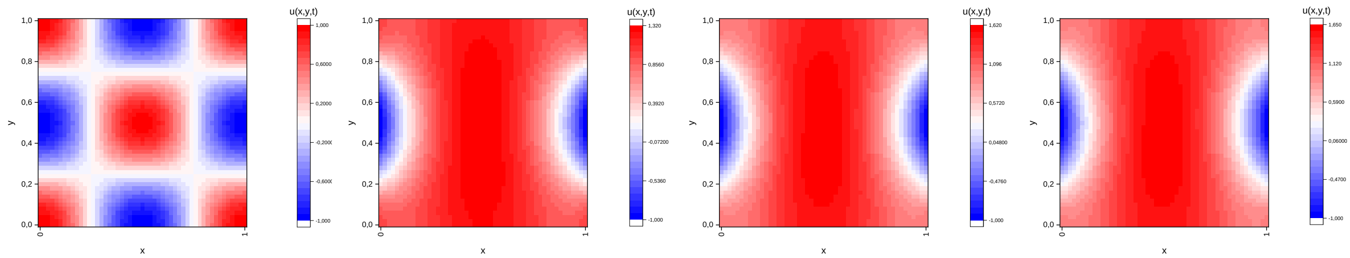
2.2 Решение индивидуальной задачи

Начальное распределение температур было задано на сетке по косинусудальному закону в направлении обеих осей таким образом, что создавались «ячейки» высоких и низких температур, чередующихся в шахматном порядке с максимальными температурами 1, -1. Граничные условия заданы в виде косинусоидальной зависимости температуры от пространственной координаты y, формируются чередующиеся источники высоких и низких температур. В направлении оси x источники отсутствуют. Происходит моделирование релаксации системы, установление теплового равновесия. На графиках изображена пространственнная зависимость температуры через равные промежутки времени.



a) c) b) d)

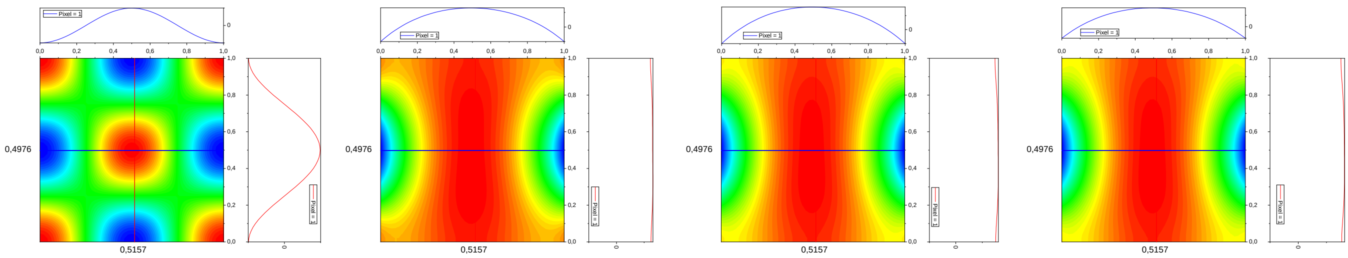
Рис. 2.2.1: a,b) График для λ и его срез; c,d) График для c и его срез



a) b) c) d)

Рис. 2.2.2: Решение для моментов времени a) $t = 0.0$, b) $t = 1.2$, c) $t = 2.4$, d) $t = 4.8$.

Тепловое равновесие достигается в малый промежуток времени, промежуточное состояние не отображено на графиках. На рисунках отображен результат релаксации большей части системы: на центральной части сетки установилась равновесная температура, на левой и правой границы заметны влияния граничных условий. Видно, что влияние источников высокой температуры имеет большое значение. Это



a) b) c) d)

Рис. 2.2.3: Срезы решения для моментов времени a) $t = 0.0$, b) $t = 1.2$, c) $t = 2.4$, d) $t = 4.8$.

связано с тем, что длина волны косинусоиды, которая задает граничные условия так соотносится с шириной сетки, что источники тепла имеют большее влияние, чем источники холода. С течением времени усиливается влияние источников низкойтемпературы на нагретую среду.

Заключение

В данной работе были рассмотрены:

1. Тестовая краевая задача. Построены зависимости $u(x) = u(\mathbf{r}, t)$, построены срезы.

2. Индивидуальная задача. Получено решение индивидуального задания с краевой задачей для уравнения теплопроводности $(2-13)$. Построены зависимости решения $u = u(r, t)$ от координат r для нескольких значений временной зависимости t.

Для решения граничной задачи был реализован метод прямых. Задача Коши решается многошаговым методом Адамса-Мултона со стартовым методом Лобатто $IIIC$ второго порядка точности.

Список литературы

[1] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Корякин П.В. Численные методы. Книга 1. Численный анализ. — М.: Академия, 2013.

[2] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. Методы математической физики. — М.: Академия, 2013.

[3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Бином, 2003, 2012.

[4] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.

[5] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.

[6] Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. — John Wiley & Sons, 2016.