

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Математическое моделирование
уравнений математической физики

Задание № 3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Вариант № 2 - 13

Выполнил:
студент группы ФПБ-803
Хитринцевва Валерия Вадимовна

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Полученные результаты и их анализ	5
2.1	Решение тестовых задач	6
2.2	Решение индивидуальной задачи	7
	Заключение	8
	Список литературы	9

1 Постановка задачи

1. Разработать программу для ЭВМ решения краевой задачи для уравнения теплопроводности, реализующую предложенный численный метод и дополнительные вычислительные процедуры. Численное решение задачи осуществить с использованием методом прямых, с дискретизацией по пространственным переменным.
2. С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение тестовой краевой задачи для уравнения теплопроводности для теплофизически однородного материала без внутренних источников.
3. С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение индивидуального задания с краевой задачи для уравнения теплопроводности. Построить зависимости решения $u = u(r, t)$ от координат r для нескольких значений временной переменной t : в случае двумерной задачи требуется построить двумерные зависимости решения $u(r, t)$ от координат $r = (x, y)$.

Для выполнения данного задания требуется реализовать метод прямых. Основная идея метода прямых состоит в сведении уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод прямых может быть использован для решения уравнений в частных производных любого типа, но используется в основном для решения эллиптических и параболических уравнений. Уравнение теплопроводности задается в виде

$$c(\mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\lambda(\mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} \right) + f(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где $u = u(\mathbf{r}, t)$ — искомая функция, зависящая от координаты r и времени t ; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \Delta$ — градиент; $c = c(r)$ и $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ — заданные функции, определяющие пространственные зависимости удельной теплоемкости и коэффициента теплопроводности; $f = f(\mathbf{r}, t)$ — заданная функция плотности источника.

Для двумерного уравнения: $\mathbf{r} = (x, y)$, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

Область определения решения:

$$t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq L_x \quad 0 \leq y \leq L_y$$

Начальные условия задаются в виде:

$$u(\mathbf{r}, t = 0) = \phi(\mathbf{r});$$

В данной работе рассматриваются граничные условия в виде первой краевой задачи по x и второй краевой задачи по y :

$$\begin{aligned} u(x = 0, t) &= \mu_L(t) & u(x = L, t) &= \mu_R(t) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(y = 0, t) &= \mu_L(t) & \frac{\partial u}{\partial y}(y = L, t) &= \mu_R(t) \end{aligned}$$

Индивидуальное задание:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) &= 1 + \frac{1}{2}xy(1 - xy) \\ c(x, y) &= 1 - \frac{1}{2}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \\ f(x, y; t) &= 40\sin(\pi x)\sin(\pi y)\operatorname{th}(t) \\ \phi(x, y) &= \cos(2\pi x)\cos(2\pi y) \end{aligned}$$

Область определения решения:

$$t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x = 0, y, t) &= \mu_L(y, t) & \mu_L(y, t) &= \cos(2\pi y) \\ u(x = 1, y, t) &= \mu_R(y, t) & \mu_R(y, t) &= \cos(2\pi y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0, t) &= \mu_B(x, t) & \mu_B(x, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 1, t) &= \mu_T(x, t) & \mu_T(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

2 Полученные результаты и их анализ

Для всех приведенных далее результатов использовались следующие параметры моделирования:

1. Область определения: $L_x = 1.0$, $L_y = 1.0$.
2. Количество узлов сетки: $N_x = N_y = 50$.
3. Временной диапазон $t \in [0.0, 5.0]$.
4. $CFL \leq 1$ – условие Куранта, Фридрихса, Леви.
5. Для тестовой задачи $\lambda = 1.0$, $c = 1.0$
В индивидуальном задании λ и c являются функциями.

2.1 Решение тестовых задач

$$c(\mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\lambda(\mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (2)$$

Область определения решения:

$$t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 0.5$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x=0, y, t) &= \mu_L(y, t) & \mu_L(y, t) &= 0 \\ u(x=1, y, t) &= \mu_R(y, t) & \mu_R(y, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y=0, t) &= \mu_B(x, t) & \mu_B(x, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y=1, t) &= \mu_T(x, t) & \mu_T(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

Начальные условия: $\phi(x, y) = \sin(2\pi x/(\mu_R - \mu_L)) \cos(2\pi y/(\mu_T - \mu_B))$

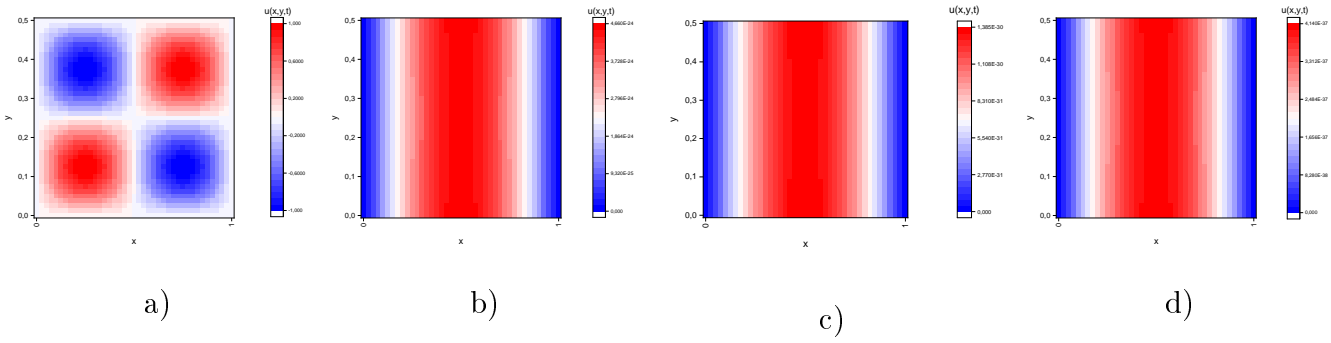


Рис. 2.1.1: Решение для моментов времени а) $t = 0.0$, б) $t = 1.562$, в) $t = 3.125$, г) $t = 4.6875$.

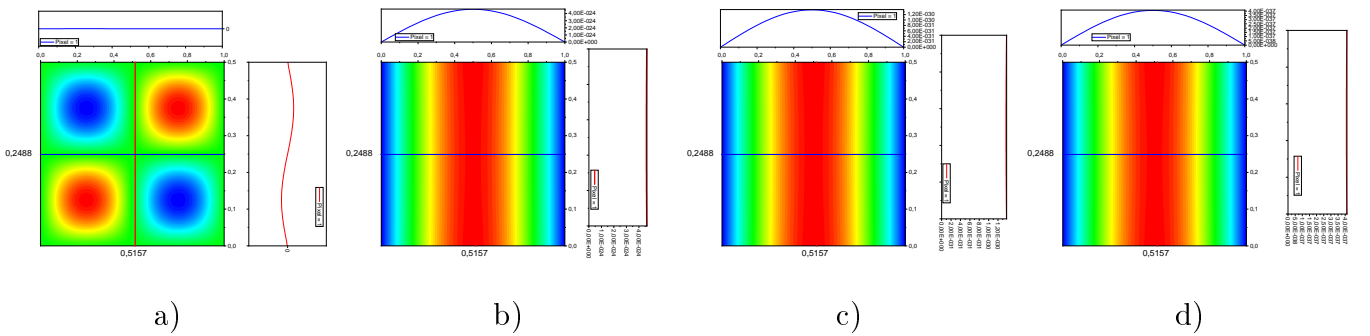


Рис. 2.1.2: Срезы решения для моментов времени а) $t = 0.0$, б) $t = 1.562$, в) $t = 3.125$, г) $t = 4.6875$.

2.2 Решение индивидуальной задачи

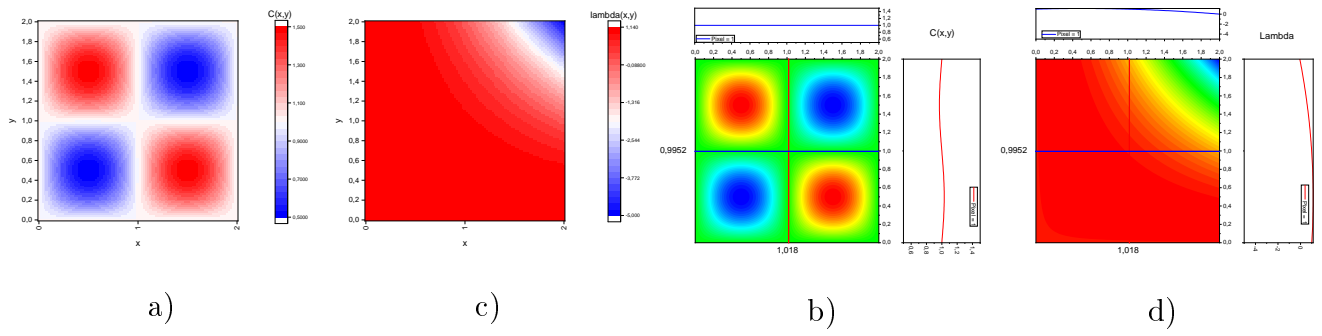


Рис. 2.2.1: а,б) График для λ и его срез; в,г) График для c и его срез

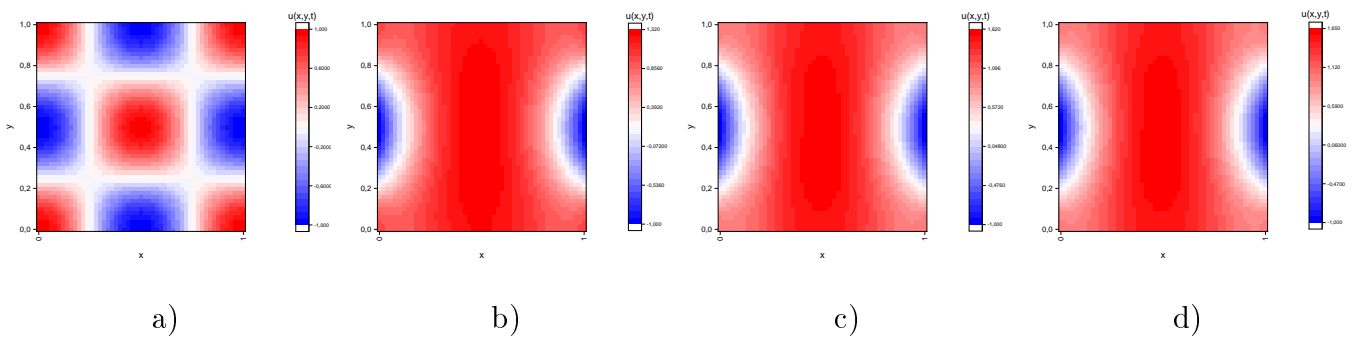


Рис. 2.2.2: Решение для моментов времени а) $t = 0.0$, б) $t = 1.2$, в) $t = 2.4$, г) $t = 4.8$.

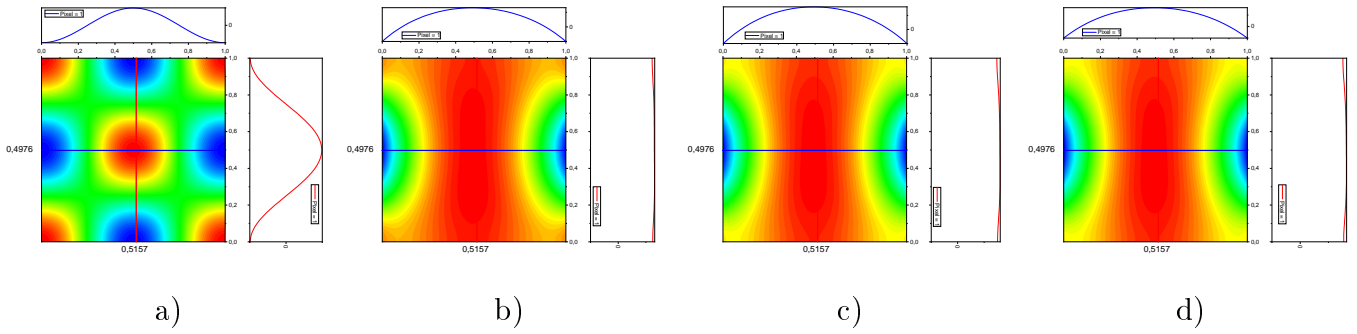


Рис. 2.2.3: Срезы решения для моментов времени а) $t = 0.0$, б) $t = 1.2$, в) $t = 2.4$, г) $t = 4.8$.

Заключение

В данной работе были рассмотрены:

1. Тестовая краевая задача. Построены зависимости $u(x) = u(\mathbf{r}, t)$, построены срезы.
2. Индивидуальная задача. Получено решение индивидуального задания с краевой задачей для уравнения теплопроводности (2–13). Построены зависимости решения $u = u(r, t)$ от координат r для нескольких значений временной зависимости t .

Для решения граничной задачи был реализован метод прямых. Задача Коши решается многошаговым методом Адамса-Мултона со стартовым методом Лобатто *IIIC* второго порядка точности.

Список литературы

- [1] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Корякин П.В. Численные методы. Книга 1. Численный анализ. — М.: Академия, 2013.
- [2] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. Методы математической физики. — М.: Академия, 2013.
- [3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Бинном, 2003, 2012.
- [4] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.
- [5] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.
- [6] Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. — John Wiley & Sons, 2016.