Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Математическое моделирование
уравнений математической физики

Задание № 1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вариант № 8 - 6

Выполнил:
студент группы ФПБ-803
Хитринцевва Валерия Вадимовна

Омск-2021

Содержание

Введение

Краевая задача – задача отыскания решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем ОДУ на отрезке $a \leq x \leq b$ при условии, что на решение налагаются дополнительные условия в двух точках a и b на краях отрезка $[a, b]$.

Наиболее распространенный метод решения краевой задачи - замена исходной задачи некоторым ее дискретным аналогом. Полученная дискретная краевая задача представляет собой систему линейных или нелинейных уравнений с конечным числом неизвестных и может быть решена на ЭВМ с помощью прямых или итерационных методов .

Один из методов, предназначенных для решения граничных задач нелинейных уравнений – метод пристрелки. Метод пристрелки позволяет свести решение краевой задачи к решению системы нелинейных уравнений относительно так называемых пристрелочных параметров, а также к многократному решению задачи Коши.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{y}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(x, y, \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x}) \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \end{cases} \qquad \begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \\ u(a) = s \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{y}(x, s) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, s) \end{cases} \tag{2}$$

где s – пристрелочный параметр.
Введем функцию промаха $\phi(s) = y(b, s) - y_b$.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{Y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{U} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}t} = \left[\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\right] \mathbf{Y} + \left[\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\right] \mathbf{U} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y} = \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} \\ \\ \mathbf{U} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y(a) = 0 \\ \\ U(a) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Системы (2) и (3) решаются совместно.
Значение пристрелочного параметра определяется по фрмуле:

$$s^{(k+1)} = s^{(k)} - \left[\ Y(b, s^{(k)})\ \right]^{-1} \left(\ y(b, s^{(k)}) - y_b\ \right) \tag{4}$$

1 итерация – полное решение задачи Коши. Критерий завершения итерационного процесса: $|\ \phi(s^{(k)})\ | \leq \varepsilon$.

1 Постановка задачи

1. Разработать программу для ЭВМ решения граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения или системы обыкновенных дифференциальных уравнений, реализующую предложенный численный метод и дополнительные вычислительные процедуры.

2. С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение двух тестовых граничных задач:

$$\begin{aligned} y''(x) + {k_0}^2 y(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = c_1 \cos(k_0 x) + c_2 \sin(k_0 x) \\ y''(x) + {\varkappa_0}^2 y(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = c_1 \operatorname{ch}(k_0 x) + c_2 \operatorname{sh}(k_0 x) \end{aligned} \tag{5}$$

   Для параметров тестовых задач рекомендуется выбор значений $k_0 = 1$ и $\varkappa_0 = 1$; область определения решения, на которой задаются граничные условия,$0 \leq x \leq 10$. Построить зависимости решения $y = y(x)$ и относительной погрешности решения.

3. С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение индивидуального задания с граничной задачей для обыкновенного дифференциального уравнения.

Индивидуальное задание:
Методом пристрелки осуществить решение нелинейной граничной задачи на определение стационарного распределения температуры $y = y(x)$ в теплофизически неоднородном плоском слое $0 \leq x \leq 1$, с эффективным нормированным коэффициентом теплопроводности $\lambda(x, y)$ и нелинейным внутренним пространственно распределенным нормированным источником тепла $f(x, y)$:

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda(x, y(x)) \, \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right) \; = \; -f(x, y(x)) \\ \lambda(x, y) = y^3, \qquad f(x, y) = -xy^4; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1; \end{gathered} \tag{6}$$

Получить решение для распределения температуры $y = y(x)$ в слое $0 \leq x \leq 1$. Построить пространственные зависимости распределений температуры $y(x)$, градиента температуры $y(x)$, градиента температуры $y\prime(x)$ и теплового потока $q(x) = -\lambda(x, y(x))\, y\prime(x))$. Провести качественный анализ полученного результата, на основе сопоставления полученных пространственных зависимостей с поведением функций $\lambda(x, y(x))$, $f(x, y(x))$ и характером граничных условий. Построить графики зависимости пристрелочных параметров от номера итерации.
Для решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной в рамках реализации численного метода решения граничной

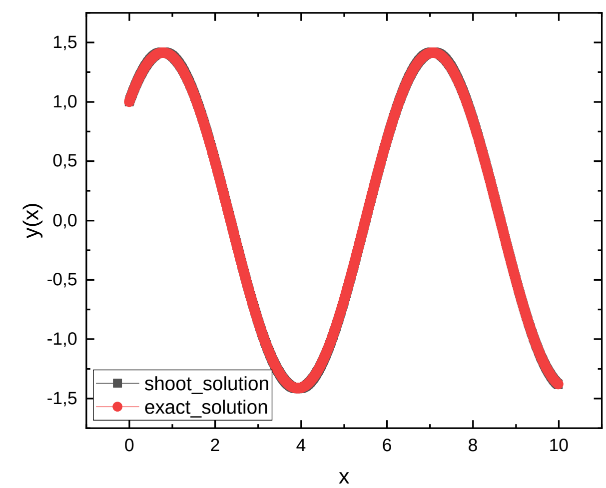
задачи, использовался многостадийный метод Адамса-Мултона второго порядка точности.

Система обыкновенных дифференциальнх уравнений и начальные условия для краевой задачи имеют вид:

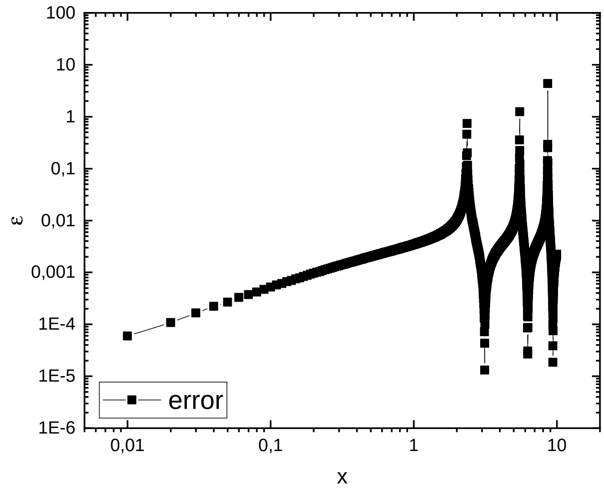
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \end{cases} \qquad \begin{cases} y(0) = 0 \\ u(0) = s \end{cases} \tag{7}$$

2 Полученные результаты и их анализ

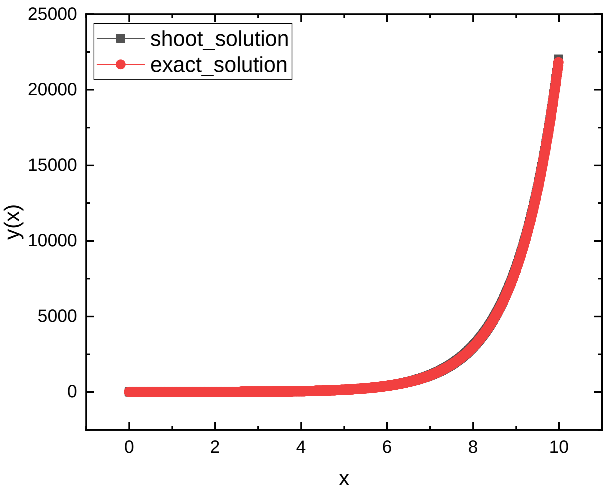
2.1 Решение тестовых задач



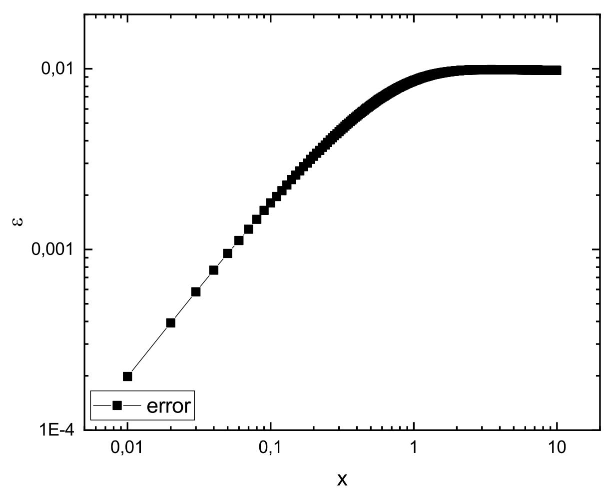
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.1.1: Зависимость решения $y = y(x)$ и погрешность вычислений для а), б) - первой тестовой задачи, в), г) - второй тестовой задачи

Анализируя полученные графики, можно отметить, что решение, полученное методом пристрелки, соответствует точному решению.

Заключение

В данной работе были рассмотрены:

1. Тестовые граничные задачи. Построены зависимости $y(x)$ и относительной погрешности решения.

2. Индивидуальная задача. Получено решение для распределения температуры $y = y(x)$ в слое $0 \le x \le 1$. Построены пространственные зависимости распределений температуры $y(x)$, градиента температуры $y'(x)$ и теплового потока $q(x) = -\lambda(x, y(x))\ y'(x))$. Построены графики зависимости пристрелочных параметров от номера итерации.

Для решения граничной задачи был реализован метод пристрелки. Задача Коши решается многошаговым методом Адамса-Мултона со стартовым методом Лобатто $IIIC$ второго порядка точности.

Список литературы

[1] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Корякин П.В. Численные методы. Книга 1. Численный анализ. — М.: Академия, 2013.

[2] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. Методы математической физики. — М.: Академия, 2013.

[3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Бином, 2003, 2012.

[4] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.

[5] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.

[6] Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. — John Wiley & Sons, 2016.