Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Математическое моделирование
уравнений математической физики

Задание № 4

Численные методы решения краевой задачи для двумерного волнового уравнения

Вариант № 2 - 13

Выполнил:
студент группы ФПБ-803
Хитринцева Валерия Вадимовна

Омск-2021

Содержание

1 Постановка задачи

- Разработать программу для ЭВМ решения краевой задачи для уравнения теплопроводности, реализующую предложенный численный метод и дополнительные вычислительные процедуры. Численное решение задачи осуществить с использованием методом прямых, с дискретизацией по пространственным переменным.
- С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение тестовой краевой задачи для волнового уравнения без приложенной внешней силы.
- С использованием разработанной программы для ЭВМ осуществить решение индивидуального задания с краевой задачи для волнового уравнения. Построить зависимости решения $u = u(r, t)$ от координат r для нескольких значений временной переменной t: в случае двумерной задачи требуется построить двумерные зависимости решения $u(r, t)$ от координат $r = (x, y)$.

Для выполнения данного задания требуется реализовать метод прямых. Основная идея метода прямых состоит в сведении уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод прямых может быть использован для решения уравнений в частных производных любого типа, но используется в основном для решения эллиптических и параболических уравнений. Уравнение теплопроводности задается в виде

$$\rho(\mathbf{r})\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(T(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}\right) + f(\mathbf{r}, t), \tag{1.1}$$

где $u = u(\mathbf{r}, t)$ — искомая функция, зависящая от координаты r и времени t; $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \Delta$ — градиент; $\rho = \rho(r)$ и $T = T(\mathbf{r})$ — заданные функции, определяющие пространственные зависимости плотности и продольного натяжения; $f = f(\mathbf{r}, t)$ — заданная функция плотности источника.

Для двумерного уравнения: $\mathbf{r} = (x, y)$, $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Область определения решения:

$$t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq L_x \quad 0 \leq y \leq L_y$$

Начальные условия задаются в виде:

$$u(\mathbf{r}, t = 0) = \varphi(\mathbf{r});$$

В данной работе рассматриваются граничные условия в виде первой краевой задачи по x и второй краевой задачи по y:

$$\begin{array}{ll} u(x = 0, t) = \mu_L(t) & u(x = L, t) = \mu_R(t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(y = 0, t) = \mu_L(t) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(y = L, t) = \mu_R(t) \end{array}$$

Индивидуальное задание:

$$
\begin{aligned}
&T(x,y) = 1 + \tfrac{1}{2}xy(1-xy) \\
&\rho(x,y) = 1 - \tfrac{1}{2}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \\
&f(x,y;t) = 40\sin(\pi x)\sin(\pi y)\,\mathrm{th}(t) \\
&\phi(x,y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)
\end{aligned}
$$

Область определения решения:

$$t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

Граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&u(x=0,y,t) = \mu_L(y,t) && \mu_L(y,t) = \cos(2\pi y) \\
&u(x=1,y,t) = \mu_R(y,t) && \mu_R(y,t) = \cos(2\pi y) \\
&\tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y=0,t) = \mu_B(x,t) && \mu_B(x,t) = 0 \\
&\tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y=1,t) = \mu_T(x,t) && \mu_T(x,t) = 0
\end{aligned}
$$

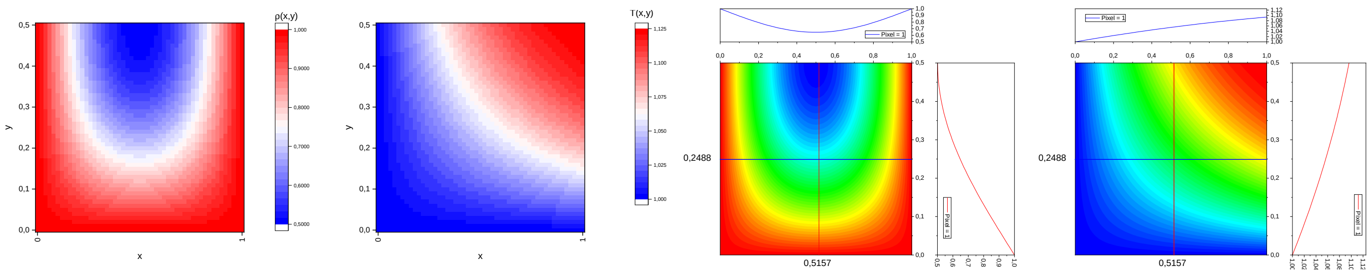
2 Полученные результаты и их анализ

Для всех приведенных далее результатов использовались следующие параметры моделирования:

1. Область определения: $L_x = 1.0,\ L_y = 1.0$.
2. Количество узлов сетки: $N_x = N_y = 50$.
3. Временной диапазон $t \in [0.0, 5.0]$.
   Шаг по времени τ определяется по формуле $\tau = 0.5CFL$, где $CFL \leq 1$ – условие Куранта, Фридрихса, Леви. h – шаг по сетке

2.1 Решение тестовых задач

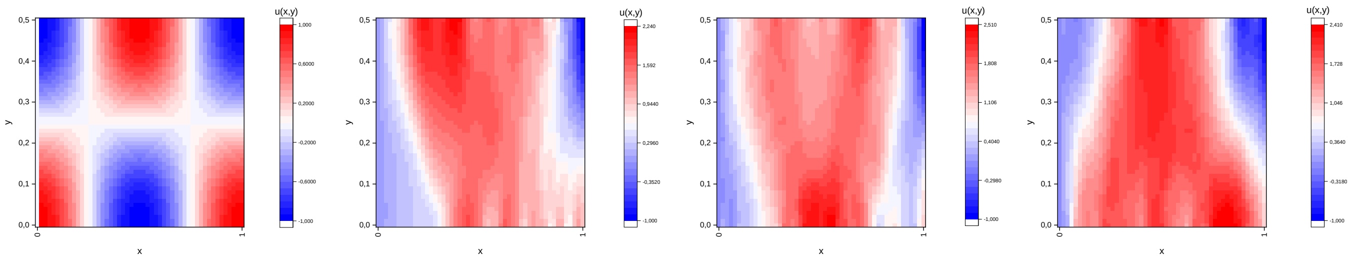
2.2 Решение индивидуальной задачи



a) c) b) d)

Рис. 1: (a,b) График для λ и его срез; (c,d) График для c и его срез

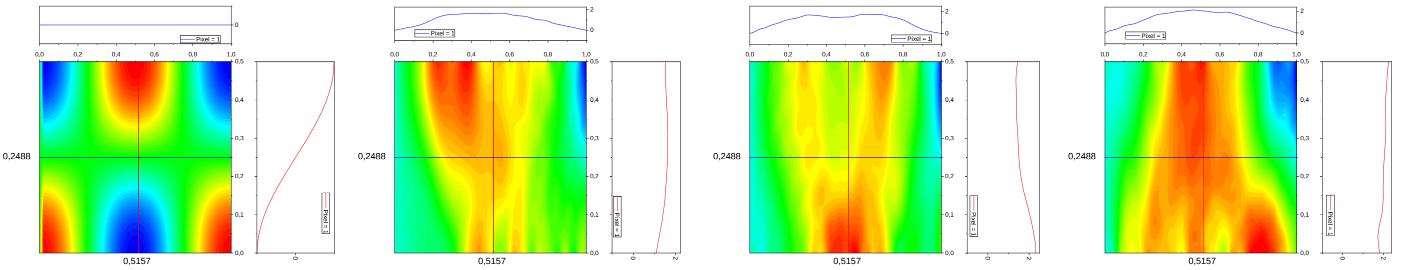
Варианты графиков v1



a) b) c) d)

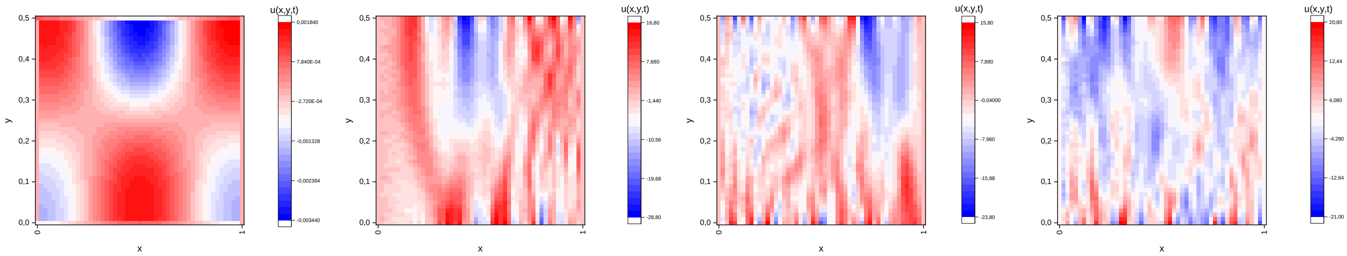
Рис. 2: Решение для моментов времени (a) $t = 0.0$, (b) $t = 1.6$, (c) $t = 3.2$, (d) $t = 4.8$.

Варианты графиков v1 srez Варианты графиков v2
Варианты графиков v2 srez



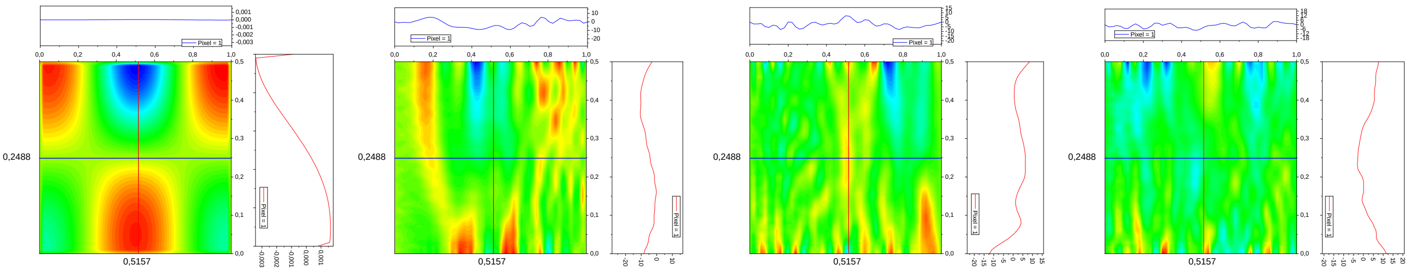
a) b) c) d)

Рис. 3: Срезы решения для моментов времени (a) $t = 0.0$, (b) $t = 1.6$, (c) $t = 3.2$, (d) $t = 4.8$



a) b) c) d)

Рис. 4: Решение для моментов времени (a) $t = 0.0$, (b) $t = 1.6$, (c) $t = 3.2$, (d) $t = 4.8$



a) b) c) d)

Рис. 5: Срезы решения для моментов времени (a) $t = 0.0$, (b) $t = 1.6$, (c) $t = 3.2$, (d) $t = 4.8$

Заключение

В данной работе были рассмотрены:

1. Тестовая краевая задача. Построены зависимости $u(x) = u(\mathbf{r}, t)$, построены срезы.

2. Индивидуальная задача. Получено решение индивидуального задания с краевой задачей для волнового уравнения$(2 - 15)$. Построены зависимости решения $u = u(r, t)$ от координат r для нескольких значений временной зависимости t.

Для решения граничной задачи был реализован метод прямых. Задача Коши решается многошаговым методом Адамса-Мултона со стартовым методом Лобатто $IIIC$ второго порядка точности.

Список литературы

[1] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Корякин П.В. Численные методы. Книга 1. Численный анализ. — М.: Академия, 2013.

[2] Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы. Книга 2. Методы математической физики. — М.: Академия, 2013.

[3] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Бином, 2003, 2012.

[4] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.

[5] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.

[6] Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. — John Wiley & Sons, 2016.