**Список систем обыкновенных дифференциальных уравнений для выполнения индивидуального задания «Численные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений»:**

В данном файле приведен список систем обыкновенных дифференциальных уравнений для выполнения индивидуального задания «Численные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений».

Перед получением численного решения требуется провести предварительный анализ размерности коэффициентов и анализ функциональных свойств предложенных уравнений, с целью минимизации количества параметров численного решения. Итоговые результаты представить в исходных размерностях и функциональных зависимостях. Например, если уравнение движения гармонического осциллятора $\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0$ решается при начальных условиях $x(0)=x_0$ и $\dot{x}(0)=0$, то можно использовать безразмерную переменную $\tau=\omega t$, с использованием которой уравнение движения примет вид $x''(\tau)+x(\tau)=0$, начальные условия не изменятся; затем можно использовать свойство однородности исходного уравнения, положив $x(\tau)=x_0\cdot\tilde{x}(\tau)$, тогда начальные условия примут вид $\tilde{x}(0)=1$ и $\dot{\tilde{x}}(0)=0$; при этом итоговую зависимость нужно представить в виде $x(t)/x_0=f(\omega t)$.

1. Осциллятор Дуффинга:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\mu x^3,$$

где параметр $\mu>0$ – коэффициент, характеризующий нелинейность осциллятора. Осуществить расчеты с $\mu=-5.0,\ -1.0,\ 0.01,\ 1.0,\ 5.0$, при $\omega=1$. Построить динамические кривые $x=x(t)$ и фазовые кривые $(x,\dot{x})$. Провести качественный анализ изменения характера динамических кривых при изменении параметра $\mu$.

2. Осциллятор Ван дер Поля:

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+\omega^2 x=0,$$

где параметр $\mu>0$ – коэффициент, характеризующий нелинейность осциллятора. Осуществить расчеты с подобранным набором из 5 значений $\mu$, охватывающим режимы квазигармонических и релаксационных колебаний. Построить динамические кривые $x=x(t)$ и фазовые кривые $(x,\dot{x})$.

3. Аттрактор Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\sigma(y-x),\\ \dot{y}&=x(r-z)-y,\\ \dot{z}&=xy-bz,\end{aligned}$$

где параметры $\sigma$, $r$, $b$ — заданные константы. Осуществить расчеты с $\sigma=10$ и $b=8/3$, при $r=1,\ 10,\ 24.5,\ 28,\ 100,\ 150$. Построить динамические кривые $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ и траектории системы $(x,y,z)$. Описать изменение характера закона движения динамической системы при изменении параметра $r$.

4. Математический маятник:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0,$$

$$L=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}+mgl\cos(\varphi).$$

Осуществить расчеты при различных начальных условиях, охватывающих случаи малых гармонических колебаний и нелинейных колебаний. Построить динамические кривые $\varphi=\varphi(t)$ и фазовые кривые $(\varphi,\dot{\varphi})$. Для гармонических колебаний сравнить полученные результаты с аналитическим решением и описать возникшие различия. Оценить асимптотическое значение периода колебаний при $\dot{\varphi}(0)=0$ и $\varphi(0)\to\pi$.

5. Двойной математический маятник:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0,$$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot\varphi_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\varphi_1) + m_2 g l_2 \cos(\varphi_2).$$

Осуществить расчеты с $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$, при различных начальных значениях углов $\varphi_1$ и $\varphi_2$, охватывающих случаи малых гармонических колебаний и нелинейных колебаний. Построить динамические кривые $\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}(t)$ и траектории системы $(\varphi_1, \varphi_2)$. Для гармонических колебаний сравнить полученные результаты с аналитическим решением и описать возникшие различия.

6. Уравнения движения механической системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0;$$

$$L = \frac{m_1 a^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \Omega^2 \sin^2\theta\right) + m_2 a^2 \dot\theta^2 \sin^2\theta + g a (m_1 + m_2)\cos\theta;$$

где $m_1,\ m_2$ — массы частиц; $a = \mathrm{const}$ имеет размерность длины; $\Omega = \mathrm{const}$ — угловая скорость вращения системы. Осуществить расчеты с $m_1 = m_2 = m$, при различных значениях $\Omega$ и начальных условиях, охватывающих случаи малых гармонических колебаний и нелинейных колебаний. Построить динамические кривые $\theta = \theta(t)$ и фазовые кривые $(\theta, \dot\theta)$. Для гармонических колебаний сравнить полученные результаты с аналитическим решением и описать возникшие различия.

7. Уравнение движения частицы в кеплеровой задаче:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2\right) - U(r). \tag{0.1}$$

где $m > 0$ — масса частицы; $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ — потенциальная энергия частицы в центральном поле для данной задачи, $\alpha > 0$; $(r, \varphi)$ — полярные координаты в плоскости $(x, y)$ движения частицы; $(x, y) = (0, 0)$ определяет положение центра поля. Получить динамические кривые $x = x(t)$, $y = y(t)$ и траектории $(x, y)$ для случаев движения частицы по эллиптической, параболической и гиперболической траекториям.

8. Уравнения Эйлера свободного вращательного движения асимметрического волчка:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = 0; \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0; \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = 0; \end{aligned} \tag{0.2}$$

где параметры $I_1 < I_2 < I_3$ — главные моменты инерции асимметрического волчка; $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (\dot\varphi_1, \dot\varphi_2, \dot\varphi_3)$ — угловые скорости вращения вокруг главных осей инерции волчка. Построить динамические кривые $\Omega_1 = \Omega_1(t)$, $\Omega_2 = \Omega_2(t)$, $\Omega_3 = \Omega_3(t)$ при вращении асимметрического волчка вокруг различных главных осей инерции. Выявить эффект неустойчивости вращательного движения при вращении вокруг оси с промежуточным значением момента инерции (теорема о промежуточной оси).