نگین لطفی ۹۹۱۰۰۲۳۹ سونیا سیف آذرنژاد ۴۰۰۱۰۰۲۷۶

مقدمه

در این مقاله، یک مدل یادگیری مبتنی بر "هب" (Hebbian learning) بررسی شده است که بر اساس زمان‌بندی دقیق اسپایک‌ها (spikes) عمل می‌کند. این مدل به جای تمرکز صرف بر نرخ فعالیت نورون‌ها، اطلاعات زمانی دقیق اسپایک‌ها را در بازه‌های میلی‌ثانیه‌ای تحلیل می‌کند. چنین رویکردی برای درک بهتر یادگیری و حافظه در سیستم‌های عصبی پیشنهاد شده است.

مدل پیشنهادی

این مدل از سه بخش اصلی تشکیل شده است:

۱. **پیش سیناپس**: اسپایک‌های ورودی که از طریق وزن‌های سیناپسی بر یادگیری تأثیر می‌گذارند.

۲. **پس سیناپس**: اسپایک‌های خروجی که تغییرات سیناپسی را کنترل می‌کنند.

۳. **وابستگی زمانی**: تابعی که نشان می‌دهد چگونه زمان‌بندی دقیق اسپایک‌ها، همبستگی سیناپسی را تغییر می‌دهد.

معادله اصلی تغییرات سیناپس چنین است:

$$\Delta J_i(t) = \int_t^{t+T} [\text{win}\cdot S_{\text{in}}(t') + \text{wout}\cdot S_{\text{out}}(t')]dt' + \int_t^{t+T}\int_t^{t+T} W(s) S_{\text{in}}(t'') S_{\text{out}}(t') dt'' dt',$$

که در آن $W(s)$ پنجره زمانی یادگیری و S_{in} و S_{out} اسپایک‌های ورودی و خروجی هستند.

تحلیل ریاضی

برای تحلیل ساده‌تر این مدل، از روش‌های آماری و کانولوشن استفاده شده است:

۱. **میانگین‌گیری از اسپایک‌ها**: برای کاهش نویز و نوسانات، اسپایک‌ها در بازه‌های زمانی بزرگ‌تر میانگین‌گیری شده‌اند.

۲. **تابع همبستگی**: احتمال همزمانی اسپایک‌های ورودی و خروجی در زمان‌های مختلف با استفاده از تابع همبستگی محاسبه می‌شود:

$$C_i(s;t) = \langle S_{\text{in}}(t+s) S_{\text{out}}(t) \rangle.$$

۳. **کانولوشن با پنجره یادگیری**: همبستگی زمانی اسپایک‌ها با تابع پنجره $W(s)$ ترکیب می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(s) C_i(s;t) ds.$$

۴. **معادله نهایی یادگیری**: معادله تغییرات سیناپس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dJ_i(t)}{dt} = \text{win}\cdot\nu_{\text{in}}(t) + \text{wout}\cdot\nu_{\text{out}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} W(s) C_i(s;t) ds,$$

که ν_{in} و ν_{out} نرخ میانگین اسپایک‌های ورودی و خروجی هستند.

محدودیت‌های مدل‌های مبتنی بر نرخ

مدل‌های مبتنی بر نرخ چند محدودیت کلیدی دارند:

۱. **بازه‌های زمانی طولانی**: این مدل‌ها برای بازه‌های زمانی بلند (چند صد میلی‌ثانیه) طراحی شده‌اند، اما یادگیری واقعی ممکن است در بازه‌های کوتاه رخ دهد.

۲. **نادیده گرفتن اطلاعات دقیق زمانی**: این مدل‌ها اطلاعات زمانی دقیق اسپایک‌ها را که برای فرآیندهای عصبی مهم هستند، حذف می‌کنند.

۳. **پیچیدگی بالای سیستم‌های واقعی**: مدل‌های مبتنی بر نرخ نمی‌توانند پیچیدگی یادگیری در سیستم‌های عصبی واقعی را به خوبی نشان دهند.

مدل پیشنهادی با تمرکز بر زمان‌بندی دقیق اسپایک‌ها تلاش می‌کند این محدودیت‌ها را برطرف کند و دیدگاه جدیدی به یادگیری سیناپسی ارائه دهد.
برای بررسی معادله‌ی مدل پیشنهادی یکی از نکات لازم، دانستن نوع همبستگی بین نورون ها(تابع همبستگی C_i)است؛ که بدست آوردن معادله‌ی یادگیری‌ای قابل حل، به آن وابسته است. در انتهای این بخش این معادله را بدست خواهیم آورد و برای این کار ناچاریم وارد جزئیات ریاضیاتی شویم. خلاصه سازی این جزئیات موجب سخت تر شدن فهم آنها می‌شود. میتوانید صرفا فرم معادله را پذیرفته و نتایج شبیه سازی با آن را مطالعه کنید. در این صورت از این بخش گذر کنید؛)
مدل:
نورونی را در نظر بگیرید که N ورودی، تصادفی و مستقل از هم، از نورون های دیگر دریافت میکند؛ خروجی این نورون نیز N خروجی تصادفی خواهد بود. و ورودیِ سیناپس iام، نرخ تیزه زدن نورون را به شکل زیر افزایش و کاهش خواهد داد. تصور شده است که نورون، ورودی ها را خطی با هم جمع و یا از هم کم میکند:

$$\lambda^{\text{out}}(t) = \nu_0 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{f} J_i(t_f^i)\epsilon(t - t_f^i).$$

و چون در معادله‌ی یادگیری به میانگین آنزامبل ها علاقمندیم:

$$\langle S^{\text{out}}(t)\rangle = \nu_0 + \sum_{i=1}^{N} J_i(t) \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \epsilon(s)\lambda_i^{\text{in}}(t - s).$$

که برای سادگی بخش دوم را اینگونه نشان میدهیم:

$$\Lambda_i^{\text{in}}(t) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \epsilon(s)\lambda_i^{\text{in}}(t - s).$$

در اینجا ممکن است برای خواننده‌ی دقیق شبه پیش بیاید که چرا $J_i(t)$ در معادله ظاهر شده و مگر نباید این مقدار$J_i(t+s)$ باشد؟ سوالی کاملا به جا و در جواب لازم است نشان دهیم این دو مقدار برابرند. اما در اینجا به جزئیات آن نپرداخته‌ایم.// همچنین باید تابع کانولوشن را نیز تبیین کنیم. این تابع به شکل زیر خواهد بود:

$$Q_{ij}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, W(s)q_{ij}(s; t).$$

که مقادیر q_{ij} ،یعنی همان ماتریس کواریانس، به شکل زیر خواهد بود:

$$q_{ij}(s;t) := [\Lambda_i^{\text{in}}(t+s) - \nu_i^{\text{in}}(t+s)][\Lambda_j^{\text{in}}(t) - \nu_j^{\text{in}}(t)].$$

و نهایتا به کمک عبارات بالا، تابع همبستگی تعریف می‌شود:

$$C_i(s;t) = \sum_{j=1}^{N} J_j \Lambda_j^{\text{in}}(t+s)\Lambda_i^{\text{in}}(t) + \lambda_i^{\text{in}}(t+s)[\nu_0 + J_i(t)\epsilon(-s)].$$

و نهایتا با جایگذاری تمامی این مقدار در رابطه‌ی یادگیری، بالاخره به معادله مورد نظر میرسیم:

$$J_i = w_i^{\text{in}}\nu_i^{\text{in}} + w^{\text{out}}\left[v_0 + \sum_j J_j v_j\right] + \tilde{W}(0)\nu_i^{\text{in}}\nu_0 + \sum_j J_j\left[Q_{ij}\nu_i^{\text{in}}\nu_j^{\text{in}} + \delta_{ij}\nu_i^{\text{in}}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, W(s)e^{-s}\right],$$

با نامگذاری های جدید، معادله به فرم شکیل تر زیر درخواهد آمد:

$$J_i = k_1 + \sum_j \left[Q_{ij} + k_2 + k_3\delta_{ij}\right] J_j,$$

که در آن مقادیر به شکل زیرند:

$$k_1 = [w^{\text{out}} + \tilde{W}(0)\nu_0]\nu^{\text{in}} + w^{\text{in}}\nu^{\text{in}},$$

$$k_2 = [w^{\text{out}} + \tilde{W}(0)]\nu^{\text{in}},$$

$$k_3 = \nu^{\text{in}}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, W(s)e^{-s}.$$

در ادامه تمامی بررسی های ما روی این "مدل اسباب بازی" خواهد بود که رابطه‌ی مربوطه‌ی آن را بدست آوردیم. یعنی میخواهیم به سراغ این معادله برویم و با برخی ساده سازی ها، نتیجه‌ی این دینامیک را بررسی کنیم. در واقع سوال این است: **آیا این دینامیک در کیس های ساده‌ای که جوابشان را بلدیم به نتیجه‌ی درستی میرسد؟**

ساده سازی ها:

۱.

$$K_3 = 0$$

۲. جمعیت نورونی (N) را به دو گروه M_1 و M_2 تقسیم میکنیم. فرضیات زیر برای گروه ها برقرار است:

$$M_1 + M_2 = N, \quad M_1, M_2 \gg 1, \quad |M_1| = |M_2|$$

۳. ورودی نوفه ها را تابع توزیع پوآسونی در نظر میگیریم که برای هر گروه متفاوت بوده به شکل زیر است:

M_2	M_1
$\lambda_i^{in}(t) = \lambda^{in}(t)$	$\lambda_i^{in}(t) = v^{in}$
$\langle \lambda^{in}(t) \rangle = v^{\text{in}}$	$\langle \lambda^{in}(t) \rangle = v^{\text{in}}$
$Q_{ij}(t) = Q$	$Q_{ij} = 0$

با این شرایط، سه ورودی مختلف برای بررسی پاسخ دینامیک داریم.

۱. نوفه سفید

۲. نوفه رنگین

۳. ورودی پریودیک

هر کدام از این ورودی ها تاثیر مختلفی بر پارامترهای مختلف مسئله و Q, J دارند که بهتر است در فاز بعدی پروژه دقیق تر به آنها بپردازیم. (به روش شبیه سازی عددی)

نکته‌ی دیگری که در بررسی دینامیک یادگیری حائز اهمیت است؛
میانگین وزنی($averageweight$)J و میانگین خروجی($averageoutput$) است. انتظار داریم در مدت زمانی منطقی، این دو عدد به عددی میل کنند و واگرا نشوند. برای روش های دیگر مدلسازی یادگیری که این واگرایی اتفاق میافتد از روش های مختلفی مثل ری اسکیل کردن وزن ها، ثابت نگه داشتن جمع تمام وزن ها، و یا ثابت نگه داشتن جمع مجذور وزن ها استفاده می‌شود. و در این موارد مجبوریم پارامتر های معادله را تابعی از J در نظر بگیریم. اما در این روش مدلسازی نیازی به هیچکدام از قیدها نیست. چرا که دو پارامتر مورد نظر یعنی J^{avg} و v^{out} در طی فرایند یادگیری به یک نقطه‌ی پایدار میل میکنند.

$$J^{\text{av}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} J_i$$

با این وجود، میخواهیم حدی برای دو پارامتر مورد نظر بگذاریم(برای یک پارامتر به طور مستقیم در نظر میگیریم و برای پارامتر دیگر به طور غیر مستقیم اعمال می‌شود) با این کار سعی داریم مفهوم بیولوژیکی مسئله را حفظ کنیم. بدین معنا که پارامتر همبستگی نورنی مجهول نمیتواند بیشتر از مجموع N نورون باشد. این حد را به شکل زیر معرفی میکنیم:

و این حد قیودی بر پارامترهای دیگر می‌گذارد. که تاثیرش را در حل دینامیک خواهیم دید. اما خوب است در اینجا توقف کنیم و کمی به عقب برگردیم. باید بدانیم که بعد از چک کردن معادله در کیس های ساده و برقراری معادله در حدهای بالا و پایین؛ نهایتا از این معادله،این دینامیک یادگیری، چه انتظاری داریم؟ اگر به ابتدای مقاله دقت کرده باشد این ایده مطرح می‌شود که در روش دینامیک یادگیری با سرعت‌های خیلی پایین تر از روش های دیگر سعی در بررسی مکانیزم یادگیری داریم؛ گویا مکانیزم یادگیری به تیزه‌زدن‌های نورون بستگی دارد. به بیان بهتر اردر زمانی مکانیز یادگیری هم اردر است با تیزه زدن های نورون. پس سوال خود را در این مرحله اینگونه مطرح میکنیم:

سرعت مکانیزم یادگیری چقدر است؟ از اردر تیزه‌زدن های نورون؟ کمتر؟ بیشتر؟

برای پاسخ به این سوال دوباره به مثال جمعیت نورونی با دو گروه M_1 و M_2 برمیگردیم. این بار سعی داریم مقایسه‌ای بین دو گروه انجام دهیم و از این رو کمیتی به نام J^{str} معرفی میکنیم. این کمیت سعی دارد همبستگی بین نورون‌های گروه M_1 با خود را با گروه دیگر مقایسه کند.
بر اساس محاسباتی که با این کمیت انجام میدهیم میتوان کمیت دیگری را با توجه به این کمیت تعریف کرد. و این همان سرعت مکانیزم یادگیری را به ما خواهد داد. و نهایتا پی میبریم که ــحداقل در این رژیم ساده شدهــ سرعت مکانیزم یادگیری از اردر زمانی تیزه زدن بیشتر است. البته در تمام محاسبات این

قسمت از k_3 صرف نظر کرده بودیم. میتوانیم آن را نیز به معادلات برگردانیم و با پیچیدگی بیشتری معادله را حل کنیم اما با ساده سازی هم توانستیم به جواب سوال خود برسیم. ساده سازی دیگری که تا اینجا به آن اشاره نکرده‌ایم وجود نویز است. به هنگام محاسبه‌ی وزن‌های میانگین، برای رسیدن به جوابی کلی و منطبق با شهود، از وزن های دقیق صرف نظر کرده و میانگین آنها را در نظر گرفتیم. اما حال وقت آن است که چک کنیم آیا این ساده سازی درست است؟ **تاثیر نویز و افت وخیز در پروسه‌ی یادگیری چقدر است؟**

به بیانی تکنیکال تر، برای رندوم واکی که حول و حوش میانگین وزنی اتفاق میافتد؛ واریانس تعریف میکنیم.

$$varJ_i(t)$$

با توجه به اینکه واریانس به طور خطی با پروسه‌ی یادگیری در حال افزایش است، t^{noise} را به آن منسوب میکنیم تا با مقایسه‌ی آن با t^{str} بتوانیم پاسخ سوال خود را بیابیم. در تعریف واریانس چهار ساده سازی را در نظر میگیریم:

۱. از حد بالا و پایینی که در محاسبات قبلی برای نرمالیزیشن بدست آورده بودیم صرف نظر میکنیم.

۲. از ارتباط بین دو تیزه زدن صرف نظر میکنیم؛ چرا که این فرض جمله‌ای ضعیف خواهد داد که تاثیرش را در K_3 نشان میدهد و نیازی به بررسی آن در این حالت نیست.

۳. ورودی را ثابت در نظر میگیریم. $\lambda_i^{in}(t) = v^{in}$

۴. و چون ورودی را ثابت گرفتیم خروجی را نیز ثابت فرض میکنیم. $\lambda^{out}(t) = v^{out}$

و نهایتا با محاسباتی که از جزئیاتش صرف نظر شده به این نکته میرسیم که هر همبستگی در ورودی، به شرطی که زمان کافی داشته باشد، میتواند یاد گرفته شود! اما نکته‌ی حائز اهمیت این است که با ری اسکیل کردن پارامتر ها(اضافه کردن قیدی بر پارامترها) میتوان زمان مورد نظر برای یادگیری را کنترل کرد(کاری که به نظر میرسد در سیستم های بیولوژیکی انجام میشود؛ یعنی با محدود کردن زمان یادگیری نویز را بی اثر کنیم!). و همین نکته برای صرف نظر از نویز با وارد کردن یک قید به مسئله کافیست. در فاز بعدی پروژه به جزئیات این مسئله خواهیم پرداخت.