Documentación Parcial 2

Gabriel Alberto Barrios de León - 201804558[1]

[1] *Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de San Carlos, Edificio T1, Ciudad Universitaria, Zona 12, Guatemala.*

I. ENUNCIADO:

A. Ejercicio 1

Dados los siguientes datos

Tensión ($N \pm 0.001N$)	Longitud de onda (m)
4.694	3
1.264	1.5
0.578	1
0.284	0.75
0.196	0.6

encuentre la recta que mejor aproxima el comportamiento. La longitud de onda cuando la tension sea de 6N.

B. Ejercicio 2

Encuentre una raíz de

$$f(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$$

II. METODOLOGÍA:

A. Ejercicio 1:

Mediante el método numérico de mínimos cuadrados, partimos de la suposición de que es posible encontrar una recta que aproxime linealmente todos los resultados tabulados, además de proveer una proximación para potenciales valores que no fueron medidos en el laboratorio.

Para este problema ordenamos los datos en dos vectores, donde la tensión corresponde al eje x y la longitud de onda al eje y.

Sea una recta y(x) que cumple con la ecuación

$$y = mx + b$$

obtenemos ecuaciones para determinar los valores de m y b:

$$m = \frac{n \cdot \Sigma(x \cdot y) - \Sigma x \cdot \Sigma y}{n \cdot \Sigma x^2 - |\Sigma x|^2}$$

$$b = \frac{\Sigma y \cdot \Sigma x^2 - \Sigma x \cdot \Sigma(x \cdot y)}{n \cdot \Sigma x^2 - |\Sigma x|^2}$$

Donde los x_i son las componentes del vector i, de modo que las sumatorias $x * y$ hacen de producto escalar entre x y y vectores.

Es natural preguntarse qué tan certera es la aproximación de la recta. Para esto empleamos un coeficiente de correlacion r que indica qué tan distantes son los puntos en promedio; nos interesa el cuadrado de r, es decir, el coeficiente de determinación que indica la validez de nuestra aproximación en un rango de 0 a 1, siendo 1 un cien porciento de precisión.

$$r = \frac{n\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k) - \sum_{k=1}^{n} x_k * \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sqrt{(n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2) * (n\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - (\sum_{k=1}}}$$

Además, las tensiones mantienen una incerteza constante de 0.001 Newtons. Usaremos propagación de error para determinar una incerteza adecuada para la aproximación final, es decir, el momento en el que evaluamos la recta en algún punto ($T = x = 6N$ para este caso). Empleando las siguientes ecuaciones:

$$q = x + y \longrightarrow \delta q = \delta x + \delta y$$

$$q = x * y \longrightarrow \delta q = q\left(\frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|}\right)$$

Para el código, conformado de una función main, dos funciones de sumatorias y dos de error. La función main está compuesta de la estructura (fórmula) de las ecuaciones que describen los factores para la recta y la descripción del error del resultado al evaluar $x = 6$ mediante la incerteza de las tensiones (nótese que la longitud de onda no contiene incerteza, lo cual facilita los cálculos). Finalmente, se imprime el resultado del coeficiente, la expresión para la recta y el resultado con incerteza.

Una función de suma se utilizapara sumar los elementos de cada vector, es decir, suma los v_i para todo i. La otra suma se usa para multiplicar los vectores como un producto punto.

Finalmente, las funciones de error son para casos particulares de este problema que se pueden aplicar en algunas partes en medio del procedimiento para obtener el error final; estas funciones dependen de los resultados de las funciones de suma.

Se incluye un archivo de texto con los datos dados, separados en columnas mediante tres espacios y cada cantidad con igual cantidad de decimales. Un archivo .gp que grafica y genera un archivo .jpeg con la distribución de datos (con su respectiva incerteza en el eje x) acompañados por la recta obtenida en el intervalo necesario para que pueda apreciarse incluso un valor aproximado para el eje y cuando x tiende a 6N.

B. Ejercicio 2:

Usamos el método de Newton Raphson. Puesto que la función

$$f(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)} = cot(x)$$

tiene asíntotas en 0 y en π, es razonable tomar este intervalo, además de elegir el valor inicial como el punto medio entre ambos, y una aproximación "humana" sería $x0 = 1.5$. Elegimos 10 iteraciones para obtener una respuesta con una cantidad generosa de decimales correctos.

El método numérico de Newton-Raphson, o simplmente "Método de Newton", recurre es abierto linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto según la definición de derivada y se obtiene la fórmula de recurrencia:

$$f(x)_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Para n entero en el intervalo [0,10].

En el código incluimos la función main que establece el número de iteraciones, tolerancia y el valor inicial, y llama a la función NewtonRaphson (NR) bajoe stos parámetros.

Puesto que NR se compila de una ecuación de recurrencia, necesitamos almacenar un valor de memoria temporal para los x_n), y usamos para esto dos punteros. La ecuación se obtiene mediante un ciclo while, y colocamos el valor inicial para x_1 a través de x_0 y la función f(x) y su derivada.

Hay dos funciones, f y df, que se evaluan con cualquier número real y se obtiene el valor de cot(x) para cualquier x. Estas funciones son llamadas dentro de la función NR para la ecuación de recurrencia.

Al igual que en el anterior, existe un archivo .gp que grafica cot(x) en el intervalo establecido, con una recta $y = 0$ para que el usuario pueda entender mejor el problema y la validez del resultado obtenido.

III. RESULTADOS

A. Ejercicio 1:

La recta obtenida fue:

$$y(x) = 0.51x + 0.63 \tag{2}$$

y evaluando para $x = 6$ obtenemos una longitud de onda de 3.71N, con incerteza $\delta\lambda = 1.65$. El programa provee más decimales, pero esta es una aproximación aceptable. Cabe señalar que es posible especificar la cantidad de decimales mediante $\%0.nf$ con n la cantidad de casillas para decimales.

Finalmente, se obtuvo un coeficiente determinación de $r^2 = 0.9811$.

B. Ejercicio 2:

Usando $x0 = 1.5$ se obtuvo una raíz aproximada de $x = 1.5707$ que encaja con los primeros decimales de $\pi/2$.

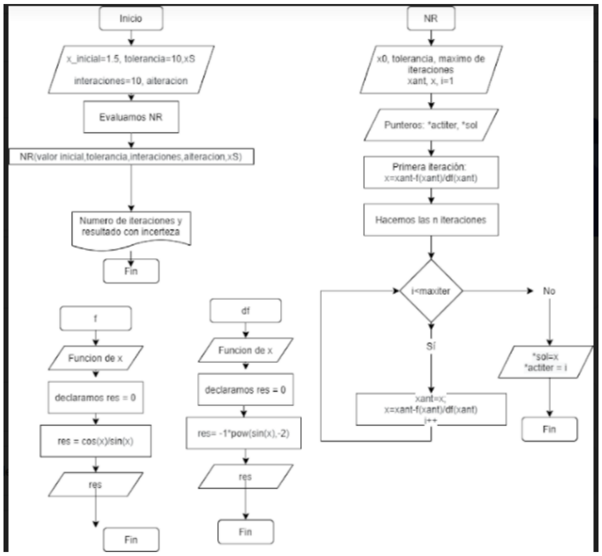
IV. CONCLUSIONES

1. Del primer ejercicio, la gráfica encaja muy bien con la dispersión de datos, y el coeficiente de dterminación indica que la aproximación fue exitosa. De lo anterior, es posible concluir que la aproximación para $T = 6N$ es bastante aceptable (incluyendo su incerteza).

2. La raíz obtenida en el intervalo elegido es muy certera con la raíz teórica de $\pi/2$. El programa mostrará tantos dígitos de $\pi/2$ como iteraciones y decimales se le pidan, gracias al método de Newton Raphson.

V. ANEXOS

Diagramas de flujo para ambos problemas adjuntos en la carpeta por tamaño de los archivos.


Inicio
x_inicial=1.5, tolerancia=10,xS
interaciones=10, aiteracion
Evaluamos NR
NR(valor inicial,tolerancia,interaciones,aiteracion,xS)
Numero de iteraciones y resultado con incerteza
Fin
f
Funcion de x
declaramos res = 0
res = cos(x)/sin(x)
res
Fin
df
Funcion de x
declaramos res = 0
res= -1*pow(sin(x),-2)
res
Fin
NR
x0, tolerancia, maximo de iteraciones
xant, x, i=1
Punteros: *actiter, *sol
Primera iteración:
x=xant-f(xant)/df(xant)
Hacemos las n iteraciones
i<maxiter
Sí
No
xant=x;
x=xant-f(xant)/df(xant)
i++
*sol=x
*actiter = i
Fin