大学数学: 概念、方法与技巧

线 性 代 数

俞正光 王飞燕 编

清华大学出版社

内 容 简 介

本套书是以理工类、经管类大学本科数学教学大纲和全国研究生入学考试数学考试大纲的要求为基准编写的教学辅导书，作者是清华大学数学科学系主讲教授。

本书讲述"线性代数"课程的基本概念、基本定理与知识点，从基本概念、基本定理的背景及其应用入手，延伸到解题的思路、方法和技巧，并通过一法多题、一题多解的方式兼顾知识的综合与交叉应用，在内容的安排上，既体现出各知识点间承上启下的关系，保持学科结构的系统性，又照顾到各知识点间的横向联系，为读者从全局上、总体上掌握所学的知识提供平台。为巩固所学的基本概念和基本定理，安排了基本题、综合题(侧重本章知识点的综合)和交叉综合题(侧重各章知识点间的综合)供读者选用，并附有读者自测题，供读者选用。

考虑到教学大纲和考试大纲中对理工类学生或考生的要求涵盖了对经管类学生或考生的要求，只是对所涉及的知识范围及知识点的掌握程度的要求有所不同，所以编写时并没有将经管类的内容单独列出进行编写。但在内容的编排及例题和习题的选择上，既体现了两者的不同之处，又兼顾了两者的共同之处。因此，本书同时适用于理工类与经管类学生或考生。

版权所有，翻印必究。举报电话：010-62782989　13901104297　13801310933

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/俞正光，王飞燕编.—北京：清华大学出版社，2004.11
(大学数学：概念、方法与技巧)
ISBN 7-302-09180-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.①俞…②王…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080214 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
责任编辑：刘　颖
封面设计：
印 装 者：
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×230　印张：18　字数：351 千字
版　次：2004 年 11 月第 1 版　2004 年 11 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-09180-3/O·385
印　数：1～5000
定　价：　　元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770175-3103 或(010)62795704

前　　言

《大学数学——概念、方法与技巧》是一套学习与复习大学数学的系列辅导教材，主要是为大学非数学类本科生与全国硕士研究生入学统一考试应试者，系统地复习大学数学内容，以求巩固提高所学知识，取得良好考试成绩而编写的．这套书包括《微积分(上)》、《微积分(下)》、《线性代数》及《概率论与数理统计》四本书．选材原则与教学要求是按照清华大学非数学类本科生数学教学大纲与教育部颁发的全国硕士研究生入学统一考试大纲而确定的．本教材也可作为大学数学的教学参考书．

本书是编者数十年教学经验的积累，是编者依据对课程内容的研究理解，并在综合分析学生认识规律的基础上编写而成的．许多教学资料是第一次对外公开．这些教师不但有丰富的教学经历，同时也多从事科研工作，对数学基本概念、基本方法的灵活运用特别重视．对全国硕士研究生入学统一考试大纲的要求与题型结构均有深入的研究．因此，本书的编写风格与内容取舍充分体现了他们注重知识的基础性、系统性、交叉性与技巧性的教学风范．同时，本书在整体内容上把平时的教学要求与考研复习的需要结合起来，既突出了基础，又具有较强的针对性，希望能对这两类读者都有全方位的指导意义，为他们训练数学思维与解题能力提供较为系统的帮助．

学好数学，重在基础．一味追求技巧，往往导致无所适从，望题生畏．本书在内容安排上强调基本概念与基本思维的训练，各章节均配有相当数量的基本例题(例＊．＊．＊)，其中蕴涵着基本概念、基本方法与技巧．应该说，扎实熟练的基本概念，加上对基本方法的深入思考，是技巧的真正源泉．另外，在大多数章节里，还选编了一定数量的综合例题(综例＊．＊．＊)，体现知识的综合性与交叉性，与训练综合运用所学知识进行分析问题及解决问题的能力．基于综合性与交叉性的考虑，在个别例题中所涉及的内容可能超前本章的内容安排．读者在使用本书时，对书内例题应首先立足于独立思考，而后有选择地查阅解答过程，对一些典型题，应争取有自己的解题方法，很可能你的方法会优于书中提供的方法，果真如此，正说明你学习的深入．对准备考研的读者，鉴于国家每年公布的考试大纲会有局部变化以及四类数学试卷的分类，在使用本书时，可参照考试大纲，有选择地略去书内某些章节．

每章后配备了练习题及答案．读者应力争独立选做其中的题目，以求达到良好效果．每册书后附有清华大学相应课程的近期试题及答案，以供读者练习．

全书编写工作得到清华大学数学科学系副主任白峰杉教授与其他许多教师的支持与

帮助．限于编者水平及撰稿时间仓促,对书中的疏漏与错误,敬请读者批评指出．

本书主编为刘坤林．《微积分(上)》的编者为刘坤林(1～13 章),《微积分(下)》的编者为谭泽光(14～23 章);《线性代数》的编者为俞正光(1～3 章),王飞燕(4～6 章);《概率论与数理统计》的编者为叶俊(1～5 章),赵衡秀(6～8 章)．

作　者

2004 年 9 月于清华园

作 者 简 介

谭泽光

1962 年毕业于清华大学 .清华大学责任教授 .

长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作,曾在奥地利 Graz University 任访问教授 . 讲授过高等数学、线性代数、最优化理论基础等多门课程,分析系列课程负责人 . 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲 .

负责过多项科研项目,发表学术论文 20 多篇,并编著数学规划等教材 . 先后获省部级以上奖励四次,1992 年获国家科技进步二等奖 .

任《高校应用数学学报》编委 . 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人,投入较多精力从事数学教改研究工作,2001 年获国家教学改革成果二等奖 .

俞正光

1962 年毕业于清华大学 . 清华大学责任教授 .

清华大学代数系列课程负责人 . 从事组合图论的研究,发表学术论文 10 多篇 . 主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》等著作 .

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲 . 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人,从事数学教改研究工作 .

曾参加全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织编写的《MBA 联考考前辅导教材》,主编《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材 .

刘坤林

1970 年清华大学数学力学系毕业 . 清华大学责任教授 .

从事基础数学与应用数学教学工作,两次获清华大学教学优秀奖 . 研究方向: 控制理论与系统辨识,随机系统建模及预测,并行计算 . 1994 年至 1995 年在美国 Texas A&M University 与 Duke University 任访问研究教授并讲学 . 发表学术论文 30 多篇,著有教材《工程数学》,《系统与系统辨识》. 先后七次获国家及省市部级科学技术进步奖 . 水木艾迪考研辅导班主讲 .

中国工业与应用数学学会常务理事,副秘书长 . 系统与控制专业委员会委员,《控制理论及其应用》特邀审稿专家 .

赵衡秀　女

1962 年毕业于清华大学 . 清华大学数学科学系副教授 .

研究方向为概率统计应用 . 长期讲授“概率统计”及“微积分”等课程 . 并担任水木艾迪考研辅导班数学主讲 .

参加编写《MBA 全国联考应试清华辅导数学教材》、《MBA 入学命题预测数学试卷》、《考研数学常考知识点》等各类考研数学辅导教材 .

王飞燕　女

1967 年毕业于清华大学 .清华大学数学科学系教授 .

主要研究方向: 运筹学, 经济数学 . 参编过《线性代数》、《线性代数辅导》等书籍 . 长期在清华大学从事数学教学与教学研究 . 主要讲授的课程有: 高等数学, 代数与几何, 数学模型等 . 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲 .

曾获清华大学优秀教学成果奖 .

叶　俊

1993 年北京师范大学数学系博士研究生毕业 .清华大学副教授 .

专业方向: 概率统计, 应用数学 . 主要从事随机过程及其应用、金融数学、时间序列分析等方面的研究 . 曾编写《随机数学》等教材 .

主要讲授本科生和研究生的概率统计、随机数学方法、微积分及高等概率等课程 . 曾获清华大学首届青年教师教学优秀奖, 1996, 1997 年度清华大学优秀教学成果特等奖, 1999 年获宝钢优秀教师奖 .

长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲 .

目　　录

第 1 章　行　列　式

1.0　引　　言

方阵的行列式是一个数,其值是否为 0 决定了一个矩阵是否可逆;一个矩阵中子式的值决定了矩阵的秩的大小;求矩阵的特征值要通过行列式的计算;讨论向量组的线性相关性、讨论线性方程组的解要利用行列式;一个实对称矩阵的子式的值决定了该矩阵的正定性.凡此种种说明了行列式在线性代数中的地位与作用.

行列式的重点内容有二,其一是利用行列式的性质计算行列式,其二是行列式的展开定理及其应用.行列式的直接应用是解线性方程组的克拉默法则.

1.1　行列式的性质

行列式的性质在行列式中占有非常重要的地位.我们通常总是利用行列式的性质,把一个复杂的行列式化成简单的、易算的行列式,最终计算出结果.在行列式的诸多性质中,以下几条是最基本的,其他性质都可以通过它们推导出来.

1.行列式的行列互换,其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这条性质说明行列式中关于行成立的性质,对列也成立.

2 . 互换行列式的两行, 行列式变号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

3 . 如果行列式中某行元素有公因子 c, 则公因子可提到行列式外, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

4 . 如果行列式中某行元素是两个数之和, 则可拆成两个行列式之和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

从以上四条性质可以推出许多性质, 其中最常用的还有:

5 . 如果行列式中有两行成比例或相等, 则行列式为零 .

6 . 行列式中某行元素乘以数 k 然后加到另一行相应的元素, 其值不变, 如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{i1} + a_{j1} & ka_{i2} + a_{j2} & \cdots & ka_{in} + a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

例 1.1.1　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

思路　(1) 这个行列式的特点是每行元素的和都相等,因此如果把各列都加到第 1 列,则第 1 列有公因子 $x+(n-1)$,可以提到行列式外,这就形成以下解法一.

(2) 这个行列式的另一特点是每行每列只有一个元素与其他元素不同,可以试图利用性质 4 来简化计算,这就是以下解法二.

【解】　方法 1:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ x+(n-1) & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x+(n-1) & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+n-1)(x-1)^{n-1}.$$

方法 2:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x-1 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+x-1 & \cdots & 1+0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+x-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^{n-1} + (x-1)^{n-1} + \cdots + (x-1)^{n-1} + (x-1)^{n}$$

$$= (x-1)^{n-1} \cdot (n+x-1).$$

技巧　方法 2 中用到一个技巧,即把原来只是一个数的每个元素改为两个数之和,使之形成很有规律又便于计算的行列式.

【注 1】　从本例看到性质 4 的运用,不见得原题已经具备直接应用的条件,这个条件往往需要自己来创造.

方法 3: 若 $x=1$,行列式显然为 0,设 $x\neq 1$,将原行列式加一行一列,使之变成 $n+1$ 阶行列式,但保持值不变.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^{n} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & \cdots & \frac{1}{x-1} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^n \begin{vmatrix} 1+\frac{n}{x-1} & \frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} & \cdots & \frac{1}{x-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^n \left(1+\frac{n}{x-1}\right)$$

$$= (x-1)^{n-1}(x-1+n).$$

【解毕】

【注 2】 方法 3 的方法叫加边法或升阶法. 行列式计算中通常是通过降阶来简化计算,这里却反其道而行之,读者可仔细体会其中的道理.

例 1.1.2 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $|A| =$ _____ .

(1997 年考研题)

【解】

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)(-1)^{n-1}.$$ **【解毕】**

【注】　此题为例 1.1.1 **中** $x=0$ **的特例**.

例 1.1.3　计算

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},\quad a_i \neq 0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

思路　(1) **将** 1 **看成** 1+0,**就可利用性质** 4 **解题**.

(2) **也可以考虑通过加边方法升阶来计算**.

【解】　方法 1:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+a_2 & \cdots & 1+0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n + a_2a_3\cdots a_n + a_1a_3\cdots a_n + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

方法 2:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

【解毕】

【注】　例 1 .1 .1 方法 3 和本题方法 2 的解题过程都化出了一个爪形的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & & & \\ -1 & & a_2 & & \\ \cdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & a_n \end{vmatrix}$$

这是又一种常见类型的行列式 .读者不妨按以下三种情形总结一下计算方法: (1) a_1 , a_2 , …, a_n 中至少有两个为0; (2) a_1 , a_2 , …, a_n 中只有一个为 0; (3) a_1 , a_2 , …, a_n 全不为 0 .

例 1.1.4　设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维向量,已知三阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=a$,求$|\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1|$.

思路　显然此题要利用性质 4 拆成几个行列式之和.

【解】

$$\begin{aligned}
&|\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1|\\
=&|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|+|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_1|+|\alpha_1,2\alpha_3,\alpha_3|+|\alpha_1,2\alpha_3,2\alpha_1|+\\
&|2\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3|+|2\alpha_2,\alpha_2,2\alpha_1|+|2\alpha_2,2\alpha_3,\alpha_3|+|2\alpha_2,2\alpha_3,2\alpha_1|\\
=&|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|+0+0+0+0+0+0+2^3|\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1|\\
=&|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|+8|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\\
=&9a.
\end{aligned}$$

【解毕】

例 1.1.5　若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是四维列向量,且四阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$,$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$,则四阶行列式$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|$等于______.

(A) $m+n$;　　(B) $-(m+n)$;

(C) $n-m$;　　(D) $m-n$.

(1993 年考研题)

思路　先用性质 4,再用性质 2.

【解】

$$\begin{aligned}
|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|&=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|\\
&=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|\\
&=-m+n.
\end{aligned}$$

故选(C).　【解毕】

1.2　行列式的展开定理

行列式按一行展开的定理是行列式的一条非常重要的性质,是行列式常用计算方法的重要依据.不仅如此,还是逆矩阵存在的充分条件的理论根据.

按行展开定理包含两部分内容,其一是说行列式任何一行的元素与其代数余子式的乘积之和等于该行列式的值;其二是说行列式任何一行的元素与其他行的对应元素的代数余子式的乘积之和为零.合起来用以下式子表示:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}|A|, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

其中A_{jk}表示元素a_{jk}的代数余子式,其值为

$$A_{jk}=(-1)^{j+k}M_{jk},$$

而 M_{jk} 是元素 a_{jk} 的余子式,是将行列式划去 a_{jk} 所在的第 j 行和第 k 列后得到的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{jk}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j-1\,1} & \cdots & a_{j-1\,k-1} & a_{j-1\,k+1} & \cdots & a_{j-1\,n} \\ a_{j+1\,1} & \cdots & a_{j+1\,k-1} & a_{j+1\,k+1} & \cdots & a_{j+1\,n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,k-1} & a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.2.1 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix}.$$

思路 (1) 按行或按列展开.

(2) 利用递推关系.

【解】 方法 1: 按最后一行展开.

$$\text{原式}=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{n+n}(a_1+x)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n .$$

方法2：若 $x=0$**，按第1列展开．**

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_n (-1)^{n-1} = a_n .$$

设 $x \neq 0$**，第1列的**$\frac{1}{x}$**倍加到第2列，第2列的**$\frac{1}{x}$**倍加到第3列，…，第** $n-1$ **列的**$\frac{1}{x}$**倍加到第** n **列，设** $s=\frac{1}{x^{n-2}}a_n+\frac{1}{x^{n-3}}a_{n-1}+\cdots+a_2$，$t=\frac{1}{x^{n-1}}a_n+\frac{1}{x^{n-2}}a_{n-1}+\cdots+\frac{1}{x}a_2+a_1+x$**．则有**

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & \frac{1}{x}a_n + a_{n-1} & \frac{1}{x^2}a_n + \frac{1}{x}a_{n-1} + a_{n-2} & \cdots & s & t \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}a_n + \frac{1}{x^{n-2}}a_{n-1} + \cdots + \frac{1}{x}a_2 + a_1 + x\right)$$

$$= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_2 x^{n-2} + a_1 x^{n-1} + x^n .$$

综合之，得

$$\text{原式} = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n .$$

方法3：原式记作 D_n**，并记** k **阶行列式为**

$$D_k = \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_k & a_{k-1} & \cdots & a_1 + x \end{vmatrix} .$$

对 D_k **按第1列展开得**

$$D_k = x\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_1 + x \end{vmatrix} + (-1)^{k+1} a_k \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= xD_{k-1} + a_k .$$

这是一个递推公式,于是

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n \\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2 D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &\cdots \\ &= x^{n-1} D_1 + \cdots + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^n + x^{n-1} a_1 + \cdots + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n . \end{aligned}$$

【解毕】

【注】 方法 3 用了递推关系式,也可以用数学归纳法来写 .

例 1.2.2 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} .$$

(1991 年考研题)

思路 本题特点是每行每列都有一个 a 和一个 b,其余全为 0,由于有许多 0,适合用展开定理 .注意到第 1 列和第 n 行的特殊性,按它们来展开更方便 .

【解】 按最后一行展开,有

$$原式 = (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} + (-1)^{n+n} a \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} b^n + a^n .$$

【解毕】

【注】 尽管本题也有行和相等的特点,但如果把各列都加到第 1 列,提取公因子,做

起来并不简单.

例 1.2.3 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

思路 每行每列都只有一个非零元素,适合按行展开.

【解】 按最后一行展开.

$$\text{原式} = (-1)^{n+n} a_n \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+n} a_n (-1)^{n-1+1} a_{n-1} (-1)^{n-2+1} a_{n-2} \cdots (-1)^{2+1} a_2 a_1$$

$$= (-1)^{\frac{(n+6)(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1.$$

【解毕】

【注】 (1) 系数 $(-1)^{\frac{(n+6)(n-1)}{2}}$ 也可以是 $(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$ 或 $(-1)^{\frac{(n+3)(n-2)}{2}}$ 等,只要同一个 n 的值正负号一致就可以.

(2) 本题可以看成是 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$ 的形式,有公式 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$,可以直接套用.

(3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 非零元素在次对角线上,不是对角行列式,答案中在 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 前有一个由 n 决定的正负号.

例 1.2.4 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

思路 这是个三对角行列式,第 1 行只有两个非零元素,可以按第 1 行展开,得到递

推公式.

【解】 记原式为 D_n,则

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

$$\begin{aligned}D_n-\alpha D_{n-1}&=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})\\&=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})\\&\cdots\\&=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)\\&=\beta^{n-2}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-\alpha(\alpha+\beta))\\&=\beta^n.\end{aligned}$$

若 $\alpha\neq\beta$,由对称性,有

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n,$$

消去 D_{n-1},得到

$$D_n=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}=\beta^n+\beta^{n-1}\alpha+\cdots+\alpha^n.$$

若 $\alpha=\beta$,则有

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\alpha^n,$$

按递推,有

$$\begin{aligned}&D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=\alpha^{n-1},\\&\cdots\\&D_2-\alpha D_1=\alpha^2.\end{aligned}$$

以上各式依次用 $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-2}$ 相乘并相加,得

$$D_n-\alpha^{n-1}D_1=(n-1)\alpha^n,$$

$$D_n=(n+1)\alpha^n.$$

【解毕】

技巧 本题利用了 α 与 β 在题中地位等价,写出相应关系式,达到消去 D_{n-1} 的目的.在 $\alpha=\beta$ 的情况下,用了另一种手段,解出 D_n.这两点都要很好领会.

【注】 这是一个很有代表性的题目,许多题都是由这个题演变来的.如

$$\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$$

就是当 $\alpha=\beta=1$ 时的情形,又如

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

就是当 $\alpha = 2, \beta = 1$ 的情形．

例 1.2.5 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

思路 这也是一个三对角行列式，注意第 1 行第 1 列元素是 $\cos\alpha$ 与其他主对角元素 $2\cos\alpha$ 不同，为了得到递推公式，要从最后一行展开．

【解】 记原式为 D_n，则

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n+n-1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1+n-1} \cdot 1 \cdot D_{n-2} + (-1)^{n+n} 2\cos\alpha D_{n-1} \\ &= 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}. \end{aligned}$$

以下用数学归纳法，先算 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时的值：

$$\begin{aligned} D_1 &= \cos\alpha \\ D_2 &= 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

假设

$$D_{k-2} = \cos(k-2)\alpha, \quad D_{k-1} = \cos(k-1)\alpha,$$

则

$$\begin{aligned} D_k &= 2\cos\alpha D_{k-1} - D_{k-2} \\ &= 2\cos\alpha\cos(k-1)\alpha - \cos(k-2)\alpha \\ &= \cos k\alpha + \cos(k-2)\alpha - \cos(k-2)\alpha \\ &= \cos k\alpha. \end{aligned}$$

故 $D_n = \cos n\alpha$ 对任意自然数 n 成立． 【解毕】

技巧 当得到递推公式后，可以看到由 D_1, D_2 可推出 $D_3, \cdots$．先算 D_1, D_2，找到规律，然后用数学归纳法验证．最后一步是利用积化和差公式得出的．

例 1.2.6 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_n & x & x & \cdots & x \\ y & a_{n-1} & x & \cdots & x \\ y & y & a_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad x \neq y.$$

思路 本题的特点是主对角线以上是 x,主对角线以下是 y,根据行列式的行列互换其值不变的性质,将 x, y 对换其值不变.

【解】 记原式为 D_n,则

$$D_n = \begin{vmatrix} y + a_n - y & x & x & \cdots & x \\ y + 0 & a_{n-1} & x & \cdots & x \\ y + 0 & y & a_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ y + 0 & y & y & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= y\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & a_{n-1} & x & \cdots & x \\ 1 & y & a_{n-2} & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & y & y & \cdots & a_1 \end{vmatrix} + (a_n - y) D_{n-1}$$

$$= y\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} - x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & y - x & a_{n-2} - x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & y - x & y - x & \cdots & a_1 - x \end{vmatrix} + (a_n - y) D_{n-1}$$

$$= y(a_{n-1} - x)(a_{n-2} - x)\cdots(a_1 - x) + (a_n - y) D_{n-1}.$$

同理可有

$$D_n = x(a_{n-1} - y)(a_{n-2} - y)\cdots(a_1 - y) + (a_n - x) D_{n-1}.$$

以上两式分别乘 $a_n - x$ 和 $a_n - y$ 并相减,得

$$D_n = \frac{y(a_n - x)(a_{n-1} - x)\cdots(a_1 - x) - x(a_n - y)(a_{n-1} - y)\cdots(a_1 - y)}{y - x}.$$

【解毕】

技巧 本题技巧之一是将一列元素拆成两数之和,从而把一个行列式化作两个行列式之和.其二是利用 x, y 的对称性及行列互换的性质,解递推关系.

例 1.2.7　**计算**

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(2000 **年考研题**)

【**解**】　**按最后一行展开**.

$$\textbf{原式} = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} a_n a_{n-1} \cdots a_1 + 1.$$

【**解毕**】

【**注**】　**此题与例** 1.2.2 **有点相似**.

例 1.2.8　**五阶行列式**

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

(1996 **年考研题**)

思路　**此题与例** 1.2.4 **类似,也是三对角行列式,按第** 1 **行展开,然后递推**.

【**解**】　**记原式为** D_5,**按第** 1 **行展开,有**

$$\begin{aligned} D_5 &= (1-a)D_4 + aD_3 \\ &= (1-a)((1-a)D_3 + aD_2) + aD_3 \\ &= (1-a+a^2)D_3 + a(1-a)D_2 \\ &= (1-a+a^2)((1-a)D_2 + aD_1) + a(1-a)D_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-a)(1+a^2)D_2 + a(1-a+a^2)D_1 \\
&= (1-a)(1+a^2)(1-a+a^2) + a(1-a+a^2)(1-a) \\
&= (1-a)(1+a+a^2)(1-a+a^2) \\
&= (1-a^3)(1-a+a^2) \\
&= 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.
\end{aligned}
$$

【解毕】

【注】 (1) 此题与例 1.2.4 类似,但不是它的特例,所以不能将结果直接代入.

(2) 此题可推广至 n 阶行列式,这时有类似的递推关系式

$$D_k = (1-a)D_{k-1} + aD_{k-2}.$$

用数学归纳法验证,得到类似结果:

$$D_n = 1-a+a^2-\cdots+(-1)^n a^n.$$

例 1.2.9 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$; (B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$;

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$; (D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

(1996 年考研题)

【解】 方法 1: 按第 1 行展开,有

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3) - b_1b_4(a_2a_3-b_2b_3) \\
&= (a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).
\end{aligned}
$$

所以选(D).

方法 2: 利用性质交换行、列,有

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_3 a_2 - b_3 b_2).$$

【解毕】

【注】　计算二阶、三阶行列式有交叉相乘的方法,但是对于四阶以上的行列式交叉相乘的方法不适用,选(A)是错误的.

例 1.2.10　$\begin{vmatrix} 2x & -x & 1 & 3 \\ 2 & 3x & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$中 x^3 的系数是______.

思路　这个行列式是关于 x 的四次多项式,考虑按第 1 行展开,只有 $-x$ 乘其代数余子式这一项会产生 x^3.故只需求该项即可.

【解】

$$a_{12}A_{12} = (-1)^{1+2}(-x)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 3 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= x(x-1)(-2x+1).$$

所以 x^3 的系数是 -2.　【解毕】

例 1.2.11　已知$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,求第 3 列各元素代数余子式之和 $A_{13}+A_{23}+A_{33}$.

思路　$A_{13}+A_{23}+A_{33}=1\cdot A_{13}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{33}$,将系数 1 看成行列式中第 2 列的 3 个元素,将求行列式某列元素的代数余子式之和与展开定理联系起来.

【解】

$$A_{13}+A_{23}+A_{33} = 1\cdot A_{13}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{33} = 0.$$

【解毕】

【注】　1.问题可以引申,如求 $A_{13}+A_{23}-A_{33}$,则 $A_{13}+A_{23}-A_{33}=1\cdot A_{13}+1\cdot A_{23}+(-1)\cdot A_{33}$.利用展开定理把问题化为计算三阶行列式,即

$$A_{13}+A_{23}-A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

2.这类问题通常不要求直接计算代数余子式.

例 1.2.12 求行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

第 4 行各元素的余子式的和的值.

(2001 年考研题)

思路 和例 1.2.11 类似,与展开定理联系起来,也可直接计算.

【解】 方法 1:

$$\begin{aligned} & M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44} \\ = & -A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44} \\ = & \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = & (-1)^{3+2}\times(-7)\times 2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = & 14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ = & -28. \end{aligned}$$

方法 2: 由展开定理知

$$2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44}=0,$$

即

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0,$$

或

$$-M_{41}+M_{42}-M_{43}+M_{44}=0.$$

又易见 $M_{42}=0$,故

$$M_{41}+M_{43}=M_{44}.$$

于是

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=2M_{44}=2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}=-28.$$

方法 3: 直接计算

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}$$

$$=-28.$$

【解毕】

【注】　这种题很简单,又有一定灵活性,只要概念清楚就会解题 . 考试时不必刻意去追求技巧,应力求计算正确 . 但作为复习,了解各种算法及技巧是有好处的 .

1.3　综合例题

综例 1.3.1　记行列式

$$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$$

为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为多少 ?

(1999 年考研题)

思路　求 $f(x)=0$ 的根的个数即求有多少 x 可使 $f(x)=0$ 成立,首先要考察它是几次多项式 . 这个行列式展开后是次数不超过 4 的 x 的多项式,究竟多少次要作具体分析 .

【解】　方法 1: 第 2,3,4 列分别减第 1 列,有

$$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\x&0&0&0\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}$$

$$=-x\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&x-2&-2\\-3&x-7&-3\end{vmatrix}.$$

易知这是 x 的二次多项式,因此 $f(x)=0$ 有两个根 .

方法 2: 第 2 行减第 1 行得

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ x & x & x & x \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 & -3 \\ x & x & x & x \\ -3 & -2 & x-5 & -5 \\ 0 & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & x-5 & -5 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

易知这是 x 的二次多项式,因此 $f(x)=0$ 有两个根.

方法 3: 把每列都看成两项的和,利用性质 4 拆成 16 个行列式的和.由于第 1,2,4 列的第 1 项都一样,它们同时出现时行列式的值为 0,故不为 0 的行列式至多只能取第 1,2,4 列第 1 项中的一列,若再取第 3 列的第 1 项,则构成的行列式至多是 x 的 2 次多项式.又易知 $x=0$ 和 $x=1$ 是两个根,故方程 $f(x)=0$ 是二次方程,且有两个根. 【解毕】

【注】 (1) 这个题初看就答是 4 次多项式,其实不对,只能说是小于等于 4 次的,究竟多少次要作具体分析.化简时不必计算到底,只要算到能判断即可.

(2) 即使已知是 2 次多项式,尚不能确定有 2 个根.严格来说根的个数与讨论的数域有关.代数基本定理告诉我们, n 次复系数多项式有 n 个复根,就是说在复数域里方程的次数和根的个数是一致的,在实数域或有理数域就不一定了.如果题中没有明确标明数域范围,则默认为复数域.

(3) $x=0$ 是一个根,这是因为行列式中第 1 行和第 2 行的常数项相同.至于 $x=1$ 是一个根,只需将第 1 列加第 3 列,第 2 列加第 4 列,然后相减,再将 1 代入,就得到一列 0 元素.

综例 1.3.2 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2-x \\ 1 & x & x+3 & 6+x \end{vmatrix},$$

证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

思路　此行列式是关于 x 的多项式 $f(x)$，显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可微，由罗尔中值定理，若有 $f(0)=f(1)=0$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$ 成立．即有小于 1 的正根．

【解】　显然

$$f(0)=\begin{vmatrix}0&1&2&4\\1&2&2&4\\2&2&1&2\\1&0&3&6\end{vmatrix}=0,\qquad f(1)=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\1&1&2&4\\2&2&1&1\\1&1&4&7\end{vmatrix}=0.$$

所以由罗尔中值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根．

【证毕】

【寓意】　这是微积分和线性代数相结合的综合题．原本是考微分中值定理，只是给出的函数用行列式来表达，从而检验定理的条件成为行列式的计算．只要概念清楚，这样的问题并不难解决．

综例 1.3.3　已知 A,B 是三阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=-1$，则行列式

$$\begin{vmatrix}0&2A\\-B&AB\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

(1996 年清华大学试题)

思路　若 $|A|$ 是 n 阶行列式，$|B|$ 是 m 阶行列式，则有以下结论：

$$\begin{vmatrix}A&0\\C&B\end{vmatrix}=|A||B|,$$

及

$$\begin{vmatrix}0&A\\B&C\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|.$$

【解】

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0&2A\\-B&AB\end{vmatrix}&=(-1)^{3\times3}|2A||-B|=-2^3|A|(-1)^3|B|\\&=8|A||B|\\&=-16.\end{aligned}$$

【解毕】

1.4　克拉默法则

这里讨论的是行列式在一类特殊的线性方程组中的应用．这类方程组的方程个数恰好等于未知数的个数．这也是应用克拉默(Cramer)法则的前提．

1. 若非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则该方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 D_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 中第 i 列元素换为常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所得到的行列式. 即

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 则该方程组只有零解.

例 1.4.1 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = a^2 + b^2 + c^2, \\ bcx_1 + acx_2 + abx_3 = 3abc. \end{cases}$$

此方程组有惟一解的条件是什么? 试求出惟一解.

思路 这是 3 个未知数 3 个方程的方程组, 可以用克拉默法则来求解.

【解】 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\bc&c(a-b)&b(a-c)\end{vmatrix}=(a-b)(a-c)\begin{vmatrix}-1&-1\\c&b\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a).$$

由克拉默法则可知,当 a,b,c 互不相等时,该方程组有惟一解.此时惟一解为

$$x_1=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\begin{vmatrix}a+b+c&1&1\\a^2+b^2+c^2&b&c\\3abc&ac&ab\end{vmatrix}=a,$$

$$x_2=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\begin{vmatrix}1&a+b+c&1\\a&a^2+b^2+c^2&c\\bc&3abc&ab\end{vmatrix}=b,$$

$$x_3=\frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\begin{vmatrix}1&1&a+b+c\\a&b&a^2+b^2+c^2\\bc&ac&3abc\end{vmatrix}=c.$$

【解毕】

例 1.4.2　线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=b,\\a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3+a_4^2x_4=b^2,\\a_1^3x_1+a_2^3x_2+a_3^3x_3+a_4^3x_4=b^3.\end{cases}$$

有惟一解的条件是什么?并求惟一解.

思路　这是 4 个未知数 4 个方程的线性方程组,可以用克拉默法则,并注意到系数行列式是范德蒙德(Vandermonde)行列式,可直接代入结果.

【解】

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a_1&a_2&a_3&a_4\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&a_4^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&a_4^3\end{vmatrix}$$

$$= (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1).$$

由克拉默法则可知,当 $D \neq 0$ **时,即** $a_i \neq a_j\ (i \neq j)$ **时方程组有惟一解.此时**

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a_2 & a_3 & a_4 \\ b^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ b^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a_4 - b)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_3 - b)(a_3 - a_2)(a_2 - b)}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)}$$

$$= \frac{(a_4 - b)(a_3 - b)(a_2 - b)}{(a_4 - a_1)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1)},$$

$$x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & b^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & b^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \frac{(a_4 - b)(a_3 - b)(b - a_1)}{(a_4 - a_2)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)},$$

$$x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & b & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & b^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & b^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \frac{(a_4 - b)(b - a_1)(b - a_2)}{(a_4 - a_3)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)},$$

$$x_4 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & b^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & b^3 \end{vmatrix} = \frac{(b - a_1)(b - a_2)(b - a_3)}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)}.$$

【解毕】

【注】　范德蒙德行列式是一个很重要的行列式,其结果是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

例 1.4.3　**问 λ 为何值时,下述齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ (\lambda - 3)x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_3 = 0. \end{cases}$$

有非零解?

思路　由克拉默法则,令系数行列式为 0,求出 λ.

【解】

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda-3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda-3 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(\lambda-2)(1-\lambda) = 0,$$

所以 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$ 时,该方程组有非零解.　【解毕】

1.5　练　习　题

计算下列行列式(第 1 题～第 3 题)

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.　　2. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

4. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m$,求 $\begin{vmatrix} a_{11}-2a_{12} & 2a_{12}+a_{13} & a_{13}-2a_{11} \\ a_{21}-2a_{22} & 2a_{22}+a_{23} & a_{23}-2a_{21} \\ a_{31}-2a_{32} & 2a_{32}+a_{33} & a_{33}-2a_{31} \end{vmatrix}$.

5. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = -1$,

求

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

计算下列行列式(第 6 题～第 14 题)

6. $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$, **其中** $x_i \neq a_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & x_1y_4 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & x_2y_3 & x_2y_4 \\ x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 & x_3y_4 \\ x_1y_4 & x_2y_4 & x_3y_4 & x_4y_4 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+x & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ n & n & \cdots & n+x \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

15 . **证明**

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix} = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c} \qquad (b \neq c) .$$

16 . **设四阶行列式**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

求 $3A_{31} - A_{32} + A_{33} + 2A_{34}$.

17 . **设** n **阶行列式**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

求行列式 D **的所有元素的代数余子式之和** $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$.

18 . **设** $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$, **解方程** $f(x) = 0$.

19 . **设** $f(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2x & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -x & x \\ 1 & 4 & 0 & 3x \end{vmatrix}$, **求** x^3 **的系数及常数项** .

20 . **已知齐次线性方程组**

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + tx_3 = 0 . \end{cases}$$

有非零解, 求 t .

第 2 章　矩　　阵

2.0　引　　言

矩阵代数是线性代数中重要且不可缺少的部分,它是处理大部分线性代数问题的一种简单而有效的工具.

本章应掌握矩阵的概念、矩阵的运算及各种运算的运算规律,会通过符号运算实现推理.逆矩阵是本章的一个重点,要掌握逆矩阵的性质及矩阵可逆的充分必要条件,会用各种方法求出矩阵的逆矩阵.矩阵的初等变换是研究矩阵各种性质和应用矩阵解决各种问题的重要方法,不但要会用初等变换解决有关的问题,还要掌握初等变换与初等矩阵的联系.矩阵的秩是反映矩阵本质的一个重要概念,是线性代数的一个难点,要理解矩阵秩的概念及其性质,掌握求矩阵秩的方法.

2.1　矩阵的运算

矩阵是由数排成的一张矩形数表.矩阵与数、矩阵与矩阵有各种各样的运算,它们运算的结果还是一个矩阵.对于不同的运算,要注意各自的运算法则以及运算的性质.特别要注意运算可行的条件,要善于比较矩阵的运算和相应的数的运算、行列式的运算在运算规则以及运算性质上的区别.

1.矩阵的加法

两个矩阵只有当它们同型时才能相加.所谓同型是指两个矩阵的行数对应相同,列数也对应相同.不同型的矩阵是不能相加的.同型的两个矩阵 A 与 B 的和是一个与它们同型的矩阵,其中的元素是由 A 和 B 中对应元素相加得到的.即若设

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = (b_{ij})_{m\times n},$$

则

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

由于运算规则是 $m\times n$ 个数的普通加法,因此加法运算有数的普通加法的性质:

(1) 交换律　$A+B=B+A$;

(2) 结合律　$A+(B+C)=(A+B)+C$;

(3) 有零矩阵 0,对任意矩阵 A,有 $A+0=0+A=A$;

(4) 任意矩阵 A 都有负矩阵 $-A$,使得 $A+(-A)=0$.

2 . 数与矩阵的数量乘法

数可以和任意矩阵相乘,其结果仍是同型的矩阵,运算规则是数和矩阵的每个元素相乘 .

设 k 是一个数,$A=(a_{ij})_{m\times n}$是一个 $m\times n$ 矩阵,则数 k 与矩阵 A 的数乘为

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

这个规则也可以这样理解,如果一个矩阵的每个元素都有公因子 k,则可以将 k 提到矩阵外面 . 注意,行列式中有一个性质是如果一个行列式中有一行各元素有公因子 k,可以将 k 提到行列式外面 . 这是两个完全不同的性质 . 如果一个 n 阶方阵,每个元素都有因子 k,那么这个矩阵的行列式提出来的公因子就不只是一个 k,而是 n 个 k,即 k^n . 用式子表示为:

若 $B=(kb_{ij})_n=k(b_{ij})_n$,则

$$|B|=|(kb_{ij})_n|=k^n|(b_{ij})_n|.$$

在计算中,初学者是很容易出错的,要特别小心 .

数乘有数的普通乘法的性质 . 设 k,l 是两个常数,A,B 是同型矩阵,则

(1) $1\cdot A=A,0\cdot A=0$;

(2) $k(lA)=(kl)A$;

(3) $k(A+B)=kA+kB$;

(4) $(k+l)A=kA+lA$.

3 . 矩阵的乘法

两个矩阵只有在前一个矩阵的列数和后一矩阵的行数相等的情况下才能相乘,其结果仍是一个矩阵,它的行数等于前一个矩阵的行数,它的列数等于后一矩阵的列数 . 相乘运算的法则也很特别,乘积矩阵中第 i 行第 j 列元素是由前一矩阵的第 i 行元素和后一矩阵的第 j 列中对应的元素相乘并相加而得到的 . 用式子表示为:

设 $A=(a_{ij})_{m\times l}$,　$B=(b_{ij})_{l\times n}$,则

$$C=AB=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}.$$

由于乘法可行条件的限制,因此矩阵在乘法运算中的顺序是很重要的,或者说乘法运算的交换律一般是不会成立的.容易举出 AB 可行而 BA 不可行的例子,即使 AB 和 BA 都可行,但 AB 和 BA 不同型的例子.当然还能举出 AB 和 BA 同型,但 AB 和 BA 仍然不相等的例子.

矩阵乘法的性质如下.

(1) 结合律 $$A(BC)=(AB)C.$$

由于矩阵乘法有结合律,当几个矩阵连续相乘时,可以按照结合律,作不同的组合,从而改变运算的先后顺序达到简化计算的目的.在许多问题中,这是常用的技巧.

(2) 分配律 $$(A+B)C=AC+BC,$$ $$C(A+B)=CA+CB.$$

由于矩阵乘法无交换律,计算的顺序极为重要,因此有左、右分配律之分.

(3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

4.矩阵的转置

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

是 A 的转置矩阵,记作 A^{T} 或 A'. A^{T} 是 $n\times m$ 矩阵.

转置的性质有:

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$;

(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

例 2.1.1 设
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
而 $n\geq 2$ 为正整数,则 $A^n-2A^{n-1}=$______.

(1999 年考研题)

思路 先提取公因子,再利用结合律.

【解】

$$A^n-2A^{n-1}=A^{n-1}(A-2I)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

【解毕】

【注】 (1) 本书用 I 表示单位矩阵.

(2) 提取公因子后,容易观察到 $A(A-2I)=0$,所以用结合律.若直接计算 A^{n-1} 就会麻烦些.

例 2.1.2 设 A, B 为 n 阶方阵,满足等式 $AB=0$,则必有______.

(A) $A=0$ 或 $B=0$; (B) $A+B=0$;

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$; (D) $|A|+|B|=0$.

(1991 年考研题)

【解】 由矩阵乘积的行列式等于矩阵的行列式的乘积,有

$$|AB| = |0| = 0,$$
$$|A||B| = 0,$$

由此推出 $|A|=0$ 或 $|B|=0$,选(C). 【解毕】

【注】 初等代数乘法有消去律,故由 $ab=0$,可推出 $a=0$ 或 $b=0$.但是矩阵乘法没有消去律,两个非零矩阵的乘积可能为零,例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以由 $AB=0$ 不能推出 $A=0$ 或 $B=0$,不能选(A).

还用刚才的例子,有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

就是说满足 $AB=0$ 时,并非必有 $A+B=0$.故选(B)也是错误的.

$AB=0$ 时必有 $|A|=0$ 或 $|B|=0$，但并非必有 $|A|$，$|B|$ 同时为 0，例如当 $A=0$，B 满秩时，有 $AB=0$ 且 $|A|=0$，而 $|B|\neq 0$，这时 $|A|+|B|\neq 0$．故不能选(D)．

例 2.1.3 设 A，B 为 n 阶方阵，A 非零且 $AB=0$，则______．

(A) $B=0$；　　(B) $|B|=0$ 或 $|A|=0$；

(C) $BA=0$；　　(D) $(A-B)^2=A^2+B^2$．

【解】 由 $AB=0$，有

$$|A||B|=0,$$

得到 $|A|=0$ 或 $|B|=0$．故应选(B)．【解毕】

【注】 在初等代数中有消去律：$ab=0$，若 $a\neq 0$，则 $b=0$．但在矩阵代数中，A，B 都是非零矩阵，仍有可能乘积 AB 为零矩阵．例如

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

有

$$AB=0,$$

故从 $AB=0$，$A\neq 0$，不能推出必有 $B=0$ 的结论，选(A)是错误的．

在初等代数中，由 $ab=0$ 能推出 $a=0$ 或 $b=0$，因此有 $ba=0$，或者说由交换律，有 $ba=ab=0$．但在矩阵代数中，由 $AB=0$ 不能推出 $A=0$ 或 $B=0$(理由见前题注)，乘法又没有交换律，所以不能推出 $BA=0$，事实上可以举出例子说明 A 非零，$AB=0$，但 $BA\neq 0$．例如，令

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

而

$$BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq 0.$$

所以不能选(C)．

初等数学中由于有交换律，有差的平方的展开式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，当 $ab=0$ 时，有 $(a-b)^2=a^2+b^2$，但是在矩阵代数中乘法无交换律，所以

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2.$$

当 $AB=0$ 时，有

$$(A-B)^2=A^2-BA+B^2\neq A^2+B^2.$$

所以不能选(D)．

例 2.1.4　设 A, B 是三阶方阵, $|A| = -2$, $A^3 - ABA + 2I = 0$, 则 $|A - B| =$ ______ .

(A) 2;　　(B) -2;　　(C) $\frac{1}{2}$;　　(D) $-\frac{1}{2}$.

【解】　由

$$A^3 - ABA + 2I = 0,$$
$$A^3 - ABA = -2I,$$
$$A(A - B)A = -2I,$$

两边取行列式,得

$$|A||A - B||A| = |-2I| = (-2)^3 .$$

所以

$$|A - B| = -8/(-2)^2 = -2 .$$

选(B) .　　【解毕】

【注】　$|-2I| = (-2)^3|I| = -8$, 这是因为 I 是三阶单位矩阵, 每行提一个公因子 -2, 一共提 3 个 . 所以有 $(-2)^3$. 若错误地以为 $|-2I| = -2|I|$, 就会得到(D) .

例 2.1.5　设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $AA^{\mathrm{T}} = I$, $|A| < 0$, 求 $|A + I|$.

(1995 年考研题)

思路　将 $A + I$ 中的 I 用 AA^{T} 替换 .

【解】

$$\begin{aligned}|A + I| &= |A + AA^{\mathrm{T}}| \\ &= |A(I + A^{\mathrm{T}})| \\ &= |A||I + A^{\mathrm{T}}| \\ &= |A||(I + A)^{\mathrm{T}}| \\ &= |A||I + A|,\end{aligned}$$

于是

$$(1 - |A|)|A + I| = 0 .$$

由 $|A| < 0$, $1 - |A| \neq 0$, 所以

$$|A + I| = 0 .$$

【解毕】

例 2.1.6　已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $A = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$, 其中 α^{T} 是 α 的转置, 则 $A^n =$ ______ .

(1994 年考研题)

思路　注意到 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta$ 是 3×3 的方阵, 而 $\beta\alpha^{\mathrm{T}}$ 是 1×1 的一个数, 可利用矩阵乘法的结合律及数乘矩阵的性质解题 .

【解】

$$\begin{aligned}A^n &= \alpha^{\mathrm{T}}\beta\alpha^{\mathrm{T}}\beta\cdots\alpha^{\mathrm{T}}\beta \\ &= \alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})(\beta\cdots\alpha^{\mathrm{T}})\beta \\ &= (\beta\alpha^{\mathrm{T}})^{n-1}\alpha^{\mathrm{T}}\beta \\ &= \left[\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]^{n-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

【解毕】

【注】 矩阵乘法没有交换律但有结合律.本题就是通过结合律并利用$\beta\alpha^{\mathrm{T}}$是一个数这个特点简化了计算.这是矩阵运算中常用的手段和技巧.

例 2.1.7 设$\alpha=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,矩阵 $A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$,$n$为正整数,则$|aI-A^n|=$______.

(2000 年考研题)

思路 由于α是三维列向量,$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$是一个数,利用结合律简化计算.

【解】

$$\begin{aligned}aI-A^n &= aI-(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})^n \\ &= aI-\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\cdots(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha^{\mathrm{T}} \\ &= aI-(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)^{n-1}\alpha\alpha^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

而

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2,$$

所以

$$aI-A^n=aI-2^{n-1}A,$$

$$\begin{aligned}|aI-A^n| &= \left|aI-2^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1,0,-1)\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}-2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\right|\end{aligned}$$

$$
= \begin{vmatrix} a - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a - 2^{n-1} \end{vmatrix}
$$

$$
= a\left[(a - 2^{n-1})^2 - (2^{n-1})^2 \right]
$$

$$
= a(a^2 - 2^n a)
$$

$$
= a^2 (a - 2^n).
$$

【解毕】

2.2　逆　矩　阵

1．可逆矩阵与逆矩阵

n阶方阵 A,如果存在 n阶方阵 B,使得

$$
AB = BA = I,
$$

则 A是可逆矩阵, B是 A的逆矩阵．

只有方阵才讨论其是否是可逆矩阵．

容易证明, A若可逆,则其逆矩阵 B是惟一的．

2．矩阵可逆的充分必要条件

不是任何方阵都是可逆的,只有满足一定条件的矩阵才可逆．这个充分必要条件就是矩阵的行列式不等于零．

一个方阵如果其行列式不等于零,则称这个方阵是非奇异的,因此矩阵可逆的充分必要条件是矩阵非奇异．

3．计算逆矩阵的公式

设 $A=(a_{ij})$是 n阶方阵, A_{ij}是元素 a_{ij}的代数余子式,令

$$
A^* = (A_{ij})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},
$$

A^*是 A的伴随矩阵．

通过矩阵乘法并利用行列式的展开定理,得到以下结果:任意 n阶方阵 A与它的伴随矩阵之间存在关系

$$
AA^* = A^*A = |A| I.
$$

当 A非奇异或者说$|A|\neq 0$,这时

$$
A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = I,
$$

从而有

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

这个求逆公式有重要的理论意义,实际计算中,由于计算量比较大,对一般矩阵并不适用,只有当矩阵是二阶的或特殊高阶时才适用.例如 A 是二阶方阵时,设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

当 $ad - bc \neq 0$ 时,有

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4.逆矩阵的运算性质

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) 设 A, B 是 n 阶可逆矩阵,则 AB 也可逆且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$,其中 k 是非零常数;

(4) $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

注意:没有$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$这条性质,事实上

$$(A + B)(A^{-1} + B^{-1}) = I + AB^{-1} + BA^{-1} + I \neq I.$$

5.逆矩阵的计算

求逆矩阵的方法通常有以下几种.

(1) 按定义

对于抽象的矩阵,只知道有关它的一个关系式,这时可以利用矩阵的定义 $AB = I$ 求它的逆矩阵.

(2) 按公式

对于二阶或特殊的高阶矩阵可以用公式

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

(3) 作矩阵的初等行变换或初等列变换

这是最常用的方法.

(4) 利用矩阵的性质

在已知矩阵的一个关系式时,通过矩阵运算及其性质,解出欲求的逆矩阵.

例 2.2.1 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

B 为三阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $t=$ ______ .

(1997 年考研题)

思路 由 $AB=0$，若 A 可逆，则有 $B=0$，与题设 B 是非零矩阵矛盾，因此 $|A|=0$.

【解】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & t+3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7(t+3) = 0,$$

所以 $t=-3$. 【解毕】

例 2.2.2 设 A 为三阶方阵，$|A|=\dfrac{1}{16}$，则 $|2A^{-1}-(2A)^{-1}|=$ ______ .

(1995 年清华大学试题)

思路 由 $AA^{-1}=I$ 得 $|A||A^{-1}|=1$，所以 $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

【解】

$$|2A^{-1}-(2A)^{-1}| = \left|2A^{-1}-\frac{1}{2}A^{-1}\right|$$

$$= \left|\left(2-\frac{1}{2}\right)A^{-1}\right|$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^3 |A^{-1}|$$

$$= \frac{27}{8}\cdot\frac{1}{|A|}$$

$$= 54 .$$

【解毕】

例 2.2.3 设 A, B, C 均为 n 阶方阵，且 $ABC=I$，则

(A) $ACB=I$;　　(B) $CBA=I$;

(C) $BAC=I$;　　(D) $BCA=I$.

思路 由逆矩阵的性质，若 $AB=I$，则 $BA=I$，即有 $AB=BA$. 就是说矩阵和它的逆矩阵作乘法是可交换的 . 根据题设 $ABC=I$，可知 A, AB, ABC, C, BC 等都是可逆矩阵 .

【解】 由题设 $ABC=I$，即

$$A(BC) = I,$$

故有

$$(BC)A = I,$$

即

$$BCA = I.$$

所以选(D).

其他各选项由于没有交换律都不成立. 【解毕】

例 2.2.4 设 A 为 n 阶矩阵,且 $A^3 = 0$,则 $(I - A)^{-1} =$ ______ .

(A) $I - A + A^2$; (B) $I + A + A^2$;

(C) $I + A - A^2$; (D) $I - A - A^2$.

【解】 由 $A^3 = 0$,有

$$I - A^3 = I,$$

$$(I - A)(I + A + A^2) = I,$$

所以

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2.$$

选(B). 【解毕】

【注】

$$I - A^3 = I^3 - A^3 = (I - A)(I + A + A^2).$$

这是由于单位矩阵 I 可以和任意方阵 A 交换: $IA = AI = A$.所以初等数学中 $1 - a^3 = (1 - a)(1 + a + a^2)$的公式在矩阵中适用.但一般矩阵 A 和 B 是不可交换的,所以初等数学中

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

在矩阵中没有对应的公式,即

$$A^3 - B^3 \neq (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

例 2.2.5 已知对于 n 阶方阵 A,存在自然数 k,使得 $A^k = 0$,试证明矩阵 $I - A$ 可逆,并写出其逆矩阵的表达式.

(1990 年考研题)

思路 同上题.

【证】 由 $A^k = 0$,有

$$I - A^k = I,$$

$$(I - A)(I + A + \cdots + A^{k-1}) = I,$$

根据定义,$I - A$ 可逆,且

$$(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{k-1}.$$ 【证毕】

例 2.2.6 设 A 是 n 阶方阵,已知 $A^2 - 2A - 2I = 0$,则 $(A - I)^{-1} =$ ______ .

【解】 由 $A^2 - 2A - 2I = 0$,有

$$(A - I)^2 = 3I,$$

$$(A - I) \cdot \frac{1}{3}(A - I) = I,$$

所以

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{3}(A-I).$$

【解毕】

例 2.2.7 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4I=0$,则 $(A-I)^{-1}=$______.

(2001 年考研题)

思路 遇到抽象的 A 满足一个关系式求逆,一般用逆矩阵的定义 .转化为分解二次三项式使之满足要求 .

【解】 $A^2+A-4I=(A-I)(A+2I)-2I=0$,

于是

$$(A-I)\cdot\frac{1}{2}(A+2I)=I,$$

所以

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2I).$$

【解毕】

例 2.2.8 设 $A=I-\xi\xi^{\mathrm{T}}$, ξ 是 n 维非零列向量,证明:

(1) $A^2=A$ 的充分必要条件是 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$;

(2) 当 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 时, A 是不可逆矩阵 .

(1996 年考研题)

【证】 (1)

$$\begin{aligned}A^2&=(I-\xi\xi^{\mathrm{T}})(I-\xi\xi^{\mathrm{T}})\\&=I-2\xi\xi^{\mathrm{T}}+\xi\xi^{\mathrm{T}}\xi\xi^{\mathrm{T}}\\&=I-2\xi\xi^{\mathrm{T}}+(\xi^{\mathrm{T}}\xi)\xi\xi^{\mathrm{T}}\\&=I-(2-\xi^{\mathrm{T}}\xi)\xi\xi^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

若 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$,则

$$A^2=I-\xi\xi^{\mathrm{T}}=A.$$

反之,若 $A^2=A$,则

$$I-(2-\xi^{\mathrm{T}}\xi)\xi\xi^{\mathrm{T}}=I-\xi\xi^{\mathrm{T}},$$

$$(1-\xi^{\mathrm{T}}\xi)\xi\xi^{\mathrm{T}}=0.$$

由于 $\xi\neq0$,所以 $\xi\xi^{\mathrm{T}}\neq0$,故有

$$1-\xi^{\mathrm{T}}\xi=0,$$

即

$$\xi^{\mathrm{T}}\xi=1.$$

这就证明了当且仅当 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 时, $A^2=A$.

(2) 反证法

当 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 时,若 A 可逆 .由(1)知, $A^2=A$,即

$$A(A-I)=0.$$

由 A 可逆,有 $A-I=0$,于是 $A=I$.这与 $A=I-\xi\xi^{T}\neq I$ 矛盾.所以 A 不可逆. 【证毕】

例 2.2.9 设 $(I-CB^{-1})^{T}AB^{T}=I$,求 A^{-1}.

(1997 年清华大学试题)

【解】 由 $(I-CB^{-1})^{T}AB^{T}=I$,可知 B^{T} 可逆,AB^{T} 也可逆,于是

$$\begin{aligned}(I-CB^{-1})^{T}&=(AB^{T})^{-1}\\&=(B^{T})^{-1}A^{-1},\\A^{-1}&=B^{T}(I-CB^{-1})^{T}\\&=((I-CB^{-1})B)^{T}\\&=(B-C)^{T}\\&=B^{T}-C^{T}.\end{aligned}$$

【解毕】

【注】 此题是考察矩阵运算的性质及矩阵的逆的概念的.特别要注意正确运用和的转置、乘积的转置、乘积的逆等性质,还要注意矩阵间是左乘还是右乘的关系.

例 2.2.10 设四阶矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

且矩阵 A 满足关系式

$$A(I-C^{-1}B)^{T}C^{T}=I,$$

将上述关系化简并求矩阵 A.

(1990 年考研题)

【解】 由 $A(I-C^{-1}B)^{T}C^{T}=I$ 有

$$A(C(I-C^{-1}B))^{T}=I,$$

$$A(C-B)^{T}=I.$$

由题设

$$(C-B)^{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

显然 $|(C-B)^{T}|=1$,即 $(C-B)^{T}$ 可逆,故

$$A=((C-B)^{\mathrm{T}})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

【解毕】

例 2.2.11　设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix},$$

且 $B=(I+A)^{-1}(I-A)$,则$(I+B)^{-1}=$______ .

(2000 年考研题)

【解】

$$\begin{aligned}I+B&=I+(I+A)^{-1}(I-A)\\&=(I+A)^{-1}(I+A)+(I+A)^{-1}(I-A)\\&=(I+A)^{-1}(I+A+I-A)\\&=2(I+A)^{-1}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(I+B)^{-1}&=\frac{1}{2}(I+A)\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\-2&4&0&0\\0&-4&6&0\\0&0&-6&8\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【解毕】

技巧　将 I 写作$(I+A)^{-1}(I+A)$,提出公因子简化计算 .

【注】　将 I 写作 $M^{-1}M$ 这种技巧是常用的 . 本题如写成$(I+A)(I+A)^{-1}$或$(I-A)^{-1}(I-A)$,$(I-A)(I-A)^{-1}$都无济于事 .将 I 写成什么形式要根据题目决定 .

例 2.2.12　设 n 阶对称方阵 A 可逆,且满足$(A-B)^2=I$,试化简

$$(A^{-1}B^{\mathrm{T}}+I)^{\mathrm{T}}(I-BA^{-1})^{-1}.$$

【解】 方法 1:

$$\begin{aligned}
&(A^{-1}B^{T}+I)^{T}(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=((A^{-1}B^{T})^{T}+I^{T})(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=(B(A^{-1})^{T}+I)(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=(B(A^{T})^{-1}+I)(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=(BA^{-1}+I)(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=(BA^{-1}+AA^{-1})(AA^{-1}-BA^{-1})^{-1}\\
&=(A+B)A^{-1}((A-B)A^{-1})^{-1}\\
&=(A+B)A^{-1}A(A-B)^{-1}\\
&=(A+B)(A-B)^{-1}\\
&=(A+B)(A-B).
\end{aligned}$$

方法 2: 前几步同方法 1,

$$\begin{aligned}
&(A^{-1}B^{T}+I)^{T}(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=\cdots\\
&=(BA^{-1}+I)(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=(BA^{-1}+I)I(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=(BA^{-1}+I)AA^{-1}(I-BA^{-1})^{-1}\\
&=((BA^{-1}+I)A)(A^{-1}(I-BA^{-1})^{-1})\\
&=(B+A)(A-B)^{-1}\\
&=(A+B)(A-B).
\end{aligned}$$

【解毕】

技巧 $I=AA^{-1}$.

【注】 (1) 本题是考察矩阵运算性质的掌握情况的. 要注意正确使用各个性质, 特别注意 $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$. 本题解题过程写得比较细, 请读者为每一步注明依据. 熟练以后, 可以写得精简些.

(2) 矩阵运算中常会用到 $I=AA^{-1}$ 或 $I=A^{-1}A$. 方法 1 是将现成的 I 写成 AA^{-1}, 方法 2 是先添一个 I, 再将 I 写成 AA^{-1}. 这种手法要学会使用.

(3) $(A-B)^{-1}=A-B$ 的理由是题设 $(A-B)^{2}=I$, 即

$$(A-B)(A-B)=I,$$

故 $A-B$ 可逆且 $(A-B)^{-1}=A-B$.

例 2.2.13 设 A, B 均为三阶矩阵, 已知 $AB=2A+B$, $B=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}$, 则 $(A-I)^{-1}=$ ______.

(2003 年考研题)

【解】 由题设 $AB=2A+B$,有

$$AB-B-2A=0,$$

于是

$$(A-I)B-2(A-I)=2I,$$

$$(A-I)(B-2I)=2I,$$

可知 $A-I$ 可逆,且

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2I).$$

又

$$B-2I=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix},$$

故

$$(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

【解毕】

【注】 例 2.2.10、例 2.2.11 和本题的共同特点是既给出矩阵满足的关系式,又给出具体的矩阵,求逆矩阵.这种类型题目的解题方法是先根据关系式通过符号运算进行化简,找出要求的逆矩阵的表达式,再进行数值计算求出答案.

2.3 矩阵的初等变换

1. 矩阵的初等变换

以下三种对矩阵的行施行的变换叫做矩阵的初等行变换:

(1) 互换矩阵的两行;

(2) 用非零常数乘矩阵某一行;

(3) 某行的 k 倍加到另一行.

相应地有对矩阵的列施行的初等列变换:

(1) 互换矩阵的两列;

(2) 用非零常数乘矩阵的某一列;

(3) 某列的 k 倍加到另一列.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

2. 初等矩阵

对单位矩阵施行一次矩阵的初等变换得到的矩阵叫初等矩阵.

初等矩阵一共有三类:

(1)

$$E(i,j)=\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 &&& \\
&&& 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 &&& \\
&&& \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots &&& \\
&&& 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 &&& \\
&&& 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$E(i,j)$**代表互换单位矩阵的第** i **行和第** j **行,也代表互换单位矩阵的第** i **列和第** j **列**.

(2)

$$E(i(k))=\begin{bmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& k &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$E(i(k))$**代表常数** k **乘以单位矩阵的第** i **行,也代表常数** k **乘以单位矩阵的第** i **列**.

(3)

$$E(ij(k))=\begin{bmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&& \cdots & \ddots &&& \\
&& k & \cdots & 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$E(ij(k))$**代表单位矩阵第** i **行的** k **倍加到第** j **行,也代表单位矩阵第** j **列的** k **倍加到第** i **列**.

例如

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

等都是初等矩阵.

用一个初等矩阵左乘一个矩阵相当于对该矩阵施行一次相应的初等行变换,用一个初等矩阵右乘一个矩阵相当于对该矩阵施行了一次相应的初等列变换.

通过初等矩阵可以把实施的初等变换用关系式表达出来,便于进行符号运算与推理.

3.矩阵的等价标准形

设矩阵 A 经过初等变换变成为矩阵 B,称矩阵 A 和 B 是等价的.等价的矩阵中最简单的形式是$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,其中 I_r 是 r 阶单位矩阵,称之为矩阵的等价标准形.容易证明任何矩阵和一个相应的等价标准形$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$等价,这里 r 是一个不变量,它是矩阵的秩.也就是说等价的矩阵有相同的秩,或者说秩相同的同型矩阵有同一个等价标准形.这是一个非常重要的性质,关于这个性质,有一些相应的结果.

例如,秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 A,存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q,使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

或者说任意 $m\times n$ 矩阵 A 可以通过一系列初等行变换和一系列初等列变换化为等价标准形.

正由于这个性质,给出了通过初等行变换求矩阵的逆矩阵的方法.

4.矩阵的简化行阶梯形

对矩阵作初等变换是保持矩阵的秩不变的,又由于矩阵的秩和矩阵的行秩、矩阵的列秩都相等,如果想求秩的话,不必化作等价标准形,只要化作阶梯形就可以了,在解线性方程组以及求向量组的极大线性无关组、向量组的线性关系时也只需要行阶梯形,其中简化的行阶梯形是一个重要的角色.

一个矩阵如果满足:

(1) 零行(元素全为 0 的行)位于矩阵的下方;

(2) 各非零行的主元(左起第 1 个非零元素)在前一行的主元的右边;

(3) 各非零行的主元为 1;

(4) 主元所在列的其他元素全为 0.

就叫简化的行阶梯形.例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是一个简化的行阶梯形.

任何矩阵都可通过初等行变换化作简化的行阶梯形.

5. 求逆矩阵

对(A, I)通过一系列初等行变换化作(I, B),则B就是A的逆矩阵.

对$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}$作一系列初等列变换化作$\begin{bmatrix} I \\ B \end{bmatrix}$,则$B$就是$A$的逆矩阵.

例 2.3.1 设A是n阶可逆矩阵,将A的第i行和第j行对换后得到的矩阵记为B.

(1) 证明B可逆;

(2) 求AB^{-1}.

(1997 年考研题)

【解】 (1) 方法 1: 由题设$|A|\neq 0$,而

$$|B| = -|A| \neq 0,$$

故B可逆.

方法 2: B是由A作初等变换得到的,初等变换不改变矩阵的秩,所以秩B = 秩A = n,故B可逆.

(2) 记n阶单位矩阵第i行和第j行对换后的初等矩阵为$E(i, j)$,则

$$B = E(i, j)A,$$

于是

$$\begin{aligned} AB^{-1} &= A(E(i, j)A)^{-1} \\ &= AA^{-1}E(i, j)^{-1} \\ &= E(i, j)^{-1} \\ &= E(i, j). \end{aligned}$$

【解毕】

例 2.3.2 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

则必有______.

(A) $AP_1P_2 = B$;　　(B) $AP_2P_1 = B$;

(C) $P_1P_2A = B$;　　(D) $P_2P_1A = B$.

(1995 **年考研题**)

思路　**本题主要考察将矩阵的初等变换用初等矩阵的乘积来表达的能力. 观察** B **矩阵,它是由矩阵** A **的第** 1 **行加到第** 3 **行和第** 1, 2 **两行交换得到的.** P_1 **是单位阵交换** 1, 2 **两行的初等矩阵,** P_2 **是第** 1 **行加到第** 3 **行的初等矩阵. 注意运算的顺序及左乘右乘的规则.**

【解】

$$\begin{aligned} P_1P_2A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix} \\ &= B. \end{aligned}$$

故选(C).　　**【解毕】**

【注】　(A)　AP_1P_2 **是对** A **作列变换.**

$$\begin{aligned} AP_1P_2 &= \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}P_2 \\ &= \begin{bmatrix} a_{12}+a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22}+a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32}+a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(B)

$$AP_2P_1=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{13}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+a_{23}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+a_{33}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}P_1$$

$$=\begin{bmatrix}a_{12}&a_{11}+a_{13}&a_{13}\\a_{22}&a_{21}+a_{23}&a_{23}\\a_{32}&a_{31}+a_{33}&a_{33}\end{bmatrix}.$$

(D)

$$P_2P_1A=P_2\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{21}&a_{32}+a_{22}&a_{33}+a_{23}\end{bmatrix}.$$

这三个结果都不是 B,都不能选.

例 2.3.3 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\qquad P_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

其中 A 可逆,则 B^{-1} 等于______.

(A) $A^{-1}P_1P_2$;　　(B) $P_1A^{-1}P_2$;

(C) $P_1P_2A^{-1}$;　　(D) $P_2A^{-1}P_1$.

(2001 年考研题)

思路 将 A 的第 1 列和第 4 列对换,第 2 列和第 3 列对换就得到 B.又 P_1 是将单位矩阵交换第 1、第 4 列得到的初等矩阵,P_2 是交换第 2 列和第 3 列的初等矩阵.利用作初等列变换相当于右乘相应的初等矩阵找出 B 和 A 的关系,进一步求得 B^{-1} 和 A^{-1} 的关系.

【解】 $B=AP_1P_2$ 或 $B=AP_2P_1$,

于是 $$B^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1}\quad\text{或}\quad B^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}.$$

又 $P_1^{-1}=P_1$, $P_2^{-1}=P_2$, 故有

$$B^{-1}=P_2P_1A^{-1}\quad \text{或}\ B^{-1}=P_1P_2A^{-1}.$$

故选(C).　　【解毕】

【注】　这里两个列变换无先后顺序关系，是相互独立的，所以都要试一试.

例 2.3.4　设 A 是一个三阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得矩阵 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得到矩阵 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为______.

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$;　　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$;　　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(2004 年考研题)

思路　对矩阵作初等列变换等价于在矩阵右边乘以相应的初等矩阵.这里对应的两个初等矩阵是:

表示第 1 列与第 2 列交换的初等矩阵:

$$E(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

表示第 2 列加到第 3 列的初等矩阵:

$$E(3,2(1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

【解】　依题意,

$$AE(1,2)=B,$$
$$BE(3,2(1))=C.$$

于是

$$AE(1,2)E(3,2(1))=C.$$

所以

$$Q=E(1,2)E(3,2(1))$$
$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

故选(D). 【解毕】

【注】 最后一步不必作矩阵乘法,实际是对矩阵 $E(3,2(1))$作交换第 1 行与第 2 行的初等行变换得到的.

例 2.3.5 设 n阶矩阵 A与 B等价,则必有

(A) 当$|A|=a(a\neq0)$时,$|B|=a$; (B) 当$|A|=a(a\neq0)$时,$|B|=-a$;

(C) 当$|A|\neq0$时,$|B|=0$; (D) 当$|A|=0$时,$|B|=0$.

(2004 年考研题)

思路 A与 B等价即 B可以由 A经过一系列初等变换得到,或者说存在一个可逆矩阵 P和可逆矩阵 Q,使得 $PAQ=B$成立.

【解】 依题意,存在 n阶可逆矩阵 P和 n阶可逆矩阵 Q,使得 $PAQ=B$成立,于是

$$|B|=|PAQ|=|P||A||Q|.$$

其中,$|P|\neq0$,$|Q|\neq0$.

显然,当$|A|=0$时,$|B|=0$成立.故选(D). 【解毕】

例 2.3.6 当初等矩阵 $A=$______ $B=$______时,有 $A\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$成立.

(2003 年清华大学考题)

思路 依题意矩阵$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$是由矩阵$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$做一次初等行变换和一次初等列变换得到的.经观察可知所做的初等行变换是第 1 行加到第 2 行,初等列变换是交换第 1 列与第 3 列.还要注意 A是二阶矩阵,B是三阶矩阵.

【解】
$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$
【解毕】

2.4 分块矩阵

分块矩阵的运算中,加法和数乘与一般矩阵的加法和数乘类似,只是把每个子块当成数来进行运算.

分块矩阵的乘法,首先要考虑分块原则.为了保证 A和 B的乘法运算可行,对 A的列

的分法要与对 B 的行的分法保持一致 . 至于具体运算法则与普通矩阵的乘法一样, 只是把每个子块当成数来运算 .

分块矩阵中的一类特殊分块矩阵是准对角矩阵, 它们的运算尤为简单, 其规则如下:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & & & \\ & A_2 + B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s + B_s \end{pmatrix},$$

$$k\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA_1 & & & \\ & kA_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & kA_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & & \\ & A_2 B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s B_s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

要注意 $\begin{pmatrix} & A_1 \\ A_2 & \end{pmatrix}$ 不是准对角矩阵, 它的逆和准对角矩阵的逆也不一样 .

$$\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & ⋰ & & \\ A_s & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & A_{s-1}^{-1} & \\ & ⋰ & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

此外分块矩阵中“打洞”的技巧也很有用, 若 A 可逆, 有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

及

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

例 2.4.1 **设四阶方阵**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则 A **的逆矩阵** A^{-1} = ______ .

(1991 **年考研题**)

思路 **将** A **分块得准对角矩阵** $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, A_1, A_2 **都是二阶可逆矩阵**, **可以用公式直接求逆**.

【解】 **令** $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, **其中**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

A_1 **和** A_2 **的逆分别为**

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

【解毕】

例 2.4.2 **设** A **和** B **为可逆矩阵**,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

为分块矩阵, **则** X^{-1} = ______ .

(1991 **年考研题**)

【解】

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

【解毕】

例 2.4.3 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 则 $A^{-1} =$ _______ .

思路 将 A 分块为 $\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$, 利用 $\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ 和 $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1}$ 的公式计算.

【解】 令 $A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$,

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = (a_n).$$

则

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_{n-1}} \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}.$$

于是

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{a_n} \\ \dfrac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

【解毕】

例 2.4.4 已知 $D=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$，其中 A 是 k 阶可逆矩阵，B 是 r 阶可逆矩阵，证明 D 可逆，并求 D^{-1}.

思路 其一是用待定系数法，其二是利用分块矩阵的技巧.

【证】 因为

$$|D|=\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|\neq 0,$$

所以 D 可逆.

下面分别用两种方法求 D^{-1}.

方法 1：用待定系数法.

设 $D^{-1}=\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

从而有

$$\begin{cases} AW=I, \\ AX=0, \\ CW+BY=0, \\ CX+BZ=I. \end{cases}$$

由 A 可逆 $X=0$ 和 $W=A^{-1}$；由 $CW+BY=0$ $CA^{-1}+BY=0$ $Y=-B^{-1}CA^{-1}$；由 $CX+BZ=I$ $BZ=I$ $Z=B^{-1}$. 所以

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

方法 2：用分块矩阵的技巧.

由于
$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
其中 $\begin{vmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{vmatrix} = 1$,所以 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$ 可逆 . 于是
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$
$$\begin{aligned} D^{-1} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1}\right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
【解毕】

2.5　矩 阵 方 程

类似 $AX = B$, $XA = B$, $AXC = B$ 的等式称为矩阵方程 . 当矩阵 A, C 可逆时,这些方程的解分别为
$$X = A^{-1}B,$$
$$X = BA^{-1}$$
和
$$X = A^{-1}BC^{-1}.$$
这里要注意的是逆矩阵乘在左边还是右边 . 当 A 或 C 不可逆时, 只好用待定系数法来求解了 .

例 2.5.1　设
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$
求矩阵 X .

思路　这是形如 $AX = B$ 的矩阵方程, 若 A 可逆, 则 $X = A^{-1}B$. 用初等变换求逆时, 如果 A 能化作单位阵 I, 则 A 可逆, 且同时 I 化作 A^{-1}, 若 A 不能化作 I, 则说明 A 不可逆, 所以事先不必先用行列式检验其是否可逆, 直接用初等变换来作就可以了 .

【解】 方法 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix},$$

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 10 & -13 \\ 18 & -1 \end{pmatrix}.$$

方法 2: **把求逆和作乘法两步合起来作**.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -1 & 6 & -11 \\ 0 & -5 & 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 4 & -2\\ 0 & -5 & 2 & -2 & 9\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 7 & 18 & -1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{13}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{13}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{7} & -\frac{1}{7}\end{pmatrix},$$

所以

$$X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}13 & 2\\ 10 & -13\\ 18 & -1\end{pmatrix}.$$

【解毕】

【注】 方法 2 显然比方法 1 好 .一样作初等行变换,省去了矩阵乘法这一步,减少了出错的机会 .作为一般的规律,它适用于 $AX=B$ 类型的矩阵方程,对 (A,B) 作初等行变换,当 A 化作 I 时,B 就化作了 $A^{-1}B$.

$$(A\ \ B)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\cdots\rightarrow(I\ \ A^{-1}B)\ .$$

同理,对 $XA=B$ 类型的矩阵方程,构造分块矩阵 $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$,对 $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$ 作初等列变换,当 A 化作 I 时,B 就化作 BA^{-1} .

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} I \\ BA^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 2.5.2 **求解矩阵方程** $AX+I=A^2+X$，**其中**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

【解】 **由** $AX+I=A^2+X$，**有**

$$(A-I)X=A^2-I.$$

又

$$|A-I|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

所以 $A-I$ **不可逆 .用待定系数法求解，令**

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

有

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 18 & 0 \end{pmatrix},$$

从而得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11}+6x_{21} & x_{12}+6x_{22} & x_{13}+6x_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{cases} x_{21}=x_{23}=0, \\ x_{22}=3, \\ x_{11}+6x_{21}=2, \\ x_{12}+6x_{22}=18, \\ x_{13}+6x_{23}=0. \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} x_{11} = 2, \\ x_{12} = 0, \\ x_{13} = 0, \\ x_{21} = 0, \\ x_{22} = 3, \\ x_{23} = 0. \end{cases}$$

所以

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix},$$

其中 a, b, c 为任意常数 .　　【解毕】

【注】　遇到 $AX = B$ 类型的题,必须检验 A 是否可逆,只有 A 可逆,才有 $X = A^{-1}B$.

对于本题,若将 A 改为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$

则 $A - I$ 可逆,于是

$$\begin{aligned} X &= (A - I)^{-1} \cdot (A - I)(A + I) \\ &= A + I \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

对于原题如不加检验,就直接去化简得到

$$X = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

那就错了 .

例 2.5.3　已知 $A + B = AB$,且

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

则 $B =$ _______ .

【解】　由 $A + B = AB$,有

$$(A - I)B = A,$$

因为

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

所以 $A - I$ 可逆,故

$$B = (A - I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

【解毕】

例 2.5.4 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A + B = AB$,

(1) 证明 $A - I$ 为可逆矩阵;

(2) 已知

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

求矩阵 A.

(1991 年考研题)

【解】 (1) 由 $A + B = AB$,有

$$A - I - (A - I)B = -I,$$

于是

$$-(A - I)(I - B) = I.$$

由逆矩阵的定义知,$A - I$ 可逆.

(2) 方法 1: 由(1)有

$$A - I = (B - I)^{-1},$$

所以

$$A = I + (B - I)^{-1}$$

$$= I + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

方法 2: **由** $A + B = AB$, **有**

$$A(B - I) = B,$$

由(1)**已证** $A - I$ **可逆**, **同理** $B - I$ **也可逆**, **所以**

$$A = B(B - I)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

【解毕】

【注 1】　方法 2 **中求** $B(B - I)^{-1}$ **可用初等列变换如下**:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

所以

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

【注 2】　本题方法 1 **在求**$(B - I)^{-1}$**时用了分块矩阵的逆的公式**:

$$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & \\ & A_2^{-1} \end{bmatrix} \text{及公式} \begin{bmatrix} & a_1 \\ a_2 & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & a_2^{-1} \\ a_1^{-1} & \end{bmatrix}.$$

例 2.5.5 设三阶方阵 A, B 满足关系式

$$A^{-1}BA = 6A + BA,$$

且

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

则 $B=$ ______ .

(1995 年考研题)

【解】 由 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 得

$$A^{-1}BA - BA = 6A,$$

$$(A^{-1} - I)BA = 6A.$$

易知 $|A| = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} \neq 0$, $|A^{-1} - I| = 2 \times 3 \times 6 \neq 0$, 所以, A 和 $A^{-1} - I$ 均可逆, 于是

$$\begin{aligned} B &= (A^{-1} - I)^{-1} \cdot 6A \cdot A^{-1} \\ &= 6(A^{-1} - I)^{-1} \\ &= 6\left[\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \\ &= 6\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= 6\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

【解毕】

例 2.5.6　已知

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

且 $A^2-AB=I$,求矩阵 B.

(1997 年考研题)

【解】　由 $A^2-AB=I$,得

$$A(A-B)=I,$$

所以

$$A-B=A^{-1},$$

$$B=A-A^{-1}.$$

又

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned}B&=A-A^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【解毕】

例 2.5.7　设 $(2I-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$,其中

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

求 A.

(1998 年考研题)

【解】 由$(2I - C^{-1}B)A^{\mathrm{T}} = C^{-1}$,得

$$C(2I - C^{-1}B)A^{\mathrm{T}} = I.$$

于是

$$(2C - B)A^{\mathrm{T}} = I,$$

所以

$$\begin{aligned}
A^{\mathrm{T}} &= (2C - B)^{-1},\\
A &= ((2C - B)^{-1})^{\mathrm{T}}\\
&= ((2C - B)^{\mathrm{T}})^{-1}\\
&= (2C^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}})^{-1}\\
&= \left[2\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&2&1&0\\1&0&2&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\-3&2&1&0\\-2&-3&2&1\end{bmatrix}\right]^{-1}\\
&= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}^{-1}\\
&= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

【解毕】

例 2.5.8 已知 $AB - B = A$,其中

$$B = \begin{bmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

则 $A =$ ______ .

(1999 年考研题)

【解】 由 $AB - B = A$,得

$$A(B - I) = B.$$

由于

$$|B - I| = \begin{vmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

所以 $B-I$ 可逆,故

$$A=B(B-I)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

【解毕】

例 2.5.9 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

且矩阵 X 满足

$$AXA+BXB=AXB+BXA+I,$$

求 X.

(2001 年考研题)

【解】 由 $AXA+BXB=AXB+BXA+I$,得

$$AX(A-B)-BX(A-B)=I,$$
$$(A-B)X(A-B)=I.$$

所以

$$\begin{aligned}X&=(A-B)^{-1}(A-B)^{-1}\\&=((A-B)^{-1})^2\\&=((A-B)^2)^{-1}\\&=\left(\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}^2\right)^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【解毕】

2.6 矩阵的秩

1. 秩是矩阵的重要特征之一,是一个不变量. A的秩通常用 $\mathrm{r}(A)$表示.

矩阵 A如果有一个 r级子式不为 0,而所有 $r+1$ 级子式全为 0,则矩阵 A的秩是 r.

矩阵的秩的定义是由两个条件组成的,前一个条件:"如果有一个 r级子式不为 0",意味着 A的秩不小于 r,即 $\mathrm{r}(A)\geq r$. 后一个条件:"如果 A的所有 $r+1$级子式全为 0",意味着 A的秩不超过 r,即 $\mathrm{r}(A)\leq r$. 两者合在一起,即

$$r\leq \mathrm{r}(A)\leq r,$$

于是

$$\mathrm{r}(A)=r.$$

2. 从另一角度把 $m\times n$矩阵 A 看成是由 m 个 n 维的行向量构成的,或由 n个 m 维的列向量构成的,那么 A的秩为 r就意味着 m 个行向量中极大线性无关的向量有 r 个,在 n 个列向量中极大线性无关的向量也是 r 个. 这就把矩阵的秩和向量组的秩联系起来了. 矩阵的行向量组的秩称为矩阵的行秩,而矩阵的列向量组的秩称为矩阵的列秩. 于是有

矩阵的秩 = 矩阵的行秩 = 矩阵的列秩.

3. 矩阵的秩有许多性质,其中常用的有:

$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$;

$\mathrm{r}(A+B)\leq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-l\leq\mathrm{r}(AB)\leq\min(\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B))$,其中 l为 A 的列数.其特例为:

若 $AB=0$,则 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)\leq n$,其中 n是 A 的列数.

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$;

$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$.

矩阵的初等变换不改变矩阵的秩,或者说等价的矩阵有相同的秩. 由此又能得出满秩矩阵乘一个矩阵不改变该矩阵的秩.

4. 矩阵的秩的求法通常有以下几种方法:

(1) 用定义,计算矩阵的子式;

(2) 施行初等变换化作阶梯形;

(3) 利用矩阵的秩的性质.

5. 矩阵的秩和行列式的联系.

矩阵的秩的定义是通过行列式来描述的,尤其对于 n阶方阵,若该方阵的行列式不等

于 0,那么它的秩是 n,也称该矩阵是满秩的 . 反之,若方阵是满秩的,则其行列式不等于 0 . 再联系矩阵可逆与行列式的值的关系,有

$$\text{方阵 } A \text{ 可逆} \quad A \text{ 非奇异} \quad A \text{ 满秩}$$

或

$$A \text{ 有逆矩阵 } A^{-1} \quad |A| \neq 0 \quad \mathrm{r}(A) = n .$$

其中记号　表示充分必要条件、当且仅当等 .

例 2.6.1　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $t =$ ______时, $\mathrm{r}(A) = 2$.

思路　利用秩的定义,算子式,或用初等变换化阶梯形 .

【解】　方法 1: 显然矩阵前两列成比例,因此 $\mathrm{r}(A) \leq 2$. 又二阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, 所以 $\mathrm{r}(A) \geq 2$. 于是 $\mathrm{r}(A) = 2$.

$\mathrm{r}(A) = 2$ 与 t 的取值无关 . t 可取任意值 .

方法 2: 对 A 作初等行变换 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & t-4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

无论 t 取任何值, $\mathrm{r}(A) = 2$.　【解毕】

例 2.6.2　设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

且 $\mathrm{r}(A) = 2$, 则 $a =$ ______ .

思路　显然有一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 所以欲使 $\mathrm{r}(A) = 2$, 只要 $|A| = 0$ 即可 .

【解】

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 6a - 15 - 5a + 9 \\ &= a - 6 . \end{aligned}$$

所以 $a=6$ 时,有 $|A|=0$,从而 $r(A)=2$. 【解毕】

例 2.6.3 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

且 $r(A)=3$,则 $k=$______ .

(2001 年考研题)

思路 按定义或作初等变换 .

【解】 方法 1: 由题设 $r(A)=3$,所以 $|A|=0$,而

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

$$=(k+3)(k-1)^3 .$$

从而得当 $k=-3$ 或 $k=1$ 时 $|A|=0$.

当 $k=1$ 时,显然 $r(A)=1$ 与题设不符 .

当 $k=-3$ 时,有一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=-16\neq 0$$

所以 $r(A)=3$. 故答案为 $k=-3$.

方法 2:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}.$$

若 $k=1$,显然 $\mathrm{r}(A)=1$,不符题意,故 $k-1\neq 0$,于是

$$原式\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+k \end{pmatrix}.$$

由题设 $\mathrm{r}(A)=3$,所以 $k=-3$. 【解毕】

例 2.6.4 设 $n(n\geq 3)$阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$,则 a 必为

(A) 1; (B) $\dfrac{1}{1-n}$; (C) -1; (D) $\dfrac{1}{n-1}$.

(1998 年考研题)

思路 由题意 $\mathrm{r}(A)=n-1$,则 $|A|=0$.

【解】

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=((n-1)a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & a & \cdots & a \\ 1 & a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= ((n-1)a+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= ((n-1)a+1)(1-a)^{n-1} = 0.$$

所以 $a=1$ 或 $a=-\dfrac{1}{n-1}$.

若 $a=1$,显然 $r(A)=1$ 不合题意.

又 $a=-1$ 和$\dfrac{1}{n-1}$时,$|A|\neq 0$,$r(A)=n$.所以答案是(B),$a=\dfrac{1}{1-n}$. 【解毕】

【注】 如果最后不用排除法,要说明答案是(B),仅有 $a=\dfrac{1}{1-n}$时,$|A|=0$ 的理由尚不充分 还需进一步说明,有一个 $n-1$ 阶子式不等于 0.例如 $a=\dfrac{1}{1-n}$时,下面的 $n-1$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} = ((n-2)a+1)(1-a)^{n-2} \neq 0,$$

所以 $r(A)=n-1$.

例 2.6.5 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,则

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|AB|\neq 0$; (B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|AB|=0$;

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|AB|\neq 0$; (D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|AB|=0$.

(1999 年考研题)

思路 这里是抽象矩阵,只有行数和列数的大小关系.要讨论行列式是否得 0 可转化为讨论矩阵是否满秩.可以从讨论矩阵的秩入手.

【解】 AB 是 $m\times m$ 的方阵,当 $m>n$ 时,$r(A)\leq n<m$,同理 $r(B)\leq n<m$.因此

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B)) \leq n < m,$$

所以

$$|AB| = 0.$$

故选(B). 【解毕】

例 2.6.6 已知 A, B 均为 n 阶矩阵,且 $A^2-AB=I$,则

$$r(AB-BA+A) = \underline{\qquad}.$$

思路 $A^2 - AB = I \quad A(A-B) = I$, A 与 $A-B$ 互为逆矩阵,就有 $(A-B)A = I$,从而推出 $AB = BA$.又 A 可逆,所以 $\mathrm{r}(A) = n$.

【解】 由题设 $A^2 - AB = I$,即

$$A(A-B) = I,$$

于是 A 与 $A-B$ 互为逆矩阵,故有

$$(A-B)A = I,$$

即

$$A^2 - BA = I.$$

于是

$$AB = BA,$$

所以

$$\mathrm{r}(AB - BA + A) = \mathrm{r}(A) = n.$$

【解毕】

例 2.6.7 已知

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

P 为三阶非零矩阵,且满足 $PQ = 0$,则______.

(A) $t = 6$ 时,P 的秩必为 1; (B) $t = 6$ 时,P 的秩必为 2;

(C) $t \neq 6$ 时,P 的秩必为 1; (D) $t \neq 6$ 时,P 的秩必为 2.

(1993 年考研题)

思路 从

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

可知,$t = 6$ 时 $\mathrm{r}(Q) = 1$;$t \neq 6$ 时 $\mathrm{r}(Q) = 2$.本题讨论 Q 的秩为 1 或 2 时,满足 $PQ = 0$ 的非零矩阵 P 的秩.注意题目中的“必”字.

【解】 由 $PQ = 0$ 得

$$\mathrm{r}(P) + \mathrm{r}(Q) \leq 3,$$

$$\mathrm{r}(P) \leq 3 - \mathrm{r}(Q).$$

又 $P \neq 0$,所以

$$\mathrm{r}(P) \geq 1,$$

当 $t = 6$ 时,$\mathrm{r}(Q) = 1$,

$$1 \leq \mathrm{r}(P) \leq 2.$$

当 $t\neq 6$ 时，$\mathrm{r}(Q)=2$，

$$1\leq \mathrm{r}(P)\leq 1,$$

所以

$$\mathrm{r}(P)=1.$$

故选(C)． 【解毕】

例 2.6.8 设 A,B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 A 和 B 的秩______．

(A) 必有一个等于零； (B) 都小于 n；

(C) 一个小于 n，一个等于 n； (D) 都等于 n．

(1994 年考研题)

思路 因为 $\mathrm{r}(A)=0\quad A=0$，由题设 A,B 均为非零矩阵，故 $\mathrm{r}(A)>0$，$\mathrm{r}(B)>0$，排除答案中(A)．又若有一个矩阵满秩，从 $AB=0$，可推出另一矩阵为零矩阵，与题设矛盾，排除答案(C)．显然不可能两个矩阵都满秩，所以选(B)．

【解】 选(B)． 【解毕】

例 2.6.9 设 A 是 4×3 矩阵，且 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，而

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix},$$

则 $\mathrm{r}(AB)=$______．

(1996 年考研题)

思路 关于 AB 的秩，有不等式

$$\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-3\leq \mathrm{r}(AB)\leq \min(\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)),$$

还有，若 B 满秩，则 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(A)$．不管用哪条都要求 $\mathrm{r}(B)$．

【解】 方法 1：因为

$$|B|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}=10\neq 0,$$

所以 B 可逆或 $\mathrm{r}(B)=3$．因此

$$\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(A)=2.$$

方法 2：同方法 1 知 $\mathrm{r}(B)=3$，故

$$\mathrm{r}(AB)\geq \mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-3=2+3-3=2,$$

又

$$\mathrm{r}(AB)\leq \min(\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B))=2.$$

所以

$$\mathrm{r}(AB) = 2.$$

【解毕】

例 2.6.10 已知 $A^2 = I$,则必有______.

(A) $A+I$ 可逆; (B) $A-I$ 可逆;

(C) $A \neq I$ 时,$A+I$ 可逆; (D) $A \neq I$ 时,$A+I$ 不可逆.

思路 由 $A^2 = I$,有

$$(A+I)(A-I) = 0,$$

于是

$$\mathrm{r}(A+I) + \mathrm{r}(A-I) \leq n.$$

由此并不能推出 $A+I$ 或 $A-I$ 可逆的结论.

当 $A \neq I$ 时,$\mathrm{r}(A-I) > 0$,所以 $\mathrm{r}(A+I) < n$,即 $A+I$ 不可逆,故选(D).

【解】 由 $A^2 = I$,有

$$(A+I)(A-I) = 0,$$

于是

$$\mathrm{r}(A+I) + \mathrm{r}(A-I) \leq n.$$

若 $A \neq I$,则 $A - I \neq 0$,$\mathrm{r}(A-I) > 0$,所以

$$\mathrm{r}(A+I) \leq n - \mathrm{r}(A-I) < n.$$

故 $A+I$ 不可逆,选(D). 【解毕】

【注】 (1) 用排除法,可以通过举出反例的方式否定其他命题.

(A) 若 $A = -I$,有 $A^2 = I$,但 $A+I = 0$,不可逆,故不选(A).

(B) 若 $A = I$,有 $A^2 = I$,但 $A - I = 0$,不可逆,故不选(B).

(C) 若 $A = -I$,有 $A^2 = I$,且 $A \neq I$,此时 $A+I = 0$,不可逆,故不选(C).

(A),(B),(C)全否定了,只有(D)可选.

(2) 此题若用行列式来判断是无济于事的.例如由题设 $A^2 = I$,有

$$(A+I)(A-I) = 0,$$

等式两边取行列式,得

$$|A+I||A-I| = 0,$$

则有 $|A+I| = 0$ 或 $|A-I| = 0$.从这里不能推出必须 $|A+I| = 0$ 成立.这是因为由题设 $A \neq I$,可知 $A - I \neq 0$,但并不能推出 $|A-I| \neq 0$.例如取

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

这时有 $A^2 = I$,但

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$|A - I| = 0$.

例 2.6.11 已知 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$, a, b 都是非零向量.

(1) 求 $r(ab^T)$;

(2) 若 $C = I - ab^T$, 证明 $C^T C = I - ba^T - ab^T + bb^T$ 的充分必要条件是 $a^T a = 1$.

思路 由 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 有 $ab^T \neq 0$, 且 $r(a) = 1$, $r(b) = r(b^T) = 1$, 及 $r(ab^T) \geq 1$, 利用乘积的秩的性质可以求出 $r(ab^T)$.

第 2 问先相乘再展开.

【解】 (1) 由 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 所以 $ab^T \neq 0$, 且 $r(a) = 1$, $r(ab^T) \geq 1$, 又

$$r(ab^T) \leq r(a) = 1,$$

所以

$$r(ab^T) = 1.$$

(2)

$$\begin{aligned} C^T C &= (I - ab^T)^T (I - ab^T) \\ &= (I - ba^T)(I - ab^T) \\ &= I - ab^T - ba^T + ba^T ab^T. \end{aligned}$$

若 $a^T a = 1$, 则

$$C^T C = I - ab^T - ba^T + bb^T.$$

反之, 若 $C^T C = I - ab^T - ba^T + bb^T$, 则有

$$ba^T ab^T = bb^T.$$

又 $a^T a$ 是一个数, 故

$$(a^T a) bb^T = bb^T,$$

或

$$(a^T a - 1) bb^T = 0.$$

由 b 非零, 有 $bb^T \neq 0$, 故

$$a^T a - 1 = 0,$$

$$a^T a = 1.$$

所以 $C^T C = I - ba^T - ab^T + bb^T$ 的充分必要条件是 $a^T a = 1$. 【解毕】

【注】 第 2 问的证明过程用了两个性质. 一是通过结合律, 利用 $a^T a$ 是一个数, 提到乘积外面; 二是利用若 $aA = 0$, 则 $a = 0$ 或 $A = 0$ 这条性质.

例 2.6.12　设 n 阶方阵 $A^2 = A$, $B^2 = B$,且 $I - A - B$ 可逆,证明: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

思路　要证明两个量 a 和 b 相等,一般有两种方法.其一是证明 $a \leq b$,又有 $b \leq a$,则 $a = b$;其二是通过第 3 个量 c,证明 $a = c$ 且 $b = c$,从而有 $a = b$.本题可以从这两个不同的角度加以证明.

【证】　方法 1:由 $I - A - B$ 可逆,有

$$n = \mathrm{r}(I - A - B) \leq \mathrm{r}(I - A) + \mathrm{r}(B),$$

所以

$$\mathrm{r}(B) \geq n - \mathrm{r}(I - A).$$

又由 $A^2 = A$,可得

$$A(I - A) = 0,$$

于是

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(I - A) \leq n,$$

或

$$\mathrm{r}(A) \leq n - \mathrm{r}(I - A),$$

从而

$$\mathrm{r}(B) \geq n - \mathrm{r}(I - A) \geq \mathrm{r}(A).$$

同理可证

$$\mathrm{r}(A) \geq \mathrm{r}(B).$$

所以

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B).$$

方法 2:因为

$$A(I - A - B) = A - A^2 - AB = -AB,$$

而 $I - A - B$ 可逆,所以

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AB),$$

同理可证

$$\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(AB),$$

所以

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B).$$ 【证毕】

【注】　方法 1 和方法 2 都用了“同理可证”,方法 1 中只需将 A 写成 B,将 B 写成 A,就能得到所要的结论.方法 2 可不是这样,请读者自行补证.

2.7 伴随矩阵

矩阵的伴随矩阵的概念是在讨论矩阵可逆的充分条件时引进的.

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

令

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.称 A^* 是 A 的伴随矩阵.可以简单记作:若 $A=(a_{ij})$,则 $A^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}$.

由行列式按行展开定理,有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A|, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

直接计算得到伴随矩阵 A^* 和矩阵 A 的一个基本关系式

$$AA^* = A^*A = |A|\,I. \tag{2.7.1}$$

关系式(2.7.1)是讨论伴随矩阵有关命题的出发点,由它出发,再应用其他概念,就能推出关于伴随矩阵的一系列结果.正因为如此,为了考查基本概念的掌握情况,在历届考研题中,经常有涉及伴随矩阵的考题.

有关伴随矩阵的基本结果是:

1.若 $|A| \neq 0$,则 A 可逆,$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$,或

$$A^* = |A|\,A^{-1}. \tag{2.7.2}$$

2.

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ 0, & r(A) \leq n-2. \end{cases} \tag{2.7.3}$$

3.

$$|A^*| = |A|^{n-1}. \tag{2.7.4}$$

例 2.7.1　设 A 是 n 阶方阵，求 $r(A^*)$.

思路　利用 A^* 的定义和关系式(2.7.1).

【解】　由关系式(2.7.1)，有

$$AA^* = |A| I.$$

若 A 满秩，即 A 可逆，则 $|A| \neq 0$，A^* 也可逆，从而 $r(A^*) = n$.

若 A 不满秩，且 $r(A) = n-1$，这时

$$AA^* = 0,$$

于是有

$$r(A) + r(A^*) \leq n, \quad r(A^*) \leq n - r(A) = 1,$$

又由于 $r(A) = n-1$，A 中至少有一个元素的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$，故

$$r(A^*) \geq 1,$$

所以

$$r(A^*) = 1.$$

若 $r(A) \leq n-2$，A 中所有 $n-1$ 阶子式全为 0，也即 A 的所有元素的代数余子式 $A_{ij} = 0$，即 $A^* = 0$. 所以

$$r(A^*) = 0.$$

综上所述，有

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) \leq n-2. \end{cases}$$

【解毕】

例 2.7.2　设 A 是 n 阶方阵，求 $|A^*|$.

思路　对式(2.7.1)两边取行列式，然后依据 $|A| = 0$ 与 $|A| \neq 0$，分别进行讨论. 在 $|A| = 0$ 时，利用(2.7.3)式.

【解】　由(2.7.1)式，有

$$AA^* = |A| I,$$

两边取行列式，得

$$|A||A^*| = |A|^n.$$

若 $|A| \neq 0$，则

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

若 $|A| = 0$，当 $r(A) = n-1$ 时，由(2.7.3)式，$r(A^*) = 1$，则有

$$|A^*| = 0,$$

当 $r(A) \leq n-2$ 时，$r(A^*) = 0$，也有

$$|A^*| = 0.$$

这两种情况,都有$|A^*|=|A|^{n-1}$.

综上所述,无论什么情况,都有

$$|A^*|=|A|^{n-1}$$

成立. 【解毕】

例 2.7.3 设四阶方阵 A 的秩为 2,则其伴随矩阵 A^* 的秩为______.

(1993 年考研题)

思路 利用(2.7.3)式.

【解】 因为 $r(A)=2=4-2$,利用式(2.7.3)中 $r(A)\leq n-2$ 的部分,得

$$r(A^*)=0.$$ 【解毕】

【注】 由 $r(A^*)=0$,进而可知,$A^*=0$.事实上,如果不用式(2.7.3),由 $r(A)=2$,知道 A 的所有 3 阶子式全为 0,则 $A^*=0$,所以 $r(A^*)=0$.

例 2.7.4 设 A 是 n 阶可逆矩阵,A^* 是 A 的伴随矩阵,则______.

(A) $|A^*|=|A|^{n-1}$; (B) $|A^*|=|A|$;

(C) $|A^*|=|A|^{n}$; (D) $|A^*|=|A^{-1}|$.

(1990 年考研题)

【解】 由式(2.7.4),$|A^*|=|A|^{n-1}$,选(A). 【解毕】

例 2.7.5 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$,则$(A^*)^{-1}=$______.

(1995 年考研题)

【解】 由式(2.7.1),有

$$\begin{aligned}(A^*)^{-1}&=\frac{1}{|A|}A\\&=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$ 【解毕】

例 2.7.6 设 A 为非零方阵，当 $A^* = A^T$ 时，证明 $|A| \neq 0$.

(1994 年考研题)

思路 其一是由 $A^* = A^T$，即 $A_{ij} = a_{ij}$，利用 $A \neq 0$，通过展开定理直接计算 $|A|$；其二是利用式(2.7.1)，作反证法，计算 AA^T 的迹 $\mathrm{tr}(AA^T)$ 来证明.

【证】 方法 1：由 $A^* = A^T$，知 a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 有

$$A_{ij} = a_{ij}, \qquad 1 \leq i, \quad j \leq n.$$

又由 $A \neq 0$，不妨设 A 中第 i 行有一元素 $a_{ij} \neq 0$，A 的行列式按第 i 行展开，有

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \neq 0.$$

方法 2：由式(2.7.1)，有

$$AA^* = |A| I,$$

又题设 $A^* = A^T$，故

$$AA^T = |A| I.$$

若 $|A| = 0$，则

$$AA^T = 0.$$

令 $A = (a_{ij})$，则有

$$\mathrm{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0,$$

从而得

$$a_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

即

$$A = 0$$

与 A 非零的假设矛盾，故 $|A| \neq 0$. 【证毕】

【注】 矩阵 A 的迹是矩阵的一个重要参数，它的定义是设 $A = (a_{ij})$，则

$$\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

例 2.7.7 设 n 阶矩阵 A 非奇异($n \geq 2$)，则______.

(A) $(A^*)^* = |A|^{n-1} A$; (B) $(A^*)^* = |A|^{n+1} A$;

(C) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$; (D) $(A^*)^* = |A|^{n+2} A$.

(1996 年考研题)

思路 此题考察对伴随矩阵概念的理解. 可以从基本关系式(2.7.1)出发，或者从 $A^* = |A| A^{-1}$ 出发形式地求 $(A^*)^*$.

【解】 方法 1：由式(2.7.1)，$AA^* = |A| I$，故有

$$A^* (A^*)^* = |A^*| I = |A|^{n-1} I.$$

又 A 可逆，故 A^* 可逆，于是

$$(A^*)^* = |A|^{n-1} \cdot (A^*)^{-1}$$

由式(2.7.2),**有**

$$(A^*)^* = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}$$
$$= |A|^{n-2}A.$$

所以选(C).

方法 2: 由式(2.7.2),**有**

$$A^* = |A|A^{-1},$$

所以

$$(A^*)^* = (|A|A^{-1})^*$$
$$= ||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1}$$
$$= |A|^n \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|A|} A$$
$$= |A|^{n-2}A.$$

故选(C). **【解毕】**

例 2.7.8 **已知三阶矩阵** A **的逆矩阵为**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

试求伴随矩阵 A^* **的逆矩阵**.

(1991 **年考研题**)

思路 **由式**(2.7.2),**找出**$(A^*)^{-1}$**的公式**.

【解】 **由式**(2.7.2),**有**

$$A^* = |A|A^{-1},$$

所以

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A = |A^{-1}|A.$$

由题设,有

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

所以

$$(A^*)^{-1}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$ 【解毕】

例 2.7.9 **设 A^* 是三阶矩阵 A 的伴随矩阵,若 $|A|=\frac{1}{3}$,则 $|(2A)^{-1}-3A^*|=$ ______ .**

思路 **由式(2.7.2),A^{-1} 和 A^* 的关系,或化作 A^{-1},或化作 A^* 来作 .**

【解】 **方法 1: 由式(2.7.2),有 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$,于是**

$$\begin{aligned}|(2A)^{-1}-3A^*| &= \left|\frac{1}{2}A^{-1}-3A^*\right|\\ &= \left|\frac{1}{2|A|}A^*-3A^*\right|\\ &= \left|\left(\frac{3}{2}-3\right)A^*\right|\\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3|A^*|\\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3|A|^2\\ &= -\frac{27}{8}\times\frac{1}{9}=-\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

方法 2: 由式(2.7.2),有 $A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$,于是

$$\begin{aligned}|(2A)^{-1}-3A^*| &= \left|\frac{1}{2}A^{-1}-3\cdot\frac{1}{3}A^{-1}\right|\\ &= \left|-\frac{1}{2}A^{-1}\right|\\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{|A|}\\ &= -\frac{3}{8}.\end{aligned}$$ 【解毕】

例 2.7.10 **设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8I$,其中**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $B=$ ______ .

(1998 年考研题)

思路　先化简再计算,或者直接计算.

【解】　方法 1:由 $A^* BA = 2BA - 8I$,得

$$(A^* - 2I)BA = -8I,$$

可知 $A^* - 2I$ 可逆,于是

$$\begin{aligned} B &= -8(A^* - 2I)^{-1}A^{-1} \\ &= -8(AA^* - 2A)^{-1} \\ &= -8(|A|I - 2A)^{-1} \\ &= -8\begin{bmatrix} -4 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= -8\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

方法 2:由 $|A| = -2$ 可知 A 可逆,且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

又可知

$$A^* = |A|A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

由 $A^* BA = 2BA - 8I$,有

$$(A^* - 2I)BA = -8I,$$

$$B = -8(A^* - 2I)^{-1}A^{-1}$$

$$= -8\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -8\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -8\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ 【解毕】

例 2.7.11 **设矩阵** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

矩阵 X **满足** $A^*X = A^{-1} + 2X$, **求矩阵** X.

(1999 **年考研题**)

思路 **这是涉及** A **的伴随矩阵的矩阵方程,一种方法是先化简再计算,另一种方法由** A **求出** A^{-1}, A^*, **再代入计算**.

【解】 **方法** 1: **由** $A^*X = A^{-1} + 2X$, **等式两边乘** A, **得**

$$AA^*X = AA^{-1} + 2AX,$$

$$|A|X = I + 2AX,$$

$$(|A|I - 2A)X = I,$$

所以

$$X = (|A|I - 2A)^{-1}.$$

又

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

于是

$$X=(4I-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

方法 2:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4,$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$A^{*}=|A|A^{-1}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$A^{*}-2I=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix},$$

显然, $|A^{*}-2I|\neq0$, $A^{*}-2I$ **可逆,由题设**

$$A^{*}X=A^{-1}+2X,$$

$$(A^{*}-2I)X=A^{-1},$$

$$X=(A^{*}-2I)^{-1}A^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

【解毕】

例 2.7.12 **设矩阵** A **的伴随矩阵**

$$A^{*}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix},$$

且
$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I,$$
求矩阵 B.

(2000 年考研题)

【解】 方法 1: 由 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$,得
$$(A - I)BA^{-1} = 3I,$$
所以 $A - I$ 可逆,于是
$$\begin{aligned} B &= 3(A - I)^{-1}A = 3(A - I)^{-1}(A^{-1})^{-1} \\ &= 3(A^{-1}(A - I))^{-1} = 3(I - A^{-1})^{-1} \\ &= 3\left(I - \frac{A^*}{|A|}\right)^{-1}. \end{aligned}$$
又 $|A^*| = 8$,而 $|A^*| = |A|^3 = 8$,所以 $|A| = 2$. 于是
$$B = 3\left(I - \frac{1}{2}A^*\right)^{-1} = 3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

方法 2: 由 $|A^*| = |A|^3 = 8$,所以 $|A| = 2$. 由式(2.7.2)有
$$A = |A|(A^*)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

于是

$$B=3(A-I)^{-1}A=3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&\frac{3}{4}&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\0&1&0&-\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\-2&0&2&0\\0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$ 【解毕】

例 2.7.13 设 A 是 n 阶非奇异矩阵,α 为 n 维列向量,b 为常数,记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix}I&0\\-\alpha^{T}A^{*}&|A|\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{T}&b\end{pmatrix},$$

其中 A^{*} 是矩阵 A 的伴随矩阵,I 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 PQ;

(2) 证明:矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$.

(1997 年考研题)

【解】 (1)

$$PQ=\begin{pmatrix}I&0\\-\alpha^{T}A^{*}&|A|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{T}&b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A&\alpha\\-\alpha^{T}A^{*}A+|A|\alpha^{T}&-\alpha^{T}A^{*}\alpha+|A|b\end{pmatrix},$$

因为 $A^{*}A=|A|I$,又由于 A 非奇异,A 可逆,有 $A^{*}=|A|A^{-1}$,所以

$$PQ=\begin{pmatrix}A&\alpha\\0&|A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha)\end{pmatrix}.$$

(2) 因为

$$|P|=\begin{vmatrix}I&0\\-\alpha^{T}A^{*}&|A|\end{vmatrix}=|I||A|=|A|\neq 0,$$

所以 P 可逆,且有

$$|PQ|=|P||Q|=|A|\cdot|A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha).$$

所以

$$Q\text{可逆}\quad |PQ|\neq 0\quad b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq 0$$
$$b\neq\alpha^{T}A^{-1}\alpha.$$ 【解毕】

2.8 综合例题

综例 2.8.1 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = I$, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $|B| =$ _______ .

(2003 年考研题)

思路 先利用关系式化简, 求出 B, 再求 $|B|$.

【解】 依题设 $A^2B - A - B = I$, 有

$$(A^2 - I)B = A + I,$$

$$(A + I)(A - I)B = A + I.$$

由于 $|A + I| = 18 \neq 0$, $A + I$ 可逆, 于是

$$(A - I)B = I$$

$$B = (A - I)^{-1}.$$

故

$$|B| = |A - I|^{-1}.$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

【解毕】

综例 2.8.2 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为三阶可逆矩阵, 则 $B^{2004} - 2A^2 =$ _______ .

(2004 年考研题)

思路 由题设 $B = P^{-1}AP$, 因此

$$B^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdot \cdots \cdot P^{-1}AP$$

$$= P^{-1}A^nP.$$

所以 $B^{2004} = P^{-1}A^{2004}P$. 容易算出 $A^4 = I$, 所以 $B^{2004} = I$.

【解】

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix},$$

$$A^4=I.$$

于是

$$\begin{aligned}B^{2004}&=(P^{-1}AP)^{2004}\\&=P^{-1}A^{2004}P\\&=P^{-1}(A^4)^{501}P\\&=I.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}B^{2004}-2A^2&=I-2\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【解毕】

【注】 $B=P^{-1}AP$,即矩阵 B 与矩阵 A 相似,这时,$B^n=P^{-1}A^nP$.如果 A^n 比 B^n 容易计算,可以利用相似关系解决 B^n 的计算.

综例 2.8.3 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+I$,则 $|B|=$ ______.

(2004 年考研题)

思路 先化简,再利用矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的乘积及伴随矩阵的行列式的公式求解.

【解】 由题设 $ABA^*=2BA^*+I$,有

$$(A-2I)BA^*=I.$$

等式两边取行列式,得

$$|A-2I||B||A^*|=1.$$

由 $|A^*|=|A|^2$,有

$$|B|=\frac{1}{|A|^2}\cdot\frac{1}{|A-2I|}.$$

又

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 .$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

所以

$$|B| = \frac{1}{9} .$$

【解毕】

【注】　本题要求 B 的行列式,得到 $(A-2I)BA^* = I$ 后等式两边取行列式即可,不必先求出 $B = (A-2I)^{-1}\frac{A}{|A|}$ 如果到这一步再求行列式,要注意分母的 $|A|$ 要 3 次方,即

$$|B| = |(A-2I)^{-1}| \cdot \frac{|A|}{|A|^3} .$$

$$= \frac{1}{|A-2I|} \cdot \frac{1}{|A|^2} .$$

综例 2.8.4　设 n 维向量 $\alpha = (a, 0, \cdots, 0, a)^T$, $a < 0$,矩阵

$$A = I - \alpha\alpha^T, \quad B = I + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T ,$$

其中 A 的逆矩阵为 B,则 $a =$ ______ .

(2003 年考研题)

思路　α 是列向量,$\alpha\alpha^T$ 是 n 阶矩阵,但 $\alpha^T\alpha$ 是一个数,利用矩阵乘法的结合律简化计算 .

【解】　由题设 B 是 A 的逆矩阵,于是

$$AB = I,$$

即

$$(I - \alpha\alpha^T)\left(I + \frac{1}{a}\alpha\alpha^T\right) = I,$$

$$I + \left(\frac{1}{a} - 1\right)\alpha\alpha^T - \frac{1}{a}\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = I,$$

其中 $\alpha^T\alpha = a^2 + 0 + \cdots + 0 + a^2 = 2a^2$,故有

$$\left(\frac{1}{a} - 2a - 1\right)\alpha\alpha^T = 0,$$

由于$\alpha\neq 0$,有$\alpha\alpha^T\neq 0$,从而

$$\frac{1}{a}-2a-1=0,$$

或

$$2a^2+a-1=0,$$

$$(2a-1)(a+1)=0.$$

由题设 $a<0$,故 $a=-1$. 【解毕】

综例 2.8.5 已知 A,B 为三阶矩阵,且满足 $2A^{-1}B=B-4I$.

(1) 证明:矩阵 $A-2I$ 可逆;

(2) 若 $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,求矩阵 A.

(2002 年考研题)

【解】 (1) 由题设 $2A^{-1}B=B-4I$,有

$$2B=AB-4A,$$

$$(A-2I)B-4(A-2I)=8I,$$

于是

$$(A-2I)\frac{1}{8}(B-4I)=I,$$

所以 $A-2I$ 可逆,且

$$A-2I=8(B-4I)^{-1}.$$

(2) 由(1)知,$A=8(B-4I)^{-1}+2I$.由题设

$$B-4I=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix},$$

得

$$(B-4I)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

故

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$ 【解毕】

【注】 证明 $A-2I$ 可逆用的是矩阵可逆的定义.求 $B-4I$ 的逆矩阵可以用初等变换,也可以用公式.事实上,

$$B-4I=\begin{pmatrix}B_1&\\&B_2\end{pmatrix},$$

所以

$$(B-4I)^{-1}=\begin{pmatrix}B_1^{-1}&\\&B_2^{-1}\end{pmatrix},$$

其中 B_1 是二阶矩阵,用逆矩阵的公式直接求得.

综例 2.8.6 设 α为三维列向量,若 $\alpha\alpha^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则 $\alpha^{\mathrm T}\alpha=$______.

(2003 年考研题)

思路 α是列向量,所以 $\alpha^{\mathrm T}\alpha$ 是一个数.注意到 $\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 是一个秩为 1 的三阶矩阵,它的行与行成比例,可以分解为一个列向量与一个行向量的乘积.显然这个 $\alpha=(1,-1,1)^{\mathrm T}$.

【解】 由题设,$\alpha=(1,-1,1)^{\mathrm T}$,所以

$$\alpha^{\mathrm T}\alpha=(1,-1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=3.$$ 【解毕】

【注】 秩为 1 的三阶矩阵的特征是行与行成比例,列与列成比例.它可以分解为一个列向量α与一个行向量 β的乘积.这种分解不是惟一的.例如本题设 $\beta=(k,-k,k)^{\mathrm T}$,$\alpha=(l,-l,l)^{\mathrm T}$,则

$$\begin{pmatrix}l\\-l\\l\end{pmatrix}(k,-k,k)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

其中 k 和 l 只需满足条件 $kl=1$ 即可.对于本题而言,$\beta=\alpha^{\mathrm T}$,即 $l=k$,于是有

$$k^2=1,$$

$$k=\pm1.$$

所以本题也可以设 $\alpha=(-1,1,-1)^{\mathrm T}$,其结果仍然为 3.本题若改为设α,β是三维列向量,若 $\alpha\beta^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,则 $\alpha^{\mathrm T}\beta=$______.做法也是一样的.这时若取 $k=2$,由 $lk=1$,可

得 $l=\frac{1}{2}$,于是$\beta=(2,-2,2)^T$,则$\alpha=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$,若取 $k=-4$,则 $l=-\frac{1}{4}$,于是$\beta=(-4,4,-4)^T$ 和$\alpha=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)^T$,不管取哪组值,最终$\alpha^T\beta=3$是不会改变的.

综例 2.8.7 设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$,其中列向量$\alpha_1=(1,2,2)^T$,$\alpha_2=(2,-2,1)^T$,$\alpha_3=(-2,-1,2)^T$,试求矩阵 A.

(1995 年考研题)

【解】 由 $A\alpha_i=i\alpha_i\quad(i=1,2,3)$,所以

$$A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ 2\alpha_2\ 3\alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

令

$$P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}.$$

由于$|P|\neq0$,所以 P 可逆,且

$$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}A&=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

【解毕】

【注】 1.实际上,1,2,3 是矩阵 A 的 3 个特征值,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是与 1,2,3 对应的特征向

量.由于 A 有 3 个相异的特征值,所以 A 可对角化, A 和对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ 相似.

2.本题实质上是设 $A\alpha_i$ 是一个列向量,且已知 $A\alpha_i$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合,因此可以表示为

$$\begin{aligned} A\alpha_i &= b_{1i}\alpha_1 + b_{2i}\alpha_2 + b_{3i}\alpha_3 \\ &= (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

将 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 按列写成矩阵,则有

$$(A\alpha_1 \ \ A\alpha_2 \ \ A\alpha_3) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

进而可表示为

$$A(\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

这种表示方法在后面章节用得很多,应该很好掌握的.

综例 2.8.8 设 A, B 为同阶可逆矩阵,则______.

(A) $AB = BA$; (B) 存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP = B$;

(C) 存在可逆矩阵 C,使得 $C^{T}AC = B$; (D) 存在可逆矩阵 P 和 Q,使得 $PAQ = B$.

(1997 年考研题)

【解】 由题设 A 与 B 同阶可逆,即等秩,矩阵 A 与 B 就等价,所以选(D) 【解毕】

【注】 本题目的是区别交换、相似、合同、等价等概念.同阶可逆的矩阵不一定可交换.相似、合同、等价的矩阵都等秩,但等秩的矩阵等价,却不一定相似和合同,故不选(A),(B),(C).

综例 2.8.9 设矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是满秩的,则直线

$$L_1: \frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$$

与直线

$$L_2: \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$

的关系为______.

(A) 相交于一点; (B) 重合;

(C) 平行但不重合; (D) 异面.

(1998 年考研题)

思路 空间两直线的关系,可以由这两直线的方向向量以及过直线的点来确定.明显地,由题设可知此两直线的方向向量是线性无关的.那么这两直线就不平行.要判断此两直线是交于一点还是异面,只要在此两直线上各任取一点,连成直线 L_3,考察 L_1, L_2 和 L_3 是否共面,而共面与否又转化为由它们构成的行列式是否为 0 来判断.

【解】 因为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以 L_1 与 L_2 不平行.

又在 L_1 上取一点 $A(a_3, b_3, c_3)$, L_2 上取一点 $B(a_1, b_1, c_1)$,连接 AB,由于

$$\begin{vmatrix} a_1-a_3 & b_1-b_3 & c_1-c_3 \\ a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-a_3 & b_1-b_3 & c_1-c_3 \\ a_1-a_3 & b_1-b_3 & c_1-c_3 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

所以 AB, L_1, L_2 共面,即 L_1 与 L_2 相交于一点,选(A). 【解毕】

2.9 练 习 题

1.设$\alpha = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,矩阵 $A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$, n 为正整数,求 $|3I - A^n|$.

2.设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,求 A^n.

3.求与$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可交换的所有三阶矩阵.

4.设实对称矩阵 A 满足 $A^2 = 0$,证明 $A = 0$.

5．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$，$B=A^2-3A+2I$，求 B^{-1}．

6．设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $A^2-2B=AB+4I$，求 B．

7．设矩阵 A 满足 $A^2+2A-2I=0$，求 $(A-I)^{-1}$．

8．设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 2\\ 3 & 1 & -6\\ t & 0 & -4\end{pmatrix}$，$B\neq 0$，且 $AB=0$，求 t．

9．设四阶矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

矩阵 A 满足关系式

$$AC^{\mathrm{T}}(I-BC^{-1})^{\mathrm{T}}=I,$$

求矩阵 A．

10．设 $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，又 B、C 是三阶方阵，满足 $AC=CA$，$A(B+C)=I$，及 $A(B-C)(B+C)=C$，求 B^{-1}．

11．设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，且 $AX=BA$，求 X^{100}．

12．设 A 是三阶方阵，$|A|=2$，求 $\left|(2A)^*-\left(\frac{1}{6}A\right)^{-1}\right|$．

13．设 A，B 为 n 阶矩阵，分块矩阵 $C=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 $C^*=(\quad)$．

(A) $\begin{pmatrix}|A|A^* & 0\\ 0 & |B|B^*\end{pmatrix}$；　　(B) $\begin{pmatrix}|B|B^* & 0\\ 0 & |A|A^*\end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix}|A|B^* & 0\\ 0 & |B|A^*\end{pmatrix}$；　　(D) $\begin{pmatrix}|B|A^* & 0\\ 0 & |A|B^*\end{pmatrix}$．

14．设 A 是三阶矩阵，交换 A 的第 2 列和第 3 列，再将第 1 行的 -2 倍加到第 3 行得到矩阵 B．已知 B 的逆矩阵 $B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$，求矩阵 A．

15．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 4 & t & 6\\ 3 & 6 & 6 & 9\end{bmatrix}$，$t$ 为何值时，$\mathrm{r}(A)=2$．

16．设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{bmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩等于 1，则必有

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$；　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$；

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$；　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$．

17．设 A，B 是 n 阶矩阵，满足 $A^2-2AB=I$，求 $\mathrm{r}(AB-BA+A)$．

18．设 A 是 4×3 矩阵，$\mathrm{r}(A)=2$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，求 $\mathrm{r}(AB)$．

19．设四阶方阵 A 和 B 都是幂零矩阵，即 $A^2=0$，$B^2=0$．试证明：若 $A+B$ 可逆，则 A 和 B 的秩相等．

20．设 A 是三阶矩阵，$\mathrm{r}(A)=2$，证明 $(A^*)^2=kA^*$，其中 k 为常数．

第 3 章　向　　量

3.0　引　　言

本章讨论的对象是由 n 个实数组成的有序数组,通常称为 n 维向量 .在 n 维向量的集合上只考虑两种运算,向量的加法与数和向量的数量乘法 .通过加法和数乘可以把几个向量组合成一个向量 对于一个向量的集合,其中有的向量可由向量组中其他向量线性表示,有的就不能 .向量组中向量之间的线性表示是本章首先要讨论的内容 .如果一个向量组中任何向量都不能由其他向量线性表示,即它们之间不存在相互依赖的关系,则称这个向量组是线性无关的 .讨论向量组的线性相关的性质是本章的重点,也是线性代数的一个难点 解决相关问题的主要方法是逻辑推理 .在讨论向量组的线性相关性的问题中,引入向量组的极大线性无关组的概念,并进一步引入向量组的秩的概念,向量组的秩与矩阵的秩有着密切的联系 .

向量空间是一个更加抽象的概念,这里仅讨论由 n 元数组构成的 n 维向量空间,通常记作 R^n 基和维数是向量空间的重要概念 .基是向量空间中一组线性无关的向量,向量空间中任意一个向量都可以由它们线性表示 .对于给定的向量空间,当基确定了,向量空间中每个向量都可惟一地由基线性表示,这就产生了向量的坐标 .对于给定的向量空间,可以选择不同的向量构成基,于是产生了基变换和坐标变换的概念 .在一般的向量空间中没有度量性质,通过引入向量的内积,使向量有了长度及夹角的概念,于是向量空间就有了标准正交基以及构造正交向量组的施密特正交化方法 .

3.1　向量组的线性相关性

1 . 线性表示与线性组合

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 β 是 n 维向量,若存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$

则称β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示,也称β是向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的一个线性组合.

2. 线性相关与线性无关

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是 n 维向量,如果存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0,$$

则称向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关,否则称为线性无关.

只有一个向量的向量组$\{\alpha\}$线性相关的充分必要条件是$\alpha = 0$.

3. 有关线性相关性的一些结论

(1) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(s \geq 2)$线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以由其余向量线性表示.

(2) 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$线性相关,则β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示且表示法惟一.

(3) 线性无关的向量组的任意部分组也线性无关.

(4) 若一个向量组中有一个部分组线性相关,则该向量组线性相关.

(5) 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}^n$,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关的充分必要条件是 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$的行列式$|A| = 0$.

(6) 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$,若 $m > n$,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关.

(7) 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中每个向量都可由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性表示.

(i) 若 $s > t$,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关;

(ii) 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关,则 $s \leq t$.

(8) 若 m 维向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \quad \alpha_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \cdots \\ a_{ms} \end{pmatrix}$$

线性无关,将$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$加长成 n 维向量

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \quad \beta_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \cdots \\ a_{ms} \\ \cdots \\ a_{ns} \end{pmatrix},$$

则$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$也线性无关.反之,若$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性相关,则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$也线性相关.

4. 求线性表示的方法

通常有两种方法,一种是解线性方程组,另一种是作初等行变换. 将向量按列向量写成矩阵,通过初等行变换化作简化的行阶梯形. 这时非主元所在的列向量可以由主元所在列线性表示,线性表示的系数恰是其分量.

例 3.1.1 设有三维列向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\lambda \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时,有

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,且表达式惟一?

(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,但表达式不惟一?

(3) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(1991 年考研题)

思路 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,相当于方程组 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ 是否有解,以及解是否惟一. 通常写出增广矩阵,作初等行变换. 又由于这是三个变量三个方程的方程组,也可用克拉默法则,通过计算行列式来实现.

【解】 方法 1: 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$,对增广矩阵作初等行变换,有

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & 1-(1+\lambda)^2 & -\lambda^2(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -3\lambda-\lambda^2 & \lambda-2\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}.$$

从而得:

当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时有惟一表达式.

当 $\lambda = 0$ 时,β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,但表达式不惟一.

当 $\lambda = -3$ 时,系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩,方程组无解,故 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

方法 2: 设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$. 令方程组系数矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+3).$$

当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时,$|A| \neq 0$. 由克拉默法则方程组有惟一解,故 β 可以由 α_1, α_2,

α_3 线性表示,且表达式惟一.

当 $\lambda=0$ 时,$\beta=0$,$|A|=0$.故 β 可由 α_1,α_2,α_3 线性表示,但表达式不惟一.

当 $\lambda=-3$ 时,增广矩阵是

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

方程组无解,故 β 不能由 α_1,α_2,α_3 线性表示.　　【解毕】

例 3.1.2　已知 $\alpha_1=(1,0,2,3)$,$\alpha_2=(1,1,3,5)$,$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$,$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\beta=(1,1,b+3,5)$.

(1) a,b 为何值时,β 不能表示成 α_1,α_2,α_3,α_4 的线性组合?

(2) a,b 为何值时,β 有 α_1,α_2,α_3,α_4 的惟一的线性表示式,并写出该表示式?

(1991 年考研题)

【解】　设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$,则对增广矩阵有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而得:

当 $a=-1$,$b\neq 0$ 时,方程组无解,β 不能表示成 α_1,α_2,α_3,α_4 的线性组合.

当 $a\neq -1$ 时,b 为任意值,β 可由 α_1,α_2,α_3,α_4 线性表示且有惟一表示式.增广矩阵可进一步化作简化行阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{2b}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1+\dfrac{b}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{b}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以

$$\beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1 + \left(1+\frac{b}{a+1}\right)\alpha_2 + \frac{b}{a+1}\alpha_3 .$$ 【解毕】

例 3.1.3 设向量组$\alpha_1=(a,2,10)^T$, $\alpha_2=(-2,1,5)^T$, $\alpha_3=(-1,1,4)^T$, $\beta=(1,b,c)^T$,试问当 a,b,c 满足什么条件时,

(1) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,且表示惟一?

(2) β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示?

(3) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,但表示不惟一?并求出一般表达式.

(2000 年考研题)

【解】 设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$.

方法 1:

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \\ 0 & -2-\frac{a}{2} & -1-\frac{a}{2} & 1-\frac{ab}{2} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2-\frac{a}{2} & -1-\frac{a}{2} & 1-\frac{ab}{2} \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{pmatrix}.$$

当$-2-\frac{a}{2}\neq 0$,或 $a\neq -4$ 时,β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,且表示法惟一.

若 $a=-4$,此时增广矩阵可化作

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1-b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 1-3b+c \end{pmatrix}.$$

当 $1-3b+c\neq 0$ 时,方程组无解,β不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

当 $1-3b+c=0$ 时,方程组有无穷多组解,β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,表示法不惟一.一般的表达式为

$$\beta = k\alpha_1 - (1+b+2k)\alpha_2 + (1+2b)\alpha_3 ,$$

其中 k 为任意常数.

方法 2:第(1)问可以用克拉默法则.由于

$$\begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -(a+4) \neq 0,$$

所以当 $a \neq -4$ 时，β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示法惟一．【解毕】

例 3.1.4　已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T$，$\alpha_2=(2,7,1,3)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1,a)^T$，$\beta=(3,10,b,4)^T$．问

(1) a,b 取何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

(2) a,b 取何值时，β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并写出此表示式．

(1998 年考研题)

思路　本题和前面几例不同的是 β 是四维向量，α_i 只有 3 个，所以不能用克拉默法则．除了用初等行变换外，仍可用行列式来讨论，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性无关，则 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性无关即行列式 $|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta| \neq 0$．

【解】　方法 1：设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a-2 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $b \neq 2$，a 为任意值时，方程组无解，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．

当 $b=2$，$a \neq 1$ 时，方程组有惟一解，增广矩阵可化作简化行阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时
$$\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

当 $b=2$，$a=1$ 时，方程组有无穷多组解．增广矩阵可化作

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时
$$\beta = (-2k-1)\alpha_1 + (k+2)\alpha_2 + k\alpha_3,$$
k 为任意常数．

方法 2：

$$\begin{vmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&2\\0&0&0&b-2\\0&0&a-1&0\end{vmatrix}$$

$$=(a-1)(b-2).$$

(1) 当 $b\neq 2, a\neq 1$ 时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性无关, 所以 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(2) 当 $b\neq 2, a=1$ 时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关. 其中 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$, 又

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&7&10\\0&1&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&b-2\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 $\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\10\\b\end{pmatrix}$ 线性无关, 由性质(8)有 $\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\10\\b\\4\end{pmatrix}$ 也线性无关, 即 β 不能由 α_1, α_2 线性表示, β 也不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

所以不论 a 取任意值, $b\neq 2$ 时, β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(3) 当 $b=2, a\neq 1$ 时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关. 又由于 $a\neq 1$, 故

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\4&7&1\\2&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&0&a-1\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$ 线性无关, 由性质(8)有 $\begin{pmatrix}1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\a\end{pmatrix}$, 即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 再由性质(2), β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 且表示法惟一, 有

$$\beta=-\alpha_1+2\alpha_2.$$

(4) 当 $b=2, a=1$ 时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 由(2)知, $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$. β 可以由 α_1, α_2 线性表示, 也能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. 表示法不惟一, 且

$$\beta=-\alpha_1+2\alpha_2+k(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3),$$

其中 k 为任意常数. 【解毕】

例 3.1.5 已知 $\beta_1=(1,0,0,a_1)^T$, $\beta_2=(1,2,0,a_2)^T$, $\beta_3=(1,2,3,a_3)^T$, $\beta_4=(1,0,3,a_4)^T$, 对于任意实数 a_1,a_2,a_3,a_4, 有______成立.

(A) β_1,β_2,β_3 必线性相关; (B) β_1,β_2,β_3 必线性无关;

(C) $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$必线性相关;　　(D) $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$必线性无关.

思路　本题讨论的是与第 4 个分量取值无关的 4 个四维向量的线性相关性,自然想到有关的性质(8).观察可知β_1,β_2,β_3是线性无关的.

【解】　由于

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{vmatrix}=6\neq 0,$$

所以$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$线性无关,从而由性质(8)有$\beta_1,\beta_2,\beta_3$必线性无关,故选(B).　　【解毕】

【注】　(B)正确,(A)自然不正确.至于(C)和(D),易证

$$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

所以当 $a_4=a_1-a_2+a_3$ 时,则

$$\begin{pmatrix}1\\0\\3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\a_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\a_3\end{pmatrix},$$

即$\beta_4=\beta_1-\beta_2+\beta_3$,这时,$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性相关,否则线性无关,故(C)和(D)都不对.

例 3.1.6　n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 3)$线性无关的充分必要条件是______.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任何两个向量都线性无关;

(B) 存在不全为 0 的 s个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任何一个向量都不能由其余向量线性表示;

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中存在一个向量不能被其余向量线性表示.

思路　本题考察的是向量组的线性无关的概念及其等价命题,也即充分必要条件.

【解】　若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,显然其中任何一个向量都不能由其余向量线性表出.

反之,已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任何一个向量都不能由其余向量线性表出,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$必线性无关.否则若线性相关,由性质(1),至少有一个向量可以由其余向量线性表示,与题设矛盾.

故选(C).　　【解毕】

【注】　(A)是必要条件,不充分.例如:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

其中任何两个向量都线性无关,但$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.故不能选(A).

(B)是线性相关的定义,也是线性相关的充分必要条件.

(D)也是必要条件,不充分.例如:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},$$

其中α_2不能由α_1,α_3线性表示,但$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性相关的.

例 3.1.7 设向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组(Ⅱ):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示,则______.

(A) 当 $r<s$时,向量组(Ⅱ)必线性相关; (B) 当 $r>s$时,向量组(Ⅱ)必线性相关;

(C) 当 $r<s$时,向量组(Ⅰ)必线性相关; (D) 当 $r>s$时,向量组(Ⅰ)必线性相关;

(2003 年考研题)

思路 本题讨论的是当一个向量组可以由另一向量组线性表示时,向量组中向量个数与向量组的线性相关性之间的联系.

【解】 由 3.1 节有关线性相关性的一些结论中的(7),可知若含有较多向量的向量组可以由比它少的向量组线性表示,则它一定线性相关.故选(D). 【解毕】

【注】 (A)(B)(C)三个选项都不正确,请读者自己举出反例.

例 3.1.8 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充分必要条件是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均不为零向量;

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意两个向量的分量不成比例;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示;

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中有一部分向量线性无关.

(1990 年考研题)

【解】 选(C),理由同例 3.1.6. 【解毕】

【注】 (A)是必要条件但不充分.例如:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},$$

α_1,α_2都不是零向量,但它们线性相关.

(B) 也是必要条件但不充分 . 例如:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

其中任意两个向量的分量都不成比例,但它们线性相关 .

(D) 也是必要条件但不充分 . 例如:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

其中α_1,α_2线性无关,但$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关 .

例 3.1.9　已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,则向量组______ .

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性无关;

(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关;

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关;

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关 .

(1994 年考研题)

思路　4 个选项中只有一项正确,意味着它们中有三项是线性相关的 . 找出它们的线性关系就可以排除了 .

【解】　将各小问中的四个向量依次记作$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$. 容易看出有:

(A) $\beta_1+\beta_3=\beta_2+\beta_4$;

(B) $\beta_1+\beta_4=-\beta_2-\beta_3$;

(D) $\beta_1+\beta_4=\beta_2-\beta_3$.

故它们都是线性相关的 . 选(C) . 下面证明之 .

设 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\alpha_4-\alpha_1)=0$,则

$$(k_1-k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=0 .$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性无关的,所以有

$$\begin{cases}k_1-k_4=0, & (1)\\ k_1+k_2=0, & (2)\\ k_2+k_3=0, & (3)\\ k_3+k_4=0 . & (4)\end{cases}$$

(1) - (2) + (3) - (4),得

$$-2k_4=0,\quad k_4=0 .$$

从而得 $k_1=k_2=k_3=0$. 所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关. 【解毕】

例 3.1.10 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组中线性无关的是______.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$;

(C) $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$;

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$.

(1997 年考研题)

思路 同上题,容易排除(A),(B). 对于(C),(D)可通过系数行列式是否为零来判断. 理由如下.

设 $\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+a_{31}\alpha_3$, $\beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{32}\alpha_3$, $\beta_3=a_{13}\alpha_1+a_{23}\alpha_2+a_{33}\alpha_3$. 令 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$, 则

$$k_1(a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+a_{31}\alpha_3)+k_2(a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{32}\alpha_3)+k_3(a_{13}\alpha_1+a_{23}\alpha_2+a_{33}\alpha_3)=0,$$

即

$$(a_{11}k_1+a_{12}k_2+a_{13}k_3)\alpha_1+(a_{21}k_1+a_{22}k_2+a_{23}k_3)\alpha_2+(a_{31}k_1+a_{32}k_2+a_{33}k_3)\alpha_3=0.$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,所以

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+a_{13}k_3=0, \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+a_{23}k_3=0, \\ a_{31}k_1+a_{32}k_2+a_{33}k_3=0. \end{cases}$$

根据齐次线性方程组有非零解的充分必要条件,若系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0,$$

则有非零解 k_1,k_2,k_3, 即 β_1,β_2,β_3 线性相关, 若系数行列式不等于 0, 则 β_1,β_2,β_3 线性无关.

【解】 由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=12\neq 0$, 故选(C).

事实上,将每问中的 3 个向量依次记作 β_1,β_2,β_3, 则

(A) $\beta_3=\beta_2-\beta_1$; (B) $\beta_3=\beta_1+\beta_2$;

以及(D) $|\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 22 & -5 \end{vmatrix}=0$.

所以全都排除. 【解毕】

例 3.1.11 设有任意两个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$,若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0,$$

则______.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性相关;

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性无关;

(C) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关;

(D) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关.

(1996 年考研题)

思路 两组不全为 0 的数如题意组合成 λ_i+k_i 和 λ_i-k_i 的两组数也必不全为 0,所以题目是说 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 是线性相关的.一个线性相关的向量组,其中必有部分组线性相关,但不是任意部分组都线性相关.所以不能推断(A)或(B)成立.利用所给的关系进行推理.

【解】 由题设存在不全为 0 的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+(\lambda_2+k_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+(\lambda_2-k_2)\beta_2+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0,$$

即

$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)+k_1(\alpha_1-\beta_1)+k_2(\alpha_2-\beta_2)+\cdots+k_m(\alpha_m-\beta_m)=0,$$

根据线性相关的定义,知 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关.故选(D).

【解毕】

例 3.1.12 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,则对于任意常数 k 必有______.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关; (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关; (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关.

(2002 年考研题)

思路 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 都不可能线性相关,若线性相关,由 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示能推出 β_2 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,与题设矛盾.再由 k 是任意常数,当 $k=0$ 时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关,所以不选(C).

【解】 选(A).下面用两种方法证明这个结论.

方法 1: 反证法.

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关,由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,于是$k\beta_1+\beta_2$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.又$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,那么对任意常数$k$,$\beta_2$都可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,与题设矛盾.所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关.

方法 2: 设$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4(k\beta_1+\beta_2)=0$,其中

$$\beta_1=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3,$$

于是

$$(x_1+kl_1x_4)\alpha_1+(x_2+kl_2x_4)\alpha_2+(x_3+kl_3x_4)\alpha_3+x_4\beta_2=0$$

由题设β_2不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,于是

$$x_4=0.$$

即有

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0,$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,于是

$$x_1=x_2=x_3=0.$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关.　【解毕】

例 3.1.13　若向量组α,β,γ线性无关,α,β,δ线性相关,则______.

(A) α必可由β,γ,δ线性表示;

(B) β必不可由α,γ,δ线性表示;

(C) δ必可由α,β,γ线性表示;

(D) δ必不可由α,β,γ线性表示.

(1998 年考研题)

思路　本题讨论的是线性相关性与线性表示之间的关系,涉及线性相关性的性质,线性相关与线性表示以及线性表示的性质.直接进行推理.

【解】　由α,β,γ线性无关,其中任意部分组都线性无关,所以α,β线性无关.由题意有α,β,δ线性相关,利用性质(2),δ可以由α,β线性表示,δ必可由α,β,γ线性表示.应选(C).　【解毕】

【注】　δ可以由α,β线性表示并不意味着α可以由β,δ线性表示,也不意味着β不能由α,δ线性表示.例如设

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad\delta=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

这四个向量是满足本题的条件的,事实上

$$\delta=0\cdot\alpha+2\beta+0\cdot\gamma,$$

δ可由α,β,γ线性表示,但α不可由β,γ,δ线性表示,β可以由α,γ,δ线性表示.

例 3.1.14　设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示,但不能由向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示,记向量组(Ⅱ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$,则______.

(A) α_m不能由(Ⅰ)线性表示,也不能由(Ⅱ)线性表示;

(B) α_m不能由(Ⅰ)线性表示,但可由(Ⅱ)线性表示;

(C) α_m可由(Ⅰ)线性表示,也可由(Ⅱ)线性表示;

(D) α_m可由(Ⅰ)线性表示,但不可由(Ⅱ)线性表示.

(1999 年考研题)

思路　由题设可知α_m不能由(Ⅰ)线性表示,否则β也可由(Ⅰ)线性表示,与题设矛盾.因此只能选(A)或(B),再由题设β用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示时,$\alpha_m$的系数不为0,否则$\beta$可用(Ⅰ)线性表示,矛盾.所以$\alpha_m$可由(Ⅱ)线性表示.故应选(B).

【解】　由题设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$,其中$k_m\neq0$,否则$\beta$可由(Ⅰ)线性表示,矛盾.于是

$$\alpha_m=\frac{1}{k_m}(\beta-k_1\alpha_1-\cdots-k_{m-1}\alpha_{m-1}),$$

α_m可以由(Ⅱ)线性表示.

又α_m不能由(Ⅰ)线性表示,否则β可由(Ⅰ)线性表示,与题设矛盾.

故选(B).　　【解毕】

例 3.1.15　已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关,且$\alpha_4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,求证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

思路　可以利用线性相关性定义来证,也可用反证法.

【证】　方法1:由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关,存在不全为0的数$k_1,k_2,k_3,k_4$,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0.$$

由α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,有

$$k_4=0,$$

即存在不全为0的数k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

成立.所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

方法2:反证法.

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.由已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关,根据性质(2),$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,与题设矛盾,所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.　　【证毕】

【注】　用反证法有时更加简捷,要注意学习反证法的运用.

3.2 向量组的秩与极大线性无关组

1.向量组的等价

设有两个向量组

$(\mathrm{I}): \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m; \quad (\mathrm{II}): \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s.$

如果向量组(I)中每个向量都能由向量组(II)线性表示,则称向量组(I)能由向量组(II)线性表示.如果向量组(I)和向量组(II)能相互线性表示,则称这两个向量组是等价的.将向量组(I)和向量组(II)等价,记作$(\mathrm{I}) \cong (\mathrm{II})$.

设(I),(II),(III)是三个向量组,向量组的等价有以下性质:

(1) 反身性:$(\mathrm{I}) \cong (\mathrm{I})$;

(2) 对称性:若$(\mathrm{I}) \cong (\mathrm{II})$,则$(\mathrm{II}) \cong (\mathrm{I})$;

(3) 传递性:若$(\mathrm{I}) \cong (\mathrm{II})$,$(\mathrm{II}) \cong (\mathrm{III})$,则$(\mathrm{I}) \cong (\mathrm{III})$.

2.向量组的极大线性无关组

设向量组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的一个部分组,满足以下两个条件:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性无关;

(2) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中每一个向量都可以由这个部分组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性表示.

则称部分组$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的一个极大线性无关组.

显然,向量组的一个极大线性无关组与向量组本身是等价的.

一个向量组的极大线性无关组不是惟一的,根据等价的性质,向量组的极大线性无关组之间是等价的.

求给定向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的极大线性无关组的一个方法是将向量组按列向量写成矩阵$A = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_m)$,对矩阵$A$作初等行变换,化作简化行阶梯形,这时主元所在的列向量构成一个极大线性无关组.同时非主元的列向量与极大线性无关组之间的线性关系由它们的各分量表示.具体格式见例3.2.6.

3.向量组的秩

虽然一个向量组的极大线性无关组是不惟一的,但它们所含的向量个数是相同的,这个不变量是由原向量组所决定,称之为向量组的秩.

只含零向量的向量组没有极大线性无关组,规定它的秩为0.

设向量组(I)的秩为r_1,向量组(II)的秩为r_2.若向量组(I)可以由向量组(II)线性表示,则$r_1 \leq r_2$.

由上述性质容易推出等价的向量组有相同的秩.

4.向量组的秩与矩阵的秩

向量组的秩与矩阵的秩有密切关系.将矩阵的每个行看作一个行向量,则$m \times n$的矩

阵可看成是由 m 个 n 维行向量构成的,矩阵的行秩就等于这个行向量组的秩.同样,把矩阵的每个列看作一个列向量,则 $m\times n$ 的矩阵可看成是由 n 个 m 维列向量构成的,矩阵的列秩就是这个列向量组的秩.已经证明

$$\text{矩阵的行秩}=\text{矩阵的列秩}=\text{矩阵的秩}.$$

求向量组的秩通常将向量组写成矩阵,然后求矩阵的秩.

例 3.2.1 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)$, $\alpha_2=(2,3,4,5)$, $\alpha_3=(3,4,5,6)$, $\alpha_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是______.

(1990 年考研题)

思路 将向量按行构造矩阵,对矩阵作初等行变换,化作阶梯形.根据初等变换不改变矩阵的秩,求得结果.

【解】

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以向量组的秩是 2. 【解毕】

例 3.2.2 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$, $\alpha_2=(2,0,t,0)$, $\alpha_3=(0,-4,5,-2)$的秩为 2,则 $t=$______.

(1997 年考研题)

【解】

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & t+2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & t+2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于向量组的秩为 2,所以 $t-3=0$, $t=3$. 【解毕】

例 3.2.3 设 $\alpha_1=(-1,0,1)^T$, $\alpha_2=(-4,t,3)^T$, $\alpha_3=(1,-3,t+1)^T$.当 t 满足______时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,此时它的一个极大线性无关组是______.

思路 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关就是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩小于 3,可作初等行变换化作简化行阶梯形来求极大线性无关组.又由于讨论的是 3 个三维向量,构成一个 3 阶方阵,也可通过行列式来讨论.

【解】 方法 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & t & -3 \\ 1 & 3 & t+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & t & -3 \\ 0 & -1 & t+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4t+7 \\ 0 & 1 & -t-2 \\ 0 & 0 & (t+3)(t-1) \end{pmatrix}.$$

当$(t+3)(t-1)=0$时,也即$t=-3$或$t=1$时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

此时它的一个极大线性无关组是α_1,α_2.

方法2:

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & t & -3 \\ 1 & 3 & t+1 \end{vmatrix} = -(t+3)(t-1).$$

当$t=-3$或$t=1$时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

当$t=-3$时,$\alpha_1=(-1,0,1)^T$,$\alpha_2=(-4,-3,3)^T$,$\alpha_3=(1,-3,-2)^T$.易见α_1,α_2是一个极大线性无关组.

当$t=1$时,$\alpha_1=(-1,0,1)^T$,$\alpha_2=(-4,1,3)^T$,$\alpha_3=(1,-3,2)^T$.易见α_1,α_2是一个极大线性无关组.　【解毕】

【注】　事实上,α_1,α_3或α_2,α_3也是极大线性无关组.

例3.2.4　设有向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)$,$\alpha_2=(0,3,1,2)$,$\alpha_3=(3,0,7,14)$,$\alpha_4=(1,-2,2,0)$,$\alpha_5=(2,1,5,10)$,则该向量组的极大线性无关组是______.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$;　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$.

(1994年考研题)

【解】

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是一个极大线性无关组,故选(B).　【解毕】

【注】　事实上,(A) $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$;(C) $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$.(C)线性相关则(D)也线性相关,所以不选(A),(C),(D).

例 3.2.5 已知 $\alpha_1=(1,0,1,2)^T$, $\alpha_2=(0,1,1,2)^T$, $\alpha_3=(-1,1,0,a-3)^T$, $\alpha_4=(1,2,a,6)^T$, $\alpha_5=(1,1,2,3)^T$. 问 $a=$? 时向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩等于 3, 并求出此时它的一个极大线性无关组.

【解】

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & a-3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $a=3$ 时向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩等于 3. 此时它的一个极大线性无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$.

【解毕】

【注】 事实上, $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 或 $\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5$ 也是极大线性无关组.

例 3.2.6 设 $\alpha_1=(2,3,1,1)^T$, $\alpha_2=(4,5,0,1)^T$, $\alpha_3=(0,1,2,1)^T$, $\alpha_4=(4,4,-2,0)^T$, 求一个极大线性无关组, 并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

【解】

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

一个极大线性无关组是 α_1,α_2. 且

$$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2,$$

$$\alpha_4=-2\alpha_1+2\alpha_2.$$

【解毕】

【注】 求向量组的极大线性无关组及向量之间的线性关系还有另一种方法, 以本题为例介绍如下. 将向量按行向量构造矩阵, 作初等行变换, 并且每作一步都将过程记录下来, 最终化成阶梯形, 得到结果.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{array} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2-2\alpha_1\\ \alpha_3\\ \alpha_4-2\alpha_1\end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2-2\alpha_1\\ \alpha_3+\alpha_2-2\alpha_1\\ \alpha_4-2\alpha_1-2(\alpha_2-2\alpha_1)\end{array}.$$

令$\beta_1=\alpha_1$,$\beta_2=\alpha_2-2\alpha_1$,显然$\beta_1$,$\beta_2$线性无关.又

$$\alpha_1=\beta_1,$$

$$\alpha_2=2\beta_1+\beta_2.$$

所以α_1,α_2和β_1,β_2等价,故α_1和α_2也线性无关,是一个极大线性无关组.

$$\alpha_3+\alpha_2-2\alpha_1=0 \quad \alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2.$$

$$\alpha_4-2\alpha_1-2(\alpha_2-2\alpha_1)=0 \quad \alpha_4=-2\alpha_1+2\alpha_2.$$

例 3.2.7 设向量组$\alpha_1=(1,1,1,3)^T$,$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$,$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$,$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$.

(1) p为何值时,该向量组线性无关?并在此时将向量$\alpha=(4,1,6,10)^T$用α_1,α_2,α_3,α_4线性表出;

(2) p为何值时,该向量组线性相关?并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

(1999年考研题)

思路 讨论4个四维向量的线性相关性,可以由4个向量构成的四阶方阵的行列式是否为0作出判断.但考虑到后面两问要求线性表出和极大线性无关组等,可以统一用一个矩阵作初等行变换化成简化行阶梯形来解决.

【解】

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & p-7 & p+6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $p\neq 2$ 时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关 .上式可进一步化作

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-2\dfrac{1-p}{p-2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{1-p}{p-2}\end{pmatrix}.$$

此时

$$\alpha = 2\alpha_1+\frac{3p-4}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\frac{1-p}{p-2}\alpha_4 .$$

(2) 当 $p=2$ 时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关,此时向量组的秩为 3,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组 .　　【解毕】

【注】　在 $p=2$ 时,除了 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组,$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 也是一个极大线性无关组 .

例 3.2.8　已知向量组 $\beta_1=(0,1,-1)^T$,$\beta_2=(a,2,1)^T$,$\beta_3=(b,1,0)^T$ 与向量组 $\alpha_1=(1,2,-3)^T$,$\alpha_2=(3,0,1)^T$,$\alpha_3=(9,6,-7)^T$ 具有相同的秩,且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,求 a,b 的值 .

(2000 年考研题)

思路　从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已知,可求出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩,从而得到 β_1,β_2,β_3 的秩 .找出 a,b 的关系,再利用 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,确定 a,b 的值 .

除了用初等变换求秩这种常规方法,对于比较简单的题目也可先通过观察进行分析 .本题显然 α_1,α_2 线性无关,且 $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$.可知 β_1,β_2,β_3 的秩为 2,用 $|\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3|=0$ 确定 a,b 间的关系,又 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,就可由其极大线性无关组 α_1,α_2 线性表示,那么 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3$ 线性相关,可通过又一个三阶行列式 $|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \beta_3|=0$ 求解 .

【解】　方法 1:

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9\\0&-6&-12\\0&10&20\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2,从而$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的秩为 2 .

$$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{bmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&1\\0&a&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&1\\0&0&b-\frac{a}{3}\end{bmatrix},$$

所以 $b-\frac{a}{3}=0,3b=a$.

$$\begin{bmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&10&20&3b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&1&2&\frac{2b-1}{6}\\0&1&2&\frac{3b}{10}\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&1&2&\frac{2b-1}{6}\\0&0&0&\frac{3b}{10}-\frac{2b-1}{6}\end{bmatrix}.$$

由$\frac{3b}{10}-\frac{2b-1}{6}=0$,解得 $b=5,a=3b=15$.

方法 2: 显然α_1,α_2线性无关,$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$.故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2,$\alpha_1,\alpha_2$是一个极大线性无关组 .

由题设,β_1,β_2,β_3的秩与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩相等,故$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关,于是

$$\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-(a-3b)=0.$$

所以 $a=3b$.

又β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,则$\beta_3$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示,即$\alpha_1,\alpha_2,\beta_3$线性相关,于是

$$\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-2b&3&b\\0&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=-(1-2b+9)=0,$$

所以 $b=5,a=3b=15$. 【解毕】

技巧　观察α_1,α_2线性无关,这是看前两分量构成的二阶子式$\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 0\end{vmatrix}\neq 0$得出的.

α_3与α_1,α_2的线性关系,由于α_1的第 2 个分量是 0,所以α_3若能由α_1,α_2线性表出必有一个$3\alpha_1$的项,再由第 1 分量 $9-3=6$ 是α_2第 1 分量的 2 倍,故得到$3\alpha_1+2\alpha_2$,最后由第 3 分量关系来校核.

例 3.2.9　已知向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,(Ⅲ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$.如果各向量组的秩分别为 r(Ⅰ) = r(Ⅱ) = 3,r(Ⅲ) = 4.证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 4.

(1995 年考研题)

思路　r(Ⅰ) = 3,说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,r(Ⅱ) = 3,说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关,考虑到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,则$\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.又由题设 r(Ⅲ) = 4,可知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关.利用这些条件证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关,一种方法是由线性无关定义进行推理,另一种方法用反证法.

【证】　方法 1:由 r(Ⅰ) = r(Ⅱ) = 3,得知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.根据性质(2),$\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,令

$$\alpha_4=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3.$$

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=0$,则

$$(k_1-k_4a_1)\alpha_1+(k_2-k_4a_2)\alpha_2+(k_3-k_4a_3)\alpha_3+k_4\alpha_5=0,$$

由 r(Ⅲ) = 4,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关,所以

$$\begin{cases}k_1-k_4a_1=0,\\k_2-k_4a_2=0,\\k_3-k_4a_3=0,\\k_4=0.\end{cases}$$

得到

$$k_1=k_2=k_3=k_4=0.$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关,即

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=4.$$

方法 2:反证法.

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性相关,由 r(Ⅰ) = 3,知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,于是$\alpha_5-\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,设

$$\alpha_5-\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3.$$

又由 r(Ⅱ) = 3,知α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.设

$$\alpha_4=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3,$$

则

$$\alpha_5=(k_1+a_1)\alpha_1+(k_2+a_2)\alpha_2+(k_3+a_3)\alpha_3.$$

与 $r(\mathrm{III})=4$ 矛盾. 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性无关, 即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4. 【证毕】

例 3.2.10 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, 若该向量组的任一向量均可由其中的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示. 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是该向量组的一个极大线性无关组.

思路 要证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个极大线性无关组, 根据题目的条件只需证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 即证明它的秩为 r. 又由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是等价的, 等价的向量组有相同的秩.

【证】 由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的每一向量均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 显然 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示. 所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价. 又由于等价向量组有相同的秩, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩为 r, 即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 根据定义, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组. 【证毕】

例 3.2.11 已知 n 维向量组(Ⅰ)可被向量组(Ⅱ)线性表示, 且 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$. 求证向量组(Ⅱ)也可被向量组(Ⅰ)线性表示.

思路 这里要证明向量组(Ⅱ)可被向量组(Ⅰ)线性表示, 也即证明向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价, 只需证明(Ⅰ)与(Ⅱ)的极大线性无关组等价. 考虑由(Ⅰ)和(Ⅱ)的极大线性无关组合起来的向量组(Ⅲ).

【证】 设 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r$, 并设向量组(Ⅰ)的一个极大线性无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 向量组(Ⅱ)的一个极大线性无关组是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$. 则由向量组(Ⅰ)可被向量组(Ⅱ)线性表示, 有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表示.

考虑向量组(Ⅲ): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$. 显然 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是向量组(Ⅲ)的一个极大线性无关组, 且 $r(\mathrm{III})=r$.

又由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩是 r, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也是(Ⅲ)的一个极大线性无关组. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价.

所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示. 向量组(Ⅱ)可被向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示, 也就有向量组(Ⅱ)可被向量组(Ⅰ)线性表示. 【证毕】

例 3.2.12 设有向量组

(Ⅰ): $\alpha_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$

和向量组

(Ⅱ): $\beta_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}},\beta_2=(2,1,a+b)^{\mathrm{T}},\beta_3=(2,1,a+4)^{\mathrm{T}}$.

试问: 当 a 为何值时, 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价? 当 a 为何值时, 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不

等价?

(2003 年考研题)

思路　按定义证明两个向量组等价,即证明两个向量组可以相互线性表示.两个向量组等价的必要条件是它们的秩相等,但秩相等不是向量组的充分条件,所以可以由讨论向量组的秩入手.

【解】　方法 1: 由于

$$|\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ a+3 & a+6 & -2 \end{vmatrix} = 6,$$

可知无论 a 取何值, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关,也即 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$.

又

$$|\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = a+1.$$

当 $a \neq -1$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$.由于任意 4 个三维向量线性相关,可知向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)可相互线性表示,所以向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

当 $a = -1$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$,向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)的秩不相等,这时(Ⅰ)和(Ⅱ)不等价.

方法 2: 对矩阵作初等行变换.

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

$$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

当 $a \neq -1$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$.由克拉默法则知

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

有解,即向量组(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表示,同理(Ⅰ)也可由(Ⅱ)线性表示.所以向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

当 $a = -1$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$,而 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_2) = 3$,故向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

【解毕】

3.3 向量空间

1. 向量空间

设 V 是 n 维向量的非空集合,如果集合 V 对于向量的加法和数乘两种运算封闭(即,若$\alpha\in V$, $\beta\in V$,则$\alpha+\beta\in V$;若$\alpha\in V$, k是常数,则 $k\alpha\in V$),则称 V 是向量空间.

显然,所有实 n维向量构成的集合R^n 关于向量的加法和数乘是封闭的,是一个向量空间.

如果向量空间 V的一个非空子集合 W 是向量空间,就称 W 是 V 的一个子空间.

判断 W 是否是 V 的子空间只要看 W 关于 V 中定义的向量加法和数乘是否封闭.

例如 $W=\{(x,y,0)^{\mathrm{T}}\mid x,y\in\mathrm{R}\}$,由于$(x_1,y_1,0)^{\mathrm{T}}+(x_2,y_2,0)^{\mathrm{T}}=(x_1+x_2,y_1+y_2,0)^{\mathrm{T}}\in W$;设 $k\in\mathrm{R}$是常数,$k(x,y,0)^{\mathrm{T}}=(kx,ky,0)^{\mathrm{T}}\in W$,所以 W 是R^3 的一个子空间.实际上,R^3 代表的是三维几何空间,W 则是 xOy 平面(图 3.3.1).

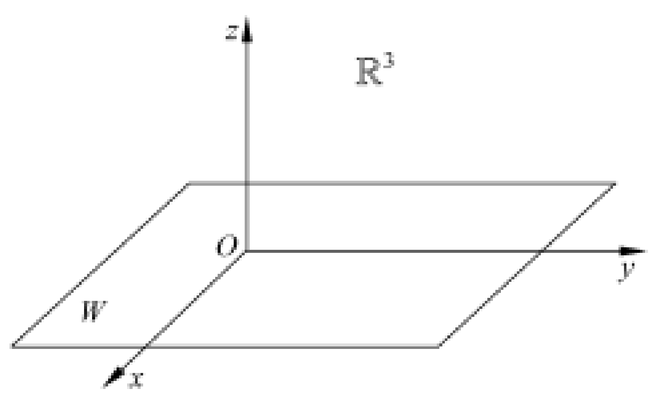


图 3.3.1

2. 基、维数与坐标

设 V 是一个向量空间,如果 V 中有 n 个线性无关的向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,而 V 中任意向量α都可以由这 n 个向量线性表示,则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是向量空间 V 的一组基.基中向量的个数 n称为向量空间 V 的维数,或称 V 为 n 维向量空间.

在 n维向量空间 V中,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组基,它们是线性无关的,对于任意$\alpha\in V$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$是线性相关的,按线性相关的性质(2),有$\alpha$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示,且表示法惟一.设

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n.$$

则称有序数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为向量α在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标,记作$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

3. 基变换与坐标变换

一个向量空间 V,它的基是不惟一的.例如 n维向量空间R^n, $e_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $e_2=$

$(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)^T$ 是一组基，$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^T,\varepsilon_2=(1,1,\cdots,0)^T,\cdots,$ $\varepsilon_n=(1,1,\cdots,1)^T$ 也是一组基．当然还有其他各种各样的基．由于基和基是等价向量组，它们之间互相可以线性表示．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维向量空间 R^n 的两组基，它们有如下关系：

$$\begin{cases}\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n,\\ \beta_2=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n,\\ \cdots\\ \beta_n=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n.\end{cases}$$

令

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

则可用矩阵形式表达为

$$\begin{aligned}(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n)&=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\\ &=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A.\end{aligned}$$

称矩阵 A 为从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵．

过渡矩阵 A 一定是可逆矩阵．

设 α 是 R^n 中的一个向量，它在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标是 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$．那么这两个坐标之间有什么关系呢？

令 α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标向量为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标向量为 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则

$$\begin{aligned}\alpha&=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n\\ &=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)x,\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}\alpha&=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n\\ &=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n)y,\end{aligned}$$

又由于由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵是 A，即

$$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \cdots\ \ \beta_n)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n)A.$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha &= (\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)\,y\\ &= (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)\,Ay\\ &= (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)\,x,\end{aligned}$$

其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$\mathrm{R}^n$的一组基,它们线性无关,于是

$$Ay = x.$$

这就是两组基下的坐标变换公式.

例 3.3.1 已知R^3的两个基为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}.$$

求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵.

(1993 年考研题)

思路 利用基变换的公式

$$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A.$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$是三阶可逆矩阵,解矩阵方程.

【解】 设由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$A$,则

$$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是基,它们线性无关,故$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$可逆,有

$$\begin{aligned}A &= (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)\\ &= \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

【解毕】

例 3.3.2 设已知R^3的一组基为$\varepsilon_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$,$\varepsilon_2=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$,$\varepsilon_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.由基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$到基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的过渡矩阵

$$P=\begin{pmatrix}2&1&6\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix},$$

求基 η_1, η_2, η_3 .

【解】　已知

$$(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3) = (\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)P.$$

由于过渡矩阵 P 可逆,所以

$$(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3) = (\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)P^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ -2 & 1 & 6 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

所以 $\eta_1 = (-3, -2, -3)^T$, $\eta_2 = (4,1,5)^T$, $\eta_3 = (7,6,6)^T$.　　【解毕】

例 3.3.3　已知 $\mathbb{R}^3$ 的向量 $\gamma = (1, 0, -1)^T$ 及 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $\varepsilon_1 = (1,0,1)^T$, $\varepsilon_2 = (1,1,1)^T$, $\varepsilon_3 = (1,0,0)^T$. A 是一个三阶矩阵,已知 $A\varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $A\varepsilon_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $A\varepsilon_3 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, 求 $A\gamma$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标 .

思路　先求 A, 再求 $A\gamma$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标 .

【解】　由已知条件,写成矩阵形式,有

$$A(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3) = (\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

由于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基,它们线性无关,所以 $(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)$ 可逆,有

$$A = (\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

求得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix},$$

$$A\gamma=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

设 $A\gamma$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标是 x,则

$$A\gamma=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)x,$$

$$x=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)^{-1}A\gamma$$

$$=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix},$$

即 $A\gamma=3\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3$. 【解毕】

3.4 内积和标准正交基

1. 内积

设 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$. 称数 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 为向量 α 和 β 的内积,记作 (α,β). 即

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\alpha^{\mathrm{T}}\beta.$$

两个向量的内积有性质:

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, $(\alpha,\alpha)=0$ 当且仅当 $\alpha=0$.

其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^n$, $k\in\mathbf{R}$.

由于 $(\alpha,\alpha)\geq 0$,定义向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 的长度为 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$,记作 $|\alpha|$,即

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

长度为 1 的向量称为单位向量 . 若 $\alpha \neq 0$, 则 $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ 是一个单位向量 .

向量的内积有一个非常有名的不等式叫 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|,$$

其中等号成立当且仅当 α 与 β 线性相关 .

Cauchy-Schwarz 不等式也可写作

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}\ .$$

向量还满足三角不等式

$$|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|\ .$$

2 . 正交

设 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 如果 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称向量 α 与 β 正交, 即

$$(\alpha, \beta) = \alpha^{\mathrm{T}}\beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 0\ .$$

规定零向量 0 与任何向量正交 .

非零的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 若其中任意两个向量彼此正交, 则称该向量组为正交向量组 .

正交向量组必线性无关 . 反之不成立, 即线性无关的向量组不一定是正交向量组 .

3 . 标准正交基

设 $\mathbf{R}^n$ 中一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 若其中任意两个向量彼此正交, 且每个向量都是单位向量, 则称这组基为标准正交基 .

例如 $\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $\varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基 .

4 . 施密特(Schmidt)正交化方法

已知 $\mathbf{R}^n$ 中一组线性无关的向量组, 利用施密特正交化方法生成一组正交向量组的步骤如下:

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是一组线性无关的向量组 . 令

$$\beta_1 = \alpha_1;$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1;$$

$$\cdots$$

$$\beta_i = \alpha_i - \frac{(\alpha_i, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_i, \beta_{i-1})}{(\beta_{i-1}, \beta_{i-1})}\beta_{i-1};$$

$$\cdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1} .$$

则$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$是与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$等价的正交向量组.

标准正交基的生成方法:

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$\mathrm{R}^n$的一组基,

(1) 用施密特正交化方法,得到与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$等价的正交基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$.

(2) 令 $\xi_i = \dfrac{\beta_i}{|\beta_i|}(i = 1, 2, \cdots, n)$,则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是R^n的一组标准正交基.

5.正交矩阵

A是 n 阶实方阵,若满足 $AA^{\mathrm{T}} = I$,则称 A 是正交矩阵.

由正交矩阵定义可知,A 是正交矩阵当且仅当 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

A是正交矩阵的另一个充分必要条件是 A 的 n 个行(列)向量是R^n的一组标准正交基.

此外,正交矩阵还有性质:

正交矩阵的行列式的值为±1;

两正交矩阵的乘积仍为正交矩阵;

正交矩阵的逆矩阵仍是正交矩阵;

两组标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵.

例 3.4.1　设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵,$\alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (-1, 1, 4, -1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (5, -1, -8, 9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的解向量,求 $Bx = 0$ 的解空间的一个标准正交基.

(1997 年考研题)

思路　四元齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的系数矩阵 B 的秩为 2,所以方程组的基础解系有两个解向量.易观察α_1, α_2是解空间的一组基,用施密特正交化方法求出标准正交基.

【解】　由 $\mathrm{r}(B) = 2$, $Bx = 0$ 的解空间的维数为 $4 - 2 = 2$.

又α_1, α_2线性无关,故α_1, α_2是解空间的一组基.令

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 2, 3)^{\mathrm{T}};$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\ &= (-1, 1, 4, -1)^{\mathrm{T}} - \frac{5}{15}(1, 1, 2, 3)^{\mathrm{T}} \\ &= \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, -2\right)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

单位化得

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^T,$$

$$\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^T.$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为所求的标准正交基. 【解毕】

例 3.4.2 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 是 R^3 的一组基.

(1) 求标准正交基 β_1,β_2,β_3, 使得 $L(\beta_1)=L(\alpha_3)$, $L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_3,\alpha_2)$, $L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=L(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$;

(2) 向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标是 $(2,-1,1)^T$, 求 γ 在 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

(1999 年清华试题)

思路 施密特正交化方法除了能从线性无关向量组生成正交向量组, 还有一个性质是由生成过程的顺序保证了 $L(\alpha_1)=L(\beta_1)$, $L(\alpha_1,\alpha_2)=L(\beta_1,\beta_2)$, $\cdots$, $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$. 这里 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)=\{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_i\alpha_i \mid x_1,x_2,\cdots,x_i\in R\}$. 因此针对本题要注意生成正交向量组时, 采取的向量的顺序, 以满足题目要求.

【解】 (1) 令

$$\gamma_1=\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\gamma_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\gamma_1)}{(\gamma_1,\gamma_1)}\gamma_1$$

$$=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}-\frac{2}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},$$

$$\gamma_3=\alpha_1-\frac{(\alpha_1,\gamma_1)}{(\gamma_1,\gamma_1)}\gamma_1-\frac{(\alpha_1,\gamma_2)}{(\gamma_2,\gamma_2)}\gamma_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{9}{9}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

单位化得

$$\beta_1=\frac{\gamma_1}{|\gamma_1|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = \frac{\gamma_2}{|\gamma_2|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \frac{\gamma_3}{|\gamma_3|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

β_1,β_2,β_3 为所求的标准正交基.

(2) 已知 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标是 $(2,-1,1)^T$,即

$$\gamma = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3.$$

方法 1:

$$\begin{aligned}\gamma &= 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3\\ &= 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\ &= \beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3.\end{aligned}$$

所以 γ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标向量是 $(1,3,4)$.

方法 2: 设 γ 在 β_1,β_2,β_3 下的坐标是 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$,则

$$\gamma = (\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)x.$$

设由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 P,则

$$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3) = (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)P,$$

$$\begin{aligned}P &= (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)^{-1}(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)\\ &= \begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&0\\3&3&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

于是
$$\gamma=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)x=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)Px.$$

又
$$\gamma=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$**线性无关,所以**
$$Px=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},$$
$$x=P^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&3&0\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}.$$
【解毕】

所以γ**在基** β_1,β_2,β_3 **下的坐标向量是**$(1,3,4)$.

【注】　方法 2 **中也可不求** P,**直接求出** P^{-1},**因为** $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)P$,**所以**
$$\begin{aligned}P^{-1}&=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)^{-1}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&0\\3&3&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&0\\3&3&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&3&0\\2&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 3.4.3　**交换** n **阶单位矩阵** I **的两行得到的矩阵称为对换矩阵. 对换矩阵的乘积称为置换矩阵. 证明置换矩阵是正交矩阵.**

(1998 **年清华考题**)

【证】

$$E(i,j)=\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\
 & & & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & & & \\
 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

是对换矩阵.

因为 $E(i,j)^{\mathrm{T}}=E(i,j)$,且

$$E(i,j)E(i,j)^{\mathrm{T}}=I,$$

所以 $E(i,j)$是正交矩阵,即对换矩阵是正交矩阵,又对换矩阵的乘积是置换矩阵.根据正交矩阵的乘积仍是正交矩阵,故置换矩阵是正交矩阵. 【证毕】

例 3.4.4 设向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,非零向量$\beta$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都正交,证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性无关.

【证】 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\beta=0$.等式两端分别与$\beta$做内积,得

$$(\beta,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\beta)=0,$$

$$k_1(\beta,\alpha_1)+k_2(\beta,\alpha_2)+k_3(\beta,\alpha_3)+k_4(\beta,\beta)=0.$$

由β与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都正交,有

$$(\beta,\alpha_1)=(\beta,\alpha_2)=(\beta,\alpha_3)=0.$$

于是得到

$$k_4(\beta,\beta)=0,$$

又由于$\beta\neq0$,即$(\beta,\beta)\neq0$,所以 $k_4=0$.于是

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,$$

由题设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,有

$$k_1=k_2=k_3=0$$

这就证明了$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$线性无关. 【证毕】

3.5　综合例题

综例 3.5.1　设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$．已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$______．

（2002 年考研题）

思路　依题意，$\alpha\neq 0$，$A\alpha$ 与 α 线性相关即 $A\alpha=k\alpha$，k 是常数，或说 $A\alpha$ 与 α 成比例．由此求出 a．

【解】　由题设 $A\alpha$ 与 α 线性相关，设 $A\alpha=k\alpha$，即

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{cases}a=ka\\ 2a+3=k,\\ 3a+4=k\end{cases}$$

解得

$$a=-1.$$

【解毕】

综例 3.5.2　设向量组 $\alpha_1=(a,0,c)$，$\alpha_2=(b,c,0)$，$\alpha_3=(0,a,b)$ 线性无关，则 a,b,c 必满足关系式______．

（2002 年考研题）

思路　3 个三维向量线性无关的充分必要条件是它们构成的行列式不等于 0．

【解】

$$\begin{vmatrix}a & b & 0\\ 0 & c & a\\ c & 0 & b\end{vmatrix}=2abc\neq 0.$$

所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关必有 $abc\neq 0$．　【解毕】

【注】　其实，$abc\neq 0$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充分必要条件．

综例 3.5.3　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维向量，下列结论不正确的是

(A) 若对于任一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关；

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关．

(2003 年考研题)

思路 选项(A)与向量组线性无关的定义是等价的，所以它是正确的．一个向量组若线性相关，则存在一组不全为零的常数使它的线性组合为零，而对于另一组不全为零的常数，其线性组合不一定为零．例如$\alpha_1=(1,0)^T,\alpha_2=(2,0)^T$，$\alpha_1$与$\alpha_2$是线性相关的，此时，$-2\alpha_1+\alpha_2=0$，但$2\alpha_1+\alpha_2=(4,0)^T\neq0$．故(B)是错误的．选项(C)和(D)显然也是正确的．

【解】 选(B)． 【解毕】

综例 3.5.4 试证明 n 维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{vmatrix}\neq0,$$

其中α_i^T $(i=1,2,\cdots,n)$表示列向量α_i的转置．

(1991 年考研题)

思路 令 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$，则

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix},$$

本题即证$|A|\neq0 \Leftrightarrow |A^TA|\neq0$．

【证】 记 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是$|A|\neq0$．又

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \cdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix},$$

$$D=|A^{\mathrm{T}}A|=|A^{\mathrm{T}}||A|=|A|^2,$$

故 $D\neq0$ 的充分必要条件是 $|A|\neq0$,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $D\neq0$.

【证毕】

综例 3.5.5　设 A,B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵,则必有______ .

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关;

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关;

(2004 年考研题)

思路　由题设 A,B 满足 $AB=0$,即 B 的每个列向量都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.若 A 的列向量组线性无关,即 A 列满秩,则齐次线性方程组只有零解,从而 $B=0$,与题设 B 是非零矩阵矛盾.所以 A 的列向量组线性相关.同理, B 的行向量组线性相关.故选(A).

【解】　选(A).　　　　【解毕】

【注】　B 的行向量组线性相关,这时 B 的列向量组可以线性相关,也可以线性无关.因为由题设 B 是任意矩阵,不妨设 B 是 $m\times n$ 矩阵.当 $n=1$ 时, B 的行向量组线性相关,但作为一个列向量,由于 $B\neq0$, B 的列向量组是线性无关的.而当 $n>m$ 时, B 的列向量组总是线性相关.所以不选(B).同样道理, A 的列向量组线性相关, A 的行向量可以线性相关,也可以线性无关,所以不选(C)和(D).

综例 3.5.6　设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times n$ 矩阵,其中 $n<m$, I 是 n 阶单位矩阵,若 $AB=I$,证明 B 的列向量组线性无关.

思路　要证明向量组线性无关,可以用线性无关的定义来证.也可以证明 B 列满秩,利用矩阵的秩的性质来证明.

【证】　方法 1: 令 $B=(\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)$,其中 β_i 是 m 维列向量.设

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0,$$

记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,则上式为

$$Bx=0,$$

于是有

$$ABx=0.$$

又 $AB=I$,所以 $x=0$.这就证明了 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关.

方法 2: 由 $AB=I$,有

$$r(B) \geq r(AB) = r(I) = n.$$

又

$$r(B) \leq n,$$

所以

$$r(B) = n.$$

故 B 的 n 个列向量线性无关. 【证毕】

【注】 本题的结论很重要.

若 $AB=I$,则 B 列满秩,或 B 的列向量组线性无关.

同样可以证明:

若 $AB=I$,则 A 行满秩,或 A 的行向量组线性无关.

当 $n=m$,即 A 与 B 是方阵时,A 与 B 可逆.在 $n\neq m$ 时,则 A 行满秩且 B 列满秩.

综例 3.5.7 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $r(A)=m<n$,下列结论中正确的是______.

(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关;

(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零;

(C) 若矩阵 B 满足 $BA=0$,则 $B=0$;

(D) A 通过初等行变换,必可以化为 $(I_m\ 0)$ 的形式.

(1995 年考研题)

思路 $r(A)=m$ 即 A 是行满秩的,A 的列秩也是 m,按照概念存在 m 个列向量线性无关,而任意 $m+1$ 个列向量都线性相关,并不是任意 m 个列向量都线性无关.同样从子式的角度来描述秩的话是存在一个 m 阶子式不等于零,而不是任意 m 阶子式全不等于 0.故(A),(B)全否定了.对于行满秩的矩阵不作列变换不一定能化为 $(I_m\ 0)$ 的形式,如矩阵 A 为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

仅仅用初等行变换不可能化作 $(I_m\ 0)$,所以只能选(C).

【解】 选(C).下面用两种方法进行证明.

方法 1:设 $A=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$,其中 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 维行向量.又设

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sm} \end{pmatrix},$$

由题设 $BA=0$,有

$$\begin{cases} b_{11}\alpha_1+b_{12}\alpha_2+\cdots+b_{1m}\alpha_m=0, \\ b_{21}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{2m}\alpha_m=0, \\ \cdots \\ b_{s1}\alpha_1+b_{s2}\alpha_2+\cdots+b_{sm}\alpha_m=0. \end{cases}$$

由 $\mathrm{r}(A)=m$,即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,所以有

$$b_{ij}=0,\qquad i=1,2,\cdots,s,\qquad j=1,2,\cdots,m,$$

即

$$B=0.$$

方法 2: 由 A 是行满秩的,所以可以通过一系列初等列变换化作 $(I_m\ 0)$,或者说存在可逆矩阵 P,使得

$$AP=(I_m\ 0),$$

即

$$A=(I_m\ 0)P^{-1}.$$

于是

$$BA=B(I_m\ 0)P^{-1}=0,$$

即

$$(B\ 0)=0,$$

所以

$$B=0.$$

【解毕】

【注】　本题的结论是很有用的,不妨记住.

(1) 若 A 是行满秩的,则 A 可以通过初等变换化作 $(I_m\ 0)$,也可以仅通过初等列变换化作 $(I_m\ 0)$,但如果只作初等行变换,则不一定了.

这个结论可以写作矩阵形式.设 A 是 $m\times n$ 矩阵,若 $\mathrm{r}(A)=m$,则存在 n 阶可逆矩阵 P,使

$$AP=(I_m\ 0).$$

(2) 设 A 是行满秩的,若矩阵 B 满足 $BA=0$,则 $B=0$.

这两个结论可改成列满秩的情况.

(3) 若 A 是列满秩的,则 A 可以仅通过初等行变换,化作 $\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}$,用矩阵语言叙述为

设 A 是 $m\times n$ 矩阵,若 $\mathrm{r}(A)=n$,则存在 m 阶可逆矩阵 P,使得

$$PA=\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 设 A 是列满秩的,若矩阵 B 满足 $AB=0$,则 $B=0$.

综例 3.5.8 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为______.

(A) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示;

(B) 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示;

(C) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价;

(D) 矩阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m)$ 等价.

(2000 年考研题)

思路 本题的两个向量组都线性无关,它们个数 m 相同,就是说它们的秩相等.题设并没有提出线性表示的关系.而向量组的等价不仅它们的秩相等,还要互相线性表示.仅仅有秩相等,并不一定能相互线性表示,也就不一定有向量组的等价.至于同型矩阵的等价,是指两个矩阵可以通过初等变换互相转化,而初等变换是保秩的,所以只要秩相等的矩阵就等价,反过来等价矩阵必然秩相等.显然应该选(D).

【解】 已知 $\mathrm{r}(A)=m$.若矩阵 A 与矩阵 B 等价,则

$$\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(A)=m,$$

从而向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

反之,若向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关,则 $\mathrm{r}(B)=m$.所以矩阵 A 与矩阵 B 等价.

这就证明了向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 A 和矩阵 B 等价.

故选(D). 【解毕】

【注】 (A) 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关和 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示,可得出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩小于等于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的秩,即 $\mathrm{r}(A)\le\mathrm{r}(B)$,故 $m\le\mathrm{r}(B)$.又 $\mathrm{r}(B)\le m$,所以 $\mathrm{r}(B)=m$,即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.所以(A)是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分条件,但不必要.因为题设中并无两向量组之间的任何线性表示关系.例如,设 $\alpha_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$,这是秩为 2 的四维向量组,另设 $\beta_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\beta_2=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$,这也是一个秩为 2 的四维向量组,它们的秩相等,但并无任何线性表示的关系.

(B) 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,可知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的秩小于等于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩.也即 $\mathrm{r}(B)\le\mathrm{r}(A)=m$.不能推出 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的秩是几.反之,已知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关,同(A)一样,也不能推出它们之间有任何线性表示关系.所以(B)什么条件也不是.

(C) 两个向量组相互等价,即可相互线性表示,且秩相同.所以是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分条件.但 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关并不能推出两个向量组之间任何线性表示关系,所以不必要.

通过本题要搞清向量组等价和矩阵等价两个概念.若两个向量组等价,则由它们构

成的矩阵也等价,反之两矩阵等价,则它们的行向量组(或列向量组)并不一定等价.

综例 3.5.9 设$\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T$,$\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T$,$\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$,则三条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

(其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3$)交于一点的充分必要条件是______.

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关; (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关;

(C) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)$; (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关,$\alpha_1,\alpha_2$线性无关.

(1997 年考研题)

思路 三条直线交于一点就是方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0,\\ a_3x+b_3y+c_3=0.\end{cases}$$

有惟一解.将方程组写成向量方程

$$\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3=0,$$

或

$$\alpha_3=-x\alpha_1-y\alpha_2,$$

即α_3可以由α_1,α_2惟一线性表示.

【解】 考虑线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0,\\ a_3x+b_3y+c_3=0.\end{cases}$$

由题设$\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T$,$\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T$, $\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$,方程组可记作

$$\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3=0.$$

三直线交于一点,即$\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3=0$有惟一解$(x_0,y_0)$满足方程

$$\alpha_3=-x_0\alpha_1-y_0\alpha_2.$$

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关,且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关.

反之,若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关,且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关,则由性质(2),$\alpha_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示,且表示法惟一,即三直线交于一点.

应选(D). 【解毕】

【注】 (A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关,$\alpha_3$不一定能由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示.如$\alpha_1=(1,2,3)^T$,$\alpha_2=(2,4,6)^T$,$\alpha_3=(-1,-1,-1)^T$.也就是说不一定相交(如图 3.5.1),即使能表出,也不一定交于一点,或者说α_3可以由α_1,α_2线性表示,但表示法不惟一.如$\alpha_1=(1,2,3)^T$,$\alpha_2=(2,4,6)^T$,$\alpha_3=(-3,-6,-9)^T$.即三直线可能是重合的(如图 3.5.2).故α_1,α_2,

α_3 线性相关是三直线交于一点的必要条件但不充分.

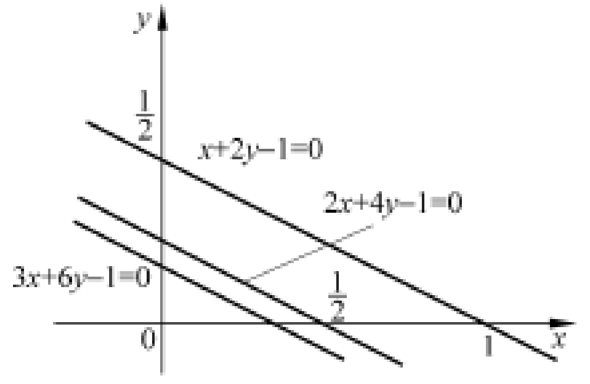


图 3.5.1

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,三直线不相交于一点.如 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(-1,1,0)^T$,$\alpha_3=(1,-1,-1)^T$(如图 3.5.3).

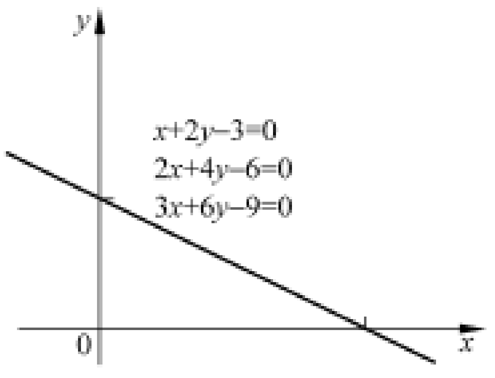


图 3.5.2

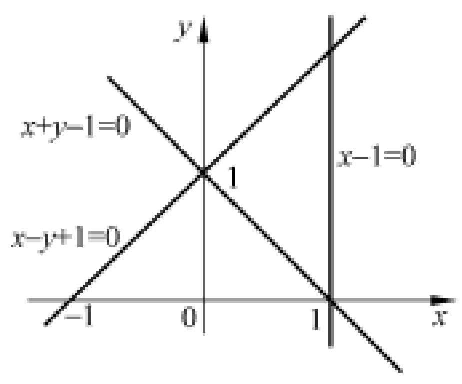


图 3.5.3

(C) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)$.

这个条件保证能相交,但可能交于一点,也可能三直线重合.当 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)=1$ 时,如图 3.5.2,三直线重合.当 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)=2$ 时,即 α_1,α_2 线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.这时 α_3 可以由 α_1,α_2 线性表示且惟一,归结为(D)的情形,即三直线交于一点.

3.6 练 习 题

1.设 $\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(-1,-1,t)^T,\beta=(1,0,-1)^T$.$t$ 取何值时,β 可以有无穷多种表示法由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出?试写出表示式.

2.设 $\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T,\beta=(1,3,-3)^T$,试讨论当 a,b 为何值时,

(1) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;

(2) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$惟一地线性表示,并求出表示式;

(3) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,但表示式不惟一,并求出表示式.

3.判断向量组$\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,0,4)^T,\alpha_3=(0,0,1,1)^T,\alpha_4=(0,0,0,2)^T$是线性相关还是线性无关?

4.判断向量组$\alpha_1=(1,3,-5,1)^T,\alpha_2=(2,6,1,4)^T,\alpha_3=(3,9,7,10)^T$是线性相关还是线性无关?

5.已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,试判断$3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,4\alpha_3-5\alpha_1$是否线性无关.

6.已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$.试讨论$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的线性相关性.

7.设α,β,γ线性无关,又设$\delta\neq 0$,α,γ,δ线性相关,β,γ,δ也线性相关,证明$\delta=k\gamma$,其中k是非零常数.

8.已知R^4中,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关,

(1) 若$\gamma\in R^4$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出,则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$线性无关;

(2) 证明$\exists\ \delta\in R^4$使得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\delta$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\delta$均线性无关.

9.设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中$\alpha_s$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出,而$\alpha_1$是$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$的线性组合,证明$\alpha_1$可以由$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}$线性表出.

10.若向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$惟一线性表示,试证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

11.证明n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是它们可以表示任意一个$n$维向量.

12.设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关,但其中任意$s-1$个向量都线性无关,试证明必存在$s$个全不为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$成立.

13.已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为$r$,证明其中任意$r$个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

14.设

$$\alpha_1=(3,1,-1,2)^T,\quad \alpha_2=(-1,1,2,1)^T,$$
$$\alpha_3=(-4,0,3,-1)^T,\quad \alpha_4=(4,-1,0,1)^T,$$

求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组.

15.设向量组

$$\alpha_1=(-1,1,2,4)^T,\quad \alpha_2=(3,0,1,2)^T,\quad \alpha_3=(0,3,7,14)^T,$$
$$\alpha_4=(-2,1,2,0)^T,\quad \alpha_5=(1,2,5,10)^T,$$

求一个极大线性无关组,并将其余向量由这个极大线性无关组线性表出.

16.在R^3中,求向量$\alpha=(1,-1,0)^T$在基$\varepsilon_1=(0,0,1)^T,\varepsilon_2=(0,1,-1)^T,\varepsilon_3=$

$(1, -1, 0)^T$ 下的坐标.

17. 已知$\mathbf{R}^3$的两个基为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

求由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵.

18. 已知$\mathbf{R}^3$的向量γ在基$\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 0, 0)^T$下的坐标向量是$(1, 0, -1)^T$,求$\gamma$在基$\beta_1 = (1, 2, 0)^T, \beta_2 = (1, -1, 2)^T, \beta_3 = (0, 1, -1)^T$下的坐标.

19. 用施密特正交化方法将$\mathbf{R}^3$的基$\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T, \alpha_3 = (1, -1, 1)^T$构成$\mathbf{R}^3$的标准正交基,并求$\alpha = (1, 2, 3)^T$在该标准正交基下的坐标.

20. 已知n维向量组α_1, α_2线性无关,β_1, β_2线性无关,且α_1, α_2分别与β_1, β_2正交,证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$线性无关.

第 4 章 线性方程组

4.0 引 言

线性方程组是线性代数最基本的内容之一.线性方程组的解的理论和线性方程组的解法贯穿于这门课程的始终,同时在各个学科领域中有着广泛的应用,掌握好这一章的内容十分重要.

m 个线性方程,n 个未知量的方程组可以有如下几种表示形式:

一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

向量组的形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b, \tag{4.2}$$

其中 $\alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$.

矩阵的形式

$$Ax = b.$$

其中 $A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$.

在不同的场合下,可以应用线性方程组的不同形式,从不同的角度来分析和解决问题,从而得到满意的结果.在这一章里,要综合应用向量组的理论,秩的理论及矩阵的初等变换来解决问题,所讨论的问题往往会有多种思路和解法.

例如讨论线性非齐次方程组有解、无解的问题,若从线性方程组的向量表达形式 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b$ 出发,线性方程组有解,即 b 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出,反之也成立.从而得到 $\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, b) = \mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$,记 $A = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)$,进而得到线性方程组 $Ax = b$ 有解 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A\ b)$.齐次线性方程组的向量形式为 $x_1\alpha_1 +$

$x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ .0 向量总可以被任一组向量线性表出,因此齐次线性方程组总有零解 .当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$这组向量线性无关时,上式成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.故得到 $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$ 时,$Ax=0$ 只有零解 .而当向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关,即 $\mathrm{r}(A)<n$ 时,$Ax=0$ 有非零解 .

4 .1 线性方程组的解的理论要点

1 .齐次线性方程组 $Ax=0$

齐次线性方程组总有零解,不存在无解的情况 .$Ax=0$ 有非零解 $\mathrm{r}(A)<n$,即(4 .2)式中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关 .

齐次线性方程组的解向量的线性组合仍然是该线性方程组的解 .

齐次线性方程组的解集构成R^n的子空间,也称解空间,它的维数为 $n-\mathrm{r}(A)$.解空间中的一组基称为该线性方程组的一组基础解系 .换句话说,基础解系是由 $n-\mathrm{r}(A)$个线性无关的解向量构成的,它们的任意线性组合构成了齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一般解,也称通解 .

2 .非齐次线性方程组 $Ax=b$

$Ax=b$ 有解 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A\ b)$,即系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩 .

在有解的情况下,当 $\mathrm{r}(A)=n$ 时,线性方程组有惟一解 .当 $\mathrm{r}(A)<n$时,线性方程组有无穷多解 .

非齐次线性方程组的解向量的线性组合不再是该线性方程组的解 .但两个解η_1,η_2的差$\eta_1-\eta_2$满足导出组(也称对应的齐次线性方程组)$Ax=0$,即 $A(\eta_1-\eta_2)=0$.

非齐次线性方程组 $Ax=b$的一般解(也称通解)为 $x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_{n-r}x_{n-r}+x_0$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$为导出组 $Ax=0$ 的一组基础解系 .而 x_0 为 $Ax=b$ 的任意一个解 .

特别地,当 $Ax=b$的系数矩阵 A 是 n 阶方阵时,即线性方程组方程的个数与未知量的个数相等时,若$|A|\neq0$,则非齐次线性方程组有惟一解(即克拉默法则) .这个定理的推论是: $|A|=0$ 是$Ax=0$ 有无穷多个解的充分必要条件 .这个定理经常要用到 .

例 4 .1 .1 判断下列命题是否正确:

(1) 如 $Ax=0$ 只有零解,则 $Ax=b$有惟一解;

(2) 如 $Ax=b$有惟一解,则 $Ax=0$ 只有零解;

(3) 如 $Ax=0$ 有无穷多个解,则 $Ax=b$也有无穷多个解;

(4) 如 $Ax=b$有无穷多个解,则 $Ax=0$ 也有无穷多个解 .

思路 这个问题是判断线性方程组有解无解以及具有惟一解和无穷多个解的问题 .

一般情况下，$Ax=b$ 或 $Ax=0$ 的系数矩阵 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m\neq n$，所以克拉默法则不适用．

$Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(A)=n$，而此时与之相对应的非齐次线性方程组 $Ax=b$ 虽然系数矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=n$，但此时增广矩阵的秩 $\mathrm{r}(A\ b)$ 不一定与 $\mathrm{r}(A)$ 相等，所以 $Ax=b$ 不一定有解．反过来，$Ax=b$ 有解，即 $\mathrm{r}(A\ b)=\mathrm{r}(A)$，不论 $Ax=b$ 有解无解，其导出组 $Ax=0$ 总是有解的(因总有零解)，只是存在有非零解和只有零解之分，这取决于 $\mathrm{r}(A)$ 是否小于未知量的个数 n，因此本题解答如下：

【解】 (1) 不正确．因为 $Ax=0$ 只有零解．虽然有 $\mathrm{r}(A)=n$ 的结论，但不能保证 $\mathrm{r}(A\ b)=\mathrm{r}(A)$，故 $Ax=b$ 不一定有解．更谈不上一定有惟一解．

(2) 正确．因 $Ax=b$ 有惟一解，说明 $\mathrm{r}(A\ b)=\mathrm{r}(A)=n$．而 $Ax=0$ 中有了 $\mathrm{r}(A)=n$，即能判断它只有零解．

(3) 不正确．道理同(1)，即 $\mathrm{r}(A)<n$ 不能保证 $\mathrm{r}(A\ b)=\mathrm{r}(A)$．

(4) 正确．道理同(2)，$Ax=b$ 有无穷多个解说明 $\mathrm{r}(A\ b)=\mathrm{r}(A)<n$，这是保证 $Ax=0$ 有无穷多个解(即非零解)的充分必要条件．【解毕】

例 4.1.2 设齐次线性方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times4}$，若该线性方程组的通解为 $x=k\alpha$ (其中 $k\in\mathrm{R}$，$\alpha\in\mathrm{R}^4$ 且 $\alpha\neq0$)．则下列结论是否正确？

(1) $\forall\ b\in\mathrm{R}^3$，$Ax=b$ 总有无穷多个解．

(2) $A^{\mathrm{T}}x=0$ 只有零解．

(3) $\forall\ b\in\mathrm{R}^4$，$A^{\mathrm{T}}x=b$ 总有无穷多个解．

(4) $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 总有无穷多个解．

思路 本题的关键与例 4.1.1 相同，要通过对线性方程组系数矩阵与增广矩阵的秩的讨论得到结论．由已知条件，$Ax=0$ 的基础解系由一个解向量组成，因此 $\mathrm{r}(A)=4-1=3$，即系数矩阵 A 行满秩．而增广矩阵 $(A\ b)$ 为 3×5 的矩阵，其秩不可能超过其行数 3，故 $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A\ b)=3$．而 A^{T} 为 4×3 的矩阵，$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)=3$．讨论 $A^{\mathrm{T}}x=0$ 和 $A^{\mathrm{T}}x=b$ 的解．可由此结论出发．另外，$A^{\mathrm{T}}A$ 的秩 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)\leqslant\mathrm{r}(A)=3$，而 $A^{\mathrm{T}}A$ 是 4×4 的矩阵，因此(4)的解答也显而易见了．

【解】 (1) 正确．因 $Ax=0$ 的基础解系中所包括线性无关解向量的个数 $s=n-\mathrm{r}(A)$．本题 $n=4$，$s=1$，所以 $\mathrm{r}(A)=4-1=3$．而 $Ax=b$ 的增广矩阵 $(A\ b)$ 为 3×4 矩阵．故 $\mathrm{r}(A\ b)\leqslant3$．而 $\mathrm{r}(A\ b)\geqslant\mathrm{r}(A)$，从而 $\mathrm{r}(A\ b)=\mathrm{r}(A)=3<n=4$，所以 $Ax=b$ 有无穷多个解．

(2) 正确．由(1)知 $\mathrm{r}(A)=3$，而 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(A)=3$，线性方程组 $A^{\mathrm{T}}x=0$ 中未知量的个数 $n=3$，据齐次线性方程组解的理论，$A^{\mathrm{T}}x=0$ 只有零解．

(3) 不正确．根据(2) $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})=3$．而增广矩阵 $(A^{\mathrm{T}}\ b)$ 为 4×4 的矩阵，$\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}\ b)\leqslant4$，即

$r(A^T)$ 与 $r(A^T\ b)$有可能不等, $A^T x=b$ 有可能无解．自然谈不上一定有无穷多个解了．

(4) 正确．因 $A^T A$ 为 4×4 的矩阵．$r(A^T A)\le r(A)=3$, 所以 $r(A^T A)<4=n$．故 $A^T Ax=0$ 有无穷多个解． 【解毕】

例 4.1.3　已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 则下列结论是否正确?

(1) $\alpha_1+2\alpha_2, 3\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-2\alpha_1$ 也为 $Ax=0$ 的一组基础解系．

(2) 向量组ξ_1,ξ_2,ξ_3能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 则$\xi_1,\xi_2,\xi_3$也是 $Ax=0$ 的基础解系．

(3) 向量组ξ_1,ξ_2,ξ_3与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以互相线性表出, 则$\xi_1,\xi_2,\xi_3$也是 $Ax=0$ 的基础解系．

(4) 向量组 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是等价的向量组, 则 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 也为 $Ax=0$ 的基础解系．

思路　由已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 知 $n-r(A)=3$, 且α_1, α_2,α_3为满足 $Ax=0$ 的一组线性无关解向量．由齐次线性方程组的理论, 要证明一组向量为 $Ax=0$ 的基础解系．必须满足 3 条: (1)这组向量是齐次线性方程组的解; (2)这组向量必须是线性无关组; (3)这组向量所含向量的个数 $s=n-r(A)$, 其中 n 是未知量的个数, 即系数矩阵 A 的列数．由此出发, 不难得到本题的解答．

【解】　(1) 正确．首先因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性方程组 $Ax=0$ 的 3 个解向量, 它们的线性组合$\alpha_1+2\alpha_2, 3\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-2\alpha_1$也是 $Ax=0$ 的解．再证它们是线性无关的．证明方法有很多种, 最简单的方法是: 设 $B=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$, 矩阵 B 的列秩等于 3, 而通过列初等变换可把 B 化为$(\alpha_1+2\alpha_2\quad 3\alpha_2+\alpha_3\quad \alpha_3-2\alpha_1)=B'$, $r(B)=r(B')$(初等变换不改变矩阵的秩), 所以 B'的列秩也为 3．列向量组$\alpha_1+2\alpha_2, 3\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3-2\alpha_1$为 $Ax=0$ 的 3 个线性无关的解向量, 满足前面提出的 3 条．所以它们构成 $Ax=0$ 的一组基础解系．

(2) 不正确．因为ξ_1,ξ_2,ξ_3能被$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 根据定理, $r(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$, 这不能保证 $r(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=3$(例如$\xi_1=\alpha_1-\alpha_2, \xi_2=\alpha_2-\alpha_3, \xi_3=\alpha_3-\alpha_2$, 则$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性相关), 即ξ_1,ξ_2,ξ_3有可能成为 $Ax=0$ 的一组线性相关解．故不能构成 $Ax=0$ 的一组基础解系．

(3) 正确．两组向量可以互相线性表出, 故 $r(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$, 且$\xi_1,\xi_2$, ξ_3又满足 $Ax=0$, 即它们为 $Ax=0$ 的 3 个线性无关解, 故构成 $Ax=0$ 的一组基础解系．

(4) 不正确．因为 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的个数为 4, 故不能构成 $Ax=0$ 的基础解系．实际上, 因为两组向量等价, 故等秩, 向量组 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 是线性相关的． 【解毕】

例 4.1.4　已知四元线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解ξ_1,ξ_2,ξ_3, 且$\xi_1+\xi_2=(1,0,1,2)^T$,

$\xi_3=(3,2,-1,4)^T$,而 $r(A)=3$,求该线性方程组的通解.

思路 由 $r(A)=3$,对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解应由一个非零解组成,即 $Ax=0$ 的基础解系只包括一个线性无关解.现已知非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解的直接和间接表达式.可以通过非齐次和对应齐次线性方程的解的关系而得到其通解.

【解】 因为 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=b+b=2b$,而 $A(2\xi_3)=2A\xi_3=2b$.所以

$$A(\xi_1+\xi_2-2\xi_3)=2b-2b=0.$$

故令

$$\begin{aligned} x_1&=\xi_1+\xi_2-2\xi_3=(1,0,1,2)^T-2(3,2,-1,4)^T\\ &=(-5,-4,3,-6)^T, \end{aligned}$$

则 x_1 为 $Ax=0$ 的一个线性无关解.所求 $Ax=b$ 的通解为

$$\begin{aligned} x&=kx_1+\xi_3\\ &=k(-5,-4,3,-6)^T+(3,2,-1,4)^T,\ k\text{为任意常数}. \end{aligned}$$

【解毕】

例 4.1.5 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零,且 A 的秩为 $n-1$,则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为______.

(1993 年考研题)

思路 因 $r(A)=n-1$,故 $Ax=0$ 的基础解系只包括一个非零解向量.因此只要根据已知条件(A 的各行元素之和为零)找出满足方程的非零解

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=0,$$

即

$$a_{i1}\cdot 1+a_{i2}\cdot 1+\cdots+a_{in}\cdot 1=0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以 $\xi=(1,1,\cdots,1)^T$ 为 $Ax=0$ 的一个非零解,方程的通解为

$$x=k(1,1,\cdots,1)^T,\quad k\text{为任意常数}.$$

【解毕】

例 4.1.6 若任一 n 维列向量均为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解(其中 A 为 $m\times n$ 矩阵),则 $A=0$.

【证明】 方法 1:因为任一 n 维列向量均为线性方程组的解,我们可选用具体的向量代入线性方程组,从而定出线性方程组的系数.

取 $x_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$ $(i=1,2,\cdots,n)$(即 x_i 的第 i 个分量为 1,其余分量为 0),代入线性方程组

$$a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=0\qquad(j=1,2,\cdots,m),$$

得到

$$a_{ji}=0\qquad(i=1,2,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,m),$$

即线性方程组所有的系数为零,即 $A=0$.

方法 2: 因任一 n 维列向量均为 $Ax=0$ 的解,这个线性方程组的基础解系包括的线性无关解向量的个数 $s=n-\mathrm{r}(A)=n$,即 $\mathrm{r}(A)=n-n=0$,故 $A=0$.

方法 3: 取 $x_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ $(i=1,\cdots,n)$ 为 $Ax=0$ 的解,即 $Ax_i=0$,所以 $A(x_1\ \ x_2\cdots\ \ x_n)=AI=A=0$.

方法 4: 用反证法 .

设系数矩阵 $A\neq 0$,不失一般性,不妨设 $a_{11}\neq 0$,取 $x_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 代入第一个方程,得到 $a_{11}\cdot 1+0+\cdots+0=a_{11}\neq 0$,这与已知条件任意 n 维列向量均为 $Ax=0$ 的解矛盾,所以 $A=0$. 【证毕】

【注】　本题从不同的角度证明了结论,体现了讨论齐次线性方程组的系数(或系数矩阵)与线性方程组的解(或基础解系)之间的关系的常用方法 .

例 4 .1 .7　设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times s$ 矩阵,证明 $(AB)x=0$ 与 $Bx=0$ 同解的充分必要条件是 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$.

思路　要证明两个解集 $X_1=\{x\mid Bx=0\}$ 与 $X_2=\{x\mid ABx=0\}$ 相等,通常的方法是: " $x\in X_1$　 $x\in X_2$,则 X_1　 X_2 .反之,若 " $x\in X_2$　 $x\in X_1$,则 X_2　 X_1 .因此 $X_1=X_2$.本题由 $Bx=0$　 $ABx=0$,即 X_1　 X_2 比较容易得到,但反推 X_2　 X_1 比较难,因此可利用线性方程组的基础解系的性质来推出结论 .

【证明】　必要性: 已知 $(AB)x=0$ 和 $Bx=0$ 同解,则两个线性方程组的基础解系也完全相同,当然基础解系所包括的线性无关解的个数完全相等,即 $s-\mathrm{r}(AB)=s-\mathrm{r}(B)$,所以 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(B)$.

充分性: 设 ξ 是 $Bx=0$ 的任一解向量,即 $B\xi=0$,两边左乘 A,得 $AB\xi=0$,即 ξ 也是 $ABx=0$ 的解,所以 $Bx=0$ 的解集含于 $ABx=0$ 的解集中 .已知 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(AB)=r$,若 $r<s$,设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{s-r}$ 为 $Bx=0$ 的基础解系,则它们必含于 $ABx=0$ 的解集中,而 $ABx=0$ 的基础解系也应含有 $s-r$ 个线性无关解向量 .故 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{s-r}$ 也构成了 $ABx=0$ 的一组基础解系 .两个线性方程组基础解系完全相同,则解集必然相等 .

又若 $\mathrm{r}(B)=\mathrm{r}(AB)=r=s$,则两个线性方程组均只有零解,自然解集也相等 . 【证毕】

例 4 .1 .8　设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,则线性方程组 $(AB)x=0$ 解的情况为______ .

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解;　　(B) 当 $n>m$ 时必有非零解;

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解;　　(D) 当 $m>n$ 时必有非零解 .

(2002 年考研题)

思路　依题设 AB 是 $m\times m$ 矩阵,$(AB)x=0$ 有没有非零解,由 AB 的秩所决定 .而 $\mathrm{r}(AB)\leq\mathrm{r}(A)\leq\min(m,n)$.

【解】 当 $m>n$ 时，$r(AB)\le r(A)\le \min(m,n)<m$，因此 $(AB)x=0$ 必有非零解．故选(D)． 【解毕】

【注】 当 $n>m$ 时，$r(AB)\le r(A)\le \min(m,n)=m$，得不出有没有非零解的结论．

例 4.1.9 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\ge r(B)$；

② 若 $r(A)\ge r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解；

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$；

④ 若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解．

以上命题中正确的是______．

(A) ①②； (B) ①③； (C) ②④； (D) ③④．

(2003 年考研题)

思路 依题意，A,B 两个矩阵除行、列数分别相等外，没有任何联系．只有当 A 和 B 都是列满秩时，知道 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 都只有零解，除此之外，由 A 和 B 的秩的大小关系，只能推出方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 的基础解系中所含解向量的个数之间的关系，不可能推出解之间的联系 所以命题②和④都不正确．

若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，即 $Bx=0$ 的解集包含了 $Ax=0$ 的解集，故 $Bx=0$ 的基础解系中解向量的个数不少于 $Ax=0$ 的基础解系中解向量的个数，即 $n-r(B)\ge n-r(A)$，从而有 $r(A)\ge r(B)$，所以命题①是正确的．

若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $n-r(A)=n-r(B)$，即 $r(A)=r(B)$ 故命题③是正确的．

【解】 应选(B)． 【解毕】

例 4.1.10 已知四阶方阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为四维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$．如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解．

(2002 年考研题)

思路 $Ax=\beta$ 的向量表示式是 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$，由题设 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 可知 $(1,1,1,1)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的一个特解．再由题设 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关及 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，可知 $r(A)=3$，于是导出组 $Ax=0$ 的基础解系只有一个解向量，再由 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，有 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$，即 $(1,-2,1,0)^T$ 是导出组的基础解系．

本题另一种解法是利用向量表示式导出一个方程组求解．

【解】 方法 1：由题设 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，知 $(1,1,1,1)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的一个特解．

又由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，有 $r(A)=3$，导出组 $Ax=0$ 的基础解系有 $4-3=1$ 个解向量．

由$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$,即$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$,知$(1, -2, 1, 0)^T$是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系.

于是方程组 $Ax = \beta$的通解是

$$x = (1,1,1,1)^T + k(1, -2,1,0)^T \quad (k\text{是任意常数}).$$

方法 2: 设方程组 $Ax = \beta$的向量表示式为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$.由题设$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$,于是

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

又$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$,有

$$(2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0.$$

由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,有

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ -x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

解得 $Ax = \beta$的一个特解$(0,3,0,1)^T$及导出组 $Ax = 0$ 的基础解系$(1, -2,1,0)^T$.于是方程组 $Ax = \beta$的通解是

$$x = (0,3,0,1)^T + k(1, -2,1,0)^T \quad (k\text{为任意常数}).$$

【解毕】

【注】　这两个方法的结果表面上看是不同的,实质上是一致的.因为方法 2 的特解

$$(0,3,0,1)^T = (1,1,1,1)^T - (1, -2,1,0)^T.$$

在方法 2 中也可取$(1,1,1,1)^T$作为特解.至于基础解系,由于解空间是一维的,所以必定是$(1, -2,1,0)^T$的常数倍.

4.2　线性方程组的求解

n元线性方程组的求解计算是用高斯消去法,即用行初等变换对线性方程组的增广矩阵(齐次线性方程组是对线性方程组的系数矩阵)进行同解变形化为阶梯形矩阵.在此基础上,再依据线性方程组的解的理论进一步计算出解来.值得一提的是,在求同解的齐次线性方程组的基础解系时,$n - r(A)$个自由未知量的设定并不惟一.可根据具体情况而异,原则是使计算简便、准确.

例 4.2.1　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

【解】　首先对增广矩阵进行初等行变换,化为阶梯形,再判断解的情况.

$$(A\ b)=\begin{bmatrix}1&1&3&2&-1&1\\3&3&5&4&-3&2\\2&2&4&4&-1&3\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&1&3&2&-1&1\\0&0&-2&0&1&1\\0&0&0&2&2&3\end{bmatrix}.$$

因为 $r(A)=r(A\ b)=3<n=5$,所以线性方程组有无穷多个解.

先求对应齐次线性方程组的基础解系:

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+2x_4-x_5=0,\\ -2x_3+x_5=0,\\ 2x_4+2x_5=0.\end{cases}$$

设 x_2,x_4 为自由未知量,得同解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_3-x_5=-x_2-2x_4,\\ -2x_3+x_5=0,\\ x_5=-x_4.\end{cases}$$

分别取 $x_2=1,x_4=0$ 和 $x_2=0,x_4=1$ 得到齐次线性方程组的基础解系为

$$x_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm T},\quad x_2=(-3/2,0,-1/2,1,-1)^{\mathrm T}.$$

x_2 可乘 -2 得 $(3,0,1,-2,2)^{\mathrm T}$.

再求非齐次线性方程组的一个特解,类似地也取 x_2,x_4 为自由未知量,得线性方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_3-x_5=1-x_2-2x_4,\\ -2x_3+x_5=1,\\ 2x_5=3-2x_4.\end{cases}$$

取 $x_2=x_4=0$,得 $x_0=\left(\dfrac{7}{4},0,\dfrac{1}{4},0,\dfrac{3}{2}\right)^{\mathrm T}$,于是线性方程组的通解为

$$x=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}3\\0\\1\\-2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7/4\\0\\1/4\\0\\3/2\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.　　【解毕】

技巧　(1) 增广矩阵进行行初等变换化为阶梯形在确定有无穷多个解后,要把 $n-r(A)$ 个自由未知量移到方程右边去,在确定哪些未知量为自由未知量时,原则上可以任意取,但为了下一步求解的方便,通常是使保留在等号左边的未知量的系数形成一个标准阶梯形矩阵.这样,当自由未知量取定一组数后,求方程的对应解时,每个方程只出现一个待求的未知量,回代非常方便.如本例题,若取 x_3,x_4 为自由未知量,求解时就不方便了.

(2) 在求解对应的齐次线性方程组的基础解系时,自由未知量确定后取何值?在保证每次取定的 $n-r$ 个自由未知量构成的 $n-r$ 维向量线性无关的前提下,可以任意选取,但为了计算简便,往往把自由未知量设为 $(1,0,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,0,\cdots,1)$. 有时为了在求解时避免分数运算,也可把自由未知量设为其他整数. 如本例中,在求 x_2 时,可设 $x_4=2$, $x_2=0$,直接得到 $x_2=(-3,0,-1,2,-2)^{\mathrm{T}}$.

(3) 在求对应的非齐次线性方程组的特解时,自由未知量通常全部设为零,使得计算比较简便.

例 4.2.2　已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+tx_3=4, \\ x_1-x_2+2x_3=-4, \\ -x_1+tx_2+x_3=t^2. \end{cases}$$

讨论 t 取不同的值时,线性方程组的解的情况,并求解.

【解】

$$(A\ b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & t & 1 & t^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & t-2 & 8 \\ 0 & t-1 & 3 & t^2-4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2-t & 8 \\ 0 & 0 & \dfrac{(t+1)(t-4)}{-2} & t(t-4) \end{pmatrix}.$$

(1) 当 $t\neq -1$ 且 $t\neq 4$ 时, $\mathrm{r}(A)=3$,线性方程组有惟一解. 解为

$$x=\left(\frac{-t^2+6}{t+1}, \frac{-t^2+6t+4}{t+1}, \frac{-2t}{t+1}\right)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 当 $t=-1$ 时, $\mathrm{r}(A)=2$,而 $\mathrm{r}(A\ b)=3$,线性方程组无解.

(3) 当 $t=4$ 时,有

$$(A\ b)\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A\ b)=2$,线性方程组有无穷多个解. 解为

$$x=k(-1,1,1)^{\mathrm{T}}+(0,4,0)^{\mathrm{T}}.$$

其中 k 为任意常数.　　【解毕】

例 4.2.3　已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 = 0. \end{cases}$$

问:(1) a, b, c 满足何种关系时,线性方程组仅有零解.

(2) a, b, c 满足何种关系时,线性方程组有无穷多组解,并用基础解系表示全部解.

(1999 年考研题)

思路　与前例一样,这也是一个带参数的线性方程组.但它为齐次线性方程组,因此只需对系数矩阵进行变换.经进一步考察,系数矩阵是 3×3 的,即线性方程的个数与未知量的个数相等.因此可以从克拉默法则入手,先算系数行列式 D,若 $D\neq0$,则线性方程组只有零解,若 $D=0$,线性方程组有无穷多个解(即有非零解).本题的系数行列式恰为三阶范德蒙德行列式.

【解】　系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

(1) 当 $a\neq b, b\neq c, c\neq a$ 时, $D\neq0$,线性方程组只有零解.

(2) $D=0$ 时分 4 种情况分别讨论:

1° 当 $a=b\neq c$ 时,有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & c \\ a^2 & a^2 & c^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

线性方程组有无穷多个解.通解为

$$x = k_1(1, -1, 0)^{\mathrm{T}} \quad (k_1 \text{ 为任意常数}).$$

2° 当 $a=c\neq b$ 时,有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a \\ a^2 & b & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

线性方程组有无穷多个解.通解为

$$x = k_2(1, 0, -1)^{\mathrm{T}} \quad (k_2 \text{ 为任意常数}).$$

3° 当 $b=c\neq a$ 时,同解线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

线性方程组有无穷多个解.通解为

$$x = k_3(0, 1, -1)^{\mathrm{T}} \quad (k_3 \text{ 为任意常数}).$$

4°　当 $a=b=c$ 时,同解线性方程组为

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

线性方程组有无穷多个解.通解为

$$x=k_4(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_5(-1,0,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_4,k_5\text{ 为任意常数}).$$

【解毕】

【注】　当系数矩阵是方阵时(即方程的个数与未知量的个数相等),先计算系数行列式 D,从克拉默法则入手.对非齐次线性方程组,当 $D\neq0$ 时,线性方程组有惟一解,$x_j=D_j/D(j=1,\cdots,n)$,或再用高斯消去法,把增广矩阵化为阶梯形求解.而当 $D=0$ 时,则有可能有解,也可能无解.此时再对增广矩阵进行行初等变换(高斯消去法)化成阶梯形后判断求解.

例 4.2.4　设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0.\end{cases}$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

(2004 年考研题)

思路　四元齐次线性方程组要有非零解当且仅当系数矩阵的秩小于 4,可以对系数矩阵施行矩阵的初等行变换求解.注意到这是 4 个未知数 4 个方程的方程组,也可以用克拉默法则,令系数矩阵行列式等于 0,这是第 2 种方法.

【解】　方法 1:

$$\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2a&a&0&0\\-3a&0&a&0\\-4a&0&0&a\end{pmatrix}.$$

当 $a=0$ 时,系数矩阵的秩为 1,同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

通解为

$$x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3\quad(\text{其中 }k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}).$$

当 $a\neq0$ 时,系数矩阵进一步作初等行变换,得

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2a & a & 0 & 0 \\ -3a & 0 & a & 0 \\ -4a & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10+a & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $a\neq -10$ 时,系数矩阵的秩为 4,方程组没有非零解;当 $a=-10$ 时,系数矩阵的秩为 3,方程组有非零解,其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ -4x_1+x_4=0. \end{cases}$$

基础解系为

$$\xi=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},$$

通解为

$$x=k\xi \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数}).$$

方法 2: 由

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} = (10+a)a^3=0,$$

可知当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时,方程组有非零解.

当 $a=0$ 时,方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

基础解系为

$$\xi_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \xi_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \xi_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3 \quad (\text{其中 } k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数}).$$

当 $a=-10$ 时,对系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & -10 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & -10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$$

基础解系为

$$\xi = (1,2,3,4)^{\mathrm{T}},$$

通解为

$$x = k\xi \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数}).$$

【解毕】

例 4.2.5　设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0. \end{cases}$$

其中 $a \neq 0, b \neq 0, n \geq 2$.试讨论 a, b 为何值时,方程组仅有零解、有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出全部解,并用基础解系表示全部解.

(2002 年考研题)

思路　这是 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组,和上一题一样可以用行列式求解,也可以用矩阵的初等行变换求解.

【解】　方法 1:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(1) 当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时,方程组只有零解.

(2) 当 $a = b$ 时,方程组的同解方程组是

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0,$$

基础解系为

$$\xi_1 = (-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_2 = (-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}, \cdots, \quad \xi_{n-1} = (-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

方程组的通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-1}\xi_{n-1} \quad (k_1, k_2, \cdots, k_{n-1} \text{ 为任意常数}).$$

(3) 当 $a=(1-n)b$ 时，对系数矩阵作初等行变换，

$$\begin{bmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & (1-n)b & b \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程组的同解方程组是

$$\begin{cases} x_1 = x_n, \\ x_2 = x_n, \\ \quad\cdots \\ x_{n-1} = x_n. \end{cases}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\xi} = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

通解为

$$x = k\boldsymbol{\xi} \quad (k\text{ 为任意常数}).$$

方法 2:

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

若 $a+(n-1)b=0$,**方程组有无穷多解,以下解法同方法** 1 **的**(3) .

若 $a+(n-1)b\neq 0$,**系数矩阵进一步化为**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}.$$

这时,若 $a\neq b$,**方程组只有零解 .若** $a=b$,**同方法** 1 **的**(2) .　　**【解毕】**

例 4 .2 .6　**已知齐次线性方程组**

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0, \\ \cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0, \end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.**试讨论** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **和** b **满足何种关系时,**

(1) **方程组只有零解;**

(2) **方程组有非零解 .在有非零解时,求此方程组的一个基础解系 .**

(2003 **年考研题**)

思路　**这是** n **个未知数** n **个方程的齐次线性方程组,同前两例一样,有两种解法 .**

【解】　**方法** 1:

$$\begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}.$$

若 $b=0$,**方程组有非零解,此时同解方程组为**

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0.$$

由 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 可知 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零.不妨设 $a_1\neq 0$，基础解系为

$$\xi_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\xi_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\cdots,\xi_{n-1}=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm T}.$$

若 $b\neq 0$,系数矩阵进一步化为

$$\begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_i+b & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

若 $\sum_{i=1}^{n}a_i+b\neq 0$,方程组只有零解.若 $\sum_{i=1}^{n}a_i+b=0$，方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_2,\\ x_1=x_3,\\ \quad\cdots\\ x_1=x_n,\end{cases}$$

基础解系为

$$\xi=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}.$$

方法 2:

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & b & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & b & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)b^{n-1}.$$

当 $\sum_{i=1}^{n}a_i+b\neq 0$,且 $b\neq 0$ 时,方程组只有零解.

当 $b=0$ 或 $\sum_{i=1}^{n} a_i + b = 0$ 时,方程组有非零解,解法同方法 1 .　【解毕】

例 4.2.7　设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda) x_2 + (4+\mu) x_3 + 4x_4 = 1 . \end{cases}$$

已知$(1, -1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$是该方程组的一个解 .试求

(1) 方程组的全部解,并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(2) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解 .

(2004 年考研题)

思路　这是 4 个未知数 3 个方程的非齐次线性方程组,对增广矩阵作初等行变换,先利用条件$(1, -1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$是一个解,找出参数 λ 和 μ 的关系 .

【解】　将$(1, -1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$代入方程组,得

$$1 - \lambda + \mu - 1 = 0 .$$

从而得 $\lambda = \mu$.对增广矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2\lambda - 1 & 2\lambda - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(1) 若 $2\lambda - 1 = 0$,对增广矩阵进一步作初等行变换,得

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

方程组的通解为

$$x = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0 \right)^{\mathrm{T}} + k_1 (1, -3, 1, 0)^{\mathrm{T}} + k_2 \left(-\frac{1}{2}, -1, 0, 1 \right)^{\mathrm{T}} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}) .$$

若 $2\lambda - 1 \neq 0$,对增广矩阵进一步作初等行变换,得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

方程组的通解为

$$x = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)^{\mathrm{T}} + k \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)^{\mathrm{T}} \quad (k \text{ 为任意常数}) .$$

(2) 方法 1: 当 $2\lambda-1=0$ 时, $x_2=x_3$ 即

$$1-3k_1-k_2=k_1,$$

从而

$$k_2=1-4k_1.$$

通解为

$$x=\left(-\frac{1}{2},1,0,0\right)^{\mathrm T}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm T}+(1-4k_1)\left(-\frac{1}{2},-1,0,1\right)^{\mathrm T},$$

即

$$x=(-1,0,0,1)^{\mathrm T}+k_1(3,1,1,-4)^{\mathrm T}\quad(k_1\text{ 为任意常数}).$$

当 $2\lambda-1\neq0$ 时, $x_2=x_3$, 即

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k.$$

解得

$$k=1.$$

方程组的解为

$$\begin{aligned}x&=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm T}+\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm T}\\&=(-1,0,0,1)^{\mathrm T}.\end{aligned}$$

方法 2: 原方程组中加一个方程 $x_2-x_3=0$.

当 $2\lambda-1=0$ 时,增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&4&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

方程组的通解为

$$x=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)^{\mathrm T}+k\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},1\right)^{\mathrm T}.$$

k 为任意常数.

当 $2\lambda-1\neq0$ 时,增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

方程组的解为

$$x=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

【解毕】

例 4.2.8　设线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0.\end{cases}\qquad(\mathrm{II})\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$$

求方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解．

思路　(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解,就是同时满足 4 个方程的解,因此本题即是求 4 个方程组成的四元齐次线性方程组的解．

另一方面,也可从(Ⅰ)的通解中找出适合(Ⅱ)的解,即为它们的公共解．

【解】　方法 1: 设方程组(Ⅰ)的系数矩阵为 A,方程组Ⅱ的系数矩阵为 B,求(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解即求解线性方程组$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=0$．

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$\mathrm{r}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=3$,未知量个数 $n=4$．因此可求得通解为

$$x=k(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}\quad(\text{其中 }k\text{ 为任意常数}),$$

即为方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解．

方法 2: 先把方程组(Ⅰ): $Ax=0$ 的通解求出．

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

已是阶梯形,　$\mathrm{r}(A)=2$, $n=4$,求得(Ⅰ)的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$,其通解为

$$\begin{aligned}x&=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=k_1(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}\\&=(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

然后在方程组(Ⅰ)的通解中找出满足方程组(Ⅱ)的解，即找出 k_1，k_2 取何值时，x 满足方程组(Ⅱ)，因此把(Ⅰ)的通解 x 代入方程组(Ⅱ)：$Bx=0$，得

$$\begin{cases} -k_2-k_2+k_1=0, \\ k_2-k_1+k_2=0. \end{cases}$$

从而得 $k_1=2k_2$，即当 $k_1=2k_2$ 时，方程组(Ⅰ)的通解 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 也满足方程组(Ⅱ)，故 $k_1\xi_1+k_2\xi_2=2k_2\xi_1+k_2\xi_2=k_2(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$ (k_2 为任意常数)为方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解.

方法 3：分别求出方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的通解，再找出它们的公共解.即找出既可由(Ⅰ)的基础解系线性表出又可由(Ⅱ)的基础解系线性表出的解.

方法 2 中已求得(Ⅰ)：$Ax=0$ 的基础解系 $\xi_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$.方程组(Ⅱ)的系数矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 已是阶梯形，$\mathrm{r}(B)=2$，$n=3$，求得基础解系为

$$\eta_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \eta_2=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $k_1\xi_1+k_2\xi_2=l_1\eta_1+l_2\eta_2$，即求解线性方程组 $l_1\eta_1+l_2\eta_2-k_1\xi_1-k_2\xi_2=0$.代入 η_1，η_2，ξ_1，ξ_2 之值，得线性方程组

$$\begin{cases} -l_2+k_2=0, \\ l_1-l_2-k_2=0, \\ l_1-k_1=0, \\ l_2-k_2=0. \end{cases}$$

即 $Cy=0$，其中

$$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得其通解为 $y=t(2,1,2,1)^{\mathrm{T}}$ (其中 t 为任意常数).

取 $l_1=2t$，$l_2=t$ 代入 $l_1\eta_1+l_2\eta_2$ 得向量 $t(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$.(或 $k_1=2t$，$k_2=t$ 代入 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$，得相同结果.) 【解毕】

例 4.2.9 已知下列非齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3=3. \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5, \\ nx_2-x_3-2x_4=-11, \\ x_3-2x_4=-t+1. \end{cases}$$

(1) 求解方程组(Ⅰ)，用其导出组的基础解系表示通解.

(2) 当方程组(Ⅱ)中的参数 m, n, t 为何值时,方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)同解.

(1998 年考研题)

【解】 (1) 设方程组(Ⅰ)的系数矩阵为 A,常数列为 b,则(Ⅰ)为 $Ax=b$,对增广矩阵进行行初等变换化为阶梯形,有

$$(A\ b)=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A\ b)=3<4$.所以线性方程组有无穷多个解,通解为

$$x=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数}).$$

(2) 将通解 $x=(-2+k,-4+k,-5+2k,k)^{\mathrm{T}}$ 代入(Ⅱ)中的第一个方程,得

$$(-2+k)+m(-4+k)-(-5+2k)-k=-5.$$

由于上式对任意常数 k 均成立,取 $k=0$,得到 $m=2$.

同样,把通解 x 代入第二个方程,并取 $k=0$,得 $n=4$;把通解 x 代入第三个方程,并取 $k=0$,得 $t=6$.即方程组(Ⅱ)的参数 $m=2, n=4, t=6$ 时,方程组(Ⅰ)的全部解是方程组(Ⅱ)的解.

此时,方程组(Ⅱ)化为

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=-5,\\4x_2-x_3-2x_4=-11,\\x_3-2x_4=-5.\end{cases}$$

即 $Bx=\beta$,其中

$$(B\ \beta)=\begin{pmatrix}1&2&-1&-1&-5\\0&4&-1&-2&-11\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{pmatrix}.$$

于是方程组(Ⅱ)的通解为

$$x=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数}).$$

显然,方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)的解完全相同,即方程组(Ⅰ),(Ⅱ)同解. 【解毕】

例 4.2.10 设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

且已知另一四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \quad \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T.$$

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

(2002 年考研题)

思路 给定一个齐次线性方程组和另一个齐次线性方程组的基础解系,要求这个方程组的非零公共解,有两种方法,其一是将方程组的通解代入给定方程,另一种方法是求出给定方程组的通解,令两个通解相等.

【解】 (1) 对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(Ⅰ)的基础解系为

$$\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \quad \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T.$$

(2) 方法 1: 由题设,方程组(Ⅱ)的通解为

$$\begin{aligned} k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 &= k_1(2, -1, a+2, 1)^T + k_2(-1, 2, 4, a+8)^T, \\ &= (2k_1 - k_2, -k_1 + 2k_2, (a+2)k_1 + 4k_2, k_1 + (a+8)k_2)^T. \end{aligned}$$

k_1, k_2 为任意常数,代入方程组(Ⅰ),有

$$\begin{cases} 2(2k_1 - k_2) + 3(-k_1 + 2k_2) - ((a+2)k_1 + 4k_2) = 0, \\ (2k_1 - k_2) + 2(-k_1 + 2k_2) + ((a+2)k_1 + 4k_2) - (k_1 + (a+8)k_2) = 0. \end{cases}$$

化简,得

$$\begin{cases} (a+1)k_1 = 0, \\ (a+1)k_1 - (a+1)k_2 = 0. \end{cases}$$

方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)有非零公共解只需上述方程有非零解,即只需

$$\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a+1)^2 = 0,$$

即 $a = -1$ 时,方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)有非零公共解,此时公共解为

$$x = c_1(2, -1, 1, 1)^T + c_2(-1, 2, 4, 7)^T,$$

c_1, c_2 为不同时为零的任意常数.

方法 2: 方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解满足

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = k_3\beta_1 + k_4\beta_2,$$

由此得

$$\begin{cases} k_1 - 2k_3 + k_4 = 0, \\ k_2 + k_3 - 2k_4 = 0, \\ 2k_1 + 3k_2 - (a+2)k_3 - 4k_4 = 0, \\ 3k_1 + 5k_2 - k_3 - (a+8)k_4 = 0. \end{cases}$$

对系数矩阵作初等行变换,得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -(a+2) & -4 \\ 3 & 5 & -1 & -(a+8) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -a+2 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & -a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

当 $a=-1$ 时,方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)有非零公共解:

$$x = k_1(2, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}} + k_2(-1, 2, 4, 7)^{\mathrm{T}},$$

k_1, k_2 为不同时为零的任意常数. 【解毕】

4.3 综合例题

如 4.0 节中所言,线性方程组的理论和求解不仅涉及到方程组本身,而且与向量组的线性相关性与线性无关性、矩阵的秩等线性代数的其他内容有密切的联系.因此这一章中,综合应用有关知识,把这些知识点有机地结合起来的例题也不少,我们可由下面几个综合例题体会这些.

综例 4.3.1　已知 $A^2 = I$,且 $A \neq I$,证明 $A+I$ 不可逆.

思路　本题虽然是一个矩阵可逆与否的问题,实际上要用齐次线性方程组有非零解的充分必要条件为系数行列式等于 0 来判断.这里要认识和学会一个常用的解题思路和方法.

设 A 为 $m \times s$ 矩阵,B 为 $s \times n$ 矩阵.若 $AB=0$,此时设 $B=(\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)$,则 $AB=A(\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n)=0$,即 $A\beta_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$,$B$ 的各列均为 $Ax=0$ 的解向量.若 $B\neq 0$,即有某 $\beta_j \neq 0$,使 $A\beta_j=0$,就得到齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的结论,继而得到 $\mathrm{r}(A)<s$.若 $m=s$,则得到 $|A|=0$ 的结论.

本题已知 $A^2=I$,即 $A^2-I=0$,$(A+I)(A-I)=0$,这样就变成了上面讨论的 $AB=0$ 的形式.

【证明】　由已知 $A^2=I$,故 $(A+I)(A-I)=0$.

因为 $A\neq I$,所以 $A-I\neq 0$,而 $A-I$ 的各列为 $(A+I)x=0$ 的解向量,所以 $(A+I)x=0$ 有非零解,所以 $|A+I|=0$,即 $A+I$ 不可逆. 【证毕】

综例 4.3.2 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,它的 m 个行向量是某个 n 元齐次线性方程组的一组基础解系,B 是一个 m 阶可逆矩阵.试证明:BA 的行向量组也构成该齐次线性方程组的一组基础解系.

思路 本题是证明某向量组构成齐次线性方程组的基础解系,即要证明 3 条:(1)该向量组满足齐次线性方程组;(2)它们线性无关;(3)向量组所含向量的个数等于线性方程组未知量的个数减去系数矩阵的秩.由题目的已知条件,这 3 条都能直接或间接推导得到.

【证明】 方法 1:因为 A 的 m 个行向量(n 维向量)为线性方程组的基础解系,所以 A 的行向量组线性无关,即 $\mathrm{r}(A)=m$.

又设该线性方程组为 $Cx=0$,则 $\mathrm{r}(C)=n-m$.

因为 B 可逆,所以 $\mathrm{r}(BA)=m$.又 BA 仍为 $m\times n$ 矩阵,所以 BA 的行向量组线性无关.

设
$$BA=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \cdots\\ \beta_m\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\ b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\ \cdots&\cdots&&\cdots\\ b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mm}\end{pmatrix},$$

则
$$\beta_i=\sum_{k=1}^{m}b_{ik}\alpha_k\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

即 BA 的各行均为 A 的行向量组的线性组合,而 A 的行向量组为 $Cx=0$ 的基础解系.所以 BA 的行向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也满足 $Cx=0$.又已证 $\mathrm{r}(BA)=m=n-\mathrm{r}(C)$,故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 构成 $Cx=0$ 的基础解系.

方法 2:用矩阵的形式表示.

设
$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},$$

因为 A 的行向量均为 $Cx=0$ 的解,且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 构成 $Cx=0$ 的基础解系,所以 $C\alpha_1^{\mathrm{T}}=0$,$C\alpha_2^{\mathrm{T}}=0,\cdots,C\alpha_m^{\mathrm{T}}=0$,即

$$C(\alpha_1^{\mathrm{T}}\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \alpha_m^{\mathrm{T}})=0\quad 或\quad CA^{\mathrm{T}}=0,$$

其中 $\mathrm{r}(A)=m$,所以 $\mathrm{r}(C)=n-m$.上式两边转置,得 $AC^{\mathrm{T}}=0$.两边同时左乘 B,得 $BAC^{\mathrm{T}}=0$.再转置得 $C(BA)^{\mathrm{T}}=0$,即 BA 的行向量组均为 $Cx=0$ 的解向量.又 $\mathrm{r}(BA)=m$,而 $n-\mathrm{r}(C)=n-(n-m)=m$,所以 BA 的行向量组线性无关,且所含向量个数 $m=n-\mathrm{r}(C)$.故 BA 的行向量组构成 $Cx=0$ 的基础解系. 【证毕】

综例 4.3.3　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，又 $\mathrm{r}(A)=m$，齐次线性方程组 $Ax=0$ 有一组基础解系

$$b_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})^{\mathrm{T}}\quad(i=1,2,\cdots,n-m).$$

求齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j=0\quad(i=1,2,\cdots,n-m)$ 的一组基础解系.

思路　本题与综例 4.3.2 类似，也是求某个齐次线性方程组的基础解系，因此求得的解应满足上面所说的 3 条.

设线性方程组 $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j=0\quad(i=1,2,\cdots,n-m)$ 的系数矩阵为 B，则

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{n-m,1} & b_{n-m,2} & \cdots & b_{n-m,n}\end{pmatrix},$$

线性方程组为 $By=0$. 可以看出 B 的行向量组由齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系构成. 由 $Ab_i=0\ (i=1,2,\cdots,n-m)$ 得到 $AB^{\mathrm{T}}=0$，因而 $BA^{\mathrm{T}}=0$，从而又得到矩阵 A 的各行 (A^{T} 的各列) 为 $By=0$ 的解向量. 再进一步讨论线性无关解及系数矩阵 B 的秩等即可得到证明.

【解】　齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j=0\quad(i=1,2,\cdots,n-m)$ 可写成 $By=0$ 的形式，其中系数矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{T}}\\ b_2^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ b_{n-m}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{n-m,1} & b_{n-m,2} & \cdots & b_{n-m,n}\end{pmatrix}.$$

又 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-m}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，所以线性无关，且有 $\mathrm{r}(B)=n-m$.

已知 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-m}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，所以

$$Ab_1=0,\quad Ab_2=0,\cdots,Ab_{n-m}=0.$$

从而得到 $A(b_1\ b_2\cdots\ b_{n-m})=0$，即 $AB^{\mathrm{T}}=0$. 两边转置得 $BA^{\mathrm{T}}=0$，即 A^{T} 的各列 (即 A 的各行) 为 $By=0$ 的解向量. 又 $\mathrm{r}(A)=m$，即 A 的行向量组线性无关. 而 $\mathrm{r}(B)=n-m$，B 为 $(n-m)\times n$ 矩阵，故 $By=0$ 的基础解系应包括 $n-\mathrm{r}(B)=n-(n-m)=m$ 个线性无关解向量. 所以 A 的行向量组为所求的基础解系.　【解毕】

综例 4.3.4　证明：若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = b_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = b_m. \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

有解,则线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0, \\ \cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0. \end{cases} \tag{Ⅱ}$$

的任一解$(x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$必满足线性方程组

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 0. \tag{Ⅲ}$$

思路　本题是讨论三个线性方程组的解的关系,而这三个线性方程组的系数及常数列又有密切的关系.因此,可以由线性方程组的不同形式出发,得到不同的证法.

【证明】　方法1: 利用三个线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的关系及矩阵的秩与解的关系证明.

设方程组(Ⅰ)为$Ay = b$,其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

则方程组(Ⅱ)为$A^{\mathrm{T}}x = 0$,而方程组(Ⅲ)为$b^{\mathrm{T}}x = 0$.

由已知,方程组(Ⅰ)有解,即$\mathrm{r}(A\ b) = \mathrm{r}(A)$.此时把方程组(Ⅱ)与(Ⅲ)联立得

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}x = 0, \\ b^{\mathrm{T}}x = 0. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} x = 0. \tag{Ⅳ}$$

由$\mathrm{r}(A\ b) = \mathrm{r}(A)$得$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \mathrm{r}(A^{\mathrm{T}})$.即$b^{\mathrm{T}}$可以被$A^{\mathrm{T}}$的各行线性表出.说明线性方程组(Ⅳ)的最后一个方程$b^{\mathrm{T}}x = 0$是多余方程,故方程组(Ⅲ)　$A^{\mathrm{T}}x = 0$的解都是$b^{\mathrm{T}}x = 0$的解.

方法2: 利用解的定义及二重和号的性质.将方程组(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)都用一重和式表达,分别有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{Ⅰ}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{Ⅱ}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i x_i = 0 . \tag{Ⅲ}$$

由已知(Ⅰ)有解,故存在 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 使(Ⅰ)成立,将(Ⅰ)代入(Ⅲ),并利用双重和号有交换次序的性质得

$$\sum_{i=1}^{m} b_i x_i = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right] x_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j x_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i\right] y_j .$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是(Ⅱ)的任一解时,则有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = 0$ **.代入上式可化为**

$$\sum_{i=1}^{m} b_i x_i = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i\right] y_j = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot y_j = 0,$$

即证明了当 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是(Ⅱ)的任一解时,也能使得(Ⅲ)成立,即为(Ⅲ)的解 .

方法 3: 用线性方程组的向量表达式来证明 .

设

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

则方程组(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)分别有下列向量表达形式:

$$y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n = b, \tag{Ⅰ}$$

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \cdots + a_{mj}x_m = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_j^{\mathrm{T}} x = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n), \tag{Ⅱ}$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = b^{\mathrm{T}} x = 0 . \tag{Ⅲ}$$

把方程组(Ⅰ)的表达式两边转置得

$$b^{\mathrm{T}} = (y_1\alpha_1)^{\mathrm{T}} + (y_2\alpha_2)^{\mathrm{T}} + \cdots + (y_n\alpha_n)^{\mathrm{T}}$$

$$= y_1\alpha_1^{\mathrm{T}} + y_2\alpha_2^{\mathrm{T}} + \cdots + y_n\alpha_n^{\mathrm{T}},$$

代入方程组(Ⅲ),得

$$b^{\mathrm{T}} x = (y_1\alpha_1^{\mathrm{T}} + y_2\alpha_2^{\mathrm{T}} + \cdots + y_n\alpha_n^{\mathrm{T}})x$$

$$= y_1\alpha_1^T x + y_2\alpha_2^T x + \cdots + y_n\alpha_n^T x.$$

当 x 为方程组 $\alpha_j^T x = 0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的解时,代入上式得到 $b^T x = 0$,即满足方程组(Ⅱ)的任一解 x 也满足方程组(Ⅲ).

方法 4:利用矩阵运算来证.

如方法 1 中所设,方程组(Ⅰ)为 $Ay = b$,有解 y;方程组(Ⅱ)为 $A^T x = 0$,有解 x;方程组(Ⅲ)为 $b^T x = 0$.

由(Ⅰ)两边转置得 $y^T A^T = b^T$,再两边右乘 x,得

$$b^T x = y^T A^T x = y^T(A^T x) \xRightarrow{\text{由(Ⅱ)}} 0.$$ 【证毕】

【注】 方法 1 和方法 4 利用线性方程组的矩阵表达形式及矩阵的运算和秩的关系来证明,更为简洁明了,你认为如何?

方法 4 中采用的矩阵方程两边同乘矩阵的方法,在解线性方程组中常用,即如果 $Ax = 0$,两边左乘 B,得 $BAx = B0 = 0$,从而得到结论:满足 $Ax = 0$ 的解都是 $BAx = 0$ 的解.

综例 4.3.5 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系,向量 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的解.试证明 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \cdots, \beta + \alpha_t$ 线性无关.

(1996 年考研题)

思路 本题虽然是一个向量组线性无关的问题,但涉及到齐次线性方程组的基础解系及解的概念.显然 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是线性无关的,且 $A\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, t)$, $A\beta \neq 0$.从向量组线性无关的定义出发,作 $k\beta + k_1(\beta + \alpha_1) + \cdots + k_t(\beta + \alpha_t) = 0$,欲证 $k, k_1, \cdots, k_t$ 全为 0.显然要对上式作用矩阵 A,与已知条件中线性方程组的解联系起来.

【证明】 设有一组数 $k, k_1, \cdots, k_t$,使得

$$k\beta + \sum_{i=1}^{t} k_i(\beta + \alpha_i) = 0.$$

整理得

$$\left(k + \sum_{i=1}^{t} k_i\right)\beta = \sum_{i=1}^{t}(-k_i)\alpha_i. \qquad (1)$$

对上式两边左乘矩阵 A,有

$$\left(k + \sum_{i=1}^{t} k_i\right)A\beta = \sum_{i=1}^{t}(-k_i)A\alpha_i = 0.$$

因为 $A\beta \neq 0$,所以

$$k + \sum_{i=1}^{t} k_i = 0. \qquad (2)$$

将(2)式代入(1)式,得

$$\sum_{i=1}^{t}(-k_i)\alpha_i = 0.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系,故它们线性无关,所以 $k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 0$.从而

由(2)式得 $k=0$.因此,$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$线性无关.　【证毕】

综例 4.3.6　设 A 是 $m\times n$ 矩阵,b 是 m 维列向量,求证:线性方程组 $A^{\mathrm T}Ax=A^{\mathrm T}b$ 必有解.

思路　本题欲证 $A^{\mathrm T}Ax=A^{\mathrm T}b$ 必有解,只需证明 $\mathrm r(A^{\mathrm T}A)=\mathrm r(A^{\mathrm T}A\quad A^{\mathrm T}b)$,即线性方程组的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩.考察线性方程组的常数列 $A^{\mathrm T}b$,它为 $A^{\mathrm T}$ 的列向量组的线性组合,而系数矩阵 $A^{\mathrm T}A$ 的各列也为 $A^{\mathrm T}$ 列向量组的线性组合.这样,我们就得到方程组增广矩阵的列向量组为 $A^{\mathrm T}$ 列向量组的线性组合.

另一方面,从矩阵运算后秩的变化关系我们又可推得 $\mathrm r(A^{\mathrm T}A)=\mathrm r(A)=\mathrm r(A^{\mathrm T})$,这样,我们就得到 $A^{\mathrm T}A$ 的列向量组与 $A^{\mathrm T}$ 的列向量组可以互相线性表出,从而得到 $A^{\mathrm T}b$ 也可被 $A^{\mathrm T}A$ 的列向量组线性表出,于是证明了 $\mathrm r(A^{\mathrm T}A\quad A^{\mathrm T}b)=\mathrm r(A^{\mathrm T}A)$.

【证明】　先证 $\mathrm r(A^{\mathrm T}A)=\mathrm r(A)$.

设 $Ax=0$,则 $A^{\mathrm T}Ax=0$.从而 $X_1=\{x\mid Ax=0\}\quad X_2=\{x\mid A^{\mathrm T}Ax=0\}$.

又 $A^{\mathrm T}Ax=0$,两边左乘 $x^{\mathrm T}$,得 $x^{\mathrm T}A^{\mathrm T}Ax=0$,即$(Ax)^{\mathrm T}(Ax)=0$.设 $Ax=(t_1,t_2,\cdots,t_n)^{\mathrm T}$,则

$$(Ax)^{\mathrm T}(Ax)=t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2=0\quad t_1=t_2=\cdots=t_n=0.$$

所以 $Ax=0$,即 $X_2\quad X_1$.因此 $Ax=0$ 与 $A^{\mathrm T}Ax=0$ 同解,故 $\mathrm r(A^{\mathrm T}A)=\mathrm r(A)=\mathrm r(A^{\mathrm T})$.

再证 $\mathrm r(A^{\mathrm T}A\quad A^{\mathrm T}b)=\mathrm r(A^{\mathrm T}A)$.

令方程组 $A^{\mathrm T}Ax=A^{\mathrm T}b$ 的常数列 $A^{\mathrm T}b=\beta$.设

$$A^{\mathrm T}=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m),\quad b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm T},$$

则
$$\begin{aligned}\beta&=A^{\mathrm T}b\\&=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_m\alpha_m,\end{aligned}$$

即β为 $A^{\mathrm T}$ 的各列(列向量组)的线性组合.

又设 $A^{\mathrm T}A=(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n)$,$A=(a_{ij})_{m\times n}$,则

$$A^{\mathrm T}A=(\beta_1\quad\beta_2\quad\cdots\quad\beta_n)=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

故得 $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ji}\alpha_j\quad(i=1,2,\cdots,n)$,即系数矩阵 $A^{\mathrm T}A$ 的列向量组也为 $A^{\mathrm T}$ 的列向量组的线性组合.

这样,就得到线性方程组的增广矩阵$(A^{\mathrm T}A \quad A^{\mathrm T}b)$的列向量组$(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n \ \beta)$均可被 $A^{\mathrm T}$ 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出.

另一方面由 $\mathrm r(A^{\mathrm T}A) = \mathrm r(A^{\mathrm T})$和 $A^{\mathrm T}A$ 的列向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可被 $A^{\mathrm T}$ 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出.我们得到$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可以互相线性表出的结论,从而推出$\beta = A^{\mathrm T}b$ 可被 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表出,即 $\mathrm r(A^{\mathrm T}A \quad A^{\mathrm T}b) = \mathrm r(A^{\mathrm T}A)$.所以 $A^{\mathrm T}Ax = A^{\mathrm T}b$ 必有解. 【证毕】

【注】 本题的结论在计算方法课中常常用到.

综例 4.3.7 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $p\times n$ 矩阵,x 是 n 维向量.若 $\mathrm r(A) + \mathrm r(B) < n$,证明齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零的公共解.

(1997 年清华大学考题)

思路 本题是求两个齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的公共解,但没有给出具体的线性方程组的系数.如例 4.2.8 所述,求两个线性方程组的公共解,也就是把两个线性方程组联立起来求解.得到的解当然满足每一个方程,即公共解.

【证】 求 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的公共解,即求$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 的解.

因为由已知可得 $\mathrm r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \mathrm r(A) + \mathrm r(B) < n$,即齐次线性方程组的系数矩阵的秩小于未知量的个数,所以$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 有非零解,即 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解. 【证毕】

综例 4.3.8 已知 $x_1 = (0,1,0)^{\mathrm T}, x_2 = (-3,2,2)^{\mathrm T}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$$

的两个解,求此方程组的一般解.

(2000 年全国 MBA 入学考试题)

思路 本题给出了线性方程组,但其中有一个方程是不定方程,要求此方程组的一般解.从已知条件线性方程组有两个不同的解 x_1, x_2 可判断此线性方程组有无穷多个解,再对系数矩阵的秩进行分析可得出结果.

【解】 设线性方程组为 $Ax = b$,系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

由已知，$Ax=b$ 有两个解 $x_1=(0,1,0)^T$，$x_2=(-3,2,2)^T$．显然，$x_1\neq x_2$，故线性方程组 $Ax=b$ 有解，且解不惟一，即有无穷多个解．所以 $r(A)=r(A\ b)<n=3$．

又 A 有二阶子式 $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4\neq0$，所以 $r(A)\geq2$，于是得 $r(A)=2$．故齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中包含一个非零解向量．而 $\xi=x_1-x_2=(3,-1,-2)^T\neq0$ 满足对应的齐次线性方程组 $Ax=0$，所以 ξ 为 $Ax=0$ 的基础解系．从而得 $Ax=b$ 的一般解为

$$x=k\xi+x_1=k(3,-1,-2)^T+(0,1,0)^T,$$

其中 k 为任意常数．【解毕】

【注】　本题所给条件中，方程组中第三个方程 $ax_1+bx_2+cx_3=d$ 不惟一，它应为前两个方程的线性组合，才能保证有解，且 $r(A)=2$．

综例 4.3.9　已知四元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=b_3\end{cases}$$

的 5 个解，它们是 $x_1=(1,1,1,0)^T$，$x_2=(2,2,1,0)^T$，$x_3=(0,0,1,0)^T$，$x_4=(3,1,2,0)^T$，$x_5=(0,1,1,1)^T$．试求此方程组的一般解，并写出该方程组．

(2001 年清华大学考题)

思路　本题与综例 4.3.8 类似．由于线性方程组未给出确定的系数与常数列，所以求解线性方程组只能从其他已知条件入手，给出了线性方程组的 5 个解 $x_1,x_2,\cdots,x_5$，说明该方程组有无穷多个解，又线性方程组的系数矩阵 A 为 3×4 矩阵，所以 $r(A)\leq3$．而 $n=4$，则 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量的个数 s 满足 $1\leq s\leq3$．我们从已知的非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的已知解 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 中由 $x_i-x_j\ (5\geq i>j\geq1)$ 中找出对应的齐次线性方程组的解，并把其中 s 个线性无关的解向量找出，从而得到所需的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系．进而可得线性方程组 $Ax=b$ 的通解．

由 $r(A)=n-s$ 可确定 $r(A)$，从而可确定系数矩阵 A 的构造，再把所求得的齐次线性方程组的基础解系分别代入 $Ax=0$，可定出系数矩阵 A 中的元素．进而把非齐次线性方程组的解向量代入线性方程组 $Ax=b$，又可确定 b．

【解】　由已知条件可知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解．因 A 是 3×4 矩阵，故 $r(A)\leq3$．而未知量的个数 $n=4$，故 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量的个数 s 满足 $1\leq s\leq3$．由 $Ax=b$ 的已知解 $x_1,x_2,\cdots,x_5$，计算 $x_i-x_j\ (1\leq j<i\leq5)$，它们均为 $Ax=0$ 的解．

$$x_1 - x_2 = (-1,-1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad x_1 - x_3 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}},$$
$$x_1 - x_4 = (-2,0,-1,0)^{\mathrm{T}},\quad x_1 - x_5 = (1,0,0,-1)^{\mathrm{T}},$$
$$x_2 - x_3 = (2,2,0,0)^{\mathrm{T}},\quad x_2 - x_4 = (-1,1,-1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$x_2 - x_5 = (2,1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad x_3 - x_4 = (-3,-1,-1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$x_3 - x_5 = (0,-1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad x_4 - x_5 = (3,0,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

其中$\xi_1 = (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2 = (2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3 = (1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$线性无关,所以 $s=3$.则所求该线性方程组导出组 $Ax=0$ 的基础解系为ξ_1,ξ_2,ξ_3.线性方程组 $Ax=b$ 的一般解为

$$x = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}} + k_1(1,1,0,0)^{\mathrm{T}} + k_2(2,0,1,0)^{\mathrm{T}} + k_3(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

由此可得出,线性方程组的系数矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A) = n-s = 4-3 = 1$,因此线性方程组 $Ax=b$ 中独立方程只有一个,不妨设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \\ la_{11} & la_{12} & la_{13} & la_{14} \end{bmatrix}.$$

由 $Ax=0$ 得到独立方程

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0. \tag{*}$$

把上面求得的ξ_1,ξ_2,ξ_3代入得

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = 0, \\ 2a_{11} + a_{13} = 0, \\ a_{11} - a_{14} = 0. \end{cases}$$

从而得

$$\begin{cases} a_{12} = -a_{11}, \\ a_{13} = -2a_{11}, \\ a_{14} = a_{11}. \end{cases}$$

代入(*)式得

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0.$$

再将任一个 $Ax=b$ 的解代入

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b,$$

得

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2.$$

故所求线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ k(x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4) = -2k, \\ l(x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4) = -2l. \end{cases}$$

【解毕】

【注】　(1) 本题所求得的线性方程组的一般解不惟一. 因为在求线性方程组的导出组的基础解系时只要求出导出组的任意三个线性无关的解向量就行. 同时,非齐次线性方程组的特解也不惟一,它可为 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$中任意一个. 但不同的一般解的形式所代表的解集合应是相等的. 实际上,本题所给的条件有些是多余的.

(2) 求得的线性方程组也不惟一,只有求得的独立方程 $x_1-x_2-2x_3+x_4=-2$ 应是惟一的. 其余的两个方程为这个方程的任意线性组合即可.

综例 4.3.10　设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$,若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解,则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系______.

(A) 不存在;

(B) 仅含一个非零解向量;

(C) 含有两个线性无关的解向量;

(D) 含有三个线性无关的解向量.

(2004 年考研题)

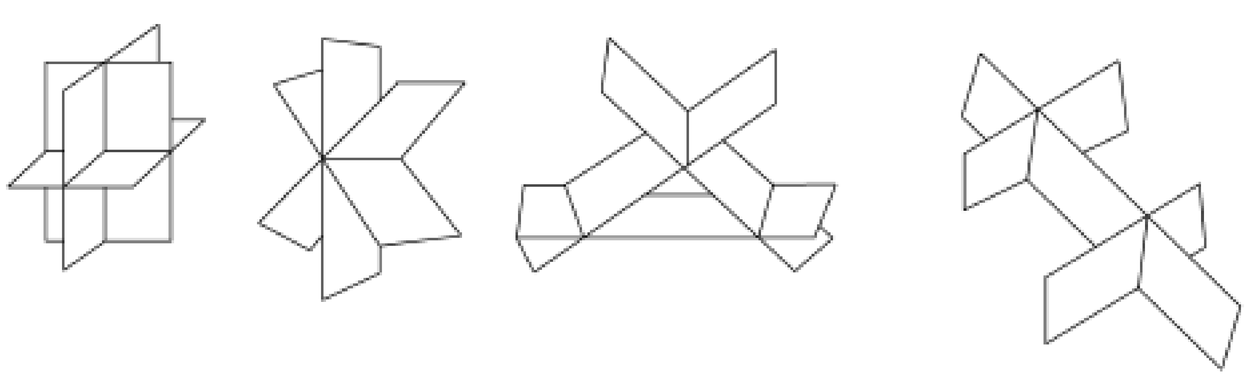
思路　由题设 $Ax=b$ 有互不相等的解知,其导出组 $Ax=0$ 必有非零解,排除选项(A). 至于基础解系有多少个解,由 A 的秩决定,A 的秩由 A 的伴随矩阵的秩决定.

【解】　由题设 $A^*\neq 0$,所以 $\mathrm{r}(A^*)>0$,又由题设 $Ax=b$ 有 4 个互不相等的解,所以其导出组有非零解,于是 $\mathrm{r}(A)<n$,那么 $\mathrm{r}(A^*)\leq 1$. 所以 $\mathrm{r}(A^*)$必为 1,$\mathrm{r}(A)=n-1$,所以 $Ax=0$ 的基础解系只有一个解向量. 应选(B).　【解毕】

【注】　这里用到伴随矩阵的秩与矩阵的秩的关系:

$$\mathrm{r}(A^*)=\begin{cases} n, & \mathrm{r}(A)=n,\\ 1, & \mathrm{r}(A)=n-1,\\ 0, & \mathrm{r}(A)\leq n-2.\end{cases}$$

综例 4.3.11　设有三个不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i$, $i=1,2,3$,它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2,则这三个平面可能的位置关系为



(a)　(b)　(c)　(d)

(2002 年考研题)

思路 线性方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩相等,说明线性方程组有解,三个平面相交,又知系数矩阵的秩为 2,这是一个三元的线性方程组,有无穷多解,导出组的基础解系只有一个解向量,或者说明空间是一维的,三个平面交于一条直线.

【解】 应选(B). 【解毕】

综例 4.3.12 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:\ ax+2by+3c=0,$$
$$l_2:\ bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3:\ cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

(2003 年考研题)

思路 这里考虑的方程组可以是两个未知量 3 个方程的非齐次线性方程组,也可以是三个未知量 3 个方程的齐次线性方程组。前者有惟一解,而后者有非零解。

【证】 方法 1:考虑非齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b. \end{cases} \tag{1}$$

必要性:设三直线交于一点,则线性方程组(1)有惟一解,系数矩阵与增广矩阵的秩都等于 2,所以

$$\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} = 6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=3(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)=0,$$

由 l_1, l_2, l_3 是三条不同的直线,故

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0,$$

于是

$$a+b+c=0.$$

充分性:由 $a+b+c=0$ 知,增广矩阵的秩小于 3.又

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2)$$

$$=2(-a(a+b)-b^2)$$

$$=-2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]\neq 0.$$

所以系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于 2,方程组(1)有惟一解,即三直线交于一点.

方法 2:考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by+3cz=0, \\ bx+2cy+3az=0, \\ cx+2ay+3bz=0. \end{cases} \tag{2}$$

必要性: 设三直线交于一点(x_0, y_0),则$(x_0, y_0, 1)^T$是齐次线性方程组(2)的解.即方程组(2)有非零解,系数行列式等于 0,计算同方法 1 必要性,得 $a+b+c=0$.

充分性: 将方程组(1)的三式相加,由 $a+b+c=0$,得(1)的同解方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \tag{3}$$

由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2)$$
$$=-(2a^2+2ab+2b^2)$$
$$=-(a^2+b^2+(a+b)^2)\neq 0.$$

方程组(3)有惟一解,即方程组(1)有惟一解,三直线交于一点。　【证毕】

4.4 练　习　题

1 . 要使$\xi_1=(1,0,2)^T$,$\xi_2=(0,1,-1)^T$都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解,则矩阵 A 为

(A) $(-2\ \ 1\ \ 1)$;　　(B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 . 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,下列命题正确的是

(A) 若 $m<n$,则 $Ax=b$ 有无穷多解;

(B) 若 $Ax=0$ 只有零解,则 $Ax=b$ 有惟一解;

(C) 若 A 有 n 阶子式不为零,则 $Ax=0$ 只有零解;

(D) $Ax=b$ 有惟一解的充分必要条件是 $\mathrm{r}(A)=n$.

3 . 已知 A 是 4×5 矩阵,ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 的一个基础解系,则

(A) $k(\xi_1+\xi_2)$(k 是任意常数)是 $Ax=0$ 的通解;

(B) $k\xi_1+3\xi_2$(k 是任意常数)是 $Ax=0$ 的通解;

(C) $\xi_1-\xi_2$,$\xi_2-\xi_1$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系;

(D) $\xi_1-\xi_2$,$\xi_1+\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系 .

4.求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

的一个基础解系.

5.求齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

6.k取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ (k+2)x_1 - x_2 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + kx_4 = 0. \end{cases}$$

有非零解?

7.a, b取何值时,方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 0. \end{cases}$$

有非零解?在有非零解时,求方程组的通解.

8.求非齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

9.求非齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6, \\ -2x_1 + 4x_2 + 14x_3 - 7x_4 = 20. \end{cases}$$

10.求非齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 4. \end{cases}$$

11．**设方程组**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = \lambda. \end{cases}$$

λ取何值时,方程组有解、无解?并在有解时,求出方程组的通解.

12．**设方程组**

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda. \end{cases}$$

λ取何值时,方程组有解、无解?并在有解时,求出方程组的通解.

13．**设方程组**

$$\begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2qx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

p,q取何值时,方程组有解、无解?并在有解时,求出方程组的通解.

14．**设方程组**

$$\begin{cases} x_1 + px_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + qx_3 = 4. \end{cases}$$

p,q取何值时,方程组有解、无解?并在有解时,求出方程组的通解.

15．**设方程组**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = p, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + qx_4 = -6. \end{cases}$$

p,q取何值时,方程组有解、无解?并在有解时,求出方程组的通解.

16．**设有齐次线性方程组**

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\quad (n\geq 2)$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解. (2004 年考研题)

17.已知线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ 3x_1+5x_2+x_3=7;\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\begin{cases}2x_1+3x_2+ax_3=4,\\ 2x_1+4x_2+(a-1)x_3=b+4.\end{cases}$$

问 a,b 取何值时,方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)有相同的解,并求此相同的解.

18.设线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3-3x_4=1,\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5,\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5,\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\begin{cases}-3x_1+2x_2+x_3-3x_4=1,\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5,\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5,\end{cases}$$

已知方程组(Ⅰ)有通解 $x=(1,-3,1,1)^{\mathrm{T}}+k(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, k 为任意常数,求方程组(Ⅱ)的一个特解.

19.设齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}$$

的系数行列式 $|A|=0$, A 中 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$.求证: $(A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in})$ 是该方程组的一个基础解系.

20.设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是对应齐次线性方程组的基础解系,令 $\xi_1=\eta_0$, $\xi_2=\eta_0+\eta_1$, $\cdots$, $\xi_{t+1}=\eta_0+\eta_t$,证明非齐次线性方程组的任意一个解都可表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+x_{t+1}\xi_{t+1},$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{t+1}=1$.

第 5 章　矩阵的特征值和特征向量

5.0　引　　言

矩阵的特征值和特征向量在线性代数中是非常重要的一部分,它不仅在理论上有着重要的意义,在实际问题中也有重要的应用 .本章主要讨论三个问题 .第一个问题是关于矩阵的特征值与特征向量的概念、性质及计算,第二个问题是关于矩阵的相似对角化,主要讨论矩阵可对角化的条件,有关矩阵相似对角化的计算及应用 .第三个问题是讨论一类特殊的矩阵——实对称矩阵 .任意实对称矩阵一定可以对角化,并且可以找到一个正交矩阵,使它和对角矩阵不但相似而且合同 .在这一章中,不但要正确理解特征值、特征向量以及相似矩阵等基本概念,还要学会综合运用行列式、矩阵、向量、线性方程组等各章的知识及方法来解决问题 .

5.1　特征值和特征向量的概念、性质和计算

A 是 n 阶方阵,λ 是常数,x 是 n 维非零向量 .若满足 $Ax=\lambda x$,则称 λ 是 A 的特征值,x 是 A 的属于 λ 的特征向量 .注意:(1) A 的特征值 λ 可以为 0,但特征向量必须为非零向量;(2) 每个特征向量只属于一个特征值,但属于同一特征值可以有无数个特征向量,这是因为属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍然为属于这个特征值的特征向量 .

属于不同特征值的特征向量是线性无关的 .

$|\lambda I-A|=f(\lambda)$ 称为 A 的特征多项式 .设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵,则 $f(\lambda)$ 为 λ 的 n 次多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n,$$

其中 $c_1=-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=-\operatorname{tr}A$ (称为 A 的迹),$c_n=(-1)^n|A|$.

$f(\lambda)=|\lambda I-A|=0$,称为 A 的特征方程,这个 λ 的 n 次多项式在复数范围内有 n 个

根，即 A 在复数范围内有 n 个特征值(包括重根，共轭复根)．

解齐次线性方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$．它的基础解系为属于 λ_i 的线性无关的特征向量．基础解系的非零线性组合为 A 的属于 λ_i 的全部特征向量，记 $V_{\lambda_i} = \{x \mid (\lambda_i I - A)x = 0\}$ 称为 A 的 λ_i 的特征子空间．

设 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 $\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$，$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$．

若 $|A| = 0$，则 A 具有零特征值．

例 5.1.1　已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量．

【解】

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}) = 0,$$

所以 $\lambda_1 = -\mathrm{i}$，$\lambda_2 = \mathrm{i}$．

对于 $\lambda_1 = -\mathrm{i}$，解 $(-\mathrm{i}I - A)x = 0$，有

$$(-\mathrm{i}I - A) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $x_1 - \mathrm{i}x_2 = 0$，$x_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$．于是 $x = k_1 \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ 为属于 $\lambda_1 = -\mathrm{i}$ 的全部特征向量(其中 k_1 为任意非零常数)．

对于 $\lambda_2 = \mathrm{i}$，解 $(\mathrm{i}I - A)x = 0$，有

$$(\mathrm{i}I - A) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $x_1 + \mathrm{i}x_2 = 0$，$x_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$．于是 $x = k_2 \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ 为属于 $\lambda_2 = \mathrm{i}$ 的全部特征向量(其中 k_2 为任意非零常数)．　【解毕】

【注】　若本题限制在实数范围内求 A 的特征值和特征向量．则 A 就没有特征值和特征向量．因为此时特征方程 $f(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ 无实数根．

例 5.1.2　设　$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，

求 A 的特征值和特征向量.

【解】

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & -3 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -3(\lambda+1) & (\lambda+2)(\lambda-1)\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & -(\lambda+1) & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-3(\lambda+1) & (\lambda+2)(\lambda-1)\\ -(\lambda+1) & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)\begin{vmatrix}-3 & \lambda+2\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)(-3+\lambda+2)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0.$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

对于 $\lambda=1$,解 $(I-A)x=0$,有

$$(I-A)=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得 $x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$,所以 $x=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 为 $\lambda=1$ 的全部特征向量(其中 k_1 为任意非零常数).

对于 $\lambda=-1$,解 $(-I-A)x=0$,有

$$(-I-A)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ -1 & -3 & 1\\ -1 & -3 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得 $x_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}$,所以 $x=k_2\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}$ 为 $\lambda=-1$ 的全部特征向量(其中 k_2 为任意非零常数).

【解毕】

【注】　求矩阵 A 的特征值,先要求矩阵的特征多项式 $|\lambda I-A|$.若 A 是 n 阶矩阵,则

$|\lambda I - A|$是一个 n阶行列式．为了替下面解高次方程$|\lambda I - A| = 0$作准备．在计算这个行列式时，应尽量利用行列式的性质提取λ的一次因子，即对$|\lambda I - A|$边计算边分解因式．然后再展开，进一步分解因式．若 A 本身就是对角阵或三角阵，它的特征值就是对角线上的元素．

例 5.1.3 设矩阵 $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 C的特征值是______．

(A) $1,0,1$;　　(B) $1,1,2$;　　(C) $-1,1,2$;　　(D) $-1,1,1$．

(1989 年考研题)

思路 判断以上四个选项中哪一个是 C的特征值，可以直接计算$|\lambda I - C| = 0$．

另一种方法是利用特征值的定义，即把特征值 λ_i 代入$|\lambda I - A|$中，看是否使其为 0．也可利用特征值的性质检验，如 $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，$|A| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$，看 λ_i 是否为 C 的特征值．

【解】 方法 1：计算

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\\lambda-2&\lambda&-1\\\lambda-2&-1&\lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda&-1\\1&-1&\lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0.$$

所以 $\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = 1$．

方法 2：利用 $\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i = \operatorname{tr} C$．

因为 $\operatorname{tr} C = 2$，而(B)，(D)的 $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i \neq 2$，故应排除(B)，(D)．

又 $|C| = \begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix} = -2$，$|C| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$．而在(A)中 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \neq -2$，应排除．在

(C)中 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$,故正确的选择应为(C). 【解毕】

例 5.1.4 设 n 阶矩阵 A 的元素均为 1,则 A 的 n 个特征值是______.

(1999 年考研题)

【解】 因为 $r(A)=1$,所以 $|A|=0$,故 A 有 0 特征值,且 A 只有一个非零特征值.又 $\operatorname{tr}A=n$,所以 $\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 【解毕】

例 5.1.5 设 A 的特征值为 λ,A 的属于 λ 的特征向量为 x,求 $5A,A^2,A^2+5A+I$ 的特征值和特征向量,并求 A^T 的特征值.

思路 已知条件为 $Ax=\lambda x(x\neq 0)$,求 $5A$ 等的特征值和特征向量.因此,对此等式进行恒等变形,得到 $Bx=\mu x$ 的形式,从而得到矩阵 B(即为我们所要求的矩阵)的特征值 μ 和特征向量 x.

另一种方法是由 $|\lambda I-A|=0$ 出发,经过恒等变形得到 $|\mu I-B|=0$,即 B 的特征方程,故 μ 为矩阵 B 的特征值.

【解】 由已知

$$Ax=\lambda x\quad(x\neq 0).\tag{1}$$

两边乘 5,得 $5Ax=(5\lambda)x$,故得 5λ 是 $5A$ 的特征值,特征向量不变,仍为 x.

对(1)式两边左乘 A,得 $A^2x=A\lambda x=\lambda Ax=\lambda^2x$,故得 λ^2 是 A^2 的特征值,特征向量不变.

由 $5Ax=5\lambda x,A^2x=\lambda^2x,Ix=x$ 三式相加,得 $(A^2+5A+I)x=(\lambda^2+5\lambda+1)x$.故得 $\lambda^2+5\lambda+1$ 是 A^2+5A+I 的特征值,特征向量不变.

又 $|\lambda I-A|=|(\lambda I-A)^T|=|(\lambda I)^T-A^T|=|\lambda I-A^T|=0$.故 A^T 的特征值即为 A 的特征值. 【解毕】

【注】 据上面同样的推导可得:若已知 $Ax=\lambda x(x\neq 0)$,则

$$a_0Ix=a_0x,$$
$$a_1Ax=(a_1\lambda)x,$$
$$a_2A^2x=(a_2\lambda^2)x,$$
$$\cdots$$
$$a_nA^nx=(a_n\lambda^n)x.$$

将以上各式相加得

$$(a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I)x=(a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)x.$$

又设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,可得,若 λ 是 A 的特征值,x 是 A 的属于 λ 的

特征向量,则 $f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$ 的特征值是 $f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$,且特征向量 x 不变 . 这个结论在求矩阵多项式的特征值时很有用 .

例 5.1.6　设 λ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征值,且 A 可逆,证明:

(1) $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的一个特征值;

(2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值 .

(1989 年考研题)

【证明】　方法 1: 已知 $|\lambda I - A| = 0$,又 A 可逆,则 $|A| \neq 0$,由 $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$,所以 A 的特征值均不为 0,故 $\lambda \neq 0$. 由于

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= |\lambda A^{-1} A - A| = |(\lambda A^{-1} - I) A| \\
&= |\lambda A^{-1} - I|\,|A| = \left| -\lambda\left(\frac{1}{\lambda} I - A^{-1}\right)\right|\,|A| \\
&= (-\lambda)^n |A| \left|\frac{1}{\lambda} I - A^{-1}\right| = 0 .
\end{aligned}
$$

因为 $\lambda \neq 0$, $|A| \neq 0$, 得 $\left|\frac{1}{\lambda} I - A^{-1}\right| = 0$,故 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值 .

又由 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 及上面 A^{-1} 的特征方程,得

$$
\left|\frac{1}{\lambda} I - A^{-1}\right| = \left|\frac{1}{\lambda} I - \frac{1}{|A|} A^*\right| = \frac{1}{|A|^n}\left|\frac{|A|}{\lambda} I - A^*\right| = 0 .
$$

因为 $|A| \neq 0$,所以 $\left|\frac{|A|}{\lambda} I - A^*\right| = 0$,故 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$.

方法 2: 已知 $Ax = \lambda x$. 两边同时左乘 A^{-1},得 $A^{-1} A x = A^{-1} \lambda x = \lambda A^{-1} x = x$,因 $\lambda \neq 0$,两边同乘 $\frac{1}{\lambda}$,得 $A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$,所以 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值 .

把 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ 代入上式,得 $\frac{A^*}{|A|} x = \frac{1}{\lambda} x$,即 $A^* x = \frac{|A|}{\lambda} x$,从而得 $\frac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值 .

【证毕】

例 5.1.7　A 是三阶矩阵,且有特征值 1, -2, 4,则下列矩阵中,满秩矩阵是______ .

(A) $I - A$;　　(B) $A + 2I$;　　(C) $2I - A$;　　(D) $A - 4I$.

思路　满秩矩阵即其行列式不为 0,而利用特征值的定义 $|\lambda I - A| = 0$,则 λ 是 A 的特征值即可判断.

【解】　因为 2 不是 A 的特征值,所以 $|2I - A| \neq 0$. 正确的结论是(C).　　【解毕】

例 5.1.8　已知 $\alpha = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$, m 为正整数,求 $|5I - A^m|$.

分析　欲求 $|5I - A^m|$. 只要求得矩阵 $5I - A^m$ 的特征值即可,而 $5I - A^m$ 可看作多项式 $f(x) = 5 - x^m$ 的矩阵多项式,据例 5.1.5, $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)$, 其中 λ 为 A 的特征值. 这样,只要求得 A 的特征值就可以了. 而据已知 $A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$, $A^2 = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = \alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha^{\mathrm{T}}$,

$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = (1, 1, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$. 所以 $A^2 = 3\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = 3A$, 即 $A^2 - 3A = 0$ 且 $\mathrm{r}(A) = 1$, 进而求得 A 的特征值.

【解】　因为 $A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}}$,所以

$$A^2 = (\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) = \alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha^{\mathrm{T}} = (\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) = (\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)A.$$

而 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = 3$, 所以 $A^2 = 3A$, 即 $A^2 - 3A = 0$.

设 A 的特征值为 λ, $f(x) = x^2 - 3x$, 则 $f(A) = A^2 - 3A$ 的特征值为 $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$, 即 $(A^2 - 3A)x = (\lambda^2 - 3\lambda)x$. 因为 $A^2 - 3A = 0$, 所以 $(\lambda^2 - 3\lambda)x = 0$, 而 $x \neq 0$, 所以 $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, 即 $\lambda = 0, 3$. 又 $\mathrm{r}(A) = 1$, 所以 A 的特征值为 0, 0, 3.

又设 $f(x) = 5 - x^m$, 则 $f(A) = 5I - A^m$. 故 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda) = 5 - \lambda^m$. 把 $\lambda = 0, 3$ 代入得 $f(A) = 5I - A^m$ 的特征值为 $\lambda_{1,2} = 5$, $\lambda_3 = 5 - 3^m$. 所以 $|5I - A^m| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 5^2(5 - 3^m)$.　　【解毕】

例 5.1.9　已知 $\alpha = (1, k, 1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量. 求 k 值和 A^{-1} 的特征值,并问 α 是属于 A^{-1} 的哪个特征值的特征向量.

(1994 年清华大学考题)

思路　由 $A^{-1}\alpha = \lambda\alpha$, 得 $A\alpha = \dfrac{1}{\lambda}\alpha$, 即 $\lambda A\alpha = \alpha$. 把已知条件 α, A 代入,即可求得 k 值和 λ 值. 再根据矩阵特征值的其他性质: A 的特征值与 A^{-1} 的特征值互为倒数, 以及 $\mathrm{tr}A = \sum_i \lambda_i$ 可解决本题的后两问.

【解】　设 $A^{-1}\alpha = \lambda\alpha$, 则 $\lambda A\alpha = \alpha$, 把 α, A 代入得

$$\lambda\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix},$$

展开得

$$\begin{cases}\lambda(k+3)=1,\\\lambda(2k+2)=k.\end{cases}\tag{*}$$

消去 λ 得 $k^2+k-2=0$,从而得 $k_1=1$,$k_2=-2$,代入(*)式,得 $\lambda_1=\dfrac{1}{4}$,$\lambda_2=1$.

又 A 的特征值和 A^{-1} 的特征值互为倒数 . 故 A 的特征值 $\mu_1=\dfrac{1}{\lambda_1}=4$,$\mu_2=\dfrac{1}{\lambda_2}=1$.

而 $\mathrm{tr}A=2+2+2=6=\mu_1+\mu_2+\mu_3=5+\mu_3$,故 $\mu_3=1$,即 A^{-1} 的另一个特征值 $\lambda_3=\dfrac{1}{\mu_3}=1$. 所以 A^{-1} 的特征值为 $1,1,\dfrac{1}{4}$.

又 $k_1=1$,$\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm T}$,$\lambda_1=\dfrac{1}{4}$;$k_2=-2$,$\alpha_2=(1,-2,1)^{\mathrm T}$,$\lambda_2=\lambda_3=1$.所以 $\lambda_1=1/4$ 时,A^{-1} 属于 $\lambda_1=1/4$ 的特征向量为 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm T}$;$\lambda_2=\lambda_3=1$ 时,A^{-1} 属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\alpha_2=(1,-2,1)^{\mathrm T}$. 【解毕】

【注】　本题(包括 5.1.8 题)反复用了矩阵特征值,特征向量的定义和性质,以及有关系的矩阵的特征值之间的关系 . 读者应熟练掌握和运用这些性质就可少走弯路和避繁就简 . 如此题先求 A^{-1},再利用 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$ 计算,就要麻烦得多 .

例 5.1.10　已知 x_1,x_2 分别为 A 的属于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量,且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 求证 x_1+x_2 不再是 A 的特征向量 .

(1990 年考研题)

思路　本题适合用反证法,要证 x_1+x_2 不再是 A 的特征向量,若它是,会推出什么样的矛盾结果?

【证明】　反证法 . 设 $A(x_1+x_2)=\lambda(x_1+x_2)$,展开上式得 $Ax_1+Ax_2=\lambda x_1+\lambda x_2$. 又已知 $Ax_1=\lambda_1x_1$,$Ax_2=\lambda_2x_2$,代入上式得

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=\lambda x_1+\lambda x_2,$$

移项得

$$(\lambda-\lambda_1)x_1+(\lambda-\lambda_2)x_2=0 .$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$,所以 $\lambda-\lambda_1\neq\lambda-\lambda_2$,故 $\lambda-\lambda_1$ 与 $\lambda-\lambda_2$ 不能同时为 0,则得 x_1,x_2 线性相关,这与属于不同特征值的特征向量是线性无关的定理矛盾,所以 x_1+x_2 不是 A 的特征向量 .

【证毕】

例 5.1.11 已知 A,B 是 n 阶矩阵．求证 AB 与 BA 有相同的特征值．

思路 本题应从定义出发，即从 $ABx=\lambda x(x\neq 0)$ 出发，推出 $BAy=\lambda y$ 来，并且 $y\neq 0$．反之，也成立，就能证明 AB 与 BA 有相同的特征值 λ（注意，对应的特征向量并无必然的联系）．

【证明】 设 $(AB)x_0=\lambda_0 x_0$，且 $\lambda_0\neq 0$，$x_0\neq 0$．上式左乘 B，则 $BABx_0=(BA)(Bx_0)=\lambda_0(Bx_0)$．只需证 $Bx_0\neq 0$．

反证：设 $Bx_0=0$．则由所设得 $ABx_0=0=\lambda_0 x_0$，这与 $\lambda_0\neq 0$，$x_0\neq 0$（即 $\lambda_0 x_0\neq 0$）矛盾．所以 $Bx_0\neq 0$，因此 λ_0 也是 BA 的非零特征值．

若 $\lambda_0=0$ 是 AB 的特征值，则

$$\begin{aligned}|0I-BA|&=|-BA|=(-1)^n|B||A|\\&=(-1)^n|A||B|=(-1)^n|AB|\\&=|0I-AB|,\end{aligned}$$

所以 $\lambda_0=0$ 也是 BA 的特征值．

这样就证明了 AB 的特征值都是 BA 的特征值．

同样可证 BA 的特征值也都是 AB 的特征值．

故 AB 与 BA 有相同的特征值． 【证毕】

例 5.1.12 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^{\mathrm T}\beta=0$．记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^{\mathrm T}$，求：(1) A^2；(2) 矩阵 A 的特征值和特征向量．

(1998 年考研题)

【解】 (1) $A=\alpha\beta^{\mathrm T}$，又 $\alpha^{\mathrm T}\beta=0$，所以 $A^2=AA=(\alpha\beta^{\mathrm T})(\alpha\beta^{\mathrm T})=\alpha(\beta^{\mathrm T}\alpha)\beta=(\beta^{\mathrm T}\alpha)\alpha\beta^{\mathrm T}=0\cdot A=0$．即 A^2 为 n 阶零矩阵．

(2) 设 $Ax=\lambda x(x\neq 0)$，则 $A^2x=\lambda^2x=0$．所以 $\lambda=0$，即 A 的特征值全为 0．

已知 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$．不失一般性，设 $a_1\neq 0$，$b_1\neq 0$．解 $(0I-A)x=0$，即 $-Ax=0$．而

$$A=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

故 $Ax=0$ 的基础解系为

$$\alpha_1=\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\quad \alpha_2=\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\cdots,$$

$$\alpha_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1},0,\cdots,0,1\right)^{\mathrm{T}}.$$

所以 A 的属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 为不全为零的任意常数 .

例 5.1.13　设 A 是 n 阶实对称矩阵,P 是 n 阶可逆矩阵 .已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量,则矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是______ .

(A) $P^{-1}\alpha$;　　(B) $P^{\mathrm{T}}\alpha$;　　(C) $P\alpha$;　　(D) $(P^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$.

(2002 年考研题)

思路　$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A(P^{\mathrm{T}})^{-1}$.四个选项中(B)的可能性比较大,用它来验算 .

【解】　已知 $A\alpha=\lambda\alpha$,

$$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\alpha=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\alpha=P^{\mathrm{T}}A(P^{\mathrm{T}})^{-1}P^{\mathrm{T}}\alpha=P^{\mathrm{T}}A\alpha=P^{\mathrm{T}}\lambda\alpha=\lambda P^{\mathrm{T}}\alpha .$$

故 $P^{\mathrm{T}}\alpha$ 是 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量 .故选(B) .　【解毕】

例 5.1.14　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$,$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$B=P^{-1}A^{*}P$,求 $B+2I$ 的特征值与特征向量 .

(2003 年考研题)

思路　一种方法是由 A 算出 A^{*},再算出 B 和 $B+2I$,另一种方法是先找 $B+2I$ 的特征值、特征向量与 A 的特征值、特征向量之间的关系 .

【解】　方法 1:由题设,求得

$$|A|=\begin{vmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{vmatrix}=7,\quad A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix},\quad A^{*}=|A|A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=P^{-1}A^{*}P=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix},\quad B+2I=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda I-(B+2I)|=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&0\\2&\lambda-7&4\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-9)^2(\lambda-3) .$$

$B+2I$ 的特征值为 9, 9, 3 .

对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=9$, 解方程组

$$(9I-(B+2I))x=0,$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 .$$

求得线性无关的特征向量为

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

所以属于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 是不全为零的任意常数})$$

对特征值 $\lambda_3=3$, 解方程组

$$(3I-(B+2I))x=0,$$

即

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 .$$

求得特征向量为

$$\xi_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以属于特征值 3 的全部特征向量为

$$k\xi_3 \quad (k \text{ 是不为零的任意常数})$$

方法 2: 设 A 的特征值为 λ, 属于 λ 的特征向量为 ξ, 即 $A\xi=\lambda\xi$.由于 $|A|=7\neq 0$, 所以 $\lambda\neq 0$.由 $A^*A=|A|I$, 有

$$A^*A\xi=|A|I\xi,$$

$$\lambda A^*\xi=|A|\xi,$$

或

$$A^* \xi = \frac{|A|}{\lambda} \xi .$$

于是由

$$B = P^{-1} A^* P,$$

有

$$\begin{aligned} BP^{-1} \xi &= P^{-1} A^* PP^{-1} \xi \\ &= P^{-1} A^* \xi \\ &= \frac{|A|}{\lambda} P^{-1} \xi . \end{aligned}$$

即 B 与 A^* 有相同的特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$, B 的属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量是 $P^{-1}\xi$.进一步有

$$(B + 2I) P^{-1} \xi = \left(\frac{|A|}{\lambda} + 2 \right) P^{-1} \xi,$$

即 $B+2I$ 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}+2$,对应的特征向量为 $P^{-1}\xi$.

由题设,求得 A 的特征值与特征向量.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 7) .$$

故 A 的特征值为 1,1,7.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

$$(I - A) x = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得线性无关的特征向量为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

对于特征值 $\lambda_3 = 7$,

$$(7I - A) x = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

对应的特征向量为

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

由 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,有

$$P^{-1}\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad P^{-1}\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad P^{-1}\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

于是 $B+2I$ 的特征值为 9,9,3 .

属于 9 的特征向量为

$$k_1P^{-1}\xi_1+k_2P^{-1}\xi_2\quad(k_1,k_2\text{ 是不全为零的任意常数})$$

属于 3 的特征向量为

$$k_3P^{-1}\xi_3\quad(k_3\text{ 是不为零的任意常数})$$

【解毕】

【注】 方法 2 中求 B 的特征向量的思路与例 5.1.13 相似 .此外,$B=P^{-1}A^*P$,也即 B 与 A^* 相似,相似矩阵有相同的特征值,但是特征向量就不同了 .

例 5.1.15 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$可逆,向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$是矩阵 A^* 的一个特征向量,λ 是α对应的特征值,其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵 .试求 a,b 和 λ 的值 .

(2003 年考研题)

【解】 由题设

$$A^*\alpha=\lambda\alpha,$$

等式两边同时左乘矩阵 A,得

$$AA^*\alpha=\lambda A\alpha,$$

由 A 可逆,所以 A^* 可逆,A^* 的特征值 $\lambda\neq0$,于是

$$A\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha.$$

即

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3+b=\dfrac{|A|}{\lambda}, \\ 2+2b=\dfrac{|A|}{\lambda}b, \\ 1+a+b=\dfrac{|A|}{\lambda}. \end{cases}$$

解得 $a=2, b=1$ 或 $b=-2$.

由于

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4,$$

A^* 的特征值 $\lambda=\dfrac{|A|}{3+b}=\dfrac{4}{3+b}$.

所以,当 $b=1$ 时,特征值 $\lambda=1$;当 $b=-2$ 时,特征值 $\lambda=4$.　　【解毕】

5.2　n 阶矩阵的相似对角化问题

设 A, B 均为 n 阶方阵,若存在 n 阶可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=B$,则称 A 相似于 B,记作 $A \backsim B$.

矩阵的相似满足自反性、对称性和传递性.

相似矩阵具有相同的行列式,相同的迹,相同的秩,相同的特征多项式和相同的特征值.

若 n 阶矩阵 A 相似于对角阵,则称 A 可相似对角化.即存在可逆阵 P,使 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

$A \backsim \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$　A 具有 n 个线性无关的特征向量

　　　　A 的每个特征值的代数重数 = 几何重数.

这里代数重数是该特征值在特征多项式中的重数,几何重数是该特征值的特征子空间的维数,标志了属于该特征值有多少个线性无关的特征向量,所以 A 可对角化.即 A 的所有 r_i 重特征值对应有 r_i 个线性无关的特征向量,也即 $r_i=\dim V_{\lambda_i}$　$(i=1,2,\cdots,s)$.

例 5.2.1　已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$,问是否存在可逆矩阵 C,使 $C^{-1}AC=\Lambda$,其中 Λ 是对角阵.若能,求之.

思路　这是一个典型的矩阵对角化的计算题,其计算步骤应为:(1)计算 $|\lambda I - A| = 0$,求出 A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(若 A 具有 n 个互异的特征值,则可以对角化,因一重特征值必然对应一个特征向量,而不同的特征值对应的特征向量线性无关.若 A 有相重的特征值,继续(2));(2)求出每个特征值的线性无关的特征向量,即解齐次线性方程组 $(\lambda I - A)x = 0$,求出该线性方程组的基础解系.只要其中有一个特征值的代数重数大于其对应的几何重数,则该矩阵不能对角化.若每个特征值的代数重数都等于其几何重数,则继续(3);(3)以求得的 n 个线性无关的特征向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为列构成矩阵 $C = (x_1\ x_2 \cdots x_n)$,则 $C^{-1}AC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.注意 C 中的第 j 列 x_j 一定要对应对角阵中的第 j 个元素 λ_j,它们满足关系 $Ax_j = \lambda_j x_j$.

【解】

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ -3 & \lambda+5 & -3 \\ -6 & 6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0.$$

所以
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2(\text{二重}),\quad \lambda_3 = 4.$$

当 $\lambda = -2$ 时,解 $(-2I - A)x = 0$ 得

$$(-2I - A) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求得一组基础解系为 $x_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, x_2 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

($\lambda = -2$ 的代数重数等于几何重数,都为 2)

当 $\lambda = 4$ 时,解 $(4I - A)x = 0$,得

$$(4I - A) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求得 $x_3 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

因此 A 具有 3 个线性无关的特征向量,可以对角化.令

$$C = (x_1\ x_2\ x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

则 $C^{-1}AC = \mathrm{diag}(-2, -2, 4)$.　　【解毕】

例 5.2.2　已知 $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$,问 A 能否对角化?

【解】

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0.$$

得 $$\lambda_1=\lambda_2=-2,\quad \lambda_3=4.$$

当 $\lambda=-2$ 时,解 $(-2I-A)x=0$,有

$$(-2I-A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$r(-2I-A)=2$,基础解系中只有一个解 $x_1=(1,1,0)^T$,即 $\lambda=-2$ 的代数重数等于 2,而几何重数等于 1 .所以 A 不能相似对角化 . 【解毕】

例 5.2.3　若 n 阶矩阵 A 与 B 有共同的特征值,且都有 n 个线性无关的特征向量,则______ .

(A) $A=B$;　　(B) $A\neq B$,但 $|A-B|=0$;

(C) A 与 B 相似;　　(D) A 与 B 不一定相似,但 $|A|=|B|$.

(1999 年清华大学考题)

思路　由已知条件,我们可获得如下信息: A 与 B 都有 n 个线性无关的特征向量,则它们都可以相似对角化,又它们有共同的特征值,因此与它们相似的对角阵相同 .

【解】　A 与 B 有共同的特征值,且它们均可对角化,因此它们有相同的相似对角形 .即 $A\backsim\Lambda\backsim B$.故据相似矩阵的传递性 . $A\backsim B$. 应选(C)为正确答案 .

显然(D)不对 .又 $A\backsim B$,只能得到 $|A|=|B|$,得不到 $A=B$ 和 $|A-B|=0$ 的结论,因此(A),(B)也不对 . 【解毕】

例 5.2.4　已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 相似 .求:

(1) x 和 y;

(2) 一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P .

(1988 年考研题)

思路　已知 $A\backsim B$,则利用相似矩阵有相同的迹和相同的行列式等性质可求得 x,y,又 B 已是对角阵,则求可逆阵按通常的方法即可 .

【解】　(1) 因为 B 是对角阵,又 $A\backsim B$,所以 B 的对角元 $2,y,-1$ 为 A 的特征值 .由

$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i$ 得 $2+x=1+y$，又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2y=-2$，所以 $y=1$，$x=0$，故 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$. A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$.

(2) 由(1)知 A 的特征值为 $2,1,-1$.

当 $\lambda_1=2$ 时，解 $(2I-A)x=0$，有

$$2I-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $x_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=1$ 时，解 $(I-A)x=0$，有

$$I-A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $x_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-1$ 时，解 $(-1\cdot I-A)x=0$，有

$$-I-A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $x_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$，即为所求可逆阵，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

【解毕】

【注】　本题在求解(1)时，也可利用 $A\backsim B$，所以有相同的特征多项式，即 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$. 代入已知矩阵得

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-y&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}.$$

解行列式，得 $(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-1)=(\lambda-2)(\lambda-y)(\lambda+1)$，比较上式两边系数，得 $x=0$，

$y=1$.

显然,这个方法不如前一个解法简便.

例 5.2.5　**已知三阶矩阵 A 的 3 个特征值分别为 1,4,-2,相应的特征向量为 $(-2,-1,2)^T,(2,-2,1)^T$ 和 $(1,2,2)^T$.求 A 及 A^k(k 为正整数).**

思路　**这是一个由 A 的特征值和特征向量反求 A 的典型问题,即已知可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$,则 $A=P\Lambda P^{-1}$.由 $A=P\Lambda P^{-1}$ 可推得 $A^k=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^k P^{-1}$,这在很多数学模型中都用得到.**

【解】　**因为 A 的三个不同特征值对应的三个特征向量是线性无关的.令**

$$P=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-1&-2&2\\2&1&2\end{pmatrix},$$

则 P 为可逆阵,且

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

于是

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-1&-2&2\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\times\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&-1&2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&8&-2\\-1&-8&-4\\2&4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1&2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}.$$

$$A^k=P\Lambda^kP^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-1&-2&2\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4^k&0\\0&0&(-2)^k\end{pmatrix}\times\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&-1&2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2+4^{k+1}+(-2)^k&2-4^{k+1}+2(-2)^k&-4+2\times4^k+2(-2)^k\\2-4^{k+1}+2(-2)^k&1+4^{k+1}+4(-2)^k&-2-2\times4^k+4(-2)^k\\-4+2\times4^k+2(-2)^k&-2+4^k+4(-2)^k&4+4^k+4(-2)^k\end{pmatrix}.$$

【解毕】

例 5.2.6　**设矩阵**

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}.$$

已知 A 有三个线性无关的特征向量,$\lambda=2$ 是二重特征值,试求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

(2000 年考研题)

思路 本题矩阵 A 以带两个参数 x, y 的形式给出,不能直接求特征值和特征向量而相似对角化,但已知条件告之这个三阶矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量,由此得到 A 是可以相似对角化的,据可对角化的充要条件,每个特征值的代数重数应与几何重数相等.$\lambda=2$ 是二重特征值,则它所对应的线性无关的特征向量应有两个,即$(2I-A)x=0$ 的基础解系应包括两个线性无关的解向量,这样 $\mathrm{r}(2I-A)=1$,据此可对 A 进行初等变换化为阶梯形,从而定出 A 中的参数 x 和 y 而确定 A.有了确定的 A 即可按常规步骤求 A 的特征值、特征向量,进而确定可逆矩阵 P 了.

【解】 因为 A 有 3 个线性无关的特征向量,故 A 可对角化.$\lambda=2$ 为 A 的二重特征值,所以 $\lambda=2$ 所对应的 A 的线性无关的特征向量有两个.故 $\mathrm{r}(2I-A)=1$.对 A 进行初等变换,有

$$2I-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是得 $x=2$, $y=-2$ 使 $\mathrm{r}(2I-A)=1$.从而得

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}.$$

故

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6),$$

由此得 $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=6$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$,解线性方程组$(2I-A)x=0$.由于

$$2I-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量为 $x_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $x_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对于特征值 $\lambda_3=6$,解线性方程组$(6I-A)x=0$.由于

$$6I-A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&2/3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量为 $x_3 = (1, -2, 3)^T$.

于是
$$P = (x_1\ x_2\ x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

则
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
【解毕】

例 5.2.7　已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$有特征值±1 . 问 A能否对角化 ? 并说明理由 .

【解】　因 $\lambda = \pm 1$ 是 A 的特征值,代入 A 的特征方程 $|\lambda I - A| = 0$.

当 $\lambda = 1$ 时,
$$|I - A| = \begin{vmatrix} -1 & -a & -2 \\ -5 & 1-b & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -7(a+1) = 0,$$
得 $a = -1$.

当 $\lambda = -1$ 时,
$$|-I - A| = \begin{vmatrix} -3 & -a & -2 \\ -5 & -1-b & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = b + 3 = 0,$$
得 $b = -3$.

因此
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

又 $\mathrm{tr}A = 2 + (-3) + (-1) = -2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + (-1) + \lambda_3$,因此 $\lambda_3 = -2$. 这样三阶矩阵 A具有 3 个不同的特征值,故可以对角化 . 【解毕】

例 5.2.8　设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
问 A, B, C中哪些矩阵相似 ? 为什么 ?

思路　因为相似矩阵有相同的秩,相同的特征值 . 虽然 A, B, C三个矩阵都是上三角

阵,特征值相同,但 $r(B)=r(C)=1$,$r(A)=2$,故 A 不可能和 B,C 相似. B,C 是否相似,还得看它们能否对角化,若能,则它们的相似对角形必然相同.

【解】　因为 $r(B)=r(C)=1$,$r(A)=2$,而秩相等是矩阵相似的必要条件,所以 A 不与 B 相似,A 不与 C 相似.

对于矩阵 B,$\lambda_1=\lambda_2=0$,$\lambda_3=1$.对于二重特征值 $\lambda=0$,$r(0\cdot I-B)=r(B)=1$,所以由 $(0\cdot I-B)x=0$ 可以求到两个线性无关的特征向量.于是 B 可相似对角化,相似对角阵为 $\mathrm{diag}(1,0,0)$.

对于矩阵 C,$\lambda_1=\lambda_2=0$,$\lambda_3=1$.对于二重特征值 $\lambda=0$,$r(0\cdot I-C)=r(C)=1$.与 B 阵一样,C 也可相似对角化,且对角形也为 $\mathrm{diag}(1,0,0)$.所以 B 与 C 相似.　【解毕】

【注】　(1) 不能对角化的矩阵必然相似于一个上三角矩阵(若当标准形).此处就不详细讨论了.

(2) 若 $D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 也必然与 B 和 C 矩阵相似.因为显然 $E_{12}^{-1}DE_{12}=\mathrm{diag}(1,0,0)$,其中 E_{12} 是初等交换阵,即

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

例 5.2.9　A 是 n 阶矩阵,且满足 $A^2+2A-3I=0$.证明 A 可对角化,并求其相似对角形.

思路　要证明 A 可对角化,须证明 A 具有 n 个线性无关的特征向量,那么首先要求 A 的特征值.由已知条件 $A^2+2A-3I=0$,左边是一个 A 的多项式,可以通过 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)$ 而求得 A 的特征值.其次要通过这个关系式,化为 $(A+3I)(A-I)=(A-I)(A+3I)=0$,可看到 $A-I$ 的各列是齐次线性方程组 $(A+3I)x=0$ 的解向量,而 $A+3I$ 的各列也是齐次线性方程组 $(A-I)x=0$ 的解向量,如果能证明 $r(A+3I)+r(A-I)=n$,也就证明了对应 A 的两个特征值 $\lambda=-3$ 与 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量共有 n 个.

【证明】　由已知 $A^2+2A-3I=0$,设 $f(x)=x^2+2x-3$,$Ax=\lambda x$,则 $f(A)x=f(\lambda)x$,即

$$(A^2+2A-3I)x=(\lambda^2+2\lambda-3)x=0.$$

因为 $x\neq0$,所以 $\lambda^2+2\lambda-3=0$,故 $\lambda_1=-3$,$\lambda_2=1$.

又由 $A^2+2A-3I=0$,得 $(A+3I)(A-I)=0$.于是得 $r(A+3I)+r(A-I)\leq n$.又由定理 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$ 得 $r(A+3I)+r(A-I)\geq r((A+3I)+(I-A))=r(4I)=n$.所以 $r(A+3I)+r(A-I)=n$.

设 $r(A+3I)=p, 0\le p\le n$. 则 $r(A-I)=n-p$. 若 $p=0$, 即 $A+3I=0$, $A=-3I$. 若 $p=n$, 则 $A-I=0$, $A=I$. 此两种特殊情况 A 均为对角阵.

设 $0<p<n$. 因 $(A+3I)(A-I)=0$, 故 $A-I$ 各列均为 $(A+3I)x=0$ 的解向量. 而 $r(A-I)=n-p$, 所以 $(A+3I)x=0$ 有 $n-p$ 个线性无关的解向量, 即对应 $\lambda=-3$ 的线性无关的特征向量有 $n-p$ 个.

同理, 由 $(A-I)(A+3I)=0$, $r(A+3I)=p$ 得对应 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量有 p 个. 这样 A 具有 $(n-p)+p=n$ 个线性无关的特征向量, 故 A 可以相似对角化.

又 A 可相似对角化的充要条件是每个特征值的代数重数等于几何重数, 故 $\lambda=-3$ 的代数重数为 $n-p$, $\lambda=1$ 的代数重数为 p, 所以

$$A\backsim \mathrm{diag}(\overbrace{1,\cdots,1}^{p\text{个}}, \overbrace{-3,\cdots,-3}^{n-p\text{个}}).$$

【证毕】

【注】　本题在证明过程中, 用到了很多代数中的概念和定理, 如矩阵运算后秩的变化, 两个矩阵多项式相乘可交换等概念. 但最核心的是围绕证 A 矩阵具有 n 个线性无关的特征向量这个结论展开. 由已知条件 $A^2-2A+3I=0$ 出发, 分解成 $(A+3I)(A-I)=0$, 既找 A 的特征值, 又找 A 的特征向量.

例 5.2.10　设 $B=\alpha\alpha^T$, 其中 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\alpha\neq 0$, $a_i\in \mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$.

(1) 证明 $B^k=tB$. 其中 k 为正整数, t 为常数, 并求 t;

(2) 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}BP$ 为对角阵, 并写出此对角阵.

(1985 年考研题)

【解】　(1) 因为 $B=\alpha\alpha^T$, 故 $B^2=(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)=\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=(\alpha^T\alpha)(\alpha\alpha^T)=(\alpha^T\alpha)B$. 而 $\alpha^T\alpha=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$,　所以 $B^2=\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)B$.

同理可推得 $B^k=\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)^{k-1}B=tB$, 其中 $t=\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)^{k-1}$.

先求 B 的特征值:

方法 1: 设 $Bx=\lambda x(x\neq 0)$, 因为 $B^k-tB=0$, 则 $(B^k-tB)x=(\lambda^k-t\lambda)x=0$. 由 $x\neq 0$ 得 $\lambda^k-t\lambda=0$, 即 $(\lambda^{k-1}-t)\lambda=0$. 从而得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$. 又 $r(B)=1$, $\mathrm{tr}B=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2=\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i$, 故 $\lambda=0$ 为 $n-1$ 重特征值, $\lambda=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$ 为 B 的一重特征值.

方法 2: 在行列式的运算中, 我们有如下结论: 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, 当 $n\ge m$. $\lambda\neq 0$ 时, 有

$$|\lambda I_n-BA|=\lambda^{n-m}|\lambda I_m-AB|.$$

应用这个结论, 有

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - B| &= |\lambda I - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}| \\
&= \lambda^{n-1}|\lambda I - \alpha^{\mathrm{T}}\alpha| = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = 0 .
\end{aligned}
$$

所以
$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,\quad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0 .$$

方法3:利用定义求 B 的特征值.

$$
|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -\dfrac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -\dfrac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \lambda - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) = 0 . \qquad (*)
$$

所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

(2) **求 B 的特征向量,从而求出可逆矩阵 P .**

当 $\lambda = 0$ 时,$(0 \cdot I - B)x = 0$,即 $Bx = 0$. 而

$$
B = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},
$$

从而得 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$. 所以

$$x_1 = (-a_2, a_1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}},\quad x_2 = (-a_3, 0, a_1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \cdots, x_{n-1} = (-a_n, 0, \cdots, a_1)^{\mathrm{T}} .$$

当 $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 时,$\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right) I - B\right]x = 0$,即 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha x - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}x = 0$. 显然 $x_n = \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 满足上式. 故

$$P=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)=\begin{pmatrix}-a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n & a_1\\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_2\\ 0 & a_1 & \cdots & 0 & a_3\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_n\end{pmatrix},$$

且
$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}\left(0,0,\cdots,0,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$

又对于 $\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$，求其对应的特征向量时，亦可用通常解线性方程组的方法，即求

$$\left[\left(\sum a_i^2\right)I-B\right]x=0.$$

利用前面(＊)中的矩阵，亦可求到 $x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$．只是比较麻烦一些．【解毕】

例 5.2.11　设矩阵

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

已知矩阵 A 相似于 B，则 $\mathrm{r}(A-2I)$ 与 $\mathrm{r}(A-I)$ 之和等于______．

(A) 2;　　(B) 3;　　(C) 4;　　(D) 5．

(2003 年考研题)

思路　相似矩阵有相同的秩，已知 A 与 B 相似，则 $A-2I$ 与 $B-2I$ 相似，$A-I$ 与 $B-I$ 相似．

【解】　由题设 A 与 B 相似，因此 $A-2I$ 与 $B-2I$ 相似，$A-I$ 与 $B-I$ 相似．

$$B-2I=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-3&0\\1&0&-2\end{pmatrix},\quad B-I=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(A-2I)+\mathrm{r}(A-I)&=\mathrm{r}(B-2I)+\mathrm{r}(B-I)\\&=3+1=4.\end{aligned}$$

故选(C)．　　【解毕】

例 5.2.12　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化．

(2004 年考研题)

思路　从 A 的特征方程入手.

【解】

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a).$$

若 $\lambda = 2$ 是特征方程的二重根,则有 $2^2 - 8\times 2 + 18 + 3a = 0$,解得 $a = -2$.

当 $a = -2$ 时,三个特征值为 2,2,6.由于

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

所以 $r(2I - A) = 1$,$(2I - A)x = 0$ 的基础解系有两个解向量,即特征值 2,有两个线性无关的特征向量,所以 A 可对角化.

若 $\lambda = 2$ 不是特征方程的二重根,则

$$\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a = (\lambda - 4)^2,$$

即 $18 + 3a = 16$, $a = -\dfrac{2}{3}$.

当 $a = -\dfrac{2}{3}$ 时,A 的特征值为 4,4,2,由于

$$4I - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \dfrac{2}{3} & -1 \end{pmatrix},$$

$r(4I - A) = 2$,$(4I - A)x = 0$ 只有一个特征向量,A 不可对角化.　【解毕】

例 5.2.13　设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(2004 年考研题)

【解】　当 $b=0$ 时, $A=I$,特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$.任意非零向量都是属于 1 的特征向量,任意可逆矩阵 P,都有 $P^{-1}AP=I$.以下设 $b\neq 0$.

(1) $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1-(n-1)b)(\lambda-(1-b))^{n-1}.$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

对于 $\lambda_1=1+(n-1)b$,

$$(\lambda_1 I-A)=\begin{pmatrix}(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ -b & (n-1)b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & (n-1)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{pmatrix}$$

所以属于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$,属于 λ_1 的全部特征向量为 $k\xi_1$, k 是不为零的任意常数.

对于 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$,

$$((1-b)I-A)=\begin{pmatrix}-b & -b & \cdots & -b\\ -b & -b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & -b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

特征向量为

$\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$, $\xi_3=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm T}$, $\cdots$, $\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm T}$.属于 $1-b$ 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n,\quad k_2,k_3,\cdots,k_n \text{ 是不全为 0 的任意常数}.$$

(2) 令

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1+(n-1)b,1-b,\cdots,1-b).$$ 【解毕】

例 5.2.14　设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$,求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角形

矩阵,并计算行列式$|A-I|$的值.

(2002 年考研题)

【解】 $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\0&\lambda-a-1&1-\lambda+a\\-1&1&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-1)\begin{vmatrix}\lambda-a&-2&-1\\0&0&-1\\-1&\lambda-a+1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2).$$

A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=a+1$,

$$((a+1)I-A)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

属于$a+1$的线性无关的特征向量为

$$\xi_1=(1,1,0)^T,\quad \xi_2=(1,0,1)^T.$$

对于特征值$\lambda_3=a-2$,

$$((a-2)I-A)=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

属于$a-2$的特征向量为

$$\xi_3=(-1,1,1)^T.$$

令矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a+1&&\\&a+1&\\&&a-2\end{pmatrix}.$$

又$A-I$的特征值为$\lambda_1-1=a,\lambda_2-1=a,\lambda_3-1=a-3$,所以

$$|A-I|=a^2(a-3).$$ 【解毕】

例 5.2.15 若矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$相似于对角矩阵$\Lambda$,试确定常数$a$的值;并求可逆

矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

(2003 年考研题)

【解】

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda-2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

故 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=-2$.

由题设 A 与对角矩阵相似,属于特征值 6 的线性无关的特征向量应有两个,也即 $\mathrm{r}(6I-A)=1$.

$$(6I-A)=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 $a=0$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6$,线性无关的特征向量为

$$\xi_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

对于特征值 $\lambda_3=-2$,

$$(-2I-A)=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

属于 -2 的特征向量为

$$\xi_3=(1,-2,0)^{\mathrm{T}}.$$

令 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,则 P 可逆,并有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.　　【解毕】

5.3　实对称矩阵的对角化

1. 实对称矩阵具有下列性质:

(1) 实对称矩阵的特征值全为实数,从而特征向量全为实向量.

(2) 不同特征值对应的特征向量不仅是线性无关的,而且还是正交的.

(3) 实对称矩阵必然可以对角化.即它的每个特征值的代数重数必然等于它的几何重数.

(4) 对于实对称矩阵 A,必存在正交阵 P,使 $P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

2. 欲用正交变换把 A 化为对角形时,其步骤与矩阵相似对角化步骤大致相同,只是在求到 n 个特征向量后,为保证 P 是正交矩阵,需要

(1) 对一重特征值对应的特征向量单位化.

(2) 对 r 重特征值对应的 r 个线性无关的特征向量,用施密特(Schmidt)正交化方法先正交化再单位化.

经过这样处理后的 n 个特征向量按列构成的矩阵 P 是正交矩阵,满足 $P^{-1}=P^T$.

实对称矩阵常常作为实二次型的矩阵,要求用正交化方法化为对角形,即把对应的二次型化为标准形,这个问题在下一章还要用到.

例 5.3.1 设 A 是三阶实对称矩阵.已知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$,又对应 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\xi_1=(2,1,2)^T,\xi_2=(1,2,-2)^T$,求 A.

思路 此题已给 A 的特征值和属于 $\lambda=1$ 的两个线性无关的特征向量,只要求出第三个线性无关的特征向量,即可反解 A.即 $P^{-1}AP=\Lambda,A=P\Lambda P^{-1}$.

据 A 是实对称矩阵,不同特征值对应的特征向量是正交的.因此属于 $\lambda=-1$ 的特征向量与属于 $\lambda=1$ 的特征向量 ξ_1,ξ_2 是正交的,可得 ξ_3.

【解】 设 $\xi_3=(x_1,x_2,x_3)^T$ 为 A 的属于 $\lambda=-1$ 的特征向量.则 $(\xi_1,\xi_3)=0$,$(\xi_2,\xi_3)=0$,即

$$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=0,\\ x_2+2x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

得到 $\xi_3=(x_1,x_2,x_3)^T=(-2,2,1)^T$.令 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$,则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&-5&-2\\3&-2&-2\\-6&6&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\8&-7&-4\\4&-4&-1\end{pmatrix}.$$

【解毕】

例 5.3.2　已知 $A=\begin{pmatrix}4&-4&2\\-4&4&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 及对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

【解】　A 是实对称矩阵，先求特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&4&-2\\4&\lambda-4&2\\-2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&\lambda&-2\\4&\lambda&2\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-4&1&-2\\4&1&2\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2(\lambda-9)=0.$$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

对 $\lambda=0$，由 $(0\cdot I-A)x=0$ 得 $x_1=(1,1,0)^T$，$x_2=(1,0,-2)^T$. 现 x_1,x_2 线性无关，但不正交，用施密特方法处理：令

$$\beta_1=x_1=(1,1,0)^T;$$

$$\beta_2=x_2-\frac{(\beta_1,x_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,0,-2)^T-\frac{1}{2}(1,1,0)^T$$

$$=\frac{1}{2}(1,-1,-4)^T.$$

再单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$，$\gamma_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,-1,-4)^T$.

对 $\lambda_3=9$，对应的特征向量为 $x_3=(2,-2,1)^T$.

只需单位化得 $\gamma_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^T$.

从而得到正交矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{-4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad P^{-1}AP=P^TAP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&9\end{pmatrix}.$$　【解毕】

例 5.3.3　已知 A 是 n 阶方阵，且具有 n 个互相正交的特征向量，证明 A 是一个对称矩阵.

思路　若存在正交矩阵 Q，使 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda$，则 $A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T$，于是

$A^T = A$.

而据已知条件,A 具有 n 个互相正交的特征向量(特征向量是非零的),所以 A 可对角化.

【证明】 设 n 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,相应的互相正交的特征向量为 x_1, $x_2, \cdots, x_n$,将其单位化 $\gamma_i = \frac{x_i}{|x_i|}$ $(i = 1, \cdots, n)$.则 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 仍为 A 的属于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量.A 可对角化.

令 $Q = (\gamma_1\ \gamma_2\ \cdots\ \gamma_n)$,则 Q 为正交阵,即有 $Q^{-1} = Q^T$,并有 $Q^T AQ = Q^{-1} AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \Lambda$.则

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$$

$$A^T = (Q\Lambda Q^T)^T = Q\Lambda^T Q^T = Q\Lambda Q^T = A.$$

故 A 为对称阵. 【证毕】

例 5.3.4 设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2,$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值.若 $\alpha_1 = (1,1,0)^T$, $\alpha_2 = (2,1,1)^T$, $\alpha_3 = (-1,2,-3)^T$ 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

(1) 求 A 的另一特征值和与其对应的特征向量;

(2) 求矩阵 A.

(2004 年考研题)

思路 A 的秩为 2,$|A| = 0$,所以 0 是 A 的一个特征值.6 是 A 的二重特征值,属于 6 的线性无关的特征向量只有两个,显然 α_1, α_2 线性无关,α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.再由 A 是实对称矩阵,属于不同特征值的特征向量正交,所以属于 0 的特征向量 α 与 α_1, α_2 都正交,由此求出 α.

【解】 (1) 由 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值,属于 6 的线性无关的特征向量只有 2 个.显然 α_1, α_2 线性无关,所以 α_1, α_2 是 A 的属于 6 的线性无关的特征向量.

由 $r(A) = 2$, $|A| = 0$,所以 A 的另一个特征值 $\lambda_3 = 0$.

设属于 $\lambda_3 = 0$ 的特征向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$,则 α 与 α_1, α_2 都正交,即 $\alpha_1^T\alpha = 0$, $\alpha_2^T\alpha = 0$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

解得 $\alpha = (1, -1, -1)^T$.

属于 $\lambda_3 = 0$ 的特征向量为 $k\alpha$, k 是不为 0 的任意常数.

(2) 令 $P = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$,则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$A = P\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

故

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

【解毕】

5.4 综合例题

矩阵的特征值和特征向量这部分,定义、概念及有关定理很多.因此在学习过程中要熟练、准确掌握这些基本概念和定理,注意它们的条件、结论以及相互间的联系与区别.这样才能比较灵活地应用.例如相似矩阵有很多性质,如特征值相同……,但这些只是矩阵相似的必要条件,而不是充分条件,应用时要注意.又如,要求矩阵的特征值,可用定义,也可用特征值的其他关系来求.同时在这一章中进行计算时,又涉及到前几章的行列式计算,解方程组,矩阵的秩等.要学会综合运用这些知识来分析和解题.

综例 5.4.1 设 A, B 均为 n 阶实方阵.A 有 n 个互异特征值.求证:$AB = BA$ 的充分必要条件是 A 的特征向量也是 B 的特征向量.

思路 已知 A 有 n 个互异的特征值,我们由此可获得如下信息:一是 A 可相似对角化;二是 A 的每个特征值的几何重数为 1,即属于同一特征值的不同特征向量成比例.由此可解决本题.

【证明】 必要性

设 $Ax_i = \lambda_i x_i\ (i = 1, \cdots, n)$.已知 $AB = BA$,所以 $A(Bx_i) = B(Ax_i) = B(\lambda_i x_i) = \lambda_i(Bx_i)$.若 $Bx_i \neq 0$,则 Bx_i 也是 A 的属于 λ_i 的特征向量.因 λ_i 是 A 的一重特征值,所以 $\dim V_{\lambda_i} = 1$,A 的属于 λ_i 的各特征向量成比例,所以 $Bx_i = \mu_i x_i$(μ_i 为常数).据特征向量的定义,x_i 为 B 的特征向量,特征值为 μ_i.若 $Bx_i = 0$,则 $Bx_i = 0 \cdot x_i$,x_i 是 B 的关于 $\mu_i = 0$ 的特征向量.

充分性

因 A 有 n 个互异的特征值,故 A 可对角化.设 $Ax_i = \lambda_i x_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,则 $x_1, x_2, \cdots,$

x_n 线性无关．令 $P=(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$，则 P 可逆，且 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，故 $A=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1}$．又已知 A 的特征向量也是 B 的特征向量．故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 也是 B 的 n 个线性无关的特征向量．所以

$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$$

其中 μ_i 为 B 的特征值，$i=1,2,\cdots,n$．则

$$\begin{aligned}B&=P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P^{-1},\\BA&=(P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P^{-1})(P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1})\\&=P\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\lambda_2\mu_2,\cdots,\lambda_n\mu_n)P^{-1}.\\AB&=(P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1})(P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P^{-1})\\&=P\mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\lambda_2\mu_2,\cdots,\lambda_n\mu_n)P^{-1}.\end{aligned}$$

所以 $$AB=BA.$$ 【证毕】

【注】 在证充分性时，欲证 $AB=BA$，则在 A，B 可对角化的基础上，写成 $A=P\Lambda_1P^{-1}$，$B=P\Lambda_2P^{-1}$，即可把 AB 或 BA 写成对角矩阵的乘积的表达形式，得到简单的结果再比较．这种方法在本章和下章中多有应用，要学会和掌握它．

综例 5.4.2 已知 A，B 均为三阶矩阵，且 $AB=A-B$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个互异的特征值．证明：

(1) $\lambda_i\neq-1\ (i=1,2,3)$；

(2) 存在可逆矩阵 C，使 $C^{-1}AC$，$C^{-1}BC$ 同时对角化．

思路 若 λ 是 A 的特征值，应满足 $Ax=\lambda x$ 或 $|\lambda I-A|=0$．若不是，则相反，即 $|\lambda I-A|\neq0$（等价于 $\lambda I-A$ 可逆）．

又由于 A 有三个互异的特征值，故 A 可相似对角化．由已知 $AB=A-B$，可推出 $(A+I)(I-B)=I$，既可推出 $I+A$ 可逆，又可推出 $AB=BA$．受综例 5.4.1 的启发，A，B 具有相同的特征向量，可以同时对角化．

【证明】 (1) 已知 $AB=A-B$，所以 $A-B-AB+I=I$，即 $(A+I)(I-B)=I$，所以 $(A+I)^{-1}=I-B$，故 $|I+A|\neq0$，即 $\lambda=-1$ 不是 A 的特征值．

(2) 方法 1：因为 $(A+I)(I-B)=(I-B)(A+I)$（逆矩阵的性质），展开上式得 $AB=BA$．设 $Ax_i=\lambda_ix_i\ (i=1,2,3)$，则 $A(Bx_i)=B(Ax_i)=B(\lambda_ix_i)=\lambda_i(Bx_i)$．

若 $Bx_i\neq0$，则 Bx_i 也是 A 的属于 λ_i 的特征向量．又由于 λ_i 是一重特征值（$i=1,2,3$），且 λ_i 互异，故 A 可相似对角化，故 λ_i 的几何重数也为 1．所以属于 λ_i 的特征向量成比例，即得 $Bx_i=\mu_ix_i\ (i=1,2,3)$．若 $Bx_i=0$，则 $Bx_i=0\cdot x_i=\mu_ix_i$．故 A 的三个线性无关的特征向量也是 B 的三个特征向量．设 $P=(x_1\ x_2\ x_3)$，则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),$$
$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\mu_3).$$

故 A, B 可同时对角化 .

方法 2: 由题设 A 有 3 个互异的特征值, A 可对角化, 设存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. 由于 $AB = A - B$, 于是

$$P^{-1}(AB)P = P^{-1}(A - B)P,$$

$$P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}AP - P^{-1}BP,$$

$$(P^{-1}AP + I)P^{-1}BP = P^{-1}AP,$$

$$\mathrm{diag}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 1)P^{-1}BP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

由(1), $\lambda_i \neq -1$, $i = 1, 2, 3$, 所以 $\lambda_i + 1 \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. 于是 $\mathrm{diag}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 1)$ 可逆, 且 $\mathrm{diag}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 1)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_1 + 1}, \dfrac{1}{\lambda_2 + 1}, \dfrac{1}{\lambda_3 + 1}\right)$, 于是

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= \mathrm{diag}(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 1)^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ &= \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + 1}\right) . \end{aligned}$$

【证毕】

综例 5.4.3　已知三阶矩阵 A 和三维向量 x, 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$.

(1) 记 $P = (x\ \ Ax\ \ A^2x)$. 求三阶矩阵 B, 使得 $A = PBP^{-1}$.

(2) 计算行列式 $|A + I|$.

(2001 年考研题)

思路　要使 $A = PBP^{-1}$, 即 $AP = PB$, 而 $P = (x\ \ Ax\ \ A^2x)$, 即

$$\begin{aligned} A(x\ \ Ax\ \ A^2x) &= (x\ \ Ax\ \ A^2x)B = (Ax\ \ A^2x\ \ A^3x) \\ &= (Ax\ \ A^2x\ \ 3Ax - 2A^2x) . \end{aligned}$$

而 x, Ax, A^2x 是 $\mathbb{R}^3$ 空间的一组基, 从上式可看出 B 实际是 A 作用在这组基上被这组基线性表出的矩阵, 即 B 的第 1 列, 第 2 列, 第 3 列分别为 Ax, A^2x, A^3x 在基 x, Ax, A^2x 下的坐标 . 这样与 A 相似的矩阵 B 就求到了 . 这是本问题的关键所在, 下面就是求 B 的特征值了, 这也是 A 的特征值 .

第二种思路是设 $B = (b_{ij})_{3\times 3}$. 由 $AP = PB$, 直接代入 $P = (x\ \ Ax\ \ A^2x)$ 及已知条件 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$ 及 x, Ax, A^2x 线性无关等约束条件而求得 b_{ij}, 从而确定矩阵 B .

【解】　方法 1: 设 $P = (x\ \ Ax\ \ A^2x)$, 已知 x, Ax, A^2x 线性无关, 故 P 为可逆矩阵 .

设 $A = PBP^{-1}$, 即 $AP = PB$. 把 P 代入并利用已知 $A^3x = 3Ax - 2A^2x = 0 \cdot x + 3Ax - 2A^2x$, 得

$$A(x\ \ Ax\ \ A^2x) = (x\ \ Ax\ \ A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

所以 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}=P^{-1}AP$,即 $A\backsim B$.

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda&-3\\0&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)=0,$$

所以 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-3$ 为 B 的特征值.

又 $A\backsim B$,故 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 也是 A 的特征值.所以 $A+I$ 的特征值为 $1,2,-2$,故 $|A+I|=1\times2\times(-2)=-4$.

方法 2:设

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix},\quad P=(x\ \ Ax\ \ A^2x).$$

由 $AP=PB$ 得

$$(Ax\quad A^2x\quad A^3x)=(x\quad Ax\quad A^2x)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}.$$

比较等式两边,得

$$Ax=b_{11}x+b_{21}Ax+b_{31}A^2x,\tag{1}$$
$$A^2x=b_{12}x+b_{22}Ax+b_{32}A^2x,\tag{2}$$
$$A^3x=b_{13}x+b_{23}Ax+b_{33}A^2x.\tag{3}$$

将已知条件 $A^3x=3Ax-2A^2x$ 代入(3)得

$$3Ax-2A^2x=b_{13}x+b_{23}Ax+b_{33}A^2x,$$

即

$$b_{13}x+(b_{23}-3)Ax+(b_{33}+2)A^2x=0.\tag{4}$$

由已知 x,Ax,A^2x 线性无关,由(4)式得 $b_{13}=0,b_{23}=3,b_{33}=-2$.

同理,由(1)式得 $b_{11}=0,b_{21}=1,b_{31}=0$;由(2)式得 $b_{12}=0,b_{22}=0,b_{32}=1$.所以

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.$$

又由 A 与 B 相似,故 $A+I$ 与 $B+I$ 相似,故

$$|A+I|=|B+I|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

【解毕】

【注】 (1) 在解相似矩阵的问题中,由 $P^{-1}AP = B$ 可得 $AP = PB$. 设可逆矩阵 $P = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$,只得到

$$A(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)B.$$

可得出结论: B 的第 j 列为 Ax_j 在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的坐标. 这与线性变换在一组基下的对应矩阵的构造是一致的. 利用这个结论,常常可以求得与 A 相似的矩阵 B.

(2) 本题的解法 2 中,设未知矩阵 $B = (b_{ij})_{3\times3}$,然后利用已知的各种条件作为约束条件来定 B 的元素 b_{ij},这种方法在各章中都有应用. 这也是求未知矩阵或证明某矩阵具有某种特点的基本方法之一.

综例 5.4.4 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但不惟一. 试求: (1) a 的值; (2) 正交矩阵 Q,使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

(2001 年考研题)

思路 本题所给对称矩阵 A 中有参数 a 待定,但由已知条件 $Ax = \beta$ 有无穷多个解的条件知 $\mathrm{r}(A \quad \beta) = \mathrm{r}(A) < 3$,因此可据此关系定出 a 来. 确定 A 以后,下面就是一个普通的实对称矩阵的正交对角化问题.

【解】 对线性方程组 $Ax = \beta$ 的增广矩阵 $(A \quad \beta)$ 进行初等行变换,有

$$(A \quad \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a+2 \end{pmatrix}.$$

由于已知方程组 $Ax = \beta$ 有解但不惟一,所以 $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A \quad \beta) < 3$,故 $a = -2$. 于是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0,$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$. 对应的特征向量为 $x_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $x_2 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $x_3 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

由于每个特征值的代数重数均为 1,即互不相同,所以 x_1, x_2, x_3 是互相正交的,只需将它们单位化得

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^{\mathrm{T}}.$$

取

$$Q=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix},$$

则有 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(0,3,-3)$. 【解毕】

综例 5.4.5 若 A 是 n 阶正交矩阵,λ 是 A 的实特征值,x 是 A 的属于 λ 的特征向量.求证 λ 只能是 ±1,并且 x 也是 A^{T} 的特征向量.

思路 求某矩阵 B 的特征值和特征向量,我们可以总结为:若 B 是具体的矩阵,则利用基本计算方法,通过计算 B 的特征方程 $|\lambda I-B|=0$ 而得 λ 值,再解线性方程组 $(\lambda I-A)x=0$ 得 λ 所对应的特征向量.若 B 矩阵是抽象的,则利用定义 $Bx=\lambda x$,再把已知条件直接代入或间接代入推出 λ 的关系式及与 x 的关系式,从而得到结论.

本题已知 A 是正交矩阵,应用上面所述第二种方法.设 $Ax=\lambda x$,因为 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$,故把 $Ax=\lambda x$ 两边转置并代入上式,再利用 A^{-1} 的特征值为 A 的特征值的倒数等结论,推出 λ 的关系式,从而求出 λ 值来.进一步把 λ 值代入 $Ax=\lambda x$,可讨论 A^{T} 的特征向量也是 x.

【证明】 设 $Ax=\lambda x$,两边转置得 $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\lambda x^{\mathrm{T}}$,上式右乘 x 得 $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}x=\lambda x^{\mathrm{T}}x$,因 A 是正交阵.故 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$,或 $A^{\mathrm{T}}A=I$,所以 $A^{\mathrm{T}}x=A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$,代入上式得

$$x^{\mathrm{T}}A^{-1}x=x^{\mathrm{T}}\frac{1}{\lambda}x=\frac{1}{\lambda}x^{\mathrm{T}}x=\lambda x^{\mathrm{T}}x.$$

所以 $x^{\mathrm{T}}x=\lambda^2x^{\mathrm{T}}x$,即 $(\lambda^2-1)x^{\mathrm{T}}x=0$.

因 λ 是 A 的实特征值,x 为 λ 对应的特征向量,故为实非零向量.设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$($x_i$ 为实数,不全为 0,$i=1,2,\cdots,n$),则 $x^{\mathrm{T}}x=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2>0$.故 $\lambda^2-1=0$,所以 $\lambda=\pm1$.

由 $\lambda=1$ 代入 $Ax=\lambda x$,得 $Ax=x$.两边左乘 A^{T} 得 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}x$,即 $A^{\mathrm{T}}x=Ix=x$,所以 x 也是 A^{T} 的属于 $\lambda=1$ 的特征向量.同理可证,当 $\lambda=-1$ 时,由 $Ay=-y$.可得 $A^{\mathrm{T}}y=-y$.

故 A 与 A^{T} 的属于 $\lambda=\pm1$ 时的特征向量相同. 【证毕】

【注】 由例 5.1.4.我们曾证明过,一般的 n 阶矩阵 A,它的转置矩阵 A^{T} 与 A 有相同的特征值,但 A 与 A^{T} 的属于同一特征值的特征向量是没有必然的联系的.这与 A 是正交矩阵时的上面所证过的结论是不同的.

综例 5.4.6 A,B 均为 n 阶矩阵,且 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)<n$.求证 A,B 有共同的特征向量.

(1996 年清华大学考题)

思路 由已知条件 A,B 均为 n 阶矩阵,且 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)<n$,可推出 $\mathrm{r}(A)<n$,$\mathrm{r}(B)<$

n. 所以 $|A|=0$, $|B|=0$. 容易地得到这两个结论后, 与矩阵的特征值和特征向量联系起来, 立刻会得到 A 与 B 均有 0 特征值. 而求 $\lambda=0$ 所对应的特征向量就要解齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$, 问题就转换成了只要证明在 $r(A)+r(B)<n$ 时, $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 必有共同的非零解就行了.

【证明】　设 $r(A)=s<n$, $r(B)=t<n$. 则 $|A|=0$, $|B|=0$. 故 A 与 B 均有零特征值. 设 $(0\cdot I-A)x=Ax=0$ 的基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-s}$, $(0\cdot I-B)x=Bx=0$ 的基础解系为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-t}$. 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-s},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-t}$ 必然线性相关. 这是因为向量组所含向量的个数为 $n-s+n-t=n+(n-s-t)>n$, 而 $n+1$ 个 n 维向量必然线性相关. 于是存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-s},l_1,l_2,\cdots,l_{n-t}$ 使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-s}\alpha_{n-s}+l_1\beta_1+\cdots+l_{n-t}\beta_{n-t}=0$. 令 $\gamma=k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-s}\alpha_{n-s}=-(l_1\beta_1+\cdots+l_{n-t}\beta_{n-t})$. 不失一般性, 设 $k_1\neq0$. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-s}$ 线性无关, 所以 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-s}\alpha_{n-s}\neq0$, 即 $\gamma\neq0$.

同理, 若设 $l_1\neq0$. 因为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-t}$ 线性无关, 所以 $l_1\beta_1+\cdots+l_{n-t}\beta_{n-t}\neq0$, 即 $\gamma\neq0$.

而 γ 既是 $Ax=0$ 的解, 又是 $Bx=0$ 的解, 故 γ 为 A 的属于 $\lambda=0$ 的特征向量, 也为 B 的属于 $\lambda=0$ 的特征向量. 因此, A, B 有共同的特征向量.　　【证毕】

【注】　在求解矩阵 A 的特征值、特征向量时, 当 $|A|=0$ 时, A 必有零特征值, 且解线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系就是求特征值零所对应的线性无关的特征向量, 这一点在很多问题中都要用到.

综例 5.4.7　某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将 1/6 熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐, 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 2/5 成为熟练工. 设第 n 年一月统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n. 记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式, 并写成矩阵形式 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

(2) 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量, 并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时, 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

(2000 年考研题)

思路 本题的关键在于读懂题意,写出 x_{n+1} 与 y_{n+1} 用 x_n, y_n 来表达的关系式:第 n 年初熟练工与非熟练工所占百分比为 x_n 和 y_n,第 $n+1$ 年初的熟练工所占的百分比 x_{n+1} 由两部分构成.第一部分是上一年的熟练工 x_n 中有 $\frac{5}{6}$ 保留下来,即有 $\frac{5x_n}{6}$ 构成 x_{n+1} 的第一部分;第二部分是由上年补齐的 $\frac{x_n}{6}$ 新非熟练工和上一年 y_n 老非熟练工一起经过培训,其中的 $\frac{2}{5}$ 构成新的熟练工,即 $\frac{2}{5}\left(\frac{x_n}{6}+y_n\right)$ 组成第二部分.这样 $x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)$.同理,第二年的非熟练工 y_{n+1} 由新老非熟练工经过培训后仍不合格的那 $\frac{3}{5}$ 所组成,即 $y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)$.有了这个关系式,就可以进一步写成矩阵的形式,按要求计算其他的问题了.

【解】 (1)

$$\begin{cases} x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n, \\ y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n. \end{cases}$$

即得 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$,其中 $A=\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

(2) 方法 1:求 A 的特征值.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-\frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \lambda-\frac{3}{5} \end{vmatrix}=(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right),$$

所以 $\lambda_1=1,\lambda_2=1/2$.

当 $\lambda_1=1$ 时,得对应的特征向量为 $x_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\eta_1$;

当 $\lambda_2=1/2$ 时,得对应的特征向量为 $x_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\eta_2$.

方法 2:

$$A\eta_1=\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\eta_1,$$

$$A\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\eta_2 .$$

又$(\eta_1\ \eta_2)=\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}=P, |P|\neq 0$.所以 η_1,η_2 线性无关,即 η_1 是特征值为 1 对应的 A 的特征向量,η_2 是特征值为 $1/2$ 对应的 A 的特征向量,且线性无关.

(3) $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$.

欲求 A^n,先把 A 相似对角化.由 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,得 $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}P^{-1}$.而

$P=\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1\\-1&4\end{pmatrix}$ 所以

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}P^{-1}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&4\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n&4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n\\1-\left(\frac{1}{2}\right)^n&1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此
$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}.$$
【解毕】

【注】 (1) 本题是用特征值、特征向量解决实际问题的一个典型例题.解决此类问题的关键是把所求量用向量形式表示,并用矩阵表示它们之间的关系,得到用来推导向量 α_{n+1} 与 α_n 之间的一个矩阵乘积表达式,如例中的(1)问.进一步用矩阵的特征值、特征向量把其相似对角化,求其 n 次方幂,而得到相关的结果.如例中的(2),(3)问.

(2) 应用问题往往题字比较长.要准确弄懂题意须多读几遍题目,然后根据题目要求,设定数学符号,建立数学模型.本题的(1)、(2)问实际上是给了建立此数学模型的提

示步骤.如果本题直接改为:某试验性生产线……,记成向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$,当$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$时,求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.那么你在解此题时,应把(1),(2)问的内容作为解此题的步骤来做.

综例 5.4.8 设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$是实正交矩阵,且 $a_{11} = 1$, $b = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$,则线性方程组 $Ax = b$ 的解是______.

(2004 年考研题)

思路 A 是正交矩阵且 $a_{11} = 1$,不妨设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$,且 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$,所以 $x = A^{-1}b = A^{\mathrm{T}}b$.

【解】 由 A 是正交矩阵且 $a_{11} = 1$,不妨设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix},$$

满足 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.于是

$$x = A^{-1}b = A^{\mathrm{T}}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

故 $Ax = b$ 的解是$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$. 【解毕】

综例 5.4.9 设 A, B 为同阶方阵,

(1) 如果 A, B 相似,试证 A, B 的特征多项式相等;

(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立;

(3) 当 A, B 均为实对称矩阵时,试证(1)的逆命题成立.

(2002 年考研题)

思路 特征多项式相等是两个矩阵相似的必要条件但不是充分条件,举例只要举一个矩阵可对角化而另一个矩阵不可对角化即可 实对称矩阵都可对角化,他们又有相同特征值,也即和同一个对角矩阵相似,由相似的传递性和对称性就能证得.

【解】 (1) 设 A, B 相似,即存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP = B$,于是

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\ &= |P^{-1}||\lambda I - A||P| \end{aligned}$$

$$= |\lambda I - A| .$$

(2) 令 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$,它们的特征多项式都是$(\lambda-1)^2$,但由于 $r(B)=1$,属于 1 的特征向量只有一个, B 不能对角化, 即 B 不与对角阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$相似, 也即 A 与 B 不相似 .

(3) 设 A, B 都是实对称矩阵,由题设 A, B 有相同特征多项式,因此 A, B 有相同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,由于 A, B 是实对称矩阵,所以存在可逆矩阵 P 和可逆矩阵 Q,使得

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

$$Q^{-1}BQ=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) .$$

于是

$$P^{-1}AP = Q^{-1}BQ,$$

$$(PQ^{-1})^{-1}APQ^{-1} = B .$$

由 P 和 Q 都是可逆矩阵,故 PQ^{-1} 是可逆矩阵,所以 A 与 B 相似 .　【解毕】

【注】 (2)中例子不惟一 .例如 $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$也可 .证明它们不相似, 也可用反证法 .设 A, B 相似,即存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$,由于 $A=2I$,所以 $P^{-1}2IP=2I=B$,与 $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$矛盾 .

5.5　练　习　题

1 . 已知 $-1,0,1$ 是三阶矩阵 A 的 3 个特征值,则 $4I-2A$ 的行列式 $|4I-2A|=$______ .

2 . 矩阵$\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$的非零特征值是______ .

(2002 年考研题)

3 . 设 A 是三阶矩阵, A^{-1} 的特征值是 1,2,3, 则 A^* 的特征值是______ .

4 . 已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}\sim B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,则 $x=$______, $y=$______ .

5 . 设 A 是三阶矩阵, 有特征值 $2, -3, 6$,则下列矩阵中, 满秩的是

(A) $I-2A$;　(B) $3I+A$;　(C) $2A-6I$;　(D) $A-6I$.

6. ξ是 n 阶矩阵 A 的属于 λ_0 的特征向量,则 ξ也是下面矩阵______的特征向量。

(A) I;　　(B) A^2+3A;　　(C) A^{T};　　(D) A^* .

7. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,求矩阵 A 的特征值和特征向量,并判断其能否对角化.若能对角化,求可逆矩阵 P 及对角矩阵Λ,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

8. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,求 A 的特征值和特征向量,并判断其是否可对角化?若能对角化,求可逆矩阵 P 及对角矩阵Λ,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

9. 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$,求 A 的特征值和特征向量,并判断 A 是否与对角矩阵相似.

10. 设 $B=P^{-1}AP$, x 是矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量,证明 $P^{-1}x$ 是矩阵 B 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

11. 设 $A=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix}$, A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=12$,求 x,并判断 A 是否和对角矩阵相似 若能对角化,求可逆矩阵 P 和对角矩阵Λ,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

12. 设 A 为对角元互不相同的下三角矩阵,试证明 A 可对角化.

13. 设 n 阶矩阵 A 的秩 $r(A)=1$,且 $\operatorname{tr}A=m\neq0$,证明 A 可对角化.

14. 设 n 阶矩阵 A 的全体元素皆为 1,求可逆矩阵 P 和对角矩阵Λ,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

15. 已知 A 是 n 阶矩阵满足 $A^2+A=0$,证明 A 可对角化,并求其相似对角矩阵.

16. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,求正交矩阵 Q 和对角矩阵Λ,使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

17. 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,求正交矩阵 Q 和对角矩阵Λ,使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

18．已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,1,-2$，$(1,1,-1)^T$ 是 A 的属于特征值 -2 的特征向量，求矩阵 A．

19．设 n 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_i \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，证明存在特征值为非负的实对称矩阵 B，使得 $A=B^2$．

20．设 A 是四阶矩阵，A 有 4 个相互正交的特征向量，试证明 A 是对称矩阵．

第 6 章　二　次　型

6.0　引　　言

n 个变量的二次齐次多项式称为 n 元二次型.它不仅在理论上而且在许多实际问题中都有着重要的应用.本章只讨论关于实系数二次型的两个问题.第一个问题是围绕二次型的化简展开的.要使二次型的表示形式最简单又不失其本质,必须通过变量的可逆线性替换来实现.对实二次型做可逆线性替换主要有两种方法.一种是配方法,另一种是正交变换法.采用不同的可逆线性替换得到的标准形不一样,因此要研究二次型的规范形,从而得到实二次型的惯性定理.第二个问题是研究实二次型正定的性质,讨论有关实二次型正定的判别条件以及实二次型正定性的应用.

实二次型的矩阵是实对称矩阵.讨论实二次型的问题时,要学会综合运用矩阵的行列式、矩阵的秩、线性方程组的理论、矩阵的特征值与特征向量及正交矩阵等知识,以及用正交变换方法把实对称矩阵相似对角化、施密特正交化等方法.

6.1　二次型的基本概念,二次型的标准形

n 元二次型是含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式,即 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$(其中令 $a_{ij} = a_{ji}$).

若令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 且满足 $A^T = A$(即 A 为对称矩阵),则 n 元二次型又有矩阵的形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$,对称矩阵 A 称为二次型 f 的矩阵.A 与 f 是一一对应的.r(A) 称为二次型的秩.

A 为实对称矩阵,则 $f = x^T Ax$ 为实二次型.

一个二次型 $f = x^T Ax$,总可以经过满秩的线性替换 $x = Cy$ 化为 $f = y^T(C^T AC)y = y^T By$,其中 $B = C^T AC$,称为 A 合同于 B,记作 $A \simeq B$.

矩阵的合同满足自反性、对称性、传递性.

对任意一个实系数的 n 元二次型 $f=x^{T}Ax$, 总可以通过满秩的线性替换化为仅有平方项的形式: $f=a_1y_1^2+a_2y_2^2+\cdots+a_ry_r^2$, 称为二次型 f 的标准形, 其中 r 是矩阵 A 的秩. 当平方项的系数是±1, 即 $f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$ 时, 称为 f 的规范形.

把实二次型用满秩的线性替换化为标准形、规范形的方法有: (1) 配方法, (2) 初等变换法, (3) 正交变换法. 其中正交变换法只能化为标准形.

无论选取怎样的满秩线性替换把二次型化为规范形(或标准形), 正项的个数 p 和负项的个数 $r-p=q$ 都是惟一的. 换言之, p 和 q 是由二次型 f 惟一确定的(或说由 A 惟一确定的), 也即二次型 f 的规范形是惟一的. p 和 q 分别称为 f 的正、负惯性指数.

任一实对称矩阵必合同于一个对角形.

例 6.1.1　用配方法把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形, 并写出满秩的线性替换 $x=Cy$.

【解】　方法 1: 先把含有 x_1 的各项合在一起, 配成完全平方项, 再把余下的含 x_2 的项合并在一起配成完全平方, 即得到标准形. 这是配方法的一般步骤.

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3)+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3\\
&=(x_1+2x_2+x_3)^2-4x_2^2-x_3^2-4x_2x_3+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3\\
&=(x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3\\
&=(x_1+2x_2+x_3)^2-3\left(x_2^2+\frac{2}{3}x_2x_3\right)+2x_3^2\\
&=(x_1+2x_2+x_3)^2-3\left(x_2+\frac{1}{3}x_3\right)^2+\frac{1}{3}x_3^2+2x_3^2\\
&=(x_1+2x_2+x_3)^2-3\left(x_2+\frac{1}{3}x_3\right)^2+\frac{7}{3}x_3^2.
\end{aligned}
$$

令
$$
\begin{cases}
y_1=x_1+2x_2+x_3,\\
y_2=x_2+\dfrac{1}{3}x_3,\\
y_3=x_3.
\end{cases}
$$

即
$$
y=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&\dfrac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}x,
$$

从而
$$
x=\begin{pmatrix}1&-2&-1/3\\0&1&-1/3\\0&0&1\end{pmatrix}y,
$$

于是得二次型的标准形为 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2$.

若在实数域中化 f 为规范形,可令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_3 + x_2, \\ y_2 = \sqrt{3}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right), \\ y_3 = \sqrt{\frac{7}{3}}x_3. \end{cases}$$

即

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{7}{3}} \end{pmatrix} x,$$

得 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

方法 2: 方法 1 是按 x 的下标的顺序配完全平方的,也可不按顺序,而按配方的难易程度来选择次序: 先按 x_1 配方后,再把余下的含有 x_3 的项合并在一起,配成完全平方.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2\left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 3x_2^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2\left(x_3 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{7}{2}x_2^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ y_2 = x_3 - \frac{1}{2}x_2, \\ y_3 = x_2. \end{cases}$$

即

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

从而

$$x=\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}y,$$

于是得二次型的标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2-\frac{7}{2}y_3^2$.

在实数域中化 f 为规范形.可令

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+x_3,\\ y_2=\sqrt{2}\left(x_3-\frac{1}{2}x_2\right),\\ y_3=\sqrt{\frac{7}{2}}x_2.\end{cases}$$

得二次型 f 的规范形为 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　【解毕】

【注】 (1) 由方法 1 和方法 2 得到的结果可知,二次型的标准形是不惟一的(尽管答案形式不一样,但系数为正数的平方项和系数为负数的平方项的个数是惟一的).而二次型的规范形是惟一的(指正惯性指数与负惯性指数相同意义下的惟一).

(2) 方法 1 所用的配方次序,即按 x 的下标顺序配方,得到的 $x=Cy$.其中可逆阵 C 一定是个对角元不为 0 的上三角阵.而方法 2 则不一定.

例 6.1.2　把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 化为规范形,并求所作的非退化的线性替换.

【解】 本题与例 6.1.1 不同,只有混合项,没有平方项,为了利用前面的配方法,对这样的问题是先作一固定的满秩线性替换,以使二次型中出现平方项.令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\ x_2=y_1-y_2,\\ x_3=y_3.\end{cases}$$

即
$$x=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}y,$$

代入得

$$\begin{aligned}f&=y_1^2-y_2^2+(y_1-y_2)y_3+(y_1+y_2)y_3\\ &=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3\\ &=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2.\end{aligned}$$

令
$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3. \end{cases}$$

即
$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

从而
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

代入得 $f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ 为 f 的规范形.

所用的线性替换为

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

即
$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z.$$
【解毕】

【注】 用配方法求满秩的线性替换化二次型为标准形或规范形时,有时要做两次线性替换,必须保证每次所作的替换 $x = P_1 y$, $y = P_2 z$ 都是满秩的,即保证 P_1, P_2 均为满秩矩阵 这就是在令 x 与 y 及 y 与 z 的关系时,要像例题 6.1.1 与 6.1.2 那样做,保证所得的替换矩阵是满秩矩阵,否则,不能保证这一点.例如

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_1x_4 \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + \\ &\quad (x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2) + (x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2) \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_1)^2. \end{aligned}$$

令
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3 + x_4, \\ y_4 = x_4 + x_1. \end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \text{或} \quad y = Cx$$

代入得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$.

但 $y = Cx$ 中，$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$，所以 C 不可逆.

因此,所求的替换不是可逆线性替换,不满足要求.这就不能保证有一个 y,就有惟一的 x 与之对应.因为 C 不可逆,导致 $y = Cx$ 这个线性方程组无解或有无穷多个解.只有 C 可逆,才能保证 $y = Cx$ 中 x 与 y 的一一对应.

例 6.1.3　已知矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{与} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
问它们是否相似?是否合同?为什么?

思路　B 是对角矩阵,其特征值为对角元素:1,1,3.而 A 为一实对称矩阵,一定可以正交对角化,即一定存在一正交矩阵 Q,使 $Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$.问题是 A 的特征值如何.

【解】

取
$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0,$$
所以
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

又 A 是实对称矩阵,一定存在正交矩阵 Q,使 $Q^{T}AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = B$,所以 A 与 B 既合同,又相似.　【解毕】

【注】　(1) 对于实对称矩阵 A,一定存在正交矩阵 Q,使 $Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$,这个结论在第 5 章已讨论过.至于如何求正交矩阵 Q,也在第 5 章中讨论过.再

重申一下:先解$|\lambda I - A| = 0$,求出A的实特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,然后求不同特征值对应的线性无关的特征向量;一重特征值对应的特征向量只需单位化.n_i重特征值所对应的n_i个线性无关的特征向量需施密特正交化,单位化;然后把经过这样处理过的n个特征向量作为列就构成了所求正交矩阵Q,即$Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$.

(2) 实二次型$f = x^{\mathrm{T}}Ax$用正交化方法化为标准形,就是对f的对应矩阵A(实对称矩阵)用上述方法正交对角化.求得正交矩阵Q后,作$x = Qy$代入$f = y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQy = y^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$($\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的特征值).

(3) 从n阶实对称矩阵合同、相似的角度看,由以上分析我们得到:两个实对称矩阵A, B合同,即$A \simeq B$ A, B的正、负惯性指数相同.A, B相似,即$A \sim B$ A, B具有相同的特征值 $A \simeq B$.

例 6.1.4 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$的秩为2.(1) 求参数$c$及此二次型对应矩阵的特征值.(2) 指出方程$f(x_1, x_2, x_3) = 1$表示何种二次曲面.

(1996 年考研题)

【解】 (1) 此二次型对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$$

因为 $$\mathrm{r}(A) = 2, \quad 所以 \quad |A| = 0.$$

而 $$|A| = -24(c-3) = 0, \quad 所以 \quad c = 3,$$

故 $$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9),$$

故A的特征值为$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$.

(2) 由于存在正交矩阵P,使

$$P^{\mathrm{T}}AP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 4 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$

即 $$f(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow[P\ 正交]{x = Py} 4y_2^2 + 9y_3^2 = 1.$$

所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示椭圆柱面. 【解毕】

【注】 定参数 c 时,亦可对 A 进行初等变换而得:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix},$$

因为 $r(A) = 2$, 所以 $c = 3$.

例 6.1.5 已知二次曲面方程 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$,可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$.求 a, b 的值和正交矩阵 P.

(1998 年考研题)

思路 已知二次曲面方程 $f(x, y, z) = 4$,其中方程左面 $f(x, y, z)$ 是一个三元二次型,经过所给正交变换化为 $\eta^2 + 4\zeta^2$,这是 f 的标准形.这个已知条件转换成矩阵的问题,即 f 的矩阵 A 经过正交变换后化为 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$,即求一个正交矩阵 P 使 $P^{T}AP = P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0, 1, 4) = \Lambda$,其中,0,1,4 为 A 的三个特征值,$A \backsim \Lambda$ 且 $A \simeq \Lambda$,由此可得到本题的解.

【解】 设 $f(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = (x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为

$$A \backsim \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix},$$

而 $\operatorname{tr} A = 2 + a = 0 + 1 + 4 = 5$,所以 $a = 3$.

由 $\lambda = 0$, 即 $|A| = 0$, 得 $b = 1$.所以

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 0$ 对应的 A 的特征向量为 $x_1 = (1, 0, -1)^T$;

$\lambda_2 = 1$ 对应的 A 的特征向量为 $x_2 = (1, -1, 1)^T$;

$\lambda_3 = 4$ 对应的 A 的特征向量为 $x_3 = (1, 2, 1)^T$.

把 x_1, x_2, x_3 单位化得

$$r_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^T, \quad r_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, \quad r_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

所以

$$P = (r_1\ r_2\ r_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

为所求正交矩阵. 【解毕】

【注】 用正交变换 $x = Py$ 把二次型化为标准形,重要的应用方面是对平面或空间有心二次曲线(曲面)的化简和作图,即把一般的二次方程通过正交变换化为标准二次曲线方程.把在旧坐标系下不好作图的方程化为在新坐标系下容易作图的标准方程.例如本题,通过坐标变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ 把方程 $x^2 + 3y + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 4$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$.而正交变换 $x = Py$ 不改变向量的度量性质,即 $|x| = |y|$, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$(其中 $x_1 = Py_1$, $x_2 = Py_2$) 原方程在原坐标系下的曲线(或曲面),在新的坐标系下的方程就是标准方程,图形是标准曲线(或曲面),这样原来的图形在新坐标系下很容易就做出来了.

例 6.1.6 把二次方程 $x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 2yz + \sqrt{3}x - 6\sqrt{3}y + \sqrt{3}z + \frac{1}{2} = 0$ 用正交变换与坐标平移化为标准方程,并判断图形类型.

思路 已给方程 $f(x, y, z) = 0$,其中 $f(x, y, z)$ 中的前 6 项构成一个三元二次型 $x^T Ax$,可用正交变换 $x = Py$ 化为标准形,这样 $f(x, y, z) = 0$ 就化为了只有平方项和一次项的和的形式,再做一个坐标平移就能得到标准方程了.

【解】 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b = (\sqrt{3}, -6\sqrt{3}, \sqrt{3})$,则原方程化为 $x^T Ax +$

$bx+\dfrac{1}{2}=0$.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-4 & -1\\ -2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.

$\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为 $\xi_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$；

$\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $\xi_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

$\lambda_3=5$ 对应的特征向量为 $\xi_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

对三个互相正交的特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化，得

$$r_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\quad r_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{-1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}},\quad r_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令
$$P=(r_1\ r_2\ r_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix},$$

代入原方程，得

$$-x_1^2+2y_1^2+5z_1^2+8y_1-5\sqrt{2}z_1+\frac{1}{2}=0.$$

配方得
$$-x_1^2+2(y_1+2)^2+5\left(z_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=10.$$

再平移坐标，即令
$$\begin{cases}x_2=x_1,\\ y_2=y_1+2,\\ z_2=z_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

得到方程
$$-x_2^2+2y_2^2+5z_2^2=10,$$

即
$$-\frac{x_2^2}{10}+\frac{y_2^2}{5}+\frac{z_2^2}{2}=1.$$

从而判断原方程图形为单叶双曲面 .　　【解毕】

例 6.1.7　设 A 是一个 n 阶对称矩阵 .如果对任意的 n 维向量 x，有 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$，则 $A=0$.

思路　本题要证明 $A=0$，实际上是证 A 中的任意元素 $a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，而已

知 A 是 n 阶对称矩阵,即 $a_{ij}=a_{ji}$.又对任意的 n 维向量,均有 $x^{T}Ax=0$,所以我们用特殊简单的 x 代入 $x^{T}Ax$,定出 a_{ij} 来.

【证】 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,其中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.取 $x=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{T}$ 得 $x^{T}Ax=a_{ii}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$.再取 $x=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{T}$,得 $x^{T}Ax=a_{ii}+a_{ij}+a_{jj}+a_{ji}=2a_{ij}=0$,即 $a_{ij}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所以 $A=0$. 【证毕】

例 6.1.8 设 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 作正交变换 $x=Py$ 化二次型为 y 的平方和.

(2) 求 f 在条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 下的最大值和最小值.

思路 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{T}Ax$,其中 A 是实对称矩阵.必存在正交矩阵 P,使 $P^{T}AP=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$,也即作 $x=Py$(P 为正交矩阵)使二次型 $f(x)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$(标准形).具体做法我们应已掌握.

要求 f 在条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 下的极大值和极小值,在这里不是用微积分中三元函数求极值的方法做.由于 $x=Py$ 使得 $|x|=|y|$($|x|^2=x^{T}x=(Py)^{T}(Py)=y^{T}(P^{T}P)y=y^{T}y=|y|^2$,即正交变换不改变向量的度量性质).因此 $x^{T}x=x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$.在条件 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ 下,$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=\lambda_1\left[y_1^2+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}y_2^2+\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}y_3^2\right]\leq\lambda_1(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$(其中设 λ_1 为最大的特征值).可求得 f 的最大值和最小值.

【解】 设
$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}3&0&2\\0&3&-2\\2&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x^{T}Ax.$$

(1) 求 A 的特征值.
$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-2\\0&\lambda-3&2\\-2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-7).$$
得 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=7$.

再求特征向量.

$\lambda_1=1$ 时,解 $(I-A)x=0$ 得 $x_1=(-1,\ 1,\ 1)^{T}$;

$\lambda_2=3$ 时,解 $(3I-A)x=0$ 得 $x_2=(1,\ 1,\ 0)^{T}$;

$\lambda_3=7$ 时,解 $(7I-A)x=0$ 得 $x_3=(1,\ -1,\ 2)^{T}$.

由于实对称矩阵 A 的三个不同特征值对应的特征向量已正交,故只需把它们单位化,得
$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,\ 1,\ 1)^{T},\qquad\xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0)^{T}.$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)^T .$$

所以 $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵,且

$$P^T AP = P^{-1} AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 7 \end{pmatrix} .$$

令 $x = Py$, 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.代入 $f(x_1, x_2, x_3)$ 得

$$f(x) = y_1^2 + 3y_2^2 + 7y_3^2 .$$

(2) 因 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^T x \xrightarrow{x = Py} (Py)^T (Py) = y^T (P^T P) y = y^T y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.因此 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 的条件转化为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 3y_2^2 + 7y_3^2 = 7\left(\frac{1}{7}y_1^2 + \frac{3}{7}y_2^2 + y_3^2\right)$$

$$\leq 7(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 7 .$$

取 $(y_1, y_2, y_3)^T = (0,0,1)^T$,显然满足 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ 的条件,此时 $f = 7$.

因此,在条件 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 下, f 的最大值为 7 .

同理, $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 3y_2^2 + 7y_3^2 \geq y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$. 且取 $(y_1, y_2, y_3)^T = (1,0,0)^T$ 时, $f = 1$.即在条件 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 下, f 的最小值为 1 . 【解毕】

【注】　这个结论可以推广到 n 元二次型,即对 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$.在 $x^T x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 的条件下, f 的最大值为 A 的最大的特征值 λ_{max} . f 的最小值恰为 A 的最小的特征值 λ_{min} .

而条件 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 为 $|x|^2 = x^T x = 1$, 即 x 为单位向量 .

例 6.1.9　二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为______ .

(2004 年考研题)

思路　二次型的秩即二次型的矩阵的秩 .

【解】　二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + x_1^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 . \end{aligned}$$

二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

易知 $\mathrm{r}(A) = 2$,所以二次型的秩为 2 .　【解毕】

例 6.1.10　已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = Py$ 可化成标准形 $f = 6y_1^2$,则 $a=$______ .

(2002 年考研题)

思路　依题意实二次型经正交变换化成 $f = 6y_1^2$,由这个标准形可知实二次型矩阵的特征值是 6,0,0 .再根据矩阵的特征值的和等于矩阵的迹,即可求出 a 的值 .

【解】　二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix},$$

由题设,二次型经正交变换得到标准形 $f = 6y_1^2$,知 A 的特征值为 6,0,0 .

根据矩阵的特征值的和等于矩阵的迹,有

$$3a = 6,$$

$$a = 2 .$$　【解毕】

例 6.1.11　设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^{\mathrm{T}}Ax = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \ (b > 0),$$

其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1,特征值之积为 -12 .

(1) 求 a, b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵 .

(2003 年考研题)

思路　欲求参数 a、b 的值,一种方法是利用矩阵特征值的性质:特征值之和等于矩阵的迹和特征值之积等于矩阵的行列式,另一种方法是写出二次型的矩阵的特征多项式,

求出特征值,再确定参数.

【解】 (1) **方法 1: 二次型 f 的矩阵为**

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

设 A **的特征值为** $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, **由题设知,**

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,$$

得 $a=1$, **又**

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-4a-2b^2=-12,$$

解得 $b=\pm 2$, **由题设** $b>0$, **所以** $b=2$.

方法 2: 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -b \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -b & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2+(2-a)\lambda-2a-b^2].$$

设 A **的特征值为** $\lambda_1=2,\lambda_2,\lambda_3$, **其中**

$$\lambda_2+\lambda_3=a-2,$$

$$\lambda_2\lambda_3=-2a-b^2.$$

由题设知

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+a-2=1,$$

所以 $a=1$, **又**

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=2(-2a-b^2)=-12,$$

得 $b^2=4$, **由** $b>0$, **所以** $b=2$.

(2) **由**(1)**有**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3).$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$,

$$(2I-A)=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

属于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为

$$\xi_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \xi_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_3=-3$,

$$(-3I-A)=\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

属于 $\lambda_3=-3$ 的特征向量为

$$\xi_3=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}.$$

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3 已经是正交向量组,只需单位化,得

$$\eta_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^{\mathrm{T}},\quad \eta_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$Q=(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&0&\frac{1}{\sqrt5}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt5}&0&-\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix},$$

则 Q 是正交矩阵,在正交变换 $x=Qy$ 下,有

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix},$$

此时,二次型的标准形为

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$

【解毕】

【注】 第(1)问用方法 2 时,在解第(2)问时,可以直接从(1)解得 λ_2 和 λ_3.

6.2　正定二次型

对于实二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ **如对任何的** $x\neq 0$ **恒有** $x^{\mathrm{T}}Ax>0$，**则称** f **是正定二次型**，f **的矩阵** A **称为正定矩阵**，**记作** $f>0$ **或** $A>0$．

n **元实二次型** $x^{\mathrm{T}}Ax>0$

$x^{\mathrm{T}}Ax$ **的正惯性指数** $p=n$

A **与** I **合同**

存在可逆矩阵 D，**使** $A=D^{\mathrm{T}}D$

A **的特征值全为正数**

A **的顺序主子式全大于** 0．

n **元实二次型** $x^{\mathrm{T}}Ax>0$，**则** $|A|>0$．

对于 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$，**如对于任意的** $x\neq 0$ **恒有** $x^{\mathrm{T}}Ax<0$，**则称二次型** f **负定**，A **为负定矩阵**，**记作** $f<0$ **或** $A<0$．

$$f<0\ (A<0)\qquad -f>0\ (-A>0).$$

例 6.2.1　**判断三元二次型** $f(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3$ **的正定性**．

【解】　**方法 1：用配方法化二次型为标准形**．

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 7x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3 \\ &= 7\left(x_1-\frac{1}{7}x_2-\frac{2}{7}x_3\right)^2+\frac{6}{7}\left(x_2-\frac{1}{3}x_3\right)^2+\frac{1}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

由于正惯性指数 $p=3$，**所以** f **为正定二次型**．

方法 2：用顺序主子式 $\Delta_i>0\,(i=1,2,3)$**判断**．

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad \Delta_1=|7|=7>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=6>0,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2>0.$$

所以 $f>0$．

方法 3：求 A **的特征值**．

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-7 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-8\lambda+2),$$

得 $\lambda_1=1,\lambda_2=4+\sqrt{14},\lambda_3=4-\sqrt{14}$,它们均为正数,所以 $f>0$. 【解毕】

【注】 对于具体的二次型判定,以上三种方法均常用.比较三种方法.一般来说把 f 的矩阵 A 写出,用 A 的顺序主子式来判断最简单.

例 6.2.2 当 t 取何值时,二次型 $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定的.

【解】 二次型矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix},$$

用 A 的顺序主子式 $\Delta_i(i=1,2,3)$ 判断.

$$\Delta_1=1>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=1-t^2>0,\text{得 } |t|<1.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&t&-1\\0&1-t^2&2+t\\0&2+t&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-t^2&2+t\\2+t&4\end{vmatrix}=-t(5t+4)>0,$$

得
$$\begin{cases}t>0,\\5t+4<0.\end{cases}(\text{矛盾})\quad \text{或}\quad \begin{cases}t<0,\\5t+4>0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}t<0,\\t>-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

当 $-\dfrac{4}{5}<t<0$ 时,$\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ 均大于 0,即二次型 $f>0$. 【解毕】

例 6.2.3 设有 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$,其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$为实数,试问:当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时,二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定二次型.

(2000 年考研题)

思路 本题 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$已是一个完全平方和的表达式了,因此,对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,总有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq0$,而此式等号成立当且仅当 n 个括号内全为 0.据此可找到 $f>0$ 的条件.注意齐次线性方程组只有零解 系数行列式$\neq0$.

【解】 由已知条件 对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq0$.其中等号成立当且仅当

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 = 0, \\ x_2 + a_2 x_3 = 0, \\ \cdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = 0, \\ x_n + a_n x_1 = 0 . \end{cases}$$

仅有零解,而

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n .$$

故当 $1+(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ 时,对于任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0$,即当 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq (-1)^n$ 时,二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为正定二次型. 【解毕】

例 6.2.4 已知 A为正定矩阵,证明 μA ($\mu > 0$ 为常数), A^{-1}, A^*, A^k (k为正整数)均为正定矩阵.

思路 本题讨论抽象的矩阵正定问题.由 A正定出发,据正定矩阵的充分必要条件可以有多种方法,同时也不要忽视用正定的定义这个方法.

【证明】 方法 1: 因为 $A > 0$,所以存在可逆矩阵 C,使 $A = C^T C$,又 $|A| > 0$,所以 A可逆,两边取逆得 $A^{-1} = (C^T C)^{-1} = C^{-1}(C^T)^{-1} = C^{-1}(C^{-1})^T = DD^T$ ($D = C^{-1}$可逆),所以 $A^{-1} > 0$.

$$A^* = |A| A^{-1} > 0 .$$

方法 2: 因为 $A > 0$,所以 A的特征值 $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$).A^{-1}的特征值为$\dfrac{1}{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$),所以 $A^{-1} > 0$; A^k 的特征值为 λ_i^k ($i = 1, 2, \cdots, n$),所以 $A^k > 0$.

方法 3: 因为 $A > 0$,所以对任意的 $x \in \mathrm{R}^n$ 且 $x \neq 0$,有 $x^T A x > 0$.又 $\mu > 0$ 所以 $\mu x^T A x > 0$,即 $x^T (\mu A) x > 0$,所以有 $\mu A > 0$. 【证毕】

【注】 (1) 以上三种方法可灵活使用,在不同的情况下采用不同的方法可使得解题过程最简洁.

(2) A 正定, A 必然对称, A^{-1}, A^*, A^k 也是对称的,此处不再证明.

例 6.2.5 A, B 均为 n 阶正定矩阵, k, l 为正数.证明 $kA + lB$ 为正定矩阵.

【证明】 利用定义.因为 A, B 均正定,所以对任意的 $x \neq 0$ ($x \in \mathrm{R}^n$) 有 $x^T A x > 0$, $x^T B x > 0$.又 $k > 0, l > 0$, 所以

$$x^T(kA)x > 0,\quad x^T(lB)x > 0.$$

上面两式相加,得 $x^T(kA+lB)x>0$,所以 $kA+lB>0$. 【证毕】

【注】 用定义证明矩阵正定是经常采用的方法.

例 6.2.6 设 A,B 为 n 阶正定矩阵,且 $AB=BA$.证明 AB 为正定矩阵.

思路 要证 AB 正定,首先要证明它是对称的,这一点很容易证明.

要证 $AB>0$,也可有几种方法.一是存在可逆矩阵 D,使 $AB=D^TD$.但是 D 如何找?由已知,得 $A=QQ^T$, $B=PP^T$,则 $AB=QQ^TPP^T$.显然 Q^TP 可逆,$(Q^TP)^T=P^TQ$,故 QQ^TPP^T 右边再乘 Q 就可写成 $(P^TQ)^T(P^TQ)$ 的形式,因此右乘 $I=QQ^{-1}$ 即满足要求.

二是证明 AB 的特征值全为正,从 $(AB)x=\lambda x$ 出发,利用 $A>0$ 的条件得 A 可逆,两边左乘 A^{-1} 得 $BX=\lambda A^{-1}x$,再利用 $B>0$, $A^{-1}>0$ 的条件,确定 $\lambda>0$.

三是 $A>0$, $B>0$,则它们均可正交对角化.把 A,B 用其对角形式与正交矩阵乘积代替,进一步分析 AB 与一正定矩阵相似,从而得到 $AB>0$.

【证明】 因为 $A>0,B>0$,所以 $A^T=A$, $B^T=B$.于是

$$(AB)^T = B^TA^T = BA = AB,\text{即 } AB \text{ 对称}.$$

方法 1: 因为 $A>0,B>0$,所以存在可逆矩阵 Q,P 分别使 $A=QQ^T$, $B=PP^T$.于是

$$\begin{aligned} AB &= (QQ^T)(PP^T) = QQ^TPP^T = QQ^TPP^TQQ^{-1} \\ &= Q(P^TQ)^T(P^TQ)Q^{-1}, \end{aligned}$$

所以
$$AB \backsim (P^TQ)^T(P^TQ)$$

令 $D=P^TQ$,则 $AB\backsim D^TD$.因为 D 可逆,所以 $D^TD>0$,其特征值全为正.而 AB 与 D^TD 相似,有相同的特征值,所以 $AB>0$.

方法 2: 设 $ABx=\lambda x$.因为 $A>0$,所以 A 可逆.上式两边左乘 A^{-1} 得

$$A^{-1}ABx = \lambda A^{-1}x,\quad \text{即}\quad Bx = \lambda A^{-1}x.$$

两边再左乘 x^T,得

$$x^TBx = \lambda x^TA^{-1}x.$$

因为 $B>0$, $A^{-1}>0$,且 $x\neq 0$,

所以
$$x^TBx>0,\quad x^TA^{-1}x>0.$$

故 $\lambda>0$,即 AB 的特征值全大于 0,所以 $AB>0$.

【注】 (1) 方法 1 用到了若 AB 与某个正定矩阵相似,则 AB 正定这个结论.而那个正定的矩阵是根据已知条件和有关定理推导和构造出来的.AB 与它相似的形式也是通过插入单位矩阵 $I=QQ^{-1}$ 或在已有的形式上启发而得到的.这就要求在证明和推导的过程中仔细考察,灵活运用一些特殊矩阵的性质.

(2) 方法 2 中得到 $Bx=\lambda A^{-1}x$ 形式后,注意式中的 x 是 AB 的属于特征值 λ 的特征向量.因为 B,A^{-1} 正定,应对任何不为零的 n 维向量 x 均有 $x^TA^{-1}x>0$, $x^TBx>0$,自然对于

特征向量 x(必然非零)也有 $x^T A^{-1} x>0$, $x^T Bx>0$.

例 6.2.7 已知 A, B 均为 n 阶实对称矩阵,且 A 正定.求证当 t 充分大时,$tA+B$ 正定.

思路 要证 t 充分大时,$tA+B$ 正定,显然需把 $tA+B$ 合同对角化.由于 $A>0$,故存在可逆矩阵 P,使 $P^T AP=I_n$,而 $P^T BP$ 仍是对称矩阵,因此存在正交矩阵 Q,使 $Q^T(P^T BP)Q$ 对角化.又 $Q^T(P^T AP)Q$ 仍是单位矩阵,那么 PQ 作用到 $tA+B$ 上就会得到期望的结果了.

【证明】 因为 A 对称正定,故存在可逆矩阵 P,使 $P^T AP=I_n$.因 $P^T BP$ 仍为实对称矩阵,所以存在正交矩阵 Q,使 $Q^T(P^T BP)Q=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 B 的特征值.

此时
$$Q^T(P^T AP)Q=Q^T I_n Q=Q^T Q=I.$$

令 $S=PQ$,则

$$\begin{aligned}S^T(tA+B)S&=Q^T P^T(tA+B)PQ\\&=Q^T P^T(tA)PQ+Q^T P^T BPQ=tI+\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\\&=\mathrm{diag}(t+\lambda_1,\ t+\lambda_2,\cdots,t+\lambda_n).\end{aligned}$$

当 t 充分大时,可使 $t+\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,即 $S^T(tA+B)S$ 正定,从而 $tA+B$ 正定. 【证毕】

【注】 本题中在利用两个可逆矩阵 P, Q 作合同变换时,第一次用 $P^T AP=I_n$.P 必须是可逆矩阵,而不是正交矩阵.因此时需要的是把 A 合同于单位矩阵 I,而正交矩阵做不到这点.因正交变换 $P^T AP$ 只能化为 $\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$(其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 为 A 的特征值).第二次用正交矩阵 Q,使 $Q^T(P^T BP)Q$ 对角化.尽管若 Q 不是正交矩阵而只是一般的可逆矩阵也可使 $Q^T(P^T BP)Q$ 对角化,但下一步要利用 $Q^T Q=I_n$ 才能使得 $Q^T(P^T AP)Q=Q^T Q=I_n$.因此实对称矩阵在何时用可逆矩阵或正交矩阵进行合同变换时,要看解题过程的需要.

例 6.2.8 设 A 是 n 阶正定矩阵,I 是 n 阶单位矩阵.证明 $A+I$ 的行列式大于 1.

(1992 年考研题)

思路 与上题类似,本题显然也是利用正交变换把 $A+I$ 化为对角阵,然后再计算行列式.

【证明】 因为 A 是正定矩阵,故存在正交矩阵 Q,使

$$Q^T AQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i > 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的特征值,因此

$$Q^T(A+I)Q = Q^TAQ + Q^TQ$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} + I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1 \end{pmatrix}.$$

上式两端取行列式,得

$$|Q^T(A+I)Q| = |Q^T||A+I||Q| = |Q^T||Q||A+I|$$

$$= |A+I| = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1) > 1.$$

即 $|A+I|>1$. 【证毕】

例 6.2.9 设 A 为三阶实对称矩阵,且满足条件 $A^2+2A=0$,已知 A 的秩 $r(A)=2$.

(1) 求 A 的全部特征值;

(2) 当 k 为何值时,矩阵 $A+kI$ 为正定矩阵.

(2002 年考研题)

思路 由 A 满足 $A^2+2A=0$,推出 A 的特征值满足 $\lambda^2+2\lambda=0$,再由 A 可对角化和 $r(A)=2$,推出 A 的特征值是 $-2,-2,0$.由 A 的特征值可以求出 $A+kI$ 的特征值,只要 $A+kI$ 的特征值大于零就能保证 $A+kI$ 正定.

【解】 (1) 设 λ 是 A 的特征值,则有 $x\neq 0$,满足

$$Ax = \lambda x,$$

由题设 $A^2+2A=0$,有

$$(A^2+2A)x = 0,$$

于是

$$(A^2+2A)x = (\lambda^2+2\lambda)x = 0,$$

由于 $x\neq 0$,有

$$\lambda^2+2\lambda = 0.$$

解得 $\lambda=-2,\lambda=0$.

又 A 是实对称矩阵,A 必和对角矩阵相似,依题设 $r(A)=2$,所以

$$A \sim \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

故 A 的全部特征值为 $-2,-2,0$.

(2) 由 A 是实对称矩阵,所以

$$(A+kI)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + kI = A + kI,$$

$A+kI$ 也是实对称矩阵 .$A+kI$ 的特征值为 $k-2, k-2, k$.所以当 $k>2$ 时, $A+kI$ 的特征值全大于零, $A+kI$ 为正定矩阵 .【解毕】

6.3　综 合 例 题

综例 6.3.1　设 A 是 m 阶实对称矩阵,且正定, B 是 $m\times n$ 实矩阵, B^{T} 为 B 的转置矩阵 .试证: $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\mathrm{r}(B)=n$.

(1999 年考研题)

思路　先考虑充分性,已知 $\mathrm{r}(B)=n$, A 正定,欲证 $B^{\mathrm{T}}AB$ 正定 .首先需证 $B^{\mathrm{T}}AB$ 是实对称矩阵,这一点很容易证明 .

其次欲证 $B^{\mathrm{T}}AB>0$,据正定矩阵的充分条件,很容易想到因 $A>0$,所以 $A=C^{\mathrm{T}}C$ (其中 C 可逆),于是

$$B^{\mathrm{T}}AB = B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CB = (CB)^{\mathrm{T}}(CB) .$$

但是这不是正定的充分条件 .因 B 不是 n 阶方阵 .尽管 $\mathrm{r}(B)=n$,但 B 不是可逆矩阵,因此 $(CB)^{\mathrm{T}}(CB)$ 这个形式没有用,其余证明矩阵正定的充分条件也不适用 .因此考虑用正定的定义来证,即对于任意的非零 n 维向量 x, 欲使 $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$, 即 $(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$.因 $A>0$,故只要是 $Bx\neq 0$ 就行了,而已知 $\mathrm{r}(B)=n$,很容易联想到齐次线性方程组 $Bx=0$ 只有零解,即对任意的 $x\neq 0$ 均有 $Bx\neq 0$.

必要性的证明与充分性类似 .

【证明】　充分性 .已知 $\mathrm{r}(B_{m\times n})=n$, A 是 m 阶实对称正定矩阵,欲证 $B^{\mathrm{T}}AB>0$.

因为 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}AB$,所以 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为实对称矩阵 .

因为 $\mathrm{r}(B)=n$,所以齐次线性方程组 $Bx=0$ 只有零解 .因此对任意的实 n 维向量 $x\neq 0$,均有 $Bx\neq 0$.

又 A 为正定矩阵,所以对于 $Bx\neq 0$,均有 $(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$,即 $x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABx>0$.即对于任意的非零向量 x,均有 $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$,故 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵 .

必要性 .已知 $B^{\mathrm{T}}AB>0$,欲证 $\mathrm{r}(B)=n$.

因为 $B^{\mathrm{T}}AB>0$,所以对于任意的非零 n 维向量 $x\neq 0$,均有 $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$,即

$$(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx) > 0 .$$

因为 $A>0$,所以 $Bx\neq 0$,即 $Bx=0$ 只有零解,从而 $\mathrm{r}(B)=n$.【证毕】

【注】　(1) 在证明二次型的矩阵正定时,用二次型正定的定义来证明的方法不要忽

略.这是证明正定的一个基本方法.

(2) 本题中,用到任意 $x\neq 0$.使 $B_{m\times n}x\neq 0$ 线性方程组 $Bx=0$ 只有零解 $\mathrm{r}(B)=n$.这是二次型正定性的证明问题中常常用到的方法和技巧.

综例 6.3.2 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,I 是 n 阶单位矩阵.已知矩阵 $B=\lambda I+A^{\mathrm{T}}A$,试证当 $\lambda>0$ 时,矩阵 B 为正定矩阵.

(1999 年考研题)

【证明】 因为 $B^{\mathrm{T}}=(\lambda I+A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}=\lambda I+A^{\mathrm{T}}A=B$,所以 B 为 n 阶实对称阵.对于任意的 n 维实向量 x,有

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{T}}Bx&=x^{\mathrm{T}}(\lambda I+A^{\mathrm{T}}A)x=\lambda x^{\mathrm{T}}x+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax\\&=\lambda x^{\mathrm{T}}x+(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax).\end{aligned}$$

当 $x\neq 0$ 时,$x^{\mathrm{T}}x>0$,而 $(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)\geq 0$.故当 $\lambda>0$ 时,对任意的 $x\neq 0$,有

$$x^{\mathrm{T}}Bx=\lambda x^{\mathrm{T}}x+(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)>0.$$

【证毕】

【注】 (1) 本题也是利用定义来证二次型的矩阵正定.因任何实对称阵均是与一个实二次型一一对应的.这在综例 6.3.1 中也体现了.

(2) 若 $x\neq 0$,则 $x^{\mathrm{T}}x>0$,这体现了非零向量自身标准内积的正定性.而 Ax 有可能等于 0,所以这个向量 Ax 自身的标准内积 $(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)\geq 0$.但若 $\mathrm{r}(A_{m\times n})=n$,则对于任意的非零 n 维向量 $x\neq 0$,则 $Ax\neq 0$,于是 $(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)>0$.

综例 6.3.3 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

是一个对称正定矩阵,证明

$$D=\begin{vmatrix}0&x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1&a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\x_2&a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\x_n&a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

是一个负定二次型.

思路 (1) 本题看起来形式很复杂,仔细分析,欲证的 $n+1$ 阶行列式 D 是一个含 x_1, $x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式,即为一个 n 元二次型,把 D 按第一行展开,就得到 n 个 $x_i\cdot D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的和式的形式,每个 D_i 是一个含有第 1 列为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的 n

阶行列式,再继续展开 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$就可得到 $D=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}x_ix_j$,其中 A_{ij} 是正定矩阵 A的元素 a_{ij} 的代数余子式 .对照二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^{\mathrm{T}}Ax$的形式(其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$)不难看出 $D=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j=-x^{\mathrm{T}}Bx$(其中 $B=(A_{ij})_{n\times n}$) .这样,B与 A 的伴随矩阵 A^* 成转置关系,即 $B=(A^*)^{\mathrm{T}}$.而已知 $A>0$,则 $A^{\mathrm{T}}=A$,所以 $B=(A^*)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^*=A^*$ 也正定 .

(2) 因已知 $A>0$,则$|A|>0$,我们试图用一个满秩的线性替换 $x=Ay$ 代入欲证的二次型中,即代入行列式的形式中,也就是对行列式进行倍加恒等变换 .把行列式从第 2 列起分别乘 $-y_1,-y_2,\cdots,-y_n$ 加到第 1 列上,因

$$\begin{cases} x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n, \\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n, \\ \cdots \\ x_n=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n . \end{cases}$$

即 $x=Ay$. 所以这个倍加变换的结果把原行列式化成

$$D=\begin{vmatrix} -\sum_{i=1}^{n}x_iy_i & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的形式,再把 D按第 1 列展开即得到满意的结果,可继续推导出要证的结果 .

(3) 由于 D可写成分块矩阵的形式

$$D=\left|\begin{pmatrix} 0 & x^{\mathrm{T}} \\ x & A \end{pmatrix}\right|,$$

利用分块矩阵的倍加变换化为$\begin{vmatrix} * & 0 \\ b & B \end{vmatrix}$的形式,而倍加初等阵的行列式为 1,所以展开行列式就得到我们所需的结果 .

(1),(2),(3)的分析形成了三种解法 .

【证明】　方法 1: 按行列式的展开性质,把 D 按第一行展开,再把展开后的各 n阶行列式 D_i 按第一列展开

$$D=\begin{vmatrix}0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=x_1D_1+x_2D_2+\cdots+x_nD_n$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_j(-1)^{1+(j+1)}\begin{vmatrix}x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ x_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots\\ x_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_j(-1)^{j+2}\times$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(-1)^{i+1}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+2}x_j\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(-1)^{i+1}M_{ij}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j.$$

【注 1】 M_{ij} 为 A 中元素 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

对照 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^{\mathrm T}Ax$(其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$)，则

$$D=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j=-x^{\mathrm T}(A^*)^{\mathrm T}x=-x^{\mathrm T}A^*x.$$

因 A 是正定矩阵，故 A^* 也是正定矩阵(见例 6.2.4)，故 $-A^*$ 是负定矩阵.因此 $D=-x^{\mathrm T}A^*x$ 为负定二次型.

方法 2：因 A 正定，故 $|A|>0$.作满秩的线性替换 $x=Ay$，即

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \cdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

得到

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \cdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

利用上面这个关系,对二次型 D 进行恒等变形,即对行列式 D 进行倍加恒等变形

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -|A| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = -|A| x^{T} y.$$

再把变换 $x = Ay$ 代入上式,得

$$D = -|A|(Ay^{T})y = -|A| y^{T}A^{T}y = -|A| y^{T}Ay.$$

A 是正定矩阵,故 $|A| > 0$.对于任意的 n 维向量 $y \neq 0$,二次型 $-|A| y^{T}Ay < 0$ 是负定的.

而 $x = Ay$ 是满秩的线性替换,不改变二次型的正定性,对于任意的 $y \neq 0$,则 $x \neq 0$,用 $y = A^{-1}x$ 代入,有 $D = -|A| y^{T}Ay = -|A| x^{T}A^{-1}x < 0$.

方法 3: 利用分块矩阵

$$D = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^{T} \\ x & A \end{pmatrix},$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$.又 $A>0$,故$|A|>0$,即 A 可逆.

把 D 左乘倍加初等阵$\begin{pmatrix}1 & -x^{\mathrm T}A^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}$得

$$\begin{pmatrix}1 & -x^{\mathrm T}A^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x^{\mathrm T}\\ x & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^{\mathrm T}A^{-1}x & 0\\ x & A\end{pmatrix}.$$

上式两边取行列式,注意到倍加初等阵的行列式为 1$\left(即\begin{vmatrix}1 & -x^{\mathrm T}A^{-1}\\ 0 & I\end{vmatrix}=1\right)$及 $|-x^{\mathrm T}A^{-1}x|=-x^{\mathrm T}A^{-1}x$得

$$\begin{vmatrix}1 & -x^{\mathrm T}A^{-1}\\ 0 & I\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & x^{\mathrm T}\\ x & A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-x^{\mathrm T}A^{-1}x & 0\\ x & A\end{vmatrix},$$

即$\begin{vmatrix}0 & x^{\mathrm T}\\ x & A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-x^{\mathrm T}A^{-1}x & 0\\ x & A\end{vmatrix}=|A|\ |-x^{\mathrm T}A^{-1}x|=-|A|\ x^{\mathrm T}A^{-1}x$.

因 $A>0$,故 $A^{-1}>0$,且$|A|>0$,所以 $-|A|x^{\mathrm T}A^{-1}x<0(x\neq 0)$. 【证毕】

【注 2】 (1) 方法 1 是直接展开行列式,只要耐心细致地按一行(列)展开,找出规律来,并不困难.在解题的过程中,运用和式的表达形式,并与二次型的标准和式对照是本方法运用的技巧.

(2) 方法 2 用分块矩阵及分块矩阵的初等变换进行,比较简便.其中利用$\begin{vmatrix}A & 0\\ B & C\end{vmatrix}=|A|\,|C|$这个公式在分块矩阵运算中是最常用到的,一般开始并不是这种形式,需要通过分块矩阵的倍加变换而得到,而这个变换即对原来的分块矩阵左(右)乘一个倍加分块初等阵,再在两边取行列式,注意到倍加初等阵的对角元均为 1,故行列式为 1.这样原来矩阵的行列式就等于$\begin{vmatrix}A & 0\\ B & C\end{vmatrix}=|A|\ |C|$的形式了.这是分块矩阵运算常用的技巧.本题应用得很典型.

综例 6.3.4 设四元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^{\mathrm T}Ax$,其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

(1) 已知 A 的一个特征值为 3,求 y.

(2) 求矩阵 P,使$(AP)^{\mathrm T}(AP)$为对角矩阵.

(1996 年考研题)

思路 求 y 值比较方便.因 $\lambda=3$ 是 A 的一个特征值,直接利用$|3I-A|=0$即可

求得.

求矩阵 P,使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=\Lambda$.实际上 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AP$.考虑到 A 是对称矩阵 $(A^{\mathrm{T}}=A)$,故 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^2P$.问题变成了把 A^2 合同变换为对角形.注意到 $(A^2)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^2=A^2$,故对 A^2 进行合同变换化为对角形.可以用正交变换,求正交矩阵 P,使 $P^{\mathrm{T}}A^2P=\Lambda$.也可把 A^2 对应的二次型用配方法化为标准形而得到解答.

【解】　(1) 由

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-y & -1\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(y+2)\lambda+2y-1]=0.$$

把 $\lambda=3$ 代入上式,解得 $y=2$.

(2) 因为 $y=2$,所以

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

利用 $A^{\mathrm{T}}=A$,得 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AP=P^{\mathrm{T}}A^2P$.

方法 1:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}.$$

考虑二次型

$$x^{\mathrm{T}}A^2x=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4$$

$$=x_1^2+x_2^2+5\left(x_3+\frac{4}{5}x_4\right)^2+\frac{9}{5}x_4^2. \qquad (*)$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1,\\ y_2=x_2,\\ y_3=x_3+\dfrac{4}{5}x_4,\\ y_4=x_4.\end{cases}$$

得
$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3 - \dfrac{4}{5}y_4, \\ x_4 = y_4 . \end{cases}$$

即
$$x = Py,$$

其中
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

再把 $x = Py$ 代入(*)式,得
$$\begin{aligned}(Py)^{\mathrm{T}} A^2 (Py) &= y^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} A^2 Py = y^{\mathrm{T}} (P^{\mathrm{T}} A^2 P) y \\ &= y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + \frac{9}{5}y_4^2 = y^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}\left(1,1,5,\frac{9}{5}\right) y .\end{aligned}$$

所以 $P^{\mathrm{T}} A^2 P = (AP)^{\mathrm{T}} (AP) = \mathrm{diag}\left(1,1,5,\dfrac{9}{5}\right)$.

方法 2: 把 $y = 2$,代入(1)中的 $|\lambda I - A|$ 得
$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= (\lambda^2 - 1)[\lambda^2 - 4\lambda + 3] \\ &= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0 .\end{aligned}$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 3$.

因 A^2 的特征值为 A 的特征值的平方,故 A^2 的特征值为 $\lambda_1 = 1$(三重), $\lambda_2 = 9$.

对于 A^2(为实对称矩阵),存在正交矩阵 P,使 $P^{\mathrm{T}} A^2 P = P^{-1} A^2 P = \mathrm{diag}(1,1,1,9)$.

求正交矩阵 P.

A^2 对应于 $\lambda_1 = 1$ 的线性无关的特征向量为

$\alpha_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = (0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$.经 Schmidt 正交标准化后,得
$$\beta_1 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad \beta_2 = (0,1,0,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\beta_3 = (0,0,-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}} .$$

A^2 对应于 $\lambda_2 = 9$ 的特征向量为 $\alpha_4 = (0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$,经单位化后得 $\beta_4 = (0,0,1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$.取

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

则

$$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^2P=P^{-1}A^2P=\operatorname{diag}(1,1,1,9).$$ 【解毕】

【注】 本题的实质是对 A^2 进行合同变换化为对角形,可用配方法、正交变换,但不能用相似变换.因此方法(2)求得的特征向量必须处理为相互正交的单位向量.

综例 6.3.5 若 A 是正定矩阵.求证存在正定矩阵 B,使 $A=B^2$.

思路 欲证 $A=B^2$,且 B 为正定矩阵,显然要通过正交变换,使 $P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\Lambda$,再把 A 写成 $A=P\Lambda P^{\mathrm{T}}$ 的形式,右端要变形为 B^2 的形式,改写对角矩阵 $\Lambda=(\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}))^2$,代入

$$A=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}^2P^{\mathrm{T}}=PM^2P^{\mathrm{T}}=PMMP^{\mathrm{T}}$$

右端还不是同一矩阵平方的形式,想办法凑一下,中间插入一个单位阵 $I=P^{\mathrm{T}}P$ 就行了.

【证明】 已知 A 是正定矩阵,则 A 为 n 阶实对称矩阵,故存在 n 阶正交矩阵 P,使 $P^{\mathrm{T}}AP=P^{-1}AP=\Lambda$,其中

$$\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\ \lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n).$$

设
$$M=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix},$$ 则 M 为正定矩阵,

而且
$$\begin{aligned}A&=P\Lambda P^{\mathrm{T}}=PM^2P^{\mathrm{T}}=PM(P^{\mathrm{T}}P)MP^{\mathrm{T}}\\&=(PMP^{\mathrm{T}})(PMP^{\mathrm{T}})=BB=B^2,\end{aligned}$$

其中 $B=PMP^{\mathrm{T}}$,即 B 与 M 合同,所以 $B>0$. 【证毕】

综例 6.3.6 设 A 为 n 阶实对称矩阵,$\mathrm{r}(A)=n$,A_{ij} 是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n$),二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

(1) 记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$,把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$写成矩阵形式,并证明二次型 $f(x)$的矩阵是 A^{-1}.

(2) 二次型 $g(x)=x^{\mathrm T}Ax$ 与 $f(x)$的规范形是否相同?说明理由.

(2001 年考研题)

思路 参考综例 6.3.3的方法(1) 的分析,对照 n元二次型的标准形式 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^{\mathrm T}Ax$,其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 即二次型的矩阵 A的第 i行第 j 列的元素为和式中 x_ix_j 的系数 a_{ij}.故本题中 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j=x^{\mathrm T}Bx$,其中

$$B=(b_{ij})_{n\times n},\quad b_{ij}=\frac{A_{ij}}{|A|}.$$

所以
$$B=\frac{1}{|A|}(A^*)^{\mathrm T}=\frac{1}{|A|}A^*=A^{-1}.$$

而要判断 $g(x)=x^{\mathrm T}Ax$ 与 $f(x)=x^{\mathrm T}A^{-1}x$ 的规范形相同,只要看矩阵 A 与 A^{-1} 是否合同就行了,而这一点是肯定的.

【证明】 (1) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵表示式为

$$f(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix},$$

令 $f(x)=x^{\mathrm T}Bx$,则 $B=\frac{1}{|A|}(A^*)^{\mathrm T}$.

因为 $\mathrm r(A)=n$,所以 A 可逆.又 A 为实对称,则$(A^{-1})^{\mathrm T}=(A^{\mathrm T})^{-1}=A^{-1}$, 所以 A^{-1} 为实对称阵,而 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$,从而 A^* 也实对称.所以

$$B=\frac{1}{|A|}(A^*)^{\mathrm T}=\frac{1}{|A|}A^*=A^{-1},$$

故 $f(x)$的矩阵是 A^{-1}.

(2) 方法 1: 因$(A^{-1})^{\mathrm T}AA^{-1}=(A^{\mathrm T})^{-1}(AA^{-1})=A^{-1}I=A^{-1}$, 所以 A 与 A^{-1} 合同.故 $g(x)=x^{\mathrm T}Ax$与 $f(x)=x^{\mathrm T}A^{-1}x$ 有相同的规范形.

方法 2: 对二次型 $g(x)=x^{\mathrm T}Ax$ 作可逆的线性替换 $x=A^{-1}y$,其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T}$.则

$$\begin{aligned}g(x)&=x^{\mathrm T}Ax=(A^{-1}y)^{\mathrm T}A(A^{-1}y)=y^{\mathrm T}(A^{-1})^{\mathrm T}AA^{-1}y\\&=y^{\mathrm T}(A^{\mathrm T})^{-1}AA^{-1}y=y^{\mathrm T}A^{-1}y.\end{aligned}$$

故 A 与 A^{-1} 合同 .于是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的规范形 .　【解毕】

【注】　本题与综例 6 .3 .3 类似,应用了二次型的和式形式与矩阵形式的灵活变换,即和式中 $x_i x_j$ 前的系数 a_{ij} 为矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素 .其次,据惯性定理,合同矩阵有相同的二次型的规范形,即合同变换不改变二次型的正、负惯性指数 .当然在解题的过程中,对各类矩阵如 A, A^{-1}, A^*, A^k 的关系和性质要非常熟悉,这也是能准确地写出各类二次型矩阵所需的基本功 .

6 .4　练　习　题

1 .设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,则 ______ 与 ______ 合同, ______ 与 ______ 相似 .

2 .设 $\begin{pmatrix} 3 & 3t & 0 \\ 3t & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,当 t ______ 时, A 为正定矩阵 .

3 .下列矩阵中正定的矩阵是______ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4 . $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + t x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1 x_2 + 4x_2 x_3 = 1$ 是椭球面,则 t ______ .

5 .若 $A @ B$, $C @ D$,且它们均为 n 阶对称矩阵,下列结论成立吗 ? 为什么 ?

(1) $A + C @ B + D$;　(2) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} @ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

6 .用配方法把 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$ 化为标准形,并写出所用的满秩线性替换 .

7 .用配方法把 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1 x_2 - 3x_2 x_3$ 化为标准形,并写出所用的可逆线性替换 .

8 .用配方法把 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1 x_2 - 8x_2 x_3 - 4x_1 x_3$ 化为标准形,并写出所用的可逆线性替换 .

9 .用正交变换 $x = Qy$ 将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1 x_2 - 4x_2 x_3$ 化为标准形,并写出正交矩阵 Q .

10 .用正交变换 $x = Qy$ 将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$ 化为标准

形,并写出正交矩阵 Q.

11. 用正交变换 $x = Qy$ 将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$ 化为标准形,并写出正交矩阵 Q.

12. 试判断 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 是否为正定矩阵?

13. 试判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ -3 & -7 & 10 \end{pmatrix}$ 是否为正定矩阵?

14. 二次型 $4x_2^2 - 3x_3^2 + 2px_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ 经过正交变换化为标准形 $y_1^2 + 6y_2^2 + qy_3^2$,求参数 p, q 及所用的正交变换.

15. 已知 A 是实对称矩阵,A 的特征值全为正数,试证明 A 是正定矩阵.

16. 设 A 是实对称矩阵,证明存在实数 t,使得 $A + tI$ 为正定矩阵.

17. 设 A 是实对称矩阵,B 是正定矩阵,证明存在可逆矩阵 C,使得 $C^T AC$, $C^T BC$ 都是对角矩阵.

18. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,且 $m < n$,证明 AA^T 正定的充分必要条件是 $r(A) = m$.

19. 已知实对称矩阵 A 满足 $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$,求证 A 是正定矩阵.

20. 已知 A 是正定矩阵,B 是反对称矩阵,证明 $A - B^2$ 可逆.

附录　清华大学线性代数试题与答案

线性代数试题一

一、选择题(每题 4 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,请将所选项的序号填在横线上.)

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

(A) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;

(B) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$;

(C) $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$;

(D) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

2. 若 $A^3 = 0$,则______.

(A) A 可逆,$I - A$ 可逆;

(B) A 不可逆,$I - A$ 不可逆;

(C) A 不可逆,$I - A$ 可逆;

(D) A 不可逆,$I - A$ 不能判断是否可逆.

3. 已知线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 是 4×5 的矩阵,且 A 的行向量组线性无关,则有______.

(A) A 的列向量组线性无关;

(B) 其增广矩阵的任意 4 个列向量线性无关;

(C) 其增广矩阵的列向量组线性无关;

(D) 其增广矩阵的行向量组线性无关.

4. 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$,下列在 R^3 空间的变换 σ 不是线性变换的是______.

(A) $\sigma(x)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$;

(B) $\sigma(x)=(x_1x_2,x_1+x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$;

(C) $\sigma(x)=(x_1,x_2,0)^{\mathrm{T}}$;

(D) $\sigma(x)=BCx$　(其中 B,C 为固定的三阶方阵).

5. 若 n 阶方阵 A 和 B 有共同的特征值,且都有 n 个线性无关的特征向量. 下列结论成立的是______.

(A) A 与 B 相似;　　(B) $A=B$;

(C) $\det(A-B)=0$;　　(D) $\det(A+B)\neq 0$.

二、填空题(每空 4 分)

6. $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&a\\a^2&b^2&c^2&b^2\end{bmatrix}$　$(a<b<c)$的秩 = ____________.

7. 方程组$\begin{cases}x_1-x_2+5x_3-x_4=0,\\x_1+x_2+4x_3+3x_4=0,\\3x_1+x_2+9x_3+5x_4=0\end{cases}$的通解是____________.

8. $a=(2,-1,2)$, $a\parallel b$, $a\cdot b=-18$, 则 $b=$ ____________.

9. 已知 σ 是 R^n 的线性变换, σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的对应矩阵为$\begin{bmatrix}&&&1\\&&1&\\&\iddots&&\\1&&&\end{bmatrix}$, 则 σ 在基 $\beta_1=\alpha_2,\beta_2=\alpha_3,\cdots,\beta_{n-1}=\alpha_n,\beta_n=\alpha_1$ 下的对应矩阵为________________.

10. 设 A 为 4 阶方阵, A 的 4 个特征值为 $-2,-1,1,2$, 则有

(1) $\det(-A)=$ ____________;

(2) $\det(A-3I)=$ ____________;

(3) A 的相抵标准形为____________;

(4) A 的相似对角形是____________;

(5) (附加题)写出你从本题条件能推出的任意几条有关矩阵 A 的性质.

三、计算题和证明题(11 题 10 分, 12 题、13 题各 15 分, 14 题 8 分)

11. 求直线 $l:\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=8t\end{cases}$ 在平面 $x-3y+2z-6=0$ 上的投影直线方程.

12. 已知 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 是 R^3 的一组基.

(1) 求标准正交基β_1,β_2,β_3,使得 $L(\beta_1)=L(\alpha_3)$, $L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_3,\alpha_2)$, $L(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=L(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$;

(2) 向量γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标是$(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,求$\gamma$在$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标.

13.设 $A=(a_{ij})$是 4 阶方阵,如果线性方程组 $Ax=b$ 的通解是$(2,1,0,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ (k是任意实数),令$\alpha_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j},a_{4j})^{\mathrm{T}}$ $(j=1,2,3,4)$.

(1) α_1能否用α_2,α_3线性表出?

(2) α_4能否用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出?

试证明你的结论.

14.设 A 为 n 阶实对称矩阵,$a_{ij}\geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}<1$, $i=1,2,\cdots,n$.证明:

(1) $B=I-A$的元素满足 $|b_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|$, $i=1,2,\cdots,n$;

(2) $I-A$的列向量组线性无关;

(3) A的所有特征值的绝对值严格小于 1;

(4) (附加题)$\lim\limits_{n\to\infty} A^n=0$.

(设 $C=(c_{ij})$,如果对每个 i,j,都有$\lim\limits_{n\to\infty} c_{ij}=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} C=0$.)

线性代数试题一答案

1.B. 2.C. 3.D. 4.B. 5.A. 6.3.

7.$k(-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$ (k是任意常数).

8.$(-4,2,-4)$.

9.$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \iddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10.(1) 4.(2) 40.(3) I.(4) $\mathrm{diag}(-2,-1,1,2)$.

11.方法 1: 经过 l与π垂直的平面方程

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ -1 & 2 & 8 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad 28x+10y+z-74=0,$$

投影线方程为$\begin{cases} 28x+10y+z-74=0, \\ x-3y+2z-6=0. \end{cases}$

方法 2: l **与** π **的交点为**$(3, -1, 0)$.

l**的方向向量为**$(-1, 2, 8)$.

π**的法向量为**$(1, -3, 2)$.

$$n^{\perp} = (-1, 2, 8) - \frac{9}{14}(1, -3, 2) = \left(-\frac{23}{14}, \frac{55}{14}, \frac{94}{14}\right),$$

所求直线方程为$\dfrac{x-3}{-23} = \dfrac{y+1}{55} = \dfrac{z}{94}$.

12. (1) **正交化得** $\gamma_1 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2 = (0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_3 = (0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, **再单位化**.

(2) $\gamma = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 4, 3)^{\mathrm{T}}$, γ **在** $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ **下的坐标为**$(1, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

13. (1) **能**, $\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 \quad 0 \quad \alpha_1 = \alpha_2 - 2\alpha_3$.

(2) **不能**. $\mathrm{r}(A) = 3$, **若能**　$\mathrm{r}(A) = 2$, **矛盾**.

14. (1) $b_{ii} = 1 - a_{ii}$,

$$b_{ij} = -a_{ij}\ (i \neq j) \qquad |b_{ii}| = |1 - a_{ii}| = 1 - a_{ii} > \sum_{i \neq j} a_{ij} = \sum_{i \neq j} |b_{ij}|.$$

(2) **方法** 1: **假设** $x \neq 0$, **满足**$(I - A)x = 0$, **且设** $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ **分量中绝对值最大的是** x_t, **则** x **不满足第** t **个方程**, **矛盾**.

方法 2: **证明**$|I - A| \neq 0$, **用反证法**.

方法 3: **用数学归纳法**.

(3) **设** x **是** A **的特征向量**, **特征值为** λ, **考虑** x **的绝对值最大的分量** x_t, **则**

$$|\lambda x_t| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{tj} |x_j|$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\right) |x_t| < |x_t| \qquad |\lambda| < 1.$$

(4) **设** A **的** n **个特征值为** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, **并设** $A = P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P$. **假设** P **和** P^{-1} **中元素绝对值最大的是** M, **又设** $A^m = (d_{ij})$, **则** $|d_{ij}| \leq nM^2 |\lambda_{\max}|^m$, **由** $|\lambda_{\max}| < 1$　$\lim\limits_{m \to +\infty}(nM^2 |\lambda_{\max}|^m) = 0$　$\lim\limits_{m \to +\infty} d_{ij} = 0$　$\lim\limits_{m \to +\infty} A^m = 0$.

线性代数试题二

一、填空题(共计 48 分)

1. **已知** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, **则** $\mathrm{r}(A) =$ ________ .

2．$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 15 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$__________．

3．A是三阶实对称矩阵，已知A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$，又对应于$\lambda=1$的特征向量为$\xi_1=(2,1,2)^{\mathrm{T}},\xi_2=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，则对应于$\lambda=-1$的特征向量为__________．

4．已知$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则$X=$________．

5．设$A=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$，则当$a$满足条件________时，$A$可逆．当$a=$__________时，$\mathrm{r}(A)=2$．

6．已知平面过直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$和$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{1}$，则平面的法向量是______________．

7．齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=0, \\ x_1+x_3-x_4=0 \end{cases}$的基础解系是____________．

8．已知四元方程组$Ax=b$系数矩阵A的秩等于2，$x_0=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是$Ax=0$的解，$x_1,x_2,x_3$是$Ax=b$的三个解．已知$x_1+x_2-x_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},x_1-x_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，则$Ax=b$的通解是__________________．

9．已知三个平面$x=3y-z,y=az+3x,z=-x+ay$交于一条直线，则$a=$_______．

10．在三维空间中，方程$4x^2+9y^2=z$代表__________面，用一组平行于xOy坐标面的平面去截时，得到一组__________曲线．

11．已知A是三阶方阵，且$|A|=2$，则$|A^{-1}-A^*|=$______．

12．已知A是三阶方阵，其特征值分别为$1,-2,3$，则A的行列式的代数余子式$A_{11}+A_{22}+A_{33}=$________________．

13．若A可逆且可对角化，则A^*是否可对角化________，理由是________________．

二、计算与证明题(共计52分)

14．已知矩阵A是三阶实对称矩阵，它的特征值分别是1，1，2，且属于2的特征向量是$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，求A．　　(10分)

15．求点 $M(4,3,10)$ 关于直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$ 的对称点的坐标．（10 分）

16．设已知 $\mathbf{R}^3$ 的一组基为 $\varepsilon_1=(1,2,0)^T$，$\varepsilon_2=(1,-1,2)^T$，$\varepsilon_3=(0,1,-1)^T$，矩阵 $P=\begin{pmatrix}2&1&6\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$，若 P 为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵．

（1）求基 η_1,η_2,η_3．

（2）设 σ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个线性变换，已知 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵是 $B=\begin{pmatrix}2&3&12\\0&0&2\\0&-1&-3\end{pmatrix}$，试求 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A．

（3）若 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标是 $x=(2,1,0)^T$，试求 $\sigma(\alpha)$ 在基 η_1,η_2,η_3 下的坐标．

（15 分）

17．设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，非零向量 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都正交，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性无关．（8 分）

18．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，试针对各种 A，讨论是否存在 $n\times m$ 矩阵 B，使得 $AB=I$．

（本题可自由发挥，但请按以下格式答题：

命题：

证明：

举例：

可以用多个命题来叙述，可以讨论存在的条件，或者讨论存在的惟一性问题等．）（9 分）

线性代数试题二答案

1．4．　2．12．　3．$(-2,2,1)^T$．

4．$\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$．

5．$a\neq 1$，$a\neq -\frac{1}{2}$，$a=-\frac{1}{2}$．

6．$-i+j+2k$．

7．$(-1,-1,1,0)^T$，$(1,-1,0,1)^T$．

8．$(0,-2,-1,1)^T+k_1(1,0,1,0)^T+k_2(1,1,0,0)^T$，$k_1,k_2$ 是任意常数．

9．3．

10．椭圆抛物面，椭圆．

11．$-\dfrac{1}{2}$．　12．-5．

13．是，若 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则 $P^{-1}A^*P=\mathrm{diag}\left(\dfrac{|A|}{\lambda_1},\dfrac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{|A|}{\lambda_n}\right)$．

14．$x+z=0$．特征向量为

$$(1,0,-1)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

15．过 M 与 L 垂直的平面为

$$2(x-4)+4(y-3)+5(z-10)=0.$$

直线与平面的交点的方程为

$$\begin{cases}2(x-4)+4(y-3)+5(z-10)=0,\\4x-2y=0,\\5x-2z=-1.\end{cases}$$

交点：$(3,6,8)$；对称点：$(2,9,6)$．

16．

(1) $\begin{bmatrix}2&2&7\\5&1&13\\-1&2&0\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}0&0&4\\0&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$；　(3) $(8,2,-3)^{\mathrm{T}}$．

17．$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\beta=0$．

与 β 作内积推出 $k_4=0$，进一步推出 $k_1=k_2=k_3=0$．

18．方法 1：给出充要条件，并证明正确；讨论惟一性并给出例子．

方法 2：分三种情形 $m>n$，$m=n$，$m<n$ 讨论惟一性并给出例子．

练习题答案

第 1 章

1．-3．

2．x^2y^2．

3．0．

4．$6m$．

5．-16．

6．若 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$,则为 $a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\cdots-\frac{1}{a_n}\right)$;

若 $a_i=0, a_j\neq 0, j\neq i$,则为 $-a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$;

若 $a_i, i=1,2,\cdots,n$中至少有两个为零,则为 0．

7．$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$．

8．$\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{x_j-a_j}\right)$．

9．$(-1)^{n-1}n$．

10．$-x_1y_4(x_1y_2-x_2y)(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_4-x_4y_3)$．

11．$n+1$．

12．$\left[\frac{n(n+1)}{2}+x\right]x^{n-1}$．

13．$x_1x_2\cdots x_n\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$．

14．$\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$．

15．-4．

16．$n!\left(1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right)$．

17．$x=0,-1,2,3$．

18．**系数** 0，**常数项** 1．

19．$\frac{1}{4}$．

第 2 章

1．$9(3-2^{n})$．

2．$2^{n}I$，n **为偶数**；$2^{n}A$，n **为奇数**．

3．$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$，$a, b, c$ **为任意常数**．

4．**提示**：**考虑** A^2 **的迹** $\operatorname{tr}A^2$．

5．$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$．

6．$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$．

7．$-A-3I$．

8．2．

9．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$．

10．$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$．

11．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{100}-1 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$．

12．4．

13．(D)．

14．$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$．

15．$t \neq 4$．

16．(C)．

17．n．

18．2．

第 3 章

1．$t=0$, $\beta=(1+k)\alpha_1-(2+k)\alpha_2+k\alpha_3$, k为任意常数．

2．(1) 当 $a=0$, b为任意常数时, β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

(2) 当 $a\neq 0$ 且 $a\neq b$时有惟一表示式, $\beta=\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2$;

(3) 当 $a=b\neq 0$ 时,表示式不惟一, $\beta=\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\left(\frac{1}{a}+c\right)\alpha_2+c\alpha_3$,其中 c为任意常数．

3．线性无关．

4．线性无关．

5．线性无关．

6．当 s是奇数时,线性无关;当 s是偶数时,线性相关．

7．利用性质证明．

8．(1) 用定义;(2)利用(1)的结果．

9．利用α_1是$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$的线性组合,证明组合式中$\alpha_s$的系数必为 0．

10．利用反证法．

11．证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与自然基等价．

12．注意 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全不为零．

13．利用极大线性无关组的定义．

14．极大线性无关组: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$．

15．极大线性无关组: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$．$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$．

16．(0,0,1)．

17．$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$．

18 . $(1, -1, -3)$.

19 . $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$, $x = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{6}}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

20 . **利用正交条件作内积** .

第 4 章

1 . (A) .

2 . (C) .

3 . (D) .

4 . $\boldsymbol{\xi}_1 = (-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

5 . $x = k_1(-3,7,2,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$, k_1, k_2 **为任意常数** .

6 . $k = 1$.

7 . $a = 1$, b **取任意值时有非零解,通解为** $x = k(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, k **为任意常数** . $a \neq 1, b = 2$ **时有非零解,通解为** $x = k(2a-1,-1,1-a)^{\mathrm{T}}$, k **为任意常数** .

8 . **无解** .

9 . $x = (-1,1,0,-2)^{\mathrm{T}} + k(-3,-5,1,0)^{\mathrm{T}}$, k **为任意常数** .

10 . $x = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}} + k_1(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}} + k_2(1,0,-1,2,0)^{\mathrm{T}} + k_3(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, k_1, k_2, k_3 **为任意常数** .

11 . $\lambda \neq 1$ **时无解**, $\lambda = 1$ **时有无穷多解,通解为** $x = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}} + k_1(0,1,0,1)^{\mathrm{T}} + k_2(3,1,5,0)^{\mathrm{T}}$, k_1, k_2 **为任意常数** .

12 . $\lambda \neq 0$ **且** $\lambda \neq -3$ **时有惟一解**: $x_1 = -\frac{1}{\lambda}, x_2 = \frac{2}{\lambda}, x_3 = \frac{\lambda-2}{\lambda}$. $\lambda = 0$ **时无解** . $\lambda = -3$ **时有无穷多解,通解为** $x = (-1,-2,0)^{\mathrm{T}} + k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, k **为任意常数** .

13 . $p \neq 1, q = 0$ **时有惟一解**: $x_1 = \frac{2q-1}{q(p-1)}, x_2 = \frac{1}{q}, x_3 = \frac{1-4q+2pq}{q(p-1)}$. $p = 1, q = \frac{1}{2}$ **时有无穷多解,通解为** $x = (2,2,0)^{\mathrm{T}} + k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, k **为任意常数** . $p = 1, q \neq \frac{1}{2}$ **或** $q = 0$ **时,无解** .

14 . $q = 2$ **或** $p = 1, q \neq 3$ **时,无解** .

$p = 1, q = 3$ **时有无穷多解**: $x = (1,0,1)^{\mathrm{T}} + k(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$, k **为任意常数** . $p \neq 1, q \neq 3$

时有惟一解: $x_1=\dfrac{8p+2q-3pq-5}{(1-p)(q-2)}$, $x_2=\dfrac{q-3}{(1-p)(q-2)}$, $x_3=\dfrac{1}{q-2}$.

15. $p\neq-1$, $q=-52$ 时无解. $q\neq-52$ 时有惟一解: $x_1=\dfrac{p}{3}-\dfrac{4(p+1)}{q+52}$, $x_2=\dfrac{p-3}{3}-\dfrac{26(p+1)}{q+52}$, $x_3=-\dfrac{p-3}{3}+\dfrac{18(p+1)}{q+52}$, $x_4=\dfrac{-2(p+1)}{q+52}$. $p=-1$, $q=-52$ 时,有无穷多解,通解为 $x=\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},0\right)^{\mathrm{T}}+k(2,13,-9,1)^{\mathrm{T}}$, k 为任意常数.

16. $a=0$ 时,有非零解,基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

通解为 $x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$, $k_1,k_2\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数. $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时,有非零解,基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$,通解为 $x=k\boldsymbol{\xi}$, k 为任意常数.

17. $a=1$, $b=2$, $x=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$, k 为任意常数.

18. (Ⅱ)的一个特解为 $(0,-2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

提示: 方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的系数中只有第一个方程 x_1 的系数不同 取(Ⅰ)的通解中第一个分量为零的解即可,即取 $k=1$.

第 5 章

1. 48.

2. 4.

3. $\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}$.

4. $x=0$, $y=1$.

5. (C).

6. (B).

7. $\boldsymbol{\lambda}_1=1$, $x_1=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{\lambda}_2=4$, $x_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{\lambda}_3=-2$, $x_3\,(1,2,2)^{\mathrm{T}}$. 能对角化, $P=\begin{bmatrix}-2&2&1\\-1&-2&2\\2&1&2\end{bmatrix}$, $\quad\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&4&\\&&-2\end{bmatrix}$.

8. $\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\lambda}_2=\boldsymbol{\lambda}_3=2$. $x_1=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $x_2=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $x_3=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\lambda}_4=-2$, $x_4=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,能对角化,

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix},\quad \Lambda=\begin{bmatrix}2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&-2\end{bmatrix}.$$

9. $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, $x=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$; **不能对角化**.

10. **提示：用定义证明** $BP^{-1}x=\lambda_0 P^{-1}x$.

11. $x=4$, $P=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&0&-1\\0&4&1\end{bmatrix}$, $\quad\Lambda=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&12\end{bmatrix}$.

14. $P=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\-1&1&\cdots&1\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&-1&1\end{bmatrix}$, $\quad\Lambda=\mathrm{diag}(0,0,\cdots,0,n)$.

15. $\Lambda=\mathrm{diag}(0,\cdots,0,-1,\cdots,-1)$.

16. $Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt{18}}&\frac23\\0&-\frac{4}{\sqrt{18}}&\frac13\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt{18}}&\frac23\end{bmatrix}$, $\quad\Lambda=\begin{bmatrix}7&&\\&7&\\&&-2\end{bmatrix}$.

17. $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac12&-\frac12\\\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac12&\frac12\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac12&-\frac12\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac12&\frac12\end{bmatrix}$, $\quad\Lambda=\begin{bmatrix}-4&&&\\&-4&&\\&&-4&\\&&&8\end{bmatrix}$.

18. $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

第 6 章

1 . A 与 B, A 与 B

2 . $t < \sqrt{\dfrac{7}{6}}$.

3 . C, D .

4 . $t > 5$.

5 . (1) 不成立; (2) 成立 .

6 . $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$, $\quad f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

7 . $x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \dfrac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$, $\quad f = y_1^2 - 4y_2^2 + \dfrac{9}{16} y_3^2$.

8 . $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$, $\quad f = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \dfrac{2}{3} y_3^2$.

9 . $Q = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad f = -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$.

10 . $Q = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\quad f = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$.

11 . $Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,　$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$.

12 . **不是** .

13 . **是** .

14 . $p=2, q=-6$,　$x=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} y$.