

吉林大学 2015-2016 学年第一学期“解析几何”期末考试试题

共三道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、简答题（共 25 分）

1、已知非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 满足 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 不垂直, \mathbf{b} 与 \mathbf{c} 垂直, 求满足 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = h$, $\mathbf{x} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ 的向量 \mathbf{x} .

2、在直角坐标系中, 求过点 $M(1,0,1)$, 正交于直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$ 的直线方程.

3、求两条异面直线 $l_i: \overrightarrow{M_iM} \times \vec{u}_i = \vec{0} (i=1,2)$ 的公垂线的方程.

4、若二次曲面 $(a-k)x^2 + (b-k)y^2 + (c-k)z^2 = 1 (a > b > c > 0)$ 是一个直纹面, 求参数 k 的取值范围.

5、求二次曲面 $4x^2 + 4xy + 3y^2 - 20x - 14y - 6 = 0$ 的中心坐标.

二、计算题（共 45 分）

1、已知直线 $L_1: \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 和 $L_2: \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

(1) 求过直线 L_1 且与直线 L_2 平行的平面的方程;

(2) 若直线 L_1 与直线 L_2 的距离为 $2d$, 求证: $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

2、求以 y 轴为旋转轴, $x=t, y=t^2, z=t^3$ (参数 $t \in \mathbb{R}$) 为母线的旋转曲面的参数方程.

3、利用适当的坐标变换将空间直角坐标系中曲面方程 $(2x+y+z)^2 - (x-y-z)^2 = y-z$ 化成标准方程, 并说明其表示什么曲面.

三、证明题（共 30 分）

1、若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为空间中三个不共面的向量, 求证: 对任意一个向量 \mathbf{r} ,

总有: $\mathbf{r} = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{c})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} \mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} \mathbf{c}$ 成立.

2、求证: 曲面 $S: x^2 + 4xz + 4z^2 = y^2 + 3$ 是柱面.

3、求证: 椭圆的一个焦点在其任意切线上的垂足到中心的距离等于长半轴.