第五次习题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增. 若 $f(0)>0$, $f(1)<1$, 则存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=x_0^2$.

2. 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调函数. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(2x)/f(x)=1$, 则对任意的 $a>0$, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(ax)/f(x)=1$.

3. 设 $f,g\in C([0,1])$, 且 $R(f)\subset[0,1]$, $R(g)\subset[0,1]$. 若 $f[g(x)]=g[f(x)](x\in[0,1])$, 则存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi)=g(\xi)$.(其中 $R(f),R(g)$ 代表 f,g 的值域)

4. 设 $f\in C(\mathbb{R})$. 若存在自然数 n, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^n}=0,$$

则
(i) 当 n 为奇数时, 存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f(\xi)+\xi^n=0$.
(ii) 当 n 为偶数时, 存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f(\xi)+\xi^n\le f(x)+x^n(x\in\mathbb{R})$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且 $g\in C([a,+\infty))$. 若有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0,$$

则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

6. 设 $f\in C([a,b])$, 则对任意 $\epsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得 $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|+\epsilon(x,y\in[a,b])$.

7. 寻找 α 的范围, 使得 $f(x)=x^\alpha sin(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.