解 析 几 何

November 16, 2019

P56

1(3)解：设$M(x,y,z)$为柱面上任一点，过M点的直母线与准线C的交点为$P(x_1,y_1,z_1)$，则M的坐标满足

$$x-x_1=y-y_1=z-z_1$$

P的坐标满足

$$\begin{cases} x_1+y_1-z_1-1=0 \\ x_1-y_1+z_1=0, \end{cases} \tag{1}$$

从上述两组方程消去参数x_1,y_1,z_1,t, 得柱面方程

$$2y-2z-1=0.$$

1(4)解：设$M(x,y,z)$为柱面上任一点，过M点的直母线与准线C的交点为$P(x_1,y_1,z_1)$, 则M的坐标满足

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{-2}$$

P的坐标满足

$$\begin{cases} x_1=y_1^2+z_1^2 \\ x_1=2z_1, \end{cases} \tag{2}$$

从上述两组方程消去参数x_1,y_1,z_1,t, 得柱面方程

$$4x^2+25y^2+z^2+4xz-20x-10z=0.$$

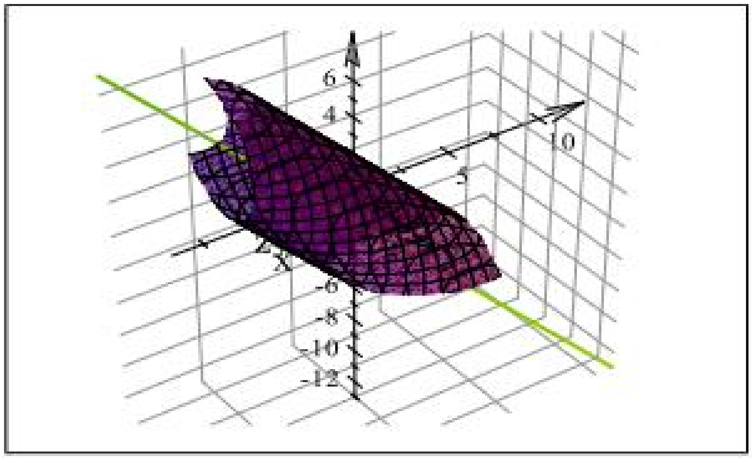
3. 解: 设 $l_1:\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=-3-2t \end{cases}$, 其方向矢量为 $\vec{v}=(1,2,-2)$. 易知 $Q(0,1,-3)\in l_1$. 设 Σ 是要求的柱面，且 $P(x,y,z)\in\Sigma$, 那么

$$\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}=\frac{\left|\overrightarrow{MQ}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}.$$

所以得

$$(2x-y+1)^2+(2y+2z+4)^2+(2x+z+3)^2=65.$$

即 $\quad 8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4xz+16x+14y+22z-39=0.$



5解: (1). 回顾第33页习题5.

消去x，得关于yOz面的射影柱面: $z^4+a^2y^2-a^2z^2=0,$

消去y，得关于xOz面的射影柱面: $z^2+ax=a^2,$

消去z，得关于xOy面的射影柱面: $x^2+y^2-ax=0.$

(2). 设 Σ 是所求的柱面, $P(x,y,z)\in\Sigma$. 注意到曲线C的方程可写为

$$C:\begin{cases} ax+z^2=a^2 \\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases},$$

则其参数方程为

$$C:\begin{cases} x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta) \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta \\ z=\pm a\sin\frac{\theta}{2} \end{cases}.$$

所以要求的柱面方程为

$$\Sigma:\begin{cases} x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta)+lt, \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta+mt, \\ z=\pm a\sin\frac{\theta}{2}+nt, \end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}.$$

6.(3).解: 任取准线上一点$P(x_1,y_1,z_1)$. $M(x,y,z)$为点P与定点连线上一点, 则有

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-2}{z_1-2}.$$

P点在准线上, 则

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2=4y_1, \\ z_1=1 \end{cases}$$

联立方程, 消去x_1,y_1,z_1即得

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4y(2-z).$$

即

$$x^2+y^2+z^2+4yz-8y-4z+4=0.$$

7.(3).解：设$M\,(x,y,z)$ 是圆锥面上的任一点. 因为顶点是原点O，所以过M的直母线的方向矢量为$\vec{\alpha}=(x,y,z)$. 已知球面的球心为$O'(-1,2,-2)$, 半径为2. 所以外切锥面轴的方向矢量为$\vec{n}=(-1,2,-2)$, 记轴与母线的夹角为θ, 则

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}, \qquad \cos\theta=\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

另一方面

$$\cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{n}}{|\alpha||\vec{n}|}=\frac{-x+2y-2z}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

化简得：

$$4x^2+y^2+z^2+4xy-4xz+8yz=0.$$

8. 解：首先考虑包含三正半轴$+x,+y,+z$的锥面. 设$M\,(x,y,z)$ 是其上的任一点, 则过M的直母线的方向矢量为$\vec{\alpha}=(x,y,z)$. 易知此锥面的轴的方向矢量为$\vec{n}=(1,1,1)$. 记轴与母线的夹角为θ, 则

$$\cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{n}}{|\alpha||\vec{n}|}=\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{3}}.$$

另一方面，因为x正半轴在锥面上，其方向矢量为$\vec{v}=(1,0,0)$, 所以

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1+0+0}\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

所以化简得

$$xy+yz+xz=0.$$

同理可知:包含坐标轴$+x,+y,-z$的圆锥面的方程为：$-xy+yz+xz=0$;
包含坐标轴$+x,-y,+z$的圆锥面的方程为：$xy+yz-xz=0$;
包含坐标轴$+x,-y,-z$的圆锥面的方程为：$-xy+yz-xz=0$;

包含坐标轴$-x,+y,+z$的圆锥面的方程为：$xy-yz+xz=0$;

包含坐标轴$-x,+y,-z$的圆锥面的方程为：$-xy-yz+xz=0$;

包含坐标轴$-x,-y,+z$的圆锥面的方程为：$xy-yz-xz=0$;

包含坐标轴$-x,-y,-z$的圆锥面的方程为：$-xy-yz-xz=0$.

第57页习题:

9 解：(1). 设$M(x,y,z)$为旋转曲面上任一点，过M点的纬圆与直线 $l_2:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 交于点$P(x_1,y_1,z_1)$. 过P点的纬圆为：

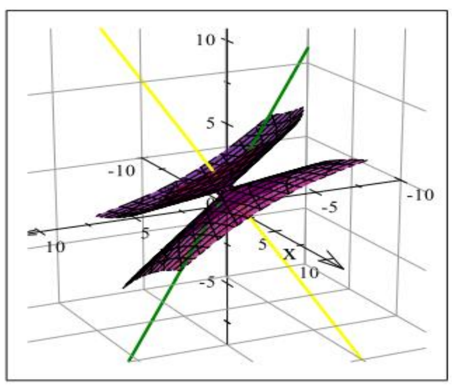
$$\begin{cases} (x-x_1)-(y-y_1)+2(z-z_1)=0 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=x_1^2+y_1^2+(z_1-1)^2 \end{cases}.$$

又P点在直线$l_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$上，所以

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1-1}{-1}.$$

从上面两方程消去参数x_1,y_1,z_1得

$$x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{9}{4}(x-y+2z-2)^2$$



(4).设$M(x,y,z)$为旋转曲面上任一点，过M点的纬圆与曲线交于点$P(x_1,y_1,z_1)$. 过P点的纬圆为：

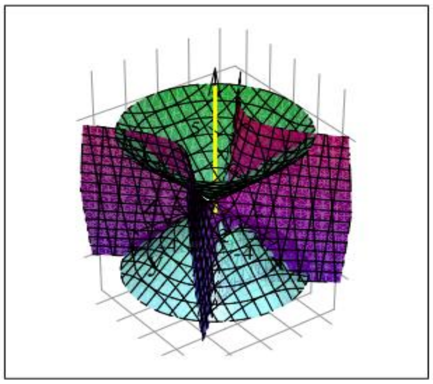
$$\begin{cases} z=z_1 \\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2 \end{cases}.$$

又P点满足曲线方程

$$\begin{cases} z_1=x_1^2-y_1^2 \\ x_1^2+y_1^2-z_1^2=1 \end{cases}.$$

从上面的方程中消去参数x_1,y_1,z_1得旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2-z^2=1$$



10. 解：首先直线 l_2 可以写做 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$，则$l_2$的方向矢量为$\vec{n}_2=(1,0,1)$, 且过点$A(0,1,0)$. 又直线$l_1$的方向矢量为$\vec{n}_1=(1,-1,1)$, 且过点$B(a,0,0)$. 因为 $l_1\cap l_2\neq\varnothing$, 所以有

$$(\vec{AB},\vec{n}_1,\vec{n}_2)=(a,-1,0)\times(1,-1,1)\cdot(1,0,1)=0$$

解得 $a=0$.

所以l_1的方程为$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. 设$M(x,y,z)$为旋转曲面上任一点，过$M$点的纬圆与曲线交于点$P(x_1,y_1,z_1)$. 过$P$点的纬圆为：

$$\begin{cases}(x-x_1)-(y-y_1)+(z-z_1)=0\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2\end{cases}.$$

又P点在直线l_1上，即

$$\frac{x_1}{1}=\frac{y_1}{-1}=\frac{z_1}{1}$$

因此从上面的方程消去参数x_1,y_1,z_1得

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz+2yz-2x+2y-2z=3.$$

(如果是按照$l_1:\frac{x-a}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$来解题的话, 则易得$a=-2$. 此时, 两条直线垂直, 曲面方程为:$x+y-z=1$)

第62页习题

1.解：设这个椭球面 Σ 满足

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

因为 $M\left(1,2,\sqrt{23}\right)\in\Sigma$, 可以得

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{16}+\frac{23}{c^2}=1.$$

所以 $c^2 = 36$. 因此

$$\Sigma : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

2.解：由已知, 可设椭圆抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

利用其过点 $(1,2,5), (\frac{1}{3}, -1, 1)$, 带入上面方程, 即得

$$a^2 = \frac{5}{18}, b^2 = \frac{5}{8}.$$

从而椭圆抛物面方程为

$$9x^2 + 4y^2 = 5z.$$

4.证明： 设 $\overrightarrow{OP_i} = r_i\vec{e_i}, i = 1,2,3$, 其中$\{\vec{e_i}\}$是都单位向量，且可用其方向余弦表示为

$$\begin{cases} \vec{e_1} = \cos\alpha_1\vec{i} + \cos\beta_1\vec{j} + \cos\gamma_1\vec{k} \\ \vec{e_2} = \cos\alpha_2\vec{i} + \cos\beta_2\vec{j} + \cos\gamma_2\vec{k} \\ \vec{e_3} = \cos\alpha_3\vec{i} + \cos\beta_3\vec{j} + \cos\gamma_3\vec{k} \end{cases} \tag{*}$$

因为 P_i 都在椭球面上，所以有

$$\frac{r_i^2\cos^2\alpha_i}{a^2} + \frac{r_i^2\cos^2\beta_i}{b^2} + \frac{r_i^2\cos^2\gamma_i}{c^2} = 1, i = 1,2,3.$$

那么可得

$$\frac{\sum_{i=1}^3\cos^2\alpha_i}{a^2} + \frac{\sum_{i=1}^3\cos^2\beta_i}{b^2} + \frac{\sum_{i=1}^3\cos^2\gamma_i}{c^2} = \sum_{i=1}^3\frac{1}{r_i^2}.$$

另一方面，因为$\{\vec{e_i}\}$互相垂直，那么$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \pm 1$. 不失一般性，我们设$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$. 那么由(*)式可解得

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\alpha_1\vec{e}_1 + \cos\alpha_2\vec{e}_2 + \cos\alpha_3\vec{e}_3 \\ \vec{j} = \cos\beta_1\vec{e}_1 + \cos\beta_2\vec{e}_2 + \cos\beta_3\vec{e}_3 \\ \vec{k} = \cos\gamma_1\vec{e}_1 + \cos\gamma_2\vec{e}_2 + \cos\gamma_3\vec{e}_3 \end{cases}$$

因为$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$也是单位向量，所以

$$\sum_{i=1}^3\cos^2\alpha_i = \sum_{i=1}^3\cos^2\beta_i = \sum_{i=1}^3\cos^2\gamma_i = 1.$$

因此

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{r_i^2}.$$

5.解： 不妨设过x轴的平面是 $\pi: z=ky$，那么它与此单叶双曲面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ z=ky \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2+y^2a^2(\frac{1}{b^2}-\frac{k^2}{c^2})=a^2 \\ z=ky \end{cases} \tag{5-1}$$

因为要求的交线是圆，那么依题可知，此圆的圆心为原点，圆关于x轴对称，且$(\pm a,0,0)$ 在圆上，所以此圆可看成以原点为球心，以a为半径的球与平面$z=ky$的交线， 即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z=ky \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2+y^2(1+k^2)=a^2 \\ z=ky \end{cases} \tag{5-2}$$

比较(5-1)式和(5-2)式得

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{k^2}{c^2}\right)=\frac{(1+k^2)}{a^2}.$$

因为 $a>b$, 可解得

$$k=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}} \quad 或 \quad k=-\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}.$$

所以要求的平面为

$$\pi: b\sqrt{a^2+c^2}z\pm c\sqrt{a^2-b^2}y=0.$$

6. 解： 依题知此椭圆抛物面关于y轴对称，且平面的法矢量为$(1,m,0)$. 记它们的交线为

$$\Sigma: \begin{cases} \frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y \\ x+my-2=0 \end{cases}.$$

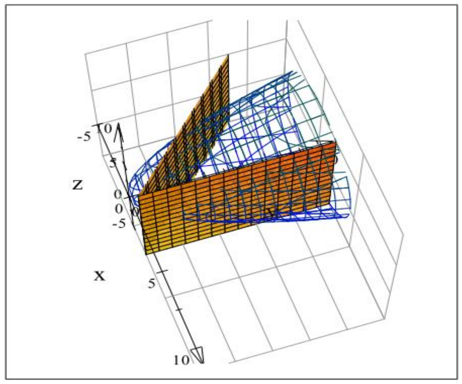
因为只有当平面和抛物面的对称轴平行时才有可能截得抛物线，y轴的方向矢量为$(0,1,0)$, 所以只能要求

$$(1,m,0)\cdot(0,1,0)=0.$$

因此$m=0$时， Σ是抛物线。

也因此只有当$m\neq 0$时，Σ有可能是椭圆. 既然$m\neq 0$，可将Σ重新写做

$$\begin{cases} \left(x+\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{3}z^2=\frac{4m+1}{m^2} \\ x+my-2=0 \end{cases}.$$



显然，若$\frac{4m+1}{m^2}>0$，即$m>-\frac{1}{4}$时，$\left(x+\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{3}z^2=\frac{4m+1}{m^2}$ 是个平行与y轴的柱面. 因为$m\neq 0$，平面$x+my-2=0$不会平行与此柱面的轴，所以它们的交线一定是椭圆.

7 证明：（1） 用平行于$x0y$的平面$\pi: z=h, |h|>c$, 分别去截3个曲面, 则有π 与单叶双曲面的交线为

$$C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

π 与二次锥面的交线为

$$C_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}.$$

π与双叶双曲面的交线为

$$C_3: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1.$$

显然，曲线C_3包含在C_2里, C_2包含在C_1里.

(2) 仍然利用（1）中的做法，取$y=0$. 则由上面的交线方程, 对于C_1, 取$x_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, 对于$C_3$, 取 $x_2=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$. 则有

$$x_1-x_3=\frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}+\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}}.$$

当 $h\to\infty$, $(x_1-x_3)\to 0$, 而曲面之间的距离 $\leq (x_1-x_3)$. 从而当 $|z|\to\infty$, 曲面之间的距离 $\to 0$.