2019-2020春学期《微分几何》第三周作业

4. **证明** $\mathbf{x}'(t)=(-\sin t,\cos t,1)$, 于是$\mathbf{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t,\cos t,1)$, $\mathbf{N}=\frac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|}=(-\cos t,-\sin t,0)$, $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t,-\cos t,1)$. 切线曲面为$\mathbf{r}_1(t,v)=\mathbf{x}(t)+v\mathbf{T}(t)$. 因$(\mathbf{x}',\mathbf{T},\mathbf{T}')=(\sqrt{2}\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T}')=0$, 故是可展曲面. 主法线曲面为$\mathbf{r}_2(t,v)=\mathbf{x}(t)+v\mathbf{N}(t)$, 因$(\mathbf{x}',\mathbf{N},\mathbf{N}')=(\sqrt{2}\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{N}')=\sqrt{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{N}'=(\sin t,-\cos t,1)\cdot(\sin t,-\cos t,0)=1\neq 0$, 故不是可展曲面. 从法线曲面为$\mathbf{r}_3(t,v)=\mathbf{x}(t)+v\mathbf{B}(t)$, 因$(\mathbf{x}',\mathbf{B},\mathbf{B}')=(\sqrt{2}\mathbf{T},\mathbf{B},\mathbf{B}')=-\sqrt{2}\mathbf{N}\cdot\mathbf{B}'=-(-\cos t,-\sin t,0)\cdot(\cos t,\sin t,0)=1\neq 0$, 故不是可展曲面. ▌

7. **证明** 设直纹面$\mathbf{r}=\mathbf{a}(t)+v\mathbf{l}(t)$为可展曲面, 则$(\mathbf{a}',\mathbf{l},\mathbf{l}')=0$, 下面分情况来讨论.

(1) 当$\mathbf{l}\times\mathbf{l}'=\mathbf{0}$时, 则有$\mathbf{l}//\mathbf{l}'$. 由于$\mathbf{l}$可取为单位向量, 则$\mathbf{l}\cdot\mathbf{l}'=0$, 即$\mathbf{l}\perp\mathbf{l}'$成立, 这就得出$\mathbf{l}'=\mathbf{0}$, 即$\mathbf{l}$是常向量, 所以这时直纹面为柱面.

(2) 当$\mathbf{l}\times\mathbf{l}'\neq\mathbf{0}$时, 则有$\mathbf{l}'\neq\mathbf{0}$. 首先说明这时能把直纹面方程改写为$\mathbf{r}=\mathbf{b}(t)+s\mathbf{l}(t)$, 这里$\mathbf{b}(t)$的切向量$\mathbf{b}'(t)$与$\mathbf{l}(t)$的切向量$\mathbf{l}'(t)$ 垂直. 事实上, 令$\mathbf{b}(t)=\mathbf{a}(t)+v(t)\mathbf{l}(t)$, 其中函数$v(t)$为待定. 因为$\mathbf{b}'=\mathbf{a}'+v'\mathbf{l}+v\mathbf{l}'$, 再根据条件$\mathbf{b}'\perp\mathbf{l}'$及$\mathbf{l}\perp\mathbf{l}'$, 就得到了$0=\mathbf{b}'\cdot\mathbf{l}'=\mathbf{a}'\cdot\mathbf{l}'+v\mathbf{l}'\cdot\mathbf{l}'$. 因为这时$\mathbf{l}'\neq 0$, 所以只要选择函数$v(t)=-\frac{\mathbf{a}'\cdot\mathbf{l}'}{\mathbf{l}'\cdot\mathbf{l}'}$后就能达到目的. 这时直纹面的方程为$\mathbf{r}=\mathbf{a}(t)+v\mathbf{l}(t)=\mathbf{b}(t)+(v-v(t))\mathbf{l}(t)$. 再把参数$v-v(t)$改记为$s$, 这样, 直纹面的方程就可写为$\mathbf{r}=\mathbf{b}(t)+s\mathbf{l}(t)$, 其中$\mathbf{b}'\perp\mathbf{l}'$.

在新参数下, 易见曲面是可展曲面的条件为$(\mathbf{b}',\mathbf{l},\mathbf{l}')=0$, 即向量$\mathbf{b}',\mathbf{l},\mathbf{l}'$共面. 当$\mathbf{b}'\neq\mathbf{0}$时, 因为$\mathbf{b}'$与$\mathbf{l}'$相互垂直, 从而$\mathbf{l}//\mathbf{b}'$, 直纹面的母线是$\mathbf{b}$的切线, 因此直纹面是由$\mathbf{b}$的切线所组成, 即为切线面. 当$\mathbf{b}'=\mathbf{0}$时, $\mathbf{b}=$常向量, 所以母线全由一点发出, 这时直纹面是一个锥面.

综上, 可展曲面局部地仅是柱面, 锥面或某一曲线的切线曲面. ▌

13. **证明** 记I_1 为螺面$r=(ucosv,usinv,u+v)$的第一基本形式，I_2 为旋转双曲面$r=(\rho cos\theta,\rho sin\theta,\sqrt{\rho^2-1})$的第一基本形式.
经计算，

$$I_1=2dudu+2dudv+(u^2+1)dvdv,$$

$$I_2=\frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1}d\rho d\rho+\rho^2 d\theta d\theta.$$

因为$\theta=tan^{-1}u+v$, $\rho=\sqrt{u^2+1}$,可得

$$d\theta=\frac{1}{1+u^2}du+dv \qquad d\rho=\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}du$$

代入I_2，得

$$I_2=\frac{2u^2+1}{u^2}\frac{u^2}{u^2+1}dudu+(u^2+1)(\frac{1}{1+u^2}du+dv)^2=I_1.$$

即等距对应.

14. **证明** 由$u=\xi^2+\eta^2,\qquad v=\eta$，可得
$du=2\xi d\xi+2\eta d\eta,\qquad dv=d\eta$,代入得

$$ds^2=\frac{(2\xi d\xi+2\eta d\eta)^2-4\eta(2\xi d\xi+2\eta d\eta)d\eta+4(\xi^2+\eta^2)d\eta^2}{4\xi^2}=d\xi^2+d\eta^2$$

即该曲面与平面可建立等距对应. ▌