

吉林大学 2016-2017 学年第一学期“数学分析 I”期末复习试题

共七道大题 满分 100 分 时间 180 分钟

一、(共 8 分) 叙述确界定理并用其证明单调有界数列必然收敛.

二、(共 10 分) 用定义证明

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 7}{n^2 - 8} = 2; (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{4}{3}.$$

三、(共 25 分) 计算下列各题.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x[e - (1 + \frac{1}{x})^x]; (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4};$$
$$(4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; (5) \int \frac{dx}{1+x^3}.$$

四、(共 24 分) 按要求计算下列导数或微分.

$$(1) \text{ 设 } f(x) = \arctan \sqrt{x^2-1} - \arccos \frac{1}{x}, \text{ 求 } f'(x);$$
$$(2) \text{ 设 } f(x) = x^2 \cos x, \text{ 求 } f^{(2017)}(\frac{\pi}{2})$$
$$(3) \text{ 已知函数 } y = f(x) \text{ 在极坐标 } (r, \theta) \text{ 中的方程为 } r = a(1 + \cos \theta), \theta \in (0, \frac{2\pi}{3}), \text{ 求 } f'(x);$$
$$(4) \text{ 已知 } x = t^2 + 2t, y = \ln(1+t), \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$$

五、(共 16 分) 证明题.

$$(1) \text{ 已知数列 } \{x_n\} \text{ 满足 } x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 12)}{3x_n^2 + 4}, \text{ 试讨论其敛散性, 并说明理由. 若其收敛,}$$

请求出其极限;

$$(2) \text{ 设函数 } f(x) \text{ 在区间 } [1, +\infty) \text{ 可微, 且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \text{ 证明 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

六、(共 12 分) 设函数 $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的凹凸区间;
- (3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线.

七、(共 5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 一致收敛, 且对 $\forall \alpha > 0$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha n) = 0$, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$