第一章　实数集与函数

§1　实　数

1. 设 a 为有理数,x 为无理数,证明:

(1)$a+x$ 是无理数　　(2) 当 $a\neq 0$ 时,ax 是无理数.

证:(1) 假设 $a+x$ 是有理数,则$(a+x)-a=x$ 是有理数.这与题设 x 是无理数相矛盾,故 $a+x$ 是无理数.

(2) 假设 ax 是有理数,则$\frac{ax}{a}=x$ 为有理数,这与题设 x 是无理数相矛盾,故 ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1)$x(x^2-1)>0$;　　(2) $|x-1|<|x-3|$

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$

解　(1) 由原不等式有

$$\begin{cases}x>0\\x^2-1>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x<0\\x^2-1<0\end{cases}$$

前一个不等式组的解是 $x>1$,后一个不等式组的解是 $-1<x<0$,

故(1) 的解如图 1—1.

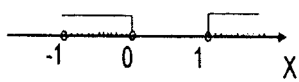

图 1—1

(2) 由原不等式有 $\left|\frac{x-1}{x-3}\right|<1$,于是有 $\left|1+\frac{2}{x-3}\right|<1$,所以 $-1<1+\frac{2}{x-3}<1$,解此不等式,得 $x<2$,故(2) 的解如图 1—2.

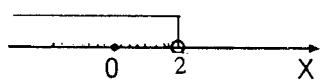

图 1—2

(3) 由题设知$\sqrt{3x-2}\geqslant 0$,$\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant 0$

从而不等式两端平方,有

$x-1+2x-1-2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\geqslant 3x-2,$

因之有 $2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$,所以 $\sqrt{(x-1)(2x-1)}=0$

由此解得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$,但 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$ 均不符合原不等式,所以原不等式无解.

3. 设 $a,b\in R$,证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

证:用反证法,倘若结论不成立,则 $a>b$(或 $a<b$ 同理可证)

令 $\varepsilon=a-b$,则 ε 为正数且 $a=b+\varepsilon$ 这与假设 $|a-b|<\varepsilon$ 相矛盾,从而 $a=b$

4. 设 $x\neq 0$,证明 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立.

证:因 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号,从而

$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2\sqrt{|x|\frac{1}{|x|}}=2.$

当且仅当 $|x|=\frac{1}{|x|}$,即 $x=\pm 1$ 时等号成立.

5. 证明:对任何 $x\in R$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1;$

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$

证:(1) 因为 $1-|x-1|\leqslant|1-x+1|=|x-2|.$

所以 $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$

(2) 因为 $2-|x-3|\leqslant|x-1|\leqslant|x-1|+|x-2|.$

所以,$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$

6. 设 $a,b,c\in R^+$ (R^+ 表示全体正实数的集合)

证明:$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证:对任意的正实数 a,b,c,有 $2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$

两端同时加 $a^4+b^2c^2$,有

$a^4+b^2c^2+2a^2bc\leqslant a^2b^2+a^2c^2+a^4+b^2c^2,$

即$(a^2+bc)^2\leqslant(a^2+b^2)(a^2+c^2)$,所以$a^2+bc\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$

$2a^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant-2bc$,两端再同加$b^2+c^2$,则有

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$$

其几何意义为:当$b\neq c$时,以(a,b),(a,c),$(0,0)$三点为顶点的三角形,其两边之差小于第三边.

当$b=c$时,此三角形变为以(a,c),$(0,0)$为端点的线段,此时等号成立.

7. 设$x>0,b>0,a\neq b$,证明$\dfrac{a+x}{b+x}$介于1与$\dfrac{a}{b}$之间.

解　因为$1-\dfrac{a+x}{b+x}=\dfrac{b-a}{b+x}$,$\dfrac{a+x}{b+x}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{x(b-a)}{b(b+x)}$.

且$x>0,b>0$,所以当$a>b$时,$1<\dfrac{a+x}{b+x}<\dfrac{a}{b}$;

当$a<b$时,$\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+x}{b+x}<1$.故$\dfrac{a+x}{b+x}$总介于1与$\dfrac{a}{b}$之间.

8. 设P为正整数,证明:若P不是完全平方数,则$\sqrt{P}$是无理数.

证:假设$\sqrt{P}$为有理数,则存在正整数m,n使$\sqrt{P}=\dfrac{m}{n}$,且m与n互素,从而它们的最大公约数为1,由辗转相除法知:存在整数u,v,使$mu+nv=1$,从而$m^2u+mnv=m$,于是n可整除m,这样$n=1$,因此$P=m^2$,这与P不是完全平方数相矛盾,故$\sqrt{P}$为无理数.

9. 设a,b为给定实数,试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解.

(1) $|x-a|<|x-b|$;　(2) $|x-a|<x-b$;(3) $|x^2-a|<b$

解　(1)原不等式等价于$\left|\dfrac{a-b}{x-b}-1\right|<1$,因此有$0<\dfrac{a-b}{x-b}<2$,由此不等式有

$$\begin{cases}x>b\\0<a-b<2x-2b\end{cases}\text{或}\begin{cases}x<b\\0>a-b>2x-2b\end{cases}$$

即$\begin{cases} x > b \\ x > \dfrac{a+b}{2} \\ a > b \end{cases}$或$\begin{cases} x < b \\ x < \dfrac{a+b}{2} \\ a < b \end{cases}$

故当 $a > b$ 时,不等式的解为　$x > \dfrac{a+b}{2}$;

当 $a < b$ 时,不等式的解为　$x < \dfrac{a+b}{2}$;

当 $a = b$ 时,不等式无解.

(2) 原不等式等价于$\begin{cases} x > b \\ x - a < x - b \end{cases}$　且$\begin{cases} x > b \\ a - x < x - b \end{cases}$

于是$\begin{cases} x > b \\ a > b \end{cases}$　且$\begin{cases} x > b \\ x > \dfrac{a+b}{2}, \end{cases}$

故当 $a > b$ 时,$x > \dfrac{a+b}{2}$;当 $a \leqslant b$ 时无解.

(3) 由原不等式有 $a - b < x^2 < a + b$,所以

当 $a \geqslant b$ 时,$\sqrt{a-b} < |x| < \sqrt{a+b}$　即

$\sqrt{a-b} < x < \sqrt{a+b}$ 或 $-\sqrt{a-b} > x > -\sqrt{a+b}$

当 $|a| < b$ 时,$|x| < \sqrt{a+b}$,即 $-\sqrt{a+b} < x < \sqrt{a+b}$.

其余情况均无解.

§2　数集与确界原理

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1 - x| - x \geqslant 0$;　　　　(2) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 6$

(3) $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$(a,b,c 为常数,且 $a < b < c$)

(4) $\sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解　(1) 由原不等式有$\begin{cases} x < 1 \\ 1 - 2x \geqslant 0 \end{cases}$或$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x - 1 - x \geqslant 0 \end{cases}$

前一个不等式组的解为 $x \leqslant \frac{1}{2}$，后一个不等式组无解，所以原不等式的解为 $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

(2) 由 $|x+\frac{1}{x}| \leqslant 6$ 有 $-6 \leqslant x+\frac{1}{x} \leqslant 6$,

当 $x>0$ 时 $-6x \leqslant x^2+1 \leqslant 6x$，它的解为 $x \in [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$；

当 $x<0$ 时，$6x \leqslant x^2+1 \leqslant -6x$，它的解为 $x \in [-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]$，

所以原不等式的解为 $x \in [-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}] \cup [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$

(3) 当 $x \leqslant a$ 或 $b \leqslant x \leqslant c$ 时，由 $a<b<c$ 知 $(x-a)(x-b)(x-c) \leqslant 0$，所以 $x \leqslant a$ 与 $b \leqslant x \leqslant c$ 都不是原不等式的解.

当 $a<x<b$ 时或 $x>c$ 时，由 $a<b<c$ 知 $(x-a)(x-b)(x-c)>0$，所以 $a<x<b$ 与 $x>c$ 都是原不等式的解.

原不等式的解是：$x \in (a,b) \cup (c,+\infty)$

(4) 当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 时 $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. 由正弦函数的周期性知 $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解是 $x \in [2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{3\pi}{4}]$，其中 k 为整数.

2. 设 S 为非空数集. 试对下列概念给出定义：

(1) S 无上界；　　　(2) S 无界

解　(1) 设 S 是一非空数集，若对任意的 $M>0$，总存在 $x_0 \in S$，使 $x_0>M$，则称数集 S 没有上界.

(2) 设 S 是一非空数集，若对任意的 $M>0$，总存在 $x_0 \in S$，使 $|x_0|>M$，则称数集 S 无界.

3. 试证由(3)式所确定的数集 S 有上界而无下界.

证：$S=\{y \mid y=2-x^2, x \in R\}$

对任意的 $x \in R$，$y=2-x^2 \leqslant 2$，所以数集 S 有上界 2. 而对任意的 $M>0$，取 $x_1=\sqrt{3+M}$，则 $y_1=2-x_1^2=2-3-M=-1-M \in S$，但 $y_1<-M$，因之数集 S 无下界.

4. 求下列数集的上、下确界，并依定义加以验证：

(1) $S = \{x \mid x^2 < 2\}$; (2) $S = \{x \mid x = n!, n \in N_+\}$

(3) $S = \{x \mid x$ 为 $(0,1)$ 内的无理数$\}$;

(4) $S = \{x \mid x = 1 - \frac{1}{2^n}, n \in N_+\}$

解　(1) $\sup S = \sqrt{2}$, $\inf S = -\sqrt{2}$, 以下依定义加以验证, 由 $x^2 < 2$ 知 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 因之对任意的 $x \in S$, 有 $x < \sqrt{2}$ 且 $x > -\sqrt{2}$, 即 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ 分别是 S 的上、下界. 又对任意的 $\varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon > 2\sqrt{2}$, 于是存在 $x_0 = \sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2}$, $x_1 = -\sqrt{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, 使 $x_0, x_1 \in S$, 但 $x_0 > \sqrt{2} - \varepsilon$, $x_1 < -\sqrt{2} + \varepsilon$, 所以 $\sup S = \sqrt{2}$, $\inf S = -\sqrt{2}$

(2) $\sup S = +\infty$, $\inf S = 1$, 以下依定义验证. 对任意的 $x \in S$, $1 \leqslant x < +\infty$, 所以 1 是 S 的下界. 对任意自然数 n, $n! < +\infty$, 所以 $\sup S = +\infty$; 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_1 = 1! = 1 \in S$, 使 $x_1 < 1 + \varepsilon$ 所以 $\inf S = 1$.

(3) $\sup S = 1$, $\inf S = 0$, 以下依定义验证, 对任意的 $x \in S$ 有 $0 < x < 1$, 所以 1,0 分别是 S 的上、下界. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $0 < \eta < \varepsilon$, 且使 $1 - \eta$ 为无理数, 则 $1 - \eta \in S$, $1 - \eta > 1 - \varepsilon$, 所以 $\sup S = 1$; 由 η 的取法知 η 是无理数, $\eta \in S$, $\eta < \varepsilon = 0 + \varepsilon$, 所以 $\inf S = 0$.

(4) $\sup S = 1$. $\inf S = \frac{1}{2}$, 以下依定义验证. 对任意的 $x \in S$, 有 $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$, 所以 $1, \frac{1}{2}$ 分别是 S 的上、下界; 对任意的 $\varepsilon > 0$, 必存在自然数 k, 使 $x_k = 1 - \frac{1}{2^k} \in S$, 且 $x_k = 1 - \frac{1}{2^k} > 1 - \varepsilon$, 所以 $\sup S = 1$, 又 $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in S$, $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$, 所以 $\inf S = \frac{1}{2}$.

5. 设 S 为非空有下界数集, 证明:

$$\inf S = \xi \in S \Leftrightarrow \xi = \min S$$

证: 充分性: 设 $\xi = \inf S$ 则对一切的 $x \in S$, $x \geqslant \xi$;

又对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\xi \in S$; $\xi < \xi + \varepsilon$, 所以 $\inf S = \xi$

必要性:设 $\inf S = \xi \in S$,则对一切的 $x \in S, x \geqslant \xi$ 且 $\xi \in S$,所以 $\xi = \min S$

6. 设 S 为非空数集,定义 $S^- = \{x \mid -x \in S\}$,证明:

(1)$\inf S^- = -\sup S$　　　(2)$\sup S^- = -\inf S$

证:(1) 设 $\xi = \inf S^-$,由下确界的定义知,对任意的 $x \in S$,有 $x \geqslant \xi$,且对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $x_0 \in S$,使 $x_0 < \xi + \varepsilon$.

由 $S^- = \{x \mid -x \in S\}$ 知,对任意的 $-x \in S$, $-x \leqslant -\xi$,且存在 $-x_0 \in S$,使 $-x_0 > -\xi - \varepsilon$,由上确界定义知 $\sup S = -\xi$,即 $\inf S^- = -\sup S$,同理可证(2) 式成立.

7. 设 A, B 皆为非空有界数集,定义数集

$$A + B = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}$$

证明:(1)$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$　(2)$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

证:(1) 设 $\sup A = \eta_1, \sup B = \eta_2$,对任意的 $z \in A + B$,存在 $x \in A, y \in B$,使 $z = x + y$,于是 $x \leqslant \eta_1, y \leqslant \eta_2$.从而 $Z \leqslant \eta_1 + \eta_2$,对任意的 $\varepsilon > 0$,必存在 $x_0 \in A, y_0 \in B$,且 $x_0 > \eta_1 - \frac{\varepsilon}{2}, y_0 > \eta_2 - \frac{\varepsilon}{2}$,则存在 $z_0 = x_0 + y_0 \in A + B$,使 $z_0 > (\eta_1 + \eta_2) - \varepsilon$,
所以 $\sup(A+B) = \eta_1 + \eta_2 = \sup A + \sup B$

(2) 同理可证.

8. 设 $a > 0, a \neq 1, x$ 为有理数,证明:

$$a^r = \begin{cases} \sup\{a^r \mid r \text{ 为有理数}, r < x\}, \text{当 } a > 1, \\ \inf\{a^r \mid r \text{ 为有理数}, r < x\}, \text{当 } a < 1. \end{cases}$$

证:只证 $a > 1$ 的情况,$a < 1$ 的情况可以类似地预以证明.

设 $E = \{a^r \mid r$ 为有理数$, r < x\}$,因为 $a > 1, a^r$ 严格递增,故对任意的有理数 $r < x$,有 $a^r < a^x$,即 a^x 是 E 的一个上界.对任意的 $\varepsilon > 0$,不妨设 $\varepsilon < a^x$,于是必存在有理数 $r_0 < x$,使得 $a^x - \varepsilon < a^{r_0} < a^x$.

事实上,由 $0 < a^x - \varepsilon < a^x$ 及 $\log_a x$ 递增知:$\log_a(a^x - \varepsilon) < \log_a a^x = x$.

取有理数 r_0,使得 $\log_a(a^x-\varepsilon)<r_0<x$.

所以 $a^x=\sup E$,即 $a^x=\sup\limits_{r<x}\{a^r \mid r \text{ 为有理数}\}$.

§3　函数概念

1. 试作下列函数的图象:

(1) $y=x^2+1$;　　(2) $y=(x+1)^2$

(3) $y=1-(x+1)^2$;　　(4) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$

(5) $y=\begin{cases}3x, & |x|>1\\ x^3, & |x|<1\\ 3, & |x|=1\end{cases}$

解　利用描点作图法,各函数图像如图 1—3 至图 1—7:

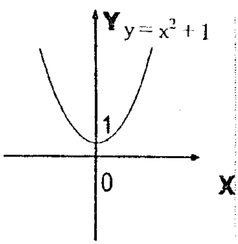

图 1 - 3

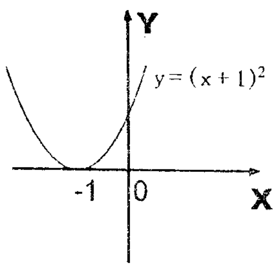

图 1 - 4

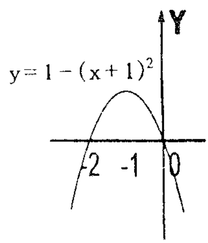

图 1 - 5

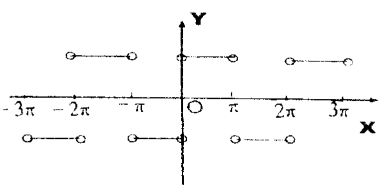

图 1 - 6

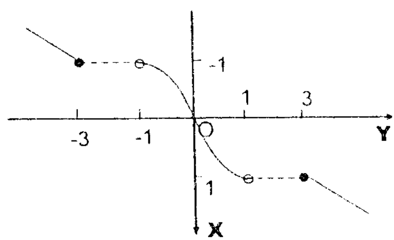

图 1 - 7

2. 试比较函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 分别当 $a = 2$ 和 $a = \frac{1}{2}$ 时的图像.

解　当 $a = 2$ 时，$y = a^x$ 是单调递增函数，当 $a = \frac{1}{2}$ 时，它是单调递减函数；$x > 0$ 时，$(\frac{1}{2})^x < 2^x$，$x = 0$ 时，$(\frac{1}{2})^x = 2^x = 1$，即函数都过点$(0,1)$；$x < 0$ 时，$(\frac{1}{2})^x > 2^x$，对任意的 $x \in R$，$(\frac{1}{2})^x$ 与 2^x 的值都大于 0，即函数的图像都在 x 轴的上方.

$y = \log_a x$ 是 $y = a^x$ 的反函数. 当 $a = 2$ 时，是单调递增函数，当 $a = \frac{1}{2}$ 时是单调递减函数，当 $0 < x < 1$ 时，$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_2 x$；$x = 1$ 时 $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x = 0$，即函数都过点$(1,0)$，当 $x > 1$ 时，$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_2 x$ 由于 $x \leqslant 0$ 时函数无定义，因之函数图像在 y 轴的右方.

$y = 2^x$ 与 $y = \log_2 x$，$y = (\frac{1}{2})^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像皆以直线 $y = x$ 为轴对称图形，如图 1—8：

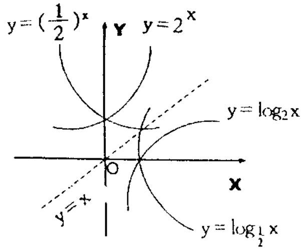

图 1—8

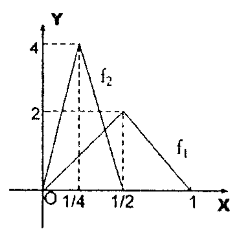

图 1—9

3. 根据图 1—9 写出定义在$[0,1]$上的分段函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的解析表示式.

解　利用直线的两点式方程或点斜式方程容易得到：

$$f_1(x)=\begin{cases}4x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ 4-4x, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}16x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{4}\\ 8-16x, & \frac{1}{4}<x\leqslant \frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

4. 确定下列初等函数的存在域:

(1) $y=\sin(\sin x)$　　(2) $y=\lg(\lg x)$

(3) $y=\arcsin(\lg\frac{x}{10})$　　(4) $y=\lg(\arcsin\frac{x}{10})$

解　(1) 因为 $\sin x$ 的存在域是 $x\in R$,所以 $y=\sin(\sin x)$ 的存在域是 $x\in R$

(2) 因为 $\lg x>0$ 等价于 $x>1$,所以 $y=\lg(\lg x)$ 的存在域是 $x\in(1,+\infty)$

(3) 因为 $y=\arcsin x$ 的存在域是 $x\in[-1,1]$,而 $-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant 1$ 等价于 $1\leqslant x\leqslant 100$,所以 $y=\arcsin(\lg\frac{x}{10})$ 的存在域是 $x\in[1,100]$.

(4) 因为 $y=\lg x$ 的存在域是 $x>0$,而 $y=\arcsin x$ 的值域为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$,由 $0<y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 有 $0<\frac{x}{10}\leqslant 1$,即 $0<x\leqslant 10$,所以 $y=\lg(\arcsin\frac{x}{10})$ 的存在域是 $x\in[0,10]$.

5. 设函数　$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$

求:(1) $f(-3),f(0),f(1)$

(2) $f(\Delta x)-f(0),f(-\Delta x)-f(0)(\Delta x>0)$

解　(1) $f(-3)=2+(-3)=-1$

$$f(0) = 2 + 0 = 2 \qquad f(1) = 2^1 = 2$$

(2) 因为 $\Delta x > 0$,所以 $f(\Delta x) - f(0) = 2^{\Delta x} - 2$,

$f(\Delta x) - f(0) = 2 + (-\Delta x) - 2 = -\Delta x$

6. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$,

求:$f(2+x), f(2x), f(x^2), f(f(x)), f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$

解　$f(x+2) = \dfrac{1}{1+(x+2)} = \dfrac{1}{3+x}$

$f(2x) = \dfrac{1}{1+2x}, f(x^3) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f(f(x)) = \dfrac{1}{1+f(x)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{x+1}{x+2}$

$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{f(x)}} = \dfrac{1}{1+1+x} = \dfrac{1}{2+x}$

7. 试问下列函数是由哪些基本初等函数复合而成:

(1) $y = (1+x)^{20}$;　　(2) $y = (\arcsin x^2)^2$

(3) $y = \lg(1+\sqrt{1+x^2})$;　　(4) $y = 2^{\sin^2 x}$

解　(1) $y = u^{20}, u = v_1 + v_2, v_1 = x, v_2 = 1$

(2) $y = u^2, u = \arcsin v, v = x^2$

(3) $y = \lg u, u = u_1 + u_2, u_1 = 1, u_2 = \sqrt{v}$

$v = u_1 + w, w = x^2$

(4) $y = 2^u, u = v^2, v = \sin x$

8. 在什么条件下,函数 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数就是它本身?

解　由 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解之得 $x = \dfrac{b-dy}{cy-a}$, 交换 x 与 y 得 $y = \dfrac{b-dx}{cx-a}$. 原函数的定义域为 $x \neq -\dfrac{d}{c}$　反函数的定义域为 $x \neq \dfrac{a}{c}$, 因此要使二函数相等,必须 $a = -d$. 此时原函数为 $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{b-dx}{cx-a}$,

即为反函数.故当 $a=-d$ 时,该函数的反函数就是其本身.

9.试作函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的图像

解　$y=\arcsin(\sin x)$ 是以 2π 为周期,定义域为 R,值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的分段线性函数,其图像如图 1－10.

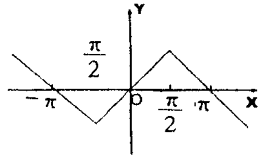

图 1－10

10.试问下列等式是否成立:

(1) $\tan(\arctan x)=x, x\in R$

(2) $\arctan(\tan x)=x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\cdots$

解　由 $\tan x$ 与 $\arctan x$ 的定义知(1)式成立,(2)式不成立.

11.试问 $y=|x|$ 是初等函数吗?

解　因为初等函数是由基本初等函数经四则运算及有限次复合而成的函数,而 $y=|x|=\sqrt{x^2}$,因之 $y=|x|$ 是初等函数.

12.证明关于函数 $y=[x]$ 的如下不等式:

(1) 当 $x>0$ 时, $1-x<x[\frac{1}{x}]\leqslant 1$

(2) 当 $x<0$ 时, $1\leqslant x[\frac{1}{x}]<1-x$

证:因为 $\lim\limits_{x\neq 0}x[\frac{1}{x}]=1$, $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\leqslant\frac{1}{x}$

1° 当 $x>0$ 时, $1-x<x[\frac{1}{x}]\leqslant 1$

2° 当 $x<0$ 时, $1\leqslant x[\frac{1}{x}]<1-x$

§4　具有某些特性的函数

1.证明: $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 是 R 上的有界函数.

解　利用不等式 $2|x|\leqslant 1+x^2$ 有 $|f(x)|=|\frac{x}{1+x^2}|$ $=\frac{1}{2}|\frac{2x}{1+x^2}|\leqslant\frac{1}{2}$ 对一切的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立,

故 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是 R 上的有界函数.

2.(1) 叙述无界函数的定义

(2) 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 为 $(0,1)$ 上的无界函数

(3) 举出函数 f 的例子,使 f 为闭区间 $[0,1]$ 上的无界函数.

解　(1) 设 $f(x)$ 在 D 上有定义. 若对任意的正数 M,都存在 $x_0\in D$,使 $|f(x_0)|>M$,则称函数 $f(x)$ 为 D 上的无界函数.

(2) 对任意的正数 M,存在 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1)$,使 $|f(x_0)|=\dfrac{1}{x_0^2}=M+1>M$,所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 是 $(0,1)$ 上的无界函数.

(3) 例如 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\in(0,1)\\ 2 & 当\ x=0,1\ 时\end{cases}$

3. 证明下列函数在指定区间上的单调性;

(1) $y=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增

(2) $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上严格递增

(3) $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减

证:(1) 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,$x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-1)-(3x_2-1)=3(x_1-x_2)<0$,可见 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增.

(2) 任取 $x_1,x_2\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,$x_1<x_2$,则有 $-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x_1-x_2}{2}<0$,因此,$\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$,$\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$,从而 $f(x_1)-f(x_2)=\sin x_1-\sin x_2=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}<0$,故 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上严格递增.

(3) 任取 $x_1,x_2\in[0,\pi]$,$x_1<x_2$,则 $0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi$,

$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$，从而 $\sin\frac{x_1 + x_2}{2} > 0, \sin\frac{x_1 - x_2}{2} < 0$，

$f(x_1) - f(x_2) = -2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\sin\frac{x_1 - x_2}{2} > 0$，从而 $f(x_1) > f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上严格递减.

4. 判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 1$　　(2) $f(x) = x + \sin x$

(3) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$　　(4) $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$

解　(1) 因 $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^4 + (-x)^2 - 1 = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 1 = f(x)$，故 $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 1$ 是偶函数

(2) 因 $f(-x) = -x + \sin(-x) = -(x + \sin x) = -f(x)$

故 $f(x) = x + \sin x$ 是奇函数

(3) 因 $f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$

故 $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ 是偶函数.

(4) 因 $f(-x) = \lg[-x + \sqrt{1 + (-x)^2}] = \lg(-x + \sqrt{1 + x^2})$

$= \lg\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = -\lg(x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x)$

故 $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是奇函数.

5. 求下列函数的周期：

(1) $\cos^2 x$　　(2) $\tan 3x$　　(3) $\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{3}$

解　(1) $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$，而 $1 + \cos 2x$ 的周期是 π，所以 $f(x) = \cos^2 x$ 的周期是 π.

(2) $\tan x$ 的周期是 π，所以 $f(x) = \tan 3x$ 的周期是 $\frac{\pi}{3}$

(3) $\cos\frac{x}{2}$ 的周期是 4π，$\sin\frac{x}{3}$ 的周期是 6π，

所以 $f(x)=\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{3}$ 的周期是 12π.

6. 设函数 f 定义在 $[-a,a]$ 上,证明:

(1) $F(x)=f(x)+f(-x),x\in[-a,a]$ 为偶函数.

(2) $G(x)=f(x)-f(-x),x\in[-a,a]$ 为奇函数.

(3) f 可表示为某个奇函数和某个偶函数之和.

证:(1) 因为 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$ 对任意的 $x\in[-a,a]$ 都成立,所以 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 是 $[-a,a]$ 上的偶函数.

(2) 因为 $G(-x)=f(-x)-f(x)=-G(x)$ 对任意的 $x\in[-a,a]$ 都成立,所以 $G(x)=f(x)-f(-x)$ 是 $[-a,a]$ 上的奇函数.

(3) 因为 $f(x)=\frac{1}{2}[F(x)+G(x)]$,其中 $F(x),G(x)$ 如上,所以命题成立.

7. 设 f,g 为定义在 D 上的有界函数,满足 $f(x)\leqslant g(x),x\in D$

证明:(1) $\sup\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}g(x)$ (2) $\inf\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}g(x)$

证:(1) 假设 $\sup\limits_{x\in D}f(x)>\sup\limits_{x\in D}g(x)$,令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup\limits_{x\in D}f(x)-\sup\limits_{x\in D}g(x))>0$,由上确界定义知,存在 $x_0\in D,f(x_0)>\sup\limits_{x\in D}f(x)-\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x))$,又对任意的 $x\in D,g(x)<\sup\limits_{x\in D}g(x)+\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x))$. 由此,知 $f(x_0)>g(x)$,这与题设 $f(x)\leqslant g(x),x\in D$ 相矛盾,所以 $\sup\limits_{x\in D}f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

(2) 同理可证明结论成立.

8. 设 f 为定义在 D 上的有界函数,证明:

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}f(x)$ (2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}f(x)$

证:(1) 令 $\inf\limits_{x\in D}f(x)=\xi$. 由下确界的定义知,对任意的 $x\in D$, $f(x)\geqslant\xi$,即 $-f(x)\leqslant-\xi$,可见 $-\xi$ 是 $-f(x)$ 的一个上界;对任意的

$\varepsilon>0$,存在 $x_0\in D$,使 $f(x_0)<\xi+\varepsilon$,即 $-f(x_0)>-\xi-\varepsilon$,可见 $-\xi$ 是 $-f(x)$ 的上界中的最小者,所以 $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\xi=-\inf\limits_{x\in D}f(x)$

(2) 同理可证结论成立.

9. 证明:$\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上无界,而在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内任一闭区间 $[a,b]$ 上有界.

证:(1) 对任意的正数 M,取 $x_0=\arctan(M+1)$,则 $-\frac{\pi}{2}<x_0<\frac{\pi}{2}$,$|\tan x_0|=|\tan\arctan(M+1)|=M+1>M$,所以 $f(x)=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内是无界函数.

(2) 任取 $[a,b]\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,由于 $\tan x$ 在 $[a,b]$ 上是严格递增的,从而 $\tan a\leqslant\tan x\leqslant\tan b$ 对任意的 $x\in[a,b]$ 都成立. 令 $M=\max\{|\tan a|,|\tan b|\}$,则对一切的 $x\in[a,b]$,有 $\tan x\leqslant M$,所以 $\tan x$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.

10. 讨论狄利克雷的有界函数,

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

的有界性、单调性与周期性.

解　(1) 对于任意的有理数 r,

$$x+r=\begin{cases}\text{有理数}, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ \text{无理数}, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

于是
$$D(x+r)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

即 $D(x+r)=D(x)$,所以任意的有理数都是 $D(x)$ 的周期. 但任何无理数都不是 $D(x)$ 的周期. 事实上,任取无理数 α,对于无理数 $-\alpha$,$D(-\alpha)=0$,而 $D(\alpha+(-\alpha))=D(0)=1\neq D(-\alpha)$

(2) 对于任意的有理数 x_1 与无理数 x_2,无论 $x_1>x_2$ 或 $x_1<x_2$,都有 $D(x_1)=1>0=D(x_2)$,所以 $D(x)$ 不具有单调性.

(3) 由 $D(x)$ 的定义知,对任意的 $x \in R$,有 $|D(x)| \leqslant 1$,所以 $D(x)$ 是有界函数.

11. 证明:$f(x) = x + \sin x$ 在 R 上严格增.

证:任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$,$x_1 < x_2$,则 $f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 + (\sin x_2 - \sin x_1) = (x_2 - x_1) - 2\cos\dfrac{x_1 + x_2}{2}\sin\dfrac{x_1 - x_2}{2}$ 而 $\left|2\cos\dfrac{x_1 + x_2}{2}\sin\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right| \leqslant 2\left|\cos\dfrac{x_2 + x_1}{2}\right| \cdot \left|\sin\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right| \leqslant x_2 - x_1$ 所以 $f(x_2) - f(x_1) > (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = 0$,因此 $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内严格递增.

12. 设定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数 f 在任何闭区间 $[a, b]$ 上有界,定义 $[a, +\infty)$ 上的函数:$m(x) = \inf\limits_{a \leqslant y \leqslant x} f(y)$,$M(x) = \sup\limits_{a \leqslant y \leqslant x} f(y)$.试讨论 $m(x)$ 与 $M(x)$ 的图像,其中

(1) $f(x) = \cos x, x \in [0, +\infty)$　(2) $f(x) = x^2, x \in [-1, +\infty)$

解　(1) 由 $m(x)$ 及 $M(x)$ 的定义知,对于任意的 $a < b$,当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为递增函数时,$m(x) = f(a)$,$M(x) = f(x)$,当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递减函数时,$m(x) = f(x)$,$M(x) = f(a)$.由此可知,当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时,$m(x) = \cos x$,$M(x) \equiv 1$,而在 $[\pi, +\infty)$ 上,由于 $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$,所以当 $x \in [\pi, +\infty)$ 时,$m(x) \equiv -1$,而 $M(x) \equiv 1$,$f(x) = \cos x, x \in (0, +\infty)$ 的图像如图 1—11.

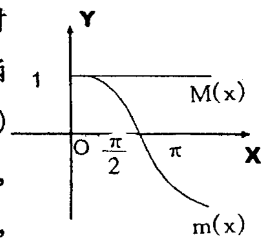

图 1—11

(2) 同上理,当 $x \in [-1, 0]$ 时,$m(x) = x^2$,当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$m(x) \equiv 0$;当 $x \in [-1, 1]$ 时,$M(x) \equiv 1$,当 $x \in [1, +\infty)$ 时,

$M(x)=x^2$,它的图形如图 1—12.

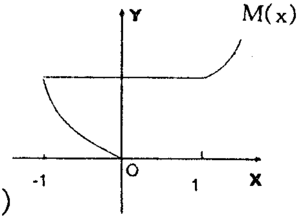

图 1—12

总 练 习 题

1. 设 $a,b\in R$,证明:

(1)$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$

(2)$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

证:因为 $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)=$
$\begin{cases} a, & \text{当 } a\geqslant b \text{ 时} \\ b, & \text{当 } a<b \text{ 时}\end{cases}$

$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)=\begin{cases} a, & \text{当 } a<b \text{ 时} \\ b, & \text{当 } a\geqslant b \text{ 时}\end{cases}$

所以 $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$

$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

2. 设 f 和 g 都是 D 上的初等函数,定义

$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},m(x)=\min\{f(x),g(x)\},x\in D$
试问 $M(x)$ 和 $m(x)$ 是否为初等函数?

解　由 1 知

$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|)$$

$$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|)$$

因为 $f(x),g(x)$ 都是 D 上的初等函数,所以 $M(x),m(x)$ 都是初等函数.

3. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$,求:

$f(-x),f(x+1),f(x)+1,f(\frac{1}{x}),\frac{1}{f(x)},f(x^2),f(f(x))$

解 $f(-x)=\frac{1+x}{1-x};f(x+1)=\frac{-x}{2+x};f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x}$

$f(\frac{1}{x})=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1};\frac{1}{f(x)}=\frac{1+x}{1-x};f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f(f(x))=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=x$$

4. 已知 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$,求 $f(x)$

解 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$

5. 利用函数 $y=[x]$ 求解:

(1) 某系各班级推选学生代表,每5人推选1名代表,余额满3人可增选1名,写出可推选代表数 y 与班级学生数 x 之间的函数关系(假设每班学生数为30—50人)

(2) 正数 x 经四舍五入后得整数 y,写出 y 与 x 之间的函数关系.

解 (1) $y=[\frac{x}{5}+\frac{2}{5}]=[\frac{x+2}{5}],x=30,31,\cdots,50$

(2) $y=[x+0.5],x>0$

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像,试作下列各函数的图象:

(1) $y=-f(x)$　(2) $y=f(-x)$　(3) $y=-f(-x)$

(4) $y=|f(x)|$　(5) $y=\mathrm{sgn}f(x)$

(6) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$　(7) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$

解 (1) $y=-f(x)$ 和 $y=f(x)$ 的图形关于 x 轴对称.

(2) $y=f(-x)$ 和 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴对称.

(3) $y=-f(-x)$ 和 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称.

(4) $y=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & x\in D_1=\{x\mid f(x)\geqslant 0\}\\ -f(x), & x\in D_2=\{x\mid f(x)<0\}\end{cases}$

(5) $y=\mathrm{sgn}f(x)$

$$= \begin{cases} 1, & x \in D_1 = \{x \mid f(x) > 0\} \\ 0, & x \in D_2 = \{x \mid f(x) = 0\} \\ -1, & x \in D_3 = \{x \mid f(x) < 0\} \end{cases}$$

$$(6)\ y = \frac{1}{2}[\,|f(x)| + f(x)\,]$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \in D_1 = \{x \mid f(x) \geqslant 0\} \\ 0, & x \in D_2 = \{x \mid f(x) < 0\} \end{cases}$$

$$(7)\ y = \frac{1}{2}[\,|f(x)| - f(x)\,]$$

$$= \begin{cases} 0, & x \in D_1 = \{x \mid f(x) \geqslant 0\} \\ -f(x), & x \in D_2 = \{x \mid f(x) < 0\} \end{cases}$$

它们的图象如图 1—13 至图 1—15.

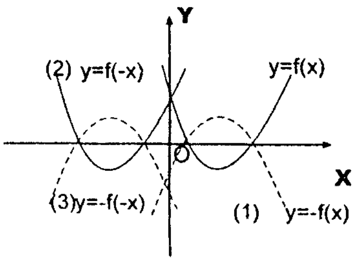

图 1—13

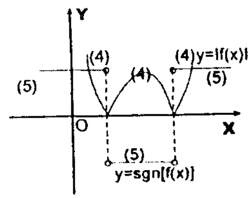

图 1—14

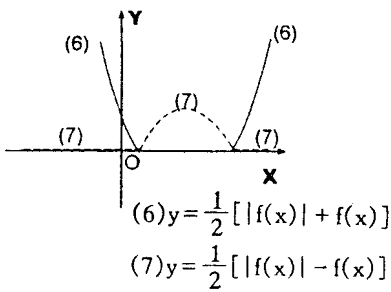

图 1—15

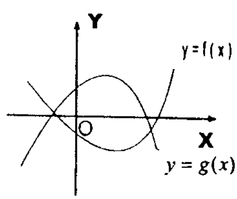

图 1—16

7. 已知函数 f 和 g 的图象图 1—16,试作下列函数的图象

(1)$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

(2)$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

解 (1)(2) 的图形如图 1 - 17

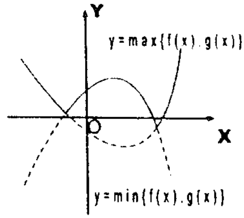

图 1—17

8. 设 f, g 和 h 为增函数,满足

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), x \in R$$

证明:$f(f(x)) \leqslant g(g(x)) \leqslant h(h(x))$

证:由题设条件

有 $f(f(x)) \leqslant f(g(x)) \leqslant g(g(x)) \leqslant h(g(x)) \leqslant h(h(x)$,即

$$f(f(x)) \leqslant g(g(x)) \leqslant h(h(x))$$

9. 设 f 和 g 为区间(a,b) 上的增函数,证明第 7 题中定义的函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也都是(a,b) 上的增函数.

证:设 $a < x_1 < x_2 < b$,则 $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$,$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \frac{1}{2}[f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2) + |f(x_1) - g(x_1)| - |f(x_2) - g(x_2)|]$

$\leqslant \frac{1}{2}[f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2) + |f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2)|]$

$\leqslant \frac{1}{2}[f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2) + |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)|] \leqslant 0$

即 $\varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$　$\varphi(x)$ 是(a,b) 上的增函数.

(2) 同理可证 $\psi(x)$ 也是(a,b) 上的增函数.

10. 设 f 为$[-a,a]$上的奇(偶)函数,证明:若 f 在$[0,a]$上增,则 f 在$[-a,0]$ 上增(减)

证:对任意的 $x_1, x_2 \in [-a,0]$,$x_1 < x_2$,有 $-x_1, -x_2 \in [0,a]$,且 $-x_1 > -x_2$,而 $f(-x_1) = -f(x_1)$,$f(-x_2) = -f(x_2)$,从而有 $f(-x_1) > f(-x_2)$,即 $f(x_1) < f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在$[-a,0]$ 上是增函数.

当 $f(x)$ 为偶函数时,类似地可以证明结论成立.

11. 证明:(1) 两个奇函数之和为奇函数,其积为偶函数.

(2) 两个偶函数之和与积都为偶函数.

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数.

证:只证(1),其余可以类似地证明.

设 f_1, f_2 为 D 上的奇函数,令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x), G(x)=f_1(x)f_2(x)$,则对任意的 $x \in D, F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=(-f_1(x))+(-f_2(x))=-(f_1(x)+f_2(x))=-F(x)$,

$G(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=G(x)$,

所以 $F(x), G(x)$ 是 D 上的奇、偶函数.

12. 设 f, g 为 D 上的有界函数,证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \inf\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x)$

(2) $\sup\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

证:对任意的 $x \in D$,由于 $\inf\limits_{x\in D} f(x) \leqslant f(x), \inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant g(x)$,

所以 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant f(x)+g(x)$

故 $\inf\limits_{x\in D} f(x)+\inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \qquad (1)$

由不等式(1) 又有 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\inf\limits_{x\in D}\{-g(x)\} \leqslant \inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)-g(x)\}=\inf\limits_{x\in D} f(x)$,所以

$\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \inf\limits_{x\in D} f(x)-\inf\limits_{x\in D}\{-g(x)\}=\inf\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} f(x)$

同(1) 可得　$\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \leqslant \sup\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x) \qquad (2)$

由不等式(2) 又有

$\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)-f(x)\} \leqslant \sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}$

所以 $-\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}+\sup\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

即　$\inf\limits_{x\in D} f(x)+\sup\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

13. 设 f, g 为 D 上非负有界函数,证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D} f(x) \cdot \inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$

(2) $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\} \leqslant \sup\limits_{x\in D} f(x) \cdot \sup\limits_{x\in D} g(x)$

证：对于任意的 $x \in D$ 由于 $\inf\limits_{x\in D} f(x) \leqslant f(x)$, $\inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant g(x)$ 且 $f(x) > 0, g(x) > 0$，所以 $\inf\limits_{x\in D} f(x) \cdot \inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant f(x) \cdot g(x)$ 故 $\inf\limits_{x\in D} f(x) \cdot \inf\limits_{x\in D} g(x) \leqslant \inf\limits_{x\in D} \{f(x) \cdot g(x)\}$ 同理可证(2)式成立.

14. 将定义在$[0, +\infty)$上的函数 f 延拓到 R 上，使延拓后的函数为(i) 奇函数　(ii) 偶函数. 设(1)$f(x) = \sin x + 1$;

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$$

解　(1) 令 $f_0(x) = \begin{cases} \sin x + 1, & 0 < x < +\infty \\ 0, & x = 0 \\ \sin x - 1, & -\infty < x < 0 \end{cases}$

$$f_e(x) = \begin{cases} \sin x + 1, & 0 \leqslant x < +\infty \\ -\sin x + 1, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

则 $f_0(x)$ 是奇函数，$f_e(x)$ 是偶函数，且都有 $f(x)$ 的延拓.

(2) 令

$$f_0(x) = \begin{cases} x^3, & 1 < x < +\infty \\ 1 - \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \sqrt{1 - x^2} - 1, & -1 \leqslant x < 0 \\ x^3, & -\infty < x < -1 \end{cases}$$

$$f_e(x) = \begin{cases} x^3, & 1 < x < +\infty \\ 1 - \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x^3, & -\infty < x < -1 \end{cases}$$

则 $f_0(x)$ 是奇函数，$f_e(x)$ 是偶函数，且都是 $f(x)$ 的延拓.

15. 设 f 是定义在 R 上以 h 为周期的函数，a 为实数.

证明：若 f 在$[a, a+h]$上有界，则 f 在 R 上有界.

证：因为 f 在$[a, a+h]$上有界，从而对任意的 $x \in [a, a+h]$，存在 $M > 0$，使 $|f(x)| \leqslant M$，对任意的 $y \in (-\infty, +\infty)$，一定存在整数 K，使 $y = \mathrm{k}h + x$，其中 $x \in [a, a+h]$，于是 $|f(y)| = |f(\mathrm{k}h + x)| = |f(x)| \leqslant M$，所以 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上有界.

16. 设 f 在区间 I 上有界，记 $M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$

证明：　$\sup\limits_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$

证：对任意 $x',x''\in I$，有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant M-m$，

任意的 $\varepsilon>0$，因为 $M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$ 所以有 $x'_0\in I$，

$f(x_0')>M-\varepsilon$，又因为 $m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$，所以存在 $x_0''\in I$，

$f(x_0'')<m+\varepsilon$，所以存在 $x_0',x_0''\in I$，使得

$|f(x_0')-f(x_0'')|>(M-\varepsilon)-(m+\varepsilon)=M-m-2\varepsilon$

即：$\sup\limits_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$