2. 设平面简单闭曲线 C 的长度为 L, 相对曲率 $k_r(s)$ 满足: $0 \leqslant k_r(s) \leqslant \dfrac{1}{R}$, R 为正常数. 试证: $L \geqslant 2\pi R$.

3. 设 $\overline{AB}$ 是直线段, $L > \overline{AB}$ 之长. 证明连接点 A, B 的长为 L 的简单曲线 C 与 $\overline{AB}$ 所围面积最大时, C 是过 A, B 的圆弧.

5. 在平面直角坐标系 Ox^1x^2 下给定曲线 C:

$$x^1(t) = \cos t, \quad x^2(t) = \sin 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

计算曲线 C 的旋转指标和相对全曲率.

7*. 设 $x : [0, l] \to \mathbf{E}^2$ 是平面闭曲线 C, 不在 C 上取一点 $x_0 \in \mathbf{E}^2$, 公式

$$\varphi(t) = \frac{x(t) - x_0}{|x(t) - x_0|}, \quad \forall t \in [0, l]$$

定义了一个映射 $\varphi : [0, l] \to S^1$. φ 的映射度数称为曲线 C 关于点 x_0 的**环绕数** (Winding number). 设 $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$, 试证: 这个环绕数 w 可表示为

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_0^l (x^1(x^2)' - x^2(x^1)') \, \mathrm{d}\, t.$$

8*. 设 $C : x = x(s), s \in [0, l]$ 是 $\mathbf{E}^2$ 上简单闭曲线, 其相对法向量为 $N_r(s)$. 定义曲线 $\overline{C}$ 为

$$\overline{x}(s) = x(s) - aN_r(s),$$

a 为正常数. $\overline{C}$ 称为 C 的**平行曲线**. 设 $k_r, \overline{k}_r$ 和 $A, \overline{A}$ 分别为它们的相对曲率和它们所围的面积. 试证明:

(1) $\overline{C}$ 的长度 $=C$ 的长度 $+2a\pi$;

(2) $\overline{k}_r(s) = k_r(s)/(1 + a)$;

(3) $\overline{A} = A + al + \pi a^2$.