2. 设 $C: x(s)=(0,\varphi(s),\psi(s))$ 是以弧长 $s\in[0,l]$ 为参数的正则平面曲线, 这里 $\varphi(0)=\varphi(l)=0,\varphi'(0)=1,\varphi'(l)=-1$ 且 $\varphi(s)>0.M$ 是 C 绕 z 轴旋转一周而得的曲面, 试证:

(I) M 的 Gauss 曲率 $K=-\dfrac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}$;

(Ⅱ) $\displaystyle\int_0^l K'\varphi^2\,\mathrm{d}\,s=0$;

(Ⅲ) $\mathbf{E}^3$ 中不存在曲率是单调增加的上述旋转曲面.

3. 详细证明推论 2.4.

推论 2.4 设 M 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通的椭圆型 W 曲面, 它的 Gauss 曲率为正, 则 M 必是球面.

3. 设 M^2 是 $\mathbf{E}^3$ 中紧致连通闭曲面, 它的全绝对曲率满足 $\displaystyle\int\limits_{M^2}|K|\,\mathrm{d}\,A\geqslant 2m\pi$. 试证: $\displaystyle\int\limits_{M^2}H^2\,\mathrm{d}\,A\geqslant\pi(m+\chi(M^2))$, 其中 $\chi(M^2)$ 是 M^2 的 Euler 示性数.

4. 设 zy 平面上给定一个椭圆: $y=r+a\cos u, z=b\sin u(r>a>b>0)$. 该椭圆绕 z 轴旋转一周得环面 T^2. 试计算 T^2 的全平均曲率, 并估计它的下界.

5. 设 $\varGamma$ 是空间打结的简单正则闭曲线, 试证 $\varGamma$ 的管状曲面的全平均曲率不小于 $4\pi^2$.