浙江大学2010－2011学年秋冬学期

《 高等代数 I 》课程期末考试试卷

课程号：061B0040，开课学院：理学院

考试试卷：A卷√、B卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带＿＿＿＿＿入场

考试日期：2011年1月13日，考试时间：120分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：所有题目必须做在答题本上！

做在试卷纸上的一律无效！

请勿将答题本拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：＿＿＿＿学号：＿＿＿＿所属院系：＿＿＿＿

(本试卷满分)0分)

1．（15分）设向量组$\alpha_1=(1\quad 2\quad -2)^T,\alpha_2=(2\quad 3\quad 1)^T,\alpha_3=(-1\quad 2\quad a)^T$，向量$\beta=(2\quad 1\quad b)^T$。试求

（1）a,b取何值时，向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？

（2）a,b取何值时，向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且表示法唯一？并将$\beta$写成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合。

2．（10分）设A是一个n阶实矩阵。试证明：A是某个欧氏空间的度量矩阵当且仅当A是正定的。

3．（10分）设A是一个n阶可逆反对称实矩阵，α是一个n元实列向量，b是一个实数。试证明

（1）$\alpha^T A\alpha=0$；

（2）$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$可逆当且仅当$b\neq 0$。

4．（10分）设$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，试证明：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1+a_{n-1} & n-1 \\ n & n & \cdots & n & n+a_n \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i}\right)$$

5. （10分）设A是一个幂零矩阵（即存在正整数m使得$A^m=O$），试证明：如果A可对角化，则$A=O$。

6. （10分）设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是一个实随机矩阵（即对于任意的$1\le i,j\le n$，有$a_{ij}\ge 0$且$\sum_{t=1}^{n}a_{it}=1$），试证明：

（1）若λ_0是A的一个实特征值，则$-1\le\lambda_0\le 1$；

（2）$\lambda=1$是A的一个特征值。

7. （10分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&2\\0&-1&a-3&-2\\3&2&1&a\end{pmatrix}$。

（1）试证明：齐次线性方程组$A^TAX=0$与$AX=0$同解；

（2）试问a为何值时齐次线性方程组$A^TAX=0$有唯一解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解。

8. （10分）设V是一个n维线性空间，σ是V上的一个线性变换。如果存在向量$\alpha\in V$使得$\sigma^{n-1}(\alpha)\ne\theta$（$V$中的零向量）且$\sigma^n(\alpha)=\theta$，试证明：

（1）$\alpha,\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\ldots,\sigma^{n-1}(\alpha)$是$V$的一组基；

（2）试求σ在基$\alpha,\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\ldots,\sigma^{n-1}(\alpha)$下的矩阵。

9. （15分）设$\alpha=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T, A=\alpha\alpha^T$。

（1）试证明：A的秩$=1$；

（2）试证明：α是A的一个特征向量；

（3）试求一个正交矩阵Q和一个对角阵Λ使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$。