第一章　复数与复变函数

§1.1 习题

2．设 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 是任意 n 个复数，证明：$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|z_k|$，并给出不等式中等号成立的条件.

（提示：可以用数学归纳法证明. 等号成立的条件是 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 线性相关）.

3．证明：$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|) \le |z| \le |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$.

证明：设 $z=a+ib$，则 $\operatorname{Re} z=a$，$\operatorname{Im} z=b$，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.由题 2 知，$|z| \le |a|+|bi|=|a|+|b|$

$$故\left(\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{|a|^2+2|ab|+|b|^2}{2}=\frac{|a|^2+|b|^2}{2}+|ab| \le \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}=|z|^2,$$

即有 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|) \le |z| \le |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$.

4．若 $|z_1|=\lambda|z_2|,\lambda>0$，证明：$|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|$.

证明：不妨设 $|z_2||z_1| \ne 0.\lambda^2|z_2|^2=|z_1|^2$

则 $|z_2||z_1-\lambda^2 z_2|=\left|z_1\overline{z_2}-\lambda^2|z_2|^2\right|=\left|z_1\overline{z_2}-|z_1|^2\right|=|z_1||z_1-z_2|$

即有 $|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|$ 成立.

5．设 $|a|<1$，证明：若 $|z|=1$，则 $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=1$.

证明：由 $|z|=1$ 得 $z\overline{z}=1$

故 $|z-a|=|z-az\overline{z}|=|z||1-a\overline{z}|=|1-a\overline{z}|$

即证之.

6．设$|a|<1$，$|z|<1$. 证明：$\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1$.

证明：提示：（$\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1 \Leftrightarrow |z|^2-2\mathrm{Re}\,\overline{a}z+|a|^2<1-2\mathrm{Re}\,\overline{a}z+|a|^2|z|^2$;

而$1-|a|^2-|z|^2+|a|^2|z|^2=(1-|a|^2)(1-|z|^2)>0$;）

7．设$z_1,z_2,...,z_n$，$\omega_1,\omega_2,...,\omega_n$是任意 2n 个复数，证明复数形式的 Lagrange 等式：

$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\omega_j\right|^2=(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2)(\sum_{j=1}^{n}\left|\omega_j\right|^2)-\sum_{1\le j<k\le n}\left|z_j\overline{\omega_k}-z_k\overline{\omega_j}\right|^2$，并由此推出 Cauchy 不等式：

$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\omega_j\right|^2=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\omega_j\right|^2\right)$.

证明：提示（记$A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{\omega_1} & \overline{\omega_2} & \cdots & \overline{\omega_n}\end{pmatrix}$，$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{\omega_1} & \overline{\omega_2} & \cdots & \overline{\omega_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} & \omega_1 \\ \overline{z_2} & \omega_2 \\ \cdots & \cdots \\ \overline{z_n} & \omega_n\end{pmatrix}=\det(A\overline{A'})\ge 0$，

$\det\begin{pmatrix} z_j & z_k \\ \overline{\omega_j} & \overline{\omega_k}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \overline{z_j} & \omega_j \\ \overline{z_k} & \omega_k\end{pmatrix}=\left|z_j\overline{\omega_k}-z_k\overline{\omega_j}\right|^2$，则原式$=\sum_{1\le j<k\le n}\left|z_j\overline{\omega_k}-z_k\overline{\omega_j}\right|^2\ge 0$.(1)

另外，$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{\omega_1} & \overline{\omega_2} & \cdots & \overline{\omega_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} & \omega_1 \\ \overline{z_2} & \omega_2 \\ \cdots & \cdots \\ \overline{z_n} & \omega_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2 & \sum_{j=1}^{n} z_j\omega_j \\ \sum_{j=1}^{n}\overline{z_j}\overline{\omega_j} & \sum_{j=1}^{n}\left|\omega_j\right|^2\end{pmatrix}$

$=(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2)(\sum_{j=1}^{n}\left|\omega_j\right|^2)-\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\omega_j\right|^2\ge 0$.（2）

由（1）=（2）可得证.

§1.2 习题

1． 把复数$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$写成三角形式.

解：$z=1+e^{i\theta}=e^{\frac{1}{2}i\theta}(e^{-\frac{1}{2}i\theta}+e^{\frac{1}{2}i\theta})=e^{\frac{1}{2}i\theta}2\operatorname{Re}e^{\frac{1}{2}i\theta}=(2\cos\frac{\theta}{2})e^{\frac{1}{2}i\theta}$.

2． 问取何值时有$(1+i)^n=(1-i)^n$.

解：提示（$\frac{1+i}{1-i}=i, i^{4k}=1, k\in N$）

3． 证明：$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$，$\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$，

证 明： 由 于 $\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{\frac{in\theta}{2}}$， 则 即 可 得 $\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}$，

$\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta=im\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}$.

4． 证明：$\Delta z_1z_2z_3$和$\Delta\omega_1\omega_2\omega_3$同向相似的充分必要条件为$\begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix}$=0.

证明：提示（$\Delta z_1z_2z_3$和$\Delta z_1z_2z_3$同向相似$\Leftrightarrow\exists a,b\in C$，使得$\omega_k=az_k+b(k=1,2,3)$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$线性相关$\Leftrightarrow\det\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$）

5． 设$z_1\neq z_2$，证明：z 位于以z_1和z_2为端点的开线段上，当且仅当存在$\lambda\in(0,1)$，使得

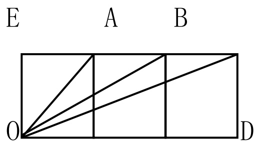
$z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$；

证明：z 位于以z_1和 z_2为端点的开线段上

$\Leftrightarrow \exists k>0, z_2 - z = k(z - z_1) \Leftrightarrow \exists k>0, z = \dfrac{z_2}{1+k} + \dfrac{z_1}{1+k}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in (0,1), z = \lambda z_1 + (1+\lambda) z_2, (\lambda = \dfrac{k}{1+k})$.

6．图 1.5 是三个边长为 1 的正方形，证明：$\angle AOD + \angle BOD + \angle COD = \dfrac{\pi}{2}$.



解：以 O 为原点，OD 为 X 轴，OE 为 Y 轴，建立坐标系. 设 $\vec{OA} = z_1, \vec{OB} = z_2, \vec{OC} = z_3$

则 $z_1 = 1+i, z_2 = 2+i, z_3 = 3+i$，

从而 $\arg(z_1 z_2 z_3) = \arg(1+i)(2+i)(3+i) = \arg(10i)$.

因为 i 是单位向量，它的辐角为 $\dfrac{\pi}{2}$，即 $\angle AOD + \angle BOD + \angle COD = \dfrac{\pi}{2}$.

10．证明：$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明等式的几何意义.

证明：$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re} z_1 z_2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\operatorname{Re} z_1 z_2 + |z_2|^2$

$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

几何意义是：平行四边形两对角线长的平方和等于它的各边长的平方和.

11．设 $z_1, \ldots, z_n$ 是单位圆周（以原点为中心、半径为 1 的圆周）上的 n 个点，如果 $z_1, \ldots, z_n$ 是正 n 边形的 n 个顶点，证明：$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$.

证明：记 $\omega = z_1 + z_2 + \ldots + z_n \in C$，设该正 n 边形的一个圆心角为 θ，$0 < \theta < \pi$.由复数乘法几何意义及正 n 边形对称性，$\omega e^{i\theta} = \omega \Rightarrow \omega = 0$，即证之.

13. 设 z_1，z_2，z_3，z_4 是单位圆周上的四个点，证明：这四个点是一矩形顶点的充要条件为 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

证明：提示（先为菱形，连线为直径对点则是矩形）

14. 设 L 是由方程 $az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0$ 所确定的点的轨迹，其中 a，d 是实数，β 是复数.

证明：（i）当 a=0，$\beta\neq 0$ 时，L 是一直线；（ii）当 $a\neq 0$，$\beta^2-ad>0$ 时，L 是一圆周. 并求出该圆周的圆心和半径.

证明：（i）令 $\lambda=d/2|\beta|^2$，则 $d=2\lambda\beta\bar{\beta}$，故原方程为 $\bar{\beta}(z+\lambda\beta)+\beta\overline{(z+\lambda\beta)}=0$，即

$\mathrm{Re}\,\bar{\beta}(z+\lambda\beta)=0$，即 $z+\lambda\beta$ 与 β 垂直，从而轨迹是一条通过点 $-\lambda\beta$，与 β 垂直的直线.

（ii）记 $\lambda^2=|\beta|^2-ad>0$，则 $ad=\beta\bar{\beta}-\lambda^2$，

原式 $\Leftrightarrow a^2z\bar{z}+a\bar{\beta}z+a\beta\bar{z}+ad=0\Leftrightarrow(az+\beta)(a\bar{z}+\bar{\beta})=\lambda^2\Leftrightarrow|az+\beta|^2=\lambda^2$

即证之.

§1.3 习题

1. 证明：在复数的球面表示下，z 和 $\frac{1}{\bar{z}}$ 的球面像关于复平面对称.

证明：设 $z=x+iy$ 其球面对应的坐标为 $x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$.

而 $\frac{1}{\bar{z}}$ 球面像对应的坐标为

$$x_1'=\frac{\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{z}}{1+\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2}=\frac{z+\bar{z}}{1+|\bar{z}|^2}=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}=x_1,$$

$$x_2'=\frac{\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}}{i(1+\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2)}=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|\bar{z}|^2)}=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}=x_2,$$

$$x_3'=\frac{\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2-1}{\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2+1}=\frac{1-|\bar{z}|^2}{1+|\bar{z}|^2}=\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}=-x_3,$$

从而有 $x_1'=x_1, x_2'=x_2, x_3'=-x_3$，故 z 和 $\frac{1}{\bar{z}}$ 的球面像关于复平面对称.

2. 证明：在复数的球面表示下，z 和 ω 的球面像是直径对点当且仅当 z$\bar{\omega}$=−1.

证明：$\Leftarrow$ 设 $z=x+iy$，由 $z\bar{\omega}=-1$ 得 $\bar{\omega}=-\frac{1}{z}, \omega=-\frac{1}{\bar{z}}$，

由于 z 对应的球面像为 $x_1=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, x_2=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$，

ω 对应的球面像为 x_1', x_2', x_3'，计算可得：$x_1'=-x_1, x_2'=-x_2, x_3'=-x_3$，

故 z 和 ω 的球面像是直径对点.

$\Rightarrow$ 由球面表示的几何意义知，$z, \bar{\omega}$ 位于通过竖坐标轴的平面与 xoy 平面交点上，从而 $z, \bar{\omega}$ 必与原点共线，则 $z\bar{\omega}=-\lambda, \lambda>0$，由 $x_3=x_3'$，易知 $\lambda=1$.

3. 证明：在复数的球面表示下，$\boldsymbol{C}_\infty$中的点 z 和ω的球面像间的距离为

$$\frac{2|z-\omega|}{\sqrt{\left(|z|^2+1\right)\left(|w|^2+1\right)}}.$$

证明：设z和w的球面像的坐标为$\left(x_1,x_2,x_3\right)$和$\left(x_1',x_2',x_3'\right)$，

则$\left(x_1-x_1'\right)^2+\left(x_2-x_2'\right)^2+\left(x_3-x_3'\right)^2=2-2\left(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'\right)$，

$$x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'=\frac{\left(z+\bar{z}\right)\left(\omega+\bar{\omega}\right)-\left(z-\bar{z}\right)\left(\omega+\bar{\omega}\right)+\left(|z|^2-1\right)\left(|\omega|^2+1\right)}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|\omega|^2\right)}$$

$$=\frac{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|\omega|^2\right)-2|z-\omega|^2}{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|\omega|^2\right)}$$

故

$$d\left(z,\omega\right)=\sqrt{\left(x_1-x_1'\right)^2+\left(x_2-x_2'\right)^2+\left(x_3-x_3'\right)^2}$$

$$=\sqrt{2-2\left(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'\right)}=\frac{2|z-\omega|}{\sqrt{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|\omega|^2\right)}}$$

4. 证明：在复数的球面表示下，若$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是二阶酉方阵，则$\boldsymbol{C}_\infty$的变换 w= $\dfrac{az+b}{cz+d}$诱导了球面绕球心的一个旋转.

证明：先证

$$\forall z,w\in c,d\left(z,w\right)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right)}}\text{，一定有 } d\left(\frac{az+b}{cz+d},\frac{aw+b}{cw+d}\right)=d\left(z,w\right).$$

而$$\frac{\left|\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{aw+b}{cw+d}\right|^2}{\left(\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right|^2+1\right)\left(\left|\dfrac{aw+b}{cw+d}\right|^2+1\right)}=\frac{\left|(z-w)\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|^2}{\left(|az+b|^2+|cz+d|^2\right)\left(|aw+b|^2+|cw+d|^2\right)},$$

由$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是二阶酉方阵知，

$$\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|=1, |az+b|^2+|cz+d|^2=\begin{pmatrix} \bar{z} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{z} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}=|z|^2+1,$$

类似的有 $|aw+b|^2+|cw+d|^2=|w|^2+1$, 故

原式$=\dfrac{|(ad-bc)(z-w)|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}=\dfrac{|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|z|^2+1)}$，

故 $d\left(\dfrac{az+b}{cz+d},\dfrac{aw+b}{cw+d}\right)=d(z,w)$ 成立，从而诱导变换是一个等距.

又等距变换的行列式是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的连续函数且只取 ± 1 两个值，而二阶酉方阵全体是连通的，

从而行列式为常数.

取 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，此时诱导变换是恒等变换，行列式为 1，故此常数为 1，从而此等距

变换为旋转.

§1.4 习题

1. 设 $z_0 \notin (-\infty, 0]$， $z_n \neq 0$， $\forall n \in N$. 证明：复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 z_0 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = |z_0|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \arg z_0$.

证明：因为 $z_0 \notin (-\infty, 0], \exists \delta > 0, s.t. \pi - \delta > \arg z_0 > -\pi + \delta$，

由不等式 $|z - z_0| \leq \| z_n | - | z_0 \| + | z_0 | \left|\arg z_n - \arg z_0\right|$ 即得充分性

由不等式 $| z - z_0 | \geq \| z_n | - | z_0 \|$ 及 $| z - z_0 | + \| z_n | - | z_0 \| \geq 2 | z_0 | \left|\sin \dfrac{\arg z_n - \arg z_0}{2}\right|$

并注意 $-\pi + \dfrac{\delta}{2} < \dfrac{\arg z_n - \arg z_0}{2} < \pi - \dfrac{\delta}{2}$，可得必要性.

2. 设 $z = x + iy \in \boldsymbol{C}$, 证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^x\left(\cos x + i \sin y\right)$.

（提示：分开证明实部与虚部收敛即可.）

§1.5 习题

2．设 E$\subset \boldsymbol{C}$ 是非空点集，$z,w\in \boldsymbol{C}$.证明：$\left|d\left(z,E\right)-d\left(\omega,E\right)\right|\le\left|z-\omega\right|$ 成立，而

$\left|d\left(z,E\right)-d\left(\omega,E\right)\right|\le d\left(z-\omega,E\right)$ 不成立.

证明：$\forall\xi\in E,$

有 $d(z,E)=\inf\limits_{\xi\in E}|z-\xi|\le|z-\xi|\le|z-\omega|+|\omega-z|\Rightarrow|\omega-\xi|\ge d(z,E)-|z-\omega|$，

取下确界得

$d(\omega,E)=\inf\limits_{\xi\in E}|\omega-\xi|\ge d(z,E)-|z-\omega|$，即 $d(z,E)-d(\omega,E)\le|z-\omega|$（1）

同样可得 $d(\omega,E)-d(z,E)\le|z-\omega|$（2）

因此由（1）（2）可得结论成立.

反例：令 $E=\{1\},z=2,\omega=1$.则 $d(z,E)$=1，$d(\omega,E)$=0，$d(z-\omega,E)$=0

3．指出下列点集的内部、边界、闭包和导集：

(i) $\boldsymbol{N}$={k: k 为自然数}；

解：内部：空集；边界：$\boldsymbol{N}$；闭包：$\overline{\boldsymbol{N}}$={k: k 为自然数}；导集：空集.

(ii) E={$\frac{1}{k}$: k 为自然数}；

解：内部：空集；边界：E$\cup\left\{0\right\}$；闭包：$\overline{E}$ = E$\cup\left\{0\right\}$；导集：{0}.

(iii) D=B(1,1) $\cup B(-1,1)$；

解：内部：D=B(1,1) $\cup B(-1,1)$；边界：$\partial D=\{z\in\boldsymbol{C}:|z-1|=1\text{ 或 }|z+1|=1\}$；

闭包：$\overline{D}=\{z\in\boldsymbol{C}:|z-1|\le1\text{ 或 }|z+1|\le1\}$；导集：$D^{'}=\{z\in\boldsymbol{C}:|z-1|\le1\text{ 或 }|z+1|\le1\}$；

(iv) G={z $\in\boldsymbol{C}$: $1<\left|z\right|\le2$ }；

解：内部：$G^{o}=\{z\in\boldsymbol{C}:1<|z|<2\}$；边界：；$\partial G=\{z\in\boldsymbol{C}:|z|=2\text{ 或 }|z|=1\}$

闭包：$\overline{G}=\{z\in\boldsymbol{C}:1\le|z|\le2\}$；导集：$G^{'}=\{z\in\boldsymbol{C}:1\le|z|\le2\}$；

(v) $\boldsymbol{C}$.

解：内部：$\boldsymbol{C}$；边界：空集；闭包：$\boldsymbol{C}$；导集：$\boldsymbol{C}$.

4.指出下列点集中哪些是开集，哪些是闭集，哪些是紧集：

(i) Z={k: k 为自然数}；
解：闭集，非开集，非紧集；

(ii) E 为有限集；
解：紧集；

(iii) D=$\left\{z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} z > 0\right\} \backslash \left(\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} F_k \right)$， $F_k = \left\{ z \in \boldsymbol{C} : z = k + iy, 0 \le y \le 1 \right\}$；

解：开集；

(iv) G=B(0,1)\ $\left\{ \dfrac{1}{k+1} : k\text{为自然数} \right\}$;

解：非开，非闭，非紧；

(v) $\boldsymbol{C} \backslash \mathrm{B}\left(\infty，R\right)$;

解：紧集.

8. 设 D 是开集，$F \subset D$是非空紧集，证明：

（i）$d\left(F, \partial D\right) > 0$;

(ii) 对任意$0<\delta<d\left(F,\partial D\right)$,存在$F$中的点$z_1, z_2, ..., z_n$,使得$F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B\left(z_k, \delta\right) \subset D$ 并且

$d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B\left(z_k, \delta\right), \partial D \right) \ge d\left(F, \partial D\right) - \delta$.

证明：（1）由定理 1.5.6 可得

（2）$\forall \zeta \in B(z_k, \delta)$, 成立 $d(F, \partial D) - d(\zeta, \partial D) \le d(z_k, \partial D) - d(\zeta, \partial D) \le | z_k - \zeta | < \delta$

即 $d(\zeta, \partial D) > d(F, \partial D) - \delta$ ，即 $d(\bigcup\limits_{k=1}^{\mathrm{n}} B(z_k, \delta), \partial D) = \inf d(\zeta, \partial D) \ge d(F, \partial D) - \delta$

§1.6 习题

1. 满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么？如果是域，说明它是单连通域还是多连通域？

（i） $\operatorname{Re} z = 1$;

实部是 1 的直线，　不是域

(ii) $\operatorname{Im} z < -5$；

虚部小于-5 的开平面，　单连通域

(iii) $|z-i|+|z+i|=5$;

椭圆曲线　不是域

(iv) $|z-i| \le |2-i|$;

闭圆盘　单连通域

(v) $\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{6}$;

半射线　不是域

(vi) $|z|<1, \operatorname{Im} z > \dfrac{1}{2}$;

开弓形　单连通域

(vii) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 2$;

圆盘外无界闭区域

(viii) $0 < \arg \dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{\pi}{4}$.

左半平面（不含虚轴）与以（-1，0）为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的闭圆盘外部之交　多连通域

§1.7 习题

3. 证明紧集的连续像为紧集.

证明：任取 $f(E)$ 的开覆盖 $U=\{u\}$，则 $f^{-1}(U)=\{f^{-1}(u)\}$ 是 E 的一个开覆盖，因为 E 为紧集，存在有限个开集 $f^{-1}(u_1),f^{-1}(u_2),\dots,f^{-1}(u_n)\in f^{-1}(U),s.t.E\subset\cup_{k=1}^{n}f^{-1}(u_k)$，故

$f(E)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}u_k$，从而 $f(E)$ 是紧集..

将紧集换成闭集，结论不一定成立.

反例：取 $E=[1,\infty)$, 令 $f(x)=\dfrac{1}{x}$. 则 $f(E)=(0,1]$ 不闭.

5. 证明：若 f 在域 D 上一致连续，则对任意 $z_0\in\partial D,\lim\limits_{z\to z_0}f\left(z\right)$ 存在.

证明：因为 f 在域 D 上一致连续，故 $\forall\varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，

对 D 上任意的 $z_{1,}z_2$，只要 $\left|z_1-z_2\right|<2\delta$, 有 $\left|f\left(z_1-z_2\right)\right|<\varepsilon$.

因此 $\forall z_1,z_2\in D\cap B(z_0,\delta)$，有 $\left|f\left(z_1-z_2\right)\right|<\varepsilon$，由 Cauchy 收敛原理，极限存在.

第二章全纯函数

§2.1 习题

1.研究下列函数的可微性：

（i） $f(z)=|z|$;

解： $z\neq 0$ 时

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{|z|-|z_0|}{z-z_0}$$ 不存在

这是因为当 $z=x_0+iy$ 时，

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\sqrt{x_0{}^2+y^2}-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{x_0+iy-x_0-iy_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{\sqrt{x_0{}^2+y^2}-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{iy-iy_0}$$

当 $z=x+iy_0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x^2+y_0{}^2}-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{x+iy_0-x_0-iy_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x^2+y_0{}^2}-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{x-x_0}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}$$

故 $z\neq 0$ 时， $f(z)$ 不可导.

当 $z=0$ 时，有 $\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=\frac{\Delta r}{\Delta r e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

即知 $f(z)=|z|$ 在 $z=0$ 也不可导.

从而 $f(z)=|z|$ 处处不可导.

(ii) $f(z)=|z|^2$;

解： $z\neq 0$ 时

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$$ 显然不存在.

这是因为当 $z=x+iy_0$ 时

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+y_0{}^2-x_0{}^2-y_0{}^2}{x+iy_0-x_0-iy_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=2x_0$$

当 $z=x_0+iy$ 时，

$$\lim_{y \to y_0} \frac{{x_0}^2 + y^2 - {x_0}^2 - {y_0}^2}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{(y - y_0)(y + y_0)}{(y - y_0)i} = \frac{2y_0}{i}$$

$z = 0$ 时可导，$f'(0) = 0$.

（iii）$f(z) = \operatorname{Re} z;$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0}{z - z_0}$$ 显然不存在.

这是因为当 $z = x + iy_0$ 时，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x + iy_0 - x_0 - iy_0} = 1.$$

当 $z = x_0 + iy$ 时，

$$\lim_{y \to y_0} \frac{x_0 - x_0}{x_0 + iy - x_0 - iy_0} = 0$$

从而 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不可导

(v) $f(z)$ 为常数

不妨设 $f(z) = C$, 显然 $f^{'}(z) = 0$

故 $f(z) = C$ 在处处可导.

2.设 f 和 g 都在 z_0 处可微，且 $f(z_0) = g(z_0) = 0, g^{'}(z_0) \neq 0$ 证明：$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f^{'}(z_0)}{g^{'}(z_0)}$

提示：$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)}$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

4．设域 G 和域 D 关于实轴对称，证明：如果 $f(z)$ 是 D 上的全纯函数，那么 $\overline{f(\overline{z})}$ 是 G 上的全纯函数.

提示：$\lim \dfrac{\overline{f(\overline{z + [illegible]})} [illegible]}{[illegible]} = \lim \left[\dfrac{[illegible]}{\overline{[illegible]}} \right] = \overline{f'(\overline{z})}, z \in G$

§2.2 习题

1.设 D 是域, $f \in H(D)$. 如果对每个 $z \in D$, 都有 $f^{'}(z)=0$,证明 f 是一常数.

证明:因为 $f^{'}(z)=0$,而 $f^{'}(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$=0(定理 2.2.4)

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}$=0, $\frac{\partial v}{\partial x}$=0,而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.故 $\frac{\partial u}{\partial y}$=0, $\frac{\partial v}{\partial y}$=0.

因此 f 是一个常数.

3.设 $z=x+iy$,证明 $f(z)=\sqrt{xy}$ 在 z=0 处满足 Cauchy-Reimann 方程,但 f 在 z=0 处不可微.

提示: $u=\sqrt{xy}$, $v=0$.直接算偏导.

8.设 D 是域, $f \in H(D)$, f 在 D 中不取零值,

证明: 对于任意 p>0,有 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left|f(z)\right|^p = p^2\left|f(z)\right|^{p-2}\left|f'(z)\right|^2$.

提示: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}$,将 $\left|f(z)\right|$ 写成 $\left[f(z)\overline{f(z)}\right]^{\frac{1}{2}}$,

利用 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$=0, $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$=0, $\frac{\partial f}{\partial z}=f'$, $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}=\overline{f'}$,计算.

11.设 D 是域, f:D → □]是非常数的全纯函数,则 $\log\left|f(z)\right|$ 和 Arg$f(z)$ 是 D 上的调和函数,而 $\left|f(z)\right|$ 不是 D 上的调和函数.

提示: $\Delta\log\left|f(z)\right|=\frac{1}{2}\Delta\log\left|f(z)\right|^2=2\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}\log|f(z)|^2$

$$=2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|f(z)|^2}\frac{\partial f(z)\overline{f(z)}}{\partial \overline{z}}\right)=2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(z)\overline{f'(z)}}{|f(z)|^2}\right)$$

$$=2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\overline{f'(z)}}{\overline{f(z)}}\right)=0$$

$\frac{f(z)}{\overline{f(z)}}=e^{2i\ \mathrm{a\ r}f\mathrm{g}\,z}$ 对 z 求偏导

$$\frac{\partial}{\partial z}(\arg f(z)) = \frac{1}{2i}\frac{f'(z)}{f(z)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(\arg f(z)) = 0$$

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(|f(z)|) = |f(z)|^{-1}|f'(z)|^2$$

如果 $|f(z)|$ 调和,则 $f'(z) \equiv 0$,从而 f 是常数,矛盾.

12.设 D,G 是域, $f: D \to G$ 是全纯函数,证明:若 u 是 G 上的调和函数,则 $u\circ$ 是 D 上的调和函数.

证明: 因为 u 是 G 上的调和函数,局部存在全纯函数 g, s.t. $u = \mathrm{Re}\, g$, 则 $g\circ$ 局部全纯,

于是局部有 $u\circ$ $\circ$,从而 $u\circ$ 调和.

15.举例说明:存在 $B(0,1)\backslash\{0\}$ 上的调和函数,它不是 $B(0,1)\backslash\{0\}$ 上全纯函数的实部.

解: $u(z) = \log|z|$ 是 $B(0,1)\backslash\{0\}$ 上的调和函数,它不是 $B(0,1)\backslash\{0\}$ 上全纯函数的实部.

(反证) 假设存在 $B(0,1)\backslash\{0\}$ 上的全纯函数 $f(z)$,使得 $\mathrm{Re} f(z) = \log|z|$,

设 $f(z) = \log|z| + iv(z)$, $v(z)$ 是实值函数.

则 $e^{f(z)} = |z|\cdot e^{iv(z)}$,从而 $\left|\frac{e^{f(z)}}{z}\right| = \left|e^{iv(z)}\right| = 1, \forall z \in B(0,1)\backslash\{0\}$.

由题 2.(iv) 可知 $\frac{e^{f(z)}}{z} \equiv$ 常数, 故存在 $\theta \in \mathbb{R}$ s.t. $e^{f(z)} = ze^{i\theta}$

即 $|z|\cdot e^{iv(z)} = ze^{i\theta} \Rightarrow e^{iv(z)} = e^{i(\arg z+\theta)} \Rightarrow v(z) = \arg z + \theta + 2k\pi$.

由 $v(z)$ 的连续性可知 k 是常数.

于是 $\arg z = v(z) - \theta - 2k\pi$ 在 $B(0,1)\backslash\{0\}$ 连续,不可能.

16.设 $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$.证明:

(i) 如果极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Re}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在,那么 $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ 存在,并且相等.

(ii) 如果极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Im}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在,那么 $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ 存在,而且

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

证明:(i) $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0}$ $\quad (z = x + iy_0) \quad (z_0 = (x_0, y_0))$

$$= \lim_{x \to x_0} \operatorname{Re} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \operatorname{Im} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \qquad (z = x_0 + iy)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} \frac{f(z) - f(z_0)}{-i(z - z_0)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} i \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(ii)利用 $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Re}[-if(z)]$,由(i)即得.

§2.3 习题

1．求映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 在 $z_1=-1$ 和 $z_2=i$ 处的转动角和伸缩率.

解：因为 $f=\dfrac{z-i}{z+i}$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z+i-z+i}{(z+i)^2}=\frac{2i}{(z+i)^2}$$

$$|f'(z_1)|=\left|\frac{2i}{(-1+i)^2}\right|=1 \qquad \arg f'(z_1)=\arg(-1)=\pi$$

$$|f'(z_2)|=\left|\frac{2i}{(2i)^2}\right|=\left|\frac{i}{-2}\right|=\frac{1}{2} \qquad \arg f'(z_2)=-\frac{\pi}{2}$$

2．设 f 是域 D 上的全纯函数，且 $f'(z)$ 在 D 上不取零值，试证：

（i）对每一个 $u_0+iv_0\in f(D)$，曲线 $\operatorname{Re} f(z)=u_0$ 和曲线 $\operatorname{Im} f(z)=v_0$ 正交；

证明：（i）$u=u_0$ 和 $v=v_0$ 是 uv 平面中的正交直线.因为 $f'(z)\neq 0$,故 f 是保角的.

从而曲线 $\operatorname{Re} f(z)=u_0$ 和曲线 $\operatorname{Im} f(z)=v_0$ 的夹角等于直线 $u=u_0$ 和 $v=v_0$ 的夹角,等于 $\dfrac{\pi}{2}$

§2.4 习题

1. 验证 $\overline{e^{z}}=e^{\bar{z}}$

证明：令 $z=x+iy$，则 $\bar{z}=x-iy$

$$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)\Rightarrow\overline{e^{z}}=e^{x}(\cos y-i\sin y)$$

$$e^{\bar{z}}=e^{x}(\cos y-i\sin y)$$

所以 $\overline{e^{z}}=e^{\bar{z}}$.

3.证明：若 $e^{z}=1$，则必有 $z=2k\pi i,k=0,\pm1,\cdots$.

证明：$e^{z}=1\Leftrightarrow e^{x}=|e^{z}|=1,\ Arge^{z}=y+2k\pi=0$

$$\Leftrightarrow x=0,y=2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}$$

$$\Leftrightarrow z=2k\pi i，\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

4.设 f 是整函数，$f(0)=1$. 证明：

(i)若 $f^{'}(z)=f(z)$ 对每个 $z\in\mathbb{C}$ 成立 则 $f(z)\equiv e^{z}$;

(ii) 若对每个 $z,\omega\in\mathbb{C}$，有 $f(z+\omega)=f(z)f(\omega)$，且 $f^{'}(0)=1$，则 $f(z)\equiv e^{z}$.

证明：

（i）$(f(z)e^{-z})^{'}=f^{'}(z)e^{-z}-f(z)e^{-z}=f(z)e^{-z}-f(z)e^{-z}=0.$

$f(z)e^{-z}=c$，$1\times1=c,c=1$，故 $f(z)\equiv e^{z}$

(ii) $f'(z+\omega)=f'(z)f(\omega)$，令 $z=0\Rightarrow f'(\omega)=f(\omega)$

7.设 f 在 $\mathbb{C}$]中全纯，$f(1)=0$. 证明：

（i）若 $f^{'}(z)=e^{-f(z)},z\in\mathbb{C}$]，则 $f(z)\equiv\log z$；

(ii)若 $f(z\omega)=f(z)+f(\omega)$，$z\in\mathbb{C}$]，$\omega\in(0,\infty)$，且 $f^{'}(1)=1$，则 $f(z)\equiv\log z$.

证明：

（i）令 $F(z)=e^{f(z)}-z$，则 $F^{'}(z)=e^{f(z)}\cdot f^{'}(z)-1=0$

$\Rightarrow F(z)=c$ (常数)

令 z=1,则 F(1)=e$^{f(1)}-1=e^0-1=0=c$.

故 $\left.\begin{array}{l} e^{f(z)}=z \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(z)=\log z$

(ii)提示 $\omega f'(z\omega)=f'(z)$,令 $z=1$ 得 $f'(\omega)=\dfrac{1}{\omega}$.

8．证明：$f(z)=z^2+2z+3$ 在 $B(0,1)$ 中单叶.

证明： 取 $\forall z_1$，$z_2 \in B(0,1), z_1 \neq z_2$

$f(z_1)-f(z_2)=(z_1-z_2)(z_1+z_2+2)$

$z_1 \neq z_2, z_1$，$z_2 \in B(0,1) \Rightarrow f(z_1)-f(z_2) \neq 0 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

故 $f(z)$ 在 $B(0,1)$ 中单叶.

12．设 f 在□ $]$上全纯，$f(1)=1, \mu>0$. 证明：

(i) 若 $f'(z)=\mu \dfrac{f(z)}{z}, z \in \boldsymbol{C} \setminus (-\infty,0]$，则 $f(z) \equiv |z|^{\mu} e^{i\mu \arg z}$;

(ii) 若 $f(z\omega)=f(z)f(\omega)$，$z \in \boldsymbol{C} \setminus (-\infty,0], \omega \in (0,\infty)$,且 $f'(1)=\mu$, 则

$f(z) \equiv |z|^{\mu} e^{i\mu \arg z}$

证明：(i) 要证 $f(z)=|z|^{\mu} e^{i\mu \arg z}$，即证 $f(z)=e^{\mu \log z}$

$\left(f(z)e^{\mu \log z}\right)'=0$,及 $f(1)=1$

$\Rightarrow f(z)=e^{\mu \log z}=|z|^{\mu} \cdot e^{i\mu Argz}$.

(ii) $zf(z\omega)=f(z)f'(\omega)$ 令 $\omega=1$ 得 $zf(z)=\mu f(z)$

即 $f'(z)=\mu \dfrac{f(z)}{z}$

14.证明:

(i) $\cos(z+\omega)=\cos z \cdot \cos \omega - \sin z \cdot \sin \omega$;

(ii) $\sin(z+\omega)=\sin z \cdot \cos \omega + \cos z \cdot \sin \omega$;

证明:(i) $\cos(z+\omega)+i\sin(z+\omega)=e^{i(z+\omega)}$

$$=\cos z\cos\omega-\sin z\sin\omega+i\left(\sin z\cos\omega+\cos z\sin\omega\right) \qquad (1)$$

在上式中以$-z$，$-\omega$代入，得

$$\cos(z+\omega)-i\sin(z+\omega)$$

$$=\cos z\cos\omega-\sin z\sin\omega-i\left(\sin z\cos\omega+\cos z\sin\omega\right) \qquad （2）$$

$(1)+(2)$ 得 $\cos(z+\omega)=\cos z\cos\omega-\sin z\sin\omega$

$(1)-(2)$ 得 $\sin(z+\omega)=\sin z\cos\omega+\cos z\sin\omega$

19.证明: $\omega=\sin z$ 将半条形域$\left\{z\in\square \quad \frac{\pi}{2} \quad \mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2},\mathrm{Im}\,z>0\right\}$一一地映为上半平面.

证明: $\omega=\sin z=\cos(\frac{\pi}{2}-z)=\cos(z-\frac{\pi}{2})$ 令 $u=z-\frac{\pi}{2}$,

则 $w=\cos u$ 是由指数 $z=e^{iu}$, $(-\pi<\mathrm{Re}\,u<0,\mathrm{Im}\,u>0)$,

与 Rokovsky 函数 $\omega=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $(z\in B(0,1)\setminus\{0\},-\pi<argz<0)$, 的复合.

故 $w=\sin z$ 将半条形区域$\{z\in\square \quad \frac{\pi}{2} \quad \mathrm{Re}\,z<\frac{\pi}{2},\mathrm{Im}\,z>0\}$一一映成上半平面.

20.证明 $B(0,1)$ 是 $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ 的单叶性域,并求出 $f(B(0,1))$.

证明: $f(z_1)-f(z_2)=\frac{1-z_1z_2}{\left[(1-z_1)(1-z_2)\right]^2}(z_1-z_2)$

给出 f 的单叶性

$z\neq0$ 时, $\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{z}+z-2$ 由 Rokovsky 函数的性质易得

$f(B(0,1))=\square \qquad \frac{1}{4}]$

21.当 z 按逆时针方向沿圆周$\{z:|z|=2\}$ }旋转一圈后,计算下列函数辐角的增量:

(iii) $(z^2+2z-3)^{\frac{1}{4}}$;

(iv) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

解:

(iii) $(z^2+2z-3)^{\frac{1}{4}}=[(z+3)\cdot(z-1)]^{\frac{1}{4}}$

-3 在圆周$|z|=2$外,1 在圆周$|z|=$内

所以当 z 按逆时针方向沿圆周旋转一圈后，辐角的增量为$\frac{\pi}{2}$

(iv) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{|z+1|}\left[(z-1)(\bar{z}+1)^{\frac{1}{2}}\right]$

$z=\pm1$ 均在圆周 $|z|=2$ 内,所以辐角的增量为 0.

22.设 $f(z)=\dfrac{z^{p-1}}{(1-z)^p},0<p<1$. 证明: f 能在域 $D=$□ [ ] 上选出单值的全纯分支.

证明: $f(z)=\dfrac{z^{p-1}}{(1+e^{i\pi}z)^p}=\dfrac{1}{e^{i\pi}z}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^p$

只需考虑 $g(z)=\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^p$

设 γ 是 D 中的简单闭曲线,则当 z 沿 γ 逆时针绕行一周时, 若 γ 内部不含 $[0,1]$,则辐角增量为 0, 若 $[0,1]$ 位于 γ 内部,则辐角增量为 $2\pi p+2\pi(-p)=0$.

故 g 从而 f 能在域 $D=$□ [ ] 上选出单值的全纯分支.

23.证明: $f(z)=Log\left(\dfrac{z^2-1}{z}\right)$ 能在域 $D=$□ -1]$\cup$[0,1]) 上选出单值的全纯分支.

证明: $\dfrac{z^2-1}{z}$ 将□ -1]$\cup$[0,1]) 映入□], 而对数函数在□] 上能选出全纯分支.

24.设单叶全纯映射 f 将域 D 一一地映为 G,证明:G 的面积为 $\iint\left|f'(z)\right|^2dxdy$.

证明:令 $z=x+iy$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

变换行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2$$

$$=\left|f'(z)\right|^2$$

$\therefore\ S_G=\iint\limits_D\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|dxdy=\iint\limits_D\left|f'(z)\right|^2dxdy$.

25.设 f 是域 D 上的单叶全纯映射, $z=\gamma(t),(\alpha\le t\le\beta)$ 是 D 中的光滑曲线,

证明: $\omega=f(\gamma(t))$ 的长度为 $\int_\alpha^\beta\left|f'(\gamma(t))\right|\left|\gamma'(t)\right|dt$

证明: $\dfrac{d\omega}{dt}=f'(\gamma(t))\gamma'(t)$

故 $w=f(\gamma(t))$ 的长度为 $\int_\alpha^\beta\left|f'(\gamma(t))\right|\left|\gamma'(t)\right|dt$

26.设 D 是 z 平面上去掉线段 $[-1,i],[1,i]$ 和射线 $z=it \quad (1\le t<\infty)$ 后得到的域,证明函数 $Log(1-z^2)$ 能在 D 上分出单值的全纯分支.设 f 是满足 $f(0)=0$ 的那个分支,试计算 $f(2)$ 的值.

解: 取 D 中任一简单闭曲线 γ,则 ± 1 都不在 γ 内部,
从而 z 沿 γ 逆时针绕行一周时, $1-z^2=(1-z)(1+z)$ 辐角的增量为 0,
故能选出全纯分支.
设 $f(z)=\log|1-z^2|+iarg(1-z^2)+2k\pi$. 由 $f(0)=0\Rightarrow k=0$, 故
$f(2)=\log 3+iarg(-3)=\log 3+i\pi$.

§2.5 习题

1. 试求把上半平面映为上半平面的分式线性变换,使得∞,0,1 分别映为 0,1,∞.

解: $\omega=T(z)=\dfrac{-1}{z-1}$

2. 证明: 分式线性变换$\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}$把上半平面映为上半平面的充要条件是$a,b,c,d$都是实数,而且$ad-bc>0$.

证明: 必要性：因为线性变换把实轴映为实轴,

故$\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}$中$a,b,c,d$都是实数；

因为$\omega(i)=\dfrac{ac+bd+(ad-bc)i}{c^2}$属于上半平面，故$ad-bc>0$.

充分性：对$z=0,1,\infty$, 都有$\omega(z)\in\boldsymbol{R}$,从而$\omega$将实轴映为实轴,

又$\operatorname{Im}\omega(i)=ad-bc>0$,故将上半平面映为上半平面.

4.试求把单位圆盘的外部$\{z:|z|>1\}$ 映为右半平面$\{\omega:\operatorname{Re}\omega>0\}$的分式线性变换,使得

(i)1,-i,-1 分别变为 i,0,-i;

(ii)-i,i,1 分别变为 i,0,-i.

解:(i) $\omega=T(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$

(ii) $\omega=T(z)=\dfrac{z-i}{(2-i)z+2i-1}$

10.设$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$是一个分式线性变换,如果记$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$,那么

$T^{-1}(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

证明:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \lambda & \delta\end{pmatrix}$$

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow czT(z)+dT(z)=az+b \quad \Rightarrow T^{-1}(z)=\frac{b-dz}{cz-a}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

从而证得$T^{-1}(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

11.设$T_1(z)=\dfrac{a_1+b_1}{c_1+d_1}$,$T_2(z)=\dfrac{a_2+b_2}{c_2+d_2}$是两个分式线性变换,如果记

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 那么 $(T_1 \circ$ - $\frac{az+b}{cz+d}$.

证明: $(T_1 \circ$ - $=\frac{a_1a_2z+a_1b_2+b_1c_2z+b_1d_2}{c_1a_2z+c_1b_2+d_1c_2z+d_1d_2}$

又 $\because \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} a_1a_2+b_1c_2=a \\ a_1b_2+b_1d_2=c \\ c_1b_2+d_1d_2=d \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1a_2z+a_1b_2+b_1c_2z+b_1d_2}{c_1a_2z+c_1b_2+d_1c_2z+d_1d_2}=\frac{az+b}{cz+d}$$

从而 $(T_1 \circ$ - $\frac{az+b}{cz+d}$.

12.设 Γ 是过-1 和 1 的圆周, z 和 w 都不在圆周上.如果 $zw=1$, 那么 z 和 w 必分别于 Γ 的内部或外部.

证明:由圆的对称性知 Γ 的圆心必然在虚轴上，设圆周与虚轴交个交点为 z_1，z_2.

又由平面几何知识知 $|z_1|\cdot|z_2|=1$,从而 $z_2=\frac{1}{z_1}$.

设 z 在 Γ 内部，则 z 位于走向 1，z_1,-1 的左边,因此分式线性变换 $T(\mathrm{x})=\frac{1}{x}$，将 $\frac{1}{\mathrm{z}}=T(z)$ 映为走向 $T(1)$，$T(z_1)$，$T(-1)$, 即 1，z_2，-1 的左边.

注意 $T(\Gamma)=\Gamma$，走向 1，z_2，-1 的左边即 Γ 的外部，故 $\frac{1}{\mathrm{z}}$ 在 Γ 外部.

15.求一单叶全纯映射,把除去线段 $[0,1+i]$ 的第一象限映为上半平面.

提示: 先作变换 $z_1=z^4$,再作 $z_2=z_1+4$,最后作变换 $z_3=\sqrt{z_2}$ 可得.

16. 求一单叶全纯映射,把半条形域 $\left\{z:-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\operatorname{Im}z>0\right\}$ 映为上半平面,且把 $\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$,0 分别映为 1,-1,0.

提示: 先作变换 $z_1=iz$,再作 $z_2=e^{z_1}, z_3=-iz_2, z_4=\frac{1}{2}(z_3+\frac{1}{z_3})$.

即 $w=\frac{1}{2}(-ie^{iz}+\frac{1}{-ie^{iz}})$

17.求一单叶全纯映射,把除去线段 $[a,a+hi]$ 的条形域 $\{z:0<\mathrm{Im}z<1\}$ 映为条形域 $\{w:0<\mathrm{Im}\,w<1\}$,其中,a 是实数, $0<h<1$

提示:先作变换 $z_1=e^{\pi z}$,再作变换 $z_2=\frac{z_1-e^{a\pi}}{z_1+e^{a\pi}}$ 便可得结论.

19.求一单叶全纯映射,把除去线段 $[1,2]$ 的单位圆盘的外部映为上半平面.

提示:先作变换 $z_1=\frac{z-1}{z+1}$,再作变换 $z_2=iz_1, z_3=z_2{}^2, z_4=z_3+\frac{1}{9}, z_5=\sqrt{z_4}$

即 $w=\sqrt{(i\frac{z-1}{z+1})^2+\frac{1}{9}}$ 为所求的单叶全纯映射.

第三章 全纯函数的积分表示

§3.1 习题

1.计算积分 $\int\limits_{\gamma}\frac{2z-3}{z}dz$，其中，$\gamma$ 为

(iii)沿圆周 $\{z\in$□ 的正向.

$$\int\limits_{\gamma}\frac{2z-3}{z}dz=2\int\limits_{\gamma}dz-\int\limits_{\gamma}\frac{3}{z}dz=0-6\pi\mathrm{i}=-6\pi i$$

2.计算 $\int\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{dz}}{z+2}$, 并证明，$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$.

奇点在区域外积分为 0

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{dz}}{z+2}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}e^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\mathrm{i}e^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}d\theta=\mathrm{i}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{e^{i\theta}(e^{-i\theta}+2)}{(e^{i\theta}+2)(e^{-i\theta}+2)}d\theta=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1+2e^{i\theta}}{1+2e^{i\theta}+2e^{-i\theta}+4}d\theta=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta+2i\sin\theta}{5+2\cos\theta+2\sin\theta+2i\cos(-\theta)+2i\sin(-\theta)}d\theta=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta+2i\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta+\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{2\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta i=0$$

$$(\int\limits_{0}^{\pi}+\int\limits_{\pi}^{2\pi})\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

由对称性

$$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

所以$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$

3.计算积分 $\int\limits_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{dz}$.

$$\int_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z=\int_{|z|=3}\frac{z-1+z}{z(z-1)}dz=\int_{|z|=3}\frac{1}{z}dz+\int_{|z|=3}\frac{1}{z-1}dz=4\pi\mathrm{i}$$

4.如果多项式 Q(z)比多项式 P(z)高两次，试证： $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{|Z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$

证明：$\lim\limits_{R\to\infty}\frac{P(z)z^2}{Q(z)}=A$ (A 为某个常数)

从而存在 M>0,R_0>0 使得当 R$\geq$$R_0$时，有$\left|\frac{P(z)z^2}{Q(z)}\right|\leq M$

因此$|\int_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\leq\int_{|z|=R}|\frac{P(z)}{Q(z)}||z|\leq\int_{|z|=R}\frac{M}{|z|^2}|dz|=\frac{2\pi M}{R}\to0(R\to\infty)$

所以$\lim\limits_{R\to\infty}\int\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$

6.设 f$\in C^1(D)$, γ 是域 D 中分别以 a 和 b 为起点和终点的可求长曲线.证明：

$$\int_\gamma\frac{\partial f(z)}{\partial z}dz+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}}d\bar{z}=f(b)-f(a)$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}),dz=dx+idy$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}),d\bar{z}=dx-idy$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z}dz+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}}d\bar{z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})(dx+idy)+\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})(dx-dy)$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=df$$

故$\int_\gamma\{\frac{\partial f(z)}{\partial z}dz+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\}=\int_\gamma df=f(b)-f(a)$

8.设γ是域 D 中以 a 为起点，以 b 为终点的可求长曲线，f,g$\in H(D)\cap C^1(D)$. 证明分部积

分公式：$\int_{\gamma} \mathrm{f}(z)g'(z)dz = f(z)g(z)|_a^b - \int_{\gamma} f'(\mathrm{z})dz.$

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z)dz + \int_{\gamma} f'(z)g(z)dz = \int_{\gamma}[f'(z)g(z)+f(z)g'(z)]dz = \int_{\gamma}[f(z)g(z)]'dz = f(z)g(z)|_a^b$$

故 $\int_{\gamma} f(z)g'(z)dz = f(z)g(z)|_a^b - \int_{\gamma} f'(z)g(z)dz$

9.设γ是正向可求简单曲线，证明：γ内部的面积为$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{r}\bar{z}dz$.

证明：由公式得$\int_{\mathrm{r}}\bar{z}dz = \int_{D}(-\frac{\partial\bar{\mathrm{z}}}{\partial z})\ \mathrm{d}z\wedge d\bar{z} = -\int_{D}dz\wedge d\bar{z}$

$= -\int_{D}(dx+idy)\wedge(dx-idy) = \int_{\mathrm{D}}2\mathrm{i}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \int_{\mathrm{D}}2\mathrm{i}\,\mathrm{d}A$

$=2\mathrm{i}A$

所以 $A=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{r}\bar{z}dz$

11.设f在z_0处连续，证明：

（i）$\lim\limits_{\mathrm{r}\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta = f(\mathrm{z}_0)$；

(ii) $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\mathrm{r}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)$.

证明：(i)$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta - f(z_0)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)|\,\mathrm{d}\theta$

$\le \sup\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)-f(z_0)| \to 0(r\to 0^+)$

所以$\lim\limits_{\mathrm{r}\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta = f(z_0)$.

(ii) $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\mathrm{r}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$

故$\lim\limits_{\mathrm{r}\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)$

12.设 D={ z ∈□　　　g$(z-a)<\theta_0+\alpha\}(0<a\le 2\pi)$， f 在 $\overline{D}\setminus\{a\}$ 上连续，证明：

（i）如果 $\lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\in\overline{D}\setminus\{a\}}}(z-a)f(z)=A$, 那么 $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_{\substack{|z-a|=r\\ z\in\overline{D}}}f(z)dz=i\alpha A$;

(ii)如果 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\overline{D}\setminus\{a\}}}(z-a)f(z)=B$, 那么 $\lim\limits_{z\to\infty}\int\limits_{\substack{|z-a|=R\\ z\in\overline{D}}}\mathrm{f}(z)dz=i\alpha B.$

证明：（i）

$$\left|\int\limits_{\substack{|z-a|=r\\ z\in\overline{D}}}f(z)dz-\mathrm{i}\alpha A\right|=\left|\int\limits_{\substack{|z-a|=r\\ z\in\overline{D}}}f(z)-\frac{A}{z-a}dz\right|\le\frac{1}{r}\int\limits_{\substack{|z-a|=r\\ z\in\overline{D}}}|(z-a)f(z)-A||dz|$$

$$\le\sup\limits_{\substack{|z-a|=r\\ z\in\overline{D}}}|(\mathrm{z}-a)f(z)-A|\to 0(\mathrm{r}\to 0^+)$$

(ii)略

§3.2 习题

1.计算积分：

（i）$\int\limits_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2},|a|\neq r$

$$\int\limits_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2}=\int_0^{2\pi}\frac{rd\theta}{(re^{i\theta}-a)(re^{-i\theta}-\overline{a})}=\frac{r}{i}\int\limits_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)(r^2-\overline{a}z)}$$

$$=\frac{-ir}{r^2-|a|^2}\int\limits_{|z|=r}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-r^2/\overline{a}}\right)dz=\frac{2\pi r}{|r^2-|a|^2|}$$

（iii）$\int\limits_{|z|=5}\frac{zdz}{z^4-1}$;

$$\int\limits_{|z|=5}\frac{zdz}{z^4-1}=\frac{1}{2}\int\limits_{|z|=5}\frac{dz^2}{(z^2-1)(z^2+1)}=\frac{1}{4}\int\limits_{|z|=5}\left(\frac{1}{z^2-1}-\frac{1}{z^2+1}\right)dz^2=0$$

（iv）$\int\limits_{|z|=2a}\frac{e^z}{z^2+a^2}dz,a>0.$

$$\int\limits_{|z|=2a}\frac{e^z}{z^2+a^2}dz=\frac{1}{2\mathrm{ai}}\int\limits_{|z|=2a}\frac{e^z}{z-ai}dz-\frac{1}{2ai}\int\limits_{|z|=2a}\frac{e^z}{z+ai}dz$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{ai}}\cdot 2\pi i\cdot e^{ai}-\frac{1}{2ai}2\pi i\cdot e^{-ai}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{a}\sin a$$

2.设 f 在 $\{z\in\square$ $<\infty\}$ 中全纯，且 $\lim\limits_{\mathrm{z}\to\infty}zf(\mathrm{z})=A.$ 证明：

$$\int\limits_{|z|=R}f(z)dz=2\pi iA,\ \text{这里}\ R>\mathrm{r}$$

证明：设 $r<R<R'<\infty$, 利用 $Cauchy$ 积分公式得

$$\left|\int\limits_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z-2\pi iA\right|=\left|\int\limits_{|z|=R'}f(z)dz-\int\limits_{|z|=R'}\frac{A}{z}dz\right|\leq\frac{1}{R'}\int\limits_{|z|=R'}|zf(z)-A||dz|$$

$$\leq 2\pi\cdot\sup_{|z|=R'}|zf(z)-A|\to 0(R'\to\infty)$$

4.设 $0<r<R$, f 在 $B(0,R)$ 中全纯.证明：

（i）$f(0)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta;$

（ii）$f(0)=\dfrac{1}{\pi \mathrm{r}^2}\int_{|z|<r} f(z)dxdy.$

证明：（i）$\forall R>\delta>0,$ 由 $Cauchy$ 积分公式得 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|z|=r}\dfrac{f(z)}{z}dz=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\dfrac{f(z)}{z}dz$

即 $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\delta e^{i\theta})d\theta$，令 $\delta\to 0$，则有 $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta=f(0)$

(ii) $\dfrac{1}{\pi \mathrm{r}^2}\int_{|z|<r} f(z)dxdy=\dfrac{1}{\pi \mathrm{r}^2}\int_0^{\mathrm{r}}\rho d\rho\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})d\theta$ （1）

利用（i）得 $\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})d\theta=2\pi f(0)$ （2）

由（1）和（2）式得 $f(0)=\dfrac{1}{\pi r^2}\int_{|z|<r} f(z)dxdy$

5.设 u 是 B(0,R)中的调和函数，$0<r<R.$ 证明：u(0)=$\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta.$

证明：单连通域上的调和函数是某个全纯函数 f 的实部：$u=\operatorname{Re} f$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta \Rightarrow u(0)=\operatorname{Re} f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$$

6.设 $0<r<1.$ 证明：$\int_0^{\pi}\log(1-2\mathrm{r}\cos\theta+\mathrm{r}^2)d\theta=0$

证明：令 U(z)=$\ln|z-1|^2$,则 U 在 B(0,1)上调和，由题 5，0=U(0)=

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta\ .$$

§3.3 习题

1.设 D 是域， $f,g\in H(D)$. 如果 fg' 在 D 上有原函数 φ. 证明： fg' 在上 D 有原函数 $fg-\varphi$

证明： $f,g\in H(D)$. 由 $fg'=\varphi$，得 $(fg-\varphi)'=fg'$.

3．设 $f\in C^n($□ $\bigcap$ □ ，并且 $f^{(n)}(z)\equiv 0$. 证明： f 必为次数不大于 $n-1$ 的多项式.

证明：归纳法 k=1 时显然，设 k=n−1 时成立，取定 $\xi\in C$,由 $f^{(n)}(z)\equiv 0\Rightarrow f^{(n-1)}(z)=C$

$$\text{故}\left[f(z)-\frac{Cz^{n-1}}{(n-1)!}\right]^{(n-1)}\equiv 0\text{，从而 } f(z)-\frac{Cz^{n-1}}{(n-1)!}\text{ 是次数不超过 n-2 的多项式.}$$

5. 设 f 是凸域 D 上的全纯函数，如果对每点 $z\in D$，有 $\mathrm{Re}\left\{f'(z)\right\}>0$，那么 f 是 D 上的单叶函数.

证明： $\forall z_1,z_2\in D$， $z_1\neq z_2$ 则

$$f(z_2)-f(z_1)=\int_{z_1}^{z_2}f'(\xi)d\xi=\int_0^1 f'(z_1+t(z_2-z_1))(z_2-z_1)dt$$

$$\text{则}\ \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}=\int_0^1 f'(z_1+t(z_2-z_1))dt$$

$$\text{从而}\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right|\geq\int_0^1\mathrm{Re}\left\{f'(z_1+t(z_2-z_1))\right\}dt>0$$

故 $f(z_1)\neq f(z_2)$，这表明 f 是 D 上的单叶函数.

§3.4 习题

1． 计算下列积分：

（1） $\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2-1}dz$

解：$\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2-1}dz=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{1}{z-1}\cdot\frac{\sin z}{z+1}dz=2\pi i\left(\frac{\sin z}{z+1}\right)\Bigg|_{z=1}=i\pi\sin 1$

(2) $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^2}$;

解：$\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=0$

(4) $\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$;

解：与第二题类似，答案为 0.

(6) $\int\limits_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$,n 为正整数，a≠b 不在圆周|z|=R 上.

$$\text{解：原式}=\begin{cases}0 & a,b\text{均在圆外}.\\ \dfrac{2\pi i}{(b-a)^n} & a\text{在圆外，b在圆内}.\\ -\dfrac{2\pi i}{(b-a)^n} & a\text{在圆内，b在圆外}.\\ 0 & a,b\text{均在圆内}.\end{cases}$$

3.设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域，$z_1,\cdots,z_n$ 是 D 中 n 个彼此不同的点.如果 $f\in H(D)\bigcap\ \overline{\ \ }$ ，证明：$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)}\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}d\zeta$ 是次数不超过 n-1 的多项式，并且 $P(z_k)=f(z_k),k=1,2,\ldots$， n.其中，$\omega_n(z)=(z-z_1)\ldots(z-z_n)$.

（提示：证明 $\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}$ 是 z 的次数不超过 n-1 的多项式.）

证明：由于 $\omega_n(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$

从而$\dfrac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}$是 z 的 n-1 次多项式，记$\mathrm{h}(\xi,z)=f(\xi)\dfrac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}$

取$\varepsilon>0$充分小，由 Cauchy 积分公式

$$P(z)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_k|=\varepsilon}\frac{h(\xi,z)}{\prod_{j=1}^{n}(\xi-z_j)}d\xi=\sum_{k=1}^{n}h(z_k,z)\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(z_k-z_j)^{-1}$$

因为$\mathrm{h}(\xi,z)=f(\xi)\dfrac{-\omega_n(z)}{\zeta-z}$是 z 的次数不超过 n-1 的多项式，故 P(z)是关于 z 的次数不超过 n-1 的多项式.

又$-\omega_n(z)=(z_k-z)\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}(z_j-z)$，故$P(z_k)=f(z_k)$是关于 z 的次数不超过 n-1 的多项式.

5.设$f\in H(B(0,1))\bigcap \overline{\qquad}))$.证明：

(1)$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2f(0)+f'(0);$

(2)$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2f(0)-f'(0)$

（提示：分别计算积分$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta|=1}\left(2+\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$和$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta|=1}\left(2-\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$即可.）

证明：由 Cauchy 公式，得

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})d\theta$$

,

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta$$

②

又由 Cauchy 定理，$\displaystyle\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)d\zeta=0$即$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta=0$ ③

②+③得$f'(0)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)d\theta$

即$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=f'(0)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})d\theta=f'(0)+2f(0)$

6.利用上题结果证明：

设 $f\in H(B(0,1))\bigcap \overline{\qquad\quad}))$,且 $f(0)=1,\mathrm{Re}\, f(z)\geq 0$,那么 $-2\leq \mathrm{Re}\, f'(0)\leq 2$.

证明：$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta = f'(0)+2f(0)$

两边取实部,即

$$\mathrm{Re}\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta = 2+\mathrm{Re}\, f'(0)\geq 0$$

同理 $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = 2f(0)-f'(0)$

$$\mathrm{Re}\, f'(0) = 2-\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta \leq 2-0=2$$

所以 $-2\leq \mathrm{Re}\, f'(0)\leq 2$.

§3.5 习题

1．设 f 是有界整函数, z_1, z_2 是 $B(0,r)$ 中任意两点.证明：$\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = 0$ 并由得出 Liouyille 定理.

证明：利用 Cauchy 积分公式得

$$\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz = \int_{|z|=r} \frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{f(z)}{z-z_1} - \frac{f(z)}{z-z_2}\right) dz = 2\pi i \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$$

另一方面，由于 f 有界,$\exists M>0, s.t. \left|f(z)\right| \le M, \forall z \in \boldsymbol{C}$

由 Cauchy 积分定理

$$\left|\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz\right| = \left|\int_{|z|=R>r} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz\right| \le \frac{M}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)} \cdot 2\pi R \to 0 (R\to\infty)$$

从而

$$2\pi i \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2} = 0 \Rightarrow f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow f(z) = C$$

2.设 f 是整函数，如果当 $z\to\infty$ 时, $f(z) = O(|z|^{\alpha}), \alpha \ge 0,$ 证明 f 是次数不超过 $[\alpha]$ 的多项式.

解：令 $n = [\alpha]+1$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta\right| \le \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta-z|=R} \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\right| |d\zeta| \le \frac{n!}{2\pi}\int_{|\zeta-z|=R} \frac{M|\zeta|^{\alpha}}{R^{n+1}} |d\zeta|$$

$$\le n! M \frac{(R+|z|)^{\alpha}}{R^n} \to 0 (R\to\infty)$$

故 $f^{(n)}(z) \equiv 0$

4.设 f 是整函数,如果 $f($□ (□),证明 f 是一个常值函数.

证明：令 $g(z) = \dfrac{f(z)-i}{f(z)+i}$,则|g(z)|<1,g 是整函数.

从而 $g(z) = \dfrac{f(z)-i}{f(z)+i} = c \Rightarrow f(z) = \tilde{c}$

5.设 f 是整函数,如果 $f($□ □ 证明 f 是一个常值函数.

证明：令 $g(z)=\dfrac{f(z)}{1-f(z)}$,则

$g($□ □ .再令 $h(z)=\sqrt{g(z)}$

则 $|h($□ □

由上题知 h 常值,故 f 常值.

6.设 f 在域 D 上全纯, $z_0 \in D$ 定义

$$F(z)=\begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \in D \setminus \{z_0\}; \\ f'(z_0), & z=z_0. \end{cases}$$

证明： $F \in H(D)$

证明： $F(z_0)=f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{z\to z_0}F(z_0)$

故 F 在 z_0 点也连续.将 F 限制在 $B(z_0,\varepsilon)$ 上,则 $|F|\le M$,对 D 内任一简单闭曲线 γ ,可取一含于 $B(z_0,\varepsilon)$ 的简单闭曲线使得 $\int\limits_{\gamma} f(z)dz=\int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$,对 $\forall \varepsilon>0$, 由此易得 $\int\limits_{\gamma} f(z)dz=0$,从而 F 在 D 上全纯.

7.设 γ 是可求长曲线, f 在域 D 上连续,在 $D\setminus\gamma$ 上全纯.证明： f 在 D 上全纯.

证明：任取 D 中简单闭曲线 γ_0

（1）当 γ 含于 γ_0 内部时,延长 γ ,交 γ_0 于 A,B 两点.

$$\int\limits_{\gamma_0} f(z)dz=\int\limits_{\gamma_1+\overline{AB}} f(z)dz+\int\limits_{\gamma_2+\overline{BA}} f(z)dz=0$$

（2）同理,当 γ , γ_0 相交时, $\int\limits_{\gamma_0} f(z)dz=0$

故由 Morera 定理知 f 在 D 上全纯.

§3.6 习题

1、设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域, $f\in C^1(\overline{D})$.证明：

（i） $\iint\limits_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial\overline{\xi}}d\overline{\xi}\wedge d\xi=\int\limits_{\partial D} f(\xi)d\xi$

（ii） $\iint\limits_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}d\xi\wedge d\overline{\xi}=\int\limits_{\partial D} f(\xi)d\overline{\xi}$

证明： $f(\xi)$ 是域上的一个 0 次微分形式 $f\in C^1(\overline{D})$,根据定理 3.6.1 $\int\limits_{\partial D} f=\int\limits_D df$

可得 $\int\limits_{\partial D} f(\xi)d\overline{\xi}=\int\limits_D df(\xi)\wedge d\overline{\xi}=\int\limits_D (\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial f(\xi)}{\partial\overline{\xi}}d\overline{\xi})\wedge d\overline{\xi}=\int\limits_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial\overline{\xi}}d\overline{\xi}\wedge d\xi$

同理 $\int\limits_{\partial D} f(\xi)d\overline{\xi}=\int\limits_D (\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial f(\xi)}{\partial\overline{\xi}}d\overline{\xi})\wedge d\overline{\xi}=\int\limits_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}d\xi\wedge d\overline{\xi}$

4、设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域, f 在 $\overline{D}$ 上全纯, $z\in D$.证明：

$$\iint\limits_D \frac{f'(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\xi\wedge d\overline{\xi}=\int\limits_{\partial D}(\frac{f(\xi)}{\xi-z}+\frac{f(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\overline{\xi})$$

证：因 $f\in H(\overline{D})$,从而 $\overline{f}\in C^1(\overline{D})$,则对 $\overline{f}$ 用 Pompeiu 公式

$$\overline{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{\overline{f}(\xi)}{\xi-z}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{\partial\overline{f}(\xi)}{\partial\overline{\xi}}\frac{1}{\xi-z}d\xi\wedge d\overline{\xi}$$

从而两边取共轭得

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\overline{\xi}-\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{f'(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\overline{\xi}\wedge d\xi$$

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\overline{\xi}+\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{f'(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\xi\wedge d\overline{\xi} \qquad (1)$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \qquad (2)$$

由（1）（2）可得 $\iint\limits_D \frac{f'(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\xi\wedge d\overline{\xi}=\int\limits_{\partial D}(\frac{f(\xi)}{\xi-z}+\frac{f(\xi)}{\overline{\xi}-\overline{z}}d\overline{\xi})$.

§3.7 习题

2.设 D 是域, $f\in C^{\infty}(D)$，证明：若 $u_0\in C^{\infty}(D)$ 是非齐次 $\bar\partial$ 方程的解,即 $\dfrac{\partial u_0}{\partial \bar z}=f$，则该方程的解的全体为 $u_0+H(D)$.

提示：显然 $u_0+H\left(D\right)$ 中的元都是解.

另一方面,设 u 是方程的一个解,则 $\dfrac{\partial\left(u-u_0\right)}{\partial \bar z}=f-f=0$,即 $u-u_0$ 满足 C-R 方程,

又 $u\in C^{\infty}\left(D\right)$,故 $u-u_0\in H\left(D\right)$.

第四章 全纯函数的 Taylor 展开及其应用

§4.1 习题

1、证明：复数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$同时收敛.

证明：由不等式

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Im} z_k\right|\right) \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Re} z_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \operatorname{Im} z_k\right|$$

即得结论.

3、设$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$是非空点集 E 上的函数项级数，证明$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在 E 上一致收敛当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty} Re f_n(z)$和$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} f_n(z)$在 E 上一致收敛.

证明：同上题.

6、设$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$是复数项级数，且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}=q$. 证明：

（i）当$q<1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$绝对收敛.

（ii）当$q>1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$发散.

证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}=q$, 取$r$使得$q<r<1$, 则 n 充分大时，$|z_n|<r^n$

故$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$绝对收敛.

（ii）易知$z_n \not\to 0$

8、设$z^n \in$□，$\forall n \in N$，且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=q$，证明：

（i）当$q<1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$绝对收敛.

（ii）当 $q>1$ 时，则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 可能收敛也可能发散.

证明：（i）取 r 使得 $q<r<1$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}<r$

$$\Rightarrow |z_{N+k}|<r^k|z_N|$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum_{n=1}^{N}|z_n|+\sum_{k=1}^{\infty}|z_{N+k}|<\sum_{n=1}^{N}|z_n|+|z_N|\sum_{k=1}^{\infty}r^k<\infty.$$

（ii）举例说明：

级数 $1+\sum_{k=1}^{\infty}(z^k-z^{k-1})$ 当 $|z|>1$ 时发散；令 $z_{2n-1}=\frac{1}{2^{n+1}}$，$z_{2n}=\frac{1}{2^n}$，

则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\geq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{2n}}{z_{2n-1}}\right|=2$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛.

13、证明：若域 D 上的全纯函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 D 上全纯，并且 $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$，$\forall k\in N$.

（1）证明：令 $g_1=f_1$，$g_n=f_n-f_{n-1}, n\geq 2$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ 在 D 上内闭一致收敛于 $f(z)$.由定理 4.1.9 即得结论.

§4.2 习题

1、设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$的收敛半径分别为$R_1$和$R_2$.证明：

（i）$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$的收敛半径$R \geq \min(R_1,R_2)$

（ii）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$的收敛半径$R \geq R_1 R_2$

（iii）$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{n=k}^{\infty} a_k b_{n-k})z^n$的收敛半径$R \geq \min(R_1,R_2)$

解：（i）若$|z|<\min(R_1,R_2)$，又$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$都收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n$收敛，

故$R \geq \min(R_1,R_2)$

（ii）由于$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}$，

则$\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n b_n|}} \geq \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} \cdot \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}}$

故$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$的收敛半径$R \geq R_1 R_2$.

（iii）若$|z|<\min(R_1,R_2)$，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$都绝对收敛，

于是$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})z^n$也收敛.

故$R \geq \min(R_1,R_2)$.

2、求下列幂级数的收敛半径.

（ii）$\sum_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n z^n$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{[3+(-1)^n]^n}}=\frac{1}{4}$$

故幂级数的收敛半径为$\frac{1}{4}$.

3、证明：若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处绝对收敛，则它在 $\overline{B(0,|z_0|)}$ 上绝对一致收敛.

证明：$\forall z \in \overline{B(0,|z_0|)}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z_0|^n$$

由于$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z_0^n|$收敛，从而$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\overline{B(0,|z_0|)}$ 上绝对一致收敛.

4、设正数列$\{a_n\}$单调收敛于零.证明

（i）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq 1$

（ii）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\partial B(0,1) \setminus \{1\}$ 上处处收敛.

证（i）当 n 充分大时，$0 < a_n < 1$，从而 $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}} \geq 1$

（ii）当 $z \in \partial B(0,1) \setminus \{1\}$ 时

则$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$

而$\{a_n\}$单调递减趋于零，从而由 Dilichlet 判别法知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛.

7、证明：若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是 $B(0,1)$ 上的有界全纯函数，则$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

证：任取$0 < r < 1$

由于$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} d\theta = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

$$= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

即 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}$，由于 f 有界，从而 $\exists M>0$，$|f(z)|\le M$，$z\in B(0,1)$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}\le M^2<+\infty$

令 $r\to 1^-$，得 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\le M^2<+\infty$.

10、设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 将 $B(0,R)$ 一一映为域 G.证明：G 的面积为 $\pi\sum_{n=0}^{\infty}n|a_n|^2\ R^{2n}$

证：设 $S(G)$ 表示 G 的面积，则

$$S(G)=\iint\limits_{B(0,R)} f'(z)\overline{f'(z)}dxdy=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} f'(re^{i\theta})\overline{f'(re^{i\theta})}d\theta\right)rdr$$

$$=\int_0^R\left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty}n^2|a_n|^2\ r^{2n-2}\right)rdr=\left(2\pi\sum_{n=0}^{\infty}n^2|a_n|^2\right)\int_0^R r^{2n-1}dr=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2R^{2n}$$

11、证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 在域 D 上一致收敛，当且仅当它在 $\overline{D}$ 上一致收敛.

证明：$\Leftarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 在 $\overline{D}$ 上一致收敛，显然有它在域 D 上一致收敛

$\Rightarrow$ 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在域 D 上一致收敛.对 $\forall z>0$，$\exists N\in$□，st $\forall p\in N^*$，当 $n>N$ 时，

不等式 $\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k z^k|<\frac{\varepsilon}{2}$ 对于 $\forall z\in D$ 都成立.

$\forall z_0\in\overline{D}$, $\exists\{z_n\}\subset D$, st $z_n\to z_0(n\to\infty)$

于是对于以上给定的 ε，p.可选取充分大的 $l\in$□

使得 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(z_l^k-z_0^k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，

因而 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k z_0^k\right|\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k z_l^k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(z_l^k-z_0^k)\right|<\varepsilon$，

故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $\overline{D}$ 上一致收敛.

§4.3 习题

1、设 D 是域，$a\in D$，函数 f 在 $D\setminus\{a\}$ 上全纯. 证明：若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$， f 在 D 上全纯.

证明：令 $F(z)=\begin{cases}(z-a)f(z)=0 & z\neq a\\ 0 & z=a\end{cases}$,

则 F 在 D 上连续并 F 在 $D\setminus\{a\}$ 上全纯.

由 Morera 定理得 $F\in H(D)$，于是 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{F(z)}{z-a}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{F(z)-F(a)}{z-a}=F'(0)$,

补充定义 $f(0)=F'(0)$，则 $f\in H(D)$.

4、设 $f\in H(B(0,R))\bigcap$ R))， $S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}d\xi$，证明：

（i） $S_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}f(\xi)\dfrac{\xi^{n+1}-z^{n+1}}{(\xi-z)\xi^{n+1}}d\xi,\forall z\in B(0,R)$

（ii） $f(z)-S_n(z)=\dfrac{z^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}f(\xi)\dfrac{\xi^{n+1}}{\xi^{n+1}(\xi-z)}d\xi,\forall z\in B(0,R)$

证明：（i） $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}f(\xi)\dfrac{\xi^{n+1}-z^{n+1}}{\xi-z}\dfrac{d\xi}{\xi^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}f(\xi)\frac{\xi^{n}+\xi^{n-1}z+\cdots\qquad+z^{n}}{\xi^{n+1}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}(\frac{f(\xi)}{\xi}+\frac{f(\xi)}{\xi^{2}}z+\cdots\quad\frac{f(\xi)}{\xi^{n}}z^{n-1}+\frac{f(\xi)}{\xi^{n}}z^{n})d\xi$$

$$=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^{2}+\cdots\quad\frac{f(\xi)}{n!}z^{n+1}=S_n(z)$$

（ii） $f(z)-S_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}f(\xi)\dfrac{\xi^{n+1}-z^{n+1}}{(\xi-z)\xi^{n+1}}d\xi$

$$=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)\xi^{n+1}}d\xi$$

5、是否存在 $f\in H(B(0,1))$，使得下列条件之一成立：

（i） $f(\frac{1}{n})=\frac{n}{n+1}, n=2,3\cdots$

$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow f(z)=\frac{1}{z+1}\in H(B(0,1))$.

(ii) $f(\frac{1}{2n})=0, f(\frac{1}{2n-1})=1, n=1,2,3\cdots$

$f(\frac{1}{2n})=0 \Rightarrow f(z)=0$.

$f(\frac{1}{2n-1})=1 \Rightarrow f(z)=1$

故不存在.

（iii） $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}, n=2,3,4\cdots$

$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2} \Rightarrow f(z)=z^2$

$f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2} \Rightarrow f(z)=z^2$

故存在.

(iv) $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3}, n=2,3,4\cdots$

$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3} \Rightarrow f(z)=z^3$

$f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3} \Rightarrow f(z)=-z^3$

故不存在.

6、设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R>0$， $0<r<R$，证明：

（i） $a_n r^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{Re} f(re^{i\theta})\right]e^{-\mathrm{in}\theta}d\theta, \forall n\in$ □

证明：由于 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}re^{i\theta}\cdot id\theta$

$$=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \qquad （1）$$

又由 $\int_{|\xi|=r} f(\xi)\xi^{n-1}d\xi=0$，得 $\int_0^{2\pi}\overline{f(re^{i\theta})}e^{-in\theta}d\theta=0$ （2）

（1）+（2）得 $a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{Re} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$

所以$a_n r^n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{Re} f(re^{i\theta})\right]e^{-\mathrm{in}\theta}d\theta,\forall n\in\mathbb{N}$

7、设$f(z)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$在$B(0,1)$上全纯，并且$\operatorname{Re} f(z)\geq 0,\forall z\in B(0,1)$，证明：

（i）$|a_n|\leq 2,\forall n\in\mathbb{N}$

（ii）$\dfrac{1-|z|}{1+|z|}\leq \operatorname{Re} f(z)\leq f(z)\leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|},\forall z\in B(0,1)$

证明：（i）$\forall 0<r<1$，则由第 6 题（i）得

$$|a_n|=\left|\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta\right|\leq\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

$=\dfrac{2}{r^n}\operatorname{Re} f(0)=\dfrac{2}{r^n}$，令 $r\to 1^-$ 即得结论.

（ii）由第 6 题（i）得$a_n=\dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$，任取 $|z|<r<1$

从而 $f(z)=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}z^n\operatorname{Re} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{ze^{-i\theta}}{r}\right)^n\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

$$=1+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ze^{-i\theta}}{r}\right)^n\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

$$=1+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{ze^{-i\theta}}{r}}{1-\frac{ze^{-i\theta}}{r}}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta+\int_0^{2\pi}\frac{ze^{-i\theta}}{r-ze^{-i\theta}}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$$

即 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$ （*）

从而$\operatorname{Re} f(z)=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z})\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|r|^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$

$\ge\frac{1}{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{(r+|z|)^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta=\frac{r-|z|}{r+|z|}$

所以$\operatorname{Re} f(z)\ge\frac{r-|z|}{r+|z|}$，令$r\to 1^-$,得$\operatorname{Re} f(z)\ge\frac{1-|z|}{1+|z|}$

另一方面$\operatorname{Re} f(z)\le|f(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})|\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}|d\theta\le\frac{r+|z|}{r-|z|}$

令$r\to 1^-$得$\operatorname{Re} f(z)\le|f(z)|\le\frac{1+|z|}{1-|z|}$

因此证明了结论.

12、证明：若$\frac{1}{1-z-z^2}$在$z=0$处的 Taylor 级数为$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$,则 Fibonacci 数$a_n$满足关系式

$a_0=a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, \forall n\ge 2$

证明：因为$\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$,从而$1=(1-z-z^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$

即$1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+2}$

$1=a_0+(a_1-a_0)z+(a_2-a_1-a_0)z^2+\cdots \qquad a_{n-1}-a_{n-2})z^n$

从而$a_0=1, a_1-a_0=0, a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=0$

所以$a_0=a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

§4.4 习题

1. 设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域.证明：若 $f,g\in H(\bar{D})$，f 在 ∂D 上没有零点，f 在 D 中的全部彼此不同的零点为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，其相应的阶数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}k_j g(z_j)$$（说明：这是 Cachy 积分公式和辐角原理的推广）

解：因为 $z=z_j$ 是 f(z)的 k_j 阶零点,从而存在 z_j 的 $\varepsilon-$球邻域 $U_j\subset D$,使得

$f(z)=(z-z_j)^{k_j}h_j(z)$,其中 $h_j\in H(U_j)$ 且 $h_j(z)\neq 0, z\in U_j$.

由 Cauchy 积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_j|=\varepsilon} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}k_j g(z_j)$$

2. 利用辐角原理证明代数学的基本定理.

证明：设 $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots a_1z+a_0, a_n\neq 0, n\geq$ 是 n 次多项式,则 $\exists R>0$. 当

$|z|\geq R$ 时,$|a_nz^n|>|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots a_1z+a_0|$

从而当 $|z|\geq R$ 时,有

$|P_n(z)|=|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots a_1z+a_0|\geq|a_nz^n|-|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots a_1z+a_0|>0$ 这表明 $P_n(z)$ 在

$|z|\geq R$ 上无零点.

利用辐角原理知,$N=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_\gamma ArgP_n(z)$ 其中 N 表示 $P_n(z)$ 在 $|z|<R$ 上的零点个数,γ 为

$\{z;|z|=R\}=\partial B(0,R)$ 的正向,现在来计算 $\Delta_\gamma ArgP_n(z)$，注意到

$\Delta_\gamma ArgP_n(z)=\Delta_\gamma Arga_nz^n+\Delta_\gamma(a_n+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n})$,以及 $\Delta_\gamma ArgZ^n=2n\pi$,

只需计算 $\Delta_\gamma Arg\left(a_n+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}\right)$.

因为 $|a_n+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}-a_n|<|a_n|, z\in\partial B(0,R)$，这表明当 z 在 γ 上绕行时，

$a_n+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}$ 始终落在以 a_n 为圆心，以 $|a_n|$ 半径的圆盘内，从而

$\Delta_\gamma Arg\left(a_n+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}\right)$=0.

这样我们得到 $\Delta_\gamma ArgP_n(z)=2n\pi$，故 $N=\dfrac{1}{2\pi}\times 2n\pi=n$

即 $P_n(z)$ 在复平面□ 内恰有 n 个零点.

5. 利用 Rouche 定理证明代数学基本定理.

证明：设有 n 次多项式 $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots a_1z+a_0$, $a_n\neq 0$

则存在 $R>0$,使得当 $|z|\geq R$ 时, $|a_nz^n|>|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots a_1z+a_0|$,

因此 $P_n(z)$ 在 $|z|\geq R$ 上无零点,且当 $|z|=R$ 时, $|P_n(z)-a_nz^n|<|a_nz^n|$,

利用 Rouche 定理知, $P_n(z)$ 和 a_nz^n 在 $|z|<R$ 内零点个数相同.

故 $P_n(z)$ 在 $|z|<R$ 内有 n 个零点,即 $P_n(z)$ 在□ 内恰有 n 个零点.

11.求下列全纯函数在 $B(0,1)$ 中的零点个数：

（1） $z^9-2z^6+z^2-8z-2$;

解：取 $f(z)=z^9-2z^6+z^2-8z-2, g(z)=-8z$,
故有 1 个零点.

（2） $2z^5-z^3+3z^2-z+8$;

解：取 $f(z)=2z^5-z^3+3z^2-z+8, g(z)=8$
故零点个数为 0.

（3） $z^7-5z^4+z^2-2$;

解：取 $f(z)=z^7-5z^4+z^2-2, g(z)=-5z^4$
故有 4 个零点.

13．设 $a_1,a_2,\cdots$ $(0,1), f(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k-z}{1-\overline{a_k}z}$ 证明：

(1) 若 $b\in B(0,1)$，则 $f(z)=b$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根；

(2) 若 $b\in B(\infty,1)$，则 $f(z)=b$ 在 $B(\infty,1)$ 中恰有 n 个根.

证明：（1）当 $|z|=1$ 时,有 $|f(z)|=\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_kz}\right|=1$

从而 $|b|=|(f(z)-b)-f(z)|<1=|f(z)|$， $z\in\partial B(0,1)$，因此由 Rouche 定理， $f(z)-b$ 和

$f(z)$ 在 $B(0,1)$ 中的零点个数相同.

又 $f(z)$在$B(0,1)$ 内有 n 个零点（$a_1,a_2,\cdots$ ）

故 $f(z)=b$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根.

（2）记由 $a_1,a_2,\cdots$ $(0,1)$ 决定的函数 $\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k-z}{1-\overline{a_k}z}$ 为 $f_{[a_1,\cdots}(z)$，注意到

$$f(z)=f_{[a_1,\cdots}(z)=1/f_{[\overline{a_1},\cdots}(\frac{1}{z})$$

由（1）$f_{[\overline{a_1},\cdots}(z)=\frac{1}{b}$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根，从而 $f_{[\overline{a_1},\cdots}(\frac{1}{z})=\frac{1}{b}$ 在 $B(\infty,1)\subset$ 中恰有 n 个根，即 $f(z)=b$ 在 $B(\infty,1)$ 中恰有 n 个根.

§4.5 习题

1、设 D 是域，$f_n \in H(D) \cap C(\overline{\mathrm{D}}), \forall n \in N$. 证明若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\partial \mathrm{D}$ 上一致收敛，则必在 $\overline{\mathrm{D}}$ 上一致收敛.

证明：$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}$，当 n>N 时，有 $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_n(z)| < \varepsilon$，对 $\forall \mathrm{z} \in \partial \mathrm{D}, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}$ 成立，从而

$\sup\limits_{\mathrm{z} \in \partial \mathrm{D}} |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_n(z)| \leq \varepsilon$，由最大模原理知：$\sup\limits_{z \in \overline{D}} |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_n(z)| = \sup\limits_{\mathrm{z} \in \partial \mathrm{D}} |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_n(z)| \leq \varepsilon$.

2、设 $\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2 \cdots \mathrm{z}_\mathrm{n} \in \mathrm{B}(\infty, 1)$. 证明存在 $\mathrm{z}_0 \in \partial \mathrm{B}(0,1)$，使得 $\prod\limits_{k=1}^{n} |z_0 - z_k| > 1$.

证明：（反证法）假设 $\forall \mathrm{z} \in \partial \mathrm{B}(0,1)$，都有 $\prod\limits_{k=1}^{n} |z_0 - z_k| \leq 1$.

令 $f(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)$ 则 $f \in H(\mathbb{C})$，

由最大模原理得 $\max\limits_{z \in B(0,1)} |f(z)| \leq \max\limits_{z \in \partial B(0,1)} |f(z)| \leq 1$ 与 $|f(0)| = \prod\limits_{k=1}^{n} |z_k| > 1$ 矛盾. 故存在

$\mathrm{z}_0 \in \partial \mathrm{B}(0,1)$ 使得 $\prod\limits_{k=1}^{n} |z_0 - z_k| > 1$.

3、设 $f \in H(B(0,R))$. 证明：$M(r) = \max\limits_{|\mathrm{z}| = \mathrm{r}} |f(z)|$ 是 [0, R) 上的增函数.

证明：设 $0 \leq r_1 < r_2 < R$，最大模原理知：

$$M(r_1) = \max_{|\mathrm{z}| = \mathrm{r}_1} |f(z)| = \max_{|\mathrm{z}| \leq \mathrm{r}_1} |f(z)|,\ M(r_2) = \max_{|\mathrm{z}| = \mathrm{r}_2} |f(z)| = \max_{|\mathrm{z}| \leq \mathrm{r}_2} |f(z)|$$

所以 $\max\limits_{|\mathrm{z}| \leq \mathrm{r}_1} |f(z)| \leq \max\limits_{|\mathrm{z}| \leq \mathrm{r}_2} |f(z)|$，故 $M(r_2) \geq M(r_1)$

即 $M(r) = \max\limits_{|\mathrm{z}| = \mathrm{r}} |f(z)|$ 是 [0, R) 上的增函数.

4、设 f 是域 D 上非常数的全纯函数. 证明：若 f 在 D 中没有零点，则 $|f(z)|$ 在 D 内不能取到最小值.

证明：令 $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$，则 $F \in H(D)$，由最大模原理知：$|F(z)|$ 的最大值不能在 D 中取到，

即$|f(z)|$的最小值不能在 D 中取到.

5、$f\in H(B(0,R))$， $f(B(0,R))\subset B(0,M)$， $f(0)=0$. 证明:

(i) $|f(z)|\le\frac{M}{R}|z|,|f^{'}(0)|\le\frac{M}{R},\forall z\in B(0,R)\backslash\{0\}$;

(ii)等号成立当且仅当 $f(z)=\frac{M}{R}e^{i\theta}z(\theta\in$□

证明: (i)令 $g(z)=\frac{f(Rz)}{M},g(0)=0,g(B(0,1))\subset B(0,1)$ 从而由 schwarz 引理得

$|g(z)|\le|z|,|g(0)|\le 1,$故$\left|\frac{f(Rz)}{M}\right|\le|z|$而且$|f^{'}(0)|=\mathrm{M}\left|\mathrm{g}^{'}(0)\cdot\frac{1}{\mathrm{R}}\right|\le\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}$. 即

$|\mathrm{f}(z)|\le\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}|z|,|\mathrm{f}^{'}(0)|\le\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}},\forall\mathrm{z}\in\mathrm{B}(0,\mathrm{R})\backslash\{0\}$.

(ii)等号成立对某个$\mathrm{z}_0\in\mathrm{B}(0,\mathrm{R})\backslash\{0\}$成立, 当且仅当$g(\mathrm{z})=\mathrm{z}e^{\mathrm{i}\theta}$, 即

$f(z)=M\cdot g(\frac{z}{R})=\frac{M}{R}e^{i\theta}z,(\theta\in$□

6、设$f\in H(B(0,R))$, $f(0)=0,$并且存在 A>0, 使得 $\mathrm{Re}\,f(z)\le A$, $\forall\mathrm{z}\in B(0,1)$. 证明:

$$|f(z)|\leqslant\frac{2A|z|}{1-|z|},\ \forall\mathrm{z}\in B(0,1).$$

解: 令 $\mathrm{g(z)}=\frac{f(z)}{2A-f(z)}$, 则 $\mathrm{g}(0)=0$. $|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|2A-f(z)|}<1$, 由 schwarz 引理得

$|\mathrm{g(z)}|\le|\mathrm{z}|$. 即$\frac{|f(z)|}{|2A-f(z)|}\le|z|$, 于是$|f(z)|\le|z|\cdot(2A+|f(z)|)$, 由此得到

$||f(z)|\le\frac{2A|z|}{1-|z|}|$, $\forall\mathrm{z}\in B(0,1)$..

7、设$f\in H(B(0,R))$, $f(0)=1,$并且 $\mathrm{Re}\,f(z)\ge 0$, $\forall\mathrm{z}\in B(0,1)$.. 利用 schwarz 引理证明:

(i) $\frac{1-|z|}{1+|z|}\le\mathrm{Re}\,f(z)\le|f(z)|\le\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad\forall\mathrm{z}\in B(0,1)$;

证明: 令 $\mathrm{g(z)}=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, 则$|\mathrm{g(z)}|<1$, $\mathrm{g}(0)=0$, 由 schwarz 引理得

$|g(z)| \le |z|$, $|g(z)| \ge \operatorname{Re} f(z)$. 所以 $\left|\dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}\right| \le |z|$, $|f(z)| \leqslant \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$, 又

$\left|\dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}\right| \ge \dfrac{1-\operatorname{Re} f(z)}{1+\operatorname{Re} f(z)}$, 所以 $\operatorname{Re} f(z) \ge \dfrac{1-|z|}{1+|z|}$,

故 $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \le \operatorname{Re} f(z) \le |f(z)| \le \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$.

8、求出满所有满足条件 “$|f(z)|=1, \forall z \in \partial B(0,1)$" 的整函数.

解: $f \in \{e^{i\theta} z^n : \theta \in$□ □

由于 f 在 $B(0,1)$ 内最多只有有限个零点, 不妨设 $z_1, z_2 \cdots z_n$ 是 f 在 $B(0,1)$ 内全部的零点, 且它们按重数重复列出.

令 $g(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n} \dfrac{1-\overline{z_k} z}{z_k - z}$, 则 $g \in H(\overline{B(0,1)})$ 且 $g(z) \ne 0$, $\forall z \in \overline{B(0,1)}$, $|g(z)|=1$,

$\forall z \in \partial B(0,1)$. 于是由最大模原理可得, $|g(z)| \le 1$, $\forall z \in \overline{B(0,1)}$.

又 $\dfrac{1}{g} \in H(\overline{B(0,1)})$, 故再次应用最大模原理，我们有

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right| \le \max_{|z|=1}\left|\frac{1}{g(z)}\right| = 1,\ \forall z \in B(0,1).$$

所以 $|g(z)|=1$, $z \in \overline{B(0,1)}$,

于是 g 只能是常值函数，故存在常数 $\theta \in$□ $g(z)=e^{i\theta}$. 因此 $f(z) = e^{i\theta}\prod_{k=1}^{n}\dfrac{z_k - z}{1-\overline{z_k} z}$,

而 f 是整函数，所以 $z_k = 0, (1 \le k \le n)$, 这样我们就得到 $f(z) = e^{i\theta} z^n, \theta \in$□

9、设 $f \in H(B(0,1))$, $f(B(0,1)) \subset B(0,M)$. 证明: $M|f'(0)| \le M^2 - |f'(0)|^2$.

证明: 令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{M}$, $g(0) = \dfrac{f(0)}{M}$, $g(B(0,1)) \subset B(0,1)$.

由 Schwarz-Pick 引理知 $|g'(0)| \le 1 - |g(0)|^2$, $\left|\dfrac{f'(0)}{M}\right| \le 1 - \left|\dfrac{f(0)}{M}\right|^2$,

所以 $M|f'(0)| \le M^2 - |f'(0)|^2$.

10、设 $f\in H(B(0,1))$， $f(0)=0,\ f(B(0,1))\subset B(0,1)$. 证明：若存在 $z_1,z_2\in B(0,1)$，使得 $z_1\neq z_2, |z_1|=|z_2|, f(z_1)=f(z_2)$, 则 $|f(z_1)|=|f(z_2)|\leq |z_1|^2=|z_2|^2$

（提示：考虑（ $\dfrac{f(z_1)-f(z)}{1-f(z)\overline{f(z_1)}})(\dfrac{1-z\overline{z_1}}{z_1-z})(\dfrac{1-z\overline{z_2}}{z_2-z})$.）

11、设 D 是有界区域， $f\in H(D)$，$z_0\in D$. 证明:若 $f(z_0)=z_0, f(D)\subset D, f'(z_0)=1,$ 则 $f(z)=z$.

证明:不妨设 $z_0=0$，f 在 z 的某个领域 $\overline{B(0,r)}$ 展开成泰勒级数: $z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$

若 $f(z)\neq z$, 则 $\exists m\geq 2, st.a_m\neq 0, a_k=0,\ 2\leq k\leq m\text{-}1.$

记 $f_n=f\circ\quad\circ\quad\circ$ （复合 n 次）任取 $N\in$ □ . 则

$f_N(0)=f_{N\text{-}1}(f(0))=f_{N\text{-}1}(0)=\cdots=f(0)=0.$

故存在 0 的充分小领域 $B(0,r')$，s.t. 在 $B(0,r')$ 上 f_N 有展开式 $f_N(z)=z+Na_m z^m+\cdots$（只需将 f 的展开式迭代即可得） $\forall z\in B(0,r')$，由全纯函数幂级数展开的唯一性，这个展开式在整个 $\overline{B(0,r)}$ 中成立. 因为 $f_N(D)\subset D$ 有界, 故

$\exists M>0, s.t.\ \ |f_N(z)|\leq M.\forall z\in D$. 因此 $|Na_m|=\dfrac{1}{r^m}\left|\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_N(re^{i\theta})e^{-im\theta}d\theta\right|\leq\dfrac{M}{r^m}$，对所有 $N\in$ □ 成立，与 $a_m\neq 0$ 矛盾.

第 5 章 全纯函数的 Laurent 展开及其应用

§5.1 习题

1、 下列初等函数能否在指定的域 D 上展开成 Laurent 级数?

（i） $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}, D=B(0,\infty)\setminus\{0\};$

解：因为 $f\in H(D)$，故 f 在 D 上可以展开成 Laurent 级数.

2、 将下列初等函数在指定的域 D 上展开成 Laurent 级数：

（i） $\dfrac{1}{z^2(z-1)}, D=B(1,1)\setminus\{1\};$

解：
$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{(z-1+1)^2(z-1)}=\frac{1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}C_{-2}^{n}(z-1)^n.$$

（ii） $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}, D=B(0,2)\setminus\overline{B(0,1)};$

解：当 $z\in \mathrm{D}$ 时，由于 $1<|z|<2$，

所以
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{(z-1)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

（iii） $\dfrac{1}{(z-5)^n}, n\in\square \qquad 1,\infty)\setminus\{1\};$

解：
$$\frac{1}{(z-5)^n}=\frac{1}{z^n}\frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n}=\frac{1}{z^n}\sum_{m=0}C_{-n}^{m}(-\frac{5}{z})^m.$$

3、 设 $0<r<R<\infty, D=\overline{B(0,R)}\setminus\overline{B(0,r)}$. 证明：若 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n z_n$ 双全纯地将 D 映为域

G, 则 G 的面积为 $\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}n|a_n|^2(R^{2n}-r^{2n})$.

证明：S(G)= $\iint\limits_{D}|f'(z)|^2\,dxdy=\iint\limits_{D}f'(z)\overline{f'(z)}dxdy=\int_r^R rdr\int_0^{2\pi}f'(re^{i\theta})\overline{f'(re^{i\theta})}d\theta$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n, f^{'}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}na_n z^{n\text{-}1},$$

$$\mathrm{S(G)}=\int_r^R rdr\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}na_n r^{n\text{-}1}e^{in\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\overline{a_n}r^{n\text{-}1}e^{\text{-}i(n\text{-}1)\theta}d\theta$$

$$=\int_r^R rdr 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2\,|\,a_n\,|^2\,r^{2n\text{-}2}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\,a_n\,|^2\,n^2\int_r^R r^{2n\text{-}1}dr$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\,a_n\,|^2\,n^2\,\frac{1}{2n}r^{2n}\Big|_r^R=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\,|\,a_n\,|^2\,(R^{2n}-r^{2n}).$$

§5.2 习题

1、 是否存在 $\overline{B(0,1)}\setminus\{0\}$ 上的无界全纯函数 f，使得 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=0$？

解：g（z）$=\begin{cases} zf(z), z\in\overline{B(0,1)}\setminus\{0\} \\ 0, z=0 \end{cases}$,假设 f 在 $\overline{B(0,1)}\setminus\{0\}$ 上无界全纯,则 g 在 $B(0,1)$ 上全纯，$\lim\limits_{z\to 0}\mathrm{f(z)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{g(z)}}{\mathrm{z}}=\mathrm{g}'(0)$,从而 0 是 f 的可去奇点，f 有界,矛盾.

2、 证明：若 z_0 是全纯函数 f ： $B(z_0,r)\setminus\{\mathrm{z}_0\}\to$ □ ( ) 的本性奇点, 则 z_0 也是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证明: (反证法) 假设 z_0 不是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本性奇点,

若 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的极点, 则 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=\infty$, 得到 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=0$ 与 z_0 是 f 的本性奇点矛盾；若 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的可去奇点, 则 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=a$, 得到 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\dfrac{1}{a}$ 与 z_0 是 f 的本性奇点矛盾,

故假设不成立, 即结论成立.

§5.4 习题

1．证明：留数定理与 Cauchy 积分公式等价.

提示：留数定理$\Rightarrow$Cauchy 积分公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\operatorname{Res}\left(\frac{f(\xi)}{\xi-z},z\right)=f(z)$$

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi=\operatorname{Res}\left(\frac{n!f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}},z\right)=f^{(n)}(z)$$

8、指出下列初等函数在 C_∞ 中的全部孤立奇点，并求出这些初等函数在它们各自孤立奇点处的留数：

（i）$\dfrac{1}{z^3-z^5}$

孤立奇点 0，±1.其中 0 是 3 阶极点，1 是 1 阶极点，-1 是 1 阶极点.

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\cdot\frac{1}{z^3-z^5}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{1-z^2}\right]=\frac{1}{2!}$$

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{z^3-z^5}=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{z^3(1-z^2)}=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}(f,-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{1}{z^3-z^5}=-\frac{1}{2}$$