

吉林大学 2012-2013 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

共七道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、(共 35 分)

1、求多项式 $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x - 1$ 在有理数域上的标准分解;

2、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 均为三元列向量, 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

已知 $|A| = 1$, $|B| = -1$. 求 $|2A + B|$.

3、设 A, B 都为三阶矩阵, 且 $AB - A^{-1}BA = I$. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B .

二、(共 10 分) 设 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式, 且 $x \nmid d(x)$, 并设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $f(A) = g(A) = 0$, 求证: A 可逆.

三、(共 15 分) 讨论方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2a \end{cases}$$
 解的情况, 并在有解时求出其所有解.

四、(共 15 分) 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, $AB = BA, BC = CB$. 证明:

(1) 若 A 可逆, 求证: $\begin{vmatrix} A & B \\ AC & BD \end{vmatrix} = |B| |DA - AC|$;

(2) 探究 A 不可逆时上式的正确性.

五、(共 15 分) 设 A 为 n 阶 r 秩方阵. 证明:

(1) 存在 n 阶 r 秩方阵 B , $ABA = A$;

(2) (1) 中 B 唯一当且仅当 A 可逆.

六、(共 10 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ($m \geq 2$) 的秩为 m , 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性

无关. 证明: 存在无穷多个数 c , 向量组 $c\alpha_1 + \beta_1, c\alpha_2 + \beta_2, \dots, c\alpha_m + \beta_m$ 线性无关.