第 3 讲：复球面与全纯函数 2020-3-3

回顾: $\Phi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ 为球极投影, 逆映射 $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$ 将 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ 映为其球面表示 $\Psi(z)$.

1. (对径点) 证明 $\Psi(z), \Psi(w)$ 是球面的对径点的充要条件是 $z\overline{w} = -1$.

2. (对称点) 证明球面表示 $\Psi(z), \Psi(1/\overline{z})$ 关于 xy-平面对称.

3. (圆弧距离) 假设 $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$, 采用球面 S^2 上连接 $\Psi(z), \Psi(w)$ 的 (较短的) 大圆弧长来定义 z, w 的球面距离 $\sigma(z, w)$, 证明

$$\sigma(z, w) = 2 \arctan \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 \overline{z_2}} \right|.$$

4. (函数奇偶分解的推广) 我们知道平面上任意函数 $f(z)$ 总可以唯一表示为一个奇函数 $f_1(z) = (f(z) - f(-z))/2$ 和一个偶函数 $f_1(z) = (f(z) + f(-z))/2$ 之和. 将这个结论稍作推广, 证明平面上任何复值函数 ϕ 总可以唯一分解为具有 3-重旋转对称性的函数之和:

$$\phi(z) = f(z) + g(z) + h(z)$$

其中 $f(\omega z) = f(z), g(\omega z) = \omega g(z), h(\omega z) = \omega^2 h(z)$, $\omega = e^{2\pi i/3}$.

(思考: 推广到 n-重旋转对称性的情况. 不做要求)

5. (全纯性) 设 f 在平面区域 Ω 上全纯, 证明 $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ 在区域 $\Omega^* = \{\bar{z}; z \in \Omega\}$ 上全纯.

6. (复可微性) 研究如下函数的复可微性

(1). $f(z) = \mathrm{Re}(z)$.

(2). $f(z) = |z|^3$.