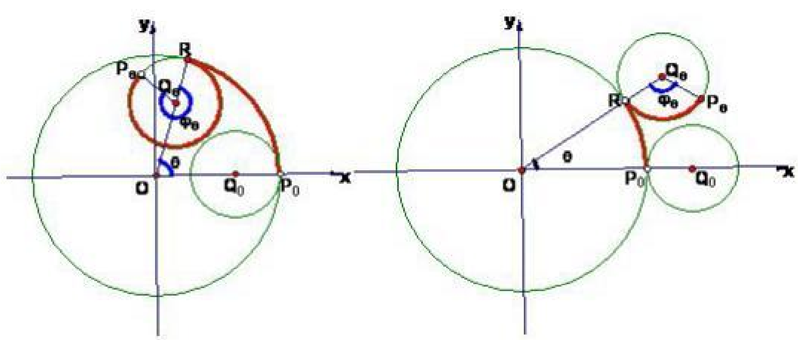
解 析 几 何

October 16, 2019

作业(5) P.32: 1:(3), (5), 2:(3), (5), (6), 3, 5: (3); P.36:3, 5, 6, 9, 10:(1), 11.

第32页习题：

1-(3),(5).



解：(3): 如上左图所示，以大圆心为圆坐标原点O, 初始时两圆圆心的连线为 x 轴建立直角坐标系. 不妨设小圆沿大圆逆时针方向滚动. 记初始时小圆圆心为 Q_0, 滚动一段时间后到达 Q_θ, 其中 θ 为此时 x 轴到两圆心连线的旋转角. 那么 Q_θ 的坐标为 $(a-b)(\cos\theta,\sin\theta)$, 也即

$$\overrightarrow{OQ_\theta}=(a-b)(\cos\theta,\sin\theta).$$

记初始的切点为 P_0. 设此时 P_0 滚动到 P_θ, 而现在的切点记为 R, 显然 P_0R 的弧长等于 $P_\theta R$ 的弧长. 记$\overrightarrow{Q_\theta P_\theta}$ 旋转到 $\overrightarrow{Q_\theta R}$ 的角为 φ_θ, 则有

$$\varphi_\theta=\frac{a}{b}\theta.$$

注意到向量

$$\overrightarrow{Q_\theta R}=b(\cos\theta,\sin\theta),$$

而向量 $\overrightarrow{Q_\theta P_\theta}$ 相当于向量 $\overrightarrow{Q_\theta R}$ 旋转 $-\varphi_\theta$ 角度而来, 所以有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_\theta P_\theta} &= e^{-i\varphi_\theta}\overrightarrow{Q_\theta R} = e^{-i\varphi_\theta} b\left(\cos\theta, \sin\theta\right) \\ &= b\left(\cos\left(\theta-\varphi_\theta\right), \sin\left(\theta-\varphi_\theta\right)\right) \\ &= b\left(\cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta, -\sin\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta\right).\end{aligned}$$

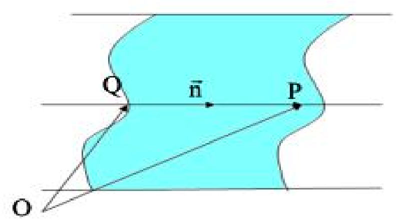
因此

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OP_\theta} = \overrightarrow{OQ_\theta} + \overrightarrow{Q_\theta P_\theta} \\ &\quad = \left((a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta, (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta\right).\end{aligned}$$

所以 P_θ, 即动点所满足的参数方程为

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta, \\ y = (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta, \end{cases} \quad -\infty < \theta < +\infty.$$

此曲线的参数方程为左图，右图为下题曲线的图:



(5): 与(3)的方法相同, 注意到此时

$$\overrightarrow{OQ_\theta} = (a+b)\left(\cos\theta, \sin\theta\right), \ \overrightarrow{Q_\theta R} = b\left(\cos(-\theta), \sin(-\theta)\right) = -b\left(\cos\theta, \sin\theta\right),$$

且向量 $\overrightarrow{Q_\theta P_\theta}$ 相当于向量 $\overrightarrow{Q_\theta R}$ 旋转 φ_θ 角度, 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_\theta P_\theta} &= e^{i\varphi_\theta}\overrightarrow{Q_\theta R} = -e^{i\varphi_\theta} b\left(\cos\theta, \sin\theta\right) \\ &= -b\left(\cos\left(\theta+\varphi_\theta\right), \sin\left(\theta+\varphi_\theta\right)\right) \\ &= -b\left(\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta, \sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta\right).\end{aligned}$$

那么，

$$\overrightarrow{OP_\theta} = \left((a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta, (a+b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta\right).$$

因此所求的参数方程为

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta, \\ y=(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta, \end{cases} -\infty<\theta<+\infty\ .$$

2-(3) 解：由方程知，此平面的法向量为 $\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$. 设$P=(x,y,z)$ 是所求曲面上一点. 注意到 $Q=(1,0,z)$ 在原平面中，所以 P 满足下面的方程

$$\left|\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{n}\right|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

即所求的方程为

$$(x-y)^2+2(x+y)-1=0.$$

2-(5) 解：设 $P=(x,y,z)$ 为目标曲面上的点， 那么有

$$\begin{cases} |x|=|y| \\ |y|=|z| \end{cases}$$

2-(6) 解：设 $P=(x,y,z)$ 为目标曲面上的点， 那么有

$$\begin{cases} \sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{x^2+z^2} \\ \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+z^2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} |x|=|y| \\ |y|=|z| \end{cases}.$$

3 解: 直接计算得

$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9.$$

所以此球面的圆心坐标为 $(-1,2,0)$, 半径为$R=3$. 因此其参数方程为

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi\cos\theta-1, \\ y=3\cos\varphi\sin\theta+2, \quad 0\le\theta<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}. \\ z=3\sin\theta, \end{cases}$$

4 解: (2) 曲面方程为

$$x^2+2y^2-4z^2=6$$

与$x0y$的交线,则令$z=0$,可得曲线方程为

$$x^2+2y^2=6,$$

所得曲线为椭圆. 类似的，可得曲面与$y0z$的交线方程为

$$y^2 - 2z^2 = 3.$$

交线为双曲线 曲面与$x0z$的交线方程为

$$x^2 - 4z^2 = 6.$$

交线为双曲线.

(4) 曲面方程为

$$x^2 + y^2 = z$$

则曲面与$x0y$的交线方程为

$$x^2 + y^2 = 0,$$

交线为原点. 曲面与$y0z$的交线方程为

$$y^2 = z,$$

交线为抛物线. 曲面与$x0z$的交线方程为

$$x^2 = z,$$

交线为抛物线.

P33习题

5 解： (此题相当于将已知曲线做准线，且知道母线的方向，求柱面的方程. 如下图所示，记准线上的点为 Q, 母线的方向矢量为 $\vec{n}$. 设 P 为柱面上一点，那么一个基本的事实是：存在常数 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $\overrightarrow{OP} + t\vec{n} = \overrightarrow{OQ}$.)

(3) 解：准线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1 \end{cases}. \tag{5-3}$$

由方程知 $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 0, -1 \le z \le 0$. 用上题的方法易知：

关于 yOz面的射影柱面为

$$\begin{cases} y + z = -1 \\ -1 \le y \le 0 - 1 \le z \le 0 \end{cases}.$$

关于 xOz面的射影柱面为

$$\begin{cases} x^2 + 2z^2 + 2z = 0 \\ -1 \le x \le 1, -1 \le z \le 0 \end{cases}.$$

关于 xOy面的射影柱面为

$$\begin{cases} x^2+2y^2+2y=0 \\ -1\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 0 \end{cases}.$$

第36页习题：

3. 证明：设动平面族如下

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

那么依题

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k.$$

显然点 $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ 满足上面的方程，因而这族平面过定点.

5.解： 设 $P=(x,y,z)$ 是目所求曲面上一点. 记 $\vec{n}:=\frac{\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CB}\right|}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
那么

$$\left|\overrightarrow{AP}\cdot\mathbf{n}\right|=1.$$

因此，

$$2x-y+z=4\pm\sqrt{6}.$$

6. 解：因为 $A=(a,0,0)\,,B=(0,b,0)\,,C=(0,0,c)$, 所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}.$$

9. 证明：平面的法向量为 $\vec{n}=\frac{(bc,ac,ab)}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$, 那么

$$p=|(a,0,0)\cdot\vec{n}|=\frac{|abc|}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

即，

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

10-(1). 解：设 $P=(x,y,z)$ 是所求曲面上一点, 那么

$$\begin{aligned} &\left|(x-1,y-2,z)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right| \\ = &\left|(x-2,y+1,z)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\right|. \end{aligned}$$

即,

$$\sqrt{5}\,|x+2y-z-5|=\sqrt{6}\,|2x-y-5|\,.$$

11. 解：P_1, P_2 关于平面的离差分别为

$$\delta_1 = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \delta_2 = \frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

所以要求的比为

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}.$$

(注：此题求的是有向线段之比, 且通常说 P_0 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 之比指的是 $\overrightarrow{P_0P_1} : \overrightarrow{P_0P_2}$. 因为没有向量的除法运算, 这里的比不能写成 $\frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\overrightarrow{P_0P_2}}$, 不过可以用 $\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\overrightarrow{P_0P_2}|}$ 或 $\frac{P_0P_1}{P_0P_2}$ 表示这两个线段的长度之比. 注意到向量 $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ 的方向可能不同，所以这个比值不是简单的等于 $\frac{P_0P_1}{P_0P_2}$, 而是会据 P_0 与 P_1, P_2 的位置关系等于 $\frac{P_0P_1}{P_0P_2}$ 或 $-\frac{P_0P_1}{P_0P_2}$. 课本35页介绍的点到平面的离差恰好能很好的反映向量的方向问题, 所以用离差来计算此题又清楚又简单.)