1. 求双曲抛物面 $\mathbf{x}=(a(u^1+u^2),b(u^1-u^2),2u^1u^2)$ 的主曲率 (a,b 为正常数).

2. 写出曲面$z=f(x,y)$的第一, 第二基本形式.

3. 应用行列式乘法法则, 证明:

$$(\mathbf{r}_{11},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_{22},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\begin{vmatrix}\mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_2\\ \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_{22} & E & F\\ \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_{22} & F & G\end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{r}_{12},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)^2=\begin{vmatrix}\mathbf{r}_{12}^2 & \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_2\\ \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_1 & E & F\\ \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_2 & F & G\end{vmatrix}$$

4. 证明: $LN-M^2=\frac{1}{g}[(\mathbf{r}_{11},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_{22},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-(\mathbf{r}_{12},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)^2]$

5. 证明:

$\mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_1=\frac{E_1}{2},\quad \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_1=\frac{E_2}{2}$

$\mathbf{r}_{22}\cdot\mathbf{r}_2=\frac{G_2}{2},\quad \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_2=\frac{G_1}{2}$

$\mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_2=F_1-\frac{E_2}{2},\quad \mathbf{r}_{22}\cdot\mathbf{r}_1=F_2-\frac{G_1}{2}$

2. 证明: 正则曲面上曲率线的微分方程可写为

$$\begin{vmatrix}(\mathrm{d}u^2)^2 & -\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 & (\mathrm{d}u^1)^2\\ g_{11} & g_{12} & g_{22}\\ h_{11} & h_{12} & h_{22}\end{vmatrix}=0.$$

由此证明: 在无脐点的曲面上, 参数网为曲率线网的充要条件是 $g_{12}=h_{12}=0$.

3. 计算曲面 $x^3=f(x^1,x^2)$ 的第一和第二基本形式. 写出使平均曲率恒为零时 f 所满足的微分方程 (**极小曲面方程**). 证明: $x^3=a\arctan\dfrac{x^2}{x^1}$ (a 为常数) 是极小曲面.

9. 设 $x^3=f(x^1)+g(x^2)$ 为极小曲面. 证明: 除相差一常数外, 它可写成 $ax^3=\ln\dfrac{\cos ax^2}{\cos ax^1}$ (a 为常数), 称为 **Scherk 曲面**.

10. 证明: 曲面 $\mathbf{x}(u,v)=(3u(1+v^2)-u^3,3v(1+u^2)-v^3,3(u^2-v^2))$ 是极小曲面, 称为 **Enneper 曲面**.