吉林大学 2012-2013 学年第一学期“数学分析 I”期末考试试题

共八道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、（共 10 分）叙述介值定理并利用闭区间套定理证明介值定理.

二、（共 30 分）求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+1}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{n^6+2}}+\ldots+\frac{n^2+n}{\sqrt{n^6+n}})$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{(1-\cos x)\tan x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{1}{x}}+\sin\frac{1}{x})^x$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3+\frac{1}{2}x^2)\ln(1+\frac{1}{x})-\sqrt{x^4+1}]$.

三、（共 25 分）导数计算

（1）设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$；

（2）设 $f(x)=x\ln(1+x^2)+x^2$，求 $f'(x)$；

（3）已知函数由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 确定，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$；

（4）设 $f(x)=x^2(1-x)^{\frac{1}{3}}$，求 $f^{(10)}(0)$；

（5）设 $y=\cos t, x=\ln\tan\frac{t}{2}+\sin t, 0<t<\pi$，求 $\frac{dy}{dx}$.

四、（共 5 分）用定义法证明极限：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}=1$.

五、（共 5 分）证明不等式：$\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}, x>0$.

六、（共 10 分）设函数 $f(x)=e^{\frac{1}{2x}}(x-1)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求函数 $f(x)$ 的凹凸区间；

（3）求函数 $f(x)$ 的渐近线并画出函数图像.

七、（共 8 分）证明 $f(x)=\begin{cases}|x|(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 R 上一致连续.

八、（共 7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导.求证：

（1）若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(0)$，那么存在一个点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$；

（2）若 $f(x)$ 满足不等式 $0\le f(x)\le \ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}, x>0$，则存在一点 $\eta\in(0,+\infty)$，使得

$f'(\eta)=\frac{2}{1+2\eta}-\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$.