北京大学 2015-2016 学年第一学期“数学分析 I”期末考试试题

参考解析

一、（共 10 分）设曲线Γ为$x=\cos^3 t, y=\sin^3 t,(t\in[0,2\pi))$，求$\Gamma$在处$t=\dfrac{\pi}{4}$的切线方程.

解：由条件，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\dfrac{\sin t}{\cos t}$，故$\Gamma$在处$t=\dfrac{\pi}{4}$的切线得斜率为-1.

又切点坐标为$(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4})$，故切线方程为：$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-1=0$.

二、（共 10 分）函数$y=f(x)$由方程$y^2+\ln y=x^4$确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：由条件$2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x^3$，故得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{4yx^3}{2y^2+1}$.

又$2(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+2y\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{1}{y^2}(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=12x^2$，故得$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{24x^2y(2y^2+1)^2+32x^6y(1-2y^2)}{(2y^2+1)}$.

三、（共 15 分）求极限：

（1）$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\sin(x-1)})$；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(x+1)}{x^3}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\sin(x-1)})=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{\sin x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\ln(x+1)}{\ln(x+1)\sin x}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+o(x^2))-(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

（2）由 *Maclaurin* 展开式，$\mathrm{e}^x\sin x=(1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2))(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4))=x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$.

故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(x+1)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

四、（共 15 分）求不定积分：

（1）$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；（2）$\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

解：（1）$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}(\sec t)}{\sec t\sqrt{\sec^2 t-1}}=\int\frac{-\tan t\sec t\mathrm{d}t}{\sec t\tan t}=-\int\mathrm{d}t=-t+C=\arccos\frac{1}{x}+C$；

（2）$\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\int x\mathrm{d}(\cot x)=-x\cot x+\int\cot x\mathrm{d}x=-x\cot x+\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}=-x\cot x+\ln|\sin x|+C$.

五、（共 10 分）设$f(x)$在区间$[a,b]$连续且在(a,b)可导，再假设$\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$存在，试问$f(x)$是否在$x=a$处存在右导数.

解：存在.由中值定理知，$f(b)-f(a)=f'(\eta)(b-a),\eta\in(a,b)$.

故$f'_+(a)=\lim\limits_{b-a\to0^+}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim\limits_{b-a\to0^+}f'(\eta)=\lim\limits_{\eta\to0^+}f'(\eta)$由条件知存在.

六、（共 10 分）求 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的带 *Peano* 余项的 *Maclaurin* 公式.

解：注意到 $f(x)$ 为双曲正弦函数 $\sinh x$ 的反函数，而 $(\sinh x)'=\cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}$.

故有 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}x^{2k}=$

$1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k},x\in[-1,1]$.

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=\int_0^x[1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k}]\mathrm{d}t=$

$x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2k+1}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k+1},x\in[-1,1]$.

七、（共 10 分）设 $P_n(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-x)^k}{k}$，$n\in N_+$.求证：

（1）n 为奇数时，$P_n(x)$ 有唯一一个实零点；（2）n 为偶数时，$P_n(x)$ 没有实零点.

证明：我们用归纳法来证明一个更强的命题，即把（2）的结论改成 $P_n(x)$ 恒正.

易知 $P_1(x)=1-x$，$P_2(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{2}$，都满足条件.

假设 $n=k$ 时，命题成立.考虑 $n=k+1$ 时的情况.不难发现 $P_{n+1}{}'(x)=-P_n(x)$，$n\in N_+$.

若 k 是奇数，则 $P_{k+1}{}'(x)=-P_k(x)$ 有唯一一个实零点，记为 x_0.又由归纳假设知其单调递增，

故 $P_{k+1}(x)$ 在 $x=x_0$ 处有最小值 $P_{k+1}(x_0)=1+\sum\limits_{l=1}^{k+1}\dfrac{(-x_0)^l}{l}=P_k(x_0)+\dfrac{x_0^{k+1}}{k+1}=\dfrac{x_0^{k+1}}{k+1}>0$，结论成立.

若 k 是偶数，$P_{k+1}{}'(x)=-P_k(x)<0$，故 $P_{k+1}(x)$ 单调递减，又 $P_{k+1}(0)=1>0,\lim\limits_{x\to+\infty}P_{k+1}(x)=-\infty$，

故 $P_{k+1}(x)$ 有唯一一个实零点，结论也成立.

综上所述，命题对 $n=k+1$ 成立.故由归纳原理，命题总成立.

八、（共 10 分）设在 $f(x)$ 区间 I 上具有二阶导数且设 $F(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$.证明：

（1）若 $f(x)$ 是区间 I 上的下凸函数，则 $F(x)$ 也是区间 I 上的下凸函数；

（2）考虑（1）逆命题的真假.

证明：（1）此时有 $f''(x)>0$ 在区间 I 上恒成立.

故 $F''(x)=\{[f'(x)]^2+f''(x)\}\mathrm{e}^{f(x)}>0$，故 $F(x)$ 也是区间 I 上的下凸函数.

（2）假，考虑函数 $f(x)=-x^2$，其为 R 上的上凸函数.

但在区间 $I=[1,2]$ 上，$F''(x)=\{[f'(x)]^2+f''(x)\}\mathrm{e}^{f(x)}=(4x^2-2)\mathrm{e}^{f(x)}>0$.仍然为下凸函数.

九、（共 10 分）求证若 $f(x)$ 在 R 上有界且二阶可导，则 $f''(x)$ 必有零点.

证明：假设 $f''(x)$ 无零点，不妨设其恒正，则 $f'(x)$ 单调递增.

必存在一点 x_0 使 $f'(x_0)\neq 0$，否则 $f'(x)\equiv 0$，$f''(x)\equiv 0$ 与条件矛盾！

若 $f'(x_0)>0$，则由 *Taylor* 展开式：$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2f'(\eta)$，

知其在正无穷处趋于正无穷，与条件矛盾！

若 $f'(x_0)<0$，则 $\forall x<x_0,f(x)<0$，故由 $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(\eta)$ 知

其在负无穷处趋于负无穷，与条件矛盾！

综上所述，总会产生矛盾，故原命题成立.