浙江大学 2013 - 2014 学年 夏 学期

《常微分方程》课程期末考试参考答案

一、试求下述一阶微分方程（每小题 8 分，共 32 分）

1. 求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{10}{3}xy^{2/5}$，$y(0)=0$ 的一个不恒为零的特解；

解：当 $y\neq 0$ 时，有 $y^{-2/5}dy=\dfrac{10}{3}xdx$，4' 积分得 $y=(x^2+C)^{5/3}$。2'

由初始条件得 $C=0$ 即特解为 $y=x^{10/3}$；从而特解为 $y=x^{10/3}$。2'

2. $xdy+2y\ln y\,dx=4x^2ydx$ 的通解；

解：同除 y，得 $\dfrac{d\ln y}{dx}+\dfrac{2}{x}\ln y=4x$，4' 即 $\ln y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}(C+\int 4xe^{\int\frac{2}{x}dx}dx)=x^2-Cx^{-2}$，4'　　因分积分 4'，

通解为 $y=e^{x^2-Cx^{-2}}$。

3. $x^2\dfrac{dy}{dx}=y(y-x)$，　$y(1)=1$ 的特解；

解：方程为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y-x)}{x^2}$，令 $y=xu$ 得方程 $x\dfrac{du}{dx}=u^2-2u$ 2' 即 $\dfrac{du}{u(u-2)}=\dfrac{dx}{x}$，积分得 $\dfrac{u-2}{u}=Cx^2$，

通解为 $\dfrac{y-2x}{y}=Cx^2$，4' 由初始条件 $y(1)=1$ 得 $C=-1$，特解为 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$。2'

* 伯努利方程，同除 y^2，2'
解线性方程 4'
特解 2'

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有一阶连续的导数，求常微分方程

$$y(1+y^2f(xy))dx+x(y^2f(xy)-1)dy=0\quad(y>0)$$

的通解；并说明该微分方程的任何一条解曲线与曲线 $xy=2$ $(y>0)$ 至多相交于一点.

解：同乘积分因子 $\mu=y^{-2}$ 2' 得全微分方程

$$(\frac{1}{y}+yf(xy))dx+x(f(xy)-\frac{1}{y^2})dy=0,$$

$Mdx+Ndy=du$

$u=\frac{x}{y}+\int yf(xy)dx+\varphi(y)$

$\frac{x}{y}f(xy)$

$\int f(xy)dx+y\int f'(xy)dx+\varphi'=xf(xy)$

得原通解为 $\dfrac{x}{y}+F(xy)=C$，4' 其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。假设常微分方程的某条解曲线与曲线 $xy=2$ $(y>0)$ 交于二点 $A(x_1,y_1)$ 及 $B(x_2,y_2)$，则有

$$x_1y_1=x_2y_2=2 \text{ 及 } \frac{x_1}{y_1}+F(2)=C=\frac{x_2}{y_2}+F(2)\quad 2'$$

从而得 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$。

(*) 分项组合

$(ydx-xdy)+(y^3f(xy)dx+xy^2f(xy)dy)=0$ 2'

$\dfrac{ydx-xdy}{y^2}+f(xy)d(xy)=0$ 2'

$\dfrac{x}{y}+F(xy)=c$ 2'

或 $z=\ln y$ $z''=0$.

$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$ 或 $\boxed{\left(\frac{y'}{y}\right)'=0.}$

二、（每小题 8 分，共 32 分）试求出下列高阶方程的解：

1. $y\frac{d^2y}{dx^2}-(\frac{dy}{dx})^2=0$

解：记 $\frac{dy}{dx}=p$，则有 $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$，2' 原方程化为 $yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$，得 $y\frac{dp}{dy}=p$ 或 $p=0$，解得 2' 2'

$p=C_1y$。从而得 $\frac{dy}{dx}=C_1y$，通解为 $y=C_2e^{C_1x}$。 4'

或 $\boxed{\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y}}$ $(\ln y')'=(\ln y)'$

→ 特义消除 2'

2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x^2+8\ln x$

解：令 $x=e^t, y=y(t)$，则 $x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$，$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$，原方程化为 $\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=e^{2t}+8t$， 4' $y'=cy$

特征方程为 $\mu^2-4\mu+4=0$，解得特征根为 $\mu_1=\mu_2=2$。 2'

方程 $\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=e^{2t}$ 有特解 $\varphi_1(t)=At^2e^{2t}$，代入 $\varphi_1(t)=\frac{1}{2}t^2e^{2t}$ 1'

方程 $\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=8t$ 有特解 $\varphi_2(t)=Bt+C$，代入得 $\varphi_2(t)=2t+2$， 1' 2' 从而原方程有特解

$\varphi_1+\varphi_2=\frac{1}{2}t^2e^{2t}+2t+2=\frac{1}{2}x^2\ln^2x+2\ln x+2$ 及通解

$y=(C_1+C_2t)e^{2t}+\frac{1}{2}t^2e^{2t}+2t+2=(C_1+C_2\ln x)x^2+\frac{1}{2}x^2\ln^2x+2\ln x+2$

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(x+1)\frac{dy}{dx}+2(x+1)y=10x^3\sin x$ 化常

解：齐次线性方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(x+1)\frac{dy}{dx}+2(x+1)y=0$ 有特解 $\varphi(x)=x$，令 $y=xu$，2' 原方程化为

$\frac{d^2u}{dx^2}-2\frac{du}{dx}=10\sin x$， 2' 解得

$$u=C_1+C_2e^{2x}+4\cos x-2\sin x$$ 4'

从而原方程的通解为 $y=(C_1+C_2e^{2x}+4\cos x-2\sin x)x$. 4' 4'

齐次 6
非齐次 2.

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

解：特征方程为 $\mu^2-\mu-2=0$，(2') 有特征根 $\mu_1=-1$ 和 $\mu_2=2$，相应的齐次线性方程有通解

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$，(2') 下面利用变动任意常数法求非齐次线性方程的特解 $\varphi(x)=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{2x}$，

即求 $C_1(x), C_2(x)$ 满足 2'

$$C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^{2x}=0, \quad -C_1'(x)e^{-x}+2C_2'(x)e^{2x}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

解得 $C_1'(x)=-\frac{1}{3}\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$，$C_2'(x)=\frac{1}{3}\frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}$。积分得

$C_1(x)=-\frac{1}{6}\ln(1+e^{2x})$，$C_2(x)=-\frac{1}{3}(e^{-x}+\arctan e^x)$。

通解为 $y=e^{-x}(C_1-\frac{1}{6}\ln(1+e^{2x}))+e^{2x}(C_2-\frac{1}{3}(e^{-x}+\arctan e^x))$。 2'

三、（每小题 8 分，共 16 分）求解下列线性微分方程组：

1. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dx}{dt}=x+2y+3e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt}+2\dfrac{dx}{dt}=4x-y \end{cases}$$

解：二个方程相减得 $y=x-\dfrac{dx}{dt}-e^{2t}$，(2')代入第二个方程得

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+3x=-3e^{2t}\ ,(2')$$

解得 $x=e^t\left(C_1\cos(\sqrt{2}t)+C_2\sin(\sqrt{2}t)\right)-e^{2t}$，(2') 代入 $y=x-\dfrac{dx}{dt}-e^{2t}$ 有

$y=\sqrt{2}e^t\left(-C_2\cos(\sqrt{2}t)+C_1\sin(\sqrt{2}t)\right)$ (2')

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-3x+2y+2z \\ \dfrac{dy}{dt}=2x-3y+2z \\ \dfrac{dz}{dt}=2x+2y-3z \end{cases}$$

解：系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$，相应的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 2 & 2\\ 2 & -3-\lambda & 2\\ 2 & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda+5)^2,$$ 4

解得特征值为 $\lambda_1=1$ 及 $\lambda_2=\lambda_3=-5$。

属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\vec{v}_1=(1,1,1)^T$，方程组有解 $\vec{\varphi}_1=(1,1,1)^Te^t$； 2'

属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-5$ 的特征向量 $\vec{v}_2=(-1,0,1)^T$ 及 $\vec{v}_3=(-1,1,0)^T$，方程组有解 $\vec{\varphi}_2=(-1,0,1)^Te^{-5t}$ 及 $\vec{\varphi}_3=(-1,1,0)^Te^{-5t}$；从而方程组的通解为 2'

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{-5t}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+C_3e^{-5t}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}。$$

四、（10分）函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一阶连续的导数，$f(1)=1$，对任何 $x,t\in(0,+\infty)$ 满足

$$\int_1^{tx} f(u)du = t\int_1^x f(u)du + x\int_1^t f(u)du,$$

试求函数 $f(x)$。

解：关于 x 求导得

$$tf(tx)=tf(x)+\int_1^t f(u)du, \qquad (1)$$

关于 t 求导得

$$xf(tx)=xf(t)+\int_1^x f(u)du。 \qquad (2)$$

4′（有一即可）

联立（1）和（2）消去左边，得

$$xtf(x)+x\int_1^t f(u)du = xtf(t)+t\int_1^x f(u)du。$$ 2′

移项，两边同除 xt，得

$$f(x)-\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du = f(t)-\frac{1}{t}\int_1^t f(u)du = const = f(1)=1.$$ 2′

从而有 $tf(t)=t+\int_1^t f(u)du$， 关于 t 求导得 $f'(t)=\frac{1}{t}$，由 $f(1)=1$ 解得 $f(t)=1+\ln t$ 。2′

五．（10分）记 $\varphi_1(x)=xe^x+\sin x$， $\varphi_2(x)=2xe^x$， $\varphi_3(x)=2\sin x$，试讨论：

3′ (1)．如果 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是某个 k 阶齐次线性常微分方程的解，求最小的自然数 k？（需要给出适当的理由）

3′ (2)．如果 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是某个 k 阶非齐次线性常微分方程的解，求最小的自然数 k？（需要给出适当的理由）

4′ (3)．如果 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是某个 k 阶（实）常系数齐次线性常微分方程的解，求最小的自然数 k？并求出该方程的表达式。

解：(1)． $k=2$ 。2′ 理由 1′ $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 中仅有二个线性无关解 φ_2,φ_3，由齐次线性常微分方程解的结构定理知解空间至少是二维线性空间，从而最小的自然数 $k=2$ 。

(2). $k=1$ 。2′ $\varphi_1-\varphi_2=$ 1′ $\sin x - xe^x$，$\varphi_1-\varphi_3=-\sin x+xe^x$ 为相应的 k 阶齐次线性常微分方程解,注意到它们是线性相关的，k 阶齐次线性常微分方程解空间至少是一维线性空间，从而最小的自然数 $k=1$。

(3). $k=4$ 。2′ 常系数齐次线性常微分方程的解一定是由函数 $x^l e^{\alpha x}$， $x^l e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $x^l e^{\alpha x}\sin\beta x$ 组成，由解 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 的表达式知函数 $xe^x,\sin x$ 是 k 阶常系数齐次线性常微分方程的解，特征方程至少有特征根 $\mu_1=\mu_2=1$， $\mu_3=i,\ \mu_4=-i$ 。从而最小的自然数 $k=4$ 且相应的特征方程为

$$0=(\mu-1)^2(\mu-i)(\mu+i)=\mu^4-2\mu^3+2\mu^2-2\mu+1,$$

常系数齐次线性常微分方程为 $y^{(4)}-2y^{(3)}+2y''-2y'+y=0$ 。2′