2007 级

1、（1）已知函数 y 由方程 $\sin(x+y)-xy=0$ 确定，试计算微分 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

（2）已知函数 y 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}-\sin xy=0$ 确定，试计算微分 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：（1）在方程 $\sin(x+y)-xy=0$ 两端同时对 x 进行微分，得：

$(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\cos(x+y)-y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，可得：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x}$

在方程 $(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\cos(x+y)-y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 两端再次同时对 x 进行微分，得：

$-(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2\sin(x+y)+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\cos(x+y)-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，即为：

$$-(1+\frac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x})^2\sin(x+y)+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\cos(x+y)-2\frac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x}-x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$$

可得：$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(y-x)^2\sin(x+y)}{(\cos(x+y)-x)^3}+2\frac{y-\cos(x+y)}{(\cos(x+y)-x)^2}$.

（2）在方程 $\mathrm{e}^{x+y}-\sin xy=0$ 两端同时对 x 进行微分，得：

$(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})e^{x+y}-(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y)\cos xy=0$，可得：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y\cos xy}{x\cos xy-\mathrm{e}^{x+y}}$

在方程 $(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})e^{x+y}-(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y)\cos xy=0$ 两端再次同时对 x 进行微分，得：

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{x+y}+(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2\mathrm{e}^{x+y}-(x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\cos xy+(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y)^2\sin xy=0$，即为：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{x+y}+(1+\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y\cos xy}{x\cos xy-\mathrm{e}^{x+y}})^2\mathrm{e}^{x+y}-(x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y\cos xy}{x\cos xy-\mathrm{e}^{x+y}})\cos xy+(x\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y\cos xy}{x\cos xy-\mathrm{e}^{x+y}}+y)^2\sin xy=0$$

可得：$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(x-y)^2\cos^2 xy}{x\cos xy-\mathrm{e}^{x+y}}\mathrm{e}^{x+y}+2(y\cos xy-\mathrm{e}^{x+y})\cos xy+\frac{(x-y)^2\mathrm{e}^{2x+2y}}{x\cos xy-\mathrm{e}^{x+y}}\sin xy$.

2、设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上有定义，在 x=0 处有二阶导数且满足：

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0, f''(0)=1$.　　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x-\sin x)}{x^6}$ 的值.

解：由条件：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,$

故有：$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x-\sin x)}{x^6}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos)f'(x-\sin x)}{6x^5}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x-\sin x)}{12x^3}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos)f''(x-\sin x)}{36x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x-\sin x)}{72}=\frac{f''(0)}{72}=\frac{1}{72}$.

3、已知方程 $x^n+n\ln(1+x)-1=0, n\in N_+$.求证：

（1）对任意的 n，此方程有唯一正实根；

（2）记（1）中的正实根为 a_n，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明：（1）令 $f_n(x)=x^n+n\ln(1+x)-1$，则有 $f_n'(x)=nx^{n-1}+\dfrac{n}{1+x}>0$

故 $f_n(x)$ 在定义域上单调递增，又 $f_n(0)=-1<0, f_n(1)=n\ln 2>0$，故由零点存在性定理结合函数的单调性知：对任意的 n，此方程有唯一正实根，且此根在区间(0,1)内.

（2）（证法一）来证明 a_n 从某项之后为单调递减数列，由 $f_n(x)$ 的单调性知，

只需对足够大的 n 去证明：$f_n(a_{n+1})<0$，即 $a_{n+1}^n+n\ln(1+a_{n+1})-1<0$，

又 $a_{n+1}^{n+1}+(1+n)\ln(1+a_{n+1})-1=0$，故只需证 $a_{n+1}^n-a_{n+1}^{n+1}-\ln(1+a_{n+1})<0$.

考虑函数 $g(x)=x^n-x^{n+1}-\ln(1+x)$,有 $g'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n-\dfrac{1}{1+x}$，

$g''(x)=n(n-1)x^{n-2}-n(n+1)x^{n-1}+\dfrac{1}{(1+x)^2}=n(n+1)x^{n-2}[\dfrac{n-1}{n+1}-x]+\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

我们不难得知，当 n 足够大时，$f_n(1-\dfrac{2}{n+1})>f_n(\dfrac{1}{3})>0$，故 $1-\dfrac{2}{n+1}>a_n$.

故此时 $g''(x)>0$，则 $g'(x)<g'(\dfrac{n-1}{n+1})=(\dfrac{n-1}{n+1})^{n-1}-\dfrac{n+1}{2n}<0$，$g(x)<g(0)=0$.

故 a_n 为单调递减数列，从而由单调有界定理知 a_n 收敛，设极限为 $A\in[0,1]$，有：

$A^n+n\ln(1+A)=A^{n+1}+(n+1)\ln(1+A)$ 成立，即 $A^n(1-A)-\ln(1+A)=0$ 成立，由上面的讨论知只有 A=0，综上所述，命题得证.

（证法二）我们现证明 $0<a_n<\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1(n\in N_+)$，这由 $f_n(x)$ 的单调性以及 $f_n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)=(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)^n>0$ 知其成立，故由夹挤定理，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

4、设函数 $f(x)$在区间[0,1]上连续，于(0,1)上可导，且满足 $f(1)$=1，求证：存在 $0<\xi<\eta<1$，使得：$f'(\eta)=\dfrac{\xi f'(\xi)}{2(1-\xi)}$.

证明：先来证明存在 $0<\xi<1$，使得 $1-f(\xi)=\dfrac{\xi f'(\xi)}{2}$.令 $g(x)=\dfrac{x^2}{2}f(x)$，$h(x)=\dfrac{x^2}{2}$，

显然其都在在区间[0,1]上连续，于(0,1)上可导，故由 Cauchy 中值定理，存在 $0<\xi<1$，使：

$\dfrac{g'(\xi)}{h'(\xi)}=\dfrac{g(1)-g(0)}{h(1)-h(0)}=1$，即 $1=\dfrac{\frac{\xi^2}{2}f'(\xi)+\xi f(\xi)}{\xi}=\dfrac{\xi}{2}f'(\xi)+f(\xi)$，即 $1-f(\xi)=\dfrac{\xi f'(\xi)}{2}$.

又函数 $f(x)$在区间[ξ,1]上连续，于(ξ,1)上可导，

故由 *Lagrange* 中值定理，存在 $\xi<\eta<1$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{\xi f'(\xi)}{2(1-\xi)}$.

2008 级

1、求下列函数的一阶导数：

（1） $f(x)=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$；（2） $f(x)=x^{x^x}\ (x>0)$；

（3）隐函数 $y=f(x)$ 由以下方程 $x^2y^2+y=1+xe^y$ 确定.

解：（1） $f'(x)=(\ln\frac{1-x^2}{1+x^2})'=[\ln(1+x)+\ln(1-x)-\ln(1+x^2)]'=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}$.

（2）（解法一） $f'(x)=(x^{x^x})'=(e^{x^x\ln x})'=(e^{e^{x\ln x}\ln x})'=(e^{x\ln x}\ln x)'e^{e^{x\ln x}\ln x}=$

$(e^{x\ln x}\ln x)'e^{e^{x\ln x}\ln x}=[\frac{e^{x\ln x}}{x}+(e^{x\ln x})'\ln x]e^{e^{x\ln x}\ln x}=[\frac{e^{x\ln x}}{x}+(x\ln x)'e^{x\ln x}\ln x]e^{e^{x\ln x}\ln x}=$

$[\frac{e^{x\ln x}}{x}+(1+\ln x)e^{x\ln x}\ln x]e^{e^{x\ln x}\ln x}=(\frac{1}{x}+\ln x+\ln x\ln x)x^x x^{x^x}=(1+x\ln x+x\ln^2 x)\ x^{x^x+x-1}$.

（解法二）有 $\ln f(x)=x^x\ln x,\ln\ln f(x)=x\ln x+\ln\ln x$，对方程两端求导，得：

$f'(x)\frac{1}{f(x)}\frac{1}{\ln f(x)}=\ln x+1+\frac{1}{x\ln x}$，故 $f'(x)=(\ln x+1+\frac{1}{x\ln x})x^x\ln x\cdot x^{x^x}=(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x})x^{x^x-x}$.

（3）在方程两端同时对 x 求导，得： $2xy^2+2x^2y\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=e^y+xe^y\frac{dy}{dx}$.

故可得： $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y-2xy^2}{2x^2y+1-xe^y}$.

2、按要求计算下列函数的高阶导数：

（1） $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$；

（2） $y=(2x^2+1)\sin x$，求 $y^{(10)}$.

解：（1） $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=a\sin t\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

3、已知数集 $E=\{\sin\frac{2n+1}{2}\pi+e^{-n};n=1,2,\ldots\}$，求 $\sup E$ 的值和 $\inf E$ 的值以及数列 $x_n=\sin\frac{2n+1}{2}\pi+e^{-n}$ 的上，下极限.

解： $x_n=\sin\frac{2n+1}{2}\pi+e^{-n}=\begin{cases}-1+e^{-n}，& n=2k+1\\ 1+e^{-n}，& n=2k\end{cases}(k\in N)$，

不难知其最大值为$x_2=1+\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，故$\sup E=1+\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.我们来证明 $\inf E$ 的值为−1.

首先显然 $\inf E$ 的值不大于 0，若$\inf E=c\in(-1,0)$，则由$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$，知：

对$\varepsilon=c+1>0$，存在$\mathrm{e}^{-N}<1+c$，即$\mathrm{e}^{-N}-1<c$，与 $\inf E$ 是下界矛盾！故$\inf E=-1$.

由定义知：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\frac{1}{\mathrm{e}}-1$.

4、设$a>1,x_1=\sqrt{a},x_{n+1}=\sqrt{ax_n},n=1,2,\ldots$，试证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明：用归纳法易证对任意正整数 n，$1<x_n<a$，由此可得$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\frac{a}{x_n}}>1(n\in N_+)$.

即数列$\{x_n\}$单调递增，从而数列$\{x_n\}$单调有界，故其极限存在，设为 $A\in[1,a]$.

对$x_{n+1}=\sqrt{ax_n}$同取极限，有$A=\sqrt{aA}$，得 $A=a$.

5、求证：对任意$(x,y)\in R^2$，$\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}\le\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.

证明：先证明$f(x)=\mathrm{e}^x$是 R 上的下凸函数，这由$f''(x)=\mathrm{e}^x>0$是易知的.

从而$f(\frac{x+y}{2})=f[\frac{1}{2}x+(1-\frac{1}{2})y]\ge\frac{1}{2}f(x)+(1-\frac{1}{2})f(y)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$.

6、设函数 $f(x)$在区间[0,1]上连续，于(0,1)上恒正而可导，且满足 $f(0)=0$.求证：存在$0<\xi<1$，使得：$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{2f(1-\xi)}$.

证明：令函数$g(x)=f^2(x)f(1-x)$，则函数 $g(x)$在区间[0,1]上连续，于(0,1)上可导，故由 *Lagrange* 中值定理，知存在$0<\xi<1$，使得：

$0=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g'(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)f(1-\xi)-f^2(\xi)f'(1-\xi)$，又$f(\xi)>0$

故有$2f'(\xi)f(1-\xi)=f(\xi)f'(1-\xi)$，即$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{2f(1-\xi)}$.

2009 级

1、求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}}{n}$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{2x+1}}$；（3）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

解：（1）已知，对任意正整数 n，$\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}}{n}<\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}}{n}<\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{2}}{n}=\sqrt[n]{2}$.

而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=1$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故由夹挤定理 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}}{n}=1$.

（2）$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1}+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\sqrt{2}$.

（3）由 *Maclaurin* 展开式，$\mathrm{e}^x\sin x=(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))=x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$.

故 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}$.

2、已知数列 $\{x_n\}$ 为正数数列，$n>1$.求证：$(x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n)^n\le n^{n-1}(x_1^n+x_2^n+\ldots\ldots+x_n^n)$.

证明：即为证明 $(\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n})^n\le\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots\ldots+x_n^n}{n}$.

考虑函数 $f(x)=x^n$，有 $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$，故 $f''(x)>0$ 在 $x>0$ 时恒成立.

$f(x)=x^n$ 为 R^+上的下凸函数，故有：$f(\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots\ldots+f(x_n)}{n}$

成立，即 $(\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n})^n\le\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots\ldots+x_n^n}{n}$ 成立.

3、已知函数 $f(x)$在 x=1 附近可导，且 $f(x)>0$，$f'(1)=1$.又 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(1+x)-\ln 2}{x}=A$ 存在，求实数 A 的值.

解：即 $\ln\frac{f(1+x)}{2}$ 是不比 x 高阶的无穷小，则有 $\ln\frac{f(1)}{2}=0$，得 $f(1)=2$.

故 $A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(1+x)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(1+x)}{f(1+x)}=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{1}{2}$.

4 、设函数 $f(x)$在区间$[0,a]$上可导，且 $|f''(x)|\le M$.又 $f(x)$满足条件：$f(a)f(0)>0$，$f(a)f(\frac{a}{2})<0$.求证：$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

证明：由条件，函数 $f(0)f(\frac{a}{2})<0$. 故由零点存在性定理，函数 $f(x)$在区间$(0,\frac{a}{2})$和$(\frac{a}{2},a)$上分别有一个零点 m,n.故由 *Rolle* 定理，存在区间$[m,n]$上的一点 t，使得 $f'(t)=0$.

而由 *Taylor* 展开式，有：$f'(0)=f'(t)+tf''(\eta_1)=tf''(\eta_1), f'(a)=f'(t)+(a-t)f''(\eta_2)=(a-t)f''(\eta_2)$.

故 $|f'(0)|+|f'(a)|=|tf''(\eta_1)|+|(a-t)f''(\eta_1)|\le Ma$（其中 $\eta_1\in(0,t),\eta_2\in(t,a)$）.

2010 级

1、求以下极限：（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}(m,n\in N_+)$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan ax}{\ln\tan bx}(a,b\in R^+)$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{m-n}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan ax}{\ln\tan bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sec^2 ax\tan bx}{b\sec^2 bx\tan ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan bx}{b\tan ax}=1$.

2、已知数列$\{x_n\}$为正数数列，n>1.求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\ln x_k\geq(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k)\ln\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}$.

证明：即证明$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\ln x_k}{n}\geq(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n})\ln\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}$.

考虑函数$f(x)=x\ln x(x>0)$,知有$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$，故其为下凸函数，故有：

$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)}{n}\geq f(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n})$，即$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\ln x_k}{n}\geq(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n})\ln\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}$.

3、设在函数$f(x)$区间[0,1]上连续，在区间(0,1)内可导，$f(0)$=0. 求证：在区间(0,1)内存在一点ξ，使得$\xi f'(\xi)+3f(\xi)=f'(\xi)$.

证明：考虑$g(x)=3(x-1)f^{\frac{1}{3}}(x)$，其在区间[0,1]上连续，在区间(0,1)内可导，故由 *Rolle* 定理，

在区间(0,1)内存在一点ξ，使得：$(\xi-1)f'(\xi)f^{-\frac{2}{3}}(\xi)+3f^{\frac{1}{3}}(\xi)=g'(\xi)=0$，

即$(\xi-1)f'(\xi)+3f(\xi)=0$，即$\xi f'(\xi)+3f(\xi)=f'(\xi)$.

4、设函数$f(x)$在区间(a,b)上连续，且$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=+\infty$，试证明：$f(x)$在区间$(a,b)$内必可取得最小值.

证明：由$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=+\infty$，知存在$x_1\in[a,\dfrac{a+b}{2}]$使得$x_1>x>a$时，总有

$f(x)>f(\dfrac{a+b}{2})$；存在$x_2\in[\dfrac{a+b}{2},b]$使得$b>x>x_2$时，总有$f(x)>f(\dfrac{a+b}{2})$.

考虑闭区间$[x_1,x_2]$，函数$f(x)$在此区间连续，故有闭区间上连续函数的最值定理知其在此区间存在一点x_0，满足：$f(x)\geq f(x_0),\forall x\in[x_1,x_2]$.而易知$f(x)\geq f(x_0),\forall x\in(a,b)-[x_1,x_2]$.

故$f(x)\geq f(x_0),\forall x\in(a,b)$，即$f(x)$在区间$(a,b)$内取得最小值.

5、设函数$f(x)$在 x_0 的某邻域有 $n-1$ 阶导数，在 x_0 处有 n 阶导数，并且 $f^{(k)}(x_0)=0$，

$(k=1,2,\ldots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$.求证：

（1）当 n 为偶数时，$f(x)$有极值；
（2）当 n 为奇数时，$f(x)$在点 x_0 处无极值.

证明：由条件及 *Taylor* 展开式，在 x0 的某邻域有 $f(x)=f(x_0)+(x-x_0)^n o(1)$，$o(1)\neq 0$.

故在此邻域内有 $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n o(1)$，不妨设$o(1)>0$.

（1）此时在 x_0 的邻域中，$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n o(1)>0$ 总成立，即 $f(x)>f(x_0)$ 总成立，

故 x_0 为$f(x)$的一个极小值点.

（2）此时在 x_0 的左邻域中，$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n o(1)<0$ 成立；此时在 x_0 的右邻域中，

$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n o(1)>0$ 成立，故 x_0 不为$f(x)$的一个极值点.

6、设函数$f(x)$在 R 上有定义，且 $f'(0)$ 存在，且 $f(2x)=2f(x)+x^2$，求函数$f(x)$的表达式.

解：由条件 $f(2x)-(\sqrt{2}x)^2=2[f(x)-(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2]$.故若设 $g(x)=f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$，则：
$g'(0)$ 存在，且 $g(2x)=2g(x)$.由此易知，$g(0)=2g(0)$，从而 $g(0)=0$.

故有 $g(x)=2^n g(\frac{x}{2^n})=\dfrac{g(\frac{x}{2^n})-0}{\frac{1}{2^n}-0}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(\frac{x}{2^n})-0}{\frac{1}{2^n}-0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h-0}=g'(0)$.

又 $g(0)=0$，故 $g(x)=g'(0)=0$，故 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$.

2011 级

1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n^2)^{\frac{2}{a_n}}$，其中 $a_n\neq 0(n\in N_+)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n^2)^{\frac{2}{a_n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+a_n^2)^{\frac{2}{a_n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{a_n}\ln(1+a_n^2)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{a_n}\cdot a_n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}2a_n}=e^0=1$

2、求下列极限：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-\cos x+\ln(1+x)}{\sin x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-\cos x+\ln(1+x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\ln 3+\sin x+\dfrac{1}{1+x}}{\cos x}=\ln 3+1$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4))-\cos x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4))^2-1+\dfrac{1}{2}x^2}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}(x^2-\dfrac{x^4}{3}+o(x^4))+\dfrac{1}{2}x^2}{x^4}==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{1}{6}$.

3、按要求求下列函数的导数：

（1）一阶导数，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin 2x+\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$；

（2）20 阶导数，函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{ax},a>0;$

（3）2011 阶导数，函数 $f(x)=x^3\ln x;$

（4）一阶和二阶导数，函数 $f(x)$ 由参数方程 $x=t-\arctan t, y=\ln(1-t^2)$ 来确定.

解：（1）$f'(x)=\mathrm{e}^x\sin 2x+2\mathrm{e}^x\cos 2x+2x[\ln(1+\dfrac{1}{x^2})-\dfrac{1}{1+x^2}](1+\dfrac{1}{x^2})^{x^2}$.

（2）由 *Leibniz* 定理 $f^{(20)}(x)=(x^2\mathrm{e}^{ax})^{(20)}=\sum\limits_{k=0}^{20}C_{20}^k(x^2)^{(k)}(\mathrm{e}^{ax})^{(20-k)}=$

$C_{20}^0(x^2)(\mathrm{e}^{ax})^{(20)}+C_{20}^1(x^2)^{(1)}(\mathrm{e}^{ax})^{(19)}+C_{20}^2(x^2)^{(2)}(\mathrm{e}^{ax})^{(18)}=$

$a^{20}x^2\mathrm{e}^{ax}+40a^{19}x\mathrm{e}^{ax}+280a^{18}\mathrm{e}^{ax}$.

（3）由 *Leibniz* 定理 $f^{(2011)}(x)=(x^3\ln x)^{(2011)}=\sum\limits_{k=0}^{2011}C_{2011}^k(x^3)^{(k)}(\ln x)^{(2011-k)}=$

$C_{2011}^0(x^3)(\ln x)^{(2011)}+C_{2011}^1(x^3)^{(1)}(\ln x)^{(2010)}+C_{2011}^2(x^3)^{(2)}(\ln x)^{(2009)}+C_{2011}^3(x^3)^{(3)}(\ln x)^{(2008)}=$

$\dfrac{1}{2011!x^{2008}}-\dfrac{6022}{2010!x^{2008}}+\dfrac{12126330}{2009!x^{2008}}-\dfrac{8120598990}{2008!x^{2008}}$.

.

（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{2t}{t^2-1}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+t^2}}=\dfrac{2(1+t^2)}{t(t^2-1)}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{4t^2(t^2-1)-2(3t^2-1)(1+t^2)}{t^2(t^2-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+t^2}}=\frac{4t^2(t^2-1)(1+t^2)-2(3t^2-1)(1+t^2)^2}{t^4(t^2-1)^2}.$$

4、已知 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的导函数在 x=0 处连续，确定 α 的取值范围.

解：即极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 存在（函数 $f(x)$在 0 处可导），且由连续性其值应等于 $\lim\limits_{x\to 0}f'_{x\neq 0}(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x})$． 由 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 存在知 $\alpha>1$，此时 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$，故应有 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}=0$，则应满足 $\alpha>2$，综上应有 $\alpha>2$.

5、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 可导，且 $f'(x)\geq c>0$（c 为常数），求证：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$；

（2） $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 有最小值.

证明：（1）由条件：当 x>0 时，$\int[f'(x)-c]dx\geq 0$，即 $f(x)\geq cx+C$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

（2）由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，知存在 $\xi>a$ 使得任意 $\xi>a$， $f(x)>f(\xi)$.

又在闭区间$[a,\xi]$内，函数 $f(x)$ 连续，故由闭区间内连续函数的最值定理知,存在一点 x_0，使得： $f(x)\geq f(x_0),\forall x\in[a,\xi]$，而又 $f(x)>f(\xi)\geq f(x_0),\forall x\in(\xi,+\infty)$，故有：

$f(x)\geq f(x_0),\forall x\in[a,+\infty)$，即 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 有最小值.

6、已知函数 $f(x)=\cos x$.求证：

（1）存在区间(0,1)上的常数 c，使得 $f(c)=c$；

（2）对任意一个在区间(0,1)上的 x_1．令 $x_{n+1}=f(x_n),(n\in N_+)$.

那么，存在 $q\in(0,1)$，使得：$|x_{n+1}-c|\leq q|x_n-c|,(n\in N_+)$;

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

证明：（1）研究函数 $g(x)=\cos x-x$，有 $g'(x)=-\sin-1<0$，又 $g(0)g(1)=1\cdot(\cos 1-1)<0$，故存在区间(0,1)上的唯一常数 c，使得 $f(c)=c$.

（2）对任意正整数 n，有：$|x_{n+1}-c|=|\cos x_n-\cos c|=2|\sin\dfrac{x_n+c}{2}\sin\dfrac{x_n-c}{2}|\leq\sin\dfrac{x_n+c}{2}|x_n-c|$

$\leq\sin\dfrac{1+c}{2}|x_n-c|$.而 $\sin\dfrac{1+c}{2}<\sin 1<1$，故命题得证.

（3）由（2）知 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-c|=\lim\limits_{n\to\infty}q^{n-1}|x_1-c|=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

7、已知函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续且三阶可微，求证：存在$\xi\in(a,b)$，

使得：$f(b)=f(a)+\dfrac{(b-a)}{2}[f'(a)+f'(b)]-\dfrac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi).$

证明：考虑函数$g_1(x)=f(a)-f(x)+\dfrac{1}{2}(x-a)[f'(a)+f'(x)]$, $h_1(x)=\dfrac{1}{12}(x-a)^3$,则函数$g_1(x)$和函数$h_1(x)$在区间$[a,b]$上都连续且可微，故由*Cauchy*中值定理，存在$a<\eta<b$，使得：

$$\frac{g_1'(\eta)}{h_1'(\eta)}=\frac{f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-0}{\frac{1}{12}(b-a)^3-0}=\frac{f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]}{\frac{1}{12}(b-a)^3}.$$

即$$\frac{-f(\eta)+\frac{1}{2}[f'(a)+f'(\eta_1)]+\frac{1}{2}(\eta-a)f''(\eta)}{\frac{1}{4}(\eta-a)^2}=\frac{f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]}{\frac{1}{12}(b-a)^3}.$$

考虑函数$g_2(x)=-f(x)+\dfrac{1}{2}[f'(a)+f'(x)]+\dfrac{1}{2}(x-a)f''(x)$, $h_2(x)=\dfrac{1}{4}(x-a)^2$,则函数$g_2(x)$和函数$h_2(x)$在区间$[a,b]$上都连续且可微，故由*Cauchy*中值定理，存在$a<\xi<\eta$，使得：

$$\frac{g_2'(\xi)}{h_2'(\xi)}=\frac{-f(\eta)+\frac{1}{2}[f'(a)+f'(\eta_1)]+\frac{1}{2}(\eta-a)f''(\eta)-0}{\frac{1}{4}(\eta-a)^2-0}=\frac{-f(\eta)+\frac{1}{2}[f'(a)+f'(\eta_1)]+\frac{1}{2}(\eta-a)f''(\eta)}{\frac{1}{4}(\eta-a)^2}.$$

$$f'''(\xi)=\frac{\frac{1}{2}(\xi-a)f'''(\xi)}{\frac{1}{2}(\xi-a)}=\frac{-f(\eta)+\frac{1}{2}[f'(a)+f'(\eta_1)]+\frac{1}{2}(\eta-a)f''(\eta)}{\frac{1}{4}(\eta-a)^2}.$$

即

故$f'''(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]}{\frac{1}{12}(b-a)^3}$，其中$a<\xi<b.$易知原命题得证.