2018—2019 学年第 1 学期《数学分析I》期中考试试题

2018年11月26日

总分	一	二	三	四	五

得　分

一、(共 10 分) 叙述并证明 Heine 定理

得　分

二、(共 16 分, 每题 8 分) 用 $\varepsilon - N$ 或 $\varepsilon - \delta$ 语言证明下列极限

1. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{n^2 - n + 1}{2n^2 - n - 10} = \dfrac{1}{2}$;

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 2}{3x^2 - 1} = \dfrac{3}{2}$.

得　分

三、(共 20 分, 每题 5 分) 计算下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+5^n+9^n)^{\frac{1}{2n+1}}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3k+2}$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln \frac{2x+3}{2x}}{\sin \frac{1}{x}}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cos \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

得　分

四、(共 30 分, 每题 10 分) 简答题

1. 设 $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求出极限值;

2. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 判断数列 $\{x_n\}$ 的敛散性并给出证明;

3. 设 w, v 为两个常数, 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{x+w}, & x<-2; \\ \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} 3^n \sin\dfrac{x}{3^n}, & |x|\le 2; \\ \ln x+v, & x>2, \end{cases}$$

在点 -2 和 2 处的性质. 若连续, 给出 w, v 满足的条件, 若间断, 给出条件并说明间断点类型.

得 分

五、(共 24 分, 每题 8 分) 证明题

1. 设$f(x)$ 在(a,b)上连续. 如果$x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为任意n个正数. 证明: 存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(\xi) = \frac{\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n};$$

2. 证明函数 $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $(2, +\infty)$ 上一致连续;

3. 设α, β, γ 是常数. 证明以下结论:

(1) $\lim_{n\to\infty} \sin(n\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$是$\pi$ 的整数倍;

(2) $\lim_{n\to\infty} \sin(n\alpha)\sin(n\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ 和β 中至少有一个是π 的整数倍;

(3) $\lim_{n\to\infty} \sin(n\alpha)\sin(n\beta)\sin(n\gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ 中至少有一个是π 的整数倍.