第 10 讲：Cauchy 积分公式的应用，2019.3.26

1. (Liouville 定理的一般形式)　假设 f 是整函数, 满足

$$|f(z)| \le C(1+|z|^m), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

证明 f 是次数不超过 m 的多项式.

2. (Liouville 定理：另一个观点的证明) 按如下思路，给出 Liouville 定理的又一证明.

(1). 证明对任意 $\zeta \in \mathbb{C}$, 以及 $r > 0$, 成立平均值公式

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(\zeta, r)} f(z)dxdy.$$

(2). 证明对任意 $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$,

$$|f(z_0) - f(w_0)| \le \frac{\|f\|_{\mathbb{C}}}{\pi r^2} \mathrm{area}(D(z_0, r)\Delta D(w_0, r)),$$

这里, $E\Delta F$ 表示两个集合的对称差，定义为

$$E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

由此你能否完成证明？

3. (Liouville 第一定理)　假设 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯, 称它是双周期的, 如果满足

$$f(z+1) = f(z), \ f(z+\tau) = f(z), \forall z \in \mathbb{C},$$

这里 τ 为虚部不为零的复数. 证明双周期全纯函数必为常数. 这个结论被称为 Liouville 第一定理.

4. 课堂上给出了代数学基本定理的两种证明, 现在利用 Cauchy 积分定理, 按照如下思路证明给出第三种证明: 假设 $P(z)$ 为多项式, 定义 $Q(z) = \overline{P(\overline{z})}$. 对于 $\rho > 0$, 令 $C_\rho = \{\rho e^{it}; t \in [0, \pi]\}$. 证明

$$P(z)\text{没有零点} \Longrightarrow \int_{-\rho}^{\rho} \frac{dx}{|P(x)|^2} + \int_{C_\rho} \frac{dz}{P(z)Q(z)} = 0$$

由此, 你能得到什么矛盾?

5. (附加题：不做要求)　一些定理的证明散发着水晶般的光辉，彷佛来自星星. 它如逻辑的诗篇，给人启发. 在理解体会一些定理的证明思想后，你能否给出某些定理的一些基于新观点的证明？请发送至 wxg688@163.com, 无截至日期.