第九章　定积分

§1　定积分概念

1. 按定积分定义证明：$\int_a^b k\mathrm{d}x = k(b-a)$

证　(1) 设 $\varepsilon > 0$，对 $[a,b]$ 的任一分割

$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

属于 T 的所有积分和

$$\sum_f(T) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(b-a)$$

从而

$$\left| \sum_f(T) - k(b-a) \right| = | k(b-a) - k(b-a) | = 0 < \varepsilon$$

据定积分定义知 $\int k\mathrm{d}x = k(b-a)$

2. 通过对积分区间作等分分割，并取适当的点集 $\{\varepsilon_i\}$，把定积分看作是对应的积分和的极限，来计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；提示：$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(2) $\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$；　　(3) $\int_a^b e^x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}(0 < a < b)$. (提示：$\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$)

解　(1) $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \frac{1}{4}$

(2) 即为下面 (3) 中 $a = b = 0$ 情形.

(3) 对 $[a,b]$ 的任意一个分割 T，由微分学中值定理知：在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上存在 ξ_i^0，使

$$e^{\xi_i^0}\triangle x_i = e^{x_i} - e^{x_{i-1}}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i^0}\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n}(e^{x_i} - e^{x_{i-1}} = e^b - e^a$$

对属于分割 T 的所有积分和 $\sum_f(T)$，都有

$$| \sum_f(T) - (e^b - e^a) |$$

$$= | \sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i}\triangle x_i - \sum_{i=1}^{n} e^{\xi^0}\triangle x_i |$$

$$= | \sum_{i=1}^{n} e^{\eta_i}(\xi_i - \xi^0)\triangle x_i |\ (\eta_i \text{ 在 } \xi_i \text{ 与 } \xi_i^0 \text{ 之间})$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} e^{\eta_i} \| T \| \triangle x_i$$

$$= \| T \| e^b(b - a)$$

故对任给 $\varepsilon > 0$，取 $\delta < \frac{\varepsilon}{e^b(b-a)}$，对 $[a,b]$ 上的任意分割 T，当 $\| T \| < \delta$，便有 $| \sum_f(T) - (e^b - e^a) | < \varepsilon$，所以

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

(4) 对 $[a,b]$ 上的任意一个分割 T：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

取 $\xi_i^0 = \sqrt{x_{i-1}x_i}, i = 1,\cdots,n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i^{0^2}} \cdot \triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}x_i} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

从而对属于分割 T 的所有积分和，都有

$$| \sum_f(T) - (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) |$$

$$= | \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i^2}\triangle x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i^{0^2}}\triangle x_i |$$

$= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i^2(\xi_i - \xi_i^0)} \triangle x_i \right|$ (η_i 位于 ξ_i 与 ξ_i^0 之间)

$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\eta_i^2} \| T \| \triangle x_i \leqslant \frac{1}{a^2} \| T \| (b - a)$

故对任给 $\varepsilon > 0$,取 $\delta < \frac{\varepsilon a^2}{b - a}$,对$[a,b]$上的任意分割 T,当 $\| T \| < \delta$ 时,便有 $\left| \sum_f(T) - (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) \right| < \varepsilon$,所以

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

§2　牛顿一莱布尼兹公式

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 (2x + 3) dx$;　　(2) $\int_0^1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx$;

(3) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$;　　(4) $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx$;　　(6) $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$;

(7) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$;　　(8) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$.

1. 解　(1) 原式 $= (x^2 + 3x) \big|_0^1 = 4$

(2) 原式 $= \int_0^1 (-1 + \frac{2}{1 + x^2}) dx = (-x + 2\arctan x) \big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$

(3) 原式 $= \ln \ln x \big|_e^{e^2} = \ln 2$

(4) 原式 $= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \big|_0^1 = \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e} - 2)$

(5) 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x - 1) dx = (\tan x - x) \big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

(6) 原式 $= (\frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{x} \Big|_4^9 = \frac{44}{3}$

(7) 令 $x=t^2$,则原式 $=\int_0^2 \frac{2t}{1+t}dt=2\int_0^1(1-\frac{1}{1+t})dt$

$=2(t-ln|1+t|)|_0^2=4-2ln^3$

(8) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}(lnx)^2dx=\frac{1}{3}(lnx)^3\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}=\frac{2}{3}$

2. 利用定积分求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+\cdots+n^3)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)2}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(sin\frac{\pi}{n}+sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

2. 解　(1) 令 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^3}\cdot\frac{1}{n}$,可以看出这和式是函数 x^3 在区间[0,1]上的一个积分和,所以

$$J=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+1)^2}]$

$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=-\frac{1}{1+x}|_0^1=\frac{1}{2}$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(\frac{n}{n})^2}]$

$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

(4) 原式 $=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}(sin\frac{0\cdot\pi}{n}+sin\frac{\pi}{n}+\cdots+sin\frac{n-1}{n}\pi)$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}sinxdx=\frac{2}{\pi}$

§3　可积条件

1. 证明：若 T' 是 T 增加若干个分点后所得的分割，则

$$\sum_{T'}\omega_i'\triangle x_i' \leqslant \sum_{T}\omega_i\triangle x_i$$

证　由性质 2，$S(T')\leqslant S(T)$，$S(T')\geqslant S(T)$，

从而　$S(T')-S(T')\leqslant S(T)-S(T)$

即　$\sum\limits_{T'}\omega_i\triangle x_i' \leqslant \sum\limits_{T}\omega_i\triangle x_i$

2. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，则 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积.

证　由定理 9.3，因 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，显然.

3. 设 f,g 均为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数. 证明：若仅在 $[a,b]$ 中有限个点处 $f(x)\neq g(x)$，则当 f 在 $[a,b]$ 上可积时，g 在 $[a,b]$ 上也可积，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

证　设 $F=g-f$，则 F 是 $[a,b]$ 上只有有限个点处不为零的函数，由定理 9.5，F 在 $[a,b]$ 上可积，且对 $[a,b]$ 上任何分割 T，取每个 $\triangle_i$ 上的介点 ξ_i，使 $F(\xi_i)=0$，就有

$$\sum F(\xi_i)\triangle x_i=0$$

由 F 在 $[a,b]$ 上的可积性，知

$$\int_a^b F=\lim_{\|T\|\to 0}\sum F(\xi_i)\triangle x_i=0$$

又对任意 T，和每个 $\triangle_i$ 上的任意一点 ξ_i'

$$\begin{aligned}\sum g(\xi_i')\triangle x_i &= \sum(g(\xi_i')-f(\xi_i'))\triangle x_i+\sum f(\xi_i')\triangle x_i\\ &= \sum F(\xi_i')\triangle x_i+\sum f(\xi_i')\triangle x_i\end{aligned}$$

由 F,f 在 $[a,b]$ 上可积，令 $\|T\|\to 0$，右端两式极限都存在，从而左端极限也存在，故 g 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b g=\int_a^b F+\int_a^b f=\int_a^b f$$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上有界，$\{a_n\} \subset [a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上只有 $a_n(n = 1,2,\cdots)$ 为其间断点，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证　设 $c \in (a,b)$，f 在 $[a,b]$ 上的振幅为 ω，任给 $\varepsilon > 0(\frac{\varepsilon}{4\omega} < \min\{c-a,b-c\})$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ 知存在 N，使得 $n > N$ 时，$a_n \in U(c,\frac{\varepsilon}{4\omega})$，从而在 $[a,c-\frac{\varepsilon}{4\omega}] \cup [c+\frac{\varepsilon}{4\omega},b]$ 上至多只有有限个间断点. 由定理 9.5,9.3′ 知：存在 $[a,c-\frac{\varepsilon}{4\omega}]$，$[\varepsilon+\frac{\varepsilon}{4\omega}b]$ 上的分割 T'，T'' 使得

$$\sum_{T'} \omega_i' \triangle x_i' < \frac{\varepsilon}{4}, \sum_{T''} \omega_i'' \triangle x_i'' < \frac{\varepsilon}{4}$$

记 T 为 T'，T'' 的分点并添上点 $c-\frac{\varepsilon}{4\omega}$，$c+\frac{\varepsilon}{4\omega}$ 作成的 $[a,b]$ 上的分割，则有

$$\sum_{T} \omega_i \triangle x_i \leqslant \sum_{T'} \omega_i' \triangle x_i' + \omega(c+\frac{\varepsilon}{4\omega} - c + \frac{\varepsilon}{4\omega}) + \sum_{T''} \omega_i'' \triangle x_i''$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2\omega} \cdot \omega + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

由定理 9.3′ 知：f 在 $[a,b]$ 上可积.

5. 证明：若 f 在区间 $\triangle$ 上有界，则

$$\sup_{x\in\triangle} f(x) - \inf_{x\in\triangle} f(x) = \sup_{x',x''\in\triangle} |f(x') - f(x'')|.$$

§4　定积分的性质

1. 证明：若 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\eta_i) \triangle x_i = \int_a^b f \cdot g$$

其中 ξ_i，η_i 是 $\triangle_i$ 内的任意两点. $T = \{\triangle_i\}$，$i = 1,2,\cdots,n$.

证　f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积，由定理 9.1 知 f，g 在 $[a,b]$ 上有界，且 fg 在 $[a,b]$ 上可积，设 $|f(x)| < M$，$x \in [a,b]$，则对 $[a,b]$ 上任意分割 T，有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\triangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(\xi_i)+g(\eta_i)-g(\xi_i))\triangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\omega_i^g\triangle x_i$$

所以 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\triangle x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i\right| \leqslant M\sum_{i=1}^{n}\omega_i^g\triangle x_i$

令 $\|T\| \to 0$,右端极限为 0,从而

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\omega_i)g(\eta_i)\triangle x_i = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i = \int_a^b fg$$

2. 不求出定积分的值,比较下列各对定积分的大小:

(1) $\int_0^1 x dx$ 与 $\int_0^1 x^2 dx$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

解　(1) 因为在 $(0,1)$ 上,$x^2 < x$,所以

$$\int_0^1 x^2 dx < \int_0^1 x dx$$

(2) 因为在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上 $\sin x < x$,所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$$

3. 证明下列不等式:

(1) $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$;　　(2) $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$;

(3) $1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2}$　　(4) $3\sqrt{e} < \int_e^{4e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx < 6$

证　(1) 因为 $1 < \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}, x \in (0,\frac{\pi}{2})$. 所以

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2x}}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(2) 因为 $1=e^0<e^{x^2}<e^1=e, x\in(0,1)$. 故

$$1=\int_0^1 1dx<\int_0^1 e^{x^2}dx<\int_0^1 edx=e$$

(3) 由于　$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1, x\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以

$$1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

(4) 令$(\frac{\ln x}{\sqrt{x}})'=\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}=0$,得$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$在$[e,4e]$上驻点 $x=e^2$,又 $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\Big|_{x=e}=\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\Big|_{x=4e}=\frac{\ln 4e}{2\sqrt{e}}$,所以在$(e,4e)$上

$$\frac{1}{\sqrt{e}}<\frac{\ln x}{\sqrt{x}}<\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}$$

从而　$3\sqrt{e}=\int_e^{4e}\frac{1}{\sqrt{e}}dx<\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx<\int_e^{4e}\frac{2}{e}dx=6$

4. 设 f 在$[a,b]$上连续,且 $f(x)$ 不恒等于零,证明$\int_a^b(f(x))^2dx>0$.

证　由 f 在$[a,b]$上连续,且 $f(x)$ 不恒等于零,则必 ∃ 点 $x_0\in[a,b]$,使 $f(x_0)\neq 0$,则由 f 的连续性,知存在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$使在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上 $f(x)\neq 0$

则$\int_a^b(f(x))^2dx=\int_a^{x_0-\delta}f^2+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2+\int_{x_0+\delta}^b f^2=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2+0>0$

注:若 x_0 为 a 或 b,可取单侧邻域.

5. 设 f 与 g 都在$[a,b]$上可积,证明

$M(x)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}, m(x)=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$

在$[a,b]$上也都可积.

证　由于 $f(x),g(x)$ 可积,$f(x)\pm g(x)$ 在$[a,b]$上也可积,由上 |

$|f(x) \pm g(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积,又

$$M(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

$$m(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

且可积函数的和,差,数乘仍可积,所以 $M(x), m(x)$ 在 $[a,b]$ 上均可积.

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积,且在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)| \geqslant m > 0$. 证明 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

证　因 f 可积,对任给 $\varepsilon > 0$,必存在某一分割 T,使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \triangle x_i < m^2\varepsilon$. 设 x', x'' 是属于分割 T 的小区间 $\triangle_i$ 上的任意两点,则

$$\frac{1}{f(x'')} - \frac{1}{f(x')} = \frac{f(x') - f(x'')}{f(x')f(x'')}$$

用 ω_i' 表示 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $\triangle_i$ 上的振幅,则有 $\omega_i' \leqslant \frac{\omega_i}{m^2}$ 所以

$$\sum_T \omega_i' \triangle x_i \leqslant \frac{1}{m^2} \sum_T \omega_i \triangle x_i < \frac{1}{m^2} \cdot m^2\varepsilon = \varepsilon$$

故 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

8. 进一步证明积分第一中值定理(包括定理 9.7 和定理 9.8) 中的中值点 $\xi \in (a,b)$.

证　若 $m = M$,则 $f(x) \equiv m, x \in [a,b]$,则 ξ 可取为 $[a,b]$ 上任意一点. 若 $m < M$,此时必有

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

若上述不等式任意一个取等号,例如若 $m(b-a) = \int_a^b f(x)dx$,则 $\int_a^b (f(x) - m)dx = 0$,而 $f(x) - m \geqslant 0$,必有 $f(x) \equiv m$,对 $x \in [a,b]$,矛盾. 故 $\xi \in (a,b)$.

9. 证明:若 f 与 g 都在[a,b]上可积,且 g(x) 在[a,b]上不变号,M、m 分别为 f(x) 在[a,b]上的上、下确界,则必存在某实数 $\mu(m\leqslant\mu\leqslant M)$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx.$$

证 不妨设 $g(x)>0$($g(x)<0$ 情形类似) 因在[a,b]上,$m\leqslant f(x)\leqslant M$,从而

$$m\int_a^b g(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

则

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leqslant M$$

故必存在 $\mu\in[m,M]$,使 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$

10. 证明:若 f 在[a,b]上连续,且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xf(x)dx=0$,则在 (a,b) 内至少存在两点 x_1、x_2,使 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 又若 $\int_a^b x^2f(x)dx=0$,这时 f 在(a,b)内是否至少有三个零点?

证 由 $\int_a^b f=0$ 知,f 在(a,b)内存在零点,设在(a,b)内只有一点 x_1,使 $f(x_1)=0$,则由

$$\int_a^b f=\int_a^{x_1}f+\int_{x_1}^b f$$

可得

$$\int_a^{x_1}f=-\int_{x_1}^b f\neq 0$$

又因 f 在$[a,x_1]$与$[x_1,b]$每个区间内不变号,故由推广的积分第一中值定理

$$\int_a^b xf = \int_a^{x_1} xf + \int_{x_1}^b xf$$
$$= \xi_1\int_a^{x_1} f + \xi_2\int_{x_1}^b f \quad (a < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < b)$$
$$= (\xi_2 - \xi_1)\int_{x_1}^b f \neq 0$$

与题设矛盾，故在 (a,b) 内至少存在两点 x_1, x_2 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

11. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x) > 0$. 证明：

(1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$;

(2) 又若 $f(x) \leqslant 0, x \in [a,b]$，则又有

$$f(x) \geqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx, x \in [a,b].$$

证　(1) 此时 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数. 令 $x = a + \lambda(b-a), \lambda \in (0,1)$，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f[a + \lambda(b-a)]d\lambda \tag{1}$$

同理，令　$x = b - \lambda(b-a)$，亦有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f[b - \lambda(b-a)]d\lambda,$$

从而

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (f[a + \lambda(b-a)] + f[b - \lambda(b-a)])d\lambda \tag{2}$$

注意　$a + \lambda(b-a)$ 与 $b - \lambda(b-a)$ 关于中点 $\frac{b+a}{2}$ 对称，由 $f(x)$ 是凸函数，有

$$\frac{1}{2}(f[a + \lambda(b-a)]) + f(b - \lambda(b-a)) \geqslant f(\frac{a+b}{2})$$

故由(2)知　$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geqslant f(\frac{a+b}{2})$

(2) 应用 $f(x)$ 的凸性和上述验证，且 $f(x) \leqslant 0$，则对 $\forall x \in [a,$

$b]$,有

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 f[\lambda b+(1-\lambda)a]d\lambda$$

$$\leqslant\int_0^1[\lambda f(b)+(1-\lambda)f(a)]d\lambda$$

$$= f(b)\ \frac{\lambda^2}{2}\ |_0^1+f(a)\ \frac{(1-\lambda)^2}{2}(-1)\ |_0^1=$$

$\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant f(x)$

从而得证.

12. 证明:

(1) $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.

证 (1) 考察函数 $f(x)=\frac{1}{x}$,在$[1,n+1]$取 $\triangle x_i=1$ 作分割,并取 $\triangle x_i$ 的左端点作为ξ_i,则和数$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ 为一个上和,故有

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

即

$$\ln n(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

同样在$[1,n]$上取 $\triangle x_i=1$ 作分割,并取 $\triangle x_i$ 的右端点作为ξ_i,则和数$\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}$ 为一个下和,故有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}<\int_1^n\frac{1}{x}dx=\ln n$$

即 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

(2) 由(1) 知

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}<\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}<1+\frac{1}{\ln n}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\ln n})=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

§5　微积分学基本定理·定积分计算

1. 设 f 为连续函数,u,v 均为可导函数,且可实行复合 $f\circ u$ 与 $f\circ v$. 证明:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt=f(v(x))v'(x)-f(u(x))u'(x).$$

证　取 $f(x)$ 定义域内一点 a,则

$$\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt=\int_a^{v(x)}f(t)dt-\int_a^{u(x)}f(t)dt$$

令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$,则

$$\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt=\Phi(v(x))-\Phi(u(x))$$

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)dt=\frac{d}{dx}\Phi[v(x)]-\frac{d}{dx}\Phi[u(x)]$$

$$=f(v(x)]v'(x)-f[u(x)]u'(x)$$

2. 设 f 在$[a,b]$上连续,$F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)dt$. 证明 $F''(x)=f(x),x\in[a,b]$.

证　因 $F(x)=\int_a^x xf(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

$$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$$

从而　$F'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$,故

$$F''(x) = f(x)$$

3．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$

解　利用洛比达法则

(1) 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\cos x^2 = 1$

(2) 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{2x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0$

4．计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2x dx$；　　(2) $\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$；

(3) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\,(a>0)$；　　(4) $\int_0^1\dfrac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}}$；

(5) $\int_0^1\dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$；

(7) $\int_0^1\arcsin x dx$；　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x dx$；

(9) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$；　　(10) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$；

(11) $\int_0^a x^2\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx\,(a>0)$；　　(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$.

解　(1) 原式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin x dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x d\cos x = \dfrac{2}{7}$

(2) 原式 $= \left(\dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\dfrac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$

(3) 令 $x = a\sin t$，则

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt$$

$$= \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt$$

$$= \frac{a^4}{8}(t - \frac{1}{4}\sin 4t)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4 \pi}{16}$$

(4) $原式 = \int_0^1 \frac{dx}{[(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^{\frac{3}{2}}}$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{dx}{[(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2 + 1]^{\frac{3}{2}}}$$

令$(2x-1)/\sqrt{3} = \tan t$,则 $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t dt$,故

$$原式 = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sec^2 t dt}{2[\sec^2 t]^{\frac{3}{2}}} = 4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sec t} = \frac{4}{3}$$

(5) $原式 = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \arctan e^x \mid_0^1 = \arctan 3 - \frac{\pi}{4}$

(6) $原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin x}{1 + \sin^2 x} = \arctan(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

(7) $原式 = x\arcsin x \mid_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sqrt{1 - x^2} \mid_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

(8) $原式 = e^x \sin x \mid_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - e^x \cos x \mid_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

故$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$

(9) 原式 $= \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\ln x dx + \int_{1}^{3} \ln x dx$

$= -(x\ln x - x)\,|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\,|_{1}^{e} = 2(1 - e^{-1})$

(10) 令 $x = t^2$,则

原式 $= 2\int_0^1 te^2 dt = 2(te^t\,|_0^1 - \int_0^1 e^t dt)$

$= 2(e - e^t\,|_0^1) = 2$

(11) 原式 $= \int_0^a \frac{x^2(a-x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

令 $x = a\sin t$,则

原式 $= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t(1 - \sin t) dt$

$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 t) d\cos t$

$= a^3(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4})\,|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}a^3 = (\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3})a^3$

(12) 令 $t = \tan\frac{x}{2}$,则

原式 $= 2\int_0^1 \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)(2t + 1 - t^2)} dt$

$= \int_0^1 (\frac{t+1}{2t + 1 - t^2} - \frac{t-1}{1 + t^2}) dt$

$= \frac{1}{2}\ln|2t + 1 - t^2|\,|_0^1 - [\frac{1}{2}\ln|1 + t^2| - \arctan t]_0^1$

$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

5. 设 f 在 $[-a, a]$ 上可积. 证明:

(1) 若 f 为奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

(2) 若 f 为奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

证　由 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^{0} f(x)dx$

在右边第二个积分中令 $x=-t$,则

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{0}f(-t)d(-t)$$

$$=\int_{0}^{a}(f(x)+f(-x))dx$$

(1) 若 f 为奇函数,则 $f(x)=-f(-x)$,故

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$$

(2) 若 f 为偶函数,则 $f(x)=f(-x)$,故

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

6. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 p 为周期的连续周期函数.证明对任何实数 a,恒有

$$\int_{a}^{a+p}f(x)dx=\int_{0}^{p}f(x)dx.$$

证:$\int_{a}^{a+p}f(x)dx=\int_{a}^{0}f+\int_{0}^{p}f+\int_{p}^{p+a}f$,令 $t=x-p$,

则 $\int_{p}^{a+p}f=\int_{0}^{a}f(t+p)=\int_{0}^{a}f$　从而　$\int_{a}^{a+p}f=\int_{0}^{p}f$

7. 设 f 为连续函数.证明:

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$;

(2) $\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}f(\sin x)dx$.

证　(1) 令 $x=\pi-t$,则

$$\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)d(-t)$$

$$=\pi\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx-\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx$$

所以　$\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx$

8. 设 $J(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x dx$($m,n$ 为正整数).证明:

$$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)=\frac{m-1}{m+n}J(m-2,n),$$

并求 $J(2m,2n)$.

证　$J(m,n)$

$$=\frac{1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}d\sin^{m+1}x$$

$$=\frac{1}{m+1}\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-2}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+2}x\cos^{n-2}xdx$$

$$=\frac{n-1}{m+1}J(m,n-2)-\frac{n-1}{m+1}J(m,n)$$

移项,整理得

$$J(m,n)=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)$$

由此,当 n 为奇数时,

$$\begin{aligned}J(m,n)&=\frac{n-1}{m+n}J(m,n-2)\\&=\frac{(n-1)(n-3)}{(m+n)(m+n-2)}J(m,n-4)\\&=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{(m+n)(m+m-2)\cdots(m+3)}J(m,1)\end{aligned}$$

又 $J(m,1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos xdx=\frac{1}{m+1}\sin^{m+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{m+1}$

所以　$J(m,n)=\frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}$

当 n 为偶数时,同理可推出

$$J(m,n)=\frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+2)}J(m,0)$$

而 $J(m,0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}xd(-\cos x)$

$$=-\sin^{m-1}x\cos x\,|_0^{\frac{\pi}{2}}+(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cos^2 xdx$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x dx - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$$

所以　$J(m,0) = \frac{m-1}{m} J(m-2,0)$，由此当 m 是奇数时，

$$J(m,0) = \frac{(m-1)(m-3)\cdots 4\cdot 2}{m\cdot(m-2)\cdots 3\cdot 1} J(1,0) = \frac{(m-1)!!}{m!!}$$

当 n 是偶数，m 也是偶数时，同理推出

$$J(m,0) = \frac{(m-1)!!}{m!!} J(0,0) = \frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

其中

$$J(1,0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$$J(0,0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

综上所述，当 m,n 都是偶数时，$J(m,n) = \frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}$

9. 证明：若在 $(0,+\infty)$ 上 f 为连续函数，且对任何 $a>0$ 有

$$g(x) = \int_x^{ax} f(t)t \equiv 常数, x\in(0,+\infty),$$

则 $f(x) = \frac{c}{x}, x\in(0,+\infty)$，$c$ 为常数.

证　由 $g(x) = \int_x^{ax} f(t)dt \equiv$ 常数，两边同时求导.

有　$f(ax)\cdot a - f(x) = 0$. 即 $f(ax) = \frac{f(x)}{a}$　成立.

10. 设 f 为连续可微函数，试求

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f'(t)dt,$$

并用此结果求 $\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin t dt$.

解　$\int_a^x (x-t)f'(t)dt = f(t)(x-t)\mid_a^x - \int_a^x (-f(t))dt$

$$= -f(a)(x-a) + \int_a^x f(t)dt$$

则 $\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f'(t)dt = f(x)-f(a)$

从而 $\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin dt = 1-\cos x$(在上式中取 $a=0,f(x)=-\cos x$)

11. 设 $y=f(x)$ 为$[a,b]$上严格增的连续曲线(图 9—12). 试证存在 $\xi\in(a,b)$,使图中两阴影部分面积相等.

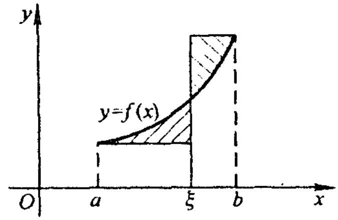

图 9—12

证　本题其实是证明 $\exists z\in[a,b]$,使

$$-\int_z^b (f(x)-f(b))dx = \int_a^z f(x)dx$$

即 $\int_a^b f(x)dx = \int_e^b f(b)dx \quad (1)$

由题意知 $f(x)$,且 $f(x)>0$,有在$[a,b]$最小值为 $f(a)$,最大值为 $f(b)$. 即 $0\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant f(b)(b-a)$ 将0看作 $f(b)(b-b)$,可见 $\exists z\in(a,b)$,使题意满足.

注:到(1)后,也可直接用定理9.11,把这里的 f 看成g,9.11中的g看成1即可.

12. 设 f 为$[0,2\pi]$上的单调递减函数. 证明:对任何正整数 n 恒有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \geqslant 0.$$

证　由$\int_0^{2\pi}\sin nxdx = k\int_0^{2\pi}\sin nxdx = 0$ 对任意 $k\in R$ 成立. 取 $k=f(2\pi)$,则在$[0,2\pi]$上由 $f(x)$ 单调递减,知 $f(x)\geqslant f(2\pi)$

则 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx - \int_0^{2\pi} f(2\pi)\sin nxdx$

$$= \int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \int_0^{2\pi}[f(x)-f(2\pi)]\sin nxdx.$$

由 $f(x)-f(2\pi)\geqslant 0$,利用积分第二中值定理,$\exists z\in[0,2\pi]$,使

$\int_0^{2\pi}[f(x)-f(2\pi)]\sin nxdx = [f(0)-f(2\pi)2]\int_0^z \sin nxdx$

$$= [f(0) - f(2\pi)]\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^z = \frac{f(0) - f(2\pi)}{n}(\cos 0 - \cos nz)$$

$$= \frac{f(0) - f(2\pi)}{n}(1 - \cos z) \geqslant 0$$

13. 证明：当 $x > 0$ 时有不等式

$$\left|\int_x^{x+c} \sin t^2 dt\right| < \frac{1}{x}(c > 0).$$

证　令 $y = t^2$，则 $t = \sqrt{y}$，且

$$\left|\int_x^{x+c} \sin t^2 dt\right| = \left|\int_{x^2}^{(x+c)^2} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy\right| \qquad ①$$

利用积分第二中值定理，存在 $z \in (x^2, (x+c)^2)$，使

$$① = \frac{1}{2x}\left|\int_{x^2}^z \sin y dy\right| < \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$$

14. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上可积，φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调且连续可微，$\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

证　参照定理 9.12.

15. 证明：若在 $[a,b]$ 上 f 为连续函数，g 为连续可微的单调函数，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

（提示：与定理 9.11 及其推论相比较，这里的条件要强得多，因此可望有一个比较简单的，不同于定理 9.11 的证明.）

证　参照定理 9.11.

总练习题

1. 证明：若 φ 在 $[0,a]$ 上连续，f 二阶可导，且 $f''(x) \geqslant 0$，则有

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt \geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt\right).$$

证　设 T 为$[0,a]$的一个分割,其分点为$\frac{ak}{n}$,$k=0,1,\cdots,n$,即 $x_k=\frac{ak}{n}$ 由$f''(x)\geqslant 0$知 f 是凸函数,故在 $P.151$ 詹禁不等式中令 $\lambda=\frac{1}{n}$,则有

$$f(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\varphi(x_k))\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\varphi(x_k))$$

即　$f(\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\frac{a}{n})\leqslant\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}f(\varphi(x_k))\frac{a}{n}$

由于 f、φ 在$[a,b]$上都可积,且 f 连续,故在上式中令 $n\to\infty$,则得

$$f[\frac{1}{a}\int_0^x\varphi(t)dt]\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f[\varphi(t))dt$$

2. 证明下列命题:

(1) 若 f 在$[a,b]$上连续增,

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt, & x\in(a,b]\\ f(a), & x=a,\end{cases}$$

则 F 为$[a,b]$上的增函数.

(2) 若 f 在$[0,+\infty)$上连续,且 $f(x)>0$,则

$$\varphi(x)=\int_0^x tf(t)dt/\int_0^x f(t)dt$$

为$(0,+\infty)$上的严格增函数.如果要使 φ 在$[0,+\infty)$上为严格增,试问应补充定义 $\varphi(0)=?$

证　(1)$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x-a}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$

$$=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt(a<x<b)$$

由积分中值定理知:存在 $\xi\in(a,x)$,使

$$\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a)$$

所以 $F'(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}-\dfrac{f(\xi)}{x-a}=\dfrac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)]$. 由于 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数,故 $f(x)-f(\xi)\geqslant 0$,从而当 $x\in(x,b)$ 时,

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f(x)-f(\xi)]\geqslant 0$$

由此,$F(x)$ 为(a,b)内的递增函数.

(2) 任给 $x>0$,有

$$\varphi'(x)=\frac{1}{(\int_0^x f(t)dt)^2}[xf(x)\int_0^x(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt]$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x(x-t)f(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}$$

由 $f(x)>0$,有$(x-t)f(t)>0$,从而$\int_0^x(x-t)f(t)dt>0$,所以 $\varphi'(x)>0$,故 $\varphi(x)$ 在$(0,+\infty)$内严格递增.

由$\int_0^x tf(t)dt/\int_0^x f(t)dt>0$,且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xf(x)}{f(x)}=0$,从而须令 $\varphi(0)=0$.

3. 设 f 在$[0,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A.$$

证　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$ 使当 $x>M$ 时,有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,又当 $T>M$ 时

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx-A\right|$$

$$=\frac{1}{T}\left|\int_0^T f(x)dx-\int_0^T Adx\right|$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T |(f(x) - A)dx|$$
$$\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |f(x) - A|dx$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^M |f(x) - A|dx + \frac{1}{T}\int_M^T |f(x) - A|dx$$
$$\leqslant \frac{1}{T}\int_0^M |f(x) - A|dx + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \frac{M}{T})$$

所以,只要取 $T_1 = \max\{\frac{2}{\varepsilon}\int_0^M |f(x) - A|dx, 2M\}$,当 $T > T_1$ 时,就有(注意 $0 < 1 - \frac{M}{T} < 1$)

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = A$

4. 设 f 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个连续周期函数,周期为 p,证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{p}\int_0^p f(t)dt.$$

证　由 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \xlongequal{x = P\lambda} \frac{1}{P\lambda}\int_0^{P\lambda} f(t)dt$,其中 $\lambda \to +\infty$. 再令 $y = \frac{t}{\lambda}$,有 $\frac{1}{P\lambda}f(t)dt = \frac{1}{P}\int_0^P f(y\lambda)dy = \frac{1}{P}\int_0^P f(\lambda t)dt$

由 $f(t) = f(t + np)$,其中 n 为任意正整数. 故当 $n \to +\infty$ 时,

$\lim\limits_{n\to\infty} f(t + np) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(t\lambda)$

从而 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^p f(\lambda t)dt = \int_0^p f(t)dt.$

5. 证明:连续的奇函数的一切原函数皆为偶函数;连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

证　设 $f(x)$ 是连续的奇函数,则 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + c$ 是 $f(x)$ 的所有原函数,而 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + c$,令 $t = -u$,则

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt=\int_0^{x}f(-u)d(-u)+c$$
$$=-\int_0^{x}[-f(u)]du+c$$
$$=\int_0^{x}f(u)du+c=F(x)$$

所以 $F(x)$ 是偶函数.

若 $f(x)$ 是连续的奇函数,则 $F(x)=\int_0^{x}f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,而

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt=\int_0^{x}f(-u)d(-u)=-\int_0^{x}f(u)du=-F(x)$$

所以 $F(x)$ 是奇函数.

6. 证明许瓦尔兹(Schwarz)不等式:若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$$

证　若 f 与 g 可积,则 f^2,g^2,fg 都可积,且对任何 t,$[f+fg]^2$ 也可积,又 $[f+tan]^2\geqslant 0$,故

$$\int_a^b(f(x)+tan(x))^2dx\geqslant 0$$

即　$$\int_a^b(f(x))^2dx+2t\int_a^b g(x)dx+t^2\int_a^b(g(x))^2dx\geqslant 0$$

不等式左边是关于 t 的二次三项式,故它的判别式 $\triangle\leqslant 0$,即

$$\triangle=\{\int_a^b f(x)g(x)dx\}^2-\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\leqslant 0$$

故　$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

7. 利用许瓦尔兹不等式证明:

(1) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx;$$

(2) 若 f 在 $[a,b]$ 上可积,且 $f(x)\geqslant m>0$,则

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \leqslant (b-a)^2;$$

(3) 若 f,g 都在 $[a,b]$ 上可积，则有闵可夫斯基(Minkowski)不等式：

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

证 (1) 根据许瓦尔兹不等式知

$$\begin{aligned}(\int_a^b f(x)dx)^2 &= (\int_a^b f(x)\cdot l dx)^2 \leqslant \int_a^b l^2 dx \cdot \int_a^b (f(x)^2 dx \\ &= (b-a)\int_a^b (f(x)^2 dx\end{aligned}$$

(2) 由 f 可积，且 $f \geqslant m > 0$，得 $\frac{1}{f}$ 可积，故 $\sqrt{f}$，$\frac{1}{\sqrt{f}}$ 可积，于是：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx &\geqslant (\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx)^2 \\ &= (\int_a^b dx)^2 = (b-a)^2\end{aligned}$$

(3) 利用许瓦尔兹不等式，知

$$\begin{aligned}&\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \\ &\leqslant \int_a^b f^2(x)dx + 2[\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)]^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)dx \\ &= \{[\int_a^b f^2(x)dx]^{\frac{1}{2}} + [\int_a^b g^2(x)dx]^{\frac{1}{2}}\}^2\end{aligned}$$

故 $(\int_a^b (f+g)^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\int_a^b f^2)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b g^2)^{\frac{1}{2}}$

8. 证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$，则

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx.$$

证 在 $[a,b]$ 中插入 $n-1$ 个等分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

记 $f(x_i) = y_i > 0$，于是由平均值不等式

$$\frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

$$\geqslant (b-a)\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} = (b-a)e^{\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}(\ln y_1 + \cdots + \ln y_n)}$$

两边取极限有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

$$\geqslant (b-a)\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}(\ln y_1 + \cdots + \ln y_n)}$$

$$= (b-a)e^{\int_a^b \ln f(x)dx \frac{1}{b-a}}$$

故 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geqslant e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$，于是

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx.$$

9. 设 f 为 $(0, +\infty)$ 上的连续减函数，$f(x) > 0$；又设

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx.$$

证明 $\{a_n\}$ 为收敛数列.

证　由于 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 内的连续减函数，故

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k)(k+1-k) = f(n) > 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 有下界，又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx$$

$$\leqslant f(n+1) - \int_n^{n+1} f(n+1)dx = 0$$

得 $\{a_n\}$ 为递减数列，由单调有界定理 $\{a_n\}$ 收敛.

10. 证明:若 f 在 $[a,b]$ 上可积,且处处有 $f(x)>0$,则 $\int_a^b f(x)dx>0$.(提示:由可积的每一充要条件进行反证;也可利用§6习题第7题的结论.)