每日一题（4）

2019.03.23

设有 n 阶Frobenius阵

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

求证： $F^n + a_1 F^{n-1} + \cdots + a_n I_n = 0$. (提示：研究 $F^i e_1, F^i e_2, \cdots, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 其中 e_j 为 $\mathbb{R}^n$ 的第 j 个标准基.)

证: (法一)通过计算，容易得到 $Fe_1 = e_2$, $F^2 e_1 = F(Fe_1) = Fe_2 = e_3$, 于是我们可以归纳出以下结论:

$$F^j e_1 = e_{j+1} (j = 1, 2, \cdots, n-1),$$

若记 $\alpha = (a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1)^T$, 则 $F^n e_1 = -\alpha$. 于是,记 $a_0 = 0$, 有：

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i F^{n-i} \right) e_1 = -\alpha + a_1 e_n + a_2 e_{n-1} + \cdots + a_n e_1 = 0.$$

同理可证 $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i F^{n-i} \right) e_j = 0$ 对 $j \geq 2$ 都成立.

另一方面, 对任意的 n 阶矩阵 A, A 右乘 e_j 得到的向量是 A 的第 j 列元素构成的向量, 于是方阵 $F^n + a_1 F^{n-1} + \cdots + a_n I_n$ 的每一列元素都全为零, 故 $F^n + a_1 F^{n-1} + \cdots + a_n I_n = 0$, 结论得证.

(法二：C-H定理)设方阵 F 的特征多项式为 $f(t)$, 由C-H定理可知 $f(F) = 0$.

而 $f(t) = \det(tI_n - F) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ (过程略, 递推即可求得), 结合C-H定理即得要证的结论.