吉林大学2013-2014学年第一学期“高等代数I”期末考试试题

共六道大题 满分100分 时间120分钟

一、直接写出结果（共40分）

1、求多项式 $f(x)=x^3+4x^2+5x+2$ 在有理数域上的标准分解.

2、若 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & t\end{pmatrix}$，且$|A|=1$，求 A.

3、已知行列式 $|\alpha \quad \beta \quad \gamma|=1$，求 $|\beta+\gamma \quad \alpha+\gamma \quad \alpha+\beta|$ 的值.

4、设 $n(n>2)$阶行列式 D 的第一列元素都是2013，求 D 的第 n 列元素的代数余子式之和.

5、若 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

6、是否存在实数域上的 n 阶幂等矩阵 A 也是反对称矩阵.若存在，请指出数目.

7、已知2013阶矩阵 $A=((i+j)^2)$，求$|A|$.

8、若 A,B,C 均为 $n(n\geq 3)$阶矩阵，若 $r(A)+r(B)=2n-3$，但 $r\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}\neq 2n-3$,求 $r\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}$.

二、（共10分）设 A 是秩为 r 的 n 阶方阵.证明存在矩阵 B，使得 BA 为秩为 r 的对称矩阵.

三、（共 20 分）设正整数 n>1，讨论方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+\ldots\ldots+bx_n=a+\dfrac{1}{n} \\ bx_1+ax_2+\ldots\ldots+bx_n=b+\dfrac{1}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bx_1+bx_2+\ldots\ldots+ax_n=b+\dfrac{1}{n} \end{cases}$ 解的情况，并在有无穷多解时求出这个方程组的通解.

四、（共 10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\ldots+l_n\alpha_n$，其中 $l_1+l_2+\ldots+l_n=1$.

证明：$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots\cdots$，$\alpha_n+\beta$ 线性无关.

五、（共 10 分）设 $f,g,h\in Q[x]$.若 $(f^3,g^4)=(f^4,g^3)=h^3$，则 $(f,g)=h$.

六、（共 10 分）设 A,B 均为 n(n>2)阶矩阵，$u=(1,2,\ldots,n)$.若 Au=Bu=0 且秩 AB 为 n−1.
证明：A，B 行等价.