第五章　导数和微分

§1　导数的概念

1. 已知直线运动方程为 $s = 10t + 5t^2$，分别令 $\triangle t = 1, 0.1, 0.01$，求从 $t = 4$ 至 $t = 4 + \triangle t$，这一段时间内运动的平均速度及 $t = 4$ 时的瞬时速度.

解　设 $\triangle s$ 是在 $\triangle t$ 时间内的运动路程，则

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{10(t+\triangle t) + 5(t+\triangle t)^2 - 10t - 5t^2}{\triangle t} = 10 + 10t + 5\triangle t$$

当 $t = 4$ 时，$\dfrac{\triangle s}{\triangle t} = 50 + 5\triangle t$，此即从 $t = 4$ 到 $t = 4 + \triangle t$ 之间的平均速度

当 $\triangle t = 1$ 时，$\dfrac{\triangle s}{\triangle t} = 55$；当 $\triangle t = 0.1$ 时 $\dfrac{\triangle s}{\triangle t} = 50.5$；当 $\triangle t = 0.01$ 时 $\dfrac{\triangle s}{\triangle t} = 50.05$. 其瞬时速度为　$\lim\limits_{\triangle t\to 0}\dfrac{\triangle s}{\triangle t} = \lim\limits_{\triangle t\to 0}(50 + 5\triangle t) = 50$

2. 等速旋转的角速度等于旋转角与对应时间的比，试由此给出变速旋转的角速度的定义.

解　设 t_0 为任一确定时刻，t_0 到 t 转过的角度为 $\triangle\theta$. 记 $\triangle t = t - t_0$，则在 $\triangle t$ 时间内，旋转的平均角度为 $\omega = \dfrac{\triangle\theta}{\triangle t}$.

若 $\lim\limits_{\triangle t\to 0}\dfrac{\triangle\theta}{\triangle t}$ 存在，则此极限可定义为变速旋转在 t_0 时刻的角速度.

3. 设 $f(x_0) = 0, f'(x_0) = 4$，试求极限 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0+\triangle x)}{\triangle x}$

解　由题设 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0+\triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = 4$，而 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0)}{\triangle x} = 0$

故 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0+\triangle x)}{\triangle x} = 4$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3\\ ax+b, & x<3\end{cases}$ 试确定 a,b 的值，使 f 在 $x=3$ 处可导.

解　由于当 f 在 $x=3$ 处可导时，f 必在 $x=3$ 处连续，于是必有 $f(3-0)=f(3+0)$，即 $9=3a+b$. 又 $f_+{}'(3)=6, f_-{}'(3)=a$，故 f 在 $x=3$ 处可导时 $a=6$，从而 $b=-9$.

5. 试确定曲线 $y=\ln x$ 上哪些点的切线平行于下列直线：

(1) $y=x-1$　(2) $y=2x-3$

解　(1) 设 (x_0,y_0) 处 $y=\ln x$ 的切线平行于 $y=x-1$，则在该点处的斜率相等. 即 $(\ln x)'\mid_{x_0}=1$. 可见 $x_0=1$，从而 $y_0=0$. 故在 $(1,0)$ 处 $y=\ln x$ 的切线平行于 $y=x-1$.

(2) 由 $\frac{1}{x}=2$ 得 $x=\frac{1}{2}$. 代入 $y=\ln x$ 中得 $y=-\ln 2$. 所以在 $(\frac{1}{2},-\ln 2)$ 处 $y=\ln x$ 的切线平行于 $y=2x-3$.

6. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程与法线方程.

(1) $y=\frac{x^2}{4}, P(2,1)$; (2) $y=\cos x, P(0,1)$

解　(1) 因 $y'=\frac{x}{2}$　$y'(2)=1$　故切线方程 $y-1=x-2$ 即 $y=x-1$，法线方程为 $y-1=-(x-2)$，即 $y=3-x$

(2) 因 $y'=-\sin x, y'(0)=0$ 故切线方程为 $y=1$，法线方程为 $x=0$

7. 求下列函数的导函数：

(1) $f(x)=|x|^3$; (2) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant 0,\\ 1 & x<0.\end{cases}$

解　(1) 因 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0\\ -x^3, & x<0\end{cases}$ 从而当 $x>0$ 时 $f'(x)=3x^2$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=-3x^2$，当 $x=0$ 时，由 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3-0}{x}=0$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x^3-0}{x}=0$ 得 $f'(0)=0$

故 $f'(x)=\begin{cases}3x^2,x\geqslant0\\-3x^2,x<0\end{cases}$

(2) 当 $x>0$ 时,$f'(x)=1$,当 $x<0$ 时,$f'(x)=0$

当 $x=0$ 时 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+1-1}{x}=1$

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-1}{x}=0$,由于 $f_+'(0)\neq f_-'(0)$,

所以,$f(x)$ 在 $x=0$ 不可导,故 $f'(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x<0\end{cases}$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x},x\neq0\\0,\qquad x=0\end{cases}$ (m 为正整数)

试问:(1)m 等于何值时,f 在 $x=0$ 连续;

(2)m 等于何值时,f 在 $x=0$ 可导;

(3)m 等于何值时,f' 在 $x=0$ 连续.

解 (1) 当 m 为任意正整数时,都有 $\lim\limits_{x\to0}x^m\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$.

因此,当 m 为任意正整数时,f 在 $x=0$ 连续.

(2) 当 m 为大于 1 的正整数时,有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}x^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$. 这时,$f$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=0$.

当 $m=1$ 时 $\lim\limits_{x\to0}x^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在. 故 f 在 $x=0$ 不可导

(3) 当 m 为大于 2 的正整数时,若 $x\neq0$,则 $f'(x)=mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}+x^m\cos\dfrac{1}{x}\cdot(-\dfrac{1}{x^2})=x^{m-2}(mx\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$.

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}x^{m-2}(mx\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})=0=f'(0)$. 故 f' 在 $x=0$ 连续.

当 $m=2$ 时,因 $\lim\limits_{x\to0}(mx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$ 不存在,所以 f' 在 $x=0$ 不连续.

9. 求下列函数的稳定点

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$　　(2) $f(x)=x-\ln x$

解　(1) $f'(x)=\cos x+\sin x$　令 $\cos x+\sin x=0$

$\therefore \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)=0$　即　$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+x)=0$

$\therefore \frac{\pi}{4}+x=k\pi\quad k\in z\quad \therefore x=k\pi-\frac{\pi}{4}$　为稳定点($k\in z$)

(2) $f'(x)=1-\frac{1}{x}$,令 $1-\frac{1}{x}=0\quad \therefore x=1$ 为稳定点

10. 设函数 f 在点 x_0 存在左右导数,试证 f 在点 x_0 连续.

证　因 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,由无穷小量概念,有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)+\alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\alpha=0$. 于是 $f(x)-f(x_0)=f'_+(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0)\to0(x\to x_0^+)$,故 f 在 x_0 是右连续的. 同理可证 f 在 x_0 是左连续的. 因而 f 在 x_0 连续.

11. 设 $g(0)=g'(0)=0$, $f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$　求 $f'(0)$

解　$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)\sin\frac{1}{x}-g(0)\sin\frac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\sin\frac{1}{x}$,由于 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界量.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$,所以 $f'(0)=0$

12. 设 f 是定义在 R 上的函数,且对任何 $x_1,x_2\in R$,都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,若 $f'(0)=1$ 证明对任何 $x\in R$,都有 $f'(x)=f(x)$.

证 由于 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 对一切 $x_1,x_2\in R$ 成立，于是对任意 $x\in R$,有 $f(x)=f(x)f(0)$ 若 $f(x)\equiv 0$ 则结论成立.

若 $f(x)\not\equiv 0$,则 $f(0)=1$ 于是对任一 $x\in R$

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x)f(\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}f(x)\frac{f(\triangle x)-1}{\triangle x}$$

$$=f(x)\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x)-f(0)}{\triangle x}=f(x)f'(0)=f(x)$$

13. 证明:若 $f'(x_0)$ 存在,则

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0-\triangle x)}{\triangle x}=2f'(x_0)$$

证: $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0-\triangle x)}{\triangle x}$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\triangle x)}{\triangle x}$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$$

14. 证明:若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=k$, $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=k$

证 不妨设 $f_+'(a)>0$ $f_-'(b)>0$. 即 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-k}{x-a}>0$, $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-k}{x-b}>0$;由极限保号性质,分别存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$,使得

当 $x\in U_+^\circ(a,\delta_1)$ 时, $\dfrac{f(x)-k}{x-a}>0$ 即 $f(x)>k$

当 $x\in U_-^\circ(b,\delta_2)$ 时, $\dfrac{f(x)-k}{x-b}>0$ 即 $f(x)<k$

取 $x_1\in U_+^\circ(a,\delta_1)$, $x_2\in U_-^\circ(b,\delta_2)$, $x_1<x_2$ 则

$f(x_1)>k$, $f(x_2)<k$.

因 f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，由介值定理知：至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,使得 $f(\xi)=k$.

15.(图 5－1)设有一吊桥,其铁链成抛物线型,两端系于相距 100 米高度相同的支柱上,铁链之最低点在悬点下 10 米处,求铁链与支柱所成之角.

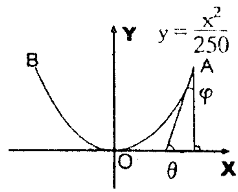

图 5—1

解　取铁链最低点处切线为 x 轴,法线为 y 轴.1 米为单位长,则铁链方程是 $y=\frac{1}{250}x^2$ 悬点坐标为 $A(50,10)$　$B(-50,10)$.因 $y'=\frac{2x}{250}=\frac{x}{125}$.这样铁链在 A 点的切线斜率为 $y'(50)=\frac{2}{5}$ 倾斜角 $\theta=\arctan\frac{2}{5}$,于是铁链在 A 点与支柱的夹角是 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{2}{5}$,在 B 点的夹角相同.

16.(图 5－2)在曲线 $y=x^3$ 上取一点 P,过 P 的切线与该曲线交于 Q,证明:曲线在 Q 处的切线斜率恰好是在 P 处切线斜率的四倍.

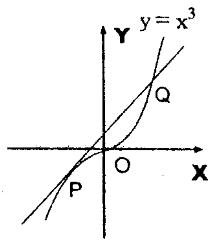

图 5—2

证:设 P 点坐标为 (x_0,x_0^3) Q 点坐标为 (x_1,x_1^3) 由 $y'=3x^2$ 知　$y'(x_0)=3x_0^2$,过 P 点曲线的切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$,又 Q 点也在切线上,故有 $x_1^3-x_0^3=3x_0^2(x_1-x_0)$.从而 $x_1=-2x_0$.于是:$y'(-2x_0)=12x_0^2=4y'(x_0)$.

可见曲线在 Q 处的切线斜率的四倍.

§2　求导法则

1.求下列函数在指定点的导数

(1) 设 $f(x)=3x^4+2x^3+5$　求 $f'(0),f'(1)$;

(2) 设 $f(x)=\frac{x}{\cos x}$,求 $f'(0),f'(\pi)$;

(3) 设 $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ 求 $f'(x),f'(1),f'(4)$.

解　(1) $f'(x)=12x^3+6x^2$　$f'(0)=0$　$f'(1)=18$

(2) $f'(x)=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$, $f'(0)=1$, $f'(\pi)=-1$

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$, $f'(1)=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $f'(4)=\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$

2. 求下列函数的导数

(1) $y=3x^2+2$ (2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x+x^2}$

(3) $y=x^n+nx$ (4) $y=\dfrac{x}{m}+\dfrac{m}{x}+2\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

(5) $y=x^3\log_3 x$ (6) $y=e^x\cos x$

(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$ (8) $y=\dfrac{\tan x}{x}$

(9) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$ (10) $y=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

(11) $y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$ (12) $y=\dfrac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$

解 (1) $y'=6x$

(2) $y'=\dfrac{(-2x)(1+x+x^2)-(1-x^2)(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}=-\dfrac{x^2+4x+1}{(1+x+x^2)^2}$

(3) $y'=nx^{n-1}+n=n(x^{n-1}+1)$ (4) $y'=\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

(5) $y'=3x^2\log_3 x+x^3\dfrac{1}{\ln 3}\cdot\dfrac{1}{x}=3x^2\log_3 x+\dfrac{x^2}{\ln 3}$

(6) $y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$

(7) $y=-3x^6+x^5-3x^4+4x^3-x^2+3x-1$

$y'=-18x^5+5x^4-12x^3+12x^2-2x+3$

(8) $y'=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$ (9) $y'=\dfrac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$

(10) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln x)+\frac{1}{x}(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2}=\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{(1-\ln x)^2}$

$=\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$

(11) $y' = \dfrac{\arctan x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}+1}{1+x^2}$

(12) $y' = \dfrac{2x(\sin x + \cos x) - (1+x^2)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2}$

$= \dfrac{2x}{\cos x + \sin x} - \dfrac{(1+x^2)(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2}$

3. 求下列函数的导数

(1) $y = x\sqrt{1-x^2}$

(2) $y = (x^2-1)^3$

(3) $y = \left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$

(4) $y = \ln(\ln x)$

(5) $y = \ln(\sin x)$

(6) $y = \lg(x^2+x+1)$

(7) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(8) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

(9) $y = (\sin x + \cos x)^3$

(10) $y = \cos^3 4x$

(11) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$

(12) $y = (\sin x^2)^3$

(13) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$

(14) $y = (\arctan x^3)^2$

(15) $y = \operatorname{arccot}\dfrac{1+x}{1-x}$

(16) $y = \arcsin(\sin^2 x)$

(17) $y = e^{x+1}$

(18) $y = 2^{\sin x}$

(19) $y = x^{\sin x}$

(20) $y = x^{x^x}$

(21) $y = e^{-x}\sin 2x$

(22) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(23) $y = \sin(\sin(\sin x))$

(24) $y = \sin\left(\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)}\right)$

(25) $y = (x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}$

(26) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{a\sin x + b}{a + b\sin x}$

解 (1) $y' = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $y' = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-1)^2$

(3) $y' = \dfrac{3(1+x^2)^2}{(1-x)^2} \cdot \dfrac{2x(1-x)+(1+x^2)}{(1-x)^2}$

$= \dfrac{3(1+x^2)^2(1+2x-x^2)}{(1-x)^4}$

(4) $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$ (5) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ (6) $y' = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 10}$

(7) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(8) $y = \ln\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{2x} = \ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \ln(1-\sqrt{1-x^2}) - \ln x$

$y' = \dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(9) $y' = 3(\sin x+\cos x)^2(\cos x-\sin x) = 3\cos 2x(\sin x+\cos x)$

(10) $y' = 3\cos^2 4x \cdot (-\sin 4x) \cdot 4 = -6\cos 4x \sin 8x$

(11) $y' = \cos\sqrt{1+x^2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

(12) $y' = 3(\sin x^2)^2\cos x^2 \cdot 2x = 6x\cos x^2(\sin x^2)^2$

(13) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} \cdot (-\dfrac{1}{x^2}) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(14) $y' = 2\arctan x^3 \cdot \dfrac{1}{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 = \dfrac{6x^2\arctan x^3}{1+x^6}$

(15) $y' = -\dfrac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \cdot \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(16) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sin^2 x)^2}} \cdot 2\sin x\cos x = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-(\sin^2 x)^2}}$

$= \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$

(17) $y' = e^{x+1}$ (18) $y' = 2^{\sin x}\cos x\ln 2$

(19) $y' = (e^{\sin x\ln x})' = e^{\sin x\ln x}(\cos x\ln x + \frac{1}{x}\sin x)$

$= x^{\sin x}(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x})$

(20) $\ln y = x^x\ln x \quad \frac{y'}{y} = (x^x)'\ln x + x^{x-1}$

又 $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$ 故 $y' = x^{x^x}[x^x\ln x(\ln x + 1) + x^{x-1}]$

(21) $y' = e^{-x}\cdot(-1)\sin 2x + e^{-x}\cos 2x\cdot 2 = e^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x)$

(22) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})]$

$= \frac{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(23) $y' = \cos[\sin(\sin x)]\cos(\sin x)\cos x$

(24) $y' = \cos\left[\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right]\times\frac{\sin(\frac{x}{\sin x}) - x\cos(\frac{x}{\sin x})\cdot\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}}{\sin^2(\frac{x}{\sin x}}$

(25) $\ln y = \sum_{i=1}^{n} a_i\ln(x - a_i)$

$y' = y\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x - a_i} = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{a_i}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x - a_i}$

(26) $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{a\sin x + b}{a + b\sin x})^2}}$

$\times\frac{a\cos x(a + b\sin x) - b\cos x(a\sin x + b)}{(a + b\sin x)^2}$

$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\cos x}{|a + b\sin x|\sqrt{a^2 - b^2}|\cos x|} = \frac{\cos x}{|a + b\sin x||\cos x|}$

4. 对下列各函数计算 $f'(x), f'(x+1), f'(x-1)$;

(1) $f(x) = x^3$; (2) $f(x+1) = x^3$; (3) $f(x-1) = x^3$

解 (1) $f'(x) = 3x^2, f'(x+1) = 3(x+1)^2, f'(x-1) = 3(x-1)^2$

(2)$f'(x+1)=3x^2, f'(x)=3(x-1)^2, f'(x-1)=3(x-2)^2$

(3)$f'(x-1)=3x^2, f'(x)=3(x+1)^2, f'(x+1)=3(x+2)^2$

5. 已知 g 为可导函数，a 为实数，试求下列函数 f 的导数：

(1)$f(x)=g(x+g(a))$；(2)$f(x)=g(x+g(x))$

(3)$f(x)=g(xg(a))$；(4)$f(x)=g(xg(x))$

解 (1)$f'(x)=g'(x+g(a))\cdot(x+g(a))'=g'(x+g(a))$

(2)$f'(x)=g'(x+g(x))\cdot(x+g(x))'$

$$=g'(x+g(x))\cdot(g'(x)+1)$$

(3)$f'(x)=g'(xg(a))\cdot(xg(a))'=g'(xg(a))\cdot g(a)$

(4)$f'(x)=g'(xg(x))\cdot(xg(x))'=g'(xg(x))\cdot(g(x)+xg'(x))$

6. 设 f 为可导函数，证明：若 $x=1$ 时，有 $\frac{d}{dx}f(x^2)=\frac{d}{dx}f^2(x)$ 则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$

证：由 $\frac{d}{dx}f(x^2)=2xf'(x^2)$ $\frac{d}{dx}f^2(x)=2f(x)\cdot f'(x)$ 有 $2f'(1)=2f(1)f'(1)$，$f'(1)(f(1)-1)=0$ 所以 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$

7. 定义双曲函数如下：

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$；双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切函数 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$；双曲余切函数 $\mathrm{coth}x=\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$

证明：(1)$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$ (2)$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$

(3) $(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$ (4)$(\mathrm{coth}x)'=\frac{-1}{\mathrm{sh}^2x}$

证 (1) $(\mathrm{sh}x)'=(\frac{e^x-e^{-x}}{2})'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$

(2) $(\mathrm{ch}x)'=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x$

(3) $(\mathrm{th}x)'=(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x})'=\frac{\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$

(由定义知 $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$)

(4) $(\mathrm{ch}x)' = (\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x})' = \dfrac{\mathrm{sh}^2x - \mathrm{ch}^2x}{\mathrm{sh}^2x} = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$

8. 求下列函数的导数

(1) $y = \mathrm{sh}^3x$ (2) $y = \mathrm{ch}(\mathrm{sh}x)$ (3) $y = \ln(\mathrm{ch}x)$ (4) $y = \arctan(\mathrm{th}x)$

解　(1) $y' = 3\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}x$　(2) $y' = \mathrm{sh}(\mathrm{sh}x)\mathrm{ch}x$

(3) $y' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}x}\mathrm{sh}x = \mathrm{th}x$　(4) $y' = \dfrac{1}{1+\mathrm{th}^2x}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x}$

9. 以 $\mathrm{sh}^{-1}x, \mathrm{ch}^{-1}x, \mathrm{th}^{-1}x, \coth^{-1}x$ 分别表示各双曲函数的反函数,试求下列函数的导数.

(1) $y = \mathrm{sh}^{-1}x$　(2) $y = \mathrm{ch}^{-1}x$　(3) $y = \mathrm{th}^{-1}x$　(4) $y = \coth^{-1}x$

(5) $y = \mathrm{th}^{-1}x - \coth^{-1}\dfrac{1}{x}$　　(6) $y = \mathrm{sh}^{-1}(\tan x)$

解　(1) $y' = \dfrac{1}{(\mathrm{sh}y)'} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $y' = \dfrac{1}{(\mathrm{ch}y)'} = \dfrac{1}{\mathrm{sh}y} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2y - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(3) $y' = \dfrac{1}{(\mathrm{th}y)'} = \mathrm{ch}^2y = \dfrac{\mathrm{ch}^2y}{\mathrm{ch}^2y - \mathrm{sh}^2y} = \dfrac{1}{1-\mathrm{th}^2y}$

(4) $y' = \dfrac{1}{(\mathrm{cth}y)'} = -\mathrm{sh}^2y = -\dfrac{\mathrm{sh}^2y}{\mathrm{ch}^2y - \sin^2y}$

$= \dfrac{1}{1-\mathrm{cth}^2y} = \dfrac{1}{1-x^2}(|x|>1)$

(5) $y' = \dfrac{1}{1-x^2} - \dfrac{1}{1-(\dfrac{1}{x})^2}\cdot(\dfrac{-1}{x^2}) = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{1}{x^2-1} = 0$

(6) $y' = \dfrac{\sec^2x}{\sqrt{1+\tan^2x}} = \dfrac{\sec^2x}{|\sec x|} = |\sec x|$

§3　参变量函数的导数

1. 求下列由参量方程所确定的导数$\dfrac{dy}{dx}$:

(1)$\begin{cases} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{cases}$在 $t = 0, \frac{\pi}{2}$ 处　(2)$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t} \\ y = \frac{1-t}{1+t} \end{cases}$在 $t > 0$ 处

解　(1) $\frac{dx}{dt} = -4\cos^3 t\sin t, \frac{dy}{dx} = 4\sin^3 t\cos t, \frac{dy}{dx} = \frac{4\sin^3 t\cos t}{-4\cos^3 t\sin t}$

$= -\tan^2 t, \frac{dy}{dx}\big|_{t=0} = 0$　在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处导数不存在.

(2) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(1+t)^2}, \frac{dy}{dt} = \frac{-2}{(1+t)^2}, \frac{dy}{dx} = -2$ 即在 $t > 0$ 的任意点处的导数为 -2

2. 设$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$,求$\frac{dy}{dx}\big|_{t=\frac{\pi}{2}}, \frac{dy}{dx}\big|_{t=\pi}$

解　$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \frac{dy}{dx}\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$　$\frac{dy}{dx}\big|_{t=\pi} = 0$

3. 设曲线方程 $x = 1 - t^2, y = t - t^2$,求它在下列点处的切线方程与法线方程.

(1)$t = 1$　(2)$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

解　(1)$t = 1$ 时 $x = 0$　$y = 0$　$\frac{dy}{dx}\big|_{t=1} = \frac{1-2t}{-2t}\big|_{t=1} = \frac{1}{2}$

得切线方程为 $y = \frac{1}{2}x$　法线方程为 $y = -2x$

(2)$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$时,$x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \frac{dy}{dx}\big|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-2t}{-2t}\big|_{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$得切线方程为 $2y - (2-\sqrt{2})x = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$

法线方程为　$2x + (2-\sqrt{2})y = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1.$

4. 证明曲线$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$上任一点的法线到原点距离等于 a.

证:t 处切线斜率为$k_{切} = \frac{a(\cos t + t\sin t - \cos t)}{a(-\sin t + \sin t + t\cos t)} = \tan t$

设 $P(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$ 是曲线上任一点.则过 $P(x_0,y_0)$ 的法线方程为

$$y-a(\sin t_0-t_0\cos t_0)=-\frac{1}{\tan t_0}[x-a(\cos t_0+t_0\sin t_0)]$$

即:$y+x\cot t_0=a(\sin t_0+t_0\cos t_0)+a(\frac{\cos^2 t_0}{\sin t_0}+t_0\cos t_0)$

$=a(\sin t_0+\frac{\cos^2 t_0}{\sin t_0})=\frac{a}{\sin t_0}$,于是有 $x\cos t_0+y\sin t_0-a=0$

由法线式方程意义可知,它与原点距离为常数 a.

5. 证明:圆 $r=2a\sin\theta(a>0)$ 上任一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.

证　设圆上任一点的切线与向径的夹角为 φ. 由本节(5)式知 $\tan\varphi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$.而 $r'(\theta)=2a\cos\theta$,于是有 $\tan\varphi=\frac{2a\sin\theta}{2a\cos\theta}=\tan\theta$

因 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 故 $\varphi=\theta$ 这表明圆 $r=2a\sin\theta$ 上任一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.

6. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的切线与切点向径之间的夹角.

解　设该曲线的切线与切点向径之间的夹角为 α,则

$$\tan\alpha=\frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}=\frac{a(1+\cos\sigma)}{-a\sin\varphi}=-\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}=-\cot\frac{\varphi}{2}$$

所以 $\alpha=\arctan(-\cot\frac{\varphi}{2})=-\arctan(\cot\frac{\varphi}{2})=\frac{1}{2}(\varphi-\pi)$

§ 4　高阶导数

1. 求下列函数在指定点的高阶导数

(1) $f(x)=3x^3+4x^2-5x-9$　求 $f''(1),f'''(1),f^{(4)}(1)$;

(2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$　求 $f''(0),f''(1),f''(-1)$

解　(1)$f'(x)=9x^2+8x-5,f''(x)=18x+8,f'''(x)=18,$
$f^{(4)}(x)=0$

(2) $f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}, f''(x) = -3x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$

$f''(0) = 0, f''(1) = -\dfrac{3}{4\sqrt{2}}, f'''(-1) = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}$

2. 设函数 f 在点 $x=1$ 处二阶可导. 证明：若 $f'(1)=1$，$f''(1)=0$，则在 $x=1$ 处有

$$\frac{d}{dx}f(x^2) = \frac{d^2}{dx^2}f^2(x)$$

证：即证在 $x=1$ 处有 $(f(x^2))' = (f^2(x))''$.

由于 $(f(x^2))' = 2xf'(x^2)$，

$(f^2(x))'' = (2f(x)f'(x))' = 2[(f'(x))^2 + f(x)f''(x)]$

将 $f'(1)=1$ 与 $f''(1)=0$ 代入，易见等式成立.

3. 求下列函数的高阶导数：

(1) $f(x) = x\ln x$ 求 $f''(x)$；(2) $f(x) = e^{-x^2}$ 求 $f'''(x)$

(3) $f(x) = \ln(1+x)$ 求 $f^{(5)}(x)$；(4) $f(x) = x^3e^x$ 求 $f^{(10)}(x)$

解　(1) $f'(x) = \ln x + 1 \quad f''(x) = \dfrac{1}{x}$

(2) $f'(x) = -2xe^{-x^2}, f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$f'''(x) = 4xe^{-x^2} + 8xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2} = 4xe^{-x^2}(3-2x^2)$

(3) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \quad f'''(x) = \dfrac{2!}{(1+x)^3}$

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{3!}{(1+x)^4} \quad f^{(5)}(x) = \dfrac{4!}{(1+x)^5}$

(4) 由莱布尼兹公式　$f^{(10)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^{k}(x^3)^{(k)}(e^x)^{(10-k)}$

$$= e^x(x^3 + 30x^2 + 270x + 720)$$

4. 设 f 为二阶可导函数，求下列各函数的二阶导数

(1) $y = f(\ln x)$；(2) $y = f(x^n), n \in N_+$；(3) $y = f(f(x))$.

解　(1) $y' = \dfrac{1}{x}f'(\ln x) \quad y'' = -\dfrac{1}{x^2}f'(\ln x) + \dfrac{1}{x^2}f''(\ln x)$

$$=\frac{1}{x^2}(f''(\ln x)-f'(\ln x))$$

(2) $y'=nx^{n-1}f'(x^n)\quad y''=n(n-1)\cdot x^{n-2}f'(x^n)+(nx^{n-1})^2f''(x^n)$

(3) $y'=f'(f(x))f'(x)\quad y''=f''(f(x))(f'(x))^2+f'(f(x))f''(x)$

5. 求下列函数的 n 阶导数.

(1) $y=\ln x$; (2) $y=a^x(a>0,a\neq 1)$; (3) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$;

(4) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; (5) $f(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$; (6) $y=e^{ax}\sin bx$ (a,b 均为实数)

解　(1) $y'=\dfrac{1}{x}, y''=-\dfrac{1}{x^2}, y'''=\dfrac{2!}{x^3},\cdots,y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}, n=1,2,\cdots,$

(2) $y'=a^x\ln a, y''=a^x(\ln a)^2,\cdots,y^{(n)}=a^x(\ln a)^n. n=1,2,\cdots$

(3) $y=\dfrac{1}{x(1-x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$ 而 $(\dfrac{1}{x})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$,

$$(\frac{1}{1-x})^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

所以 $y^{(n)}=(\dfrac{1}{x})^{(n)}+(\dfrac{1}{1-x})^{(n)}=n!(\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}})$

(4) $y^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\ln x)^{(k)}(\frac{1}{x})^{(n-k)}=(-1)^n n!x^{-(n+1)}\ln x$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}\cdot\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x+\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})$$

(5) $f^{(n)}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^n)^{(k)}(\frac{1}{1-x})^{(n-k)}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}\cdot\frac{(n-k)!}{(1-x)^{n-k+1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\cdot n!}{k!(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{(1-x)^{n-k+1}}=\frac{n!}{1-x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{x^{n-k}}{(1-x)^{n-k}}$$

(6) 应用归纳法

$y'=ae^{ax}\sin bx+\mathrm{b}e^{ax}\cos bx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

$= (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax}\sin(bx+\varphi)$，其中 $\varphi = \arctan\dfrac{b}{a}$，

$$y'' = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}[e^{ax}a\sin(bx+\varphi) + e^{ax}b\cos(bx+\varphi)]$$
$$= (a^2+b^2)e^{ax}\sin(bx+2\varphi)$$

设 $y^{(n-1)} = (a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}} e^{ax}\sin(bx+(n-1)\varphi)$

则 $y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n-1}{2}}\{ae^{ax}\sin[bx+(n-1)\varphi]$

$+ be^{ax}\cos[bx+(n-1)\varphi]\} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+n\varphi), n=1,2,\cdots$

6. 求由下列参量方程所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(1) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$

解　(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$ （$t \neq \dfrac{2k+1}{2}\pi$，$k$ 为整数）

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\tan t) = \frac{(-\tan t)_t'}{x_t'} = \frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

(2) 方法一：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}\right) = \frac{2}{(\cos t-\sin t)^2}/e^t(\cos t-\sin t)$$

$$= \frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$$

方法二：$\dfrac{dx}{dt} = e^t(\cos t-\sin t)$，$\dfrac{dy}{dt} = e^t(\cos t+\sin t)$，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}, \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2}{(\cos t-\sin t)^2} = \frac{2}{(\cos t-\sin t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{e^t(\cos t-\sin t)^3}$$

7. 研究函数 $f(x) = |x^3|$ 在 $x=0$ 处的各阶导数

解　因 $f(x) = \begin{cases} x^3, x\geqslant 0 \\ -x^3, x<0 \end{cases}$　$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}x^2 = 0$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^3-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}(-x^2)=0\quad 故 f'(0)=0$$

又因 $x>0$ 时，$f'(x)=3x^2$；$x<0$ 时，$f'(x)=-3x^2$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{3x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}3x=0$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{-3x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}(-3x)=0，故 f''(0)=0$$

当 $x>0$ 时，$f''(x)=6x$，$x<0$ 时，$f''(x)=-6x$

$$f'''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{6x-0}{x-0}=6\quad f'''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{-6x-0}{x-0}=-6$$

可见 $f'''(x)$ 在 $x=0$ 时不存在.

于是，当 $n\leqslant2$ 时，$f^{(n)}(0)=0$，当 $n>2$ 时，$f^{(n)}(0)$ 不存在.

8. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 二阶可导，且 $f'(x)\neq0$. 若 $f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，试用 $f'(x)$，$f''(x)$ 以及 $f'''(x)$ 表示 $(f^{-1})'''(y)$

解　$x'=\dfrac{1}{f'(x)}$，$x''=-\dfrac{1}{[f'(x)]^2}\dfrac{df'(x)}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$

$$x'''=-\frac{f'''(x)\cdot\dfrac{1}{f'(x)}[f'(x)]^3-3[f'(x)]^2\cdot f''(x)\cdot\dfrac{1}{f'(x)}\cdot f''(x)}{[f'(x)]^6}$$

$$=-\frac{f'(x)f'''(x)-3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^5}$$

9. 设 $y=\arctan x$　(1) 证明它满足方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$

证：(1) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $(1+x^2)y'=1$　两边关于 x 求导得

$$(1+x^2)y''+2xy'=0\qquad ①$$

(2) 因 $((1+x^2)y'')^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(1+x^2)^{(k)}y^{(n-k+2)}$

$$=(1+x^2)y^{(n+2)}+2nxy^{(n+1)}+n(n-1)y^{(n)}\qquad ②$$

$$(2xy')^{(n)}=2\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{(k)}y^{(n-k+1)}=2xy^{(n+1)}+2ny^{(n)}\qquad ③$$

由①②③得

$$(1+x^2)y^{(n+2)}+2x(n+1)y^{(n+1)}+n(n+1)y^{(n)}=0$$

令 $x=0$ 得 $\quad y^{(n+2)}(0)=-n(n+1)y^{(n)}(0)$

所以 $\quad y^{(n)}=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0) \qquad (n>2)$

$$=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)y^{(n-4)}(0)=\cdots,$$

由于 $y''(0)=0 \quad y'(0)=1$

因此 $\quad y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k\\ (-1)^k(2k)! & n=2k+1\end{cases}$

10. 设 $y=\arcsin x$

(1) 证明它满足方程 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$

(2) 求 $y^{(n)}\mid_{x=0}$

证:(1) 由 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y''=\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

得 $(1-x^2)y''-xy'=0$,由莱布尼兹公式有

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0$$

即:$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0 \qquad (1)$

(2) 在(1)中,令 $x=0$ 得 $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$,

而 $y''(0)=y^{(2k-2)}(0)=\cdots=y''(0)=0$,

$$y^{(2k+1)}(0)=(2k-1)^2y^{2k-1}(0)=\cdots=(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots3^2\cdot1^2y'(0)$$

$$=[(2k-1)!!]^2,(k=1,2,\cdots)$$

11. 证明 函数

$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}},x\neq0 & \text{在 } x=0 \text{ 处 } n \text{ 阶可导且 } f^{(n)}(0)=0\\ 0,x=0 & \text{其中 } n \text{ 为任意正整数}\end{cases}$

证 当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$f''(x)=(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6})e^{-\frac{1}{x^2}},\cdots,f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}(n=1,2,\cdots)$$

式中 $P_n(Z)$ 为 Z 的 $3n$ 次多项式

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x^2}}}=0$$

设 $f^{(n)}(0)=0$　则由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}P_n(\frac{1}{x})}{e^{-\frac{1}{x^2}}}=0$

可得 $f^{(n+1)}(0)=0$. 由引即得对任意正整数 n 都有 $f^{(n)}(0)=0$

§5　微分

1. 若 $x=1$，而 $\triangle x=0.1,0.01$. 问对于 $y=x^2$，$\triangle y$ 与 dy 之差分别是多少？

解　$\triangle y=(x+\triangle x)^2-x^2=2x\triangle x+(\triangle x)^2$　$dy=2x\cdot\triangle x$

$\triangle y-dy=2x\triangle x+(\triangle x)^2-2x\triangle x=(\triangle x)^2$

当 $\triangle x=0.1$ 时，$\triangle y-dy=0.01$；

当 $\triangle x=0.01$ 时，$\triangle y-dy=0.0001$

2. 求下列函数微分

(1) $y=x+2x^2-\frac{1}{3}x^3+x^4$　　(2) $y=x\ln x-x$

(2) $y=x^2\cos 2x$　　(4) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$

(5) $y=e^{ax}\sin bx$　　(6) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

解　(1) $dy=(1+4x-x^2+4x^3)dx$

(2) $dy=\ln x dx$　　(3) $dy=(2x\cos 2x-2x^2\sin 2x)dx$

(4) $dy=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$

(5) $dy=(ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx)dx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)dx$

(6) $dy=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\left(-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=-\dfrac{xdx}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

3. 求下列函数的高阶微分

(1) 设 $u(x)=\ln x$，$v(x)=e^x$，求 $d^3(uv)$，$d^3(\frac{u}{v})$；

(2) 设 $u(x)=e^{\frac{x}{2}}, v(x)=\cos 2x$，求 $d^3(uv), d^3(\frac{u}{v})$.

解 (1) $d^3(uv)=\sum_{k=0}^{n} C_3^k(\ln x)^{(k)}(e^x)^{(3-k)}dx^3$

$$=(e^x\ln x+\frac{3e^x}{x}-\frac{3e^x}{x^2}+\frac{2e^x}{x^3})dx^3$$

$$=e^x(\ln x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})dx^3$$

$$d^3(\frac{u}{v})=\sum_{k=0}^{3} C_3^k(\ln x)^{(k)}(e^{-x})^{(3-k)}dx^3$$

$$=[-e^{-x}\ln x+\frac{3}{x}e^{-x}+3\cdot(-\frac{1}{x^2})e^{-x}\cdot(-1)+\frac{2}{x^3}e^{-x}]dx^3$$

$$=e^{-x}(-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})dx^3$$

(2) $d^3(uv)=\sum_{k=0}^{3} C_3^k(\cos 2x)^{(k)}(e^{\frac{x}{2}})^{(3-k)}dx^3$

$$=(\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}\cos 2x-6\sin 2x\cdot\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}-12\cos 2x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+8\sin 2x\cdot e^{\frac{x}{2}})dx^3$$

$$d^3(\frac{u}{v})=\sum_{k=0}^{3} C_3^k(e^{\frac{x}{2}})^{(k)}(\sec 2x)^{(3-k)}dx^3$$

$$=[\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}\sec 2x+\frac{3}{4}e^{\frac{x}{2}}\cdot 2\sec 2x\tan 2x+\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}4\sec 2x(1+2\tan^2 2x)$$

$$+e^{\frac{x}{2}}\cdot 8\sec 2x\cdot\tan 2x(5+6\tan^2 2x)]dx^3$$

$$=e^{\frac{x}{2}}\sec 2x(48\tan^3 2x+12\tan^2 2x+\frac{83}{2}\tan 2x+\frac{49}{8})dx^3$$

4. 利用微分求近似值：

(1) $\sqrt[3]{1.02}$；(2) $\lg 11$；(3) $\tan 45°10'$；(4) $\sqrt{26}$

解 (1) 设 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}, x_0=1, \triangle x=0.02$,

由 $f(x_0+\triangle x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\triangle x$

$f(x_0)=1, f'(x_0)=\frac{1}{3}$，得 $\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\times 0.02\approx 1.007$

(2) 设 $f(x)=\lg x, x_0=10, \triangle x=1$，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$,

$f(x_0)=1, f'(x_0)=\frac{1}{10\ln 10}$,故 $\lg 11\approx 1+\frac{1}{10\ln 10}\approx 1.0434$

(3) 设 $f(x)=\tan x, x_0=\frac{\pi}{4}\quad \triangle x=10'=\frac{\pi}{1080}$,则

$f'(x)=\sec^2 x, f(x_0)=1, f'(x_0)=2.$

故 $\tan 45°10'\approx 1+2\times\frac{\pi}{1080}=1+\frac{\pi}{540}\approx 1.0058$

(4) 设 $f(x)=\sqrt{x}, x_0=25, \triangle x=1$,则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$f(x_0)=5, f'(x_0)=\frac{1}{10}$,故 $\sqrt{26}\approx 5+\frac{1}{10}=5.1$

5. 为了使计算出球的体积精确到1%,问度量半径为 r 时允许发生的相对误差至多应多少?

解　设球体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,则 $\triangle v\approx dv=v'(r)\triangle r=4\pi r^2\triangle r$

要使 $\left|\frac{\triangle V}{v}\right|\approx\left|\frac{dv}{v}\right|=\left|\frac{4\pi r^2\triangle r}{\frac{4}{3}\pi r^3}\right|=3\left|\frac{\triangle r}{r}\right|\leqslant 0.01.$

只需 $\left|\frac{\triangle r}{r}\right|\leqslant 0.01\times\frac{1}{3}\approx 0.33\%$

故测量半径为 r 时所允许发生的相对误差至多应是0.33%

6. 检验一个半径为2米,中心角55°的工件面积(图5-3),现可直接测量其中心角或此角所对的弦长,设量角最大误差为0.5°,量弦长最大误差为3毫米. 试问用哪一种方法检验的结果较为精确.

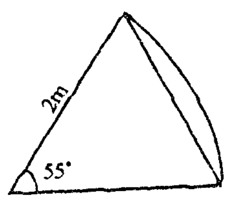

图5—3

解　设弦长 $L=2\times 2\times\sin\frac{\alpha}{2}$,其中 α 为中心角,$\triangle\alpha$ 为量角误差. 当 $\alpha_0=55°$ 时所引起的弦长误差.

$|\triangle L|\approx|dL|=\left|2\cos\frac{\alpha_0}{2}\right|\,|\triangle\alpha|,$

量角时最大误差 $|\triangle\alpha|=0.5°=\frac{\pi}{360}$,于是由量角引起的弦长最大误

差.

$|\Delta L| \approx |dL| = 2\cos\frac{55^\circ}{2} \cdot \frac{\pi}{360} = 0.8870 \times \frac{\pi}{180} \approx 0.015(\text{米}) > 3(\text{毫米})$

可见用直接测量此角所对弦长方法检验,其结果较为准确.

总 练 习 题

1. 设 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$,证明

(1)$y' = \frac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　　(2)$y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{n!C^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

证　(1)$y' = \frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{1}{(cx+d)^2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(2) 由于$\left(\frac{1}{(cx+d)^2}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^n n!c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$,所以

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2. 证明下列函数在 $x = 0$ 处不可导

(1)$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$　　(2)$f(x) = |\ln|x-1||$

解　(1) 因$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}x^{-\frac{1}{3}}$ 不存在

所以　$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x = 0$ 不可导

$$(2)f(x) = \begin{cases} \ln(x-1), & x \geqslant 2, \\ -\ln(x-1), & 1 < x < 2, \\ -\ln(1-x), & 0 < x < 1, \\ \ln(1-x), & x \leqslant 0 \end{cases}$$

因 $f_+'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\ln(1-x)-0}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}) = -\ln e^{-1} = 1$

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-x)-0}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^-} \ln(1-x)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{-1} = -1$$

而 $f_+'(0) \neq f_-'(0)$,所以 $f(x) = |\ln|x-1||$ 在 $x=0$ 不可导.

3.(1) 举出一个连续函数,它仅在已知点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不可导

(2) 举出一个函数,它仅在点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可导

解　(1)$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$ 是 R 上的连续函数,但它在点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不可导

(2) 设 $\varphi(x)$ 在 $x = a_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 处连续且 $\varphi(a_i) = 0$ 则 $f(x) = |x - a_i| \varphi(x)$,仅在 $a_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 可导.

4. 证明:(1) 可导的偶函数,其导函数为奇函数

(2) 可导的奇函数,其导函数为偶函数

(3) 可导的周期函数,其导函数仍为周期函数

证:(1) 设 $f(x)$ 为可导的偶函数,则有 $f(-x) = f(x)$. 对其两边求导得 $-f'(-x) = f'(x)$,所以 $f'(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f(x)$ 为可导的奇函数,则有 $f(-x) = -f(x)$. 对其两边求导得 $-f'(-x) = -f'(x)$,即 $f'(-x) = f'(x)$,所以 $f'(x)$ 为偶函数.

(3) 设 $f(x)$ 为可导的周期函数,T 为周期,则 $f(x+T) = f(x)$,两边求导即证.

5. 对下列命题,若认为是正确的,请给予证明. 若认为是错误的. 请举一反例予以否定.

(1) 设 $f = \varphi + \psi$,若 f 在点 x_0 可导,则 φ, ψ 在点 x_0 可导

(2) 设 $f = \varphi + \psi$,若 φ 在点 x_0 可导,ψ 在点 x_0 不可导,则 f 在点 x_0 一定不可导

(3) 设 $f = \varphi \cdot \psi$,若 f 在点 x_0 可导,则 φ, ψ 在点 x_0 可导

(4) 设 $f = \varphi \cdot \psi$,若 φ 在点 x_0 可导,ψ 在点 x_0 不可导,则 f 在点 x_0 一定不可导

解　(1) 错误. 如取 $\varphi = |x|$,$\psi = -|x|$,则 $f = 0$,易见 f 在

$x = 0$ 可导.但 φ, ψ 都在 $x = 0$ 不可导.

(2) 正确.事实上,若 f 在 x_0 可导,则由 $\psi = f - \varphi$ 及导数运算法则知,ψ 在点 x_0 可导,矛盾.

(3) 错误.如取 $\varphi = |x|, \psi = -|x|$,则有 $f = -x^2$,易见 f 在 $x = 0$ 可导.而 φ, ψ 在 $x = 0$ 不可导.

(4) 错误.如取 $\varphi = 0, \psi = -|x|$,则有 $f = 0$.而 φ 在 $x = 0$ 可导.ψ 在 $x = 0$ 不可导,但 f 在 $x = 0$ 可导.

6. 设 $\varphi(x)$ 在点 a 连续,$f(x) = |x - a| \varphi(x)$,求 $f_-'(a)$ 和 $f_+'(a)$,问在什么条件下 $f'(a)$ 存在?

解　因 $f(a) = |a - a| \varphi(a) = 0$,又 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 连续

所以　$f_+'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{|x - a| \varphi(x) - 0}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^+} \varphi(x) = \varphi(a)$

$$f_-'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{|x - a| \varphi(x) - 0}{x - a} = \lim_{x \to a^-} (-\varphi(x)) = -\varphi(a)$$

因此,$f'(a)$ 存在等价于 $\varphi(a) = 0$

7. 设 f 为可导函数,求下列各函数的一阶导数

(1)$y = f(e^x)e^{f(x)}$　　(2)$y = f(f(f(x)))$

解　(1)$y' = f'(e^x)e^x e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$

$$= e^{f(x)}[f'(e^x)e^x + f(e^x)f'(x)]$$

(2)$y' = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$

8. 设 φ, ψ 为可导函数,求 y'

(1)$y = \sqrt{(\varphi(x))^2 + (\psi(x))^2}$　　(2)$y = \arctan \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

(3)$y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) (\varphi, \psi > 0, \varphi \neq 1)$

解　(1)$y' = \dfrac{2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\psi(x)\psi'(x)}{2\sqrt{(\varphi(x))^2 + (\psi(x))^2}}$

$$= \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{(\varphi(x))^2 + (\psi(x))^2}}$$

(2)$y' = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2} \cdot \dfrac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}$

$$= \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$$

$$(3)y' = [\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}]' = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{(\ln\varphi(x))^2}$$

$$= \frac{\psi'(x)\varphi(x)\ln\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\psi(x)\varphi(x)(\ln\varphi(x))^2}$$

9. 设 $f_{ij}(x)(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 为可导函数. 证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

并利用这个结果求 $F'(x)$

$$(1)F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} \qquad (2)F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

证:由行列式定义知

$$|(f_{ij}(x))| = \sum_{(j_1,\cdots,j_n)}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}\cdots f_{nj_n}(x)$$

从而由导数性质知

$$\frac{d}{dx}|f_{ij}(x)|$$

$$= \sum_{(j_1,\cdots,j_n)}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}\sum_{k=1}^{n} f_{1j_1}(x)\cdots f_{k-1j_{k-1}}(x) f_{kj_k}'(x) f_{k+1j_{k+1}}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{(j_1,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)} f_{1j_1}(x) \cdots f_{k-1j_{k-1}}(x) f_{kj_k}{}'(x) f_{k+1j_{k+1}}(x) \cdots f_{nj_n}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}{}'(x) & f_{k2}{}'(x) & \cdots & f_{kn}{}'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

最后应用了行列式的定义.

(1) $$F'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(x^2+5)$$

(2) $$F'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6x^2$$