习　　题

1. 设 $C:\mathbf{x}(u^1(s),u^2(s))$ 是曲面上以弧长为参数的可微曲线. 从 C 的一点 P 出发, 沿它的单位切向量 $\mathbf{T}$ 存在一条测地线. 该测地线在点 P 的挠率称为 C 在点 P 的**测地挠率**, 用 τ_g 表示. 利用 (4.6) 式证明:

$$\tau_g=\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{n}}{\mathrm{d}\,s},\mathbf{T},\mathbf{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}}\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\mathrm{d}\,u^2}{\mathrm{d}\,s}\right)^2 & -\dfrac{\mathrm{d}\,u^1}{\mathrm{d}\,s}\dfrac{\mathrm{d}\,u^2}{\mathrm{d}\,s} & \left(\dfrac{\mathrm{d}\,u^1}{\mathrm{d}\,s}\right)^2\\ g_{11} & g_{12} & g_{22}\\ h_{11} & h_{12} & h_{22}\end{vmatrix}.$$

与上节的习题 2 相比较, 可得**命题**: 曲面上一条曲线为曲率线的充要条件是沿该曲线的测地挠率为零.

3. 在测地极坐标系 (ρ,θ) 中, $\rho=$ 常数的曲线称为**测地圆**. 证明:K 为常数的曲面上测地圆有常测地曲率.

4. 设旋转曲面 $\mathbf{x}=(v\cos u,v\sin u,f(v))$ 具有常 Gauss 曲率 $K=-\dfrac{1}{a^2}$. 证明: 函数 $f(v)=\pm\displaystyle\int\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}\,\mathrm{d}\,v$. 在上式中取负号, 再令 $v=a\cos\varphi$, 则有 $f=+a[\ln(\sec\varphi+\tan\varphi)-\sin\varphi]+c$. 这样的旋转曲面称为**伪球面**, 它是由曳物线生成的旋转曲面.

5. 设 $C:\mathbf{x}(u^1(s),\ u^2(s))$ 是曲面上以弧长为参数的可微曲线, $\mathbf{T}$ 为 C 的单位切向量, $\mathbf{n}$ 是曲面的单位法向量, $\mathbf{Q}=\mathbf{n}\times\mathbf{T}$. 试证明:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{T}}= & & k_g\mathbf{Q}+k_n\mathbf{n},\\ \dot{\mathbf{Q}}=-k_g\mathbf{T} & & +\tau_g\mathbf{n},\\ \dot{\mathbf{n}}=-k_n\mathbf{T}-\tau_g\mathbf{Q}. & & \end{cases}$$

6. 证明: 沿曲面上的任一曲线成立以下公式: $k_n^2+\tau_g^2-2Hk_n+K=0$.