参　考　答　案

《概率论与数理统计》1

注：
$\Phi(1)=0.84,\ \Phi(1.645)=0.95,\ \Phi(1.96)=0.975, \Phi(2.31)=0.99$，
$t_{0.05}(8)=1.86,\ t_{0.025}(8)=2.31,\ t_{0.05}(16)=1.75,\ t_{0.025}(16)=2.12,$
$\chi^2_{0.975}(8)=2.18,\ \chi^2_{0.95}(8)=2.73,\ \chi^2_{0.05}(8)=15.51,\ \chi^2_{0.025}(8)=17.53,$
$\chi^2_{0.05}(4)=9.49,\ \chi^2_{0.05}(3)=7.82, F_{0.025}(9,7)=4.82, F_{0.025}(7,9)=4.2.$

一．填空题（每小格 3 分，共 39 分。每个分布要求写出参数）：

1. 设事件 *A,B,C* 相互独立，已知 $P(A)=0.5, P(A\cup B)=0.6, P(\bar{C}\mid A)=0.4$, 则 P(B)=

____0.2____， $P(A\cup B\cup C)=$____0.84____.

2. 在区间 $(0,\theta)$ (参数 $\theta>0$)内独立重复观测 5 次，记为 $X_1,\cdots,X_5, X_i\sim U(0,\theta)$，(1) 设 $\theta=2$，则最大观测值小于 1.8 且最小观测值大于 0.4 的概率为____0.16807____; (2) 设 $\theta>0$ 未知，5 次观测值为 1.18,0.48,1.59,0.13,1.76，则 θ 的矩估计值是____2.056____.

3.某超市从开门到第 1 位顾客进入所需时间 *X*(分钟)的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5}, x>0\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

则超市开门后的 10 分钟内至少有 1 人进入的概率为____$1-e^{-2}$____; 从开门到第 1 位顾客进入平均花____5____分钟.

4．设某地区男性成年人的身高 *X*（厘米）与体重 *Y*（公斤）服从二元正态分布，$X\sim N(169.5,10.5^2), Y\sim N(57.3,16.2^2), \rho_{XY}=0.6$，从该地区独立随机选 *n* 名男子，测得身高体重为 $(X_1,Y_1)\cdots(X_n,Y_n)$, 记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$ 。则 $\bar{X}$ 服从____$N(169.5,\frac{10.5^2}{n})$____

分布，$Cov(\bar{X},\bar{Y})=$____102.06/*n*____，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-169.5)(Y_i-57.3)}{10.5\times16.2}\xrightarrow{P}$____0.6____.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 均未知, $X_1,\cdots,X_9$ 为来自 *X* 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S 分别是样本均值和样本标准差，(1) 若根据样本观测值，$\bar{x}=7.076, s=1.2$, 则 σ^2 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为____(0.657 ， 5.284)____，检验假设 $H_0:\mu=8, H_1:\mu\neq8$ 的 P_值为

____0.05____；(2) 设 X_{10} 是从总体中独立抽取的另一次观测，则 $\frac{3(X_{10}-\bar{X})}{\sqrt{10}S}$ 服从

$\underline{\qquad t(8) \qquad}$分布.

6. 在研究我国人均消费水平问题上，考虑人均国民收入 x（千元）对人均消费金额 Y（千元）的影响。设 $Y \sim N(a+bx, \sigma^2)$, a, b, σ^2 均未知，$(x_1, y_1) \cdots (x_{19}, y_{19})$ 是 1980-1998 年的数据，已知 $\bar{x}=2.32$, $\bar{y}=1.09$, $\sum_{i=1}^{19}(x_i-\bar{x})^2=73.980$, $\sum_{i=1}^{19}(y_i-\bar{y})^2=15.343$,

$\sum_{i=1}^{19}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=33.291$, 采用最小二乘估计，则回归方程 $\hat{y}=$ $\underline{\qquad 0.046+0.45x \qquad}$.

二.（11 分）有 A,B 两盒，A 盒中有 1 个红球 1 个白球，B 盒中有 4 件正品 2 件次品。先从 A 盒中采用<u>放回</u>抽样取 2 球，X 表示从 A 盒中取到的红球数，若 X=1 时，则从 B 盒中采用<u>不放回</u>抽样取 3 件产品；若 $X \neq 1$时，从 B 盒中采用<u>不放回</u>抽样取 2 件产品。Y 表示从 B 盒中取到的次品数。(1)已知 X=1, 求 Y 的条件分布律；(2) 求 Y 的分布律.

（1）$P(Y=0 \mid X=1)=C_2^0 C_4^3 / C_6^3=0.2$；$P(Y=1 \mid X=1)=C_2^1 C_4^2 / C_6^3=0.6$；

$$P(Y=2 \mid X=1)=C_2^2 C_4^1 / C_6^3=0.2$$

（2）$P(Y=0)=P(X=1)P(Y=0 \mid X=1)+P(X \neq 1)P(Y=0 \mid X \neq 1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

$$P(Y=1)=P(X=1)P(Y=1 \mid X=1)+P(X \neq 1)P(Y=1 \mid X \neq 1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}=\frac{17}{30}$$

$$P(Y=2)=P(X=1)P(Y=2 \mid X=1)+P(X \neq 1)P(Y=2 \mid X \neq 1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{15}=\frac{4}{30}$$

三.（12 分）设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1, \cdots, X_{200}$ 为来自 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值;（1）若 $\lambda=2$，求 $P(X_1 \geq 2)$ 的值，以及 $P(\bar{X}>2.1)$ 的近似值。（2）若 λ >0 未知，判断统计量 $T=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} X_i(X_i-1)$ 是否为 λ^2 的无偏估计量，说明理由.

（1）$P(X_1 \geq 2)=1-P(X_1<2)=1-P(X_1=0)-P(X_1=1)=1-3e^{-2}=0.594$

由中心极限定理 $\bar{X} \overset{\text{近似}}{\sim} N(2, 0.1^2)$，$P(\bar{X}>2.1) \approx 1-\Phi(\frac{2.1-2}{0.1})=0.16$

（2）$E(T)=E\{\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} X_i(X_i-1)\}=E(X(X-1))=E(X^2)-E(X)=D(X)+E^2(X)-E(X)$

$$=\lambda+\lambda^2-\lambda=\lambda^2$$

所以 T 是 λ^2 的无偏估计量。

四．(12 分) 设随机变量(X,Y)的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}6(x-y), 0<y<x<1\\ 0, 其它\end{cases}$，求

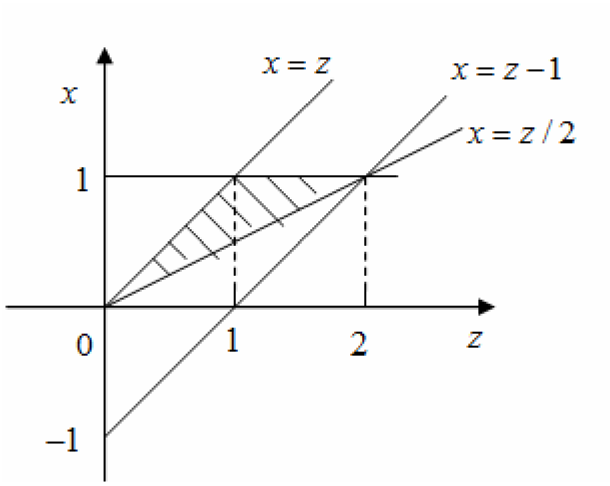
（1）$P(Y>0.5)$;（2）X 的边际密度函数 $f_X(x)$　(3) 设 $Z=X+Y$,求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$

（1）$P(Y>0.5)=\iint\limits_{y>0.5} f(x,y)dxdy=\int_{0.5}^{1}dx\int_{0.5}^{x}6(x-y)dy=\int_{0.5}^{1}(3x^2-3x+3/4)=1/8$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 6(x-y)dy=3x^2, 0<x<1\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad, 其它\end{cases}$

(3) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{z/2}^{z}6(2x-z)dx=3z^2/2 \qquad, 0<z<1\\ \int_{z/2}^{1}6(2x-z)dx=3(2-z)^2/2, 1<z<2\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, 其它\end{cases}$

由$0<y<x<1$得$0<z-x<x<1$，画出下图



五．（12 分）设两个独立正态总体 $X\sim N(m_1,s_1^2), Y\sim N(m_2,s_2^2)$,现分别从总体 X 和 Y 中取得容量为 10 和 8 的样本，测得样本均值 $\bar{x}=148.32, \bar{y}=141.11$，样本标准差 $s_1=6.4$，$s_2=5.4$.(1)以显著水平 0.05 检验假设 $H_0: s_1^2=s_2^2, H_1: s_1^2\neq s_2^2$；(2) 设 $s_1^2=s_2^2=s^2$ 未知，求 m_1-m_2 的置信度为 95%的双侧置信区间.

(1) 取检验统计量 $F=S_1^2/S_2^2$,

H_0 的拒绝域为 $F\geq F_{a/2}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F\leq F_{1-a/2}(n_1-1,n_2-1)$

$F=S_1^2/S_2^2=6.4^2/5.4^2=1.04$；

$F_{0.025}(9,7)=4.82\ \ F_{0.975}(9,7)=1/4.20=0.238$

可见 $F_{1-a/2}(n_1-1,n_2-1)<F<F_{a/2}(n_1-1,n_2-1)$，

因此接受原假设，即认为方差相同。

（2）取枢轴量 $G=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(m_1-m_2)}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$；

设 $P(|G|\le t_{a/2}(n_1+n_2-2))=1-a$

即得 m_1-m_2 的 $1-a$ 的双侧置信区间为 $(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{a/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2})$

$$S_w=\sqrt{\{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\}/(n_1+n_2-2)}=\sqrt{35.7975}=5.983$$

$$t_{a/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}=2.12*5.983*\sqrt{1/10+1/8}=6.017$$

$$(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{a/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2})=(7.21\pm 6.017)=(1.193,13.227)$$

六.（14 分）对总体进行 100 次独立重复观察，得到观察值 $x_i, i=1,\mathbf{L},100$,其中最小值为 1.01，最大值为 520.1，平均值为 16.7，具体数据分布如下：

观察值 x_i 的范围	$x\le 1.6$	$1.6<x\le 2$	$2<x\le 4$	$4<x\le 10$	$x>10$
频数 n_i	33	17	23	12	15

(1)若总体 X 的概率密度函数为 $f(x,q)=\begin{cases} q/x^2, x\ge q \\ 0,\text{其它}\end{cases}$，求 q 的极大似然估计值；

（2）在显著水平 0.05 下用 c^2 拟合检验法检验 H_0：总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} x^{-2}, x\ge 1 \\ 0,\text{其它}\end{cases}$.

(1)设 $L(q)=\prod_{i=1}^{100}f(x_i)=\prod_{i=1}^{100}q/x_i=q^{100}/(x_1x_2\mathbf{L}\,x_{100})$

$\ln L(q)=100\ln q-\ln(x_1x_2\mathbf{L}\,x_{100})$

$\ln L(q)/dq=100/q>0$， $L(q)$关于q增函数，

$\hat{q}_L=\min(x_1,\mathbf{L},x_{100})=1.01$

(2) $q=1$，

$P(X\le 1.6)=\int_1^{1.6}x^{-2}dx=0.375$,同理得$X$落在其他四个区间的概率为:0.125, 0.25, 0.15, 0.1.

观察值 x_i 的范围	$x \le 1.6$	$1.6 < x \le 2$	$2 < x \le 4$	$4 < x \le 10$	$x > 10$
频数 n_i	33	17	23	12	15
概率 p_i	0.375	0.125	0.25	0.15	0.1
理论频数 np_i	37.5	12.5	25	15	10

$$\text{检验统计量}\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{n_i^2}{np_i}-n,\quad H_0\text{的拒绝域}\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{np_i}-n\ge \chi_\alpha^2(k-r-1)$$

这里 n=100, k=5, r=0

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i^2}{np_i}-n=\frac{33^2}{37.5}+\frac{17^2}{12.5}+\frac{23^2}{25}+\frac{12^2}{15}+\frac{15^2}{10}-100=5.42<\chi_\alpha^2(k-r-1)=\chi_{0.05}^2(4)=9.49$$

接受原假设，即认为总体 X 的概率密度是 $f(x)=\begin{cases}x^{-2}, x\ge 1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$。

一填空

5（2）

$$\because X_{10}-\bar{X}=-\frac{1}{9}X_1-\frac{1}{9}X_1-\cdots-\frac{1}{9}X_9+X_{10}$$

$$\therefore X_{10}-\bar{X}\text{服从正态分布}$$

$$E(X_{10}-\bar{X})=E(X_{10})-E(\bar{X})=\mu-\mu=0$$

$$D(X_{10}-\bar{X})=D(X_{10})+D(\bar{X})-2Cov(X_{10},\bar{X})$$

$$\overset{\text{独立}}{=}\sigma^2+\frac{\sigma^2}{9}+0=\frac{10}{9}\sigma^2$$

$$\therefore X_{10}-\bar{X}\sim N(0,\frac{10}{9}\sigma^2)$$

$$\text{记}U=\frac{(X_{10}-\bar{X})-0}{\sqrt{\frac{10}{9}\sigma^2}}=\frac{3(X_{10}-\bar{X})}{\sigma\sqrt{10}}\sim N(0,1)$$

$$\text{记}V=\frac{(9-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8)$$

由抽样分布定理2知：U,V独立

$$\frac{U}{\sqrt{V/8}}=\frac{\frac{3(X_{10}-\bar{X})}{\sigma\sqrt{10}}}{\sqrt{\frac{(9-1)S^2}{\sigma^2}/8}}=\frac{3(X_{10}-\bar{X})}{S\sqrt{10}}\sim t(8)$$

《概率论与数理统计》2

一．填空题（每小格 3 分，共 33 分）：

1．设 A,B 为两个随机事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$。（1）若 A与B 至少有一个发生的概率为 0.7，则 A与B 一定相互独立吗？答：__是__（是或否）；（2）若 A与B 至少有一个发生的概率为 0.9，则 A与B 一定不相容吗？答：__否__（是或否）．

2. 设一顾客在饭店等待服务的时间服从均值为 5 分钟的指数分布，则一顾客等待时间超过 5 分钟的概率为__e^{-1}__，在该顾客至少等了 5 分钟的情况下，他继续等待的时间不到 5 分钟的概率为__$1-e^{-1}$__.

3. 设某项试验成功的概率为 0.4，失败的概率为 0.6，（1）若独立重复进行 5 次试验，X 表示成功次数，则 $P\{X>3\}=$__0.087__，（2）若独立重复进行，直到出现第 2 次成功为止，Y 表示总的试验次数，则 $P\{Y>3\}=$__0.648__.

4．设 (X,Y) 服从二元正态分布，$X\sim N(5,3^2)$，$Y\sim N(0,2^2)$，ρ_{XY} 是 X与Y 的相关系数．（1）若 $\rho_{XY}=0$，则 $P\{X>2Y\}=$__0.84__，$\left(\dfrac{2X-3Y-10}{2X+3Y-10}\right)^2\sim$__$F(1,1)$__分布（写出参数）；（2）若 $X+Y$ 与 $X-3Y$ 相互独立，则 $\rho_{XY}=$__-0.25__．（3）若对 Y 进行 n 次独立重复观测，结果是 $Y_1,\ldots,Y_n$，则当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{Y_i}\xrightarrow{P}$__$e^2$__，当 $n=100$ 时，Y 的观测结果 $Y_1,\ldots,Y_{100}$ 中大于 2 出现的次数不超过 22 次的概率近似值为__0.95__.

二. (12分) 某厂生产的某产品的优质品率 X 有概率密度 $f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

供货时，经检验若优质品率超过 0.7，则商家就接收该批产品，若优质品率在 0.4~0.7 之间，商家有 60%可能性接收该批产品，若优质品率低于 0.4，商家有 10%可能性接收该批产品. (1) 求商家接收该产品的概率；(2) 若商家接收了该产品，求优质品率超过 0.7 的概率.

设 A="商家接收产品"，B_1,B_2,B_3 分别表示优质品率">0.7"，"$0.4\sim0.7$"，"<0.4".

则 $P(B_1)=P(X>0.7)=\int_{0.7}^{1}12x^2(1-x)dx=0.3483$， $P(B_2)=0.4725$，$P(B_3)=0.1792$

$P(A|B_1)=1$， $P(A|B_2)=0.6$ ， $P(A|B_3)=0.1$

(1) $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.3483\times1+0.4725\times0.6+0.1792\times0.1=0.64972$

(2) $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.3483\times1}{0.64972}=0.5361$

三. (10分) 对某银行的一个 ATM 机每隔 5 分钟观测使用的人数 X，共观测了 96 次，发现无人使用的情况出现 15 次，有 1 人使用的情况出现 27 次，2 人使用的情况出现 28 次，3 人使用的情况出现 19 次，4 人使用的情况出现 7 次. 在显著水平 0.05 下用 χ^2 拟合检验法检验 $H_0: X\sim\pi(2)$.

$P(X=k)=\dfrac{2^k e^{-2}}{k!}$ ，$k=0,1,2,\cdots$

X	0	1	2	3	>3
n_i	15	27	28	19	7
p_i	0.135	0.271	0.271	0.180	0.143
np_i	12.96	26.016	26.016	17.28	13.728

$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\dfrac{n_i^2}{np_i}-n=3.978<\chi^2_\alpha(k-r-1)=\chi^2_{0.05}(5-0-1)=9.4$

接受 H_0 即认为

四.（12 分）总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$，参数 $\theta > 0$ 未知，$X_1, \ldots, X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，

（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$，判断 $\hat{\theta}^2$ 是否为 θ^2 的相合估计量，说明理由.（2）若 $n=10$，样本观测值为 1.59 2.18 2.31 1.54 1.55 2.89 1.64 2.96 1.51 2.94，求 θ 的极大似然估计值.

(1) $\mu_1 = E(X) = \frac{\theta+2\theta}{2} = \frac{3}{2}\theta$，$\theta = \frac{2}{3}\mu_1$，$\hat{\theta} = \frac{2}{3}\overline{X}$

$\because \hat{\theta} = \frac{2}{3}\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{3}X_i \xrightarrow{P} E(\frac{2}{3}X_i) = \frac{2}{3}E(X_i) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\theta = \theta$

$\therefore \hat{\theta}^2 \xrightarrow{P} \theta^2$

(2) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \theta^{-n}$，$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} < 0$

$L(\theta)$ 关于 θ 单调减函数. $\theta \le X_1, X_2, \cdots, X_n \le 2\theta$

$\therefore \frac{1}{2}\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le \theta \le \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

即 $\frac{1}{2}\times 2.96 \le \theta \le 1.51$. 取 $\hat{\theta}_L = 1.48$.

五.（15 分）设随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$，（1）求 $P(X>0.5)$；（2）求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；（3）判断 X 与 Y 是正相关，负相关还是不相关，说明理由；（4）设 $Z=\max(X,Y)$，求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 及概率密度 $f_Z(z)$.

(1) $P(X>0.5) = \iint_{x>0.5} f(x,y)dxdy = \int_{0.5}^{1}dx\int_{0.5}^{1}(x+y)dy = 0.625$

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_{0.5}^{1}(x+y)dy = y+0.5, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

当 $0<y<1$ 时. $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{x+y}{y+0.5}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

(3) $E(XY) = \iint_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 xy(x+y)dy = \frac{1}{3}$

$E(X) = E(Y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_0^1 x(x+y)dy = \frac{7}{12}$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{144} < 0$，负相关.

(4) $F_Z(z) = P(\max(X,Y) \le z) = P(X\le z, Y\le z) = \iint_{x\le z, y\le z} f(x,y)dxdy$

$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z\le 0 \\ \int_0^z dx\int_0^z (x+y)dy = z^3, & 0<z<1 \\ 1, & z\ge 1 \end{cases}$ $f_Z(z) = \begin{cases} 3z^2, & 0<z<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

六. （18分）观察某餐厅厨房煤气灶A的煤气消耗量X（千瓦时），设$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，6天的观测数据为 5.1 5.5 7.4 6.8 7.5 7.3，计算得样本均值6.6，样本方差1.088，（1）在显著水平0.05下检验假设$H_0:\mu_1=6,H_1:\mu_1\neq 6$，并计算$P_$值；（2）求$\sigma^2$的置信度为95%的双侧置信区间。（3）若对该餐厅另外两个煤气灶B和C的煤气消耗量Y和Z也进行观测，设$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，$Z\sim N(\mu_3,\sigma^2)$，X,Y,Z相互独立，数据如下：

煤气灶名	6天观测数据	样本均值	样本方差
A	5.1 5.5 7.4 6.8 7.5 7.3	6.6	1.088
B	4.8 4.4 6.5 6.3 5.6 7.2	5.8	1.140
C	3.9 4.0 5.4 5.1 5.2 6.4	5.0	0.876

请完成下面的方差分析表，

并在显著水平0.05下检验假设：$H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3,H_1:\mu_1,\mu_2,\mu_3$不全相等.

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
煤气灶	7.68	2	3.84	3.711
误差	15.52	15	1.035	
总和	23.2	17		

(1) 取检验统计量 $t=\dfrac{\bar{x}-6}{S/\sqrt{n}}$，$H_0$的拒绝域 $|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$|t|=\left|\dfrac{6.6-6}{\sqrt{1.088}/\sqrt{6}}\right|=1.409<t_{0.025}(5)=2.57$，接受$H_0$.

$P\_=P(|t|\geq 1.409)=2P(t(5)\geq 1.409)=2\times 0.109=0.218$

(2) 取 $G=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$. 设 $P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$

即 $P\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=1-\alpha$.

即σ^2的95%的置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(5)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(5)}\right)=(0.424,6.554)$

(3) $\bar{X}_{1\cdot}=6.6$，$\bar{X}_{2\cdot}=5.8$，$\bar{X}_{3\cdot}=5.0$，$\bar{X}=5.8$.

$S_A=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_j}(\bar{X}_{i\cdot}-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{r}n_j(\bar{X}_{i\cdot}-\bar{X})^2$

$=6(6.6-5.8)^2+6(5.8-5.8)^2+6(5-5.8)^2=7.68$

$S_E=S_T-S_A=23.2-7.68=15.52$.

其余数据见方差分析表，$F=\dfrac{MSA}{MSE}=3.711>F_{0.05}(2,15)=3.68$.

从而拒绝H_0. 即认为三个煤气灶煤气消耗量有显著差异.

《概率论与数理统计》3

一． 填空题（每小格 3 分，共 39 分）：

1. A,B,C 为三个随机事件，设事件 A 与事件 B 相互独立，且当事件 A 与事件 B 至少有一个发生时，事件 C 一定发生。已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.4$，则 $P(A-B)=$ __0.3__，事件 C 发生的概率最小值为 __0.7__。

2. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布。已知 $D(2X+1)=E(2X+1)$，则 $E(X)=$ __0.5__，$P(X\geq 2)=$ __$1-1.5e^{-0.5}$__。

3. 有甲乙两只袋，甲袋里有 4 个红球，2 个白球；乙袋里有 2 个红球、2 个白球。现从甲袋中不放回取 2 个球放入乙袋，然后再从乙袋中不放回取出 2 球。以 X 表示从甲袋中取到的红球数，Y 表示从乙袋中取到的红球数，则 $P(X=1)=$ __8/15__，$P(Y=0)=$ __4/25__，$P(X=1|Y=0)=$ __2/3__。若将这样的试验独立重复进行 n 次，X_i 表示第 i 次从甲袋中不放回取 2 球时取到的红球数，$i=1,2,...,n$，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛到 __4/3__。

4. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_{16}$ 为来自 X 的简单随机样本，$\bar{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，$S^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\bar{X})^2$，(1) 设 $\mu=0,\sigma^2$ 未知，则 $\dfrac{(\sum_{i=1}^{8}X_i)^2}{\sum_{i=9}^{16}X_i^2}\sim$ __F(1,8)__ 分布（要求写出参数）；(2) 设 μ,σ^2 均未知，则 σ^2 的矩估计量为 __B_2__；若 $a\sum_{i=1}^{8}(X_{i+8}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计，则 $a=$ __1/16__；μ 的置信度为 95%的单侧置信上限为 __$\bar{X}+0.4375S$__；假设 $H_0:\sigma^2\geq 15, H_1:\sigma^2<15$ 的显著水平为 0.05 的拒绝域为 __$S^2\leq 7.26$__。

二.（13 分）为比较三个型号的汽车的油耗情况，随机抽取 A 型汽车 6 辆，B 型汽车 5 辆，C 型汽车 7 辆，记录每辆汽车每公升汽油行驶的公里数，得如下数据：

A 型(X_1)	12.9	11.3	12.6	14.1	13.2	12.1	
B 型(X_2)	15.3	13.2	12.8	13.6	14.1		
C 型(X_3)	11.6	11.7	12.1	12.5	13.1	13.6	11.5

设每个型号的数据 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2), i=1,2,3,$ $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\sigma^2$ 均未知。（1）写出计算过程，同时将结果填入下表，并在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0: \mu_1=\mu_2=\mu_3, H_1: \mu_1,\mu_2,\mu_3$不全相等；（2）求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95%的置信区间。

（注：$S_A=\sum_{i=1}^{3} n_i \overline{x}_{i\bullet}^2 - n\overline{x}^2$）

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素	6.765	2	3.3825	4.152
误差	12.22	15	0.81467	
总和	18.985	17		

$F_{0.05}(2,15)=3.68<F$比，拒绝原假设。

(2) $(\overline{x}_{1\bullet}-\overline{x}_{2\bullet} \pm t_{0.025}(15)\sqrt{MS_E}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})=(-2.26, 0.06)$

三.（12 分）设连续型随机变量 X 满足：当 $0<x\le 1$ 时，$P(0<X\le x)=\frac{x^2}{2}$，当 $2<x\le 3$ 时，$P(2<X\le x)=\frac{(x-2)^2}{2}$。求（1）$X$ 的分布函数 $F(x)$；（2）X 的概率密度函数 $f(x)$；（3）X 的数学期望 $E(X)$。

$$
(1)\ F(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0\le x<1, \\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2, \\ \frac{(x-2)^2}{2}+\frac{1}{2}, & 2\le x<3, \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}
$$

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ x-2, & 2<x<3, \\ 0, & 其它 \end{cases}$

(3) $E(X)=\int_0^1 x^2dx+\int_2^3(x^2-2x)dx=\frac{5}{3}$

四.（12 分）某煤矿一天的产煤量 X（以万吨计）服从 $N(1.5,0.1^2)$，设每天的产量相互独立，一个月按 30 天计，求（1）一天产量超过 1.6 万吨的概率；（2）后半个月产量比前半个月产量多 0.5 万吨的概率；（3）月平均产量与月第一天产量的相关系数。

(1) $P(X>1.6)=1-\Phi(\frac{1.6-1.5}{0.1})=1-\Phi(1)=0.16$

(2) $P(\sum_{i=16}^{30}X_i-\sum_{i=1}^{15}X_i>0.5)=1-\Phi(\frac{0.5}{0.1\sqrt{30}})=1-\Phi(\frac{\sqrt{30}}{6})=0.18$

(3) $Cov(\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}X_i,X_1)=\frac{0.1^2}{30},D(\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}X_i)=\frac{0.1^2}{30},D(X_1)=0.1^2,$

$$\rho=\frac{Cov(\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}X_i,X_1)}{\sqrt{D(\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}X_i)}\sqrt{D(X_1)}}=\frac{\sqrt{30}}{30}=0.1826$$

五.（12 分）某电子监视器的屏幕为单位圆。设目标出现的位置点 $A(x,y)$ 服从单位圆（$x^2+y^2\le 1$）上的均匀分布。求（1）点 A 与屏幕中心位置（0，0）的距离小于 0.5 的概率；（2）$f_{Y|X}(y|x)$；（3）若在某个时间段陆续观测到了 108 个目标点，求其中至多有 36 个目标点出现在第一象限（$x>0,y>0$）的概率近似值。

(1) $P(X^2+Y^2\le 1/4)=0.25$

(2) $f_X(x)=\begin{cases} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1, \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$-1<x<1,\quad f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}, \\ 0, & 其它 \end{cases}$

(3) Z 表示出现在第一象限的目标数，则 $Z \sim B(108,\ \frac{1}{4})$， 由中心极限定理

$$P(Z \le 36) \approx \Phi(\frac{36-27}{\sqrt{27 \times \frac{3}{4}}}) = \Phi(2) = 0.98$$

六．（12 分）设总体 X 的概率密度 $f(x;\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x-\mu}{2}}, & x \ge \mu, \\ 0, & x < \mu. \end{cases}$，$X_1,\ldots,X_n$为来自$X$

的简单随机样本，（1）求 μ 的极大似然估计量 $\hat{\mu}$，（2）求 $\hat{\mu}$ 的概率密度；（3）若

$n(\hat{\mu}-\mu) \sim \chi^2(2)$，求 μ 的置信度为 95%的单侧置信下限。

(1) 似然函数 $L(\mu) = \frac{1}{2^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu}{2}}$， $x_i \ge \mu, i = 1,2,\ldots,n$ 是 μ 的单调增函数，

所以 μ 的极大似然估计量 $\hat{\mu} = \min\{X_1,\ldots,X_n\}$

(2) $\hat{\mu}$ 的分布函数 $F_{\hat{\mu}}(x) = 1-(1-F_X(x))^n = \begin{cases} 1-e^{\frac{-n(x-\mu)}{2}}, x > \mu \\ 0, \quad x \le \mu \end{cases}$

$\hat{\mu}$ 的概率密度 $f_{\hat{\mu}}(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}e^{\frac{-n(x-\mu)}{2}}, x > \mu \\ 0, \quad x \le \mu \end{cases}$

(3) $n(\hat{\mu}-\mu) \sim \chi^2(2), \Rightarrow n(\hat{\mu}-\mu) < \chi^2_{0.05}(2),$

$$\Rightarrow \mu > \hat{\mu} - \frac{\chi^2_{0.05}(2)}{n} = \min X_i - \frac{5.99}{n}$$