南京航空航天大学 2012-2013 学年第一学期“高等代数 I”期末参考解析

一、（共 50 分）

1、设 $D=\begin{vmatrix}1 & -5 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$.

解：$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=7, A_{12}=\begin{vmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=3, A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=3, A_{14}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=2,$

故 $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=7+6+9+8=30$.

2、已知 $|(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)|=2$，求 $|(\alpha_1 \quad -2\alpha_2+\alpha_1 \quad 3\alpha_3+\alpha_2)|$.

解：$|(\alpha_1 \quad -2\alpha_2+\alpha_1 \quad 3\alpha_3+\alpha_2)|=|(\alpha_1 \quad -2\alpha_2 \quad 3\alpha_3+\alpha_2)|=|(\alpha_1 \quad -2\alpha_2 \quad 3\alpha_3)|=-12$.

3、已知 A 为 2 阶方阵，若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $\widetilde{A}$.

解：由条件，有 $\widetilde{P}^{-1}\widetilde{A}\widetilde{P}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，故有 $P^{-1}AP=\widetilde{P}^{-1}\widetilde{A}\widetilde{P}$，可得 $A=|P^{-1}|\widetilde{A}|P|$（$A$ 满秩）.

得 $A=\widetilde{A}$，故 $A^2=|A|I=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

4、已知 A,B 为 3 阶方阵，且满足：$|A|=2,|B|=3.|A^{-1}+B|=3$，求 $|A+B^{-1}|$.
解：由条件 $|I+AB|=|A||A^{-1}+B|=6$，又 $|I+AB|=|B||A+B^{-1}|$，故 $|A+B^{-1}|=2$.

5、求 $\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{2013}$.

解：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{2013}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{2013}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$

6、计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1+x_1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+x_2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+x_3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+x_4\end{vmatrix}(x_1x_2x_3x_4\neq 0)$.

解：$D=\begin{vmatrix}1+x_1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+x_2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+x_3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+x_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1+x_1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2+x_2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3+x_3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4+x_4\end{vmatrix}=$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & x_1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & x_2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & x_3 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & x_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{3}{x_3}+\frac{4}{x_4} & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4\end{vmatrix}=(1+\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{3}{x_3}+\frac{4}{x_4})x_1x_2x_3x_4.$$

7、已知矩阵 X 满足 $AX=A+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.求 X.

解：$X=(A-2I)^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

8、设 $\alpha_1=(1\quad 3\quad 1\quad 2)^T$，$\alpha_2=(2\quad 5\quad 3\quad 3)^T$，$\alpha_3=(0\quad 1\quad -1\quad 2)^T$，$\alpha_4=(3\quad 10\quad 2\quad 2)^T$，求矩阵 $(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4)$ 的秩及由这四个向量组成的向量组的一个极大无关组.

解：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 5 & 1 & 10\\ 1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 做初等行变换，有：$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，秩为 3.

由变换前后列向量组线性关系一致知，一个极大无关组为 α_1，α_2，α_3.

二、（共 10 分）讨论非齐次线性方程组 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$ 解的情况，并在有无穷多解时求出其通解.

解：对其增广矩阵 $\begin{pmatrix}2-\lambda & 2 & -2 & 1\\ 2 & 5-\lambda & -4 & 2\\ -2 & -4 & 5-\lambda & -\lambda-1\end{pmatrix}$ 做初等行变换，有：

$\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5-\lambda & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\end{pmatrix}$ 故等价方程组为：$\begin{cases}(1-\lambda)x_1=0\\ (5-\lambda)x_2=6\\ (1-\lambda)x_3=1-\lambda\end{cases}$.

①若 $\lambda\neq 1,\lambda=5$，方程组无解；
②若 $\lambda\neq 1,\lambda\neq 5$，方程组有唯一解；
③若 $\lambda=1,\lambda=5$，方程组有无穷多解，通解为 $x=(m,\frac{3}{2},n)^T(m,n\text{任取})$.

三、（共 10 分）设 A,B 分别为 $m\times n,n\times m(m>n)$ 矩阵，求证：$|AB|=0$

证明：令 $X=\begin{pmatrix}A & O_{m\times(m-n)}\end{pmatrix}$ 和 $Y=\begin{pmatrix}B\\ O_{(m-n)\times m}\end{pmatrix}$，则 $XY=AB$.

故 $|AB|=|XY|=|X||Y|=0$.

四、（共 10 分）设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，且 $r(CA)=r(A)$.求证：$r(CAB)=r(AB)$.
证明：由条件，此时 $Ax=0$ 与 $CAx=0$ 同解.易知 $ABx=0$ 的解都是 $CABx=0$ 的解.
而 Bx 是 $CAx=0$ 的解，故 Bx 也是 $Ax=0$ 的解，故 $CABx=0$，故 $CABx=0$ 的解都是 $ABx=0$ 的解.
故 $ABx=0$ 与 $CABx=0$ 同解，故 $r(CAB)=r(AB)$.

五、（共 10 分）已知矩阵 A 为秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵.求证：存在 n 阶的可逆矩阵 B 和秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵 C，使得：$A=BC$，$C^2=C$.

证明：由条件 $A=P\begin{pmatrix}I_{n-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q,|P||Q|\neq 0$，故 $B=PQ$，$C=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_{n-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$ 满足条件.

六、(共10分)设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵，且 A,B 为可逆矩阵.求证：$|A||B-CA^{-1}D|=|B||A-DB^{-1}C|$.
证明：有：$\begin{pmatrix}I & O\\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & D\\ C & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & D\\ O & B-CA^{-1}D\end{pmatrix},\begin{pmatrix}O & I\\ I & -DB^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & D\\ C & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C & B\\ A-DB^{-1}C & O\end{pmatrix}$.
同取行列式即得 $|A||B-CA^{-1}D|=|B||A-DB^{-1}C|$.