解 析 几 何

December 12, 2019

91页作业

1. (1). 解：因为 $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz$. 令

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\-3&1&-1\\1&-1&5\end{pmatrix},$$

其对应的特征多项式为

$$0=|A-\lambda I|=\lambda^3-7\lambda^2+36,$$

则 A 的特征根为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$. 他们对应的特征向量分别为

$$\vec{X}_1=(1,1,0)^T,\quad \vec{X}_2=(-1,1,1)^T,\quad \vec{X}_3=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^T,$$

取 $\vec{e}_1^*=\frac{\vec{X}_1}{|\vec{X}_1|}$, $\vec{e}_2^*=\frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_2|}$, $\vec{e}_3^*=\frac{\vec{X}_3}{|\vec{X}_3|}$, 那么有 $(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\,C$, 其中过渡矩阵 C 为

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$$

所以从坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系$\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix},\tag{1-1}$$

转置得

$$(x,y,z)=(x^*,y^*,z^*)\,C^T=(x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}\tag{1-2}$$

将(1-1),(1-2)代入曲面方程得它在 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的方程为

$$
\begin{aligned}
0 &= (x,y,z)\,A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+(-4,8,-12)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+14\\
&= (x^*,y^*,z^*)\,C^TAC\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+(-4,8,-12)\,C\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+14\\
&= (x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix} -2&0&0\\ 0&3&0\\ 0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+\left(2\sqrt{2},0,-6\sqrt{6}\right)\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+14\\
&= -2\left(x^*-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3(y^*)^2+6\left(z^*-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+6
\end{aligned}
$$

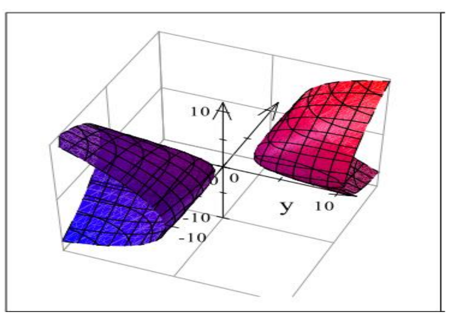
现在将原点平移到$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$点，也即引入新的坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$，使得从 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 到 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的坐标变换公式为

$$
\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}. \tag{1-3}
$$

于是原方程在坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 中的方程为

$$
-2x'^2+3y'^2+6z'^2+6=0.
$$

它表示的是双叶双曲面.



另外，由(1-1) 和（1-3）知，从 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的点坐标变换公式为

$$
\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},
$$

或等价的为

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{3}y' + \frac{\sqrt{6}}{6}z' + 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{3}y' - \frac{\sqrt{6}}{6}z' \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}y' + \frac{\sqrt{6}}{3}z' + 1 \end{cases}.$$

(5). 解：因为 $\Phi(x,y,z) = 2y^2 - 2xy - 2yz + 2xz$. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

其对应的特征多项式

$$0 = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda = -(\lambda - 3)(\lambda + 1)\lambda,$$

则 A 的特征根为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, 他们对应的特征向量分别为

$$\vec{X}_1 = (1,-2,1)^T, \quad \vec{X}_2 = (1,0,-1)^T, \quad \vec{X}_3 = (1,1,1)^T,$$

取 $\vec{e}_1^* = \frac{\vec{X}_1}{|\vec{X}_1|}$, $\vec{e}_2^* = \frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_2|}$, $\vec{e}_3^* = \frac{\vec{X}_3}{|\vec{X}_3|}$, 那么有 $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,C$, 其中过渡矩阵 C 为

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

所以从坐标系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 到坐标系$\{O; \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}, \tag{1-4}$$

转置得

$$(x,y,z) = (x^*, y^*, z^*)\,C^T = (x^*, y^*, z^*) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{1-5}$$

将(3-1),(3-2)代入曲面方程得它在 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的方程为

$$\begin{aligned}
0 &= (x,y,z)\,A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+(2,1,-3)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}-5\\
&= (x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix} 3&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+(2,1,-3)\,C\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}-5\\
&= 3\left(x^*-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2-\left(y^*-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2-2
\end{aligned}$$

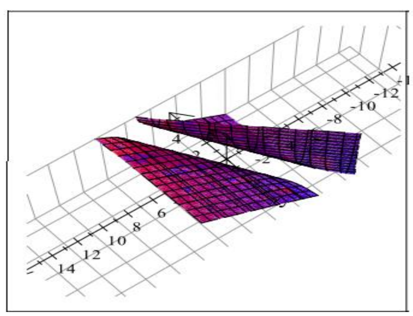
引入新的坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$，使得从 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 到 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{12}\\ \frac{5\sqrt{2}}{4}\\ 0\end{pmatrix}. \tag{1-6}$$

于是原方程在坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 中的方程为

$$3x'^2-y'^2-2=0.$$

它表示的是双曲柱面.



另外，由(1-4) 和（1-6）知，从 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{pmatrix},$$

或等价的为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'+\frac{4}{3}\\ y=-\frac{2}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'-\frac{1}{6}\\ z=\frac{1}{\sqrt{6}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'-\frac{7}{6}\end{cases}.$$

(7). 解：因为 $\Phi(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8xz$. 令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

其对应的特征多项式

$$0=|A-\lambda I|=(\lambda+3)^2(\lambda-6)\lambda,$$

则 A 的特征根为 $\lambda_1=3-$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=6$, 他们对应的特征向量分别为

$$\vec{X}_1=(1,0,1)^T,\quad \vec{X}_2=(1,-4,-1)^T,\quad \vec{X}_3=(2,1,-2)^T,$$

取 $\vec{e}_1^*=\frac{\vec{X}_1}{|\vec{X}_1|}$, $\vec{e}_2^*=\frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_2|}$, $\vec{e}_3^*=\frac{\vec{X}_3}{|\vec{X}_3|}$, 那么有 $(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\,C$, 其中过渡矩阵 C 为

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

所以从坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系$\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix},\tag{1-6}$$

转置得

$$(x,y,z)=(x^*,y^*,z^*)\,C^T=(x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.\tag{1-7}$$

(1-6), (1-7)代入曲面方程得它在 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的方程为

$$\begin{aligned}0 &= (x,y,z)\,A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+(-14,-4,14)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+16\\ &= (x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+(-14,-4,14)\,C\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+16\\ &= -3x^{*2}-3\left(y^*+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+6\left(z^*-\frac{5}{3}\right)^2\end{aligned}$$

引入新的坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$，使得从 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 到 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1-8}$$

于是原方程在坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 中的方程为

$$x'^2 + y'^2 - 2z'^2 = 0.$$

它表示的是二次锥面.

另外，由(1-6) 和(1-7)知，从 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

2.(1). 解：由题

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

所以由3.5.3节的表格知它是第I类曲面． 又原曲面的二次型部分的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

直接计算它的特征值得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$, 且

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -20,$$

所以曲面的标准方程为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = -x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2 + 2 = 0.$$

它是个双叶双曲面.

(3). 解：由题

$$I_3=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以由3.5.3节的表格知它是第I类曲面. 又原曲面的二次型部分的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

直接计算它的特征值得 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$, $\lambda_3=2$, 且显然 $I_4=0$, 所以曲面的标准方程为

$$x'^2+y'^2+4z'^2=0.$$

它退化为一点.

3. 解：因为 $\Phi(x,y,z)=2x^2+y^2+5z^2-4xy+2yz+4xz$. 令

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-2&1&1\\2&1&5\end{pmatrix},$$

其对应的特征多项式

$$0=|A-\lambda I|=-\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda-24=\left(\lambda-(1+\sqrt{5})\right)\left(\lambda-(1-\sqrt{5})\right)(\lambda-6)\lambda,$$

则 A 的特征根为 $\lambda_1=6-$, $\lambda_2=1+\sqrt{5}$, $\lambda_3=1-\sqrt{5}$, 他们对应的特征向量分别为

$$\vec{X}_1=(1,0,2)^T,\quad \vec{X}_2=(-2,\sqrt{5},1)^T,\quad \vec{X}_3=(2,\sqrt{5},-1)^T,$$

取 $\vec{e}_1^*=\frac{\vec{X}_1}{|\vec{X}_1|}$, $\vec{e}_2^*=\frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_2|}$, $\vec{e}_3^*=\frac{\vec{X}_3}{|\vec{X}_3|}$, 那么有 $(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)C$, 其中过渡矩阵 C 为

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{10}}&\frac{2}{\sqrt{10}}\\0&\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}&\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{10}}&-\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}.$$

所以从坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系$\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{10}}&\frac{2}{\sqrt{10}}\\0&\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}&\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{10}}&-\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix},\tag{1-9}$$

(1-9), (**??**)代入曲面方程得它在 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的方程为

$$\begin{aligned}
0 &= (x,y,z)\,A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + (2,2,0)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + d\\
&= (x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0\\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix} + (2,2,0)\,C\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix} + d\\
&= 6x^* + \frac{1}{6\sqrt{5}}^{2} + (1\sqrt{5})\left(y^* + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{10}(1+\sqrt{5})}\right)^2 + (1-\sqrt{5})\left(z^* + \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{10}(1-\sqrt{5})}\right)^2\\
&\quad + \frac{17}{12} + d
\end{aligned}$$

从而$d=-\frac{17}{12}$.
(这道题用二次曲面与不变量的关系算起来简单，$I_4/I_3=0$即可)

4. 解：令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$，$\lambda,\mu$ 为它的特征值. 注意到在平面Oxy上，我们总可以通过旋转和平移 x,y 轴得到新的坐标面 $O'x'y'$, 使得在$O'x'y'$上曲线具有下面的标准形式

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 = c^*,$$

且当 $c^*>0$, 曲线为椭圆时$\lambda,\mu>0$, 双曲线时λ,μ异号，抛物线时λ,μ中有一个为0. 在空间中，用上面相同方式改变x,y 轴, 保持 z 轴的方向不变，且取$z'=z+c^*$，得到新的坐标系$O'x'y'z'$, 在这个坐标系里曲线的方程为

$$\begin{cases} \lambda x'^2 + \mu y'^2 = c^*\\ z' = c^*\end{cases}.$$

相应的，曲面 $\Sigma': z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ 的新方程为

$$z' = \lambda x'^2 + \mu y'^2.$$

那么对照3.5.3节中的表格 知:
曲线为椭圆时, $\lambda,\mu>0$, Σ'为椭圆抛物面；
曲线为双曲线时, λ,μ异号，Σ'为双曲抛物面；
曲线为抛物线时, λ,μ中有 一个为0, Σ'为抛物 柱面.

详细的计算方式的证明如下：

已知Oxy平面上的曲线在$Oxyz$中的方程为

$$\Gamma:\left\{\begin{array}{c}\Sigma: a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0\\ z=0\end{array}\right..$$

令 $A'=\left(\begin{array}{cc}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{array}\right)$，$\lambda_1,\lambda_2$ 为它的特征值，$\vec{X}_1'=(\alpha_1,\beta_1)^T,\vec{X}_2'=(\alpha_2,\beta_2)^T$ 为分别对应于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 为表述简单，不妨设 $\left|\vec{X}_1\right|=\left|\vec{X}_2\right|=1$. 那么曲面 Σ 的二次型部分的矩阵

$$A=\left(\begin{array}{ccc}a_{11}&a_{12}&0\\a_{12}&a_{22}&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

的特征值为 λ_1,λ_2 和 $\lambda_3=0$, 且相应的特征向量分别为 $\vec{X}_1=(\alpha_1,\beta_1,0)^T,\vec{X}_2=(\alpha_2,\beta_2,0)^T$ 和 $\vec{X}_3=(0,0,1)^T$.

取 $\vec{e}_1^*=\frac{\vec{X}_1}{|\vec{X}_1|}$, $\vec{e}_2^*=\frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_2|}$, $\vec{e}_3^*=\frac{\vec{X}_3}{|\vec{X}_3|}=(0,0,1)^T$, 那么有 $(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\,C$, 其中过渡矩阵$C$为

$$C=\left(\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&0\\\beta_1&\beta_2&0\\0&0&1\end{array}\right).$$

所以从 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\left(\begin{array}{c}x\\y\\z\end{array}\right)=C\left(\begin{array}{c}x^*\\y^*\\z^*\end{array}\right),\quad \text{i.e.}\quad \left\{\begin{array}{c}x=\alpha_1x^*+\alpha_2y^*\\y=\beta_1x^*+\beta_2y^*\\z=z^*\end{array}\right..$$

由此Σ在$\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$中的方程为

$$\lambda_1x^{*2}+\lambda_2y^{*2}+2a^*x^*+2b^*y^*=0,\tag{4-1}$$

其中 $a^*=a_{13}\alpha_1+a_{23}\alpha_2$, $b^*=a_{13}\beta_1+a_{23}\beta_2$.

(1).λ_1,λ_2都不为0时，配方(4-1)式，

$$\lambda_1\left(x^*+\frac{a^*}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y^*+\frac{b^*}{\lambda_2}\right)^2=c^*,$$

其中 $c^*=\frac{a^{*2}}{\lambda_1}+\frac{b^{*2}}{\lambda_2}$. 再取坐标系 $\left\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}'\right\}$, 使得

$$x'=x^*+\frac{a^*}{\lambda_1},\ y'=y^*+\frac{b^*}{\lambda_2},\ z'=z^*+c^*.$$

那么曲线C的新方程为

$$\begin{cases} \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = c^* \\ z' = c^* \end{cases},$$

曲面Σ'的新方程为

$$z' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

那么显然Γ为椭圆时，λ_1, λ_2 同号， 则Σ'是椭圆抛物面；Γ为双曲线时，λ_1, λ_2异号，Σ'为双曲抛物面.

(2).λ_1, λ_2 中有一个为0时，用同样的讨论知，此时Γ为抛物线, Σ'为抛物柱面.

5. 证明： 适当选取新的坐标系$\{O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, 使得曲面的方程为

$$\Sigma : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 0,$$

其中 λ_k, $k = 1, 2, 3$, 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 的特征值. 因为是二次锥面，由其标准方程，不妨设 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$.

在坐标系 $\{O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$中, 首先注意到$\Sigma$的顶点是原点，且点 $P_1 = \left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}, 0, 1\right) \in \Sigma$. 考虑与 $\overrightarrow{OP_1}$垂直的向量 $\overrightarrow{OP_2} = \left(-\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}, \mu, 1\right)$，其中 $\mu \neq 0$. 因为

$$\overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2} = \left(-\mu, -\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} + \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}\right), \mu\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\right) = -\mu\left(1, \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\mu\sqrt{-\lambda_1\lambda_3}}, -\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\right),$$

取 $\overrightarrow{OP_3} = \left(1, \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\mu\sqrt{-\lambda_1\lambda_3}}, -\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\right)$, 则 $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ 和 $\overrightarrow{OP_3}$ 两两正交.

若存在适当的 μ 使得$P_2, P_3 \in \Sigma$，那么有

$$\begin{cases} \lambda_1\left(-\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}\right)^2 + \lambda_2\mu^2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2\left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\mu\sqrt{-\lambda_1\lambda_3}}\right)^2 + \lambda_3\left(-\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_3\mu^2 = \lambda_1^2 - \lambda_3^2 \\ \left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right)\lambda_3\mu^2 = \lambda_2\left(\lambda_1 - \lambda_3\right)^2 \end{cases}. \tag{5-1}$$

因为$\lambda_1 \neq \lambda_3$, 由（5-1）的两式相除得

$$\left(\lambda_1 + \lambda_3\right)^2 = \lambda_2^2, \quad \text{i.e.} \quad \left(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_2\right)\left(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2\right) = 0. \tag{5-2}$$

因为$\lambda_3 < 0$, 注意到（5-1）中的二式的右边为正，所以$\lambda_1^2 - \lambda_3^2 < 0$, i.e. $\left(\lambda_1 + \lambda_3\right)\left(\lambda_1 - \lambda_3\right) < 0$. 而$\lambda_1 > 0$, 所以只能是 $\lambda_1 + \lambda_3 < 0$. 因此

$$\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2 < 0. \tag{5-3}$$

因为矩阵的迹是坐标变换不变量，所以由（5-2）和（5-3）得，

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0.$$

因为上述证明可逆，所以题目得证.

(" $\Rightarrow$ "的证明比较简单,方法比较多, 关键是" $\Leftarrow$ "的证明.)

1. (1). 解：这是二次锥面$x^2+y^2-z^2=0$和抛物柱面$z^2=2x+1$的交线.

由曲线方程消去z, 得到曲线对xOy面的射影柱面方程为

$$x^2-2x+y^2-1=0, \quad 即 \quad (x-1)^2+y^2=2.$$

因此它是个母线平行于z轴的圆柱面,在xOy面上的截线为以$(1,0)$为心, 半径为$\sqrt{2}$的圆.

注意到曲线方程的第二个方程中不含坐标y, 所以此抛物柱面本身就是曲线对xOy面的射影柱面.

由曲线方程消去x, 得到曲线对yOz面的射影柱面方程为

$$(1-z^2)^2+4(y^2-z^2)=0.$$

(2).这是单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ 和平面$x=2$的交线.

由曲线方程消去x, 得到曲线对xOy面的射影柱面方程为

$$4y \pm 3z = 0.$$

注意到第二个方程中不含坐标y,z, 所以曲线对xOy面和对yOz面的射影柱面方程均为

$$x=2.$$

(3).这是单叶双曲面$x^2+4y^2-z^2=16$和椭圆抛物面$4x^2+y^2+z^2=4$的交线. 联立方程, 可得

$$x^2+4y^2-z^2+4x^2+y^2+z^2=5(x^2+y^2)=20.$$

即得

$$x^2+y^2=4.$$

将上面方程代入椭圆抛物面方程得$3x^2+z^2=0$, 即得$x=z=0, y=\pm 2$. 即交线为两个点$(0,2,0),(0,-2,0)$. 即得 对xOz面的射影柱面方程为

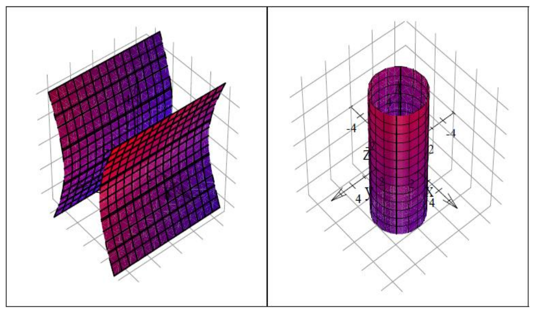
$$x=z=0, \quad 即y轴.$$

曲线对xOy面的射影柱面方程为

$$\begin{cases} y = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

曲线对yOz面的射影柱面方程为

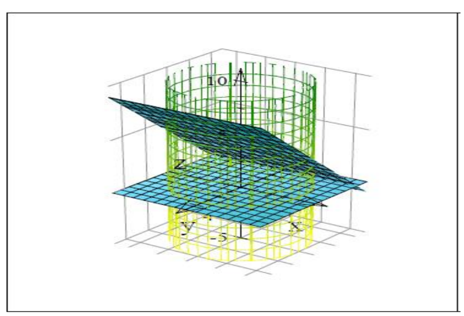
$$\begin{cases} y = \pm 2 \\ z = 0 \end{cases}$$



2.解:

(1). 空间区域为

$$\begin{cases} -4 \le x \le 4 \\ -\sqrt{16-x^2} \le y \le \sqrt{16-x^2} \\ 0 \le z \le x+4 \end{cases}.$$



(2). 球面与椭圆抛物面相交.令

$$x^2 + 4x = 4.$$

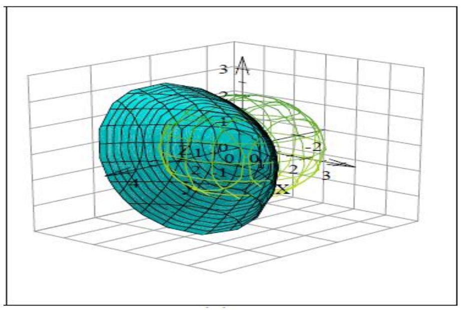
解得$x = 2\sqrt{2} - 2$ 或$x = -2\sqrt{2} - 2$(舍).

空间区域分为两块, 一块为

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{2}-2 \\ -\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x} \\ -\sqrt{4x-y^2} \le z \le \sqrt{4x-y^2} \end{cases}.$$

另一块区域为

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}-2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \\ -\sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}.$$



3. (1).

P94,3-(1).jpg