第一章

1. 验证函数 $y=cx^3$(c 是常数) 是方程 $3y-xy'=0$ 的解。

证明： $y'=3cx^2 \Longrightarrow 3cx^3-x3cx^2=0$ 。

2. 验证函数 $y=cx+\frac{1}{c}$(c 是常数) 和 $y=\pm 2\sqrt{x}$ 都是方程 $y=xy'+\frac{1}{y'}$ 解。

证明： $y=cx+\frac{1}{c}$ ， $y'=c \Longrightarrow xy'+\frac{1}{y'}=cx+\frac{1}{c}=y$ 。

$y=\pm 2\sqrt{x}$ ， $y'=\pm\frac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow xy'+\frac{1}{y'}=\pm 2\sqrt{x}=y$ 。

3. 验证参数变量方程 $x=t^3-t+2$ ， $y=\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+c$ (c 是常数， t 是参变量) 所决定的函数 y 满足方程 $x=(\frac{dy}{dx})^2-\frac{dy}{dx}+2$ 。

证明： $\frac{dx}{dt}=3t^2-1$ ， $\frac{dy}{dt}=3t^3-t \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3t^3-t}{3t^2-1}=t$

$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}^3-\frac{dy}{dx}+2=t^3-t+2=x$ 。

4. 验证函数 $y=c_1\cos kx+c_2\sin kx$(k , c_1 , c_2 是常数) 是方程 $y''+k^2y=0$ 的解。

证明： $y=c_1\cos kx+c_2\sin kx \Longrightarrow y'=-c_1k\sin kx+c_2k\cos kx \Longrightarrow y''=-c_1k^2\cos kx-c_2k^2\sin kx \Longrightarrow y''+k^2y=-c_1k^2\cos kx-c_2k^2\sin kx+c_1k^2\cos kx+c_2k^2\sin kx$ 。

5. 验证函数 $y=-6\cos 2x+8\sin 2x$ 是方程的 $y''+y'+\frac{5}{2}y=25\cos 2x$ 解，且满足初值条件 $y(0)=-6$ ， $y'(0)=16$ 。

证明： $y=-6\cos 2x+8\sin 2x \Longrightarrow y'=12\sin 2x+16k\cos 2x \Longrightarrow y''=24\cos 2x-32\sin 2x \Longrightarrow y''+y'+\frac{5}{2}y=24\cos 2x-32\sin 2x+12\sin 2x+16\cos 2x-15\cos 2x+20\sin 2x=25\cos 2x$ ，且 $y(0)=-6$ ， $y'(0)=16$ 。

求下列可分离变量方程的解 (6-10) ：

6. $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$ 。

解： $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \Longrightarrow \arcsin x+c=\sqrt{1-y^2}$ ，及 $y=\pm 1$ 。

7. $y'=(2y+1)\cot x$ ， $y(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$ 。

解： $\frac{dy}{2y+1}=\frac{\cos xdx}{\sin x} \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln|2y+1|+c=\ln|\sin x| \Longrightarrow \sqrt{|2y+1|}=c\sin x \Longrightarrow 2y+1=c\sin^2 x$ ， $y=\frac{c}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2} \Longrightarrow y(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ，

$c=4 \Longrightarrow y=4\sin^2 x-\dfrac{1}{2}$

8.$y'=2\sqrt{y}\ln x$ ， $y(e)=1$ 。

解： $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}}=\ln x dx \Longrightarrow \sqrt{y}=x\ln x-x+c$ ，而 $\sqrt{y(e)}=1=e-e+c \Longrightarrow c=1 \Longrightarrow y=(x\ln x-x+1)^2$ ， $y\equiv 0$ 时不合理 $\Longrightarrow y=(x\ln x-x+1)^2$ 。

9.$2(x^2-1)yy'=(2x+3)(1+y^2)$ 。

解： $\dfrac{ydy}{1+y^2}=\dfrac{(2x+3)dx}{2(x^2-1)} \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 1+y^2=\dfrac{5}{4}\ln|x-1|-\dfrac{1}{4}\ln|x+1|+c \Longrightarrow \sqrt{1+y^2}=c(\dfrac{x-1}{x+1})^{\frac{1}{4}}(x-1) \Longrightarrow 1+y^2=c(\dfrac{x-1}{x+1})^{\frac{1}{2}}(x-1)^2 \Longrightarrow y^2=c(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1$ 。

10.$y'=(1-y^2)\tan x$ ， $y(0)=2$ 。

解： $\dfrac{dy}{1-y^2}=\dfrac{\sin x}{\cos x}dx \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\ln|\dfrac{1+y}{1-y}|=-\ln|\cos x|+c \Longrightarrow \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}=c\dfrac{1}{\cos x} \Longrightarrow \dfrac{1-y}{1+y}=c\cos^2 x \Longrightarrow y=\dfrac{1-c\cos^2 x}{1+c\cos^2 x}$ ， $y(0)=\dfrac{1-c}{1+c}=2 \Longrightarrow c=-\dfrac{1}{3} \Longrightarrow y=\dfrac{3+\cos^2}{3-\cos^2 x}$ 。

求下列齐次方程的解 (11-17)：

11.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 。

解：令 $y=ux$ ， $\dfrac{xdy+udx}{dx}=\dfrac{2x^2u}{x^2+u^2x^2}=\dfrac{2u}{1+u^2} \Longrightarrow \dfrac{xdu}{dx}+u=\dfrac{2u}{1+u^2} \Longrightarrow x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u-u^3}{1+u^2} \Longrightarrow \dfrac{1+u^2}{u-u^3}du=\dfrac{1}{x}dx \Longrightarrow \ln|u|-\ln|1-u|-\ln|1+n|=\ln|x|+c \Longrightarrow \dfrac{u}{(1-u)(1+u)}=cx \Longrightarrow \dfrac{u}{1-u^2}=cx \Longrightarrow \dfrac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}=cx \Longrightarrow \dfrac{xy}{x^2-y^2}=cx \Longrightarrow \dfrac{y}{x^2-y^2}=c$ ，或 $y=\pm x$ 。

12.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}(1+\ln\dfrac{y}{x})$ ，令 $y=ux \Longrightarrow x\dfrac{du}{dx}+u=u(1+\ln u) \Longrightarrow x\dfrac{dy}{dx}=u\ln u \Longrightarrow \dfrac{1}{u\ln u}du=\dfrac{1}{x}dx \Longrightarrow \ln|\ln|u||=\ln|x|+c \Longrightarrow \ln|u|=cx$ ， $u=e^{cx}$ ， $x>0 \Longrightarrow y=xe^{cx}$ 。

13.$y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx}$ 。

解： $\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{ydy}{xdx}$ ，令 $xu=y \Longrightarrow u^2+x\dfrac{du}{cx}+u=u(x\dfrac{du}{dx}+u) \Longrightarrow u=$

$(u-1)x\frac{du}{dx} \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{u-1}{u}du \Longrightarrow u - \ln|u| = \ln|x| + c \Longrightarrow \frac{e^u}{u} = cx \Longrightarrow e^{\frac{y}{x}} = cy \Longrightarrow y = ce^{\frac{y}{x}}$ 。

14.$(y+x)dy = (y-x)dx$ 。

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x} = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$ ，令 $y = ux \Longrightarrow x\frac{du}{dx} + u = \frac{u-1}{u+1} \Longrightarrow x\frac{du}{dx} = -\frac{1+u^2}{1+u} \Longrightarrow \frac{1+u}{1+u^2}du = -\frac{dx}{x} \Longrightarrow \arctan u + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = -\ln|x| + c \Longrightarrow e^{\arctan u}\sqrt{1+u^2} = \frac{c}{|x|} \Longrightarrow e^{\arctan u}\sqrt{x^2+y^2} = c \Longrightarrow c\sqrt{x^2+y^2} = e^{-\arctan\frac{y}{x}}$ 。

15.$(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$ 。

解：$(1-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dx + \cos\frac{y}{x}dy = 0$，令 $y = ux \Longrightarrow (1-u\cos u) + \cos u(x\frac{du}{dx}+u) = 0 \Longrightarrow 1 + x\cos u\frac{du}{dx} = 0 \Longrightarrow \cos u du = -\frac{dx}{x}$ ， $\sin u = -\ln|x| + c \Longrightarrow e^{\sin u} = \frac{c}{x} \Longrightarrow xe^{\sin\frac{y}{x}} = c \Longrightarrow \sin\frac{y}{x} = \ln\frac{c}{x}$ 。

16.$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ ， $y(1) = 4$ 。

解：令 $y = ux$ ， $u \geq 0 \Longrightarrow x\frac{du}{dx} + u = 2\sqrt{u} + u \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{x}dx \Longrightarrow \sqrt{u} = \ln|x| + c \Longrightarrow e^{\sqrt{u}} = cx \Longrightarrow e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = cx$ ， $y(1) = 4 \Longrightarrow e^{\sqrt{\frac{4}{1}}} = c$ ， $c = e^2 \Longrightarrow e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = e^2x \Longrightarrow \sqrt{\frac{y}{x}} = 2 + \ln x$ 。

17.$xy' - y = \sqrt{x^2-y^2}$ ， $y(1) = \frac{1}{2}$ 。

解：令 $y = ux$ ， $x(x\frac{du}{dx}+u) - ux = \sqrt{x^2 - x^2u^2} \Longrightarrow x^2\frac{du}{dx} = |x|\sqrt{1-u^2} \Longrightarrow$ 若 $x > 0$ ， $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \arcsin u = \ln x + c$ ；若 $x < 0$ ， $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{dx}{x} \Longrightarrow \arcsin u = -\ln -x + c$ 。 $y(1) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = u \times 1 = u \Longrightarrow x > 0 \Longrightarrow \arcsin\frac{1}{2} = \ln 1 + c$ ， $c = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \arcsin\frac{y}{x} = \ln x + \frac{\pi}{6}$ 。

求下列一阶线性方程或伯努利方程的解 (18-24)：

18.$\frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{y}{x}$ 。

解： $y' + \frac{1}{x}y = x^2$ ， $p(x) = \frac{1}{x}$ ， $f(x) = x^2$ ， $e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x} \Longrightarrow y = \frac{1}{x}(\int x^3dx + c) = \frac{1}{x}(\frac{1}{4}x^4 + c) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{c}{x}$ 。

19.$xy' - y = x^3e^{-x}$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}y=x^2e^{-x}$ ， $p(x)=-\frac{1}{x}$ ， $f(x)=x^2e^{-x}$ ， $e^{-\int p(x)dx}=x$ ，
$\Longrightarrow y=x(\displaystyle\int x^2e^{-x}\frac{1}{x}dx+c)=x(\int xe^{-x}dx+c)=x(-xe^{-x}-e^{-x}+c)$ 。

20.$\dfrac{dy}{dx}+2xy+x=e^{-x^2}$ ， $y(0)=2$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx}+2xy=e^{-x^2}-x$ ， $p(x)=2x$ ， $f(x)=e^{-x^2}-x$ ， $e^{-\int p(x)dx}=e^{-x^2}\Longrightarrow$
$y=e^{-x^2}(\displaystyle\int(e^{-x^2}-x)e^{x^2}dx+c)=e^{-x^2}(\int(1-xe^{x^2})dx+c)=e^{-x^2}(x-\frac{1}{2}e^{x^2}+$
$c)=(c+x)e^{-x^2}-\dfrac{1}{2}$ ， $y(0)=c-\dfrac{1}{2}=2\Longrightarrow c=\dfrac{5}{2}\Longrightarrow y=(\dfrac{5}{2}+x)e^{-x^2}-\dfrac{1}{2}$ 。

21.$xy'=x\cos x-2\sin x-2y$ ， $y(\pi)=0$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=\cos x-\dfrac{2}{x}\sin x$ ， $p(x)=\dfrac{2}{x}$ ， $f(x)=\cos x-\dfrac{2}{x}\sin x\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
e^{-\int p(x)dx}=(\frac{1}{x})^2\text{ ，}\quad y&=\frac{1}{x^2}(\int(\cos x-\frac{2}{x}\sin x)x^2dx+c)\\
&=\frac{1}{x^2}(\int(x^2\cos x-2x\sin x)dx+c)\\
&=\frac{1}{x^2}(x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c)\\
&=\frac{1}{x^2}(x^2\sin x+4x\cos x-4\sin x+c)\text{ 。}
\end{aligned}
$$

$y(\pi)=\dfrac{1}{\pi^2}(4\pi+c)=0\Longrightarrow c=-4\pi\Longrightarrow y=\dfrac{1}{x^2}(x^2-4)\sin x+\dfrac{4}{x}\cos x-\dfrac{4\pi}{x^2}=$
$(1-\dfrac{4}{x^2})\sin x+\dfrac{4}{x}\cos x-\dfrac{4\pi}{x^2}$ 。

22.$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{xy}{2(x^2-1)}-\dfrac{x}{2y}=0$ ， $y(0)=1$ 。

解：两边乘以 y ， $y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{xy^2}{2(x^2-1)}-\dfrac{x}{2}=0$ ，令 $z=y^2\Longrightarrow\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{xz}{2(x^2-1)}=$
$\dfrac{x}{2}\Longrightarrow\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{xz}{x^2-1}=x$ 。
$p(x)=-\dfrac{x}{x^2-1}$ ， $f(x)=x\Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=e^{\int\frac{x}{x^2-1}dx}=\sqrt{|x^2-1|}$ ，这里初值是 $x=0$ 取 $x^2<1$ 。
$z=\sqrt{1-x^2}(\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+c)=\sqrt{1-x^2}(-\sqrt{1-x^2}+c)$ ， $y^2=(x^2-1+$
$c\sqrt{1-x^2})$ 。
$y(0)=1>0\Longrightarrow y=\sqrt{x^2-1+c\sqrt{1-x^2}}$ 。
$y(0)=\sqrt{-1+c}=1\Longrightarrow -1+c=1\Longrightarrow c=2\Longrightarrow y=\sqrt{x^2-1+2\sqrt{1-x^2}}$ 。

23.$xy'-4y=x^2\sqrt{y}$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$ ，两边同除以 $\sqrt{y}$ ，令 $z=\sqrt{y}\Longrightarrow 2\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{4}{x}z=x\Longrightarrow$
$\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2}{x}z=\dfrac{x}{2}$ 。

$p(x)=-\dfrac{2}{x}$ ， $f(x)=\dfrac{x}{2}$ 。

$e^{-\int p(x)dx}=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2 \Longrightarrow z=x^2(\int \dfrac{x}{2}\dfrac{1}{x^2}dx+c)=x^2(\dfrac{1}{2}\ln|x|+c) \Longrightarrow$ $\sqrt{y}=\dfrac{x^2}{2}\ln|x|+cx^2$ 或 $y=0$ 。

24.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x}{2xy}$ 。

解： $\dfrac{2ydy}{dx}=\dfrac{y^2-x}{x}$ ，令 $z=y^2 \Longrightarrow \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z}{x}-1 \Longrightarrow \dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=-1$ 。

$p(x)=-\dfrac{1}{x}$ ， $f(x)=-1$ ， $e^{-\int p(x)dx}=x \Longrightarrow z=x(\int -1\times\dfrac{1}{x}dx+c)=$ $x(-\ln|x|+c) \Longrightarrow y^2=cx-x\ln|x|$ 。

验证下列方程为全微分方程或找出积分因子，然后求其解 (25-36)：

25.$(5x^4ydx+x^5dy)+x^3dx=0$ 。

解： $(5x^4y+x^3)dx+x^5dy=0 \Longrightarrow \dfrac{\partial(5x^4y+x^3)}{\partial y}=5x^4$ ， $\dfrac{\partial x^5}{\partial x}=5x^4 \Longrightarrow$ 是全微分方程，

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(5x^4y_0+x^3)dx+\int_{y_0}^{y}x^5dy\\
&=x^5y_0-x_0^5y_0+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x_0^4+x^5y-x^5y_0\\
&=x^5y+\frac{1}{4}x^4-x_0^5-\frac{1}{4}x_0^4=c
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow x^5y+\dfrac{1}{4}x^4=c$ 。

26.$2(ydx+xdy)+xdx-5ydy=0$ ， $y(0)=1$ 。

解： $(2y+x)dx+(2x-5y)dy=0 \Longrightarrow \dfrac{\partial(2y+x)}{\partial y}=2$ ， $\dfrac{\partial(2x-5y)}{\partial x}=2 \Longrightarrow$ 全微分方程，

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(2y_0+x)dx+\int_{y_0}^{y}(2x-5y)dy\\
&=2y_0x-2x_0y_0+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x_0^2+2xy-2xy_0-\frac{5}{2}y^2+\frac{5}{2}y_0^2\\
&=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2+2xy-2x_0y_0-\frac{1}{2}x_0^2+\frac{5}{2}y_0^2=c
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}y^2+2xy=c$ ， $y(0)=1 \Longrightarrow c=-\dfrac{5}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}y^2+2xy+\dfrac{5}{2}=$ $0 \Longrightarrow x^2-5y^2+4xy+5=0$ 。

27.$\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{ydx-xdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 。

解： $(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\dfrac{y}{x^2+y^2})dx+(\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\dfrac{x}{x^2+y^2})dy$ ，

$$\frac{\partial(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{y}{x^2+y^2})}{\partial y}=\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$
$$\frac{\partial(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2})}{\partial x}=\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

$\Longrightarrow$ 是全微分方程,

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y_0^2}}+\frac{y_0}{x^2+y_0^2})dx+\int_{y_0}^{y}(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2})dy\\&=\sqrt{1+x^2+y_0^2}-\sqrt{1+x_0^2+y_0^2}+\arctan\frac{x}{y_0}-\arctan\frac{x_0}{y_0}\\&\quad+\sqrt{1+x^2+y^2}-\sqrt{1+x^2+y_0^2}-\arctan\frac{y}{x}+\arctan\frac{y_0}{x}\\&=c\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \sqrt{1+x^2+y_0^2}=\arctan\frac{y}{x}+c$ 。

28.$(ye^x-e^{-y})dx+(xe^{-y}+e^x)dy=0$ 。

解: $\frac{\partial(ye^x-e^{-y})}{\partial y}=e^x+e^{-y}$, $\frac{\partial(xe^{-y}+e^x)}{\partial x}=e^{-y}+e^x \Longrightarrow$ 是全微分方程,

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(y_0e^x-e^{-y_0})dx\int_{y_0}^{y}(xe^{-y}+e^x)dy\\&=y_0e^x-y_0e^{x_0}-xe^{y_0}+x_0e^{y_0}-xe^{-y}+xe^{-y_0}+ye^x-y_0e^x=c\end{aligned}$$

$\Longrightarrow ye^x-xe^{-y}=c$ 。

29.$(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2})dx+(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y})dy=0$ 。

解: $\frac{\partial(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2})}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}$, $\frac{\partial(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y})}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}\Longrightarrow$ 是全微分方程,

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(\frac{1}{x}-\frac{y_0^2}{(x-y_0)^2})dx+\int_{y_0}^{y}(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y})dy\\&=\ln|x|-\ln|x_0|+y_0^2\frac{1}{x-y_0}-y_0^2\frac{1}{(x_0-y_0)}+\frac{x^2}{x-y}-\frac{x^2}{x-y_0}\\&\quad-\ln|y|+\ln|y_0|\end{aligned}$$

而 $\frac{y_0^2}{x-y_0}-\frac{x^2}{x-y_0}=-\frac{(x-y_0)(x+y_0)}{x-y_0}=-x-y_0$

$\Longrightarrow \ln|x|-\ln|y|+\frac{x^2}{x-y}-x=\ln|x|-\ln|y|+\frac{xy}{x-y}=c$ 。

30.$(4ydx+xdy)-x^2dx=0$ 。

解: $(4y-x^2)dx+xdy=0$, $\frac{\partial(4y-x^2)}{\partial y}=4$, $\frac{\partial x}{\partial x}=1\Longrightarrow$ 不是全微分方程。

$\varphi(x)=\frac{4-1}{x}=\frac{3}{x}$, $\mu=e^{\int\frac{3}{x}dx}=x^3$

$\Longrightarrow (4x^3y-x^5)dx+x^4dy=0$

$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(4x^3y_0-x^5)dx+\int_{y_0}^{y}x^4dy$$
$$=x^4y_0-x_0^4y_0-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{6}x_0^6+x^4y-x^4y_0$$
$$\Longrightarrow x^4y-\frac{1}{6}x^6=c\text{ 。}$$

31.$(2xydx-3x^2dy)+y^2dy=0$ 。

解： $2xydx+(y^2-3x^2)dy$ ， $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x$ ， $\dfrac{\partial(y^2-3x^2)}{\partial x}=-6x$

$$\Longrightarrow \psi(y)=\frac{2x+6x}{-2xy}=-\frac{4}{y}\text{ ，}\quad \mu=e^{\int-\frac{4}{y}dy}=\frac{1}{y^4}$$
$$\Longrightarrow 2xy^{-3}dx+(y^{-2}-3x^2y^{-4})dy=0$$
$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}2xy_0^{-3}dx+\int_{y_0}^{y}(y^{-2}-3x^2y^{-4})dy$$
$$=x^2y_0^{-3}-x_0^2y_0^{-3}-y^{-1}+y_0^{-1}+x^2y^{-3}-x^2y_0^{-3}$$
$$\Longrightarrow \frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c\text{ 。}$$

32.$(ydx-xdy)+x^4dx=0$ 。

解： $(y+x^4)dx-xdy=0\Longrightarrow\dfrac{\partial(y+x^4)}{\partial y}=1$ ， $\dfrac{\partial -x}{\partial x}=-1$

$$\Longrightarrow \varphi(x)=\frac{1+1}{-x}=-\frac{2}{x}\text{ ，}\quad \mu=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}\text{ 。}$$
$$\Longrightarrow (yx^{-2}+x^2)dx-x^{-1}dy=0$$
$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(y_0x^{-2}+x^2)dx+\int_{y_0}^{y}-x^{-1}dy$$
$$=-\frac{y_0}{x}+\frac{y_0}{x_0}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x_0^3-\frac{y}{x}+\frac{y_0}{x}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{3}x^3-\frac{y}{x}=c\text{ 。}$$

33.$(2xy^2-y)dx+(2x-x^2y)dy=0$ 。

解： $\dfrac{\partial(2xy^2-y)}{\partial y}=4xy-1$ ， $\dfrac{\partial(2x-x^2y)}{\partial x}=2-2xy$

$$\Longrightarrow \psi(y)=\frac{4xy-1-2+2xy}{-(2xy^2-y)}=\frac{6xy-3}{-y(2xy-1)}=\frac{3(2xy-1)}{-y(2xy-1)}=-\frac{3}{y}\text{ ，}$$
$$\mu=e^{-\int\frac{3}{y}dy}=\frac{1}{y^3}$$
$$\Longrightarrow (2xy^{-1}-y^{-2})dx+(2xy^{-3}-x^2y^{-2})dy=0$$
$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(2xy_0^{-1}-y_0^{-2})dx+\int_{y_0}^{y}(2xy^{-3}-x^2y^{-2})dy$$
$$=x^2y_0^{-1}-x_0^2y_0^{-1}-xy_0^{-2}+x_0y_0^{-2}-xy_0^{-2}+xy_0^{-2}+x^2y^{-1}-x^2y_0^{-1}$$
$$\Longrightarrow \frac{x^2}{y}-\frac{x}{y^2}=c\text{ 。}$$

34.$2dx+(2x-3y-3)dy=0$ ， $y(2)=0$ 。

解： $\dfrac{\partial 2}{\partial y}=0$ ， $\dfrac{\partial(2x-3y-3)}{\partial x}=2$

$\Longrightarrow \psi(y)=\dfrac{0-2}{-2}$ ， $\mu=e^{\int 1dy}=e^y$
$\Longrightarrow 2e^ydx+(2xe^y-3ye^y-3e^y)dy=0$
$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}2e^{y_0}dx+\int_{y_0}^{y}(2xe^y-3ye^y-3e^y)dy$
$=2e^{y_0}x-2e^{y_0}x_0+2e^yx-2e^{y_0}x-3e^yy+3e^{y_0}y_0+3e^y-3e^{y_0}-3e^y+3e^{y_0}$
$\Longrightarrow 2xe^y-3ye^y=c$ 。
$y(2)=0\Longrightarrow 4-0=c\Longrightarrow c=4\Longrightarrow 2xe^y-3ye^y=4$ 。

35.$(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 。
解： $\dfrac{\partial(3x^2+2xy-y^2)}{\partial y}=2x-2y$ ， $\dfrac{\partial(x^2-2xy)}{\partial x}=2x-2y\Longrightarrow$ 是全微分方程
$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(3x^2+2xy_0-y_0^2)dx+\int_{y_0}^{y}(x^2-2xy)dy$
$=x^3-x_0^3+x^2y_0-x_0^2y_0-xy_0^2+x_0y_0^2+x^2y-x^2y_0-xy^2+xy_0^2$
$\Longrightarrow x^3+x^2y-xy^2=c$ 。

36.$(3xy^2+2y)dx+(2x^2y+x)dy=0$ 。
解： $\dfrac{\partial(3xy^2+2y)}{\partial y}=6xy+2$ ， $\dfrac{\partial(2x^2y+x)}{\partial x}=4xy+1$
$\Longrightarrow \varphi(x)=\dfrac{6xy+2-4xy-1}{2x^2y+x}=\dfrac{2xy+1}{x(2xy+1)}=\dfrac{1}{x}$ ， $\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$
$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(3x^2y_0^2+2xy_0)dx+\int_{y_0}^{y}(2x^3y+x^2)dy$
$=x^3y_0^2-x_0^3y_0^2+x^2y_0-x_0^2y_0+x^3y^2-x^3y_0^2+x^2y-x^2y_0$
$\Longrightarrow x^3y^2+x^2y=c$ 。

判别下列各方程的类型，并选择一种方法求解 (37-49)：

37.$xy(y-xy')=x+yy'$ ， $y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。
解： $xy^2-x^2y\dfrac{dy}{dx}=x+y\dfrac{dy}{dx}\Longrightarrow y(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy^2=-x\Longrightarrow y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}y^2=\dfrac{-x}{1+x^2}\Longrightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}-\dfrac{x}{1+x^2}y^2=-\dfrac{x}{1+x^2}$ 。
令 $z=y^2$ ， $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2x}{1+x^2}z=-\dfrac{2x}{1+x^2}$ ， $p(x)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$ ， $f(x)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$ ， $e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}=1+x^2$
$\Longrightarrow z=(1+x^2)(-\int\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}+c)=(1+x^2)(\dfrac{1}{1+x^2}+c)=1+c(1+x^2)$ 。
$y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0\Longrightarrow y=\sqrt{1+c(1+x^2)}\Longrightarrow y(0)=\sqrt{1+c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow 1+c=\dfrac{1}{2}$ ， $c=-\dfrac{1}{2}\Longrightarrow y=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}(1+x^2)}=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x^2}$ 。

$38.\tan t\dfrac{dx}{dt}-x=5$ 。

解： $\tan t\dfrac{dx}{dt}=5+x\Longrightarrow\dfrac{dx}{5+x}=\dfrac{\cos t}{\sin t}dt\Longrightarrow\ln|5+x|=\ln|\sin t|+c\Longrightarrow 5+x=c\sin t\Longrightarrow x=c\sin t-5$ 。

$39.d\theta+2\theta rdr=r^3dr$ 。

解： $\dfrac{d\theta}{dr}+2r\theta=r^3$ ， $p(r)=2r$ ， $f(r)=r^3$ 。

$e^{-\int p(r)dr=e^{-r^2}}\Longrightarrow\theta=e^{-r^2}(\int r^3e^{r^2}dr+c)=e^{-r^2}(\frac{1}{2}r^2e^{r^2}-\frac{1}{2}e^{r^2}+c)=\frac{1}{2}(r^2-1)+ce^{-r^2}$ 。

$40.e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$ 。

解： $\dfrac{\partial e^y}{\partial y}=e^y$ ， $\dfrac{\partial(xe^y-2y)}{\partial x}=e^y\Longrightarrow$ 是全微分方程

$$\Longrightarrow u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(e^{y_0})dx+\int_{y_0}^{y}(xe^y-2y)dy$$

$$=e^{y_0}x-e^{y_0}x_0+e^yx-e^{y_0}x-y^2+y_0^2$$

$\Longrightarrow xe^y-y^2=c$ ， $xe^y=c+y^2\Longrightarrow x=e^{-y}(c+y^2)$ 。

$41.yy'+xy^2=x$ 。

解： $\dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}+xy^2=x$ ，令 $z=y^2$

$\Longrightarrow\dfrac{dz}{dx}+2xz=2x\Longrightarrow p(x)=2x$ ， $f(x)=2x\Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=e^{-x^2}$ 。

$z=e^{-x^2}(\int 2xe^{x^2}dx+c)=e^{-x^2}(e^{x^2}+c)=1+ce^{-x^2}\Longrightarrow y^2=1+ce^{-x^2}$ 。

$42.xyy'=x^2+y^2$ 。

解： $y\dfrac{dy}{dx}=x+\dfrac{y^2}{x}$ ， $\dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}-\dfrac{1}{x}y^2=x$ ，令 $z=y^2\Longrightarrow\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{2}{x}z=2x\Longrightarrow p(x)=-\dfrac{2}{x}$ ， $f(x)=2x\Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=x^2\Longrightarrow z=x^2(\int 2xx^{-2}dx+c)=x^2(\int\dfrac{2}{x}dx+c)=x^2(2\ln|x|+c)\Longrightarrow y^2=2x^2\ln(cx)$ 。

$43.ydx-xdy=x^2ydy$ 。

解： $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{y}=x^2\Longrightarrow x^{-2}\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{x}=1\Longrightarrow-\dfrac{d\frac{1}{x}}{dy}-\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{x}=1$ 。

令 $z=\dfrac{1}{x}$

$\Longrightarrow\dfrac{dz}{dy}+\dfrac{1}{y}z=-1\Longrightarrow p(y)=\dfrac{1}{y}$ ， $f(y)=-1$ ， $e^{-\int p(y)dy}=\dfrac{1}{y}\Longrightarrow z=\dfrac{1}{y}(\int-1ydy+c)=\dfrac{1}{y}(-\dfrac{1}{2}y^2+c)=-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{c}{y}\Longrightarrow\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{c}{y}\Longrightarrow\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{2}y^2+c\Longrightarrow\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{2}y^2=c$ 。

44.$(y^2+x)dx-2xydy=0$ 。

解： $\dfrac{\partial(y^2+x)}{\partial y}=2y$ ， $\dfrac{\partial(-2xy)}{\partial x}=-2y\Longrightarrow\varphi(x)=\dfrac{2y+2y}{-2xy}=-\dfrac{2}{x}$ ， $\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=\dfrac{1}{x^2}\Longrightarrow(x^{-2}y^2+x^{-1})dx-2x^{-1}ydy=0$ 。

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{x_0}^{x}(x^{-2}y_0^2+x^{-1})dx-2\int_{y_0}^{y}x^{-1}ydy\\&=-x^{-1}y_0^2+x_0^{-1}y_0^2+\ln|x|-\ln|x_0|-x^{-1}y^2+x^{-1}y_0^2\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ln|x|-x^{-1}y^2=c\Longrightarrow y^2=x(-\ln|x|+c)$ 。

45.$(x-y)dx+xdy=0$ 。

解： $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=-1$ ， $\Longrightarrow p(x)=-\dfrac{1}{x}$ ， $f(y)=-1$ ， $\Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=x\Longrightarrow$ $y=x(\int-\dfrac{1}{x}dx+c)=x(-\ln|x|+c)$ 。

46.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^2}$ 。

解： $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}+y^2$ ， $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y^2$ ， $p(y)=-\dfrac{1}{y}$ ， $f(y)=y^2$ ， $e^{-\int p(y)dy}=y\Longrightarrow x=y(\int y^2\dfrac{1}{y}dy+c)=y(\dfrac{1}{2}y^2+c)=\dfrac{1}{2}y^3+cy$ 。

47.$(xy+1)ydx-xdy=0$ 。

解： $y^2+\dfrac{y}{x}=\dfrac{dy}{dx}\Longrightarrow\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{y}=1$ ，令 $z=\dfrac{1}{y}\Longrightarrow-\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=1\Longrightarrow$ $\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{1}{x}z=-1$ ， $p(x)=\dfrac{1}{x}$ ， $f(x)=-1\Longrightarrow e^{-\int p(x)dx}=\dfrac{1}{x}\Longrightarrow z=$ $\dfrac{1}{x}(\int-xdx+c)=\dfrac{1}{x}(-\dfrac{1}{2}x^2+c)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{c}{x}=\dfrac{c-x^2}{2x}=\dfrac{1}{y}\Longrightarrow y=\dfrac{2x}{c-x^2}$ 或 $y=0$ 。

48.$(x^2+y^2)dy+2xydx=0$ 。

解： $\dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}=2x$ ， $\dfrac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x\Longrightarrow$ 是全微分方程。

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{y_0}^{y}(x_0^2+y^2)dx+\int_{x_0}^{x}2xydy\\&=x_0^2y-x_0^2y_0+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}y_0^3+x^2y-x_0^2y\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\dfrac{1}{3}y^3+x^2y=c$ 及 $y=0$ (已包括于 $\dfrac{1}{3}y^3+x^2y=c$)

49.$(y-x^2)y'+4xy=0$ 。

解： $4xydx+(y-x^2)dy=0$ ， $\dfrac{\partial(4xy)}{\partial y}=4x$ ， $\dfrac{\partial(y-x^2)}{\partial x}=-2x\Longrightarrow\psi(y)=$ $\dfrac{4x+2x}{-4xy}=-\dfrac{3}{2y}$ ， $\mu(y)=e^{-\int\frac{3}{2y}dy}=(\dfrac{1}{y})^{\frac{3}{2}}\Longrightarrow4xy^{-\frac{1}{2}}dx+(y^{-\frac{1}{2}}-x^2y^{-\frac{3}{2}})dy=0$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}4xy_0^{-\frac{1}{2}}dx+\int_{y_0}^{y}(y^{-\frac{1}{2}}-x^2y^{-\frac{3}{2}})dy$$

$$= 2x^2y_0^{-\frac{1}{2}} - 2x_0^2y_0^{-\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}} + 2x^2y^{-\frac{1}{2}} - 2x^2y_0^{-\frac{1}{2}}$$

$\Longrightarrow 2y^{\frac{1}{2}} + 2x^2y^{-\frac{1}{2}} = c \Longrightarrow y^{\frac{1}{2}} + x^2y^{-\frac{1}{2}} = c \Longrightarrow x^2 = -y + c\sqrt{y}$ 或 $y = 0$ 。

50. 设 f(x) 是连续函数，并且满足 $f(x) + 2\int_0^x f(t)dt = x^2$ 。求 f(x) 。

解： $f(x) + 2\int_0^x f(t)dt = x^2 \Longrightarrow f'(x) + 2f(x) = 2x \Longrightarrow p(x) = 2$ ，$e^{-2\int dx} = e^{-2x}$ 。

$f(x) = e^{-2x}(\int 2xe^{2x}dx + c) = e^{-2x}(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c) = (x - \frac{1}{2}) + ce^{-2x}$

$f(0) = 0 \Longrightarrow f(0) = -\frac{1}{2} + c = 0$ ， $c = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ 。

51. 设 f(x) 有一阶连续的导数，并且满足

$$2\int_0^x (x + 1 - t)f'(t)dt = x^2 - 1 + f(x) ,$$

求 f(x) 。

解： $2\int_0^x (x + 1 - t)f'(t)dt = x^2 - 1 + f(x) \Longrightarrow 0 = \int_0^0 (0 + 1 - t)f'(t)dt = 0 - 1 + f(0) \Longrightarrow f(0) = 1$ 。

$2f'(x) + 2\int_0^x f'(t)dt = 2x + f'(x) \Longrightarrow f'(x) + 2f(x) - 2f(0) = 2x \Longrightarrow f'(x) + 2f(x) = 2x + 2$ ， $p(x) = 2$ ， $e^{-\int p(x)dx} = e^{-2x}$ 。

$f(x) = e^{-2x}(\int (2x+2)e^{2x}dx+c) = e^{-2x}(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+e^{2x}+c) = x+\frac{1}{2}+ce^{-2x}$ 。

$f(0) = \frac{1}{2} + c = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ 。

52. 设 $\varphi(x)$ 有一阶连续的导数， $\varphi(0) = 1$ ，并设 $(y^2 + xy)dx + (\varphi(x) + 2xy)dy = 0$ 是全微分方程。求 $\varphi(x)$ 及此全微分方程的通积分。

解： $(y^2 + xy)dx + (\varphi(x) + 2xy)dy = 0$ 是全微分方程。

$\Longrightarrow \frac{\partial(y^2 + xy)}{\partial y} = 2y + x$ ， $\frac{\partial(\varphi(x) + 2xy)}{\partial x} = \varphi'(x) + 2y \Longrightarrow \varphi'(x) = x$ ，

$d(\varphi(x)) = xdx \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ 。

又 $\varphi(0) = c = 1 \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Longrightarrow (y^2 + xy)dx + (\frac{1}{2}x^2 + 2xy + 1)dy = 0$

$$\Longrightarrow u(x, y) = \int_{x_0}^x (y_0^2 + xy_0)dx + \int_{y_0}^y (\frac{1}{2}x^2 + 2xy + 1)dy$$

$$= y_0^2x - y_0^2x_0 + \frac{1}{2}x^2y_0 - \frac{1}{2}x_0^2y_0 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2y_0 + xy^2 - xy_0^2 + y + y_0$$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}x^2y + xy^2 + y = c$ 。

用适当变换解下列方程 (53-55)：

53.$(x + y)^2\frac{dy}{dx} = a^2$ 。

解：令 $z=x+y \Longrightarrow z^2\dfrac{dz-dx}{dx}=a^2 \Longrightarrow z^2\dfrac{dz}{dx}=a^2+z^2 \Longrightarrow \dfrac{z^2}{a^2+z^2}dz=dx \Longrightarrow (1-\dfrac{a^2}{a^2+z^2})dz=dx \Longrightarrow z-a\arctan\dfrac{z}{a}=x+c \Longrightarrow x+y-a\arctan\dfrac{x+y}{a}=x+c \Longrightarrow y=a\arctan\dfrac{x+y}{a}+c$ 。

54.$\dfrac{dy}{dx}=y^2-x^2+1$ 。

解：令 $z=y-x \Longrightarrow \dfrac{dz+dx}{dx}=z(z+2x)+1 \Longrightarrow \dfrac{dz}{dx}=z^2+2xz \Longrightarrow \dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx}=1+\dfrac{2x}{z}$ ，令 $u=\dfrac{1}{z} \Longrightarrow -\dfrac{du}{dx}=1+2xu \Longrightarrow \dfrac{du}{dx}+2xu=-1 \Longrightarrow p(x)=2x$ ，

$e^{-\int p(x)dx}=e^{-x^2}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow u &= e^{-x^2}(\int -1e^{x^2}dx+c)\\ &= e^{-x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)=\frac{1}{z}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow z=e^{x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)^{-1} \Longrightarrow y-x=e^{x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)^{-1} \Longrightarrow y=x+e^{x^2}(c-\int e^{x^2}dx)^{-1}$ 。

55.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\tan\dfrac{y^2}{x}$ 。

解：$y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{2x}+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{y^2}{x} \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}=\dfrac{y^2}{2x}+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{y^2}{x}$ ，令 $z=\dfrac{y^2}{x} \Longrightarrow \dfrac{d(xz)}{dx}=z+\tan z \Longrightarrow \dfrac{xdz}{dx}+z=z+\tan z \Longrightarrow x\dfrac{dz}{dx}=\tan z \Longrightarrow \dfrac{\cos z}{\sin z}dz=\dfrac{1}{x}dz \Longrightarrow \ln|\sin z|=\ln|x|+c \Longrightarrow \sin z=cx \Longrightarrow \sin\dfrac{y^2}{x}=cx \Longrightarrow y^2=x\arcsin cx$ 。

56. 求 $y=y'^2$ 的奇解。

解： $y'=p^2 \Longrightarrow F(x,y,p)=p^2-y=0$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial p}=2p \Longrightarrow p=0 \Longrightarrow y=0$ 。
代入 $y=0$ 是解 $\Longrightarrow$ 是奇解。

57. 求 $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$ 的奇解。

解： $y'=p \Longrightarrow F(x,y,p)=y^2p^2-2xyp+2y^2-x^2=0$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial p}=2y^2p-2xy=0 \Longrightarrow (yp-x)y=0$ 。 $y=0$ 代入显然不是上述方程的解。
$p=\dfrac{x}{y}$ 代入 $F(x,y,p)=0 \Longrightarrow x^2-2x^2+2y^2-x^2=0$ ， $y=\pm x$ 。
$p=\pm1$ 代入是方程的解 $\Longrightarrow y=\pm x$ 是奇解。

58. 求 $[(y')^2+1](x-y)^2=(x+yy')^2$ 的奇解。

解： $F=(p^2+1)(x-y)^2-(x+yp)^2=0$ ， $\dfrac{\partial F}{\partial p}=2p(x-y)^2-2(x+yp)y=0 \Longrightarrow p=\dfrac{y}{x-2y} \Longrightarrow y(x-y)^2(x-2y)=0 \Longrightarrow$ 经检验 $y=0$ 为奇解。

59. 求曲线族 $y=cx-(c^2+1)x^2$ 的包络，其中 c 是参数。

解： $\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=x-2cx^2\Longrightarrow c=\dfrac{1}{2x}\Longrightarrow y=\dfrac{1}{4}-x^2(x\neq 0)$ 。

60. 求曲线族 $\dfrac{x}{\sin\theta}+\dfrac{y}{\cos\theta}=a$ 的包络，其中是 a 常数， θ 是参数。

解： $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-\dfrac{x\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{y\sin\theta}{\cos^2\theta}=0\Longrightarrow\dfrac{x}{\sin^3\theta}=\dfrac{y}{\cos^3\theta}\Longrightarrow\dfrac{y\sin^2\theta}{\cos^3\theta}+\dfrac{y}{\cos\theta}=a\Longrightarrow\dfrac{y}{\cos^3\theta}=a\Longrightarrow\dfrac{1}{\cos\theta}=(\dfrac{a}{y})^{\frac{1}{3}}$ ， $\dfrac{1}{\sin\theta}=(\dfrac{a}{x})^{\frac{1}{3}}\Longrightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 。

61. 曲线族 $(y-a)^2-x^3=0$ 有无包络？其中 a 是参数。

解： $\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}=2(a-y)=0\Longrightarrow y=a\Longrightarrow$c- 判别曲线 $x=0$ 不是包络。

62. 求圆族 $(x-c)^2+y^2-\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-c^2)=0$ 的包络，其中 a ， b 是常数，c 是参数。

解： $\dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=2(c-x)+2c\dfrac{b^2}{a^2}=0\Longrightarrow c=\dfrac{xa^2}{a^2+b^2}\Longrightarrow\dfrac{x^2}{a^2+b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 。

求下列方程的解 (63-73) ：

63.$y'=\ln x$ 。

解： $y''=\ln x\Longrightarrow y'=x\ln x-x+c_1\Longrightarrow y''=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{3}{4}x^2+c_1x+c_2$ 。

64.$xy''+y'=4x$ 。

解： $y'=p\Longrightarrow p'x+p=4x\Longrightarrow p=2x+\dfrac{c}{x}\Longrightarrow y=x^2+c_1\ln|x|+c_2$ 。

65.$2yy''=(y')^2$ 。

解：$y'=p\Longrightarrow 2yp\dfrac{dp}{dy}=p^2\Longrightarrow p=0$ 或 $p=cy^{\frac{1}{2}}\Longrightarrow y=c$ 或 $y=(c_1x+c_2)^2$ 。

66.$yy''-(y')^2=y^4$ ， $y(0)=1$ ， $y'(0)=0$ 。

解： $y'=p\Longrightarrow yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=y^4\Longrightarrow\dfrac{dp^2}{dy}-\dfrac{2}{y}p^2=2y^3\Longrightarrow p^2=y^2(c_1+y^2)\Longrightarrow c_1=-1\Longrightarrow\dfrac{d(\frac{1}{y})}{\sqrt{1-(\frac{1}{y})^2}}=-dx\Longrightarrow\dfrac{1}{y}=\sin(-x+c_2)\Longrightarrow c_2=\dfrac{\pi}{2}\Longrightarrow y=\sec x$ 。

67.$y''=e^y$ 。

解：令 $z=e^{\frac{1}{2}y}\Longrightarrow y=2\ln z\Longrightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{z}\dfrac{dz}{dx}$ ， $\dfrac{dy^2}{dx^2}=\dfrac{2}{z}\dfrac{dz^2}{dx^2}-\dfrac{2}{z^2}(\dfrac{dz}{dx})^2\Longrightarrow\dfrac{2}{z}z''-\dfrac{2}{z}(z')^2=z^2$ 。

令 $p=z' \Longrightarrow \frac{dp^2}{dz}-\frac{2}{z}p^2=z^3 \Longrightarrow p^2=z^2(\frac{1}{2}z^2+c_1) \Longrightarrow \frac{2c_1dz}{z\sqrt{z^2+c_1^2}}=\sqrt{2}c_1dx \Longrightarrow \sqrt{2}c_1(x+c_2)=\ln\frac{\sqrt{c_1^2+e^y}-c_1}{\sqrt{c_1^2+e^y}+c_1}$ 。

68.$yy''+(y')^2=y'$ 。

解： $y'=p \Longrightarrow yp\frac{dp}{dy}+p^2=p \Longrightarrow 1-p=cy \Longrightarrow y=c_1+c_2e^{-\frac{x}{c_1}}$ 。

69.$y^3y''+1=0$ 。

解： $p=y' \Longrightarrow y^3p\frac{dp}{dy}+1=0 \Longrightarrow \frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+c \Longrightarrow 1+c_1y^2=(c_1x+c_2)^2$ 。

70.$2y''=3y^2$ ， $y(-2)=1$ ， $y'(-2)=1$ 。

解： $p=y' \Longrightarrow 2p\frac{dp}{dy}=3y^2 \Longrightarrow p^2=y^3+c \Longrightarrow c=0 \Longrightarrow y=\frac{4}{(x+c_1)^2} \Longrightarrow c_1=0 \Longrightarrow y=\frac{4}{x^2}$ 。

71.$y''(1-y)+2(y')^2=0$ 。

解： $y'=p$ ， $p\frac{dp}{dy}(1-y)+2p^2=0 \Longrightarrow p=c(1-y)^2 \Longrightarrow \frac{1}{1-y}=c_1x+c_2$ 。

72.$y''+\sqrt{1+(y')^2}=0$ 。

解： $y'=p$ ， $p'+\sqrt{1+p^2}=0 \Longrightarrow y'+\sqrt{1+(y')^2}=ce^{-x} \Longrightarrow y'=\frac{1}{2}ce^{-x}-\frac{1}{2c}e^{-x} \Longrightarrow y=\frac{1}{2}c_1e^{-x}-\frac{1}{2c_1}e^{x}+c_2$ 。

73.$xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$ 。

解：令 $y'=p \Longrightarrow xp'=p\ln\frac{p}{x}$ 。令 $z=\ln\frac{p}{x} \Longrightarrow p=xe^z$ ， $\frac{dp}{dx}=e^z+xe^z\frac{dz}{dx} \Longrightarrow x(e^z+xe^z\frac{dz}{dx})=zxe^z \Longrightarrow x\frac{dz}{dx}-z=-1 \Longrightarrow z=x(c_1+\frac{1}{x})=c_1x+1 \Longrightarrow y'=exe^{c_1x}$ 。

当 $c_1=0$ 时， $y=\frac{1}{2}ex^2+c$ ，

当 $c_1\neq 0$ 时， $y=\frac{e}{c_1}(x-\frac{1}{c_1})e^{c_1x}+c_2$ 。

74. 设当 $x\geq 0$ 时 f(x) 有一阶连续导数，并且满足

$$f(x)=-1+x+2\int_0^x(x-t)f(t)f'(t)dt\ ,$$

求 $f(x)$(当 $x\geq 0$) 。

解： $f'(x)=1+2\int_0^x f(t)f'(t)dt$

$\Longrightarrow f'(x)=1+f^2(x)-f^2(0)=f^2 \qquad (f(0)=-1)$

$\Longrightarrow -\frac{1}{f}x+c$ ， $c=1$

$\Longrightarrow f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ 。

75. 设曲线通过点 $A(1,-1)$ ，且曲线上任一点处的切线斜率等于切点纵坐标的平方，求此曲线的方程。
解： $y(1) = -1$ ， $y' = y^2 \Longrightarrow -\dfrac{1}{y} = x + c \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow y = -\dfrac{1}{x}$ 。

76. 设 100 摄氏度的物体置于 20 摄氏度的屋子里，在 10 分钟内冷却到 60 摄氏度，问在多少时间内该物体冷却到 25 摄氏度。
解： $y' = k(y-20) \Longrightarrow \ln y - 20 = kt + c$ ， $y(0) = 100$ ， $y(10) = 60 \Longrightarrow c = \ln 80$ ， $k = -\dfrac{1}{10}\ln 2 \Longrightarrow$ 当 $y(t) = 25$ 时， $t = 40m$ 。

77. 已知放射性物质镭的裂变规律是：裂变速率与剩余量成正比。设已知在某一时刻 $t = t_0$ 时，镭的份量是 R_0 克，求在任意时刻 t 镭的份量 $R(t)$ 。
解： $R'(t) = -\lambda R(t)$ ， $R(t_0) = R_0 \Longrightarrow R(t) = ce^{-\lambda(t-t_0)}$ ， $c = R_0 \Longrightarrow R(t) = R_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$ 。

78. 一厂房体积为 V 立方米，开始时空气中含有二氧化碳 m_0 克，每分钟通入体积为 Q 立方米的新鲜空气 (设新鲜空气中不含二氧化碳) ，同时排出等量的混浊空气，室内空气始终保持均匀，求室内二氧化碳的含量与时间的函数关系。
解： $y(0) = m_0$ ， $y' = -\dfrac{Q}{V}y \Longrightarrow y = ce^{-\frac{Q}{V}t} \Longrightarrow c = m_0 \Longrightarrow y = m_0 e^{-\frac{Q}{V}t}$ 。

79. 已知曲线的曲率处处都等于常数 $k(k \neq 0)$, 法线方程为 $-y'(Y-y) = X - x$ ， $Y = 0$ 时， $X = x + yy'$ ，求此曲线的方程。
解：曲线过 $Q(x+yy',0)$ 点， $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x+yy'-x^2)+y^2} = \sqrt{y^2p^2+y^2} = \dfrac{1}{k}$ ， $y^2p^2 + y^2 = \dfrac{1}{k^2} \Longrightarrow p^2 = \dfrac{1}{y^2k^2} - 1 \Longrightarrow p = \pm\sqrt{\dfrac{1-y^2k^2}{y^2k^2}} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\dfrac{1-y^2k^2}{y^2k^2}}$ 。
取 + 时，不妨先设 $y > 0 \Longrightarrow \dfrac{yk}{\sqrt{1-y^2k^2}}dy = dx \Longrightarrow -\dfrac{1}{2k}\dfrac{d(1-y^2k^2)}{\sqrt{1-y^2k^2}} = dx \Longrightarrow -\dfrac{1}{k}\sqrt{1-y^2k^2} = x + c \Longrightarrow 1 - y^2k^2 = k^2(x+c)^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{k^2} = (x+c)^2 + y^2 \Longrightarrow$ 是圆，其余几种情况类似可得都是圆。

80. 求一曲线族，使在其上每一点处与曲线族 $y = cx^3$ 正交。
解： $y' = \dfrac{-1}{3cx^2} = -\dfrac{x}{3y} \Longrightarrow x^2 + 3y^2 = c$ 。

81. 一盛满水的直立圆柱形贮水器，直径为 4 米，高为 6 米，其底上有

一半径为 $\frac{1}{12}$ 米的圆孔，问容器中水全部由小孔流完需多少时间？已知水从小孔流出的速度等于 $0.6\sqrt{2gh}$ (g 是重力加速度，h 是小孔离液面的距离)。

解： $h' = -\dfrac{(\frac{1}{12})^2 0.6\sqrt{2gh}}{2^2} \Longrightarrow 2\sqrt{h} = \dfrac{-0.6t\sqrt{2g}}{24^2} + c$ ，

$h(0) = 6 \Longrightarrow c = 2\sqrt{6}$ 。

当 $h = 0$ 时， $t = 1062s = 17.7m$ 。

82. 设对任意 $x > 0$ ，曲线 $y = f(x)$ 上点 (x,f(x)) 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ ，求 f(x) 的一般表达式。

解： $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow \dfrac{1}{x_0}\displaystyle\int_0^{x_0} f(t)dt - f(x_0) = -f'(x_0)x_0 \Longrightarrow xf''(x) = -f'(x) \Longrightarrow f(x) = c_1 \ln x + c_2$ 。

83. 某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$ 。已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过了国家规定指标。为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不得超过 $\dfrac{m_0}{V}$ 。问至多经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量就可降至 m_0 以内？（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的。）

解： $m' = \dfrac{m_0}{6} - \dfrac{m}{3} \Longrightarrow m(t) = \dfrac{m_0}{2} + ce^{-\frac{t}{3}}$ ，

又 $m(0) = 5m_0 \Longrightarrow c = \dfrac{9}{2}m_0 \Longrightarrow$ 当 $m(t) = m_0$ 时， $t = 6\ln 3$ 。

84. 求一条凹曲线，已知其上任一点处的曲率 $k = \dfrac{1}{2y^2\cos\alpha}$ ，其中 α 为该曲线在相应点处的切线的倾角 $(\cos\alpha > 0)$ ，且曲线在点 (1,1) 处的切线为水平。

解： $\dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{2y^2}$ 。

令 $y' = p$ ， $y(1) = 1$ ， $y'(1) = 0$ ， $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{1+p^2} + c \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow p = \sqrt{y-1} \Longrightarrow 4y = (x+c_1)^2 + 1 \Longrightarrow c_1 = -1 \Longrightarrow 4y = (x-1)^2 + 4$ 。

85. 求连接两点 A(0,1) 与 B(1,0) 的一条曲线，它位于弦 AB 的上方，并且对于此弧上的任意一条弦 AP，该曲线与弦 AP 之间的面积为 x^3 ，其中 x 为点 P 的横坐标。

解： $\displaystyle\int_0^x y(t) - (\frac{y(x)-1}{x}t + 1)dt = x^3$ ， $x \in [0,1]$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_0^x y(t)dt - \frac{x}{2}(y-1) - x = x^3 \Longrightarrow y - xy' = 6x^2 + 1 \Longrightarrow y'' = -12 \Longrightarrow y = -6x^2 + c_1x + c_2$ ， $y(0) = 1$ ， $y(1) = 0 \Longrightarrow c_1 = 5$ ， $c_2 = 1 \Longrightarrow y = -6x^2 + 5x + 1$ 。

86. 跳伞运动员从高空自飞机上跳下，经若干秒后打开降落伞，开伞后运动过程中所受空气阻力为 kv^2 ，其中常数 $k>0$ ， v 为下降速度，设人与伞的质量为 m ，且不计空气浮力，试证明：只要打开伞后有足够的降落时间着地，则落地速度将近似地等于 $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ 。

解： $mv'=mg-kv^2$(当时间足够时， $v'=0$ ，即 $v=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$) 。

$v'=-\dfrac{k}{m}(v^2-\dfrac{gm}{k})$ ，令 $b^2=\dfrac{gm}{k}$ ， $a^2=\dfrac{kg}{m} \Longrightarrow \dfrac{v-b}{v+b}=ce^{-\frac{2k}{m}bt}=ce^{-2at} \Longrightarrow$

$v=b\dfrac{ce^{2at+1}}{ce^{2at-1}} \Longrightarrow$ 当 t 充分大时， $v=b=\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ 。

87. 设函数 p(x) 和 f(x) 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=a>0$ ，$|f(x)|\le b$ ， a ， b 均为常数。试证明：方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$ 的一切解在 $[0,+\infty)$ 上有界。

解： $p(x)$ ， $f(x)$ 在 R^+ 上连续 $\Longrightarrow y=e^{-\int p(t)dt}[c+\displaystyle\int f(t)e^{\int p(s)ds}dt]$ 在 R^+ 也连续。

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=a>0$ ， $|f(x)|\le b \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}ce^{-\int_0^x p(t)dt}=0$ ，即 $ce^{-\int_0^x p(t)dt}$ 在 R^+ 上有界。

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}|e^{-\int p(t)dt}\displaystyle\int f(t)e^{\int p(s)ds}|\le b\lim\limits_{x\to+\infty}|\dfrac{\int e^{\int p(s)ds}dt}{e^{\int p(t)dt}}|=b\lim\limits_{x\to+\infty}|\dfrac{e^{\int p(s)ds}dt}{p(x)e^{\int p(t)dt}}|=\dfrac{b}{a}$

$\Longrightarrow e^{-\int p(t)dt}\displaystyle\int f(t)e^{\int p(s)ds}dt$ 在 R^+ 上也有界 $\Longrightarrow y$ 在 R^+ 上有界。

88. 设初值问题

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}-(2x^2+1)y=x^2, & x\ge 1, \\ y(1)=y_1. \end{cases}$$

(1) 求满足上述初值问题的解 (用积分表示) ;

(2) 是否存在适当的 y_1 ，使对应的解 y(x) 当 $x\longrightarrow+\infty$ 时存在有限极限？若有，这种 y_1 有多少？求出之，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$ 。

解： $y'-(2x+\dfrac{1}{x})y=x$

$\Longrightarrow y=e^{x^2+\ln x}[c+\displaystyle\int_1^x te^{-t^2-\ln t}dt]=xe^{x^2}[c+\int_1^x e^{-t^2}dt]$ 。

由 $y(1)=y_1 \Longrightarrow c=e^{-1}y_1 \Longrightarrow y=xe^{x^2}[y_1e^{-1}+\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt]$ 。

当 $\lim\limits_{x\to+\infty}y$ 存在时，

$\lim\limits_{x\to+\infty}y'=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(2+\dfrac{1}{x^2})y=-1$ ，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-\dfrac{1}{2}$ 。

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(y_1e^{-1}+\int_1^x e^{-t^2}dt)'}{(\frac{1}{x}e^{-x^2})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{-x^2}-\frac{1}{x}2xe^{-x^2}}=-\dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ 要使 y 极限存在只需 $\lim\limits_{x\to+\infty} y_1e^{-1}+\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt=0$,即 $y_1=-e\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ 。

89. 求 $y'+y\cos x=\sin x$ 的通解 (用积分表示) ；在这些解中，有无周期为 2π 的？若有，求出之，若无，说明理由。

解： $y=e^{\sin x}[c+\displaystyle\int_0^x \sin te^{-\sin t}dt]$ ，

此解不以 2π 为周期 (因为 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin te^{-\sin t}dt\neq 0$) 。

第二章 线性微分方程 习题解答

2004 年 10 月 10 日

1. 证明：设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 在区间 (a,b) 内线性无关，则这些函数中的部分函数在区间 (a,b) 内也线性无关。换句话说，如果函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 在区间 (a,b) 内线性相关，则添上一些函数也是线性相关。

证明：若函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 线性无关，则若函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 线性相关，那么存在 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ ，使得函数 $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_k f_k(x) \equiv 0$ ，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 不全为 0 。不妨设 $c_1 \neq 0$ ，那么函数 $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_k f_k(x) + c_{k+1} f_{k+1}(x) + \cdots + c_m f_k(m) \equiv 0$ ，其中 $c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_m = 0$ 。但因为 $c_1 \neq 0$ ，所以函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 线性相关，产生矛盾！所以就可以得到函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 线性无关。

2. 证明：设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 在 (a,b) 内线性无关，则由这些函数构造出的 k 个新的函数

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, k),$$

在 (a,b) 内也线性无关的充分必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

证明："$\Rightarrow$"$g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x)$ 线性无关，则对于任意的 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 我们有 $c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_k g_k \equiv 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ 。而 $g_i(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j(x)$ ，所以 $\sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i a_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{k} (\sum_{i=1}^{k} c_i a_{ij}) f_j \equiv 0.$ 因为 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 线性无关,所以 $\sum_{i=1}^{k} c_i a_{ij} = 0.$ 即

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1k}c_k = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2k}c_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \cdots + a_{kk}c_k = 0 \end{cases}$$

而由上可知其只有零解。所有由代数知识，我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

"$\Leftarrow$" 和前面一样，若 $c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_k g_k \equiv 0$ ，我们有 $\sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j = 0$ ，即

$\sum_{i=1}^{k} c_i a_{ij} = 0$ ，那么有

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1k}c_k = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2k}c_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \cdots + a_{kk}c_k = 0 \end{cases}$$

同样由代数知识可知由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

所以方程只有零解，也就是 $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ ，即得 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 线性无关。

3. 证明：设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), f_{k+1}(x), \cdots, f_{k+m}(x)$ 在 (a,b) 内线性无关，并假设由其中的部分函数，例如 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 构造 k 个新的函数

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

在 (a,b) 内线性无关，则以 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x)$ 代替 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ 得到的 $k+m$ 个函数 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x), f_{k+1}(x), \cdots, f_{k+m}(x)$ 在区间 (a,b) 内也线性无关。

证明：” $\Leftarrow$ ” 定义 $g_{k+1} = f_{k+1}, \cdots, g_{k+m} = f_{k+m}$ ，也即 $a_{ii} = 1, i \geq k+1, a_{ij} = 0, i \geq k+1,$ 所以

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2(k+m+\cdots+k+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

所以 $f_1, \cdots, f_{k+m}$ 线性无关，所以 $f_1, \cdots, f_k$ 也线性无关。则由 1 得 $c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k = 0$ ，有某个 $c_i \neq 0$ 。那么 $c_1 f_1 + \cdots + c_k f_k + 0 \cdot f_{k+1} + \cdots + 0 \cdot f_{k+m} = 0 \Rightarrow f_1, \cdots, f_{k+m}$ 也线性相关。产生矛盾。所以， $f_1, \cdots, f_k$ 线性无关。由 2 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \Rightarrow A \neq 0$$

由 2 得 $g_1, \cdots, g_{k+m}$ 线性无关。由因为 $f_{k+i} = g_{k+i}$ ，所以 $g_1, \cdots, g_k, f_{k+1}, \cdots, f_{k+m}$ 线性无关

4. 设 $y_i (i = 1, \cdots, n+1)$ 是 n 阶非齐次线性方程 $L[y] = f(x)$ 的 $n+1$ 个线性无关的解，试求对应的齐次线性方程 $L[y] = 0$ 的基本解组；并求 $L[y] = f(x)$ 的通解。

解：令 $z_i = y_{i+1} - y_i$ ，那么 $L(z_i) = L(y_{i+1}) - L(y_i) = f(x) - f(x) = 0$ 。所以 $z_i \ i = 1, 2, \cdots, n$ 是齐次线性方程 $L[y] = 0$ 的一组解。又设 $c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_n z_n = 0$ ，那么代入

后， $c_ny_{n+1}+(c_{n-1}-c_n)y_n+\cdots+(c_1-c_2)y_2-c_1y_1=0$ 。因为 $y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}$ 线性无关，所以 $c_n=0,c_{n-1}-c_n=0,\cdots,c_{i-1}-c_i=0,\cdots.c_1-c_2=0,c_1=0\Rightarrow c_{i-1}=c_i\Rightarrow c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ ，那么我们就有 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 线性无关。所以 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $L[y]=0$ 的基本解组。那么 $L[y]=f(x)$ 的通解为

$$y=c_1z_1+c_2z_2+\cdots+c_nz_n+y_1$$
$$=(1-c_1)y_1+(c_1-c_2)y_2+\cdots+(c_{n-1}-c_n)y_n+c_ny_{n+1},\forall c_1,\cdots,c_n$$

5. 设 $y_i(i=1,\cdots,n+1)$ 是齐次线性方程

$$y^n+p_1(x)y^{n-1}+p_2(x)y^{n-2}+\cdots+p_n(x)y=0$$

的基本解组，其中 $p_i(x)(i=1,\cdots,n+1)$ 在区间 (a,b) 内连续。 $W(x)$ 是 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 的朗斯基行列式。试证明下述刘维尔公式成立：

$$W(x)=W(x_0)\exp[-\int_{x_0}^{x}p_1(\xi)d\xi],\qquad x_0,x\in(a,b).$$

其中 $\exp u=e^u$ 。

证明：

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$W'=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{n} & y_2^{n} & \cdots & y_n^{n}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{n} & y_2^{n} & \cdots & y_n^{n}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\sum i=1^n p_iy_1^{n-i} & -\sum_{i=1}^n p_iy_2^{n-i} & \cdots & -\sum_{i=1}^n p_iy_n^{n-i}\end{vmatrix}$$

$$=-\sum_{i=1}^n p_i\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{n-i} & y_2^{n-i} & \cdots & y_n^{n-i}\end{vmatrix}$$

$$=-p_1\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1}\end{vmatrix}=-p_1W$$

所以 $W'=-p_1W$ ，即 $\frac{W'}{W}=-p_1$ 那么就有 $\int_{x_0}^{x}\frac{W'}{W}dx=-\int_{x_0}^{x}p_1$ ，则 $\ln W(x)-\ln W(x_0)=-\int_{x_0}^{x}p_1(x)dx$ ，于是就得到 $W(x)=W(x_0)\exp[-\int_{x_0}^{x}p_1(\xi)d\xi]$

求下列方程的通解或特解（ 6～ 17 ）：

$6.4y' - 3y = 0.$

解： $4\lambda - 3 = 0, \lambda = \frac{3}{4}$, 通解为 $y = ce^{\frac{3}{4}x}$.

$7.y'' - 4y' = 0.$

解： $\lambda^2 - 4\lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$, 通解为 $y = c_1 + c_2 e^{4x}$.

$8.y'' + 2y = 0.$

解： $\lambda^2 + 2 = 0, \lambda_1 = \sqrt{2}i, \lambda_2 = -\sqrt{2}i$, 通解为 $y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$.

$9.y'' - 2y' + y = 0.$

解： $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = 1$, 通解为 $y = (c_1 + c_2 x)e^x$.

$10.y'' + 4y' + 13y = 0.$

解： $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0, \lambda_1 = -2 + 3i, \lambda_2 = -2 - 3i$, 通解为 $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.

$11.y'' - 5y' + 4y = 0, y|_{x=0} = 5, y'|_{x=0} = 8.$

解： $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$, 则通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$, 于是我们有 $y' = c_1 e^x + 4c_2 e^{4x}$, 代入初始条件 $\begin{cases} {}_1 + c_2 = 5 \\ c_1 + 4c_2 = 8 \end{cases}$ ，于是有 $\begin{cases} {}_1 = 4 \\ c_2 = 1 \end{cases}$ ，那么解为： $y = 4e^x + e^{4x}$.

$12.y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

解： $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, 通解为 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$.

$13.y''' - y'' + y' - y = 0.$

解： $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$, 通解为 $y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

$14.y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

解： $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i$, 通解为 $y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$.

$15.y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$

解： $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0, \lambda_{1,2} = -1 + i, \lambda_{3,4} = -1 - i$, 通解为 $y = e^{-x}((c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x)$.

$16.y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0.$

解： $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0, \lambda_{1,2,3,4} = 1$, 通解为 $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)e^x$.

$17.y^{(4)} - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -1, y''(0) = -2, y'''(0) = 1.$

解： $\lambda^4 - 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$, 通解为 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$, 于是有 $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x$, $y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$, $y''' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 \sin x - c_4 \cos x$, 代入初始条件 $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ c_1 - c_2 + c_4 = -1 \\ c_1 + c_2 - c_3 = -2 \\ c_1 - c_2 - c_4 = 1 \end{cases}$ ，则有 $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 2 \\ c_4 = -1 \end{cases}$ ，于是解为 $y = 2\cos x - \sin x$.

求下列方程的通解或特解（ 18～ 36 ）：

$18.y'' + y = a$(a 是常数)$, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ，去特解 $y_0 = A$ ，则 $A = a$ ，所以 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + a, y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$ ，代入初值 $\begin{cases} c_1 + a = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ ，得到 $\begin{cases} c_1 = -a \\ c_2 = 0 \end{cases}$ ，于是解为 $y = -a\cos x + a$

$19.y'' + 5y' + 4y = 20e^x, y(0) = 0, y'(0) = -2.$

解: 齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$, 设特解为 $y_0 = Ae^x$, 则 $Ae^x + 5Ae^x + 4Ae^x = 20e^x$, 就可以得到 $A = 2$ 。于是 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} + 2e^x$ ， $y' = -c_1 e^{-x} - 4c_2 e^{-4x} + 2e^x$ ，代入初始条件，我们有 $\begin{cases} c_1 + c_2 + 2 = 0 \\ -c_1 - 4c_2 + 2 = -2 \end{cases}$ ，得到 $\begin{cases} c_1 = -4 \\ c_2 = 2 \end{cases}$ ，那么解就为 $y = -4e^{-x} + 2e^{-4x} + 2e^x$ 。

$20.y'' + y = xe^{-x}.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ，设特解为 $y_0 = (Ax + B)e^{-x}$ ，则 $y_0'' = (Ax - 2A + B)e^{-x}$ ，所以 $(2Ax - 2A + 2B)e^{-x} = xe^{-x}$ ，那么 $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$ ，所以就得到解为 $y =$

$c_1\cos x+c_2\sin x+(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})e^{-x}$ 。

21.$y''+6y'+5y=-10x+8.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}$ ，设特解为 $y_0=Ax+B,y_0'=A,y_0''=0$ ，所以就有 $6A+5(Ax+B)=-10x+8$ ，则 $A=-2,B=4$ ，于是解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}-2x+4$ 。

22.$y'+4y=x^2.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=ce^{-4x}$ ，设特解为 $y_0=Ax^2+Bx+C$ ，则有 $y_0'=2Ax+B$ ，所以可以得到 $A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{8},C=\frac{1}{32}$ ，那么解就为 $y=Ce^{-4x}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}$ 。

23.$y''+4y'+1=0.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1+c_2e^{-4x}$，设特解为 $y_0=Ax$，于是有 $y_0'=A$，则可得 $A=-\frac{1}{4}$，那么就可以得到解为 $y=c_1+c_2e^{-x}-\frac{1}{4}x$ 。

24.$y''+2y'+y=2e_{-x}.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=(c_1+c_2x)e^{-x}$ ，设特解为 $y_0=Ax^2e^{-x}$ ，于是有 $y_0'=2Axe^{-x}-Ax^2e^{-x}$ ， $y_0''=2Ae^{-x}-4Axe^{-x}+Ax^2e^{-x}$ ，则有 $A=1$ ，那么解为 $y=(c_1+c_2x+x^2)e^{-x}$ 。

25.$y''-4y=e^{2x},y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=2.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}$，设特解为 $y_0=Axe^{2x}$，于是有 $y_0''=(4A+4Ax)e^{2x}$，则有 $A=\frac{1}{4}$，那么有 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$，则有 $y'=-2c_1e^{-2x}+2c_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}$，代入初值条件 $\begin{cases}c_1+c_2=1\\-2c_1+2c_2+\frac{1}{4}=2\end{cases}$ ，得到 $\begin{cases}c_1=\frac{1}{16}\\c_2=\frac{15}{16}\end{cases}$ ，于是得到解为 $y=\frac{1}{16}e^{-2x}+(\frac{15}{16}+\frac{1}{4})e^{2x}$ 。

26.$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\cos 2t,x|_{t=0}=\frac{dx}{dt}|_{t=0}=-2.$

解：齐次方程的通解 $\widetilde{x}=c_1\cos t+c_2\sin t$ ，设特解为 $x_0=Ae^{2it}$ ，则有 $x_0''=-4Ae^{2it}$ ，于是就得到 $A=-\frac{1}{3}$ ，所以 $x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t,\ x'=-c_1\sin t+c_2\cos t+\frac{2}{3}\sin 2t$ ，代入初始条件就得到 $\begin{cases}c_1-\frac{1}{3}=-2\\c_2=-2\end{cases}$ ，得到 $\begin{cases}c_1=-\frac{5}{3}\\c_2=-2\end{cases}$ ，于是解为 $x=-\frac{5}{3}\cos t-2\sin t-\frac{1}{3}\cos 2t$ 。

27.$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\sin at,a>0.$

解：齐次方程的通解 $\widetilde{x}=c_1\cos t+c_2\sin t$

$a\neq 1$ 时：设特解为 $x_0=Ae^{ait}$ ，此时有 $x_0''=-a^2Ae^{ait}$ ，可得 $A=\frac{1}{1-a^2}$ ，于是有 $x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{1-a^2}\sin at$ 。

$a=1$ 时：设特解为 $x_0=Ate^{it}$ ，此时有 $x_0''=(2Ai-At)e^{it}$ ，可得 $A=-\frac{1}{2}$ ，于是就有解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}t\sin t$ 。

28.$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=2\sin x+\cos x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1+c_2e^{-3x}$ ，设特解为 $y_0=A\sin x+B\cos x$ ，可得 $y_0'=A\cos x-B\sin x,y_0=-A\sin x-B\cos x$ ，于是就可得到 $A=\frac{1}{10},B=-\frac{7}{10}$ ，那么解就为 $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{1}{10}\sin x-\frac{7}{10}\cos x$ 。

29.$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+2k^2x=5k^2\sin kt.$

解： $k=0$ 时：为齐次方程， $x=c_1t+c_2$ ；

$k\neq 0$ 时：齐次方程的通解为 $\widetilde{x}=e^{-kt}(c_1\cos kx+c_2\sin kx)$ ，设特解为 $x_0=Ae^{kit}$ ，则有 $x_0'=Akie^{kit},x_0''=-Ak^2e^{kit}$ ，于是得到 $A=1-2i$ ，那么解为 $x=e^{-kt}(c_1\cos kt+c_2\sin kt)+\sin kt-2\cos kt$ 。

30.$2\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+y=4-e^x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^{-\frac{1}{2}x}+c_2e^{-x}$ ，设特解为 $y_{01}=A,y_{02}=Be^x$ ，则有 $A=4,B=-\frac{1}{6}$ ，那么就有解为 $y=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{-x}+4-\frac{1}{6}e^x$ 。

31.$2y''+5y'=\cos^2 x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}}$，因为 $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$，则我们设特解为 $y_{01}=Ax,y_{02}=Be^{2xi}$ ，于是可得到 $A=\frac{1}{10},B=\frac{-4-5i}{164}$ ，那么解为 $y=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{x}{10}-\frac{1}{41}\cos 2x+\frac{5}{164}\sin 2x$ 。

32.$y''+y=\sin x\cos x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1\cos x + c_2\sin x$ ，因为 $2\sin x\cos x = \sin 2x$ ，所以设特解为 $y_0 = Ae^{2ix}$ ，则有 $y_0'' = -4Ae^{2ix}$ ，可得 $A = -\frac{1}{6}$ ，那么解为 $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{6}\sin 2x$ 。

33.$y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\cos x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x)$ ，设特解为 $y_0 = Ae^{(-1+i)x}$ ，则有 $y_0' = A(-1+i)e^{(-1+i)x}, y_0'' = -2Aie^{(-1+i)x}$ ，于是可得 $A = \frac{1+i}{8}$ ，那么解为 $y = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x) + \frac{1}{8}e^{-x}(\cos x - \sin x)$ 。

34.$y'' + 4y = x\sin 2x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ ，设特解为 $y_0 = x(Ax+B)e^{2ix}$ ，则有 $y_0'' = [2A + 4i(2Ax+B) - 4(Ax^2+Bx)]e^{2ix}$ ，于是可得 $A = -\frac{i}{8}, B = \frac{1}{16}$ ，那么解为 $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{8}x^2\cos 2x + \frac{1}{16}x\sin 2x$ 。

35.$y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2 + 3.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$ ，设特解为 $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ ，则有 $y_0' = 2Ax + B, y_0'' = 2A, y_0''' = 0$ ，于是可得 $A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{11}{8}$ ，那么解为 $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$ 。

36.$y^{(4)} + 2y'' + y = x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x$ ，设特解为 $y_0 = Ax + B$ ，则有 $y_0'' = y^{(4)} = 0$ ，于是可得 $A = 1, B = 0,$ 那么解为 $y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x + x$ 。

37. 设 $y = (c_1 + x)e^x + c_2e^{-2x}$ 是微分方程 $y'' + ay' + by = ge^{cx}$ 的通解，则常数 a, b, c, g 分别等于多少？

解：因为通解为 $y = (c_1+x)e^x + c_2e^{-2x}$ ，则可见 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ ，所以 $a = 1, b = -2, c = 1$ ，有上式可见特解为 $y_0 = xe^x$ ，则有 $y_0' = e^x + xe^x, y_0'' = 2e^x + xe^x$ ，所以有 $g = 3$ 。即有 $a = 1, b = -2, c = 1, g = 3$ 。

38. 设 $y = x\sin x$ 为 $y'' + by' + cy = A\cos x + B\sin x$ 的一个解，则常数 b, c, A, B 分别等于多少？

解：因为 $y = x\sin x$ 是解，可见非齐次项 e^{aix} 中的 ai 一定是特征根（不然不会有 x ），所以有 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ ，那么 $b = 0, c = 1$ ，又有 $y' = \sin x + x\cos x, y'' = 2\cos x - x\sin x$ ，我们可以得到 $A = 2, B = 0$ 。即有 $b = 0, c = 1, A = 2, B = 0$ 。

39. 设 $y = x^2e^x$ 为 $y'' + by' + cy = Ae^x$ 的一个解，则常数 b, c, A 分别等于多少？

解： $y = x^2e^x$ 是解，所以有非线性项可见 $\lambda = 1$ 是 2 重根，所以 $b = -2, c = 1$ ，又因为 $y' = 2xe^x + x^2e^x, y'' = (2 + 4x + x^2)e^x$ ，则有 $A = 2$ 。即有 $b = -2, c = 1, A = 2$ 。

40. 求一个阶数尽可能低的常系数线性齐次微分方程，是得函数 $y_1 = 2xe^x$ 与 $y_2 = 3\sin 2x$ 是它的解。

解：可见 y_1, y_2 是线性无关的。则一定还有 $\cos 2x$ ， y_1 前面有 x ，则至少是两重的。所以 $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ ，所以就有 λ 应满足 $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$ ，所以就得方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$ 。

41. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(1) = 0, f'(1) = 0$ ，并设 $x > 0$ 时

$$(3x^2 - 2f(x))ydx - (x^2f'(x) + \sin y)dy = 0$$

为全微分方程，求 $f(x)$ ，并求上述全微分方程的通解。

解：有全微分知识可知： $3x^3 - 2f(x) = -x^2f''(x) - 2xf'(x)$ ，即 $f(x)$ 满足 $x^2f''(x) + 2xf'(x) - 2f(x) + 3x^3 = 0, f(1) = 0, f'(1) = 0$ ，令 $x = e^t$ ，则有 $f'' + f' - 2f = -3e^{3t}$ ，所以 $f(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^t - \frac{3}{10}e^{3t}$ ，即 $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{5x^2} - \frac{3}{10}x^3$ 。所以 $(\frac{18}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^{-2} - x)ydx - (\frac{x^2}{2} + \frac{2}{5x} - \frac{9}{10}x^4 + \sin y)dy = 0$ ，则有 $\cos y + \frac{9}{10}x^4 - \frac{2}{5x} - \frac{x^2}{2} = c$ 。

42. 设 $f(x)$ 二阶可导，并设 $f'(x) = f(1-x)$ ，求 $f(x)$ 。

解： $f''(x)=(f'(x))'=-f'(1-x)=-f(x)$ ，所以 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ ，又因为 $f'(x)=f(1-x)$ ，所以有 $c_2\cos x-c_1\sin x=c_1\cos(1-x)+c_2\sin(1-x)$ ，则有 $c_2=\frac{1-\sin 1}{\cos 1}$ 。所以可以得到 $f(x)=c_1(\cos x+\frac{1-\sin 1}{\cos 1})$ 。

43. 求 $y''-y=e^{|x|}$ 的通解。

解： $x\geq 0$ 时： $y''-y=e^x\Rightarrow y=(c_1-\frac{1}{2})e^x+(c_2+\frac{1}{2})e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$ ； $x<0$ 时： $y''-y=e^{-x}\Rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}$ 。

44. 设 $f(x)$ 二阶可导， $f(x)+f'(\pi-x)=\sin x, f(\frac{\pi}{2})=0.$ 求 $f(x)$ 。

解：令 $x'=\pi-x$ ，可得 $f'(x)=\sin x-f(\pi-x)$ ，所以 $f''(x)=\cos x+f'(\pi-x)=\cos x+\sin x-f(x)$，则有 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x\sin x$ 。又因为 $f(x)+f(\pi-x)=\sin x, f(\frac{\pi}{x})=0$ ，就得到 $c_1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}, c_2=-\frac{\pi}{4}$ 。所以有 $f(x)=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{x}{2})\cos x+(-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$ 。

45. 设 $f(x)$ 是连续函数，并且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt$ ，求 $f(x)$ 。

解：因为 $f(x)=e^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^x+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ 所以 $f'(x)=e^x+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x), f''(x)=e^x+f(x)$ 。所以就有 $f(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$ 。又因为 $f(0)=1, f'(0)=1$ ，所以 $c_1=\frac{3}{4}, c_2=\frac{1}{4}$ 。所以 $f(x)=\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$ 。

46. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ ，是确定常数 α,β,γ ，并求该方程的通解。

解：将特解代入得 $\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\3+2\alpha+\beta=\gamma\\1+\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\\beta=2\\\gamma=-1\end{cases}$ 所以就可以得到 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^x$ 。

47. 质量为 1 克的质点被一力从某中心沿直线推开，该力的大小与这个中心到质点的距离成正比（比例常数为 4 ）；介质阻力和运动速度成正比（比例常数为 3 ）。在运动开始时，质点于中心的距离为 1 厘米，速度为 0 ，求质点的运动方程。

解：设距离为 x ，则 $x''(t)=4x(t)-3x'(t), x(0)=1, x'(0)=0$ ，所以就有 $x(t)=c_1e^{-4t}+c_2e^t, c_1=\frac{1}{5}, c_2=\frac{4}{5}$ ，所以就有 $x(t)=\frac{1}{5}(4e^t+e^{-4t})$ 。

48. 重量为 P 牛顿的列车沿水平轨道作直线运动，当速度不大使列车受到阻力 $R=(a+bv)P$ 牛顿，其中 a,b 是常数， v 是列车速度。设机车的牵引力是 F 牛顿。当 $t=0$ 时， $s=0$（ s 为走过的路程）， $v=0$ 。求火车的运动方程。

解： $S''=F/(P/g)-(a+bS')P/(P/g)=(Fg/P-ag)-bgS', S(0)=0, S'(0)=0$

$S(t)=c_1e^{-bgt}+c_2+\frac{1}{bg}(Fg/P-ag)t\Rightarrow c_1=-c_2=\frac{1}{b^2g}(F/g-a)$ ，

所以有 $S(t)=\frac{1}{b^2g}(F/g-a)(e^{-bgt-1+bgt})$ 。

49. 一电阻 $R=250$ 欧，电感 $L=1$ 亨，电容 $C=10^{-4}$ 法的串联电路，外加直流电压 $E=100$ 伏，当时间 $t=0$ 时，电流 $i=0$ ， $\frac{di}{dt}=100$ 安 / 秒，求电路重点流域时间的函数关系。

解： $100=250i+\int_0^t idt/c+li\Rightarrow i''+250i'+10^4i(t)=0\Rightarrow i(t)=c_1e^{-50t}+c_2e^{-200t}, i(0)=0, i'(0)=100,$ 则有 $c_1=-c_2=\frac{2}{3}\Rightarrow i(t)=\frac{2}{3}(e_{-50t}-e^{-200t})$ 。

求下列方程的通解（ 50∼ 52 ）：

50.$x^2y''+3xy'+y=0.$

解：令 $x=e^t$ ，那么原式就变为： $y''(t)+2y'(t)+y=0$ 。该式的通解为 $y=c_1e^t+c_2te^t$ ，那么就得到 $y=\frac{1}{x}(c_1+c_2\ln x), x>0$ 。

51.$x^2y''-2xy'+2y=x\ln x.$（题目要改一下）

解：令 $x=e^t$ ，有 $y''(t)-3y't+2y=te^t$ 。该式的通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{2t}+(At^2+Bt)e^t$ ，有 $A=-\frac{1}{2}, B=-1$ ，那么就得到解为 $y=x[c_1-\frac{1}{2}(\ln x)2-\ln x]+c_2x^2, x>0$ 。

52.$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0.$

解： $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt})$ ，那么就有 $y'''-6y''+11y'-6y=0$ ，通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$ ，于是有解为 $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$ 。

53. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ ， $f(r)$ 具有二阶导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ 。求 $f(r)$ 。

解：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=r^{-2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+(r^{-1}-x^2r^3)\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2r^{-1}\frac{\partial f}{\partial r}=0$$

$$\Rightarrow r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2r\frac{\partial f}{\partial r}=0$$

$$f(r)=c_1+\frac{c_2}{r}$$

已知下列方程对应的齐次线性方程的一个解 y_1 ，求该方程的通解（ 54～ 56 ）：

54.$x^3y'''-xy'+y=0$ ， 已知 $y_1=x$ 。

解： $y''-x^{-2}y'+x^{-3}y=0$ ，令 $y=xu$ ，

$$\Rightarrow xu''+[2-\frac{1}{x}]u'=0$$

$$\Rightarrow u=c_1+c_2e^{-\frac{1}{x}}$$

$$y=c_1x+c_2xe^{-\frac{1}{x}}$$

55.$(1-x^2)y'''-xy''+y'=0$ ， 已知 $y_1=x^2$ 。

解：令 $z=y'$ ，则 $z=2x$ 。原式就变为 $z''-\frac{x}{1-x^2}z'+\frac{x}{1-x^2}z=0$

$$\Rightarrow 2xu''+[4-\frac{2x^2}{1-x^2}]u'=0$$

$$z=c_1x+c_2\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$z=c_1x+c_2\sqrt{1-x^2}$$

$$y=c_1+c_2x^2+c_3(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$$

56.$(1-x^2)y''+2xy'-2y=-2$ ， 已知 $y_1=x$ 。

解： $y''+\frac{2x}{1-x^2}y'-\frac{2}{1-x^2}y=0$ ，令 $y=xu$

$$\Rightarrow xu''+[2+\frac{2x}{1-x^2}x]u'=0$$

$$\Rightarrow u=c_1+c_2(x+\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow y=c_1x+c_2(x^2+1)+y^*,y^*=1$$

$$\Rightarrow y=c_1x+c_2(x^2+1)+1$$

57. 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

所对应的齐次线性方程两个线性无关的解，它们的朗斯基行列式为 $W(x)$ 。试证明：该非齐次线性方程的通解为

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{1}{W(x)}[y_1(\xi)y_2(x)-y_2(\xi)y_1(x)]f(\xi)d\xi$$

其中 $p(x),q(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续， $x_0\in(a,b)$ 。

解：变动任意常数法。 $y=u_1y_1+u_2y_2$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_1'y_1+u_2'y_2=0\\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=f(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1' = -\frac{y_2 f}{w}, u_2' = \frac{y_1 f}{w}$$

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{w(\xi)}[y_1(\xi)y_2(x) - y_2(\xi)y_1(x)]f(\xi)d\xi$$

求下列方程的通解（ 58～ 61 ）：

58.$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

解： $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + y^*, y^* = e^x x \ln|x|$ 代入上题的公式得到

$$y = e^x(x\ln|x| + c_1 + c_2 x)$$

59.$y'' - y = 2\sec^3 x$.

解：

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + y^*, y^* = -\frac{\cos 2x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

60.$y''' + 4y' = 4\cot 2x$.

解：

$$y = c_1\sin 2x + c_2\cos 2x + c_3 + y^*$$

$$(y')^* = \int(\cos 2\xi\sin 2x - \sin 2\xi\cos 2x)\ln|\cos 2\xi|d\xi$$

$$y = c_1\sin 2x + c_2\cos 2x + c_3 + \frac{1}{2}ln|\sin 2x| - \frac{1}{2}\cos 2x\ln|\cos 2x - \cot 2x|$$

61.$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

解： $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + y^*, y^* = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1) + e^{-2x}(-e^x+1)$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1)$$

62. 用幂级数解法求 $y'' + 4xy = 0$ 的通解。

解：令 $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ，

$$y'' = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^{i-2} i(i-1) = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)a_{i+2}x^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}[(i+1)(i+2)a_{i+2} + 4a_{i-1}]x^i + 2a_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_{i+2} = a_{i-1}\frac{4}{(i+1)(i+2)}, a_2 = 0$$

$$a_{3k} = \frac{(-4)^k a_0}{3k(3k-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}$$

$$a_{3k+1} = \frac{(-4)^k a_0}{(3k+1)3k\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}$$

$$a_{3k+2} = 0$$

$$\Rightarrow y = c_1(1 + \cdots + \frac{(-4)^k a_0 x^{3k}}{3k(3k-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \cdots) + c_2(x + \cdots + \frac{(-4)^k a_0 x^{3k+1}}{(3k+1)3k\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3})$$

63. 用广义幂级数法求 $4xy'' + 2y' + y = 0$ 的通解。

解：令 $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{i+\frac{1}{2}}$

$$y' = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)a_{i+2}x^i + \sum_{i=0}^{\infty}(i+\frac{1}{2})(i-\frac{1}{2})b_{i+2}x^{i-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}[4i(i+1)a_{i+1}+2(i+1)a_{i+1}+a_i]x^i+(2a_1+a_0)$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}[4(i+\frac{3}{2})(i+\frac{1}{2})b_{i+1}+2(i+\frac{3}{2}b_{i+1})+b_i]x^{i+\frac{1}{2}}=0$$

$$a_1=-\frac{a_0}{2}, a_{i+1}=-\frac{a_i}{(2i+2)(si+1)}, b_{i+1}=-\frac{b_i}{(2i+2)(2i+3)}$$

$$y=c_1(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^k}{(2k)!}+\cdots)$$

$$+c_2(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3!}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5!}x^{\frac{5}{2}}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{\frac{2k-1}{2}}}{(2k-1)!})$$

$$=c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x}$$

64. 用幂级数解法求 $(1-x^2)y''-xy'+\frac{1}{9}y=0$ 满足 $y(0)=\sqrt{3}/2$， $y'(0)=\frac{1}{6}$ 的解。

解：同理 $\Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty}[(i+1)(i+2)a_{i+2}-i(i-1)a_i-ia_i+\frac{1}{9}a_i]x^i+\frac{a^0}{9}+a_2+x(\frac{a_1}{9}-a_1+a_3)=0$

$$\Rightarrow a_{i+2}=(i^2-\frac{1}{9})\frac{a_i}{(i+1)(i+2)}, a_2=-\frac{a_0}{9}, a_3=\frac{8}{9}a_1$$

由 $y(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}, y'(0)=\frac{1}{6}\Rightarrow a_0=\frac{\sqrt{3}}{2}, a_1=\frac{1}{6}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}[1-\frac{1}{9}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{9}(2^2-\frac{1}{9})\frac{x^4}{4!}-\cdots-\frac{1}{9}(2^2-\frac{1}{9})\cdots[(2k-2)^2-\frac{1}{9}]\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\cdots]$$

$$+\frac{1}{6}[x+(1-\frac{1}{9})(3^2-\frac{1}{9})\frac{x^5}{5!}+\cdots+(1-\frac{1}{9})(3^2-\frac{1}{9})\cdots[(2k-2)^2-\frac{1}{9}]\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}+\cdots]$$

65. 对于什么样的常数 p 和 q ，方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=0$ 的所有解当 $t\to+\infty$ 时趋于零？

解：当 $\triangle>0$ 时， $\lambda_1=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{\triangle}}{2}, \lambda_2=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{\triangle}}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{-\lambda_2 t}=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2<\lambda_1<0\Rightarrow p>0, q>0$$

当 $\triangle=0$ 时，同理可得 $\Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2<0\Rightarrow p>0, q>0$

当 $\triangle<0$ 时， $\lambda_1=\alpha+i\beta, \lambda_2=\alpha-i\beta, \alpha=-\frac{p}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}e^{\alpha t}(c_1\sin\beta t+c_2\cos\beta t)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha<0\Rightarrow p>0, q>0$$

综合得到 $p>0, q>0$

66. 给定方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=f(t)$ ，其中常数 $p>0, q>0$ ，函数 $f(t)$ 在 $0\le t<+\infty$ 上连续。试证明： (1) 如果 $f(t)$ 在 $0\le t<+\infty$ 上有界，则上述方程的每一个解在 $0\le t<+\infty$ 上也有界； (2) 如果当 $t\to+\infty$ 时 $f(t)\to 0$ ，则上述方程的每一个解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零。解：利用 57 与 65 的结论，可知对于齐次通解 (1) 、 (2) 显然成立，因此只需要证明特解即可。

当 $\triangle>0$ 时

$(1)\lambda_2<\lambda_1<0, y_1=e^{\lambda_1 t}, y_2=e^{\lambda_2 t}$

$$W(\xi)=(\lambda_2-\lambda_1)e^{\lambda_1+\lambda_2}\xi$$

$$|y*|=|\int_0^t\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\xi}(e^{\lambda_1\xi+\lambda_2 t}-e^{\lambda_2\xi+\lambda_1 t})f(\xi)d\xi|$$

$$\le\frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t|e^{\lambda_2(t-\xi)}-e^{\lambda_1(t-\xi)}|d\xi$$

$$= \frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}[1-e^{\lambda_1}t] + \frac{1}{\lambda_2}(1-e^{\lambda_2 t})$$

$$\leq \frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}]$$

所以有界。

(2)$\forall\epsilon>0,\exists A>0,$

$$s.t.\forall t>A,|f(t)|<\epsilon,e^{\lambda_1 t}<\epsilon,e^{\lambda_2 t}<\epsilon.\forall t,\exists M>0,|f(t)|\leq M,$$

$$|y^*|\leq|\int_0^A y(\xi)d\xi|+\int_A^t y(\xi)d\xi$$

$$\leq \frac{M}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1(t-A)}-e^{\lambda_1 t})+\frac{1}{\lambda_2}(e^{\lambda_2(t-A)}-e^{\lambda_2 t})]+\frac{\epsilon}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}]$$

只需要 $t>2A$ 就有

$$\leq \frac{M}{\lambda_1-\lambda_2}(-\frac{2\epsilon}{\lambda_1}-\frac{2\epsilon}{\lambda_2})+\frac{\epsilon}{\lambda_1-\lambda_2}(-\frac{1}{\lambda_1})\leq c_0\epsilon(t>2A)$$

当 $\triangle=0$ 时

(1)$\lambda_1=\lambda_2<0,y_1=e^{\lambda_1 t},y_2=te^{\lambda_1 t},W(\xi)=e^{2\lambda_1\xi}$

$$|y^*|=|\int_0^t(t-\xi)e^{\lambda_1(t-\xi)}f(\xi)d\xi|$$

$$\leq|f|_{\max}|[-\frac{t-\xi}{\lambda_1}e^{\lambda_1(t-\xi)}+\frac{1}{\lambda_1^2}e^{\lambda_1(t-\xi)}]|_0^t|$$

$$=|f|_{\max}\frac{1}{\lambda_1^2}|1-e^{\lambda_1 t}+\lambda_1 te^{\lambda_1 t}|$$

所以有界.

(2) 同理, $\forall\epsilon>0,\exists A,s.t.\forall t>A,|f(t)|<\epsilon$

$$e^{\lambda_1 t}<\epsilon,te^{\lambda_1 t}<\epsilon,\forall t,|f(t)|<M$$

$$|y^*|\leq|\int_0^A y(\xi)d\xi|+|\int_0^t y(\xi)d\xi|$$

$$M|\frac{-(t-A)}{\lambda_1}e^{\lambda_1(t-A)}|+M|\frac{t}{\lambda_1}e^{\lambda_1 t}|+\epsilon\frac{1}{\lambda_1^2}|1-e^{\lambda_1 t}+\lambda_1 t3^{\lambda_1 t}|<c_0\epsilon$$

只需要 $t>2A$ 即可。

当 $\triangle<0$ 时

(1)$\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta,\alpha=-\frac{p}{2}$

$$W(\xi)=e^{2\alpha\xi},y_1=e^{\alpha t}\cos\pi t,y_2=e^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$|y^*|=|\int_0^t e^{\alpha(t-\xi)}\sin\beta(t-\xi)f(\xi)d\xi|$$

$$\leq|f|_{\max}\int_0^t e^{\alpha(t-\xi)d\xi}$$

$$=|f|_{\max}\frac{1}{(-\alpha)}(1-e^{\alpha t})$$

所以有界。

(2) 同理 $\forall\epsilon>0,\exists A,s.t.\forall t>A,|f(t)|<\epsilon,e^{\alpha t}<\epsilon,\forall t,|f(t)|<M$

$$|y^*|\leq|\int_0^A y(\xi)d\xi|+|\int_A^t y(\xi)d\xi|$$

$$\leq M\frac{1}{(-\alpha)}|e^{\alpha(t-A)}-e^{\alpha t}|+\epsilon\frac{1}{-\alpha}[1-e^{\alpha(t-A)}]\leq c_0\epsilon$$

只需要 $t>2A$ 即可。

第三章

1. 将第二章习题 1 ~ 3 中的“函数”改成“向量函数”，则这些命题仍成立，试叙述并证明这些命题。

2. 对于非齐次线性方程组，叙述并证明与第二章习题 4 相应的习题。

3. 设 $X(t)$ 是齐次线性方程组 $\frac{dx}{dt}=A(t)x$ 的一个基本解矩阵， $A(t)$ 在区间 (a,b) 内连续， $W(t)$ 是 $X(t)$ 的朗斯基行列式。试证明下述刘维尔公式：

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(\tau)d\tau}, t_0\in(a,b), t\in(a,b)\ 。$$

并证明：如果所给的齐次线性方程组是由高阶齐次线性方程经变换 (3.3) 得到的，则上述刘维尔公式与第二章习题 5 的刘维尔公式一致。

1， 2， 3 证明同第二章，略。

4. 设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别是 $\frac{dx}{dt}-A(t)x=f_1(t)$ 和 $\frac{dx}{dt}-A(t)x=f_2(t)$ 的解，试证明 $x_t+x_2(t)$ 是 $\frac{dx}{dt}-A(t)x=f_1(t)+f_2(t)$ 的解。

证明： $\frac{d(x_1(t)+x_2(t))}{dt}-A(t)(x_1(t)+x_2(t))=\frac{dx_1}{dt}-A(t)x_1+\frac{dx_2}{dt}-A(t)x_2=f_1(t)+f_2(t)$ 。

5. 设 $A(t)$ 是实矩阵， t 是实变量， $x(t)=u(t)+iv(t)$ 是方程 $\frac{dx}{dt}-A(t)x=\varphi(t)+i\psi(t)$ 的解，其中 $u(t)$ ， $v(t)$ ， $\varphi(t)$ ， $\psi(t)$ 都是实函数， $i=\sqrt{-1}$ 是虚单位。试证明 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别满足 $\frac{du(t)}{dt}-A(t)u(t)=\varphi(t)$ 和 $\frac{dv(t)}{dt}-A(t)v(t)=\psi(t)$ 。

证明：将 $x(t)=u(t)+iv(t)$ 代入 $\frac{dx}{dt}-A(t)x=\varphi(t)+i\psi(t)$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dt}-A(t)u(t)+(\frac{dv}{dt}-A(t)v(t))i=\varphi(t)+i\psi(t)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\frac{du}{dt}-A(t)u(t)=\varphi(t)\\ \frac{dv}{dt}-A(t)v(t)=\psi(t)\end{cases}$$

$\Longrightarrow u(t)$, $v(t)$ 分别是 $\frac{du(t)}{dt}-A(t)u(t)=\varphi(t)$, $\frac{dv(t)}{dt}-A(t)v(t)=\psi(t)$ 的解。

求下列方程组的解 (6 ~ 20) :

6. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y-3x,\\ \frac{dy}{dt}=8x-y.\end{cases}$

解： $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)(1+\lambda)-8 = (\lambda+5)(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -5$ ， $\lambda_2 = 1$

$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ 8\alpha_1 + 4\beta_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -4\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ 8\alpha_2 - 2\beta_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 。

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ， $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 2 - 2\lambda + \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1+i$ ， $\lambda_2 = 1-i$ 。

$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -i\alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 - i\beta_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$e^t(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -i \cos t + \sin t \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t (c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ， $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda^2) + 10 = \lambda^2 + 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 3i$ 。

$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} (1-3i)\alpha_1 - 5\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 - (1+3i)\beta_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}$ 。

$$(\cos 3t + i\sin 3t)\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 3t + 5i\sin 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t + (\sin 3t - 3\cos 3t)i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}。$$

$$9.\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$$

解： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ， $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 =$

$-(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ， $\lambda_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ -\beta_1 + v_1 = 0 \\ \alpha_1 - v_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ \alpha_2 + \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\gamma_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}。$$

$$e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + (\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)i \\ -\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + (-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t)i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + c_3 \begin{pmatrix} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} 。$$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 =$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$(二重)

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}) e^{2t} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}) e^{2t} = \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{2t}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \end{pmatrix} e^{2t}$ 。

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$

$\Longrightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$(二重)， $\lambda_2 = 2$ 。

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = 0$

$\Longrightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0$

$$\Longrightarrow v_1^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad v_2^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad v_1^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_2^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}。$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow \begin{cases}-2\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha-2\beta+\gamma=0\\\alpha+\beta-2\gamma=0\end{cases} \Longrightarrow$$

$$v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}\ 。$$

$$12.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-z,\\\dfrac{dy}{dt}=-x+y+z,\\\dfrac{dz}{dt}=x-y+z.\end{cases}$$

解： $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$， $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-1\\-1&1-\lambda&1\\1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=$

$(1-\lambda)^3+1-1+(1-\lambda)+(1-\lambda)+(1-\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+4)$

$\Longrightarrow \lambda_1=1$， $\lambda_2=1+\sqrt{3}i$， $1-\sqrt{3}i$ 。

$$v_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}-\sqrt{3}i&1&-1\\-1&-\sqrt{3}i&1\\1&-1&-\sqrt{3}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{pmatrix}=0 \Longrightarrow v_2=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}$$

$$(\cos\sqrt{3}t+\sin\sqrt{3}ti)\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{3}t+\sin\sqrt{3}ti\\(-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t)+(-\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t)i\\(-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t)+(-\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t)i\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^t+(c_2\begin{pmatrix}\cos\sqrt{3}t\\-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t\\-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}\sin\sqrt{3}t\\-\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t\\-\frac{1}{2}\sin\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}t\end{pmatrix})e^t$$

$$13.\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+x-2z=0,\\\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}+x=0,\\\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dz}{dt}+x+2y=0.\end{cases}$$

解：原方程组可以化为 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x-y \\ \dfrac{dy}{dt} = -y-z \\ \dfrac{dz}{dt} = -z \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow (-1-\lambda)^3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$(三重)。

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t^2 \\ -2t \\ 2 \end{pmatrix}) e^{-t}$$

14. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$

解：$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p \\ \dfrac{dp}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = q \\ \dfrac{dq}{dt} = x \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A-\lambda E| = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$

$\lambda^4 - 1 = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 1$， $\lambda_2 = -1$， $\lambda_3 = i$， $\lambda_4 = -i$

$$\Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow (\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ -\sin t + i\cos t \\ -\cos t - i\sin t \\ \sin t - i\cos t \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

解：由第二个方程 $x = \dfrac{dy}{dt} + 6y - e^{-2t}$

$\Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 2e^{-2t} = 2y - 5\dfrac{dy}{dt} - 30y + 5e^{-2t} + e^t$

$\Longrightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} + 11\dfrac{dy}{dt} + 28y = 3e^{-2t} + e^t$ 。

$\lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0$ ， $(\lambda+4)(\lambda+7) = 0$ ， $\lambda_1 = -4$ ， $\lambda_2 = -7$

$\Longrightarrow$ 齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t}$ ，

$y_0 = Ae^{-2t} + Be^t$ ， $y_0' = -2Ae^{-2t} + Be^t$ ， $y_0'' = 4Ae^{-2t} + Be^t$ 。

代入得 $A = \dfrac{3}{10}$ ， $B = \dfrac{1}{40}$

$\Longrightarrow y = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t} + \dfrac{3}{10}e^{-2t} + \dfrac{1}{40}e^t$

$$\Longrightarrow x = -4c_1 e^{-4t} - 7c_2 e^{-7t} - \frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{1}{40}e^t$$
$$+ 6c_1 e^{-4t} + 6c_2 e^{-7t} + \frac{9}{5}e^{-2t} + \frac{3}{20}e^t - e^{-2t}$$

$$= 2c_1e^{-4t} - c_2e^{-7t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{7}{40}e^t$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1e^{-4t} - c_2e^{-7t} + \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{7}{40}e^t \\ c_1e^{-4t} + c_2e^{-7t} + \frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{1}{40}e^t \end{pmatrix}$$ 。

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + y + 3, \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = x + y - 3. \end{cases}$

解： $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3 \end{cases} \Longrightarrow x'' = y' = -x + 3$

$\Longrightarrow x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 3$， $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$ 。

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y - e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y - 4e^{-t}. \end{cases}$

解： $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$， $v_0 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2\sin 2t & -2\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$，特解为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1e^{2t} \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_1e^{2t} \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ 。

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 1. \end{cases}$

解： $x'' = -x - \sin t + 1$

$\Longrightarrow x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + At\cos t + 1 \Longrightarrow A = \dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \dfrac{t}{2}\cos t + 1$

$y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t - \dfrac{t}{2}\sin t - \dfrac{\cos t}{2}$ 。

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}. \end{cases}$

解： $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$， $\lambda_{1,2} = -4$

$\Longrightarrow v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，特解为 $e^t \begin{pmatrix} \frac{4}{25} \\ \frac{1}{25} \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{36} \\ \frac{7}{36} \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \frac{4}{25} \\ \frac{1}{25} \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{36} \\ \frac{7}{36} \end{pmatrix} + c_1 e^{-4t}[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}] +$$

$$c_2 e^{-4t}[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$$ 。

$$20.\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x + 2y = 1 + e^t, \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + 2y + z = 2 + e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dt} - x + z = 3 + e^t. \end{cases}$$

解： $x' + y' + z' - x + 2y + z = 3 + \frac{3}{2}e^t$

$\Longrightarrow x' = x + 1 + \frac{1}{2}e^t$

$\Longrightarrow x = c_1 e^t - 1 + \frac{1}{2}te^t$

$\Longrightarrow y' = -2y + \frac{1}{2}e^t$

$\Longrightarrow y = c_2 e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t$

$\Longrightarrow z' = -z + 2 + \frac{1}{2}e^t$

$\Longrightarrow z = c_3 e^{-t} + 2 + \frac{1}{4}e^t$ 。

21. 试证明，对于高阶线性方程（ 3.9 ），按第二章 §4 中二的变动任意常数法得到的通解，与用变换（ 3.3 ）将（ 3.9 ）化成线性方程组（ 3.9 ）' 之后，按本节的变动任意常数法得到的通解（ 3.42 ）是一致的（以你 n=2 情形证明之）。

解： $n = 2$ ， $\frac{d^2x}{dt^2} + P_1\frac{dx}{dt} + P_2 x = f(t)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -P_1 x_2 - P_2 x_1 - f \end{cases}$$

$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -P_2 & -P_1 \end{pmatrix}$， $\lambda^2 + P_1\lambda + P_2$ 。

易证相应的齐次方程的解是一致的，只需证特解即可。

因为齐次方程解一致，所以基本解矩阵与逆矩阵都一致，特解也一致。得证。

22. 飞机在空中沿水平方向等速飞行，速度为 v_0 ，一重为 mg 的炸弹从飞机上下落，设空气的阻力为 R（常数），试求炸弹运动规律。

解：设水平为 x ，垂直为 y ，则 $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$ ， $x'(0) = v_0$

$\Longrightarrow mx'' = -R_x$ ， $my'' = mg - R_y$

$\Longrightarrow x = -\frac{R_x}{2} + c_1 t + c_2 \Longrightarrow c_2 = 0$ ， $c_1 = v_0$

$y = \frac{1}{2}(g - \frac{R_y}{m})t^2 + c_3 t + c_4 \Longrightarrow c_3 = c_4 = 0$

$$\Longrightarrow x = -\frac{R_x}{2m}t^2 + v_0 t \ , \quad y = \frac{1}{2}(g - \frac{R_y}{m})t^2 \ 。$$

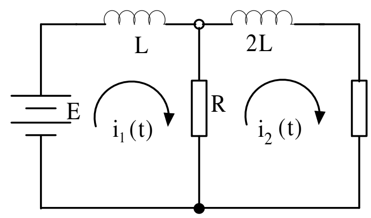

图 3-1

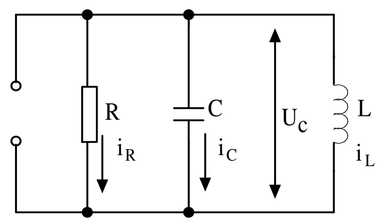

图 3-2

23. 设二电流回路如图 3-1 ,电动势 E 为常数。若开始时电流 $i_1 = i_2 = 0$,试求电流 $i_1(t)$ ， $i_2(t)$ 随时间 t 的变化规律。

解： $\begin{cases} 2Li_2' + 3Ri_2 = R(i_3 - i_2) \\ Li_1' + R(i_1 - i_2) = E \end{cases} \Longrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + \frac{3}{2} = 0$

$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}$ ， $i_1(0) = 0$ ， $i_2(0) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = e^{\frac{-3+\sqrt{3}}{2}t} \begin{pmatrix} -\frac{(2+\sqrt{3})E}{3R} \\ -\frac{(1+\sqrt{3})E}{6R} \end{pmatrix} + e^{-\frac{3+\sqrt{3}}{2}t} \begin{pmatrix} -\frac{(2-\sqrt{3})E}{3R} \\ -\frac{(1-\sqrt{3})E}{R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4E}{3R} \\ \frac{E}{3R} \end{pmatrix} 。$$

24. 一电路如图 3-2 所示，输入电压为零，电路参数 $C = 1$ 法， $L = 1$ 亨， $R = 1$ 欧。试写出以电容上的电压 U_c 和电感上的电流 i_L 为未知函数，以时间 t 为自变量的微分方程组。并设 $U_c(0) = U_{C_0}$ ， $i_L(0) = i_{L_0}$ ，求方程组的特解。

解： $\begin{cases} Li_L' = -U_c \\ cU_c' = i_c = i_L - i_R = i_L - \frac{U_c}{R} \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} Li_L' = -U_c \\ U_c' = i_L - U_c \end{cases}$

$U_c(0) = U_{c_0}$ ， $i_L(0) = i_{L_0}$

$\Longrightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ， $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Longrightarrow U_c(t) = U_{C_0}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2i_{L_0} + U_{c_0}}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$i_L(t) = \frac{1}{2}U_{c_0}e^{-\frac{1}{2}t}(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{2i_{L_0} + U_{c_0}}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$ 。

25. 质量为 m_1 和 m_2 的两个小球，穿在一光滑水平杆上，由一轻质弹簧连接，且可沿杆移动。当弹簧不受力时，两小球重心间的距离为 l 。若用 x_1 ， x_2 分别表示两小球的位移，并设 $x_1(0)=0$ ， $\dot{x}_1(0)=v_0$ ， $x_2(0)=l$ ， $\dot{x}_2(0)=0$ 。试求两球的运动规律（这里记号 $\cdot$ 表示 $\frac{d}{dt}$ ）。

解： $\begin{cases} m_1x_1''=-k[l-(x_2-x_1)] \\ m_2x_2''=k[l-(x_2-x_1)] \end{cases}$

$x_1(0)=0$ ， $x_2(0)=l$ ， $x_1'=v_0$ ， $x_2'(0)=0$ 。

添加未知元 y_1 ， y_2 ，其中 $y_1=x_1'$ ， $y_2=x_2'$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1y_1'=-k[l-(x_2-x_1)] \\ x_1'=y_1 \\ m_2y_2'=k[l-(x_2-x_1)] \\ x_2'=y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=0 \\ x_2(0)=l \\ y_1(0)=v_0 \\ y_2(0)=0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda_{1,2}=0$ ， $\lambda_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}$ 。

令 $w^2=\frac{k}{m_1m_2}(m_1+m_2)$

$$\Longrightarrow x_1=\frac{v_0}{m_1+m_2}(m_1t+\frac{m_2}{w}\sin wt)$$

$$x_2=\frac{v_0}{m_1+m_2}(m_1t-\frac{m_1}{w}\sin wt)+l \text{ 。}$$