第七章　实数的完备性

§1　关于实数集完备性的基本定理

1. 验证：数集$\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$有且只有两个聚点$\xi_1=-1$和$\xi_2=-1$.

证：因为$(-1)^{2k}+\frac{1}{2k}$;$(-1)^{2k+1}+\frac{1}{2k+1}\in\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$

且　$\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{2k}+\frac{1}{2k}=1$, $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{2k+1}+\frac{1}{2k+1}=-1$，所以1和-1为$\{(-1)^n+\frac{1}{n}\}$的聚点.

反证法：假设x_0为不同于1和-1的聚点，则取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}min\{|x_0-1|,|x_0+1|\}$，存在$N=1/\varepsilon_0$当$n>N$时$(-1)^n+\frac{1}{n}$落在$\cup(x_0,\varepsilon_0)$外部，即落在$\cup(x_0,\varepsilon_0)$至多只有有限点，这于聚点定义相矛盾.

2. 证明：任何有限集都没有聚点.

证明：设S为有限集，x_0为其聚点，由聚点定义存在互异$\{x_n\}\subset S$且有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，数列$\{x_n\}$有无限项，这于S为有限集相矛盾.

3. 设$\{a_n,b_n\}$是一严格开区间套，即

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.证明存在唯一一点$\xi$，有

$$a_n<\xi<b_n, n=1,2,\cdots$$

证　作闭区间列$\{[x_n,y_n]\}$，其中

$$x_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}, y_n=\frac{b_n+b_{n+1}}{2}, n=1,2,\cdots$$

由于$a_n<x_n<a_{n+1}$, $b_{n+1}<y_n<b_n$，故有

(1)$(a_{n+1},b_{n+1})\subset[x_n,y_n]\subset(a_n,b_n)$,从而

$$[x_{n+1},y_{n+1}]\subset[x_n,y_n],n=1,2,\cdots$$

(2)$b_{n+1}-a_{n+1}<y_n-x_n<b_n-a_n$,从而由$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,得$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$.

所以$\{[x_n,y_n]\}$为闭区间套,由区间套定理,存在一点ξ,使得$\xi\in[x_n,y_n]$,$n=1,2,\cdots$,由(1)有$a_n<\xi<b_n(n=1,2,\cdots)$,满足条件$a_n<\xi<b_n(n=1,2,\cdots)$,点$\xi$的唯一性与区间套定理同样证得.

4. 试举例说明:在有理数集内,确界原理,单调有界原理聚点定理和柯西收敛准则一般都不能成立.

解:设$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$　$b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$,则$\{a_n\}\{b_n\}$均是有理数列

(1) 点集$\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$非空有界,但在有理数集内无上确界.

(2) 数列$\{a_n\}$单调递增有上界,但在有理数集无极限.

(3) 点集$\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$有界无限,但在有理数集无聚点.

(4) 数列$\{a_n\}$满足柯西收敛准则,但在有理集内无极限.

5. 设$H=\{(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})\mid n=1,2,\cdots\}$是一个无限开区间集,问:

(1)H能否覆盖(0,1)?

(2) 能否从H中选出有限个开区间覆盖$(0,\frac{1}{2})$?

(3) 能否从H中选出有限个开区间覆盖$(\frac{1}{100},1)$?

解　(1)H能覆盖(0,1),因为对任意$x\in(0,1)$,存在n,使$\frac{1}{n+2}<x<\frac{1}{n}$.

(2) 不能从H中选出有限个开区间覆盖$(0,\frac{1}{2})$,因对H中任意有限个开区间,设其中左端点最小的为$\frac{1}{N+2}$,则当$0<x<\frac{1}{N+3}$时,这有限个开区间就不能覆盖x.

(3) 能从 H 中选出有限个开区间覆盖$(\frac{1}{100},1)$. 例如选取$(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n})$, $n = 1,2,\cdots,99$ 即可.

6. 证明:闭区间$[a,b]$ 的全体聚点的集合$[a,b]$ 本身.

证　设$x \in [a,b]$,若$x \in (a,b)$,取$\delta = min\{|x-a|,|x-b|\}$. 则$\delta > 0$,且$U(x,\delta) \subset [a,b]$,从而对任给正数$\varepsilon(<\delta)$,有$U(x,\varepsilon) \subset [a,b]$,而$U(x,\varepsilon)$ 中含有$[a,b]$ 的无限多个点,故 x 为$[a,b]$ 的聚点. 若$x = a$,则对任给正数$\varepsilon(< b-a)$,有$U_+(a,\varepsilon) \subset U(a,\varepsilon)$,且$U_+(a,\varepsilon) \subset [a,b]$,即$U(a,\varepsilon)$ 内含有$[a,b]$ 的无限多个点,故 a 是$[a,b]$ 的聚点,$x = b$ 同理可证.

设 x 为$[a,b]$ 聚点,假设$x \overline{\in} [a,b]$,则$x < a$,或$a > b$,若$x < a$,取$0 < \varepsilon < a - x$,则$U(x,\varepsilon) \cap [a,b] = \emptyset$,即$U(x,\varepsilon)$ 中不含$[a,b]$ 的点,这与 x 为$[a,b]$ 的聚点相矛盾. 所以$x \in [a,b]$,$x > b$ 同样可证.

7. 证明:单调数列$\{x_n\}$ 若存在聚点,则一定是唯一的,且是$\{x_n\}$ 的确界.

证　设递增数列$\{x_n\}$ 的聚点ζ,设 a 为任一实数且$a \neq \zeta$,不妨设$a < \zeta$($a > \zeta$ 同理可证),取$\varepsilon = \frac{\zeta - a}{2} > 0$,由聚点定义,$U(\zeta,\varepsilon)$ 中含有$\{x_n\}$ 的无限多个项,设$x_N \in U(\zeta,\varepsilon)$,由$\{x_n\}$ 的递增性,当$n \geqslant N$ 时,$x_n \geqslant x_N$,故$U(a,\varepsilon)$ 中最多含有$\{x_n\}$ 的有限多个项:$x_1,x_2,\cdots,x_{N-1}$,所以 a 不可能是$\{x_n\}$ 的聚点. 由 a 的任意性,ζ 为$\{x_n\}$ 的唯一聚点.

现在证明:$\zeta = sup\{x_n\}$,事实上,

(1)ζ 为$\{x_n\}$ 的上界,反之,若存在$x_N > \zeta$,则当$n > N$ 时,有$x_n > \zeta$,取$\varepsilon = x_N - \zeta > 0$,则在$U(\zeta,\varepsilon)$ 内最多含有$\{x_n\}$ 的有限多个项x_n,$n = 1,2,\cdots,N-1$,与聚点相矛盾.

(2)$\zeta = sup\{x_n\}$,因为对任给正数ε,存在$x_n \in U(\zeta,\varepsilon)$,从而$x_n > \zeta - \varepsilon$,结合(1) 便知$\zeta = sup\{x_n\}$. 对递减数列类似可证.

8. 试用有限覆盖定理证明聚点定理.

证　设 E 为直线上有界无穷点集,则存在$M > 0$,使$E \subset [-M,M]$,

假设$[-M,M]$中任何点都不是E的聚点,则对每一个$x\in[-M,M]$,必存在相应的$\delta_2>0$,使得在$U(x,\delta_2)$内至多含有E的有限多个点. 设$H=\{U(x,\delta_2)\mid x\in[-M,M]\}$,则H是$[-M,M]$的一个开覆盖,由有限覆盖定理,H中存在有限个开邻域:$U(x_j,\delta_{x_j})(j=1,2,\cdots,n)$构成$[-M,M]$的一开覆盖,当然也覆盖了E. 由邻域$U(x_j,\delta_{x_j})$的原意,在其内至多含有有限个点,这于E为无穷点集相矛盾. 所以$[-M,M]$中至少有E的一个聚点.

9. 试用聚点定理证明柯西收敛准则.

证　只需证明充分性,设数列$\{a_n\}$满足条件:对任给正数ε,总存在某一个自然数N,使得当$m,n>N$时,都有$|a_m-a_n|<\varepsilon$,取$\varepsilon=1$,则存在自然数N_1,当$n>N_1$时,有$|a_n-a_{N_1+1}|<1$,从而$|a_n|<|a_{N_1+1}|+1$,令$M=max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_1}|+1\}$,则对一切$n=1,2,\cdots$,有$|a_n|\leqslant M$,即$\{a_n\}$有界.

下证$\{a_n\}$有收敛子列,若$E=(a_n\mid n=1,2,\cdots)$是有限集,则$\{a_n\}$必有一常子列,若E为无限集. 则由聚点定理,E有一聚点A,由聚点定义可证,存在(a_{n_k}),使$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$,总之,$\{a_n\}$有收敛子列. 设$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$,则对任给正数ε,存在N,当$k,m,n>N$时,$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$,$|a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. 所以当$n>N$(任取$k>N$,使$n_k>n$)时,有

$$|a_n-A|\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故
$$\lim_{k\to\infty}a_n=A$$

§2　闭区间上连续函数性质的证明

1. 设f为R上连续的周期函数. 证明:f在R上有最大值与小值.

证　设f的周期为T,由于f在闭区间$[0,T]$上连续,故有最大值$f(\xi)$和最小值$f(\zeta)$,$\xi,\zeta\in[0,T]$. 任给$x\in(-\infty,+\infty)$,则存在某整数k,使得$x\in[kT,(k+1)T]$,于是$x-kT\in[0,T]$,从而有

$$f(\zeta) \leqslant f(x) = f(x - kT) \leqslant f(\xi).$$

所以 $f(\xi) = \max\limits_{x \in (-\infty, +\infty)} \{f(x)\}, f(\zeta) = \min\limits_{x \in (-\infty, +\infty)} \{f(x)\}$

2. 设 I 为有限区间. 证明:若 f 在 I 上一致连续,则 f 在 I 上有界,举例说明此结论当 I 为无限区间不一定成立.

证:设区间 I 的左、右端点为 a,b. 由于 f 在 I 上一致连续,故对 $\varepsilon = 1$,存在 $\delta > 0(\delta < \frac{b-a}{2})$,当 $|x' - x''| < \delta(x', x'' \in I)$ 时,有 $|f(x') - f(x'')| < 1$,对于上述 $\delta > 0$,令 $a_1 = a + \frac{\delta}{2}, b_= b - \frac{\delta}{2}$,则 $a < a_1 < b_1 < b$,由于 f 在 $[a_1, b_1]$ 上连续,故 f 在 $[a_1, b_1]$ 上有界,设 $|f(x)| \leqslant M_1$, $x \in [a_1, b_1]$,当 $x \in [a, a_1) \cap I$ 时,因 $0 < a_1 - x < \frac{\delta}{2} < \delta$,故 $|f(x) - f(a_1)| < 1$,从而 $|f(x)| \leqslant |f(a_1)| + 1$. 同理当 $x \in (b_1, b] \cap I$ 时,有 $|f(x)| \leqslant |f(b_1)| + 1$,令

$$M = \max\{M_1, |f(a_1)| + 1, |f(b_1)| + 1\}$$

则对一切 $x \in I$,必有 $|f(x)| \leqslant M$.

例证 $y = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$ 一致连续,但 $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = +\infty$ 无界.

3. 证明:$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

证:$\because \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$,由柯西收敛准则知,对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $M_1 > 0$ 当 $x', x'' > M_1$ 时,有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

又 $\because \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$,同理可知,存在 $M_2 > 0$ 当 $0 < x', x'' < M_2$ 时,有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

现在把 $(0, +\infty)$ 分成三个相交的区间 $(0, M_2], [\frac{M_2}{2}, M_1 + \frac{M_2}{2}], [M_1, +\infty]$. 由于 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $[\frac{M_2}{2}, M_1 + \frac{M_2}{2}]$ 连续,所以一致连续从而对上述 $\varepsilon > 0$,必存在 $\delta > 0(\delta < \frac{M_2}{2})$,当 $x', x'' \in [\frac{M_2}{2}, M_1 + \frac{M_2}{2}]$ 且 $|x'$

$-x''|<\delta$ 时,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,于是对一切 $x'x''\in(0,+\infty)$ 当 $|x'-x''|<\delta$ 时,必有 x',x'' 同属于上述区间中的一个,但都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,故 f 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

4. 试用有限覆盖定理证明根的存在性定理.

证　设 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a),f(b)$ 异号,不妨设 $f(a)<0,f(b)>0$,假设在 (a,b) 内没有 $f(x)=0$ 的根,即对每一个 $x\in(a,b)$,都有 $f(x)\neq0$,从而对一切 $x\in[a,b]$,有 $f(x)\neq0$,由连续性,对每一个 $x\in[a,b]$ 存在 $\delta_x>0$,使得 f 在 $U(x,\delta_x)\cap[a,b]$ 上同号,而

$$H=\{U(x,\delta_x)\}\mid x\in[a,b]\}$$

是 $[a,b]$ 的一个开覆盖,由覆盖定理知在 H 中必存在有限个开邻域

$$H=\{U(x_j,\delta_{x_j}\mid x_j\in[a,b],j=1,2,\cdots,n\}$$

也构成 $[a,b]$ 的一个开覆盖,设 $a\in U(x_k,\delta_{x_k})$(k 为 $1,2,\cdots,n$ 中某一个),由 $U(x_j,\delta_{x_j})$ 的原意,f 在 $U(x_i,\delta_{x_i})\cap[a,b]$ 内同号,故 $x\in U(x_k,\delta_{x_k})\cap[a,b]$ 时,有 $f(x)<0$,因 H 覆盖了 $[a,b]$,所以 f 在 $[a,b]$ 上恒负,从而 $f(b)<0$,与题设条件 $f(b)>0$ 相矛盾.于是在 (a,b) 内至少存在一点 x_0,使得 $f(x_0)=0$.

5. 证明:在 (a,b) 上连续函数 f 为一致连续的充要条件是 $f(a+0)$、$f(b-0)$ 存在且有限.

证　必要性　设 f 在 (a,b) 一致连续,即对任给正数 ε,存在 $\delta>0$,当 $x',x''\in(a,b)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,特别当 $x',x''\in(a,a+\delta)$ 时,有 $|x'-x''|<\delta$,从而也有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,由函数极限的柯西准则知 $f(a+0)$ 存在且为有限值,同理可证 $f(b-0)$ 存在且为有限值.

充分性　设 f 在 (a,b) 连续,且 $f(a+0),f(b-0)$ 存在并为有限值,补充定义:$f(a)=f(a+0),f(b)=f(b-0)$,使得 f 在 $[a,b]$ 上连续,从而一致连续,因此 f 在 (a,b) 上一致连续.

§3　上极限和下极限

1. 求下列数列的上、下极限:

(1) $\{1+(-1)^n\}$；(2) $\{(-1)^n\frac{n}{2n+1}\}$；

(3) $\{2n+1\}$；(4) $\{\frac{2n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{4}\}$；

(5) $\{\frac{n^2+1}{n}\}\sin\frac{\pi}{n}\}$；(6) $\{\sqrt[n]{|\cos\frac{n\pi}{3}|}\}$.

解　记原数列为 $\{x_n\}$.

(1) 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=2$，从而对任给正数 ε，存在自然数 N，当 $k>N$ 时，有

$$x_{2k-1}<0+\varepsilon, 2-\varepsilon<x_{2k}.$$

可见小于 $0+\varepsilon$ 的 x_n 有无限项，大于 $2-\varepsilon$ 的也有无限项，又没有一项 x_n 使得 $x_n<0-\varepsilon$ 或 $x_n>2+\varepsilon$，故由定义可知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=0, \overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=2.$$

注：一般地，若 P 为自然数，且

$\lim\limits_{k\to\infty}x_{kp}=A_0$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{kp-1}=A_1$，$\cdots$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{kp-p,1}=A_{p,1}$ 存在，

则　$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\min\{A_0,A_1,\cdots,A_{p,1}\}$

事实上，对任一正数 ε，存在自然数 N，使得当 $k>N$ 时

$$A_i-\varepsilon<x_{kp+j}<A_j+\varepsilon(j=0,1,\cdots,p-1)$$

设　$\min\{A_0,A_1,\cdots,A_{p,1}\}=A_0$，则小于 $A_0+\varepsilon$ 的 x_n 有无限项. 若对某个正数 ε，数列 $\{x_n\}$ 中小于 $A_0-\varepsilon$ 的有无穷项，设它们是

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_j},\cdots$$

其中 $n_1<n_2<\cdots<n_j,\cdots$，由于自然数集 N 可分为有限个子集

$$\{kp\mid k\in N\},\{kp+1\mid k\in N\},\cdots,\{kp+p-1\mid k\in N\}$$

且 n_j 有无限个，从而以上 P 个子集中，必有一个（设为第 j 个）含有无限个 n_j，因而

$$n_{j_l}=k_lp+j(l=1,2,\cdots).$$

于是　$\lim\limits_{l\to\infty}x_{a_{j_l}}=\lim\limits_{l\to\infty}x_{k_lp+j}=A_j$　可见

$$A_j\leqslant A_0-\varepsilon<A_0$$

这与 A_0 为最小者矛盾，因此

$$A_0 = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

同理 $\quad max\{A_0, A_1, \cdots, A_{p-1}\} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

(2) 由于 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2k}{4k+1} = \dfrac{1}{2}, \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = -\dfrac{1}{2}$，从而由(1)后的注知

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2}, \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

(3) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1) = +\infty$，从而

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

(4) 由于 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{8k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_4 k$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} x_{8k+4} = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{8k+1} = \lim_{k\to\infty} x_{8k+2} = \sqrt{2}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{8k+2} = 2, \lim\limits_{k\to\infty} x_{8k+5} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{8k+7} = -\sqrt{2}, \lim\limits_{k\to\infty} x_{8k+6} = -2$

从而由注知

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -2, \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 2,$$

(5) $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)\pi}{n^2} \cdot \dfrac{sin\ \dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}} = \pi$

(6) 由于

$$\lim_{k\to\infty} x_{3k+j} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[3k+1]{\left|\cos\frac{i}{3}\pi\right|} \lim_{k\to\infty} \sqrt[3k+j]{\frac{1}{2}} = 1 (i = 0,1,2)$$

从而

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1.$$

2. 设 $\{a_n\}\{b_n\}$ 为有界数列，证明

(1) $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} a_n = -\overline{\lim}\limits_{n\to\infty}(-a_n)$

(2) $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \underline{\lim}\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

(3) 若 $a_n>0,b_n>0(n=1,2,3,\cdots)$,则

$$\varliminf_{n\to\infty}a_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}a_nb_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n\,\varlimsup_{n\to\infty}b_n\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}a_nb_n$$

(4) 若 $a_n>0,\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n}$

证　(1) 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=A$,则对任给正数 ε,小于 $A-\alpha$ 的 a_n 至多有限项,小于 $A+\varepsilon$ 的 a_n 有无限项,即 $\{-a_n\}$ 中大于 $-A+\varepsilon$ 的至多有限项,大于 $-A-\varepsilon$ 的有无限项,所以 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)=-A$,即

$$\varliminf_{n\to\infty}a_n=-\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n)$$

(2) 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=a,\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n=b,\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=c$,假设 $a+b>c$,由下极限充要条件知对任给正数 ε,有无限个 n,使得 $a_n+b_n<c+\varepsilon$,今取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}(a+b-c)>0$,则有无限个 n,使得 $a_n+b_n<c+\dfrac{1}{2}(a+b-c)=\dfrac{1}{2}(a+b-c)=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=a+b-\varepsilon_0$.另一方面,由于 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=a,\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n=b$,故至多有有限个 n 和有限个 m,使得 $a_n<a-\dfrac{\varepsilon_0}{2}+b_m<b-\dfrac{\varepsilon_0}{2}$,设 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_n<a-\dfrac{\varepsilon_0}{2}$ 的项数为 p,$\{b_m\}$ 满足关系式 $b_m<b-\dfrac{\varepsilon_0}{2}$ 的项数为 q,则满足 $a_n+b_n<a+b-\varepsilon_0$ 的 n 至多为 $p+q$ 个,这与上面得到的结论:"有无限个 n 使 $a_n+b_n<a+b-\varepsilon_0$"相矛盾,所以只可能是 $a+b\leqslant c$,即

$$\varliminf_{n\to\infty}a_n+\varliminf_{n\to\infty}b_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n).$$

(3) 先证第一式,设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=a,\varliminf\limits_{n\to\infty}b_n=b,\varliminf\limits_{n\to\infty}a_nb_n=c$,若 $a=0$(或 $b=0$),则因 $a_nb_n\geqslant0$,故 $c\geqslant0$,所以有

$$0=ab=\varliminf_{n\to\infty}a_n\,\varliminf_{n\to\infty}b_n\leqslant c=\varliminf_{n\to\infty}a_nb_n$$

若 $a>0,b>0$,假设 $ab>c$,任取正数 ε 使 $ab-c>\varepsilon>0$,则有无限多项满足

$$a_nb_n < c + \frac{\varepsilon}{2} < c + \frac{1}{2}(ab - c) = \frac{1}{2}(ab + c) < ab - \frac{\varepsilon}{2}$$

另一方面，至多有有限项(设为 p 项) 满足 $a_n < a - \frac{\varepsilon}{4b}$；也至多有有限项(设为 q 项) 满足 $b_m < b - \frac{\varepsilon}{4a}$，从而至多有 $p + q$ 项能满足

$$a_nb_n < (a - \frac{\varepsilon}{4b})(b - \frac{\varepsilon}{4b}) = ab - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16ab}$$

这样又导致了与前面有无限项满足

$$a_nb_n < ab - \frac{\varepsilon}{2} < ab - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16ab}$$

相矛盾的结果，所以只能是 $ab \leqslant c$，即

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_nb_n$$

第二个不等式同理可证

(4) 设 $\varliminf_{n\to\infty} a_n = a > 0$，欲证 $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$，对任给正数 ε(取 ε 充分小，使 $\varepsilon > a$，且 $a\varepsilon > 1$)，令

$$\varepsilon_1 = \frac{a^2\varepsilon}{1 - a\varepsilon} > 0, \varepsilon_2 = \frac{a^\varepsilon}{1 + a\varepsilon} > 0$$

则 $\{a_n\}$ 中小于 $a + \varepsilon_1 = \frac{a}{1 - a\varepsilon}$ 的项有无限多个，$\{a_n\}$ 中小于 $a - \varepsilon_2 = \frac{a}{1 + a\varepsilon}$ 的项至多有限多个，从而 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 中大于 $\frac{1 - a\varepsilon}{a} = \frac{1}{a} - \varepsilon$ 的项有无限多个，$\{\frac{1}{a_n}\}$ 中大于 $\frac{1 + a\varepsilon}{a} = \frac{1}{a} + \varepsilon$ 的项至多有限个，所以

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n}.$$

3. 证明：若 $\{a_n\}$ 为递增数列，则 $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$.

证：若 $\{a_n\}$ 有界，则由单调有界定理，极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，从而 $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$，

若 $\{a_n\}$ 无界，则 $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$，从而对任意正数 M，$\{a_n\}$ 中大于 M 的

项有无限多个，设 $a_N > M$，由 $\{a_n\}$ 的递增性，当 $n > N$ 时，有 $a_n > a_N > M$，所以

$$\lim_{n\to 0} a_n = +\infty.$$

4. 证明：若 $a_n > 0(n = 1,2,\cdots)$ 且 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = 1$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证　因 $a_n > 0(n = 1,2,\cdots)$，故 $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \geqslant 0$，若 $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = 0$，则对任给正数 M，$\{a_n\}$ 中小于 $\frac{1}{M}$ 的项有无限多个，即 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 中大于 M 的项有无限多个，所以 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = +\infty$，这与 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = 1$ 相矛盾，故 $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n > 0$，由习题 2(4)，有 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n}$，从而由已知 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = 1$ 知，$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \frac{1}{\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n} = 1$，所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

于是 $\{a_n\}$ 收敛.

5. 证明定理 7.8

定理 7.8(上下极限的保不等式性) 没有界数列 $\{a_n\}\{b_n\}$ 满足存在 $N_0 > 0$，当 $n > N_0$ 时有 $a_n \leqslant b_n$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n, \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n$$

特别，若 $\alpha\beta$ 为常数，又存在 $N_0 > 0$，当 $n > N_0$ 时有 $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$，则

$$\alpha \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n < \beta$$

证　设 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$，$\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = b$. 假设 $a > b$，取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$，则 $\{a_n\}$ 中大于 $a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = b + \varepsilon$ 的项有无限多个，由于 $b_n \geqslant a_n(n = 1, 2,\cdots)$，所以 $\{b_n\}$ 中大于 $b + \varepsilon$ 的项有无限多个，这与 $\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = b$ 相矛盾，故 $a \leqslant b$，即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n$ 同理可证.

由上述定理

$$\alpha = \underline{\lim_{n\to\infty}}\alpha \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\beta = \beta$$

即　　$\alpha \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \beta$

6. 证明定理 7.9

定理 7.9　设 $\{x_n\}$ 为有界数列.

(1) $\overline{A}$ 为 $\{x_n\}$ 上极限的充要条件是

$$\overline{A} = \lim_{x\to\infty} \sup_{k\geqslant n}\{x_k\};$$

(2) $\underline{A}$ 为 $\{x_n\}$ 下极限的充要条件是

$$\underline{A} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n}\{x_k\}$$

证　(1) 必要性　设 $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{A}$（$\overline{A}$ 为有限值）. 则对任给正数 ε, $\{x_n\}$ 中大于 $\overline{A}+\frac{\varepsilon}{2}$ 的项至多有限个. 设这有限项中下标最大者为 N, 则当 $n\geqslant N+1$ 时, $x_n \leqslant \overline{A}+\frac{\varepsilon}{2}$, 所以 $\sup\limits_{k\geqslant N+1}\{x_k\} \leqslant \overline{A}+\frac{\varepsilon}{2} < \overline{A}+\varepsilon$, 又对上述 $\varepsilon>0$, $\{x_n\}$ 中大于 $\overline{A}-\varepsilon$ 的项有无限多个, 故对一切 n, 有 $\sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\} > \overline{A}-\varepsilon$, 于是, 当 $n>N$ 时, 有

$$\overline{A}-\varepsilon < \sup_{k\geqslant n}\{x_k\} < \overline{A}+\varepsilon$$

所以　　$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} = \overline{A}$

充分性　设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\} = \overline{A}$（$\overline{A}$ 为有限值）

设 $A_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$, 则 $\{A_n\}$ 递减, 故 $\overline{A} = \inf\{A_n\}$, 从而对任给正数 ε, 存在 N, 使 $A_N < \overline{A}+\varepsilon$, 于是当 $n\geqslant N$ 时, 有 $x_0 < \overline{A}+\varepsilon$, 即 $\{x_n\}$ 中大于 $\overline{A}+\varepsilon$ 的项至多有限个; 又对一切 n, 有 $A_n \geqslant \overline{A} > \overline{A}-\varepsilon$, 所以, $\{x_n\}$ 中大于 $\overline{A}-\varepsilon$ 的项有无限个, 因此 $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{A}$

(2) 由习题 2 的(1), 得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{-x_k\}=-\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{x_k\}$$

所以，有 $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\{x_k\}$

总 练 习 题

1. 证明：$\{x_n\}$ 为有界数列的充要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子列都存在它的收敛子列.

证　必要性　设 $\{x_n\}$ 为有界数列，则其任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 也都有界. 由致密性定理知每个有界子列 $\{x_{n_k}\}$ 必定存在收敛"子子列" $(x_{n_{k_j}})\subset(x_{n_k})\subset(x_n)$. 当然 $(x_{n_{k_j}})$ 仍然是 (x_n) 的一子列.

充分性　设 $\{x_n\}$ 的任一子列都有它的收敛子列，假设 $\{x_n\}$ 为无界数列，则必有某一子列 (x_{n_k}) 为无穷大量，即 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n_k}|=+\infty$，因此 $\{x_{n_k}\}$ 的一切子列 $\{x_{n_{k_j}}\}$ 都是无穷大量，这与 $\{x_{n_k}\}$ 必有收敛子列的题设相矛盾，所以 $\{x_n\}$ 为有界数列.

2. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=0$. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值或最小值.

证　若 $f(x)\equiv0, x\in(a,b)$，则结论成立. 若 $f(x)\not\equiv0$，则存在一点 $x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)\neq0$，令

$$F(x)=\begin{cases}0, & x=a,b\\ f(x), & x\in(a,b)\end{cases}$$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续，故可取得最大值与最小值. 若 $f(x_1)>0$，则 F 在 $[a,b]$ 上的最大值必为正数，而 $F(a)=f(b)=0$. 故 F 的最大值只能在 (a,b) 内取得. 由于在 (a,b) 内 $F(x)=f(x)$，所以 f 在 (a,b) 内有最大值，若 $f(x_1)<0$，则同理要证 f 在 (a,b) 内有最小值.

3. 证明：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $\{x_n\}\subset[a,b]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，则必存在点 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=A$.

证　因 $\{x_n\}\subset[a,b]$ 为有界数列，故 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_n$. 由于 $\{x_{n_k}\}\subset[a,b]$，故 $x_0\in[a,b]$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，

$\{f(x_{n_k})\} \subset \{f(x_n)\}$,所以$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$,又 f 在点 x_0 处连续,故$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,由归结原则,

$$A = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

4. 设函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续.

(1) 证明 f + g 在 I 上一致连续;

(2) 若 I 为有限区间,证明 $f\cdot g$ 在 I 上一致连续;

(3) 若 I 为无限区间,举例说明 $f\cdot g$ 在 I 上不一定一致连续.

证 (1) 因对任给正数 ε,存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$,当 $x', x'' \in I$ 且 $|x' - x''| < \delta_1$ 时,有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$,当 $x', x'' \in I$ 且 $|x' - x''| < \delta_2$ 时,$|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$,故当 $x', x'' \in I$ 且 $|x' - x''| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时,同时有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$,于是

$$|[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| \leqslant |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \varepsilon.$$

故 f + g 在 I 上一致连续.

(2) 由 §2 习题2,f,g 均在 I 上有界. 设 $|f(x)|, |g(x)| < M, x \in I$,因对任给正数 ε,存在 $\delta > 0$,当 $x', x'' \in I$ 且 $|x' - x''| < \delta$ 时,有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M},\ |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

从而

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \leqslant |f(x')||g(x') - g(x'')| + |g(x'')||f(x') - f(x'')| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

故 $f\cdot g$ 在 I 上一致连续.

(3) 设 $f(x) = g(x) = x$,则 f,g 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都一致连续. 但 $f(x)g(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续,事实上,取 $\varepsilon_0 = 1$,对任给正数 δ,存在 n 使 $\frac{1}{n} < \delta$,令 $x_1 = n, x_2 = n + \frac{1}{n}$,则 $|x_1 - x_2| < \delta$,但

$$|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2||x_1-x_2|=(2n+\frac{1}{n})(\frac{1}{n})=2+\frac{1}{n^2}>1.$$

5. 证明:设函数 $f(x)$ 定义在有限区间 (a,b) 上,若对于 (a,b) 内任一收敛数列 $\{x_n\}$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在,则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

证　假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上不一致连续,则存在某正数 ε_0,对任给正数 δ,总可找到与此 δ 相应的两点 $x_1,x_2\in(a,b)$,使得 $|x_1-x_2|<\delta$,但 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$. 现取 $\delta_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则可相应找到 $\{x_n^{(1)}\}$ 与 $\{x_n^{(2)}\}\subset(a,b)$,使得 $|x_n^{(1)}-x_n^{(2)}|\geqslant\varepsilon_0$,从 $\{x_n^{(1)}\}\subset(a,b)$ 中总可选出收敛子列 $\{x_n^{(1)}\}$,对 $\{x_n^{(2)}\}$ 有子列 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$,由于 $0\leqslant|x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}|<\frac{1}{n_k}\to0(k\to\infty)$,所以

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)}=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)}$$

从而　$$\lim_{k\to\infty}[f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})]=0.$$

故当 k 充分大时,有 $|f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})|<\varepsilon_0$. 但由 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 的原意,对一切 k,有

$$|f(x_{n_k}^{(1)})-f(x_{n_k}^{(2)})|\geqslant\varepsilon_0$$

这一矛盾结果说明反证法假设不真,所以 f 在 (a,b) 上一致连续.

6. 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且有渐近线,即有数 b 与 c,使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-bx-c]=0$. 证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证　设 $g(x)=bx+c$,则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,故对任给正数 ε,存在 $\delta_1>0$,当 $x',x''\in[a,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时,有

$$|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$,故对上述 $\varepsilon>0$,存在 $M>a$,当 $x\geqslant M$ 时,有

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

取二重叠区间 $I_1=[a,M+1]$,$I_2=[M,+\infty)$,则 f 在 I_1 上一致连续,

于是对上述 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_2>0$,当 $x',x''\in I_1$,且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

所以对任何 $x',x''\in[a,+\infty)$,且 $|x'-x''|<\delta=min\{\delta_1,\delta_2,1\}$ 时必有 $x',x''\in I_k$ 或 $x',x''\in I_2$,若 $x',x''\in I_1$,则由(3)有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,若 $x',x''\in I_2$,由(1)(2),得

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-g(x')|+|g(x')-g(x'')|+|g(x'')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

所以对任意 $x',x''\in[a,+\infty)$,当 $|x'-x''|<\delta$ 时,总有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

即 f 在$[a,+\infty)$ 上致连续.