《几何学》课程期末考试试卷（A 卷）

一、（15％）(1) 已知$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$，求$3\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}-3\vec{b}$的内积和夹角；（5％）

(2) 设$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 是互相垂直的单位向量, 并构成右手系, 试求:

$$\vec{i}\times\left(4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)+\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)\times\left(\vec{j}-\vec{k}\right)$$；（5％）

(3) 试证：$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$共面的充要条件是$\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}$共面.（5％）

二、（14%）（1）试求由两张平面$3x-4y-z+5=0, 4x-3y+z+5=0$所构成的钝二面角的角平分面的方程。（7 分）

（2）求通过点$A(4,0,-1)$且同时与两直线

$$L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{5}, L_2:\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

都相交的直线方程。（7 分）

三、（12%）求所有与直线

$$L_1:\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}, L_2:\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{-2}$$

都相交，并且平行与平面$2x+3y-5=0$的直线所构成的图形 S 的方程。判定该图形是什么曲面。

四、（10%）已知圆锥面的三条直母线是 x=y=0，x=2y=3z 和$\begin{cases}x-y+z=0\\2x-y-z=0\end{cases}$，求圆锥面的方程。

五、（13 %）求下列二次曲面的标准方程，并写出相应的坐标变换公式。

$$x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$$

六、（14%）设a,b,c为 3 个非零实数，求证：平面$ax+by+cz=0$与曲面$xy+yz+zx=0$的交线是两条互相垂直的直线的充分必要条件是$ab+bc+ca=0$.

七、（12%）在仿射坐标系中，仿射变换σ的点变换公式为$\begin{cases}x'=3x+y-2,\\y'=x+3y+1,\end{cases}$ 求

1) σ的不动点和不变直线;（6 分）

2) 建立仿射坐标系, 使得不变直线为坐标轴, 求σ在此坐标系中的点变换公式.（6 分）

八、（10%）已给仿射变换$\sigma:\begin{cases}x'=x-y,\\ y'=-2x-2y.\end{cases}$求 2 个互相正交的向量，使得在此变换下，它们仍变为 2 个互相正交的向量；并将所给的仿射变换表示为一个正交变换和分别对 2 个互相正交的方向施行的伸缩变换之积。