

# 吉林大学 2015-2016 学年第一学期“数学分析 I”期中考试试题

共五道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、(共 10 分) 叙述并证明 *Heine* 定理.

二、(共 15 分) 用  $\varepsilon - N$  或  $\varepsilon - \delta$  语言证明下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n^2 - n - 10} = \frac{1}{2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4x + 1}{2x^2 + 3} = \frac{5}{2}.$$

三、(共 25 分) 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}}{x^2 - 1}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 5^n + 9^n)^{\frac{1}{2n+1}};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{n+2} - 2 \sin \sqrt{n+1} + \sin \sqrt{n}); \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{2x+3}{2x}}{\sin \frac{1}{x}};$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+x}{n-1} \right)^{2n+1}, \text{ 其中 } x \text{ 为一个常数.}$$

四、(共 24 分) 简答题.

$$(1) \text{ 求数列 } x_n = (-1)^n \frac{n}{2n+7} \text{ 的上下数列和上下极限.}$$

(2) 设数列  $x_n$  满足递推关系  $x_{n+1} = \sin x_n, (n=1, 2, \dots)$ ,  $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  存在, 并求出极限值.

$$(3) \text{ 设 } w, v \text{ 为两个常数, 讨论函数 } f(x) = \begin{cases} e^{x+w}, & x < -2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \sin \frac{x}{3^n}, & |x| \leq 2 \\ \ln x + v, & x > 2 \end{cases} \text{ 在点 } x = -2 \text{ 和 } x = 2 \text{ 处的}$$

性质. 若连续, 给出  $w, v$  满足的条件, 若间断, 给出条件并说明间断点类型.

五、(共 26 分) 证明题.

$$(1) \text{ 证明方程 } 2e^{x^2} - \frac{x}{1+x^2} = 4 \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 中至少有两个根;}$$

$$(2) \text{ 证明数列 } x_n = \frac{\sin 1^2}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin n^2}{n(n+1)} \text{ 收敛;}$$

$$(3) \text{ 证明函数 } x \sin \frac{1}{x} \text{ 在 } (2, +\infty) \text{ 上一致连续.}$$