华南理工大学 2009-2010 学年第一学期“解析几何”期末考试 A

参考解析

一、简答题（共 32 分）

（1）已知向量 $\vec{a}(0,1,-1),\vec{b}(1,0,2)$, 求与 $\vec{a},\vec{b}$ 都垂直,且使 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})<0$ 的单位向量 $\vec{c}$.

解：由条件 $\vec{c}=\dfrac{\vec{b}\times\vec{a}}{|\vec{b}\times\vec{a}|}=(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{6})$.

（2）求过点 $M(2,-3,5)$ 且与平面 $3x-y-4z+2=0$ 垂直的直线的参数方程.

解：直线方程为 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{y-5}{-4}$，参数方程为 $\begin{cases}x=2+3t\\y=-3-t\\z=5-4t\end{cases}$.

（3）求直线 $\begin{cases}y-z=0\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所产生的旋转面方程.

解：为 $z^2=x^2+y^2$.

（4）求二次曲线 $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ 中心和主方向.

解：由 $\begin{cases}5x+4y-9=0\\4x+5y-9=0\end{cases}$ 得中心坐标为(1,1)；由 $\begin{bmatrix}m & n\end{bmatrix}//\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}\Rightarrow[m,\ n]\begin{bmatrix}5m+4n\\5n+4m\end{bmatrix}$

$\Rightarrow m(5m+4n)-n(4m+5n)=0$ 解得 $(m,n)=(1,1)或(1,-1)$.

（5）已知相互垂直的三条直线：

$$l_1:x=y=z,\quad l_2:x=\frac{y}{-2}=z,\quad l_3:x=-z,y=0\ ,$$

求以这三条直线为新坐标轴的坐标变换公式.

解：三直线相交于点 $(0,0,0)$. 取三直线的方向向量, 要求构成右手系并将它们单位化, 这样

便得到新坐标系的三个坐标向量. 其坐标变换公式为：$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z'\\y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'-\dfrac{2}{\sqrt{6}}y'\\z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}z'\end{cases}$.

（6）求通过点 $p(2,0,-1)$，且又通过直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的平面.

解：由条件可设平面方程为 $\lambda(x+2y+1)+\mu(3y+z-2)=0$.由点 $p(2,0,-1)$ 在面上，则：$3\lambda-3\mu=0$，知所求为 $x+5y+z-1=0$.

（7）求直线族 $\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\lambda}{0}$ 所生成的曲面.

解：有条件 $\begin{cases} x+y=\lambda^2 \\ z=\lambda \end{cases}$，故得 $z^2=x+y$.

（8）设仿射坐标 I 到 II 的点的坐标变换公式为 $\begin{cases} x=-y'+3 \\ y=x'-2 \end{cases}$， 求直线 $l_1: 2x-y+1=0$ 在坐标系 II 中的方程为与直线 $l_2: 3x'+2y'-5=0$ 在坐标系 I 中的方程.

解：直接代入有：$x'+2y'-9=0$，$2x-3y-7=0$.

二、(共 12 分）用坐标法证明: 在 ΔABC 中, 设 P,Q,R 分别是直线 AB,BC,CA 上的点, 并且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BQ}=\mu\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{CR}=\nu\overrightarrow{RA}$. 证明: P,Q,R 共线的充要条件是 $\lambda\mu\nu=-1$.

证明：取仿射标架 $\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$. A,B,C,P,Q,R 的坐标分别为 $A(0,0)$, $B(1,0)$，$C(0,1)$, $P(\frac{\lambda}{1+\lambda},0)$，$Q(\frac{1}{1+\mu},\frac{\mu}{1+\mu})$，$R(0,\frac{1}{1+\nu})$，（6 分）

于是 $\overrightarrow{PQ}=(\frac{1-\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)},\frac{\mu}{1+\mu})$，$\overrightarrow{PR}=(-\frac{\lambda}{1+\lambda},\frac{1}{1+\nu})$. P,Q,R 共线 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PQ}//\overrightarrow{PR}$, 即它们的对应分量成比例. 由此可得到结论.

三、(共 8 分）试证明方程 $xy+yz+zx+z^2-4=0$ 表示一个柱面.

证明：将方程 $xy+yz+zx+z^2-4=0$ 等价变形为：$(x+z)(y+z)=4$.

引进非零参数 λ，易证明其与方程组 $\begin{cases} x+z=2\lambda \\ \lambda(y+z)=2 \end{cases}$

而该方程组所表示的的曲面是一系列平行直线构成，其方向为 $(-1,-1,1)$.

故原方程表示一个柱面.

四、(共 12 分) 已知曲面的参数方程为$\begin{cases} x=\sqrt{\alpha^2t^2+\beta^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{\alpha^2t^2+\beta^2}\sin\theta \\ z=t \end{cases}$ (θ,t 为参数), 试求这个曲面的普通方程, 并就α,β不同的取值情况,讨论此方程表示什么曲面.

解：此参数方程表示的普通方程为：$x^2+y^2=a^2z^2+\beta^2$.

①$\alpha=0$，$\beta=0$时，方程表示 z 轴；
②$\alpha=0$，$\beta\neq 0$时，方程表示以 z 轴为中心轴，半径为$|\beta|$的圆柱面；
③$\alpha\neq 0$，$\beta=0$时，方程表示顶点在原点，以 z 轴为轴的圆锥面；
④$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$时，方程表示以 z 轴为虚轴的单叶旋转双曲面.

五、(共 12 分) 按参数λ的值讨论曲面$x^2-4xy+4y^2+8y+3+2\lambda(-2xy-x-1)=0$的类型.

解：$I_1=5$，$I_2=-4\lambda(\lambda+2)$，$I_3=8\lambda(\lambda+2)(1+\lambda)(\lambda-1)$，$K_1=-\lambda^2-10\lambda-1$.

(1) $0<\lambda,-2>\lambda$时是双曲型曲线.
①$\lambda\neq 1$时是双曲线；
②$\lambda=1$时是一对相交直线.
(2) $\lambda=-2$或0时是抛物型曲线.
①$\lambda=0$时是抛物线；
②$\lambda=-2$时是一对虚平行直线.
(3) $-2<\lambda<0$时是椭圆型曲线.
①$-1<\lambda<0$时是椭圆；
②$-2<\lambda<-1$时是空集（虚椭圆）；
③$\lambda=-1$时是一个点.

六、(共 12 分) 在双曲抛物面$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=z$上，求平行于平面$3x+2y-4z=0$的直母线方程.

解：双曲抛物面$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=z$的两族直母线为：$\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=s \\ s(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2})=z \end{cases}$ 及 $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}=t \\ t(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2})=z \end{cases}$.

方向向量分别为：$(2,-1,s)$和$(2,1,t)$.

据题意，要求的直母线应满足：$\begin{matrix} 2\times 3-2-4s=0 & \Rightarrow & s=1 \\ 2\times 3+2-4t=0 & \Rightarrow & t=2 \end{matrix}$

故要求的直母线方程为：$\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1 \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}=z \end{cases}$ 及 $\begin{cases} \dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2}=2 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2} \end{cases}$.

七、（共 12 分）适当选取直角坐标系，求与两给定的异面直线等距离的点的轨迹，已知两异面直线间的距离为$2a$，夹角为2α.

解：取二异面直线的公垂线为轴，中点的坐标为原点；再取x轴，使其与二异面直线的夹角相等，则二异面直线的方程为：

$$\begin{cases} y+tg\alpha\cdot x=0 \\ z=a \end{cases} \qquad 与 \qquad \begin{cases} y-tg\alpha\cdot x=0 \\ z=-a \end{cases}$$

$$M(x,y,z)\in\Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y & z+a \\ tg\alpha & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z+a & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & tg\alpha \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y & z-a \\ -tg\alpha & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-a & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & -tg\alpha \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

设所求的轨迹为Σ，则：

即：$\sqrt{tg^2\alpha\cdot(z+a)^2+(z+a)^2+(xtg\alpha-y)^2}=\sqrt{tg^2\alpha\cdot(z-a)^2+(z-a)^2+(xtg\alpha+y)^2}$

经化简得：$z=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{a}xy$，此即所要求的轨迹方程.