

# 南京航空航天大学 2012-2013 学年第一学期“高等代数 I”期末

共六道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、(共 50 分)

1、设  $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ , 求  $A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} + 4A_{14}$ .

2、已知  $|(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)| = 2$ , 求  $|(\alpha_1 \ -2\alpha_2 + \alpha_1 \ 3\alpha_3 + \alpha_2)|$ .

3、已知  $A$  为 2 阶方阵, 若存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 求  $\tilde{A}$ .

4、已知  $A, B$  为 3 阶方阵, 且满足:  $|A| = 2, |B| = 3, |A^{-1} + B| = 3$ , 求  $|A + B^{-1}|$ .

5、求  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2013}$ .

6、计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x_2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x_3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x_4 \end{vmatrix} (x_1 x_2 x_3 x_4 \neq 0)$ .

7、已知矩阵  $X$  满足  $AX = A + 2X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . 求  $X$ .

8、设  $\alpha_1 = (1 \ 3 \ 1 \ 2)^T$ ,  $\alpha_2 = (2 \ 5 \ 3 \ 3)^T$ ,  $\alpha_3 = (0 \ 1 \ -1 \ 2)^T$ ,  $\alpha_4 = (3 \ 10 \ 2 \ 2)^T$ , 求

矩阵  $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4)$  的秩及由这四个向量组成的向量组的一个极大无关组.

二、(共 10 分) 讨论非齐次线性方程组 
$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$$
 解的情况, 并在有无穷

多解时求出其通解.

三、(共 10 分) 设  $A, B$  分别为  $m \times n, n \times m (m > n)$  矩阵, 求证:  $|AB|=0$

四、(共 10 分) 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵, 且  $r(CA)=r(A)$ . 求证:  $r(CAB)=r(AB)$ .

五、(共 10 分) 已知矩阵  $A$  为秩为  $n-1$  的  $n$  阶矩阵. 求证: 存在  $n$  阶的可逆矩阵  $B$  和秩为  $n-1$  的  $n$  阶矩阵  $C$ , 使得:  $A=BC, C^2=C$ .

六、(共 10 分) 设  $A, B, C, D$  均为  $n$  阶矩阵, 且  $A, B$  为可逆矩阵. 求证:  $|A||B-CA^{-1}D|=|B||A-DB^{-1}C|$ .