吉林大学 2012-2013 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

参考解析

一、（共 35 分）

1、求多项式 $f(x)=x^5+5x^4+5x^3-5x^2-5x-1$ 在有理数域上的标准分解；

解：直接验证可得 1 为多项式的所有有理根，可得 $f(x)=(x-1)(x^2+3x+1)^2$.

2、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 均为三元列向量，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1,3\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.

已知 $|A|=1$，$|B|=-1$.求 $|2A+B|$.

解：$|2A+B|=|3\alpha_1,3\alpha_1+3\alpha_2,2\alpha_3+\beta|=|3\alpha_1,3\alpha_2,2\alpha_3+\beta|=$

$18|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|+9|\alpha_1,\alpha_2,\beta|=18|A|+9|\alpha_1,3\alpha_1+\alpha_2,\beta|=18|A|+9|B|=9$.

3、设 A,B 都为三阶矩阵，且 $AB-A^{-1}BA=I$.已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 B.

解：$B=A(|A|I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

二、（共 10 分）设 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，且 $x\nmid d(x)$，并设 A 是 n 阶矩阵，满足 $f(A)=g(A)=0$，求证：A 可逆.

证明：由条件，存在多项式 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，使得 $\varphi(x)f(x)+\psi(x)g(x)=d(x)$.

故有 $0=\varphi(A)f(A)+\psi(A)g(A)=d(A)$，又 $x\nmid d(x)$，故 $d(x)=xh(x)-c$，$c\neq 0$.

故 $d(A)=Ah(A)-c=0$，即 $A(\frac{1}{c}h(A))=I$，故 A 可逆.

三、（共 15 分）讨论方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=a \\ 2x_1-x_2-x_3=3 \\ x_1+x_2-2x_3=2a \end{cases}$解的情况，并在有解时求出其所有解.

将其增广矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & a \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 2a \end{pmatrix}$作初等行变换，有$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$

故有解当且仅当 a =1，此时通解为：$k(1,1,1)^T+(\frac{5}{3},\frac{1}{3},0)^T$.

四、（共 15 分）设 A,B,C,D 均为 n 阶方阵，$AB=BA$, $BC=CB$.证明：

（1）若 A 可逆，求证：$\begin{vmatrix} A & B \\ AC & BD \end{vmatrix}=|B||DA-AC|$；

（2）探究 A 不可逆时上式的正确性.

证明：（1）由$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -ACA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ AC & BD \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & BD-ACA^{-1}B \end{pmatrix}$，同取行列式，得：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ AC & BD \end{vmatrix}=|A||BD-ACA^{-1}B|=|BD-BACA^{-1}||A|=|B||DA-AC|.$$

（2）（摄动方法）成立.考虑$\begin{vmatrix} A-\lambda I & B \\ (A-\lambda I)C & BD \end{vmatrix}=|B||D(A-\lambda I)-(A-\lambda I)C|$.

这两边都是关于λ的多项式.则存在无数个λ，使得$|A-\lambda I|\neq 0$.而由（1），这些λ都

使得成立$\begin{vmatrix} A-\lambda I & B \\ (A-\lambda I)C & BD \end{vmatrix}=|B||D(A-\lambda I)-(A-\lambda I)C|$，故两个多项式相等，特殊的，

有$\begin{vmatrix} A & B \\ AC & BD \end{vmatrix}=|B||DA-AC|$.

五、（共 15 分）设 A 为 n 阶 r 秩方阵.证明：

（1）存在 n 阶 r 秩方阵 B，$ABA=A$；

（2）（1）中 B 唯一当且仅当 A 可逆.

证明：（1） 有$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$，取$B=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$，则：

$$ABA=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} I_r & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=A.$$

（2）B 唯一当且仅当*处元素可能性唯一当且仅当其必为数 0 当且仅当 A 可逆.

六、（共 10 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m (m\ge 2)$的秩为 m，且$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.证明：存在无穷多个数$c$，向量组$c\alpha_1+\beta_1, c\alpha_2+\beta_2,\cdots,c\alpha_m+\beta_m$线性无关.

证明：由条件，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$是$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$的一个极大线性无关组，即$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性表示，设其表示矩阵为$A$，

即有：$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)A=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$.

有：$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)(A+cI)=(c\alpha_1+\beta_1,c\alpha_2+\beta_2,\ldots,c\alpha_m+\beta_m)$.

即$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$与$c\alpha_1+\beta_1,c\alpha_2+\beta_2,\cdots,c\alpha_m+\beta_m$线性关系一致.

因此$c\alpha_1+\beta_1,c\alpha_2+\beta_2,\cdots,c\alpha_m+\beta_m$线性无关当且仅当$(A+cI)$可逆，

而显然存在无穷多个数c，使得可逆，故命题得证.