解 析 几 何

November 23, 2019

作业 (P69： 4, 5，7，9，10；P77：1，3，4，5，7)

第69页习题: **4.** (方法1) 设单叶双曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

设三条直母线l_1,l_2,l_3的方程分别为

$$\begin{cases}\lambda_i(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=\mu_i(1-\frac{y}{b})\\ \mu_i(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=\lambda_i(1+\frac{y}{b})\end{cases}$$

可得直线的方向向量分别为

$$\vec{v_i}=(\frac{\lambda_i}{a},\frac{\mu_i}{b},\frac{\lambda_i}{c})\times(\frac{\mu_i}{a},-\frac{\lambda_i}{b},-\frac{\mu_i}{c})=(\frac{\lambda_i^2-\mu_i^2}{bc},\frac{2\lambda_i\mu_i}{ac},-\frac{\lambda_i^2+\mu_i^2}{ab})$$

则不妨设方向向量为

$$\vec{u_i}=abc\vec{v_i}=(a(\lambda_i^2-\mu_i^2),2b\lambda_i\mu_i,-c(\lambda_i^2+\mu_i^2))$$

反证法:假设存在一张平面π与上面三条直线平行, 则$\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}$共面, 即 $(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})=0$. 直接计算可得

$$\begin{vmatrix} a(\lambda_1^2-\mu_1^2) & 2b\lambda_1\mu_1 & -c(\lambda_1^2+\mu_1^2)\\ a(\lambda_2^2-\mu_2^2) & 2b\lambda_2\mu_2 & -c(\lambda_2^2+\mu_2^2)\\ a(\lambda_3^2-\mu_3^2) & 2b\lambda_3\mu_3 & -c(\lambda_3^2+\mu_3^2\end{vmatrix}=-4abc\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_1\mu_1 & \mu_1^2\\ \lambda_2^2 & \lambda_2\mu_2 & \mu_2^2\\ \lambda_3^2 & \lambda_3\mu_3 & \mu_3^2\end{vmatrix}$$

$$=-4abc(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)(\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1)(\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2)$$

情形1: $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$都不为0. 则不妨设$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, 则

$$(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)(\lambda_1\mu_3-\lambda_3\mu_1)(\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2)=(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)=0$$

从而不妨设$\mu_2-\mu_1=0$, 即$\mu_1=\mu_2$. 从而l_1,l_2的直线方程相同, 这与l_1,l_2 是不同的直母线矛盾, 从而这样的平面π不存在.

情形2: $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$至少有一个为0, 不妨设$\lambda_1=0$, 此时

$$(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})=-4abc\mu_1^2\lambda_2\lambda_3(\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2)=0$$

则$\lambda_2,\lambda_3,\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2$中至少有一个为0.

若$\lambda_2=0$, 则$\vec{u_1},\vec{u_2}$方向相同, 从而l_1,l_2平行, 这与l_1,l_2是同组直母线矛盾(类似,若 $\lambda_3=0$, 则$\vec{u_1},\vec{u_3}$方向相同, 从而l_1,l_3平行, 这与l_1,l_3是同组直母线矛盾).

若λ_2,λ_3不为0, $\lambda_2\mu_3-\lambda_3\mu_2=0$, 则由情形1知, l_2,l_3平行, 矛盾.

综上可得, 与单叶双曲面的三条同组直母线都平行的平面是不存在的.

(方法2)

反证法:设三条同组直母线为l_1,l_2,l_3, 则l_1,l_2,l_3两两异面. 设平面π与这三条直母线平行. 由单叶双曲面的性质, 分别存在l_2,l_3 的异族直母线l_2',l_3' 使得l_2',l_2平行, l_3',l_3平行, 此时l_2',l_3' 都与平面π 平行. 由于l_1,l_2'是异族直母线, 且这两条直线不平行, 从而l_1,l_2' 相交, 记 l_1,l_2' 确定的平面为π_1. 则平面 π 与π_1 平行.

同理, 直线 l_1,l_3'是异族直母线, 它们也相交, 而直线l_3'与平面π 平行, 从而l_3'与平面π' 平行, 可知直线l_3' 在平面 π' 上. 这样就有直线l_2',l_3' 都在平面π'上, 但直线l_2',l_3' 是同族直母线, 它们一定异面, 矛盾. 所以假设不成立, 与单叶双曲面的三条同组直母线都平行的平面是不存在的.

(方法3) 设单叶双曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

设直母线 l 所在的母线族的为

$$\begin{cases}\lambda(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=\mu(1-\frac{y}{b})\\ \mu(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=\lambda(1+\frac{y}{b})\end{cases}$$

则其方向向量为 $\vec{v}=(a(\lambda^2-\mu^2),2b\lambda\mu,-c(\lambda^2+\mu^2))$. 对于任意一张平面$\pi$, 记其法向向量为$\vec{n}=(l,m,n)$, 若直线 l 与平面π 平行, 则 $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$, 即

$$a(\lambda^2-\mu^2)l+2b\lambda\mu m-c(\lambda^2+\mu^2)n=(al-cn)\lambda^2-(al+cn)\mu^2+2bm\lambda\mu=0 \quad (1)$$

下证对于任意的$\vec{n}=(l,m,n)(\vec{n}\neq\vec{0})$, 上面方程只存在两组解$(\lambda_1,\mu_1),(\lambda_2,\mu_2)$(其中要保证 $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1\neq 0$, 否则这两条同族直母线是相同的.)

若$al+cn=0$, 则方程(1) 化为$(al-cn)\lambda^2+2bm\lambda\mu=0$, 显然这个方程最多有两组解.

若$al+cn\neq 0$, 则$\lambda\neq 0$, 令$t=\frac{\mu}{\lambda}$. 方程(1)化为

$$-(al+cn)t^2+2bmt+(al-cn)=0$$

上面方程最多有两个解.

综上即得, 对于任意一张平面π, 最多有两条同族直母线与π 平行. 从而与单叶双曲面的三条同组直母线都平行的平面是不存在的.

5. 解：因为过单叶双曲面上任意一点，有且仅有两条不同直母线通过它. 不妨设这两条直母线分别为

$$l_{\lambda:\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases},\quad l_{\lambda':\mu'}:\begin{cases}\lambda'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu'\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \mu'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda'\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}.$$

那么它们的方向矢量分别为

$$\mathbf{v}_{\lambda:\mu}=\left(\frac{1}{bc}\left(\lambda^2-\mu^2\right),\frac{2\lambda\mu}{ac},-\frac{1}{ab}\left(\lambda^2+\mu^2\right)\right),$$

和

$$\mathbf{v}_{\lambda':\mu'}=\left(\frac{1}{bc}\left(\mu'^2-\lambda'^2\right),\frac{2\lambda'\mu'}{ac},\frac{1}{ab}\left(\lambda'^2+\mu'^2\right)\right).$$

由题 $l_{\lambda:\mu}\perp l_{\lambda':\mu'}$, 所以 $\vec{v}_{\lambda:\mu}\cdot\vec{v}_{\lambda':\mu'}=0$, 即

$$a^2\left(\lambda^2-\mu^2\right)\left(\mu'^2-\lambda'^2\right)+4b^2\lambda\mu\lambda'\mu'-c^2\left(\lambda^2+\mu^2\right)\left(\lambda'^2+\mu'^2\right)=0. \tag{5-1}$$

设这两直母线相交与点 $P\left(X,Y,Z\right)$，则

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1. \tag{5-2}$$

情形1: 若 $1+\frac{Y}{b}\neq 0$，有

$$\begin{cases}\lambda=\frac{X}{a}-\frac{Z}{c}\\ \mu=1+\frac{Y}{b}\\ \lambda'=1+\frac{Y}{b}\\ \mu'=\frac{X}{a}+\frac{Z}{c}\end{cases}. \tag{5-3}$$

结合 (5-1), (5-2) 和 (5-3) 得

$$4\left(1+\frac{Y}{b}\right)^2\left(a^2\left(\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{X^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)-c^2\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)\right)=0.$$

因为 $1+\frac{Y}{b}\neq 0$, 得

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}X^2+\frac{a^2-c^2}{b^2}Y^2-\frac{a^2+b^2}{c^2}Z^2=0. \tag{5-4}$$

再由(5-2)和(5-4)得 $P\left(X,Y,Z\right)$ 满足

$$\begin{cases}\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1\\ X^2+Y^2+Z^2=a^2+b^2-c^2\end{cases}.$$

情形2： 若 $1+\frac{Y}{b}=0$，有

$$\left\{\begin{array}{c}\lambda=1-\frac{Y}{b}\\ \mu=\frac{X}{a}+\frac{Z}{c}\\ \lambda'=\frac{X}{a}-\frac{Z}{c}\\ \mu'=1-\frac{Y}{b}\end{array}\right. . \tag{5-5}$$

结合(5-1)，(5-2)和 (5-5) 得

$$4\left(1-\frac{Y}{b}\right)^2\left(a^2\left(\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{X^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)-c^2\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)\right)=0.$$

由 $1+\frac{Y}{b}=0$ 可得 $1-\frac{Y}{b}\neq 0$, 所以

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}X^2+\frac{a^2-c^2}{b^2}Y^2-\frac{a^2+b^2}{c^2}Z^2=0. \tag{5-6}$$

由 (5-2) 和 (5-5) 得 $P(X,Y,Z)$ 满足

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1\\ X^2+Y^2+Z^2=a^2+b^2-c^2\end{array}\right. .$$

注意： $a^2+b^2-c^2<0$ 时, 无交点.

7 解：设 $P(X,Y,Z)$ 为曲面上的点. 设与平面 $\pi: 2x+3y-5=0$ 平行的的直线为

$$l: \frac{x-X}{m}=\frac{y-Y}{l}=\frac{z-Z}{n},$$

那么

$$2m+3l=0. \tag{7-1}$$

因为 l 和 l_1 , l_2 共面, 所以有

$$\begin{vmatrix} X-6 & Y & Z-1\\ 3 & 2 & 1\\ m & l & n\end{vmatrix}=0 \quad 和 \quad \begin{vmatrix} X & Y-8 & Z+4\\ 3 & 2 & -2\\ m & l & n\end{vmatrix}=0$$

即

$$(Y-2Z+2)\,m-(X-3Z-3)\,l+(2X-3Y-12)\,n=0, \tag{7-2}$$

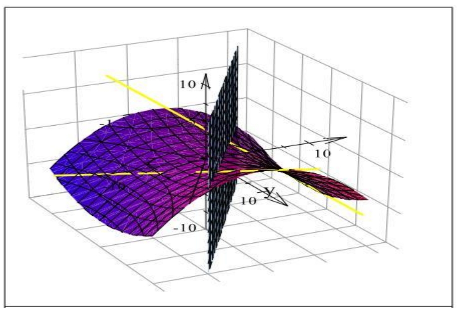
$$(-2Y-2Z+8)\,m-(-2X-3Z-12)\,l+(2X-3Y+24)\,n. \tag{7-3}$$

结合(7-1),(7-2),(7-3), 利用关于(l,m,n)的方程有非零解, 得

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ Y-2Z+2 & -X+3Z+3 & 2X-3Y-12 \\ -2Y-2Z+8 & 2X+3Z+12 & 2X-3Y+24 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$4X^2 - 9Y^2 - 144Z = 0.$$



9. 解：设$P(x_0,y_0,z_0)$为曲面上一点，则必存在一直线l过P点，且与抛物线C_1,C_2相交. 又因为l与平面 $\pi: y-z=0$ 平行，则可设l的方向矢量为(l,m,m). 因此直线l的方程为

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-x_0}{m},$$

因为它与 C_1,C_2 相交, 可知存在数λ,μ, 使得

$$\begin{cases} (y_0+\lambda m)^2 = 2(x_0+\lambda l) \\ z_0+\lambda m = 0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} (z_0+\mu m)^2 = -2(x_0+\mu l) \\ y_0+\mu m = 0 \end{cases}.$$

从而可得

$$(y_0-z_0)^2 = 2(x_0+l\lambda), \quad (z_0-y_0)^2 = -2(x_0+l\mu)$$

利用 $z_0+m\lambda=0, y_0+m\mu=0$ 可得

$$y_0(y_0-z_0)^2 + z_0(y_0-z_0)^2 = 2y_0x_0 - 2lm\lambda\mu - 2x_0z_0 + 2lm\lambda\mu$$

即得

$$(y_0+z_0)(y_0-z_0)^2 = 2x_0(y_0-z_0)$$

利用直线平行与平面$y-z=0$, 可知$y_0-z_0\neq 0$, 则得要求的曲面方程为

$$y^2 - z^2 = 2x.$$

曲面为双曲抛物面.

(方法2)

由已知, 可设曲面C_1上的点为$(\frac{s^2}{2},s,0)$, 设曲线C_2上点的坐标为$(-\frac{t^2}{2},0,t)$, 其中s,t为参数. 从而直线l的方程为

$$\frac{x-\frac{s^2}{2}}{\frac{s^2+t^2}{2}}=\frac{y-s}{s}=\frac{z}{-t} \tag{8.1}$$

利用直线l平行于平面$\pi: y-z=0$, 可得$s+t=0$. 消去方程(8.1)中的参数, 即得曲面方程为

$$y^2-z^2=2x.$$

10. 解：因为直线l_1,l_2 间的距离为2a, 夹角为2θ, 可取坐标系 $\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ 使得它们的方程分别为

$$l_1:\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=\frac{z-a}{0},\quad l_2:\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{-\sin\theta}=\frac{z+a}{0}.$$

(1) 设 $P=(X,Y,Z)$ 为与l_1,l_2 等距离的点, 即，$dist^2\left(P,l_1\right)=dist^2\left(P,l_2\right)$. 因为

$$dist^2\left(P,l_1\right)=\left|(X,Y,Z-a)\times(\cos\theta,\sin\theta,0)\right|^2=(Z-a)^2+(X\sin\theta-Y\cos\theta)^2,$$

$$dist^2\left(P,l_2\right)=\left|(X,Y,Z+a)\times(\cos\theta,-\sin\theta,0)\right|^2=(Z+a)^2+(X\sin\theta+Y\cos\theta)^2.$$

所以得P轨迹的方程为

$$XY\sin 2\theta+2aZ=0.$$

(2) 因为l_1,l_2得方程也可写为

$$l_1:\left\{\begin{array}{c}x\tan\theta-y=0\\ z-a=0\end{array}\right.\qquad \text{和}\quad l_2:\left\{\begin{array}{c}x\tan\theta+y=0\\ z+a=0\end{array}\right.,$$

所以过它们的平面方程为

$$\pi_1:\lambda\left(x\tan\theta-y\right)+\mu\left(z-a\right)=0,$$

$$\pi_2:\lambda'\left(x\tan\theta+y\right)+\mu'\left(z+a\right)=0.$$

因为$\pi_1\perp\pi_2$, 所以

$$\begin{aligned}0&=(\lambda\tan\theta,-\lambda,\mu)\cdot(\lambda'\tan\theta,\lambda',\mu')\\&=\lambda\lambda'\left(\tan^2\theta-1\right)+\mu'\mu.\end{aligned}$$

不失一般性, 可设 $\mu\neq 0$. 那么由上式可知 $\lambda'\neq 0$. 因为若$\lambda'=0$, 可得 $\mu'=0$, 那么就不存在平面π_2了. 因此

$$\frac{\lambda}{\mu}\left(\tan^2\theta-1\right)=-\frac{\mu'}{\lambda'}. \tag{10-1}$$

设 $P(X,Y,Z)\in\pi_1\cap\pi_2$, 代入平面$\pi_1,\pi_2$的方程得

$$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{z-a}{x\tan\theta-y}\quad 和 \quad \frac{\mu'}{\lambda'}=-\frac{x\tan\theta+y}{z+a}. \tag{10-2}$$

那么由（10-1）和（10-2）可得

$$-\frac{(z-a)(\tan^2\theta-1)}{x\tan\theta-y}=\frac{x\tan\theta+y}{z+a},$$

化简为

$$-\frac{\sin^2\theta}{\cos 2\theta}x^2+\frac{\cos^2\theta}{\cos 2\theta}y^2+z^2=a^2.$$

由已知$2\theta\le\frac{\pi}{2}$,当$\cos 2\theta>0$时所得的交线的轨迹是单叶双曲面.

当$\cos 2\theta=0$时, 得到的为两平面 $x-y=0$ 和 $x+y=0$.

P77 习题

在做本节习题之前，我们首先注意到下面的公式：设直角坐标系 $I=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$到直角坐标系 $I^*=\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}, \tag{0-1}$$

其中C为I到I^*的过渡矩阵，即 $(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\,C$.首先可将(0-1)写为

$$C\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}. \tag{0-2}$$

由课本P70页内容知 $C^TC=E$,其中C^T是C的转置，E为三阶单位阵. 用C^T 同时左乘上（0-2）式得 I^* 到 I 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}=C^T\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}=C^T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}-C^T\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}. \tag{0-3}$$

1. 解：由题知I到I^*的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\\ -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \tag{1-1}$$

直接计算知

$$C^T=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad C^T\begin{pmatrix} 2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

所以用上面的（0-3）式可计算得I^*到I的点坐标变换式为

$$\left\{\begin{array}{l} x^* = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ y^* = \frac{\sqrt{2}}{2}x^* + \frac{\sqrt{2}}{2}y^* + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. . \tag{1-2}$$

(1). 将点坐标变换式（1-1）代入直线方程 $2x+y+1=0$，并整理得其在I^*中的方程为

$$x^* + 3y^* + 2\sqrt{2} = 0.$$

(2). 将点坐标变换式（1-2）代入平面方程 $x^*+y^*-2=0$, 并整理得其在I中的方程为

$$x = 2 + \sqrt{2}.$$

3. 解：因为I到I^*的点坐标变换公式为

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x^* + \frac{1}{\sqrt{3}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^* - 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}y^* - \frac{2}{\sqrt{6}}z^* + 1 \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^* + \frac{1}{\sqrt{3}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^* + 1 \end{array}\right. , \tag{3-1}$$

所以过渡矩阵和 C ，以及 I^*的原点在I中坐标为

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

直接计算知

$$C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(1). 记向量 $\vec{v}=(1,1,1)$ 在 I^* 的坐标为向量$\vec{w}$,则$(\vec{w})^T = C^T(\vec{v})^T$,从而所求坐标为 $(0,\sqrt{3},0)$

(注意：题目要求的是向量$\vec{v}=(1,1,1)$而不是点$(1,1,1)$在新的坐标系下的坐标,坐标系的平移会改变点的坐标,但是不改变向量的坐标)

(2). 由（3-1）式知，球面 $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 在 I^* 的方程为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^* + \frac{1}{\sqrt{3}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^*\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}y^* - \frac{2}{\sqrt{6}}z^*\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x^* + \frac{1}{\sqrt{3}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^*\right)^2 = 1.$$

化简得

$$x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = 1.$$

4. 解：(参照例题3.4.2) 设平面π_i的法向量为$\vec{n}_i^*$, $i=1,2,3$. 由平面的方程知

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{n}_1^*=\frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1) \\ \vec{n}_2^*=\frac{1}{\sqrt{66}}(1,4,7) \\ \vec{n}_3^*=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \end{array}\right. .$$

设 I 到 I^* 的过渡矩阵C为

$$C=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}.$$

由题意知对每一个 $i=1,2,3$, $\vec{e}_i^*\parallel\vec{n}_i^*$, 又因为要求$I^*$的坐标分量在$I$中的第一分量均为负，所以 $a_k^1<0, k=1,2,3$. 因此

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{e}_1^*=\frac{1}{\sqrt{11}}(-3,-1,1) \\ \vec{e}_2^*=\frac{1}{\sqrt{66}}(-1,-4,-7) \\ \vec{e}_3^*=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1) \end{array}\right. .$$

即过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{66}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{7}{\sqrt{66}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

另一方面，可得三平面的交点为 $O^*=\cap_{i=1}^3\pi_i=\left(\frac{3}{11},\frac{1}{11},-\frac{1}{11}\right)$. 故从$I$到$I^*$的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} \end{pmatrix},$$

即

$$\left\{\begin{array}{c} x=-\frac{3}{\sqrt{11}}x^*-\frac{1}{\sqrt{66}}y^*-\frac{1}{\sqrt{6}}z^*+\frac{3}{11} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{11}}x^*-\frac{4}{\sqrt{66}}y^*+\frac{2}{\sqrt{6}}z^*+\frac{1}{11} \\ z=\frac{1}{\sqrt{11}}x^*-\frac{7}{\sqrt{66}}y^*-\frac{1}{\sqrt{6}}z^*-\frac{1}{11} \end{array}\right. .$$

5. 解：参照例题3.4.1，运用坐标变换的方法解题.

设新的坐标系为$I^*=(O^*,\vec{e_1}^*,\vec{e_2}^*,\vec{e_3}^*)$, 其取法如下：首先注意到平面$\pi$的法向量是 $\vec{n}=(1,-k,1)$, 且显然$(1,0,-1)$与$\vec{n}$垂直，所以可取

$$\vec{e}_3^*=\frac{(1,-k,1)}{\sqrt{2+k^2}},\qquad \vec{e}_1^*=\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}},$$

那么取

$$\vec{e_2^*}=\vec{e_3^*}\times\vec{e_1^*}=\frac{(1,-k,1)}{\sqrt{2+k^2}}\times\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{k^2+2}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+2}},\frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{k^2+2}}\right);$$

又点$(-1,0,-1)$满足π的方程，所以可取 $O^*=(-1,0,-1)$.

记原坐标系为$I=(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. 则由上面的表达式知$I$到$I^*$的过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{k^2+2}} & \frac{1}{\sqrt{2+k^2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+2}} & -\frac{k}{\sqrt{2+k^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{k^2+2}} & \frac{1}{\sqrt{2+k^2}} \end{pmatrix}.$$

对任意点P, 记它在I,I^* 下的坐标分别为(x,y,z) 和(x^*,y^*,z^*). 那么由课本P71页公式(3.4.2)知

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^*+\frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{k^2+2}}y^*+\frac{1}{\sqrt{2+k^2}}z^*-1 \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+2}}y^*-\frac{k}{\sqrt{2+k^2}}z^*-0 \\ z &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^*+\frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{k^2+2}}y^*+\frac{1}{\sqrt{2+k^2}}z^*-1 \end{cases}. \tag{*}$$

设P为平面π和曲线$\Sigma: x^2+z^2=2y^2$的交点. 那么由 $P\in\pi$, 知 $z^*(P)=0$. 所以将z^*和（*）式代入Σ 的方程得

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}x^*+\frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{k^2+2}}y^*-1)^2+(-\frac{1}{\sqrt{2}}x^*+\frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{k^2+2}}y^*-1)^2=2(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+2}}y^*)^2.$$

化简得

$$\left(k^2+2\right)(x^*)^2+\left(k^2-4\right)(y^*)^2-2\sqrt{2}k\sqrt{k^2+2}y^*+2k^2+4=0.$$

因此 (1) 当 $k^2=4$时, $\Gamma=\pi\cap\Sigma$ 是抛物线；

(2) 当 $k^2>4$时, $\Gamma=\pi\cap\Sigma$ 是椭圆；

(3) 当 $k^2<4$时, $\Gamma=\pi\cap\Sigma$ 是双曲线.

7. 建立新的直角坐标系$\{O,\vec{e_1^*},\vec{e_2^*},\vec{e_3^*}\}$, 这里$\vec{e_1^*}=(\frac{1}{\sqrt{6}})$, $\vec{e_2^*}=(\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{-4}{\sqrt{21}})$, $\vec{e_3^*}=(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}})$, 有$\sqrt{6}x^*=x+2y+z$, $\sqrt{21}y^*=2x+y-4z$, 即

$$f(x+2y+z,2x+y-4z)=f(\sqrt{6}x^*,\sqrt{21}y^*)=0.$$

为柱面方程，其准线方程为$f(x+2y+z,2x+y-4z)=0,3x-2y+z=0$.