练习 1. 假设 $f \in L^1([0,b])$，b 为一个正实数. 令

$$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt, \quad 0 < x \leq b.$$

证明：$g \in L^1([0,b])$ 并且

$$\int_0^b g(x)dx = \int_0^b f(t)dt.$$

练习 2. 假设 F 是 $\mathbb{R}$ 中的闭集，其补集 F^c 测度有限. 令 $\delta(x)$ 记点 $x \in \mathbb{R}$ 到 F 的距离，即

$$\delta(x) = \inf\{|x-y| : y \in F\}.$$

考虑如下函数

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} dy.$$

请回答下列问题.

(a) 证明：$|\delta(x) - \delta(y)| \leq |x-y|$.

(b) 证明：如果 $x \notin F$，则 $I(x) = \infty$.

(c) 证明：$I(x) < \infty$ a.e. $x \in F$.

练习 3. 假设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的函数，其定义如下：

$$f(x,y) = \begin{cases} a_n & \text{如果 } (x,y) \in [n, n+1) \times [n, n+1), \qquad (n \geq 0), \\ -a_n & \text{如果 } (x,y) \in [n, n+1) \times [n+1, n+2), \ (n \geq 0), \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

上述 $a_n = \sum_{k=0}^n b_k$，而 $\{b_k\}$ 是一列正数且满足 $\sum_{k=0}^\infty b_k = s < \infty$. 请回答下列问题.

(a) 证明：固定 $y \in \mathbb{R}$，则 $f^y(\cdot) := f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R})$；固定 $x \in \mathbb{R}$，则 $f_x(\cdot) := f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) 证明：$\int f_x(y)dy = 0$，并且

$$\int f^y(x)dx = \begin{cases} a_0 & \text{如果 } 0 \leq y < 1, \\ a_n - a_{n-1} & \text{如果 } n \leq y < n+1 \ \ (n \geq 1), \\ 0 & \text{如果 } y < 0. \end{cases}$$

由此进一步说明 $g(y) = \int f^y(x)dx$ 是关于 y 的可积函数.

(c) 回答问题并说明理由：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是发散的，还是可能收敛的？(即：以收敛的正项级数的前 n 项和为第 n 项的级数是否总是发散？)

练习 4. 假设 f 是 $[0,1]$ 上的实值 (处处有限) 可测函数，且 $|f(x) - f(y)|$ 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上可积. 求证：$f \in L^1([0,1])$.

练习 5. 考虑函数的卷积：

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

(a) 证明：假如 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，g 为有界函数，则 $f * g$ 一致连续.

(b) 证明：在上一小题假设基础上，如果 g 还是可积函数，则 $(f * g)(x) \to 0$ (当 $|x| \to \infty$).