解 析 几 何

2019-1-11

作业(12) (P121: 1,2, 5, 6; P125: 1, 3; P132: 1.)

第121页习题

1.解： 取代表元$y^*=a(1,-1,2), z^*=b(3,2,1)$, 使得

$$(0,-1,1)=a(1,-1,2)+b(3,2,1).$$

解得$a=\frac{3}{5}, b=-\frac{1}{5}$. 直接计算得

$$(5,2,3)=\frac{4}{3}y^*+(-7)z^*.$$

即得$(5,2,3)$ 的射影坐标为$[(\frac{4}{3},-7)]$.

取代表元$\bar{y}^*=c(1,1,0), \bar{z}^*=d(-1,2,-3)$, 使得

$$(1,-3,4)=c(1,1,0)+d(-1,2,-3).$$

解得$c=-\frac{1}{3}, d=-\frac{4}{3}$. 再由

$$y^*=-\frac{3}{5}\bar{y}^*+\frac{3}{10}\bar{z}^*,\quad z^*=\frac{8}{5}\bar{y}^*-\frac{1}{20}\bar{z}^*.$$

可知坐标系的关系方程为

$$\begin{cases}\rho\bar{\lambda}=-\frac{3}{5}\lambda+\frac{8}{5}\mu\\ \rho\bar{\lambda}=\frac{3}{10}\lambda-\frac{1}{20}\mu\end{cases}\quad \rho\neq 0$$

2证明:

假设直线上取定了代表元y^*, z^*, 则只需重新取代表元 $\bar{y}^*, \bar{z}^*$, 使得点x^* 关于 y^* 和 z^* 的坐标为 (λ,μ), 而关于 $\bar{y}^*, \bar{z}^*$ 的坐标恰好为 $(\bar{\lambda},\bar{\mu})$. 设$x^*=\lambda y^*+\mu z^*$, 由(5.3.6)可得

$$x^*=(y^*,z^*)\begin{bmatrix}\lambda\\ \mu\end{bmatrix}=(y^*,z^*)A^{-1}\begin{bmatrix}\bar{\lambda}\\ \bar{\mu}\end{bmatrix}.$$

这里, 矩阵$A=\{a_{ij}\}$

$$A^{-1}=(\det A)^{-1}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

从而取

$$\bar{y}^*=(\det A)^{-1}(a_{22}y^*-a_{12}z^*),\quad \bar{z}^*=(\det A)^{-1}(-a_{21}y^*+a_{11}z^*)$$

即可.

5 解: 令

$$(0,1,7)=a(1,2,1)+b(1,1,0)+c(2,1,1).$$

即得

$$\begin{cases} a+b+2c=0, \\ 2a+b+c=1, \\ a+c=7. \end{cases}$$

解得

$$a=4,\quad b=-10,\quad c=3.$$

即得$(1,1,1)$ 的坐标为 $[(\frac{1}{8},\frac{1}{20},\frac{1}{6})]$.

6解: 记

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\quad \text{其中矩阵}A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

利用

$$0=(\xi_1',\xi_2',\xi_3')(x_1',x_2',x_3')^T=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)A^T(x_1',x_2',x_3')^T.$$

另一方面有

$$0=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)(x_1,x_2,x_3)^T.$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)^T=A^T(x_1',x_2',x_3')^T$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

这是逆变换, 诱导的坐标变换为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

第125页习题

1解: 用代数形式表达出来就是:

Desargues 定理: 若 $|x\times x', y\times y', z\times z'|=0$, 则

$$|(y\times z)\times(y'\times z'),(z\times x)\times(z'\times x'),(x\times y)\times(x'\times y')|=0.$$

对偶命题: 若 $|\xi\times\xi',\eta\times\eta',\zeta\times\zeta'|=0$, 则

$$|(\eta\times\zeta)\times(\eta'\times\zeta'),(\zeta\times\xi)\times(\zeta'\times\xi'),(\xi\times\eta)\times(\xi'\times\eta')|=0.$$

3证明: 设点a,b,c的射影坐标分别为$[(0,1,0)],[(0,0,1)],[(0,1,1)]$, 点$x$为$[(1,0,0)]$. 则直线

$$\xi=[(0,0,1)],\quad \eta=[(0,1,0)],\quad \zeta=[(0,1,-1)].$$

可得第四调和线$\varphi=[(0,1,1)]$, 即得

$$d=\alpha\times\varphi=[(1,0,0)]\times[(0,1,1)]=[(0,1,-1)].$$

注意到a,b,c,d 都在直线$\alpha=[(1,0,0)]$ 上, 即知 d 是a,b,c 的第四调和点.

第132页习题

1解: 设点$z=\lambda_1x+\lambda_2y$, $w=\mu_1x+\mu_2y$, w的坐标为(x_1,x_2,x_3). 则直接计算得

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=-6.$$

又由$R(x,y;z,w)=\frac{\mu_1\lambda_2}{\mu_2\lambda_1}$=-4, 可得

$$w=(4,19,7).$$