（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学类

2018-2019 学年第一学期 《数学分析 B》

一元微分学阶段性考试试卷 混合教学班级

专业__________________学号______________姓名______________成绩___________

题号	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	2-4	3-1-1	3-1-2
得分									
题号	3-1-3	3-2-1	3-2-2	3-3	3-4	3-5	3-6-1	3-6-2	3-7
得分									
题号	3-8-1	3-8-2	3-9-1	3-9-2	3-10-1	3-10-2	3-10-3	3-11-1	3-11-2
得分									
题号	4-1	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3	6-1	6-2	6-3
得分									
题号	6-4	6-5							总分
得分									

一、严格表述题 注：需给出具体内容，但无需证明 （每小题 5 分）

1. 叙述：函数极限的集聚刻画、序列刻画、振幅刻画。

2. 叙述：反函数的存在性（连续性）定理与可导性定理

3. 叙述：有界数列上、下极限的定义

二、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果正确的，请回答“是”，并给予证明；如果错误的，请回答“否”，并举反例。（每小题 5 分）

1. ① 函数在一点单侧连续，则其在该点单侧可导。

   ② 函数在一点可单侧导，则其在该点单侧连续。

2. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续，则有 $(f+g)(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续。

3. 考虑$E\subset\mathbb{R}$（可以有界或者无界）上任意的二个序列$\left\{\tilde{x}_n\right\}$，$\left\{\hat{x}_n\right\}$，当$\exists\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\tilde{x}_n-\hat{x}_n\right|=0$时，有$\exists\lim\limits_{n\to+\infty}\left|f\left(\tilde{x}_n\right)-f\left(\hat{x}_n\right)\right|=0$，则有$f\left(x\right)$在$E$上一致连续。

4. 无界区间上可导的一致连续的函数，其导数一定有界。

（装订线内不要答题）

三 计算题及证明题（带圈号的小题，每题 10 分）

1. 基于无限小分析方法，计算下列函数与数列极限。**注**：可以采用其它方法

① 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)-6\left(\sqrt[3]{2-\cos x}-1\right)}{x^4}$

② 计算 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$

③ 计算 $\lim n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$，$a>0$

（装订线内不要答题）

2. ① 推导：在 $x=0$ 处（相应的邻域），$\arcsin x$ 至 $o\left(x^n\right)$ 的展开式

② 计算 $\left(\arcsin x\right)^2$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数

3. $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(x-3\right)\arctan\dfrac{1}{x-3} & x\neq 3\\ 0 & x=3\end{cases}$，计算单侧变化率 $f_+^{'}\left(x\right)$，$f_-^{'}\left(x\right)$

4. 计算函数 $f\left(x\right)=x^{x^{a}}+x^{a^{x}}+a^{x^{x}}$，$\left(a>0,x>0\right)$的一阶导数

5. 计算 $f\left(x\right)=\begin{cases} x\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在零点的导数，并说明：零点的任意领域都有不可导点

（装订线内不要答题）

6. ① 计算：$\lim \dfrac{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{\ln 2\sqrt{n}}$

② 设 $x_1=\sin x_0\in\mathbb{R}^+$， $x_{n+1}=\sin x_n$，求： $\lim\sqrt{n}x_n$

7. 设 $|x_1|\le 2$， $x_{n+1}=\sqrt{4-x_n}\left(n\in\mathbb{N}\right)$，求： $\lim x_n$

8. ① 设 $f(x)\in C[a,b]$，$\{x_i\}_{i=1}^{n}\subset[a,b]$，证明：

$$\exists\xi\in[a,b]，\text{s.t.}\quad f(\xi)=\frac{1}{n}\left[f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right]$$

② 按上题条件，再设有 $f(a)=f(b)$，证明 ：对 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\exists\xi_n\in[a,b]，\text{s.t.}\quad f(\xi_n)=f\left(\xi_n+\frac{1}{n}\right)$$

注：①与②都基于介值定理，且②的获得可以考虑基于①

9. ① 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，都在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\exists\xi\in(a,b)\text{，s.t. } f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$$

② 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：

$$\exists\xi,\eta\in(a,b)\text{，s.t. } e^{\xi-\eta}\left[f(\xi)+f'(\xi)\right]=1$$

（装订线内不要答题）

10. ① 设 $\varphi(x)\in C[0,+\infty)$，$\varphi(0)=0$，$\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$，证明：对于 $\forall\lambda>0$，$\exists x_n\to+\infty$，

s. t. $\exists\varphi(x_n)\cos x_n\to\lambda$

② 判断：$f(x)=\sin\left(\varphi(x)\cos x\right)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上的一致连续性

③ 判断 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\sin^2 x}$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上的一致连续性

11. ① 设有$\exists f'(0)\in\mathbb{R}$，如果$\exists\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)=0$，证明：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\psi(x))-f(\varphi(x))}{\psi(x)-\varphi(x)}=f'(0)$$

② 设$f(x)$在$B_\lambda(0)$上存在一阶导数且连续（连续可微），$f'(0)=0$，$\exists f''(0)\in\mathbb{R}$，证明：

$\exists\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\dfrac{1}{2}f''(0)$。**注：** $f(x)$关于零点只能展开到二阶；考虑利用结论①

（装订线内不要答题）

四．数列的上下极限（带圈号的小题，每题 10 分）

① 设$\left\{x_n\right\}$有界，则有结论：存在子列分别集聚至上、下极限。证明：集聚至上极限的结论

② 证明：任意收敛之列的极限都不小于下极限、不大于上极限。

③ 证明：上下极限计算的关系式

$$\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \le \underline{\lim}\left(x_n + y_n\right) \le \begin{cases} \underline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n \\ \underline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n \end{cases} \le \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$$

五．Stolz 定理与 Bernoulli-L’Hospital 法则的通识性结构（带圈号的小题，每题 10 分）

① 阐述 Stolz 定理与 Rolle 定理的一般形式

② 设定数列差比的极限、函数导数之比的形式为有限值，给出 Stolz 定理与 Bernoulli-L’ Hospital 法则分析中所建立的关系式

③ 就 $\frac{0}{0}$-型与 $\frac{*}{\infty}$-型，获得最终的结论

（装订线内不要答题）

六．相关估计（带圈号的小题，每题 10 分）

① 设有$\left|x_{n+1}\right| \le \lambda\left|x_n\right| + \mu$，$0 < \lambda < 1$，$\mu \in \mathbb{R}^+$，证明：$\{x_n\}$有界

② 基于①中结果，设$\exists \lim\left(\lambda x_{n+1} + x_n\right) = l \in \mathbb{R}$，$\lambda > 1$，证明：$\{x_n\}$有界并计算其极限

③ 证明：在$\mathbb{R}$上定义的一致连续函数，满足线性增长控制：

$$\left|f\left(x\right)\right| \le A + B\left|x\right|,\quad A, B \in \mathbb{R}^+$$

④ 基于③中结果，推导：二个一致连续的函数的乘积，依然一致连续的充分性条件。

⑤ 设有$\exists \lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right) = 0$且$\exists \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[f\left(x\right) - f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] = 0$，$\lambda > 1$，证明：$\exists \lim\limits_{x\to 0} \frac{f\left(x\right)}{x} = 0$

（装订线内不要答题）