# 第十二章　数项级数

## §1　级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性.并求其和:

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$;

(3) $\sum\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum\frac{2n-1}{2^n}$

解

$$(1)\ S_n=\frac{1}{5}[(1-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{11})+\cdots+(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1})]$$
$$=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1})$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$,从而该级数收敛,且和为$\frac{1}{5}$.

(2) $\sum\frac{1}{2^n}$ 是公比为$\frac{1}{2}$ 的几何级数,故收敛于$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$,同理 $\sum\frac{1}{3^n}$ 收敛于 $\frac{1}{2}$,所以$\sum(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$ 收敛于 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

$$(3)\ 因\ a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}],$$

从而 $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}[\frac{1}{(k+1)k}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}]$$
$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]\to\frac{1}{4}$$
故该级数收敛,其和为$\frac{1}{4}$.

(4) 因为其通项为
$$a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
所以
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$$
故该级数收敛且其和为 $1-\sqrt{2}$.

(5) $$S_n-\frac{1}{2}S_n=(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n})-[1\cdot(\frac{1}{2})^2+3\cdot(\frac{1}{2})^3+5\cdot(\frac{1}{2})^4+\cdots+(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}]$$
$$=\frac{1}{2}+2\cdot(\frac{1}{2})^2+2\cdot(\frac{1}{2})^3+\cdots+2\cdot(\frac{1}{2})^n-(2n-1)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$$
即 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}-(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}$
$$S_n=2[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}})]-(2n-1)(\frac{1}{2})^{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-2}}{1 - \frac{1}{2}} - (2n-1)(\frac{1}{2})^n$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3$. 即所给级数收敛,且其和为 3.

2. 证明:若级数 $\sum u_n$ 发散,则 $\sum Cu_n$ 也发散($c \neq 0$).

证　(反证法)若 $\sum Cu_n$ 收敛,则由 $C \neq 0$ 知

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{C} \cdot Cu_n$$

由定理 12.2 知 $\sum u_n$ 也收敛,与题设矛盾. 从而当 $\sum u_n$ 发散时, $\sum Cu_n$ 也发散.

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散,试问 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散吗? 又若 $u_n$ 与 $v_n (n = 1,2,\cdots)$ 都是非负数,则能得出什么结论?

解　当 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散时, $\sum (u_n + v_n)$ 不一定发散. 例: $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ 和 $\sum v_n = \sum (-\frac{1}{n})$ 都发散,而 $\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + \cdots$ 收敛.

但当 $u_n$ 与 $v_n (n = 1,2,\cdots)$ 都是非负数时,则 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散,证明如下:

由 $\sum u_n$ 发散知,存在 $\varepsilon_0 > 0$,对任何自然数 $N$,总存在自然数 $m_0 (> N)$ 和 $p_0$,有

$$| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} | \geqslant \varepsilon_0.$$

从而

$$| (u_{m_0+1} + v_{m_0+1}) + (u_{m_0+2} + v_{m_0+2}) + \cdots + (u_{m_0+p_0} + v_{m_0+p_0}) | \geqslant \varepsilon_0.$$

由柯西准则知 $\sum (u_n + v_n)$ 发散.

4. 证明:若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$,则级数 $\sum (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

证　由已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,而

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{k+1}$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}S_k=\lim\limits_{k\to\infty}(a_1-a_{k+1})=(a_1-\lim\limits_{k\to\infty}a_{k+1})=a_1-a$,

即　$\sum(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

5. 证明:若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$,则

(1) 级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散;

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时,级数 $\sum(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})=\frac{1}{b_1}$

证　(1) 因 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=+\infty$$

故级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$,从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}})=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}})=\frac{1}{b_1}$$

即　$\sum(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})=\frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4,5 题结果求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$

解　(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n})$,

而数列 $\{\frac{1}{a+n-1}\}$ 收敛于 0,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{1}{a+1-1}-0=\frac{1}{a}.$$

(2) 原式 $=\sum[-\frac{(-1)^n}{n}-(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1})]$

而数列$\{-\frac{(-1)^n}{n}\}$收敛于0,所以

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=-\frac{(-1)}{1}-0=1.$$

(3) 原式 $=\sum\left[\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]$,而数列$\{\frac{1}{n^2+1}\}$收敛于0,所以

$$\sum\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{1^2+1}-0=\frac{1}{2}.$$

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$;　　(2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n}$;　　(4) $\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

解　(1) 任给自然数 $p$,有

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{m+k}}<\frac{1}{2^m}(1-\frac{1}{2})<\frac{1}{2^m}$$

而$\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{2^m}=0$,于是任给 $\varepsilon>0$,存在 $N$,当 $m>N$ 时,任给自然数 $p$.

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin 2^{m+k}}{2^{m+k}}\right|<\frac{1}{2^m}<\varepsilon$$

所以该级数收敛.

(2) 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$,对任一 $N$,取 $m=N+1,p=1$,则 $m>N$.且

$$|u_{m+1}|=\left|\frac{(-1)^m(m+1)^2}{2(m+1)^2+1}\right|>\frac{(m+1)^2}{3(m+1)^2}=\frac{1}{3}=\varepsilon_0.$$

据柯西准则知原级数发散.

(3) 任给 $\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,当 $m>N$ 时,任给 $p$,

$$\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}\right|=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+(-1)^{p+1}\frac{1}{m+p}$$

$$= \frac{1}{m+1} - [\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} + \cdots + (-1)^p \frac{1}{m+p}|$$

$$< \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

所以该级数收敛.

(4) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 对任一 $N$,取 $m = 2N, p = m$,则 $m > N$,且

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{(m+k)+(m+k)^2}}\right|$$

$$\geqslant \frac{p}{\sqrt{(m+p)+(m+p)^2}} > \frac{p}{\sqrt{2}(m+p)} = \frac{m}{2m\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

所以此级数发散.

8. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是:任给正数 $\varepsilon$,有某自然数 $N$,对一切 $n > N$ 总有

$$|u_N + u_{n+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

证　必要性　若 $\sum u_n$ 收敛,则由柯西准则知:任给 $\varepsilon > 0$,存在自然数 $N_1$,使当 $n > m > N_1$ 时,

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

取 $N \geqslant N_1 + 1$ 对任何 $n > N$,有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

充分性　若任给 $\varepsilon > 0$,存在某自然数 $N$,对一切 $n > N$,总有

$$|u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon$$

则对一切 $n > m > N$,都有

$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| = |(u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n) - (u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m)| \leqslant |u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n| + |u_N + u_{N+1} + \cdots + u_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

由柯西准则知 $\sum u_n$ 收敛.

9. 举例说明:若级数 $\sum u_n$ 对每一个固定的自然数 $p$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{u+p}) = 0$$

则此级数仍可能不收敛.

解　例如级数$\sum \frac{1}{n}$,对每一个自然数 $p$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+p}=0$$

但级数$\sum \frac{1}{n}$发散.

10. 设级数$\sum u_n$满足:加括号后级数$\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$收敛$(n_1=0)$,且在同一括号中的 $u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$ 符号相同. 证明$\sum u_n$亦收敛

证明:设级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_n$的部分和为$S_n$.

令 $u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}}=A_k$

则级数$\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$,并设其部分和为 $T_k$

已知$\sum_{k=1}^{\infty}A_k$收敛,可设$\lim_{k\to\infty}T_k=S$.

则　$T_k=A_1+\cdots+A_k=T_{k-1}+(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$

又　$\forall n\in N,\exists k\in N$,使得 $n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}(n_1=0)$ 且由已知 $A_k$ 中的项符号相同.

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$S_n$总介于$T_{k-1}$与$T_k$之间.

即以下两不等式必有其一成立:

(i) $T_{k-1}\leqslant S_n\leqslant T_k$

(ii) $T_k\leqslant S_n\leqslant T_{k-1}$

又　$\lim_{k\to\infty}T_k=\lim_{k\to\infty}T_{k-1}=S$

因此　$\lim_{n\to\infty}S_n=S$,故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

# §2　正项级数

1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$；(2) $\sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$；(3) $\sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$；

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$；(5) $\sum (1-\cos \frac{1}{n})$；(6) $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

(7) $\sum (\sqrt[n]{a}-1)\ (a>1)$；(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(9) $\sum (a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)\ (a>0)$；

解　(1) 由于 $0 \leqslant \frac{1}{n^2+a^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$，而 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$ 收敛.

(2) $2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \sim \pi (\frac{2}{3})^n$，而 $\sum \pi (\frac{2}{3})^n$ 收敛，故原级数收敛.

(3) 因为 $\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \sim \frac{1}{n}$，而 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(4) 因为 $0 < \frac{1}{(\ln n)^n} < \frac{1}{2^n} (n > e^2)$，而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数收敛.

(5) $1-\cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$，而 $\sum \frac{1}{2n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

(6) $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$，而 $\sum \frac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

(7) $a=1$ 时，部分和为 0，故收敛，当 $a>1$ 时，

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}\ln a + \frac{1}{2n^2}\ln^2 a + (\frac{1}{n^3})$$

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n}\ln a + \frac{1}{2n^2}\ln^2 a + (\frac{1}{n^3}) \sim \frac{\ln n}{n}$$

而 $\sum \frac{\ln a}{n}$ 发散，故 $a>1$ 时，原级数发散.

(8) 因为$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}<\frac{1}{n^2}(n>e^{e^2})$，而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故原级数收敛.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{a^t+a^{-t}-2}{t^2}=(\ln a)^2$(罗比塔法则)

又$\sum\frac{1}{n^2}$收敛，故原级数收敛.

2. 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性：

(1)$\sum\frac{1.3\cdots(2n-1)}{n!}$；(2)$\sum\frac{(n+1)!}{10^n}$；(3)$\sum(\frac{n}{2n+1})^n$；

(4)$\sum\frac{n!}{n^n}$；(5)$\sum\frac{n^2}{2^n}$；(6)$\sum\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$；

(7)$\sum(\frac{b}{a_n})^n$，(其中 $a_n\to a(n\to\infty)$；$a_n,a,b>0$，且 $a\neq b$).

解　(1) 因$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)!!n!}{(2n-1)!!(n+1)!}=\frac{2n+1}{n+1}\to 2(n\to\infty)$

故该级数发散.

(2) 因$\frac{u_{N+1}}{u_n}=\frac{n+2}{10}(n\to\infty)$，所以该级数发散.

(3) 因$\sqrt[n]{u_n}=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$，故该级数收敛.

(4) 因$\frac{u_{n+1}}{u_n}=(\frac{n}{n+1})^n\to\frac{1}{e}(n\to\infty)$，故该级数收敛.

(5) 因$\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\sqrt[n]{n^2}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$，故该级数收敛.

(6) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=3(\frac{n}{n+1})^n\to\frac{3}{e}(n\to\infty)$，而$\frac{3}{e}>1$，由比式判别法此级数发散.

(7) 因$\sqrt[n]{u_n}=\frac{b}{a_n}\to\frac{b}{a}(n\to\infty)$，从而 $b>a$ 时，该级数发散；$b<a$ 时，该级数收敛，$a=b$ 时敛散性不定.

3. 设$\sum u_n$、$\sum v_n$ 为正项级数，且存在正数 $N_0$，对一切 $n>N_0$，

有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

证明:若级数 $\sum v_n$ 收敛,则级数 $\sum u_n$ 也收敛;若 $\sum u_n$ 发散,则 $\sum v_n$ 也发散.

证 由题意知:当 $n > N_0$ 时,$\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$,从而对 $n > N_0$,有

$$0 < \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \cdots \leqslant \frac{u_{N_0+1}}{v_{N_0+1}}$$

故 $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_{N_0+1}}{v_{N_0+1}} v_{n+1} (n > N_0)$. 由于 $\dfrac{u_{N_0+1}}{v_{N_0+1}}$ 是常数,故当 $\sum v_n$ 收敛时 $\sum u_n$ 收敛,当 $\sum u_n$ 发散时 $\sum v_n$ 也发散.

4. 设正项级数 $\sum a_n$ 收敛,证明级数 $\sum a_n^2$ 也收敛;试问反之是否成立?

证 由 $\sum a_n$ 收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,于是存在 $N$,当 $n \geqslant N$ 时,$0 \leqslant a_n < 1$,从而 $n \geqslant N$ 时,有 $0 \leqslant a_n^2 < a_n$,由比较原则知 $\sum a_n^2$ 也收敛.

反之不成立. 例如 $\sum \dfrac{1}{n^2}$ 收敛,但 $\sum \dfrac{1}{n}$ 发散.

5. 设 $a_n \geqslant 0$,且数列 $\{na_n\}$ 有界,证明级数 $\sum a_n^2$ 收敛.

证:设 $0 \leqslant na_n \leqslant M (n = 1,2,\cdots)$,则 $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{M}{n}$,从而 $a_n^2 \leqslant \dfrac{M^2}{n^2}$,而 $\sum \dfrac{M^2}{n^2}$ 收敛,由比较原则 $\sum a_n^2$ 也收敛.

6. 设级数 $\sum a_n^2$ 收敛,证明级数 $\sum \dfrac{a_n}{n} (a_n > 0)$ 也收敛.

证 由于 $\left|\dfrac{a_n}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$,而 $\sum a_n^2$,$\sum \dfrac{1}{n^2}$ 都收敛,得 $\sum \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ 收敛,由比较原则,$\sum \dfrac{a_n}{n}$ 收敛.

7. 设正项级数 $\sum u_n$ 收敛,证明级数 $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 也收敛.

证 $\sqrt{u_n u_{n+1}} < \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$,而由已知$\sum \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$收敛,故由比较原则$\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$收敛.

8. 利用级数收敛的必要条件,证明下列等式:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n!)}{a^{n!}} = 0(a > 1)$.

证 (1) 设 $u_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$,则$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}(\frac{n+1}{n})^n \to 0$,从而级数$\sum \frac{n^n}{(n!)^2}$收敛,由收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

(2) 对于级数$\sum \frac{(2n)!}{a^{n!}}$,当 $a > 1$ 时,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{n\cdot n!}} \to 0(n \to \infty)$$

即该级数收敛. 由收敛的必要条件知$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0$.

9. 用积分判别法讨论下列级数的敛散性:

(1)$\sum \frac{1}{n^2+1}$;(2)$\sum \frac{n}{n^2+1}$;(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$;

(4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

解 (1) 设 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,则 $f(x)$ 在$(1, +\infty)$上非负递减,$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$收敛,故级数$\sum \frac{1}{n^2+1}$收敛.

(2)$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$在$(1, +\infty)$非负递减,而由

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{x}{x^2+1} = 1$$

知积分$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$发散,故$\sum \frac{n}{n^2+1}$发散.

(3)$f(x) = \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$在$(3, +\infty)$非负递减,而

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u}$$ 此积分发散，故原级数发散.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$，则 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上非负递减.

$1^\circ$ $p=1$ 时，$\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u^q}$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散. 故级数当 $p=1,q>1$ 时收敛；$p=1,q\leqslant 1$ 时发散.

$2^\circ$ $p\neq 1$ 时，$\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{e^{(p-1)u}u^q}$

对任意 $q$，当 $p-1>0$ 时，取 $t>1$，有 $\displaystyle\lim_{u\to\infty}u^t\cdot\frac{1}{e^{(p-1)u}u^t}=0$

积分此时收敛；当 $p-1<0$ 时，有 $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}u^t\cdot\frac{1}{e^{(p-1)u}u^t}=\infty$

此时积分发散. 所以级数当 $p>1$ 时对任何 $q$ 都收敛，而当 $p<1$ 时发散.

10. 设 $\{a_n\}$ 为递减正项数列，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}2^m a_{2^m}$ 同时收敛或同时发散.

证　记两个级数为(1)、(2)，部分和分别为 $S_n,T_n$. 由 $\{a_n\}$ 为递减正项数列知

$$S_n<S_{2^n}\leqslant a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{m+1}-1})$$
$$\leqslant a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}=T_n$$

故(2)收敛时(1)也收敛，又

$$S_{2^m}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{m-1}+1}+\cdots+a_{2^m})$$
$$\geqslant\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{m-1}a_{2^m}=\frac{1}{2}T_m$$

从而(1)收敛时(2)也收敛，故(1)(2)敛散性相同.

11. 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$；

(2) $\sum \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)},(x>0)$.

解　(1) $n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})$

$$= n[1-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n+1)}{(2n+3)}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]$$

$$= \frac{n(6n+5)}{(2n+2)(2n+3)} \to \frac{3}{2}(n\to\infty)$$

而 $\frac{3}{2}>1$，由拉贝判别法知该级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1} = x$

由拉贝判别法，当 $x>1$ 时原级数收敛；当 $x<1$ 时级数发散；$x=1$ 时，级数为 $\sum\frac{1}{n+1}$，也发散.

12. 用根式判别法证明级数 $\sum 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛，并说明比式判别法对此级数无效.

解　设 $u_n = 2^{-n-(-1)^n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{2^{(-1)^n}}} = \frac{1}{2}$，由根式判别法知 $\sum u_n$ 收敛，而　$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{(-1)^n-1-1(-1)^{n+1}}$

当 $n$ 为奇数时，$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{8}$；$n$ 为偶数时，$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$，故比式判别法对此级数无效.

13. 求下列极限(其中 $p>1$)：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}})$.

解　(1) 因为当 $p>1$ 时，$\sum\frac{1}{n^p}$ 收敛，从而由柯西准则知：任给 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right|<\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)=0.$

(2) 由于当 $p>1$ 时级数 $\sum\frac{1}{p^n}$ 收敛，从而由柯西准则知：任给 $\varepsilon>0$，存在 $N$，$n>N$ 时，

$$\left|\frac{1}{p^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right|<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)=0.$

14. 设 $a_n>0$，证明数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$ 同时收敛或同时发散.

证　由于数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum\ln(1+a_n)$ 有相同敛散性，只需证 $\sum\ln(1+a_n)$ 与 $\sum a_n$ 的敛散性相同. 又易见二者之一收敛，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$. 由比较判别法的推论知：$\sum\ln(1+a_n)$ 与 $\sum a_n$ 有相同敛散性.

# §3　一般项级数

1. 下列级数哪些是绝对收敛，条件收敛或发散的：

(1) $\sum\frac{\sin nx}{n!}$；(2) $\sum(-1)^n\frac{n}{n+1}$；(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$；

(4) $\sum(-1)^n\sin\frac{2}{n}$；(5) $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$；

(6) $\sum\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}$；(7) $\sum(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$；

(8) $\sum n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$.

解　(1) 因 $\frac{|\sin nx|}{n!}\leqslant\frac{1}{n^2}(n>4)$，而 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数绝对

收敛.

(2) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right|=1\neq 0$,故原级数发散.

(3) 当$p\leqslant 0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\neq 0$,故此时原级数发散.当$p>1$时,$\sum\dfrac{1}{n^p}$收敛,而$\left|\dfrac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right|\sim\dfrac{1}{n^p}$,所以此时级数绝对收敛,且知$0<p\leqslant 1$时级数不绝对收敛.此时,令$u_n=\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$,则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n})^p(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}<\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n})^p n^{\frac{1}{n+1}}}=\frac{n^{\frac{1}{n(n+1)}}}{(1+\frac{1}{n})^p}$$

而$(1+\dfrac{1}{n})^{np}\to e^p>1$,$n^{\frac{1}{n(n+1)}}\to 1(n\to\infty)$,故$n$充分大时,$(1+\dfrac{1}{n})^{np}>n^{\frac{1}{n+1}}$,即$(1+\dfrac{1}{n})^p>n^{\frac{1}{n(n+1)}}$,从而$u_{n+1}<u_n$,即$\{u_n\}$单调递减($n$充分大以后),又

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}=0$$

于是原级数在$0<p\leqslant 1$时条件收敛(莱布尼兹判别法).

(4) 由于$\left|(-1)^n\sin\dfrac{2}{n}\right|\sim\dfrac{2}{n}$,而$\sum\dfrac{2}{n}$发散,故原级数不绝对收敛,但$\{\sin\dfrac{2}{n}\}$单调递减且$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{2}{n}=0$,由莱布尼兹判别法知:$\sum(-1)^n\sin\dfrac{2}{n}$条件收敛.

(5) 由于$\sum\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛,而$\sum\dfrac{1}{n}$发散,故原级数发散.

(6) 由于$\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}>\dfrac{1}{n+1}$,且$\sum\dfrac{1}{n+1}$发散,故原级数不绝对收敛,但由于$\{\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\}$单调递减,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}=0$,故原级数条

件收敛.

(7) 因为$\sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}=\frac{2n+100}{3n+1}\to\frac{2}{3}(n\to\infty)$,故原级数绝对收敛.

(8) 由于$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{|x|}{e}(n\to\infty)$,故当$|x|<e$时,原级数绝对收敛;当$|x|\geqslant e$时,$|u_{n+1}|\geqslant|u_n|\geqslant|u_1|>0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$,从而原级数发散.

2. 应用阿贝耳判别法或狄利克雷判别法判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{1+x^n},(x>0)$;

(2) $\sum\frac{\sin nx}{n^\alpha},x\in(0,2\pi),(\alpha>0)$;

(3) $\sum(-1)^n\frac{\cos^2 nx}{n},x\in(0,\pi)$.

解　(1) 对于数列$\{\frac{x^n}{1+x^n}\}$来说,当$x>0$时$0<\frac{x^n}{1+x^n}<\frac{x^n}{x^n}=1$,又

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}}{\frac{x^n}{1+x^n}}=\frac{x(1+x^n)}{1+x^{n+1}}=\frac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{1}{x^{n+1}}+1}=\begin{cases}\leqslant 1,0<x\leqslant 1\\ >1,\quad x>1\end{cases}$$

即数列$\{\frac{x^n}{1+x^n}\}$是单调有界的,又$\sum\frac{(-1)^n}{n}$收敛,由阿贝尔判别法知原级数收敛.

(2) 对于$x\in(0,2\pi)$有$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$,即$\sum\sin nx$的部分和数列有界,又$\alpha>0$时,数列$\{\frac{1}{n^\alpha}\}$单调递减,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$,由狄利克雷判别法知原级数收敛.

(3) 由于数列$\{\frac{1}{n}\}$单调递减且趋于零,而对任一 $n$ 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\cos^{2}kx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{\cos 2kx+1}{2}\right|$$
$$\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{2}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{\cos 2kx}{2}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right|$$

而由 $2\sin x\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx = 4\sin(2n+1)x - 4\sin x$

知 $\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right| = \left|\frac{4\sin(2n+1)x-4\sin x}{2\sin x}\right| \leqslant \frac{2}{|\sin x|}+2$

故对任意的 $x\in(0,\pi)$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos^{2}nx$ 的前 $n$ 项和数列是有界的。因此由狄利克里判别法知原级数是收敛的。

3. 设 $a_n>0, a_n>a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,证明级数

$$\sum(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \text{ 是收敛的.}$$

证　由已知易得$\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\}$单调递减且趋于零,由莱尼兹判别法得原级数收敛.

4. 设 $p_n=\frac{|u_n|+u_n}{2}, g_n=\frac{|u_n|-u_n}{2}$,证明:若$\sum u_n$ 条件收敛,则级数$\sum p_n$ 与$\sum q_n$ 都是发散的.

证　由已知得$\sum|u_n|$发散,而 $p_n=\frac{|u_n|}{2}+\frac{u_n}{2}$,故$\sum p_n$发散.否则,由$\sum\frac{|u_n|}{2}=\sum p_n-\sum\frac{u_n}{2}$将得出$\sum\frac{|u_n|}{2}$收敛的矛盾.同理可证$\sum q_n$ 发散.

5. 写出下列级数的乘积:

(1) $(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1})(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1})$;

$(2)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!})$

解　(1)级数$\sum nx^{n-1}$与$\sum(-1)^{n-1}nx^{n-1}$当$|x|<1$时均绝对收敛.按对角线相乘,第 $n$ 条对角线和为

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sum_{k=1}^{n}k(x^{k-1})[(-1)^{n-k}(n-k+1)x^{n-k}]\\ &= x^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k(n-k+1)\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\omega_{2m} &= x^{2m-1}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{2m-k}k(2m-k+1)\\ &= x^{2m-1}[-1\cdot(2m)+2\cdot(2m-1)-3(2m-2)+\cdots\\ &\quad +(-1)^m m(m+1)+(2m)\cdot 1-(2m-1)\cdot 2\\ &\quad +(2m-2)\cdot 3+\cdots+(-1)^{m-1}(m+1)m]\\ &= x^{2m-1}\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{2m+1} &= x^{2m}[-\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^{2m-k}k(2m-k+1)+\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^{2m+1-k}k]\\ &= -\omega_{2m}+x^{2m}\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{k-1}k = 0+x^{2m}\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{k-1}k\\ &= x^{2m}[1-2+3-4+5-\cdots-2m+2m+1\\ &\quad +2(2+4+6+\cdots+2m)-2(2+4+6+\cdots+2m)]\\ &= x^{2m}[\sum_{k=1}^{2m-1}k-4\sum_{k=1}^{m}k] = (m+1)x^{2m}\end{aligned}$$

故$(\sum nx^{n-1})(\sum n(-1)^{n-1}x^{n-1}) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^{2m}(|x|<1)$.

(2) 这两个级数均绝对收敛,按对角线顺序其乘积的一般项为

$\omega_0 = 1$

$\omega_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!(n-k)!} = \frac{(1-1)^n}{n!} = 0(n$ $= 1,2,\cdots)$.所以,所给级数乘积为 1.

6. 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b^n}{n!}$ 绝对收敛，且它们的乘积等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(a+b)^n}{n!}$

证　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\Big/\dfrac{|a|^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|}{n+1}=0$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|a|^n}{n!}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ 绝对收敛. 同理 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b^n}{n!}$ 也绝对收敛.

按对角线顺序，其乘积的各项为：

$$C_0=1=\frac{(a+b)^0}{0!}$$

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k}$$
$$=\frac{(a+b)^n}{n!}(n=1,2,\cdots)$$

所以，乘积为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(a+b)^n}{n!}$

7. 重排级数 $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$，使它成为发散级数.

解　因 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}$ 为发散的正项级数，从而存在 $n_1$ 使得

$$C_1=\sum_{k=1}^{n_1}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}>1,$$

又 $\sum\limits_{k=n_1+1}^{\infty}\dfrac{1}{2k-1}$ 也发散，从而存在 $n_2>n_1$，使

$$C_2=\sum_{k=n_1+1}^{n_2}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}>1$$

又 $\sum\limits_{k=n_2+1}^{\infty}\dfrac{1}{2k-1}$ 也发散，从而存在 $n_3>n_2$ 使

$$C_3=\sum_{k=n_2+1}^{n_3}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{6}>1$$

一般地,存在 $n_{i+1} > n_i$ 使

$$C_{i+1} = \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(i+1)} > 1$$

这样得到原级数的一个重排

$$\sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4} + \sum_{k=n_2+1}^{n_3} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{6} + \cdots +$$

$$\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(i+1)} + \cdots$$

它必发散,因为加括号后得到的级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ 发散.

8. 证明:级数 $\sum \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

证　记 $A_L = \{n \mid [\sqrt{n}] = L\}, L = 1,2,\cdots$

显然 $A_L$ 中元素 $n$ 满足 $L^2 \leqslant n < (L+1)^2$,且 $A_L$ 中元素个数为 $2L+1$.

考虑　$U_L = \sum\limits_{n \in A_L} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$,则有

$$U_L = \sum_{n \in A_L} \frac{(-1)^L}{n} = (-1)^L V_L$$

其中　$V_L = \sum\limits_{n \in A_L} \dfrac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
V_L - V_{L-1} &= \sum_{s=0}^{2L} \frac{1}{L^2+s} - \sum_{s=0}^{2(L+1)} \frac{1}{(L+1)^2+s} \\
&= \sum_{s=0}^{2L} \frac{2L+1}{(L^2+s)[(L+1)^2+s]} \\
&\quad - \frac{1}{(L+1)^2+2L+1} - \frac{1}{(L+1)^2+2L+2} \\
&\geqslant \sum_{s=0}^{2L} \frac{2L+1}{[(L+1)^2+2L]^2} - \frac{2}{(L+1)^2+2L}
\end{aligned}$$

$$=\frac{2L\cdot(2L+1)-2[(L+1)^2+2L]}{[(L+1)^2+2L]^2}$$
$$=\frac{2[2L^2+L-L^2-2L-1-2L]}{[(L+1)^2+2L]^2}$$
$$=\frac{2(L^2-3L-1)}{[(L+1)^2+2L]^2}>0(当\ L\geqslant 4\ 时)$$

因此,当 $L\geqslant 4$ 时,$\{U_L\}$ 是单调下降数列.

当 $n\in A_L$ 时,$\frac{1}{(L+1)^2}<\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{L^2}$,

故 $\quad\frac{2L+1}{(L+1)^2}<V_L\leqslant\frac{2L+1}{L^2}$.

可见,$L\to\infty$ 时,$V_L\to 0$. 从而 $\sum\limits_{L=1}^{\infty}U_L=\sum\limits_{L=1}^{\infty}(-1)^L V_L$ 收敛.

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的部分和为 $S_N$,记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 $U_M$,则 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$,$U_M=\sum\limits_{n=1}^{m}u_n$

那么任一个 $S_N$ 均被包含在某相邻两个部分和 $U_M$,$U_{M+1}$ 之间,即有

$$|S_N-U_M|\leqslant|U_{M+1}-U_M|$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,故,

$U_{M+1}-U_M=u_{M+1}\to 0(M\to+\infty)$

因此 $S_N-U_M\to 0(N\to+\infty)$

即 $S_N$ 的极限存在,为 $\lim\limits_{M\to 0}U_M=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. 因此,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1^{[\sqrt{n}]})}{n}$ 收敛.

## 总 练 习 题

1. 证明:若正项级数 $\sum u_n$ 收敛,且数列 $\{u_n\}$ 单调,则 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=0$.

证　由已知，$\{u_n\}$ 必单调递减，又 $\sum u_n$ 收敛. 由柯西准则知：任给 $\varepsilon>0$，存在 $N$，对 $n>N$ 有

$$0<a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_n<\frac{\varepsilon}{2}$$

又当 $n>N$ 时，$a_{N+i}\geqslant a_n, i=1,2,\cdots,n-N$，从而 $n>N$ 时，

$$0<(n-N)a_n\leqslant a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_n<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $n>2N$，则 $0<\frac{n}{2}a_n\leqslant(n-N)a_n<\frac{\varepsilon}{2}$，因而 $0<na_n<\varepsilon(n>2N)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

2. 若级数 $\sum a_n$ 与 $\sum c_n$ 都收敛，且成立不等式

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$$

证明级数 $\sum b_n$ 也收敛，若级数 $\sum a_n$，$\sum c_n$ 都发散，试问 $\sum b_n$ 一定发散吗？

证　由 $\sum a_n$ 与 $\sum c_n$ 收敛知，$\sum(c_n-a_n)$ 收敛，又

$$0\leqslant b_n-a_n\leqslant c_n-a_n(n=1,2,\cdots)$$

由比较原则 $\sum(b_n-a_n)$ 也收敛，于是由

$$\sum b_n=\sum[(b_n-a_n)+a_n]$$

知 $\sum b_n$ 也收敛.

但 $\sum a_n$，$\sum c_n$ 都发散时 $\sum b_n$ 不一定发散，例 $\sum a_n=\sum(-\frac{1}{n})$. $\sum c_n=\sum\frac{1}{n}$ 都发散，而 $\sum b_n=\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，且 $a_n<b_n<c_n$，$n=1,2,\cdots$

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq0$，且级数 $\sum|b_n|$ 收敛，证明级数 $\sum a_n$ 也收敛. 若上述条件中只知道 $\sum b_n$ 收敛，能推得 $\sum a_n$ 收敛吗？

证　由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}=|k|>0$，根据比较原则级数 $\sum|a_n|$ 收敛，从而 $\sum a_n$ 收敛.

若只知道$\sum b_n$收敛,则$\sum a_n$不一定收敛.例取$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$,$b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,则$\frac{a_n}{b_n}=[1+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}]\to 1\neq 0(n\to\infty)$而$\sum b_n=\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛,$\sum a_n=\sum(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n})$却发散.

4.(1) 设$\sum u_n$为正项级数,且$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$,能否断定级数$\sum u_n$收敛?

(2) 对于级数$\sum u_n$有$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geqslant 1$,能否断定级数$\sum u_n$不绝对收敛,但可能条件收敛.

(3) 设$\sum u_n$为收敛的正项级数,能否存在一个正数$\varepsilon$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=C>0$$

解　(1) 否.例设$u_n=\frac{1}{n}$,则$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}<1$,但$\sum u_n$发散.

(2) 否.由$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geqslant 1$得$|u_{n+1}|\geqslant|u_n|\geqslant|u_1|>0$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}|u_{n+1}|\neq 0$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}\neq 0$,故$\sum u_n$发散.

(3) 不一定.如$\sum\frac{1}{n^n}$收敛,但对任何$\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{n-1-\varepsilon}}=0.$$

5.证明:若级数$\sum a_n$收敛,$\sum(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛,则级数$\sum a_nb_n$也收敛.

证　由$\sum a_n$收敛知:任给$\varepsilon>0$,存在$N_1$,使当$n>N_1$,及任何自然数$p$,都有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$$

又 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛，对上述 ε，存在 $N_2$，当 $n>N_2$ 时，对任何自然数 $p$，都有

$$\sum_{k=n}^{n+p}|b_{k+1}-b_k|<\varepsilon$$

而由 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 收敛知：其部分和数列

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1$$

有界，即 $|b_n|<M(n=1,2,\cdots)$

由阿贝尔变换知：当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时，对任何自然数 $p$，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_nb_n\right| &= \left|(b_nb_{n+1})a_n+(b_{n+1}-b_{n+2})\sum_{k=n}^{n+1}a_k+\cdots+(b_{n+p-1}\right.\\ &\qquad \left.-b_{n+p})\sum_{k=n}^{n+p-1}a_k+b_{n+p}\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|\\ &\leqslant |b_n-b_{n+1}||a_n|+|b_{n+1}-b_{n+2}|\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|+\cdots\\ &\qquad +|b_{n+p-1}-b_{n+p}|\left|\sum_{k=n}^{n+p-1}a_k\right|+|b_{n+p}|\cdot\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|\\ &\leqslant\left(\sum_{k=n}^{n+p-1}|b_{k+1}-b_k|\right)\varepsilon+M\varepsilon\leqslant(\varepsilon+M)\varepsilon\end{aligned}$$

根据柯西准则，级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

6. 设 $a_n>0$，证明级数 $\sum\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 收敛.

证　此级数是正项级数，且部分和

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(a+a_k)}\right]\end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1 + a_1)\cdots(1 + a_n)} < 1$$

可见$\{S_r\}$有界，故原级数收敛.

7. 证明：若级数 $\sum a_n^2$ 与 $\sum b_n^2$ 收敛，则级数 $\sum a_n b_n$ 和 $\sum (a_n + b_n)^2$ 也收敛，且

$$(\sum a_n b_n)^2 \leqslant \sum a_n^2 \cdot \sum b_n^2$$

$$((\sum a_n + b_n)^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\sum a_n^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum b_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

证　因为 $| a_n b_n | \leqslant \frac{(a_n^2 + b_n^2)}{2}$，且 $\sum a_n^2$，$\sum b_n^2$ 均收敛，故 $\sum | a_n b_n |$ 收敛.从而 $\sum a_n b_n$ 收敛，同时

$$\sum (a_n + b_n)^2 = (\sum a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2)$$

也收敛.

在柯西——旋瓦兹不等式

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

和明可夫斯基不等式：

$$(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

中令 $n \to \infty$ 取极限，便得所要证明的不等式.