第 19 讲 Laurent 级数

取 $0 \le r < R \le +\infty$, 定义环域 $A(r,R) = \{z : r < |z| < R\}$.

1. 求下列函数在指定区域的 Laurent 展式:

(1). $\sin\left(\frac{z}{1-z}\right)$, $\Omega = \{0 < |z-1| < +\infty\}$.

(2). $\sqrt{z^2-1}$, $\sqrt{1} = 1$, $\Omega = \{1 < |z| < +\infty\}$.

2. 全纯函数 $f : A(r,R) \to \mathbb{C}$ 如果为偶函数 (奇函数), 证明 Laurent 展式中只有偶 (奇) 次项.

3. 假设 $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ 在 $\overline{A(r,R)}$ 上全纯，且将圆环 $A(r,R)$ 双全纯映到区域 Ω, 保持内外边界对应.

(1). 证明 Ω 的面积

$$S = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 (R^{2n} - r^{2n}).$$

(2). 记象曲线 $f(\{|z| = \rho\})$ 围成的区域面积为 $S(\rho)$, $\rho \in (r,R)$. 定义函数 $\psi(\rho) = S(\rho)/\rho^2$, $\rho \in (r,R)$. 证明 ψ 要么严格递增，要么是常值函数. 若 ψ 为常值函数，f 具有什么样的形式?

4. 将函数 $f(z) = \exp\left(\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ 在 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ 上展成 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(\lambda) z^n.$$

证明系数满足如下的 Schlömilch 公式

$$a_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda\sin\theta - n\theta)} d\theta.$$

(注: 此系数为 n 阶 Bessel 函数.)

5. 下列函数有哪些奇点? 指出其类别.

$$\frac{1}{\sin z - \cos z}, \quad \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z - 1}.$$