

一、假设 A, B 和 C 是三个事件，其中 A 和 B 是互不相交事件； A 和 C 是独立事件； B 和 C 是独立事件。如果

$$4P(A) = 2P(B) = P(C) > 0$$

并且

$$P(A \cup B \cup C) = 5P(A)$$

求 $P(A) = ?$

二、某家庭有 n ($n \geq 2$) 个孩子，假设生男孩和女孩的概率各为 $\frac{1}{2}$ ，并且相互独立。已知某家庭至少有1个女孩，求该家庭至少有一个男孩的概率？

三、假设某随机变量只取四个值： $-2, 0, 1, 4$ 。概率如下：

$$P(X = -2) = 0.4, \quad P(X = 0) = 0.1, \quad P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 4) = 0.2$$

写出分布函数。

四、假设 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4 - 2x - y), & x > 0, y > 0, 2x + y < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求(a) 给定 $X = x$ 下， Y 的条件密度？(b) $P(Y \geq 2 | X = 0.5) = ?$

五、 (X, Y) 的联合概率分布为

$$\begin{aligned} p(1, 1) &= \frac{1}{9}, & p(2, 1) &= \frac{1}{3}, & p(3, 1) &= \frac{1}{9} \\ p(1, 2) &= \frac{1}{9}, & p(2, 2) &= 0, & p(3, 2) &= \frac{1}{18} \\ p(1, 3) &= 0, & p(2, 3) &= \frac{1}{6}, & p(3, 3) &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

计算： $E(X | Y = i)$, $i = 1, 2, 3$ 。

六、环保工程师检测某地水污染，认为含有砷和铅两种污染物。两种污染物含量 X 和 Y 相互独立。该工程师对铅的含量比例感兴趣，想知道 $R = \frac{Y}{X+Y}$ 的平均值 ER 。进行测量 n 次，获取样本值 (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ 。样本均值 $\bar{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$ 。问：如果我们想 $|\bar{R}_n - ER| \leq 0.005$ 的概率不小于0.98，至少需要测量多少次？

(1) 用Chebyshev 不等式：

$$P(|\bar{R}_n - ER| > 0.005) \leq \frac{\text{Var}(\bar{R}_n)}{0.005^2}$$

$$n > 2,000,000$$

(2) 用正态逼近

$$\begin{aligned} P(|\bar{R}_n - ER| < 0.005) &\approx \Phi\left(\frac{0.005}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.005}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &\geq \Phi\left(\frac{0.005}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.005}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= 2\Phi(0.005\sqrt{n}) - 1 = 0.98 \end{aligned}$$

$$n = \frac{1}{0.005^2} \Phi^{-1}(0.99)^2 = 40,000 \times 2.326^2 = 216,411$$