第 27 讲 Riemann 映射定理

回忆: Riemann **映射定理：假设** $D \neq \mathbb{C}$ **为平面上的单连通区域**, **任取** $a \in D$, **存在唯一的双全纯映射** $f: D \to \mathbb{D}$, **满足** $f(a)=0, f'(a)>0$. (称 $\frac{1}{f'(a)}$ 为 D 在 a 处的映射半径, 记为 $R_D(a)$).

1. 记 $\mathcal{F}$ 为所有全纯函数 $g: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 的全体, $a \in \mathbb{D}$. 令 $v = \sup_{g \in \mathcal{F}} |g'(a)|$.

(1). 求 v 的值.

(2). 满足 $|f'(a)| = v$ 的 $f \in \mathcal{F}$ 具有什么样的形式?

(3). 是否存在 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 满足 $|f'(a)| < v$?

2. 假设 $D \neq \mathbb{C}$ 为平面上的单连通区域, $a \in D$. 假设 $f: D \to D$ 全纯, 满足 $f(a) = a$. 证明 $|f'(a)| \leq 1$. 等号成立的充要条件是什么?

3. 假设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是异于平面的单连通域. D 是平面区域, 证明函数族 $\mathcal{F} = \{f: D \to \Omega \text{ 全纯}\}$ 是正规族.

4. 假设 $D \neq \mathbb{C}$ 为平面上的单连通区域, 关于实轴对称, $a \in D \cap \mathbb{R}$. 假设 $f: D \to \mathbb{D}$ 双全纯, 满足 $f(a) \in \mathbb{R}, f'(a) > 0$. 证明 $f(D \cap \mathbb{R}) = (-1, 1)$.

5. 假设 $D \neq \mathbb{C}$ 为平面上的有界单连通区域, $f: D \to \mathbb{D}$ 双全纯, 满足 $f(a) = 0, f'(a) > 0$, 证明

$$d(a, \partial D) \leq R_D(a) \leq \max_{z \in \partial D} |z - a|.$$

6. 假设 $D \neq \mathbb{C}$ 为平面上的单连通区域,$a \in D$. 假设 $F: D \to \mathbb{C}$ 全纯, $F(a) = 0, F'(a) = 1$. 证明

$$\int_D |F'(z)|^2 dxdy \geq \pi R_D^2(a).$$

等号成立当且仅当 F 是从 D 到 $D(0, R_D(a))$ 的双全纯映射.

附加题 (不做要求)

请将解答发至 wxg688@163.com. 无截止日期.

问题 2.11. 在 Riemann 映射定理的证明中, 开根号的映射改为取 Log 单值支映射, 证明还成立吗? 说明理由.