浙江大学2015——2016学年秋冬学期
《常微分方程》课程期末考试试卷

考试日期：2016 年 1 月 14 日,考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________ 学号：__________ 所属院系：__________

一. 求下列方程的通解（10分）

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y)dy = 0.$$

二.（20分）

1.求下列方程组的通解

$$\begin{cases} x' = -n^2 y + \cos(nt), \\ y' = -n^2 x + \sin(nt), \end{cases}$$

其中n是一个给定的正整数。

2. 考虑如下三阶齐次线性常微分方程

$$xy''' + (3+4x)y'' + (4x+8)y' + 4y = 0, \ x > 1.$$

已知方程有一解$y_1 = 1/x$，求方程的通解。进一步，判断零解的李雅普诺夫稳定性。

三.（10分）讨论下面方程组零解的李雅普诺夫稳定性

$$(1)\begin{cases} x' = 4y + 2x \\ y' = -2x + y^3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x' = -x^2 y + y^3 \\ y' = -2x^3 + xy^2 \end{cases}$$

四. (10分) 判断平衡点的类型并画出相图的草图$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$

五.（10分）对于以$(0,0)$为平衡点（奇点）的系统$\begin{cases} x' = x - y(1-y) \\ y' = 2x + 4y - \sin y \end{cases}$，

(1) 写出相应的线性化系统

(2) 判断该线性化系统平衡点的类型并画出相图的草图

六(10分). 设$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$在区间$(a,b)$连续，$X_j(t) = \begin{pmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{pmatrix}$ $(j = 1,2)$ 是2阶齐次线性方程组$X' = A(t)X$的两个解, $W(t) = \left| \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix} \right|$. 叙述并证明关于$W(t)$的刘维尔(Liouville)公式。

七(20分). 设$f(x,y)$在$[0,2]\times\mathbb{R}$有界连续，$y=\phi(x)$ $(x\in[0,1])$ 是方程

$$y' = f(x,y), y(0) = 0 \ ,$$

的一个解。设$[0,1]$区间上的连续可微函数$w(x)$满足$w(0)=0$且

(*) $$w' > f(x,w), \forall x \in [0,1].$$

(1) 问能否判断$\phi(x) < w(x)$, $\forall x \in (0,1]$, 并给出充足理由(证明或者举例)；

(2) 如果(*)式仅在$x \in (0,1]$成立，判断并给出充足理由；

(3) 第2问中如果已知f连续可微，判断并给出充足理由。

(若需要，可直接接用Peano或者Picard定理)

八(10分). 判断是否存在一个$[1,\infty)$上的连续可微函数$F(t)$使得

$$F'(t) \ge t^{-2} F^3(t), F(t) \ge t, \forall t \ge 1$$

(1) 如果存在请举例或给出证明

(2) 如果不存在，给出证明