第6周讨论班例题

2018 年 11 月 27 日

1.设$f(x)$在$(0,1)$上有定义,且函数$\mathrm{e}^x f(x)$与$\mathrm{e}^{-f(x)}$在$(0,1)$上都是单调不减的,证明:$f(x)$在$(0,1)$上连续.

2.证明:若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则函数$m(x)=\inf_{a\le t\le x} f(t)$与函数$M(x)=\sup_{a\le t\le x} f(t)$在$[a,b]$上也连续.

3.设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续,且$\forall x>0, \lim_{n\to+\infty} f(x+n)=0$,证明:$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

4.设函数$f(x)$在(a,b)内有定义,具有介值性质,即$\forall x_1,x_2\in(a,b)$,不妨设$f(x_1)\le f(x_2)$,则$\forall c\in[(x_1),f(x_2)]$,存在$\xi\in[x_1,x_2]$,使得$f(\xi)=c$,并且是一对一的.试证明:

(1)$f(x)$是严格单调的,值域为某个开区间J;

(2)$f^{-1}(y)$在J内单调,而且也有介值性;

(3)$f(x), f^{-1}(y)$连续.

5.设$f:[0,1]\to[0,1]$为连续函数,$f(0)=0, f(1)=1, f(f(x))=x$.试证$f(x)=x$.

6.设f是从$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的一对一连续映射,有不动点,又满足$f(2x-f(x))=x, \forall x\in\mathbb{R}$.证明:$f(x)=x$.

思考题.设$f(x)$在$\mathbb{R}$上一致连续,则存在非负实数a,b,使对于一切$x\in(-\infty,+\infty)$,都有$|f(x)|\le a|x|+b$.