浙江大学2018-2019学年春夏学期

《高等代数II》第一次测验参考答案

评分细则：

（1）考生答案与参考答案思路一致时，按照评分标准给分；

（2）考生答案与参考答案思路不一致时，答案正确且过程合理的给满分；

（3）考生答案与参考答案思路不一致时，答案错误或过程不合理的酌情给分。

1、（12分） 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，$\det A=-1$，$A$的转置矩阵$A^T$有一个特征值$\lambda_0$，且属于$\lambda_0$的一个特征向量为$(-1,-1,1)^T$，求$a,b,c$及$\lambda_0$的值。

解答： 根据题意，$A^T=\begin{pmatrix} a & 5 & 1-c \\ -1 & b & 0 \\ c & 3 & -a \end{pmatrix}$，且$A^T(-1,-1,1)^T=\lambda_0(-1,-1,1)^T$，得到线性方程组$\begin{cases} -a-5+1-c=-\lambda_0 \\ 1-b=-\lambda_0 \\ -c-3-a=\lambda_0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a+c=-\frac{7}{2} \\ b=\frac{3}{2} \\ \lambda_0=\frac{1}{2} \end{cases}$，再结合$\det A=-a^2b-5a+bc^2-bc+3c-3=-1$，解得$\begin{cases} a=-\frac{89}{32} \\ c=-\frac{23}{32} \end{cases}$。

评分： 每个值的计算各占3分。

2、（10分） 设$A\in M_n(\mathbb{F})$有两个不同的特征值λ_1,λ_2，且$\dim E_{\lambda_1}=n-1$，证明：

A可对角化。

解答：由于$\lambda_1 \neq \lambda_2$，故$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$，注意到$\dim E_{\lambda_2} \geq 1$，故

$$n \geq \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} \geq n - 1 + 1 = n$$

于是$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = n$，故$A$可对角化。

评分：不同特征值的应用占3分、$\dim E_{\lambda_2}$的估计占3分、$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2}$的估计占4分。

3、（12分）设V是次数≤ 2的实多项式线性空间，$\mathcal{T} \in L(V)$定义如下：

$$\mathcal{T}(f(x)) = f(x) + xf'(x)$$

求$\mathcal{T}$的特征值，对于每个特征值，求属于它的特征空间。

解答：取V的标准基$\beta = \left\{1, x, x^2\right\}$，由于$\begin{cases} \mathcal{T}(1) = 1 \\ \mathcal{T}(x) = 2x \\ \mathcal{T}(x^2) = 3x^2 \end{cases}$，故$\mathcal{T}$的特征值分别是$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$，对应的特征向量分别是$\xi_1 = 1, \xi_2 = x, \xi_3 = x^2$，对应的特征空间分别是$E_1 = \operatorname{span}\{1\}, E_2 = \operatorname{span}\{x\}, E_3 = \operatorname{span}\left\{x^2\right\}$。

评分：取基占3分、3个特征值占3分、3个特征向量占3分、3个特征空间占3分。

4、（12分）设A, B, C都是n阶矩阵，A, B各有n个不同的特征值，又$f(x)$是A的特征多项式，且$f(B)$是非异阵，证明：矩阵$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$相似于对角阵。

解答：设A的特征值为$a_1, a_2, \cdots, a_n$，B的特征值为$b_1, b_2, \cdots, b_n$，令$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$，利用Laplace定理计算$M$的特征多项式

$$|\lambda I_{2n} - M| = |\lambda I_n - A||\lambda I_n - B|$$

于是，M的全部特征值为$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$。设$f(x)$是$A$的特征多项式，那么$f(B)$的特征值为$f(b_1), f(b_2), \cdots, f(b_n)$，由于$f(B)$是非异阵，故$f(b_i) \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$，这表明$b_i$不是$f(x)$的根，故$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$互不相同，即$M$有$2n$个不同的特征值，从而$M$相似于对角阵。

评分： 计算M的特征值占3分、计算$f(B)$的特征值占3分、b_i不是$f(x)$的根占3分、特征值互不相同推出相似对角化占3分。

5、（15分） 设$\sigma : V \to V$是有限维线性空间V上的一个同构映射，记$E(\sigma;\lambda)$为σ的属于特征值λ的特征子空间。

（1）若λ是σ的特征值，证明：$\lambda \neq 0$；

（2）若λ是σ的特征值，证明：$E(\sigma;\lambda) = E(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$；

（3）证明σ可对角化的充要条件是σ^{-1}可对角化。

解答：

（1）设β是V的一组基，$[\sigma]_\beta$是σ在β下的矩阵表示，由于σ是同构映射，从而它是可逆映射，于是$[\sigma]_\beta$是可逆矩阵。如果0是σ的特征值，那么$\det[\sigma]_\beta = 0$，这与$[\sigma]_\beta$是可逆矩阵，矛盾。

（2）一方面，任取$\alpha \in E(\sigma;\lambda)$，则$\sigma(\alpha) = \lambda\alpha$，由于$\sigma$是同构映射，从而它是可逆映射，记它的逆为$\sigma^{-1}$，于是$\sigma^{-1}\sigma(\alpha) = \sigma^{-1}(\lambda\alpha)$，从而$\alpha = \lambda\sigma^{-1}(\alpha)$，根据（1），$\lambda \neq 0$，于是$\sigma^{-1}(\alpha) = \lambda^{-1}\alpha$，这表明$\alpha \in E(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$，故$E(\sigma;\lambda) \subseteq E(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$；另一方面，任取$\beta \in E(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$，则$\sigma^{-1}(\beta) = \lambda^{-1}\beta$，于是$\sigma\sigma^{-1}(\beta) = \sigma(\lambda^{-1}\beta)$，从而$\beta = \lambda^{-1}\sigma(\beta)$，于是$\sigma(\beta) = \lambda\beta$，这表明$\beta \in E(\sigma;\lambda)$，故$E(\sigma^{-1};\lambda^{-1}) \subseteq E(\sigma;\lambda)$。综上所述，$E(\sigma;\lambda) = E(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$。

（3）必要性。设β是V的一组基，$[\sigma]_\beta$与$[\sigma^{-1}]_\beta$分别是σ与σ^{-1}在β下的矩阵表示，由于σ可对角化，故存在可逆矩阵P_1，使得$P_1^{-1}[\sigma]_\beta P_1 = D_1$为对角阵，这表明$P_1^{-1}[\sigma]_\beta^{-1}P_1 = D_1^{-1}$也是对角阵，注意到$[\sigma]_\beta^{-1} = [\sigma^{-1}]_\beta$，于是$\sigma^{-1}$可对角化。

充分性。由于σ^{-1}可对角化，故存在可逆矩阵P_2，使得$P_2^{-1}[\sigma^{-1}]_\beta P_2 = D_2$为对角阵，这表明$P_2^{-1}[\sigma^{-1}]_\beta^{-1}P_2 = D_2^{-1}$也是对角阵，注意到$[\sigma^{-1}]_\beta^{-1} = [\sigma]_\beta$，于是$\sigma$可对角化。

评分： 第（1）题占3分、第（2）题与第（3）题的两个部分各占3分。

6、（13分） 设X和Y分别是$n \times m$矩阵和$m \times n$矩阵，满足$YX = I_m$，令$A = I_n + XY$，证明：A一定相似于对角阵。

解答： 由于$A=I_n+XY$，那么$A-I_n=XY$；由于$YX=I_m$，那么$(A-I_n)^2=XY$，于是$(A-I_n)^2=A-I_n$。令$B=A-I_n$，故$B^2=B$，取一n维线性空间V以及V的一组基$\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$，定义线性变换$\mathcal{B}$如下：

$$\mathcal{B}(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)B$$

由$B^2=B$，可知B的特征值为0或1，且$\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$，我们取$\mathrm{Im}\mathcal{B}$的一组基$\eta_1,\cdots,\eta_r$，由$\mathcal{B}\eta_i=\eta_i(i=1,\cdots,r)$，它们的原像也是$\eta_1,\cdots,\eta_r$，再取$\ker\mathcal{B}$的一组基$\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$，由于对于有限维线性空间的线性变换，它是单射的充分必要条件为它是满射，于是$\eta_1,\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$是$V$的基，在这组基下$\mathcal{B}$的矩阵是$\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,0,\cdots,0\}$，故$B$与对角矩阵相似，即存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}BP=C$，其中$C$是对角矩阵，于是$P^{-1}(A-I_n)P=C$，即$P^{-1}AP=I_n+C$也是对角矩阵，$A$相似于对角矩阵。

评分： B的构造占5分、计算B的特征值占4分、证明B可对角化占4分。

7、（11分） 设A是n阶矩阵，$A=(a_{ij})$，若对于任意的$i=1,2,\cdots,n$有$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，则称$A$是严格对角占优阵，证明：严格对角占优阵的特征值不等于零，从而A是非异阵。

解答： 设r是A的特征值，对应特征向量为$X=(x_1,\cdots,x_n)'$，即$AX=rX$，写成元素求和的形式，得到$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=rx_i$，其中$i=1,\cdots,n$，进一步，我们有$x_k(r-a_{kk})=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_{kj}x_j$，其中$|x_k|=\max\limits_i|x_i|$，由于$X\neq 0$，故$|x_k|\neq 0$，根据三角不等式

$$|x_k||r-a_{kk}|=\left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_{kj}x_j\right|\leq\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}||x_j|\leq|x_k|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}|a_{kj}|$$

令$i=k$，得到$|r-a_{ii}|\leq\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$，如果$r=0$，则与$a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$矛盾，故严格对角占优阵的特征值不等于零。

评分： 元素求和形式占4分、三角不等式估计占4分、得到矛盾点占3分。

8、（15分） 设矩阵A,B为n阶复矩阵，当它们可交换时，它们可被同时相似化，即：存在可逆阵P，使PAP^{-1}和PBP^{-1}同时为上三角阵，若交换性条件改为：存在非

零常数c，使$AB=cBA$，类似结论是否成立？需说明理由。

解答：将矩阵A,B看成n维线性空间V中的线性变换$\mathcal{A},\mathcal{B}$分别在一组基下的的矩阵表示。

（1）当$n=1$时，$A=a$，$B=b$，则对任意1阶可逆矩阵P，$P^{-1}AP=a,P^{-1}BP=b$，它们都是上三角阵，由于$ab=cba$，故$a=0$或$b=0$。

（2）当$n>1$时，由于A,B是n阶复矩阵，根据代数基本定理，$\mathcal{A},\mathcal{B}$至少有一个复特征值，设λ是$\mathcal{A}$的一个复特征值，μ是$\mathcal{B}$的一个复特征值，E_λ是属于特征值λ的特征子空间，E_μ是属于特征值μ的特征子空间。

（2.1）当$\lambda=0$时，若$\alpha\in E_\lambda$，那么

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)=\mathcal{A}\mathcal{B}(\alpha)=c\mathcal{B}\mathcal{A}(\alpha)=c\mathcal{B}(\mathcal{A}\alpha)=c\mathcal{B}(\lambda\alpha)=c\lambda(\mathcal{B}\alpha)$$

故$\mathcal{B}\alpha\in E_\lambda$，因此$E_\lambda$是$\mathcal{B}$的不变子空间。于是，$\mathcal{A},\mathcal{B}$有公共的特征向量，记为$\xi_1$。不失一般性，设$\mathcal{B}\xi_1=\mu\xi_1$。将$\xi_1$扩为$V$的一组基$\xi_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$。

令$Q=(\xi_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$。设$\mathcal{A},\mathcal{B}$在这组基下的矩阵分别是

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 0 & * \\ & A_1 \end{pmatrix},Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} \mu & * \\ & B_1 \end{pmatrix}$$

由于$AB=cBA$，故$Q^{-1}AQQ^{-1}BQ=cQ^{-1}BQQ^{-1}AQ$，可知$A_1B_1=cB_1A_1$。

（2.2）当$\mu=0$时，若$\beta\in E_\mu$，那么

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}\beta)=\frac{1}{c}\mathcal{A}\mathcal{B}(\beta)=\frac{1}{c}\mathcal{A}\mathcal{B}(\beta)=\frac{1}{c}\mathcal{A}(\mathcal{B}\beta)=\frac{1}{c}\mathcal{A}(\mu\beta)=\frac{\mu}{c}(\mathcal{A}\beta)$$

故$\mathcal{A}\beta\in E_\mu$，因此$E_\mu$是$\mathcal{A}$的不变子空间。于是，$\mathcal{A},\mathcal{B}$有公共的特征向量，记为$\xi_1$。不失一般性，设$\mathcal{A}\xi_1=\lambda\xi_1$。将$\xi_1$扩为$V$的一组基$\xi_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$。

令$Q=(\xi_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$。设$\mathcal{A},\mathcal{B}$在这组基下的矩阵分别是

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \lambda & * \\ & A_1 \end{pmatrix},Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} 0 & * \\ & B_1 \end{pmatrix}$$

由于$AB = cBA$，故$Q^{-1}AQQ^{-1}BQ = cQ^{-1}BQQ^{-1}AQ$，可知$A_1B_1 = cB_1A_1$。

（2.3）当$\lambda \neq 0$且$\mu \neq 0$时，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$没有公共的特征向量，从而无法同时相似化。

（3）对$A_i, B_i(i = 1, \cdots, n-1)$仿照上述分析过程，可以得到同时相似化的条件，特别注意由于A_{n-1}与B_{n-1}已是1阶矩阵，根据（1）结论自然成立。

（4）综上所述，若A, B的特征值为0的代数重数之和$\geq n$，则A, B可以同时相似化。

评分： 对$n = 1$时分析A, B各占1分、对E_λ应用条件以及扩基各占2分、对E_μ应用条件以及扩基各占2分、对公共特征向量存在的分析占1分、将分析方法应用至高维占1分、给出成立的条件占2分。

编写：Castelu