解 析 几 何

October 12, 2019

第18页习题:

3. 解:

(2). $-\frac{3}{2}$.

(4) 由已知可得

$$(\vec{a}+3\vec{c})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=7\vec{a}^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\vec{b}^2=0$$

$$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7\vec{a}^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{b}^2=0$$

联立即得

$$\vec{a}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$$

从而$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$

(5) 直接计算得$\vec{a}\cdot\vec{b}=8+3-4=7, |\vec{b}|=3$, 即得$\vec{a}$在$\vec{b}$上的摄影为 $\frac{7}{3}$.

4.

$$\vec{a}\cdot[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b}\vec{c})]=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})=0.$$

$$\vec{a}\cdot[\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}]=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

5-(1). 证明: 设 D,E,F 分别为三角形ABC中BC,CA,AB的中点, 记

$$\vec{a}=\overrightarrow{BC},\vec{b}=\overrightarrow{CA},\vec{c}=\overrightarrow{AB}$$

则有

$$\overrightarrow{AD}=\vec{c}+\frac{\vec{a}}{2},\ \overrightarrow{BE}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{CF}=\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}$$

可得

$$|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BE}|^2+|\overrightarrow{CF}|^2=\frac{5}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)+(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})$$

利用$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 得

$$\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=0$$

从而

$$|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BE}|^2+|\overrightarrow{CF}|^2=\frac{3}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)$$

5-(5). 不妨设 E,F 分别为AC,BD的中点, 并记

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{CD},\vec{d}=\overrightarrow{DA}$$

则有

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},\ B\vec{D}=\vec{b}+\vec{c},$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\vec{a}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

得

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=&(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}+\vec{c})^2+(\vec{b}+\vec{c})^2\\=&(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)+(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c})\\=&\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2\\=&\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2\end{aligned}$$

(这里用到了$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.)

6. 证明: 设 $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$, 那么

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}\\=&-\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}-(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{b}\\=&\ 0.\end{aligned}$$

7. 解: 采用正交标架 $\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$.

(1). $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3}$.

(2). $\angle A=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\angle B=\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\angle C=\arccos\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

(3). $\left|\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=\frac{\sqrt{19}}{2}$, $\left|\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right|=\frac{1}{2}$, $\left|\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right|=\frac{\sqrt{22}}{2}$.

(4). 设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$, 其中 $\lambda>0$. 所以 $D=\lambda\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

因为存在 μ 使得 $\overrightarrow{BD}=\mu\overrightarrow{BC}$, 所以有

$$\left(\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3}\lambda+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}-1,\frac{2}{3}\lambda+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}-1\right)=\mu\left(1,1,1\right).$$

解得 $\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$. 所以

$$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}},\frac{2\sqrt{2}+3}{3+\sqrt{2}},\frac{2\sqrt{2}+3}{3+\sqrt{2}}\right).$$

方向余弦为

$$(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}},\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}},\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}})$$

(5). 因为 $I\in\overline{AD}$, 可设 $I=t\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}+3,2\sqrt{2}+3\right)$, 其中 $t\in\mathbb{R}$. 因为存在常数 s 使得

$$\overrightarrow{BI}=s\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}+\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}\right),$$

所以有

$$\left(\sqrt{2}t,2\sqrt{2}t+3t-1,2\sqrt{2}t+3t-1\right)=s\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

由此可得 $t=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+3}$. 所以

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+3}\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}+3,2\sqrt{2}+3\right).$$

9. 证明: 设 $S\left(O;R\right)$ 为其外接圆. 由P8页习题6知，$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$, 所以有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}\right|=\left|n\overrightarrow{PO}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right|=n\left|\overrightarrow{PO}\right|=nR=\text{常数}.$$

第22页习题:

3-(2). 证明: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2\sin^2\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\leq\vec{a}^2\vec{b}^2$.

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$ 当且仅当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

3-(3).证明: 由矢量积对加法的分配律直接计算得

$$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\times\left(-\vec{b}-\vec{a}\right)=-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b},$$

$$\vec{c}\times\vec{a}=\left(-\vec{b}-\vec{a}\right)\times\vec{a}=-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}.$$

3-(5). 证明： 因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$， 所以由上题的结论知

$$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PA}.$$

又因为

$$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right|, S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PC}\right|,$$
$$S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}\right|,$$

所以知

$$S_{\triangle APB}=S_{\triangle APC}=S_{\triangle BPC}.$$

3-(6). 证明：将向量平移到共同的起点 O. 首先注意到他们的夹角和为 2π, 因此若三向量共线，那么 $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=0$，则要证明的式子显然成立.

因此知 $\vec{v}\perp\vec{a}$.

同样的计算可知 $\vec{v}\perp\vec{b}, \vec{v}\perp\vec{c}$. 因为 $\vec{v}$ 与 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，但$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共线，所以只能有 $\vec{v}=\vec{0}$.

方法二： 利用向量的模长.

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2 &= \sin^2\alpha|\vec{a}|^2+\sin^2\beta|\vec{b}|^2+\sin^2\gamma|\vec{c}|^2+2\sin\alpha\sin\beta\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &\quad+2\sin\beta\sin\gamma\vec{b}\cdot\vec{c}+2\sin\alpha\sin\gamma\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\\ &\quad+2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta+2\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha.\end{aligned}$$

由积化和差公式知

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta&=\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)=-\sin^2\alpha,\\ \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha&=\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)=-\sin^2\gamma,\\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha&=\sin\beta\sin(\alpha+\gamma)=-\sin^2\beta.\end{aligned}$$

结合上面的计算式知 $|\vec{v}|^2=0$. 所以$\vec{v}=\vec{0}$.

5. 证明： 由题知 $\overrightarrow{AC}=\vec{r}_3-\vec{r}_1$, $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$. 设 $\vec{n}=\vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_2\times\vec{r}_3+\vec{r}_3\times\vec{r}_1$, 那么有

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} &= \vec{r}_1\times\vec{r}_2\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)+\vec{r}_2\times\vec{r}_3\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)+\vec{r}_3\times\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)\\ &= \vec{r}_1\times\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3-\vec{r}_2\times\vec{r}_3\cdot\vec{r}_1\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned}
\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} &= \vec{r}_1\times\vec{r}_2\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\vec{r}_2\times\vec{r}_3\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\vec{r}_3\times\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\\
&= -\vec{r}_2\times\vec{r}_3\cdot\vec{r}_1+\vec{r}_3\times\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2\\
&= \vec{0}.
\end{aligned}$$

因此 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$, 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$, 所以 $\vec{n}\perp\triangle ABC$.

6. 证明： 此题有多种有趣的证明，几何法和代数法均有. 感兴趣的同学可在 Internet 上查询到. 这里写出利用余弦定理的证法. 因为

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

那么

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=\frac{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}{4b^2c^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}
\Delta^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A\\
&= \frac{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}{16}\\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}\\
&= p(p-a)(p-b)(p-c).
\end{aligned}$$

下面用向量法证明：

$$\text{令}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c},\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{b},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}$$

$$\text{则}\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0},\Rightarrow(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2=(\overrightarrow{c})^2$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{c}^2-\overrightarrow{a}^2-\overrightarrow{b}^2)$$

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=(\overrightarrow{a})^2(\overrightarrow{b})^2,\text{记}a,b,c\text{分别为}BC,AC,AB\text{的边长}$$

$$4S^2+\tfrac{1}{4}(c^2-a^2-b^2)^2=a^2b^2,\text{这里三角形的面积用}S\text{表示}$$

$$\Rightarrow 4s^2=a^2b^2-[\tfrac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)]^2$$

$$=[ab+\tfrac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)][ab-\tfrac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[c^2-(a-b)^2]frac12[(a+b)^2-c^2]$$

$$=\tfrac{1}{4}(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)$$

$$\text{利用}p=\tfrac{1}{2}(a+b+c),\text{即得结论}$$