2018-2019 春夏实变函数

1.已知$\mathcal{F}$是$\mathbb{R}$上实函数的集合，$\mathcal{A}$是$\mathbb{R}$的幂集，证明$\mathcal{F}$与$\mathcal{A}$等势。

2.设 E 是$\mathbb{R}$的一个子集，
(1)叙述 E 的 Lebesgue 外测度m^*E的定义；
(2)叙述 E 的 Lebesgue 测度mE的定义；
(3)设E_1, E_2是$\mathbb{R}$中的可测集，证明$mE_1 + mE_2 = m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2)$；
(4)设$\{E_k\}_{k=1}^n$是$[0,1]$中的可测集，满足$\sum_{k=1}^n mE_k > n-1$，证明$m\left(\bigcap_{k=1}^n E_k\right) > 0$。

3.设$\{f_n\}, f$是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数，
(1)叙述f_n在 E 上依测度收敛于f的定义；
(2)设$mE < \infty$，f_n几乎处处收敛于f，证明f_n依测度收敛于f；
(3)设$mE < \infty$，f_n依测度收敛于f，证明$\{f_n\}$有一个几乎处处收敛于f的子列。

4.设f是$\mathbb{R}$上的可积函数，且对于$\mathbb{R}$中任一开集 G 均有

$$\int_G f\,dm = 0$$

证明在$\mathbb{R}$上$f \sim 0$。

5.(1)叙述 Lebesgue 控制收敛定理；
(2)设$f(x), xf(x)$均是$\mathbb{R}$上的可积函数，证明

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(tx)\,dx = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\cos(tx)\,dx$$

6. (1)设f是$\mathbb{R}$上具有紧支集的连续函数，证明

$$\lim_{h\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} |f(x-h)+f(x)|\,dx = 2\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$$

注：f的支集$\mathrm{supp}(f)$为集合$\{x|f(x)\neq 0\}$的闭包；
(2)若$f \in L(\mathbb{R})$，则(1)的结论是否成立？说明理由。