

浙江大学2012年6月 常微分方程期终试卷

姓名: 专业: 学号: 考试时间:120分钟

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| 题序 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
| 得分 | | | | | | |
| 批改人 | | | | | | |

一、求解下列方程（20分）

1. $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, y(1) = 4, y'(1) = 0.$

2. 已知方程 $t^3y'' - ty' + y = 0$ 有特解 $y = t$, 求解此方程。

二、（20分）1) 求解线性方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 4x, \\ \frac{dy}{dt} = -2x - z, \end{cases}$$

2) 作 xy 平面上的一个相图 (草图)。 $(0, 0)$ 是否一个稳定的奇点? 何种类型?

3) 设对于以1) 为对应齐次方程组, 以 $f(t) = (2t^2, t)$ 非齐项的方程组。求解以 $(x(0), y(0))^t = (0, 0)^t$ 为初值的Cauchy问题。

三、(20分) 1) 说明向量函数 $x_1(t) = (t, t^2)^t$, $x_2(t) = (t^2, t^3)^t$ 是线性无关的。

2) 问是否存在一个连续矩阵 $A(t)$ 使得它们是 $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ 的两个解?

四、（20分）1) 求解

$$y'' + 5y = \sin \omega t, y(0) = y'(0) = 0, 0 < \omega < \infty$$

2) 当 $t \rightarrow \infty$ 时，是否对所有的 ω 解均有界？

五、（10分）设 $f(x, y)$ 是 $R = \{(x, y) : 0 < x < \infty, |y| < \infty\}$ 中的连续函数，且在 R 上关于 y 满足一致的 Lipschitz 条件，则以 $(x_0, y_0) \in R$ 为初值的方程 $y' = f(x, y)$ 的解整体存在且唯一。

六、(10分)考虑微分方程 $y' = \sin y$.

1) 求一个稳定的奇点; 2) 求一个不稳定的奇点。