曲线论部分习题

§1

1. 计算下列曲线从$t=0$起的弧长:

(1) 双曲螺线$\mathbf{r}=(a\cosh t, a\sinh t, bt)$

(2) 悬链线　$\mathbf{r}=(t, a\cosh\frac{t}{a}, 0)$

(3) 曳物线　$\mathbf{r}=(a\cos t, a\ln(\sec t+\tan t)-a\sin t, 0)$

2. 求平面曲线在极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$下的弧长公式.

3. 用弧长参数表示圆柱螺线和第1题中的双曲螺线.

4. 设曲线$C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$不通过原点, $\mathbf{r}(t_0)$是C 距原点最近的点. 且$\mathbf{r}'(t_0)\neq 0$. 证明$\mathbf{r}(t_0)$正交于$\mathbf{r}'(t_0)$.

5. 设$C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$是参数曲线, $\mathbf{m}$是固定向量. 若对任何t, $\mathbf{r}'(t)$正交于$\mathbf{m}$, 且$\mathbf{r}(0)$正交于$\mathbf{m}$. 证明对任何t, $\mathbf{r}(t)$正交于$\mathbf{m}$.

6. 设平面曲线C在同一平面内直线l的同侧, 且与l相交于曲线C的正则点P. 证明: 直线l是曲线C在点P处的切线.

§2

1. 求曲线$\mathbf{r}=(x(t), y(t), s(t))$在$t_0$处的切线与法平面方程.

2. 求以下曲线的曲率和挠率:

(1) $\mathbf{r}=(a\cosh t, a\sinh t, at)$

(2) $\mathbf{r}=(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

(3) $\mathbf{r}=(a(3t-t^3), 3at^2, a(3t+t^3))$, $(a>0)$

(4) $\mathbf{r}=(a(1-\sin t), a(1-\cos t), bt)$

3. 求以下曲线的切线, 主法线与密切平面方程:

(1) 三次挠曲线$\mathbf{r}=(at, bt^2, ct^3)$

(2) 圆柱螺线$\mathbf{r}=(r\cos\omega s, r\sin\omega s, h\omega s)$

其中r, h为常数, $\omega=(r^2+h^2)^{-1/2}$.

4. 求平面曲线在极坐标下的曲率公式.

5. 设曲线$C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$在$P_0(t_0)$处满足$\mathbf{r}'(t_0)\times\mathbf{r}''(t_0)\neq 0$. 求当曲线$C$上邻近$P_0$的两点$P_1, P_2$独立地趋近于$P_0$时, 由这三点所决定的平面的极限位置.

6. 证明: 圆柱螺线的主法线与它的轴正交, 而从法线则与它的轴交于定角.

§3

1. 若s为弧长, 证明:

(1) $k\tau=-\mathbf{T}'\cdot\mathbf{B}'$

(2) $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')=k^2\tau$

2. 设s是单位球面上曲线$C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$的弧长, 证明: 存在一组向量$\mathbf{a}(s),\mathbf{b}(s),\mathbf{c}(s)$及函数$\lambda(s)$, 使

$$\begin{aligned}\mathbf{a}' &= \mathbf{b}\\ \mathbf{b}' &= -\mathbf{a} + \lambda(s)\mathbf{c}\\ \mathbf{c}' &= -\lambda(s)\mathbf{b}\end{aligned}$$

3. 设s是曲线$C:\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$的弧长. $k,\tau>0$; 曲线$C_1:\mathbf{r}_1(s)=\int_0^s\mathbf{B}(\sigma)d\sigma$的曲率, 挠率分别为$k_1,\tau_1$. 切向量, 主法向量, 从法向量分别为$\mathbf{T}_1,\mathbf{N}_1,\mathbf{B}_1$. 证明:

(1) s是C_1的弧长;

(2) $k_1=\tau,\tau_1=k,\mathbf{T}_1=\mathbf{B},\mathbf{N}_1=-\mathbf{N},\mathbf{B}_1=\mathbf{T}$.

4. 设$\mathbf{r}=(x(s),y(s))$是平面弧长参数曲线, $\{\mathbf{t}(s,\mathbf{n}(s))\}$是它的Frenet标架. 证明:

(1) $\mathbf{n}(s)=(-y'(s),x'(s)),\quad \mathbf{r}''(s)=k_r(s)(-y(s),x(s))$

(2) $k_r(s)=x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)$

(3) 取一般参数t时

$$k_r(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{1/2}}.$$

5. 求以下平面曲线的相对曲率k_r(假定弧长s增加的方向就是参数增加的方向):

(1) 椭圆$\mathbf{r}=(a\cos t,b\sin t),\quad 0\le t<2\pi$

(2) 双曲线$\mathbf{r}=(a\cosh t,b\sinh t)$

(3) 抛物线$\mathbf{r}=(t,t^2)$

(4) 摆线$\mathbf{r}=a(t-\sin t,1-\cos t)$

(5) 悬链线$\mathbf{r}=(t,a\cosh\frac{t}{a})$

(6) 曳物线$\mathbf{r}=(a\cos\varphi,a\ln(\sec\varphi+\tan\varphi)-a\sin\varphi),\quad 0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$

6. 求平面上相对曲率等于常数的曲线.

7. 证明:

(1) 若曲线的所有切线通过定点, 则曲线是直线;

(2) 若曲线的所有切线平行于同一平面, 或者所有密切平面通过定点, 则曲线是平面曲线.

§4

1. 证明曲线在一点和它的近似曲线有相同的曲率和挠率.

2. 若两曲线关于一平面对称, 证明: 在对应点两曲线曲率相等, 而挠率相差一符号.

3. 设P_0是两曲线C_1,C_2的交点, 在P_0的一旁邻近取点P_1,P_2分别属于C_1,C_2, 且使曲线弧长$\overset{\frown}{P_0P_1}=\overset{\frown}{P_0P_2}=\Delta s$. 若$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\overline{P_1P_2}}{\Delta s^n}=0$, 则称曲线$C_1,C_2$在$P_0$点有$n$阶接触. 证明:

(1) 两曲线具有n阶接触的充要条件为

$$\mathbf{r}_1'=\mathbf{r}_2',\cdots,\mathbf{r}_1^{(n)}=\mathbf{r}_2^{(n)}$$

(2) 曲线C的切线是在切点与曲线有一阶接触的唯一直线;

(3) 若曲线C每一点的切线与曲线有二阶接触, 则曲线C是直线.

4. 求一个圆, 使它在原点与抛物线$y=x^2$有二阶接触.

5. 设曲线C上一点P_0满足$\mathbf{r}'(0)\times\mathbf{r}''(0)$, P是曲线C上与P_0邻近的一点, l_0与l分别是曲线在P_0, P处的切线, 当P趋近于P_0时, 求下列平面的极限位置:

(1) 过P与l_0的平面;

(2) 过P_0与l的平面;

(3) 过l_0而平行于l的平面;

(4) 过l而平行于l_0的平面.

6. 设P_0为曲线C上一点, P为曲线上P_0的邻近点, l为P_0处的切线, 点Q为点P向切线l所引的垂线足. 记

$$d=d(P,P_0),\quad h=d(P,Q),\quad \rho=d(P_0,Q)$$

证明:

(1) $\lim\limits_{P\to P_0}\frac{h}{d}=0$

(2) $k=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{2h}{\rho^2}$

7. 设已给定中心在$\mathbf{m}$, 半径为$r>0$的球. $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$为曲线C的方程,

$$d(s)=(\mathbf{r}(s)-\mathbf{m})^2$$

若在s_0处满足下列条件:

$$d(s_0)=r^2,\ d'(s_0)=d''(s_0)=\cdots=d^{(n)}(s_0)=0$$

则称曲线C与所给球有n阶接触. 证明:

(1) 若曲线C落在已给球面上, 则C与球有任意阶接触;

(2) 若$\tau=0$, 则曲线与某一球有三阶接触的充要条件为: $k'(s_0)=0$. 从而平面曲线不能与球处处有三阶接触, 除非曲线本身属于球面的一个圆.

8. 若$k(s_0)\neq 0$. 证明: 曲线C与已给球在s_0处有二阶接触的充要条件是:

$$\mathbf{m}=\mathbf{r}(s_0)+\frac{1}{k(s_0)}\mathbf{N}(s_0)+\lambda\mathbf{B}(s_0)$$

其中λ可任意选取.

(此时固定s_0得到一条直线, 称为曲线在s_0处的极轴, 而点

$$\mathbf{m}_0=\mathbf{r}(s_0)+\frac{1}{k(s_0)}\mathbf{N}(s_0)$$

称为曲率中心. 以$\mathbf{m}_0$为中心, $\frac{1}{k(s_0)}$为半径的圆落在密切平面上, 称为C在s_0处的密切圆.)

9. 若$\tau(s_0)\neq 0$, 证明: 曲线C与已给球在s_0处有三阶接触的充要条件是$\lambda=\frac{\rho'(s_0)}{\tau(s_0)}$, 其中$\rho=\frac{1}{k}$是曲率半径. (此时已给球的中心为$\mathbf{m}_S=\mathbf{r}(s_0)+\rho(s_0)\mathbf{N}(s_0)+\frac{\rho'(s_0)}{\tau(s_0)}\mathbf{B}(s_0)$. 称为曲线在$s_0$处的密切球.)

10. 设在曲线C上点P_0邻近任意取三点P_1, P_2, P_3. 证明: 当P_1, P_2, P_3沿着曲线独立地趋近于P_0时, 过P_0, P_1, P_2, P_3的球的极限位置就是曲线C在点P_0 处的密切球.
11. 证明: 圆柱螺线的曲率中心轨迹仍然是圆柱螺线.

§5
1. 设在两条曲线$C, \bar{C}$之间可建立(可微的)一一对应, 是对应点切线处处相同. 则两曲线重合.
2. 求平面弧长参数曲线, 使它的曲率$k(s) = \frac{1}{1+s^2}$.
3. 设两曲线可建立对应, 使对应点有公共的主法线, 则称两曲线为Bertrand曲线, 其中一条称为另一条的共轭曲线. 证明以下曲线均为Bertrand曲线:
(1) 平面上的同心圆;
(2) $C_1: \quad \mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}(\cos^{-1} s - s\sqrt{1-s^2}, 1-s^2, 0)$
$C_2: \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}(\cos^{-1} s - s\sqrt{1-s^2} - s, 1-s^2+\sqrt{1-s^2}, 0)$
4. 设曲线C_1, C_2为Bertrand曲线. 证明: C_1与C_2的对应点之间距离为常数, 切线交定角.
5. 证明:
(1) 任何平面曲线都是Bertrand曲线;
(2) 若$k\tau \neq 0$, 则空间曲线成为Bertrand曲线的充要条件是: 存在常数$\lambda, \mu (\lambda \neq 0)$, 使

$$\lambda k + \mu \tau = 1$$

6. 证明: 若两条曲线可建立对应, 是对应点的从法线重合, 则这两条曲线或者重合, 或者都是平面曲线.
7. 设曲线$\mathbf{r}_2(t)$在$\mathbf{r}_1(t)$的切线上, 且$\mathbf{r}_1(t)$与$\mathbf{r}_2(t)$在t点的切线相互正交, 则称$\mathbf{r}_2(t)$为$\mathbf{r}_1(t)$的渐伸线, 而$\mathbf{r}_1(t)$则称为$\mathbf{r}_2(t)$的渐缩线. 若$\mathbf{r}_1(s)$ 为弧长参数曲线, 证明

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(s) + (c-s)\mathbf{T}_1(s), \quad \text{其中}c\text{为常数}.$$

8. 证明: 平面曲线在同一平面内有一条渐伸线, 而有一条渐缩线是一般螺线.
9. 求圆的一条渐伸线.
10. 设$\mathbf{r}(s)$是弧长参数曲线, $\mathbf{r}_1(s), \mathbf{r}_2(s)$是$\mathbf{r}(s)$的两条不同的渐伸线. 证明: $\mathbf{r}_1(s)$与$\mathbf{r}_2(s)$是Bertrand曲线偶的充要条件是: $\mathbf{r}(s)$是平面曲线.
11. 设$\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$分别是曲线$C$的单位切向量,主法向量与从法向量, 则以下曲线

$$C_1: \mathbf{r} = \mathbf{T}(s), \quad C_2: \mathbf{r} = \mathbf{N}(s), \quad C_3: \mathbf{r} = \mathbf{B}(s)$$

分别称为曲线C的切线, 主法线与从法线的球面标线. 证明:
(1) 若s_i为$C_i (i=1,2,3)$的弧长, 则

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right| = k, \quad \left|\frac{ds_2}{ds}\right| = \sqrt{k^2+\tau^2}, \quad \left|\frac{ds_3}{ds}\right| = |\tau|$$

(2) 切线的球面标线为常值曲线的充要条件是C为直线, 切线的球面标线为大圆或大圆的一部分的充要条件是C为平面曲线.

(3) 从法线的球面标线为常值曲线的充要条件是C为平面曲线.

(4) 法线的球面标线永不为常值曲线.

§6. 平面曲线的整体性质

1. 设平面简单闭曲线C的长为L, 曲率$k(s)$满足

$$0 < k(s) \leq \frac{1}{R}(\text{常数})$$

证明: $L \geq 2\pi R$

2. 设平面凸闭曲线交直线于三点, 则直线在这三点的部分必包含在曲线内.

3. 是否存在平面简单闭曲线, 全长为6厘米, 所围成的面积为3厘米^2?

4. 设$\overline{AB}$是直线段, $L > \overline{AB}$. 证明: 连接点A, B的长为L的曲线C与$\overline{AB}$所界的面积最大时, C是通过A, B的圆弧.

5. 求椭圆$\mathbf{r} = (a\cos t, b\sin t, 0)$的顶点$(0 \leq t \leq 2\pi, a \neq b)$.

6. 设$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$是平面上弧长参数的凸闭曲线. 证明: $\mathbf{T}''$ 至少在四个点处平行于$\mathbf{T}$.

7. 设$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s), C_1: \mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s)$为平面上全长$L$ 的凸曲线, s为弧长, 其弦长分别为d, d_1:

$$d(s) = |\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(0)|, \quad d_1(s) = |\mathbf{r}_1(s) - \mathbf{r}_1(0)|$$

若$k(s) \geq k_1(s)$, 证明: $d(s) \leq d_1(s)$.

§7 空间曲线的整体性质

1. 证明: 空间正则闭曲线的切线的球面像全长不小于2π.

2. 证明: 曲率$k(s) \leq \frac{1}{R}(R > 0$为常数$)$的最短闭曲线是半径为$R$的圆.

3. 利用空间Crofton公式证明: 对任何空间正则闭曲线, $\int_0^L k(s)ds \geq 2\pi$.

4. 若单位球面上的弧长参数闭曲线的曲率$k \neq 1$, 证明: 全挠率

$$\int_0^L \tau(s)ds = 0$$