

吉林大学 2011-2012 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

共六道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、(共 30 分)

1、求多项式 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ 在有理数域上的标准分解;

2、计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & -a_2 & 2a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & (n-1)a_n \end{vmatrix}$ 的值;

3、设 A, X 都为三阶矩阵, 且 $AX = A + 2X$. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 X .

二、(共 15 分) 设 A 是秩为 r 的 n 阶不满秩方阵. 证明: 存在可逆矩阵 Q 使得矩阵 $Q^{-1}AQ$ 的后 $n-r$ 列全为 0.

三、(共 15 分) 设 n 阶矩阵 A, B 满足 $AB = B + I$, 证明 $G = \begin{pmatrix} A & B \\ 2A^2 - 3A + I & I \end{pmatrix}$ 可逆.

四、(共 15 分) 讨论方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a - 3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases}$ 解的情况, 并在有解时求出其所有解.

五、(共 15 分) 设 n 元向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n (n > 1)$ 满足 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关当且仅当 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_n$ 线性无关.

六、(共 10 分) 设既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

的一个根, 求证: 对任何整数 k , $pk - q$ 整除 $f(k)$.