

第 24 讲 调和函数 3

1. 给定 $a, b > 0$, 定义矩形 $R(a, b) = \{x + iy; 0 < x < a, 0 < y < b\}$. 现在假设 $f: R(a, b) \rightarrow R(A, B)$ 是两个矩形之间的全纯映射, 在 $R(a, b)$ 闭包上连续, 保持顶点对应:

$$(0, a, a + bi, bi) \mapsto (0, A, A + Bi, Bi),$$

且 f 保持顶点之间的边界对应. 证明:

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}.$$

2. 假设 f 是单位圆盘上的全纯函数, 满足当 $|z| \rightarrow 1$ 时, $|f(z)| \rightarrow 1$, 问 f 具有怎样的表达式? 证明你的结论.

3. 假设 f 是单位圆盘上的半纯函数, 满足当 $|z| \rightarrow 1$ 时, $|f(z)| \rightarrow 1$, 问 f 具有怎样的表达式? 证明你的结论.

4. 在 Jensen 公式中, 如果允许 f 有极点, 相应的结论是什么? 证明你的结论.

5. 设 a_1, \dots, a_n 是实数, 证明: 如果 $p(\theta) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调减少, 则

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin(k\theta) \geq 0, \forall \theta \in [0, \pi].$$

提示: 注意到 $g(r, \theta) = \sum_{k=1}^n k a_k r^k \sin(k\theta)$ 是单位圆盘中的调和函数.

附加题 (不做要求)

请将解答发至 wxg688@163.com. 无截止日期.

问题 2.9. 上面第 1 题, 能否利用辐角原理给出一个证明?