几何学第一次课堂练习参考答案与评分标准

1 证明：因为$\triangle \leq \frac{1}{2}ab$, $\cdots\cdots 5'$

所以$a^2+b^2+c^2-4\triangle \geq (a-b)^2+c^2 \geq 0.$ $\cdots\cdots 5'$

2

证明: 在三角形ABC中, 记

$$\vec{a}=\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=\overrightarrow{AC},\ \vec{c}=\overrightarrow{AB}$$

不妨设BC, CA, AB的中点分别为 D, E, F. 则有

$$\overrightarrow{AD}=\vec{c}+\frac{\vec{a}}{2},\ \overrightarrow{BE}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{CF}=\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}\cdots\cdots 3'$$

则有

$$\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BE}^2+\overrightarrow{CF}^2=\frac{5}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)+(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\cdots\cdots 3'$$

利用$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 即得

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)\cdots\cdots 2'$$

带入上式, 可得

$$\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BE}^2+\overrightarrow{CF}^2=\frac{3}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)\cdots\cdots 2'$$

得证.

3

解: 不妨设

$$OA=OB=OC=1$$

记面AOB, BOC的法向量分别为$\vec{m}, \vec{n}$, 则有

$$\vec{m}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB},\ \vec{n}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\cdots\cdots 2'$$

记二面角所成的平面角为θ, 则

$$\begin{aligned}\cos\theta =&\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}\\ =&\frac{|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC})|}{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}|}\cdots\cdots 3'\\ =&\frac{|(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB})|}{\sin\gamma\sin\alpha}\cdots\cdots 3'\\ =&\frac{|\cos\gamma\cos\alpha-\cos\beta|}{\sin\alpha\sin\gamma}\end{aligned}$$

即得

$$\theta=\arccos\frac{|\cos\gamma\cos\alpha-\cos\beta|}{\sin\alpha\sin\gamma}\cdots\cdots 2'$$

4 证明: ($\Rightarrow$):
如果A,B,C,D 共面, 则存在λ,μ使得

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}\cdots\cdots 3'$$

由于 A,B,C,D 中无3点共线, 则

$$\lambda\neq 0,\ \mu\neq 0,\ \lambda+\mu\neq 1\cdots\cdots 3'$$

从而有

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\mu(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})\\ =&(1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{OC}-\mu\overrightarrow{OD}\\ =&\vec{0}\end{aligned}$$

分别取

$$p=1-\lambda-\mu,\ q=1,\ r=-\lambda,\ s=-\mu\cdots\cdots 3'$$

即可.

($\Leftarrow$) 反之, 由

$$p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

且 $p+q+r+s=0$可得

$$\begin{aligned}&(-q-r-s)\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OD}\cdots\cdots 3'\\ =&q\overrightarrow{AB}+r\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AD}\\ =&\vec{0}\end{aligned}$$

因为q,r,s都不为0, 可知 A,B,C,D四点共面. $\cdots\cdots 3'$

5 证明:首先化简

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\\ &= \overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{OA}\\ &= \overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$\cdots\cdots 5'$

(1):若$\vec{r}=\vec{0}$, 则$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, 即$A,B,C$三点共线。$\cdots\cdots 5'$
(2):若$\vec{r}\neq 0$, 则$\vec{r}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$垂直于面$ABC$。 $\cdots\cdots 5'$

6 解: 设球面的圆心为O,半径为R,由已知可得

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=0\cdots\cdots 3'$$

由$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$, 则有

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OQ}|^2 &=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{PQ}|^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}\\ &=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|^2+2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdots\cdots 3'\\ &=|\overrightarrow{OP}|^2+2\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP})+|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2\cdots\cdots 3'\end{aligned}$$

利用

$$|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\cdots\cdots 3'$$

对于$|\overrightarrow{PB}|^2,|\overrightarrow{PC}|^2$也进行上面的做法,将得到的结果带入上面的等式,可得

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=-2|\overrightarrow{OP}|^2+3R^2$$

P在球面的内部

$$\Rightarrow|\overrightarrow{OP}|<R,\Rightarrow -2|\overrightarrow{OP}|^2+3R^2>0$$

从而点Q的轨迹是以O为球心, $\sqrt{3R^2-2|\overrightarrow{OP}|^2}$为半径的球面 $\cdots\cdots 3'$

7
解: 不妨设

$$\frac{BD}{DC}=\lambda_1,\ \frac{CE}{EA}=\lambda_2,\ \frac{AF}{FB}=\lambda_3$$

则有

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\lambda_1\overrightarrow{AC}}{1+\lambda_1},\quad \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{AC}}{1+\lambda_2},\quad \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda_3\overrightarrow{AB}}{1+\lambda_3}\cdots\cdots 3'$$

则

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow&\frac{\overrightarrow{AB}+\lambda_1\overrightarrow{AC}}{1+\lambda_1}+\overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{AC}}{1+\lambda_2}+\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda_3\overrightarrow{AB}}{1+\lambda_3}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow&\overrightarrow{AB}(\frac{1}{1+\lambda_1}-1+\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3})+\overrightarrow{AC}(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}-1+\frac{1}{1+\lambda_2})=\vec{0}\cdots\cdots 3'\end{aligned}$$

由于$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$,不共线, 上式等价于

$$\frac{1}{1+\lambda_1}-1+\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}=\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}-1+\frac{1}{1+\lambda_2}=0\cdots\cdots 2'$$

解得

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$$

即

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}\cdots\cdots 2'$$

8 证明: (1):

令

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}.$$

由已知,

$$\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{i+2}}=\lambda\overrightarrow{OA_{i+1}}.\cdots\cdots 3'$$

其中$1\le i\le n$, 并记$A_{n+1}=A_1,\ A_{n+2}=A_2$. 从而

$$\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{i+2}})=\sum_{i=1}^{n}\lambda\overrightarrow{OA_{i+1}}.\cdots\cdots 3'$$

即

$$2\vec{a}=\lambda\vec{a}.$$

由于

$$|\overrightarrow{OA_i}|=|\overrightarrow{OA_j}|,\forall 1\le i,j\le n,i\ne j$$

且$\overrightarrow{OA_i}$与$\overrightarrow{OA_{i+1}}$不共线, 从而$\lambda<2$,

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}\cdots\cdots 3'$$

.

(2)利用 $\overrightarrow{PA_i}=\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OP},\ 1\le i\le n$, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PA_i}&=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OP})\cdots\cdots 3'\\&=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}-2\overrightarrow{OP}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i})+n\,|\overrightarrow{OP}|^2=2n\cdots\cdots 3'\end{aligned}$$

(在最后一步要用到$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$)