吉林大学 2014-2015 学年第一学期“数学分析 I”期末考试试题

参考解析

一、（共 10 分）叙述子数列收敛定理并利用子数列收敛定理证明 *Cauchy* 收敛准则.

解：[子数列收敛定理]若一个数列有界，那么其存在一个收敛的子数列.

设$\{x_n\}$为柯西列，则$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall m>n>N,|x_m-x_n|<\varepsilon$.设 p 为一个大于 1 的整数，正整数 N 为$\varepsilon=1$对应的指标，取$n=N+1,m=N+p$，则有$|x_{N+p}-x_{N+1}|<1$，有$|x_{N+p}|<|x_{N+1}|+1$.

故取$M=\max\limits_{1\le k\le N+1}\{|x_k|+1\}$，有$|x_n|<M,n\in N_+$，即$\{x_n\}$有界.

故由子数列收敛定理，$\{x_n\}$存在一个收敛的子列$\{x_{n_k}\}$，记其极限为 c.从而有：

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall m_k>n>N,|x_{m_k}-x_n|<\varepsilon$，对 k 取极限，便有：

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,|x_n-c|<\varepsilon$，即数列$\{x_n\}$收敛.

二、（共 10 分）用定义证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+7}{5n^2-10}=\dfrac{1}{5}$；

证明：对任意$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\dfrac{9}{5\varepsilon}\right]+2$，使得$\forall n>N$：

$|\dfrac{n^2+7}{5n^2-10}-\dfrac{1}{5}|=|\dfrac{9}{5n^2-10}|<|\dfrac{9}{5n}|<\dfrac{9}{5n}<\varepsilon$.故由定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+7}{5n^2-10}=\dfrac{1}{5}$.

（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x}{6x^2-4}=\dfrac{5}{2}$.

证明：对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta=\min\{\dfrac{1}{6},\dfrac{\varepsilon}{165}\}$，使得$\forall|x-1|<\delta$：

$|\dfrac{5x}{6x^2-4}-\dfrac{5}{2}|=|\dfrac{5(x-1)(3x+2)}{6x^2-4}|<165|x-1|<\varepsilon$.故由定义知$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x}{6x^2-4}=\dfrac{5}{2}$.

三、（共 15 分）求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2})^n$；

解：$(1+\dfrac{2}{n})^n<(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2})^n<(1+\dfrac{2}{n-2})^n$，而$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n-2})^n=e^2$，

故由夹挤定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2})^n=\mathrm{e}^2$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+2)!})=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{(n+2)!}-\dfrac{1}{(n+1)!})=\dfrac{3}{2}$.

（3）已知$x_1\in(0,\pi),x_{n+1}=\sin x_n,n\in N_+$，求$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解：由条件易得$\{x_n\}$收敛且极限为 0.（用归纳法）从而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n-x_n}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos x_n-1}{1}=0$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln(\frac{\sin x_n}{x_n})}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\ln(\frac{\sin x_n-x_n}{x_n}+1)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\cdot\frac{\sin x_n-x_n}{x_n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}x_n^3+o(x^4)}{x_n^3}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$.

四、（共 15 分）导数计算

（1）设 $f(x)=(1+x^2)\cos x$，求 $f^{(2015)}(x)$；

解：由 *Leibniz* 定理，有： $f^{(2015)}(x)=\sum_{k=0}^{2015}C_{2015}^{k}(1+x^2)^{(k)}(\cos x)^{(2015-k)}=(1+x^2)(\cos x)^{(2015)}+$ $4030\,x(\cos x)^{(2014)}+4058210\,(\cos x)^{(2013)}=(1+x^2-4030x)\cos x-4058210\sin x$.

（2）设 $y=t-\sin t, x=1+t^2$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\cos x}{2t}$， $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2t\sin t-2+2\cos t}{8t^3}$.

（3）已知函数由方程 $\cos(x+y)-x^2y=0$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

解：由条件：$(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\sin(x+y)-2xy-x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy-\sin(x+y)}{\sin(x+y)-x^2}$.

又 $(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2\cos(x+y)+\sin(x+y)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$

故 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2y+(2+2x)\frac{2xy-\sin(x+y)}{\sin(x+y)-x^2}-(\frac{2xy-x^2}{\sin(x+y)-x^2})^2\cos(x+y)}{\sin(x+y)-x^2}$.

五、（共 20 分）计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-\frac{1}{2}x^2-1-x+x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x\mathrm{e}^{\sin x}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\cos x(\sin x-\cos x)\mathrm{e}^{\sin x}}{\sin x}=$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\cos^2x(\sin x-\cos x)\mathrm{e}^{\sin x}+(\cos 2x+\sin 2x)\mathrm{e}^{\sin x}}{-\cos x}=-1$.

（3）设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点的邻域内有连续的二阶导数，且 $f'(a)\neq0$，求：
$\lim\limits_{x\to a}[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}]$ 的值；

解：$\lim\limits_{x\to a}[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}]=\lim\limits_{x\to a}[\frac{1}{(x-a)f'(a)+(x-a)^2f''(\eta)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}]=$
$\lim\limits_{x\to a}\frac{-(x-a)^2f''(\eta)}{[(x-a)f'(a)+(x-a)^2f''(\eta)](x-a)f'(a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{-f''(\eta)}{[f'(a)]^2+(x-a)f''(\eta)f'(a)}$
$=\frac{-f''(a)}{[f'(a)]^2}$ (η介于x与a之间)

（4）$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2x})$.

解：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^2\tan^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3))^2-x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{2}{3}$.

六、（共 10 分）设函数 $f(x)=(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求函数 $f(x)$ 的凹凸区间；

（3）求函数 $f(x)$ 的渐近线.

解：（1） $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，

故在 $x\in(-\infty,-2)\bigcup(3,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$； $x\in(-2,0)\bigcup(0,3)$ 时， $f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-2),(3,+\infty)$，单调减区间为 $(-2,0),(0,3)$.

（2） $f''(x)=-\dfrac{x^2-x-6}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\dfrac{x^2+12x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\dfrac{13x+6}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

故 $x\in(-\dfrac{6}{13},0)\bigcup(0,+\infty)$ 时， $f''(x)>0$； $x\in(-\infty,-\dfrac{6}{13})$ 时， $f''(x)<0$.

故 $f(x)$ 的下凸区间为 $(-\dfrac{6}{13},0),(0,+\infty)$，上凸区间为 $(-\infty,-\dfrac{6}{13})$.

（3）因 $\lim\limits_{x\to0^+}(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty,\lim\limits_{x\to0^-}(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，故 x=0 为铅直渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$，故函数无水平渐近线.

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}[(x+6)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x]=7$，故其有渐近线 $y=x+7$.

七、（共 10 分）分别讨论在 $\alpha=-1,0,1$ 时， $f(x)=x^{\alpha}\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致连续性.

解：（1） $\alpha=-1$ 时， $f(x)=x^{-1}\sin x$，一致连续；

（2） $\alpha=0$ 时， $f(x)=\sin x$，一致连续；

（3） $\alpha=1$ 时， $f(x)=x\sin x$，不一致连续.

（证明略）

八、（共 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且 $f(0)=-2,f(1)=1,\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-3$.求证：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $(3\xi-1)f'(\xi)+3f(\xi)=0$；

（2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)\geq18$.

证明：（1）设函数 $g(x)=xf(x)$，则其在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，故由 *Cauchy* 中值定理知：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\dfrac{\xi f'(\xi)+f(\xi)}{f'(\xi)}=\dfrac{1-0}{1-(-2)}$，即得到 $(3\xi-1)f'(\xi)+3f(\xi)=0$.

（2）由条件，设 $f(a)=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-3$，则 $f'(a)=0,(0<a<1)$.

则由 *Taylor* 展开式得： $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(\theta)}{2}(x-a)^2$，有：

$f(x)+3=\dfrac{f''(\theta)}{2}(x-a)^2,0<\theta<a$，分别取 x=0,1，得：

$8=f''(\eta_1)(a-1)^2$， $2=f''(\eta_2)a^2$.则 $0<a<\dfrac{1}{3}$ 时，用后式， $\dfrac{1}{3}<a<1$ 时，用前式，则可得总存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)\geq18$.