吉林大学2012-2013学年第一学期“数学分析I”期末考试试题

参考解析

一、(共10分)叙述介值定理并利用闭区间套定理证明介值定理.

解：[介值定理]已知函数 $f(x)$ 在闭区间[a,b]上连续，则对任意介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数 η，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\eta$.

不妨设 $f(a)<\eta<f(b)$，用[a_1,b_1]表示满足 $f(a_1)\le\eta, f(b_1)\ge\eta$ 的那一个区间.这样操作下去，可得一个闭区间套：$\{[a_n,b_n]\},\forall n\in N_+, f(a_n)\le\eta, f(b_n)\ge\eta, b_n-a_n=\dfrac{b_1-a_1}{2^n}$.

故由闭区间套定理：存在 $\xi\in(a,b)$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，又：

$f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\le\eta, f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\ge\eta$，故 $f(\xi)=\eta$.

二、(共30分)求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^6+1}}+\dfrac{n^2+2}{\sqrt{n^6+2}}+\ldots+\dfrac{n^2+n}{\sqrt{n^6+n}})$；

解：对任意正整数 n，有：

$$\frac{n^2+1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{n^6+n}}+\ldots+\frac{n^2+n}{\sqrt{n^6+n}}<\frac{n^2+1}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{n^6+2}}+\ldots+\frac{n^2+n}{\sqrt{n^6+n}}<\frac{n^2+1}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{n^6+1}}+\ldots+\frac{n^2+n}{\sqrt{n^6+1}}$$

即：$\dfrac{2n^3+n(n+1)}{2\sqrt{n^6+n}}<\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^6+1}}+\dfrac{n^2+2}{\sqrt{n^6+2}}+\ldots+\dfrac{n^2+n}{\sqrt{n^6+n}}<\dfrac{2n^3+n(n+1)}{2\sqrt{n^6+1}}$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+n(n+1)}{2\sqrt{n^6+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+n(n+1)}{2\sqrt{n^6+1}}=1$，故由夹挤定理，原极限结果为1.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}$；

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2n^2}{4n^4}=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\to\infty}}\dfrac{1}{4}(1+\dfrac{1}{n})^2=\dfrac{1}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(1-\cos x)\tan x}$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(1-\cos x)\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\dfrac{1}{2}x^2\cdot x}=2\cdot$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{1}{x}}+\sin\dfrac{1}{x})^x$；

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{1}{x}}+\sin\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(e^x+\sin x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(e^x+\sin x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^2+\cos x}{e^x+\sin x}}=e^2$.

（5） $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3+\frac{1}{2}x^2)\ln(1+\frac{1}{x})-\sqrt{x^4+1}]$.

解：由 *Taylor* 展开，有： $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})(x\to+\infty)$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3+\frac{1}{2}x^2)\ln(1+\frac{1}{x})-\sqrt{x^4+1}]=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3+\frac{1}{2}x^2)(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3}))-\sqrt{x^4+1}]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+\frac{1}{12}+o(1)-\sqrt{x^4+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{-1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\frac{1}{12})=\frac{1}{12}$.

三、（共 25 分）导数计算

（1）设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^4}}，x\neq 0\\ 0，x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$；

解： $x\neq 0$时$,f'(x)=4x^{-5}e^{-\frac{1}{x^4}}$.

而 $f'(0+)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^4}}=0,f'(0-)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^4}}=0$.

故 $f'(0)=0$，从而 $f'(x)=\begin{cases}4x^{-5}e^{-\frac{1}{x^4}}，x\neq 0\\ 0，x=0\end{cases}$.

（2）设 $f(x)=x\ln(1+x^2)+x^2$，求 $f'(x)$；

解： $f'(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}+2x+\ln(1+x^2)$.

（3）已知函数由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 确定，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$；

解：有： $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$，得： $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$.

又有： $\frac{2}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{b^2}(\frac{dy}{dx})^2=0$，故得： $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2y}-\frac{b^4x^2}{a^4y^2}$.

（4）设 $f(x)=x^2(1-x)^{\frac{1}{3}}$，求 $f^{(10)}(0)$；

解：由 *Leibniz* 定理，有： $f^{(10)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k(x^2)^{(k)}((1-x)^{\frac{1}{3}})^{(10-k)}=$

$=x^2((1-x)^{\frac{1}{3}})^{(10)}+20x((1-x)^{\frac{1}{3}})^{(9)}+90((1-x)^{\frac{1}{3}})^{(8)}$.而 $((1-x)^{\frac{1}{3}})^{(8)}=-\frac{20944000}{729}(1-x)^{-\frac{23}{3}}$

故 $f^{(10)}(0)=-\frac{20944000}{729}(1)^{-\frac{23}{3}}=-\frac{20944000}{729}$.

（5）设 $y=\cos t, x=\ln\tan\frac{t}{2}+\sin t, 0<t<\pi$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\sin t\cdot\frac{1}{\cos t+\csc t}=-\frac{\sin t}{\cos t+\csc t}$.

四、（共 5 分）用定义法证明极限：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}=1$.

证明：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\min\{\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{144}\}$，使得 $\forall\,|x-2|<\delta$：

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}-1\right|=\left|\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2-3}}\right|=\left|\frac{4-x^2}{(1+\sqrt{x^2-3})\sqrt{x^2-3}}\right|=\frac{|2+x||2-x|}{(1+\sqrt{x^2-3})\sqrt{x^2-3}}<144|2-x|<\varepsilon.$$

故由定义知 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}=1$.

五、（共 5 分）证明不等式：$\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}, x>0$.

证明：只需 $\ln(1+x)<x<\frac{x}{\sqrt{1+x}}, x>0$，只需 $\ln(1+x)<x, x>0$.

这是一个被我们熟知的结论（求导或利用 e）.

六、（共 10 分）设函数 $f(x)=e^{\frac{1}{2x}}(x-1)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求函数 $f(x)$ 的凹凸区间；

（3）求函数 $f(x)$ 的渐近线并画出函数图像.

解：（1） $f'(x)=\frac{2x^2-x+1}{2x^2}e^{\frac{1}{2x}}>0$，在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 单调增.

（2） $f''(x)=-\frac{2x^2-x+1}{4x^4}e^{\frac{1}{2x}}+\frac{2x^2-4x}{4x^4}e^{\frac{1}{2x}}=-\frac{3x+1}{4x^4}e^{\frac{1}{2x}}$.

故 $x\in(-\frac{1}{3},0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f''(x)<0$；$x\in(-\infty,-\frac{1}{3})$ 时，$f''(x)>0$.

故 $f(x)$ 的上凸区间为 $(-\frac{1}{3},0),(0,+\infty)$，下凸区间为 $(-\infty,-\frac{1}{3})$.

（3）因 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{2x}}(x-1)=-\infty, \lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{2x}}(x-1)=0$，故 x=0 为铅直渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{2x}}(x-1)=\infty$，故函数无水平渐近线.

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{2x}}(x-1)}{x}=1, \lim\limits_{x\to\infty}[e^{\frac{1}{2x}}(x-1)-x]=-\frac{1}{2}$，故其有渐近线 $y=x-\frac{1}{2}$.

七、（共 8 分）证明 $f(x)=\begin{cases}|x|(2+\sin\dfrac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 R 上一致连续.

证明：只需证明 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 一致连续，在 x=0 处连续即可.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}=0=-x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，在 x=0 处连续.

而 $f(x)=\begin{cases}2x+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ -2x-x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$，不难知 $2x$ 在 R 上一致连续，故要证 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 一致连续，只需证明 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 一致连续.

由对称性（$x\sin\dfrac{1}{x}$ 为偶函数），知只需证其在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

记 $F(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$，知其连续，证明其在 $(1,+\infty)$ 一致连续.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，故 $\forall\varepsilon>0,\exists X>1,$ 使得 $\forall x>X,|x\sin\dfrac{1}{x}-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取小于 1 的正数 δ，则对 $\forall(x_1,x_2):|x_1-x_2|<\delta, x_1\in[1,+\infty), x_2\in[1,+\infty)$，

只会有 x_1,x_2 都大于 X 与 x_1,x_2 都在区间 $[0,X+1]$ 上这两种情况.

由 *Cantor* 定理知连续函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在闭区间 $[0,X+1]$ 上一致连续.

而 x_1,x_2 都大于 X 时，有 $|x_1\sin\dfrac{1}{x_1}-x_2\sin\dfrac{1}{x_2}|=|x_1\sin\dfrac{1}{x_1}-1+1-x_2\sin\dfrac{1}{x_2}|\leq|x_1\sin\dfrac{1}{x_1}-1|$

$+|x_2\sin\dfrac{1}{x_2}-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 故连续函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[X+1,+\infty]$ 上也一致连续.

故函数 $F(x)$ 在闭区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

即函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

综上所述，原命题得证.

八、（共 7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导.求证：

（1）若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=f(0)$，那么存在一个点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$；

证明：我们来证明，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可以取到最值.不妨设存在 $f(a)>f(0), a>0$.
此时来证明 $f(x)$ 可以取到最大值（若 $f(a)<f(0)$，则可以对应地证明存在最小值）.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=f(0)$，故存在 $X>0$，使任意 $x>X$，成立：$|f(x)-f(0)|<f(a)-f(0)$.

即：$f(x)<f(a)$.考虑闭区间[0,X]，由连续性知 $f(x)$ 在其上存在最大值，记为 M.
若 $M\geq f(a)$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 存在最大值 M；若若 $M<f(a)$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 存在最大值 $f(a)$.故总存在最大值，而最大值必然是极大值，故存在一个点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$.

（2）若 $f(x)$ 满足不等式 $0\leq f(x)\leq \ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}, x>0$，则存在一点 $\eta\in(0,+\infty)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{2}{1+2\eta}-\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

证明：由条件，$0\leq f(0)\leq 0$，故 $f(0)=0$.

而由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}})=\ln 1=0$，知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

故若设 $g(x)=f(x)-\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}, x\geq 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=g(0)$，故由（1）,存在一个点

$\eta\in(0,+\infty)$，使得 $g'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)-\dfrac{2}{1+2\eta}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}=0$，即 $f'(\eta)=\dfrac{2}{1+2\eta}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}$.