几何学第二次课堂练习参考答案与评分标准

1 球极投影的定义：将球面上任意一点(北极点除外)与北极点相连，这两点所确定的直线与赤道面有且只有一个交点，这个点称为球极投影点，这个映射称为球极投影映射。记作

$$f : S^2(r) \to \mathbb{R}^2$$

记$S^2(r)$的方程为$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, 赤道面的方程为$z = 0$, 球面一点坐标为$P(x, y, z)$, 其球极投影点坐标为$P'(a, b, 0)$, 则

$$\overrightarrow{NP'} = \lambda \overrightarrow{NP},$$

即

$$(a, b, -r) = (\lambda x, \lambda y, \lambda(z - r)),$$

$\cdots\cdots 5'$

所以$\lambda = \frac{r}{r-z}$, 即

$$f(x, y, z) = (\frac{rx}{r-z}, \frac{ry}{r-z}).$$

$\cdots\cdots 5'$

2 (1):由已知，平面$\pi_1 : 7x + 2y + z = 0$, $\pi_2 : 15x + 8y - z - 2 = 0$的单位法向量分别为$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{54}}(7, 2, 1)$, $\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{290}}(15, 8, 1)$。从而点$M$与平面$\pi_1$, π_2的离差分别为

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{54}}(7 + 2 + 1) = \frac{10}{\sqrt{54}} > 0,$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{290}}(15 + 8 - 1 - 2) = \frac{20}{\sqrt{290}} > 0,$$

即点M位于$\vec{n}_1$与$\vec{n}_2$所指的一侧，而

$$\cos\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle > 0,$$

得点M位于钝二面角中。$\cdots(3')$

从而其钝二面角的平分面方程为：

$$\frac{7x + 2y + z}{\sqrt{54}} = \frac{15x + 8y - z - 2}{\sqrt{290}}.$$

化简得

$$(15-\frac{7\sqrt{290}}{\sqrt{54}})x+(8-\frac{2\sqrt{290}}{\sqrt{54}})y-(1+\frac{\sqrt{290}}{\sqrt{54}})z-2=0.$$

$\cdots(4')$

(2) 设所求直线 l 的方向矢量为 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, 则方程为

$$\frac{x-4}{v_1}=\frac{y}{v_2}=\frac{z+1}{v_3}.$$

因为L与L_1,L_2 均相交，那么有

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 5 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=0 \\ \det\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=0 \end{cases}.$$

$\cdots(4')$

由此得

$$v_1=19,v_2=43,v_3=70.$$

则所求直线的方程为

$$l:\frac{x-4}{19}=\frac{y}{43}=\frac{z+1}{70}.$$

$\cdots(4')$

3解：(1)设$P(x,y,z)$到L_1的距离为

$$d_1=\frac{\sqrt{(2y-2z+2)^2+(2x-z-11)^2+(2x-y-12)^2}}{3},$$

P到L_2的距离为

$$d_2=\frac{\sqrt{(2y+2z-8)^2+(2x-y+8)^2+(2x+z+4)^2}}{3},\cdots(3')$$

再由$d_1=d_2$, 化简得

$$16yz+8xz+140x-80y-38z-125=0\cdots(3')$$

.

(2)将L_1,L_2的方程写为$L_1:$

$$\begin{cases} 2x-y-12=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

$L_2:$

$$\begin{cases} 2x-y+8=0 \\ y+z_4=0 \end{cases}$$

设$P(x,y,z)$为曲面上一点，则存在λ_i,μ_i使得平面π_1,π_2的方程分别为：

$$\pi_1:\lambda_1(2x-y-12)+\mu_1(y-z+1)=0,$$

即：

$$2\lambda_1 x+(\mu_1-\lambda_1)y-\mu_1 z+\mu_1-12\lambda_1=0,$$

同理，

$$\pi_2:2\lambda_2 x+(\mu_2-\lambda_2)y+\mu_2 z+8\lambda_2-4\mu_2=0\cdots(2').$$

再由$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$, 得

$$5\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2=0.$$

因为$\lambda_1\neq 0$, 否则$\lambda_2=\mu_2=0$, 矛盾。从而

$$5-\frac{\mu_2}{\lambda_2}-\frac{\mu_1}{\lambda_1}=0\cdots(3').$$

利用π_1,π_2的方程得：

$$5+\frac{2x-y-12}{y-z+1}+\frac{2x-y+8}{y+z-4}=0,$$

化简得

$$3y^2-5z^2+4xy-6x-16y+5z+36=0,\cdots(2').$$

已知曲面为单叶双曲面。$\cdots(2')$

4解：

设$P(x,y,z)$为曲面S上面一点,则存在直线L过点P

设L的方向向量为$\vec{a}=(l,m,n)$,其中l,m,n不全为$0\cdots(2')$

L与L_1,L_2相交,则根据平面相交的方程有

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} (x-6) & y & (z-1) \\ 3 & 2 & 2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0.$$

$$\Rightarrow l(2y-2z+2)-m(2x-3z-9)+n(2x-3y-12)=0\cdots(3')$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & (z+4) \\ 3 & 2 & -2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

$$l(-2y-2z-8)+m(2x+3z+12)+n(2x-3y)=0\cdots(3')$$

再由直线L与平面平行,$\Rightarrow (l,m,n)\cdot(2,3,0)=0, \Rightarrow 2l+3m=0\cdots(2')$

以上的到的关于(l,m,n)的方程有非零解,$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2y-2z+2 & 3z-2x+9 & 2x-3y-12 \\ -2y-2z-8 & 2x+3z+12 & 2x-3y \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \cdots(3')$$

$$\Rightarrow 4x^2-9y^2+6x-45y-36z-144=0\cdots(2')$$

5. 解：因为过单叶双曲面上任意一点，有且仅有两条不同直母线通过它. 不妨设这两条直母线分别为

$$l_{\lambda:\mu}:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases},\quad l_{\lambda':\mu'}:\begin{cases}\lambda'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu'\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \mu'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda'\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}.$$

那么它们的方向矢量分别为

$$\mathbf{v}_{\lambda:\mu}=\left(\frac{1}{bc}\left(\lambda^2-\mu^2\right),\frac{2\lambda\mu}{ac},-\frac{1}{ab}\left(\lambda^2+\mu^2\right)\right),$$

和

$$\mathbf{v}_{\lambda':\mu'}=\left(\frac{1}{bc}\left(\mu'^2-\lambda'^2\right),\frac{2\lambda'\mu'}{ac},\frac{1}{ab}\left(\lambda'^2+\mu'^2\right)\right).$$

$\cdots(5')$ 由题 $l_{\lambda:\mu}\perp l_{\lambda':\mu'}$, 所以 $\vec{v}_{\lambda:\mu}\cdot\vec{v}_{\lambda':\mu'}=0$, 即

$$a^2\left(\lambda^2-\mu^2\right)\left(\mu'^2-\lambda'^2\right)+4b^2\lambda\mu\lambda'\mu'-c^2\left(\lambda^2+\mu^2\right)\left(\lambda'^2+\mu'^2\right)=0. \tag{5-1}$$

设这两直母线相交与点 $P(X,Y,Z)$，则

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1. \tag{5-2}$$

情形1: 若 $1+\frac{Y}{b}\neq 0$，有

$$\begin{cases}\lambda=\frac{X}{a}-\frac{Z}{c}\\ \mu=1+\frac{Y}{b}\\ \lambda'=1+\frac{Y}{b}\\ \mu'=\frac{X}{a}+\frac{Z}{c}\end{cases}. \tag{5-3}$$

结合 (5-1), (5-2) 和 (5-3) 得

$$4\left(1+\frac{Y}{b}\right)^2\left(a^2\left(\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{X^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)-c^2\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)\right)=0.$$

因为 $1+\frac{Y}{b}\neq 0$, 得

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}X^2+\frac{a^2-c^2}{b^2}Y^2-\frac{a^2+b^2}{c^2}Z^2=0. \tag{5-4}$$

再由(5-2)和(5-4)得 $P(X,Y,Z)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1 \\ X^2+Y^2+Z^2=a^2+b^2-c^2 \end{cases}.$$

$\cdots(5')$ 情形2： 若 $1+\frac{Y}{b}=0$，有

$$\begin{cases} \lambda=1-\frac{Y}{b} \\ \mu=\frac{X}{a}+\frac{Z}{c} \\ \lambda'=\frac{X}{a}-\frac{Z}{c} \\ \mu'=1-\frac{Y}{b} \end{cases}. \tag{5-5}$$

结合(5-1)，(5-2)和 (5-5) 得

$$4\left(1-\frac{Y}{b}\right)^2\left(a^2\left(\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{X^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}\right)-c^2\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}\right)\right)=0.$$

由 $1+\frac{Y}{b}=0$ 可得 $1-\frac{Y}{b}\neq 0$, 所以

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}X^2+\frac{a^2-c^2}{b^2}Y^2-\frac{a^2+b^2}{c^2}Z^2=0. \tag{5-6}$$

由 (5-2) 和 (5-5) 得 $P(X,Y,Z)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1 \\ X^2+Y^2+Z^2=a^2+b^2-c^2 \end{cases}.$$

$\cdots(5')$ **注意：** $a^2+b^2-c^2<0$ 时, 无交点.

6.解:设直母线上的点为$(1+at,-4+bt,1+ct)$, 将其带入曲面方程并整理得：

$$(2a^2+b^2-c^2+3ab+ac)t^2-(7a+5b+7c)t=0.\cdots(5')$$

从而t^2与t前面的系数为0， 直接解得：

$$a=4c, b=-7c;$$

或

$$a=-c, b=0, \cdots(5')$$

即得直母线方程为：

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z-1}{1},$$

以及

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-1}{-1}. \cdots(5')$$

7解：设平面方程为$\pi: a(x-1)+by+c(z-3)=0$, 取$O^*=(1,0,3)$,

$$\vec{e_1}^*=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}(-c,0,a),$$

$$\vec{e_3}^*=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c),$$

$$\vec{e_2}^*=\vec{e_3}^*\times\vec{e_1}^*=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(ab,-c^2-a^2,bc), \cdots(5')$$

并建立新直角坐标系$\{O^*,\vec{e_1}^*,\vec{e_2}^*,\vec{e_3}^*\}$, 为方便，记$A=\sqrt{a^2+c^2}$, $B=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 则坐标变换公式为：

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{A}x^*-\frac{ab}{AB}y^*+\frac{a}{B}z^*+1, \\ y &= -\frac{a^2+c^2}{AB}y^*+\frac{b}{B}z^*, \\ z &= \frac{a}{A}x^*+\frac{bc}{AB}y^*+\frac{c}{B}z^*+3. \end{aligned}$$

在新的坐标系下，平面π的方程为$z^*=0$, 平面π与椭圆抛物面的截线方程为：

$$\frac{1}{2}(\frac{-c}{A}-\frac{ab}{AB}y^*+1)^2+\frac{A^4}{A^2B^2}y^{*2}=4(\frac{a}{A}x^*+\frac{bc}{AB}y^*+3),$$

整理得：

$$\frac{c^2}{2A^2}x^{*2}-\frac{abc}{A^2B}x^*y^*+\frac{a^2b^2+2A^4}{2A^2B^2}y^{*2}-\frac{c}{A}x^*-4\frac{a}{A}x^*-\frac{ab}{AB}y^*-\frac{4bc}{AB}y^*+\frac{1}{2}=12, \cdots(5')$$

因为次方程为圆，故有

$$abc=0, \frac{c^2}{2A^2}=\frac{a^2b^2+2A^4}{2A^2B^2}.$$

由a,b不能同时为0，故存在以下几种情况：

(1). $c=0$, 不成立；

(2). $b=0$, 不成立；

(3). $a=0$, 得$b^2=c^2$，不妨设$b=c=1$，此时方程为圆。

此时平面方程为：

$y+z-3=0$,或$y-z+3=0. \cdots(5')$