# 浙江大学2014－2015学年秋冬学期

## 《概率论与数理统计》期末考试试卷解答

一．1. 0.4, 3/8

2. $1-5e^{-4}=0.908$，$C_3^2(1-5e^{-4})^2 5e^{-4}=0.227$.

3. 3/4，$x^2/4$，$2/3\theta$，不是相合估计.

4. 0.68，25/24.　　5. 方差分析.　　6. $\hat{y}=94.27-3.86x$.

二．（1） 4+2 分

| $X_1 \setminus X_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 7/16 | 3/16 |
| 1 | 3/16 | 3/16 |
| $P(X_2=j)$ | 5/8 | 3/8 |

(2) $E(X_1)=E(X_2)=3/8, E(X_1X_2)=3/16, D(X_1)=D(X_2)=15/64,$

$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=3/64, \rho_{X_1X_2}=\dfrac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)D(X_2)}}=1/5.$ 12 分

三．（1）$P(X>2|X>1)=P(X>1)=e^{-1}=0.368$，　3 分

（2）$P(Y\le 2|X=1)=\int_{-\infty}^{2} f_{Y|X}(y|1)dy=\int_1^2 e^{-(y-1)}dy=1-e^{-1}=0.632$，　6 分

（3）$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y<\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$　8 分

$P(Y<3X)=\int_0^{\infty}dx\int_x^{3x}e^{-y}dy=\int_0^{\infty}(e^{-x}-e^{-3x})dx=\dfrac{2}{3}$　11 分

（4）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}, y>0, \\ 0, \quad y\le 0. \end{cases}$　14 分.

四．$Y\overset{\text{近似}}{\sim}N(12000,90000), P(Y>11700)\approx 1-\Phi(-1)=0.84$，　5 分

$F_U(u)=P(U\le u)=P(Y-Z\le u)$
$=P(Z=1800)P(Y\le u+1800)+P(Z=900)P(Y\le u+900)$
$+P(Z=300)P(Y\le u+300)+P(Z=0)P(Y\le u)$

$\approx 0.01\Phi(\dfrac{u-10200}{300})+0.05\Phi(\dfrac{u-11100}{300})+0.5\Phi(\dfrac{u-11700}{300})+0.44\Phi(\dfrac{u-12000}{300})$

$P(U>11700)\approx 1-\{0.01\Phi(5)+0.05\Phi(2)+0.5\Phi(0)+0.44\Phi(-1)\}=0.6206.$　10 分

五．矩估计：$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\theta)dx=\int_1^{\infty}\theta x^{-\theta}dx=\frac{\theta x^{-\theta+1}\Big|_1^{\infty}}{-\theta+1}=\frac{\theta}{\theta-1}$， 3 分

$\theta=\frac{\mu_1}{\mu_1-1}$ ， $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$ 6 分

极大似然估计：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^n(x_1\dots x_n)^{-\theta-1}$ 9 分

$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$， $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$. 12 分

六．（1） $E(S_w^2)=\frac{6}{13}E(S_1^2)+\frac{7}{13}E(S_2^2)=\sigma^2$， 1 分

$Mse(S_w^2)=E(S_w^2-\sigma^2)^2=D(S_w^2)=\frac{36}{169}D(S_1^2)+\frac{49}{169}D(S_2^2)$ 3 分

$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\Rightarrow D(S_1^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$， $Mse(S_w^2)=D(S_w^2)=\frac{2\sigma^4}{13}$ 4 分

（2） $\bar{x}=2.51,s_1^2=0.0083,\bar{y}=2.62,s_2^2=0.0114$ 8 分

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，拒绝域$\frac{S_1^2}{S_2^2}\le F_{0.975}(6,7)$,或$\frac{S_1^2}{S_2^2}\ge F_{0.025}(6,7)$

计算得，$\frac{S_1^2}{S_2^2}=0.728$， $F_{0.975}(6,7)=\frac{1}{5.7}=0.175,F_{0.025}(6,7)=5.12$

不落在拒绝域内，接受原假设。 11 分

$p=P(F(6,7)>0.728)=0.643,P_{\_}=2\min(p,1-p)=0.714$. 13 分

(3) $\mu_1-\mu_2$的置信度为95%的双侧置信区间

$(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{0.025}(13)s_w\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}})=(-0.11\pm0.112)=(-0.222,0.002)$. 16 分