第 5 讲：分式线性变换 2020-3-10

1. (再回首：全纯函数) 证明

$$f(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(y\cos y+x\sin y)$$

在复平面上全纯.

2. (像圆周的方程) 假设 p,q 为复球面的两个不同点, 实数 $\lambda>0$. 证明分式线性变换 f 把圆周

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right|=\lambda$$

映为圆周

$$\left|\frac{w-f(p)}{w-f(q)}\right|=\lambda\left|\frac{q-f^{-1}(\infty)}{p-f^{-1}(\infty)}\right|.$$

3. (交比的所有可能性) 给定复球面上的 4 个不同点 z_0,z_1,z_2,z_3, 通过四点之间做置换, 可以得到很多不同的交比值. 记 $\lambda=(z_0,z_1,z_2,z_3)$, 假设 $\lambda\in\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}$. 证明:

(a). 保持四点交比不变的置换只有四个.

(b). 通过置换得到的交比所有可能的取值为

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{1}{1-\lambda},\ 1-\frac{1}{\lambda}.$$

4. 证明复球面上的 4 个不同点 z_1,z_2,z_3,z_4 总是可以通过分式线性变换分别映为 $1,-1,k,-k$ 的四个点. 并求出 k 的所有可能取值.

5. (标准形式) 称两个分式线性变换 f,g 共轭, 如果存在一个分式线性变换 h 满足：$g\circ h=h\circ f$.

(a). 证明任何一个分式线性变换总是共轭于以下两种标准形式之一

$$z\mapsto z+1;\ z\mapsto\lambda z,\lambda\neq0.$$

(b). 证明任何一个实系数变换

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},ad-bc=1$$

总是共轭于以下三种标准形式之一

$$z\mapsto z+1;\ z\mapsto\lambda z,\lambda>0;\ z\mapsto\frac{\sin\theta+z\cos\theta}{\cos\theta-z\sin\theta},\theta\in\mathbb{R}.$$

6. (不动点与可交换映射) 记 $Fix(f)$ 为分式线性变换的不动点集, 如果 $f \neq Id$, 我们知道这个集合至多包含两个点. 如果两个非恒等变换 f, g 满足 $Fix(f) = Fix(g)$, 证明

$$f \circ g = g \circ f.$$

反之成立吗？说明理由.

7. (分式线性变换:Thurston 的观点) 假设 f 是一个分式线性变换, 满足 $f(0) \neq \infty$, 证明恒等式

$$f(z) = \frac{(2f'(0)^2 - f(0)f''(0))z + 2f(0)f'(0)}{-f''(0)z + 2f'(0)}.$$

这说明一个分式线性变换可以由某一点的取值, 导数, 二阶导数三个量唯一确定.