解 析 几 何

December 19, 2019

作业 (P100:2, 4, 5, 7; P108:1, 2, 3, 5, 6, 7)

2. 解：因为绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 所以此旋 转变换的坐标变换公式得

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}.$$

由此可得

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'. \end{cases}$$

因此曲线 $2xy = a$ 在此旋转变换下的曲线方程为

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = a,$$

即

$$y^2 - x^2 = a.$$

4. 证明： (1). 设 O 是 σ 的不动点，即$\sigma(O) = O$ 以O为原点,建立直角坐标系$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$,则在上述坐标系下σ的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta. \end{cases}$$

由于σ只有一个不动点,则易知$\cos\theta \neq 1$,如果σ的坐标变换为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta. \end{cases}$$

记
$$C=\left[\begin{array}{ll}\cos\theta & \sin\theta,\\ \sin\theta & -\cos\theta.\end{array}\right]$$
则直接计算可得$|C-E|=0$,从而σ还有别的不动点,矛盾. 这样在上述坐标系下σ的坐标变换公式为
$$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases}$$
由于存在旋转变换,其在上面取定坐标系的坐标公式恰为上式，而任一等距变换在取定坐标系的坐标公式是唯一的，即知σ 为旋转变换.

(2). 设 A,B 为 σ 的不动点, 即 $\sigma(A)=A,\sigma(B)=B$. 那么对于 l_{AB} 上任意其它一点 C,

(1): 如果C在线段AB之间,则有
$$d(A,C)+d(C,B)=d(A,\sigma(C))+d(B,\sigma(C))=d(A,B).$$
从而$\sigma(C)$在线段AB 之间, 由于等距变换保持线段的分比, 则$\sigma(C)=C$.

(2): 如果C在线段AB之外, 不妨设$d(B,C)=d(A,C)+d(A,B)$, 则有
$$d(B,\sigma(C))=d(\sigma(C),A)+d(A,B).$$
从而$\sigma(C)$在直线AB上, 再由等距变换保持线段的分比, 则$\sigma(C)=C$.

现以A为原点, AB 为 x 轴建立平面直角坐标系. 利用 σ 至少有两个不动点, 则σ 的坐标变换公式必为
$$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ y'=x\sin\theta-y\cos\theta.\end{cases}$$
再由x 轴上的点均为不动点, 知
$$\cos\theta=1,\quad \sin\theta=0.$$
可得
$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=-y.\end{cases}$$
从而σ 为关于 x 轴(也就是直线AB) 的反射.

5. 证明：取平面上的直角坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, 对$k=1,2$, 设旋转中心 O_k 在此坐标系下的坐标为 (x_k,y_k), 那么 $\vec{r}_k$ 在此直角坐标系下的坐标变换公式为
$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_k & -\sin\theta_k\\ \sin\theta_k & \cos\theta_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_k\\ y-y_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}.$$

记矩阵

$$C_k=\begin{pmatrix}\cos\theta_k & -\sin\theta_k\\ \sin\theta_k & \cos\theta_k\end{pmatrix},\ k=1,2.$$

那么对任意的点 $P(x,y)$，有

$$\vec{r}_1(P)=C_1\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_2\circ\vec{r}_1(P)&=\vec{r}_2\left(C_1\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\right)\\ &=C_2\left(C_1\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}-\begin{matrix}x_2\\ y_2\end{matrix}\right)+\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\\ &=C_2C_1\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}.\qquad(5\text{-}1)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\vec{r}_2\circ\vec{r}_1(P)=&\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}.\qquad(5\text{-}2)\end{aligned}$$

(1). 当 $\theta_1+\theta_2=0$ (或 2π的整数倍)时，由(5-2)得

$$\begin{aligned}\vec{r}_2\circ\vec{r}_1(P)&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注意到

$$\overrightarrow{O_1\vec{r}_2(O_1)}=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1-x_2\\ y_1-y_2\end{pmatrix},$$

所有 $\vec{r}_2\circ\vec{r}_1$ 是以 $\overrightarrow{O_1\vec{r}_2(O_1)}$ 为平移向量的平移变换.

(2). 当 $\theta_1+\theta_2\neq 0$ (不是 2π的整数倍)时，注意到(5-2)中的坐标变换矩阵$\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}$仍为正交阵, 所以变换$\vec{r}_2\circ\vec{r}_1$至少有一个不动

点. 设 $Q\left(x_0, y_0\right)$ 是 $\vec{r}_2 \circ \vec{r}_1$ 的一个不动点，那么再由(5-1)得

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= C_2C_1\begin{pmatrix} x_0-x_1 \\ y_0-y_1 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= C_2C_1\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}-C_2C_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

上式两边同时左乘 C_2^{-1}, 且移项得

$$
\left(C_2-C_1\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=-C_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}+C_2^{-1}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{5-3}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\theta_2-\cos\theta_1 & \sin\theta_1+\sin\theta_2 \\ -\sin\theta_1-\sin\theta_2 & \cos\theta_2-\cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&=-\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5-4}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\det\left(C_2-C_1\right)=\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)^2+\left(\sin\theta_1+\sin\theta_2\right)^2=0 \\
\Longleftrightarrow\ \theta_1+\theta_2=0\ \big(\text{或}2\pi\text{的整数倍}\big),
\end{aligned}
$$

又 $\theta_1+\theta_2\neq 0$, 所以由线性代数的知识知(5-3) 有唯一解. 也就是说 $\vec{r}_2\circ\vec{r}_1$ 有唯一的不动点, 所以是以此点为中心的旋转变换. 且由(5-1)知旋转角为$\theta_1+\theta_2$. 由线性代数中的克莱默法则解得此不动点Q的坐标为

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{2\cos(\theta_1+\theta_2)-2} \\ -\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{2\cos(\theta_1+\theta_2)-2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&\quad+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{2\cos(\theta_1+\theta_2)-2} \\ \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{2\cos(\theta_1+\theta_2)-2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&\quad+\begin{pmatrix} \frac{\cos\theta_1-\cos\theta_2}{2\cos(\theta_1+\theta_2)-2} & \frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{2\cos(\theta_1+\theta_2)-2} \\ -\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{2\cos(\theta_1+\theta_2)-2} & \frac{\cos\theta_1-\cos\theta_2}{2\cos(\theta_1+\theta_2)-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

7. 证明: 由定理4.1.1知, 必存在从直角坐标系$I=\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ 到$I^*=\{O^*;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*\}$的等距变换 σ. 我们现在只证明σ的唯一性. 因为I 和 I^* 具有相同的定向, 所以它是第一类等距变. 再次由定理4.1.1知, σ可分解为绕原点的旋转变

换和平移的复合. 反证法, 设存在两个这样的分解, 即分别存在绕原点的旋转变换σ_1,σ_1^* 和平移σ_2, σ_2^* , 满足

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma = \sigma_1^* \circ \sigma_2^*.$$

因为σ_1, σ_1^*, σ_2 , σ_2^* 均可逆, 可知

$$\sigma_1^{*-1} \circ \sigma_1 = \sigma_2^* \circ \sigma_2^{-1}.$$

注意到 $\sigma_1^{*-1} \circ \sigma_1$ 是平移, $\sigma_2^* \circ \sigma_2^{-1}$ 是旋转, 因此只可能是

$$\sigma_1^{*-1} \circ \sigma_1 = \sigma_2^* \circ \sigma_2^{-1} = id,$$

因此 $\sigma_1 = \sigma_1^*$, $\sigma_2 = \sigma_2^*$.

如下方法也是可以的: 由于I, I^*都是右手直角坐标系, 则存在正交矩阵A使得 $(\vec{e_1}^*, \vec{e_2}^*) = (\vec{e_1}, \vec{e_2})A$.记$O^*$在原来坐标系的坐标为 (x_0, y_0), 并作如下变换σ

$$\begin{cases} x' = x_0 + a_{11}x + a_{12}y \\ y' = y_0 + a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 则$\sigma$为等距变换, 且$\sigma$把$I$变成$I^*$.

下证唯一性.假设σ_1, σ_2都是把I变成I^*的等距变换. 则对于平面中任一点p, 令$\overrightarrow{OP} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$, 则有

$$\sigma_1(\overrightarrow{OP}) = \sigma_1(a\vec{e_1} + b\vec{e_2}) = a\sigma_1(\vec{e_1}) + b\sigma_1(\vec{e_2}) = a\vec{e_1}^* + b\vec{e_2}^*$$

同理可得$\sigma_2(\overrightarrow{OP}) = a\vec{e_1}^* + b\vec{e_2}^*$, 从而 $\sigma_1(\overrightarrow{OP}) = \sigma_2(\overrightarrow{OP})$.

另一方面, $\sigma_i(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\sigma_i(O)\sigma_i(P)}, i = 1, 2$, 从而 $\overrightarrow{\sigma_1(O)\sigma_1(P)} = \overrightarrow{\sigma_2(O)\sigma_2(P)}$. 由于$\sigma_1(O) = O^* = \sigma_2(O)$, 则有 $\sigma_(P) = \sigma_2(P)$, 由P的任意性知$\sigma_1 = \sigma_2$, 唯一性得证.

第108页习题:

1. 解:记位似变换为σ,σ的位似中心为O,以O为原点建立坐标系$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$,则$\sigma$在$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$下的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

不妨设$\lambda > 0$(否则建立坐标系$\{O, -\vec{e_1}, -\vec{e_2}\}$即可) 下面做变换$\sigma_1, \sigma_2$,在坐标系$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$下$\sigma_1, \sigma_2$的坐标变换公式分别如下:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x \\ y_1 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = \lambda y \end{cases}$$

则易知$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$,并且显然$\sigma_1, \sigma_2$为两个互相垂直方向的伸缩变换.

2. 解:(1) 记相似变换为σ, 相似比为λ,作一个位似系数为$\frac{1}{\lambda}$ 且以原点为位似中心的位似变换τ,则$\varphi = \tau \circ \sigma$为相似比为1的相似变换, 因而是等距变换,而$\sigma = \tau^{-1} \circ \varphi$.由于$\tau^{-1}$也是位似变换, 从而平面上相似变换可分解成一个平面上等距变换与一个位似变换的乘积.

(2)任取两个非零向量, 记为$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

如果A, B, C共线,则由于相似变换保持线段的分比,易知$\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)$仍然共线且显然 $\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)}, \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)}$的夹角与$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$的夹角相同.

如果A, B, C不共线,则不妨设

$$|\overrightarrow{AB}| = \lambda|\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)}|, |\overrightarrow{AC}| = \lambda|\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)}|, |\overrightarrow{BC}| = \lambda|\overrightarrow{\sigma(B)\sigma(C)}|$$

从而三角形ABC与三角形$\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C)$相似,$\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)}, \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)}$的夹角与$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$的夹角相同.

3. 解: (1)

取直线AB上任一点C,则不妨设$\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)} = \sigma(\overrightarrow{AC}) = \sigma(a\overrightarrow{AB}) = a\sigma(\overrightarrow{AB})$$

利用A, B为σ的不动点, 可得

$$\overrightarrow{A\sigma(C)} = a\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$

既得 $C = \sigma(C)$.

(2)任取平面上一点D,不妨设$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$,
$\Rightarrow \sigma(\overrightarrow{AD}) = \sigma(a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}) = a\sigma(\overrightarrow{AB}) + b\sigma(\overrightarrow{AC}) = a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$\Rightarrow \overrightarrow{A\sigma(D)} = \overrightarrow{AD}$,从而$D = \sigma(D)$,由$D$的任意性,可知平面上任一点为不动点.

5. 解: (1). 设此仿射变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x_0 + c_{11}x + c_{12}y \\ y' = y_0 + c_{21}x + c_{22}y \end{cases}.$$

由以下各点的对应关系知

$$A\,(1,0) \longmapsto A'\,(3,0) \Longrightarrow \begin{cases} 3 = x_0 + c_{11} \\ 0 = y_0 + c_{21} \end{cases},$$

$$B\,(0,-1) \longmapsto B'\,(-2,1) \Longrightarrow \begin{cases} -2 = x_0 - c_{12} \\ 1 = y_0 - c_{22} \end{cases},$$

$$C\left(-2,1\right)\longmapsto C'\left(0,-5\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}0=x_0-2c_{11}+c_{12}\\-5=y_0-2c_{21}+c_{22}\end{array}\right.,$$

由此可解得

$$x_0=1,y_0=-1,c_{11}=2,c_{12}=3,c_{21}=1,c_{22}=-2.$$

即所求得仿射变换为

$$\left\{\begin{array}{l}x'=1+2x+3y\\y'=-1+x-2y\end{array}\right..$$

(2). 设点(x,y)经过此仿射变换σ得到的象点的坐标为(x',y'). 由于σ将直线 $3x+2y+1=0$ 变成直线 $x+y-3=0$, 所以存在 s 使得

$$x'+y'-3=s\left(3x+2y+1\right).$$

又σ将$(1,1)$ 变成$(3,6)$, 代入上式得$s=1$, 则上式变为

$$x'+y'=3x+2y+4. \tag{5-2-1}$$

同样由直线$8x+3y+10=0$的象是直线$2x+3y-3=0$, 知存在t, 使得

$$2x'+3y'-3=t\left(8x+3y+10\right),$$

再由$(1,1)$ 变成$(3,6)$, 代入上式得$t=1$, 则上式变为

$$2x'+3y'=8x+3y+13 \tag{5-2-2}$$

联立(5-2-1)和(5-2-2)式可得

$$\left\{\begin{array}{l}x'=x+3y-1\\y'=2x-y+5\end{array}\right..$$

(3). 和上题同样的方法. 设点(x,y)经过此仿射变换σ得到的象点的坐标为(x',y'). 由于σ将直线 $3x+2y+1=0$ 变成直线 $3x+2y+1=0$, 所以存在 s 使得

$$3x'+2y'+1=s\left(3x+2y+1\right).$$

又σ将$(0,0)$ 变成$(1,1)$, 代入上式得$s=6$, 则上式变为

$$3x'+2y'=18x+12y+5. \tag{5-3-1}$$

同样由直线 $x+2y+1=0$的象是直线 $x+2y+1=0$, 知存在t, 使得

$$x'+2y'+1=t\left(\ x+2y+1\right),$$

再由$(0,0)$ 变成$(1,1)$, 代入上式得$t=4$, 则上式变为

$$x'+2y'=4x+8y+3. \tag{5-3-2}$$

联立(5-3-1)和(5-3-2)式可得

$$\begin{cases} x'=-8x-8y+1 \\ y'=6x+8y+1 \end{cases}.$$

6. 解:(1) 首先由坐标变换矩阵为$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$得其变积系数为$|\det(C)|=6$.

设不变直线的方程为 $Ax'+By'+D=0$.因为坐标变换公式为,

$$\begin{cases} x'=2x+4y-1 \\ y'=3x+3y-3 \end{cases},$$

所以此直线的原像为

$$A(2x+4y-1)+B(3x+3y-3)+D=0,$$

即

$$(2A+3B)x+(4A+3B)y+(D-A-3B)=0.$$

再次由此直线的不变性知

$$\frac{2A+3B}{A}=\frac{4A+3B}{B}=\frac{D-A-3B}{D}$$

解得

$$A:B:D=3:4:-3 \quad \text{或} \quad A:B:D=1:-1:-1$$

因此不变直线为

$$3x+4y=3 \text{ 和 } x-y=1.$$

(2). 首先易得$3x+4y=3$ 和 $x-y=1$的交点为$(1,0)$.两直线在原坐标系 $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$下的方向矢量分别为 $(4,-3)$ 和 $(1,1)$. 因此新坐标系的原点为$O^*=(1,0)$, 且 $\vec{e}_1^*=(4,-3)^T$和 $\vec{e}_2^*=(1,1)^T$, 即

$$(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)A, \quad A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

又σ在原坐标系 $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$下的坐标变换矩阵为$C$, 即

$$(\sigma(\vec{e}_1),\sigma(\vec{e}_2))=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)C.$$

所以有

$$
\begin{aligned}
\left(\sigma\left(\vec{e}_1^*\right), \sigma\left(\vec{e}_2^*\right)\right) &= \left(\sigma\left(\vec{e}_1\right), \sigma\left(\vec{e}_2\right)\right) A = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right) CA \\
&= \left(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\right) A^{-1} CA = \left(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6-2}
$$

又$\sigma\left(O^*\right) = O^*$, 即$\sigma$在新坐标系$\{O^*, \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\}$下保持原点不动, 且坐标向量的变换满足(6-2), 所以σ在此坐标系下的坐标变换公式为

$$
\begin{cases} x' = -x \\ y' = 6y \end{cases}.
$$

7. 证明: (1). 直接将变换公式代入椭圆方程即得

$$
\begin{aligned}
& \frac{\left(x\cos\theta - \frac{a\sin\theta}{b} y\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b\sin\theta}{a} x - y\cos\theta\right)^2}{b^2} \\
= & \frac{1}{a^2} x^2 \cos^2\theta + \frac{1}{b^2} y^2 \sin^2\theta - \frac{2}{ab} xy \cos\theta \sin\theta \\
& + \frac{1}{b^2} y^2 \cos^2\theta + \frac{1}{a^2} x^2 \sin^2\theta - \frac{2}{ab} xy \cos\theta \sin\theta \\
= & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.
\end{aligned}
$$

(2). 设非零向量 (x_0, y_0) 在σ下不变, 那么有

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\frac{a\sin\theta}{b} \\ \frac{b\sin\theta}{a} & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.
$$

所以得

$$
0 = \det \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\frac{a\sin\theta}{b} \\ \frac{b\sin\theta}{a} & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} = 2 - 2\cos\theta.
$$

因此有 $\cos\theta = 1$, 所以 $\sin\theta = 0$. 那么 $\sigma = \mathbf{id}$. 与题设矛盾.