解 析 几 何

December 27, 2018

作业（P108: 5, 6, 7. P111: 1, 2. P112: 3, 4.）

5. 解: (1). 设此仿射变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x_0 + c_{11}x + c_{12}y \\ y' = y_0 + c_{21}x + c_{22}y \end{cases}.$$

由以下各点的对应关系知

$$A(1,0) \longmapsto A'(3,0) \Longrightarrow \begin{cases} 3 = x_0 + c_{11} \\ 0 = y_0 + c_{21} \end{cases},$$

$$B(0,-1) \longmapsto B'(-2,1) \Longrightarrow \begin{cases} -2 = x_0 \ - c_{12} \\ 1 = y_0 \ - c_{22} \end{cases},$$

$$C(-2,1) \longmapsto C'(0,-5) \Longrightarrow \begin{cases} 0 = x_0 - 2c_{11} + c_{12} \\ -5 = y_0 - 2c_{21} + c_{22} \end{cases},$$

由此可解得

$$x_0 = 1, y_0 = -1, c_{11} = 2, c_{12} = 3, c_{21} = 1, c_{22} = -2.$$

即所求得仿射变换为

$$\begin{cases} x' = 1 + 2x + 3y \\ y' = -1 + x - 2y \end{cases}.$$

(2). 设点(x,y)经过此仿射变换σ得到的象点的坐标为(x',y'). 由于σ将直线$3x+2y+1=0$ 变成直线 $x+y-3=0$, 所以存在 s 使得

$$x' + y' - 3 = s(3x + 2y + 1).$$

又σ将$(1,1)$ 变成$(3,6)$, 代入上式得$s=1$, 则上式变为

$$x' + y' = 3x + 2y + 4. \qquad (5\text{-}2\text{-}1)$$

同样由直线$8x+3y+10=0$的象是直线$2x+3y-3=0$, 知存在t, 使得

$$2x'+3y'-3=t\left(8x+3y+10\right),$$

再由$(1,1)$ 变成$(3,6)$, 代入上式得$t=1$, 则上式变为

$$2x'+3y'=8x+3y+13 \tag{5-2-2}$$

联立(5-2-1)和(5-2-2)式可得

$$\begin{cases} x'=x+3y-1 \\ y'=2x-y+5 \end{cases}.$$

(3). 和上题同样的方法. 设点(x,y)经过此仿射变换σ得到的象点的坐标为(x',y') . 由于σ将直线 $3x+2y+1=0$ 变成直线 $3x+2y+1=0$, 所以存在 s 使得

$$3x'+2y'+1=s\left(3x+2y+1\right).$$

又σ将$(0,0)$ 变成$(1,1)$, 代入上式得$s=6$, 则上式变为

$$3x'+2y'=18x+12y+5. \tag{5-3-1}$$

同样由直线 $x+2y+1=0$的象是直线 $x+2y+1=0$, 知存在t, 使得

$$x'+2y'+1=t\left(\ x+2y+1\right),$$

再由$(0,0)$ 变成$(1,1)$, 代入上式得$t=4$, 则上式变为

$$x'+2y'=4x+8y+3. \tag{5-3-2}$$

联立(5-3-1)和(5-3-2)式可得

$$\begin{cases} x'=-8x-8y+1 \\ y'=6x+8y+1 \end{cases}.$$

6. 解:(1) 首先由坐标变换矩阵为$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$得其变积系数为$\left|\det\left(C\right)\right|=6$.

设不变直线的方程为 $Ax'+By'+D=0$.因为坐标变换公式为,

$$\begin{cases} x'=2x+4y-1 \\ y'=3x+3y-3 \end{cases},$$

所以此直线的原像为

$$A\,(2x+4y-1)+B\,(3x+3y-3)+D=0,$$

即

$$(2A+3B)\,x+(4A+3B)\,y+(D-A-3B)=0.$$

再次由此直线的不变性知

$$\frac{2A+3B}{A}=\frac{4A+3B}{B}=\frac{D-A-3B}{D}$$

解得

$$A:B:D=3:4:-3 \quad \text{或} \quad A:B:D=1:-1:-1$$

因此不变直线为

$$3x+4y=3 \text{ 和 } x-y=1.$$

(2). 首先易得$3x+4y=3$ 和 $x-y=1$的交点为$(1,0)$.两直线在原坐标系 $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$下的方向矢量分别为 $(-4,3)$ 和 $(1,1)$. 因此新坐标系的原点为$O^*=(1,0)$, 且 $\vec{e}_1^*=(4,-3)^T$和 $\vec{e}_2^*=(1,1)^T$, 即

$$(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\,A,\quad A=\begin{pmatrix}4&1\\-3&1\end{pmatrix}.$$

又σ在原坐标系 $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$下的坐标变换矩阵为$C$, 即

$$(\sigma\,(\vec{e}_1)\,,\sigma\,(\vec{e}_2))=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\,C.$$

所以有

$$\begin{aligned}(\sigma\,(\vec{e}_1^*)\,,\sigma\,(\vec{e}_2^*))&=(\sigma\,(\vec{e}_1)\,,\sigma\,(\vec{e}_2))\,A=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\,CA\\&=(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*)\,A^{-1}CA=(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*)\begin{pmatrix}-1&0\\0&6\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{6-2}$$

又$\sigma\,(O^*)=O^*$, 即σ在新坐标系$\{O^*,\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*\}$下保持原点不动, 且坐标向量的变换满足(6-2), 所以σ在此坐标系下的坐标变换公式为

$$\left\{\begin{array}{l}x'=-x\\y'=6y\end{array}\right..$$

7. 证明: (1). 直接将变换公式代入椭圆方程即得

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(x\cos\theta-\frac{a\sin\theta}{b}y\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b\sin\theta}{a}x-y\cos\theta\right)^2}{b^2}\\
=&\frac{1}{a^2}x^2\cos^2\theta+\frac{1}{b^2}y^2\sin^2\theta-\frac{2}{ab}xy\cos\theta\sin\theta\\
&+\frac{1}{b^2}y^2\cos^2\theta+\frac{1}{a^2}x^2\sin^2\theta-\frac{2}{ab}xy\cos\theta\sin\theta\\
=&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

(2). 设非零向量 (x_0,y_0) 在σ下不变, 那么有

$$\begin{pmatrix}\cos\theta-1 & -\frac{a\sin\theta}{b}\\ \frac{b\sin\theta}{a} & \cos\theta-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\vec{0}.$$

所以得

$$0=\det\begin{pmatrix}\cos\theta-1 & -\frac{a\sin\theta}{b}\\ \frac{b\sin\theta}{a} & \cos\theta-1\end{pmatrix}=2-2\cos\theta.$$

因此有 $\cos\theta=1$, 所以 $\sin\theta=0$. 那么 $\sigma=\mathbf{id}$. 与题设矛盾.

第111页习题

1.解: 记矩阵

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

直接计算可得C为正交矩阵, 并且$|C|=1$, 从而知变换σ是第一类等距变换. 令$(C-E)X=0$, 这里X是一个列向量, 则可得$X^T=[\sqrt{2}-1,-1,1]$. 显然原点O是变换的不动点. 则该变换的不动直线方程为

$$\frac{x}{\sqrt{2}-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}.$$

取直线外一点$A=(0,2,2)$, 则$\sigma(A)=(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$. 记直线的方向向量为$\vec{v}$,易知

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{v}=0,\ |\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{2},\ |\overrightarrow{O\sigma(A)}|=2\sqrt{2}.$$

从而有

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\sigma(A)}}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4}.$$

即得旋转角度为$\theta=\arccos\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$

2.解:由已知可设坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

其中矩阵C为正交矩阵,变换将x轴变成直线$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$,则可得$C$的形式如下

$$C = \begin{bmatrix} \pm l & c_{12} & c_{13} \\ \pm m & c_{22} & c_{23} \\ \pm n & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

第112页习题

3.证明:(1) 设这三个点为A, B, C, 对于平面ABC中任一点D, 有$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. 利用$A, B, C$为 σ 的不动点, 则

$$\sigma(\overrightarrow{AD}) = \sigma(a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}) = a\sigma(\overrightarrow{AB}) + b\sigma(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD}.$$

而$\sigma(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{A\sigma(D)}$, 即得$\sigma(D) = D$.

(2)类似地, 设不共面的四个点分别为A, B, C, D. 对于空间中任一点P, 有

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}.$$

则有

$$\sigma(\overrightarrow{AP}) = \sigma(a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AD}) = a\sigma(\overrightarrow{AB}) + b\sigma(\overrightarrow{AC}) + c\sigma(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AP}.$$

而$\sigma(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{A\sigma(P)}$, 从而$\sigma(P) = P$, 由$P$的任意性即得$\sigma$为恒等变换.

4.解: (1)设坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

现在利用平面$x + y + z + 1 = 0$上的每个点都是不动点,则(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)都是不动点,带入坐标变换公式可得矩阵C为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_0 & -x_0 & -x_0 \\ -y_0 & 1 - y_0 & -y_0 \\ -z_0 & -z_0 & 1 - z_0 \end{pmatrix}$$

再利用$(1,-1,2)$的像为$(2,1,0)$, 可得$x_0=-1, y_0=-2, z_0=2$. 即得坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=2x+y+z-1, \\ y'=2x+3y+2z-2, \\ z'=-2x-2y-z+2. \end{cases}$$

(2) 由于仿设变换保持三张平面不变, 则可设

$$\begin{cases} x'+y'-1=a(x+y-1) \\ y'+z'=b(y+z) \\ x'+z'+1=c(x+z+1) \end{cases}$$

将$(x,y,z)=(0,0,1),(x',y',z')=(1,1,1)$代入上式,可得 $a=-1, b=2, c=\frac{3}{2}$.解得仿设变换的变换公式为

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{4}(x-6y-z+5), \\ y'=\frac{1}{4}(-5x+2y+z+3), \\ z'=\frac{1}{4}(5x+6y+7z-3). \end{cases}$$