解 析 几 何

December 29, 2019

第111页习题

1.解: 记矩阵

$$C=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

直接计算可得C为正交矩阵, 并且$|C|=1$, 从而知变换σ是第一类等距变换. 令$(C-E)X=0$, 这里X是一个列向量, 则可得$X^T=[\sqrt{2}-1,-1,1]$. 显然原点O是变换的不动点. 则该变换的不动直线方程为

$$\frac{x}{\sqrt{2}-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}.$$

取直线外一点$A=(0,2,2)$, 则$\sigma(A)=(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$. 记直线的方向向量为$\vec{v}$,易知

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{v}=0,\ |\overrightarrow{OA}|=2\sqrt{2},\ |\overrightarrow{O\sigma(A)}|=2\sqrt{2}.$$

从而有

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\sigma(A)}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4}.$$

即得旋转角度为$\theta=\arccos\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$

2.解:由已知可设坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

其中矩阵C为正交矩阵,变换将x轴变成直线$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$,则可得$C$的形式如下

$$C=\begin{bmatrix} \pm l & c_{12} & c_{13} \\ \pm m & c_{22} & c_{23} \\ \pm n & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

第112页习题

3.证明:(1) 设这三个点为A,B,C, 对于平面ABC中任一点D, 有$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$. 利用$A,B,C$为 σ 的不动点, 则

$$\sigma(\overrightarrow{AD})=\sigma(a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC})=a\sigma(\overrightarrow{AB})+b\sigma(\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}.$$

而$\sigma(\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{A\sigma(D)}$, 即得$\sigma(D)=D$.

(2)类似地, 设不共面的四个点分别为A,B,C,D. 对于空间中任一点P, 有

$$\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}.$$

则有

$$\sigma(\overrightarrow{AP})=\sigma(a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD})=a\sigma(\overrightarrow{AB})+b\sigma(\overrightarrow{AC})+c\sigma(\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AP}.$$

而$\sigma(\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{A\sigma(P)}$, 从而$\sigma(P)=P$, 由$P$的任意性即得$\sigma$为恒等变换.

4.解: (1)设坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

现在利用平面$x+y+z+1=0$上的每个点都是不动点,则(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)都是不动点,带入坐标变换公式可得矩阵C为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-x_0 & -x_0 & -x_0 \\ -y_0 & 1-y_0 & -y_0 \\ -z_0 & -z_0 & 1-z_0 \end{pmatrix}$$

再利用$(1,-1,2)$的像为$(2,1,0)$, 可得$x_0=-1,y_0=-2,z_0=2$. 即得坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=2x+y+z-1, \\ y'=2x+3y+2z-2, \\ z'=-2x-2y-z+2. \end{cases}$$

(2) 由于仿设变换保持三张平面不变, 则可设

$$\begin{cases} x'+y'-1=a(x+y-1) \\ y'+z'=b(y+z) \\ x'+z'+1=c(x+z+1) \end{cases}$$

将$(x,y,z)=(0,0,1),(x',y',z')=(1,1,1)$代入上式,可得 $a=-1,b=2,c=\frac{3}{2}$.解得仿设变换的变换公式为

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{4}(x-6y-z+5), \\ y'=\frac{1}{4}(-5x+2y+z+3), \\ z'=\frac{1}{4}(5x+6y+7z-3). \end{cases}$$

5.解：不妨设$a,b,c>0$,作变换σ,其坐标变换公式如下:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

则σ把椭球面变为单位球面. 单位球面的体积为$\frac{4\pi}{3}$, 变换矩阵C的行列式为$\frac{1}{abc}$, 可知椭球面的体积为$\frac{4\pi abc}{3}$.