《概率论与数理统计》1

注： $\Phi(1)=0.84,\ \Phi(1.645)=0.95,\ \Phi(1.96)=0.975, \Phi(2.31)=0.99$，
$t_{0.05}(8)=1.86,\ t_{0.025}(8)=2.31,\ t_{0.05}(16)=1.75,\ t_{0.025}(16)=2.12,$
$c^{2}_{0.975}(8)=2.18,\ \ c^{2}_{0.95}(8)=2.73,\ \ c^{2}_{0.05}(8)=15.51,\ \ c^{2}_{0.025}(8)=17.53,$
$c^{2}_{0.05}(4)=9.49,\ \ c^{2}_{0.05}(3)=7.82, F_{0.025}(9,7)=4.82,\ F_{0.025}(7,9)=4.2.$

一．填空题（每小格 3 分，共 39 分。每个分布要求写出参数）：

1. 设事件 *A,B,C* 相互独立，已知 $P(A)=0.5, P(A\cup B)=0.6, P(\bar{C}\mid A)=0.4,$ 则 P(B)=

__________，$P(A\cup B\cup C)=$______________.

2. 在区间 $(0,q)$ (参数 $q>0$) 内独立重复观测 5 次，记为 $X_1,\mathbf{L},X_5, X_i\sim U(0,q)$，(1) 设 $q=2$，则最大观测值小于 1.8 且最小观测值大于 0.4 的概率为____________; (2) 设 $q>0$ 未知，5 次观测值为 1.18,0.48,1.59,0.13,1.76，则 q 的矩估计值是_____________.

3.某超市从开门到第 1 位顾客进入所需时间 *X*(分钟)的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-x/5}, x>0\\ 0,\quad\ \ 其他.\end{cases}$

则超市开门后的 10 分钟内至少有 1 人进入的概率为_______________; 从开门到第 1 位顾客进入平均花___________分钟.

4．设某地区男性成年人的身高 *X*（厘米）与体重 *Y*（公斤）服从二元正态分布，$X\sim N(169.5,10.5^2), Y\sim N(57.3,16.2^2),\ \ r_{XY}=0.6$，从该地区独立随机选 *n* 名男子，测得身高体重为 $(X_1,Y_1)\mathbf{L}(X_n,Y_n)$，记 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \bar{Y}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$。则 $\bar{X}$ 服从__________

分布，$Cov(\bar{X},\bar{Y})$=________，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(X_i-169.5)(Y_i-57.3)}{10.5\times 16.2}\xrightarrow{P}$__________.

5. 设总体 $X\sim N(m,s^2)$，m,s^2 均未知，$X_1,\mathbf{L},X_9$ 为来自 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S 分别是样本均值和样本标准差，(1) 若根据样本观测值，$\bar{x}=7.076, s=1.2$，则 s^2 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为____________________，检验假设 $H_0: m=8, H_1: m\neq 8$ 的 P_值为

____________；(2) 设 X_{10} 是从总体中独立抽取的另一次观测，则 $\dfrac{3(X_{10}-\bar{X})}{\sqrt{10}S}$ 服从

________________分布.

6. 在研究我国人均消费水平问题上，考虑人均国民收入 x（千元）对人均消费金额 Y（千元）的影响。设 $Y \sim N(a+bx, s^2)$, a, b, s^2 均未知，$(x_1, y_1)\mathbf{L}(x_{19}, y_{19})$ 是 1980-1998 年的数据，已知 $\bar{x}=2.32$, $\bar{y}=1.09$, $\sum_{i=1}^{19}(x_i-\bar{x})^2=73.980$, $\sum_{i=1}^{19}(y_i-\bar{y})^2=15.343$,

$\sum_{i=1}^{19}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=33.291$, 采用最小二乘估计，则回归方程 $\hat{y}=$________________.

二.（11 分）有 A,B 两盒，A 盒中有 1 个红球 1 个白球，B 盒中有 4 件正品 2 件次品。先从 A 盒中采用放回抽样取 2 球，X 表示从 A 盒中取到的红球数，若 X=1 时，则从 B 盒中采用不放回抽样取 3 件产品；若 $X\neq 1$时，从 B 盒中采用不放回抽样取 2 件产品。Y 表示从 B 盒中取到的次品数。(1)已知 X=1, 求 Y 的条件分布律；(2) 求 Y 的分布律.

三.（12 分）设总体 X 服从参数为 l 的泊松分布，$X_1, \mathbf{L}, X_{200}$ 为来自 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值;（1）若 $l=2$，求 $P(X_1>2)$ 的值，以及 $P(\bar{X}>2.1)$ 的近似值。（2）若 l >0 未知，判断统计量 $T=\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}X_i(X_i-1)$ 是否为 l^2 的无偏估计量，说明理由.

四．(12 分) 设随机变量(X,Y)的密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}6(x-y), 0<y<x<1\\ 0, 其它\end{cases}$,求

（1）$P(Y$>0.5);（2）X 的边际密度函数 $f_X(x)$ (3) 设 $Z=X+Y$,求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$.

五.（12 分）设两个独立正态总体 $X \sim N(m_1, s_1^2), Y \sim N(m_2, s_2^2)$,现分别从总体 X 和 Y 中取得容量为 10 和 8 的样本，测得样本均值 $\overline{x} = 147.32, \overline{y} = 141.11$，样本标准差 $s_1 = 6.4$，$s_2 = 5.4$.(1)以显著水平 0.05 检验假设 $H_0 : s_1^2 = s_2^2, H_1 : s_1^2 \neq s_2^2$； (2) 设 $s_1^2 = s_2^2 = s^2$ 未知，求 $m_1 - m_2$ 的置信度为 95%的双侧置信区间.

六.（14 分）对总体进行 100 次独立重复观察，得到观察值 $x_i, i = 1, \mathbf{L}, 100$,其中最小值为 1.01，最大值为 520.1，平均值为 16.7，具体数据分布如下：

观察值 x_i 的范围	$x \le 1.6$	$1.6 < x \le 2$	$2 < x \le 4$	$4 < x \le 10$	$x > 10$
频数 n_i	33	17	23	12	15

(1)若总体 X 的概率密度函数为 $f(x,q) = \begin{cases} q / x^2, x \ge q \\ 0, 其它 \end{cases}$，求 q 的极大似然估计值；

（2）在显著水平 0.05 下用 c^2 拟合检验法检验 H_0：总体 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, x \ge 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$.

《概率论与数理统计》2

注：$\Phi(1)=0.84$, $\Phi(1.64)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $t_{0.109}(5)=1.409$,
$t_{0.05}(5)=2.02$, $t_{0.025}(5)=2.57$, $t_{0.05}(15)=1.75$, $t_{0.025}(15)=2.13$,
$\chi^2_{0.975}(5)=0.83$, $\chi^2_{0.95}(5)=1.15$, $\chi^2_{0.05}(5)=11.07$, $\chi^2_{0.025}(5)=12.83$,
$\chi^2_{0.05}(4)=9.49$, $\chi^2_{0.05}(3)=7.82$, $F_{0.05}(2,15)=3.68$, $F_{0.05}(3,15)=3.29$.

一. 填空题（每小格 3 分，共 33 分）：

1. 设 A,B 为两个随机事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$。（1）若 A与B 至少有一个发生的概率为 0.7，则 A与B 一定相互独立吗？答：_______（是或否）；（2）若 A与B 至少有一个发生的概率为 0.9，则 A与B 一定不相容吗？答：_______（是或否）.

2. 设一顾客在饭店等待服务的时间服从均值为 5 分钟的指数分布，则一顾客等待时间超过 5 分钟的概率为__________，在该顾客至少等了 5 分钟的情况下，他继续等待的时间不到 5 分钟的概率为__________.

3. 设某项试验成功的概率为 0.4，失败的概率为 0.6，（1）若独立重复进行 5 次试验，X 表示成功次数，则 $P\{X>3\}=$_________，（2）若独立重复进行，直到出现第 2 次成功为止，Y 表示总的试验次数，则 $P\{Y>3\}=$ _________.

4. 设 (X,Y) 服从二元正态分布，$X\sim N(5,3^2)$，$Y\sim N(0,2^2)$，ρ_{XY} 是 X与Y 的相关系数.（1）若 $\rho_{XY}=0$，则 $P\{X>2Y\}=$________，$\left(\dfrac{2X-3Y-10}{2X+3Y-10}\right)^2\sim$__________分布（写出参数）；（2）若 $X+Y$ 与 $X-3Y$ 相互独立，则 $\rho_{XY}=$ ________.（3）若对 Y 进行 n 次独立重复观测，结果是 $Y_1,\dots,Y_n$，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{Y_i}\xrightarrow{P}$ __________，当 $n=100$ 时，Y 的观测结果 $Y_1,\dots,Y_{100}$ 中大于 2 出现的次数不超过 22 次的概率近似值为_________.

二.（12 分）某厂生产的某产品的优质品率 X 有概率密度 $f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

供货时，经检验若优质品率超过 0.7，则商家就接收该批产品，若优质品率在 0.4～0.7 之间，商家有 60%可能性接收该批产品，若优质品率低于 0.4，商家有 10%可能性接收该批产品.（1）求商家接收该产品的概率；（2）若商家接收了该产品，求优质品率超过 0.7 的概率.

三.（10 分）对某银行的一个 ATM 机每隔 5 分钟观测使用的人数 X，共观测了 96 次，发现无人使用的情况出现 15 次，有 1 人使用的情况出现 27 次，2 人使用的情况出现 28 次，3 人使用的情况出现 19 次，4 人使用的情况出现 7 次．在显著水平 0.05 下用 χ^2 拟合检验法检验 $H_0: X\sim\pi(2)$.

四.（12 分）总体 $X\sim U(\theta,2\theta)$，参数 $\theta>0$ 未知， $X_1,\dots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$，判断 $\hat{\theta}^2$ 是否为 θ^2 的相合估计量，说明理由.（2）若 $n=10$，样本观测值为 1.59　2.18　2.31　1.54　1.55　2.89　1.64　2.96　1.51　2.94，求 θ 的极大似然估计值.

五.（15分）设随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$，(1) 求$P(X>0.5)$；(2) 求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(3) 判断$X$与$Y$是正相关，负相关还是不相关，说明理由；(4) 设$Z=\max(X,Y)$，求$Z$的分布函数$F_Z(z)$及概率密度$f_Z(z)$.

六.（18分）观察某餐厅厨房煤气灶A的煤气消耗量X（千瓦时），设$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，6天的观测数据为 5.1 5.5 7.4 6.8 7.5 7.3，计算得样本均值6.6，样本方差1.088，(1) 在显著水平 0.05 下检验假设$H_0:\mu_1=6,H_1:\mu_1\neq 6$，并计算$P_$值；(2) 求$\sigma^2$的置信度为95%的双侧置信区间。(3) 若对该餐厅另外两个煤气灶B和C的煤气消耗量Y和Z也进行观测，设$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，$Z\sim N(\mu_3,\sigma^2)$，X,Y,Z相互独立，数据如下：

煤气灶名	6天观测数据	样本均值	样本方差
A	5.1 5.5 7.4 6.8 7.5 7.3	6.6	1.088
B	4.8 4.4 6.5 6.3 5.6 7.2	5.8	1.140
C	3.9 4.0 5.4 5.1 5.2 6.4	5.0	0.876

请完成下面的方差分析表，

并在显著水平 0.05 下检验假设：$H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3,H_1:\mu_1,\mu_2,\mu_3$不全相等.

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
煤气灶				
误差				
总和	23.2			

《概率论与数理统计》3

注：$\Phi(0.91)=0.82$, $\Phi(1)=0.84$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.98$,
$t_{0.05}(15)=1.75$, $t_{0.025}(15)=2.13$, $F_{0.05}(2,15)=3.68$, $\chi^2_{0.05}(2)=5.99$,
$\chi^2_{0.975}(15)=6.26$, $\chi^2_{0.95}(15)=7.26$, $\chi^2_{0.05}(15)=25.00$, $\chi^2_{0.025}(15)=27.49$

一．填空题（每小格 3 分，共 39 分）：

1. A,B,C 为三个随机事件，设事件 A 与事件 B 相互独立，且当事件 A 与事件 B 至少有一个发生时，事件 C 一定发生。已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.4$，则 $P(A-B)=$______，事件 C 发生的概率最小值为______。

2. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布。已知 $D(2X+1)=E(2X+1)$，则 $E(X)=$______，$P(X\geq 2)=$______。

3. 有甲乙两只袋，甲袋里有 4 个红球，2 个白球；乙袋里有 2 个红球、2 个白球。现从甲袋中不放回取 2 个球放入乙袋，然后再从乙袋中不放回取出 2 球。以 X 表示从甲袋中取到的红球数，Y 表示从乙袋中取到的红球数，则 $P(X=1)=$______，$P(Y=0)=$______，$P(X=1|Y=0)=$______。若将这样的试验独立重复进行 n 次，X_i 表示第 i 次从甲袋中不放回取 2 球时取到的红球数，$i=1,2,...,n$，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛到______。

4．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_{16}$ 为来自 X 的简单随机样本，$\bar{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，$S^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\bar{X})^2$，(1) 设 $\mu=0,\sigma^2$ 未知，则 $\frac{(\sum_{i=1}^{8}X_i)^2}{\sum_{i=9}^{16}X_i^2}\sim$__________分布（要求写出参数）；(2) 设 μ,σ^2 均未知，则 σ^2 的矩估计量为______；若 $a\sum_{i=1}^{8}(X_{i+8}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计，则 $a=$________；μ 的置信度为 95% 的单侧置信上限为__________；假设 $H_0:\sigma^2\geq 15, H_1:\sigma^2<15$ 的显著水平为 0.05 的拒绝域为__________。

二.（13分）为比较三个型号的汽车的油耗情况，随机抽取A型汽车6辆，B型汽车5辆，C型汽车7辆，记录每辆汽车每公升汽油行驶的公里数，得如下数据：

A型(X_1)	12.9	11.3	12.6	14.1	13.2	12.1	
B型(X_2)	15.3	13.2	12.8	13.6	14.1		
C型(X_3)	11.6	11.7	12.1	12.5	13.1	13.6	11.5

设每个型号的数据$X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2), i=1,2,3$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma^2$均未知。（1）写出计算过程，同时将结果填入下表，并在显著水平 0.05 下检验假设$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3$不全相等；（2）求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为 95%的置信区间。

（注：$S_A = \sum_{i=1}^{3} n_i \bar{x}_{i\bullet}^2 - n\bar{x}^2$）

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素				
误差				—
总和	18.985		—	—

三.（12分）设连续型随机变量X满足：当$0 < x \le 1$时，$P(0 < X \le x) = \frac{x^2}{2}$，当$2 < x \le 3$时，$P(2 < X \le x) = \frac{(x-2)^2}{2}$。求（1）$X$的分布函数$F(x)$；（2）$X$的概率密度函数$f(x)$；（3）$X$的数学期望$E(X)$。

四．（12 分）某煤矿一天的产煤量 X（以万吨计）服从 $N(1.5, 0.1^2)$，设每天的产量相互独立，一个月按 30 天计，求（1）一天产量超过 1.6 万吨的概率；（2）后半个月产量比前半个月产量多 0.5 万吨的概率；（3）月平均产量与月第一天产量的相关系数。

五．（12 分）某电子监视器的屏幕为单位圆。设目标出现的位置点 $A(x, y)$ 服从单位圆（$x^2 + y^2 \le 1$）上的均匀分布。求（1）点 A 与屏幕中心位置（0，0）的距离小于 0.5 的概率；（2）$f_{Y|X}(y|x)$；（3）若在某个时间段陆续观测到了 108 个目标点，求其中至多有 36 个目标点出现在第一象限（$x > 0, y > 0$）的概率近似值。

六．（12 分）设总体 X 的概率密度 $f(x;\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x-\mu}{2}}, & x \ge \mu, \\ 0, & x < \mu. \end{cases}$，$X_1, \dots, X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，（1）求 μ 的极大似然估计量 $\hat{\mu}$，（2）求 $\hat{\mu}$ 的概率密度；（3）若 $n(\hat{\mu} - \mu) \sim \chi^2(2)$，求 μ 的置信度为 95%的单侧置信下限。