华南理工大学 2009-2010 学年第一学期“解析几何”期末考试 B 参考解析

一、简答题（共 32 分）

（1）设三角形的三边向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,$求$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2-\vec{c}^2}{2}=\dfrac{3}{2}$.

（2）求直线$\dfrac{x-a}{X}=\dfrac{y-b}{Y}=\dfrac{z-c}{Z}$与平面$Ax+By+Cz+D=0$相交与平行的充要条件.

解：相交：$Aa+Bb+Cc\neq 0$；平行：$Aa+Bb+Cc=0$ 且 $Aa+Bb+Cc+D\neq 0$.

（3）求直线$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$与$xoy$面的交点.

解：将 z=0 代入直线方程可解得交点坐标为$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$.

（4）求母线$\Gamma:\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转所产生的旋转曲面的方程.

解：为$x^2+\dfrac{y^2+z^2}{4}=0$.

（5）设仿射坐标 I 到 II 的点的坐标变换公式为$\begin{cases}x=-y'+1\\ y=x'-1\end{cases}$，求直线$l_1:x-2y+2=0$在坐标系 II 中的方程与直线$l_2:x'+2y'-1=0$在坐标系 I 中的方程.

解：直接代入可得所求为$2x'+y'-5=0$，$2x-y-2=0$.

（6）求通过点$M(3,0,-5)$且与两直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$和$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$垂直的直线方程.

解：欲求直线的方向矢量为：$(1,1,-1)\times(1,-1,0)=(-1,-1,2)$，

所以，直线方程为：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+5}{2}$.

（7）求二次曲线 $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$ 的主方向和对称轴.

解：由 $[m,n]\,//\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}\Rightarrow[m,n]\,//\begin{bmatrix}m-\frac{3}{2}n\\ -\frac{3}{2}m+n\end{bmatrix}\Rightarrow m(2m-3n)-n(2n-3m)=0$

解得 $(m,n)=(1,1)$或$(1,-1)$.由 $\begin{cases}x-\frac{3}{2}y+5=0\\ -\frac{3}{2}x+y-5=0\end{cases}$ 得中心坐标为 $(-2,2)$.

故对称轴方程为：$x+y=0$,，$x-y+4=0$.

（8）平面上, 设 x' 轴和 y' 轴在原坐标系中的方程为 $3x-4y-1=0$ 和 $4x+3y+7=0$,且新, 旧坐标系都是右手直角坐标系, 求 I 到 II 的点的坐标变换公式.

解：$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}$

二、(共 12 分）求单叶双曲面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 上经过点 $M(0,2,0)$ 的两条直母线方程.

解：其两族直母线的方程为：$\begin{cases}s(\frac{x}{3}+\frac{z}{4})=t(1-\frac{y}{2})\\ t(\frac{x}{3}-\frac{z}{4})=s(1+\frac{y}{2})\end{cases}$ 和 $\begin{cases}s(\frac{x}{3}+\frac{z}{4})=t(1+\frac{y}{2})\\ t(\frac{x}{3}-\frac{z}{4})=s(1-\frac{y}{2})\end{cases}$.

代入点 $M(0,2,0)$ 后可求得满足要求的两条直母线的方程为 $\begin{cases}4x+3z=0\\ y=2\end{cases}$，$\begin{cases}4x-3z=0\\ y=2\end{cases}$.

三、(共 8 分）设 L、M、N 分别是 ΔABC 的三边 BC、CA、AB 的中点，证明：三中线向量 $\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形.

证明：$\because \overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，　$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$.

$\therefore \overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=0$，

从而三中线矢量 $\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$ 构成一个三角形.

四、（共 12 分）已知两条异面直线l_1和l_2，试证连接l_1上任一点与l_2上任一点的线段的中点轨迹是公垂线段的垂直平分面.

证明：取l_1为z轴，l_1与l_2的公垂线为x轴，x轴的正半轴与l_2相交于点$P(d,0,0)$．公垂线段OP的垂直平分面经过点$(\frac{d}{2},0,0)$且与公垂线垂直，因此$(1,0,0)$为其法向量，并且公垂线段的垂直平分面的方程为$x-\frac{d}{2}=0$．设l_2的方向向量$v_2=(X,Y,Z)$，

它满足$1\cdot X+0\cdot Y+0\cdot Z=0$，故$X=0$，于是$l_2$的方程为$\frac{x-d}{0}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}$.

l_2上任一点M_2的坐标为(d,Yt,Zt)．又l_1上任一点M_1的坐标为$(0,0,z)$，因此M_1M_2的中点坐标为$(\frac{d}{2},\frac{Yt}{2},\frac{Zt+z}{2})$．由于$t,z$可取任意实数，所以中点轨迹方程为$x=\frac{d}{2}$.

五、（共 12 分）将直线$\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z}{1}$绕$z$轴旋转，求这旋转曲面的方程，并就$\alpha,\beta$可能的值讨论此曲面的类型.

解：所得旋转曲面的方程为：$x^2+y^2=a^2z^2+\beta^2$.

①$\alpha=0$，$\beta=0$时，方程表示 z 轴；
②$\alpha=0$，$\beta\neq0$时，方程表示以 z 轴为中心轴，半径为$|\beta|$的圆柱面；
③$\alpha\neq0$，$\beta=0$时，方程表示顶点在原点，以 z 轴为轴的圆锥面；
④$\alpha\neq0$，$\beta\neq0$时，方程表示以 z 轴为虚轴的单叶旋转双曲面.

六、（12 分）在直角坐标系中，利用转轴和移轴的方法把方程$x^2-2xy+y^2-4x-4y+8=0$化成标准型，并说明原方程表示什么曲线.

解：考虑矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$的特征方程$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)=0$.

得特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=2$，从而得两个特征向量$(1,1)^T,(1,-1)^T$.

故可取正交变换：$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{cases}$，得到$y'^2-2\sqrt{2}x'+4=0$.

再做移轴变换：$\begin{cases}x'=x''+\sqrt{2}\\ y'=y''\end{cases}$，得$y''^2=2\sqrt{2}x''$

七、（12 分）证明两直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 与 $l_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{0}$ 为异面直线，并求这两条直线的公垂线.

证明：由 $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0$ 知其不共面.又 $(1,-1,0)\times(1,1,0)=(0,0,2)$，

故知公垂线方程为：$\begin{cases}\begin{vmatrix}x & y & z+1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x-y=0\\ x+y=0\end{cases}$