中国科学院大学 2014-2015 学年第一学期“高等代数 IA”期末

共十道大题 满分 100 分 时间 180 分钟

一、(共 10 分)利用伴随矩阵求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵

二、(共 10 分)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x & y & 0 & \dots & 0\\ 0 & x & y & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & x & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \ddots & y\\ y & 0 & \dots & 0 & x\end{vmatrix}$.

三、(共 10 分)利用 Laplace 展开计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2\end{vmatrix}$.

四、(共 10 分)找出所有不同构的 25 阶和 22 阶群(对非交换群给出乘积公式).

五、(共 10 分)确定所有不同构的 144 阶交换群.

六、(共 10 分)找出 $f,g\in Q[x]$.使得 $(x^2+3x+2)Q[x]+(x^2-4)Q[x]=f(x)Q[x]$,且 $[(x^2+3x+2)Q[x]]\cap[(x^2-4)Q[x]]=g(x)Q[x]$ 成立.

七、(共 10 分)判断多项式 $x^{11}+11x+1$ 在有理数域上是否可约.

八、(共 10 分)设 $n\geq 4$.用初等对称函数 $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$ 表示 n 元对称多项式 $Sym(x_1^2x_2^2)$.

九、(共 10 分)证明:设 $(x^2+x+1)\,|\,(f(x^3)+xg(x^3))$,则 $(x-1)\,|\,f(x)$ 且 $(x-1)\,|\,g(x)$.

十、(共 10 分)设 G 是一个有限群且 p 是 G 的最小素因子.若 H 是 G 的指标为 p 的子群,证明:H 是 P 的正规子群.