

第一篇 极限论

第一部分 极限初论

第一章 变量与函数

§1. 函数的概念

1. 解下列不等式，并画出 x 的范围：

$$(1) -2 < \frac{1}{x+2}$$

$$(2) (x-1)(x+2)(x-3) < 0$$

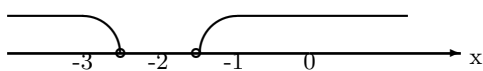
$$(3) \frac{1}{x-1} < a$$

$$(4) 0 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$$

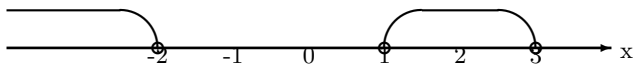
$$(5) \begin{cases} x^2 - 16 < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

解：

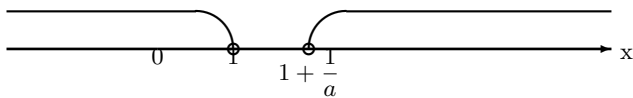
$$(1) x < -\frac{5}{2} \text{ 或 } x > -\frac{3}{2}$$



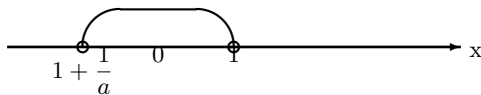
$$(2) 1 < x < 3 \text{ 或 } x < -2$$



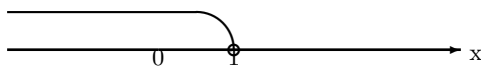
$$(3) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } x < 1 \text{ 或 } x > 1 + \frac{1}{a};$$



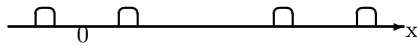
$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } 1 + \frac{1}{a} < x < 1$$



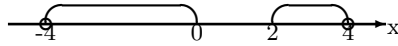
$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, } x < 1$$



$$(4) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 或 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$



$$(5) \quad -4 < x \leq 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 4$$



2. 证明下列绝对值不等式:

$$(1) \quad |x - y| \geq ||x| - |y||$$

$$(2) \quad |x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$(3) \quad |x + x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|)$$

证明:

$$(1) \quad \text{因 } |x||y| \geq xy, \text{ 则 } (x - y)^2 \geq (|x| - |y|)^2, \text{ 于是 } |x - y| \geq ||x| - |y||$$

(2) 用数学归纳法证明.

(i) 当 $n = 2$ 时, 由 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, 得结论成立.

(ii) 假设当 $n = k$ 时结论成立, 即有 $|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k|$.

则当 $n = k + 1$ 时, $|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1}| \leq |x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k| + |x_{k+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}|$

综上所述, 对一切自然数 n , $|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ 均成立.

$$(3) \quad |x + x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - |x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|)$$

3. 解下列绝对值不等式, 并画出 x 的范围:

$$(1) \quad |x| > |x + 1|$$

$$(2) \quad 2 < \frac{1}{|x|} < 4$$

$$(3) \quad |x| > A$$

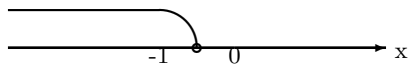
$$(4) \quad |x - a| < \eta, \eta \text{ 为常数, } \eta > 0$$

$$(5) \quad \left| \frac{x-2}{x+1} \right| > \frac{x-2}{x+1}$$

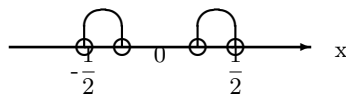
$$(6) \quad 2 < \frac{1}{|x+2|} < 3$$

解:

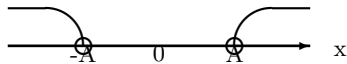
$$(1) \quad x < -\frac{1}{2}$$



$$(2) \quad -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4} \text{ 或 } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

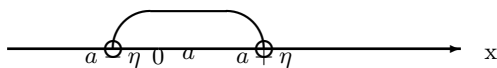


(3) 当 $A \geq 0$ 时, $x < -A$ 或 $x > A$

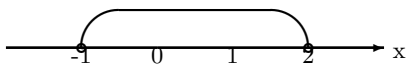


当 $A < 0$ 时, $x \in R$

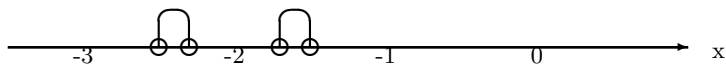
(4) $a - \eta < x < a + \eta$



(5) 原式等价于 $\frac{x-2}{x+1} < 0$, 则 $-1 < x < 2$



(6) $-\frac{5}{3} < x < -\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{5}{2} < x < -\frac{7}{3}$



4. 求下列函数的定义域及它在给定点上的函数值:

(1) $y = f(x) = -x + \frac{1}{x}$ 的定义域及 $f(-1)$, $f(1)$ 和 $f(2)$;

(2) $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ 的定义域及 $f(0)$, $f(a)$ 和 $f(-\frac{a}{2})$;

(3) $s = s(t) = \frac{1}{t}e^{-t}$ 的定义域及 $s(1)$, $s(2)$;

(4) $y = g(\alpha) = \alpha^2 \tan \alpha$ 的定义域及 $g(0)$, $g(\frac{\pi}{4})$, $g(-\frac{\pi}{4})$;

(5) $x = x(\theta) = \sin \theta + \cos \theta$ 的定义域及 $x(-\frac{\pi}{2})$, $x(-\pi)$

(6) $y = f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$ 的定义域及 $f(0)$, $f(-1)$

解:

$$(1) \text{ 函数的定义域为 } X = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), f(-1) = 0, f(1) = 0, f(2) = -\frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ 函数的定义域为 } X = [-|a|, |a|], f(0) = |a|, f(a) = 0, f\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}|a|$$

$$(3) \text{ 函数的定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, \infty), s(1) = \frac{1}{e}, s(2) = \frac{1}{2e^2}$$

$$(4) \text{ 函数的定义域为 } \left\{x \mid x \in R, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}, g(0) = 0, g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}, g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{16}$$

$$(5) \text{ 函数的定义域为 } X = (-\infty, \infty), x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, x(-\pi) = -1$$

$$(6) \text{ 函数的定义域为 } X = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty), f(0) = -\frac{1}{2}, f(-1) = -\frac{1}{2}$$

5. 求下列函数的定义域及值域:

$$(1) y = \sqrt{2+x-x^2}$$

$$(2) y = \sqrt{\cos x}$$

$$(3) y = \ln\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

$$(4) y = \frac{1}{\sin \pi x}$$

解:

$$(1) \text{ 函数的定义域为 } X = [-1, 2], \text{ 值域为 } \left[0, \frac{3}{2}\right]$$

$$(2) \text{ 函数的定义域为 } \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in Z), \text{ 值域为 } [0, 1]$$

$$(3) \text{ 函数的定义域为 } \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right) (k \in Z), \text{ 值域为 } (-\infty, 0]$$

$$(4) \text{ 函数的定义域为 } (n-1, n) (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ 值域为 } (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

6. 设 $f(x) = x+1, \varphi(x) = x-2$, 试解方程 $|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|$ 解: 由已知, 得 $f(x)\varphi(x) \geq 0$ 即 $(x+1)(x-2) \geq 0$, 则 $x \geq 2$ 或 $x \leq -1$.7. 设 $f(x) = (|x| + x)(1-x)$, 求满足下列各式的 x 值:

$$(1) f(0) = 0$$

$$(2) f(x) < 0$$

解:

$$(1) \text{ 要 } f(x) = 0, \text{ 则 } |x| + x = 0 \text{ 或 } 1-x = 0, \text{ 即 } x \leq 0 \text{ 或 } x = 1$$

$$(2) \text{ 因 } |x| + x \geq 0, \text{ 则要 } f(x) < 0, \text{ 只要 } 1-x < 0 \text{ 即可, 即 } x > 1$$

8. 图1-5表示电池组 V 、固定电阻 R_0 和可变电阻 R 组成的电路. 在一段不长的时间内, A, B 两点间的电压 V 可以看成是一个常量. 求出电流 I 和可变电阻 R 的函数式.解: 由已知及物理学知识, 得 $V = I(R_0 + R)$.9. 在一个圆柱形容器内倒进某种溶液, 该圆柱形容器的底半径是 a , 高为 h , 倒进溶液的高度是 x (图1-6). 该溶液的容积 V 和 x 之间的函数关系 $V = V(x)$, 并写出它的定义域和值域.解: 由已知, 得 $V = \pi a^2 x$, 它的定义域为 $[0, h]$, 值域为 $[0, \pi a^2 h]$ 10. 某灌溉渠的截面是一个梯形, 如图1-7, 底宽2米, 斜边的倾角为 45° , CD 表示水面, 求截面 $ABCD$ 的面积 S 与水深 h 的函数关系.解: 由已知及图, 得 $S = h(h+2)$.11. 有一深为 H 的矿井, 如用半径为 R 的卷扬机以每秒钟 ω 弧度的角速度从矿井内起吊重物, 求重物底面与地面的距离 s 和时间 t 的函数关系 (图1-8).解: 由已知及图, 得 $s = H - \omega R t \left(t \in \left[0, \frac{H}{\omega R}\right]\right)$ 12. 设 $y = f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$ 和 $f\left(\frac{1}{2}\right)$.解: 由已知, 得 $f(-2) = 5, f(-1) = 2, f(0) = -1, f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

13. 设 $x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 10 \\ 1+t^2, & 10 \leq t \leq 20 \\ t-10, & 20 < t \leq 30 \end{cases}$, 求 $x(0), x(5), x(10), x(15), x(20), x(25), x(30)$, 并画出这个函数的图形.

解: 由已知, 得 $x(0) = 0, x(5) = 0, x(10) = 101, x(15) = 226, x(20) = 401, x(25) = 15, x(30) = 20$

14. 邮资 y 是信件重量 x 的函数. 按照邮局的规定, 对于国内的外埠平信, 按信件重量, 每重 20 克应付邮资 8 分, 不足 20 克者以 20 克计算. 当信件重量在 60 克以内时, 试写出这个函数的表达式, 并画出它的图形.

解: 由已知, 得 $y = f(x) = \begin{cases} 8, & 0 < x \leq 20 \\ 16, & 20 < x \leq 40 \\ 24, & 40 < x \leq 60 \end{cases}$

15. 脉冲发生器产生一个三角波, 其波形如图 1-9, 写出函数关系 $u = u(t) (0 \leq t \leq 20)$.

解: 由已知及图, 得 $u = u(t) = \begin{cases} 1.5t, & 0 \leq t \leq 10 \\ 30 - 1.5t, & 10 < t \leq 20 \end{cases}$

16. 下列函数 f 和 φ 是否相等, 为什么?

- (1) $f(x) = \frac{x}{x}, \varphi(x) = 1$
(2) $f(x) = x, \varphi(x) = \sqrt{x^2}$
(3) $f(x) = 1, \varphi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

解:

- (1) 因 f 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, φ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 故这两个函数不相等.
(2) 因 $f(x) = x, \varphi(x) = |x|$, 故这两个函数的函数表达式不一样, 则这两个函数不相等.
(3) 因 $\varphi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 恒成立, 故这两个函数相等.

17. 证明对于直线函数 $f(x) = ax + b$, 若自变数值 $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ 组成一等差数列, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 也组成一等差数列.

证明: 设 x_{m-1}, x_m, x_{m+1} 是 x_n 中任意 3 个相邻的数 $(2 \leq m \leq n)$

据题意, 得 $2x_m = x_{m-1} + x_{m+1}$

又 $y_n = f(x_n) = ax_n + b$, 则 $y_{m-1} = ax_{m-1} + b, y_m = ax_m + b, y_{m+1} = ax_{m+1} + b$, 于是 $2y_m = 2ax_m + 2b, y_{m+1} + y_{m-1} = ax_{m+1} + b + ax_{m-1} + b = 2ax_m + 2b$, 从而 $2y_m = y_{m-1} + y_{m+1}$

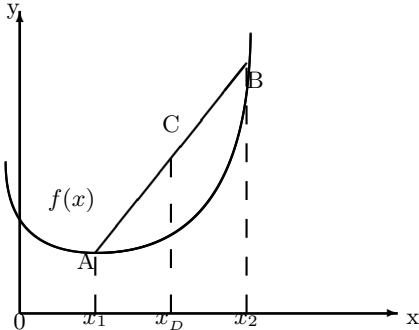
又 x_{m-1}, x_m, x_{m+1} 是 x_n 中任意 3 个相邻的数, 则 y_{m-1}, y_m, y_{m+1} 是 y_n 中任意 3 个相邻的数, 于是 $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 也组成一等差数列.

18. 如果曲线 $y = f(x)$ 上的任一条弦都高于它所限的弧 (图 1-10), 证明不等式 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 对于所有的 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 成立 (凡具有上述特性的函数叫做凸函数).

证明: 在曲线上任取两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$, 连接 AB , 取其中点 $C(x_C, y_C)$, 则 $f(x_1) + f(x_2) = 2y_C, x_1 + x_2 = 2x_C$

又曲线上 $x_D = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 所对点的纵坐标为 $y_D = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 则 $x_C = x_D$

又曲线 $y = f(x)$ 上的任一条弦都高于它所限的弧且 x_1, x_2 为弦与弧的交点, 则 $y_C > y_D$ 即 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 对于所有的 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 成立.



19. 证明下列各函数在所示区间内是单调增加的函数:

- (1) $y = x^2 (0 \leq x < +\infty)$
(2) $y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

证明:

- (1) 设 $0 \leq x_1 < x_2$
 则 $y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) > 0$, 于是函数 $y = x^2$ 当 $0 \leq x$ 时严格单调增加.
- (2) 设 $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$
 则 $y_2 - y_1 = \sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$
 又 $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, 于是 $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, 从而 $y_2 - y_1 > 0$ 即函数 $y = \sin x$ 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时严格单调增加.

20. 证明下列函数在所示区间内是单调减少的函数:

- (1) $y = x^2 (-\infty < x \leq 0)$
 (2) $y = \cos x (0 \leq x \leq \pi)$

证明:

- (1) 设 $0 \leq x_1 < x_2$
 则 $y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) < 0$, 于是函数 $y = x^2$ 当 $x \leq 0$ 时严格单调减少.
- (2) 设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$
 则 $y_2 - y_1 = \cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$
 又 $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, 则 $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi$, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, 于是 $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, 从而 $y_2 - y_1 < 0$ 即函数 $y = \cos x$ 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时严格单调减少.

21. 讨论下列函数的奇偶性:

- (1) $y = x + x^2 - x^5$
 (2) $y = a + b \cos x$
 (3) $y = x + \sin x + e^x$
 (4) $y = x \sin \frac{1}{x}$
 (5) $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$
 (6) $y = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & \text{当 } \frac{1}{2} < x < +\infty \text{ 时} \\ \sin x^2, & \text{当 } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时} \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{当 } -\infty < x < -\frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases}$

解:

- (1) 因 $y = f(x) = x + x^2 - x^5$, 则 $f(-x) = -x + x^2 + x^5$, 故 $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, 于是此函数是非奇非偶函数.
- (2) 因 $y = f(x) = a + b \cos x$, 则 $f(-x) = a + b \cos(-x) = a + b \cos x = f(x)$, 于是此函数是偶函数.
- (3) 因 $y = f(x) = x + \sin x + e^x$, 则 $f(-x) = -x - \sin x + e^{-x}$, 故 $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, 于是此函数是非奇非偶函数.
- (4) 因 $y = f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 则 $f(-x) = -x \sin \frac{1}{-x} = x \sin \frac{1}{x} = f(x)$, 于是此函数是偶函数.
- (5) 因 $y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$,
 则 $f(-x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } -x > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } -x = 0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } -x < 0 \text{ 时} \end{cases} = \begin{cases} -1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases} = -f(x)$, 于是此函数是奇函数.

$$(6) \text{ 因 } y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & \text{当 } \frac{1}{2} < x < +\infty \text{ 时} \\ \sin x^2, & \text{当 } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时} \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{当 } -\infty < x < -\frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases},$$

$$\text{则 } f(-x) = \begin{cases} \frac{2}{(-x)^2}, & \text{当 } \frac{1}{2} < -x < +\infty \text{ 时} \\ \sin(-x)^2, & \text{当 } -\frac{1}{2} \leq -x \leq \frac{1}{2} \text{ 时} \\ \frac{1}{2}(-x)^2, & \text{当 } -\infty < -x < -\frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{当 } \frac{1}{2} < x < +\infty \text{ 时} \\ \sin x^2, & \text{当 } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 时} \\ \frac{2}{x^2}, & \text{当 } -\infty < x < -\frac{1}{2} \text{ 时} \end{cases},$$

故 $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, 于是此函数是非奇非偶函数.

22. 试证两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是奇函数, 一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

证明: 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为定义在 $(-a, a) (a > 0)$ 内的偶函数, $g_1(x), g_2(x)$ 为定义在 $(-a, a) (a > 0)$ 内的奇函数, $F_1(x) = f_1(x)f_2(x), F_2(x) = g_1(x)g_2(x), F_3(x) = f_1(x)f_2(x)$
 则 $f_1(-x) = f_1(x), f_2(-x) = f_2(x), g_1(x) = -g_1(x), g_2(-x) = -g_2(x)$, 于是

$$\begin{aligned} F_1(-x) &= f_1(-x)f_2(-x) = f_1(x)f_2(x) = F_1(x) \\ F_2(-x) &= g_1(-x)g_2(-x) = (-g_1(x))(-g_2(x)) = g_1(x)g_2(x) = F_2(x) \\ F_3(-x) &= f_1(-x)g_1(-x) = f_1(x)(-g_1(x)) = -f_1(x)g_1(x) = -F_3(x) \end{aligned}$$

从而 $F_1(x)$ 是偶函数; $F_2(x)$ 是偶函数; $F_3(x)$ 是奇函数.

23. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何函数, 证明 $F_1(x) \equiv f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $F_2(x) \equiv f(x) - f(-x)$ 是奇函数. 写出对应于下列函数的 $F_1(x), F_2(x)$:

(1) $y = a^x$

(2) $y = (1+x)^n$

证明: 因 $F_1(-x) = f(-x) + f(x) = F_1(x)$, 则 $F_1(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数
 又 $F_2(-x) = f(-x) - f(x) = -F_2(x)$, 则 $F_2(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

(1) $F_1(x) = f(x) + f(-x) = a^x + a^{-x}, F_2(x) = f(x) - f(-x) = a^x - a^{-x}$

(2) $F_1(x) = f(x) + f(-x) = (1+x)^n + (1-x)^n, F_2(x) = f(x) - f(-x) = (1+x)^n - (1-x)^n$

24. 说明下列函数哪些是周期函数, 并求最小周期:

(1) $y = \sin^2 x$

(2) $y = \sin x^2$

(3) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$

(4) $y = \cos \frac{\pi}{4}x$

(5) $y = |\sin x| + |\cos x|$

(6) $y = \sqrt{\tan x}$

(7) $y = x - [x]$

(8) $y = \sin n\pi x$

解:

(1) 因 $y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, 则 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

(2) 假设 $y = \sin x^2$ 为一周期函数且 $T = \omega > 0$

据周期函数的定义, 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $\sin(x + \omega)^2 = \sin x^2$, 特别对 $x = 0$ 也应该成立, 则 $\sin \omega^2 = 0$, 于是 $\omega^2 = k\pi, \omega = \sqrt{k\pi} (k \in \mathbb{Z}^+)$

又对 $x = \sqrt{2}\omega = \sqrt{2k\pi}$ 也成立, 故 $\sin(\sqrt{2}\omega + \omega)^2 = \sin \omega^2 = 0$, 则 $(\sqrt{2} + 1)^2 k\pi = n\pi (n \in \mathbb{Z}^+)$, 于是 $(\sqrt{2} + 1)^2 = \frac{k}{n} (k, n \in \mathbb{Z}^+)$

又 $(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^-$, 而 $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}^+$, 则假设不成立, 即函数 $y = \sin x^2$ 不是周期函数.

(3) 因 $y_1 = \sin x$ 的 $T = 2\pi$; $y_2 = \frac{1}{2} \sin 2x$ 的 $T = \pi$, 则 $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ 的 $T = 2\pi$.

(4) $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

(5) 因 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$, $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x| + |\sin x| = f(x)$
 据经验, 知 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 的 $T = \frac{\pi}{2}$.

(6) 因 $f(x) = \tan x$ 的 $T = \pi$, 则 $y = \sqrt{\tan x}$ 的 $T = \pi$.

(7) 因 $y = x - [x] = (x)$, 则 $y = x - [x]$ 的 $T = 1$.

(8) $T = \frac{2\pi}{n\pi} = \frac{2}{n}$

§2. 复合函数和反函数

1. 下列函数能否构成复合函数 $y = f(\varphi(x))$, 如果能够构成则指出此复合函数的定义域和值域:

- (1) $y = f(u) = 2^u, u = \varphi(x) = x^2$
- (2) $y = f(u) = \ln u, u = \varphi(x) = 1 - x^2$
- (3) $y = f(u) = u^2 + u^3, u = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$
- (4) $y = f(u) = 2$, 定义域为 U_1 , $u = \varphi(x)$, 定义域为 X , 值域为 U_2
- (5) $y = f(u) = \sqrt{u}, u = \varphi(x) = \cos x$

解:

- (1) 因 $y = f(u) = 2^u$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $u = \varphi(x) = x^2$ 的值域为 $[0, +\infty)$
则此函数能构成复合函数 $y = 2^{x^2}$, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[1, +\infty)$
- (2) 因 $y = f(u) = \ln u$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $u = \varphi(x) = 1 - x^2$ 的值域为 $(-\infty, 1]$
则此函数能构成复合函数 $y = \ln(1 - x^2)$, 它的定义域为 $(-1, 1)$, 值域为 $(-\infty, 0]$
- (3) 因 $y = f(u) = u^2 + u^3$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,
 $u = \varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$ 的值域为 $\{-1, 1\}$
则此函数能构成复合函数 $y = \begin{cases} 2, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{0, 2\}$
- (4) 因 $y = f(u) = 2$ 的定义域为 U_1 , $u = \varphi(x)$ 的值域为 U_2
当 $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ 时, 此函数能构成复合函数 $y = 2$, 它的定义域视具体函数而定, 值域为 $\{2\}$;
当 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ 时, 此函数不能构成复合函数
- (5) 因 $y = f(u) = \sqrt{u}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, $u = \varphi(x) = \cos x$ 的值域为 $[-1, 1]$
则此函数能构成复合函数 $y = \sqrt{\cos x}$, 它的定义域为 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 值域为 $[0, 1]$

2. 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 证明 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$

证明: 由已知, 得

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = a(x+3)^2 + b(x+3) + c - 3[a(x+2)^2 + b(x+2) + c] + 3[a(x+1)^2 + b(x+1) + c] - (ax^2 + bx + c) = a[(x+3)^2 - x^2] + b(x+3-x) - 3a[(x+2)^2 - (x+1)^2] - 3b[x+2-(x+1)] = 6ax + 9a + 3b - 3a(2x+3) - 3b \equiv 0$$

3. (1) 设 $y = f(x) = a + bx + \frac{c}{x}$, 求 $f\left(\frac{2}{x}\right)$
- (2) 设 $y = f(x) = x^2 \ln(1+x)$, 求 $f(e^{-x})$
- (3) 设 $y = f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$, 求 $f(x^2)$ 及 $f(-x^2)$
- (4) 设 $y = f(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}$, 求 $f(a \tan x)$

解:

- (1) 因 $y = f(x) = a + bx + \frac{c}{x}$, 则 $f\left(\frac{2}{x}\right) = a + \frac{2b}{x} + \frac{c}{\frac{2}{x}} = a + \frac{2b}{x} + \frac{cx}{2} = \frac{cx^2 + 2ax + 4b}{2x}$
- (2) 因 $y = f(x) = x^2 \ln(1+x)$, 则 $f(e^{-x}) = (e^{-x})^2 \ln(1+e^{-x}) = \frac{\ln(e^x + 1) - x}{e^{2x}}$
- (3) 因 $y = f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$, 则 $f(x^2) = \sqrt{1+x^2+x^4}$, $f(-x^2) = \sqrt{1-x^2+x^4}$
- (4) 因 $y = f(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}$, 则 $f(a \tan x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (a \tan x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sec^2 x}} = \frac{1}{|a \sec x|}$

4. 若 $f(x) = x^2, \varphi(x) = 2^x$, 求 $f(\varphi(x))$ 及 $\varphi(f(x))$.

解: 因 $f(x) = x^2, \varphi(x) = 2^x$, 则 $f(\varphi(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x, \varphi(f(x)) = 2^{x^2}$

5. 若 $\varphi(x) = x^3 + 1$, 求 $\varphi(x^2), (\varphi(x))^2$ 及 $\varphi(\varphi(x))$.

解: 因 $\varphi(x) = x^3 + 1$, 则

$$\varphi(x^2) = (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1, (\varphi(x))^2 = (x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1, \varphi(\varphi(x)) = (x^3 + 1)^3 + 1 = x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 2$$

6. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f(f(x)), f(f(f(x))), f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

解: 因 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则

$$f(f(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}, f(f(f(x))) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x, f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{1 - (1-x)} = \frac{1}{x}$$

7. 求下列函数的反函数及反函数的定义域:

(1) $y = x^2 (-\infty < x \leq 0)$

(2) $y = \sqrt{1-x^2} (-1 \leq x \leq 0)$

(3) $y = \sin x \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi\right)$

(4) $y = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x < 1 \text{ 时} \\ x^2, & \text{当 } 1 \leq x \leq 4 \text{ 时} \\ 2^x, & \text{当 } 4 < x < +\infty \text{ 时} \end{cases}$

解:

(1) 因 $y = x^2 (-\infty < x \leq 0)$, 则 $x = -\sqrt{y} (0 \leq y < +\infty)$, 从而此函数的反函数为 $y = -\sqrt{x} (0 \leq y < +\infty)$

(2) 因 $y = \sqrt{1-x^2} (-1 \leq x \leq 0)$, 则 $x = -\sqrt{1-y^2} (0 \leq y \leq 1)$, 从而此函数的反函数为 $y = -\sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1)$

(3) 因 $y = \sin x \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi\right)$, 则 $x = \pi - \arcsin y (-1 \leq y \leq 1)$, 从而此函数的反函数为 $y = \pi - \arcsin x (-1 \leq x \leq 1)$

(4) 因 $y = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x < 1 \text{ 时} \\ x^2, & \text{当 } 1 \leq x \leq 4 \text{ 时} \\ 2^x, & \text{当 } 4 < x < +\infty \text{ 时} \end{cases}$, 则 $x = \begin{cases} y, & \text{当 } -\infty < y < 1 \text{ 时} \\ \sqrt{y}, & \text{当 } 1 \leq y \leq 16 \text{ 时} \\ \log_2 y, & \text{当 } 16 < y < +\infty \text{ 时} \end{cases}$, 从而此函数的反函数为 $y = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x < 1 \text{ 时} \\ \sqrt{x}, & \text{当 } 1 \leq x \leq 16 \text{ 时} \\ \log_2 x, & \text{当 } 16 < x < +\infty \text{ 时} \end{cases}$.

§3. 基本初等函数

1. 把下列在 $[0, 1)$ 上定义的函数延拓到整个实轴上去, 使它成为以1为周期的函数:

- (1) $y = x^2$
- (2) $y = \sin x$
- (3) $y = e^x$

解:

- (1) 延拓后的函数为 $y = (x - n)^2 (n \leq x < n + 1, n \in \mathbb{Z})$
- (2) 延拓后的函数为 $y = \sin(x - n) (n \leq x < n + 1, n \in \mathbb{Z})$
- (3) 延拓后的函数为 $y = e^{x-n} (n \leq x < n + 1, n \in \mathbb{Z})$

2. 把下列在 $[0, +\infty)$ 上定义的函数延拓到整个实轴上去, (a)使它们成为奇函数; (b)使它们成为偶函数:

- (1) $y = x^2$
- (2) $y = \sin x$

解:

(1) 延拓后的函数为:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = x^2$$

(2) 延拓后的函数为:

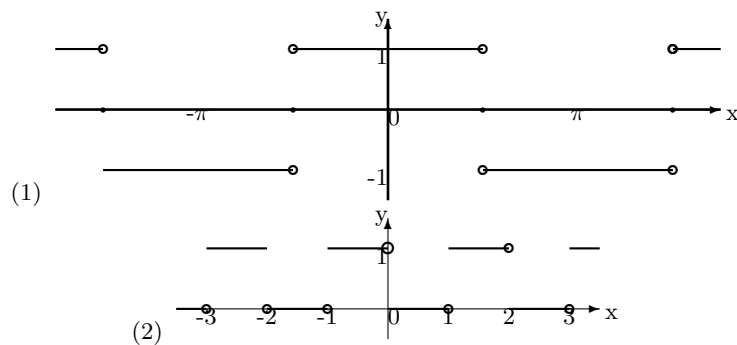
$$(a) f(x) = \sin x$$

$$(b) f(x) = \sin |x|$$

3. 做下列函数的图形:

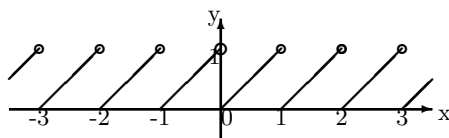
- (1) $y = \operatorname{sgn} \cos x$
- (2) $y = [x] - 2 \left[\frac{x}{2} \right]$

解:



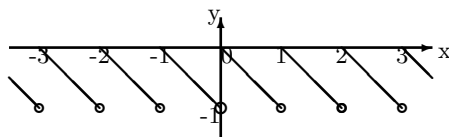
4. 作函数 $y = (x)$ 的图形.

解:



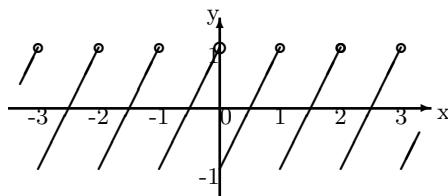
5. 作函数 $y = [x] - x$ 的图形.

解:



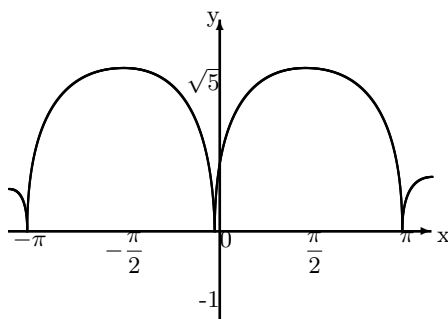
6. 一个函数是用下述方法决定的：在每一个小区间 $n \leq x < n+1$ (其中 n 为整数) 内 $f(x)$ 是线性的且 $f(n) = -1, f\left(n + \frac{1}{2}\right) = 0$ ，试作此函数的图形.

解：



7. 作函数 $y = |\sin x + 2 \cos x|$ 的图形.

解：



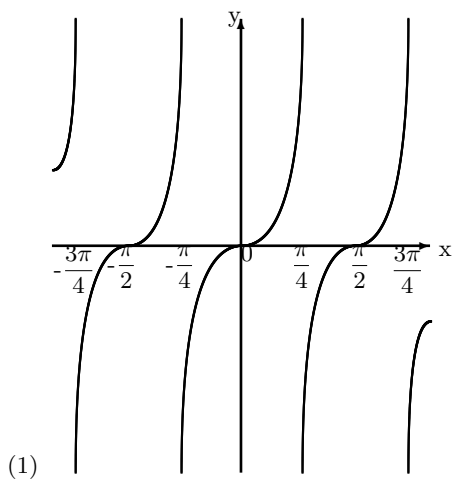
8. 若已知函数 $f(x) = \tan x$ ，作下列函数的图形：

(1) $y = f(2x)$

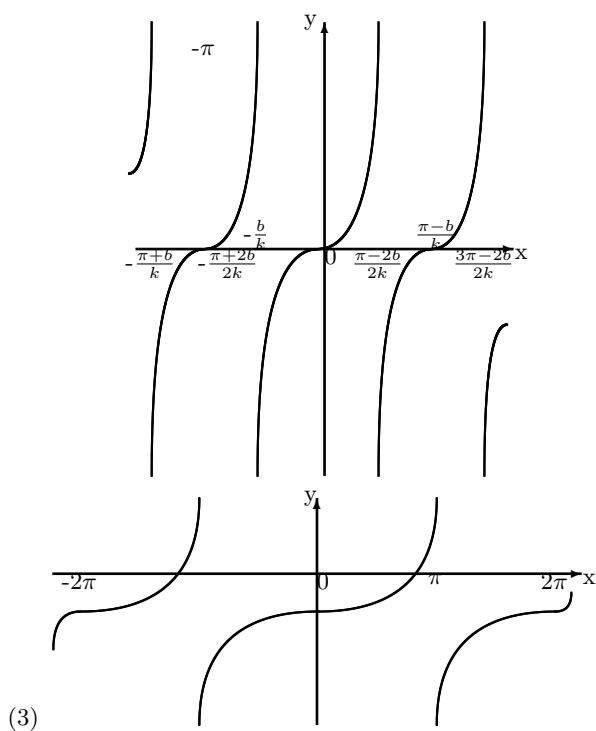
(2) $y = f(kx + b) (k \neq 0)$

(3) $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

解：

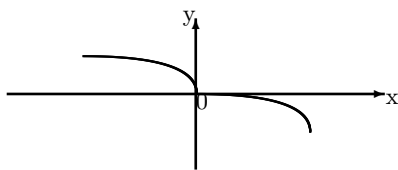


(2) $(k, b > 0)$

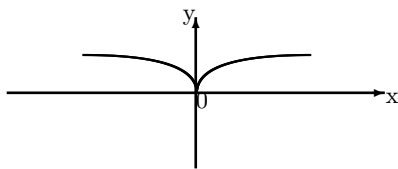


9. 若已知函数 $y = f(x)$ 的图形，作函数 $y_1 = |f(x)|$, $y_2 = f(-x)$, $y_3 = -f(-x)$ 的图形，并说明 y_1, y_2, y_3 的图形与 y 的图形的关系.

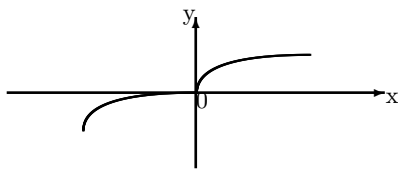
解： 设 $y = f(x)$ 的图形如下：



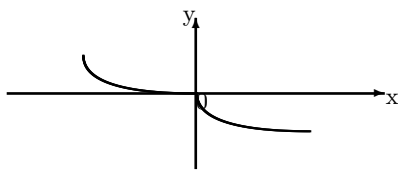
则 y_1 的图形为：



则 y_2 的图形为：



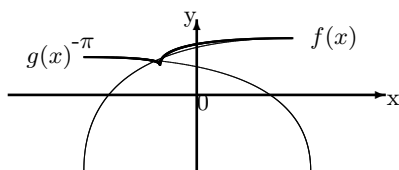
则 y_3 的图形为：



y_1 的图形当 $f(x) < 0$ 时与 y 的图形关于 x 轴对称，当 $f(x) > 0$ 时与 y 的图形一样；
 y_2 的图形与 y 的图形关于 y 轴对称，
 y_3 的图形与 y 的图形关于原点对称，

10. 若已知 $f(x), g(x)$ 的图形, 试作函数 $y = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\}$ 的图形, 并说明 y 的图形与 $f(x), g(x)$ 图形的关系.

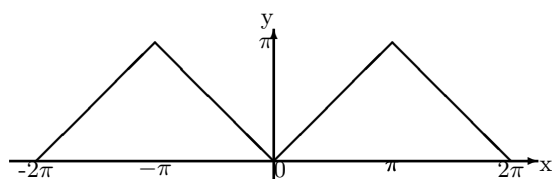
解: $y = \max\{f(x), g(x)\}$



11. 对于定义在 $[0, \pi]$ 上的函数 $y = x$, 先把它延拓到 $[0, 2\pi]$ 使它关于 $x = \pi$ 为对称, 然后再把已延拓到 $[0, 2\pi]$ 上的函数延拓到整个实轴上使函数为以 2π 为周期的函数.

解: 所求函数为:
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x, & x \in [\pi, 2\pi] \\ x - 2n\pi, & x \in [2n\pi, (2n+1)\pi] (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ 2n\pi - x, & x \in [(2n-1)\pi, 2n\pi] (n = 0, -1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

$$= \pi \left| \frac{x}{\pi} - 2 \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right] \right|$$



第二章 极限与连续

§1. 数列的极限和无穷大量

1. 写出下列数列的前四项:

$$(1) x_n = \frac{1}{3n} \sin n^3$$

$$(2) x_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$$

$$(3) x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$(4) x_1 = a > 0, y_1 = b > 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

$$(5) x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$x_{2n+1} = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

解:

$$(1) x_1 = \frac{1}{3} \sin 1, \quad x_2 = \frac{1}{6} \sin 8, \quad x_3 = \frac{1}{9} \sin 27, \quad x_4 = \frac{1}{12} \sin 64$$

$$(2) x_1 = mx, \quad x_2 = \frac{m(m-1)}{2} x^2, \quad x_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} x^3,$$

$$x_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24} x^4$$

$$(3) x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}},$$

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{19}} + \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$$(4) x_1 = a, \quad x_2 = \sqrt{ab}, \quad x_3 = \sqrt{\sqrt{ab} \frac{a+b}{2}},$$

$$x_4 = \sqrt[8]{ab} \cdot \sqrt[4]{\frac{a+b}{2}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$$

$$y_1 = b, \quad y_2 = \frac{a+b}{2}, \quad y_3 = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4},$$

$$y_4 = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4} + \frac{\sqrt[4]{ab} \sqrt{2(a+b)}}{16}$$

$$(5) x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \frac{3}{2}, \quad x_5 = \frac{1}{2}$$

2. 按定义证明以下数列为无穷小量:

$$(1) \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$(2) \frac{\sin n}{n}$$

$$(3) \frac{n+(-1)^n}{n^2-1}$$

$$(4) \frac{1}{n!}$$

$$(5) \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

$$(6) (-1)^n (0.999)^n$$

$$(7) \frac{1}{n} + e^{-n}$$

- (8) $\frac{e^{-n}}{n}$
 (9) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
 (10) $\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}$

证明:

- (1) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{n+1}{n^2+1} - 0 \right| = \frac{n+1}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$, 要使 $\left| \frac{n+1}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{2}{n} < \varepsilon$ 即可。
 取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{n+1}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{n+1}{n^2+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (2) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$, 要使 $\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$,
 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (3) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} - 0 \right| = \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} < \frac{n+1}{n^2-1} = \frac{1}{n-1}$, 要使 $\left| \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n-1} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} - 0 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (4) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{1}{n!} - 0 \right| = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$, 要使 $\left| \frac{1}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 则
 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{1}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{1}{n!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (5) 设 $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$
 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $S_n = \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n})$
 设 $\delta_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, 则 $S_n = \frac{\delta_n}{n}$ 当 $n = 2k+1$ 时, 有 $0 < \delta_n = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - \cdots - (\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}) < 1$; 当 $n = 2k$ 时, 有 $0 < \delta_n = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - \cdots - (\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1}) - \frac{1}{2k} < 1$ 。
 总之, 有 $0 < \delta_n < 1$ 从而 $|S_n - 0| = S_n = \frac{\delta_n}{n} < \frac{1}{n}$ 要使 $|S_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$,
 则当 $n > N$ 时, $|S_n - 0| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (6) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $n > \ln n$, 则 $e^n > n$, 于是 $e^{-n} < \frac{1}{n}$, 从而 $\left| \frac{1}{n} + e^{-n} - 0 \right| = \frac{1}{n} + e^{-n} < \frac{2}{n}$, 要
 使 $|(-1)^n (0.999)^n - 0| < \varepsilon$, 只要 $(0.999)^n < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[2500 \ln \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $|(-1)^n (0.999)^n - 0| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $(-1)^n (0.999)^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (7) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{1}{n} + e^{-n} - 0 \right| = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$, 要使 $\left| \frac{1}{n} + e^{-n} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{2}{n} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$,
 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{1}{n} + e^{-n} - 0 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{1}{n} + e^{-n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (8) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $e^{-n} < e^0 = 1$, 则 $\left| \frac{e^{-n}}{n} - 0 \right| = \frac{e^{-n}}{n} < \frac{1}{n}$, 要使 $\left| \frac{e^{-n}}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即可。
 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{e^{-n}}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{e^{-n}}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (9) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, 要使 $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$
- (10) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3} - 0 \right| = \frac{n+1}{2n^2} < \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n}$, 要使 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即可。
 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3} - 0 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

3. 举例说明下列关于无穷小量的定义是错误的:

- (1) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 成立 $x_n < \varepsilon$;
- (2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在无限多个 x_n , 使 $|x_n| < \varepsilon$.

解:

- (1) 例如: 数列 $\{-1 + (-1)^{n+1}\}$ (或 $\{-n\}$) 即 $\{0, -2, 0, -2, \dots\}$ (或 $\{-1, -2, -3, \dots\}$) 满足上述条件, 但不是无穷小量;
- (2) 例如: 数列 $\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \dots, 1, \frac{1}{n}, \dots\}$ 满足上述条件, 但不是无穷小量。

4. 按定义证明:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} = \frac{3}{2}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (0.\overbrace{99 \dots 9}^n) = 1$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} = 1$
- (4) $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$, 此处 $r_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n+1} & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ \frac{n}{n} & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$
- (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$, 此处 $r_n = \begin{cases} 3 & \text{当 } n = 3k (k = 1, 2, 3, \dots) \\ \frac{3n+1}{n} & \text{当 } n = 3k+1 \\ 2 + \frac{1+n}{3-\sqrt{n}+n} & \text{当 } n = 3k+2 \end{cases}$

证明:

- (1) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{2n+3}{4n^2-2} < \frac{4(n+1)}{4(n+1)(n-1)} = \frac{1}{n-1} (n \geq 2)$, 要使 $\left| \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n-1} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \max\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, 2\right)$, 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{3n^2 + n}{2n^2 - 1} \rightarrow \frac{3}{2} (n \rightarrow \infty)$
- (2) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| 0.\overbrace{99 \dots 9}^n - 1 \right| = (0.1)^n = \frac{1}{10^n}$, 要使 $\left| 0.\overbrace{99 \dots 9}^n - 1 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\lg \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $\left| 0.\overbrace{99 \dots 9}^n - 1 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $0.\overbrace{99 \dots 9}^n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$
- (3) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} - 1 \right| = \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} + n} < \frac{1}{2n}$, 要使 $\left| \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $\frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$
- (4) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, 则 $|x_n - 1| = \frac{1}{n}$, 要使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $x_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$
- (5) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $|r_n - 1| = \left| \frac{n \pm 1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$, 要使 $|r_n - 1| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, $|r_n - 1| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $r_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$
- (6) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $|r_{3k} - 3| = 0, |r_{3k+1} - 3| = \frac{1}{n}, |r_{3k+2} - 3| = \frac{\sqrt{n} - 2}{3 - \sqrt{n} + n} = \frac{n - 4}{n\sqrt{n} + n + \sqrt{n} + 6} < \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 要使 $|r_n - 3| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 且 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ 即可。取 $N = \max\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1\right)$, 则当 $n > N$ 时, $|r_n - 3| < \varepsilon$ 总成立, 所以 $r_n \rightarrow 3 (n \rightarrow \infty)$

5. (1) 按定义证明, 若 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 则对任意自然数 k , $a_{n+k} \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$
 (2) 按定义证明, 若 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 则 $|a_n| \rightarrow |a|$. 又反之是否成立?
 (3) 若 $|a_n| \rightarrow 0$, 试问 $a_n \rightarrow a$ 是否一定成立? 为什么?

证明:

- (1) 由于 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$, 则对 $\forall k \in \mathbb{Z}^+, n+k > N$ 时, $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$, 于是对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n+k > N$ 时, $|a_{n+k} - a| < \varepsilon$, 从而 $a_{n+k} \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$
 \triangle 此结论说明: 去掉数列的前面有限项, 也不影响其收敛性。

- (2) (i) 由于 $a_n \rightarrow a$, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 又 $||a_n| - |a|| < |a_n - a|$, 于是对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $||a_n| - |a|| < \varepsilon$ 成立, 即 $|a_n| \rightarrow |a| (n \rightarrow \infty)$
 (ii) 反之不一定成立。

例:

(a) 不成立: $a_n = (-1)^n$, 则 $|a_n| \rightarrow 1$, 而 a_n 无极限;

(b) 成立: $a_n = \frac{1}{n}$, 则 $|a_n| \rightarrow 0, a_n \rightarrow 0$

- (3) 由于 $|a_n| \rightarrow 0$, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $||a_n| - 0| < \varepsilon$, 又 $|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$, 于是对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $|a_n - 0| < \varepsilon$ 成立, 即 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 从而若 $|a_n| \rightarrow 0$, 则 $a_n \rightarrow 0$ 一定成立。

6. 按定义证明, 若 $x_n \rightarrow a$, 且 $a > b$, 则存在 N , 当 $n > N$ 时, 成立 $x_n > b$.

证明: 由于 $x_n \rightarrow a$, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. 又 $a > b$, 故 $a - b > 0$, 则取 $\varepsilon = a - b > 0$, 从而 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > a - \varepsilon = a - (a - b) = b$. 即存在 N , 当 $n > N$ 时, 成立 $x_n > b$.

7. 若 $\{x_n y_n\}$ 收敛, 能否断定 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 亦收敛.

解: 不能.

例: $x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^n (n = 1, 2, \dots), x_n y_n \equiv 1 (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\{x_n y_n\}$ 收敛, 但 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均不收敛. 故若 $\{x_n y_n\}$ 收敛, 不能断定 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 亦收敛.

8. 利用极限性质及计算证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

$$(3) \text{ 利用 } (1+h)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k h^k = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 + \dots + h^n$$

证明:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 (a > 1)$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{e^n} = 0 (e \approx 2.7)$$

证明:

$$(1) \text{ 对 } \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{ 有 } 0 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{n+1}{n^2}, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$$

$$(2) \text{ 对 } \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{ 有 } \frac{n}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{n} = 1 \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \\ \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

$$(3) (i) \text{ 设 } a = 1 + h (h > 0), \text{ 由于 } 0 < \frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+h)^n} = \frac{n}{1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 + \dots + h^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}, \text{ 又 } \frac{2}{h^2} \text{ 为定值, } \frac{1}{n-1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \text{ 则 } \frac{2}{(n-1)h^2} \rightarrow 0. \text{ 从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

(ii) 设 $e = 1 + h$ ($h \approx 1.7$), 由于 $0 < \frac{n^5}{e^n} = \frac{n^5}{(1+h)^n} = \frac{n^5}{1+nh+C_n^2h^2+\cdots+h^n} < \frac{n^5}{C_n^6h^6} < \frac{720n^5}{(n-5)^6h^6}$, 又 $\frac{720}{h^6}$ 为定值, $\frac{n^5}{(n-5)^6} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\frac{720n^5}{(n-5)^6h^6} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{e^n} = 0$

9. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - n + 1}{2n^3 - 3n^2 + 2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - n + 1}{n^3 + n^2 + 2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \cos n$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n}}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(\sin n!) \left(\frac{n-1}{n^2+1} \right)^{10} - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) \frac{2n^2+1}{n^2-1} \right]$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

解:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - n + 1}{2n^3 - 3n^2 + 2} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - n + 1}{n^3 + n^2 + 2} = 0$$

$$(3) \text{ 由于 } \sqrt[n]{2} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty), \text{ 故 } 1 - \sqrt[n]{2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \text{ 又 } |\cos n| \leq 1, \text{ 从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \cos n = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}}{\frac{1 - (\frac{1}{4})^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

$$(5) \text{ 由于 } \{\sin n!\} \text{ 为有界数列, } \left(\frac{n-1}{n^2+1} \right)^{10} \rightarrow 0, 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1, \frac{2n^2+1}{n^2+1} \rightarrow 2 (n \rightarrow \infty),$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(\sin n!) \left(\frac{n-1}{n^2+1} \right)^{10} - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) \frac{2n^2+1}{n^2-1} \right] = -2$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1}{(-2)\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 3} = \frac{1}{3}$$

10. 若 $x_n \rightarrow a > 0$, 试证:

$$(1) \sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{a}$$

$$(2) \sqrt{a_0x_n^m + a_1x_n^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x_n + a_m} \rightarrow \sqrt{a_0a^m + a_1a^{m-1} + \cdots + a_{m-1}a + a_m}$$

(其中 $a_0a^m + a_1a^{m-1} + \cdots + a_{m-1}a + a_m > 0$)

证明:

$$(1) \text{ 由于 } x_n \rightarrow a > 0, \text{ 故对 } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{ 当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon, \text{ 且 } |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x_n - a}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right| < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon, \text{ 即对上述 } \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{ 当 } n > N \text{ 时, } |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon, \text{ 从而 } \sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{a} (n \rightarrow \infty)$$

- (2) 由于 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 故 $a_0 x_n^m + a_1 x_n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x_n + a_m \rightarrow a_0 a^m + a_1 a^{m-1} + \cdots + a_{m-1} a + a_m > 0$, 则据(1)得

$$\sqrt{a_0 x_n^m + a_1 x_n^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x_n + a_m} \rightarrow \sqrt{a_0 a^m + a_1 a^{m-1} + \cdots + a_{m-1} a + a_m}$$

11. 对数列 $\{x_n\}$, 若 $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k+1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明: $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 因 $x_{2k} \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 故 $\exists K_1 \in \mathbb{Z}^+$, 使当 $k > K_1$ 时, $|x_{2k} - a| < \varepsilon$ 成立。

又因 $x_{2k+1} \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 故 $\exists K_2 \in \mathbb{Z}^+$, 使当 $k > K_2$ 时, $|x_{2k+1} - a| < \varepsilon$ 成立。

取 $N = \max\{2K_1, 2K_2 + 1\}$, 则当 $n > N$ 时, 若 n 为偶数, $n = 2k > N \geq 2K_1, k > K_1, |x_n - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon$,

若 n 为奇数, $n = 2k + 1 > N \geq 2K_2 + 1, k > K_2, |x_n - a| = |x_{2k+1} - a| < \varepsilon$,

因此 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$

12. 利用单调有界必有极限, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求出它:

(1) $x_1 = \sqrt{2}, \cdots, x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$

(2) $x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{x_0}{1+x_0}, \cdots, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$

证明:

- (1) 显然 $x_1 < x_2$, 假设 $x_{n-1} < x_n$, 则 $x_n = \sqrt{2x_{n-1}} < \sqrt{2x_n}$, 由归纳法, 知 $\{x_n\}$ 是单调增加的, 又 $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$, 故得 $x_n^2 = 2x_{n-1} \leq 2x_n$, 于是 $x_n \leq 2$, 即 $\{x_n\}$ 由上界。从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_n^2 = 2x_{n-1}$ 两边令 $n \rightarrow \infty$, 得 $l^2 = 2l$, 解之得 $l = 2$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ 。

- (2) 显然 $x_n \geq 1$, 有条件知 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2$, 故 $\{x_n\}$ 有界。又 $x_1 = 1 + \frac{x_0}{1+x_0} = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} > 1 = x_0$, 假设 $x_{n-1} < x_n$, 则 $x_n = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2 - \frac{1}{1+x_n} = x_{n+1}$, 由归纳法, 知 $\{x_n\}$ 是单调增加的。从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_n = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}}$ 两边令 $n \rightarrow \infty$, 得 $l = 2 - \frac{1}{1+l}$, 即 $l^2 = 1 + l$, 解得 $l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, l_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (不合题意, 舍去), 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。

13. 若 $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0 (a < b), x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 。

证明: 由于 $\sqrt{x_n y_n} \leq \frac{x_n + y_n}{2}$ 且此式相等当且仅当 $x_n = y_n$, 故 $x_{n+1} \leq y_{n+1}$ 等号成立当且仅当 $x_n = y_n$ 。又 $0 < a < b$, 故 $x_1 < y_1$, 则由递推公式, 得 $x_{n+1} < y_{n+1}$ 且 $x_n > 0, y_n > 0 (n \in \mathbb{Z}^+)$ 。而 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{x_n x_n} = x_n, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n$, 则 $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$ 。又由 $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0$, 得 $a < x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n < b$, 说明 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都是单调有界数列, 从而 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均有极限, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$, 又由 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, 得 $x_{n+1}^2 = x_n y_n$, 在等式两边令 $n \rightarrow \infty$, 得 $\alpha^2 = \alpha\beta$ 又由 $0 < a < x_n < x_{n+1}$, 得定有 $0 < \alpha \leq \alpha$, 从而 $\alpha = \beta$ 即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 。

14. 利用单调有界必有极限证明以下数列必有极限:

(1) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

(2) $x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$

(3) $x_n = \frac{n^k}{a^n} (a > 1, k \text{ 为正整数})$

(4) $x_n = \sqrt[n]{a} (0 < a < 1)$

证明:

- (1) 由于 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, 故 $x_{n+1} > x_n$, 则 $\{x_n\}$ 为单调增加的。又 $1 < x_n < 1 + \frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$, 故 $\{x_n\}$ 有界, 于是 $\{x_n\}$ 存在极限。

- (2) 由于 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3^{n+1}+1} > 0$, 故 $x_{n+1} > x_n$, 则 $\{x_n\}$ 为单调增加的。又 $\frac{1}{4} < x_n < \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$, 故 $\{x_n\}$ 有界, 于是 $\{x_n\}$ 存在极限。

(3) 由于 $a > 1, k$ 为正整数, 故 $x_n = \frac{n^k}{a^n} > 0$, 则 $\{x_n\}$ 有下界. 又 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{a} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \rightarrow \frac{1}{a} (n \rightarrow \infty) < 1$, 故 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, 则从 $N+1$ 项开始都有 $x_{n+1} < x_n$, 于是 $\{x_n\}$ 为单调减少的 ($n > N$), 从而 $\{x_n\}$ 存在极限.

(4) 由于 $\ln x_n = \frac{1}{n} \ln a = y_n, 0 < a < 1$, 故 $\{y_n\}$ 是单调增加的, 从而由 $x_n = \sqrt[n]{a} = e^{y_n}$ 得 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 又 $0 < x_n = \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{1} = 1$, 故 $\{x_n\}$ 有界, 于是 $\{x_n\}$ 存在极限.

15. 证明: 若 x_n 上升, y_n 下降, 而 $x_n - y_n$ 为无穷小量, 则 x_n 和 y_n 必有同一极限.

证明: 由 x_n 上升, 故 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$, 又 y_n 下降, 故 $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq \cdots$, 又 $x_n - y_n$ 为无穷小量, 故 $\{x_n - y_n\}$ 有界, 设 $|x_n - y_n| \leq C (n = 1, 2, \cdots)$ (其中 C 为某常数), 则 $-C \leq x_n - y_n \leq C$ 即 $x_n \leq y_n + C \leq y_1 + C$, 于是 $\{x_n\}$ 有上界, 从而 $\{x_n\}$ 存在极限. 又 $y_n \geq x_n - C \geq x_1 - C$, 于是 $\{y_n\}$ 有下界, 从而 $\{y_n\}$ 存在极限, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

16. 设 x 为任意给定的实数, 又设 $y_n(x) = \underbrace{\sin \sin \cdots \sin}_n x$, 证明 $\{y_n(x)\}$ 的极限存在, 并求此极限.

证明: 先设 $0 \leq x \leq \pi$, 则 $0 \leq \sin x \leq x$, 从而有 $y_{n+1}(x) = \sin y_n(x) \leq y_n(x)$, 故 $\{y_n(x)\}$ 是以 0 为下界的单调下降函数列, 必有极限, 则得对 $\forall x_0 \in [0, \pi]$, 有 $0 \leq u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0) = \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(x_0) \right) = \sin u_0$, 则 $u_0 = 0$, 从而对 $\forall x \in [0, \pi]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 0$.

同理可证当 $x \in [-\pi, 0]$ 时亦有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 0$.

再由周期性可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 0$

17. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 试证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$

证明: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 得对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, 则有 $\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a \right| = \left| \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \cdots + (x_n - a)}{n} \right| \leq \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a| + |x_{N_1+1} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} < \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\because \frac{n - N_1}{n} < 1 \right)$

取 $M = \max(|x_1 - a|, |x_2 - a|, \cdots, |x_{N_1} - a|)$, 则 $\frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} \leq \frac{N_1 \cdot M}{n}$, 又 $N_1 \cdot M$ 为定值, 则 $\frac{N_1 \cdot M}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

于是对上述 $\varepsilon > 0, \exists N_2 = \left\lceil \frac{2N_1 \cdot M}{\varepsilon} \right\rceil \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$\frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$

注: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a \nRightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

例: $x_n = (-1)^{n-1} (n = 1, 2, \cdots)$, 则显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

18. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$

证明:

(1) 设 $a = 0$, 去证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = 0$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则据定理 4 (P_{38}), 得 $\exists M > 0$, 使 $|b_n| \leq M (n \in \mathbb{Z}^+)$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. 取 $N = \max \left\{ \left\lceil \frac{2(|a_1| + \cdots + |a_{N_1}|)M}{\varepsilon} \right\rceil + 1, N_1 \right\}$,

于是当 $n \geq N (\geq N_1)$ 时, 有 $\left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \right| = \left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{N_1} b_{n-N_1+1} + a_{N_1+1} b_{n-N_1} + \cdots + a_n b_1}{n} \right|$

$$\leq \left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{N_1} b_{n-N_1+1}}{n} \right| + \left| \frac{a_{N_1+1} b_{n-N_1} + \cdots + a_n b_1}{n} \right| \leq \frac{(|a_1| + \cdots + |a_{N_1}|)M}{n} + \frac{(n - N_1) \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M}{n} <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ 从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = 0$$

- (2) 当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1}{n} = b \neq 0$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$

$$\text{由(1)知 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 - a)b_n + \cdots + (a_n - a)b_1}{n} = 0,$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 \cdot \frac{b_n}{n} + \cdots + a_n \cdot \frac{b_1}{n}}{\frac{b_n + \cdots + b_1}{n}} - a \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 - a) \cdot \frac{b_n}{n} + \cdots + (a_n - a) \cdot \frac{b_1}{n}}{\frac{b_n + \cdots + b_1}{n}} = \frac{0}{b} = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot \frac{b_n}{n} + \cdots + a_n \cdot \frac{b_1}{n}}{\frac{b_n + \cdots + b_1}{n}} = a,$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 \cdot \frac{b_n}{n} + \cdots + a_n \cdot \frac{b_1}{n}}{\frac{b_n + \cdots + b_1}{n}} \cdot \frac{b_n + \cdots + b_1}{n} \right) = ab$$

19. 按定义证明下列数列为无穷大量:

(1) \sqrt{n}

(2) $n!$

(3) $\ln n$

(4) $\frac{n^2 + 1}{2n + 1}$

(5) $\frac{n^2 + 1}{2n - 1}$

(6) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

证明:

- (1) 对 $\forall G > 0$, 要使 $|\sqrt{n}| > G$, 只要 $n > G^2$ 即可. 取 $N = [G^2]$, 则当 $n > N$ 时, $|\sqrt{n}| > G$ 总成立, 故 $\{\sqrt{n}\}$ 是无穷大量.

- (2) 对 $\forall G > 0$, 由于 $|n!| > n$, 要使 $|n!| > G$, 只要 $n > G$ 即可. 取 $N = [G]$, 则当 $n > N$ 时, $|n!| > G$ 总成立, 故 $\{n!\}$ 是无穷大量.

- (3) 对 $\forall G > 0$, 要使 $|\ln n| > G$, 只要 $n > e^G$ 即可. 取 $N = [e^G]$, 则当 $n > N$ 时, $|\ln n| > G$ 总成立, 故 $\{\ln n\}$ 是无穷大量.

- (4) 对 $\forall G > 0$, 由于 $\left| \frac{n^2 + 1}{2n + 1} \right| > \frac{n^2}{3n} = \frac{n}{3}$, 要使 $\left| \frac{n^2 + 1}{2n + 1} \right| > G$, 只要 $\frac{n}{3} > G$ 即可. 取 $N = [3G]$, 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{n^2 + 1}{2n + 1} \right| > G$ 总成立, 故 $\left\{ \frac{n^2 + 1}{2n + 1} \right\}$ 是无穷大量.

- (5) 对 $\forall G > 0$, 由于 $\left| \frac{n^2 + 1}{2n - 1} \right| > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$, 要使 $\left| \frac{n^2 + 1}{2n - 1} \right| > G$, 只要 $\frac{n}{2} > G$ 即可. 取 $N = [2G]$, 则当 $n > N$ 时, $\left| \frac{n^2 + 1}{2n - 1} \right| > G$ 总成立, 故 $\left\{ \frac{n^2 + 1}{2n - 1} \right\}$ 是无穷大量.

- (6) 对 $\forall G > 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ 且 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ 单调增加, 则 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e$, 于是 $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$, 从而 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln(n+1) > \ln n$, 则要使 $\left| 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right| > G$, 只要 $\ln n > G$ 即可. 取 $N = [e^G]$, 则当 $n > N$ 时, $\left| 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right| > G$ 总成立, 故 $\left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right\}$ 是无穷大量.

20. 证明: 若 $\{x_n\}$ 是无穷小量, $x_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则 $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ 是无穷大量.

证明: 由于 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n| < \varepsilon$

又 $x_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 故 $\frac{1}{x_n}$ 存在且 $\left| \frac{1}{x_n} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$

又 ε 是任意的, 故 $\frac{1}{\varepsilon}$ 也是任意的, 从而 $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ 是无穷大量。

21. 证明: 若 $\{x_n\}$ 为无穷大量, $\{y_n\}$ 为有界变量, 则 $\{x_n \pm y_n\}$ 为无穷大量。
并由此计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin n + \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \arctan n)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n + (-1)^n \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) \right]$$

又: 两个无穷大量的极限怎样? 试讨论各种可能情形。

i) 证明: 由于 $\{y_n\}$ 为有界变量, 故必存在正数 M , 使 $|y_n| \leq M$, 又 $\{x_n\}$ 为无穷大量, 故对 $\forall G > M > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n| > G$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|x_n \pm y_n| \geq |x_n| - |y_n| > G - M$. 由 G 的任意性及 $G > M > 0$, 可知 $G - M > 0$ 且 $G - M$ 是任意的, 从而 $\{x_n \pm y_n\}$ 为无穷大量。

ii) 解:

$$(1) \text{ 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 1}} = \infty \text{ 且 } |\sin n| \leq 1, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin n + \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) = \infty$$

$$(2) \text{ 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{ 且 } |\arctan n| \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \arctan n) = \infty$$

$$(3) \text{ 设 } x_n = (-1)^n \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right), \text{ 则 } x_n = \frac{(-1)^n}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right] =$$

$$\frac{(-1)^n}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2 + \frac{1}{n}}, \text{ 故有 } \frac{1}{3} < |x_n| < \frac{1}{2}. \text{ 又由 } \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \text{ 从而}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n + (-1)^n \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) \right] = \infty$$

iii) 解:

$$(1) x_n = n \rightarrow +\infty, y_n = 2n \rightarrow +\infty; x_n + y_n = 3n \rightarrow +\infty$$

$$(2) x_n = -n \rightarrow -\infty, y_n = -2n \rightarrow -\infty; x_n + y_n = -3n \rightarrow -\infty$$

$$(3) x_n = -n \rightarrow -\infty, y_n = 2n \rightarrow +\infty; x_n + y_n = n \rightarrow +\infty$$

$$(4) x_n = n \rightarrow +\infty, y_n = -2n \rightarrow -\infty; x_n + y_n = -n \rightarrow -\infty$$

$$(5) x_n = n + a \rightarrow +\infty, y_n = -n \rightarrow -\infty; x_n + y_n = a \text{ (常量)}$$

$$(6) x_n = n + (-1)^n \rightarrow +\infty, y_n = -n \rightarrow -\infty; x_n + y_n = (-1)^n \text{ 无极限}$$

22. 讨论无穷大量和无穷小量的和、差、商的极限的情形。

解:

(1) 和、差: 因 $y_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故 $\{y_n\}$ 有界。又 $x_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 则由上题结论, 有 $\{x_n \pm y_n\}$ 为无穷大量。

(2) 商: 当 $x_n \neq 0, y_n \neq 0$ 时, 由于 $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则有 $y_n \cdot \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$, 即 $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0, \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

23. 举例说明无穷大量和无穷小量的乘积可能发生的种种情形。

解:

$$(1) x_n = n \rightarrow +\infty, y_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); x_n \cdot y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

$$(2) x_n = n^2 \rightarrow +\infty, y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); x_n \cdot y_n = n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$$

$$(3) x_n = n \rightarrow +\infty, y_n = \frac{a}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); x_n \cdot y_n = a \text{ (常量)}$$

$$(4) x_n = n(-1)^n \rightarrow \infty, y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); x_n \cdot y_n = (-1)^n \text{ 无极限但有界}$$

$$(5) x_n = n^2 n^{(-1)^n} \rightarrow \infty, y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); x_n \cdot y_n = n \cdot n(-1)^n = n^{1+(-1)^n} \text{ 无极限, 无界 (且不是无穷大量)}$$

24. 若 $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow a \neq 0$, 证明 $x_n y_n \rightarrow \infty$

证明: 由于 $x_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 故 $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$; 又 $y_n \rightarrow a \neq 0 (n \rightarrow \infty)$, 故 $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{a} (n \rightarrow \infty)$, 于是 $\frac{1}{x_n} \cdot \frac{1}{y_n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 从而 $x_n y_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$

25. 若 $x_n \rightarrow +\infty, y_n \rightarrow -\infty$, 证明 $x_n y_n \rightarrow -\infty$.

证明: 因 $x_n \rightarrow +\infty$, 则对 $\forall G_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $x_n > G_1$; 又 $y_n \rightarrow -\infty$, 则对 $\forall G_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $-y_n > G_2 > 0$. 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 有 $-x_n y_n > G_1 G_2$, 即 $x_n y_n < -G_1 G_2$. 由 G_1, G_2 的任意性, 得 $G_1 G_2$ 是任意的且 $G_1 G_2 > 0$, 则得 $x_n y_n \rightarrow -\infty$.

26. 若 $x_n \rightarrow +\infty$, 证明 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \rightarrow +\infty$

证明: 因 $x_n \rightarrow +\infty$, 则对 $\forall G > 0, \exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $x_n > 3G$, 于是 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_{N_1}}{n} +$

$$\frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n} > \frac{x_1 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot 3G,$$

取 $M = \max(|x_1|, \cdots, |x_{N_1}|)$, 则 $\left| \frac{x_1 + \cdots + x_{N_1}}{n} \right| \leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_{N_1}|}{n} \leq \frac{N_1 \cdot M}{n}$, 于是对上述 $G > 0$,

取 $N_2 = \left\lceil \frac{2N_1 \cdot M}{G} \right\rceil$, 则当 $n > N_2$ 时, 有 $\left| \frac{x_1 + \cdots + x_{N_1}}{n} \right| < \frac{G}{2}$, 从而 $\frac{x_1 + \cdots + x_{N_1}}{n} > -\frac{G}{2}$. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - N_1}{n} =$

1, 故对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}, \exists N_3 \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N_3$ 时, 有 $\left| \frac{n - N_1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2}$, 从而 $\frac{n - N_1}{n} > \frac{1}{2}$, 取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$,

则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} > -\frac{G}{2} + \frac{3G}{2} = G$, 由此知 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$.

§2. 函数的极限

1. 用分析定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{x-3} = 0$$

$$(5) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t-1)}{t^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2-9} = \infty$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x}{x+1} = \infty$$

证明:

(1) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{x+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x+1}{2x+6} \right|$, 因 $x \rightarrow -1$, 不妨设 $|x+1| < 1$, 则 $-2 < x < 0$, 从而 $2 < |2x+6| < 6$, 于是 $\left| \frac{x+1}{2x+6} \right| < \frac{|x+1|}{2}$, 要使 $\left| \frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{|x+1|}{2} < \varepsilon$ 即可。

取 $\delta = \min\{2\varepsilon, 1\} > 0$, 则当 $0 < |x - (-1)| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ 总成立, 故 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{2}$

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{1}{x+3} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{x-3}{6x+18} \right|$, 因 $x \rightarrow 3$, 不妨设 $|x-3| < 1$, 则 $2 < x < 4$, 从而 $30 < |6x+18| < 42$, 于是 $\left| \frac{x-3}{6x+18} \right| < \frac{|x-3|}{30}$, 要使 $\left| \frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{6} \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{|x-3|}{30} < \varepsilon$ 即可。取 $\delta = \min\{30\varepsilon, 1\} > 0$, 则当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{6} \right| < \varepsilon$ 总成立, 故 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$

(3) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2 \right| = |\sqrt{x}+1-2| = |\sqrt{x}-1| = \left| \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \right|$, 因 $x \rightarrow 1$, 不妨设 $|x-1| < 1$, 则 $0 < x < 2$, 从而 $1 < |\sqrt{x}+1| < \sqrt{2}+1$, 于是 $\left| \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \right| < |x-1|$, 要使 $\left| \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2 \right| < \varepsilon$, 只要 $|x-1| < \varepsilon$ 即可。取 $\delta = \min\{\varepsilon, 1\} > 0$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2 \right| < \varepsilon$ 总成立, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$

(4) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{(x-2)(x-1)}{x-3} - 0 \right| = \left| \left(1 + \frac{1}{x-3}\right)(x-1) \right|$, 因 $x \rightarrow 1$, 不妨设 $|x-1| < 1$, 则 $0 < x < 2$, 从而 $0 < \left| 1 + \frac{1}{x-3} \right| < \frac{2}{3}$, 于是 $\left| 1 + \frac{1}{x-3} \right| < \frac{2}{3}|x-1|$, 要使 $\left| \frac{(x-2)(x-1)}{x-3} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{2}{3}|x-1| < \varepsilon$ 即可。取 $\delta = \min\left\{\frac{3}{2}\varepsilon, 1\right\} > 0$, 则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{(x-2)(x-1)}{x-3} - 0 \right| < \varepsilon$ 总成立, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{x-3} = 0$

(5) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{t(t-1)}{t^2-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{t}{t+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{t-1}{2t+2} \right|$, 因 $t \rightarrow 1$, 不妨设 $|t-1| < 1$, 则 $0 < t < 2$, 从而 $2 < |2t+2| < 6$, 于是 $\left| \frac{t-1}{2t+2} \right| < \frac{|t-1|}{2}$, 要使 $\left| \frac{t(t-1)}{t^2-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{|t-1|}{2} < \varepsilon$ 即可。取 $\delta = \min\{2\varepsilon, 1\} > 0$, 则当 $0 < |t-1| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{t(t-1)}{t^2-1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ 总成立, 故 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t-1)}{t^2-1} = \frac{1}{2}$

- (6) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| = \left| \frac{3}{x+2} \right|$, 因 $x \rightarrow \infty$, 不妨设 $|x| > 2$, 则 $|x+2| > |x| - 2$, 于是 $\left| \frac{3}{x+2} \right| < \frac{3}{|x|-2}$, 要使 $\left| \frac{3}{x+2} \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{3}{|x|-2} < \varepsilon$ 即可, 即 $|x| > \frac{3}{\varepsilon}$. 取 $X = \frac{3}{\varepsilon} + 2$, 则当 $|x| > X$ 时, 就有 $\left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| < \varepsilon$ 总成立, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$
- (7) 对 $\forall G > 0$, 由于 $\left| \frac{x}{x^2-9} \right| = \left| \frac{x}{x+3} \right| \left| \frac{1}{x-3} \right|$, 因 $x \rightarrow 3$, 不妨设 $|x-3| < 1$, 则 $2 < x < 4$, 从而 $\frac{2}{7} < \left| \frac{x}{x+3} \right| < \frac{4}{5}$, 于是 $\left| \frac{x}{x+3} \right| \left| \frac{1}{x-3} \right| > \frac{2}{7} \left| \frac{1}{x-3} \right|$, 要使 $\left| \frac{x}{x^2-9} \right| > G$, 只要 $\frac{2}{7} \left| \frac{1}{x-3} \right| > G$ 即可. 取 $\delta = \min \left\{ \frac{2}{7G}, 1 \right\} > 0$, 则当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x}{x^2-9} \right| > G$ 总成立, 故 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x^2-9} = \infty$
- (8) 对 $\forall G > 0$, 由于 $\left| \frac{x^2+x}{x+1} \right| = |x|$, 因 $x \rightarrow \infty$, 取 $X = G > 0$, 则当 $|x| > X$ 时, 就有 $\left| \frac{x^2+x}{x+1} \right| > G$ 总成立, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x}{x+1} = \infty$

2. 求极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$
- (5) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2(t-1)}{t^2-1}$
- (6) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} \quad (m, n \text{ 为自然数})$
- (10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5+6}{x^2-8x+15}$
- (11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{x^2}$
- (12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-7}{2x+\sqrt{x}}$

解:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6+11x+6x^2) = 6$
- (5) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2(t-1)}{t^2-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2}{t+1} = \frac{1}{2}$
- (6) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2-\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)(t+\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt{t}(t+\sqrt{t}+1) = 3$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{1+x}+2} = \frac{1}{4}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5}{x^2 + x^5} = 10$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2)x^2 + (C_n^3 m^3 - C_m^3 n^3)x^3 + \cdots + m^n x^n - n^m x^m}{x^2} = C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2 = \frac{n^2 m - m^2 n}{2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2} = 1$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-7}{2x+\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

3. 设 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式, 并且 $P(a) = Q(a) = 0$, 问 $\lim_{x \rightarrow a}$ 有哪些可能的值?

解: 由于 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式且 $P(a) = Q(a) = 0$,

则 $P(x) = (x-a)^m P_1(x)$, $Q(x) = (x-a)^n Q_1(x)$ ($P_1(a) \neq 0, Q_1(a) \neq 0$), 于是 $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^m P_1(x)}{(x-a)^n Q_1(x)}$$

讨论:

$$(1) \text{ 当 } n = m \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow a} R(x) = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)}$$

$$(2) \text{ 当 } n > m \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{m-n} = \infty \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \neq 0, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow a} R(x) = \infty$$

$$(3) \text{ 当 } n < m \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{m-n} = 0 \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)}, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow a} R(x) = 0$$

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + 1}{x + 1}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 2x}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$$

解:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 2 - 3 = -1$
- (2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin \frac{2x+h}{2} = -\sin x$
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$
- (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$
- (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x+1} = 0$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin 2x}{x^2} = 4$
- (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos 4x}{2x} = 1$
- (9) 令 $y = x - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} -y \tan \left(\frac{\pi}{2}(1+y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} -y \cot \frac{\pi}{2} y = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cos \frac{\pi}{2} y}{\sin \frac{\pi}{2} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\pi}{2} y} = \frac{2}{\pi}$
- (10) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x-a} = \cos a$
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2C_n^1(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}}x + 2C_n^3(1+x^2)^{\frac{n-3}{2}}x^2 + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [2n(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}} + 2C_n^3(1+x^2)^{\frac{n-3}{2}}x + \dots] = 2n$
- (12) 由于 $\left[\frac{1}{x} \right] = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} \right)$ 且 $0 \leq \left(\frac{1}{x} \right) < 1$,
 则 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 1 - x \left(\frac{1}{x} \right) \right\} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{x} \right) = 1$

5. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 并且存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geq g(x)$, 证明 $A \geq B$.

又若 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) > g(x)$, 是否一定成立 $A > B$

证明:

(1) 用反证法。假设 $A < B$, 则由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ 及性质1, 得 $\exists \delta_0 > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta_0$ 时, 有 $g(x) > f(x)$ 。这与已知: $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) \geq g(x)$ 矛盾, 故假设不成立, 即 $A \geq B$ 成立。

(2) 不一定。例:

(i) 成立。 $f(x) = \frac{2(x^2 + 3x^4)}{x^2}$, $g(x) = x^2 + 3x^4x^2$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有 $f(x) > g(x)$ 。
 又 $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$, $B = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$, 故 $A > B$ 成立。

(ii) 不成立。 $f(x) = \frac{x^2 + 3x^4}{x^2}$, $g(x) = x^2 + x^4x^2$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有 $f(x) > g(x)$ 。又 $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $B = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$, 故有 $A = B$ 。

6. 若在点 x_0 的邻域内有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 并且 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 x_0 的极限存在并且都等于 A , 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

证明: 如果对任何 $x_n, x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$, 并且可不妨假设 $x_n \in O(x_0, \delta) - \{x_0\}$, 有 $g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n)$ 以及 $g(x_n) \rightarrow A, h(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, 由数列极限的性质得: $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, 这就证明了 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ 。

7. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

证明: 考察 $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| = \left| \frac{Bf(x) - Ag(x)}{Bg(x)} \right| = \left| \frac{Bf(x) - AB + AB - Ag(x)}{BG(x)} \right| \leq \frac{|B||f(x) - A| + |A||g(x) - B|}{|B||g(x)|}$,

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$; 对上述 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - B| < \varepsilon$

又据乘法运算: $\lim_{x \rightarrow x_0} Bg(x) = B^2 > \frac{B^2}{2}$, 则据性质3, 得 $\exists \delta_3 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_3$ 时, 有 $Bg(x) > \frac{B^2}{2}$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| < \frac{(|A| + |B|)\varepsilon}{\frac{B^2}{2}} = \frac{2(|A| + |B|)}{B^2} \varepsilon$

于是, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| < \frac{2(|A| + |B|)}{B^2} \varepsilon$, 从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

8. (1) $f(x) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ x^2 + 2 & x < 1 \end{cases}$

求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的左右极限。

(2) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 1 + x^2 & x < 0 \end{cases}$

求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的左右极限。

解:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 2) = 3, \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (1 + x^2) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$$

9. 说明下列函数在所示点的左右极限情形:

$$(1) y = \begin{cases} \frac{1}{2x} & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x < 2 \\ 2x & 2 < x < 3 \end{cases} \quad (\text{在 } x = 1.5, 2, 1 \text{ 三点})$$

$$(2) y = x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad (\text{在 } x = 0 \text{ 点})$$

$$(3) y = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} - 1} \quad (\text{在 } x = 0 \text{ 点})$$

$$(4) y = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \quad (\text{在 } x = \frac{1}{n} \text{ 点})$$

$$(5) D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases} \quad (\text{在任一点})$$

$$(6) y = \frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2 - 1} \quad (\text{在 } x = -1)$$

解:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1.5-0} y = \lim_{x \rightarrow 1.5+0} y = 2.25,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = \lim_{x \rightarrow 2-0} x^2 = 4, \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \lim_{x \rightarrow 2+0} (2x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} x^2 = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} y = 0$$

$$(3) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0,$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(1 + \frac{2}{2^{\frac{1}{x}} - 1} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow -0} y = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2^{\frac{1}{x}} + 1}{2^{\frac{1}{x}} - 1} = -1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}+0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}+0} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) = n - (n-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}-0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}-0} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) = n - n = 0$$

(5) 此函数在任一点的左右极限不存在。

设 x_0 为 R 上任一点, 由有理数和无理数在数轴上的稠密性, 可知有理序列 $\{x_n^{(1)}\} \rightarrow x_0 + 0$, 无理序列 $\{x_n^{(2)}\} \rightarrow x_0 + 0$,

故 $\lim_{x_n^{(1)} \rightarrow x_0+0} D(x^{(1)}) = 1$, $\lim_{x_n^{(2)} \rightarrow x_0+0} D(x^{(2)}) = 0$, 从而此函数在任一点的右极限不存在

同理, 此函数在任一点的左极限也不存在

从而此函数在任一点的左右极限不存在。

$$(6) y = \frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1} = \frac{(-1)^{[x]}}{x+1} \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow -1+0} [x] = -1, \lim_{x \rightarrow -1-0} [x] = -2$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow -1+0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$$

10. 讨论下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin x$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan x (x \neq n\pi + \frac{\pi}{2})$$

解:

$$(1) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ 且 } \sin x \text{ 是有界量, 故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$(2) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \text{ 若取 } x_n = 2n\pi \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty), \text{ 则 } e^{x_n} \sin x_n = e^{2n\pi} \sin 2n\pi = 0 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); \text{ 若取 } x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty), \text{ 则 } e^{x_n} \sin x_n = e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = e^{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty), \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \sin x \text{ 不存在, 从而 } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin x \text{ 不存在.}$$

$$(3) \text{ 由于 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \\ \text{则 } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan x = +\infty, \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan x = +\infty$$

$$(4) \text{ 取 } x_n = n\pi \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty), \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \tan x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi \tan n\pi = 0; \text{ 另取 } x_n = \frac{\pi}{4} + n\pi \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty), \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \tan x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) = +\infty, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan x (x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}) \text{ 不存在.}$$

$$11. \text{ 从条件 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0, \text{ 求常数 } a \text{ 和 } b.$$

$$\text{解: 由于 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1) - ax(x+1) - b(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x - b+1}{x+1} = 0, \text{ 则有 } \begin{cases} 1-a=0 \\ a+b=0 \end{cases}, \text{ 从而 } \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$12. \text{ 从条件 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_1x - b_1) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_2x - b_2) = 0, \text{ 求常数 } a_1, b_1, a_2, b_2.$$

$$\text{解: 由于 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_1x - b_1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-a_1^2)x^2 - (1+2a_1b_1)x + 1 - b_1^2}{\sqrt{x^2-x+1} + a_1x + b_1} = 0, \text{ 则 } \begin{cases} 1-a_1^2=0 \\ 1+2a_1b_1=0 \end{cases},$$

$$\text{于是 } \begin{cases} a_1 = \pm 1 \\ b_1 = \mp \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{又据条件可得: 若 } a_1 = 1, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} - a_1x - b_1) = +\infty, \text{ 从而 } \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 同理 } \begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$13. \text{ 若 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0, \text{ 则称直线 } y = kx+b \text{ 是曲线 } y = f(x) \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 的渐近线. 利用这一方程推出渐近线存在的必要且充分的条件.}$$

证明: 若曲线存在渐近线, 则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0. \quad (1)$$

因 $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}[f(x) - kx - b] + k + \frac{b}{x}$, 令 $x \rightarrow +\infty$ 两端取极限并注意到(1)式, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad (2)$$

既求出了 k , 再从(1)式求得

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] \quad (3)$$

反之, 若(2)、(3)两式成立, 立即可看出条件(1)成立.

故曲线 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时存在渐近线 $y = kx + b$ 的充分必要条件是极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$ 均成立.

14. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A > 0$, 证明存在 $X > 0$, 使得当 $x < -X$ 成立: $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$.

证明: 由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A > 0$, 故对给定的 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{A}{2}$, 即 $\frac{A}{2} < f(x) < \frac{3}{2}A$.

15. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = AB$.

证明: 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X_1 > 0$, 当 $x > X_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 且 $\exists X_2 > 0, M > 0$, 当 $x > X_2$ 时, 有 $|f(x)| < A$.

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$, 故对上述 $\varepsilon > 0$, $\exists X_3 > 0$, 当 $x > X_3$ 时, 有 $|g(x) - B| < \varepsilon$.

取 $X = \max\{X_1, X_2, X_3\}$, 对上述 $\varepsilon > 0$, 当 $x > X$ 时,

有 $|f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \leq |f(x)||g(x) - B| + |B||f(x) - A| \leq M\varepsilon + |B|\varepsilon = (M + |B|)\varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = AB$.

16. 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的充要条件是: 对任何数列 $x_n \rightarrow +\infty$, $f(x_n) \rightarrow A$.

证明:

\Rightarrow 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $x_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 故对上述 $X > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > X$, 从而 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

\Leftarrow 用反证法. 假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq A$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall X > 0$, 至少有一个 x' , 当 $x' > X$ 时, 有 $|f(x') - A| \geq \varepsilon_0$.

特别地, 取 X 为 $1, 2, 3, \dots$, 可得 x'_1, x'_2, x'_3, \dots , 使得

$x'_1 > 1$ 时, 有 $|f(x'_1) - A| \geq \varepsilon_0$; $x'_2 > 2$ 时, 有 $|f(x'_2) - A| \geq \varepsilon_0$; $x'_3 > 3$ 时, 有 $|f(x'_3) - A| \geq \varepsilon_0$; \dots

从左边可以看出 $x'_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 而从右边看出 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq A$, 与已知矛盾, 则假设不成立,

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

17. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty$ 的充要条件是: 对任何数列 $x_n: x_n > x_0, x_n \rightarrow x_0$, 有 $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

证明:

\Rightarrow 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty$, 故对 $\forall G > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $f(x) > G$.

又 $x_n > x_0, x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 故对上述 $\delta > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $0 < x_n - x_0 < \delta$, 从而 $f(x_n) > G$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$.

\Leftarrow 用反证法. 假设 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq +\infty$, 则 $\exists G_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$, 至少有一个 x' , 当 $0 < x' - x_0 < \delta$ 时, 有 $f(x') \leq G_0$.

特别地, 取 δ 为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, 可得 x'_1, x'_2, x'_3, \dots , 使得

$0 < x'_1 - x_0 < 1$ 时, 有 $f(x'_1) \leq G_0$; $0 < x'_2 - x_0 < \frac{1}{2}$ 时, 有 $f(x'_2) \leq G_0$; $0 < x'_3 - x_0 < \frac{1}{3}$ 时, 有 $f(x'_3) \leq G_0$; \dots

从左边可以看出 $x'_n > x_0, x'_n \rightarrow x_0$, 而从右边看出 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq +\infty$, 与已知矛盾, 则假设不成立,

故 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty$

18. 举出符合下列要求的 $f(x)$

(1) $f(+0) = 0, f(-0) = 1$

- (2) $f(+0)$ 不存在, 也非 ∞ , $f(-0) = 0$
 (3) $f(+\infty) = 0$, $f(-\infty)$ 不存在
 (4) $f(+\infty) = f(-\infty) = A$ (常数)
 (5) $f(x_0 + 0)$ 和 $f(x_0 - 0)$ 都不存在
 (6) $f(x_0 + 0) = +\infty$, $f(x_0 - 0) = -\infty$
 (7) $f(x_0 + 0) = 1$, $f(x_0 - 0) = +\infty$
 (8) $f(+\infty)$ 不存在, 也非 ∞ , $f(-\infty) = -\infty$

解:

$$(1) f(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(3) f(x) = e^{-x}$$

$$(4) f(x) = \frac{Ax + 1}{x}$$

$$(5) f(x) = \sin \frac{1}{x - x_0}$$

$$(6) f(x) = \frac{1}{x - x_0}$$

$$(7) f(x) = 1 + e^{-\frac{1}{x - x_0}}$$

$$(8) f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

§3. 连续函数

1. 按定义证明下列函数在定义域内连续:

(1) $y = \sqrt{x}$

(2) $y = \frac{1}{x}$

(3) $y = |x|$

(4) $y = \sin \frac{1}{x}$

证明:

(1) 设 x_0 为 $(0, +\infty)$ 内任一点, $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{x_0}\varepsilon$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$, 故 $y = \sqrt{x}$ 在 x_0 点连续.

又由 x_0 在 $(0, +\infty)$ 中的任意性, 则 $y = \sqrt{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续.

当 $x_0 = 0$ 时, 对上述 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon^2$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \sqrt{x} < \varepsilon$, 故 $f(+0) = 0 = f(0)$,

从而 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续.

(2) 设 x_0 为 $(0, +\infty)$ 内任一点, 不妨设 $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, 则 $x > \frac{x_0}{2}, xx_0 > \frac{x_0^2}{2}$, 于是 $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \frac{|x - x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

若 x_0 为 $(-\infty, 0)$ 内任一点, 不妨设 $|x - x_0| < -\frac{x_0}{2}$, 则 $x < \frac{x_0}{2}, xx_0 > \frac{x_0^2}{2}$, 于是 $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \frac{|x - x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

设 x_0 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内任一点,

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{x_0^2 \varepsilon}{2} \right\} > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \varepsilon$, 故 $y = \frac{1}{x}$ 在 x_0 点连续

又由 x_0 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内的任意性, 得 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续.

(3) 设 x_0 为 $(-\infty, +\infty)$ 内任一点, $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon$, 故 $y = |x|$ 在 x_0 点连续

又由 x_0 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意性, 得 $y = |x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(4) 设 x_0 为 $(0, +\infty)$ 内任一点, 不妨设 $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, 则 $x > \frac{x_0}{2}, xx_0 > \frac{x_0^2}{2}$, 于是 $\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right| = 2 \left| \sin \frac{x + x_0}{2xx_0} \right| \left| \cos \frac{x - x_0}{2xx_0} \right| \leq \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \frac{|x - x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

若 x_0 为 $(-\infty, 0)$ 内任一点, 不妨设 $|x - x_0| < -\frac{x_0}{2}$, 则 $x < \frac{x_0}{2}, xx_0 > \frac{x_0^2}{2}$, 于是 $\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right| \leq \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \frac{|x - x_0|}{\frac{x_0^2}{2}}$

设 x_0 为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内任一点,

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{x_0^2 \varepsilon}{2} \right\} > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $\left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right| \leq \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \varepsilon$,

故 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 x_0 点连续

又由 x_0 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内的任意性, 得 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续.

2. 利用连续函数的运算, 求下列函数的连续范围:

(1) $y = \tan x$

$$(2) y = \frac{1}{x^n}$$

$$(3) y = \sec x + \csc x$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

$$(5) y = \frac{\ln(1+x)}{x^2-2x}$$

$$(6) y = \frac{[x] \tan x}{1 + \sin x}$$

解:

(1) 因 $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 则当 $\cos x \neq 0$ 时, $y = \tan x$ 连续, 故 $y = \tan x$ 的连续范围为 $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$.

(2) 若 $n > 0$, 则 $y = \frac{1}{x^n}$ 的连续范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; 若 $n \leq 0$, 则 $y = \frac{1}{x^n}$ 连续, 即它的连续范围为 $(-\infty, +\infty)$.

(3) 因 $\sec x$ 的连续范围为 $\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $\csc x$ 的连续范围为 $k\pi < x < (k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$,
故 $y = \sec x + \csc x$ 的连续范围为 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) ((k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots))$.

(4) 当 $\cos x > 0$ 时, $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ 连续, 故 $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ 的连续范围为 $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

(5) 因 $\ln(1+x)$ 当 $x > -1$ 时连续, $\frac{1}{x^2-2x}$ 当 $x \neq 0, x \neq 2$ 时连续, 故 $y = \frac{\ln(1+x)}{x^2-2x}$ 的连续范围为 $(-1, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

(6) 因 $y = \frac{[x] \tan x}{1 + \sin x} = \frac{[x] \sin x}{(1 + \sin x) \cos x}$, 则当 $\sin x \neq 1, \cos x \neq 0, x \notin \mathbb{Z}/\{0\}$ 时, $y = \frac{[x] \tan x}{1 + \sin x}$ 连续,
故 $y = \frac{[x] \tan x}{1 + \sin x}$ 的连续范围为 $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $x \notin \mathbb{Z}/\{0\} (k \in \mathbb{Z})$.

3. 研究下列函数的连续性, 并画出其图形.

$$(1) y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{若 } x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

$$(2) y = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(3) y = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(4) y = [x]$$

解:

(1) 因 $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$, 且当 $x = 2$ 时, $y = 4$, 故函数在 $x = 2$ 连续

当 $x \neq 2$ 时, $y = \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$ 显然连续,

故 $y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{若 } x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $y = \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{\sin x}{x}$ 或 $y = -\frac{\sin x}{x}$ 显然连续. 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1 = f(0)$, 故函数在 $x = 0$ 连续,

于是 $y = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

(3) 因 $\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{|x|} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -0} y = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{|x|} = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} y$ 不存在. 又当 $x > 0$ 时, $y = \frac{\sin x}{|x|} = \frac{\sin x}{x}$, 当 $x < 0$ 时, $y = \frac{\sin x}{|x|} = -\frac{\sin x}{x}$, 显然连续, 故此函数在除 0 外连续, 即在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内连续.

(4) 因 $\lim_{x \rightarrow k+0} y = \lim_{x \rightarrow k+0} [x] = k$, $\lim_{x \rightarrow k-0} y = \lim_{x \rightarrow k-0} [x] = k-1 (k \in Z)$, 则 $\lim_{x \rightarrow k} y$ 不存在, 故 $x = k (k \in Z)$ 为 $y = [x]$ 的间断点, 但在间断点处右连续. 当 $k < x < k+1 (k \in Z)$ 时, $y = [x]$ 显然连续, 故此函数在除 $k (k \in Z)$ 外连续.

4. 若 $f(x)$ 连续, $|f(x)|$ 和 $f^2(x)$ 是否也连续? 又若 $|f(x)|$ 或 $f^2(x)$ 连续, $f(x)$ 是否连续?

解:

(1) 设 $f(x)$ 在其定义域 I 上连续, x_0 为 I 上任一点

因 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
而 $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $||f(x)| - |f(x_0)|| < \varepsilon$,
故 $|f(x)|$ 在 x_0 点连续.

又由 x_0 在 I 上的任意性, 知 $|f(x)|$ 在 I 上也连续.

同样 $|f^2(x) - f^2(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| |f(x) + f(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| (|f(x) - f(x_0)| + 2f(x_0)) < \varepsilon(\varepsilon + 2f(x_0))$, 故 $f^2(x)$ 在 x_0 点连续.

又由 x_0 在 I 上的任意性, 知 $f^2(x)$ 在 I 上也连续.

(2) 反过来, 若 $|f(x)|$ 或 $f^2(x)$ 连续, $f(x)$ 不一定连续.

(i) 不连续. 例: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $|f(x)| = 1$ 和 $f^2(x) = 1$ 均在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点不连续;

(ii) 连续. 例: $f(x) = x$, 则 $f(x)$ 、 $|f(x)|$ 、 $f^2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内均连续.

5. (1) 函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续, 而函数 $g(x)$ 当 $x = x_0$ 时不连续, 问此二函数的和在 x_0 点是否连续?

(2) 当 $x = x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都不连续, 问此二函数的和 $f(x) + g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续?

解:

(1) 用反证法. 假设 $f(x) + g(x)$ 在 x_0 点连续.

因 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续, 则由连续函数性质, 得 $g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$ 当 x_0 时连续与已知矛盾. 故假设不成立, 即 $f(x) + g(x)$ 在 x_0 点不连续.

(2) 不一定.

(i) 连续: 例: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 都不连续, 但 $f(x) + g(x) = 0$ 在 $x = 0$ 连续.

(ii) 不连续: 例: $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 都不连续, $f(x) + g(x) = \frac{2}{x}$ 在 $x = 0$ 不连续.

6. (1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 连续, 而函数 $g(x)$ 在 x_0 不连续;

(2) 当 $x = x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都不连续, 问此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必不连续?

解:

(1) 不一定.

(i) 连续: 例: $f(x) = 0$ 在 $x = 0$ 连续, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 不连续, 但 $f(x)g(x) = 0$ 在 $x = 0$ 连续.

(ii) 不连续: 例: $f(x) = x$ 在 $x = 0$ 连续, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $x = 0$ 不连续, $f(x)g(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 不连续.

(2) 不一定.

(i) 连续: 例: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 都不连续, 但 $f(x)g(x) = -1$ 在 $x = 0$ 连续.

(ii) 不连续: 例: $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 都不连续, $f(x)g(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $x = 0$ 不连续.

7. 若 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 连续, 并且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 证明 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 有界.

证明: 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 不妨设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

则对 $\varepsilon = 1, \exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon = 1$ 成立, 从而得 $|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| +$

$$|A| < 1 + |A|$$

取 $X_1 = \max\{X, a + 1\}$, 则 $f(x)$ 在 (X_1, ∞) 内有界, 且 $|f(x)| < |A| + 1, x \in (X_1, \infty)$

又由于 $f(x)$ 在 $[a, X_1]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 $[a, X_1]$ 上有界, 设其界为 $M > 0$, 即 $\forall x \in [a, X_1],$ 有 $|f(x)| \leq M$

取 $G = \max\{|A| + 1, M\}$, 则 $\forall x \in [a, \infty), f(x) \leq G$,

即 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 有界.

8. 若对任一 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 连续, 问:

(1) $f(x)$ 是否 (a, b) 在连续?

(2) $f(x)$ 是否在 $[a, b]$ 连续?

解:

- (1) 任取 $x_0 \in (a, b)$, 取 $\varepsilon = \min\left\{\frac{x_0 - a}{2}, \frac{b - x_0}{2}\right\}$, 则 $x_0 \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$

因对任一 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 连续, 故 $f(x)$ 在 x_0 点连续

由 $x_0 \in (a, b)$ 的任意性, 得 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

(2) 不一定连续.

(i) 不连续. 例: $f(x)$ 在 $[0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) 内连续, 但 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不连续, 在 $x = 0$ 点断开.

(ii) 连续. 例: $f(x)$ 在 $[1 + \varepsilon, 2 - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) 内连续, 且 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续.

9. 若 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 并且 $f(x_0) > 0$, 证明存在 x_0 的 δ 邻域 $O(x_0, \delta)$, 当 $x \in O(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq c > 0$, c 为某个常数.

证明: 由于 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 且 $f(x_0) > 0$, 则设 $f(x_0) > c > 0$

对给定的 $\varepsilon = f(x_0) - c > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = f(x_0) - c$, 则 $f(x_0) - [f(x_0) - c] \leq f(x)$, 即 $f(x) \geq c > 0$.

10. 证明若连续函数在有理点的函数值为 0, 则此函数恒为 0.

证明: 设 $f(x)$ 为实轴上的连续函数, x_0 为任意一个无理点.

由有理点在数轴上的稠密性, 可以取无理数列 $\{x_n\}$, 使得 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$.

因 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$,

由 x_0 点的任意性, 得 $f(x)$ 在所有无理点的函数值都为 0.

又 $f(x)$ 在有理点的函数值为 0, 则此函数恒为 0.

11. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 恒正, 按定义证明 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a, b]$ 连续.

证明: 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 恒正, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, $f(x) > 0$, $\frac{1}{f(x)}$ 存在, $x \in [a, b]$

设 x_0 为 (a, b) 内任一点, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

又 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则由闭区间连续函数性质 2, 可设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值为 $m > 0$, 即 $f(x) \geq m, x \in [a, b]$, 于是

$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{f(x)f(x_0)} < \frac{\varepsilon}{m^2}$, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)}$, 从而 $\frac{1}{f(x)}$ 在 x_0 连续.

由 x_0 在 (a, b) 内的任意性, 得 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

又 $f(a + 0) = f(a) > 0$, 则 $\frac{1}{f(a + 0)} = \frac{1}{f(a)}$, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续;

又 $f(b - 0) = f(b) > 0$, 则 $\frac{1}{f(b - 0)} = \frac{1}{f(b)}$, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

12. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 连续, 试证明 $\max(f(x), g(x))$ 以及 $\min(f(x), g(x))$ 都在 $[a, b]$ 连续.

证明: 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 连续, 故 $f(x) - g(x)$ 和 $f(x) + g(x)$ 都在 $[a, b]$ 连续.

由第 4 题结论, 有 $|f(x) - g(x)|$ 在 $[a, b]$ 连续.

令 $\varphi(x) = \max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$,

$\psi(x) = \min(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$,

故 $\varphi(x), \psi(x)$ 都在 $[a, b]$ 连续.

13. 若 $f(x)$ 是连续的, 证明对任何 $c > 0$, 函数 $g(x) = \begin{cases} -c, & \text{若 } f(x) < -c \\ f(x), & \text{若 } |f(x)| \leq c \\ c, & \text{若 } f(x) > c \end{cases}$ 是连续的.

证明: 由于 $g(x) = \max(-c, \min(f(x), c))$

又由于 $f(x)$ 连续, 且对任何 $c > 0$, $\varphi(x) = c$ 连续, $\psi(x) = -c$ 连续,

则由上题结论, 得 $\min(f(x), c)$ 连续, 从而再由上题结论, 得 $g(x)$ 连续.

14. 研究下列函数各个不连续点的性质 (即为何种不连续点):

$$(1) y = \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$(2) y = \frac{1+x}{1+x^3}$$

$$(3) y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$$

$$(4) y = \frac{x}{\sin x}$$

$$(5) y = \cos^2 \frac{1}{x}$$

$$(6) y = [x] + [-x]$$

$$(7) y = \frac{1}{\ln x}$$

$$(8) y = \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$$

$$(9) y = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} (q > 0, q, p \text{ 为互质的整数}) \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$$(10) y = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{当 } |x| > 1 \end{cases}$$

$$(11) y = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{当 } |x| \leq 1 \\ |x-1|, & \text{当 } |x| > 1 \end{cases}$$

$$(12) y = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

解:

(1) 因 $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty$, 故 $x = -1$ 为第二类不连续点 (无穷间断点).

(2) 因 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1+x^3} = \frac{1}{3}$, 但 y 在 $x = -1$ 点没有定义, 故 $x = -1$ 为可移不连续点.

(3) 因 $y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x-2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$,
又 $\lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2-0} y = -\infty$, 故 $x = -2, x = 1$ 为第二类不连续点.

(4) 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ 但 y 在 $x = 0$ 无定义, 故 $x = 0$ 为可移不连续点;

又 $\lim_{\substack{x \rightarrow k\pi \\ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0}} \frac{x}{\sin x} = \infty$, 故 $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$ 为第二类不连续点.

(5) 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 \frac{1}{x}$ 在 $[0, 1]$ 间振荡, 为振荡型极限, 故此极限不存在, 于是 $x = 0$ 为第二类不连续点.

(6) 因 $x \rightarrow k+0$ 时, $-x \rightarrow -k-0$, 故 $\lim_{x \rightarrow k+0} y = \lim_{x \rightarrow k+0} ([x] + [-x]) = k + (-k-1) = -1$;

又因 $x \rightarrow k-0$ 时, $-x \rightarrow -k+0$, 故 $\lim_{x \rightarrow k-0} y = \lim_{x \rightarrow k-0} ([x] + [-x]) = k-1 + (-k) = -1 (k \in \mathbb{Z})$

又当 $x = k$ 时, $y = [x] + [-x] = [k] + [-k] = 0 (k \in \mathbb{Z})$, 故整数点均为可移不连续点.

(7) 因 $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{\ln x} = +\infty$, 故 $x = -1$ 为第二类不连续点;

因 $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{\ln x}$ 不存在, 故 $x = 0$ 为第二类不连续点.

$$(8) y = \frac{x(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)}$$

因 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{1}{2}$ 但 y 在 $x = 1$ 无定义, 故 $x = 1$ 为可移不连续点;

因 $\lim_{x \rightarrow +0} y = 1, \lim_{x \rightarrow -0} y = -1$, 故 $x = 0$ 为第一类不连续点 (跳跃间断点);

因 $\lim_{x \rightarrow -1+0} y = -\infty$, 故 $x = -1$ 为第二类间断点.

(9) 因此函数是以 1 为周期的函数, 故可在区间 $[0, 1]$ 讨论, 其它区间的情形与此类似.

在 $[0, 1]$ 上, 分母为 1 的有理数有两个: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$; 分母为 2 的有理数有一个: $\frac{1}{2}$;

分母为 3 的有理数有两个: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$; 分母为 4 的有理数有两个: $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$;

分母为 5 的有理数有四个: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$; 分母为 6 的有理数有两个: $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$; ...

总之, 分母不超过 k 的有理数个数 $l \leq 2 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2} + 2$, 即分母不超过 k 的有理数只有有限个。

下面来证, 在任一点 $x_0 \in [0, 1]$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y \rightarrow 0$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $k = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 设在 $[0, 1]$ 上, 分母不超过 k 的有理数为 r_1, r_2, \cdots, r_l .

取 $\delta = \min$

$\lim_{1 \leq i \leq l} |r_i - x_0|$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 即 $x \notin \{r_1, r_2, \cdots, r_l\}$, 也就是 x 或者为无理数, 或者为有

理数 $\frac{p}{q}$, 且 $q \geq k+1 > k$ 时, 就有 $|y - 0| = \begin{cases} \frac{1}{q} \leq \frac{1}{k+1}, & x \text{ 为有理数 } x = \frac{p}{q}, q > k \\ 0 < \varepsilon, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$.

故 $\lim_{x \rightarrow x_0} y = 0$, 于是得: 任何无理点都是此函数的连续点, 任何有理点都是此函数的可移不连续点.

(10) 因 $\lim_{x \rightarrow -1+0} y = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} y = 1$, 故 $x = -1$ 为第一类不连续点.

(11) 因 $\lim_{x \rightarrow -1+0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} y = 2$, 故 $x = -1$ 为第一类不连续点.

(12) (i) $x_0 \neq n, n \in \mathbb{Z}$,

取有理点列 $r_n \rightarrow x_0$ 且 $r_n > x_0$, 则 $\lim_{r_n \rightarrow x_0+0} f(r_n) = \sin \pi x_0 \neq 0$;

取无理点列 $x_n \rightarrow x_0$ 且 $x_n > x_0$, 则 $\lim_{x_n \rightarrow x_0+0} f(x_n) = 0$.

故 $f(x_0+0)$ 不存在, 从而 $x \neq n (n \in \mathbb{Z})$ 为函数的第二类不连续点.

(ii) $x_0 = n, n \in \mathbb{Z}$,

当 x 为无理数时, $|f(x) - f(n)| = 0$;

当 x 为有理数时, $|f(x) - f(n)| \leq \pi|x - n|$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\pi} > 0$, 使 $|x - n| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(n)| < \varepsilon$, 故 $f(x)$ 在 $x = n (n \in \mathbb{Z})$ 连续.

15. 当 $x = 0$ 时下列函数 $f(x)$ 无定义, 试定义 $f(0)$ 的数值, 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续:

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

$$(2) f(x) = \frac{\tan 2x}{x}$$

$$(3) f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$(4) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

解:

$$(1) \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{3}{2},$$

$$\text{故 } f(0) = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = 2,$$

$$\text{故 } f(0) = 2.$$

$$(3) \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{故 } f(0) = 0.$$

$$(4) \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\text{故 } f(0) = e.$$

16. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 中必有 ξ , 使 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

证明: 设 $M = \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i), m = \min_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$

则 $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M$;

同理得 $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq m$.

由于 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n] \subset [a, b]$ 上连续, 故由介值定理知, 必 $\exists \xi \in [x_1, x_n] \subset [a, b]$, 使 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

17. 用一致连续定义验证:

- (1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $[0, 1]$ 上是一致连续的;
 (2) $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致连续的;
 (3) $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

证明:

$$(1) \text{ 对任何 } x_1, x_2 \in [0, 1], |\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1 x_2} + \sqrt[3]{x_2^2}} = \frac{|x_1 - x_2|}{\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^2 + \frac{1}{4}(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2})^2} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{\frac{1}{4}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2})^2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{4}|\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}|^3 \leq |x_1 - x_2|, \text{ 亦即 } |\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}| \leq \sqrt[3]{4|x_1 - x_2|}$$

$$\text{对 } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon^3}{4} > 0, \text{ 使得对 } \forall x_1, x_2 \in [0, 1], \text{ 当 } |x_1 - x_2| < \delta \text{ 时, 总有 } |\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}| \leq \sqrt[3]{4|x_1 - x_2|} < \varepsilon$$

从而 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $[0, 1]$ 上是一致连续的.

$$(2) \text{ 对任何 } x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty), |\sin x_1 - \sin x_2| = 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| = |x_1 - x_2|,$$

$$\text{对 } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0, \text{ 使得对 } \forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty), \text{ 当 } |x_1 - x_2| < \delta \text{ 时, 总有 } |\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

从而 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是一致连续的.

$$(3) \text{ 取 } \varepsilon_0 = 1, \text{ 对任何 } \delta > 0, \text{ 取 } x'_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, x''_n = \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}}, |x'_n - x''_n| = |\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}}| = \left| \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}}} \right| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

故当 n 充分大时, 一定有 $|x'_n - x''_n| < \delta$,

$$\text{但 } |\sin(x'_n)^2 - \sin^2(x''_n)^2| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon_0$$

从而 $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

§4. 无穷小量和无穷大量的阶

1. 求下列无穷小量当 $x \rightarrow 0$ 时的阶和主要部分:

- (1) $x^3 + x^6$
- (2) $4x^2 + 6x^3 - x^5$
- (3) $\sqrt{x \cdot \sin x}$
- (4) $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}$
- (5) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$
- (6) $\tan x - \sin x$
- (7) $\ln(1+x)$

解:

- (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^6}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^3) = 1$, 故它是一个3阶无穷小量, 它的主要部分为 x^3 .
- (2) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 6x^3 - x^5}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{4}) = 1$, 故它是一个2阶无穷小量, 它的主要部分为 $4x^2$.
- (3) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x \cdot \sin x}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = 1$, 故它是一个1阶无穷小量, 它的主要部分为 $|x|$.
- (4) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[6]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{\frac{5}{3}} + 1} = 1$, 故它是一个 $\frac{1}{6}$ 阶无穷小量, 它的主要部分为 $\sqrt[6]{x}$.
- (5) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1$, 故它是一个1阶无穷小量, 它的主要部分为 x .
- (6) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\frac{x^3}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$, 故它是一个3阶无穷小量, 它的主要部分为 $\frac{x^3}{2}$.
- (7) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, 故它是一个1阶无穷小量, 它的主要部分为 x .

2. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 求下列变量的阶和主要部分:

- (1) $x^2 + x^6$
- (2) $4x^2 + 6x^4 - x^5$
- (3) $\sqrt[3]{x^2 \sin \frac{1}{x}}$
- (4) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$
- (5) $\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$

解:

- (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^6}{x^6} = 1$, 故它是一个6阶无穷大量, 它的主要部分为 x^6 .
- (2) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 6x^4 - x^5}{-x^5} = 1$, 故它是一个5阶无穷大量, 它的主要部分为 $-x^5$.
- (3) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 \sin \frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = 1$, 故它是一个 $\frac{1}{3}$ 阶无穷大量, 它的主要部分为 $\sqrt[3]{x}$.
- (4) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}} = 1$, 故它是一个 $\frac{1}{8}$ 阶无穷大量, 它的主要部分为 $\sqrt[8]{x}$.

(5) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 3x + 1} = 1$, 故它是一个2阶无穷大量, 它的主要部分为 $2x^2$.

3. 试证: 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时

$$(1) o(\Delta x^m) + o(\Delta x^n) = o(\Delta x^n) (m > n > 0)$$

$$(2) o(\Delta x^m)o(\Delta x^n) = o(\Delta x^{m+n}) (m, n > 0)$$

$$(3) |f(x)| \leq M, \text{ 则 } f(x)o(\Delta x) = o(\Delta x)$$

$$(4) \Delta x^m \cdot o(1) = o(\Delta x^m)$$

证明:

(1) 由于 $\Delta x \rightarrow 0$, 故 $\Delta x^m \rightarrow 0, \Delta x^n \rightarrow 0$, 于是 $\frac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m} \rightarrow 0, \frac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n} \rightarrow 0$
 又 $m > n > 0$, 故 $\frac{\Delta x^m}{\Delta x^n} = \Delta x^{m-n} \rightarrow 0$, 于是 $\frac{o(\Delta x^m) + o(\Delta x^n)}{\Delta x^n} = \frac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m} \cdot \frac{\Delta x^m}{\Delta x^n} + \frac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n} \rightarrow 0$,
 从而 $o(\Delta x^m) + o(\Delta x^n) = o(\Delta x^n)$

(2) 由于 $\Delta x \rightarrow 0$, 故 $\Delta x^m \rightarrow 0, \Delta x^n \rightarrow 0$, 于是 $\frac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m} \rightarrow 0, \frac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n} \rightarrow 0$
 于是 $\frac{o(\Delta x^m)o(\Delta x^n)}{\Delta x^{m+n}} = \frac{o(\Delta x^m)}{\Delta x^m} \cdot \frac{o(\Delta x^n)}{\Delta x^n} \rightarrow 0$,
 从而 $o(\Delta x^m)o(\Delta x^n) = o(\Delta x^{m+n})$

(3) $\Delta x \rightarrow 0$, 故 $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$, 又 $|f(x)| \leq M$, 故 $f(x)$ 有界, 于是 $\frac{f(x)o(\Delta x)}{\Delta x} = f(x) \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$, 从而 $f(x)o(\Delta x) = o(\Delta x)$.

(4) 由 (1) 于是无穷小量, 则 $o(1) \rightarrow 0$, 于是 $\frac{\Delta x^m \cdot o(1)}{\Delta x^m} = \frac{\Delta x^m}{\Delta x^m} o(1) = o(1) \rightarrow 0$, 从而 $\Delta x^m \cdot o(1) = o(\Delta x^m)$.

第二部分 极限续论

第三章 关于实数的基本定理及 闭区间上连续函数性质的证明

§1. 关于实数的基本定理

1. 从定义出发证明下确界的唯一性.

证明: 设 α, α' 都是数集 E 的下确界, 于是 $\forall x \in E$, 都有 $x \geq \alpha$, 即 α 是 E 的下界; $x \geq \alpha'$, 即 α' 是 E 的下界. 由于 α 是 E 的下确界, 故是下界中的最大者, 从而有 $\alpha \geq \alpha'$; 同样由 α' 是 E 的下确界, 有 $\alpha' \geq \alpha$. 由此知 $\alpha = \alpha'$.

2. 设 $\beta = \sup E, \beta \notin E$, 试证自 E 中可选取数列 $\{x_n\}$, 其极限为 β ; 又若 $\beta \in E$, 则情形如何?

证明:

- (1) 由于 $\beta = \sup E, \beta \notin E$, 则由上确界的定义, 得

(i) 对 $\forall x \in E$, 都有 $x < \beta$;

(ii) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 至少存在一个数 $x_0 \in E$, 使得 $x_0 > \beta - \varepsilon$.

取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 对每个 ε_n 都有 $x_n \in E$, 使得 $\beta > x_n > \beta - \varepsilon_n$, 即 $0 < \beta - x_n < \varepsilon_n$, 于是可选一个数列 $\{x_n\} \subset E$.

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta - \varepsilon_n) = \beta - \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \beta$ 且 $\beta \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta - \varepsilon_n) = \beta$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta$.

- (2) 当 $\beta \in E$ 时, 命题不一定成立. 例: 不成立. $E = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots), \beta = \sup E = 1, 1 \in E$.

又 $\frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 E 中任一子列的极限均为0, 故当 $\beta \in E$ 时, 命题不成立.

成立. $E = \left\{ \sin \frac{\pi}{8}, \sin \frac{2\pi}{8}, \dots, \sin \frac{n\pi}{8}, \dots \right\}, \beta = \sup E = 1, 1 \in E$, 取 $x_n = \sin \frac{16n+4}{8} \pi$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, 故当 $\beta \in E$ 时, 命题成立.

3. 举例:

(1) 有上确界无下确界的数列;

(2) 含有上确界但不含有下确界的数列;

(3) 既含有上确界又含有下确界的数列;

(4) 既不含有上确界, 又不含有下确界的数列, 其中上、下确界都有限.

解:

(1) $\{x_n\} = \{-n\}, \sup\{x_n\} = -1$

(2) $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}, \sup\{x_n\} = 1 \in \{x_n\}, \inf\{x_n\} = 0 \notin \{x_n\}$

(3) $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\}, \sup\{x_n\} = 2 \in \{x_n\}, \inf\{x_n\} = 0 \in \{x_n\}$

(4) $E = \left(1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{n-1}{n}\right), \sup E = 2 \notin E, \inf E = 0 \notin E$

4. 试证收敛数列必有上确界和下确界, 趋于 $+\infty$ 的数列必有下确界, 趋于 $-\infty$ 的数列必有上确界.

证明:

- (1) 对于各项恒为常数的数列, 显然上、下确界均可达到.

对于不恒为常数的数列, 因 $\{x_n\}$ 收敛, 即 $\{x_n\}$ 有极限, 则由第二章§1定理4, 得数列 $\{x_n\}$ 是有界数列.

从而由本章定理三, 得数列 $\{x_n\}$ 有上、下确界, 即收敛数列必有上、下确界.

注: 还可证明: 上、下确界 β, α 中至少有一个属于 $\{x_n\}$.

事实上, 若 $\alpha = \beta$, 则 $\alpha = \beta = x_n, n = 1, 2, \dots$

若 $\alpha \neq \beta$, 且 $\alpha \notin \{x_n\}$, 则由习题2知, 存在子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 收敛于 α , 也存在子列 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 收敛于 β ,

故 $\{x_n\}$ 不收敛, 这与已知 $\{x_n\}$ 收敛矛盾, 故 α, β 中至少有一个属于 $\{x_n\}$.

- (2) 因 $\{x_n\}$ 是趋于 $+\infty$ 的数列, 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $x_n > x_1$, 于是 x_1, x_2, \dots, x_N 中最小者, 即为 $\{x_n\}$ 的下确界.

(3) 因 $\{x_n\}$ 是趋于 $-\infty$ 的数列, 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $x_n < x_1$, 于是 x_1, x_2, \dots, x_N 中最大者, 即为 $\{x_n\}$ 的上确界。

5. 求数列 $\{x_n\}$ 的上、下确界:

$$(1) x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$(2) x_n = -n[2 + (-2)^n]$$

$$(3) x_{2k} = k, x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{k} (k = 1, 2, 3, \dots)$$

解:

(1) $\alpha = 0$ (可达), $\beta = 1$ (不可达)

(2) 因 $\lim_{k \rightarrow \infty} [-2k(2 + (-2)^{2k})] = -\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} [-(2k+1)(2 + (-2)^{2k+1})] = +\infty$, 故 $\{x_n\}$ 无上、下确界。

(3) 因 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{x \rightarrow \infty} k = +\infty$, 故 $\{x_n\}$ 无上确界;

又因 $x_{2k} \geq 1, k = 1, 2, 3, \dots; x_{2k+1} > 1$ 且 $\min\{x_{2k}\} = 1$, 故 $\inf\{x_n\} = 1$ (可达)。

6. 证明: 单调减少有下界的数列必有极限。

证明: 由于 $\{y_n\}$ 有下界, 故 $\{y_n\}$ 必有下确界。

由下确界的定义有: (i) $y_n \geq \alpha (n = 1, 2, 3, \dots)$; (ii) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 至少有一个 $y_N \in \{y_n\}$, 使 $y_N < \alpha + \varepsilon$ 。

由于 $\{y_n\}$ 是单调减少数列, 故当 $n > N$ 时, 有 $y_n < \alpha + \varepsilon$, 即当 $n > N$ 时, 有 $0 \leq y_n - \alpha < \varepsilon$, 于是 $y_n \rightarrow \alpha (n \rightarrow \infty)$ 。

从而单调减少有下界的数列必有极限。

7. 试分析区间套定理的条件: 若将闭区间改为开区间, 结果如何? 若将条件 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ 去掉或将条件 $b_n - a_n \rightarrow 0$ 去掉, 结果怎样? 试举例说明。

解:

(1) 在区间套定理中, 若将闭区间列改为开区间列, 即

(i) $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

则可以证明 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 仍收敛于同一极限 ξ , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$, 但此时 ξ 可能根本不属于这些开区间, 即 $\xi \notin (a_n, b_n) (n \in \mathbb{Z}^+)$, 亦即 ξ 可能不为 (a_n, b_n) 的公共点。

例: 开区间列 $\left\{(0, \frac{1}{n})\right\}$,

(i) $\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(0, \frac{1}{n}\right)$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;

$a_n = 0 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty); b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\xi = 0 \notin \left(0, \frac{1}{n}\right)$, 即结论不成立。

(2) 若将条件 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ 去掉, 即只有条件 $b_n - a_n \rightarrow 0$ 成立, 则不能保证 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 收敛。

例: 闭区间列 $\left[n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right]$ 不是一个套一个。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n + \frac{1}{n} - \left(n - \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{n}\right)$ 皆不收敛。

故不存在 ξ 为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公共极限, 即结论不成立。

(3) 若将条件 $b_n - a_n \rightarrow 0$ 去掉, 即只有条件 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ 成立, 则可以证明 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 收敛 (与区间套定理证明一样), 但不能保证 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 成立, 从而 $[a_n, b_n]$ 的公共点不唯一, 甚至出现一个公共区间。

例: 闭区间列 $\left[1 - \frac{1}{n+1}, 2 + \frac{1}{n+1}\right] \subset \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{Z}^+$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 + \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = 1$ 。

但由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$, 得 $[1, 2] \subset \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{Z}^+$, 即结论不成立。

8. 若 $\{x_n\}$ 无界, 且非无穷大量, 则必存在两个子列 $x_{n_k}^{(1)} \rightarrow \infty, x_{n_k}^{(2)} \rightarrow a (a \text{ 为某有限数})$ 。

证明: 先证 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 是一个无穷大量。

由于 $\{x_n\}$ 无界, 故对任何实数 $M > 0$, 至少有一个 $n' \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $|x_{n'}| > M$ 。

取 $M = 1$, 则必存在 n_1 , 使得 $|x_{n_1}^{(1)}| > 1$; $M = 2$, 则必存在 n_2 , 使得 $|x_{n_2}^{(1)}| > 2$; \dots ; $M = K$, 则必存

在 $n_K > n_{K-1}$, 使得 $|x_{n_K}^{(1)}| > K, \dots$.

则可得一子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$, 对 $\forall M \in Z^+$, 取 $K = M$, 则当 $k > K$ 时, 就有 $|x_{n_k}^{(1)}| > M$, 故有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(1)} = \infty$.

由已知 $\{x_n\}$ 不是无穷大量, 则由定义得, $\exists M_0 > 0$, 对 $\forall N \in Z^+$, 至少有一个 $m \in Z^+$, 当 $m > N$ 时, 有 $|x_m| < M_0$.

现取定一个 $N = m_0$ ($m_0 \in Z^+$), 则至少有一个 $m_1 > m_0$, 使得 $|x_{m_1}| \leq M_0$.

再取 $N = m_1$, 则至少有一个 $m_2 > m_1$, 使得 $|x_{m_2}| \leq M_0, \dots$

如此进行下去, 则可得一列 $m_t: m_1 < m_2 < \dots < m_t < \dots$, 使得 $|x_{m_t}| \leq M_0$, 即得子列 $\{x_{m_t}\}$ 且 $|x_{m_t}| \leq M_0$ ($m_t \in Z^+$), 这说明子列 $\{x_{m_t}\}$ 有界, 由致密性定理, 知有界子列 $\{x_{m_t}\}$ 必有收敛的子列.

不妨记这个收敛子列为 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$, 它也是 $\{x_n\}$ 的子列且设它收敛于 a . 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(2)} = a$ (a 为某有限数).

9. 有界数列 $\{x_n\}$ 若不收敛, 则必存在两个子列 $x_{n_k}^{(1)} \rightarrow a, x_{n_k}^{(2)} \rightarrow b$ ($a \neq b$).

证明: 由于 $\{x_n\}$ 有界, 则由致密性定理知它必有收敛的子列 $x_{n_k}^{(1)} \rightarrow a$.

由于 $\{x_n\}$ 不收敛, 故存在 $\varepsilon_0 > 0$, 在 $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ 外有 $\{x_n\}$ 无穷多项, 构成 $\{x_n\}$ 的子列, 记为 $\{x_n^{(2)}\}$.

由于 $\{x_n^{(2)}\}$ 有界, 故存在子列 $x_{n_k}^{(2)} \rightarrow b$, 显然 $a \neq b$.

10. 若在区间 $[a, b]$ 中的两个数列 $\{x_n^{(1)}\}$ 及 $\{x_n^{(2)}\}$ 满足 $x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则在此两数列中能找到具有相同足标 n_k 的子列, 使 $x_{n_k}^{(1)} \rightarrow x_0, x_{n_k}^{(2)} \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$).

证明: 因 $\{x_n^{(1)}\} \subset [a, b]$, 则 $\{x_n^{(1)}\}$ 为一有界数列, 则由致密性定理, 得 $\{x_n^{(1)}\}$ 必有收敛子列, 记为 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$,

且设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(1)} = x_0$.

在 $\{x_n^{(2)}\}$ 中取出与 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 有相同足标的子列 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$.

因 $x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}^{(1)} - x_{n_k}^{(2)}) = 0$,

于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} [x_{n_k}^{(1)} - (x_{n_k}^{(1)} - x_{n_k}^{(2)})] = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^{(1)} - \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}^{(1)} - x_{n_k}^{(2)}) = x_0 - 0 = x_0$.

11. 利用柯西收敛原理讨论下列数列的收敛性:

(1) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_n q^n$ ($|q| < 1, |a_k| \leq M$)

(2) $x_n = 1 + \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$

(3) $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

证明:

(1) 设 $n > m$, 则 $|x_n - x_m| = |a_{m+1} q^{m+1} + a_{m+2} q^{m+2} + \dots + a_n q^n| \leq M(|q|^{m+1} + |q|^{m+2} + \dots + |q|^n) = M|q|^{m+1} \frac{1 - |q|^{n-m}}{1 - |q|} < M|q|^{m+1} \frac{1}{1 - |q|} \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$)

故而对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$, 当 $n > m > N$ 时, 有 $M|q|^{m+1} \frac{1}{1 - |q|} < \varepsilon$, 从而有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

由柯西收敛原理, 得 $\{x_n\}$ 必收敛.

(2) 设 $m > n$, 对 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < \frac{1}{2}$), 由于 $|x_m - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin m}{2^m} \right| \leq$

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n},$$

若要 $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ 即可.

取 $N = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}} \right\rceil \in Z^+$, 当 $m > n > N$ 时, 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

由柯西收敛原理, 得 $\{x_n\}$ 必收敛.

(或: 在 (1) 中令 $a_0 = 1, a_k = \sin k, q = \frac{1}{2}$, 则由 (1) 即得 (2)).

(3) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 对 $\forall k \in Z^+$, 由于 $|x_{n+k} - x_n| = \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \dots + \frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} \right| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{(-1)^k}{n+k} \right) < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, 若要 $|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即可.

取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n + k > n > N$ 时, 有 $|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$.
由柯西收敛原理, 得 $\{x_n\}$ 必收敛.

12. 利用有限覆盖定理证明魏尔斯特拉斯定理.

证明: 设 $\{x_n\}$ 为有界数列, 则必存在 a, b , 使得 $a \leq x_n \leq b$.

用反证法. 假设 $\{x_n\}$ 的任一子列都不收敛, 则对任何 $x_0 \in [a, b]$, 都有 $\varepsilon_0 > 0$, 使得在 $O(x_0, \varepsilon_0)$ 中只含有 $\{x_n\}$ 的有限项.

否则对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $O(x_0, \varepsilon)$ 中含有 $\{x_n\}$ 的无限项.

取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 显然在 $O(x_0, \varepsilon_n)$ 中都含有 $\{x_n\}$ 的无限多项, 则在 $\{x_n\}$ 中可取出: $x_{n_1} \in O(x_0, 1)$, 又可取出 $x_{n_2} \in O\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ ($n_2 > n_1$), 如此进行下去, 可得 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, $|x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k}$, 对 $\forall M \in \mathbb{Z}^+$,

取 $K = M$, 则当 $k > K$ 时, 就有 $|x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{k} < \frac{1}{K} < \frac{1}{M}$, 则 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$) 这与假设矛盾.

由 $x_0 \in [a, b]$ 的任意性, 得对 $[a, b]$ 中的每个点都有这样一个邻域, 使此邻域只含 $\{x_n\}$ 的有限项, 所有这些邻域构成 $[a, b]$ 的一个开覆盖.

由有限覆盖定理, 则得存在有限个邻域也覆盖 $[a, b]$, 因而 $[a, b]$ 也只含有 $\{x_n\}$ 的有限项, 这与已知 $x_n \in [a, b]$ 矛盾, 故假设不成立, 则 $\{x_n\}$ 必有收敛子列.

13. 利用魏尔斯特拉斯定理证明单调有界数列必有极限.

证明: 设 $\{x_n\}$ 为单调增加有界数列, $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq M$

据魏尔斯特拉斯定理, 存在子列 $\{x_{n_k}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

下证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

先证 $x_n \leq a$, $n = 1, 2, \cdots$. 若不然, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $x_N > a$.

由于 $n_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$), 故 k 充分大时, 必有 $n_k > N$, 从而 $x_{n_k} \geq x_N > a$, 于是 $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq x_N > a$ 矛盾.

再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0$, 使 $|x_{n_{k_0}} - a| = a - x_{n_{k_0}} < \varepsilon$.

取 $N = n_{k_0}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $x_n \geq x_{n_{k_0}} = x_N$, 从而有 $|a - x_n| = a - x_n \leq a - x_{n_{k_0}} < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

即单调增加有界数列必有极限.

同理可得, 单调减少有界数列必有极限, 从而单调有界数列必有极限.

14. (1) 证明单调有界函数存在左、右极限;

(2) 证明单调有界函数的一切不连续点都为第一类不连续点.

证明:

(1) 由已知可设 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调增加有界, 任取 $x_0 \in (a, b)$, 设 $\beta(x_0) = \sup_{a < x < x_0} f(x)$,

由上确界定义, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 至少有一个 $x' \in (a, x_0)$, 使得 $f(x') > \beta(x_0) - \varepsilon$ 即 $f(x') + \varepsilon > \beta(x_0)$

取 $\delta = x_0 - x' > 0$, 因 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调增加, 故当 $\delta > x_0 - x > 0$ 即 $x' < x$ 时, 有 $f(x') < f(x)$, 于是有 $f(x) + \varepsilon > \beta(x_0)$ 即 $0 \leq \beta(x_0) - f(x) < \varepsilon$, 从而 $|\beta(x_0) - f(x)| < \varepsilon$

说明 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \beta(x_0)$. 即 $f(x)$ 在 x_0 存在左极限.

同理可得, 当 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调减少有界时, $f(x)$ 在 x_0 存在左极限, 从而单调有界函数存在左极限.

同理可得, 单调有界函数存在右极限.

(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点, 则由 (1) 的结论知 $f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$ 存在, 此时 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$.

否则, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, 由 $f(x)$ 的单调性, 必有 $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

这说明 x_0 是连续点, 与已知矛盾, 故 $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, 从而 x_0 是 $f(x)$ 的第一类不连续点.

15. 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是: 对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $x', x'' > X$ 时恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

证明: \Rightarrow 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 不妨设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

当 $x', x'' > X$ 时, 有 $|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A - (f(x'') - A)| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon$, 从而对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $x', x'' > X$ 时恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

\Leftarrow 在 $f(x)$ 的定义域内, 任意选取数列 $\{x_n\}$, 使得 $x_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$)

由已知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $x', x'' > X$ 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

又因 $x_n \rightarrow +\infty$, 于是对上述 $X > 0$, 定 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > X$, 从而当 $n, m > N$ 时, 就有 $x_n > X, x_m > X$, 进而有 $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

由柯西收敛原理, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

由 x_n 的任意性及函数极限与数列极限的关系知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

16. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是: 对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

证明: \Rightarrow 已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 不妨设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

当 $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A - (f(x'') - A)| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon$, 从而对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

\Leftarrow 在 $f(x)$ 的定义域内, 任意选取数列 $\{x_n\}$, 使得 $x_n \rightarrow x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n \rightarrow \infty)$

由已知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x', x'' \in D(f)$, 且当 $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

又因 $x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 (n \rightarrow \infty)$, 于是对上述 $\delta > 0$, 定 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 从而当 $n, m > N$ 时, 就有 $0 < |x_n - x_0| < \delta, 0 < |x_m - x_0| < \delta$, 进而有 $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

由数列的柯西收敛原理, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

由 $\{x_n\}$ 是任意以 x_0 为极限的数列且 $x_n \neq x_0$ 及函数极限与数列极限的关系知, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.

17. 证明 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件是: 对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x' - x_0| < \delta, |x'' - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

证明: \Rightarrow 已知 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

当 $|x' - x_0| < \delta, |x'' - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - f(x_0) - (f(x'') - f(x_0))| \leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x'') - f(x_0)| < \varepsilon$, 从而对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x' - x_0| < \delta, |x'' - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

\Leftarrow 取 $x' = x_0, x'' = x$, 则由已知, 得对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

从而 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

§2. 闭区间上连续函数性质的证明

1. 证明: 若单调有界函数 $f(x)$ 可取到 $f(a), f(b)$ 之间的一切值, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

证明: 不妨设 $f(x)$ 为单调增加有界函数.

由本章 §1, 14 题 (1) 知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的端点 $a(b)$ 处的右 (左) 极限存在, 此时 $f(a) = f(a+0)(f(b) = f(b-0))$,

若不然, 必有 $f(a) < f(a+0) = \inf_{a < x < b} f(x)(f(b) > f(b-0) = \sup_{a < x < b} f(x))$, 于是由 $f(x)$ 可取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值, 得对任何 $f(a) < y < f(a+0)(f(b-0) < y < f(b))$, 必有 $x \in (a, b)$, 使得 $f(x) = y$, 此与 $f(a+0) = \inf_{a < x < b} f(x)(f(b-0) = \sup_{a < x < b} f(x))$ 矛盾.

由此可知 $f(x)$ 在 $a(b)$ 右 (左) 连续.

若有 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x)$ 在 x_0 点不连续. 由 §1, 14(2) 的结论, 知 x_0 必为第一类间断点, 即 $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 存在, 但 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$.

又因 $f(x)$ 为单调增函数, 故 $f(x_0-0) \leq f(x_0) < f(x_0+0)$ 或 $f(x_0-0) < f(x_0) \leq f(x_0+0)$, 这时 $f(x)$ 取不到 $(f(x_0-0), f(x_0+0))$ 之间异于 $f(x_0)$ 的值, 这与已知矛盾, 故假设不成立.

于是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

同理, 当 $f(x)$ 为单调减少有界函数时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

2. 证明: 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 并且 $f(a+0), f(b-0)$ 存在, 则 $f(x)$ 可取到 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 之间的 (但可能不等于 $f(a+0), f(b-0)$) 一切值.

证明: 由于 $f(a+0), f(b-0)$ 存在, 则补充定义 $f(a) = f(a+0), f(b) = f(b-0)$.

又 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 因而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m .

再由介值定理, 知 $f(x)$ 可以取到 M 和 m 间的一切值.

若 $M = f(a+0)$ (或 $f(b-0)$), $m = f(b-0)$ (或 $f(a+0)$), 这时 $f(x)$ 可取到 $(f(a+0), f(b-0))$ 中的一切值 (但可能不等于 $f(a+0), f(b-0)$).

若 $M > f(a+0)$ (或 $f(b-0)$), $m < f(b-0)$ (或 $f(a+0)$), 这时 $f(x)$ 可取到 $(f(a+0), f(b-0))$ 中的一切值 (可能等于 $f(a+0), f(b-0)$). 故 $f(x)$ 可取到 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 之间的 (但可能不等于 $f(a+0), f(b-0)$) 一切值.

3. 证明 (a, b) 上的连续函数为一致连续的充分必要条件是: $f(a+0), f(b-0)$ 存在.

证明: \Leftarrow 设 $f(x)$ 为 (a, b) 上的连续函数

因 $f(a+0), f(b-0)$ 存在, 则补充定义 $f(a) = f(a+0), f(b) = f(b-0)$, 于是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则由康托定理, 得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 从而 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

\Rightarrow 因 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 则由定义, 得对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

对 a , 当 $0 < x_1 - a < \frac{\delta(\varepsilon)}{2}, 0 < x_2 - a < \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$ 时, $|x_1 - x_2| = |(x_1 - a) - (x_2 - a)| \leq |x_1 - a| + |x_2 - a| < \delta(\varepsilon)$, 则有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

由柯西收敛原理, 得 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 存在, 即 $f(a+0)$ 存在且有限.

同理, 得 $f(b-0)$ 存在且有限.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限闭区间上连续, 则它在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限开区间上也一致连续.

证明: 设 (a, b) 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限开区间, 则 $[a, b]$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限闭区间.

因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则由康托定理, 得 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 因而 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

由 (a, b) 的任意性, 得 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一有限开区间上也一致连续.

5. 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 及 $(-l, l)$ 上 ($l > 0$) 是否一致连续?

解:

- (1) $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

设 $x_1 > x_2 > 0$, 且 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 2x_2(x_1 - x_2)$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \eta > 0$, 取 $x_2 = \frac{2\varepsilon_0}{\eta}, x_1 = x_2 + \frac{\eta}{2}$,

显然有 $x_1 > x_2 > 0$ 且 $|x_1 - x_2| = \frac{\eta}{2} < \eta$, 但 $|f(x_1) - f(x_2)| > 2x_2(x_1 - x_2) = 2 \cdot \frac{2\varepsilon_0}{\eta} \cdot \frac{\eta}{2} = 2\varepsilon_0 > \varepsilon_0$,

从而 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

- (2) $f(x) = x^2$ 在 $(-l, l)$ ($l > 0$) 上一致连续.

因 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ ($l > 0$) 上是连续的, 则由康托定理, 得 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上一致连续, 从而 $f(x) = x^2$ 在 $(-l, l)$ 上一致连续.

6. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 并且对 (a, b) 内任何 x , 存在 x 的某个邻域 O_x , 使得 $f(x)$ 在 O_x 内有界. 问: $f(x)$ 在 (a, b) 内是否有界? 又若将 (a, b) 改为 $[a, b]$, 如何?

证明:

(1) $f(x)$ 在 (a, b) 不一定有界.

例: 无界: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内有定义, 且对 $\forall x \in (a, b)$ 连续, 故必局部有界, 即存在 x 的邻域 $O_x(O(x, \delta_x))$, 使得它在 $O_x(O(x, \delta_x))$ 内有界, 但它在 $(0, 1)$ 内无界.

有界: $f(x) = \sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 有定义, 对 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的任何 x , 存在 x 的某个邻域 O_x , 使得 $f(x)$ 在 O_x 内有界; $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有界, 且 $0 < f(x) < 1$.

(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一定有界.

因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内有定义, 则补充定义: $f(x)$ 在 $(a - \delta, a)$ 的值为 $f(a)$, $f(x)$ 在 $(b, b + \delta)$ 的值为 $f(b)$.

由已知对 $[a, b]$ 内任何 x , 存在 x 的某个邻域 O_x , 使得 $f(x)$ 在 O_x 内有界, 即 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$, 因此在 $[a, b]$ 上每一点都得到这样一个邻域 (亦即开区间), 这些开区间的全体构成一个开区间集, 它覆盖了 $[a, b]$.

由有限覆盖定理, 得在这些开区间集中必有有限个开区间覆盖了 $[a, b]$, 记这有限个开区间为 $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1), (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2), \dots, (x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$, 相应的 M 分别记为 M_1, M_2, \dots, M_k , 如今只要取 $M^* = \max\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$.

对 $[a, b]$ 上任意一点 x , 由区间覆盖概念, 在这 k 个开区间 $O(x_i, \delta_i)(i = 1, 2, \dots, k)$ 中至少有一个包含 x , 记它为 $O(x_i, \delta_i)$, 且在这个开区间上, 有 $|f(x)| \leq M_i$, 故 $|f(x)| \leq M_i \leq M^*$.

由于 x 为 $[a, b]$ 上的任意一点, 则在 $[a, b]$ 上总成立 $|f(x)| \leq M^*$, 从而证明了 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

7. 证明 (a, b) 上的一致连续函数必有界.

证明: 因 $f(x)$ 为 (a, b) 上的一致连续函数, 则由习题3, 得 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续且 $f(a+0), f(b-0)$ 存在, 于是补充定义: $f(a) = f(a+0), f(b) = f(b-0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 于是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 从而 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.

8. 按定义证明, 两个一致连续函数的和仍一致连续. 有问: 两个一致连续函数的积如何?

证明:

(1) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在任一区间 X 上一致连续.

因 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续, 则由定义对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 对区间 X 内任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta_1$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

又因 $g(x)$ 在区间 X 上一致连续, 则由定义对上述 $\varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 对区间 X 内任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta_2$, 就有 $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有 $|f(x') + g(x') - (f(x'') + g(x''))| = |f(x') - f(x'') + (g(x') - g(x''))| \leq |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

从而 $f(x)$ 在区间 X 上一致连续.

(2) (i) 若区间 X 为有限区间, 则结论成立.

设 $f(x), g(x)$ 在区间 X 上一致连续, 则由上题结论, 知存在常数 $L > 0, M > 0$, 使 $|f(x)| < L, g(x) < M(x \in X)$.

又由一致收敛定义, 得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 对区间 X 内任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta_1$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

同样, 对上述 $\varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 对区间 X 内任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta_2$, 就有 $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2L}$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M}, |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2L}$ 同时成立.

由此可知, $|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| =$

$|[f(x') - f(x'')]g(x') + f(x'')[g(x') - g(x'')]| \leq |f(x') - f(x'')||g(x')| + |f(x'')||g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

从而 $f(x)g(x)$ 在区间 X 上一致连续.

(ii) 当 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 都一致连续时, $f(x)g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一定一致连续.

例:

(a) 不一致连续.

$f(x) = g(x) = x$, 因对 $\forall \varepsilon > 0$, 及 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|x_1 - x_2| < \varepsilon$, 故 $f(x) = g(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

但 $f(x)g(x) = x^2$, 由第5题可知 $f(x)g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

(b) 一致连续.

$f(x) = 1$, 因对 $\forall \varepsilon > 0$, 对任何 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 故 $f(x) = 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

$g(x) = x$, 则由可知 $g(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 且 $f(x)g(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

第二篇 单变量微积分学

第一部分 单变量微分学

第四章 导数与微分

§1. 导数的引进与定义

1. 过曲线 $y = x^2$ 上两点 $A(2, 4)$ 和 $B(2 + \Delta x, 2 + \Delta y)$ 作割线, 分别求出当 $\Delta x = 1$ 及 $\Delta x = 0.1$ 时割线的斜率, 并求出曲线在 A 点的切线斜率.

解: $k_{AB} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$

当 $\Delta x = 1$ 时, $k_{AB} = 5$; 当 $\Delta x = 0.1$ 时, $k_{AB} = 4.1$

曲线在 A 点的切线斜率为 $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{AB} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$.

2. 求抛物线 $y = x^2$ 在 $A(1, 1)$ 点和在 $B(-2, 4)$ 点的切线方程和法线方程.

解: 因 $y' = 2x$, 故在点 $A(1, 1)$: $k_1 = 2$, 切线方程为: $y - 1 = 2(x - 1)$ 即 $2x - y - 1 = 0$; 法线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ 即 $x + 2y - 3 = 0$

在点 $B(-2, 4)$: $k_2 = -4$, 切线方程为: $y - 4 = -4(x + 2)$ 即 $4x + y + 4 = 0$; 法线方程为 $y - 4 = \frac{1}{4}(x + 2)$ 即 $x - 4y + 18 = 0$

3. 若 $y = f(x) = x^3$, 求

(1) 过曲线上二点 $x_0, x_0 + \Delta x$ 之割线的斜率 (设 $x_0 = 2, \Delta x$ 分别为 $0.1, 0.01, 0.001$);

(2) 在 $x = x_0$ 时曲线切线的斜率.

解:

(1) 因 $k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$,

故: 当 $\Delta x = 0.1$ 时, $k = 12.61$; 当 $\Delta x = 0.01$ 时, $k = 12.0601$; 当 $\Delta x = 0.001$ 时, $k = 12.006001$.

(2) $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 3x^2$,
于是 $f'(x_0) = 3x_0^2$

4. 若 $s = vt - \frac{1}{2}gt^2$, 求

(1) 在 $t = 1, t = 1 + \Delta t$ 之间的平均速度 (设 $\Delta t = 1, 0.1, 0.01$);

(2) 在 $t = 1$ 的瞬时速度.

解:

(1) 因 $\bar{v} = \frac{v(1 + \Delta t) - \frac{1}{2}g(1 + \Delta t)^2 - \left(vt - \frac{1}{2}gt^2\right)}{\Delta t} = v - g - \frac{1}{2}g\Delta t^2$,

故: 当 $\Delta t = 1$ 时, $\bar{v} = v - \frac{3}{2}g$; 当 $\Delta t = 0.1$ 时, $\bar{v} = v - \frac{21}{20}g$; 当 $\Delta t = 0.01$ 时, $\bar{v} = v - \frac{201}{200}g$.

(2) 在 $t = 1$ 的瞬时速度 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = v - g$.

5. 抛物线 $y = x^2$ 在哪一点的切线平行于直线 $y = 4x - 5$? 在哪一点的切线垂直于直线 $2x - 6y + 5 = 0$?

解: 因直线 $y = 4x - 5$ 的斜率为 $k = 4$, 则由 $f'(x) = 2x = k$, 得 $x = 2$, 即 $(2, 4)$ 点的切线平行于直线 $y = 4x - 5$;

因直线 $2x - 6y + 5 = 0$ 的斜率为 $k = \frac{1}{3}$, 则由 $f'(x) = 2x = -\frac{1}{k} = -3$, 得 $x = -\frac{3}{2}$, 即 $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ 点的切线垂直于直线 $2x - 6y + 5 = 0$.

6. 求下列函数在所示点的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

(1) $y = \sqrt{x}$ (设 $x = 2, \Delta x = 0.01$)

(2) $y = \frac{1}{x}$ (设 $x = 4, \Delta x = 0.04$)

解：

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2.01} - \sqrt{2}}{0.01} = 100(\sqrt{2.01} - \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2.01} + \sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{4(4+0.04)} = -\frac{25}{404}$$

7. 证明：

$$(1) \Delta(f(x) \pm g(x)) = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$$

$$(2) \Delta[f(x) \cdot g(x)] = g(x + \Delta x) \cdot \Delta f(x) + f(x) \cdot \Delta g(x)$$

证明：

$$(1) \Delta(f(x) \pm g(x)) = [f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)] - [f(x) \pm g(x)] = [f(x + \Delta x) - f(x)] \pm [g(x + \Delta x) - g(x)] = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$$

$$(2) \Delta[f(x) \cdot g(x)] = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) = [f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x + \Delta x) + f(x) [g(x + \Delta x) - g(x)] = g(x + \Delta x) \cdot \Delta f(x) + f(x) \cdot \Delta g(x)$$

§2. 简单函数的导数

1. 由导数定义求
- $y = \cos x$
- 的导数.

$$\text{解: } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$- \sin x, \text{ 即 } (\cos x)' = - \sin x.$$

2. 由导数定义求
- $y = \sqrt[3]{x}$
- 的导数.

$$\text{解: } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^{-\frac{2}{3}} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} =$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \text{ 即 } (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

3. 按定义证明: 可导的偶函数其导函数是奇函数, 可导的奇函数其导函数是偶函数.

证明: 设 $f(x)$ 为可导的偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$; $g(x)$ 为可导的奇函数, 则 $g(-x) = -g(x)$

$$\text{于是 } f'(-x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{-[f(x - \Delta x) - f(x)]}{-\Delta x} =$$

$-f'(x)$ 即可导的偶函数其导函数是奇函数;

$$g'(-x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(-x + \Delta x) - g(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-g(x - \Delta x) + g(x)}{\Delta x} = \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x - \Delta x) - g(x)}{-\Delta x} = g'(x) \text{ 即可导的奇函数其导函数是偶函数.}$$

4. 按定义证明: 可导的周期函数, 其导函数仍为周期函数.

证明: 设 $f(x)$ 为可导的周期为 T 的函数, 则 $f(x + T) = f(x)$,

$$\text{于是 } f'(x + T) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + T + \Delta x) - f(x + T)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \text{ 即可导的周期函数, 其导函数仍为周期函数.}$$

§3. 求导法则

1. 利用已经给出的导数公式, 求下列函数的导数:

- (1) $y = x^5$
- (2) $y = x^{11}$
- (3) $y = x^6$
- (4) $y = 2^x$
- (5) $y = \log_{10} x$
- (6) $y = 10^x$

解:

- (1) $y' = (x^5)' = 5x^4$
- (2) $y' = (x^{11})' = 11x^{10}$
- (3) $y' = (x^6)' = 6x^5$
- (4) $y' = (2^x)' = 2^x \ln 2$
- (5) $y' = (\log_{10} x)' = \frac{1}{x \ln 10}$
- (6) $y' = (10^x)' = 10^x \ln 10$

2. 求下列函数的导数:

- (1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, 并求 $f'(0), f'(1)$
- (2) $f(x) = x^5 + 3 \sin x$, 并求 $f'(0), f'(\frac{\pi}{2})$
- (3) $f(x) = e^x + 2 \cos x - 7x$, 并求 $f'(0), f'(\pi)$
- (4) $f(x) = 4 \sin x - \ln x + x^2$
- (5) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 并求 $f'(0), f'(1)$

解:

- (1) $f'(x) = 4x - 3$, $f'(0) = -3, f'(1) = 1$
- (2) $f'(x) = 5x^4 + 3 \cos x$, 并求 $f'(0) = 3, f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi^4}{16}$
- (3) $f'(x) = e^x - 2 \sin x - 7$, 并求 $f'(0) = -6, f'(\pi) = e^\pi - 7$
- (4) $f'(x) = 4 \cos x - \frac{1}{x} + 2x$
- (5) $f(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$, 并求 $f'(0) = a_1, f'(1) = \sum_{i=1}^n i a_i$

3. 求下列函数的导数:

- (1) $y = x^2 \sin x$, 并求 $f'(0), f'(\frac{\pi}{2})$
- (2) $y = x \cos x + 3x^2$, 并求 $f'(-\pi)$ 和 $f'(\pi)$
- (3) $y = x \tan x + 7x - 6$
- (4) $y = e^x \sin x - 7 \cos x + 5x^2$
- (5) $y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 2x^3$
- (6) $y = (3x^2 + 2x - 1) \sin x$

解:

- (1) $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$, $f'(0) = 0, f'(\frac{\pi}{2}) = \pi$
- (2) $y' = \cos x - x \sin x + 6x$, $f'(-\pi) = -1 - 6\pi, f'(\pi) = -1 + 6\pi$
- (3) $y' = \tan x + x \sec^2 x + 7$
- (4) $y' = e^x \sin x + e^x \cos x + 7 \sin x + 10x = e^x (\sin x + \cos x) + 7 \sin x + 10x$

$$(5) \quad y' = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} - 6x^2$$

$$(6) \quad y' = (3x^2 + 2x - 1) \cos x + (6x + 2) \sin x$$

4. 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = \frac{2 + \sin x}{x}$$

$$(2) \quad y = \cot x$$

$$(3) \quad y = \frac{3x^2 + 7x - 1}{\sqrt{x}}$$

$$(4) \quad y = \frac{(1 + x^2) \sin x}{2x}$$

$$(5) \quad y = \frac{x \ln x}{1 + x}$$

$$(6) \quad y = \frac{xe^x - 1}{\sin x}$$

解:

$$(1) \quad y' = \frac{x(2 + \sin x)' - (x + \sin x)}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x - 2}{x^2}$$

$$(2) \quad y' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\sin x (\cos x)' - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(3) \quad y' = \frac{\sqrt{x}(3x^2 + 7x - 1)' - (\sqrt{x})'(3x^2 + 7x - 1)}{x} = \frac{\sqrt{x}(6x + 7) - \frac{3x^2 + 7x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{9x^2 + 7x + 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$(4) \quad y' = \frac{2x[(1 + x^2) \sin x]' - 2(1 + x^2) \sin x}{4x^2} = \frac{2x[2x \sin x + (1 + x^2) \cos x] - 2(1 + x^2) \sin x}{4x^2} = \frac{(x^2 - 1) \sin x + x(1 + x^2) \cos x}{2x^2}$$

$$(5) \quad y' = \frac{(1 + x)(x \ln x)' - x \ln x}{(1 + x)^2} = \frac{(1 + x)(\ln x + 1) - x \ln x}{(1 + x)^2} = \frac{x + \ln x + 1}{(1 + x)^2}$$

$$(6) \quad y' = \frac{\sin x(xe^x - 1)' - (\sin x)'(xe^x - 1)}{\sin^2 x} = \frac{e^x \sin x(x + 1) - \cos x(xe^x - 1)}{\sin^2 x}$$

5. 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - 1} - 7x^2$$

$$(2) \quad y = \frac{x \sin x + \cos x}{x \sin x - \cos x}$$

$$(3) \quad y = x^2 e^x \sin x + \frac{3 + x^2}{\sqrt{x}} - x \ln x + 8x^2$$

$$(4) \quad y = \frac{\sin x}{1 + \tan x}$$

$$(5) \quad y = \frac{x \cos x - \ln x}{x + 1}$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{x + \cos x}$$

解:

$$(1) \quad y' = \frac{(x - 1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x\right) - (\sqrt{x} + \cos x)}{(x - 1)^2} - 14x = \frac{(x - 1)(1 - 2\sqrt{x} \sin x) - (2x + 2\sqrt{x} \cos x)}{2\sqrt{x}(x - 1)^2} - 14x$$

$$(2) \quad y' = \frac{(x \sin x - \cos x)(\sin x + x \cos x - \sin x) - (x \sin x + \cos x)(\sin x + x \cos x + \sin x)}{(x \sin x - \cos x)^2} = -\frac{2(\sin x \cos x + x)}{(x \sin x - \cos x)^2} = -\frac{2x + \sin 2x}{(x \sin x - \cos x)^2}$$

$$(3) \quad y' = 2xe^x \sin x + x^2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x + \frac{2x\sqrt{x} - \frac{3+x^2}{2\sqrt{x}}}{x} - \ln x - 1 + 16x = xe^x(2\sin x + x\sin x + x\cos x) + \frac{3x^2 - 1}{2x\sqrt{x}} - \ln x - 1 + 16x$$

$$(4) \quad y' = \frac{\cos x(1 + \tan x) - \sin x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$(5) \quad y' = \frac{(x+1)(\cos x - x \sin x - \frac{1}{x}) - (x \cos x - \ln x)}{(x+1)^2} = \frac{x \cos x - (x^2 \sin x + 1)(x+1) + x \ln x}{x(x+1)^2}$$

$$(6) \quad y' = -\frac{1 - \sin x}{(x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - 1}{(x + \cos x)^2}$$

6. 求曲线 $y + 1 = (x - 2)^3$ 在点 $A(3, 0)$ 处的切线方程及法线方程.

解: 因 $y + 1 = (x - 2)^3$, 则 $y = (x - 2)^3 - 1$, 于是 $y' = 3(x - 2)^2$, 则所求切线的斜率为 $k = y'|_{x=3} = 3$, 从而所求切线方程为: $y = 3(x - 3)$ 即 $3x - y - 9 = 0$; 所求法线方程为: $y = -\frac{1}{3}(x - 3)$ 即 $x + 3y - 3 = 0$.

7. 求曲线 $y = \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程和法线方程.

解: 因 $y = \ln x$, 则 $y' = \frac{1}{x}$, 于是所求切线的斜率为 $k = y'|_{x=1} = 1$,

从而所求切线方程为: $y = x - 1$ 即 $x - y - 1 = 0$; 所求法线方程为: $y = -(x - 1)$ 即 $x + y - 1 = 0$.

8. 抛物线 $y = x^2 - 2x + 4$ 在哪一点的切线平行于 x 轴? 在哪一点的切线与 x 轴的交角为 45° ?

解: 因 $y = x^2 - 2x + 4$, 故 $y' = 2x - 2$.

又平行于 x 轴的切线斜率为 $k = 0$, 则 $2x - 2 = 0$, 于是 $x = 1$, 即所求点为 $(1, 3)$;

又与 x 轴的交角为 45° 的切线斜率为 $k = 1$, 则 $2x - 2 = 1$, 于是 $x = \frac{3}{2}$, 即所求点为 $(\frac{3}{2}, \frac{13}{4})$.

9. 沿直线运动的物体, 其运动方程为 $s = 3t^4 - 20t^3 + 36t^2$, 求其速度, 并问物体何时向前运动? 何时向后运动?

解: 因 $s = 3t^4 - 20t^3 + 36t^2$, 故 $v = s' = 12t^3 - 60t^2 + 72t$.

当 $v > 0$ 即 $0 < t < 2$ 或 $t > 3$ 时, 物体向前运动; 当 $v < 0$ 即 $2 < t < 3$ 时, 物体向后运动.

10. 由于外力作用, 一球沿着斜面向上滚, 初速度为 5, 运动方程为 $s = 5t - t^2$, 试问此球何时开始向下滚?

解: 因 $s = 5t - t^2$, 故 $v = s' = 5 - 2t$, 当 $v = 0$ 即 $t = \frac{5}{2}$ 时, 球开始向下滚.

11. 在 $x = 2$ 处, 作曲线 $y = 0.1x^3$ 的切线, 试问除切点外, 此切线与曲线还在何处相交?

解: 因 $y = 0.1x^3$, 故 $y' = 0.3x^2$, 于是在 $x = 2$ 处, 切线的斜率为 $k = y'|_{x=2} = 1.2$, 从而此曲线在切点 $(2, 0.8)$ 处的切线方程为 $y - 0.8 = 1.2(x - 2)$, 即 $6x - 5y - 8 = 0$; 由 $\begin{cases} y = 0.1x^3 \\ 6x - 5y - 8 = 0 \end{cases}$, 得 $x^3 - 12x + 16 = 0$, 则 $(x - 2)^2(x + 4) = 0$, 解得 $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -4$, 则此切线与曲线还在点 $(-4, -6.4)$ 处相交.

12. 曲线 $y = x^n$ (n 为正整数) 上点 $(1, 1)$ 处的切线交 x 轴于点 $(\xi_n, 0)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(\xi_n)$.

解: 因 $y = x^n$, 则 $y' = nx^{n-1}$, 则此曲线在 $x = 1$ 处的切线斜率为 $k = y'|_{x=1} = n$, 于是此曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = n(x - 1)$ 即 $y = nx - n + 1$.

当 $y = 0$ 时, $x = \frac{n-1}{n}$ 即 $\xi_n = \frac{n-1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$.

13. 设抛物线方程为 $y = x^2 + ax + b$, 试问点 (x_0, y_0) 位于何处时, 可以从点 (x_0, y_0) 对此抛物线作出两条切线或一条切线, 或作不出切线?

解: 设 (x_0, y_0) 为平面上任一点, (x, y) 为过 (x_0, y_0) 的切线与抛物线的交点.

由已知, 得与抛物线相交的切线的斜率为 $k = y' = 2x + a$, 则所求切线为 $y - y_0 = (2x + a)(x - x_0)$ 即 $y_0 - y = (2x - a)(x_0 - x)$,

又 $y = x^2 + ax + b$, 则 $y_0 - (x^2 + ax + b) = (2x + a)(x_0 - x)$, 故 $x^2 - 2x_0x + y_0 - ax_0$, 则 $\Delta = 4x_0^2 - 4(y_0 - b - ax_0)$

当 $\Delta > 0$ 即 $y_0 < x_0^2 + ax_0 + b$ 时, 可作两条切线; 当 $\Delta = 0$ 即 $y_0 = x_0^2 + ax_0 + b$ 时, 可作一条切线;

当 $\Delta < 0$ 即 $y_0 > x_0^2 + ax_0 + b$ 时, 作不出切线.

14. 问底数 a 为什么值时, 直线 $y = x$ 才能与对数曲线 $y = \log_a x$ 相切? 在何处相切?

解: 由题意, 得 $x' = (\log_a x)'$, 即 $1 = \frac{1}{x \ln a}$, 则 $x = \frac{1}{\ln a}$, 于是 $y = \frac{1}{\ln a}$.

又由于在切点相切, 其纵坐标必须相等, 则 $\log_a x = \frac{1}{\ln a}$, 于是 $x = e$, 则可得 $\ln a = \frac{1}{e}$, 即 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 即当底数 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 时, 直线 $y = x$ 才能与对数曲线 $y = \log_a x$ 相切, 在点 (e, e) 处相切.

§4. 复合函数求导法

1. 求下列函数的导数:

$$(1) y = 2 \sin 3x$$

$$(2) y = 4 \cos(3t - 1)$$

$$(3) y = 3e^{2x} + 5 \cos 2x$$

$$(4) y = (x + 1)^2$$

$$(5) y = (1 - x + x^2)^3$$

$$(6) y = 3e^{-2t} + 1$$

$$(7) y = \ln(x + 1)$$

$$(8) y = (3x + 1)^4$$

$$(9) y = \sqrt{1 + x^2}$$

$$(10) y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$(11) y = \tan \frac{x}{2} + \sin 3x$$

$$(12) y = \ln \sin x$$

$$(13) y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(14) y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-3t^2}$$

解:

$$(1) y' = 6 \cos 3x$$

$$(2) y' = -12 \sin(3t - 1)$$

$$(3) y' = 6e^{2x} - 10 \sin 2x$$

$$(4) y' = 2(x + 1)$$

$$(5) y' = 3(1 - x + x^2)^2(2x - 1)$$

$$(6) y' = -6e^{-2t}$$

$$(7) y' = \frac{1}{x + 1}$$

$$(8) y' = 12(3x + 1)^3$$

$$(9) y' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(10) y' = 2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2(x - 1)}{x^3}$$

$$(11) y' = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + 3 \cos 3x$$

$$(12) y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$(13) y' = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2} = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(14) y' = \frac{-3\sqrt{2}t}{\sqrt{\pi}} e^{-3t^2}$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \sin^3 2x$$

$$(2) y = (at + b)e^{-2t} (a, b \text{ 为常数})$$

$$(3) y = e^{2t} \sin 3t + \frac{t^2}{2}$$

$$(4) y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$(5) y = \frac{e^{-kt} \sin \omega t}{1+t} (k, \omega \text{ 为常数})$$

$$(6) y = \frac{4}{(x + \cos 2x)^2}$$

$$(7) y = e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

$$(8) y = \frac{x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$$(9) y = (x-1)\sqrt{x^2+1}$$

$$(10) y = (2+3t)\sin 2t + 7t^2 - 7$$

解:

$$(1) y' = 6 \sin^2 2x \cos x = 3 \sin 4x \sin 2x$$

$$(2) y' = ae^{-2t} - 2(at+b)e^{-2t} = -(2at+2b-a)e^{-2t}$$

$$(3) y' = 2e^{2t} \sin 3t + 3e^{2t} \cos 3t + t = e^{2t}(2 \sin 3t + 3 \cos 3t) + t$$

$$(4) y' = \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{x^4-1}$$

$$(5) y' = \frac{(1+t)e^{-kt}(-k \sin \omega t + \omega \cos \omega t) - (e^{-kt} \sin \omega t)}{(1+t)^2} = \frac{-(kt+k+1)e^{-kt} \sin \omega t + \omega(1+t)e^{-kt} \cos \omega t}{(1+t)^2}$$

$$(6) y' = -\frac{4[(x+\cos 2x)^2]'}{(x+\cos 2x)^4} = -\frac{8(1-2\sin 2x)}{(x+\cos 2x)^2}$$

$$(7) y' = -e^{-t}(\cos t + \sin t) + e^{-t}(-\sin t + \cos t) = -2e^{-t} \sin t$$

$$(8) y' = \frac{\frac{\sqrt{1+\cos^2 x} - x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}}{1+\cos^2 x} = \frac{1+\cos^2 x + x \sin x \cos x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(9) y' = \sqrt{x^2+1} + (x-1) \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(10) y' = 3 \sin 2t + 2(2+3t) \cos 2t + 14t$$

3. 求下列函数的导数:

$$(1) y = e^{-kt}(3 \cos \omega t + 4 \sin \omega t) (k, \omega \text{ 为常数})$$

$$(2) y = x \arctan x$$

$$(3) y = (2x^2+1)^2 e^{-x} \sin 3x$$

$$(4) y = \frac{e^{-t} \sin 3t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$(5) y = (3t+1)e^t(\cos 3t - 7 \sin 3t)$$

$$(6) y = t \arcsin 3t + 7e^{-2t} \ln t + 8t$$

$$(7) y = x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} (a \text{ 为常数})$$

解:

$$(1) y' = -ke^{-kt}(3 \cos \omega t + 4 \sin \omega t) + e^{-kt}(-3\omega \sin \omega t + 4\omega \cos \omega t) = e^{-kt}[(4\omega-3k) \cos \omega t - (3\omega+4k) \sin \omega t]$$

$$(2) y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$(3) y' = 4x(2x^2+1)e^{-x} \sin 3x - (2x^2+1)^2 e^{-x} \sin 3x + 3(2x^2+1)^2 e^{-x} \cos 3x = e^{-x}(2x^2+1)[(-2x^2+8x-1) \sin 3x + 3(2x^2+1) \cos 3x]$$

$$(4) y' = \frac{e^{-t}(-\sin 3t + 3 \cos 3t)\sqrt{1+t^2} - e^{-t} \sin 3t \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{e^{-t}[3(1+t^2) \cos 3t - (t^2+t+1) \sin 3t]}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(5) \quad y' = 3e^t(\cos 3t - 7\sin 3t) + (3t+1)e^t(\cos 3t - 7\sin 3t) + (3t+1)e^t(-3\sin 3t - 21\cos 3t) = -e^t[(60t+17)\cos 3t + (30t+31)\sin 3t]$$

$$(6) \quad y' = \arcsin 3t + \frac{3t}{\sqrt{1-9t^2}} - 14e^{-2t} \ln t + \frac{7e^{-2t}}{t} + 8$$

$$(7) \quad y' = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = \frac{(a^2 - 2x^2)(a^2 - x^2) + a^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

4. 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = \sin^n x \cos nx$$

$$(2) \quad y = \sinh^n x \cosh nx$$

$$(3) \quad y = e^{-x^2+2x}$$

$$(4) \quad y = (\sin x + \cos x)^n$$

$$(5) \quad y = \arcsin(\sin x \cdot \cos x)$$

$$(6) \quad y = \ln \sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}}$$

$$(7) \quad y = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$$

$$(8) \quad y = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

解:

$$(1) \quad y' = n \sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n \sin^n x \sin nx = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$$

$$(2) \quad y' = n \sinh^{n-1} x \cosh x \cosh nx + n \sinh^n x \sinh nx = n \sinh^n x \cosh(n+1)x$$

$$(3) \quad y' = -2(x-1)e^{-x^2+2x}$$

$$(4) \quad y' = n(\sin x + \cos x)^{n-1}(\cos x - \sin x) = n(\sin x + \cos x)^{n-2} \cos 2x$$

$$(5) \quad y' = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 - (\sin x \cdot \cos x)^2}} = \frac{2 \cos 2x}{\sqrt{4 - \sin^2 2x}}$$

$$(6) \quad \text{因 } y = \ln \sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x+1}} = \frac{1}{2} [\ln(x+2) + \ln(x+3) - \ln(x+1)], \text{ 故 } y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{x^2 + 2x - 1}{2(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

$$(7) \quad y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^2} \cdot \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$(8) \quad y' = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{a^2(a^2 + x^2)} = \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

5. 利用取对数再求导的方法, 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(2) \quad y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$$

$$(3) \quad y = (x - \alpha_1)^{\alpha_1} (x - \alpha_2)^{\alpha_2} \cdots (x - \alpha_n)^{\alpha_n}$$

$$(4) \quad y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$$

$$(5) \quad y = x^m m^x$$

解:

(1) 因 $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则 $\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x)$, 两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x} + \frac{-1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$,

则 $y' = \frac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} (0 < |x| < 1)$

(2) 因 $y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$, 则 $\ln y = 2\ln x - \ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$, 两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1+2x}{2(1+x+x^2)}$,

则 $y' = \frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1+2x}{2(1+x+x^2)} \right)$

(3) 因 $y = (x-\alpha_1)^{\alpha_1}(x-\alpha_2)^{\alpha_2}\cdots(x-\alpha_n)^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内, 故应设 $\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)^{\alpha_i} >$

0 , 则 $\ln y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln |x-\alpha_i|$, 两边对 x 求导数, 得 $\frac{1}{y}y' = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x-\alpha_i}$,

则 $y' = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x-\alpha_i} \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)^{\alpha_i} (x \in D)$ 其中 $D = \left\{ \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)^{\alpha_i} > 0 \right\}$

(4) 因 $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$, 则 $\ln y = n\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{y}y' = n \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$, 则 $y' = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}(x + \sqrt{1+x^2})^n$

(5) 因 $y = x^m m^x$, 则 $\ln y = m\ln|x| + x\ln m$, 两边对 x 求导, 得 $\frac{1}{y}y' = \frac{m}{x} + \ln m$, 则 $y' = x^{m-1}m^{x+1} + x^m m^x \ln m$

6. 设 $f(x)$ 是对 x 可求导的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = f(x^2)$

(2) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$

(3) $y = f(f(f(x)))$

解:

(1) $\frac{dy}{dx} = 2xf'(x^2)$

(2) $\frac{dy}{dx} = e^x f'(e^x) \cdot e^{f(x)} + f'(x)f(e^x)e^{f(x)} = e^{f(x)}(e^x f'(e^x) + f(e^x)f'(x))$

(3) $\frac{dy}{dx} = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$

7. 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 为对 x 可求导的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$

(2) $y = \arctan \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} (\psi(x) \neq 0)$

(3) $y = {}^{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x)} (\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0)$

(4) $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x) (\varphi(x) > 0, \psi(x) \neq 0)$

解:

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$

(3) $\frac{dy}{dx} = {}^{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x)} \left(\frac{\psi'(x)}{\varphi(x)\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)\ln \psi(x)}{\varphi^2(x)} \right)$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \ln \varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\frac{(\ln \varphi(x))^2}{\log_{\varphi(x)} \psi(x)} \left[\frac{\psi'(x)}{\psi(x) \ln \psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x) \ln \varphi(x)} \right]} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x) \ln \varphi(x)} - \frac{\varphi'(x) \ln \psi(x)}{\varphi(x) (\ln \varphi(x))^2} =$$

8. 求图4-7所示曲柄连杆机构滑块运动的速度.

解: 因 $s = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t} - r \cos \omega t$, 故 $v = s' = r\omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega \sin 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}$.

9. 求曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的切线方程和法线方程.

解: 因 $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 则在 $x = \frac{1}{2}$ 处的切线斜率为 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

于是所求切线方程为: $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)$ 即 $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$;

所求法线方程为: $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)$ 即 $\sqrt{3}x - y = 0$.

10. 求曲线 $y = e^{-x}$ 上的一点, 使过该点的切线与直线 $y = -ex$ 平行, 并写出该点的法线方程.

解: 因 $k = y' = -e^{-x} = -e$, 则 $x = -1$, 则过 $(-1, e)$ 点的切线与直线 $y = -ex$ 平行, 过该点的法线方程为 $y - e = \frac{1}{e}(x + 1)$ 即 $x - ey + e^2 + 1 = 0$.

11. 求曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上的水平切线.

解: 因 $k = y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, 则 $x = 0$, 于是此曲线在 $(0, 1)$ 处的切线为水平切线, 切线方程为 $y = 1$.

12. 求曲线 $y = \frac{1}{2}(1 + 2x^2 \pm \sqrt{1 + 4x^2})$ 上横坐标 $x = U$ 的点处的切线方程. 这切线还与曲线交于何处?

解: 因 $y' = 2x \pm \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2}}$, 则曲线在 $x = U$ 处的切线斜率为 $k = 2U \pm \frac{2U}{\sqrt{1 + 4U^2}}$, 于是此曲线在切点 $(U, \frac{1}{2}(1 + 2U^2 \pm \sqrt{1 + 4U^2}))$ 处的切线方程为 $y - \frac{1}{2}(1 + 2U^2 \pm \sqrt{1 + 4U^2}) = (2U \pm \frac{2U}{\sqrt{1 + 4U^2}})(x - U)$,

即 $2U(\sqrt{1 + 4U^2} \pm 1)x - \sqrt{1 + 4U^2}y \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2U^2)\sqrt{1 + 4U^2} = 0$, 此切线还与曲线交于

$$\left(\frac{U(\sqrt{1 + 4U^2} \pm 1)}{\sqrt{1 + 4U^2}}, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2U^2(\sqrt{1 + 4U^2} \pm 1)^2}{1 + 4U^2} \pm \sqrt{1 + \frac{4U^2(\sqrt{1 + 4U^2} \pm 1)^2}{1 + 4U^2}} \right) \right).$$

13. 设 $y = f(x)$ 在 x_0 可导, 记 $\varphi(t) = f(x_0 + at)$, a 为常数, 求 $\varphi'(0)$.

解: 若 $a = 0$, 则 $\varphi(t) = f(x_0)$, 则 $\varphi'(0) = 0$

若 $a \neq 0$, 则 $\varphi'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at) - f(x_0)}{t} = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at) - f(x_0)}{at} = af'(x_0)$.

§5. 微分及其运算

1. 求下列函数在指定点的微分:

(1) $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, 求 $dy(0), dy(1)$

(2) $y = \sec x + \tan x$, 求 $dy(0), dy\left(\frac{\pi}{4}\right), dy(\pi)$

(3) $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$, 求 $dy(0), dy(a)$

(4) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, 求 $dy(0.1), dy(0.01)$

解:

(1) 因 $dy = [na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1]dx$, 则 $dy(0) = a_1 dx, dy(1) = \sum_{i=1}^n i a_i dx$

(2) 因 $dy = (\tan x \sec x + \sec^2 x)dx$, 则 $dy(0) = dx, dy\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2} + 2)dx, dy(\pi) = dx$

(3) 因 $dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}$, 则 $dy(0) = \frac{dx}{a^2}, dy(a) = \frac{dx}{2a^2}$

(4) 因 $y = -\frac{x+2}{x^3}dx$, 则 $dy(0.1) = -2100dx, dy(0.01) = -2010000dx$

2. 求下列函数 $y = y(x)$ 的微分:

(1) $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

(2) $y = x^2 \sin x$

(3) $y = \frac{x}{1-x^2}$

(4) $y = x \ln x - x$

(5) $y = (1-x^2)^n$

(6) $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

(7) $y = \ln \tan x$

(8) $y = \sin ax \cos bx$

(9) $y = e^{ax} \cos bx$

(10) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$

解:

(1) $dy = (1-x+x^2-x^3)dx$

(2) $dy = (2x \sin x + x^2 \cos x)dx$

(3) $dy = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$

(4) $dy = \ln x dx$

(5) $dy = -2nx(1-x^2)^{n-1}dx$

(6) $dy = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

(7) $dy = \frac{2}{\sin 2x}dx$

(8) $dy = (a \cos ax \cos bx - b \sin ax \sin bx)dx$

(9) $dy = e^{ax}(a \cos bx - b \sin bx)dx$

(10) $dy = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx$

3. 求下列函数 y 的微分:

(1) $y = \sin^2 t, t = \ln(3x+1)$

$$(2) \quad y = \ln(3t+1), t = \sin^2 x$$

$$(3) \quad y = e^{3u}, u = \frac{1}{2} \ln t, t = x^2 - 2x + 5$$

$$(4) \quad y = \arctan u, u = (\ln t)^2, t = 1 + x^2 - \cot x$$

解:

$$(1) \quad dy = \frac{3 \sin(2 \ln(3x+1))}{3x+1} dx$$

$$(2) \quad y = \frac{3 \sin 2x}{3 \sin^2 x + 1} dx$$

$$(3) \quad y = \frac{3(3x^2 - 2)}{2(x^3 - 2x + 5)} e^{\frac{3}{2} \ln(x^2 - 2x + 5)} dx$$

$$(4) \quad y = \frac{2 \ln(1 + x^2 - \cot x)(2x + \csc^2 x)}{[1 + (\ln(1 + x^2 - \cot x))^4](1 + x^2 - \cot x)} dx$$

4. 若 u, v, w 为 x 的可微分函数, 求函数 y 的微分 dy :

$$(1) \quad y = u \cdot v \cdot w$$

$$(2) \quad y = \frac{u \cdot w}{v^2}$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$(4) \quad y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$(5) \quad y = \arctan \frac{u}{v}$$

解:

$$(1) \quad dy = (u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w') dx$$

$$(2) \quad dy = \frac{v^2(u'w + uw') - 2uvv'w}{v^4} dx$$

$$(3) \quad dy = -\frac{uu' + vv'}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} dx (u^2 + v^2 > 0)$$

$$(4) \quad dy = \frac{uu' + vv'}{u^2 + v^2} dx$$

$$(5) \quad dy = \frac{u'v - uv'}{u^2 + v^2} dx (v \neq 0)$$

§6. 隐函数及参数方程所表示函数的求导法

1. 求下列隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

- (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其中 a, b 为常数
- (2) $y^2 = 2px$, 其中 p 为常数
- (3) $x^2 + xy + y^2 = a^2$, 其中 a 为常数
- (4) $x^3 + y^3 - xy = 0$
- (5) $y = x + \frac{1}{2} \sin y$
- (6) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, 其中 a 为常数
- (7) $y - \cos(x + y) = 0$
- (8) $y = x + \arctan y$
- (9) $y = 1 - \ln(x + y) + e^y$
- (10) $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

解:

- (1) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$, 则 $y' = -\frac{b^2x}{a^2y} (y \neq 0)$.
- (2) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $2yy' = 2p$, 则 $y' = \frac{p}{y} (y \neq 0)$.
- (3) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $2x + xy' + y + 2yy' = 0$, 则 $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$.
- (4) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $3x^2 + 3y^2y' - xy' - y = 0$, 则 $y' = \frac{3x^2 - y}{x - 3y^2}$.
- (5) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $y' = 1 + \frac{y'}{2} \cos y$, 则 $y' = \frac{2}{2 - \cos y}$.
- (6) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$, 则 $y' = -\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$.
- (7) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $y' + (1+y')\sin(x+y) = 0$, 则 $y' = -\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)}$.
- (8) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $y' = 1 + \frac{y'}{1+y^2}$, 则 $y' = \frac{1+y^2}{y^2}$.
- (9) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $y' = -\frac{1+y'}{x+y} + y'e^y$, 则 $y' = \frac{1}{(x+y)e^y - x - y - 1}$.
- (10) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $\frac{xy' - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2}$, 则 $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2. 求下列隐函数在指定点的导数 $\frac{dy}{dx}$:

- (1) $y = \cos x + \frac{1}{2} \sin y$, 点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$
- (2) $ye^x + \ln y = 1$, 点 $(0, 1)$

解:

- (1) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $y' = -\sin x + \frac{y'}{2} \cos y$, 则 $y' = \frac{2 \sin x}{\cos y - 2}$, 于是在点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 处, $y' = -2$.
- (2) 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $e^x(y + y') + \frac{y'}{y} = 0$, 则 $y' = -\frac{y^2 e^x}{ye^x + 1}$, 于是在点 $(0, 1)$ 处, $y' = -\frac{1}{2}$.

3. 求曲线 $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 16$ 在点(4, 4)的切线方程和法线方程.

解: 在方程两端对 x 求导数, 并注意到 y 是 x 的函数, 就有 $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y' = 0$, 则 $y' = -\sqrt{\frac{x}{y}}$, 于是 $y'|_{\substack{x=4 \\ y=4}} = -1$, 从而切线方程为 $y - 4 = -(x - 4)$, 即 $x + y - 8 = 0$
法线方程为 $y - 4 = x - 4$, 即 $x = y$.

4. 求下列参数方程在所示点的导数:

- (1) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$ 处
(2) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, 在 $t = \frac{\pi}{2}, \pi$ 处
(3) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$, 在 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ 处
(4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (a 是常数), 在 $t = 0, \frac{\pi}{2}$ 处

解:

- (1) 因 $x'(t) = -a \sin t, y'(t) = b \cos t$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{b}{a} \cot t$, 于是, 当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时, $y' = -\frac{\sqrt{3}b}{3a}$;
当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, $y' = -\frac{b}{a}$
(2) 因 $x'(t) = 1 - \cos t, y'(t) = \sin t$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, 于是, 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $y' = 1$; 当 $t = \pi$ 时, $y' = 0$
(3) 因 $x'(t) = -2t, y'(t) = 1 - 3t^2$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 - 1}{2t}$, 于是, 当 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y' = \frac{\sqrt{2}}{4}$; 当 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $y' = 0$
(4) 因 $x'(t) = a(1 - \cos t), y'(t) = a \sin t$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \cot \frac{t}{2}$, 于是, 当 $t = 0$ 时, y' 无意义; 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $y' = 1$

5. 求下列参数方程的导数:

- (1) $\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases}$
(2) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$
(3) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$
(4) $\begin{cases} x = e^{2t} \cos^2 t \\ y = e^{2t} \sin^2 t \end{cases}$

解:

- (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \sinh t}{b \cosh t} = \frac{a}{b} \coth t$
(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-2 \cos t \sin t}{2 \sin t \cos t} = -1$
(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-3 \cos^2 t \sin t} = -\tan t$
(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{e^{2t}(2 \sin^2 t + 2 \sin t \cos t)}{e^{2t}(2 \cos^2 t - 2 \cos t \sin t)} = \tan t \cdot \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$

6. 一圆锥形容器, 深10尺, 上顶圆半径为4尺(图4-11):

- (1) 灌入水时, 求水的体积 V 对水面高度 h 的变化率;
(2) 求体积 V 对容器截面圆半径 R 的变化率.

解: 因体积 V 与容器截面圆半径 R , 水面高度 h 的关系为 $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, 且由已知, 得 $\frac{R}{4} = \frac{h}{10}$ 即 $h = \frac{5}{2}R$, 于是

$$(1) V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{5}h\right)^2 h = \frac{4}{75}\pi h^3, \text{ 从而 } \frac{dV}{dh} = \frac{4}{25}\pi h^2;$$

$$(2) V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{5}{2}R = \frac{5}{6}\pi R^3, \text{ 从而 } \frac{dV}{dR} = \frac{5}{2}\pi R^2.$$

7. 一圆锥形容器底面朝上放着, 它的顶角为 $2\arctan \frac{3}{4}$, 今向里面倒进某种液体,

(1) 当液体半径 r 为3, 半径增加的速度 $\frac{dr}{dt}$ 为 $\frac{1}{4}$ 时, 体积增加的速度 $\frac{dV}{dt}$ 是多少?

(2) 当液体半径为6, 体积增加的速度为24时, 半径增加的速度是多少?

解: 因体积 V 与液体半径 r 的关系为 $V = \frac{4}{9}\pi r^3$, V, r 都是时间 t 的函数, 两边对 t 求导, 得 $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{9}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt}$ 即 $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$, 则

$$(1) \text{ 当 } r = 3, \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4} \text{ 时, } \frac{dV}{dt} = 3\pi;$$

$$(2) \text{ 由 } \frac{dr}{dt} = \frac{3}{4\pi r^2} \frac{dV}{dt}, \text{ 得当 } r = 6, \frac{dV}{dt} = 24 \text{ 时, } \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi}.$$

8. 水从高为18厘米、底半径为6厘米的圆锥形漏斗流入半径为5厘米的圆柱形筒内. 已知漏斗中水深为12厘米时, 漏斗中水面的下降速度为1厘米/分, 求此时圆筒中水面的上升速度.

解: 设从开始漏水起经 t 分钟后, 圆锥形漏斗中溶液的深度为 x 厘米, 圆柱形筒中的水面升高了 y 厘米. 此时, 漏斗中漏出的溶液的体积为 $\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{x}{18} \cdot 6\right)^2 \cdot x = 216\pi - \frac{\pi}{27}x^3$ (立方厘米), 圆柱形筒中注入的溶液的体积为 $\pi \cdot 5^2 \cdot y = 25\pi y$ (立方厘米). 据题意知, $25\pi y = 216\pi - \frac{\pi}{27}x^3$, 故 $y = \frac{1}{25} \left(216 - \frac{x^3}{27}\right)$, 于是 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{675} \cdot 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{225}x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$. 当 $x = 12$ (厘米)时, $\frac{dx}{dt} = -1$ (厘米/分), 于是此时圆筒中水面的上升速度为 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{225} \cdot 12^2(-1) = \frac{16}{25} = 0.64$ (厘米/分).

9. 图4-12所示电路中, 输出功率 $P = i^2 R$, 其中电流 $i = \frac{U}{r+R}$. 求当调整可变电阻 R 时, 功率 P 的变化率 $\frac{dP}{dR}$.

解: 因 $P = i^2 R, i = \frac{U}{r+R}$, 则 $\frac{dP}{dR} = 2iR \frac{di}{dR} + i^2 = \frac{-2U^2 R}{(r+R)^3} + \frac{U^2}{(r+R)^2} = \frac{U^2(r-R)}{(r+R)^3}$

§7. 不可导的函数举例

1. 求下列函数在所点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$:

$$(1) y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ xe^x, & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$(2) y = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$(3) y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$$

解:

$$(1) f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{xe^x - 0}{x} = 1; \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 - 0}{x} = 0.$$

$$(2) f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0;$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

$$(3) f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0; \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0.$$

2. 求下列函数在导数不存在的点的左、右导数:

$$(1) y = |\ln |x||$$

$$(2) y = |\tan x|$$

$$(3) y = \sqrt{1 - \cos x}$$

解:

$$(1) y = |\ln |x|| = \begin{cases} \ln(-x), & x \leq -1 \\ -\ln(-x), & -1 < x < 0 \\ -\ln x, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$$

由此可知, 函数在 $x = 0, x = \pm 1$ 处导数不存在。

$$f'_+(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{-\ln[-(-1 + \Delta x)] - \ln(-(-1))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \ln(1 - \Delta x)^{-\frac{1}{\Delta x}} = 1;$$

$$f'_-(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\ln[-(-1 + \Delta x)] - \ln(-(-1))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \ln(1 - \Delta x)^{-\frac{1}{\Delta x}} = -1;$$

因函数在 $x = 0$ 点无意义, 故 $f'_+(0)$ 和 $f'_-(0)$ 无意义;

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + \Delta x) - \ln 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \ln(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = 1;$$

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\ln(1 + \Delta x) - \ln(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} -\ln(1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = -1.$$

$$(2) y = |\tan x| = \begin{cases} -\tan x, & x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right] \\ \tan x, & x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad k \in Z$$

其中 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$ 时函数无定义, 且为无穷间断点, 故左、右导数无意义;

$x = k\pi (k \in Z)$ 为导数不存在的点。

$$f'_+(k\pi) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\tan(k\pi + \Delta x) - (-\tan k\pi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\tan \Delta x}{\Delta x} = 1; \quad f'_-(k\pi) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\tan(k\pi + \Delta x) - (-\tan k\pi)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} -\frac{\tan \Delta x}{\Delta x} = -1.$$

(3) 因 $y' = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ 当 $x \neq 2k\pi (k \in Z)$ 时才有定义, 故 $x = 2k\pi (k \in Z)$ 为 $y = \sqrt{1 - \cos x}$ 的不可导点。

$$f'_+(2k\pi) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 + \cos(2k\pi + \Delta x)} - \sqrt{1 + 2k\pi}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 - \cos \Delta x}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f'_-(2k\pi) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 + \cos(2k\pi + \Delta x)} - \sqrt{1 + 2k\pi}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - \cos \Delta x}}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \sqrt{\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 若

- (1) $f(x)$ 在 x_0 点可导, $g(x)$ 在 x_0 点不可导, 证明函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 x_0 点不可导;
- (2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 点都不可导, 能否断定他们的和函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 x_0 点不可导?

证明:

- (1) 假设 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 x_0 点可导, 又 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 则 $g(x) = F(x) - f(x)$ 在 x_0 点可导, 这与已知矛盾, 故假设不成立. 从而函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 x_0 点不可导.
- (2) 不能. 例:

- (i) 可导: $f(x) = \frac{|x| + x}{2}, g(x) = \frac{x - |x|}{2}$ 在 $x = 0$ 点都不可导, 但它们的和函数 $F(x) = f(x) + g(x) = x$ 在 $x = 0$ 点可导且 $F'(0) = 1$;
- (ii) 不可导: $f(x) = \frac{|x|}{2}, g(x) = \frac{|x|}{2}$ 在 $x = 0$ 点都不可导, 它们的和函数 $F(x) = f(x) + g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 点也不可导.

4. 在上题条件下, 它们的积 $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ 的可导情况怎样?

解:

- (1) 它们的积 $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 点可能可导.

例:

- (i) 可导: $f(x) = x$ 在 $x = 0$ 点可导且 $f'(0) = 1$; $g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 点不可导, 它们的积 $G(x) = f(x) \cdot g(x) = x|x|$ 在 $x = 0$ 点可导且 $G'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0$
- (ii) 不可导: $f(x) = 1$ 在 $x = 0$ 点可导且 $f'(0) = 0$; $g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 点不可导, 它们的积 $G(x) = f(x) \cdot g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 点不可导.

- (2) 它们的积 $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 点可能可导.

例:

- (i) 可导: $f(x) = |x|, g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 点都不可导, 它们的积 $G(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2$ 在 $x = 0$ 点可导且 $G'(0) = 0$
- (ii) 不可导: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, g(x) = |x^{\frac{1}{3}}|$ 在 $x = 0$ 点都不可导, 它们的积 $G(x) = f(x) \cdot g(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 点不可导.

5. 若函数 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 中有导数, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 是否必有 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$? 以例子 $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ 说明之.

反之, 若 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 中有导数, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$, 是否必有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$? 以例子 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 说明之.

解:

- (1) 一般地说, 不能保证有 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$.

例: 对于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内定义的函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$, 显然有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.

$$\text{又 } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \left(-\sin \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\sin \frac{1}{x} - 1 \right),$$

对于特殊的一串数 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} (n = 1, 2, \dots)$, 有 $f'(x_n) = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$;

对于 $x'_n = \frac{1}{n\pi} (n = 1, 2, \dots)$, 有 $f'(x'_n) = -n^2 \pi^2$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x'_n) = -\infty$, 故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 点极限不存在, 也非无穷, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$ 不成立.

- (2) 不能保证必有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

例: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 它在 $(0, b) (b > 0)$ 上有导数, 且 $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

6. 若

- (1) $f(x)$ 在 $x = g(x_0)$ 有导数, 而 $g(x)$ 在 x_0 点没有导数;
- (2) $f(x)$ 在 $x = g(x_0)$ 没有导数, 而 $g(x)$ 在 x_0 点有导数;
- (3) $f(x)$ 在 $x = g(x_0)$ 没有导数, 而 $g(x)$ 在 x_0 点也没有导数;

则复合函数 $F(x) = f(g(x))$ 在 x_0 点是否可导?

解:

- (1) 复合函数 $F(x) = f(g(x))$ 在 x_0 点可能可导.

例:

(i) 可导: $f(u) = u^2, g(x) = |x|, x_0 = 0, f(u) = u^2$ 在 $u_0 = 0 = g(x_0)$ 可导且 $f'(0) = 0, g(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 不可导; $F(x) = f(g(x)) = |x|^2 = x^2$ 在 $x_0 = 0$ 可导且 $F'(0) = 0$;

(ii) 可导: $f(u) = u, g(x) = |x|, x_0 = 0, f(u) = u$ 在 $u_0 = 0 = g(x_0)$ 可导且 $f'(0) = 1, g(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 不可导; $F(x) = f(g(x)) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 不可导.

- (2) 复合函数 $F(x) = f(g(x))$ 在 x_0 点可能可导.

例:

(i) 可导: $f(u) = |u|, g(x) = x^2, x_0 = 0, f(u) = |u|$ 在 $u_0 = 0 = g(x_0)$ 不可导, $g(x) = x^2$ 在 $x_0 = 0$ 可导且 $g'(0) = 0$; $F(x) = f(g(x)) = |x^2| = x^2$ 在 $x_0 = 0$ 可导且 $F'(0) = 0$;

(ii) 可导: $f(u) = |u|, g(x) = x, x_0 = 0, f(u) = |u|$ 在 $u_0 = 0 = g(x_0)$ 不可导, $g(x) = x$ 在 $x_0 = 0$ 可导且 $g'(0) = 1$; $F(x) = f(g(x)) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 不可导.

- (3) 复合函数 $F(x) = f(g(x))$ 在 x_0 点可能可导.

例:

(i) 可导: $f(u) = 2u + |u|, g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{|x|}{3}, x_0 = 0, f(u) = 2u + |u|$ 在 $u_0 = 0 = g(x_0)$ 不可导, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{|x|}{3}$ 在 $x_0 = 0$ 不可导; $F(x) = f(g(x)) = 2\left(\frac{2}{3}x - \frac{|x|}{3}\right) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{|x|}{3}\right| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases} = x$ 即 $F(x) = x(\forall x \in (-\infty, +\infty))$, 故 $F(x)$ 在 $x_0 = 0$ 可导且 $F'(0) = 1$;

(ii) 可导: $f(u) = |u|, g(x) = |x|, x_0 = 0, f(u) = |u|$ 在 $u_0 = 0 = g(x_0)$ 不可导, $g(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 不可导; $F(x) = f(g(x)) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 不可导.

§8. 高阶导数与高阶微分

- 1.
- $y = 2x^3 + x^2 + x + 1$
- , 求
- $y', y'', y^{(3)}$
- 和
- $y^{(4)}$
- .

解: $y' = 6x^2 + 2x + 1, y'' = 12x + 2, y^{(3)} = 12, y^{(4)} = 0$

- 2.
- $y = e^{\alpha t}$
- (
- α
- 为常数), 求
- $y'', y^{(3)}, y^{(n)}$
- .

解: $y' = \alpha e^{\alpha t}, y'' = \alpha^2 e^{\alpha t}, y^{(3)} = \alpha^3 e^{\alpha t}, y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha t}$

3. 求下列函数的高阶导数:

(1) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 y''

(2) $y = x \ln x$, 求 y''

(3) $y = e^{-x^2}$, 求 y''

(4) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 y''

(5) $y = x^2 \cdot e^{2x}$, 求 y'''

(6) $y = a^{3x}$, 求 y'''

(7) $y = x^3 \sinh x$, 求 $y^{(30)}$

(8) $y = x^3 \cos x$, 求 $y^{(50)}$

解:

(1) $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}, y'' = 3x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}$

(2) $y' = 1 + \ln x, y'' = \frac{1}{x}$

(3) $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = -2e^{-x^2}(1-2x^2) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$

(4) $y' = \frac{1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$y'' = \frac{2x}{(1-x^2)^2} + \frac{\left(\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x \arcsin x}{(1-x^2)^3} = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(2x^2+1) \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

(5) $y''' = (x^2 e^{2x})''' = x^2 (e^{2x})''' + 3(x^2)'(e^{2x})'' + 3(x^2)''(e^{2x})' + (x^2)''' e^{2x} = 4e^{2x}(2x^2+6x+3)$

(6) $y' = 3a^{3x} \ln a, y'' = 9 \ln^2 a \cdot a^{3x}, y''' = 27 \ln^3 a \cdot a^{3x}$

(7) 因 $(x^3)' = 3x^2, (x^3)'' = 6x, (x^3)''' = 6, (x^3)^{(4)} = \dots = (x^3)^{(30)} = 0; (\sinh x)^{(30)} = \sinh x, (\sinh x)^{(29)} = \cosh x, (\sinh x)^{(28)} = \sinh x, (\sinh x)^{(27)} = \cosh x$, 故 $y^{(30)} = (x^3 \sinh x)^{(30)} = x^3 (\sinh x)^{(30)} + 30(x^3)'(\sinh x)^{(29)} + 435(x^3)''(\sinh x)^{(28)} + 4060(x^3)'''(\sinh x)^{(27)} = x \sinh x(x^2+2610) + 30 \cosh x(3x^2+812)$

(8) 因 $(x^3)' = 3x^2, (x^3)'' = 6x, (x^3)''' = 6, (x^3)^{(4)} = \dots = (x^3)^{(50)} = 0; (\cos x)^{(50)} = -\cos x, (\cos x)^{(49)} = -\sin x, (\cos x)^{(48)} = \cos x, (\cos x)^{(47)} = \sin x$, 故 $y^{(50)} = (x^3 \cos x)^{(50)} = x^3 (\cos x)^{(50)} + 50(x^3)'(\cos x)^{(49)} + 1225(x^3)''(\cos x)^{(48)} + 19600(x^3)'''(\cos x)^{(47)} = x \cos x(7350-x^2) + 150 \sin x(784-x^2)$

4. 利用数学归纳法证明下面公式:

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n (a > 0)$

(2) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

(3) $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$

证明:

- (1) (i) 当
- $n=1$
- 时,
- $(a^x)' = a^x \ln a = a^x (\ln a)^1$
- , 则
- $n=1$
- 时公式成立.

- (ii) 假设当
- $n=k$
- 时公式成立, 即
- $(a^x)^{(k)} = a^x (\ln a)^k$
- 成立,

则当 $n=k+1$ 时, $(a^x)^{(k+1)} = \left[(a^x)(\ln a)^k\right]' = (\ln a)^k (a^x)' = (\ln a)^k \cdot a^x \ln a = a^x (\ln a)^{k+1}$, 于是当 $n=k+1$ 时公式也成立.综合上述可知, 当 n 为任意自然数时, 公式 $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n (a > 0)$ 都成立.

(2) (i) 当 $n = 1$ 时, $(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $n = 1$ 时公式成立.

(ii) 假设当 $n = k$ 时公式成立, 即 $(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ 成立,

则当 $n = k + 1$ 时, $(\cos x)^{(k+1)} = [(\cos x)^{(k)}]' = \left[\cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right]' = -\sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, 于是当 $n = k + 1$ 时公式也成立.

综合上述可知, 当 n 为任意自然数时, 公式 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ 都成立.

(3) (i) 当 $n = 1$ 时, $(\ln x)' = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{x^1}$, 则 $n = 1$ 时公式成立.

(ii) 假设当 $n = k$ 时公式成立, 即 $(\ln x)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{x^k}$ 成立,

则当 $n = k + 1$ 时, $(\ln x)^{(k+1)} = [(\ln x)^{(k)}]' = \left[\frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{x^k}\right]' = -k \cdot \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{x^{k+1}} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{x^{k+1}} = \frac{(-1)^{(k+1)-1} \cdot (k+1-1)!}{x^{k+1}}$, 于是当 $n = k + 1$ 时公式也成立.

综合上述可知, 当 n 为任意自然数时, 公式 $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$ 都成立.

5. 求 n 阶导数:

$$(1) y = \frac{1}{x(1-x)}$$

$$(2) y = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$$

$$(3) y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0$$

$$(4) y = \cos^2 \omega x$$

$$(5) y = \frac{e^x}{x}$$

$$(6) y = 2^x \cdot \ln x$$

$$(7) y = e^{ax} p_n(x), \text{ 其中 } p_n(x) \text{ 为 } n \text{ 次多项式.}$$

解:

$$(1) \text{ 因 } y = \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}, \text{ 则 } y^{(n)} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = (x^{-1})^{(n)} + [(1-x)^{-1}]^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1} + (-1)^{2n} \cdot n! \cdot (1-x)^{-n-1} = n! [(-1)^n x^{-n-1} + (1-x)^{-n-1}]$$

$$(2) \text{ 因 } y = \frac{1}{x^2 - 2x - 8} = \frac{1}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2} \right), \text{ 则 } y^{(n)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2} \right)^{(n)} = \frac{1}{6} [((x-4)^{-1})^{(n)} - ((x+2)^{-1})^{(n)}] = \frac{1}{6} [(-1)^n \cdot n! (x-4)^{-n-1} - (-1)^n \cdot n! (x+2)^{-n-1}] = \frac{(-1)^n}{6} n! \left(\frac{1}{(x-4)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right)$$

$$(3) \text{ 当 } n > m \text{ 时, } x^{(n)} = (x^2)^{(n)} = \cdots = (x^m)^{(n)} = 0, \text{ 则 } y^{(n)} = 0;$$

$$\text{当 } n = m \text{ 时, } x^{(n)} = (x^2)^{(n)} = \cdots = (x^{m-1})^{(n)} = 0, (x^m)^{(n)} = (x^m)^{(m)} = m!, \text{ 则 } y^{(n)} = a_m \cdot m!;$$

$$\text{当 } n < m \text{ 时, } x^{(n)} = (x^2)^{(n)} = \cdots = (x^{n-1})^{(n)} = 0, (x^n)^{(n)} = n!, \cdots, (x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n},$$

$$\text{则 } y^{(n)} = a_m \cdot \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} + a_{m-1} \cdot \frac{(m-1)!}{(m-n-1)!} x^{m-n-1} + \cdots + a_n n! = \sum_{i=0}^{m-n} a_{m-i} \frac{(m-i)!}{(m-n-i)!} x^{m-n-i}.$$

$$(4) \text{ 因 } y' = -2\omega \cos \omega x \sin \omega x = -\omega \sin 2\omega x, \text{ 则 } y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (-\omega \sin 2\omega x)^{(n-1)} = -\omega \sin \left(2\omega x + \frac{n-1}{2} \pi \right).$$

$$(2\omega)^{n-1} = -2^{n-1} \omega^n \sin \left(2\omega x + \frac{n-1}{2} \pi \right) = 2^{n-1} \omega^n \cos \left(2\omega x + \frac{n}{2} \pi \right)$$

$$(5) y^{(n)} = \left(\frac{e^x}{x} \right)^{(n)} = \left(e^x \cdot \frac{1}{x} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \left(\frac{1}{x} \right)^{(k)} = e^x \left[\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{x^{k+1}} \right]$$

$$(6) \quad y^{(n)} = (2^x \cdot \ln x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (2^x)^{(n-k)} (\ln x)^{(k)} =$$

$$\sum_{k=1}^n C_n^k (\ln 2)^{n-k} \cdot 2^x \cdot \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} + 2^x (\ln 2)^n \ln x =$$

$$2^x [(\ln 2)^n \ln x + n(\ln 2)^{n-1} x^{-1} + \cdots + (-1)^{n-2} (n-2)! \cdot n \ln 2 \cdot x^{-(n-1)} + (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot x^{-n}]$$

$$(7) \quad y^{(n)} = (e^{ax} p_n(x))^{(n)} = a^n e^{ax} p_n(x) + C_n^1 a^{n-1} e^{ax} p_n'(x) + \cdots + e^{ax} p_n^{(n)}(x) = e^{ax} [a^n p_n(x) + C_n^1 a^{n-1} p_n'(x) + \cdots + p_n^{(n)}(x)]$$

6. 若 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 证明 $f^{(n)}(0) = 0$.

证明: 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right)$, 由此推断 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n \left(\frac{1}{x} \right)$ ($x \neq 0$), 其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式.

下面证明: 对任意正整数 n , 均有命题 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n \left(\frac{1}{x} \right)$ ($x \neq 0$)

当 $n = 1$ 时, 命题显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 命题成立, 即有 $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left(\frac{1}{x} \right)$ ($x \neq 0$), $P_k(t)$ 是关于 t 的多项式,

则当 $n = k + 1$ 时, $f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = \left[e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left(\frac{1}{x} \right) \right]' =$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \left[\frac{2}{x^3} P_k \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} P_k' \left(\frac{1}{x} \right) \right] = e^{-\frac{1}{x^2}} \left[2 \left(\frac{1}{x} \right)^3 P_k \left(\frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{x} \right)^2 P_k' \left(\frac{1}{x} \right) \right] = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{k+1} \left(\frac{1}{x} \right),$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一个多项式.

据数学归纳法可知, 命题对一切自然数 n 均成立.

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-(\frac{1}{\Delta x})^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x e^{(\frac{1}{\Delta x})^2}} = 0$$

$$\text{假设当 } n = k \text{ 时, } f^{(k)}(0) = 0, \text{ 则 } f^{(k+1)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(0 + \Delta x) - f^{(k)}(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-(\frac{1}{\Delta x})^2} P_k \left(\frac{1}{\Delta x} \right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\Delta x} P_k \left(\frac{1}{\Delta x} \right)}{e^{(\frac{1}{\Delta x})^2}} = 0$$

据数学归纳法可知, $f^{(n)}(0) = 0$.

7. 设 $f(x)$ 的各阶导数存在, 求 y'' 及 y''' :

$$(1) \quad y = f(x^2)$$

$$(2) \quad y = f \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$(3) \quad y = f(e^{-x})$$

$$(4) \quad y = f(\ln x)$$

解:

$$(1) \quad y' = 2x f'(x^2), y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2),$$

$$y''' = 12x f''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2)$$

$$(2) \quad y' = -\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right), y'' = \frac{2}{x^3} f' \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^4} f'' \left(\frac{1}{x} \right),$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4} f' \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{6}{x^5} f'' \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^6} f''' \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$(3) \quad y' = -e^{-x} f'(e^{-x}), y'' = e^{-x} f'(e^{-x}) + e^{-2x} f''(e^{-x}), y''' = -e^{-x} f'(e^{-x}) - 3e^{-2x} f''(e^{-x}) - e^{-3x} f'''(e^{-x})$$

$$(4) \quad y' = \frac{1}{x} f'(\ln x), y'' = \frac{1}{x^2} f''(\ln x) - \frac{1}{x^2} f'(\ln x) = \frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)], y''' = \frac{1}{x^3} [2f'(\ln x) - 3f''(\ln x) + f'''(\ln x)]$$

8. 设 $y = e^x \sin x, z = e^x \cos x$, 证明它们满足方程 $y'' = 2z, z'' = -2y$.

证明: 因 $y = e^x \sin x, z = e^x \cos x$, 则 $y' = e^x (\sin x + \cos x), y'' = 2e^x \cos x; z' = e^x (\cos x - \sin x), z'' = -2e^x \sin x$, 于是 $y'' = 2z, z'' = -2y$.

9. 设 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, $C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$ 是常数, 证明它满足方程 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$.
证明: 因 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, $C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$ 是常数, 则 $y' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$, $y'' = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$,
 于是 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}) + \lambda_1 \lambda_2 (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}) = 0$ 即 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$.
10. 设 $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, 证明 y 满足方程 $y'' + y = 0$.
证明: 因 $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, 则 $y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$, $y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x = -(C_1 \sin x + C_2 \cos x) = -y$ 即 $y'' + y = 0$.
11. 若函数 φ 为 $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)} \left[1 + \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)^2} \left(f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) \right) \right]$, 求 $\varphi'(a)$ 及 $\varphi''(a)$.
解: 因 $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)} \left[1 + \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)^2} \left(f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) \right) \right]$,
 则 $\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f'(a)} \left[1 + \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)^2} \left(f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) \right) \right] +$
 $\frac{f(x) - f(a)}{f'(a)} \left[\frac{f'(x)}{f'(a)^2} \left(f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) \right) \right],$
 $\varphi''(x) = \frac{f''(x)}{f'(a)} \left[1 + \frac{f(x) - f(a)}{f'(a)^2} \left(f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) \right) \right] + 2 \frac{f'(x)}{f'(a)} \left[\frac{f'(x)}{f'(a)^2} \left(f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) \right) \right] +$
 $\frac{f(x) - f(a)}{f'(a)} \left[\frac{f''(x)}{f'(a)^2} \left(f'(a) - \frac{1}{2} f''(a) \right) \right],$
 则 $\varphi'(a) = 1, \varphi''(a) = 2$
12. 设 $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 试问如何由 f', f'', f''' 算出 $\varphi'''(y)$?
解: 因 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, 则 $\varphi''(y)f'(x) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$, 于是 $\varphi''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$,
 则 $\varphi'''(y)f'(x) = -\frac{f'''(x)[f'(x)]^3 - 3[f'(x)]^2[f''(x)]^2}{[f'(x)]^6}$, 从而 $\varphi'''(y) = \frac{3[f''(x)]^2 - f'''(x)f'(x)}{[f'(x)]^5}$.
13. 试求阻尼振动 $s = ae^{-\lambda t} \sin \omega t$ 在时刻 t 的速度和加速度, 并求出速度方向的反转点.
解: 速度 $v = s' = ae^{-\lambda t}(-\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t)$, 加速度 $a = v' = s'' = ae^{-\lambda t}[(\lambda^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2\lambda \omega \cos \omega t]$;
 速度的反转点即 $v = 0$, 则 $-\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t = 0$, 于是 $\tan \omega t = \frac{\omega}{\lambda} (\lambda \neq 0)$.
14. 求下列参数方程的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$(1) \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x = f(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$$

解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{4(1 - t)}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\cot t$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2} \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}} \\
(4) \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{e^t (\sin t + \cos t)}{e^t (\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{e^t (\cos t - \sin t)^3} \\
(5) \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{3a \cos^4 t \sin t} \\
(6) \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{t f''(t)}{f''(t)} = t \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)}
\end{aligned}$$

15. 求由隐函数所确定的二阶导数:

- (1) $e^{x+y} - xy = 0$
- (2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
- (3) $y^2 + 2 \ln y - x^4 = 0$

解:

- (1) 对方程 $e^{x+y} - xy = 0$ 两端关于 x 求导, 得

$$(1 + y')e^{x+y} - y - xy' = 0 \quad (4)$$

$$\text{于是 } y' = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x},$$

再对(4)两端关于 x 求导, 得 $y''e^{x+y} + (1 + y')^2 e^{x+y} - 2y' - xy'' = 0$, 则 $y'' = \frac{2y' - (1 + y')^2 e^{x+y}}{e^{x+y} - x}$,

$$\text{将 } y' = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x} \text{ 代入上式, 即得 } y'' = \frac{2(y - e^{x+y})}{(e^{x+y} - x)^2} - \frac{(x - y)^2 e^{x+y}}{(e^{x+y} - x)^3}.$$

- (2) 对方程 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 两端关于 x 求导, 得

$$x^2 + y^2 y' - axy' - ay = 0 \quad (1)$$

$$\text{于是 } y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

再对(1)两端关于 x 求导, 得 $2x + 2y(y')^2 + y^2 y'' - 2ay' - axy'' = 0$, 则 $y'' = \frac{2ay' - 2y(y')^2 - 2x}{y^2 - ax}$,

$$\text{将 } y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \text{ 代入上式, 即得 } y'' = \frac{2a(ay - x^2)}{(y^2 - ax)^2} - \frac{2y(ay - x^2)^2}{(y^2 - ax)^3} - \frac{2x}{y^2 - ax}.$$

- (3) 对方程 $y^2 + 2 \ln y - x^4 = 0$ 两端关于 x 求导, 得

$$yy' + \frac{1}{y} y' - 2x^3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{于是 } y' = \frac{2x^3 y}{y^2 + 1},$$

再对(1)两端关于 x 求导, 得 $(y')^2 + yy'' + \frac{yy'' - (y')^2}{y^2} - 6x^2 = 0$, 则 $y'' = \frac{6x^2 y^2 + (y')^2 (1 - y^2)}{y(y^2 + 1)}$,

$$\text{将 } y' = \frac{2x^3 y}{y^2 + 1} \text{ 代入上式, 即得 } y'' = \frac{2x^2 y}{(y^2 + 1)^3} [3(y^2 + 1)^2 + 2x^4 (1 - y^2)].$$

16. 求高阶微分(x 是自变量):

(1) $y = \sqrt{1+x^2}$, 求 d^2y

(2) $y = x^x$, 求 d^2y

(3) $y = x \cos 2x$, 求 d^3y

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 d^3y

(5) $y = x^n \cdot e^x$, 求 $d^n y$

(6) $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 $d^n y$

解:

(1) $dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx, d^2y = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx^2$

(2) $dy = x^x (\ln x + 1) dx, d^2y = x^x \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2$

(3) $d^3y = (x \cos 2x)^{(3)} dx^3 = (x(\cos 2x))^{(3)} + 3(\cos 2x)^{(2)} dx^3 = (8x \sin 2x - 12 \cos 2x) dx^3$

(4) $d^3y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{(3)} dx^3 = -\frac{15}{8} x^{-\frac{7}{2}} dx^3$

(5) $d^n y = (x^n \cdot e^x)^{(n)} dx^n = \left(e^x \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \right) dx^n$

(6) $d^n y = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{(n)} dx^n = \left(\frac{1}{x} \ln x \right)^{(n)} dx^n =$
 $\left[(-1)^n \frac{n! \ln x}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{n-1} \frac{(n-k)!(k-1)!}{x^{n+1}} \right] dx^n =$
 $(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \left[\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] dx^n$

17. 对 $y = e^x$ 求 d^2y , 考虑下面两种情形:

(1) 当 x 是自变量时;

(2) 当 x 是中间变量时.

解:

(1) $dy = e^x dx, d^2y = e^x dx^2$

(2) $dy = e^x dx, d^2y = e^x (dx^2 + d^2x)$

18. 若 u, v 为 x 的函数, 且可微分足够多次, 求高阶微分:

(1) $y = u(x) \cdot v(x)$, 求 d^2y

(2) $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, 求 d^2y

(3) $y = u^m(x) v^n(x)$ (m, n 为常数), 求 d^2y

(4) $y = a^{u(x)}$ ($a > 0$), 求 d^2y

(5) $y = \ln u(x)$, 求 d^3y

(6) $y = \sin(u(x))$, 求 d^3y

解:

(1) $dy = (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx,$
 $d^2y = [u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)]dx^2$

(2) $dy = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} dx,$
 $d^2y = \left[\frac{u''(x)}{v(x)} - \frac{u(x)v''(x) + 2u'(x)v'(x)}{v^2(x)} + \frac{2u(x)(v'(x))^2}{v^3(x)} \right] dx^2$

- (3) $dy = [mu^{m-1}(x)v^n(x)u'(x) + nu^m(x)v^{n-1}(x)v'(x)]dx,$
 $d^2y = [m(m-1)u^{m-2}(x)v^n(x)(u'(x))^2 + 2mnmu^{m-1}(x)v^{n-1}(x)u'(x)v'(x) + mu^{m-1}(x)v^n(x)u''(x) +$
 $n(n-1)u^m(x)v^{n-2}(x)(v'(x))^2 + nu^m(x)v^{n-1}(x)v''(x)]dx^2$
- (4) $dy = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)dx,$
 $d^2y = a^{u(x)} \ln a [\ln a (u'(x))^2 + u''(x)]dx^2$
- (5) $dy = \frac{u'(x)}{u(x)}dx, d^2y = \left[\frac{u''(x)}{u(x)} - \frac{(u'(x))^2}{u^2(x)} \right] dx^2,$
 $d^3y = \left[\frac{u'''(x)}{u(x)} - \frac{3u'(x)u''(x)}{u^2(x)} + \frac{2(u'(x))^3}{u^3(x)} \right] dx^3$
- (6) $dy = \cos(u(x))u'(x)dx, d^2y = [\cos(u(x))u''(x) - \sin(u(x))(u'(x))^2]dx^2,$
 $d^3y = [\cos(u(x))u'''(x) - 3\sin(u(x))u'(x)u''(x) - \cos(u(x))(u'(x))^3]dx^3.$

第五章 微分学的基本定理及其应用

§1. 中值定理

1. 在费尔马定理中, 若 x_0 为区间的端点, 试举例说明结论不成立.

解: 例: 函数 $y = x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有定义, 且可导, 在端点 $x_0 = 1$ 达到最大值, 即 $\forall x \in [-1, 1]$, 恒有 $f(x) \leq f(x_0) = 1$, 然而 $y'|_{x=1} = 1 \neq 0$.

2. 对于 $x_0 \in (a, b)$, 若 $f'(x_0) > 0$, 则存在它的左、右邻域 $O_-(x_0, \delta), O_+(x_0, \delta)$ 使当 $x \in O_-(x_0, \delta)$ 的时候 $f(x_0) > f(x)$, 当 $x \in O_+(x_0, \delta)$ 的时候 $f(x_0) < f(x)$.

证明: 因 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 故据极限性质, 得存在 x_0 的 $\delta (\delta > 0)$ 邻域 $O(x_0, \delta) \subset (a, b)$,

使当 $x \in O(x_0, \delta)$ 时, 有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 从而当 $x \in O_-(x_0, \delta)$ 即 $x - x_0 < 0$ 时, 有 $f(x_0) > f(x)$, 当 $x \in O_+(x_0, \delta)$ 即 $x - x_0 > 0$ 时, 有 $f(x_0) < f(x)$.

3. 证明: 若 $f'_+(x_0) > 0, f'_-(x_0) < 0$, 则存在 x_0 的一个邻域, 使得在此邻域内 $f(x) \geq f(x_0)$.

证明: 因 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 则由右极限性质, 得必存在 x_0 的 $\delta_1 (\delta_1 > 0)$ 右邻域 $O_+(x_0, \delta_1)$,

使当 $x \in O_+(x_0, \delta_1)$ 即 $0 < x - x_0 < \delta_1$ 时, 有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, 从而有 $f(x_0) < f(x)$;

又 $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, 则由左极限性质, 得必存在 x_0 的 $\delta_2 (\delta_2 > 0)$ 左邻域 $O_-(x_0, \delta_2)$, 使

当 $x \in O_-(x_0, \delta_2)$ 即 $0 < x_0 - x < \delta_2$ 时, 有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$, 从而有 $f(x_0) < f(x)$;

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 当 $x \in O(x_0, \delta)$ 时, 总有 $f(x) \geq f(x_0)$.

4. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $f(a) = f(b) = 0, f'(a) \cdot f'(b) > 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点.

证明: 因 $f'(a) \cdot f'(b) > 0$, 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) > 0$ ($f'(a) < 0, f'(b) < 0$ 情况同理可证)

又 $f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 则由右极限性质, 得必存在 a 的 $\delta_1 (\delta_1 > 0)$ 右邻域 $O_+(a, \delta_1)$, 使

当 $x \in O_+(a, \delta_1)$ 即 $0 < x - a < \delta_1$ 时, 有 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, 从而有 $f(a) < f(x)$;

取定 $x_1 \in O_+(a, \delta_1)$, 则有 $f(x_1) > f(a)$

又 $f(a) = 0$, 则 $f(x_1) > 0$

又 $f'(b) = f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$, 则由左极限性质, 得必存在 b 的 $\delta_2 (\delta_2 > 0)$ 左邻域 $O_-(b, \delta_2)$, 使

当 $x \in O_-(b, \delta_2)$ 即 $0 < b - x < \delta_2$ 时, 有 $\frac{f(x) - f(b)}{x - x_0} > 0$, 从而有 $f(b) > f(x)$;

取定 $x_2 \in O_-(b, \delta_2)$, 则有 $f(x_2) < f(b)$

又 $f(b) = 0$, 则 $f(x_2) < 0$

因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故在 $[x_1, x_2]$ 也连续, 又 $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$, 则由零点存在定理可知, 在 $[x_1, x_2]$ 内至少有一个零点,

又 $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内至少有一个零点.

同理, 当 $f'(a) < 0, f'(b) < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内至少有一个零点.

5. 由 $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x (0 < \theta < 1)$, 求函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$, 设

$$(1) f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(3) f(x) = e^x$$

解:

$$(1) f'(x) = 2ax + b, f'(x + \theta \Delta x) = 2a(x + \theta \Delta x) + b,$$

$$\text{则 } [2a(x + \theta \Delta x) + b] \Delta x = f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax \cdot \Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x = \left[2a \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right) + b \right] \Delta x, \text{ 于是 } \theta = \frac{1}{2}$$

$$(2) f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(x + \theta \Delta x) = -\frac{1}{(x + \theta \Delta x)^2},$$

$$\text{则 } -\frac{\Delta x}{(x + \theta \Delta x)^2} = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}, \text{ 从而 } \Delta x^2 \theta^2 + 2x \cdot \Delta x \theta = 0,$$

于是 $\theta = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + x\Delta x}}{\Delta x}$, 此处取正负号要视确保 $\theta \in (0, 1)$ 而定, 且应有 $\frac{\Delta x}{x} > -1 (x \neq 0)$ (由 $x^2 + x\Delta x > 0$, 则 $\frac{\Delta x}{x} > -1$)

$$(3) \quad f'(x) = e^x, f'(x + \theta\Delta x) = e^{x+\theta\Delta x}, \\ \text{则 } e^{x+\theta\Delta x}\Delta x = f(x + \Delta x) - f(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1), \text{ 从而 } e^{\theta\Delta x}\Delta x = e^{\Delta x} - 1, \text{ 于是 } \theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}, \text{ 可以验证 } \theta \in (0, 1)$$

6. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内连续, 在 (a, b) 可导, 利用函数

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

证明拉格朗日公式, 并叙述函数 $\Phi(x)$ 的几何意义.

$$\text{证明: 因 } \Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = (a-b)f(x) + (f(b)-f(a))x + bf(a) - af(b),$$

又 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内连续, 则由连续函数的四则运算法则, 知 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 连续;

又 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, 则由可导函数的四则运算法则, 知 $\Phi(x)$ 在 (a, b) 可导.

$$\text{又 } \Phi(a) = \begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0, \Phi(b) = \begin{vmatrix} b & f(b) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 则由洛尔定理, 得在 } (a, b) \text{ 内至少有一点 } \xi,$$

使 $\Phi'(\xi) = 0$.

$$\text{而 } \Phi'(x) = (a-b)f'(x) + f(b) - f(a), \text{ 则 } 0 = \Phi'(\xi) = (a-b)f'(\xi) + f(b) - f(a) \text{ 即 } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$\Phi(x) \text{ 的几何意义: 三角形面积公式 } S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \text{ 表示顶点坐标,}$$

则 $\Phi(x)$ 表示以 $A(x, f(x)), B(a, f(a)), C(b, f(b))$ 为顶点的三角形面积的两倍.

7. 试对下列函数写出拉格朗日公式 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, 并求 c .

$$(1) \quad f(x) = x^3, x \in [0, 1]$$

$$(2) \quad f(x) = \arctan x, x \in [0, 1]$$

解:

$$(1) \quad \text{因 } f'(x) = 3x^2, \text{ 则 } 3c^2(1-0) = 1^3 - 0^3 \text{ 即 } 3c^2 = 1, \text{ 又 } c \in (0, 1), \text{ 故 } c = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$(2) \quad \text{因 } f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ 则 } \frac{1}{1+c^2}(1-0) = \arctan 1 - \arctan 0 \text{ 即 } \frac{1}{1+c^2} = \frac{\pi}{4}, \text{ 又 } c \in (0, 1), \text{ 故 } c = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}.$$

8. 试对下列函数写出柯西公式 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, 并求 c .

$$(1) \quad f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(2) \quad f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}, x \in [1, 4]$$

解:

$$(1) \quad \text{因 } f'(x) = \cos x, g'(x) = -\sin x, \text{ 则 } \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ 即 } \frac{1-0}{0-1} = \frac{\cos c}{\sin c}, \text{ 亦即 } \cot c = 1, \text{ 又 } c \in$$

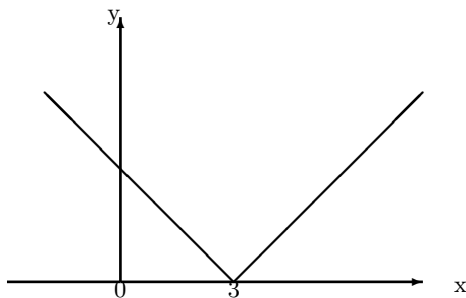
$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 故 } c = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \quad \text{因 } f'(x) = 2x, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ 则 } \frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ 即 } \frac{16-1}{2-1} = \frac{2c}{\frac{1}{2\sqrt{c}}}, \text{ 亦即 } 4c^{\frac{3}{2}} = 15, \text{ 又 } c \in (1, 4),$$

$$\text{故 } c = \left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

9. 试作函数 $y = |x - 1|$ 在区间 $[0, 3]$ 上的图形, 这里为什么没有平行于弦的切线, 拉格朗日定理中哪个条件不成立?

解: 函数在点 $x = 1$ 处不可导, 即其图形 ACB 为一折线, 此折线在 $C(0, 1)$ 点的切线不存在, 拉格朗日定理中的第二个条件即在 $(0, 3)$ 内可导这一条件不满足.



10. 利用拉格朗日公式证明不等式:

- (1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
- (2) 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $|x| \leq |\tan x|$ (等号只有在 $x = 0$ 时成立)
- (3) $n \cdot y^{n-1}(y - x) < x^n - y^n < n \cdot x^{n-1}(x - y)$ ($n > 1, x > y$)
- (4) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ($x > 0$)
- (5) 若 $x \neq 0, e^x > 1 + x$ (分 $x > 0, x < 0$ 两种情况证明)

证明:

- (1) 不妨设 $x > y, f(t) = \sin t$ 在 $[y, x]$ 上连续, 在 (y, x) 内可导, 故拉格朗日定理成立, 因而有 $\sin x - \sin y = \cos \xi(x - y)$ ($\xi \in (y, x)$), 则 $|\sin x - \sin y| = |\cos \xi|(x - y) = |\cos \xi||x - y| \leq |x - y|$ ($\forall (x, y) \in (-\infty, +\infty)$) 成立.
- (2) 不妨设 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(t) = \tan t$ 在 $[0, x]$ 上连续, 在 $(0, x)$ 内可导, 故拉格朗日定理成立, 因而有 $\tan x - \tan 0 = \sec^2 \xi(x - 0)$ ($\xi \in (0, x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), 则 $x = \cos^2 \xi \cdot \tan x < \tan x$.
同理可证, 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时, $-x < -\tan x$.
当 $x = 0$ 时, $|\tan x| = |x|$.
总之, 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $|x| \leq |\tan x|$ 成立.
当 $x = 0$ 时, 等号成立; 当 $0 < |\xi| < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时, $0 < \cos^2 \xi < 1$, 故只能成立 $|x| < |\tan x|$.
- (3) $f(t) = t^n$ 在 $[y, x]$ 上连续, 在 (y, x) 内可导, 故拉格朗日定理成立, 因而有 $x^n - y^n = n \cdot \xi^{n-1}(x - y)$ ($0 < y < \xi < x$),
又 $n > 1$, 则 $y^{n-1} < \xi^{n-1} < x^{n-1}$, 故 $n \cdot y^{n-1}(x - y) < n \cdot \xi^{n-1}(x - y) < n \cdot x^{n-1}(x - y)$ 即 $n \cdot y^{n-1}(x - y) < x^n - y^n < n \cdot x^{n-1}(x - y)$ 成立.
- (4) $f(t) = \ln(1 + t)$ 在 $[0, x]$ 上连续, 在 $(0, x)$ 内可导, 故拉格朗日定理成立, 因而有 $\ln(1 + x) = \ln(1 + x) - \ln 1 = \frac{1}{1 + \xi}(1 + x - 1) = \frac{x}{1 + \xi}$ ($0 < \xi < x$), 又 $1 < 1 + \xi < 1 + x$, 则 $\frac{1}{1 + x} < \frac{1}{1 + \xi} < 1$, 从而有 $\frac{x}{1 + x} < \frac{x}{1 + \xi} < x$ ($x > 0$) 即 $\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$ ($x > 0$) 成立.
- (5) $f(t) = e^t$ 显然满足拉格朗日定理条件.
当 $x > 0$ 时, 对 $f(t) = e^t$ 在 $[0, x]$ 应用拉格朗日公式, 有 $e^x - e^0 = e^\xi(x - 0)$ 即 $e^x - 1 = xe^\xi$ ($0 < \xi < x$),
因 $0 < \xi < x$, 则 $e^\xi > 1$, 从而 $e^x - 1 = xe^\xi > x$ 即 $e^x > 1 + x$;
当 $x < 0$ 时, 对 $f(t) = e^t$ 在 $[x, 0]$ 应用拉格朗日公式, 有 $e^0 - e^x = e^\xi(0 - x)$ 即 $1 - e^x = -xe^\xi$ ($x < \xi < 0$),
因 $x < \xi < 0$, 则 $0 < e^\xi < 1$, 从而 $1 - e^x = -xe^\xi < -x$ 即 $e^x > 1 + x$.
总之, 若 $x \neq 0$, 总有 $e^x > 1 + x$.

11. 若 $f'(x) \equiv k$, 试证 $f(x) = kx + b$.

证明: 考虑 $F(x) = f(x) - kx$

由于 $F'(x) = f'(x) - k \equiv 0$, 据拉格朗日定理的推论1知, $F(x) = f(x) - kx = b$ ($\forall x \in (-\infty, +\infty)$), 故 $f(x) = kx + b$.

12. 证明方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在 $[0, 1]$ 内不含有两个不同的根.

证明: 令 $f(x) = x^3 - 3x + c$

用反证法. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内有两个不同根 $0 < x_1 < x_2 < 1$.

此时 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 据洛尔定理, 必存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 即 $3\xi^2 - 3 = 0$, 解得 $\xi = \pm 1$, 这与 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$ 矛盾.

故假设不成立. 即方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在 $[0, 1]$ 内不含有两个不同的根.

13. 若在 $[a, b]$ 上 $|f'(x)| \geq |\varphi'(x)|$, $f'(x) \neq 0$, 则 $|\Delta f(x)| \geq |\Delta \varphi(x)|$. 并证在 $\left[\frac{1}{2}, x\right]$ 上 $\Delta \arctan x \leq \Delta \ln(1+x^2)$, 由

此证明在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上以下的不等式成立: $\arctan x - \ln(1+x^2) \geq \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

证明: 因在 $[a, b]$ 上 $|f'(x)| \geq |\varphi'(x)|$, $f'(x) \neq 0$, 故 $f(x), \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 从而在 $[a, b]$ 上连续.

任取 $x, x+\Delta x \in [a, b]$, $\Delta x > 0$, 则 $f(x), \varphi(x)$ 在 $[x, x+\Delta x]$ 上连续可导且 $f'(x) \neq 0$.

由柯西定理, 得必存在 $\xi \in (x, x+\Delta x)$, 使 $\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{f(x+\Delta x) - f(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}$ 即 $\frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta f(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}$, 于是 $\left| \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta f(x)} \right| = \left| \frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)} \right| \leq 1$ 即 $|\Delta f(x)| \geq |\Delta \varphi(x)|$.

因 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\ln(1+x^2))' = \frac{2x}{1+x^2}$, 且在 $\left[\frac{1}{2}, x\right]$ 上, 有 $2x > 1$, 则 $(\ln(1+x^2))' = \frac{2x}{1+x^2} >$

$\frac{1}{1+x^2} = (\arctan x)' > 0$, 取 $f(x) = \ln(1+x^2)$, $\varphi(x) = \arctan x$, 则由上面的结论知, 在 $\left[\frac{1}{2}, x\right]$ 上, $\Delta \arctan x = |\Delta \arctan x| \leq |\Delta \ln(1+x^2)| = \Delta \ln(1+x^2)$.

在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上任取一个 x , 在 $[x, 1]$ 上有 $\arctan 1 - \arctan x = \Delta \arctan x \leq \Delta \ln(1+x^2) = \ln(1+1^2) - \ln(1+x^2)$ 即 $\frac{\pi}{4} - \arctan x \leq \ln 2 - \ln(1+x^2)$, 从而 $\arctan x - \ln(1+x^2) \geq \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

14. 若 $f(x)$ 在区间 X (由穷或无穷) 中具有有界的导数, 即 $|f'(x)| \leq M$, 则 $f(x)$ 在 X 中一致连续.

证明: 因若 $f(x)$ 在区间 X 上可导, 从而也在 X 上连续, 且 $|f'(x)| \leq M, M > 0$

任取 $x_1, x_2 \in X$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续可导.

由拉格朗日中值定理, 得 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, 则 $|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)|(x_2 - x_1) \leq M(x_2 - x_1)$, 于是对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $|x_2 - x_1| < \delta = \frac{\varepsilon}{M}$ 时, $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M(x_2 - x_1) < \varepsilon$ 成立, 于是 $f(x)$ 在 X 中一致连续.

§2. 泰勒公式

1. 当
- $|x|$
- 充分小时, 推导下列近似公式:

$$\tan x \approx x; \cos x \cdot \sin x \approx x; \sqrt[n]{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{n}; e^x \approx 1 + x.$$

证明:

- (1) 令 $f(x) = \tan x$, 因 $|x|$ 充分小, 用近似公式时可取 $x_0 = 0$, 于是 $f(x_0) = 0, f'(0) = \sec^2 x|_{x=0} = 1$, 从而 $f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$ 即为 $\tan x \approx x$.
- (2) 令 $f(x) = \cos x \cdot \sin x$, 因 $|x|$ 充分小, 用近似公式时可取 $x_0 = 0$, 于是 $f(x_0) = 0, f'(0) = (-\sin^2 x + \cos^2 x)|_{x=0} = 1$, 从而 $f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$ 即为 $\cos x \cdot \sin x \approx x$.
- (3) 令 $f(x) = \sqrt[n]{1 \pm x}$, 因 $|x|$ 充分小, 用近似公式时可取 $x_0 = 0$, 于是 $f(x_0) = 1, f'(0) = \pm \frac{1}{n}(1 \pm x)^{\frac{1}{n}-1} \Big|_{x=0} = \pm \frac{1}{n}$, 从而 $f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$ 即为 $\sqrt[n]{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{n}$.
- (4) 令 $f(x) = e^x$, 因 $|x|$ 充分小, 用近似公式时可取 $x_0 = 0$, 于是 $f(x_0) = 1, f'(0) = e^x|_{x=0} = 1$, 从而 $f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0)$ 即为 $e^x \approx 1 + x$.

2. 求
- $\tan 4^\circ$
- 的近似值.

解: 由上题知, $\tan x \approx x$, 故 $\tan 4^\circ = \tan \frac{\pi}{45} \approx \frac{\pi}{45} \approx 0.0698$.

3. 求
- $\sqrt{37}$
- 的近似值.

解: 因 $\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = 6\sqrt{1+\frac{1}{36}}$, 故据第1题, 得 $\sqrt{37} = 6\sqrt{1+\frac{1}{36}} \approx 6\left(1+\frac{1}{72}\right) \approx 6.083$.

4. 图5-5所示为一凸透镜, 设透镜凸面半径为
- R
- , 口径为
- $2H$
- ,
- H
- 远比
- R
- 小.

- (1) 证明: 透镜厚度 $D \approx \frac{H^2}{2R}$;
- (2) 设 $2H = 50$ 毫米, $R = 100$ 毫米, 求 D .

解:

$$(1) \text{ 因 } D = R - \sqrt{R^2 - H^2}, \text{ 则 } D = R \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{R}\right)^2} \right].$$

又 H 远比 R 小, 故 $\left(\frac{H}{R}\right)^2$ 充分小, 则 $\sqrt{1 - \left(\frac{H}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{R}\right)^2 = 1 - \frac{H^2}{2R^2}$, 从而 $D \approx R \left[1 - \left(1 - \frac{H^2}{2R^2}\right) \right] = \frac{H^2}{2R}$.

$$(2) D = R - \sqrt{R^2 - H^2} = 100 - \sqrt{100^2 - 25^2} \approx 3.175; D \approx \frac{H^2}{2R} = \frac{25^2}{200} = 3.125$$

5. 测得圆钢直径为30.12毫米, 已知其误差为0.05毫米. 求圆钢截面积的绝对误差和相对误差.

解: 因圆面积 $S = \frac{\pi}{4}D^2$, 则利用导数估计误差, S 有绝对误差 $|\Delta S| \approx \left| \frac{\pi}{2}D\Delta D \right| = \frac{\pi}{2} \times 30.12 \times 0.05 \approx$

$$2.3656(\text{毫米}^2); \text{ 相对误差为 } \left| \frac{\Delta S}{S} \right| \approx \left| \frac{\frac{\pi}{2}D\Delta D}{\frac{\pi}{4}D^2} \right| = \left| \frac{2\Delta D}{D} \right| \approx 0.33\%.$$

6. 测得金属球体的直径
- $D = 10.12$
- 毫米, 误差
- $\Delta D = 0.05$
- 毫米. 计算球体的体积及其绝对误差, 相对误差.

解: 因球体积 $V = \frac{\pi}{6}D^3$, 故球体体积 $V = \frac{\pi}{6}(10.12)^3 \approx 542.675(\text{毫米}^3)$;利用导数误差估计, V 有绝对误差 $|\Delta V| \approx \left| \frac{\pi}{2}D^2\Delta D \right| = \frac{\pi}{2} \times 10.12^2 \times 0.05 \approx 8.044(\text{毫米}^3)$;

$$\text{相对误差 } \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \left| \frac{\frac{\pi}{2}D^2\Delta D}{\frac{\pi}{6}D^3} \right| = \left| \frac{3\Delta D}{D} \right| \approx 1.48\%.$$

7. 求下列函数在
- $x = 0$
- 点的泰勒展开式:

- (1) $f(x) = \sqrt{1+x}$
- (2) $f(x) = \frac{1}{1+x}$
- (3) $f(x) = e^{\sin x}$ (展开直到含有 x^3 的项)

$$(4) f(x) = \cos x$$

$$(5) f(x) = \ln \cos x (\text{展开直到含有 } x^6 \text{ 的项})$$

$$(6) f(x) = \ln(1+x)$$

解:

$$(1) f(x) = \sqrt{1+x}, f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \dots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n} (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

$$\text{把 } x=0 \text{ 依次代入上列各式, 有 } f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}, f''(0)=-\frac{1}{4}, \dots, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n}$$

$$\text{于是得函数 } f(x) = \sqrt{1+x} \text{ 在 } x=0 \text{ 的泰勒展开式: } f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n}}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$o(x^n) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{n! \cdot 2^n} + o(x^n)$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, f'(x) = -(1+x)^{-2}, f''(x) = 2(1+x)^{-3}, \dots, f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! (1+x)^{-(n+1)}$$

$$\text{把 } x=0 \text{ 依次代入上列各式, 有 } f(0)=1, f'(0)=-1, f''(0)=2, \dots, f^{(n)}(0)=(-1)^n \cdot n!$$

$$\text{于是得函数 } f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ 在 } x=0 \text{ 的泰勒展开式: } f(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

(3) 注意 $\sin x$ 为 x 的等价无穷小.

$$\text{则 } e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2!} \sin^2 x + \frac{1}{3!} \sin^3 x + o_1(\sin^3 x) = 1 + (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) + \frac{1}{2}(x + o(x^2))^2 + \frac{1}{6}(x + o(x^2))^3 + o_1(\sin^3 x)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

$$(4) f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, \dots, f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k}{2}\pi\right)$$

$$\text{把 } x=0 \text{ 依次代入上列各式, 有 } f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=-1, \dots, f^{(2m)}(0)=(-1)^m, f^{(2m+1)}(0)=0, \dots (m \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\text{于是得函数 } f(x) = \cos x \text{ 在 } x=0 \text{ 的泰勒展开式: } f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$(5) f(x) = \ln \cos x = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^6 x) \right) =$$

$$-\frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o_1(x^5) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o_2(x^3) \right)^4 + \frac{1}{3} (x + o_3(x^2))^6 + o(x^6) \right] = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$

$$(6) f(x) = \ln(1+x), f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, f''(x) = -(1+x)^{-2}, \dots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (1+x)^{-n}$$

$$\text{把 } x=0 \text{ 依次代入上列各式, 有 } f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-1, \dots, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$\text{于是得函数 } f(x) = \ln(1+x) \text{ 在 } x=0 \text{ 的泰勒展开式: } f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

8. 求函数 $\ln x$ 在 $x=1$ 的泰勒展开式.

$$\text{解: 由上题结论, 得 } \ln x = \ln(1+x-1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + o((x-1)^n).$$

9. 求函数 \sqrt{x} 在 $x=1$ 的泰勒展开式 (展开到 x^3 项).

$$\text{解: } f(x) = \sqrt{x}, f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{把 } x=1 \text{ 依次代入上列各式, 有 } f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=-\frac{1}{4}, f'''(1)=\frac{3}{8}$$

$$\text{于是得函数 } f(x) = \sqrt{x} \text{ 在 } x=1 \text{ 的泰勒展开式: } f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

10. 将多项式 $P_3(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ 表成 $x+1$ 的正整数幂的多项式.

$$\text{解: 因 } P_3(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3, P'_3(x) = 3 + 10x - 6x^2, P''_3(x) = 10 - 12x, P'''_3(x) = -12, P_3^{(4)} = \dots = P_3^{(n)} = 0$$

$$\text{把 } x=-1 \text{ 依次代入上列各式, 有 } P_3(-1)=5, P'_3(-1)=-13, P''_3(-1)=22, P'''_3(-1)=-12, P_3^{(4)} = \dots = P_3^{(n)} = 0$$

$$\text{于是得 } P_3(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3.$$

11. 利用泰勒公式计算 $\sqrt[3]{7}$ 至四位小数.

$$\text{解: } \sqrt[3]{7} = 2 \left(1 - \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 2 \left[1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(-\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(-\frac{1}{8} \right)^3 \right] \approx 1.9130$$

$$\Delta < 2 \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{3} \left(\frac{1}{8} \right)^4 \approx 2.01 \times 10^{-5}.$$

12. 利用泰勒公式求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{12}x^4}{x^6}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{2 \ln(1 + x^2)}$$

解:

$$(1) \text{ 利用泰勒公式, 有 } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6), e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + o(x^6),$$

$$\text{则 } \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{12}x^4 = \frac{7}{360}x^6 + o(x^6), \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{12}x^4}{x^6} = \frac{7}{360}.$$

$$(2) \text{ 利用泰勒公式, 有 } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \text{ 则 } e^x \sin x - x(1+x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) \text{ 利用泰勒公式, 有 } \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ 则 } x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \text{ 利用泰勒公式, 有 } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \text{ 则 } \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)} =$$

$$\frac{-\frac{x}{6} + o(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$$

$$(5) \text{ 因 } \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} - x \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{利用泰勒公式, 有 } \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} = 1 + \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} = 1 - \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\text{则 } \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right), \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) = \frac{1}{3}.$$

$$(6) \text{ 利用泰勒公式, 有 } \cos(\sin x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{4!} + o(\sin^4 x), \ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

$$\text{则 } \frac{1 - \cos(\sin x)}{2 \ln(1 + x^2)} = \frac{\sin^2 x \left[1 - \frac{1}{12} \sin^2 x + o(\sin^2 x) \right]}{4x^2 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)}, \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{2 \ln(1 + x^2)} = \frac{1}{4}$$

13. 决定 α, β , 使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{16x^4 - 8x^3 + 10x - 7} - \alpha x - \beta) = 0$.

解: 因 $\sqrt[4]{16x^4 - 8x^3 + 10x - 7} = 2x \cdot \sqrt[4]{1 + \left(-\frac{1}{2x} + \frac{5}{8x^3} - \frac{7}{16x^4}\right)} = 2x - \frac{1}{4} + \frac{5}{16x^2} - \frac{7}{32x^3} + \varepsilon$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0$)

故 $\sqrt[4]{16x^4 - 8x^3 + 10x - 7} - \alpha x - \beta = (2 - \alpha)x - \left(\frac{1}{4} + \beta\right) + \frac{5}{16x^2} - \frac{7}{32x^3} + \varepsilon$

由此可知, 欲使 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{16x^4 - 8x^3 + 10x - 7} - \alpha x - \beta) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2 - \alpha)x - \left(\frac{1}{4} + \beta\right) + \frac{5}{16x^2} - \frac{7}{32x^3} + \varepsilon \right] = 0$, 必须 $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{4}$.

14. 决定 A , 使极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{Q(x)} - A}{x}$ 存在, 其中 $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, a_0 \neq 0, m$ 为自然数.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{Q(x)} - A}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m} - A}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{a_0} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{a_1}{a_0}x + \cdots + \frac{a_m}{a_0}x^m} - A \right)}{x} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{a_0} \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_0}x + \cdots + \frac{a_m}{a_0}x^m \right) + o(x) - A \right)}{x}$ 存在 $\iff \sqrt[n]{a_0} - A = 0$ 即 $A = \sqrt[n]{a_0}$, 此时原式 $= \frac{a_1 \cdot \sqrt[n]{a_0}}{na_0}$.

§3. 函数的升降、凸性与极值

1. 证明下列函数的单调性:

$$(1) y = x - \sin x$$

$$(2) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (x > 0)$$

证明:

(1) 因 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续可导, 故 $f'(x) = 1 - \cos x$; 又 $-1 \leq \cos x \leq 1$, 故 $f'(x) \geq 0$, 于是 $y = x - \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调上升.

$$(2) \text{ 因 } y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \text{ 故 } y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x} \right]$$

又 $x > 0$, 故 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$, 则只需判断方括号中式子的符号.

令 $f(x) = \ln x$ 在 $[x, 1+x]$ (对 $\forall x > 0$) 上应用拉格朗日定理, 有 $\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi}(1+x-x) = \frac{1}{\xi} (x < \xi < 1+x)$, 于是 $\frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+x}$, 故 $\ln(1+x) - \ln x = \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+x}$ 即 $\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x} > 0 (\forall x > 0)$,

由此可知 $y' > 0$, 从而 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加.

2. 单调函数的导数是否必为单调?

解: 不一定.

例: $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调上升, 但 $y' = 3x^2$ 却不单调.

3. 证明下列不等式:

$$(1) x > \sin x > \frac{2}{\pi}x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(2) x - \frac{x^3}{6} > \sin x > x \quad (x < 0)$$

$$(3) x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0)$$

$$(4) \tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(5) 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad (x > 1)$$

$$(6) \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1, p > 1)$$

证明:

(1) 设 $f(x) = x - \sin x$, 由第1题, 知 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调上升, 又 $f(0) = 0$, 故对 $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 有 $f(x) > f(0) = 0$ 即 $x - \sin x > 0$, 从而 $x > \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$;

$$\text{设 } g(x) = \frac{\sin x}{x}, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}, g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

注意到 $u(x) = x \cos x - \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $u(0) = 0$, 由于 $u'(x) = -x \sin x < 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, 故

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $u(x)$ 单调下降即 $u(x) < u(0) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, 由此得, $g'(x) < 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$,

故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调下降, 于是 $g(x) > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ 即 $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}, x \in \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$,

从而 $x > \sin x > \frac{2}{\pi}x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(2) 设 $f(x) = x - \sin x$, 由第1题, 知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调上升, 又 $f(0) = 0$, 故对 $\forall x \in (-\infty, 0)$, 有 $f(x) < f(0) = 0$ 即 $x - \sin x > 0$, 从而 $x < \sin x \quad (x < 0)$;

$$\text{设 } g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x, g(0) = 0, g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

再设 $h(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \quad (x < 0)$ 且 $h(0) = 0$, 由于 $h'(x) = -x + \sin x > 0$, 故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h(x)$ 单

调上升即 $h(x) < h(0) = 0 \quad (x < 0)$, 由此得, $g'(x) < 0 \quad (x < 0)$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调下降, 于

是 $g(x) > g(0) = 0$ 即 $x - \frac{x^3}{6} - \sin x > 0 \quad (x < 0)$, 则 $x - \frac{x^3}{6} > \sin x$, 从而 $x - \frac{x^3}{6} > \sin x > x \quad (x < 0)$

- (3) 设 $f(x) = \ln(1+x) - x$, $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ ($x > 0$), 故 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$ ($x > 0$), 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调下降, 又 $f(0) = 0$, 故对 $\forall x > 0$, 有 $f(x) < f(0) = 0$ 即 $\ln(1+x) < x$ ($x > 0$);
 $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$ ($x > 0$)
 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调上升, 又 $g(0) = 0$, 于是 $g(x) > g(0) = 0$ 即 $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ ($x > 0$), 从而 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ ($x > 0$)
- (4) 设 $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), 故 $f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)$, 又因 $(\tan x - x)' = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x \leq 0$ ($\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$), 则 $\tan x - x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调上升, 故对 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 有 $\tan x - x > 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$);
 于是 $f'(x) = (\tan x + x)(\tan x - x) > 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), 由此可知, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调上升, 又 $f(0) = 0$, 于是 $f(x) > f(0) = 0$ 即 $\tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), 从而 $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)
- (5) 设 $f(x) = 2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x}$ ($x > 1$), 故 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1}{x^2} > 0$ ($x > 1$), 于是 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调上升, 又 $f(1) = 0$, 于是 $f(x) > f(1) = 0$ 即 $2\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x} > 0$ ($x > 1$), 从而 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$ ($0 \leq x \leq 1, p > 1$)
- (6) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$ ($0 \leq x \leq 1, p > 1$), 故 $f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}$, 令 $f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 比较 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{p-1}}$, 由此得 $\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \frac{1}{2^{p-1}}, \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 1$, 从而 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$ ($0 \leq x \leq 1, p > 1$)

4. 确定下列函数的上升、下降区间:

- (1) $y = x^3 - 6x$
- (2) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
- (3) $y = x^4 - 2x^3$
- (4) $y = x + \sin x$
- (5) $y = \frac{2x}{1+x^2}$
- (6) $y = 2x^2 - \sin x$
- (7) $y = x^n e^{-x}$ ($n > 0, x \leq 0$)

解:

- (1) 因 $y' = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$, 得驻点 $x = \pm\sqrt{2}$
 当 $x < -\sqrt{2}$ 或 $x > \sqrt{2}$ 时, $y' > 0$, 函数严格上升; 当 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时, $y' < 0$, 函数严格下降.
 从而在区间 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ 上函数严格上升; 在区间 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 上函数严格下降.
- (2) 因 $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$, 得驻点 $x = -1, x = 2$
 当 $x < -1$ 或 $x > 2$ 时, $y' > 0$, 函数严格上升; 当 $-1 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 函数严格下降.
 从而在区间 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ 上函数严格上升; 在区间 $(-1, 2)$ 上函数严格下降.
- (3) 因 $y' = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$, 得驻点 $x = 0, x = \frac{3}{2}$
 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $y' > 0$, 函数严格上升; 当 $x < \frac{3}{2}$ 时, $y' \leq 0$ 且仅在 $x = 0$ 处 $y' = 0$, 函数严格下降.
 从而在区间 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上函数严格上升; 在区间 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 上函数严格下降.
- (4) 因 $y' = 1 + \cos x \leq 0$, 故函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上函数上升.
- (5) 因 $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, 得驻点 $x = \pm 1$
 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 函数严格下降; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数严格上升.
 从而在区间 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 上函数严格下降; 在区间 $(-1, 1)$ 上函数严格上升.

- (6) 因 $y' = 4x - \cos x$, $y'' = 4 + \sin x > 0$, 则 y' 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调上升.
 又 $y'(0) = -1$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 2\pi$, 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有一个点 x_0 满足 $y'(x_0) = 0$ 即 $4x_0 = \cos x_0$.
 当 $x > x_0$ 时, $y' > 0$, 函数严格上升; 当 $x < x_0$ 时, $y' < 0$, 函数严格下降.
 从而在区间 $(x_0, +\infty)$ 上函数严格上升; 在区间 $(-\infty, x_0)$ 上函数严格下降.
- (7) 因 $y' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$
 因 $n > 0, x > 0$, 故 $x^{n-1} > 0, e^{-x} > 0$, 则 $x^{n-1}e^{-x} > 0$
 当 $0 < x < n$ 时, $y' > 0$, 函数严格上升; 当 $x > n$ 时, $y' < 0$, 函数严格下降.
 从而在区间 $(0, n)$ 上函数严格上升; 在区间 $(n, +\infty)$ 上函数严格下降.

5. 求下列函数的极值:

- (1) $y = x - \ln(1+x)$
 (2) $y = \sqrt{x} \ln x$
 (3) $y = x + \frac{1}{x}$
 (4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$
 (5) $y = \cos x + \cosh x$

解:

- (1) 因 $y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, $y'' = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$
 此函数的定义域为 $(-1, +\infty)$, 则驻点为 $x = 0$, 函数只能在这点有极值, 于是 $x = 0$ 是函数的极小点, 极小值为 $y = 0$.
- (2) 因 $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$, $y'' = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \ln x = -\frac{\ln x}{2^{\frac{3}{2}}}$
 驻点为 $x = e^{-2}$, 函数只能在这点有极值, 又 $y''|_{x=e^{-2}} > 0$, 于是 $x = e^{-2}$ 是函数的极小点, 极小值为 $y = -\frac{2}{e}$.
- (3) 因 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y'' = -\frac{1}{x^3} > 0$
 此函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 则驻点为 $x = \pm 1$, 函数只能在这两点有极值, 又 $y''|_{x=1} = 1 > 0$, $y''|_{x=-1} = -1 < 0$, 于是 $x = 1$ 是函数的极小点, 极小值为 $y = 2$; $x = -1$ 是函数的极大点, 极大值为 $y = 2$.
- (4) 因 $y' = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x) = \frac{3}{2} \sin 2x (\sin x - \cos x)$, $y'' = 3 \cos 2x (\sin x - \cos x) + \frac{3}{2} \sin 2x (\cos x + \sin x)$
 驻点为 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in Z$), 又 $y''|_{x=2k\pi} = -3 < 0$, $y''|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} > 0$, $y''|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}} = -3 < 0$, $y''|_{x=2k\pi+\pi} = 3 > 0$, $y''|_{x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\sqrt{2} < 0$, $y''|_{x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}} = 3 > 0$,
 于是 $x = 2k\pi$ 时, 有极大值 $y = 1$; $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, 有极大值 $y = 1$; $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$ 时, 有极大值 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, 有极小值 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = 2k\pi + \pi$ 时, 有极小值 $y = -1$; $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 时, 有极小值 $y = -1$.
- (5) 因 $y' = 1 - \sin x + \sinh x$, 不易求驻点, 但由 $-\sin x + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$ 易见 $x = 0$ 是一个驻点
 由 $-\sin x, \sinh x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的严格单调性, 知这驻点是唯一的.
 $y'' = -\cos x + \cosh x$, $y''(0) = 0$; $y''' = \sin x + \sinh x$, $y'''(0) = 0$; $y^{(4)} = \cos x + \cosh x$, $y^{(4)}(0) = 2 > 0$,
 于是 $x = 0$ 是函数的极小点, 极小值为 $y = 2$.

6. 若 $f(x)$ 在点 x_0 具有直到 n 阶连续导数, 并且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 那么当 n 为奇数时, $f(x_0)$ 非极值; 当 n 为偶数而 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值; 当 n 为偶数而 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值.

证明: 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点用泰勒公式展开: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$

因 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 故 $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, $o((x-x_0)^n) \rightarrow 0$, 故当 x 充分靠近 x_0 时, 即当 $|x-x_0|$ 充分小时, $f(x)-f(x_0)$ 与 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 有相同的符号
若 $f^{(n)}(x_0) > 0$,

(1) n 为奇数时, 若 $x > x_0$, 则 $(x-x_0)^n > 0$, 于是 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n > 0$, 从而 $f(x)-f(x_0) > 0$ 即 $f(x) > f(x_0)$;

若 $x < x_0$, 则 $(x-x_0)^n < 0$, 于是 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n < 0$, 从而 $f(x)-f(x_0) < 0$ 即 $f(x) < f(x_0)$
因此 $f(x_0)$ 不是极值.

(2) n 为偶数时, 只要 x 充分接近 x_0 , 不论 $x > x_0$, 还是 $x < x_0$, 都有 $(x-x_0)^n > 0$, 此时 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n > 0$ ($x \neq x_0$), 从而 $f(x)-f(x_0) > 0$, 即在 x_0 充分小某邻域内, 恒有 $f(x) > f(x_0)$, 这表明 $f(x_0)$ 是极小值.

若 $f^{(n)}(x_0) < 0$,

(1) n 为奇数时, 若 $x > x_0$, 则 $(x-x_0)^n > 0$, 于是 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n < 0$, 从而 $f(x)-f(x_0) < 0$ 即 $f(x) < f(x_0)$;

若 $x < x_0$, 则 $(x-x_0)^n < 0$, 于是 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n > 0$, 从而 $f(x)-f(x_0) > 0$ 即 $f(x) > f(x_0)$
因此 $f(x_0)$ 不是极值.

(2) n 为偶数时, 只要 x 充分接近 x_0 , 不论 $x > x_0$, 还是 $x < x_0$, 都有 $(x-x_0)^n > 0$, 此时 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n < 0$ ($x \neq x_0$), 从而 $f(x)-f(x_0) < 0$, 即在 x_0 充分小某邻域内, 恒有 $f(x) < f(x_0)$, 这表明 $f(x_0)$ 是极大值.

7. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值:

(1) $y = |x^2 - 3x + 2|, [-10, 10]$

(2) $y = e^{|x-3|}, [-5, 5]$

解:

$$(1) y = \begin{cases} (x-2)(x-1), & x \leq 1 \\ -(x-2)(x-2), & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)(x-1), & x > 2 \end{cases},$$

$$\text{求导, 得 } y' = \begin{cases} 2x-3, & x < 1 \\ \text{不存在}, & x = 1 \\ -2x+3, & -1 < x < 2 \\ \text{不存在}, & x = 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}, \text{ 则驻点 } x = \frac{3}{2}, \text{ 导数不存在的点 } x = 1, x = 2$$

又 $y(-10) = 132, y(1) = 0, y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}, y(2) = 0, y(10) = 72$, 故函数的最大值是 132, 最小值是 0.

$$(2) y = \begin{cases} e^{x-3}, & x \geq 3 \\ e^{3-x}, & x < 3 \end{cases}, \text{ 求导, 得 } y' = \begin{cases} e^{x-3}, & x > 3 \\ \text{不存在}, & x = 3 \\ -e^{3-x}, & x < 3 \end{cases}, \text{ 显然无驻点}$$

又 $y(-5) = e^8, y(3) = 1, y(5) = e^2$, 故函数的最大值为 e^8 , 最小值为 1.

8. 铁路上 AB 段的距离为 100 公里, 工厂 C 与 A 相距 40 公里, AC 垂直于 AB . 今要在 AB 中间一点 D 向工厂 C 修一条公路 (图 5-21), 使从原料供应站 B 运货到工厂 C 所用运费最省. 问 D 点应该设在何处? 已知每一公里的铁路运费与公路运费之比是 3:5.

解: 设 $|AD| = x$ 公里, 则 $|DB| = 100 - x$ 公里; 每公里铁路运费为 $3t$ 元, 则每公里公路运费为 $5t$ 元, 总运费为 yt 元

则 $yt = \sqrt{x^2 + 1600}(5t) + (100 - x)(3t)$ 即 $y = 5\sqrt{x^2 + 1600} + 3(100 - x)$, 于是 $y' = \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 1600}}{\sqrt{x^2 + 1600}}, y'' = \frac{8000}{(x^2 + 1600)^{\frac{3}{2}}} > 0$, 驻点为 $x = 30$, 且 $x = 30$ 为极小点, 故 D 点应设在距 A 30 公里处.

9. 把一根圆木锯成矩形木条. 问矩形的长和宽取多大时, 截面积最大?

解: 设圆木截面半径为 R , 矩形的长、宽分别为 x, y , 则 $\sqrt{x^2 + y^2} = 2R$, 于是 $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, 从而 $S =$

$$xy = x\sqrt{4R^2 - x^2}$$

则 $S' = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}, S'' = \frac{2x^3 - 12R^2x}{(4R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 驻点为 $x = \sqrt{2}R$, 此时 $S'' < 0$, 则 $x = \sqrt{2}R$ 为极大点, 此时 $x = y = \sqrt{2}R$, 故矩形的长、宽均取 $\sqrt{2}R$ 时, 截面积最大.

10. 设 $S = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$. 问 x 多大时, S 最小?

解: $S' = 2[nx - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)], S'' = 2n > 0$, 驻点为 $x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 且 x 为极小点, 即当 $x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 时, S 最小.

11. 做一个圆柱形锅炉, 已知其容积为 V , 两端面材料的每单位面积价格为 a 元, 侧面材料的每单位价格为 b 元, 问锅炉的直径和高的比等于多少时, 造价最省?

解: 设此圆柱形锅炉的直径为 D , 高为 H , 则 $V = \frac{1}{4}\pi D^2 H$, 于是 $H = \frac{4V}{\pi D^2}$

造价 $G = 2a\left(\frac{\pi}{4}D^2\right) + b\pi DH = \frac{\pi}{2}aD^2 + b\frac{4V}{D}$, 则 $G' = \pi aD - \frac{4bV}{D^2}$, 驻点为 $D = \sqrt[3]{\frac{4bV}{a\pi}}$. 当 $D < \sqrt[3]{\frac{4bV}{a\pi}}$ 时, $G' <$

0; 当 $D > \sqrt[3]{\frac{4bV}{a\pi}}$ 时, $G' > 0$, 则 $D = \sqrt[3]{\frac{4bV}{a\pi}}$ 是唯一极小点, 从而是最小点.

于是 $\frac{D}{H} = \frac{D}{\frac{4V}{\pi D^2}} = \frac{\pi D^3}{4V} = \frac{b}{a}$ 即当锅炉的直径与高的比为 $\frac{b}{a}$ 时, 造价最省.

12. 用一块半径为 R 的圆形铁皮, 剪去一块圆心角为 α 的圆扇形做成一个漏斗. 问 α 为多大时, 漏斗的容积最大?

解: 由题设知, 余下部分的圆心角为 $x = 2\pi - \alpha$, 漏斗底周长为 $Rx = R(2\pi - \alpha)$, 底半径为 $\frac{Rx}{2\pi}$, 其高

为 $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} (x > 0)$, 于是漏斗的容积为 $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} =$

$$\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2} (x > 0)$$

按题设, 只需考虑当 x 为何值时, 函数 $f(x) = x^2(4\pi^2 - x^2)$ 的值最大.

$f'(x) = 16\pi^2x^3 - 6x^5, f''(x) = 48\pi^2x^2 - 30x^4$, 驻点为 $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, 且 $f''\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 0$, 故 $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ 为

极大点, 因而剪去的圆心角应为 $\alpha = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, 所做漏斗的容积最大.

13. 底为 a , 高为 h 的三角形, 试求其内接最大矩形的面积.

解: 设其内接矩形的长、宽分别为 b, c

则由已知, 得 $\frac{b}{a} = \frac{h-c}{h}$ 即 $b = \frac{h-c}{h}a$, 于是 $S = bc = ac\frac{h-c}{h} = \frac{ahc - ac^2}{h}$, 则 $S' = \frac{ah - 2ac}{h}, S'' = -\frac{2a}{h} < 0$, 驻点为 $c = \frac{h}{2}$, 于是 $c = \frac{h}{2}$ 为极大点, 此时 $b = \frac{a}{2}$, 从而最大面积为 $S = bc = \frac{ah}{4}$.

14. 给定长为 l 的线段, 试把它分为两段, 使以这两段为边所围成的矩形的面积最大.

解: 设此矩形的长为 x , 则宽为 $l - x$

$S = x(l - x) = lx - x^2$, 则 $S' = l - 2x, S'' = -2 < 0$, 驻点为 $x = \frac{l}{2}$, 且 $x = \frac{l}{2}$ 为极大点, 因此当 $x = \frac{l}{2}$ 时,

矩形面积最大, 且 $S = \frac{l^2}{4}$.

15. 设内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 而边平行于轴的最大矩形.

解: 由已知设所求矩形与 x 正半轴交于 $(x, 0)$, 则其与 y 正半轴交于 $\left(0, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)$

此矩形的面积为 S , 则 $\frac{1}{4}S = x \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, 从而 $S = \frac{4b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

则 $s' = \frac{4b}{a} \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, S'' = \frac{4b}{a} \cdot \frac{2x^3 - 3a^2x}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 驻点为 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 此时 $S'' < 0$, 则 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 为 S 的极大值点,

于是 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 时矩形面积最大, 最大面积为 $S = 2ab$.

16. 求点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离.

解: 点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 上任意点 (x, y) 的距离为 $d = \sqrt{(x - p)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2p} - p\right)^2 + (y - p)^2} =$

$$\sqrt{\frac{y^4}{4p^2} + 2p^2 - 2py}$$

设 $f(y) = \frac{y^4}{4p^2} + 2p^2 - 2py$, 则 $f'(y) = \frac{1}{p^2}(y^3 - 2p^3)$, $f''(y) = \frac{3y^2}{p^2} > 0$, 驻点为 $y = \sqrt[3]{2}p$, 且它就是 $f(y)$ 的极小值点, 因此所求最短距离为 $d = \sqrt{f(\sqrt[3]{2}p)} = |p|\sqrt{2 + 2^{-\frac{2}{3}} - 2^{\frac{3}{4}}}$.

17. 甲船以 $u = 20$ 哩/小时的速度向东航行, 正午时在其正北面 $h = 82$ 哩处有乙船以 $v = 16$ 哩/小时的速度向正南航行, 问何时两船距离最近?

解: 设 x 小时后两船距离最近, 两船相距 S 哩, 则 $S = \sqrt{(82 - 16x)^2 + (20x)^2} = \sqrt{656x^2 - 2624x + 6724}$
令 $f(x) = 656x^2 - 2624x + 6724$, 求其最小值. 则 $f'(x) = 1312x - 2624$, $f''(x) = 1312 > 0$, 驻点为 $x = 2$ 且它为 $f(x)$ 的极小值点, 则 2 小时后两船距离最近, 此时 $S = 10\sqrt{41}$.

18. 平地上放一重物, 重量为 P 公斤. 已知物体与地面的摩擦系数为 μ . 现加一力 F , 使物体开始移动. 问此力与水平方向的夹角 φ 为多大时, 用力最省? (图 5-22)?

解: 据题设, 有 $F \cos \varphi = \mu(PG - F \sin \varphi)$ 即 $F = \frac{\mu PG}{\cos \varphi + \mu \sin \varphi}$

令 $y = \cos \varphi + \mu \sin \varphi$, 为使 F 最小, 只要使 y 最大

由 $y' = -\sin \varphi + \mu \cos \varphi$, $y'' = -\cos \varphi - \mu \sin \varphi$, 驻点为 $\varphi = \arctan \mu$, 此时 $y'' < 0$, 表明当 $\varphi = \arctan \mu$ 时, y 取最大值, 从而 F 取最小值, 即用力最省.

19. 如图 5-23 所示, 有甲、乙两生产队合用一变压器, 问变压器 M 应设在何处, 所用输电线最省?

解: 设 M 应设在与甲的垂直位置距离为 x 公里处, 所用输电线 l 最省

由已知, 得 $l = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{2.25^2 + (3-x)^2}$, 则 $l' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x-3}{\sqrt{2.25^2 + (3-x)^2}}$, $l'' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2.25}{(2.25^2 + (3-x)^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$, 驻点为 $x = 1.2$, 且为最小值点, 即当 $x = 1.2$ 公里时, 所用输电线最省.

20. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切线与两坐标轴分别交于 A, B 两点,

(1) 求 AB 两点间的距离的最小值;

(2) 求 $\triangle OAB$ 的最小面积.

解: 设切点为 (x, y) , 则切线斜率为 $k = -\frac{b^2x}{a^2y}$, 于是切线方程为 $Y - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(X - x)$,

不失一般性, 可设点 $M(x, y)$ 在第一象限, 切线在两坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}$, 则

(1) 所求 AB 两点间的距离为 $d = \sqrt{\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}} = a\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{a^2 - x^2}}$

令 $f(x) = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{a^2 - x^2}$, 要求 d 的最小值, 只需求 $f(x)$ 的最小值.

由 $f'(x) = -\frac{2a^2}{x^3} + \frac{2b^2x}{(a^2 - x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{6a^2}{x^4} + \frac{2a^2b^2 + 6b^2x^2}{(a^2 - x^2)^3} > 0$, 且由于 $x \in [0, a]$, $x^2 \leq a^2$, 则驻点

满足 $x^2 = \frac{a^3}{a+b}$ 且此时 $f(x)$ 取最小值, 即 d 取最小值, 最短距离为 $d = a\sqrt{f(x)} = a + b$.

(2) 按题设, 有 $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{x} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^3b}{2x\sqrt{a^2 - x^2}}$, 考虑函数 $g(x) = x^2(a^2 - x^2)$

要求 S 的最小值, 只要求 $g(x)$ 的最大值

由 $g'(x) = 2a^2x - 4x^3$, $g''(x) = 2a^2 - 12x^2$, 驻点为 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 且此时 $g''(x) < 0$, 即当 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时 $g(x)$ 取最

大值, 从而 S 取最小值, 最小面积为 $S = ab$.

21. 讨论函数 x^α ($\alpha > 1$ 及 $0 < \alpha < 1$), e^x , $\ln x$, $x \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内的凸性.

解: $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

当 $\alpha > 1$ 时, $f''(x) > 0$, 则 x^α 在 $(0, +\infty)$ 内下凸; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $f''(x) < 0$, 则 x^α 在 $(0, +\infty)$ 内上凸.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$ ($x > 0$), 则 e^x 在 $(0, +\infty)$ 内下凸

$f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ($x > 0$), 则 $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内上凸

$f(x) = x \ln x$, $f'(x) = 1 + \ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ ($x > 0$), 则 $x \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内下凸

22. 讨论下列函数的凸性和拐点:

(1) $y = 3x^2 - x^3$

(2) $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$)

(3) $y = x + \sin x$

(4) $y = \sqrt{1+x^2}$

解:

(1) $y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x, y'' = 0$ 的根为 $x = 1$, 列表如下:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
y'' 符号	+	-
y	下凸	上凸

坐标为 $(1, 2)$

(2) $y' = -\frac{2ax}{(a^2+x^2)^2}, y'' = \frac{2a^2(3x^2-a^2)}{(a^2+x^2)^3}, y'' = 0$ 的根为 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}a$, 列表如下:

x	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}a)$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}a)$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}a, +\infty)$
y'' 符号	+	-	+
y	下凸	上凸	下凸

拐点坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{3}{4}), (\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{3}{4})$

(3) $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x, y'' = 0$ 的根为 $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 列表如下:

x	$((2k-1)\pi, 2k\pi)$	$(2k\pi, (2k+1)\pi)$	$((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$
y'' 符号	+	-	+
y	下凸	上凸	下凸

拐点坐标为 $(k\pi, k\pi)$

(4) $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y'' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 则 $y'' > 0$, 故函数是下凸的, 从而无拐点.

23. 证明曲线
- $y = \frac{x+1}{x^2+1}$
- 有位于同一直线上的三个拐点.

证明: $y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}, y'' = \frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

令 $y'' = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = -2 + \sqrt{3}, x_3 = -2 - \sqrt{3}$

当 $x < -2 - \sqrt{3}$ 时, $y'' < 0$; 当 $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$ 时, $y'' > 0$; 当 $-2 + \sqrt{3} < x < -1$ 时, $y'' < 0$;

当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$

于是曲线在 x_1, x_2, x_3 处有三个拐点 $A(1, 1), B(-2 + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}), C(-(2 + \sqrt{3}), \frac{1-\sqrt{3}}{4})$

过 A, B 的直线方程为 $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$, 将 C 点坐标代入上述方程, 得 $\frac{1-\sqrt{3}}{4} = \frac{-2-\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$ 即 C 满足

此方程, 则曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直线上的三个拐点.

24. 若
- $f(x)$
- 是下凸函数 (或严格下凸函数),
- $f'(x_0)$
- 存在, 则

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ f(x) &> f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \end{aligned} \right\} (x \neq x_0).$$

证明: 设 x 为 $f(x)$ 定义域内任一点, $x \neq x_0$ (不妨设 $x > x_0$)

令 $x_1 = \frac{x+x_0}{2}$, 由 $f(x)$ 为下凸函数, 则 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$; $x_2 = \frac{x_1+x_0}{2}$, 由 $f(x)$ 为下凸函

数, 则 $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$; $x_3 = \frac{x_2+x_0}{2}$, 由 $f(x)$ 为下凸函数, 则 $\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}$

如此进行下去, 可得数列 $\{x_n\}$, $|x_n - x_0| = \frac{|x - x_0|}{2^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 且 $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \geq$

$$\frac{f(x_{n+1})-f(x_0)}{x_{n+1}-x_0}$$

又 $f'(x_0)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$

又 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$, 则由极限性质, 得 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'(x_0)$, 从而 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

同理可证, 若 $f(x)$ 是严格下凸函数, 则 $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

25. 若
- $f(x)$
- 是下凸函数, 则
- $-f(x)$
- 是上凸函数.

证明: 因 $f(x)$ 是下凸函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 对 $[a, b]$ 中任意两点 x_1, x_2 , 恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

于是 $-f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq -\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{(-f(x_1))+(-f(x_2))}{2}$, 从而 $-f(x)$ 是上凸函数.

26. (1) 若
- $f_n(x)$
- 是下凸函数, 问
- $F(x) = \min_n \{f_n(x)\}$
- 是不是下凸函数?

(2) 若 $f(x), g(x)$ 是下凸函数, 问 $f(x) + g(x)$ 是不是下凸函数?

(3) 说明三次函数不是下凸函数.

解:

(1) 不一定.

例:

当 $f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(x) = x^2 (x > 0)$ 时, $f_1(x), f_2(x)$ 都是下凸函数, 但 $F(x) = \min \left\{ \frac{1}{x}, x^2 \right\}$ 在 $(1, 1)$ 点不满足下凸函数定义, 即 $F(x)$ 不是下凸函数.

当 $f_1(x) = x^2, f_2(x) = \frac{x^2}{2}$ 时, $f_1(x), f_2(x)$ 都是下凸函数, 且 $F(x) = \min \left\{ x^2, \frac{x^2}{2} \right\} = \frac{x^2}{2}$ 是下凸函数.

(2) $f(x) + g(x)$ 是下凸函数.

因 $f(x), g(x)$ 是下凸函数, 则 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$, 于是 $(f+g)\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} = \frac{1}{2}[(f+g)(x_1) + (f+g)(x_2)]$ 即 $f(x) + g(x)$ 是下凸函数.

(3) 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$, 则 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b$

于是,

$a > 0$ 时, 当 $x > -\frac{b}{3a}$ 时, $f''(x) > 0$, $f(x)$ 是下凸函数; 当 $x < -\frac{b}{3a}$ 时, $f''(x) < 0$, $f(x)$ 是上凸函数

$a < 0$ 时, 当 $x > -\frac{b}{3a}$ 时, $f''(x) < 0$, $f(x)$ 是上凸函数; 当 $x < -\frac{b}{3a}$ 时, $f''(x) > 0$, $f(x)$ 是下凸函数

则 $f(x)$ 不是下凸函数, 在 $x = -\frac{b}{3a}$ 处有拐点.

27. 如何选择参数 $h > 0$, 方能使曲线 $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ 在 $x = \pm\sigma (\sigma > 0, \sigma$ 为已给定的常数)处有拐点.

解: $y' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-h^2 x^2}, y'' = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (2h^2 x^2 - 1)$

令 $y'' = 0$, 则 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}h}$

当 $x < -\frac{1}{\sqrt{2}h}$ 时, $y'' > 0$, 曲线下凸; 当 $-\frac{1}{\sqrt{2}h} < x < \frac{1}{\sqrt{2}h}$ 时, $y'' < 0$, 曲线上凸; 当 $x > \frac{1}{\sqrt{2}h}$ 时, $y'' > 0$, 曲线下凸

则在 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}h}$ 处有两个拐点, 于是 $\pm \frac{1}{\sqrt{2}h} = \pm\sigma$, 又 $h, \sigma > 0$, 则 $h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$.

28. 求 $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ 的极值及拐点, 并求拐点处的切线方程.

解: $y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, y'' = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y' 符号	-	0	+
y		极小值0	

则当 $x = 0$, y 有极小值 $y = 0$.

令 $y'' = 0$, 则 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 列出下表:

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
y'' 符号	-	+	-
y	上凸	下凸	上凸

故拐点为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

在拐点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ 处的切线方程为 $y - \frac{1}{4} = \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{1}{3} + 1\right)^2} \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

即 $3\sqrt{3}x + 8y + 1 = 0$;

在拐点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ 处的切线方程为 $y - \frac{1}{4} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{1}{3} + 1\right)^2} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

即 $3\sqrt{3}x - 8y - 1 = 0$.

29. 作出下列函数的图形:

(1) $y = x^3 - 6x$

(2) $y = \frac{3x}{1+x^2}$

(3) $y = 5e^{-x^2}$

(4) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(5) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

(6) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

(7) $y = (x-1)^2(x+2)^3$

(8) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$

(9) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 1}$

(10) $y = x + \arctan x$

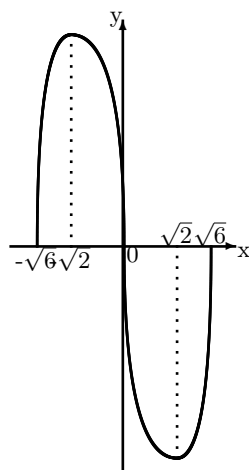
解:

(1) (i) 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 是奇函数, 曲线关于原点对称.

(ii) $y' = 3x^2 - 6, y'' = 6x$, 当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, $y' = 0$; 当 $x = 0$ 时, $y'' = 0$.

(iii) 列表讨论如下:

x	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 0)$	0	$(0, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	上凸↗	极大值 $4\sqrt{2}$	上凸↘	0	下凸↘	极小值 $-4\sqrt{2}$	下凸↗



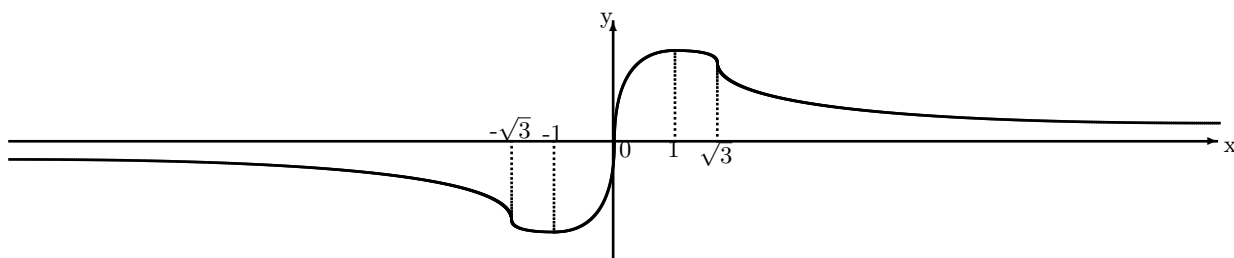
(2) (i) 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 是奇函数, 曲线关于原点对称.

(ii) $y' = \frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, y'' = \frac{6x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, 当 $x = \pm 1$ 时, $y' = 0$; 当 $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$ 时, $y'' = 0$.

(iii) 列表讨论如下:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y	上凸↘	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}$	下凸↘	极小值 $-\frac{3}{2}$	下凸↗	0	上凸↗	极大值 $\frac{3}{2}$	上凸↘	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	下凸↘

(iv) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 故 $y = 0$ 是曲线的一条水平渐近线.



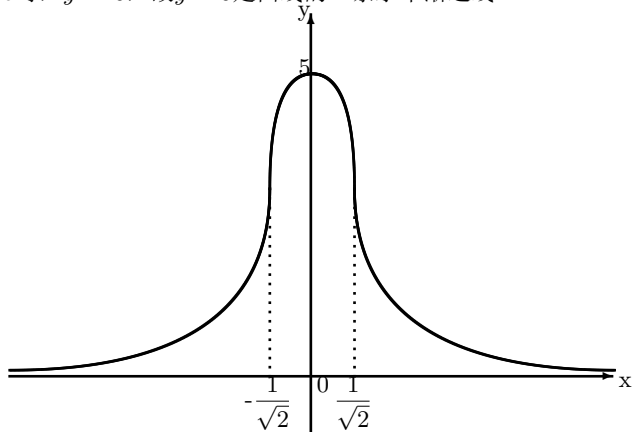
(3) (i) 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 是偶函数, 曲线关于 y 轴对称.

(ii) $y' = -10xe^{-x^2}$, $y'' = 10e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, 当 $x = 0$ 时, $y' = 0$; 当 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' = 0$.

(iii) 列表讨论如下:

x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-DF1\sqrt{2}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	下凸 ↗	$\frac{5}{\sqrt{e}}$	上凸 ↗	极大值 5	上凸 ↘	$\frac{5}{\sqrt{e}}$	下凸 ↘

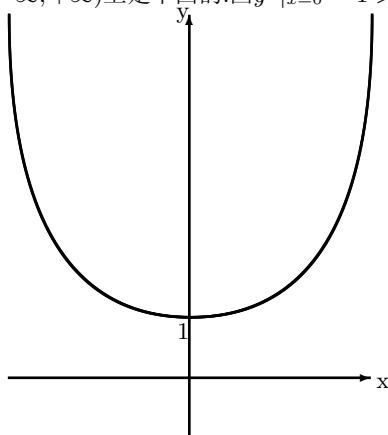
(iv) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 故 $y = 0$ 是曲线的一条水平渐近线.



(4) (i) 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 是偶函数, 曲线关于 y 轴对称 (这是双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

(ii) $y' = \sinh x$, $y'' = \cosh x$, 当 $x = 0$ 时, $y' = 0$;

由于 $y'' > 0$ ($x \in (-\infty, +\infty)$), 故 y 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是下凸的. 因 $y''|_{x=0} = 1 > 0$, 故 $y_{\min} = 1$.



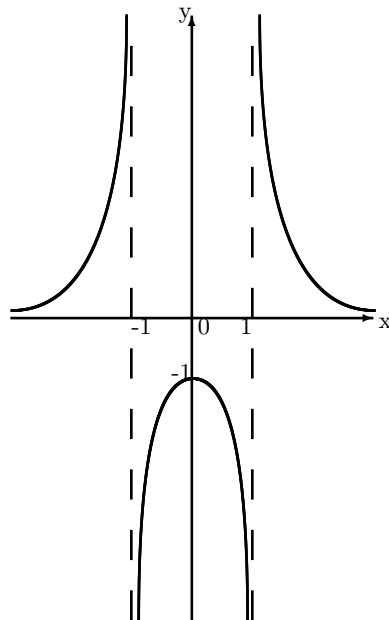
(5) (i) 定义域 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 是偶函数, 曲线关于 y 轴对称.

(ii) $y' = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$, $y'' = \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$, 当 $x = 0$ 时, $y' = 0$; 当 $x = \pm 1$ 时, y' 不存在; 当 $x = \pm 1$ 时, y'' 不存在.

(iii) 列表讨论如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	不存在	+	0	-	不存在	-
y''	+	不存在	-	-	-	不存在	+
y	下凸↗	无定义	上凸↗	极大值 -1	上凸↘	无定义	下凸↘

(iv) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 故 $y = 0$ 是曲线的一条水平渐近线; 当 $x \rightarrow \pm 1$ 时, $y \rightarrow \infty$, 故 $x = \pm 1$ 是曲线的一条垂直渐近线.



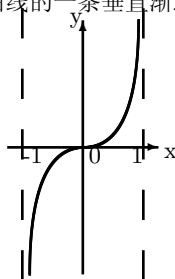
(6) (i) 定义域 $(-1, 1)$, 是奇函数, 曲线关于原点对称.

(ii) $y' = \frac{2}{1-x^2}, y'' = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$, $y' = 0$ 无解; 当 $x = 0$ 时, $y'' = 0$.

(iii) 列表讨论如下:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$
y'	+	+	+
y''	-	0	+
y	上凸↗	0	下凸↗

(iv) 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 故 $x = 1$ 是曲线的一条垂直渐近线;
当 $x \rightarrow -1^+$ 时, $y \rightarrow -\infty$, 故 $x = -1$ 是曲线的一条垂直渐近线.



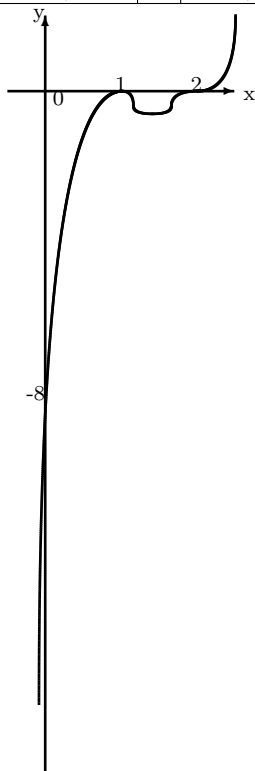
(7) (i) 定义域 $(-\infty, +\infty)$.

(ii) $y' = (x-1)(x-2)^2(5x-7), y'' = 2(x-2)(10x^2-28x+19)$, 当 $x = 1, x = 2, x = \frac{7}{5} = 1.4$ 时, $y' = 0$; 当 $x = 2, x = \frac{14 \pm \sqrt{6}}{10}$ 时, $y'' = 0$.

(iii) 列表讨论如下:

x	$(-\infty, 1)$	1	$\left(1, \frac{14-\sqrt{6}}{10}\right)$	$\frac{14-\sqrt{6}}{10}$	$\left(\frac{14-\sqrt{6}}{10}, 1.4\right)$	1.4
y'	+	0	-	-	-	0
y''	-	-	-	0	+	+
y	上凸↗	极大值 0	上凸↘	-0.0154	下凸↘	极小值 -0.0346

x	$\left(1.4, \frac{14+\sqrt{6}}{10}\right)$	$\frac{14+\sqrt{6}}{10}$	$\left(\frac{14+\sqrt{6}}{10}, 2\right)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	+	+	0	+
y''	+	0	-	0	+
y	下凸↗	-0.0186	上凸↗	0	下凸↗



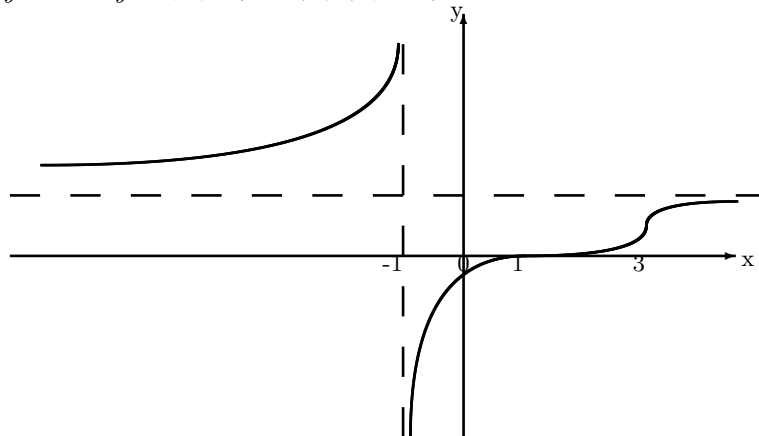
(8) (i) 定义域 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(ii) $y' = \frac{6(x-1)^2}{(x+1)^4}$, $y'' = -\frac{12(x-1)(x-3)}{(x+1)^5}$, 当 $x = 1$ 时, $y' = 0$; 当 $x = 1, x = 3$ 时, $y'' = 0$;
当 $x = -1$ 时, y', y'' 均不存在.

(iii) 列表讨论如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	不存在	+	0	+	+	+
y''	-	不存在	-	0	+	0	-
y	上凸↗	无定义	上凸↗	0	下凸↗	$\frac{1}{8}$	上凸↗

(iv) 当 $x \rightarrow -1^-$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 故 $x = -1$ 是曲线的一条垂直渐近线;
当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 1$, 故 $y = 1$ 是曲线的一条水平渐近线.



(9) (i) 定义域 $(-\infty, +\infty)$.

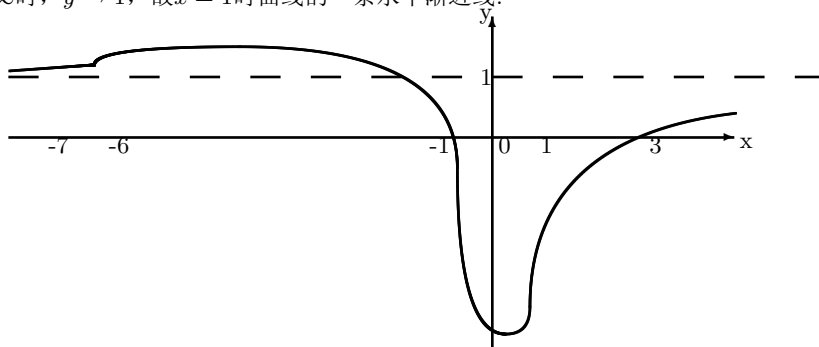
- (ii) $y' = \frac{2(x^2 + 4x - 1)}{(x^2 + 1)^2}, y'' = -\frac{4(x^3 + 6x^2 - 3x - 2)}{(x^2 + 1)^3}$, 当 $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 时, $y' = 0$; $y'' = 0$ 的根为 x_1, x_2, x_3 , 其中 $x_1 \in (-7, -6), x_2 \in (-1, 0), x_3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

(iii) 列表讨论如下:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, -2 - \sqrt{5})$	$-2 - \sqrt{5}$	$(-2 - \sqrt{5}, x_2)$	x_2
y'	+	+	+	0	-	-
y''	+	0	-	-	-	0
y	下凸 ↗	拐点	上凸 ↗	极大值 $\sqrt{5} - 1$	上凸 ↘	拐点

x	$(x_2, -2 + \sqrt{5})$	$-2 + \sqrt{5}$	$(-2 + \sqrt{5}, x_3)$	x_3	$(x_3, +\infty)$
y'	-	0	+	+	+
y''	+	+	+	0	-
y	下凸 ↘	极小值 $-\sqrt{5} - 1$	下凸 ↗	拐点	上凸 ↗

(iv) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 1$, 故 $x = 1$ 时曲线的一条水平渐近线.

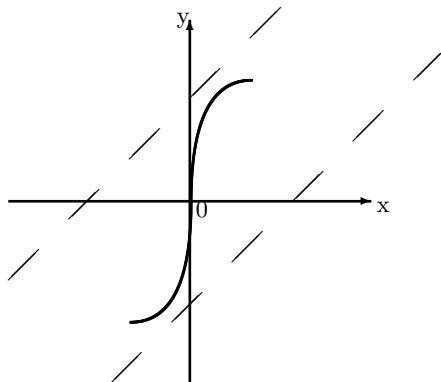


(10) (i) 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 是奇函数, 曲线关于原点对称且当 $x = 0$ 时, $y = 0$.

(ii) $y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0$, 故曲线单调上升, 无极值点.

$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, 当 $x = 0$ 时, $y'' = 0$ 且当 $x > 0$ 时, $y'' < 0$; 当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$, 则 $(0, 0)$ 为拐点.

(iii) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = -\frac{\pi}{2}, b_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \frac{\pi}{2}$, 故曲线有两条斜渐近线: $y = x + \frac{\pi}{2}, y = x - \frac{\pi}{2}$.



30. 试作下列函数的图形: $y = \begin{cases} \frac{9x + x^4}{x - x^3}, & x \neq 0 \\ 9, & x = 0 \end{cases}$

解:

(1) 定义域 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

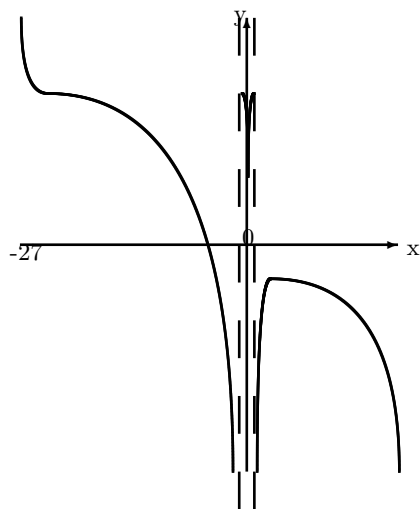
(2) $y' = \begin{cases} \frac{-x^4 + 3x^2 + 18x}{(1-x^2)^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, y'' = \begin{cases} -\frac{2(x^3 + 27x^2 + 3x + 9)}{(x^2 - 1)^2}, & x \neq 0 \\ 18, & x = 0 \end{cases}$
, 当 $x = 0, x = 3$ 时, $y' = 0$; $y'' = 0$ 的根为 x_1 , 其中 $x_1 \in (-27, -26)$; 当 $x = \pm 1$ 时, y', y'' 均不存在.

(3) 列表讨论如下:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0
y'	-	-	-	不存在	-	0
y''	+	0	-	无定义	-	-
y	下凸↘	拐点	上凸↘	无定义	上凸↘	极小值 9

x	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	不存在	+	0	-
y''	-	不存在	-	-	-
y	上凸↗	无定义	上凸↗	极大值 $\frac{9}{-2}$	上凸↘

(4) 当 $x \rightarrow \pm 1$ 时, $y \rightarrow \infty$, 故 $x = \pm 1$ 是曲线的垂直渐近线.



§4. 平面曲线的曲率

1. 求曲线
- $y = 4x - x^2$
- 的曲率以及在点
- $(2, 4)$
- 的曲率半径.

解: 因 $y = 4x - x^2$, 故 $y' = 4 - 2x, y'' = -2$, 则曲率 $K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{2}{[1 + 4(2 - x)^2]^{\frac{3}{2}}}$, 于是曲率半径 $\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{2}[1 + 4(2 - x)^2]^{\frac{3}{2}}$, 从而在点 $(2, 4)$ 的曲率半径 $\rho = \frac{1}{2}$.

2. 求下列曲线的曲率与曲率半径:

- (1) 悬链线 $y = a \cosh \frac{x}{a} (a > 0)$
- (2) 抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$
- (3) 旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0)$
- (4) 心脏线 $\rho = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$
- (5) 双纽线 $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta (a > 0)$
- (6) 对数螺线 $\rho = ae^{\lambda \theta} (\lambda > 0)$

解:

(1) 因 $y = a \cosh \frac{x}{a}$, 故 $y' = \sinh \frac{x}{a}, y'' = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$, 则曲率 $K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{1}{a \cosh^2 \frac{x}{a}}$, 于是曲率半径 $\rho = \frac{1}{K} = a \cosh^2 \frac{x}{a}$.

(2) 因 $y^2 = 2px$, 则 $2yy' = 2p$ 即 $y' = \frac{p}{y}$, 故 $y'' = -\frac{p}{y^2} y' = -\frac{p^2}{y^3}$, 则曲率 $K = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{p^2}{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{p^2}{(2px + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{p \left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}}$, 于是曲率半径 $\rho = \frac{1}{K} = p \left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\text{或} \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \right)$.

(3) 因 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, 故 $x' = a(1 - \cos t), x'' = a \sin t; y' = a \sin t, y'' = a \cos t$, 则曲率 $K = \left| \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|}$, 于是曲率半径 $\rho = \frac{1}{K} = 4a \left| \sin \frac{t}{2} \right| (= 2\sqrt{2ay})$.

(4) 因 $\rho = a(1 + \cos \theta)$, 故 $\rho' = -a \sin \theta, \rho'' = -a \cos \theta$, 则曲率 $K = \left| \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{2a\rho}}$, 于是曲率半径 $R = \frac{2\sqrt{2a\rho}}{3}$.

(5) 因 $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$, 则 $2\rho\rho' = -4a^2 \sin 2\theta$, 故 $\rho' = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{\rho}, \rho'' = -\frac{4a^4 + \rho^4}{\rho^3}$, 则曲率 $K = \left| \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{3\rho}{2a^2}$, 于是曲率半径 $R = \frac{2a^2}{3\rho}$.

(6) 因 $\rho = ae^{\lambda \theta}$, 故 $\rho' = \lambda ae^{\lambda \theta} = \lambda \rho, \rho'' = a\lambda^2 e^{\lambda \theta} = \lambda^2 \rho$, 则曲率 $K = \left| \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{1}{|\rho|(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}}$, 于是曲率半径 $R = |\rho|\sqrt{1 + \lambda^2}$.

3. 求曲线
- $y = 2(x - 1)^2$
- 的最小曲率半径.

解: 因 $y = 2(x - 1)^2$, 故 $y' = 4(x - 1), y'' = 4$, 则曲率半径 $R = \frac{1}{K} = \left| \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right| = \frac{[1 + 16(x - 1)^2]^{\frac{3}{2}}}{4}$

要使 R 最小, 则必有 $[1 + 16(x - 1)^2]^{\frac{3}{2}}$ 最小, 即当 $x = 1$ 时, $R_{\min} = \frac{1}{4}$.

4. 一飞机沿抛物线路径
- $y = \frac{x^2}{4000}$
- (单位为米) 作俯冲飞行, 在坐标原点
- O
- 的速度
- $v = 140$
- 米/秒, 飞行员体重
- $G = 70$
- 公斤. 求此时座椅对飞行员的反力.

解: 由物理学知识, 作匀速圆周运动的物体所受的向心力为 $F = \frac{mv^2}{R}$, 其中 m 为物体的质量, v 为它的速

度, R 为圆的半径.

所求座椅对飞行员的反力大小应为 $F = Gg + \frac{mv^2}{R}$, 其方向应指向圆心.

据题意, 先求曲率半径, $y' = \frac{x}{2000}, y'' = \frac{1}{2000}$, 则曲率半径 $R = \frac{1}{K} = \left| \frac{(2000^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{2000^2} \right|$, 于是在坐标原点 O 的 $R = 2000$ (米), 又在坐标原点 O 的速度 $v = 140$ 米/秒, 从而 $F = 1372(N)$.

5. 一起车重量是 P , 以等速 v 驶过拱桥 (图5-32), 桥面 ACB 是一抛物线, 其尺寸如图示. 求汽车过 C 点时对桥面的压力.

解: 以 O 为原点, AB 为 x 轴, CO 为 y 轴建立坐标系, 则抛物线方程 $y = -\frac{4\delta}{l^2}x^2 + \delta$

由物理学知道, 汽车过 C 点时对桥面的压力为 $F = \frac{mv^2}{R} \cos \theta + mg$

据题意, 先求曲率半径, $y' = -\frac{8\delta}{l^2}x, y'' = -\frac{8\delta}{l^2}$, 则曲率半径 $R = \frac{1}{K} = \left| \frac{(l^2 + 8\delta x)^{\frac{3}{2}}}{8l\delta} \right|$, 于是在点 C 的 $R = \frac{l^2}{8\delta}$, 又在点 C 的 $\theta = \pi$, 从而 $F = Pg + \frac{Pv^2}{R} \cos \theta = \frac{gl^2 - 8\delta v^2}{l^2} P$.

§5. 待定型

1. 利用洛必达法则求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\sin \frac{1}{x}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{e^{ax}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} (a > 0)$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^c x}{x^b} (b, c > 0)$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} x^b \ln^c x (b, c > 0)$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$$

解:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^2}{4x^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\sin \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1+x^2) \cos \frac{1}{x}} = 1$$

$$(4) \text{ 当 } b \text{ 为正整数, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^{b-1}}{ae^{ax}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b!}{a^b e^{ax}} = 0$$

当 b 不为正整数, 则 $[b] \leq b < [b] + 1$, 于是 $\frac{|x|^{[b]}}{e^{ax}} \leq \frac{|x|^b}{e^{ax}} < \frac{|x|^{[b]+1}}{e^{ax}} (|x| > 1)$, 而左、右两端当 $x \rightarrow \infty$ 时, 上面已证明它们的极限为 0, 因此, 中间的极限也为 0.

从而, 对任意 a, b , 均有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\cot \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-1}{-\frac{1}{2} \csc^2 \frac{x}{2}} = 2$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \tan ax}{-b \tan bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \sec^2 bx} = \frac{a^2}{b^2} (b \neq 0)$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\sin x) \cos x + \sin x}{4x^3} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(\sin x) \cos^2 x + \sin(\sin x) \sin x + \cos x}{12x^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cos^3 x + \frac{3}{2} \cos(\sin x) \sin 2x + \sin(\sin x) \cos x - \sin x}{24x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(\sin x) \cos^4 x - 3 \sin(\sin x) \sin 2x \cos x + 3 \cos(\sin x) \cos 2x}{24} + \frac{\cos(\sin x) \cos^2 x - \sin(\sin x) \sin x - \cos x}{24} \right] = \frac{1}{6}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x \ln a - ax^{a-1}}{1} = a^a (\ln a - 1)$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1-2\sin x}{\cos 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-2\cos x}{-3\sin 3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

$$(14) \text{ 令 } y = \ln x, \text{ 则 } x = e^y, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^c x}{x^b} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^c}{e^{by}} = 0 \text{ (由(4)得)}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right] = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{e}{2}$$

$$(16) \text{ 令 } y = \ln x, \text{ 则 } x = e^y, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow 0} x^b \ln^c x = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{by} y^c = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^c}{e^{-by}} = 0 \text{ (由(4)得)}$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x}, \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = 1$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}}, \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = -1, \text{ 于是 } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right)}$$

令 $y = \frac{1}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln y)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y \ln y} = 0$, 从而 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = 1$

2. 试说明下列函数不能用洛必达法则求极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin 2x}{(2x + \sin x)e^{\sin x}}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) \sin x}{\ln \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x \right)}$

解:

- (1) 因 $\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 的分子、分母同时对 x 求导数, 得 $\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$, 而 $\frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限不存在, 因此洛

必达法则不能适用, 但是原极限是存在的。事实上, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 0$

- (2) 因 $\frac{x + \sin x}{x - \cos x}$ 的分子、分母同时对 x 求导数, 得 $\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时此函数极限不存在, 因此洛必达法

则不能适用, 但是原极限是存在的。事实上, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\cos x}{x}} = 1$

- (3) 对于不同的序列: $x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 及 $x''_n = 2n\pi (n = 1, 2, \dots)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 则取不同的极限 $\frac{1}{e}$ 及 1, 从而原极限不存在。

用洛必达法则求解, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin 2x}{(2x + \sin x)e^{\sin x}} =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 2 \cos 2x}{(2 + \cos x + 2x \cos x + \sin x \cos x)e^{\sin x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cos^2 x}{[2 + \cos x(1 + 2x + \sin x)]e^{\sin x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\left[\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} (1 + 2x + \sin x) \right] e^{\sin x}}, \text{ 因 } e^{\sin x} \geq e^{-1}, 1 + 2x + \sin x \geq 2x, \text{ 则 } \left| \left[\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} (1 + 2x + \sin x) \right] e^{\sin x} \right| \geq$$

$$e^{-1}(-2 + 2|x|) \rightarrow +\infty (x \rightarrow \infty), \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin 2x}{(2x + \sin x)e^{\sin x}} = 0.$$

- (4) 直接求极限可得 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) \sin x}{\ln \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} x \right)} = 0$, 但此极限不符合用洛必达法则求极限的条件。

§6. 方程的近似解

1. 求方程 $x^3 - x - 4 = 0$ 的正根, 使误差不超过 0.0001.

解: 设 $f(x) = x^3 - x - 4$, 在 $[1, 2]$ 间, $f(1) = -4 < 0, f(2) = 2 > 0$ 即 $f(1)f(2) < 0$ 且 $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0, f''(x) = 6x > 0$

因 $f(2)f''(2) = 24 > 0$, 则从点 $(2, f(2))$ 即点 $(2, 2)$ 开始作切线, 取 $x_0 = 2$ 作初值.

于是 $x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} \approx 1.81818, x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1.79663, x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 1.79632, x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 1.79632$

x_3 与 x_4 的前 5 位数相同, 这表示已接近于根的精确值. 为了说明精确度, 用 1.7963 试一下, 有 $f(1.7963) \approx -0.00019 < 0$, 而 $f(1.79632) \approx 0.00002 > 0$, 故若取 1.7963 作为根的近似值, 则误差不超过 0.0001.

2. 求方程 $x^3 - x - 4 = 0$ 的正根, 使误差不超过 0.0001.

解: 设 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1, f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0, f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$, 此时 $f'(0) = 6 > 0, f'(1) = -1 < 0$, 故在 $(0, 1)$ 内 $f'(x)$ 有零点 $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$, 此时 $f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)$ 内为正; $f'(x)$ 在 $\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}, 1\right)$ 内

为负.

现分别考虑 $f(x)$ 在 $(0, 0.7)$ 与 $(0.7, 1)$ 中的根

因 $f(0.7) = 1.093 > 0$, 故在 $(0, 0.7)$ 中必有实根 ξ , 但在 $(0.7, 1)$ 中无根.

现求 $\xi, f''(x) = 6x - 10 < 0 (\forall x \in (0, 0.7))$, 因 $f(0) = -1, f''(0) = -10$, 故取 $x_0 = 0$ 作初值.

于是 $x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} \approx 0.16667, x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.19706, x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0.19806, x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 0.19806$

x_3 与 x_4 的前 5 位数相同, 这表示已接近于根 ξ 的精确值. 为了说明精确度, 用 0.1980 试一下, 有 $f(0.1980) \approx -0.00026 < 0$, 而 $f(0.1981) \approx 0.01397 > 0$, 故若取 0.1980 作为根的近似值, 则误差不超过 0.0001.

第二部分 单变量积分学

第六章 不定积分

§1. 不定积分的概念及运算法则

1. 证明: 若 $\int f(t)dt = F(t) + C$, 则 $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

证明: 因 $\int f(t)dt = F(t) + C$, 故 $[F(t) + C]' = f(t)$, 则 $\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}[F(ax+b)]' = f(ax+b)$, 于是 $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

2. 求下列不定积分:

$$(1) \int (2 - \sec^2 x) dx$$

$$(2) \int \left(x^4 - 2x^3 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$$

$$(3) \int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2\right) dx$$

$$(4) \int \left(e^x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$(5) \int \left(2\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) dx$$

$$(6) \int \left(\cos x - \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

$$(7) \int \left(\frac{1}{2}\cos x + \sin x + 1\right) dx$$

$$(8) \int \left(2^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{e^x}{5}\right) dx$$

$$(9) \int (3-x^2)^3 dx$$

$$(10) \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$$

解:

$$(1) \int (2 - \sec^2 x) dx = 2x - \tan x + C$$

$$(2) \int \left(x^4 - 2x^3 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$(3) \int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 2x + 3x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$(4) \int \left(e^x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx = e^x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$(5) \int \left(2\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) dx = 2\sin x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

$$(6) \int \left(\cos x - \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \sin x - 2\arctan x + \frac{1}{4}\arcsin x + C$$

$$(7) \int \left(\frac{1}{2}\cos x + \sin x + 1\right) dx = \frac{1}{2}\sin x - \cos x + x + C$$

$$(8) \int \left(2^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{e^x}{5}\right) dx = \frac{1}{\ln 2}2^x - \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{e^x}{5} + C$$

$$(9) \int (3-x^2)^3 dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) dx = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C$$

$$(10) \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}) dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C$$

§2. 不定积分的计算

1. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{5x-7}$

(2) $\int \cos(\omega t - \varphi) dt$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} + 3\right)^2}}$

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

(5) $\int \tan^{10} x \sec^2 x dx$

(6) $\int e^{\alpha x} \cdot 2^x dx$

(7) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$

(8) $\int \tan x dx$

(9) $\int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(10) $\int (\alpha x^2 + \beta)^\mu x dx (\mu \neq -1)$

(11) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

(12) $\int \frac{dx}{A^2 \sin^2 x + B^2 \cos^2 x}$

(13) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$

(14) $\int \frac{dx}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

(15) $\int x^2 \sqrt[8]{1+x^3} dx$

(16) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + \sin^3 x} dx$

(17) $\int \frac{1 - 2 \sin x}{\cos^2 x} dx$

(18) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

(19) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$

(20) $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 x} dx$

(21) $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$

(22) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

(23) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$

(24) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$

$$(25) \int \frac{x^2 + 7}{x^2 - 2x - 3} dx$$

$$(26) \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

解:

$$(1) \int \frac{dx}{5x-7} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x-7)}{5x-7} = \frac{1}{5} \ln|5x-7| + C$$

$$(2) \int \cos(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{\omega} \int \cos(\omega t - \varphi) d(\omega t - \varphi) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t - \varphi) + C$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} + 3\right)^2}} = 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2} + 3\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} + 3\right)^2}} = 2 \arcsin\left(\frac{x}{2} + 3\right) + C$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{2}x)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin(\sqrt{2}x) + C$$

$$(5) \int \tan^{10} x \sec^2 x dx = \int \tan^{10} x d(\tan x) = -\frac{1}{11} \tan^{11} x + C$$

$$(6) \int e^{\alpha x} \cdot 2^x dx = \int (2e^{\alpha})^x dx = \frac{(2e^{\alpha})^x}{\ln(2e^{\alpha})} + C$$

$$(7) \int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2}{\ln 6} 6^x + \frac{9^x}{\ln 9} + C$$

$$(8) \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$(9) \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \tan \sqrt{1+x^2} d(\sqrt{1+x^2}) = \ln|\sec \sqrt{1+x^2}| + C$$

$$(10) \int (\alpha x^2 + \beta)^{\mu} x dx = \frac{1}{2\alpha} \int (\alpha x^2 + \beta)^{\mu} d(\alpha x^2 + \beta) = \frac{(\alpha x^2 + \beta)^{\mu+1}}{2\alpha(\mu+1)} + C$$

$$(11) \int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \csc^2 \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = -\cot \frac{x}{2} + C$$

$$(12) \int \frac{dx}{A^2 \sin^2 x + B^2 \cos^2 x} = \frac{1}{AB} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{A}{B}\right)^2 \tan^2 x} d\frac{A \tan x}{B} = \frac{1}{AB} \arctan\left(\frac{A}{B} \tan x\right) + C$$

$$(13) \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + (\sin^2 x)^2} d(\sin^2 x) = \frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C$$

$$(14) \int \frac{dx}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \int \csc^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) d\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$(15) \int x^2 \sqrt[8]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt[8]{1+x^3} d(1+x^3) = \frac{8}{27} (1+x^3)^{\frac{9}{8}} + C$$

$$(16) \int \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + \sin^3 x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(1 + \sin^3 x)}{1 + \sin^3 x} = \frac{1}{3} \ln(1 + \sin^3 x) + C$$

$$(17) \int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx + 2 \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} = \tan x - 2 \sec x + C$$

$$(18) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{de^x}{e^{2x} + 1} = \arctan(e^x) + C$$

$$(19) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} = \frac{3}{2} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$(20) \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx + \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sin^2 x} = -\cot x + \ln(\sin^2 x) + C = -\cot x + 2 \ln|\sin x| + C$$

$$(21) \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx = \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} d(\ln(x + \sqrt{1+x^2})) = \frac{2}{3} [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}} + C$$

$$(22) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = - \int \frac{de^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C$$

$$(23) \int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1) + C$$

$$(24) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C$$

$$(25) \int \frac{x^2+7}{x^2-2x-3} dx = \int \left(1 + \frac{2x+10}{(x+1)(x-3)}\right) dx = \\ \int \left(1 - \frac{2}{x+1} + \frac{4}{x-3}\right) dx = x - 2\ln|x+1| + 4\ln|x-3| + C = x + 2\ln \frac{(x-3)^2}{|x+1|} + C$$

$$(26) \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int \frac{1-x^{-2}}{x^2+x^{-2}} dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right| + C$$

2. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(2) \int \frac{(2\sqrt{u}+1)^2}{u^2} du$$

$$(3) \int e^{\sqrt{x+1}} dx$$

$$(4) \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$(5) \int \sqrt{x^2+a^2} dx$$

$$(6) \int \sqrt{x^2-a^2} dx$$

$$(7) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

$$(8) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$$

$$(9) \int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$$

$$(10) \int \sqrt{2+x-x^2} dx$$

解:

$$(1) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \int \sin \sqrt{x} d(\sqrt{x}) = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

$$(2) \int \frac{(2\sqrt{u}+1)^2}{u^2} du = \int \left(\frac{4}{u} + \frac{4}{u^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{u^2} \right) du = 4 \ln|u| - 8u^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{u} + C$$

$$(3) \text{ 令 } \sqrt{1+x} = t, \text{ 则 } x = t^2 - 1, dx = 2t dt, \text{ 于是 } \int e^{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int t e^t dt = 2(t-1)e^t + C = 2(\sqrt{1+x} - 1)e^{\sqrt{1+x}} + C$$

$$(4) \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = - \int \frac{4-x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} dx = - \int \sqrt{4-x^2} dx + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} - 2 \arcsin \frac{x}{2} + 4 \arcsin \frac{x}{2} + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C$$

$$(5) \quad I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C_1,$$

于是 $2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C_1$, 从而 $I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$ ($C = \frac{C_1}{2}$)

$$(6) \quad I = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1,$$

于是 $2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1$, 从而 $I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$ ($C = \frac{C_1}{2}$)

$$(7) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2 - (a+b)x] - ab}} = \int \frac{d\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{\sqrt{-\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}} + C = \arcsin \frac{2x - a - b}{a - b} + C \quad (\text{其中 } a < b)$$

$$(8) \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x^2}}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x^2}}} = -\frac{1}{\beta} \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x^2}} + C$$

$$(9) \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2}} + C = -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{21}} + C$$

$$(10) \quad \int \sqrt{2+x-x^2} dx = \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx = \frac{x - \frac{1}{2}}{2} \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3} + C$$

3. 求下列不定积分:

$$(1) \quad \int x^2 \cos x dx$$

$$(2) \quad \int x^3 \ln x dx$$

$$(3) \quad \int \ln x dx$$

$$(4) \quad \int x^n \ln x dx \quad (n \text{ 为正整数})$$

$$(5) \quad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$(6) \quad \int \csc x dx$$

$$(7) \quad \int \cos(\ln x) dx$$

$$(8) \quad \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$(9) \quad \int x \cos^2 x dx$$

$$(10) \int x \sin^2 x \, dx$$

$$(11) \int \arccos x \, dx$$

$$(12) \int (\arcsin x)^2 \, dx$$

$$(13) \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$(14) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$$

解:

$$(1) \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

$$(2) \int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

$$(3) \int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$(4) \int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$(5) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} \, dx = -2 \arcsin x \cdot \sqrt{1-x} + 2 \int \frac{1}{\sqrt{1+x}} \, dx = -2\sqrt{1-x} \arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$$

$$(6) \int \csc x \, dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\frac{2 \cos(\frac{x}{2})}{\tan \frac{x}{2}}} \, dx = \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$(7) \text{ 因 } I = \int \cos(\ln x) \, dx = x \cos \ln x + \int \sin(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I + C_1, \text{ 故 } I = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C \left(C = \frac{C_1}{2} \right)$$

$$(8) \int \frac{x \, dx}{\sin^2 x} = \int x \csc^2 x \, dx = -x \cot x + \int \cot x \, dx = -x \cot x + \ln |\sin x| + C$$

$$(9) \int x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int x(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \int x \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \int \sin 2x \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

$$(10) \int x \sin^2 x \, dx = \int x(1 - \cos^2 x) \, dx = \frac{x^2}{2} - \int x \cos^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \right) + C = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x$$

$$(11) \int \arccos x \, dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$(12) \int (\arcsin x)^2 \, dx = x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x(\arcsin x)^2 + 2 \arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} - 2 \int dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C$$

$$(13) I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I + C_1, \text{ 则 } I = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C \left(C = \frac{a^2}{a^2 + b^2} C_1 \right)$$

$$(14) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

4. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$(3) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$(4) \int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx$$

$$(5) \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$

$$(6) \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$$

$$(7) \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$(8) \int \frac{dx}{x^3+1}$$

$$(9) \int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$$

$$(10) \int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} dx$$

解:

$$(1) \text{ 因 } \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)}, \text{ 故 } \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx = x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C$$

$$(2) \text{ 因 } \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}, \text{ 故 } \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2} = \ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C = \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + \frac{1}{x+2} + C$$

$$(3) \text{ 因 } \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{8(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{17}{8(x+3)} - \frac{5}{4(x+3)^2} - \frac{1}{2(x+3)^3},$$

$$\text{故 } \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{1}{8} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} - \frac{17}{8} \ln|x+3| + \frac{5}{4(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2} + C = \frac{1}{8} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{17}{8} \ln|x+3| + \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + C$$

$$(4) \text{ 因 } \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1} + \frac{-\frac{5}{3}x}{x^2+4}, \text{ 故 } \int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx = \frac{5}{6} \ln(x^2+1) + \arctan x - \frac{5}{6} \ln(x^2+4) + C = \frac{5}{6} \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2+4} \right) + \arctan x + C$$

$$(5) \text{ 因 } \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{x^2-4x+4} - \frac{1}{x^2-4x+5} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2+1}, \text{ 故 } \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = -\frac{1}{x-2} - \arctan(x-2) + C$$

$$(6) \text{ 因 } \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2-x+1)}, \text{ 故 } \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{4} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1) \right) - \frac{1}{4} \ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1) \right)$$

$$(7) \text{ 因 } \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)}, \text{ 故 } \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + C = \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$(8) \text{ 因 } \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)},$$

$$\text{故 } \int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3} + C = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3} + C$$

$$(9) \text{ 因 } \frac{x^2}{1-x^4} = \frac{1}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{2(x^2+1)}, \text{ 故 } \int \frac{x^2 dx}{1-x^4} = -\frac{1}{4} \ln|1-x| + \frac{1}{4} \ln|1+x| - \frac{1}{2} \arctan x + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$(10) \text{ 因 } \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{x^4(x^2+1)}{x^3(x^2+1)^2} - \frac{4x^2+2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - 2 \frac{(x^2+1)^2-x^4}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x^3} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \text{ 故 } \int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + C$$

5. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{4+5\cos x}$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$$

$$(3) \int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$$

$$(4) \int \frac{1}{x\sqrt[4]{1+x^4}} dx$$

$$(5) \int \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}$$

$$(6) \int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$$

$$(7) \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$$

$$(8) \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$$

$$(10) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$$

$$(11) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} (a>0)$$

$$(12) \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$$

$$(13) \int x\sqrt{x^4+2x^2-1} dx$$

$$(14) \int \sqrt{2+x-x^2} dx$$

$$(15) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$(16) \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx$$

$$(17) \int \sin^6 x dx$$

$$(18) \int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$(19) \int \sin^4 x \cos^4 x dx$$

$$(20) \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$$

$$(21) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$$

$$(22) \int \tan x \cdot \tan(x+a) dx$$

$$(23) \int \sin 5x \cos x \, dx$$

$$(24) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \, dx$$

$$(25) \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$

$$(26) \int x e^x \cos x \, dx$$

$$(27) \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$$

$$(28) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2})^2 \, dx$$

$$(29) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$$

$$(30) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$$

$$(31) \int x e^x \sin x \, dx$$

$$(32) \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$(33) \int (x + |x|)^2 \, dx$$

$$(34) \int x^2 e^x \cos x \, dx$$

$$(35) \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} \, dx$$

$$(36) \int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx$$

$$(37) \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

$$(38) \int x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx$$

$$(39) \int x \arctan x \cdot \ln(1+x^2) \, dx$$

$$(40) \int \sinh^2 x \cosh^2 x \, dx$$

解：

$$(1) \text{ 令 } \tan \frac{x}{2} = t, \text{ 则 } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \, dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2},$$

$$\text{于是 } \int \frac{dx}{4+5\cos x} = \int \frac{2}{(3-t)(3+t)} \, dt = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+\tan \frac{x}{2}}{3-\tan \frac{x}{2}} \right| + C$$

$$(2) \text{ 令 } \tan \frac{x}{2} = t, \text{ 则 } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \, dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2},$$

$$\text{于是 } \int \frac{dx}{\sin x + \tan x} = \int \frac{1-t^2}{2t} \, dt = \frac{1}{2} \ln |t| - \frac{t^2}{4} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 + C$$

$$(3) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{5+x-x^2}} = \int \frac{x \, dx}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \int \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = -\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} +$$

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4}}} + C = -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{21}} + C$$

- (4) 令 $t = \sqrt[4]{1+x^4}$, 则 $x = \sqrt[4]{t^4-1}$, $dx = t^3(t^4-1)^{-\frac{3}{4}} dt$
 于是 $\int \frac{1}{x\sqrt[4]{1+x^4}} dx = \int \frac{t^2}{t^4-1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2} \arctan t + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1} \right| + \frac{1}{2} \arctan(\sqrt[4]{1+x^4}) + C$
- (5) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}} = \frac{1}{2} \int x d\sqrt{4x+2} = \frac{1}{2} x\sqrt{2+4x} - \frac{1}{2} \int (2+4x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{2+4x} - \frac{1}{12} (2+4x)^{\frac{3}{2}} + C$
- (6) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{d\sin x}{1+\sin x} = \ln(1+\sin x) + C$
- (7) 令 $\sqrt[6]{x} = t$, 则 $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$
 于是 $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{dt}{t(1+2t^3+t^2)} = 6 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{4(t+1)} - \frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)} \right] dt$
 又 $\int \frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)} dt = \frac{3}{8} \int \frac{d(2t^2-t+1)}{2t^2-t+1} + \frac{1}{8} \int \frac{dt}{2t^2-t+1} = \frac{3}{8} \ln |2t^2-t+1| + \frac{1}{4\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C_1$
 从而 $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} = 6 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |t+1| - \frac{9}{4} \ln |2t^2-t+1| - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C = 6 \ln |\sqrt[6]{x}| - \frac{3}{2} \ln |\sqrt[6]{x}+1| - \frac{9}{4} \ln |2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1| - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C = \frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}} + C$
- (8) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} dx = \int (x-\sqrt{x^2-1}) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln |x+\sqrt{x^2-1}| + C$
- (9) 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$, 则 $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} dt$
 于是 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{3}{2} \ln t + C = -\frac{3}{2} \ln \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$
- (10) 令 $\sqrt[4]{x} = t$, 则 $x = t^4$, $dx = 4t^3 dt$
 于是 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3} = 4 \int \frac{t}{(1+t)^3} dt = 4 \int \left[\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right] dt = -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} + C = -\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} + C$
- (11) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right)}{\left[\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \sqrt{ax^2+bx+c} \right| + C$
- (12) 令 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} = t$
 于是 $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = - \int \frac{4at^2}{(1+t^4)^2} dt = -4a \int \left[\frac{t}{(t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)} \right]^2 dt = -\frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t^2-\sqrt{2}t+1)^2} - \frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t^2+\sqrt{2}t+1)^2} + a \int \frac{dt}{t^4+1}$
 又 $\int \frac{dt}{(t^2-\sqrt{2}t+1)^2} = \int \frac{d\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left[\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]^2} = \frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-\sqrt{2}t+1)} + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t-1) + C_1$
 $\int \frac{dt}{(t^2+\sqrt{2}t+1)^2} = \frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+\sqrt{2}t+1)} + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}t+1) + C_2$
 $\int \frac{1}{t^4+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t^4+1} dt - \frac{1}{2} \int \frac{t^2-1}{t^4+1} dt$

$$\text{而} \int \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = \int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}} dt = \int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} + C_3,$$

$$\int \frac{t^2-1}{t^4+1} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1} + C_4$$

$$\text{从而} \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = -\frac{at^3}{1+t^4} - \frac{a\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right| + \frac{a}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} + C,$$

$$\text{其中} t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}.$$

$$(13) \int_C x \sqrt{x^4+2x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2+1)^2-2} dx^2 = \frac{x^2+1}{4} \sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}) +$$

$$(14) \int \sqrt{2+x-x^2} dx = \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2} dx = \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-1}{3} + C$$

$$(15) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\int \sqrt{1+x-x^2} dx + \int \frac{x+1}{\sqrt{1+x-x^2}} dx = -\frac{2x-1}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{5}{8} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} - \sqrt{1+x-x^2} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C = -\frac{2x+3}{4} \sqrt{1+x-x^2} + \frac{7}{8} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$$

$$(16) \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}} = \ln \left(x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \right) + C = \ln \left| \frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x} \right| +$$

C

$$(17) \int \sin^6 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} \int (1+\cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \cos^2 2x d \sin 2x = \frac{1}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C = \frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$$

$$(18) \int \sin^2 x \cos^4 x dx = -\frac{1}{5} \int \sin x d \cos^5 x = -\frac{1}{5} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{5} \int \cos^6 x = -\frac{1}{5} \sin x \cos^5 x + \frac{1}{5} \left[\frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x \right] + C = \frac{1}{16} x - \frac{1}{20} \sin 2x + \frac{3}{320} \sin 4x + \frac{1}{240} \sin^3 2x - \frac{1}{5} \sin x \cos^5 x + C$$

$$(19) \int \sin^4 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^4 dx = \frac{1}{16} \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{64} \int (1-2\cos 4x+\cos^2 4x) dx = \frac{3}{128} x - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{1}{1024} \sin 8x + C$$

$$(20) \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2} \int \cos^3 x d \frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sin x} + \frac{3}{2} \int \sin x dx = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} d \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \cos x = -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \frac{3}{2} \cos x + C$$

$$(21) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^5 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^5 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \frac{1}{4} \cos^{-4} x + 2 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx = \frac{1}{4} \sec^4 x + 2 \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + 3 \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{4} \sec^4 x + \sec^2 x + 3 \ln \left| \tan x \right| - \frac{1}{2} \csc^2 x + C_1 = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{3}{2} \tan^2 x - \frac{1}{2} \cot^2 x + 3 \ln \left| \tan x \right| + C$$

$$(22) \int \tan x \cdot \tan(x+a) dx = \int \tan x \cdot \frac{\tan x + \tan a}{1 - \tan x \tan a} dx = \int \frac{\tan^2 x + \tan x \tan a + 1 - 1}{1 - \tan x \tan a} dx = \int \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan x \tan a} dx - \int dx = \int \frac{d \tan x}{1 - \tan x \tan a} - x = -\cot a \ln |1 - \tan x \tan a| - x + C_1 = \cot a \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right| - x + C$$

$$(23) \int \sin 5x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 4x) \, dx = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x + C$$

$$(24) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \, dx = \int \frac{1}{\csc^2 x + 1} \, dx = \int \left(1 - \frac{\csc^2 x}{1 + \csc^2 x} \right) \, dx = x + \int \frac{d \cot x}{2 + \cot^2 x} = x + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cot x \right) + C$$

$$(25) \text{ 设 } \sin(a-b) \neq 0,$$

$$\text{则 } \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \, dx = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} \right] \, dx = \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C$$

$$(26) I = \int x e^x \cos x \, dx = x e^x \cos x - \int e^x (\cos x - x \sin x) \, dx = x e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx + \int x e^x \sin x \, dx = x e^x \cos x - \frac{\sin x + \cos x}{2} e^x + x e^x \sin x - \int e^x (\sin x + x \cos x) \, dx = x e^x \cos x - \frac{\sin x + \cos x}{2} e^x + x e^x \sin x - \frac{\sin x - \cos x}{2} e^x - \int x e^x \cos x \, dx + C_1 = e^x (x \cos x + x \sin x - \sin x) - I + C_1,$$

$$\text{则 } I = \int x e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (x \cos x + x \sin x - \sin x) + C$$

$$(27) \text{ 令 } \tan \frac{x}{2} = t, \text{ 则 } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\text{于是 } \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)} dt = \int \left(\frac{1}{3t} + \frac{2t}{3(3+t^2)} \right) dt = \frac{1}{3} \ln |t(t^2+3)| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 3 \right) \right| + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C$$

$$(28) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2})^2 \, dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2})^2 - \int x \cdot \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} \cdot 2(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \, dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2})^2 - \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2})^2 - 2\sqrt{1+x^2} + C$$

$$(29) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx = \int \frac{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \, dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d \left(\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right)}{\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right)} = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C$$

$$(30) \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx = \int \ln x \, d \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$(31) \int x e^x \sin x \, dx = x e^x \sin x - \int e^x (\sin x + x \cos x) \, dx = x e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx - \int x e^x \cos x \, dx = x e^x \sin x - \frac{\sin x - \cos x}{2} e^x - \frac{e^x}{2} (x \cos x + x \sin x - \sin x) + C = \frac{e^x}{2} (x \sin x - x \cos x + \cos x) + C$$

$$(32) \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -x^2 \arccos x \sqrt{1-x^2} + 2 \int x \arccos x \sqrt{1-x^2} \, dx - \int x^2 \, dx = -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x - \frac{2}{3} \int (1-x^2) \, dx = -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x - \frac{2}{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) + C = -\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{3} \sqrt{1-x^2} \arccos x + C$$

$$(33) \int (x+|x|)^2 \, dx = \int (2x^2+2x|x|) \, dx = \frac{2}{3} x^3 + 2 \int x \cdot \operatorname{sgn} x \cdot x \, dx = \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^3 \operatorname{sgn} x + C = \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^2 |x| + C$$

$$(34) \int x^2 e^x \cos x \, dx = x^2 e^x \cos x - \int e^x (2x \cos x - x^2 \sin x) \, dx = x^2 e^x \cos x - e^x (x \cos x + x \sin x - \sin x) + x^2 e^x \sin x - \int e^x (2x \sin x + x^2 \cos x) \, dx = x^2 e^x (\cos x + \sin x) - e^x (x \cos x + x \sin x - \sin x) - e^x (x \sin x - x \cos x + \cos x) - \int x^2 e^x \cos x \, dx + C_1 = e^x (x^2 \cos x + x^2 \sin x - 2x \sin x + \sin x - \cos x) - I + C_1,$$

$$\text{则 } I = \int x^2 e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (x^2 \cos x + x^2 \sin x - 2x \sin x + \sin x - \cos x) + C$$

$$(35) \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = - \int xe^x d\frac{1}{1+x} = -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C = \frac{e^x}{x+1} + C$$

$$(36) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \frac{2}{3} \ln^2 x \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \ln x dx = \frac{2}{3} \ln^2 x \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} \ln x + \frac{8}{9} \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \ln^2 x \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} \ln x + \frac{16}{27} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{27} x^{\frac{3}{2}} (9 \ln^2 x - 12 \ln x + 8) + C$$

$$(37) \text{ 令 } t = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}, \text{ 则 } x = \frac{b+at^2}{1+t^2}, x-a = \frac{b-a}{1+t^2}, dx = -\frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2} dt,$$

$$\text{于是 } \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = -2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -2 \arctan t + C = -2 \arctan \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} + C$$

$$(38) \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{dx}{1-x^2} + \int dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C$$

$$(39) \int x \arctan x \cdot \ln(1+x^2) dx = \frac{x^2}{2} \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int x^2 \left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{2x \arctan x}{1+x^2} \right] dx = \frac{x^2}{2} \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) dx + \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx - \int x \arctan x dx + \int \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + \int \frac{x^2}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \arctan x \ln(1+x^2) - \int \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx + \int \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx - \frac{x^2}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + \frac{3}{2} x - \frac{3}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x \ln(1+x^2) - \frac{x^2}{2} \arctan x + C = \frac{1}{2} \arctan x [x^2 \ln(1+x^2) + \ln(1+x^2) - x^2 - 3] - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + \frac{3}{2} x + C$$

$$(40) \int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sinh^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (\cosh 4x - 1) dx = \frac{1}{32} \sinh 4x - \frac{x}{8} + C$$

第七章 定积分

§1 定积分的概念

利用定积分的定义计算积分:

$$(1) \int_0^l f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = ax + b, a, b \text{ 是常数}$$

$$(2) \int_{-1}^2 x^2 dx$$

$$(3) \int_0^1 a^x dx$$

解:

(1) 因 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上连续, 故定积分必存在, 据定积分定义, 将区间 $[0, l]$ n 等分, 则每一子区间的长为 $\Delta x_i = \frac{l}{n}$,

取 ξ_i 为每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的右端点, 即 $\xi_i = \frac{i}{n}l (i = 1, 2, \dots, n)$.

$$\text{作积分和 } \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (a\xi_i + b) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ia}{n}l + b \right) \frac{l}{n} = \sum_{i=1}^n (nb + ia) \frac{l}{n^2} = bl + \frac{n+1}{2n} al^2,$$

$$\text{于是 } \int_0^l f(x) dx = \lim_{||x||=\frac{1}{n} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (a\xi_i + b) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(bl + \frac{n+1}{2n} al^2 \right) = bl + \frac{a}{2} l^2$$

(2) 因 x^2 在 $[-1, 2]$ 上连续, 故定积分必存在, 据定积分定义, 将区间 $[-1, 2]$ n 等分, 则每一子区间的长为 $\Delta x_i = \frac{3}{n}$, 取 ξ_i 为每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的右端点, 即 $\xi_i = -1 + \frac{3i}{n} = \frac{3i-n}{n} (i = 1, 2, \dots, n)$.

$$\text{作积分和 } \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i-n}{n} \right)^2 \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{3}{n^3} (9i^2 - 6ni + n^2) = \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - 9 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 3,$$

$$\text{于是 } \int_{-1}^2 x^2 dx = \lim_{||x||=\frac{1}{n} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) - 9 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 3 \right] = 3$$

(3) 因 a^x 在 $[0, 1]$ 上连续, 故定积分必存在, 据定积分定义, 将区间 $[0, 1]$ n 等分, 则每一子区间的长为 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$,

取 ξ_i 为每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的右端点, 即 $\xi_i = \frac{i}{n} (i = 1, 2, \dots, n)$.

$$\text{作积分和 } \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n a^{\xi_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a^{\frac{i}{n}} = \begin{cases} \frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}, & a \neq 1 \\ 1, & a = 1 \end{cases} \quad \text{于是 } \int_0^1 a^x dx = \lim_{||x||=\frac{1}{n} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n a^{\xi_i} \Delta x_i =$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})} = \frac{a-1}{\ln a}, & a \neq 1 \\ 1, & a = 1 \end{cases}$$

§2 定积分存在的条件

1. 判断下列函数的可积性:

(1) $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上有界, 它的不连续点是 $\frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$

(2) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$, 在 $[0, 1]$.

解

(1) $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上是可积的.

因 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上有界, 故 $\exists M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [-2, 2]$, 从而其振幅 $\omega(f) \leq 2M$.

$\forall \varepsilon > 0$, 取自然数 N 满足 $N = \left\lceil \frac{2M}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, 于是在 $\left[\frac{1}{N}, 2\right]$ 上 $f(x)$ 只有有限多个不连续点, 因而 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{N}, 2\right]$ 上可积.

在 $\left[0, \frac{1}{N}\right]$ 上, 将其分割为部分区间 Δx_i , 第 i 个小区间 Δx_i 上的振幅设为 $\omega_i(f) \leq \omega(f) \leq 2M$, 则 $\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i \leq$

$2M \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \frac{2M}{N} < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$, 故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{N}\right]$ 上也是可积的.

又由于 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上连续, 当然可积.

据积分关于区间可加性, 得 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上可积.

(2) 补充定义 $f(0) = 0$.

由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 又 $\operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ 只在 $x = 0, \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$ 间断, 故由本题 (1), 得 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积.

2. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 其积分是 I , 今在 $[a, b]$ 内有限个点上改变 $f(x)$ 的值使它成为另一个函数 $f^*(x)$, 证明 $f^*(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积, 并且其积分仍为 I .

证明: 令 $F(x) = f(x) - f^*(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上除改变了 $f(x)$ 的函数值的有限个点外均为 0, 即除这有限个点外, 函数连续, 从而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且积分为 0.

又 $f^*(x) = f(x) - F(x)$, 据可积函数的差仍可积,

$$\text{有 } \int_a^b f^*(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b F(x) dx = \int_a^b f(x) dx = I.$$

3. 讨论 $f, f^2, |f|$ 三者间可积性的关系.

解:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积.

因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界. 设 $f(x) \leq M, M$ 为常数 ($x \in [a, b]$)

在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取两点 x', x'' , 考虑 $f^2(x'') - f^2(x') = [f(x'') - f(x')][f(x'') + f(x')]$

取 ω_i 表示 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的幅度, 则 $|f^2(x'') - f^2(x')| \leq 2\omega_i M$

若 $f^2(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的幅度为 Ω_i , 就有 $\Omega_i \leq 2\omega_i M$, 从而有 $\sum_i \Omega_i \Delta x_i \leq 2M \sum_i \omega_i \Delta x_i$

由于 $f(x)$ 可积, 有 $\sum_i \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 (\lambda(\Delta) \rightarrow 0)$, 则 $\sum_i \Omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 (\lambda(\Delta) \rightarrow 0)$, 这就说明了 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积性.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也可积.

分别把函数 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的幅度记为 ω_i, ω_i^* .

因对属于 $[x_{i-1}, x_i]$ 的任意两点 x', x'' , 有 $||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$, 故有 $\omega_i^* \leq \omega_i$, 于是 $\sum_i \omega_i^* \Delta x_i \leq$

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

由于 $\sum_i \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 (\lambda(\Delta) \rightarrow 0)$, 就可以推得 $\lambda(\Delta) \rightarrow 0$ 时, 也有 $\sum_i \omega_i^* \Delta x_i \rightarrow 0$, 这就说明了 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的可积性.

(3) 若 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积, 不能肯定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积.

$$\text{例: } f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$|f(x)| = 1$ 在任何闭区间上可积, 但 $f(x)$ 却在任何闭区间上都不可积.

(4) 若 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 不能肯定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积.

$$\text{例: } f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

$f^2(x) = 1$ 在任何闭区间上可积, 但 $f(x)$ 却在任何闭区间上都不可积.

(5) 若 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则由(1), 得 $f^2(x) = |f(x)|^2$ 在 $[a, b]$ 上一定可积.

(6) 若 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则由 $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$, 外层函数连续, 里层函数可积, 得此函数必可积.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 证明存在折线函数列 $\varphi_n(x) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 使得 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx$

证明: 将 $[a, b]$ n 等分, 设分点为 $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b$ 即 $x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a), i = 0, 1, \dots, n$ 在 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上令 $\varphi_n(x)$ 为过点 $(x_{i-1}^{(n)}, f(x_{i-1}^{(n)}))$ 及 $(x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)}))$ 的直线, 即当 $x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})$ 时, 令 $\varphi_n(x) = f(x_{i-1}^{(n)}) + \frac{x - x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}}(f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)}))$

则 $\varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一个折线函数列, 当然是连续函数列, 因此 $\int_a^b \varphi_n(x) dx$ 有定义.

若令 $m_i^{(n)}, M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$ 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上的下确界、上确界及振幅, 则当 $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时, $m_i^{(n)} \leq \varphi_n(x) \leq M_i^{(n)}, m_i^{(n)} \leq f(x) \leq M_i^{(n)}$, 从而 $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq \omega_i^{(n)}$

于是, 有 $\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}} |f(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)}$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 故当 $\max |\Delta x_i^{(n)}| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ 时, 必有 $\sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)} \rightarrow 0$, 因而 $\int_a^b f(x) dx =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx.$$

5. 若函数 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 可积, 证明 $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0$, 其中 $A < a < b < B$ (这一性质称为积分的连续性)

证明: 因 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 可积, 由上题结论, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $[A, B]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 使 $\int_A^B |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}$

因 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 连续, 从而一致连续, 则对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对 $[A, B]$ 中任意两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有 $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

于是当 $|h| < \delta$ 时, 有 $\int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = \int_a^b |f(x+h) - \varphi(x+h) + \varphi(x+h) - \varphi(x) + \varphi(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b |f(x+h) - \varphi(x+h)| dx + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x+h) - \varphi(x+h)| dx + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx + \int_A^B |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

从而 $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0$

§3 定积分的性质

1. 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 证明 $f(x) + g(x)$ 也在 $[a, b]$ 可积, 并且 $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

证明: 因 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 即 $\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx$ 存在, 故对任意分法 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 以及 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任意 ξ_i , 有 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$

由分法 Δ 及 ξ_i 的任意性, 得 $g(x)$ 在此任意分法下, 对上述 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的 ξ_i , 也有 $\lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx$,

于是 $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \Delta x_i = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$

从而 $f(x) + g(x)$ 也在 $[a, b]$ 可积, 并且 $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$

证明: $|f(x)|$ 在任何区间 $[a, b]$ 上可积, 但 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 不可积.

证明: 因 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 故 $|f(x)| = 1$,

则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积

对于函数 $f(x)$, 在 $[a, b]$ 的任一部分区间 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$ 上 $\omega_i = 2$, 故 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 2 \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 2(b-a) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 于是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $f(x) \geq 0$, $f(x)$ 不恒为零, 证明 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

证明: 因 $f(x) \geq 0$ 且不恒为零, 则必存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) > 0$

由连续函数的局部保号性, 存在 $0 < \delta \leq \min\left(\frac{x_0 - a}{2}, \frac{b - x_0}{2}\right)$, 使当 $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 时, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} >$

0, 于是有 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{f(x_0)}{2} dx = f(x_0) \delta > 0$.

4. 比较下列各题中积分的大小:

(1) $\int_0^1 x dx, \int_0^1 x^2 dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

(3) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^x dx, \int_0^1 3^x dx$

解:

(1) 因 $x \in (0, 1)$ 时, $x > x^2$, 则 $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$

(2) 因 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $x > \sin x$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

(3) 因 $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} dx = \int_0^1 3^{2-x} dx$ 且当 $x \in (0, 1)$ 时, $2 - x > x$, 故 $3^{2-x} > 3^x$,
从而 $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^x dx > \int_0^1 3^x dx$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $\int_a^b f^2(x) dx = 0$, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为零.

证明: 用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不恒为零, 则 $f^2(x) \geq 0$ 且不恒为零.

又 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,

则据第3题可知 $\int_a^b f^2(x) dx > 0$, 这与已知 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ 矛盾.

于是假设错误, 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为零.

6. 举例说明: $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 但 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 不可积.

解: 例: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 故 $f^2(x) = 1$,

则 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

又由第二题可知, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积.

7. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 证明 $\lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x) dx$, 其中 $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, x_{i-1} \leq \theta_i \leq x_i (i = 1, 2, \dots, n), \Delta x_i = x_i - x_{i-1} (x_0 = a, x_n = b)$.

证明: 因 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故 $f(x) \cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 即 $\lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i =$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx$$

$$\text{而 } \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i = \lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i +$$

$$\lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i \right]$$

$$\text{又 } \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(\theta_i) - g(\xi_i))\Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| |g(\theta_i) - g(\xi_i)| \Delta x_i \leq$$

$$\sum_{i=1}^n M(f)\omega_i(g)\Delta x_i = M(f) \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i, \text{ 其中 } M(f) \text{ 表示 } |f| \text{ 在 } [a, b] \text{ 上的上界, } \omega_i(g) \text{ 表示 } g \text{ 在 } [x_{i-1}, x_i] \text{ 上的振幅.}$$

由 f 的连续性和 g 的可积性, 当 $\max(\Delta x_i) \rightarrow 0$ 时, 上面不等式右端 $M(f) \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i \rightarrow 0$, 从而 $\lim_{\max(\Delta x_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i =$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx.$$

8. 设 $y = \varphi(x) (x \geq 0)$ 是严格单调增加的连续函数, $\varphi(0) = 0, x = \psi(y)$ 是它的反函数, 证明 $\int_0^a \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(y) dy \geq ab (a \geq 0, b \geq 0)$.

证明: 由 $y = \varphi(x)$ 也是严格单调增加的连续函数, $\varphi(0) = 0$ 知其反函数 $x = \psi(y)$ 是严格单调增加的连续函数, 且 $\psi(0) = 0$, 因而 $\int_0^a \varphi(x) dx, \int_0^b \psi(y) dy$ 有定义

令 $g(x) = bx - \int_0^x \varphi(t) dt$, 特别地, 有

$$g(a) = ab - \int_0^a \varphi(t) dt \quad (1)$$

而且 $g'(x) = b - \varphi(x)$

由 $\varphi(x)$ 是严格单调增加的连续函数, 因此当 $0 < x < \psi(b)$ 时, 有 $g'(x) > 0$; 当 $x > \psi(b)$ 时, 有 $g'(x) < 0$; 当 $x = \psi(b)$ 时, 有 $g'(x) = 0$, 因此当 $x = \psi(b)$ 时, $g(x)$ 取最大值, 即有

$$g(a) \leq \max g(x) = g(\psi(b)) \quad (2)$$

分部积分, 得 $\int_0^{\psi(b)} x\varphi'(x) dx = b\psi(b) - \int_0^{\psi(b)} \varphi(x) dx = g(\psi(b))$, 用变量代换 $y = \varphi(x)$, 则 $x = \psi(y)$, 于是

$$g(\psi(b)) = \int_0^{\psi(b)} x\varphi'(x) dx = \int_0^b \psi(y) dy \quad (3)$$

将(??)、(??)代入(??)就得到 $\int_0^a \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(y) dy \geq ab (a \geq 0, b \geq 0)$.

1. 计算下列定积分:

$$(1) \int_1^2 \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx$$

$$(2) \int_1^{\frac{\pi}{2}} (a \sin x + b \cos x) dx$$

$$(3) \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 dx$$

$$(4) \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^3(1-5x^2)^{10} dx$$

$$(6) \int_0^1 x^2(2-3x^2)^2 dx$$

$$(7) \int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} x\sqrt{2-5x} dx$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin mx \cos nx dx$$

$$(9) \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{18x-4}{\sqrt{9x^2+6x+5}} dx$$

$$(10) \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx$$

$$(11) \int_0^1 x \arctan x dx$$

$$(12) \int_0^{2\pi} x \cos^2 x dx$$

$$(13) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$$

$$(14) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt$$

$$(15) \int_0^3 \frac{x dx}{1 + \sqrt{1+x}}$$

$$(16) \int_0^4 x(x + \sqrt{x}) dx$$

$$(17) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$$

$$(18) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$$

$$(19) \int_{-1}^0 (x+1)\sqrt{1-x-x^2} dx$$

$$(20) \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

解:

$$\begin{aligned} (1) \int_1^2 \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx &= \int_1^2 \frac{x^3+x^2-3x+3}{3x^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 \left(x+1-\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} + x - 3 \ln x + \frac{3}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} - \ln 2 \end{aligned}$$

- (2) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} (a \sin x + b \cos x) dx = (-a \cos x + b \sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = a + b$
- (3) 令 $y = x + 1$, 则 $\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx = \int_1^2 \left(\frac{y-2}{y}\right)^4 dy = \int_1^2 \left(1 - \frac{8}{y} + \frac{24}{y^2} - \frac{32}{y^3} + \frac{16}{y^4}\right) dy = \left(y - 8 \ln y - \frac{24}{y} + \frac{16}{y^2} - \frac{16}{3y^3}\right)\Big|_1^2 = \frac{17}{3} - 8 \ln 2$
- (4) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right] dx = \frac{1}{2} [\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x+1) + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x-1)]\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\arctan(\sqrt{2}+1) + \arctan(\sqrt{2}-1)) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$
- (5) 令 $x = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin u$, $dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos u du$,
 则 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^3(1-5x^2)^{10} dx = \frac{1}{25} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u \cos^{21} u du = -\frac{1}{25} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 u) \cos^{21} u d \cos u = -\frac{1}{25} \left(\frac{\cos^{22} u}{22} - \frac{\cos^{24} u}{24}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6600}$
- (6) $\int_0^1 x^2(2-3x^2)^2 dx = \int_0^1 (4x^2 - 12x^4 + 9x^6) dx = \frac{23}{105}$
- (7) 令 $u = \sqrt{2-5x}$
 则 $\int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} x\sqrt{2-5x} dx = \frac{2}{25} \int_1^{\sqrt{3}} (2u^2 - u^3) du = \frac{2}{375} (3\sqrt{3} - 7)$
- (8) 当 $m \neq \pm n$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \frac{m}{m^2-n^2} - \frac{\cos \frac{m+n}{2} \pi}{2(m+n)} - \frac{\cos \frac{m-n}{2} \pi}{2(m-n)}$;
 当 $m = \pm n$ 且 $m \neq 0$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin mx \cos nx dx = \pm \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx dx = -\frac{1}{4n} \cos 2nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pm \frac{1}{4n} (1 - \cos n\pi) = \pm \frac{1}{4n} [1 - (-1)^n] (n \in \mathbb{Z} \text{ 且 } n \neq 0)$;
 当 $m = 0$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin mx \cos nx dx = 0$
- (9) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{18x-4}{\sqrt{9x^2+6x+5}} dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{d(9x^2+6x+5)}{\sqrt{9x^2+6x+5}} - \frac{10}{3} \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2}} = \left[2\sqrt{9x^2+6x+5} - \frac{10}{3} \ln \left(\frac{3x+1}{2} + \sqrt{1+\left(\frac{3x+1}{2}\right)^2}\right)\right]\Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = 4(\sqrt{2}-1) - \frac{10}{3} \ln(\sqrt{2}+1)$
- (10) 令 $u = x^2$
 $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} u e^{-u} du = \frac{1}{2} \left(-u e^{-u}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-u} du\right) = \frac{1}{4} (1 - \ln 2)$
- (11) $\int_0^1 x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi-2}{4}$
- (12) $\int_0^{2\pi} x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(1+\cos 2x) dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} x \sin 2x\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin 2x dx = \pi^2$
- (13) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = 2x^2 \sin x\Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} x \sin x dx = 4x \cos x\Big|_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} \cos x dx = -4\pi$
- (14) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] dt = \frac{\pi}{\omega} \cos \varphi - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t + \varphi)\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\pi}{\omega} \cos \varphi$
- (15) $\int_0^3 \frac{x dx}{1+\sqrt{1+x}} = \int_0^3 \frac{x(1-\sqrt{1+x})}{-x} dx = \int_0^3 (\sqrt{1+x}-1) dx = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 - 3 = \frac{5}{3}$
- (16) $\int_0^4 x(x+\sqrt{x}) dx = \int_0^4 (x^2 + x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{512}{15}$

$$(17) \text{ 当 } m \neq \pm n (m, n \in Z) \text{ 时, } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx = \left. \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} \right|_{-\pi}^{\pi} - \left. \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\text{当 } m = \pm n (m, n \in Z) \text{ 且 } m \neq 0 \text{ 时, } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pm \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pm \int_0^{\pi} (1 - \cos 2mx) \, dx = \pm \pi;$$

$$\text{当 } m = 0 \text{ 时, } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$$

$$(18) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$$(19) \int_{-1}^0 (x+1)\sqrt{1-x-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 (1-x-x^2)^{\frac{1}{2}} \, d(1-x-x^2) + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sqrt{1-x-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sqrt{1-x-x^2} \, dx = \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$(20) \text{ 令 } x = \tan t \\ \text{则 } \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int_0^{\arctan 0.75} \frac{dt}{\sin t + \cos t} = \int_0^{\arctan 0.75} \frac{d\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \Big|_0^{\arctan 0.75} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\tan\left(\frac{\arctan 0.75}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{\tan \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$$

2. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx$$

$$(4) \int_0^{2\pi} \cos^6 x \, dx$$

$$(5) \int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx$$

$$(6) \int_0^1 (1-x^2)^6 \, dx$$

解:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx = \frac{6!!}{7!!}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx = \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x \, dx$$

$$\text{在后一积分中, 令 } x = \pi - y, \text{ 则 } \sin x = \sin y, \, dx = -dy, \text{ 于是 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x \, dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^5 y \, dy =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 y \, dy = I_5$$

$$\text{从而 } \int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx = 2I_5 = 2 \cdot \frac{4!!}{5!!} = \frac{16}{15}$$

$$(4) \int_0^{2\pi} \cos^6 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 x \, dx = 2 \int_0^{\pi} \cos^6 x \, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \, dx = 4 \cdot \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{24}$$

$$(5) \text{ 令 } x = a \cos t, \, dx = -a \sin t \, dt,$$

$$\text{则 } \int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx = -a^{2n+1} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{2n+1} t \, dt = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} a^{2n+1}$$

(6) 在上题中, 令 $a=1, n=6$, 则 $\int_0^1 (1-x^2)^6 dx = \frac{12!!}{13!!}$

3. 设 $f(x)$ 是周期函数, 周期是 T , 证明 $\int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$, 此处 n 是正整数.

证明: $\int_a^{a+nT} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x) dx + \int_{nT}^{a+nT} f(x) dx$

对上述等式的最后一个积分, 设 $x - nT = t$, 则 $\int_{nT}^{a+nT} f(x) dx = \int_0^a f(t+nT) dt = \int_0^a f(t) dt$

对 $1 < i < n$, 考虑积分 $\int_{(i-1)T}^{iT} f(x) dx$, 设 $x - (i-1)T = t$, 则 $\int_{(i-1)T}^{iT} f(x) dx = \int_0^T f(t + (i-1)T) dt =$

$$\int_0^T f(t) dt$$

从而 $\int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$

4. 证明: (m, n 为正整数)

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 (m \neq n)$$

证明:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{m} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2mx) dx = \pi - \frac{1}{2m} \sin 2mx \Big|_0^{\pi} = \pi$$

同理可得, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{\sin(m+n)x}{(m+n)} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(m-n)x}{(m-n)} \Big|_0^{\pi} = 0$$

5. 证明若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 连续, 则:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$(2) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

证明:

$$(1) \text{ 令 } \frac{\pi}{2} - t = x, \text{ 则 } dx = -dt, f(\sin x) = f(\cos t),$$

$$\text{于是 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt$$

$$\text{即 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$(2) \text{ 设 } t = \pi - x, \text{ 则 } dx = -dt \text{ 且 } xf(\sin x) = (\pi - t)f(\sin t)$$

$$\text{于是 } \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = - \int_{\pi}^0 (\pi - t)f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t) dt, \text{ 则 } 2 \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx =$$

$$\pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx, \text{ 从而 } \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d \cos x}{1 + \cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

6. 证明奇函数的一切原函数皆为偶函数, 偶函数的原函数中有一为奇函数.

证明: 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上有定义, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

当 $f(x)$ 为奇函数即当 $f(-x) = -f(x)$ 时, 由于 $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$,

$f(-x) = -\frac{d}{dx} F(-x)$, 故有 $\frac{d}{dx} [F(x) - F(-x)] = 0$, 从而可得 $F(x) - F(-x) = C_1$ 且 $C_1 = 0$, 于是 $F(x) =$

$F(-x)$, 则 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$ 为偶函数, 从而 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x) + C$ (C 为任意常数) 也为偶函数

当 $f(x)$ 为偶函数即当 $f(-x) = f(x)$ 时, 类似可得 $F(x) + F(-x) = C_2$ 且 $C_2 = 2F(0)$, 于是 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x) - F(0)$ 是奇函数.

7. 若 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称, 且 $a < T < b$, 则 $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^{2T-b} f(x) dx$

证明: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{2T-b} f(x) dx + \int_{2T-b}^T f(x) dx + \int_T^b f(x) dx$

对上述等式右端的第二个积分, 设 $x = 2T - t$, 则 $\int_{2T-b}^T f(x) dx = - \int_b^T f(2T-t) dt$

又 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称, 则 $f(2T-t) = f(t)$

于是 $\int_{2T-b}^T f(x) dx = - \int_b^T f(2T-t) dt = - \int_b^T f(t) dt = \int_T^b f(t) dt$, 从而 $\int_a^b f(x) dx = 2 \int_T^b f(x) dx + \int_a^{2T-b} f(x) dx$

8. 证明: $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx (a > 0)$

证明: 令 $t = x^2$, 则 $2x dx = dt$, 于是 $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} tf(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx$

9. 利用分部积分证明: $\int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x \left\{ \int_0^u f(x) dx \right\} du$

证明: $\int_0^x \left\{ \int_0^u f(x) dx \right\} du = u \int_0^u f(x) dx \Big|_0^x - \int_0^x u f(u) du = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x xf(u) du - \int_0^x uf(u) du = \int_0^x f(u)(x-u) du$

10. 一长度为 l 的横梁, 所受载荷按规律 $p(x) = a + bx + cx^2$ 分布, 试由下述条件决定系数 a, b, c ; 总载荷是 $P = \int_0^l p(x) dx$, 极大载荷位于 $\frac{2}{3}l$ 处, 且在极大点的左右两边各承受总载荷的一半.

解: 由已知, 得

$$(1) P = \int_0^l p(x) dx = al + \frac{b}{2}l^2 + \frac{c}{3}l^3$$

$$(2) \text{ 令 } P(x) = \int_0^x p(t) dt, \text{ 则 } P' \left(\frac{2}{3}l \right) = p \left(\frac{2}{3}l \right) = a + \frac{2}{3}bl + \frac{4}{9}cl^2 = 0$$

$$(3) \int_0^{\frac{2}{3}l} p(x) dx = \frac{2}{3}al + \frac{2}{9}bl + \frac{8}{81}cl^3 = \frac{P}{2}$$

$$\text{联立方程组} \begin{cases} al + \frac{b}{2}l^2 + \frac{c}{3}l^3 = P \\ \frac{2}{3}al + \frac{2}{9}bl + \frac{8}{81}cl^3 = \frac{P}{2} \\ a + \frac{2}{3}bl + \frac{4}{9}cl^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{求解, 得} \begin{cases} a = \frac{4}{l}P \\ b = -\frac{69}{4l^2}P \\ c = \frac{135}{8l^3}P \end{cases}$$

11. 若 $f(x)$ 连续, 求:

$$(1) \frac{d}{dx} \left(\int_x^b f(t) dt \right)$$

$$(2) \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right)$$

解:

$$(1) \frac{d}{dx} \left(\int_x^b f(t) dt \right) = \frac{d}{dx} \left(- \int_b^x f(t) dt \right) = - \frac{d}{dx} \left(\int_b^x f(t) dt \right) = -f(x)$$

$$(2) \text{ 因 } \frac{d}{dx^2} \left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right) = f(x^2), \text{ 故 } \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right) = \frac{d}{dx^2} \left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right) \cdot \frac{dx^2}{dx} = 2xf(x^2)$$

12. 求极限:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} (p > 0)$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n-1}{n}} \right)$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

解:

- (1) 函数 $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 连续, 因而可积. 将 $[0, 1]$ n 等分, 分点为 $\frac{i}{n}, \Delta x_i = \frac{1}{n} (i = 0, 1, \cdots, n-1)$, 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}] = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 则 $f(\xi_i) = \frac{i}{n}$,

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

- (2) 函数 $f(x) = x^p$ 在 $[0, 1]$ 连续, 因而可积. 将 $[0, 1]$ n 等分, 分点为 $\frac{i}{n}, \Delta x_i = \frac{1}{n} (i = 1, 2, \cdots, n)$, 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 则 $f(\xi_i) = \left(\frac{i}{n} \right)^p$,

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^p \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1}$$

- (3) 函数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 在 $[0, 1]$ 连续, 因而可积. 将 $[0, 1]$ n 等分, 分点为 $\frac{i}{n}, \Delta x_i = \frac{1}{n} (i = 0, 1, \cdots, n-1)$, 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}] = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 则 $f(\xi_i) = \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$,

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n-1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{x+1} \, dx = 0 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

- (4) 因 $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(\frac{n}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$, 故 $\ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{n} \left(\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \cdots + \ln \frac{n}{n} \right)$

又函数 $f(x) = \ln x$ 在 $(0, 1]$ 连续, 考虑 $\lim_{\xi \rightarrow +0} \int_{\xi}^1 \ln x \, dx$. 将 $(0, 1]$ n 等分, 分点为 $\frac{i}{n}, \Delta x_i = \frac{1}{n} (i = 1, 2, \cdots, n)$, 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 则 $f(\xi_i) = \left(\frac{i}{n} \right)^p$,

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \cdots + \ln \frac{n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{\xi \rightarrow +0} \int_{\xi}^1 \ln x \, dx = \lim_{\xi \rightarrow +0} (x \ln x - x)|_{\xi}^1 = -1$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

13. 根据例7有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$, 由此推证 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots$

证明: 因 $I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$, $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 5 \cdot 3}$,

$$\text{则 } \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2}{\pi}$$

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $0 \leq \sin x \leq 1$, $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx \leq$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx \text{ 即 } I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}, \text{ 于是 } 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$$

又由递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$ 即 $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} =$

$$1, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1, \text{ 从而 } \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots$$

14. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 可积, 证明

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) \, dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) \, dx \cdot \int_a^b g^2(x) \, dx$$

又等式在何时成立?

证明: 对任何实数 h , 因 $[hf(x) - g(x)]^2 = h^2 f^2(x) - 2hf(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$

由积分的性质, 得 $\int_a^b (h^2 f^2(x) - 2hf(x)g(x) + g^2(x)) \, dx \geq 0$ 即 $h^2 \int_a^b f^2(x) \, dx - 2h \int_a^b f(x)g(x) \, dx + \int_a^b g^2(x) \, dx \geq 0$

由二次三项式非负的条件, 得 $\left(2 \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x) \, dx \cdot \int_a^b g^2(x) \, dx \leq 0$ 即 $\left[\int_a^b f(x)g(x) \, dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) \, dx \cdot \int_a^b g^2(x) \, dx$

要使等号成立, 只要 $\left(2 \int_a^b f(x)g(x) \, dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x) \, dx \cdot \int_a^b g^2(x) \, dx = 0$ 即 $h^2 \int_a^b f^2(x) \, dx - 2h \int_a^b f(x)g(x) \, dx + \int_a^b g^2(x) \, dx = 0$ 有重根.

不妨设 h_0 为方程的重根, 则 $h_0^2 \int_a^b f^2(x) \, dx - 2h_0 \int_a^b f(x)g(x) \, dx + \int_a^b g^2(x) \, dx = 0$ 即 $\int_a^b [h_0 f(x) - g(x)]^2 \, dx = 0$

而当 $g(x) = h_0 f(x)$ 时, $\int_a^b [h_0 f(x) - g(x)]^2 \, dx = 0$ (其中 h_0 为方程 $h^2 \int_a^b f^2(x) \, dx - 2h \int_a^b f(x)g(x) \, dx + \int_a^b g^2(x) \, dx = 0$ 的重根)

第八章 定积分的应用和近似计算

§1 平面图形的面积

1. 求由下列各曲线所围成的图形面积:

- (1) $y^2 = 4(x+1), y^2 = 4(1-x)$
- (2) $y = |\ln x|, y = 0, (0.1 \leq x \leq 10)$
- (3) $y = x, y = x + \sin^2 x, (0 \leq x \leq \pi)$
- (4) $y^2 = 1-x, 2y = x+2$
- (5) 蚌线 $r = a \cos \theta + b (b \geq a)$, 当 $b = a$ 时即为心脏线
- (6) $r = 3 \cos \theta, r = 1 + \cos \theta$
- (7) 旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ 以及 x 轴
- (8) 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

解:

- (1) 两条曲线 $x = \frac{y^2-4}{4}$ 与 $x = \frac{-y^2+4}{4} = -\frac{y^2-4}{4}$ 的交点的纵坐标分别为 -2 及 2 ,
于是 $A = \int_{-2}^2 \left[-\frac{y^2-4}{4} - \frac{y^2-4}{4} \right] dy = -\int_0^2 (y^2-4) dy = \frac{16}{3}$
- (2) 两条曲线 $y = |\ln x|$ 与 $y = 0$ 的交点的横坐标为 1 ,
于是 $A = \int_{0.1}^{10} [\ln |x| - 0] dx = \int_{0.1}^1 (-\ln x) dx + \int_1^{10} \ln x dx = -(x \ln x - x) \Big|_{0.1}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^{10} = 9.9 \ln 10 - 8.1 \approx 14.69559$
- (3) $A = \int_0^\pi (x + \sin^2 x - x) dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$
- (4) 两条曲线的交点分别为 $(0, 1), (-8, -3)$,
于是 $A = \int_{-3}^1 [1 - y^2 - (2y - 2)] dy = \int_{-3}^1 (3 - y^2 - 2y) dy = \frac{32}{3}$
- (5) 所求面积为: $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} a^2 + \pi b^2$
- (6) 所求面积为: $A = \pi \left(\frac{3}{2} \right)^2 - A_1 = \frac{9}{4} \pi - A_1$
其中 $A_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [9 \cos^2 \theta - (1 + \cos \theta)^2] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [8 \cos^2 \theta - 1 - 2 \cos \theta] d\theta = \pi$,
从而 $A = \frac{5}{4} \pi$
- (7) 所求面积为: $A = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2$
- (8) 设 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, 其中 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$, 它对应于四分之一的面积, 所求面积为其四倍
即 $A = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-3a^2 \sin^4 t \cos^2 t) dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x - \sin^6 x) dx = \frac{3\pi}{8} a^2$

2. 直线 $y = x$ 把椭圆 $x^2 + 3y^2 = 6y$ 的面积分成两部分 A (小的一块) 和 B (大的一块), 求 $\frac{A}{B}$ 之值.

解: 由已知, 得椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + (y-1)^2 = 1$, 则椭圆面积为 $S = \pi ab = \sqrt{3}\pi$

又 $y = x$ 与椭圆 $x^2 + 3y^2 = 6y$ 的交点的纵坐标为 $0, \frac{3}{2}$

于是 $A = \int_0^{\frac{3}{2}} (\sqrt{6y-3y^2} - y) dy = \sqrt{3} \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-(y-1)^2} dy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \frac{3}{4}$, 则 $B = S - A = \frac{2}{3} \sqrt{3} \pi + \frac{3}{4}$,

从而 $\frac{A}{B} = \frac{4\sqrt{3}\pi - 9}{8\sqrt{3}\pi + 9}$.

3. 求曲线 $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$ 与 x 轴及 $x = -1$ 所围的面积.

解: 因 $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, 1]$;

$y_2 = \arccos x$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$

$$\text{则面积 } A = \int_{-1}^1 y_1 \, dx + \int_{-1}^1 y_2 \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx + \int_{-1}^1 \arccos x \, dx = \frac{3}{2}\pi$$

§2 曲线的弧长

求下列曲线的弧长:

1. $y = x^{\frac{3}{2}} (0 \leq x \leq 4)$
2. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y (1 \leq y \leq e)$
3. 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$
4. 旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$
5. 圆的渐开线 $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$
6. 心脏线 $r = a(1 + \cos \theta) (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

解:

1. 所求弧长为 $s = \int_0^4 \sqrt{1 + [(x^{\frac{3}{2}})']^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$
2. 所求弧长为 $s = \int_1^e \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y}\right)^2} dy = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right)^2} dy = \int_1^e \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}\right) dy = \frac{e^2 + 1}{4}$
3. 由已知可设 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$
 则所求弧长为 $s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[(a \cos^3 t)']^2 + [(a \sin^3 t)']^2} dt =$
 $4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3 \cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 6a$
4. $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(a(t - \sin t))']^2 + [(a(1 - \cos t))']^2} dt =$
 $|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = 2|a| \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8|a|$
5. $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(a(\cos t + t \sin t))']^2 + [(a(\sin t - t \cos t))']^2} dt =$
 $|a| \int_0^{2\pi} \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} dt = |a| \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2 |a|$
6. $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4|a| \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} d\theta = 4|a| \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8|a|$

§3 体积

1. 求出由下列各曲面所围成的几何体体积:

(1) 求截锥体体积, 其上下底皆为椭圆, 椭圆的轴长分别等于 A, B 和 a, b , 而高为 h ;

(2) 求椭球体体积: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(3) 求由下列两曲面: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$ 所围成的体积;

(4) 求用通过底面直径的平面从直圆柱上切下的弓形体体积, 设圆柱的底半径为 a , 底面方程为 $x^2 + y^2 \leq a^2$, 截面通过 x 轴上的直径且与底面成 α 角.

解:

(1) 作一平行于上、下底且距离下底为 x 的截面, 此截面为椭圆, 其半轴分别为: $a' = A + \left(1 - \frac{x}{h}\right)(a - A)$,

$$b' = B + \left(1 - \frac{x}{h}\right)(b - B)$$

于是此截面面积为: $A(x) = \pi a' b' =$

$$\pi \left[AB + (a - A)(b - B) \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 + (A(b - B) + B(a - A)) \left(1 - \frac{x}{h}\right) \right]$$

$$\text{从而所求体积为 } V = \int_0^h A(x) dx = \frac{\pi}{6} [(2a + A)b + (a + 2A)B]$$

(2) 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球得截痕为一椭圆, 它在 yOz 平面上的投影为 $\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$

1

由此可见其半轴分别为 $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ 及 $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, 从而得此椭圆面积为 $A(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$

于是, 所求的椭球体体积为:

$$V = \int_{-a}^a A(x) dx = 2 \int_0^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} abc$$

(3) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (上半面), 其变化范围为 $-\sqrt{ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}$

$$\text{其截面积为 } A(x) = 2 \int_0^{\sqrt{ax - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy = a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}$$

于是, 所求体积为:

$$V = 2 \int_0^a A(x) dx = 2 \int_0^a \left[a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right] dx = \frac{2}{3} a^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$$

(4) $y = \sqrt{a^2 - x^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2} \tan \alpha$,

$$\text{则 } A(x) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \tan \alpha = \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \tan \alpha$$

从而所求体积为:

$$V = \int_{-a}^a A(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) \tan \alpha dx = \frac{2}{3} a^3 \tan \alpha$$

2. 求旋转体的体积:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 X 轴;

(2) $y = \sin x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi)$

(i) 绕 x 轴

(ii) 绕 y 轴

(3) $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$

(i) 绕 x 轴

(ii) 绕 y 轴

(4) 证明由 $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x)$ (其中 $y(x)$ 是连续函数) 所围成的面积绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为:

$$V = \int_a^b 2\pi xy(x) dx$$

(5) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi, y = 0)$

(i) 绕 x 轴

(ii) 绕 y 轴

(iii) 绕直线 $y = 2a$

解:

$$(1) V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] dx = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

$$(2) (i) V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

$$(ii) V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2$$

$$(3) (i) V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2 \cos^6 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2 \sin^2 t \cos^7 t dt = 6\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^7 t - \cos^9 t) dt = \frac{32}{105} \pi ab^2$$

(ii) 利用对称性, 只需将上式答案中 a, b 对调, 即得

$$V = \frac{32}{105} \pi a^2 b$$

(4) 证明: 作 $[a, b]$ 的任意分法: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任取一点 ξ_i , 对应的函数值为 $y(\xi_i)$; $A_i \approx y(\xi_i) \Delta x_i, \Delta V_i \approx 2\pi \xi_i y(\xi_i) \Delta x_i$, 则 $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi \xi_i y(\xi_i) \Delta x_i$,

$$\text{从而 } V = \int_a^b 2\pi xy(x) dx$$

$$(5) (i) V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3$$

$$(ii) V = 2\pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^2 (t - \sin t) dt = 6\pi^3 a^3$$

(iii) 作平移 $y = \bar{y} + 2a, x = \bar{x}$, 则曲线方程为 $\bar{x} = a(t - \sin t), \bar{y} = -a(1 + \cos t)$ 及 $\bar{y} = -2a$

$$\text{于是 } V = \pi \int_0^{2\pi} [4a^2 - a^2(1 + \cos t)^2] a(1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (3 - 2\cos t - \cos^2 t)(1 - \cos t) dt = 7\pi^2 a^3$$

3. 证明把面积 $0 \leq \alpha \leq \theta \leq \beta \leq \pi, 0 \leq r \leq r(\theta) (r(\theta) \text{ 在 } [\alpha, \beta] \text{ 上连续})$ 绕极轴旋转所成的体积等于: $V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta$, 并求出 $r = a(1 + \cos \theta)$ 绕极轴旋转所成的体积.

(1) 证明: 用微元法.

因以 r 为半径, 与极线成 θ 角的扇形绕极轴旋转一周所得的体积为:

$$V = \frac{\pi}{3} (r \sin \theta)^2 r \cos \theta + \pi \int_{r \cos \theta}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} \pi r^3 (1 - \cos \theta)$$

作 $[\alpha, \beta]$ 的任意分法: $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta, \Delta \theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \lambda = \max_i \{\Delta \theta_i\}$

在每个 $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ 都存在 θ'_i , 使 $\cos \theta_{i-1} - \cos \theta_i = -\sin \theta'_i (\theta_{i-1} - \theta_i) = \sin \theta'_i \Delta \theta_i$

以 $r(\theta'_i)$ 作小扇形 A_i 的半径, 则扇形绕极轴旋转一周后所得的体积为:

$$\Delta V_i = \frac{2}{3} \pi r^3(\theta'_i) (1 - \cos \theta_i) - \frac{2}{3} \pi r^3(\theta'_i) (1 - \cos \theta_{i-1}) =$$

$$\frac{2}{3} \pi r^3(\theta'_i) (\cos \theta_{i-1} - \cos \theta_i) = \frac{2}{3} \pi r^3(\theta'_i) \sin \theta'_i \Delta \theta_i, \text{ 则整个曲边扇形绕极轴旋转得 } \sum_{i=1}^n \frac{2}{3} \pi r^3(\theta'_i) \sin \theta'_i \Delta \theta_i$$

$$\text{从而 } V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{2}{3} \pi r^3(\theta'_i) \sin \theta'_i \Delta \theta_i = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\theta) \sin \theta d\theta.$$

$$(2) \text{ 解: } V = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi a^3 (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{8}{3} \pi a^3$$

4. 把抛物线 $y = x(x - a)$ 在横坐标 0 与 $c (c > a > 0)$ 之间的弧段绕 x 轴旋转, 问 c 为何值时, 该旋转体的体积 V 等于以弦 OP 绕 x 轴旋转所成的锥体体积? (图 8-14)

解: 因抛物线 $y = x(x - a), x_P = c$, 故 $P(c, c(c - a))$

则以弦 OP 绕 x 轴旋转所成的锥体体积为: $V_1 = \frac{1}{3} \pi c [c(c - a)]^2 = \frac{\pi}{3} c^3 (c - a)^2$

所求的旋转体体积为: $V_2 = \pi \int_0^c [x(x-a)]^2 dx = \pi \left(\frac{c^5}{5} - \frac{a}{2}c^4 + \frac{a^2}{3}c^3 \right)$

又 $V_1 = V_2$, 故 $\frac{\pi}{3}c^3(c-a)^2 = \pi \left(\frac{c^5}{5} - \frac{a}{2}c^4 + \frac{a^2}{3}c^3 \right)$,

从而 $c = \frac{5}{4}a$

5. 把曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得一旋转体, 它在点 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的体积记作 $V(\xi)$, 求 a 等于何值时, 能使 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\xi)$.

解: 因 $V(\xi) = \pi \int_0^\xi \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \right)^2 dx = \frac{\xi^2}{2(1+\xi^2)}\pi$, 则 $V(a) = \frac{a^2}{2(1+a^2)}\pi$

又 $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\xi) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi^2}{2(1+\xi^2)}\pi = \frac{\pi}{4}$, 于是 $a^2 = 1$

又 $a > 0$, 故 $a = 1$.

6. 椭圆 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 绕 x 轴旋转得一旋转椭球体, 把它沿 x 轴方向打一穿心的圆孔, 使剩下的环形体体积等于椭球体体积的一半, 决定钻孔的半径 ρ (图8-15).

解: 设题中剩下的环形体体积为 V , 椭球体体积为 V_1

因 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, 则 $y = \frac{\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2}}{a}$

则 $V_1 = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} dx = \frac{4}{3}\pi ab^2$

$V = V_1 - 2\pi\rho^2 \frac{\sqrt{a^2b^2 - a^2\rho^2}}{b} - 2\pi \int_{\frac{\sqrt{a^2b^2 - a^2\rho^2}}{b}}^a \left(\frac{\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2}}{a} \right)^2 dx =$

$\frac{4}{3}\pi ab\sqrt{b^2 - \rho^2} - \frac{4\pi a}{3b}\rho^2\sqrt{b^2 - \rho^2} = \frac{4}{3}\pi \frac{a}{b}(b^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}$

由题意, 得 $V = \frac{1}{2}V_1$ 即 $\frac{4}{3}\pi \frac{a}{b}(b^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\pi ab^2$, 解此方程, 得 $\rho = b\sqrt{1 - 2^{-\frac{2}{3}}}$

§4 旋转曲面的面积

1. 求下列旋转曲面的面积:

- (1) $x^2 = 2py + a (0 \leq x \leq a, a > 1)$ 绕 x 轴及 y 轴
- (2) $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 绕 x 轴
- (3) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 y 轴
- (4) 旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ 绕 x 轴
- (5) 双纽线 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$
 - (i) 绕极线
 - (ii) 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{2}$
 - (iii) 绕轴 $\theta = \frac{\pi}{4}$

解:

$$(1) y = \frac{x^2 - a}{2p}, -\frac{a}{2p} \leq y \leq \frac{a^2 - a}{2p} (p > 0)$$

$$(i) F_x = 2\pi \int_0^a \frac{x^2 - a}{2p} \sqrt{1 + \left[\left(\frac{x^2 - a}{2p} \right)' \right]^2} dx = \frac{\pi}{p^2} \int_0^a (x^2 - a^2) \sqrt{x^2 + p^2} dx =$$

$$\left[\frac{a(2a^2 - 4a + p^2)}{8p^2} \sqrt{p^2 + a^2} - \frac{p^2 + 4a}{8} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + p^2}}{p} \right| \right] \pi$$

$$(ii) \sqrt{1 + (x')^2} = \frac{\sqrt{p^2 + 2py + a}}{\sqrt{2py + a}}$$

$$\text{则 } F_y = 2\pi \int_{-\frac{a}{2p}}^{\frac{a^2 - a}{2p}} \sqrt{2py + a} \frac{\sqrt{p^2 + 2py + a}}{\sqrt{2py + a}} dy =$$

$$\frac{\pi}{p} \int_{-\frac{a}{2p}}^{\frac{a^2 - a}{2p}} \sqrt{2py^2 + p^2 + a} d(2py + p^2 + a) = \frac{2\pi}{3p} (p^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^2 \pi$$

$$(2) F = 2\pi \int_0^\pi \sin x \cdot \sqrt{1 + [(\sin x)']^2} dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2\sqrt{2}\pi + 2\pi \ln(\sqrt{2} + 1)$$

$$(3) F = 2\pi \int_{-b}^b x \sqrt{1 + (x')^2} dy = 2\pi \int_{-b}^b \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a(-y)}{b\sqrt{b^2 - y^2}} \right)^2} dy = 2\pi \frac{a}{b} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} y^2} dy =$$

$$\frac{4a\pi}{b} \int_0^b \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2} dy = 2a\pi \left(a + \frac{b^2}{c} \ln \frac{a + c}{b} \right).$$

$$(4) \text{ 因 } dS = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt, \text{ 则 } F = 2\pi \int_0^{2\pi} y ds = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$16a^2 \pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} d\frac{t}{2} = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

$$(5) (i) y = \sqrt{2a} \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta, dS = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{由对称性, 得 } F = 2 \times 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \sin \theta d\theta = 4\pi a^2 (2 - \sqrt{2})$$

$$(ii) x = \sqrt{2a} \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta, dS = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{则 } F = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos \theta d\theta = 4\sqrt{2}\pi a^2$$

$$(iii) x = \sqrt{2a} \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta, y = \sqrt{2a} \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta,$$

$$dS = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

注意到在 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 内, 恒有 $x - y \geq 0$,

$$\text{于是, 所求的表面积为 } F = 2 \times 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x - y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 4\sqrt{2}\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta = 8\pi a^2$$

2. 证明由 $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t) (t_0 \leq t \leq T)$ 与 Oxy 平面间所限的柱面面积等于 $S = \int_{t_0}^T \chi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$

证明: 设曲线 CD 在 Oxy 平面的投影为 AB , 则 AB 的方程为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (t_0 \leq t \leq T)$

在 AB 上取分点: $A = M_0, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B$

在 CD 对应的分点: $C = N_0, N_1, \dots, N_{i-1}, N_i, \dots, N_n = D$

对应的参数: $t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n$

设 M_i 的坐标为 $\chi_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i)$, 则 $\overline{M_i N_i} = \chi(t_i)$

直角梯形 $M_i M_{i-1} N_{i-1} N_i$ 的面积:

$$S_i = \frac{\overline{M_i N_i} + \overline{M_{i-1} N_{i-1}}}{2} \cdot \overline{M_{i-1} M_i} = \frac{\chi(t_i) + \chi(t_{i-1})}{2} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2} =$$

$$\frac{\chi(t_i) \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2} - \chi(t_{i-1}) \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}}{2}$$

由微分中值定理: $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \Delta t_i, \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\eta_i) \Delta t_i, \chi(t_i) - \chi(t_{i-1}) = \chi'(\zeta_i) \Delta t_i$

代入, 得 $S_i = \chi(t_i) \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} \Delta t_i - \frac{1}{2} \chi'(\zeta_i) \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} (\Delta t_i)^2$

从而柱面面积为:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \chi(t_i) \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} \Delta t_i - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \chi'(\zeta_i) \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} (\Delta t_i)^2$$

$$= \int_{t_0}^T \chi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt - 0 = \int_{t_0}^T \chi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

§5 质心

1. 求下列曲线段的质心坐标:

- (1) 半径为 a , 弧长为 $\frac{1}{2}a\alpha$ ($\alpha \leq \pi$) 的均匀圆弧;
- (2) 以 $A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0)$ 为顶点的矩形周界, 曲线上任一点的密度等于该点到原点距离的二倍;
- (3) 对数螺线 $r = ae^{k\theta}$ ($a > 0, k > 0$) 上由点 $(0, a)$ 到点 (θ, r) 的均匀弧段.

解:

- (1) 以原点为圆心, 弧半径的起始边所在直线为 x 轴建立直角坐标系, 则圆弧方程为 $x = a \cos \alpha, y = a \sin \alpha$, 于是 $x' = -a \sin \alpha, y' = a \cos \alpha$,

$$\text{从而 } \bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\alpha}{2}} a \cos \alpha \sqrt{x'^2 + y'^2} d\alpha}{s} = \frac{a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \cos \alpha d\alpha}{s} = \frac{a^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}a\alpha} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\frac{\alpha}{2}} a \sin \alpha \sqrt{x'^2 + y'^2} d\alpha}{s} = \frac{a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin \alpha d\alpha}{s} = \frac{2a}{\alpha} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

- (2) 先求出密度函数.

$$AB \text{ 的方程为 } \begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases} \quad y \in [0, 1], \text{ 其上任一点的密度为}$$

$$\rho = 2y$$

$$BC \text{ 的方程为 } \begin{cases} x = x \\ y = 1 \end{cases} \quad x \in [0, 2], \text{ 其上任一点的密度为}$$

$$\rho = 2\sqrt{1+x^2}$$

$$CD \text{ 的方程为 } \begin{cases} x = 2 \\ y = y \end{cases} \quad y \in [0, 1], \text{ 其上任一点的密度为}$$

$$\rho = 2\sqrt{4+y^2}$$

$$DA \text{ 的方程为 } \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \quad x \in [0, 2], \text{ 其上任一点的密度为}$$

$$\rho = 2x$$

$$\text{于是 } m_{AB} = \int_0^1 2y\sqrt{0^2+1^2} dy = 1,$$

$$\bar{x}_{AB} = 0, \bar{y}_{AB} = \frac{\int_0^1 y \cdot 2y\sqrt{0^2+1^2} dy}{m_{AB}} = \frac{2}{3};$$

$$m_{BC} = \int_0^2 2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1^2+0^2} dx = 2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5}),$$

$$\bar{x}_{BC} = \frac{\int_0^2 x \cdot 2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1^2+0^2} dx}{m_{BC}} = \frac{2(5\sqrt{5}-1)}{6\sqrt{5}+3\ln(2+\sqrt{5})},$$

$$\bar{y}_{BC} = 1;$$

$$m_{CD} = \int_0^1 2\sqrt{4+y^2}\sqrt{0^2+1^2} dy = \sqrt{5} + 4\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\bar{x}_{CD} = 2, \bar{y}_{CD} = \frac{\int_0^1 y \cdot 2\sqrt{4+y^2}\sqrt{0^2+1^2} dy}{m_{CD}} = \frac{2(5\sqrt{5}-8)}{3\left(\sqrt{5}+4\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)};$$

$$m_{DA} = \int_0^2 2x\sqrt{1^2+0^2} dx = 4,$$

$$\bar{x}_{DA} = \frac{\int_0^2 x \cdot 2x\sqrt{1^2+0^2} dx}{m_{DA}} = \frac{4}{3}, \bar{y}_{DA} = 0$$

故此矩形周界的质心坐标为:

$$\bar{x} = \frac{m_{AB}\bar{x}_{AB} + m_{BC}\bar{x}_{BC} + m_{CD}\bar{x}_{CD} + m_{DA}\bar{x}_{DA}}{m_{AB} + m_{BC} + m_{CD} + m_{DA}} =$$

$$\frac{16\sqrt{5} + 14 + 24 \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2}$$

$$\frac{9\sqrt{5} + 15 + 3 \ln(2 + \sqrt{5}) + 12 \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{m_{AB}\bar{y}_{AB} + m_{BC}\bar{y}_{BC} + m_{CD}\bar{y}_{CD} + m_{DA}\bar{y}_{DA}}{m_{AB} + m_{BC} + m_{CD} + m_{DA}} =$$

$$\frac{16\sqrt{5} - 14 + 3 \ln(2 + \sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{9\sqrt{5} + 15 + 3 \ln(2 + \sqrt{5}) + 12 \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2}$$

(3) 重心的直角坐标为:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\theta x \sqrt{x'^2 + y'^2} dx}{s} = \frac{\int_0^\theta r \cos \theta \sqrt{[(r \cos \theta)']^2 + [(r \sin \theta)']^2} d\theta}{\int_0^\theta \sqrt{[(r \cos \theta)']^2 + [(r \sin \theta)']^2} d\theta} =$$

$$\frac{\int_0^\theta r \cos \theta \sqrt{a^2(1+k^2)} e^{k\theta} d\theta}{\int_0^\theta \sqrt{a^2(1+k^2)} e^{k\theta} d\theta} = \frac{a \int_0^\theta e^{2k\theta} \cos \theta d\theta}{\int_0^\theta e^{k\theta} d\theta} = \frac{ake^{2k\theta}(\sin \theta + 2k \cos \theta) - 2ak^2}{(4k^2 + 1)(e^{k\theta} - 1)}$$

$$\text{同法可得 } \bar{y} = \frac{ake^{2k\theta}(2k \sin \theta - \cos \theta) + ak}{(4k^2 + 1)(e^{k\theta} - 1)}$$

于是, 重心的极坐标为:

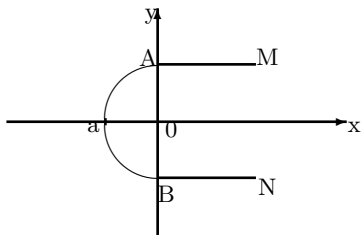
$$\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \frac{ak}{(4k^2 + 1)(e^{k\theta} - 1)} \sqrt{(e^{4k\theta} + 1 - 2e^{2k\theta} \cos \theta)(4k^2 + 1)}$$

$$\tan \theta_0 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{e^{2k\theta}(\sin \theta + 2k \cos \theta) - 2k}{e^{2k\theta}(2k \sin \theta - \cos \theta) + 1}$$

且质心坐标为 (\bar{r}, θ_0)

2. 用一根密度均匀的金属丝弯成半径为 a 的半圆弧, 在两端用同样的金属丝接上两条切线 (图8-19), 问切线长 b 为多少时, 方能使金属丝 $MABN$ 的质心正好在圆心 O ?

解:



设金属丝的密度为 μ , 半圆弧的质量为: $m = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mu ds = \pi a \mu$

半圆弧: $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right), ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = a d\theta$

则半圆弧的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \mu ds}{m} = \frac{\mu a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \theta d\theta}{\pi a \mu} = -\frac{2a}{\pi};$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} y \mu ds}{m} = \frac{\mu a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \theta d\theta}{\pi a \mu} = 0$$

又两条切线的质心坐标为: $\bar{x} = \frac{b}{2}, \bar{y} = 0$, 质量为: $2b\mu$

于是由已知, 得质点系质心坐标为: $\bar{x} = \frac{-\frac{2a}{\pi} \cdot \pi a \mu + \frac{b}{2} \cdot 2b\mu}{\pi a \mu + 2b\mu} = 0$, 从而 $b = \sqrt{2}a$

3. 轴长10米, 密度分布为 $\rho = \rho(x) = (6 + 0.3x)$ 千克/米, 其中 x 为距轴的一个端点的距离, 求轴的质量.

解: $m = \int_0^{10} \rho(x) dx = \int_0^{10} (6 + 0.3x) dx = 75$ (千克)

4. 已知一抛物线段 $y = x^2 (-1 \leq x \leq 1)$, 曲线段上任一点处的密度与该点到 y 轴的距离成正比, $x = 1$ 处密度为5, 求此曲线段的质量.

解：由已知，得 $\rho(x) = k|x|$

因 $x = 1$ 时， $\rho(1) = 5$ ，则 $k = 5$ ，于是 $\rho(x) = 5|x|$

又 $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx$ ，

$$\text{则 } m = \int_{-1}^1 \rho(x) ds = 2 \int_0^1 5x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{25}{6} \sqrt{5} - \frac{5}{6}$$

§6 平均值、功

1. 已知整流电路中电阻 R 两端的电压最大值为 U_m , 圆频率为 ω , 计算消耗在 R 上的平均功率(分半波整流和全波整流两种情况讨论).

解: 半波整流时, 消耗在 R 上的平均功率为: $\bar{P}_1 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} P(t) dt = \frac{2\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{U_m^2}{R} \cos^2 \omega t dt = \frac{U_m^2}{2R}$

全波整流时, 消耗在 R 上的平均功率为: $\bar{P}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{U_m^2}{R} \cos^2 \omega t dt = \frac{U_m^2}{2R}$

2. 计算交流电压 $u = U_m \cos \omega t$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$ 和 $\left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right]$ 内的平均值.

解: 在 $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$ 内的平均值为: $\bar{u} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} U_m \cos \omega t dt = 0$;

在 $\left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right]$ 内的平均值为: $\bar{u} = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} U_m \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi} U_m$.

3. 求下列函数在给定区间内的平均值:

(1) $y = \sin x, [0, \pi]$

(2) $y = xe^x, [0, 1]$

解:

(1) $\bar{y} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}$

(2) $\bar{y} = \int_0^1 xe^x dx = 1$

4. 把弹簧拉长所需的力与弹簧的伸长成正比. 已知一公斤的力能使弹簧伸长1厘米, 问把弹簧拉长10厘米要作多少功?

解: 由胡克定理知, 弹性恢复力 F 与伸长量 x 成正比即 $F = kx$.

由条件, 知 $k = 1$, 因而 $F = x$, 于是所求的功为 $W = \int_0^{10} F dx = \int_0^{10} x dx = 50$ (千克·厘米) = 5J

5. 修建大桥桥墩时要先下围图. 设一圆柱形围图的直径为20米, 水深27米, 围图高出水面3米, 要把水抽尽, 计算克服重力所作的功.

解: 因 $\Delta W = \pi r^2 \cdot \Delta x \cdot x \cdot 10^3 g = 10^5 g \pi x \Delta x$

则 $W = 10^5 g \int_3^{30} \pi x dx = 4.37 \times 10^8 \pi$ (J)

6. 某水库的闸门是一梯形, 上底6米, 下底2米, 高10米, 求水灌满时闸门所受的力. 设水的比重为1吨/米².

解: 因 $\Delta F = 2xyg\Delta x = 2gx \left(3 - \frac{x}{5}\right) \Delta x$

则 $F = 2g \int_0^{10} x \left(3 - \frac{x}{5}\right) dx = 1.63 \times 10^6$ (N)

7. 物体按规律 $x = ct^3$ ($c > 0$)作直线运动, x 表示在时间 t 内物体移动的距离, 设介质的阻力与速度平方成正比, 求物体从 $x = 0$ 到 $x = a$ 时阻力所作的功.

解: 因 $x = ct^3$ ($c > 0$), 故 $v = x' = 3ct^2$

又介质阻力与速度的平方成正比, 则设 $f = kv^2$ (k 为常数), 于是 $f = 9kc^2 t^4$

又当 x 从 $x = 0$ 到 $x = a$ 时, t 从 $t = 0$ 到 $t = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$,

则 $W = \int_0^{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}} 9kc^2 t^4 \cdot 3ct^2 dt = 27kc^3 \int_0^{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}} t^6 dt = \frac{27}{7} kc^{\frac{2}{3}} a^{\frac{7}{3}}$

8. 半径为 r 的球沉入水中, 它与水面相接, 球的比重为1, 现将球从水中取出, 要作多少功?

解: 因 $\Delta W = 1 \cdot \pi(\sqrt{r^2 - (x-r)^2})^2 \Delta x(2r-x) = \pi(4r^2 x - 4rx^2 + x^3) \Delta x$

则 $W = \pi \int_0^{2r} (4r^2 x - 4rx^2 + x^3) dx = \frac{4}{3} \pi r^4$

§7 定积分的近似计算

1. 用抛物线形公式求 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 的近似值(取 $n=3$).

解: 取 $n=3$, 计算到4位小数, 可得:

$$x_0 = 0, y_0 = 1.0000; x_1 = \frac{1}{6}, 4y_1 = 3.8919; x_2 = \frac{1}{3}, 2y_2 = 1.8000; x_3 = \frac{1}{2}, 4y_3 = 3.2000; x_4 = \frac{2}{3}, 2y_4 = 1.3846; x_5 = \frac{5}{6}, 4y_5 = 2.3607; x_6 = 1, y_6 = 0.5000$$

利用抛物线形公式, 有

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{18} [y_0 + 2(y_2 + y_4) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + y_6] = 0.7854$$

2. 求某翼型的面积. 翼型如图8-24所示, x 轴是它的对称轴, OA 长2米, 10等分, 测得数据如下(单位: 厘米):

x	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
y	0	8.5	11.0	11.5	10.5	10.0	8.0	6.5	4.5	2.5	0

解: 利用抛物线形公式, 有

$$A \approx \frac{200}{6 \times 5} [0 + 0 + 4(8.5 + 11.5 + 10.0 + 6.5 + 2.5) + 2(11.0 + 10.5 + 8.0 + 4.5)] = \frac{20}{3} \times 224 \approx 1493.3(\text{cm}^2)$$

3. 在宽为20米的河面上, 测量河流横截面的面积. 如果从河的一岸向对岸每隔2米, 测得河水深度如下表所列:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y (水深)	0.4	0.8	1.4	2.0	2.4	2.1	1.9	1.6	1.3	0.8	0.4

(水深单位: 米)求此河流横截面的面积(图8-25)

解: 利用抛物线形公式, 有

$$A \approx \frac{20}{6 \times 5} [0.4 + 0.4 + 4(0.8 + 2.0 + 2.1 + 1.6 + 0.8) + 2(1.4 + 2.4 + 1.9 + 1.3)] = \frac{2}{3} \times 44 \approx 29.3(\text{m}^2)$$

第三篇 级数论

第一部分 数项级数和广义积分

第九章 数项级数

§1. 预备知识: 上极限和下极限

1. 证明:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

证明:

(1) 设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均为有限数, 则 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 上有界.

令 $\alpha_k = \sup_{n > k} \{x_n\}, \beta_k = \sup_{n > k} \{y_n\}$. 于是, 当 $n > k$ 时, 有 $x_n + y_n \leq \alpha_k + \beta_k$

从而 $\sup_{n > k} \{x_n + y_n\} \leq \alpha_k + \beta_k$

故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{x_n + y_n\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k + \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$

注: 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ 之一为 $+\infty$. 例如: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 为使关系式右边加法运算有意义, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不得为 $-\infty$. 这时 $\{x_n\}$ 无上界, $\{x_n + y_n\}$ 亦无上界, 上述关系式显然成立; 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, 为使关系式右边加法运算有意义, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不得为 $+\infty$. 于是 $\{y_n\}$ 上有界, 从而 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$, 上述关系式显然成立.

(2) 因 $x_n \geq \inf \{x_n\}, y_n \geq \inf \{y_n\}$, 故 $x_n + y_n \geq \inf \{x_n\} + \inf \{y_n\}$

据下确界为下界中最大的, 则 $\inf \{x_n + y_n\} \geq \inf \{x_n\} + \inf \{y_n\}$.

从而 $\inf_{n > k} \{x_n + y_n\} \geq \inf_{n > k} \{x_n\} + \inf_{n > k} \{y_n\}$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{x_n + y_n\} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{n > k} \{x_n\} + \inf_{n > k} \{y_n\} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{x_n\} + \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{y_n\}$

即 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

2. 设 $x_n \geq 0, y_n \geq 0$, 证明:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

证明:

(1) 因 $0 \leq x_n \leq \sup \{x_n\}, 0 \leq y_n \leq \sup \{y_n\}$, 则 $0 \leq x_n y_n \leq \sup \{x_n\} \cdot \sup \{y_n\}$

据上确界是上界中最小的, 则有 $0 \leq \sup \{x_n \cdot y_n\} \leq \sup \{x_n\} \cdot \sup \{y_n\}$

从而 $0 \leq \sup_{n > k} \{x_n \cdot y_n\} \leq \sup_{n > k} \{x_n\} \cdot \sup_{n > k} \{y_n\}$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{x_n \cdot y_n\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{n > k} \{x_n\} \cdot \sup_{n > k} \{y_n\} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{x_n\} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{y_n\}$

即 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

(2) 因 $x_n \geq \inf \{x_n\} \geq 0, y_n \geq \inf \{y_n\} \geq 0$, 则 $x_n y_n \geq \inf \{x_n\} \cdot \inf \{y_n\} \geq 0$

据下确界是下界中最大的, 则有 $\inf \{x_n \cdot y_n\} \geq \inf \{x_n\} \cdot \inf \{y_n\} \geq 0$

从而 $\inf_{n > k} \{x_n \cdot y_n\} \geq \inf_{n > k} \{x_n\} \cdot \inf_{n > k} \{y_n\} \geq 0$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{x_n \cdot y_n\} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{n > k} \{x_n\} \cdot \inf_{n > k} \{y_n\} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{x_n\} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{y_n\}$

即 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则对任何数列 $\{y_n\}$ 成立:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$$

证明: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$

若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ (或 $-\infty$), 则(1)显然成立. 因 $\alpha > 0$, 则(2)显然成立.

故不妨设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$ 为有限数

因 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$, 故存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_k}\}$, 使 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \beta$ 且 β 为所有收敛子列的极限中的最大者.

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} + y_{n_k}) = \alpha + \beta$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} \cdot y_{n_k}) = \alpha\beta$

下证 $\alpha + \beta$ 为 $\{x_n + y_n\}$ 之一切收敛子列的极限中的最大者 (用反证法)

假设 $\{x_n + y_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_{k'}} + y_{n_{k'}}\}$, 使 $\lim_{k' \rightarrow \infty} (x_{n_{k'}} + y_{n_{k'}}) = \gamma > \alpha + \beta$

则 $\lim_{k' \rightarrow \infty} y_{n_{k'}} = \lim_{k' \rightarrow \infty} (x_{n_{k'}} + y_{n_{k'}}) - \lim_{k' \rightarrow \infty} x_{n_{k'}} = \gamma - \alpha > \beta$

这与 β 为 $\{y_n\}$ 的所有收敛子列的极限中的最大值矛盾.

于是 $\alpha + \beta$ 就是 $\{x_n + y_n\}$ 所有收敛子列极限的最大值.

同理可证, 当 $\alpha > 0$ 时, $\alpha + \beta$ 为 $\{x_n + y_n\}$ 的一切收敛子列的极限中的最大值.

从而 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \alpha + \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \alpha\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$

4. 求下列数列的上极限与下极限:

$$(1) a_n = \frac{1}{2^{-n} + (-1)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(2) a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(3) a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(4) a_n = \sin \frac{n\pi}{5} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

解:

(1) 它只有两个具极限的子数列: $a_{2k} \rightarrow 1, a_{2k+1} \rightarrow -1 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$
于是 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

(2) 它只有两个具极限的子数列: $a_{2k} \rightarrow 1, a_{2k+1} \rightarrow -1 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$
于是 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$(4) -\sin \frac{2}{5}\pi \leq \sin \frac{n\pi}{5} \leq \sin \frac{2}{5}\pi$$

当 $n = 10k + 2 \quad (k = 1, 2, \dots)$ 时, $a_{10k+2} \rightarrow \sin \frac{2}{5}\pi \quad (k \rightarrow \infty)$

当 $n = 10k - 2 \quad (k = 1, 2, \dots)$ 时, $a_{10k-2} \rightarrow -\sin \frac{2}{5}\pi \quad (k \rightarrow \infty)$

于是 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sin \frac{2}{5}\pi, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\sin \frac{2}{5}\pi$.

5. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{k_0+n}|} = \alpha$

此处 k_0 是任意固定的整数.

证明

$$(1) \text{ 因 } |a_{k_0+n}|^{\frac{1}{n}} = |a_{k_0+n}|^{\frac{1}{k_0+n}} \left(|a_{k_0+n}|^{\frac{1}{k_0+n}}\right)^{\frac{k_0}{n}}$$

又 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_{k_0+n}|^{\frac{1}{k_0+n}} = \alpha$, 且当 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_0}{n} \ln |a_{k_0+n}|^{\frac{1}{k_0+n}} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(|a_{k_0+n}|^{\frac{1}{k_0+n}}\right)^{\frac{k_0}{n}} = 1$

由第2题(1), 得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{k_0+n}|} \leq \alpha$

(2) 因 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$, 故存在子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} = \alpha$,

且当 $\alpha > 0$ 时, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k - k_0}} = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}\right)^{\frac{k_0}{n_k - k_0}} = \alpha$

从而 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{k_0+n}|} \geq \alpha$

综合(1)(2), 得当 $\alpha > 0$ 时, 结论成立.

(3) 若 $\alpha = 0$, 则显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{k_0+n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|a_{k_0+n}|^{\frac{1}{k_0+n}} \right)^{\frac{k_0+n}{n}} = 0$
于是得此结论正确.

6. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$, 证明: 必存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < b$. 又若 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$. 情况如何?

证明:

(1) 取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, 由 §1 定理 1, 得 $\{a_n\}$ 中至多只有有限项属于 $(a+\varepsilon, +\infty) = \left(\frac{a+b}{2}, +\infty \right)$

令这有限项的足标最大者为 N , 则当 $n > N$ 时, 有 $a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$

(2) 若 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$, 结论未必成立.

例: $a_n = 1 + (-1)^n, n = 1, 2, \dots$, 这个数列为 $0, 2, 0, 2, \dots$, 显然 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

而 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 < 1$, 但有无穷多项 $a_{2n} = 2 > 1 (n = 1, 2, \dots)$

§2. 级数的收敛性及其基本性质

1. 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$$

$$(2) 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots$$

$$(3) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots$$

$$(4) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

$$(5) \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{5} + \cdots$$

解:

$$(1) \text{ 因 } S_n = \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left[1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right] = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right)$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5}$$

于是据定义知, 级数 $\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$ 收敛.

$$(2) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ 故级数发散.}$$

$$(3) \text{ 由于 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ 均为收敛的几何级数,}$$

$$\text{故由数列级数性质2, 知 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(4) \text{ 因 } S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right] = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}$$

于是据定义知, 级数 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$ 收敛.

$$(5) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n+2} = 1 \neq 0, \text{ 故级数发散.}$$

2. 利用柯西收敛原理判别下列级数是收敛还是发散.

$$(1) a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n + \cdots, |q| < 1, |a_n| \leq A, (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$(2) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

证明:

(1) 因对任何自然数 p ,

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_n q^n + a_{n+1} q^{n+1} + \cdots + a_{n+p-1} q^{n+p-1}| \leq |a_n| |q|^n + |a_{n+1}| |q|^{n+1} + \cdots + |a_{n+p-1}| |q|^{n+p-1} \leq A |q|^n \frac{1 - |q|^p}{1 - |q|}$$

$$\text{又 } |q| < 1, \text{ 则 } 0 < 1 - |q|^p < 1, \text{ 于是 } |S_{n+p} - S_n| < A \cdot \frac{|q|^n}{1 - |q|}$$

$$\text{从而对 } \forall \varepsilon > 0, \text{ 取 } N = \left\lceil \ln \frac{(1 - |q|)\varepsilon}{A} / \ln |q| \right\rceil, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 对任何 } p = 1, 2, 3, \cdots,$$

总成立 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

按收敛原理, 级数 $a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n + \cdots$ 收敛.

(2) 此级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right)$

取 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{6}$, 不论 n 多大, 若令 $p = n$, 则有

$$|S_{n+p} - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} > \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{6n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) > \frac{1}{3} \left(\underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ 项}} \right) = \frac{1}{6} > \varepsilon_0$$

因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right)$ 发散.

3. 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (即每一项 $a_n > 0$), 试证明若对其项加括号后所组成的级数收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 亦收敛.

证明: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和数列为 $\{S_n\}$, 加括号后所组成的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$

其中 $A_n = a_{i_{n-1}+1} + a_{i_{n-1}+2} + \cdots + a_{i_n}$, 显然 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 仍为正项级数.

设其部分和数列为 $\{S_n'\}$, 其中 $S_n' = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) + \cdots + (a_{i_{n-1}+1} + \cdots + a_{i_n})$

显然 $S_n' \geq S_n$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 由基本定理, 得 $\{S_n'\}$ 有上界, 即存在 $M > 0$, 使 $S_n' \leq M$, 从而 $S_n \leq S_n' \leq M$, 说明 $\{S_n\}$ 有上界

则由基本定理, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

4. 确定使下列级数收敛的 x 的范围.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$

解:

(1) 此级数是公比为 $\frac{1}{1+x}$ 的等比级数, 故当 $\left| \frac{1}{1+x} \right| < 1$ 时级数收敛

从而收敛域为 $x < -2$ 或 $x > 0$.

(2) 此级数是公比为 $\ln x$ 的等比级数, 故当 $|\ln x| < 1$ 时级数收敛

从而收敛域为 $\frac{1}{e} < x < e$.

§3. 正项级数

1. 判断下列级数的收敛和发散.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, (a > 1)$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^n$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

$$(11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$(12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}, (x \geqslant 0)$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a, a_n, b, a \text{ 皆正数, } a \neq 0$$

解:

$$(1) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1, \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 是发散的}$$

则由比较判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 亦发散.

$$(2) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}}{\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{4(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$$

则由达朗贝尔判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$ 收敛.

$$(3) \text{ 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ 故级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2n-1} \text{ 发散.}$$

$$(4) \text{ 因 } \sin \frac{\pi}{2^n} \leqslant \frac{\pi}{2^n}, \text{ 而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} \text{ 收敛, 故级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} \text{ 收敛.}$$

(5) 因 $\frac{1}{1+a^n} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

(6) 因 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{n \cdot \sqrt[n]{n}}{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的

则由比较判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$ 发散.

(7) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0 < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^n$ 收敛.

(8) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ 收敛.

(9) 因 $\frac{2+(-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ 收敛

则据比较判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

(10) 因 $0 < 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \leq \pi \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛

则据比较判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

(11) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 发散.

(12) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}/[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)(1+x^{n+1})]}{x^n/[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^{n+1}} = \begin{cases} 0 < 1, & x > 1 \text{ 或 } x = 0 \\ \frac{1}{2} < 1, & x = 1 \\ x < 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$

则据达朗贝尔判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 收敛.

(13) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$

则当 $\frac{b}{a} < 1$ 即 $b < a$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 收敛;

当 $\frac{b}{a} > 1$ 即 $b > a$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 发散;

当 $\frac{b}{a} = 1$ 即 $b = a$ 时, 需进一步判断. 例如: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

2. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛, 其逆如何?

证明: 因 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

取 $\varepsilon_0 = 1$, 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|u_n| < \varepsilon_0 = 1$ 即 $0 \leq u_n < 1$, 于是 $0 \leq u_n^2 < u_n (n > N)$,

从而由比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

其逆不真. 例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, 证明: 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛. 又若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 如何? 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的敛散性之间有什么关系?

证明:

- (1) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两正项级数

取 $\varepsilon_0 = 1$, 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{u_n}{v_n} \right| < \varepsilon_0 = 1$ 即 $0 \leq \frac{u_n}{v_n} < 1$, 于是 $u_n < v_n (n > N)$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则由比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛, 也可能发散

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

- (2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两正项级数

取 $G_0 = 1$, 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $\frac{u_n}{v_n} > G_0 = 1$, 于是 $u_n > v_n (n > N)$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则由比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 敛散性不定.

4. 若两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n)$ 两级数如何?

解: 因两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, $u_n \leq \max(u_n, v_n)$

则由比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$ 发散.

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n)$ 敛散性不定.

例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 都发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 也发散;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2}$ 都发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(\frac{1 + (-1)^n}{2}, \frac{1 - (-1)^n}{2}\right) = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$ 却收敛.

5. 利用级数收敛的必要条件证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0 (a > 1)$

证明:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\text{因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0 < 1$$

则据达朗贝尔判别法的极限形式, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛, 从而由级数收敛的必要条件, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}}$$

$$\text{因 } 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{[2(n+1)]!}{a^{(n+1)!}}}{\frac{(2n)!}{a^{n!}}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{a^{n^2(n-1)!}} < \frac{4(n+1)^2}{a^{n+1}} (a > 1)$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 (a > 1, k \in \mathbb{N}), \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)^2}{a^{n+1}} = 0, \text{ 从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$$

则据达朗贝尔判别法的极限形式, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}}$ 收敛, 从而由级数收敛的必要条件, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0$

6. 讨论下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{1+\sigma} \ln \ln n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$$

解:

(1) 由于不论 p 为何数, 当 x 充分大时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$ 都是非负递减的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} (\ln 2)^{1-p}, & p > 1 \\ \infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

故当 $p > 1$ 时, 级数收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 级数发散.

(2) 设 $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}$, $f(x)$ 当 $x \geq 3$ 是正值递减函数.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_3^n \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln \ln \ln n - \ln \ln \ln 2) = \infty, \text{ 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n} \text{ 发散.}$$

(3) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^{1+\sigma}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{(\ln 2)^\sigma} - \frac{1}{(\ln n)^\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma(\ln 2)^\sigma} (\sigma > 0)$

故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\sigma}}$ 收敛.

又 $\frac{1}{n \cdot (\ln n)^{1+\sigma} \ln \ln n} \leq \frac{1}{n(\ln n)^{1+\sigma}}$, 则由比较判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{1+\sigma} \ln \ln n}$ 收敛.

(4) 令 $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q}$, 当 $n \leq 3$ 时是正值递减函数.

$$\text{又因为 } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q} = \int_{\ln \ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{e^{(p-1)t} t^q}$$

对任何 q , 当 $p-1 > 0$ 时, 积分收敛; 当 $p-1 < 0$ 时, 积分发散; 当 $p=1$ 时, 若 $q > 1$, 积分收敛, 若 $q \leq 1$, 积分发散.

由柯西积分判别法知, 原级数敛散性与积分敛散性条件一致

则原级数当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p < 1$ 时发散; 当 $p = 1$ 时, $q > 1$ 时级数收敛; $q \leq 1$ 时级数发散.

7. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的正项级数, 并且数列 $\{u_n\}$ 单调下降, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$.

证明: 因 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 设 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = 0$

又 $\{u_n\}$ 单调下降, 则 $S_{2n} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} \geq u_{2n} + u_{2n} + \cdots + u_{2n} = nu_{2n}$

又 $u_n \geq 0$, 则 $0 \leq nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$, 于是得 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_{2n} = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)u_{2n} = 0$

又因 $u_{2n+1} \leq u_{2n}$, $u_n \geq 0$, 则 $0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = \frac{2n+1}{2n}(2nu_{2n}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)u_{2n+1} = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$

8. 证明达朗贝尔判别法及其极限形式.

证明:

(1) 达朗贝尔判别法:

因 $n > N$ 时, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$, 则 $\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \leq q, u_{N+2} \leq qu_{N+1}; \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} \leq q, u_{N+3} \leq qu_{N+2}; \cdots; \frac{u_{N+k+1}}{u_{N+k}} \leq q, u_{N+k+1} \leq qu_{N+k} \leq \cdots \leq q^K u_{N+1}$

因 $q < 1$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ 收敛, 于是由收敛级数的性质1知, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k u_{N+1}$ 也收敛, 从而由比较判别法,

得 $\sum_{k=2}^{\infty} u_{N+k}$ 也收敛

再由收敛级数的性质5知, 添加有限项 $u_1, u_2, \cdots, u_{N+1}$ 后得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

若 $n > N$ 时, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, 则 $\frac{u_{N+1}}{u_N} \geq 1, u_{N+1} \geq u_N$, 这说明 $\{u_n\}$ 是单调增加的

又 $u_n \geq 0$, 则 $u_n \nrightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(2) 达朗贝尔判别法的极限形式:

(i) 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \bar{r} < 1$

由实数的稠密性知必存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\bar{r} < \bar{r} + \varepsilon_0 < 1$

由上极限的定理1的证明中, 知 $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$ 只有有限项大于 $\bar{r} + \varepsilon_0$, 于是定存在一个正整数 N (只要取

有限项中下标最大的做 N 即可), 使得当 $n > N$ 时, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \bar{r} + \varepsilon_0 < 1$, 故由达朗贝尔判别法知级数收敛.

(ii) 若 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \underline{r} > 1$

由实数的稠密性知必存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\underline{r} > \underline{r} - \varepsilon_0 > 1$

由上极限的定理2的证明中, 知 $\left\{ \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\}$ 只有有限项小于 $\underline{r} - \varepsilon_0$, 于是定存在一个正整数 N (只要取

有限项中下标最大的做 N 即可), 使得当 $n > N$ 时, 有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \underline{r} - \varepsilon_0 > 1$, 故由达朗贝尔判别法知级数发散.

(iii) 举例说明: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散;

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

§4. 任意项级数

1. 讨论下列级数的收敛性 (包括条件收敛或绝对收敛):

$$(1) \frac{1}{2} - \frac{3}{10} + \frac{1}{2^2} - \frac{3}{10^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{3}{10^5} + \cdots$$

$$(2) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5!} - \cdots$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n} \quad (x \neq 0)$$

$$(7) \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$$

解:

$$(1) \text{ 因 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ 收敛, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2n-1}} \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{2n-1}} \text{ 收敛}$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{2n-1}}$ 收敛, 即 $\frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{10^5} + \cdots$ 收敛, 从而原级数绝对收敛.

$$(2) \text{ 因 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n} \right) \text{ 发散}$$

$$\text{又对级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0 < 1$, 则由达朗贝尔判别法的极限形式, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n_1)!}$ 收敛
于是原级数发散.

$$(3) \text{ 因 } \sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则由比较判别法, 得 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 发散

又设 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x \geq 3)$, 则 $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 (x \geq 3)$, 于是 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 单调下降, 从

而 $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$ 在 $n \geq 3$ 时单调下降

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

于是据莱布尼兹定理, 得 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ 条件收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{2} < 1$, 则据达朗贝尔判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ 收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$ 绝对收敛.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ 发散

设 $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} (x \geq 2)$, 则 $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3} < 0 (x \geq 2)$, 于是当 $x \geq 2$ 时, $f(x)$ 单调下降, 从而 $\left\{ \frac{n}{(n+1)^2} \right\}$ 当 $n \geq 2$ 时单调下降

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$, 则据莱布尼兹定理, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)^2}$ 收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)^2}$ 条件收敛.

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{x}{n} \right|$$

因 $\left| \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{1}{n}} \right| \rightarrow |x| \neq 0 (n \rightarrow \infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{x}{n} \right|$ 发散

又对 $\forall x \in R, x \neq 0$, 因 $\frac{x}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $0 < \left| \frac{x}{n} \right| < \frac{\pi}{2}$, 于是当 $n >$

N 时, $\sin \frac{x}{n}$ 与 x 有相同的符号且 $\left| \sin \frac{x}{n} \right|$ 随 n 增大而减小到 0, 则由莱布尼兹判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$ 收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$ 条件收敛.

$$(7) \text{ 设部分和数列为 } \{S_n\}, \text{ 则 } S_{2n} = \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = +\infty$, 则此级数加括号后发散, 从而原级数发散.

2. 证明: 若级数的项加括号后所作成的级数收敛, 并且在同一个括号内项的符号相同, 那末去掉括号后, 此级数亦收敛; 并由此考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的收敛性.

证明:

- (1) 已知新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n = (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$ 收敛且在同一括号内的符号相同

设 $\sum_{k=1}^n u_k = S_n, \sum_{k=1}^n u'_k = S'_n$, 则 $S'_1 = S_{n_1}, S'_2 = S_{n_2}, \cdots, S'_k = S_{n_k}, \cdots$

当原级数的下标 n 从 n_{k-1} 到 n_k 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和单调变化, 即

当 $u_{n_{k-1}+1}, \cdots, u_{n_k}$ 均为正时, 有 $S'_{k-1} = S_{n_{k-1}} < S_n < S_{n_k} = S'_k$

当 $u_{n_{k-1}+1}, \cdots, u_{n_k}$ 均为负时, 有 $S'_{k-1} = S_{n_{k-1}} > S_n > S_{n_k} = S'_k$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 收敛, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} S'_k = \lim_{k \rightarrow \infty} S'_{k-1} = S'$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S'$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$(2) \text{ 考虑 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

当 $n = k^2, k^2+1, \cdots, k^2+2k (k=1, 2, \cdots)$ 时, 诸 a_n 同号. 记 $A_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k}, \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k$ 是

交错级数

因 $\int_{k^2-1}^{k^2+2k} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k} \leq \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{dx}{x}$ 即 $\ln \frac{k^2+2k}{k^2-1} \leq A_k \leq \ln \frac{(k+1)^2}{k^2}$, 从而

当 $k \rightarrow \infty$ 时, $A_k \rightarrow 0$

又 $A_k - A_{k+1} \geq \ln \frac{k^2 + 2k}{k^2 - 1} - \ln \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2} = \ln \frac{k^2 + k}{k^2 + k - 2} > 0$, 则由莱布尼兹判别法知 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k$ 收敛, 从而原级数收敛.

3. 讨论下列级数是否绝对收敛或条件收敛:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, (0 < x < \pi)$
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, (0 < x < \pi)$

解:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+x} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+x|}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{|n+x|}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|n+x|} = 1$, 则由比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+x|}$ 发散

当 $x \geq 0$ 时, $\frac{1}{n+x}$ 单调减少, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+x} = 0$, 则由莱布尼兹定理, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ 收敛

当 $x < 0$ 且不为负整数时, 因 x 为定数, 则当 n 充分大时, 即存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $n+x > 0$, 于是 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ 是交错级数, 且由 $\frac{1}{n+x}$ 单调减少及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+x} = 0$, 则 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ 收敛, 从而

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ 收敛

则当 x 不为负整数时, 此级数为条件收敛.

$$(2) \text{ 因 } \left| \frac{\sin(2^n x)}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \text{ 则由达朗贝尔判别法, 得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ 收敛}$$

再据比较判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(2^n x)}{n!} \right|$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n!}$ 绝对收敛.

$$(3) \text{ 因 } \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \text{ 且数列 } \left\{ \frac{1}{n} \right\} \text{ 单调趋于 } 0$$

则由狄立克莱判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 收敛.

又 $\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}$ 且 $\left| \sum_{k=1}^n \cos 2kx \right| = \left| \frac{\sin x - \sin(2n+1)x}{2 \sin x} \right| \leq \frac{1}{|\sin x|}$ 及数列 $\left\{ \frac{1}{2n} \right\}$ 单调趋于 0

则由狄立克莱判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n}$ 收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n} \right)$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$ 发散

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} (0 < x < \pi)$ 条件收敛.

$$(4) \text{ (i) 当 } p > 1 \text{ 时, 因 } \left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p} \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ 当 } p > 1 \text{ 时收敛, 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p} (0 < x < \pi) \text{ 绝对收敛.}$$

$$\text{(ii) 当 } 0 < p \leq 1 \text{ 时, 因 } \left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{x}{2} - \sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \text{ 且数列 } \left\{ \frac{1}{n^p} \right\} \text{ 单调趋于 } 0$$

则由狄立克莱判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ 收敛.

又 $\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 且由刚才证明可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n)^p}$ 收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n)^p} \cdot 2^{p-1}$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 收敛

又当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ 发散, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p} \right)$ 发散

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n^p} \right|$ 发散

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ ($0 < x < \pi$) 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

(iii) 当 $p \leq 0$ 时, 因 $\frac{\cos nx}{n^p} \not\rightarrow 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ ($0 < x < \pi$) 当 $p \leq 0$ 时发散.

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 能否断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛?

证明:

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 则据正项级数比较判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不一定是正项级数

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 不可断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

例: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为莱布尼兹型级数, 则其收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = 1$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ 发散.

5. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 那末当 $x > x_0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 也收敛.

证明: 因 $x > x_0$, 则 $\frac{\frac{1}{(n+1)^{x-x_0}}}{\frac{1}{n^{x-x_0}}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{x-x_0} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{x-x_0} < 1$, 则 $\frac{1}{(n+1)^{x-x_0}} < \frac{1}{n^{x-x_0}}$

且 $\frac{1}{n^{x-x_0}} \leq 1$

于是数列 $\left\{ \frac{1}{n^{x-x_0}} \right\}$ 单调有界, 且 $\frac{1}{n^{x-x_0}} \leq 1$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 则由阿贝尔判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

6. 设 $\{na_n\}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证明: 因 $\{na_n\}$ 收敛, 设其极限为 a

又 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则其部分和数列 $\left\{ \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k-1}) \right\}$ 有极限, 设其极限为 S

又 $\sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k-1}) = (a_1 - a_0) + 2(a_2 - a_1) + \cdots + n(a_n - a_{n-1}) = na_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

即 $\sum_{k=0}^n a_k = na_n - \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k-1})$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k-1}) = a - S$

于是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_0$ 收敛.

7. 若 $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v - a_{v-1})$ 绝对收敛, $\sum_{v=1}^{\infty} b_v$ 收敛, 那末 $\sum_{v=1}^{\infty} a_v b_v$ 收敛.

证明: 令 $B_n^{n+m} = \sum_{v=n+1}^{n+m} b_v$

由 Abel 变换, 得 $\sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v = a_{n+p} B_n^{n+p} + \sum_{i=1}^{p-1} B_n^{n+i} (a_{n+i} - a_{n+i+1})$

故 $\left| \sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v \right| \leq |a_{n+p}| |B_n^{n+p}| + \sum_{i=1}^{p-1} |B_n^{n+i}| |a_{n+i} - a_{n+i+1}|$

令 $H_n^p = \max \{|B_n^{n+1}|, |B_n^{n+2}|, \dots, |B_n^{n+p}|\}$, 则有 $\left| \sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v \right| \leq H_n^p \left[|a_{n+p}| + \sum_{i=1}^{p-1} |a_{n+i} - a_{n+i+1}| \right]$

因 $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v - a_{v-1}|$ 收敛, 故 $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v - a_{v-1})$ 收敛且 $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v - a_{v-1}) = -a_0 + a_n$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在

因而存在 $M > 0$, 使对一切 n , 有

$$\sum_{i=1}^{p-1} |a_{n+i} - a_{n+i+1}| + |a_{n+p}| < M \quad (4)$$

又 $\sum_{v=1}^{\infty} b_v$ 收敛, 从而对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$H_n^p < \frac{\varepsilon}{M} \quad (5)$$

由 (??), (??) 知, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \sum_{v=n+1}^{n+p} a_v b_v \right| < \varepsilon$, 这表明级数 $\sum_{v=1}^{\infty} a_v b_v$ 收敛

8. 利用柯西收敛原理证明交错级数的莱布尼兹定理.

证明: 对任何自然数 p , 有

$$|S_{n+p} - S_n| = |(-1)^{n+2} u_{n+1} + (-1)^{n+3} u_{n+2} + \dots + (-1)^{n+p+1} u_{n+p}| = |(-1)^{n+2} (u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} u_{n+p})| = |u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} u_{n+p}|$$

当 p 为偶数时, $(u_{n+1} - u_{n+2}) + \dots + (u_{n+p-1} - u_{n+p}) \geq 0$

当 p 为奇数时, $(u_{n+1} - u_{n+2}) + \dots + (u_{n+p-2} - u_{n+p-1}) + u_{n+p} \geq 0$

总之 $|u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} u_{n+p}| = u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} u_{n+p}$

又当 p 为偶数时, $u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots - (u_{n+p-2} - u_{n+p-1}) - u_{n+p} \leq u_{n+1}$

当 p 为奇数时, $u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots - (u_{n+p-1} - u_{n+p}) \leq u_{n+1}$

总之 $u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} u_{n+p} \leq u_{n+1}$

对任意 $\varepsilon > 0$, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = 0$

于是必存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $|u_{n+1} - 0| < \varepsilon$, 则 $u_{n+1} < \varepsilon$

由此当 $n > N$ 时, 对任何自然数 p 都有 $|S_{n+p} - S_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^p u_{n+p} \leq u_{n+1} < \varepsilon$

从而由柯西收敛原理, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 收敛.

§5. 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质

1. 设 $|x| < 1, |y| < 1$, 证明 $\sum_{v=1}^{\infty} (x^{v-1} + x^{v-2}y + \cdots + y^{v-1}) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$

证明: 因 $|x| < 1, |y| < 1$, 则

$$\sum_{v=1}^{\infty} x^{v-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^v + \cdots = \frac{1}{1-x} \text{ 绝对收敛} \quad (6)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} y^{v-1} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^v + \cdots = \frac{1}{1-y} \text{ 绝对收敛} \quad (7)$$

(??)·(??), 得 $\sum_{v=1}^{\infty} x^{v-1} \sum_{v=1}^{\infty} y^{v-1} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$

又 $\sum_{v=1}^{\infty} x^{v-1} \sum_{v=1}^{\infty} y^{v-1} = (1+x+x^2+\cdots+x^v+\cdots)(1+y+y^2+\cdots+y^v+\cdots) = \sum_{v=1}^{\infty} (x^{v-1} + x^{v-2}y + \cdots + y^{v-1}),$

则 $\sum_{v=1}^{\infty} (x^{v-1} + x^{v-2}y + \cdots + y^{v-1}) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$

2. 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$

证明: 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$, 则据达朗贝尔判别法的极限形式, 得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ 收敛

于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ 绝对收敛

同理, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y|^n}{n!}$ 绝对收敛

可写成 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$

其中 $C_n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{n!} (C_n^0 y^n + C_n^1 x y^{n-1} + \cdots + C_n^n x^n) = \frac{(x+y)^n}{n!}$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$

3. 证明: 可以作出条件收敛级数的更序级数, 使其发散到 $+\infty$.

证明: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛

由定理1, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 都发散, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-w_n)$ 发散到 $-\infty$

选取发散到 $+\infty$ 的数列 $\{\beta_n\}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty$

把 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 按顺序一项一项加起来

取 m_1 , 使 $v_1 + v_2 + \cdots + v_{m_1} > \beta_1 + w_1$

然后取 m_2 , 使 $v_1 + v_2 + \cdots + v_{m_1} + v_{m_1+1} + \cdots + v_{m_2} > \beta_2 + w_1 + w_2$

一般地, 可取充分大的 $m_k > m_{k-1}$, 使得 $v_1 + v_2 + \cdots + v_{m_1} + \cdots + v_{m_2} + \cdots + v_{m_k} > \beta_k + w_1 + w_2 + \cdots + w_k$ ($k = 3, 4, \cdots$)

这样交错地放入一组正项和一个负项:

$$(v_1 + \cdots + v_{m_1} - w_1) + (v_{m_1+1} + \cdots + v_{m_2} - w_2) + \cdots + (v_{m_{k-1}+1} + \cdots + v_{m_k} - w_k) + \cdots \quad (*)$$

此级数显然为原级数的更序级数

因(*)加括号后的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (v_{m_{k-1}+1} + \cdots + v_{m_k} - w_k)$ 的k次部分和

$$(v_1 + \cdots + v_{m_1} - w_1) + (v_{m_1+1} + \cdots + v_{m_2} - w_2) + \cdots + (v_{m_{k-1}+1} + \cdots + v_{m_k} - w_k) > \beta_k$$

而 $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = +\infty$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} (v_{m_{k-1}+1} + \cdots + v_{m_k} - w_k)$ 发散到 $+\infty$

由发散级数可任意去括号，则可以作出条件收敛级数的更序级数，使其发散到 $+\infty$.

§6. 无穷乘积

1. 讨论无穷乘积的收敛性:

$$(1) \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}$$

$$(2) \prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}} (a > 0)$$

$$(3) \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$$

解:

$$(1) \text{ 因 } \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} = 1 - \frac{3}{n^2 - 1}, n \geq 3, \text{ 且 } -\frac{3}{n^2 - 1} < 0$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^2 - 1}}{\frac{1}{n^2}} = 3 \text{ 且 } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n^2 - 1} \text{ 收敛, 于是 } \sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{3}{n^2 - 1} \right) \text{ 收敛}$$

从而据定理2, 得 $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}$ 收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln a^{\frac{(-1)^n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ln a = \ln a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 为莱布尼兹型级数, 则其收敛, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ 收敛, 从而无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ 收敛.

$$(3) \text{ 由于部分乘积 } P_n = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}} = \sqrt{\frac{1}{n+2}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

故无穷乘积 $\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$ 发散于0.

2. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

$$\text{证明: 因 } \prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x_n}{2} \right) \text{ 且 } 0 \leq 2 \sin^2 \frac{x_n}{2} \leq 2 \cdot \left(\frac{\sin x_n}{2} \right)^2 = \frac{x_n^2}{2}$$

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin^2 \frac{x_n}{2} \text{ 收敛}$$

于是据定理2, 得 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

3. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛, 则 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n \right)$ 收敛 (其中 $|\alpha_n| < \frac{\pi}{4}$).

$$\text{证明: } \prod_{n=1}^{\infty} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \tan \alpha_n}{1 - \tan \alpha_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2 \tan \alpha_n}{1 - \tan \alpha_n} \right)$$

$$\text{因 } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 绝对收敛, 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \text{ 于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{2 \tan \alpha_n}{1 - \tan \alpha_n} \right|}{|\alpha_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{1 - \tan \alpha_n} \right| \left| \frac{\tan \alpha_n}{\alpha_n} \right| = 2$$

$$\text{由 } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ 绝对收敛, 得 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2 \tan \alpha_n}{1 - \tan \alpha_n} \right| \text{ 收敛, 于是 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \tan \alpha_n}{1 - \tan \alpha_n} \text{ 绝对收敛}$$

从而 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan \left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n \right)$ 绝对收敛.

第十章 广义积分

§1. 无穷限的广义积分

1. 求下列广义积分的值:

$$(1) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+p)(x^2+q)} dx, (p, q > 0)$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x dx (a > 0)$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx, (a > 0)$$

解:

$$(1) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+p)(x^2+q)} dx = \frac{1}{q-p} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \arctan \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan \frac{x}{\sqrt{q}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q})} = \frac{\pi}{2(q\sqrt{p} + p\sqrt{q})}$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x dx = -\frac{e^{-ax^2}}{2a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a}$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{-a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

2. 讨论下列积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|}$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} dx$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx, (n > 0, m > 0)$$

解:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

因 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 为正常积分, 则其必收敛

对 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$, 因 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 收敛, 从而 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 收敛.

$$(2) \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{1+x^3} \arctan x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1+x^3} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \text{ 收敛}$$

则由比较判别法的极限形式, 得 $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx$ 收敛.

(3) 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1$ 且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 从而 $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx$ 收敛.

(4) $\frac{1}{1+x|\sin x|} \geq \frac{1}{1+x}$
 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}} = 1$ 且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 发散, 从而由比较判别法的极限形式, 得 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$ 发散
 又 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ 为正常积分则收敛, 于是 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$ 发散
 从而由比较判别法, 得 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(5) 因 $x \in [0, +\infty)$ 时, 有 $\frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} \geq \frac{x}{1+x^2}$ 且 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^{+\infty} = +\infty$
 则由比较判别法, 得 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2 \sin^2 x} dx$ 发散.

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 且 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 为常义积分
 (i) 当 $n-m > 1$ 时, 有 $\frac{1}{x^{n-m}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^n}} < \frac{1}{x^{n-m}}$ 且积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 收敛, 故原积分收敛;
 (ii) 当 $n-m \leq 1$ 且 $x \geq 1$ 时, 有 $\frac{x^m}{1+x^n} \geq \frac{1}{2x^{n-m}}$, 且 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-m}} dx$ 发散, 故原积分发散
 则当 $n-m > 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 收敛; 当 $n-m \leq 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 发散.

3. 证明绝对收敛的广义积分必收敛, 但反之不然.

证明: 已知 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 由柯西判别原理, 得对 $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$, 当 $A'' > A' > A$ 时, 有
 $\left| \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$, 则 $\int_{A'}^{A''} |f(x)| dx < \varepsilon$, 于是 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx < \varepsilon$,
 从而 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

收敛的广义积分未必绝对收敛.

例: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛; 而 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ 发散(见书上55页).

4. 证明对于无穷限积分, 分部积分公式成立(当公式中各部分有意义时)

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)f'(x) dx$$

证明: 对于任意 $A > a$, 成立 $\int_a^A f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^A - \int_a^A g(x)f'(x) dx$

两边取极限, 得 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)g'(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(f(x)g(x) \Big|_a^A \right) - \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_a^A g(x)f'(x) dx \right)$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} g(x)f'(x) dx$

5. 证明:

(1) 设 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的一致连续函数, 并且积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; 如果仅仅积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 以及 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, $f(x) \geq 0$, 是否仍旧成立 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$?

证明: 用反证法. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon > 0$, 对任意大的 $A > 0$, 都存在 $x_A > A$, 使得 $|f(x_A)| \geq 2\varepsilon$.

取序列 $A_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 有序列 $x_n \rightarrow +\infty$ 且 $x_n > A_n (n = 1, 2, \dots)$, 使 $|f(x_n)| \geq 2\varepsilon$

另一方面, 由 $f(x)$ 的一致收敛性, 对上述 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

因此, 对一切 n , 当 $x \in \left(x_n - \frac{\delta}{2}, x_n + \frac{\delta}{2} \right)$ 时, 有 $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$, 即 $f(x_n) - \varepsilon < f(x) < f(x_n) + \varepsilon$

当 $f(x_n) > 0$ 时, $|f(x_n)| = f(x_n) \geq 2\varepsilon$, 由左端不等式, 得 $f(x) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$

当 $f(x_n) < 0$ 时, $|f(x_n)| = -f(x_n) \geq 2\varepsilon$, 由右端不等式, 得 $f(x) < -2\varepsilon + \varepsilon = -\varepsilon$

从而, $\int_{x_n - \frac{\delta}{2}}^{x_n + \frac{\delta}{2}} f(x) dx > \varepsilon\delta$ (当 $f(x_n) > 0$ 时) 或 $\int_{x_n - \frac{\delta}{2}}^{x_n + \frac{\delta}{2}} f(x) dx < -\varepsilon\delta$ (当 $f(x_n) < 0$ 时)

此与 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛矛盾, 则假设不成立, 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(2) 积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 以及 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, $f(x) \geq 0$, 并不能保证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

例: $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx$.

它是绝对收敛的.

因 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (I_n^1 + I_n^2)$

其中 $I_n^1 = \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n\pi + z}{1+(n\pi+z)^6 \sin^2 z} dz$,

$I_n^2 = \int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n\pi + \pi - z}{1+(n\pi+\pi-z)^6 \sin^2 z} dz$

注意到当 $0 < z < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin z}{z} \leq 1$, 于是 $(n\pi+z)^6 \sin^2 z \geq (n\pi)^6 \left(\frac{2z}{\pi}\right)^2 = (2\pi^2 n^3 z)^2$,

$(n\pi+\pi-z)^6 \sin^2 z \geq (2\pi^2 n^3 z)^2$

故有 $I_n^1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n+1)\pi}{1+(2\pi^2 n^3 z)^2} dz = \frac{n+1}{2n^3 \pi} \int_0^{(n\pi)^3} \frac{dy}{1+y^2} \leq \frac{n+1}{4n^3}$

同理, 有 $I_n^2 \leq \frac{n+1}{4n^3}$

因 $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx$ 为正常积分, 则必收敛

又 $\frac{n+1}{2n^3} < \frac{1}{n^2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3}$ 收敛

于是 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx \leq \int_0^{\pi} \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3}$ 绝对收敛

显然 $f(x) = \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上非负连续

但若取 $x_n = 2n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$, 有 $f(x_n) = f(2n\pi) = 2n\pi \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$.

6. 证明: 若 $f(x), g(x)$ 在任何区间 $[a, A]$ 可积, 又设 $f^2(x), g^2(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 积分收敛, 那末 $[f(x) + g(x)]^2$ 和 $|f(x) \cdot g(x)|$ 在 $[a, +\infty)$ 上皆可积.

证明: 因 $f(x), g(x)$ 在任何区间 $[a, A]$ 可积, 则 $\int_a^A |f(x) \cdot g(x)| dx$ 存在, $\int_a^A [f(x) + g(x)]^2 dx$ 存在

又 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g^2(x) dx$ 都收敛, 则 $\int_a^{+\infty} [f^2(x) + g^2(x)] dx$ 收敛,

于是 $\int_a^{+\infty} 2[f^2(x) + g^2(x)] dx$ 和 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)] dx$ 都收敛

又 $[|f(x)| - |g(x)|]^2 = f^2(x) + g^2(x) - 2|f(x) \cdot g(x)| \geq 0$ 即 $|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$

则由比较判别法, 得 $|f(x) \cdot g(x)|$ 在 $[a, +\infty)$ 上可积

又 $[f(x) + g(x)]^2 = f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) \cdot g(x) \leq f^2(x) + g^2(x) + 2|f(x) \cdot g(x)| \leq 2[f^2(x) + g^2(x)]$

则由比较判别法, 得 $[f(x) + g(x)]^2$ 在 $[a, +\infty)$ 上可积.

7. 对无穷限广义积分, 讨论平方可积和绝对可积的关系. 考察例子: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ 和 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$, 其中

$f(x) = n^2 \left(\text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{n^4} \right), f(x) = 0 \left(\text{当 } n + \frac{1}{n^4} \leq x < n + 1 \right)$.

证明: 平方可积 \nRightarrow 绝对可积

例: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ 收敛, 但 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{x^{3/4}} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/4}}$ 发散;

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ 收敛, 且 } \int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{x^{3/2}} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \text{ 收敛}$$

绝对可积 \nRightarrow 平方可积

$$\text{例: } \int_1^{+\infty} f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = n^2 \left(\text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{n^4} \right), f(x) = 0 \left(\text{当 } n + \frac{1}{n^4} \leq x < n + 1 \right)$$

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{1^4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2^4} \cdot 2^2 + \cdots + \frac{1}{n^4} \cdot n^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = n^4 \left(\text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{n^4} \right), f(x) = 0 \left(\text{当 } n + \frac{1}{n^4} \leq x < n + 1 \right)$$

$$\int_1^{+\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{1^4} \cdot 1^4 + \frac{1}{2^4} \cdot 2^4 + \cdots + \frac{1}{n^4} \cdot n^4 + \cdots = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ 发散;}$$

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{x^{3/2}} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \text{ 收敛, 且 } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ 收敛}$$

8. 讨论下列积分的绝对收敛性及条件收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$$

$$(3) \int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \sin x dx, P_m(x), Q_n(x) \text{ 各为 } m, n \text{ 次多项式且当 } x \geq a \text{ 时, } Q_n(x) \neq 0$$

$$(4) \int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$$

解:

$$(1) \text{ 对 } A > 0, \text{ 由于 } \left| \int_0^A \cos x dx \right| = |\sin A - \sin 0| \leq 1$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} = 0, \left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} \right)' = \frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2}, \text{ 当 } x > 100 \text{ 时, } \left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} \right)' < 0, \text{ 则 } \frac{\sqrt{x}}{x+100} \text{ 单调减少}$$

$$\text{于是由狄立克莱判别法, 得 } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx \text{ 收敛.}$$

但它不为绝对收敛.

$$\text{由于 } \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} \geq \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} + \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} \right)$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+100} \right) = 1, \text{ 则由柯西判别法的极限形式, 得 } \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx \text{ 发散}$$

$$\text{又 } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx \text{ 为正常积分, 则 } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx \text{ 发散}$$

$$\text{依前半段的证明, 可知 } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} dx \text{ 收敛, 从而积分 } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx \text{ 发散}$$

$$\text{则 } \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx \text{ 发散, 从而积分 } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx \text{ 条件收敛.}$$

$$(2) \text{ (i) 当 } \lambda > 1 \text{ 时, 因 } \left| \frac{\cos x}{x^\lambda} \right| = \frac{|\cos x|}{x^\lambda} \leq \frac{1}{x^\lambda} \text{ 且当 } \lambda > 1 \text{ 时, } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \text{ 收敛, 从而 } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx \text{ 绝对收敛}$$

$$\text{同理 } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \text{ 绝对收敛}$$

(ii) 当 $0 < \lambda \leq 1$ 时

$$\text{因 } \left| \int_1^A \cos x dx \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2 \text{ 且 } \frac{1}{x^\lambda} \text{ 当 } 0 < \lambda \leq 1 \text{ 时单调减少, 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时趋于 } 0,$$

则由狄立克莱判别法, 得 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx$ 收敛

但 $\left| \frac{\cos x}{x^\lambda} \right| \geq \frac{\cos^2 x}{x^\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^\lambda} + \frac{\cos 2x}{x^\lambda} \right)$, 由前面证明, 可知 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\lambda} dx$ 收敛

又 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} (0 < \lambda \leq 1)$ 发散, 则 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^\lambda} \right| dx$ 发散, 从而 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx$ 条件收敛

同理, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ 条件收敛

(iii) 当 $\lambda \leq 0$ 时

因 $n \rightarrow +\infty, 2n\pi \rightarrow +\infty$, 于是对任意 $A > 0$, 至少可以找到 $(2n+1)\pi > 2n\pi > A$

取 $\varepsilon_0 = 2$, 当 $(2n+1)\pi > 2n\pi > A$ 时, $\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \right| = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x dx = 2 = \varepsilon_0$

则当 $\lambda \leq 0$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ 发散

同理, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx$ 发散.

综合知, $\lambda > 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ 绝对收敛;

$0 < \lambda \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ 条件收敛;

$\lambda < 0$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ 发散.

(3) (i) 设 $m < n$. 此时, 真分式 $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ 当 x 足够大时, 随 $x \rightarrow +\infty$ 而单调下降趋于 0

又 $\left| \int_a^A \sin x dx \right| \leq 2$ (对 $\forall A > a$), 则据狄立克莱判别法, 原积分收敛

(ii) 设 $Q_n(x) \equiv 1$. 此时多项式为 $P_m(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$, 不妨设 $a_m > 0$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_m(x)}{x^m} = a_m > 0$, 故存在 $b\pi + \pi > 0$, 使当 $x > b\pi + \pi$ 时, $P_m(x) = \frac{a_m}{2} x^m$

于是有 $\int_a^{+\infty} P_m(x) \sin x dx = \int_a^{b\pi+\pi} P_m(x) \sin x dx + \sum_{n=b+1}^{\infty} I_n$, 其中 $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} P_m(x) \sin x dx$

此时有 $|I_n| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} P_m(x) \sin x dx \right| = \left| \int_0^\pi P_m(n\pi + z) (-1)^n \sin z dz \right| \geq \frac{a_m}{2} (n\pi)^m \int_0^\pi \sin z dz = a_m (n\pi)^m$, 则 $I_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$

又 $\int_a^{b\pi+\pi} P_m(x) \sin x dx$ 为正常积分, 则必收敛, 于是 $\int_a^{+\infty} P_m(x) \sin x dx$ 发散

(iii) 当 $m \geq n$ 时, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R(x) + S(x)$, 其中 $R(x)$ 为真分式, $S(x)$ 为整式

由(ii)知, $\int_a^{+\infty} S(x) \sin x dx$ 发散; 由(i)知, $\int_a^{+\infty} R(x) \sin x dx$ 收敛, 故 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \sin x dx$ 发散

(iv) 设 $Q_n(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \sin x \right|}{\left| \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \sin x \right|} = 1$, 则由 8(2) 知, 当 $\lambda = n - m > 1$ 时, 积分绝对收敛

综合知: $m \geq n$ 时, 积分发散; $m = n - 1$ 时, 积分条件收敛; $m < n - 1$ 时, 积分绝对收敛.

(4) 对 $A > 2$, $\left| \int_2^A \sin x dx \right| \leq 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$,

$\left(\frac{\ln \ln x}{\ln x} \right)' = \frac{1 - \ln \ln x}{x(\ln x)^2}$, 当 $x > e^e$ 时, $\left(\frac{\ln \ln x}{\ln x} \right)' < 0$, 此时此函数单调减趋于 0

则由狄立克莱判别法, 得 $\int_{e^e}^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 收敛

又 $\int_2^{e^e} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 为正常积分, 则必收敛, 于是 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x dx$ 收敛

又 $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x \right| dx = \int_2^{n_0 \pi} \left| \frac{\ln \ln x}{\ln x} \sin x \right| dx + \sum_{n=n_0}^{\infty} I_n$, 其中 $n_0 > \frac{e^e}{\pi}$ 为正整数

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\ln \ln x}{\ln x} |\sin x| dx = \int_0^\pi \frac{\ln \ln(n\pi + z)}{\ln(n\pi + z)} \sin z dz \geq \frac{\ln \ln(n+1)\pi}{\ln(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin z dz = 2 \frac{\ln \ln(n+1)\pi}{\ln(n+1)\pi}$$

因 $\int_{e^e+\pi}^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\ln x} dx > \int_{e^e+\pi}^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{x} dx = \ln x (\ln \ln x - 1) \Big|_{e^e+\pi}^{+\infty} = +\infty$, 则由柯西判别法, 得 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\ln \ln(n+1)\pi}{\ln(n+1)\pi}$ 发

散, 于是 $\sum_{n=n_0}^{+\infty} I_n$ 发散, 从而原积分条件收敛.

§2. 无界函数的广义积分

1. 下列积分是否收敛? 如果收敛, 求其值.

$$(1) \int_0^{\frac{1}{2}} \cot x \, dx$$

$$(2) \int_0^1 \ln x \, dx$$

解:

(1) 因 $\lim_{x \rightarrow +0} \cot x = \infty$, 则 $x=0$ 为 $\cot x$ 的奇点

又 $\int_{0+\eta}^{\frac{1}{2}} \cot x \, dx = \ln |\sin x| \Big|_{\eta}^{\frac{1}{2}} = \ln \left| \sin \frac{1}{2} \right| - \ln |\sin \eta| \rightarrow +\infty (\eta \rightarrow +0)$, 则积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \cot x \, dx$ 发散.

(2) 因 $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = \infty$, 则 $x=0$ 为 $\ln x$ 的奇点

又 $\int_{0+\eta}^1 \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_{\eta}^1 = -\eta \ln \eta - 1 + \eta \rightarrow -1 (\eta \rightarrow +0)$, 则积分 $\int_0^1 \ln x \, dx$ 收敛于 -1 .

2. 讨论下列积分的收敛性:

$$(1) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$$

$$(3) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \, dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$(5) \int_0^1 |\ln x|^p \, dx$$

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^m} \, dx$$

$$(7) \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, dx$$

$$(8) \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x \, dx$$

解:

(1) $x=0$ 为 $\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}$ 的奇点

因 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 则据柯西判别法, 得 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx$ 绝对收敛.

(2) $x=0$, $x=1$ 均为被积函数的奇点, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$

因 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = 1$, 则据柯西判别法, 得 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$ 绝对收敛;

又 $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 1$, 则据柯西判别法, 得 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$ 绝对收敛

从而 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$ 绝对收敛.

(3) 因 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-2x} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2}$, 则 $x=1$ 不是奇点, 于是此积分只有一个奇点 0

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{2}} \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -2 \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

则由柯西判别法, 得 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 收敛.

(4) $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 均为被积函数的奇点, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

因 $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 1$, 且 $\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \geq 0$, 则据柯西判别法, 得 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ 发散至 $+\infty$

又 $\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \geq 0$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ 发散.

(5) $\int_0^1 |\ln x|^p dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p dx$

对 $\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p dx$, 当 $p > 0$ 时, 0 为奇点

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|\ln x|^p}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(-\ln x)^p}{x^{-\frac{1}{2}}} = (-1)^p \lim_{x \rightarrow +0} \frac{p \ln^{p-1} x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = (-1)^{p+1} 2p \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^{p-1} x}{x^{-\frac{1}{2}}} = 0 \text{ (见书上册231页1.(16))}$$

则由柯西判别法, 得 $\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p dx$ 当 $p > 0$ 时收敛

当 $p \leq 0$ 时, $\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p dx$ 为正常积分, 则 $\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p dx$, 于是 p 为任何值时, $\int_0^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p dx$ 均收敛.

对 $\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p dx$, $p < 0$ 时, 1 为奇点

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{-p} |\ln x|^p = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|\ln x|^p}{(1-x)^p} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\frac{\ln \frac{1}{1-x}}{1-x} \right)^p = \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1-x} \right)^p = 1$$

则据柯西判别法, 得当 $-p < 1$ 即 $0 > p > -1$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p dx$ 收敛;

当 $-p \geq 1$ 即 $p \leq -1$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p dx$ 发散

当 $p \geq 0$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p dx$ 为正常积分, 故收敛

于是当 $p > -1$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p dx$ 收敛; 当 $p \leq -1$ 时, $\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^p dx$ 发散

综合知, 当 $p > -1$ 时, $\int_0^1 |\ln x|^p dx$ 收敛; 当 $p \leq -1$ 时, $\int_0^1 |\ln x|^p dx$ 发散.

$$(6) \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos x}{x^m} = \begin{cases} 0, & m \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{mx^{m-1}} = \begin{cases} 0, & 0 < m < 1 \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x}{m(m-1)x^{m-2}} = \begin{cases} 0, & 1 < m < 2 \\ \frac{1}{2}, & m = 2 \\ \infty, & m > 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos x}{x^m} = \begin{cases} 0, & m < 2 \\ \frac{1}{2}, & m = 2 \\ \infty, & m > 2 \end{cases}$$

从而当 $m \leq 2$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$ 为正常积分, 故收敛

当 $m > 2$ 时, $x=0$ 为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$ 的奇点

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{m-2} \frac{1 - \cos x}{x^m} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

则当 $0 < m - 2 < 1$ 即 $2 < m < 3$ 时, 积分收敛; 当 $m - 2 \geq 1$ 即 $m \geq 3$ 时, 积分发散

从而当 $m < 3$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$ 收敛; 当 $m \geq 3$ 时, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$ 发散.

(7) 当 $a \geq 1$ 且 $b \geq 1$ 时, $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ 为正常积分, 故收敛

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

$$\text{对积分 } \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}} dx$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a < 1 \end{cases} \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{1-a} \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}} = \lim_{x \rightarrow +0} (1-x)^{b-1} = 1$$

则由柯西判别法的极限形式, 得当 $1-a < 1$ 即 $a > 0$ 时积分收敛; 当 $1-a \geq 1$ 即 $a \leq 0$ 时, 积分发散;

$$\text{对积分 } \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} dx$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} = \begin{cases} 0, & b > 1 \\ 1, & b = 1 \\ \infty, & b < 1 \end{cases} \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{1-b} \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^{a-1} = 1$$

则由柯西判别法的极限形式, 得当 $1-b < 1$ 即 $b > 0$ 时积分收敛; 当 $1-b \geq 1$ 即 $b \leq 0$ 时, 积分发散;

综上所述, 当 $a > 0$ 且 $b > 0$ 时, $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ 收敛, 其余情形积分均发散.

$$(8) \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx$$

$$\text{对积分 } \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{b-1} \ln x}{x^{1-a}} dx$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(1-x)^{b-1} \ln x}{x^{1-a}} = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ \infty, & a \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{且对 } \forall c > 0, \lim_{x \rightarrow +0} x^{1-a+c} \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}} |\ln x| = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\ln x}{x^{-c}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{x}}{-cx^{-c-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^c}{c} = 0$$

则由柯西判别法的极限形式, 得当 $1-a+c < 1$ 即 $a > c > 0$ 时收敛

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{1-a} \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}} |\ln x| = -\lim_{x \rightarrow +0} (1-x)^{b-1} \ln x = \infty$$

则由柯西判别法的极限形式, 得当 $1-a \geq 1$ 即 $a \leq 0$ 时发散

$$\text{对积分 } \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{a-1} \ln x}{(1-x)^{1-b}} dx$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^{a-1} \ln x}{(1-x)^{1-b}} = \begin{cases} 0, & b > 0 \\ -1, & b = 0 \\ \infty, & b < 0 \end{cases}$$

$$\text{且 } \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{-b} \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}} |\ln x| = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x} = 1$$

则由柯西判别法的极限形式, 得当 $-b < 1$ 即 $b > -1$ 时收敛; 当 $-b \geq 1$ 即 $b \leq -1$ 时发散

综上所述, 得当 $a > 0$ 且 $b > -1$ 时, 积分 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx$ 收敛, 其余情形积分均发散.

3. 证明无界函数广义积分的柯西判别法及其极限形式.

证明:

(1) 柯西判别法:

$$(i) \text{ 由 } |f(x)| \leq \frac{C}{(x-a)^p} (C > 0), p < 1, \text{ 知 } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)| dx \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{C}{(x-a)^p} dx =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{C}{1-p} (1-a)^{1-p} \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\frac{C}{1-p} (b-a)^{1-p} - \frac{C}{1-p} \varepsilon^{1-p} \right] = \frac{C}{1-p} (b-a)^{1-p}$$

$$\text{即 } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)| dx \text{ 存在, 故 } \int_a^b f(x) dx \text{ 绝对收敛}$$

$$(ii) \text{ 因有 } \int_{a+\varepsilon}^b |f(x)| dx \geq \int_{a+\varepsilon}^b \frac{C}{(x-a)^p} dx = \left[\frac{C}{1-p} (b-a)^{1-p} - \frac{C}{1-p} \varepsilon^{1-p} \right] \rightarrow \infty (\text{当 } p > 1, C >$$

0且 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时)

又当 $p = 1$ 时, $\int_a^b \frac{C}{x-a} dx$ 发散, 从而 $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散.

(2) 柯西判别法的极限形式:

(i) 设 $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^p |f(x)| = k (0 < k < \infty)$

则对 $\forall k > \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $a < x < a + \delta$ 时, 有 $0 < k - \varepsilon < (x-a)^p |f(x)| < k + \varepsilon$

即有 $\frac{k - \varepsilon}{(x-a)^p} < |f(x)| < \frac{k + \varepsilon}{(x-a)^p}$

于是 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 与 $\int_a^b |f(x)| dx$ 同时收敛或发散 (归结为柯西判别法)

从而当 $p < 1$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛; $p \geq 1$ 时, $f(x)$ 有定号, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 发散

(ii) $k = 0$ 时, 取 $\varepsilon_0 = 1$, 则 $\exists \delta > 0$, 使当 $a < x < a + \delta$ 时,

$|(x-a)^p f(x)| = (x-a)^p |f(x)| < 1$ 即 $|f(x)| < \frac{1}{(x-a)^p}$,

则由柯西判别法, 得 $p < 1$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛

(iii) $k = \infty$ 时, 取 $G = 1$, 则 $\exists \delta > 0$, 使当 $a < x < a + \delta$ 时, 有 $|(x-a)^p f(x)| = (x-a)^p |f(x)| > 1$

即 $|f(x)| > \frac{1}{(x-a)^p}$

则由柯西判别法, 得当 $p \geq 1$ 时, $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散; 又 $f(x)$ 有定号, 从而 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

综上, 得若 $0 \leq k < +\infty, p < 1$, 那末 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛; 若 $0 < k \leq +\infty, p \geq 1$, 那

末 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

4. 讨论下列积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \cdots |x-a_n|^{p_n}}$$

解:

(1) $x = 0, 1, 2$ 均为被积函数的奇点

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}} = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 + \int_1^{\frac{3}{2}} + \int_{\frac{3}{2}}^2 + \int_2^3 + \int_3^{+\infty} \right) \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$$

$$\text{对积分} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$$

$$\text{因} \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}} \right| = \lim_{x \rightarrow +0} \left| \frac{x}{(x-1)^2 (x-2)} \right|^{\frac{1}{3}} = 0$$

则由柯西判别法的极限形式, 得积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$ 绝对收敛

$$\text{对积分} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{5}{6}} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}} \right| = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left| \frac{(1-x)^{\frac{1}{6}}}{[x(x-2)]^{\frac{1}{3}}} \right| = 0$$

则由柯西判别法的极限形式, 得积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$ 绝对收敛

同此证法, 得积分 $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$ 绝对收敛

$$\text{对积分 } \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 2-0} (2-x)^{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}} \right| = \lim_{x \rightarrow 2-0} \left| \frac{2-x}{x(x-1)^2} \right|^{\frac{1}{3}} = 0$$

则由柯西判别法的极限形式, 得积分 $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$ 绝对收敛

同此证法, 得 $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$ 绝对收敛

因 $x \geq 3$ 时, $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}} \leq \frac{1}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}$ 且 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}$ 绝对收敛

则由比较判别法, 得 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$ 绝对收敛

综上所述, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2 x(x-2)}}$ 绝对收敛

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$$

$$\text{对 } \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0, & 0 < \alpha < 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases} \end{cases}, \text{ 则当 } \alpha > 1 \text{ 时, } 0 \text{ 为奇点}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\alpha-1} \left| \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \right| = \lim_{x \rightarrow +0} \left| \frac{\ln(1+x)}{x} \right| = 1$$

则当 $\alpha - 1 < 1$ 即 $1 < \alpha < 2$ 时, $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 绝对收敛; 当 $\alpha \geq 2$ 时, $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 发散;

当 $\alpha \leq 1$ 时, $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 为正常积分, 故必收敛

从而当 $\alpha < 2$ 时, $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 绝对收敛; 当 $\alpha \geq 2$ 时, $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 发散

$$\text{对 } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$$

$$\text{取 } \lambda > 1, \text{ 当 } \alpha - \lambda > 0 \text{ 时, 因 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{(\alpha - \lambda)x^{\alpha-\lambda-1}} = 0$$

则当 $\alpha - \lambda > 0$ 即 $\alpha > \lambda > 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 绝对收敛;

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} = +\infty$, 则当 $\alpha \leq 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 发散

从而当 $1 < \alpha < 2$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 绝对收敛; 其它情形, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 都发散.

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$$

$$\text{对积分 } \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}, \text{ 设 } \min(p, q) = p$$

若 $p \leq 0$, 则 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 为正常积分, 故 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 收敛

若 $p > 0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +0} x^p \frac{1}{x^p + x^q} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + x^{q-p}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & p = q \\ 1, & p \neq q \end{cases}$

故积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $p < 1$ 即 $\min(p, q) < 1$ 时收敛

对积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$, 设 $\max(p, q) = q$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^q \frac{1}{x^p + x^q} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{-(q-p)} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & p = q \\ 1, & p \neq q \end{cases}$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $q > 1$ 即 $\max(p, q) > 1$ 时收敛

则积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 当 $\min(p, q) < 1$ 且 $\max(p, q) > 1$ 时收敛.

$$(4) \text{ 当 } 0 < \alpha \leq 1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arctan x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha(1+x^2)} = 0$$

当 $\alpha \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arctan x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +0} x^{-\alpha} \arctan x = 0$

则 $\alpha \leq 1$ 时, 0 不为奇点

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \frac{\arctan x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

则 $\alpha \leq 1$ 时, 由柯西判别法的极限形式, 得 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ 发散

当 $\alpha > 1$ 时, 因 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arctan x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}(1+x^2)} = +\infty$, 则 0 为奇点

$$\text{则 } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$$

对 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 1$, 0 为奇点

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\alpha-1} \frac{\arctan x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

则由柯西判别法的极限形式, 得 $\alpha - 1 < 1$ 即 $\alpha < 2$ 时积分收敛; 当 $\alpha \geq 2$ 时, 积分发散

$$\text{对 } \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$$

$$\text{因 } \frac{\frac{\pi}{4}}{x^\alpha} \leq \frac{\arctan x}{x^\alpha} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^\alpha} \text{ 且 } \int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^\alpha} dx \text{ 当 } \alpha > 1 \text{ 时积分收敛; } \int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{4}}{x^\alpha} dx \text{ 当 } \alpha \leq 1 \text{ 时积分发散}$$

则由比较判别法, 得当 $\alpha > 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ 收敛; 当 $\alpha \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ 发散

总之, 当 $1 < \alpha < 2$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ 收敛; 其余情形此积分均发散.

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

考虑 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$, 对任意的 p

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 1+0} \left[(x-1)^q \frac{1}{x^p \ln^q x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^p} \cdot \frac{(x-1)^q}{\ln^q x} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)^q}{\ln^q x} = \left(\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{\ln x} \right)^q \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\frac{1}{x}} \right)^q = 1 \end{aligned}$$

则积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 仅当 $q < 1$ 且 p 为任意值时收敛

考虑 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$, 若 $p > 1$, 取 $\alpha > 0$ 充分小, 使 $p - \alpha > 1$, 则对任意 q ,

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{p-\alpha} \frac{1}{x^p \ln^q x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^q x} = 0$$

于是积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 当 $p > 1$ 且 q 为任意值时收敛;

若 $p \leq 1, q < 1$, 由于 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \geq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \frac{1}{1-q} (\ln x)^{1-q} \Big|_2^{+\infty} = +\infty$

则此时积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 发散

从而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 当 $p > 1$ 且 $q < 1$ 时收敛.

(6) 首先, 被积函数关于 $\frac{1}{x}$ 是 $\sum_{i=1}^n p_i$ 级无穷小 (当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时)

其次 (不妨设为 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$)

因 $\lim_{x \rightarrow a_i} \left[\frac{1}{|x - a_i|^{p_i} |x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \cdots |x - a_n|^{p_n}} \right] = c_i, 0 < c_i < +\infty (i = 1, 2, \cdots, n)$

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \cdots |x - a_n|^{p_n}}$ 仅当 $\sum_{i=1}^n p_i > 1$ 且 $p_i < 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时收敛.

5. 设 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +0$ 时单调趋向于 $+\infty$, 试证明: 若 $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛, 必须 $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) dx = 0$.

证明: 由题设知 0 是 $f(x)$ 的奇点, 即 $\int_0^1 f(x) dx$ 是无界函数的广义积分, 且当 x 充分靠近 0 时, $f(x) \geq 0$,

在 $[0, x]$ 上单调减

又 $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛, 则由柯西收敛原理, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < \frac{x}{2} < x < \delta$ 时,

有 $\left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(x) dx \right| = \int_{\frac{x}{2}}^x f(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}$

由第一积分中值定理, 得 $\int_{\frac{x}{2}}^x f(x) dx = f(\xi) \left(x - \frac{x}{2} \right) = \frac{x}{2} f(\xi) > \frac{x}{2} f(x) \left(\frac{x}{2} < \xi < x \right)$

于是 $\frac{x}{2} f(x) < \int_{\frac{x}{2}}^x f(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}$ 即 $0 \leq x f(x) < \varepsilon$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) dx = 0$.

6. 讨论下列积分的绝对收敛和条件收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx (q \geq 0)$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx (\lambda > 0)$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx$$

解:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx = \int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$$

$$\text{对 } \int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{-(p+1)} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

则当 $-(p+1) < 1$ 即 $p > -2$ 时, $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 绝对收敛; 当 $p \leq -2$ 时, 积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 发散

$$\text{对 } \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \right| dx$$

$$\text{因 } \left| \frac{x^q \sin x}{1+x^q} \right| \leq \frac{x^p}{1+x^q} \text{ 而 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{q-p} \frac{x^p}{1+x^q} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{1+x^q} = 1$$

则当 $q-p > 1$ 即 $q > p+1$ 时 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx$ 收敛, 于是由比较判别法, 得 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 绝对收敛

又 $\frac{2x^q}{1+x^q} \geq 1, \frac{2x^p}{1+x^q} \geq \frac{1}{x^{q-p}}, \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} \geq \frac{|\sin x|}{2x^{q-p}}$ 且由 56 页 8.(2) 知, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{q-p}} dx$ 当 $q \leq p+1$ 时非绝对收敛

总之, 当 $p > -2, q > p + 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 绝对收敛

考虑 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$

当 $q > p$ 时, $\left| \int_1^A \sin x dx \right| \leq 2$, $\frac{x^p}{1+x^q}$ 单调减趋于 0 ($x \rightarrow +\infty$)

则由狄立克莱判别法, 得 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 收敛

当 $q \leq p$ 时, 当 $q = p$ 时, $\frac{x^p}{1+x^q} \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty)$; 当 $q < p$ 时, $\frac{x^p}{1+x^q} \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$

则对充分大的 x , 恒有 $\frac{x^p}{1+x^q} \geq \frac{1}{3}$

于是对 $\forall A > 1$, 必 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $2N\pi + \frac{\pi}{4} > A$ 且当 $x \geq 2N\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, 恒有 $\frac{x^p}{1+x^q} \geq \frac{1}{3}$

从而对 $A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}, A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$, 有 $\left| \int_{A'}^{A''} \frac{x^p}{1+x^q} \sin x dx \right| \geq \frac{1}{3} \left| \int_{A'}^{A''} \sin x dx \right| = \frac{\sqrt{2}}{6}$

则由柯西原理, 得 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 发散

综上所述, 当 $q > p+1 > -1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 绝对收敛; 当 $p+1 \geq q > p > -2$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 条件收敛.

$$(2) \text{ 因 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin 2x}{x^\lambda} = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \cos 2x}{\lambda x^{\lambda-1}} = \begin{cases} 0, & 0 < \lambda < 1 \\ 2, & \lambda = 1 \\ \infty, & \lambda > 1 \end{cases} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \lambda < 1 \\ 2, & \lambda = 1 \\ \infty, & \lambda > 1 \end{cases}$$

则当 $\lambda > 1$ 时, 0 为奇点

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx = \int_0^1 \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$$

对 $\int_0^1 \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$, 被积函数为正, 0 为奇点

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\lambda-1} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x} = 2$$

则由柯西判别法的极限形式, 得当 $\lambda - 1 < 1$ 即 $\lambda < 2$ 时, $\int_0^1 \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$ 绝对收敛;

当 $\lambda \geq 2$ 时, $\int_0^1 \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$ 发散

$$\text{对 } \int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} \right| dx$$

当 $\lambda > 1$ 时, $\left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} \right| \leq \frac{e}{x^\lambda}$, 则 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$ 绝对收敛

于是 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$ 当 $1 < \lambda < 2$ 时绝对收敛;

$$\text{当 } \lambda \leq 1 \text{ 时, } \frac{e^{\sin x} |\sin 2x|}{x^\lambda} > \frac{e^{-1} \sin^2 2x}{x^\lambda} = e^{-1} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2x^\lambda} \right) = \frac{1}{2e} \left(\frac{1}{x^\lambda} - \frac{\cos 4x}{x^\lambda} \right)$$

因 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^\lambda} dx$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} \right| dx$ 发散

$$\text{对 } \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$$

$$\text{因 } \left| \int_1^A e^{\sin x} \sin 2x dx \right| = 2 \left| \int_1^A e^{\sin x} \sin x d \sin x \right| \leq 4e$$

又 $\frac{1}{x^\lambda}$ 单调减趋于 0, 则据狄立克莱判别法, 得对 $\lambda > 0$ 有 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$ 收敛

于是 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$ 当 $0 < \lambda \leq 1$ 时条件收敛

从而当 $1 < \lambda < 2$ 时 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$ 绝对收敛; 当 $0 < \lambda \leq 1$ 时 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^\lambda} dx$ 条件收敛.

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx = I_1 + I_2$$

对 I_1 , 令 $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, 则 $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^{2-n}} dx$

研究 I_2

因 $\left| \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} \right| \leq \frac{1}{x^n}$, 则当 $n > 1$ 时, I_2 绝对收敛

$$\text{因 } \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x}) (1 - \frac{1}{x^2})}{x^n (1 - \frac{1}{x^2})} dx$$

$$\left| \int_1^A \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \right| = \left| \cos\left(x + \frac{1}{x}\right) \right| \Big|_1^A \leq 2$$

$$\text{且 } \left[x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \right]' = nx^{n-1} - (n-2)x^{n-3} = x^{n-3} [nx^2 - (n-2)]$$

则当 $n \in (0, 1]$ 时, $x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ 单调增即 $\frac{1}{x^n (1 - \frac{1}{x^2})}$ 单调减趋于 0 ($x \rightarrow +\infty$)

于是由狄立克莱判别法, 得当 $0 < n \leq 1$ 时, I_2 收敛

$$\text{又 } \left| \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} \right| \geq \frac{\sin^2(x + \frac{1}{x})}{x^n} = \frac{1}{2x^n} - \frac{\cos 2(x + \frac{1}{x})}{2x^n}$$

当 $0 < n \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^n}$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2(x + \frac{1}{x})}{2x^n} dx$ 收敛

则当 $0 < n \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx$ 发散

于是由比较判别法, 知 $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} \right| dx$ 当 $0 < n \leq 1$ 时发散

从而当 $0 < n \leq 1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx$ 条件收敛

当 $n \leq 0$ 时, 对 $\forall A > 1$, 必 $\exists k \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $2k\pi + \frac{\pi}{6} > A$ 且当 $x \geq 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 时,

$$\text{恒有 } x^{-n} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{于是, 对 } A' = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, A'' = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \text{ 有 } \left| \int_{A'}^{A''} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx \right| \geq \int_{A'}^{A''} \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) dx = \frac{\pi}{12}$$

则由柯西收敛原理, 得当 $n \leq 0$ 时, I_2 发散

对 I_1 , 由 I_2 的结论, 得当 $2 - n > 1$ 即 $n < 1$ 时绝对收敛; 当 $1 \geq 2 - n > 0$ 即 $1 \leq n < 2$ 时条件收敛;

当 $2 - n \leq 0$ 即 $n \geq 2$ 时发散

总之, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^n} dx$ 当 $0 < n < 2$ 时条件收敛.

7. 设 $f(x)$ 单调下降, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 如果导数 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 那末积分 $\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx$ 收敛.

证明: 因 $(\sin^2 x)' = \sin 2x$, 导数 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \sin^2 x = 0$

则由分部积分公式, 得 $\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx = f(x) \sin^2 x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x dx = - \int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x dx$

对于 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x dx$, 由已知 $f(x)$ 单调下降, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 及 $\left| \int_0^A \sin 2x dx \right| = \frac{1}{2} |\cos 2A - 1| \leq 1$

则由狄立克莱判别法, 得 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin 2x dx$ 收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx$ 收敛.

8. 在无界函数的广义积分(积分限为有限)中, 证明平方可积一定绝对可积, 但反之不然.

证明: 由已知 $f^2(x)$ 可积, 则 $\frac{f^2(x)}{2}$ 也可积

$$\text{因 } (|f(x)| - 1)^2 = f^2(x) - 2|f(x)| + 1 \geq 0, \text{ 则 } |f(x)| \leq \frac{f^2(x) + 1}{2}$$

于是由比较判别法, 得 $|f(x)|$ 可积 即平方可积定绝对可积.
反之不然.

例: 由57页例1, 得 $\int_1^2 \left| \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \right| dx$ 收敛即 $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ 绝对收敛

但 $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ 发散, 即 $\frac{1}{x-1}$ 在 $[1, 2]$ 上不可积.

9. 计算下列积分的柯西主值:

$$(1) \int_0^3 \frac{dx}{1-x}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$$

解:

$$(1) \text{P.V.} \int_0^3 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{1-x} + \int_{1+\eta}^3 \frac{dx}{1-x} \right] = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[-\ln(1-x) \Big|_0^{1-\eta} - \ln(x-1) \Big|_{1+\eta}^3 \right] = -\ln 2$$

$$(2) \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A \sin x dx \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\cos x \Big|_{-A}^A \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\cos(-A) - \cos A) = 0$$

10. 证明广义积分及柯西主值之间的关系:

(1) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 其值为 A , 则柯西主值 $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 存在, 且等于 A , 但反之不然;

(2) 若 $f(x) \geq 0$, $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 存在, 其值为 A , 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且收敛于 A .

证明:

(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛,

则有 $\lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^0 f(x) dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx$ 存在, 特别取 $B = -A$, 有 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$ 存在, 且等于 A

这表明 $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 存在, 且等于 A

但反之不然.

例如: $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \sin x dx = 0$, 但 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ 不收敛.

(2) 用反证法.

若不然, 则由于 $f(x) \geq 0$, 得 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 中至少有一为 $+\infty$

于是 $\int_{-A}^a f(x) dx$ 和 $\int_a^A f(x) dx$ 中当 $A \rightarrow +\infty$ 时至少有一趋于 $+\infty$, 而另一个大于等于0, 从而它们的和

趋于 $+\infty$, 这与已知 $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 存在矛盾, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

又由 $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = A$, 则据极限唯一性, 得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = A$.

第二部分 函数项级数

第十一章 函数项级数、幂级数

§1. 函数项级数的一致收敛

1. 讨论下列函数序列在所示区域内的一致收敛性:

$$(1) f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$(2) f_n(x) = x^2 - x^{2n}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$(3) f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$$

$$(i) -l < x < l$$

$$(ii) -\infty < x < \infty$$

$$(4) f_n(x) = x^n(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$(5) f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$(6) f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, \quad 0 < x < 1$$

解:

$$(1) \text{ 当 } -\infty < x < +\infty \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = |x|$$

$$\text{则 } \|f_n - f\| = \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

于是由定义2, 得 $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于 $|x|$.

$$(2) \text{ 当 } x=1 \text{ 时, } f_n(1)=0, f(x)=0; \text{ 当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ 则 } f(x) = 0 (0 \leq x \leq 1)$$

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n - x^{2n}| = \max_{x \in [0,1]} |x^n - x^{2n}|$$

$$\text{令 } (x^n - x^{2n})' = nx^{n-1}(1-2x^n) = 0, \text{ 则得 } x=0, x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

又 $f_n(0) = 0, f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}, f_n(1) = 0$, 则 $\|f_n - f\| = \frac{1}{4} \neq 0$, 于是由定义2, 得此函数序列在所示区域内不一致收敛.

$$(3) (i) \text{ 当 } -l < x < l \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in (-l, l)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-l, l)} \left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{l}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

于是据定义2, 得 $f_n(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致收敛于0.

$$(ii) \text{ 当 } -\infty < x < +\infty \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$\text{取 } \varepsilon_0 \text{ 使 } 0 < \varepsilon_0 < 1, \text{ 不论 } n \text{ 多大, 只要取 } x = \frac{n}{2} \pi, \text{ 就有 } \left| f\left(\frac{n}{2} \pi\right) - f\left(\frac{n}{2} \pi\right) \right| = 1 > \varepsilon_0$$

则 $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛.

$$(4) \text{ 当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0; \text{ 当 } x=1 \text{ 时, } f_n(1)=0, f(1)=0, \text{ 则 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n(1-x)| = \max_{x \in [0,1]} (x^n - x^{n+1})$$

$$\text{令 } (x^n - x^{n+1})' = x^{n-1}[n - (n+1)x] = 0. \text{ 则得 } x=0, x = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{又 } f_n(0) = f_n(1) = 0, f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) > 0$$

$$\text{则 } \max_{x \in [0,1]} (x^n - x^{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \text{ 即 } \|f_n - f\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

于是由定义2, 得此函数序列在所示区域内一致收敛于0.

$$(5) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

于是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不连续, 而 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

$$(6) \text{ 因 } \lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0, \text{ 则 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right|$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 因 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 则存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $0 < t < \delta$ 时, 有 $|t \ln t - 0| < \varepsilon$

$$\text{取 } N = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil, \text{ 当 } n > N \text{ 时, } \frac{1}{n} < \delta$$

$$\text{从而对一切 } 0 < x < 1, \text{ 有 } 0 < \frac{x}{n} < \delta, \text{ 故 } |f_n(x) - f(x)| \leq \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| < \varepsilon$$

从而由定义1, 得此函数在 $(0, 1)$ 内一致收敛于0.

2. 讨论下列级数的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-e^{-nx})}{n^2+x^2}, \quad 0 \leq x < +\infty$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \quad 0 < x < +\infty$$

解:

$$(1) \text{ 因部分和 } S_n(x) = \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = 1-x^{n+1}, \text{ 则 } S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

于是 $S(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不连续, 而 $S_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

$$(2) \text{ 因此级数为交错级数, 且 } \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \text{ 则余式的绝对值不会超过它的首项的绝对值,}$$

$$\text{即 } |r_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\dots+x^{2n}} < \frac{1}{n} \quad (\forall x \in (-\infty, +\infty))$$

从而对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n > N$ 时, 有 $|r_n(x)| < \varepsilon$, 则此级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(3) \text{ 当 } -\infty < x < +\infty \text{ 时, } \left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \text{ 恒成立, 且级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \text{ 收敛}$$

则由魏氏判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(4) \text{ 因 } 0 \leq (1-n^2|x|)^2 = 1-2n^2|x|+n^4x^2, \text{ 则 } 2n^2|x| \leq 1+n^4x^2 \text{ 即 } \frac{2n^2|x|}{1+n^4x^2} \leq 1 \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

$$\text{从而 } \left| \frac{x}{1+n^4x^2} \right| = \frac{2n^2|x|}{2n^2(1+n^4x^2)} \leq \frac{1}{2n^2}$$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 则据魏氏判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(5) 当 $x = 0, 2\pi$ 时, $\sum_{k=1}^n \sin kx \sin x = 0$

当 $x \neq 0, 2\pi$ 时, $\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \sin x \right| = |\sin x| \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq |\sin x| \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} = 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2$

则当 $0 \leq x \leq 2\pi$ 时, $\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \sin x \right| \leq 2$

又 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对 $x \in [0, 2\pi]$ 关于 n 单调递减且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x 在 $[0, 2\pi]$ 上一致地趋于 0 (由定义 2)

则据狄立克莱判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛.

(6) 由于对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq 1 - e^{-nx} < 1$, 则 $\left| \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1}$ 收敛, 则据魏氏判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(7) 记 $u_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$

当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于 $|u_n(x)| \leq \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 从而收敛, 但它

在 $(0, +\infty)$ 内并不一致收敛.

如若不然, 设它一致收敛, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon = 1$, 必存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$ (它与 x 无关), 使当 $n > N$ 时, 对于 $(0, +\infty)$ 内的一切 x , 均有 $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$, 其中 p 为任意正整数

今取 $p = 1, n = N$, 则对一切 $x \in (0, +\infty)$, 应有 $|u_{N+1}(x)| < \varepsilon = 1$

又取 $x_0 = \frac{2}{3^{N+1}\pi} \in (0, +\infty)$, 也应有 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$

但事实上却有 $u_{N+1}(x_0) = 2^{N+1} \sin \frac{1}{3^{N+1}x_0} = 2^{N+1} > 1$ 这与 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$ 矛盾

则假设不成立, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛但非一致收敛.

3. 证明一致收敛定义 1 和定义 2 的等价性.

证明: 定义 1 \Rightarrow 定义 2

已知对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在只依赖于 ε 的正整数 $N(\varepsilon)$, 使 $n > N(\varepsilon)$ 时, 有 $|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 对一切 $x \in X$ 都成立

于是 $\|S_n - S\| = \sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - S\| = 0$.

定义 2 \Rightarrow 定义 1

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - S\| = 0$, 即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in X$, 都有

$||S_n - S| - 0| = \sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

而 $|S_n(x) - S(x)| \leq ||S_n - S| - 0| < \varepsilon$ 对一切 $x \in X$ 都成立.

(完全类似地可证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 定义 1 \Leftrightarrow 定义 2).

4. 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在任何区间 $[1+\alpha, \infty), \alpha > 0$ 为一致收敛.

证明: 因当 $h > 0$ 时, $\ln(1+h) < h$, 则 $\left| \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} \right| = \frac{\ln(1+nx)}{nx^n} < \frac{nx}{nx^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \leq \frac{1}{(1+\alpha)^{n-1}} (1+\alpha \leq$

$x < +\infty)$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^{n-1}}$ 收敛, 则据 M 判别法, 得原级数在 $[1+\alpha, +\infty) (\alpha > 0)$ 上一致收敛.

5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项 $|u_n(x)| \leq c_n(x)$, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ 在 X 上一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上亦一致收敛且绝对收敛.

证明: 因 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ 在 X 上一致收敛

则由一致收敛的柯西充要条件, 得对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in X$ 和任意的正整数 p , 有 $|c_{n+1}(x) + c_{n+2}(x) + \cdots + c_{n+p}(x)| < \varepsilon$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项 $|u_n(x)| \leq c_n(x)$

则对上述 $\varepsilon > 0$, 正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in X$ 和上述正整数 p , 有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| \leq |c_{n+1}(x) + c_{n+2}(x) + \cdots + c_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

由一致收敛的柯西充要条件, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛且绝对收敛.

6. 设 $f_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 又 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$, 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛于零.

证明: 因 $f_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 则其有界, 即存在 $M > 0$, 有 $|f_0(x)| \leq M$

又 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$, 则

$$|f_1(x)| = \left| \int_0^x f_0(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_0(t)| dt \leq \int_0^x M dt = Mx \leq Ma$$

$$|f_2(x)| = \left| \int_0^x f_1(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_1(t)| dt \leq \int_0^x Mt dt = \frac{Mx^2}{2} \leq \frac{Ma^2}{2}$$

$$\dots\dots\dots |f_n(x)| = \left| \int_0^x f_{n-1}(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_{n-1}(t)| dt \leq \int_0^x M \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = M \frac{x^n}{n!} \leq M \frac{a^n}{n!}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ 即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| = \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$

于是 $|f_n(x) - 0| < M\varepsilon$ 对一切 $x \in [0, a]$ 均成立

从而由定义1, 得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛于零.

7. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2}$ 关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为一致收敛, 但对任何 x 并非绝对收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 虽在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛, 但并不一致收敛.

证明: 因 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \right| \leq 1$ 即 $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致有界

又 $\frac{1}{n+1+x^2} < \frac{1}{n+x^2}$, 则函数列 $\left\{ \frac{1}{n+x^2} \right\}$ 对于 $x \in (-\infty, +\infty)$ 单调减

又对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $\left| \frac{1}{n+x^2} - 0 \right| = \frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$

则 $\left\{ \frac{1}{n+x^2} \right\}$ 关于 $x \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛于0, 于是由狄立克莱判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+x^2} = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则由比较判别法的极限形式, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ 发散, 于是对任何 x 级数非绝对收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

对固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}} = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

由柯西判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛, 于是绝对收敛.

当 $x \neq 0$ 时, $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = 1 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$, $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1$

当 $x = 0$ 时, $S_n(0) = 0, S(0) = 0$, 则 $S(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

因 $S_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 而 $S(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不连续, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不一致收敛.

8. 证明:

(1) 如果 $\sum |f_n(x)|$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 那末 $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也一致收敛;

(2) 如果 $\sum f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 但 $\sum |f_n(x)|$ 未必一致收敛, 以 $\sum_1^{\infty} (-1)^n (x^n - x^{n+1}), 0 \leq x \leq 1$ 为例来说明.

证明:

(1) 由柯西准则及题设, 得

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a, b]$ 和任意 $p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

$$\text{从而 } |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

则据一致收敛的柯西准则, 得 $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

(2) 例: $\sum_1^{\infty} (-1)^n (x^n - x^{n+1})$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛

因 $x^n - x^{n+1} = 0$ (当 $x = 0, 1$ 时); 当 $0 < x < 1$ 时, $x^n - x^{n+1} = x^n(1-x)$, 则 $x^n - x^{n+1}$ 在 $[0, 1]$ 上关于 n 单调减少

由 1.(4), 得 $x^n - x^{n+1} = x^n(1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0, 则由狄立克莱判别法, 得

$$\sum_1^{\infty} (-1)^n (x^n - x^{n+1}) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上一致收敛}$$

$$\text{但 } \sum_1^{\infty} |(-1)^n (x^n - x^{n+1})| = \sum_1^{\infty} (x^n - x^{n+1}) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上非一致收敛 (由 2.(1) 得).}$$

9. 设每一项 $\varphi_n(x)$ 都是 $[a, b]$ 上的单调函数, 如果 $\sum \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 的端点为绝对收敛, 那末这级数在 $[a, b]$ 上一致收敛.

证明: 因 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 故有 $|\varphi_n(x)| \leq |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|$ ($\forall x \in [a, b]$)

由于 $\sum |\varphi_n(a)|$ 和 $\sum |\varphi_n(b)|$ 收敛, 则 $\sum (|\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|)$ 收敛

则据 M 判别法, 得级数 $\sum \varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

10. 下列函数列是否一致收敛?

$$(1) f_n(x) = (\sin x)^n, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$(2) f_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$$

$$(i) 0 \leq x \leq \pi$$

$$(ii) \delta \leq x \leq \pi - \delta$$

$$(3) f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

$$(i) 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$$

$$(ii) 1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

$$(iii) 1 + \varepsilon \leq x < \infty$$

解:

$$(1) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

因 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上不连续, 但 $f_n(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 则 $f_n(x) = (\sin x)^n$ 在 $[0, \pi]$ 上不一致收敛.

$$(2) \quad (i) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \pi \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

因 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上不连续, 但 $f_n(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 则 $f_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$ 在 $[0, \pi]$ 上不一致收敛.

$$(ii) \quad \text{因 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1, |f_n(x) - f(x)| = 1 - (\sin x)^{\frac{1}{n}} \leq 1 - (\sin \delta)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{即 } \|f_n - f\| = \sup_{x \in [\delta, \pi - \delta]} |f_n(x) - f(x)| = 1 - (\sin \delta)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

则由定义2, 得 $f_n(x) = (\sin x)^{\frac{1}{n}}$ 在 $[\delta, \pi - \delta]$ 上一致收敛于1.

$$(3) \quad (i) \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ 则 } |f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1 + x^n} \leq x^n \leq (1 - \varepsilon)^n$$

$$\text{于是 } \|f_n - f\| = \sup_{x \in [0, 1 - \varepsilon]} |f_n(x) - f(x)| = (1 - \varepsilon)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

则由定义2, 得 $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ 在 $[0, 1 - \varepsilon]$ 上一致收敛于0.

$$(ii) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 1 - \varepsilon < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & 1 < x < 1 + \varepsilon \end{cases}$$

因 $f(x)$ 在 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ 上不连续, 而 $f_n(x)$ 在 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ 上连续, 则 $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ 在 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ 上不一致收敛.

$$(iii) \quad \text{当 } 1 + \varepsilon \leq x < +\infty \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1, \text{ 则 } |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + x^n} \leq \frac{1}{1 + (1 + \varepsilon)^n}$$

$$\text{于是 } \|f_n - f\| = \sup_{x \in [1 + \varepsilon, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + (1 + \varepsilon)^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

从而由定义2, 得 $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$ 在 $[1 + \varepsilon, +\infty)$ 上一致收敛于1.

11. 证明 $\sum_1^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续.

证明: 任取 $x_0 \in (0, +\infty)$, 则存在 $\alpha, \beta > 0$, 使 $\alpha < x_0 < \beta$, 在 $[\alpha, \beta]$ 上 $0 < ne^{-nx} \leq ne^{-n\alpha}$

因 $\alpha > 0$, 则 $e^\alpha > 1$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)\alpha}}{ne^{-n\alpha}} = \frac{1}{e^\alpha} < 1$, 则由达朗贝尔判别法的极限形式, 得级

数 $\sum_1^{\infty} ne^{-n\alpha}$ 收敛, 从而据M判别法, 得 $\sum_1^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

又 ne^{-nx} 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 从而 $\sum_1^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续

因 $x_0 \in [\alpha, \beta]$, 则 $\sum_1^{\infty} ne^{-nx}$ 在 x_0 点连续

由于 x_0 是 $(0, +\infty)$ 的任意点, 故 $\sum_1^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续.

12. 证明函数 $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 并有连续导函数.

证明: 因 $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ 且 $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛, 则据M判别法, 得 $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛

又 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right) = \frac{\cos nx}{n^2}$$

因 $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 且 $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 则据M判别法, 得 $\sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛

$$\text{于是 } f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_1^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \right) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

又 $\frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $\sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续

即 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且 $f'(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

13. 证明函数 $\zeta(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 连续, 并有连续各阶导函数.

证明: 各项求导数所得级数为 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1 < a \leq x < +\infty$ 上一致连续 (a 为大于 1 的任何数)

当 $a \leq x < +\infty$ 时, 有 $0 < \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^{(a+1)/2}}} = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ 收敛

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛, 于是由 M 判别法, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上一致收敛

注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 x 的连续函数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上可逐项求导数, 得 $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$

且 $\zeta'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续

由 $a > 1$ 的任意性, 得 $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 对一切 $1 < x < +\infty$ 成立且 $\zeta'(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上连续, 当然 $\zeta(x)$ 更在 $1 < x < +\infty$ 上连续

利用数学归纳法, 并注意到对任何正整数 k , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ ($a > 1$) 都收敛, 仿照上述, 可证: 对任何正整数 k , $\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上都存在且连续, 且可由原级数逐项求导数 k 次, 得

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x} \quad (1 < x < +\infty).$$

14. 试证级数 $\sum_1^{\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$ 在整个实数轴上一致收敛, 但在任何区间内不能逐项求微商.

证明: 因 $\left| \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 皆成立且级数 $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 则据 M 判别法, 得 $\sum_1^{\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$

在整个实数轴上一致收敛

$$\left(\frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n} \right)' = \pi \cos(2^n \pi x)$$

下证 $\sum_1^{\infty} \pi \cos(2^n \pi x)$ 在任何区间内都有不连续点

任取 $x \in (-\infty, +\infty)$, 总存在 $k \in Z$, 使 $x = k + y$, 其中 $0 \leq y < 1$

将其代入, 得 $\sum_1^{\infty} \cos(2^n \pi x) = \sum_1^{\infty} \cos(2^n \pi y)$, 特别的, 取 $y = 2^{-m}h$, 其中 $m \in Z^+, h = 0, 1, 2, \dots, 2^m - 1$

当 $n > m$ 时, $\cos(2^n \pi y) = 1$, 此时级数一般项不趋于 0, 则 $\sum_1^{\infty} \cos(2^n \pi x) = \sum_1^{\infty} \cos(2^n \pi y)$ 发散, 于是 $\sum_1^{\infty} \pi \cos(2^n \pi x)$ 发散

又在任何区间内都存在 $x = k + 2^{-m}h$ ($h = 0, 1, 2, \dots, 2^m - 1$) 这样的点, k 为 x 的最小整数部分

则级数 $\sum_1^{\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}$ 在任何区间内不能逐项求微商.

15. 先证

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$$

当 $|r| < 1$ 时成立, 从而证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx = 2\pi \quad (|r| < 1)$$

证明: $|r^n \cos nx| \leq |r|^n$ 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 都成立

因 $|r| < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |r|^n$ 收敛, 于是由 M 判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛

从而设 $f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$

因 $1 - 2r \cos x + r^2 \neq 0$, 上式两端同乘以 $1 - 2r \cos x + r^2$, 则得

$$\begin{aligned} (1 - 2r \cos x + r^2)f(x) &= (1 - 2r \cos x + r^2) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx \right) \\ &= \left[1 - 2r \cos x + r^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} (2 \cos nx \cos x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2} \cos nx \right] \\ &= \left[1 - 2r \cos x + r^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} \cos(n+1)x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} \cos(n-1)x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2} \cos nx \right] \\ &= \left[1 - r^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx - 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} \cos(n+1)x + r \cos x \right) - 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} \cos(n-1)x - r^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2} \cos nx \right] \\ &= 1 - r^2 \end{aligned}$$

$$\text{于是 } f(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \text{ 即 } \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$$

由于上式右端级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛, 且 $r^n \cos nx$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 则上式级数可以逐项积分, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx \right) dx = 2\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r^n \cos nx dx = 2\pi.$$

16. 用有限覆盖定理证明狄尼定理.

证明: 因 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上收敛于 $S(x)$, 故对 $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n \geq N(\varepsilon, x)$ 时, 都应有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, 特别有 $|S_{N(\varepsilon, x)} - S(x)| < \varepsilon$

由 $S_{N(\varepsilon, x)}(x) - S(x)$ 在 x 点连续, 得存在 x 点的开邻域 O_x , 使得 $|S_{N(\varepsilon, x)}(y) - S(y)|, \forall y \in O_x$

于是 $\{O_x | x \in [a, b]\}$ 构成 $[a, b]$ 的开覆盖 (对端点 a, b 可作连续延拓)

据有限覆盖定理, 从中选出有限个开邻域 O_{x_1}, \dots, O_{x_m} 同样覆盖 $[a, b]$ 且满足 $|S_{N(\varepsilon, x_i)}(y) - S(y)| < \varepsilon, \forall y \in O_{x_i}, i = 1, 2, \dots, m$

取 $N = \max_{i \leq m} N(\varepsilon, x_i)$, 则当 $n > N$ 时, 对 $\forall x \in [a, b]$, 由 $\{S_n(x)\}$ 单调性和 $\bigcup_{i=1}^m O_{x_i} \supset [a, b]$, 必存在某个 O_{x_i} , 使 $x \in O_{x_i}$, 且有 $|S_n(x) - S(x)| \leq |S_N(x) - S(x)| \leq |S_N(\varepsilon, x_i)(x) - S(x)| < \varepsilon$
即 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

17. 若 $S_n(x)$ 在 c 点左连续 ($n = 1, 2, 3, \dots$), 但 $\{S_n(c)\}$ 发散, 则在任何开区间 $(c - \delta, c)$ 内 ($\delta > 0$), $\{S_n(x)\}$ 必不一致收敛.

证明: 用反证法.

假设存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $\{S_n(x)\}$ 在 $(c - \delta_0, c)$ 内一致收敛

由一致收敛的柯西原理, 得对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 对 $\forall x \in (c - \delta_0, c)$ 和 $\forall p \in \mathbb{Z}^+$, 都应

$$\text{有 } |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*) \text{ 成立}$$

因每一个 $S_n(x)$ 在 c 点左连续, 则 $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ 也在 c 点左连续

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow c-0} [S_{n+p}(x) - S_n(x)] = S_{n+p}(c) - S_n(c)$$

$$\text{在 } (*) \text{ 式两端令 } x \rightarrow c-0, \text{ 得 } |S_{n+p}(c) - S_n(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

由数列的柯西收敛原理, 得 $\{S_n(c)\}$ 收敛, 与已知 $\{S_n(c)\}$ 发散矛盾

故假设不正确, 则在任何开区间 $(c - \delta, c)$ 内 ($\delta > 0$), $\{S_n(x)\}$ 必不一致收敛.

§2. 幂级数

1. 求下列各幂级数的收敛区间:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^n x \right]^n$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

解:

$$(1) a_n = \frac{2^n}{n!}$$

因 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty$, 则其收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n, \quad a_n = \frac{\ln n}{n}$$

由于 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(y+1) \ln y}{y \ln(y+1)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y+1}{y} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{\ln(y+1)} = 1$, 则 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$, 于是其收敛区间为 $(-1, 1)$

当 $x = -1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} x^n$

因 $\left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 且当 $x \geq 3$ 时, $\left(\frac{\ln x}{x} \right)' < 0$, 则 $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$ 单调减少

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, 则级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} x^n$ 为莱布尼兹级数, 于是级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} x^n$ 收敛

当 $x = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = +\infty$, 则据正项级数的比较判别法及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 得级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$ 发散

则此级数的收敛域为 $[-1, 1)$.

$$(3) \text{ 因 } \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^n x \right]^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n, \text{ 则 } a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$, 则其收敛半径为 $R = \frac{1}{e}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)$.

当 $x = \pm \frac{1}{e}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \left(\frac{1}{e} \right)^n$, 则 $u_n = (\pm 1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \left(\frac{1}{e} \right)^n$

由洛必达法则, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \left(\frac{1}{e} \right)^n$ 发散, 于是原级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)$.

$$(4) a_n = \frac{1}{2^n}$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| x^{n^2}} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = |x| < 1$, 得其收敛半径为 $R = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$

当 $|x| = 1$ 即 $x = \pm 1$ 时, 原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n}$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n}$ 绝对收敛则收敛

从而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$.

$$(5) a_n = \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}} = 4$, 则级数收敛半径为 $R = \frac{1}{4}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

当 $x = \frac{1}{4}$ 时, 原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n \cdot 4^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$

对级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$

因 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2k+3)2^{2k+3}}}{\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}} = \frac{1}{4} < 1$, 则据达朗贝尔判别法, 得级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$ 收敛

又级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n \cdot 4^n}$ 发散

同法可得, 当 $x = -\frac{1}{4}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n \cdot 4^n}$ 发散

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$ 的收敛域为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

$$(6) a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3}$, 则级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{3}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}/(n+1)}{\left(\frac{2}{3}\right)^n/n} = \frac{2}{3} < 1$, 则据达朗贝尔判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$ 收敛

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 则当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 原级数收敛;

同法可得, 当 $x = -\frac{2}{3}$ 时, 原级数发散

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛域为 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

2. 求级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$$

$$(2) \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

解:

$$(1) a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

因 $1 = \sqrt[n]{n \cdot \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{n \cdot 1} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$
 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, 于是其收敛半径为 $R = 1$.

$$(2) a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{4}$, 于是其收敛半径为 $R = \frac{1}{4}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 设幂级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径为 R , $\sum b_n x^n$ 的收敛半径为 Q , 讨论下列级数的收敛半径:

$$(1) \sum a_n x^{2n}$$

$$(2) \sum (a_n + b_n) x^n$$

$$(3) \sum a_n b_n x^n$$

解:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{R}} = \frac{1}{\sqrt{R}}, \text{ 则其收敛半径为 } R_1 = \sqrt{R}.$$

$$(2) \text{ 设 } A_n = a_n + b_n$$

则有 $\sqrt[n]{|A_n|} = \sqrt[n]{|a_n + b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n| + |b_n|} \leq \sqrt[n]{2 \max(|a_n|, |b_n|)} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{\max(|a_n|, |b_n|)} = \sqrt[n]{2} \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|})$
 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$

$$\text{则 } \frac{1}{R_2} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{2} \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \} = \max \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \right) = \max \left(\frac{1}{R}, \frac{1}{Q} \right)$$

$$\text{从而, 得 } R_2 \geq \frac{1}{\max \left(\frac{1}{R}, \frac{1}{Q} \right)} = \min(R, Q).$$

$$(3) \text{ 设 } B_n = a_n b_n$$

$$\text{则有 } \sqrt[n]{|B_n|} = \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}$$

$$\text{于是 } \frac{1}{R_3} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{Q} = \frac{1}{RQ}$$

$$\text{从而 } R_3 \geq RQ.$$

4. 设对充分大的 n , $|a_n| \leq |b_n|$, 那末级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径不小于 $\sum b_n x^n$ 的收敛半径.

证明: 因对充分大的 n , $|a_n| \leq |b_n|$, 则 $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|b_n|}$, 于是 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$

设级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 级数 $\sum b_n x^n$ 的收敛半径为 Q

则当 $0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} < \infty$ 时, 由 $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, Q = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$, 得 $R \geq Q$;

当 $0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$, 则 $R = \infty, Q \leq \infty$, 于是 $R \geq Q$;

当 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \infty$ 时, 则 $R \geq 0, Q = 0$, 于是 $R \geq Q$

综上知, 级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径不小于 $\sum b_n x^n$ 的收敛半径.

5. 证明幂级数的性质1和性质2.

证明: 性质1.

设 x 为 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内任一点, 总可以选取 $0 < r < R$, 使得 $|x - x_0| \leq r$

由阿贝尔第二定理, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 在 $[x_0 - r, x_0 + r]$ 上一致收敛

又 $a_n (x - x_0)^n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 在 $[x_0 - r, x_0 + r]$ 连续, 则由函数项级数的和的连续性知 $S(x)$ 在 $[x_0 - r, x_0 + r]$ 连续, 当然在 x 这一点连续

而 x 为 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上任一点, 则 $S(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 连续

又若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $x_0 + R$ 收敛, 则由阿贝尔第二定理, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $[a, x_0 + R]$ (取 $a \in (x_0 - R, x_0 + R)$)上一致收敛

由于 $a_n(x - x_0)^n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 在 $[a, x_0 + R]$ 连续, 则由函数项级数的和的连续性定理, 得 $S(x)$ 在 $[a, x_0 + R]$ 连续, 当然也在 $x_0 + R$ 连续, 于是 $S(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R]$ 上连续

同理若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $x_0 - R$ 收敛, 则 $S(x)$ 在 $[x_0 - R, x_0 + R)$ 上连续.

性质2.

(1) 设 x 为 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内任一点, 由阿贝尔第二定理, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $[x_0, x]$ 上一致收敛(若 $x < x_0$, 则取 $[x, x_0]$ 即可)

又 $a_n(x - x_0)^n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 在 $[x_0, x]$ 连续

则由函数项级数逐项求积分定理, 得

$$\int_{x_0}^x S(x) dx = \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x [a_n(x - x_0)^n] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

(2) 由第5页习题3(2)知, 若 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则对任何 $\{y_n\}$, 有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$
则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

这说明: $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 有相同的收敛半径 R

设 x 是 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内任一点, 总可选取一点 $0 < r < R$, 使得 $|x - x_0| \leq r$

由阿贝尔第二定理, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $[x_0 - r, x_0 + r]$ 上一致收敛, 因而收敛

又 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ 的收敛半径为 R , 则由阿贝尔第二定理, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ 在 $[x_0 - r, x_0 + r]$ 上一致收敛

又 $na_n(x - x_0)^{n-1} (n = 1, 2, \dots)$ 在 $[x_0 - r, x_0 + r]$ 连续, 则由函数项级数逐项微分定理, 得

$$\text{在 } [x_0 - r, x_0 + r] \text{ 当然也就在 } x \text{ 点, 有 } \frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$$

再由 x 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 的任意性, 得在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上式也成立

(3) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ 收敛半径为 R'

由(1), 得当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 收敛(收敛到 $S(x)$)时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \text{ 在 } (x_0 - R, x_0 + R) \text{ 上收敛 (收敛到 } \int_{x_0}^x S(x) dx \text{), 那末 } R \leq R'$$

另一方面, 由(2), 当 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$ 在 $(x_0 - R', x_0 + R')$ 上收敛(收敛到 $\int_{x_0}^x S(x) dx$)时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ 在 } (x_0 - R', x_0 + R') \text{ 收敛(收敛到 } S(x) \text{), 那末 } R' \leq R$$

于是 $R = R'$

6. 设 $\sum_0^{\infty} a_n$ 收敛于 A , $\sum_0^{\infty} b_n$ 收敛于 B , 如果它们的柯西乘积

$$\sum_0^{\infty} c_n = \sum_0^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)$$

收敛, 则一定收敛于 AB .

证明: 作 $A(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n, B(x) = \sum_0^{\infty} b_n x^n, C(x) = \sum_0^{\infty} c_n x^n$

当 $x = 1$ 时, $A = A(1) = \sum_0^{\infty} a_n, B = B(1) = \sum_0^{\infty} b_n, C = C(1) = \sum_0^{\infty} c_n$

即幂级数 $\sum_0^{\infty} a_n x^n, \sum_0^{\infty} b_n x^n, \sum_0^{\infty} c_n x^n$ 在 $x=1$ 收敛

由 Abel 第一定理, 得上述的幂级数在 $|x| < 1$ 内绝对收敛

由柯西定理, 得级数 $\sum_0^{\infty} c_n x^n$ 收敛于 $\left(\sum_0^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_0^{\infty} b_n x^n\right)$ 即 $C(x) = A(x)B(x)$

因 $\sum_0^{\infty} a_n x^n, \sum_0^{\infty} b_n x^n, \sum_0^{\infty} c_n x^n$ 在 $x=1$ 收敛

由幂级数类似性质1, 则 $A(x), B(x), C(x)$ 在 $x=1$ 左连续

$$C(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} C(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} A(x)B(x) = A(1)B(1)$$

则 $C = AB$, 于是 $\sum_0^{\infty} c_n = AB$.

7. 设 $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < r$ 时收敛, 那末当 $\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛时成立

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$$

不论 $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=r$ 时是否收敛.

证明: 因 $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < r$ 时收敛, 则其收敛半径为 R , 且 $r \leq R$, 从而 $f(x)$ 在 $(-r, r)$ 内收敛.

则据性质2, 当 $x \in (-r, r)$ 时, 有 $\int_0^{\theta} f(x) dx = \int_0^{\theta} \left[\sum_0^{\infty} a_n x^n \right] dx = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \theta^{n+1}, \theta \in (0, r)$

即 $\int_0^{\theta} f(x) dx = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \theta^{n+1} \theta \in (0, r)$

因 $\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛, 则 $\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \theta^{n+1}$ 在 $\theta=r$ 收敛, 于是其和 $S(\theta)$ 在 r 点左连续

$$S(r) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1} = \lim_{\theta \rightarrow r-0} S(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow r-0} \int_0^{\theta} f(x) dx = \int_0^r f(x) dx$$

从而不论 $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=r$ 时是否收敛, 均有 $\int_0^r f(x) dx = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$

8. 利用上题证明 $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

证明: 因 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} (-1 < x < 1)$, 则 $\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} (-1 < x < 1 \text{ 且 } x \neq 0)$

即 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ -1, & x = 0 \end{cases}, f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} (-1 < x < 1)$

因 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ 收敛, 则由上题结论, 得 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

9. 求 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n \cdot x)}{n!}$ 的麦克劳林级数, 说明它的麦克劳林级数并不表示这个函数.

证明: 因 $\left| \frac{\sin(2^n \cdot x)}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!} (x \in (-\infty, +\infty))$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛, 则由 M 判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n \cdot x)}{n!}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 从而收敛

$$f(0) = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(2^n \cdot x)}{n!} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(2^n \cdot x)}{n!}$$

又 $\left| \frac{2^n \cos(2^n \cdot x)}{n!} \right| \leq \frac{2^n}{n!} (x \in (-\infty, +\infty))$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ 收敛, 则由 M 判别法, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(2^n \cdot x)}{n!}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛

又 $\frac{2^n \cos(2^n \cdot x)}{n!} (n = 0, 1, 2, \dots)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则由逐项求导定理, 得在 $(-\infty, +\infty)$ 上

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n \cdot x)}{n!} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(2^n \cdot x)}{n!}$$

$$\text{于是 } f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - 1$$

如此下去, 用数学归纳法, 得

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{2} + 2^n \pi\right)}{n!},$$

$$f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2k \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{(2k+1)n}}{n!} = (-1)^k (e^{2^{2k+1}} - 1), & m = 2k + 1 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (e^{2^{2k+1}} - 1) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ 其收敛半径为 $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(e^{2^{2k+1}} - 1)/(2k+1)!}{(e^{2^{2k+3}} - 1)/(2k+3)!}$

$$\text{因 } 0 \leq \frac{(e^{2^{2k+1}} - 1)/(2k+1)!}{(e^{2^{2k+3}} - 1)/(2k+3)!} = (2k+2)(2k+3) \frac{e^{2^{2k+1}} - 1}{e^{2^{2k+3}} - 1} \leq (2k+2)(2k+3) \frac{e^{2^{2k+1}}}{e^{2^{2k+3}}} = \frac{(2k+2)(2k+3)}{e^{6 \cdot 2^{2k}}},$$

$$\text{且 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+2)(2x+3)}{e^{6 \cdot 2^{2x}}} = 0, \text{ 则 } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+2)(2k+3)}{e^{6 \cdot 2^{2k}}} = 0$$

于是 $R = 0$, 即其麦克劳林级数仅在 $x = 0$ 收敛

但由前面可知其在 $(-\infty, +\infty)$ 内均收敛, 则它的麦克劳林级数并不表示此函数.

10. 证明:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} \text{ 满足 } y^{(IV)} = y;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \text{ 满足 } xy'' + y' - y = 0.$$

证明:

$$(1) a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{(4n)!}}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty$$

则知对任一 x , 幂级数都收敛, 即其收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

在收敛域内逐项微分, 得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}, y''' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}, y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y$$

即 $y^{(IV)} = y$.

$$(2) a_n = \frac{1}{(n!)^2}, \text{ 则 } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty$$

则知对任一 x , 幂级数都收敛, 即其收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

在收敛域内逐项微分, 得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!}, y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$\text{于是 } xy'' + y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{1}{n!(n+1)!} \right] x^n =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!(n+1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y$$

即 $xy'' + y' - y = 0$.

11. 展开:

$$(1) f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0) \text{ 成为 } x \text{ 的幂级数, 并确定收敛范围;}$$

$$(2) f(x) = \ln x \text{ 为 } (x-2) \text{ 的幂级数.}$$

解:

$$(1) \text{ 因 } f(x) = \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{a}} \right), \text{ 且 } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a} \right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{a}}, \text{ 此时 } \left| \frac{x}{a} \right| < 1$$

$$\text{则 } f(x) = \frac{1}{a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a} \right)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}, \quad |x| < |a|$$

$$(2) \quad f(x) = \ln x = \ln[2 + (x-2)] = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right)$$

$$\text{因 } \ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x-2}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n, \quad 0 < x \leq 4$$

$$\text{则 } f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot n} (x-2)^n, \text{ 收敛域为 } (0, 4].$$

12. 利用已知展开式展开下列函数为幂级数, 并确定收敛范围:

$$(1) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(2) \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

解:

$$(1) \text{ 因 } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\text{则 } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right]$$

$$\text{当 } n = 2k \text{ 时, } f(x) = 0; \text{ 当 } n = 2k+1 \text{ 时, } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\text{综上所述, } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ 收敛域为 } (-\infty, +\infty).$$

$$(2) \text{ 因 } \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\text{则 } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \text{ 收敛域为 } (-\infty, +\infty).$$

13. 展开 $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ 为 x 的幂级数, 并推出 $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

解: 因 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$, 则 $\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \quad (x \neq 0)$

$$\text{令 } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \text{ 则 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \text{ 为 } f(x) \text{ 的幂级数, 其收敛范围为 } (-\infty, +\infty)$$

由幂级数的逐项求导定理, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内逐项求导

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^{n-1}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{于是 } \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^{n-1}$$

$$\text{因 } \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \right|_{x=1} = \left. \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} \right|_{x=1} = 1, \text{ 则 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^{n-1} \Big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

14. 求下列函数的幂级数展开式, 并推出收敛半径:

$$(1) \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$(2) \int_0^x \cos t^2 dt$$

解:

$$(1) \text{ 因 } \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ 则 } \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} (t \neq 0)$$

$$\text{令 } f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}, \text{ 则 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \text{ 为 } f(t) \text{ 的幂级数, 收敛域为 } (-\infty, +\infty)$$

由幂级数逐项积分定理, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内逐项积分

$$\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \text{ 其收敛半径为 } R = +\infty.$$

$$(2) \text{ 因 } \cos t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n}}{(2n)!}, \text{ 其收敛域为 } (-\infty, +\infty), \text{ 收敛半径为 } R = \infty$$

由幂级数的逐项积分定理, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n}}{(2n)!}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内逐项积分

$$\int_0^x \cos t^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}, \text{ 其收敛半径为 } R = \infty.$$

15. 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$$

解:

$$(1) \text{ 因 } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (-\infty < x < +\infty), \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = e^x - 1 (-\infty < x < \infty)$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$$

$$\text{因 } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n (-1 < x \leq 1)$$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x \ln(1+x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n - x =$$

$$(1+x) \ln(1+x) - x (-1 < x \leq 1)$$

$$x = -1 \text{ 时, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n, a_n = (n+1)^2$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1, \text{ 于是其收敛半径为 } R = 1$$

当 $|x| = 1$ 时, 由于 $(n+1)^2 \rightarrow +\infty$, 则级数发散, 于是级数的收敛域为 $(-1, 1)$

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}, |x| < 1$

由性质2, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 在 $(-1, 1)$ 可逐项积分, $\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, 且其收敛半径不变, 仍为1.

又由性质2, 得 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 在 $(-1, 1)$ 上可逐项积分

$$\int_0^x \left(\int_0^x f(x) dx \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^n}{n} \right) + x =$$

$$\frac{x^2}{1-x} + \ln(1-x) + x, |x| < 1$$

$$\text{则 } \int_0^x f(x) dx = \left(\frac{x^2}{1-x} + \ln(1-x) + x \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\text{于是 } f(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}, |x| < 1$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{(n-1)!} x^{2(n-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\text{因 } e^{x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}$$

$$\text{则 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = (2x^2 + 1)e^{x^2}, (-\infty < x < +\infty)$$

§3. 逼近定理

1. 在闭区间 $[-1, 1]$ 上用伯恩斯坦多项式 $B_4(x)$ 逼近函数 $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, 作出函数 $y = \frac{x+|x|}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图形.

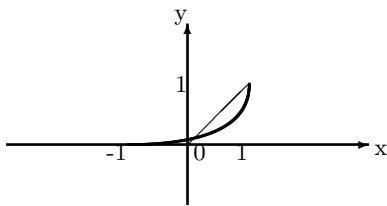
解: 令 $x = -1 + 2y$, 则当 $0 \leq y \leq 1$ 时, $-1 \leq x \leq 1$, 此时 $y = \frac{x+1}{2}$, $1-y = \frac{1-x}{2}$, $f(x) = f(-1+2y)$

则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上用伯恩斯坦多项式为 $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(-1+2 \cdot \frac{k}{n}\right) C_n^k \frac{(x+1)^k (1-x)^{n-k}}{2^n}$

$$\text{则 } B_4(x) = \sum_{k=0}^4 f\left(-1+\frac{k}{2}\right) C_4^k \frac{(x+1)^k (1-x)^{4-k}}{2^4}$$

又 $f(x)$ 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) = 0$,

$$\text{则 } B_4(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) C_4^3 \frac{(x+1)^3 (1-x)}{2^4} + f(1) C_4^4 \frac{(x+1)^4}{2^4} = \frac{1}{8}(1-x)(x+1)^3 + \frac{1}{16}(1+x)^4.$$



2. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 证明存在有理系数的多项式 $P(x)$, 使得 $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$. 其中 ε 是预先给定的任意正数.

证明: 因 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数

则由逼近定理, 得对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 定存在多项式 $Q(x)$, 使得 $\|f(x) - Q(x)\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

其中 $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ (a_0, a_1, \cdots, a_n 均为实数)

设 $C = \max(|a|, |b|)$, 由实数的稠密性, 得必存在有理数 b_i , 使得 $|b_i - a_i| < \frac{\varepsilon}{4(n+1)^2 C^i}$ ($i = 0, 1, \cdots, n$)

并设 $P(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$

$$\text{则 } |P(x) - Q(x)| = \left| \sum_{i=0}^n (b_i - a_i)x^i \right| \leq \sum_{i=0}^n |b_i - a_i| |x|^i < \sum_{i=0}^n \frac{\varepsilon}{4(n+1)^2 C^i} C^i < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是 $\|P(x) - Q(x)\| = \max_{x \in [a, b]} |P(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

从而 $\|f(x) - P(x)\| \leq \|f(x) - Q(x)\| + \|Q(x) - P(x)\| < \varepsilon$

即存在有理系数的多项式 $P(x)$, 使得 $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$

第十二章 富里埃级数和富里埃变换

§1. 富里埃级数

1. 证明:

$$(1) 1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$$

$$(2) \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots$$

是 $[0, \pi]$ 上的正交系; 但 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ 不是 $[0, \pi]$ 上的正交系.

证明:

$$(1) \text{ 因 } \int_0^\pi 1 \cdot \cos kx \, dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \int_0^\pi \cos kx \cdot \cos lx \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, k, l = 1, 2, \dots \\ \frac{\pi}{2}, & k = l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\int_0^\pi 1^2 \, dx = \pi$$

则 $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$ 是 $[0, \pi]$ 上的正交系

$$(2) \text{ 因 } \int_0^\pi \sin kx \sin lx \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, k, l = 1, 2, \dots \\ \frac{\pi}{2}, & k = l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

则 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots$ 是 $[0, \pi]$ 上的正交系

又 $\int_0^\pi 1 \cdot \sin x \, dx = 2 \neq 0$, 则 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ 不是 $[0, \pi]$ 上的正交系.

2. 证明: $\sin x, \sin 3x, \dots, \sin(2n+1)x, \dots$ 是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的正交系, 写出它的标准正交系

(即不仅正交, 而且每个函数的平方在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的积分为 1), 并导出 $\sin \frac{\pi x}{2l}, \sin \frac{3\pi x}{2l}, \dots, \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \dots$ 是 $[0, l]$ 上的正交系.

$$\text{证明: 因 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2k+1)x \sin(2l+1)x] \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, k, l = 1, 2, \dots \\ \frac{\pi}{4}, & k = l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

则 $\sin x, \sin 3x, \dots, \sin(2n+1)x, \dots$ 是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的正交系

$$\text{又由 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin(2k+1)x}{a} \right]^2 \, dx = \frac{\pi}{4a^2} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots), \text{ 得 } a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

则在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上它的标准正交系为 $\frac{2 \sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{2 \sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{2 \sin(2n+1)x}{\sqrt{\pi}}, \dots$

$$\text{又 } \int_0^l \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{2l} \, dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, k, m = 1, 2, \dots \\ \frac{l}{2} \neq 0, & k = m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

则 $\sin \frac{\pi x}{2l}, \sin \frac{3\pi x}{2l}, \dots, \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \dots$ 是 $[0, l]$ 上的正交系.

3. 设 $f(t)$ 是周期为 T 的方波, 它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上的函数表示式为

$$f(t) = \begin{cases} E, & \text{当 } 0 \leq t < \frac{T}{2} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

将这个方波展开成富里埃级数.

$$\text{解: 因 } \omega = \frac{T}{2}, f(t) = \begin{cases} E, & \text{当 } 0 \leq t < \frac{T}{2} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \cos \frac{2k\pi}{T} t \, dt = 0 \\
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \, dt = E \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt = \frac{T}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin \frac{2k\pi}{T} t \, dt = \begin{cases} 0, & k \text{ 为偶} \\ \frac{2E}{k\pi}, & k \text{ 为奇} \end{cases} \\
 \text{则 } f(x) &\sim \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \frac{(4k-2)\pi x}{T} = \begin{cases} E, & 0 < x < \frac{T}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2} < x < 0 \\ \frac{E}{2}, & x = 0, \pm \frac{T}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

4. 设 $f(t)$ 是周期为 T 的半波整流波, 它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 上的函数表示式为

$$f(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega t, & \text{当 } 0 \leq t < \frac{T}{2} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

把这半波整流波展开成富里埃级数.

解: 因 $\omega' = \frac{2\pi}{T}$, $f(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega t, & \text{当 } 0 \leq t < \frac{T}{2} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \text{ 时} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = \frac{2U_m}{\omega T} \left(1 - \cos \frac{T\omega}{2}\right) \\
 a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega' t \, dt = \frac{U_m}{\omega T + 2k\pi} \left(1 - \cos \frac{T\omega + 2k\pi}{2}\right) + \frac{U_m}{\omega T - 2k\pi} \left(1 - \cos \frac{T\omega - 2k\pi}{2}\right) \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega' t \, dt = \frac{U_m}{\omega T - 2k\pi} \sin \frac{T\omega - 2k\pi}{2} - \frac{U_m}{\omega T + 2k\pi} \sin \frac{T\omega + 2k\pi}{2} \\
 \text{则 } f(t) &\sim \frac{2U_m}{\omega T} \left(1 - \cos \frac{T\omega}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t\right) = \begin{cases} U_m \sin \omega t, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ \frac{U_m}{2} \sin \frac{T\omega}{2}, & t = \pm \frac{T}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

5. 设 $f(t)$ 以 2π 为周期, 在 $[-\pi, \pi)$ 内

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{当 } -\pi \leq t < 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } 0 \leq t < \pi \text{ 时} \end{cases}$$

把 $f(t)$ 展开成富里埃级数.

解: 因 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = \frac{1}{k^2\pi} [1 - (-1)^k] \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
 \text{则 } f(t) &\sim -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^2} \cos kt = \\
 &= -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t = \begin{cases} t, & -\pi < t < 0 \\ 0, & 0 \leq t < \pi \\ -\frac{\pi}{2}, & t = \pm\pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

6. 设 $f(t)$ 是周期为 2π 、高为 h 的锯齿形波, 它在 $[0, 2\pi)$ 上的函数表示式为 $f(t) = \frac{h}{2\pi} t$, 将这个锯齿形波展开成富里埃级数.

解: 因 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = h$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt = -\frac{h}{k\pi}$$

$$\text{则 } f(t) \sim \frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \begin{cases} \frac{h}{2\pi} t, & 0 < t < 2\pi \\ \frac{h}{2}, & t = 0, 2\pi \end{cases}$$

7. 将宽度为 τ 、高为 h 、周期为 T 的矩形波展开成余弦级数.

解: 在一个周期 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 内矩形波函数表达式为 $f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{\tau}{2} \\ h, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$

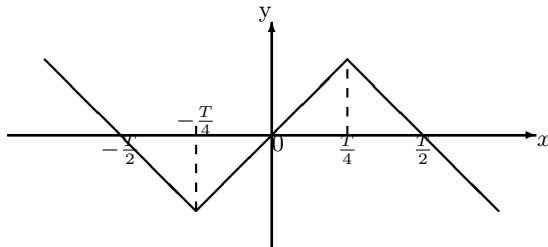
$$\text{则 } a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{2h}{T} \tau$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{2h}{k\pi} \sin \frac{k\tau}{T} \pi$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2k\pi}{T} t dt = 0$$

$$\text{于是 } f(t) \sim \frac{h}{T} \tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2h}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{T} \tau \cos \frac{2k\pi}{T} t$$

8. 写出如图12-5所示的周期为 T 的三角波在 $\left[0, \frac{T}{2}\right)$ 内的函数表示式, 并将它展开成正弦级数.



解: 如图所示的周期为 T 的三角波在 $\left[0, \frac{T}{2}\right)$ 的函数表达式为 $f(t) = \begin{cases} \frac{4E}{T} t, & 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ \frac{4E}{T} \left(\frac{T}{2} - t\right), & \frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$

先把 $f(t)$ 延拓成 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上的函数, 再据题意, 还必须把它延拓成奇函数, 于是 $a_0 = a_k = 0$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{8E}{k^2\pi^2} \sin \frac{k}{2} \pi = \begin{cases} 0, & k \text{ 为偶} \\ \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot 8E}{k^2\pi^2}, & k \text{ 为奇} \end{cases}$$

$$\text{则 } f(t) \sim \frac{8E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2(2n-1)\pi}{T} t$$

9. 在区间 $(0, 2\pi)$ 中展开 $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ 成富里埃级数.

解: 因 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = 0$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos kx dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin kx dx = \frac{1}{k}$$

$$\text{则 } f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

10. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 成富里埃级数.

解: 因在 $(-\pi, \pi)$ 上, $f(x) = \pi^2 - x^2$ 为偶函数, 则 $b_k = 0$

$$\text{又 } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos kx dx = (-1)^{k+1} \frac{4}{k^2}$$

$$\text{则 } f(x) \sim \frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos kx = \pi^2 - x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$$

11. 将 $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ 展开成富里埃级数.

解: 因 $f(x + 2\pi) = \operatorname{sgn}[\cos(x + 2\pi)] = \operatorname{sgn}(\cos x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数

由 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 于是 $b_k = 0$

$$\text{又 } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1) dx \right] = 0$$

$$a_k = \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) \cos kx dx = \frac{4}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ (-1)^n \frac{4}{(2n+1)\pi}, & k = 2n+1 \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{则 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上可展为 } f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos(2n+1)x = \operatorname{sgn}(\cos x)$$

12. 应当如何把区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓后, 使它展开成的富里埃级数的形状如下:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

解: 因展开式中无正弦项, 则 $f(x)$ 延拓后应为偶函数

设 $f(x)$ 延拓到 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内的部分为 $\varphi(x)$

$$\text{因展开式中偶数项的系数 } a_{2n} = 0 \text{ 即 } a_{2n} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(x) \cos 2nx dx \right] = 0$$

$$\text{则 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(x) \cos 2nx dx = 0$$

在左端前一积分中作变量代换, 令 $x = \pi - t$

$$\text{则 } -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t) \cos 2n(\pi - t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(x) \cos 2nx dx = 0 \text{ 即 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f(\pi - x) + \varphi(x)] \cos 2nx dx = 0$$

要使上式成立, 则必须当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时. 有 $f(\pi - x) + \varphi(x) = 0$ 即 $\varphi(x) = -f(\pi - x)$

于是就求出了延拓后的函数在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内的表达式为 $-f(\pi - x)$

又延拓后的函数为偶函数, 则它在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 的表达式为 $f(-x)$, 在 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 的表达式为 $-f(\pi + x)$

$$\text{不妨设延拓后的函数为 } \psi(x), \text{ 则 } \psi(x) = \begin{cases} -f(\pi + x), & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ f(-x), & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ f(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -f(\pi - x), & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

13. 同上一题, 但展开的富里埃级数形状为:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

解: 因展开式中无余弦项, 则 $f(x)$ 延拓后应为奇函数

设 $f(x)$ 延拓到 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内的部分为 $\varphi(x)$

$$\text{因展开式中偶数项的系数 } b_{2n} = 0 \text{ 即 } b_{2n} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(x) \sin 2nx \, dx \right] = 0$$

$$\text{则 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(x) \sin 2nx \, dx = 0$$

在左端前一积分中作变量代换, 令 $x = \pi - t$

$$\text{则 } - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t) \sin 2n(\pi - t) \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(x) \sin 2nx \, dx = 0 \text{ 即 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi - x) + \varphi(x)] \sin 2nx \, dx = 0$$

要使上式成立, 则必须当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, 有 $-f(\pi - x) + \varphi(x) = 0$ 即 $\varphi(x) = f(\pi - x)$

于是就求出了延拓后的函数在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内的表达式为 $f(\pi - x)$

又延拓后的函数为奇函数, 则它在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 的表达式为 $-f(-x)$, 在 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ 的表达式为 $-f(\pi + x)$

$$\text{不妨设延拓后的函数为 } \psi(x), \text{ 则 } \psi(x) = \begin{cases} -f(\pi + x), & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ -f(-x), & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ f(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(\pi - x), & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

14. 设 $f(x)$ 可积、绝对可积, 证明:

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 $f(x + \pi) = f(x)$, 那末 $a_{2m-1} = b_{2m-1} = 0$

(2) 如果函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 $f(x + \pi) = -f(x)$, 那末 $a_{2m} = b_{2m} = 0$

证明:

(1) 因 $f(x)$ 可积、绝对可积且函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 $f(x + \pi) = f(x)$

则 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积、绝对可积且以 π 为周期

$$\text{于是 } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right]$$

$$\text{对右端第二式作变量代换: } t = x - \pi, \text{ 则其变为 } \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos k(t + \pi) \, dt$$

$$\text{于是 } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [1 + (-1)^k] f(x) \cos kx \, dx$$

从而, 得 $a_{2m-1} = 0 (m = 1, 2, \dots)$

同理, 得 $b_{2m-1} = 0 (m = 1, 2, \dots)$

(2) 因 $f(x)$ 可积、绝对可积且函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 $f(x + \pi) = -f(x)$, 则 $f(x + 2\pi) = f(x)$

于是 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积、绝对可积且以 2π 为周期

$$\text{于是 } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right]$$

$$\text{对右端第二式作变量代换: } t = x - \pi, \text{ 则其变为 } \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos k(t + \pi) \, dt$$

$$\text{于是 } a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [1 + (-1)^{k+1}] f(x) \cos kx \, dx$$

从而, 得 $a_{2m} = 0 (m = 1, 2, \dots)$

同理, 得 $b_{2m} = 0 (m = 1, 2, \dots)$

15. 周期为 2π 的可积和绝对可积函数 $f(x)$ 的富里埃系数为 a_n, b_n , 计算:

(1) 函数 $f(x + k)$ (k 为常数) 的富里埃系数 \bar{a}_n, \bar{b}_n ;

(2) $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x - t) \, dt$ 的富里埃系数 A_n, B_n , 设有关的积分顺序可交换.

解:

$$(1) \text{ 由已知, 得 } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

则作代换 $x+k=y$ 且 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 有

$$\bar{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+k) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+k}^{\pi+k} f(y) dy = a_0$$

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+k) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+k}^{\pi+k} f(y) \cos n(y-k) dy = a_n \cos nk + b_n \sin nk$$

即 $\bar{a}_n = a_n \cos nk + b_n \sin nk$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

同理, 可求得 $\bar{b}_n = b_n \cos nk - a_n \sin nk$

(2) 因 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积和绝对可积函数

$$\text{则 } F(x+2\pi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+2\pi-t) dt = F(x), \text{ 于是 } F(x) \text{ 仍是以 } 2\pi \text{ 为周期的函数}$$

$$\text{又 } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$\text{则 } A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) dx$$

对 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) dx$ 作代换 $x-t=y$ 且 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 有

$$A_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(y) dy = \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right]^2 = a_0^2$$

同理, 可求得 $A_n = a_n^2 - b_n^2$

$$B_n = 2a_nb_n$$

16. 如果 $\varphi(-x) = \psi(x)$, 问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的富里埃系数之间有什么关系?

解: 函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的富里埃系数分为 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx, \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx$$

对 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx$ 右端作变量代换 $y = -x$, 并将 $\varphi(-x) = \psi(x)$ 代入, 得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} \varphi(-y) \cos n(-y) d(-y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = \alpha_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

同理, 得 $b_n = -\beta_n$ ($n=1, 2, \dots$)

17. 如果 $\varphi(-x) = -\psi(x)$, 问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的富里埃系数之间有什么关系?

解: 函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的富里埃系数分为 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx, \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx$$

对 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx$ 右端作变量代换 $y = -x$, 并将 $\varphi(-x) = -\psi(x)$ 代入, 得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} \varphi(-y) \cos n(-y) d(-y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = -\alpha_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

同理, 得 $b_n = \beta_n$ ($n=1, 2, \dots$)

18. 设 $f(t)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上分段连续, 当 $t=0$ 连续且有单侧导数, 证明当 $p \rightarrow \infty$ 时

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [f(t) - f(-t)] \cot \frac{t}{2} dt$$

$$\text{证明: } \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \int_{-\pi}^0 f(t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \int_0^{\pi} f(t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

$$\text{在右端前一积分中令 } t = -x, \text{ 则 } \int_{-\pi}^0 f(t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = - \int_0^{\pi} f(-t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt$$

$$\text{代回原式, 得 } \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = - \int_0^{\pi} f(-t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \int_0^{\pi} f(t) \frac{\cos \frac{t}{2} - \cos pt}{2 \sin \frac{t}{2}} dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} [f(t) - f(-t)] \cot \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt dt$$

下证 $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt = 0$

因 $\int_0^\pi \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt = \left[\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right] \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt$ (其中 $0 < \delta < \pi$)

对于 $\int_\delta^\pi \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt$

因 $f(t)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上分段连续, $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$ 在 (δ, π) 上连续, 则 $\frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ 在 (δ, π) 上分段连续因而可积

则由黎曼引理, 得 $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt = 0$

对于 $\int_0^\delta \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt$

$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta [f(t) - f(-t)] \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) \cos pt \, dt + \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(t) - f(-t)}{t} \cos pt \, dt$

因 $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) = 0$, 补充定义, $t = 0$ 时, 函数 $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ 的值为 0, 则 $\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ 是 $[0, \delta]$ 上的连续函数

又 $f(t)$ 为 $(-\pi, \pi)$ 上的分段连续函数, 则 $[f(t) - f(-t)] \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right)$ 在 $[0, \delta]$ 上分段连续, 因而可积, 则由黎曼

引理, 得 $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt = 0$

因 $f'(+0), f'(-0)$ 存在, 则 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t) - f(-t)}{t} = f'(+0) + f'(-0)$ 存在

补充定义, $t = 0$ 时, 函数 $\frac{f(t) - f(-t)}{t}$ 值为 $f'(+0) + f'(-0)$, 则 $\frac{f(t) - f(-t)}{t}$ 是 $[0, \delta]$ 上的分段函数, 因而

可积, 于是由黎曼引理, 得 $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(t) - f(-t)}{t} \cos pt \, dt = 0$

综上所述, 当 $p \rightarrow \infty$ 时, $\int_0^\pi \frac{f(t) - f(-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos pt \, dt \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^\pi [f(t) - f(-t)] \cot \frac{t}{2} \, dt$

19. 设 $T_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^n \cos vx, T_0(x) = \frac{1}{2}, \sigma_n(x) = \frac{T_0(x) + \cdots + T_n(x)}{n+1}$

证明

$$(1) \sigma_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) \, dx = \pi$$

证明:

$$(1) \text{ 因 } 2 \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{v=1}^n \cos vx \right) = \sin \frac{2n+1}{2} x, \text{ 则 } T_n(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\text{于是 } \sigma_n(x) = \frac{T_0(x) + \cdots + T_n(x)}{n+1} = \frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n T_k(x)}{n+1} =$$

$$\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{2k+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}} \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2k+1}{2} x \right) = \frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(n+1)x \right] =$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right)^2$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n T_k(x)}{n+1} \, dx = \frac{1}{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} + \sum_{v=1}^k \cos vx \right) \right] \, dx =$$

$$\frac{1}{n+1} \left[\pi + \sum_{k=1}^n \left(\pi + \sum_{v=1}^k \int_{-\pi}^{\pi} \cos vx \, dx \right) \right] = \pi.$$

20. 设 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调增加函数, 证明

$$(1) \text{ 如果 } a = 0, b < 0, \text{ 有 } \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz \rightarrow -\frac{1}{2} \varphi(-0) \quad (p \rightarrow \infty)$$

$$(2) \text{ 如果 } a < 0, b > 0, \text{ 有 } \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz \rightarrow \frac{\varphi(+0) + \varphi(-0)}{2} \quad (p \rightarrow \infty)$$

证明:

(1) 因 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调增加函数, 则 $\varphi(-t)$ 在 $[-b, -a]$ 上为单调减少函数

当 $a = 0, b < 0$ 时, $\varphi(-t)$ 在 $[0, -b]$ ($-b > 0$) 上为单调增加函数

$$\text{对 } \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz \text{ 作变量代换 } z = -t, \text{ 则 } \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz = - \int_0^{-b} \varphi(-t) \frac{\sin pt}{t} dt$$

$$\text{则由狄立克莱引理, 得 } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{-b} \varphi(-t) \frac{\sin pt}{t} dt = \frac{\pi}{2} \varphi(-0) \text{ 即 } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz = -\frac{\pi}{2} \varphi(-0)$$

$$\text{于是 } \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz \rightarrow -\frac{1}{2} \varphi(-0) \quad (p \rightarrow \infty)$$

$$(2) \text{ 因 } a < 0, b > 0, \varphi(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上为单调增加函数, } \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz = \int_a^0 \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz + \int_0^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz$$

$$\text{据(1), 得 } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^a \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz = -\frac{\pi}{2} \varphi(-0), \text{ 则 } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^0 \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz = \frac{\pi}{2} \varphi(-0)$$

$$\text{又由狄立克莱引理, 得 } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz = \frac{\pi}{2} \varphi(+0)$$

$$\text{则 } \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz = \frac{\pi}{2} [\varphi(+0) + \varphi(-0)]$$

$$\text{于是 } \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin pz}{z} dz \rightarrow \frac{\varphi(-0) + \varphi(+0)}{2} \quad (p \rightarrow \infty)$$

§2. 富里埃变换

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积, 证明 $\hat{f}(\omega)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明: 对 $\forall \omega \in (-\infty, +\infty)$, 总有 A', A'' , 使得 $\omega \in [A', A'']$

$$\text{由于 } |\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

后者收敛且不含参量 ω , 这表明积分 $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ 在 $[A', A'']$ 上一致收敛

据一致收敛积分的连续性, 得 $\hat{f}(\omega)$ 在 $[A', A'']$ 上连续, 从而在点 ω 处连续

由 ω 的任意性, 得 $\hat{f}(\omega)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积, 证明 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

证明: 由 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积, 得对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使有 $\int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx \right| \leq \int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

设 $f(x)$ 在 $[0, A]$ 内无瑕点, 则在 $[0, A]$ 中插入分点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = A$, 并设 $f(x)$ 在 $[t_{k-1}, t_k]$ 上的下确界为 m_k , 于是

$$\int_0^A f(x) \sin \omega x dx = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) \sin \omega x dx = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(x) - m_k] \sin \omega x dx + \sum_{k=1}^m m_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin \omega x dx$$

$$\text{从而 } \left| \int_0^A f(x) \sin \omega x dx \right| \leq \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta t_k + \sum_{k=1}^m |m_k| \left| \frac{\cos n t_{k-1} - \cos n t_k}{n} \right| \leq \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta t_k + \frac{2}{\omega} \sum_{k=1}^m |m_k|$$

其中 ω_k 为 $f(x)$ 在区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 上的振幅, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$

由于 $f(x)$ 在 $[0, A]$ 上可积, 故可取某一分法, 使有 $\left| \sum_{k=1}^m \omega_k \Delta t_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

对于这样固定的分法, $\sum_{k=1}^m |m_k|$ 为一定值, 因而存在 $\delta > 0$, 使当 $\omega > \delta$ 时, 恒有 $\frac{2}{\omega} \sum_{k=1}^m |m_k| < \frac{\varepsilon}{3}$

于是对上述所选取的 δ , 当 $\omega > \delta$ 时

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx \right| \leq \left| \int_0^A f(x) \sin \omega x dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx \right| \leq \varepsilon \text{ 即 } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx = 0$$

其次, 设 $f(x)$ 在区间 $[0, A]$ 中有瑕点, 为简便起见, 不妨设只有一个瑕点且为 0

于是对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使有 $\int_0^\eta |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}$

又 $f(x)$ 在 $[\eta, A]$ 上无瑕点, 故应用上述结果可得存在 δ , 使当 $\omega > \delta$ 时, 恒有 $\left| \int_\eta^A f(x) \sin \omega x dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

于是当 $\omega > \delta$ 时, 有 $\left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx \right| \leq \int_0^\eta |f(x)| dx + \left| \int_\eta^A f(x) \sin \omega x dx \right| + \int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \varepsilon$

即 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx = 0$

同法, 得当 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积时, 均有 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx = 0$

同法可证得当 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积时, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx = 0$

于是 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

3. 求下列函数的富里埃变换:

$$(1) f(x) = \begin{cases} E \sin \omega_0 x, & |x| < \frac{\pi}{\omega_0} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{\omega_0} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{2h}{\tau} x + h, & -\frac{\tau}{2} < x < 0 \\ -\frac{2h}{\tau} x + h, & 0 \leq x < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq x < +\infty \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} E \sin \omega_0 x e^{-i\omega x} dx = E \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \sin \omega_0 x (\cos \omega x - i \sin \omega x) dx = \\
 &= 2Ei \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \sin \omega_0 x \sin \omega x dx = iE \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} [\cos(\omega_0 + \omega)x - \cos(\omega - \omega_0)x] dx = iE \left(\frac{\sin(\omega_0 + \omega)x}{\omega_0 + \omega} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} - \frac{\sin(\omega - \omega_0)x}{\omega - \omega_0} \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \right) = \\
 &= \frac{2E\omega_0 i}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \frac{\omega}{\omega_0} \pi (\omega \neq \pm \omega_0)
 \end{aligned}$$

因 $\widehat{f}(\omega)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数, 则 $\widehat{f}(\mp \omega_0) = \lim_{\omega \rightarrow \mp \omega_0} \widehat{f}(\omega) = \pm \frac{iE\pi}{\omega_0}$.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 \left(\frac{2h}{\tau}x + h \right) e^{-i\omega x} dx + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left(-\frac{2h}{\tau}x + h \right) e^{-i\omega x} dx = \\
 &= \frac{2h}{\tau} \left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 x e^{-i\omega x} dx - \int_0^{\frac{\tau}{2}} x e^{-i\omega x} dx \right] + \frac{2h}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} = \frac{4h}{\tau\omega^2} - \frac{4h}{\tau\omega^2} \cos \frac{\omega\tau}{2} \quad (\omega \neq 0)
 \end{aligned}$$

因 $\widehat{f}(\omega)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数, 则 $\widehat{f}(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \widehat{f}(\omega) = \frac{h\tau}{2}$.

第四篇 多变量微积分学

第一部分 多元函数的极限论

第十三章 多元函数的极限与连续

§1. 平面点集

1. 证明 $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ 的充要条件是: $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$

证明: \Rightarrow

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $r(M_n, M_0) < \varepsilon$

即 $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$

于是一定有 $|x_n - x_0| \leq r(M_n, M_0) < \varepsilon, |y_n - y_0| \leq r(M_n, M_0) < \varepsilon$ 即 $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$

\Leftarrow

因 $(|x_n - x_0| + |y_n - y_0|)^2 \geq |x_n - x_0|^2 + |y_n - y_0|^2$ 即 $0 \leq \sqrt{|x_n - x_0|^2 + |y_n - y_0|^2} \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$

又 $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\sqrt{|x_n - x_0|^2 + |y_n - y_0|^2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 即 $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) (n \rightarrow \infty)$

2. 证明: 若平面上的点列 $\{M_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证明: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0$, 假设又有 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0'$

由定义, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $r(M_n, M_0) < \frac{\varepsilon}{2}, r(M_n, M_0') < \frac{\varepsilon}{2}$

由三角不等式, 有 $r(M_0, M_0') \leq r(M_n, M_0) + r(M_n, M_0') < \varepsilon$

又 M_0, M_0' 为固定的两点, 由 ε 的任意性, 得 $r(M_0, M_0') = 0$ 即 $M_0 = M_0'$.

3. 证明: 若 $M_n \rightarrow M_0 (n \rightarrow \infty)$, 那么它的任何一个子列 $M_{n_k} \rightarrow M_0$.

证明: 因 $M_n \rightarrow M_0 (n \rightarrow \infty)$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $r(M_n, M_0) < \varepsilon$

今取 $K = N$, 则对一切 $k > K$, 有 $n_k > n_K = n_N \geq N$, 自然有 $r(M_{n_k}, M_0) < \varepsilon$ 即 $M_{n_k} \rightarrow M_0 (k \rightarrow \infty)$.

4. 求下列点集 E 的内点, 外点, 边界点:

(1) E 由满足 $y < x^2$ 的点所组成;

(2) E 由满足 $1 \leq x^2 + \frac{y^2}{4} < 4$ 的点所组成;

(3) E 由满足 $0 < x^2 + y^2 < 1$ 的点所组成;

(4) E 由所有这样的点 (x, y) 所组成, 其中 x 和 y 都是有理数.

解:

(1) 凡满足 $y < x^2$ 的点 (x, y) 是 E 的内点; 凡满足 $y > x^2$ 的点 (x, y) 是 E 的外点; 凡满足 $y = x^2$ 的点 (x, y) 是 E 的边界点.

(2) 凡满足 $1 < x^2 + \frac{y^2}{4} < 4$ 的点 (x, y) 是 E 的内点; 凡满足 $x^2 + \frac{y^2}{4} < 1$ 或 $x^2 + \frac{y^2}{4} > 4$ 的点 (x, y) 是 E 的外点;

凡满足 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$ 的点 (x, y) 是 E 的边界点.

(3) 凡满足 $0 < x^2 + y^2 < 1$ 的点 (x, y) 是 E 的内点; 凡满足 $x^2 + y^2 > 1$ 的点 (x, y) 是 E 的外点; 原点 θ 及满足 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 (x, y) 是 E 的边界点.

(4) 由有理数及无理数的稠密性, 得平面上所有点 (x, y) 都是 E 的边界点.

5. 证明: 若 M_0 是平面点集 E 的聚点, 则在 E 中存在点列 $M_n \rightarrow M_0 (n \rightarrow \infty)$.

证明: 已知 M_0 是平面点集 E 的聚点, 取 $\delta_n = \frac{1}{n}$, 在 $O(M_0, \delta_1)$ 中定存在 E 的点 $M_1 \neq M_0$; 在 $O(M_0, \delta_2)$ 中定存在 E 的点 $M_2, M_2 \neq M_1 (i \neq 0, 1)$

如此进行下去, 得到点列 $\{M_n\} (M_n \neq M_i) (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 且 $r(M_0, M_n) < \frac{1}{n}$

于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, $r(M_0, M_n) \rightarrow 0$ 即 $M_n \rightarrow M_0 (n \rightarrow \infty)$.

6. 证明平面点列的收敛原理.

证明: \Rightarrow

设 $M_n \rightarrow M_0 (n \rightarrow \infty)$, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n, m > N$ 时, 有 $r(M_n, M_0) < \frac{\varepsilon}{2}, r(M_m, M_0) < \frac{\varepsilon}{2}$

由距离的三角不等式, 得 $r(M_m, M_n) \leq r(M_n, M_0) + r(M_m, M_0) < \varepsilon$

\Leftarrow

设点列 $\{M_n\}$ 满足对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n, m > N$ 时, 有 $r(M_n, M_m) < \varepsilon$

将 $\{M_n\}$ 分别投影到两根坐标轴上, 得数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$

因 $|x_m - x_n| < r(M_m, M_n) < \varepsilon, |y_m - y_n| < r(M_m, M_n) < \varepsilon$

由 \mathbb{R}^1 上的柯西收敛原理, 得 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都收敛

设 $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0(M_0(x_0, y_0))$ 即 $\{M_n\}$ 收敛.

7. 用平面上的有限覆盖定理证明魏尔斯特拉斯定理.

证明:

(1) 若 $\{M_n(x_n, y_n)\}$ 是有界有限点集, 定理成立;

(2) 若 $\{M_n(x_n, y_n)\}$ 是有界无穷点集, 据5, 只需证 $E = \{M_n(x_n, y_n) | n = 1, 2, \dots\}$ 中至少有一个聚点.

反证. 设 E 没有聚点.

由于 $a \leq x_n \leq b, c \leq y_n \leq d (n = 1, 2, \dots)$, 而矩形域 $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 是有界闭区域且 $E \subset R$

对 $\forall M(x, y) \in R$, 都不是 E 的聚点, 因而存在 δ_M , 使得 $O(M, \delta_M)$ 至多有 E 中有限个点,

$\{O(M, \delta_M) | M \in R\}$ 覆盖 R

据有限覆盖定理, 存在有限个开集 $O(M_1, \delta_{M_1}), \dots, O(M_k, \delta_{M_k})$ 同样覆盖 R , 其中每个 $O(M_i, \delta_{M_i}) (i = 1, 2, \dots, k)$ 中至多有有限个 E 中的点

于是 $\bigcup_{i=1}^k O(M_i, \delta_{M_i})$ 至多含 E 中有限个点

但由于 $\bigcup_{i=1}^k O(M_i, \delta_{M_i}) \supset R \supset E$, 于是矛盾.

§2. 多元函数的极限和连续性

1. 确定并绘出下列函数之定义域:

- (1) $u = \sqrt{x} - \sqrt{1-y}$
- (2) $u = \sqrt{x-y+1}$
- (3) $u = \ln(-x-y)$
- (4) $u = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$
- (5) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}$

解:

- (1) 定义域为 $x \geq 0$ 且 $y \leq 1$
- (2) 定义域为满足不等式 $y \leq x+1$ 的点集
- (3) 定义域为半平面 $x+y < 0$
- (4) 定义域为满足不等式 $2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi (k=0, 1, 2, \dots)$ 的点集
- (5) 定义域为满足不等式 $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 的点集

2. 求下列极限:

- (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$
- (2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$
- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$
- (4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$
- (5) $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$
- (6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

解:

- (1) 因 $0 \leq \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{(|x| + |y|)^2}{|x| + |y|} = |x| + |y|$ 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x| + |y|) = 0$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0$
- (2) 因 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{t}{\sqrt{t+1} - 1} = \lim_{t \rightarrow +0} (\sqrt{t+1} + 1) = 2$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2$
- (3) 因 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1+t}{t} = +\infty$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = +\infty$
- (4) 因 $0 \leq \left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x| + |y|) = 0$
 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = 0$
- (5) 因 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$
 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left[\frac{(x+y)^2}{e^{-(x+y)}} - 2 \frac{x}{e^x} \cdot \frac{y}{e^y} \right] = 0$
- (6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln 2$

3. 试证若 $\lim_{\substack{y \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} f(x, y) = A$ 存在, 而当 x 取任何与 a 邻近之值时, 极限 $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \varphi(x)$ 存在, 则二次极限存在, 且等于 A :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} f(x, y) = A$$

证明: 因二重极限存在, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - a| < \delta, |y - b| < \delta$ 且 $(x - a)^2 + (y - b)^2 \neq 0$ 时, 恒有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$

现在 $0 < |x - a| < \delta$ 中固定 x , 而在上式中令 $y \rightarrow b$, 即得 $|\varphi(x) - A| \leq \varepsilon$, 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$

于是 $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A = \lim_{\substack{y \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} f(x, y)$

4. (1) 试举出两个二次极限不相等的例子;
 (2) 试举出只有一个二次极限存在的例子;
 (3) 试举出二重极限存在, 但二次极限不全存在的例子.

解:

(1) 例: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 的二次极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \neq \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.

(2) 例: $f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}$ 在点 $(0, 0)$ 的二次极限

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1$$

$$\text{但 } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ 不存在.}$$

(3) 例: $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 的二次极限和二重极限

$$\text{因 } 0 \leq |f(x, y)| = \left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x|, \text{ 则 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 \text{ 即其二重极限存在}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \text{ 而当 } y \rightarrow 0 \text{ 时, } x \sin \frac{1}{y} \text{ 极限不存在, 即 } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \text{ 不存在.}$$

5. 讨论下列函数在点 $(0, 0)$ 的二次极限和二重极限:

(1) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

(2) $f(x, y) = (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$

解:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$

$$\text{若按 } y = kx \rightarrow 0 \text{ 的方向取极限, 则有 } \lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 k^2}{x^2 k^2 + (1 - k)^2}$$

特别的, 分别取 $k \neq 1$ 及 $k = 1$, 便得到不同的极限 0 及 1, 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

(2) 因 $0 \leq |f(x, y)| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ 即其二重极限存在

$$\text{又 } \lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \text{ 不存在 } \left(\text{当 } x \neq \frac{1}{k\pi} \right) (k = \pm 1, \pm 2, \dots), \lim_{x \rightarrow 0} (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \text{ 不存}$$

$$\text{在 } \left(\text{当 } y \neq \frac{1}{k\pi} \right) (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 及 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 都不存在.

6. 讨论下列函数的连续范围:

$$(1) u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(2) u = \ln(1 - x^2 - y^2)$$

$$(3) u = \frac{1}{\sin x \sin y}$$

$$(4) u = \ln \frac{1}{(x-1)^a + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

解:

(1) 函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在点 $(0, 0)$ 无定义, 故原点 $(0, 0)$ 为此函数的不连续点, 除此点外均连续;

(2) 单位圆内的点, 即满足 $x^2 + y^2 < 1$ 的各点为函数 $u = \ln(1 - x^2 - y^2)$ 的连续点;

(3) 连续范围为 $x \neq m\pi, y \neq n\pi (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

(4) 除点 (a, b, c) 外均连续.

7. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

分别对于每一变量 x 和 y 是连续的, 但非关于二变量的连续函数.

证明: 先固定 $y = a \neq 0$, 则得 x 的函数 $g(x) = f(x, a) = \frac{2ax}{x^2 + a^2} (-\infty < x < +\infty)$

它是处处有定义的有理函数

又当 $y = 0$ 时, $f(x, 0) \equiv 0$, 它显然是连续的

于是当变数 y 固定时, 函数 $f(x, y)$ 对于变数 x 是连续的

同理可证, 当变数 x 固定时, 函数 $f(x, y)$ 对于变数 y 是连续的

作为二元函数, $f(x, y)$ 虽在除点 $(0, 0)$ 外的各点均连续, 但在点 $(0, 0)$ 不连续

当动点 $P(x, y)$ 沿射线 $y = mx$ 趋于原点时, 有 $\lim_{\substack{y=mx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$

取不同的 m , 则极限值不同, 说明其二重极限不存在, 于是 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \neq f(0, 0)$

则其关于二变量的函数在 $(0, 0)$ 点不连续, 从而其非关于二变量的连续函数.

8. 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 点沿每一条射线 $x = t \cos \theta, y = t \sin \theta (0 \leq t < +\infty)$ 连续, 但它在 $(0, 0)$ 点不连续.

证明: 当 $\sin \theta = 0$ 时, $\cos \theta = 1$ 或 -1 , 于是当 $t \neq 0$ 时, $f(t \cos \theta, t \sin \theta) = 0$, 而 $f(0, 0) = 0$

则有 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \theta, t \sin \theta) = f(0, 0)$

当 $\sin \theta \neq 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \theta, t \sin \theta) = 0$, 故有 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \theta, t \sin \theta) = f(0, 0)$

其次, 设动点 $P(x, y)$ 沿抛物线 $y = x^2$ 趋于原点, 得 $\lim_{\substack{y=x^2 \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$, 则函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续.

9. 若 $f(x, y)$ 在某一区域 G 内对变量 x 为连续, 对变量 y 满足李普希兹条件, 即对任何

$$(x, y') \in G, (x, y'') \in G$$

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''|$$

其中 L 为常数, 则此函数在 G 内连续.

证明: 因 $f(x, y)$ 在区域 G 内对变量 x 为连续, 则对 G 内任一点 (x_0, y_0) , 对 $\forall \varepsilon < 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又因 $f(x, y)$ 在 G 内对 y 满足李普希兹条件, 则对任何 $(x, y) \in G, (x, y_0) \in G$, 有 $|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq L|y - y_0|$

令 $L|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2L}$

取 $\delta = \min\left(\delta_1, \frac{\varepsilon}{2L}\right)$, 当 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时, 定有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

即此函数在 G 内连续.

第十四章 偏导数和全微分

§1. 偏导数和全微分的概念

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^2 \ln(x^2 + y^2)$$

$$(2) u = e^{xy}$$

$$(3) z = xy + \frac{x}{y}$$

$$(4) u = \arctan \frac{y}{x}$$

$$(5) u = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$(6) u = e^{\varphi - \theta} \cos(\theta + \varphi)$$

解:

$$(1) z_x = 2x \left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right], z_y = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

$$(2) u_x = ye^{xy}, u_y = xe^{xy}.$$

$$(3) z_x = y + \frac{1}{y}, z_y = \frac{x(y^2 - 1)}{y^2}.$$

$$(4) u_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, u_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$(5) u_x = 2(x + y + z), u_y = 2(x + y + z), u_z = 2(x + y + z).$$

$$(6) u_\varphi = e^{\varphi - \theta} [\cos(\theta + \varphi) - \sin(\theta + \varphi)], u_\theta = -e^{\varphi - \theta} [\sin(\theta + \varphi) + \cos(\theta + \varphi)].$$

2. 设 $f(x, y) = x^2 y^2 - 2y$, 求 $f_x(x, y), f_y(x, y), f_x(2, 3), f_y(0, 0), f_y(x, y) \Big|_{\substack{x=y \\ y=x}}$.

$$\text{解: } f_x(x, y) = 2xy^2, f_y(x, y) = 2x^2 y - 2, f_x(2, 3) = 36, f_y(0, 0) = -2, f_y(x, y) \Big|_{\substack{x=y \\ y=x}} = 2xy^2 - 2$$

3. 设 $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

$$\text{证明: 因 } z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}), \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

$$\text{于是 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

4. 求下列函数在给定点 (x_0, y_0) 的全微分:

$$(1) u = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2, (0, 0), (1, 1)$$

$$(2) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (1, 0), (0, 1)$$

$$(3) u = x \sin(x + y), (0, 0), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(4) u = \ln(x + y^2), (0, 1), (1, 1)$$

解:

$$(1) \text{ 因 } du = 4x(x^2 - 2y^2) dx + 4y(y^2 - 2x^2) dy, \text{ 则}$$

$$\text{在 } (0, 0) \text{ 点 } du = 0; \text{ 在 } (1, 1) \text{ 点 } du = -4 dx - 4 dy.$$

$$(2) \text{ 因 } du = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy, \text{ 则}$$

$$\text{在 } (1, 0) \text{ 点 } du = 0; \text{ 在 } (0, 1) \text{ 点 } du = dx.$$

$$(3) \text{ 因 } du = [\sin(x + y) + x \cos(x + y)] dx + x \cos(x + y) dy, \text{ 则}$$

$$\text{在 } (0, 0) \text{ 点 } du = 0; \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 点 } du = dx.$$

(4) 因 $du = \frac{dx}{x+y^2} + \frac{2y}{x+y^2} dy$, 则

在 $(0,1)$ 点 $du = dx + 2dy$; 在 $(1,1)$ 点 $du = \frac{dx}{2} + dy$.

5. 求下列函数的全微分:

(1) $u = \sin(x^2 + y^2)$

(2) $u = x^m \cdot y^n$

(3) $u = e^{xy}$

(4) $u = x^y$

(5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(6) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

解:

(1) $du = 2\cos(x^2 + y^2)(x dx + y dy)$

(2) $du = x^{m-1}y^{n-1}(my dx + nx dy)$

(3) $du = e^{xy}(y dx + x dy)$

(4) $du = x^{y-1}(y dx + x \ln x dy)$

(5) $du = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(6) $du = \frac{2(x dx + y dy + z dz)}{x^2 + y^2 + z^2}$

6. 证明: $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 连续, $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在, 但在 $(0,0)$ 点不可微.

证明: 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{|xy|} = 0$, 得 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0,0)$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点连续

$$\text{因 } f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0, f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

则 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在

但 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点不可微. 若可微, 则有 $\Delta f = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$ 即 $\Delta f = o(\rho)$

考虑点 $P(x, y)$ 沿 $y = x$ 趋于 0 时, 有 $\frac{\Delta f}{\rho} = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not\rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0)$ 矛盾, 于是假设不成立,

则 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

7. 证明: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的邻域中连续, $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 有界, 但在 $(0,0)$ 点不可微.

证明: 由于 $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 是二元初等函数, 在其定义域内必连续, 则 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \neq 0$ 连续

又 $0 < \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}, f(0,0) = 0$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0,0)$, 于是 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点的任何邻域内连续

$$\text{因 } f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0, f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f_x(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, |f_x(x, y)| = \left| \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq 1$, 则 $f_x(x, y)$ 有界

同理可得 $f_y(x, y)$ 有界

但 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微. 若可微, 则有 $\Delta f = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$ 即 $\Delta f = o(\rho)$

考虑点 $P(x, y)$ 沿 $y = x$ 趋于 0 时, 有 $\frac{\Delta f}{\rho} = \frac{\frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0)$ 矛盾, 于是假设不成立,

则 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

8. 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

证明 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 存在但不连续, 在 $(0, 0)$ 点的任何邻域中无界, 但在 $(0, 0)$ 点可微.

证明: 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0, \text{ 则 } f_x(0, 0) \text{ 存在}$$

考察在点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right)$ 的偏导数

$$f_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right) = -2\sqrt{2n\pi} \rightarrow -\infty (n \rightarrow \infty)$$

这说明 $f_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的任何邻域内无界, 则其在 $(0, 0)$ 点不连续, 于是 $f_x(x, y)$ 不连续

同理可得 $f_y(x, y)$ 存在但不连续且 $f_y(0, 0) = 0$, 在 $(0, 0)$ 点的任何邻域中无界

$$\text{又 } \frac{\Delta f - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\rho} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0 (\rho \rightarrow 0)$$

则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微.

9. 求下列函数的高阶偏导数:

(1) $u = x \sin(x + y) + y \cos(x + y)$, 所有二阶偏导数

(2) $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, 所有二阶偏导数

(3) $u = x \ln(xy)$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$

(4) $u = \ln(ax + by + cz)$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$

(5) $u = (x - x_0)^p \cdot (y - y_0)^q$, $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$

(6) $u = x \cdot y \cdot z e^{x+y+z}$, $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \cdot \partial y^q \cdot \partial z^r}$

解:

(1) 因 $u_x = (1 - y) \sin(x + y) + x \cos(x + y)$, $u_y = -y \sin(x + y) + (x + 1) \cos(x + y)$
 则 $u_{x^2} = (2 - y) \cos(x + y) - x \sin(x + y)$, $u_{xy} = u_{yx} = (1 - y) \cos(x + y) - (x + 1) \sin(x + y)$,
 $u_{y^2} = -y \cos(x + y) - (x + 2) \sin(x + y)$

(2) 因 $u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$
 则 $u_{x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $u_{xy} = u_{yx} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $u_{y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

(3) 因 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}$, 于是 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0$

(4) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a}{ax + by + cz}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b}{ax + by + cz}$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{a^2}{(ax + by + cz)^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{b^2}{(ax + by + cz)^2}$
 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{2a^3}{(ax + by + cz)^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{2b^3}{(ax + by + cz)^3}$
 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{6a^4}{(ax + by + cz)^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = -\frac{6b^4}{(ax + by + cz)^4}$
 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{12ab^2}{(ax + by + cz)^4}$

(5) 因 $\frac{\partial^q u}{\partial y^q} = q!(x - x_0)^p$, 则 $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} = p!q!(p, q \text{ 均为自然数})$

(6) $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \cdot \partial y^q \cdot \partial z^r} = \frac{\partial^p}{\partial x^p}(xe^x) \cdot \frac{\partial^q}{\partial y^q}(ye^y) \cdot \frac{\partial^r}{\partial z^r}(ze^z) = e^{x+y+z}(x+p)(y+q)(z+r)$

10. 设

$$(1) \quad u = x^2 - 2xy - 3y^2$$

$$(2) \quad u = x^{y^2}$$

$$(3) \quad u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$$

验证成立等式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

证明:

$$(1) \quad \text{因 } u_x = 2x - 2y, u_y = -2x - 6y, \text{ 则 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2, \text{ 于是 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$(2) \quad \text{因 } u_x = y^2 x^{y^2-1}, u_y = 2yx^{y^2} \ln x, \text{ 则 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x), \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x)$$

$$\text{于是 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$(3) \quad \text{当 } 0 < x \leq y \text{ 时, } u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}} = \arccos \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$\text{则 } u_x = -\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}}, u_y = \frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}$$

$$\text{于是 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{从而 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\text{同理可证, 当 } y \leq x < 0 \text{ 时, } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \text{ 也成立}$$

$$\text{综上, 得 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

§2. 求复合函数偏导数的链式法则

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) u = f(x, y), \text{ 其中 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial^2 u}{\partial r^2};$$

$$(2) u = f(x, y), \text{ 其中 } x = a\xi, y = b\eta, \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$(3) u = f(x^2 + y^2 + z^2), \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$(4) u = f\left(x, \frac{x}{y}\right), \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}.$$

解:

$$(1) \frac{\partial u}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f_{x^2} \cos^2 \theta + f_{xy} \sin 2\theta + f_{y^2} \sin^2 \theta$$

$$(2) \frac{\partial u}{\partial \xi} = af_x, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = a^2 f_{x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = ab f_{xy}, \frac{\partial u}{\partial \eta} = bf_y, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = b^2 f_{y^2}$$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 4xy f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2 + z^2), \frac{\partial u}{\partial z} = 2zf'(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(4) \frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + \frac{1}{y} f_2, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11} + \frac{2}{y} f_{12} + \frac{1}{y^2} f_{22}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_2$$

2. 设 $\Phi = \Phi(x, y, z)$, $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$, 求 Φ_u, Φ_v .

解: $\Phi_u = \Phi_x + \Phi_y + v\Phi_z, \Phi_v = \Phi_x - \Phi_y + u\Phi_z$

3. 求下列函数的全微分(设其可微):

$$(1) u = f(x + y)$$

$$(2) u = f(x + y, x - y)$$

$$(3) u = f(ax^2 + by^2 + cz^2)$$

解:

$$(1) du = f'(x + y)(dx + dy)$$

$$(2) du = (f_1 + f_2)dx + (f_1 - f_2)dy$$

$$(3) du = 2f'(ax^2 + by^2 + cz^2)(ax dx + by dy + cz dz)$$

4. 验证下列各式:

$$(1) \text{ 设 } z = \varphi(x^2 + y^2), \text{ 则 } y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$(2) \text{ 设 } u = y\varphi(x^2 - y^2), \text{ 则 } y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xu}{y};$$

$$(3) \text{ 设 } u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y), \text{ 则 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

证明:

$$(1) \text{ 因 } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x\varphi'(x^2 + y^2), \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\varphi'(x^2 + y^2)$$

$$\text{则 } y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$(2) \text{ 因 } \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\varphi'(x^2 - y^2), \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x^2 - y^2) - 2y^2\varphi'(x^2 - y^2)$$

$$\text{则 } y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi(x^2 - y^2) = \frac{xu}{y}.$$

(3) 因 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x+y) + x\varphi'(x+y) + y\psi'(x+y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi'(x+y) + \psi(x+y) + y\psi'(x+y)$
 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\varphi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \varphi'(x+y) + \psi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y)$
 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\psi'(x+y) + x\varphi''(x+y) + y\psi''(x+y)$
 于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. 求 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$.

解: 因 $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + 2xf_2$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11} + 4xf_{12} + 4x^2f_{22} + 2f_2$

据对称性, 得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{11} + 4yf_{12} + 4y^2f_{22} + 2f_2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f_{11} + 4zf_{12} + 4z^2f_{22} + 2f_2$

于是 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3f_{11} + 4(x+y+z)f_{12} + 4(x^2+y^2+z^2)f_{22} + 6f_2$.

6. 若 $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, 其中 $f(r)$ 二次可微, 试证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

证明: 因 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} f'(r)$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} f'(r) + \frac{x^2}{x^2+y^2} f''(r)$

据对称性, 得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} f'(r) + \frac{y^2}{x^2+y^2} f''(r)$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$

7. 若 u, v 为 x, y 的函数, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 试由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

证明等式 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$.

证明: 因 u, v 为 x, y 的函数, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

则 $\frac{\partial u}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial y}$,

$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial v}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial v}{\partial y}$

又 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$.

8. 设 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, 则有

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

具有这样性质的函数, 称为 n 次齐次函数. 利用这结果, 对 $z = \sqrt{x^2+y^2}$, 求 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

证明: 因 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, 则两端对 t 求偏导, 得 $f_1(tx, ty)x + f_2(tx, ty)y = nt^{n-1}f(x, y)$

令 $t = 1$, 则 $f_1(x, y)x + f_2(x, y)y = nf(x, y)$ 即 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$

因 $z(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$, 则 $z(tx, ty) = t\sqrt{x^2+y^2} (t \geq 0)$

于是 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z = \sqrt{x^2+y^2}$.

9. 设 φ 与 ψ 是任意的二阶可导函数, 证明:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{满足 } x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{证明: 因 } \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} \psi'\left(\frac{y}{x}\right), \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{则 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} \varphi'' + \frac{2y}{x^3} \psi' + \frac{y^2}{x^4} \psi'', \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^2} \varphi'' - \frac{1}{x^2} \psi' - \frac{y}{x^3} \psi'', \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x} \varphi'' + \frac{1}{x^2} \psi''$$

$$\text{于是 } x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

10. 设 $u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$, 其中 φ, ψ 是任意的二次可微函数, 求证

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证明: 因 $u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$, φ, ψ 是任意的二次可微函数

$$\text{则 } \frac{\partial u}{\partial t} = a(\varphi' - \psi'), \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi' + \psi', \text{ 于是 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\varphi'' + \psi''), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'' + \psi''$$

$$\text{从而 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

§3. 由方程(组)所确定的函数的求导法

1. 求由下列方程所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的一阶和二阶的偏导数:

(1) $x + y + z = e^z$

(2) $xyz = x + y + z$

解:

(1) 两边关于 x 求导, 得 $1 + z_x = z_x e^z$, 则 $z_x = \frac{1}{e^z - 1}$, 于是 $z_{x^2} = \frac{e^z}{(1 - e^z)^3}$

同法可得, $z_y = \frac{1}{e^z - 1}$, $z_{y^2} = \frac{e^z}{(1 - e^z)^3}$, $z_{xy} = z_{yx} = \frac{e^z}{(1 - e^z)^3}$

(2) 两边关于 x 求导, 得 $yz + xyz_x = 1 + z_x$ (*), 则 $z_x = \frac{yz - 1}{1 - xy}$

将(*)式两边关于 x 求导, 得 $2yz_x + xyz_{x^2} = z_{x^2}$, 则 $z_{x^2} = \frac{2yz_x}{1 - xy} = \frac{2y(yz - 1)}{(xy - 1)^2}$

同法可得, $z_y = \frac{xz - 1}{1 - xy}$, $z_{y^2} = \frac{2x(xz - 1)}{(xy - 1)^2}$, $z_{xy} = z_{yx} = \frac{2z}{(xy - 1)^2}$

2. 求由下列方程所确定的函数的全微分或偏导数:

(1) $f(x + y, y + z, z + x) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) $z = f(xz, z - y)$, 求 dz ;

(3) $F(x - y, y - z, z - x) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $F(x, x + y, x + y + z) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解:

(1) 两边关于 x 求导, 且 $z = z(x, y)$, 得 $f_1 + f_2 z_x + f_3(z_x + 1) = 0$, 则 $z_x = -\frac{f_1 + f_3}{f_2 + f_3}$

同法可得, $z_y = -\frac{f_1 + f_2}{f_2 + f_3}$

(2) 两端微分, 得 $dz = (x dz + z dx)f_1 + (dz - dy)f_2$, 则 $dz = \frac{zf_1 dx - f_2 dy}{1 - xf_1 - f_2}$

(3) 两边关于 x 求导, 且 $z = z(x, y)$, 得 $F_1 - F_2 z_x + F_3(z_x - 1) = 0$, 则 $z_x = \frac{F_1 - F_3}{F_2 - F_3}$

同法可得, $z_y = \frac{F_2 - F_1}{F_2 - F_3}$

(4) 两边关于 x 求导, 且 $z = z(x, y)$, 得 $F_1 + F_2 + F_3(1 + z_x) = 0$ (*), 则 $z_x = -\frac{F_1 + F_2 + F_3}{F_3}$

在(*)式两边再关于 x 求导, 得

$$F_{11} + F_{12} + F_{13}(1 + z_x) + F_{21} + F_{22} + F_{23}(1 + z_x) + z_{x^2} F_3 + (1 + z_x)[F_{13} + F_{23} + F_{33}(1 + z_x)] = 0$$

则 $z_{x^2} = -\frac{1}{F_3^3} [F_3^2(F_{11} + 2F_{12} + F_{22}) - 2F_3(F_1 + F_2)(F_{13} + F_{23}) + F_{33}(F_1 + F_2)^2]$

同法可得, $z_y = -\frac{F_2 + F_3}{F_3}$

3. 设由方程 $z = x + y \cdot \varphi(z)$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 设 $1 - y\varphi'(z) \neq 0$, 证明

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

证明: 方程两端微分, 且 $z = z(x, y)$, 得 $dz = dx + \varphi(z) dy + y\varphi'(z) dz$

又 $1 - y\varphi'(z) \neq 0$, 则 $dz = \frac{dx + \varphi(z) dy}{1 - y\varphi'(z)}$

于是 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\varphi'(z)}$, 从而 $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$

4. 证明由方程 $ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$ 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程 $(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$, 其中 $\Phi(u)$ 是 u 的可微函数, a, b, c 为常数.

证明: 方程两端微分, 且 $z = z(x, y)$, $\Phi(u)$ 是 u 的可微函数

则得 $a dx + b dy + c dz = 2(x dx + y dy + z dz)\Phi'$

$$\text{于是 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x\Phi' - a}{c - 2z\Phi'}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y\Phi' - b}{c - 2z\Phi'}$$

$$\text{从而 } (cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

5. 设 φ 为任意的可微函数, 证明由方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$.

证明: 对方程两端分别关于 x, y 求导, 且 $z = z(x, y)$, 得

$$c\varphi_1 - a\varphi_1 z_x - b\varphi_2 z_x = 0, -a\varphi_1 z_y + c\varphi_2 - b\varphi_2 z_y = 0$$

$$\text{于是 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c\varphi_1}{a\varphi_1 + b\varphi_2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\varphi_2}{a\varphi_1 + b\varphi_2}$$

$$\text{从而 } a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

6. 证明由方程 $F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 满足 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

证明: 对方程两端分别关于 x, y 求导, 且 $z = z(x, y)$, 得

$$F_1\left(1 + \frac{z_x}{y}\right) + F_2\left(\frac{z_x}{x} - \frac{z}{x^2}\right) = 0, F_1\left(\frac{z_y}{y} - \frac{z}{y^2}\right) + F_2\left(1 + \frac{z_y}{x}\right) = 0$$

$$\text{于是 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yzF_2 - x^2yF_1}{x(xF_1 + yF_2)}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzF_1 - xy^2F_2}{y(xF_1 + yF_2)}$$

$$\text{从而 } x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

7. 求下列方程组所确定的函数的导数或偏导数或全微分:

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x \cdot y \cdot z = 1, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2};$$

$$(2) \begin{cases} x + y = u + v, \\ \frac{x}{y} = \frac{\sin u}{\sin v}, \end{cases} \text{ 求 } du, dv;$$

$$(3) \begin{cases} xu + yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y};$$

$$(4) \begin{cases} x = \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \sin \theta, \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$(5) \begin{cases} u = f(u, x, v + y), \\ v = g(u - x, u^2 \cdot y), \end{cases} \text{ 求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}.$$

解:

$$(1) \text{ 对 } x \text{ 求导, 得 } \begin{cases} 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0 \\ yz + xz\frac{dy}{dx} + xy\frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{联立求解, 得 } \frac{dy}{dx} = \frac{y(z-x)}{x(y-z)}, \frac{dz}{dx} = \frac{z(x-y)}{x(y-z)}$$

$$(*) \text{ 式再对 } x \text{ 求导, 得 } \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \\ z\frac{dy}{dx} + y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} + xz\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dz}{dx} + x\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} + xy\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{联立, 得 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2z\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dz}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx}}{x(y-z)}$$

$$\text{将 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \text{ 代入, 得 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{yz[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2]}{x^2(z-y)^3}$$

(2) 将原式改写为 $\begin{cases} u+v=x+y \\ y \sin u = x \sin v \end{cases}$ 微分, 得 $\begin{cases} du+dv=dx+dy \\ \sin u dy + y \cos u du = \sin v dx + x \cos v dv \end{cases}$

则 $du = \frac{1}{x \cos v + y \cos u} [(\sin v + x \cos v) dx - (\sin u - x \cos v) dy]$

$dv = \frac{1}{x \cos v + y \cos u} [-(\sin v - y \cos u) dx + (\sin u + y \cos u) dy]$

(3) 微分, 得 $\begin{cases} x du + y dv = -u dx - v dy \\ y du + x dv = -v dx - u dy \end{cases}$

于是 $du = \frac{1}{x^2 - y^2} [(yv - xu) dx + (yu - xv) dy]$, $dv = \frac{1}{x^2 - y^2} [(yu - xv) dx + (yv - xu) dy]$

则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yv - xu}{x^2 - y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{yu - xv}{x^2 - y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 - y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{yv - xu}{x^2 - y^2}$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(yu_x - v - xv_x)(x^2 - y^2) - 2x(yu - xv)}{(x^2 - y^2)^2}$

将 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入, 得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2(x^2 v + y^2 v - 2xyu)}{(x^2 - y^2)^2}$

(4) 由 x, y 对 x 求偏导数, 得 $\begin{cases} 1 = -\sin \theta \cdot \cos \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos \theta \cdot \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 = -\sin \theta \cdot \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos \theta \cdot \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}$

则 $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \theta}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \theta}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\cot \theta \cos \varphi = -\frac{x}{z}$

同理可得, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$

(5) 对 x 求偏导, 得 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f_2 + f_3 \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = g_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1 \right) + 2vyg_2 \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f_2(1 - 2vyg_2) - g_1 f_3}{(f_1 - 1)(2vyg_2 - 1) - g_1 f_3}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g_1(f_1 + f_2 - 1)}{(f_1 - 1)(2vyg_2 - 1) - g_1 f_3}$.

8. 方程 $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$ 定义 z 为 x, y 的函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解: 因 $x^2 - y = 2uv$, 则 $z = (u + v)(u^2 - uv + v^2) = \frac{x}{2}(3y - x^2)$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}(y - x^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}x$.

9. 设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 变换方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2) \end{cases}$$

为极坐标方程.

解: 由方程知, x, y 是 t 的函数, 从极坐标变换知 r, θ 也是 t 的函数, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

两端对 t 求导, 得 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$

将 $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 代入原方程组, 得 $\begin{cases} \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = r \sin \theta + kr \cos \theta \cdot r^2 \\ \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -r \cos \theta + kr \sin \theta \cdot r^2 \end{cases}$

于是 $\frac{dr}{dt} = kr^3, \frac{d\theta}{dt} = -1$.

10. 设 $x = e^u \cos \theta, y = e^u \sin \theta$, 变换方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

解: 因 $x = e^u \cos \theta, y = e^u \sin \theta$, 则 $u = \ln(x^2 + y^2), \theta = \arctan \frac{y}{x}$

则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$, 于是 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \theta}{\partial x}$

又 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$

又 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

同法可得, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$

则 $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

又 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2$, $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2u} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) = 0$

即 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$.

11. 设 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则 $f(x, y) = \Phi(r, \theta)$, 用 Φ 关于 r, θ 的偏导数来表示 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解: 将 $f(x, y) = \Phi(r, \theta)$ 关于 r, θ 求偏导, 得

$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ 即 $\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$

$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$ 即 $-\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$

则 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin 2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta$

$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = r^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin^2 \theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin 2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \theta \right) - \frac{\partial f}{\partial x} r \cos \theta - \frac{\partial f}{\partial y} r \sin \theta$

于是 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$

从而 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$

12. 设 $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, 变换方程 $ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (a, b, c 为常数).

解: 因 $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, 则 $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$, 于是 $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{d\eta}{dy} = \frac{1}{y}$

则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial \eta}$

于是 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$

代入原方程, 化简整理, 得 $a \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + c \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = 0$.

13. 设 $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$, 变换方程 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

解: 由方程知 z 是 x, y 的函数, 而 ξ, η 又是 x, y 的函数, 从而 z 可看成是通过中间变量 ξ, η 关于 x, y 的复合函数

于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial z}{\partial \eta}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial \eta}$

因而 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y \frac{\partial z}{\partial \xi}$

因 $y \neq 0$, 则由 $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得 $\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$.

14. 设 $\xi = x, \eta = y - x, \zeta = z - x$, 变换方程 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

解: 由方程知 u 是 x, y, z 的函数, 而 ξ, η, ζ 又是 x, y, z 的函数, 从而 u 可看成是通过中间变量 ξ, η, ζ 关于 x, y, z 的复合函数

$$\text{于是 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

$$\text{则由 } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ 得 } \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

15. 设线性变换 $\xi = x + \lambda_1 y, \eta = x + \lambda_2 y$, 现在要把方程 $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (A, B, C 为常数,

且 $AC - B^2 < 0$) 变换为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, 证明 λ_1, λ_2 为方程 $C\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0$ 的两个相异实根.

证明: 由方程知 u 是 x, y 的函数, 因而可以把 u 视为以 ξ, η 为中间变量的关于 x, y 的复合函数, 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\text{因而 } A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} (A + 2B\lambda_1 + C\lambda_1^2) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} [A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1 \lambda_2] + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} (A + 2B\lambda_2 + C\lambda_2^2) = 0$$

$$\text{要使 } A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ 变换为 } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ 必须 } \begin{cases} A + 2B\lambda_1 + C\lambda_1^2 = 0 \\ A + 2B\lambda_2 + C\lambda_2^2 = 0 \\ A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \end{cases}$$

由前两个方程, 得 λ_1, λ_2 是方程 $C\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0$ 的根

而由第三个方程, 得 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 λ_1, λ_2 是 $C\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0$ 的两个相异实根

$$\text{又因 } \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2B}{C}, \lambda_1 \lambda_2 = \frac{A}{C}, \text{ 则 } A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1 \lambda_2 = \frac{2}{C} (AC - B^2) \neq 0$$

$$\text{于是方程 } A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ 在线性变换 } \xi = x + \lambda_1 y, \eta = x + \lambda_2 y \text{ 下确实变换为 } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

且 λ_1, λ_2 为方程 $C\lambda^2 + 2B\lambda + A = 0$ 的两个相异实根.

16. 证明拉普拉斯方程 $\Delta w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ 在变化 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ (它们满足 $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$) 下

形状保持不变.

证明: 从方程知 w 是 x, y 的函数, x, y 是 u, v 的函数, 则 w 是以 x, y 为中间变量的 u, v 的函数

$$\text{于是 } \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$$

$$\text{注意非退化条件 } \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}, \text{ 则 } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}$$

将 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$ 相加, 并将上述各式代入, 得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right]$$

$$\text{因 } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ 则 } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

这表明拉普拉斯方程 $\Delta w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ 在变化 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ 下形状保持不变.

17. 设 $\xi = x - at, \eta = x + at$, 变换方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解: 由方程知 u 是 t, x 的函数, ξ, η 也是 t, x 的函数, 故可将 u 视为以 ξ, η 为中间变量的关于 t, x 的函数

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{\partial u}{\partial t} &= -a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\text{于是由 } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 得 } 4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

$$\text{又 } a \neq 0, \text{ 则 } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

18. 作自变量和因变量的变换, 取 u, v 为新的自变数, $w = w(u, v)$ 为新的因变数:

$$(1) \text{ 设 } u = x^2 + y^2, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, w = \ln z - (x + y), \text{ 变换方程}$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x) \cdot z$$

$$(2) \text{ 设 } u = x + y, v = \frac{y}{x}, w = \frac{z}{x}, \text{ 变换方程}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$(3) \text{ 设 } x = u, y = \frac{u}{1 + uv}, z = \frac{u}{1 + u \cdot w}, \text{ 变换方程}$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

$$(4) \text{ 设 } u = \frac{x}{y}, v = x, w = xz - y, \text{ 变换方程}$$

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$$

解:

$$(1) \text{ 由已知, 得 } du = 2x dx + 2y dy, dv = -\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy, dw = \frac{1}{z} dz - dx - dy$$

$$\text{另一方面, } dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$$

$$\text{则 } \frac{1}{z} dz - dx - dy = \frac{\partial w}{\partial u} (2x dx + 2y dy) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(-\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy \right)$$

$$\text{整理, 得 } dz = \left(2xz \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + z \right) dx + \left(2yz \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + z \right) dy$$

$$\text{将上式所确定的 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 代入原方程, 得 } z \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right) \frac{\partial w}{\partial v} = 0$$

$$\text{又 } z \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right) \neq 0, \text{ 则 } \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

$$(2) \text{ 由已知, 得 } du = dx + dy, dv = -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy, dw = -\frac{z}{x^2} dx + \frac{1}{x} dz$$

$$\text{另一方面, } dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$$

$$\text{则 } -\frac{z}{x^2} dx + \frac{1}{x} dz = \frac{\partial w}{\partial u} (dx + dy) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right)$$

$$\text{整理, 得 } dz = \left(x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x} \right) dx + \left(x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) dy$$

$$\text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x}, \frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } R &= \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = w - (1+v) \frac{\partial w}{\partial v} \\ \text{则 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ \frac{\partial R}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial v} \left[w - (1+v) \frac{\partial w}{\partial v} \right] \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{(1+v)^2}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \\ \text{因 } \frac{(1+v)^2}{x} &\neq 0, \text{ 则原方程变为 } \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 因 } x = u, y = \frac{u}{1+uv}, z = \frac{u}{1+u \cdot w}, \text{ 则 } u = x, v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$$

$$\text{于是 } \mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \mathrm{d}v = \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x - \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y, \mathrm{d}w = \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x - \frac{1}{z^2} \mathrm{d}z$$

$$\text{另一方面, } \mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial u} \mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v} \mathrm{d}v$$

$$\text{则 } \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x - \frac{1}{z^2} \mathrm{d}z = \frac{\partial w}{\partial u} \mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{1}{x^2} \mathrm{d}x - \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \right)$$

$$\text{整理, 得 } \mathrm{d}z = z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \right) \mathrm{d}x + \frac{z^2}{y^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \mathrm{d}y$$

$$\text{将上式所确定的 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 代入原方程, 得 } x^2 z^2 \frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

$$\text{又 } xz \neq 0, \text{ 则 } \frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

$$(4) \text{ 因 } u = \frac{x}{y}, v = x, w = xz - y, \text{ 则 } \frac{\partial w}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial y} - 1, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{于是 } \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u}, \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\text{于是 } y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x} + \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{2}{x}$$

$$\text{又 } \frac{x}{y^3} \neq 0, \text{ 则原方程变换为 } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0.$$

§4. 空间曲线的切线与法平面

1. 求下列曲线在所示点处的切线与法平面:

(1) $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cdot \cos t, z = c \cos^2 t$, 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处;

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$, 在点 $(1, -2, 1)$.

解:

(1) $x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{b}{2}, z_0 = \frac{c}{2}, x'(t_0) = a, y'(t_0) = 0, z'(t_0) = -c$

则曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的切线方程为 $\begin{cases} \frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1 \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$

法平面方程为 $a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0$ 即 $ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$.

(2) 因 $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} \Big|_{(1, -2, 1)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big|_{(1, -2, 1)} = -6, \frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)} \Big|_{(1, -2, 1)} = \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big|_{(1, -2, 1)} = 0,$

$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} \Big|_{(1, -2, 1)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Big|_{(1, -2, 1)} = 6$

则曲线在点 $(1, -2, 1)$ 的切线方程为 $\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

法平面方程为 $x - z = 0$.

2. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求出一點, 使此点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.

解: 设所求点为 (t_0, t_0^2, t_0^3) , 则 $x'(t_0) = 1, y'(t_0) = 2t_0, z'(t_0) = 3t_0^2$

于是曲线的切线方向矢量为 $\mathbf{v} = \{1, 2t_0, 3t_0^2\}$

又平面法向量 $\mathbf{n} = \{1, 2, 1\}$, 则据题意, 应有 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 1 + 4t_0 + 3t_0^2 = 0$, 于是 $t_0 = -1, t_0 = -\frac{1}{3}$

则所求点为 $(-1, 1, -1), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right)$.

3. 证明曲线 $x = ae^t \cos t, y = ae^t \sin t, z = ae^t$ 与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的母线相交成同一角.

证明: 将 x, y, z 代入 $x^2 + y^2 = z^2$, 得 $a^2 e^{2t} \cos^2 t + a^2 e^{2t} \sin^2 t = a^2 e^{2t} = z^2$, 则曲线应在曲面上

圆锥 $x^2 + y^2 = z^2$ 的顶点在原点, 过圆锥上任一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的母线也过原点

则母线的方向矢量为 $\mathbf{v}_1 = \{x_0, y_0, z_0\}$

又曲线在点 P 的切向量为 $\mathbf{v}_2 = \{ae^{t_0}(\cos t_0 - \sin t_0), ae^{t_0}(\sin t_0 + \cos t_0), ae^{t_0}\} = \{x_0 - y_0, x_0 + y_0, z_0\}$

$x_0^2 + y_0^2 = z_0^2$

则 $\cos(\widehat{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}) = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 这与曲线上点 (x, y, z) 的位置没有关系

因而曲线与锥面的母线相交成同一角.

4. 求下列各曲线在所示点的切线的方向余弦:

(1) $x = t^2, y = t^3, z = t^4$, 在 $t = 1$ 的点上;

(2) $xyz = 1, y^2 = x$, 在点 $(1, 1, 1)$.

解:

(1) 因 $x'(t_0) = 2, y'(t_0) = 3, z'(t_0) = 4$, 则切向量为 $\{2, 3, 4\}$

于是方向余弦为: $\cos \alpha = \pm \frac{2}{29} \sqrt{29}, \cos \beta = \pm \frac{3}{29} \sqrt{29}, \cos \gamma = \pm \frac{4}{29} \sqrt{29}$.

(2) 因 $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} \Big|_{(1, 1, 1)} = \begin{vmatrix} xz & xy \\ -2y & 0 \end{vmatrix} \Big|_{(1, 1, 1)} = 2, \frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)} \Big|_{(1, 1, 1)} = \begin{vmatrix} xy & yz \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Big|_{(1, 1, 1)} = 1,$

$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} \Big|_{(1, 1, 1)} = \begin{vmatrix} yz & xz \\ 1 & -2y \end{vmatrix} \Big|_{(1, 1, 1)} = -3$, 则切向量为 $\{2, 1, -3\}$

于是方向余弦为: $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{14}}{7}, \cos \beta = \pm \frac{\sqrt{14}}{14}, \cos \gamma = \pm \frac{3}{14} \sqrt{14}$.

§5. 曲面的切平面与法线

1. 求下列曲面在所示点的切平面及法线方程:

(1) $x = a \sin \varphi \cos \theta, y = a \sin \varphi \sin \theta, z = a \cos \varphi$, 在 (θ_0, φ_0) ;

(2) $e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}} = 4$, 在点 $(\ln 2, \ln 2, 1)$;

(3) $z = 2x^2 + 4y^2$, 在点 $(2, 1, 12)$;

(4) $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$, 在点 (x_0, y_0, z_0) .

解:

(1) 因 $\left. \frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)} \right|_{(\theta_0, \varphi_0)} = \begin{vmatrix} a \sin \varphi \cos \theta & a \cos \varphi \sin \theta \\ 0 & -a \sin \varphi \end{vmatrix} \bigg|_{(\theta_0, \varphi_0)} = -a \sin^2 \varphi_0 \cos \theta_0,$

$\left. \frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)} \right|_{(\theta_0, \varphi_0)} = -a^2 \sin^2 \varphi_0 \sin \theta_0, \left. \frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)} \right|_{(\theta_0, \varphi_0)} = -a^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$

则切平面方程为 $\sin \varphi_0 \cos \theta_0 x + \sin \varphi_0 \sin \theta_0 y + \cos \varphi_0 z = a$

法线方程为 $\frac{x - a \sin \varphi_0 \cos \theta_0}{\sin \varphi_0 \cos \theta_0} = \frac{y - a \sin \varphi_0 \sin \theta_0}{\sin \varphi_0 \sin \theta_0} = \frac{z - a \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0}.$

(2) 因在 $(\ln 2, \ln 2, 1)$ 点 $f_x = 2, f_y = 2, f_z = -\ln 16$

则切平面方程为 $x + y - 2 \ln 2 \cdot z = 0$; 法线方程为 $\frac{x - \ln 2}{1} = \frac{y - \ln 2}{1} = \frac{z - 1}{-2 \ln 2}.$

(3) 因 $z_x(2, 1) = 8, z_y(2, 1) = 8$

则切平面方程为 $8x + 8y - z = 12$; 法线方程为 $\frac{x - 2}{8} = \frac{y - 1}{8} = \frac{z - 12}{-1}.$

(4) 因在 (x_0, y_0, z_0) 点 $f_x = 2ax_0, f_y = 2by_0, f_z = 2cz_0$

则切平面方程为 $ax_0x + by_0y + cz_0z + d = 0$; 法线方程为 $\frac{x - x_0}{ax_0} = \frac{y - y_0}{by_0} = \frac{z - z_0}{cz_0}.$

2. 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使这点的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$, 并写出此法线方程.

解: 过曲面上任一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的 $\mathbf{n}_1 = \{y_0, x_0, -1\}$, 法线的切向量为 $\mathbf{n}_2 = \{1, 3, 1\}$

要使法线垂直于上述平面, 则 $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2$ 即 $\frac{-y}{1} = \frac{-x}{3} = \frac{1}{1}$

于是所求点为 $(-3, -1, 3)$, 则法线方程为 $\frac{x + 3}{1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 3}{1}.$

3. 证明曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, ($a > 0$) 上任何一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a .

证明: 在曲面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

则曲面在该点的切平面方程为 $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$

即 $\sqrt{y_0 z_0}(x - x_0) + \sqrt{x_0 z_0}(y - y_0) + \sqrt{x_0 y_0}(z - z_0) = 0$

于是切平面在坐标轴上的截距分为 $\sqrt{ax_0}, \sqrt{ay_0}, \sqrt{az_0}$, 其和为 $\sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a$.

4. 求两曲面 $x^2 + y^2 = a^2, bz = xy$ 的交角.

解: 设两曲面任一交点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

此两曲面在 M_0 点的法向量为 $\mathbf{n}_1 = \{2x_0, 2y_0, 0\}, \mathbf{n}_2 = \{y_0, x_0, -b\}$

于是交角 φ 满足 $\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{2bx_0}{|a|\sqrt{a^2 + b^2}}.$

§6. 方向导数和梯度

1. 求 $u = x^2 - xy + y^2$ 在 $(1, 1)$ 处沿方向 $\mathbf{l} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的方向导数. 并进一步求:

- (1) 在哪个方向上其导数有最大值;
- (2) 在哪个方向上其导数有最小值;
- (3) 在哪个方向上其导数为0;
- (4) 求 u 的梯度.

解: 因 $u_x = 2x - y, u_y = -x + 2y$, 则 $u_x(1, 1) = 1, u_y(1, 1) = 1$

又 $\frac{\partial u}{\partial l} = u_x(1, 1) \cos \alpha + u_y(1, 1) \sin \alpha$, 则 $\frac{\partial u}{\partial l} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$

于是

- (1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, 在方向 $\mathbf{l} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 上其导数有最大值 $\sqrt{2}$;
- (2) 当 $\alpha = -\frac{3}{4}\pi$ 时, 在方向 $\mathbf{l} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 上其导数有最小值 $-\sqrt{2}$;
- (3) 当 $\alpha = -\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ 时, 在方向 $\mathbf{l} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 或 $\mathbf{l} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 上其导数为0;
- (4) $\text{grad} u = u_x(1, 1)\mathbf{i} + u_y(1, 1)\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

2. 求 $u = xyz$ 在点 $M(1, 1, 1)$, 沿 $\mathbf{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数及梯度.

解: 因 $u_x = yz, u_y = xz, u_z = xy$, 则在 $(1, 1, 1)$ 点 $u_x = u_y = u_z = 1$

又向量 \mathbf{l} 的方向余弦 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{14}}, \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$

则 $\frac{\partial u}{\partial l} = u_x(1, 1, 1) \cos \alpha + u_y(1, 1, 1) \cos \beta + u_z(1, 1, 1) \cos \gamma = \frac{2}{7} \sqrt{14}$; $\text{grad} u = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3. 求数量函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ 在 $O(0, 0, 0)$ 及 $A(1, 1, 1)$ 的梯度及其大小.

解: 因 $u_x = 2x + y + 3, u_y = 4y + x - 2, u_z = 6z - 6$

则在 $O(0, 0, 0)$ 点: $u_x = 3, u_y = -2, u_z = -6$, 于是 $\text{grad} u = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, |\text{grad} u| = 7$

在 $A(1, 1, 1)$ 点: $u_x = 6, u_y = 3, u_z = 0$, 于是 $\text{grad} u = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, |\text{grad} u| = 3\sqrt{5}$.

4. 证明:

- (1) $\text{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \text{grad} u + \beta \text{grad} v$, 其中 α, β 都是常数;
- (2) $\text{grad}(uv) = u \text{grad} v + v \text{grad} u$;
- (3) $\text{grad} F(u) = F'(u) \text{grad} u$

证明: 以二元函数为例来证. 令 $u = u(x, y), v = v(x, y)$

$$(1) \text{ 因 } \frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial y} = \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{则 } \text{grad}(\alpha u + \beta v) = \left(\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x}, \frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial y} \right) = \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \alpha \text{grad} u + \beta \text{grad} v.$$

$$(2) \text{ 因 } \frac{\partial(uv)}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial(uv)}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{则 } \text{grad}(uv) = \left(\frac{\partial(uv)}{\partial x}, \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) = v \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = u \text{grad} v + v \text{grad} u.$$

$$(3) \text{ grad} F(u) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \left(F'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, F'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F'(u) \text{grad} u$$

多元函数可仿二元函数证之.

5. 证明 $\text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

证明: 因 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$$\text{则 } \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \text{grad} r = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

6. 设数量函数 $u = \ln \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, 在空间中哪些点上成立 $|\text{gradu}| = 1$?

解: 因 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r}$

$$\text{则 } \text{gradu} = \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \text{grad} r = -\frac{1}{r} \left(\frac{x-a}{r} \mathbf{i} + \frac{y-b}{r} \mathbf{j} + \frac{z-c}{r} \mathbf{k} \right) = -\frac{1}{r^2} [(x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}]$$

于是 $|\text{gradu}| = \frac{1}{r} = 1$, 则 $r = 1$ 即 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$

这表明在以 (a, b, c) 为球心, 半径为 1 的球面上成立 $|\text{gradu}| = 1$.

§7. 泰勒公式

1. 写出点 $(1, -2)$ 附近函数 $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 的泰勒公式.

解: 因 $f_x = 4x - y - 6, f_y = -x - 2y - 3, f_{x^2} = 4, f_{xy} = -1, f_{y^2} = -2$, 所有三阶偏导均为0

则在点 $(1, -2)$, $f = 5, f_x = 0, f_y = 0, f_{x^2} = 4, f_{xy} = -1, f_{y^2} = -2$

于是 $f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

2. 按 x 及 y 的乘幂展开函数 $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$ 到三项为止.

解: 因 $f_x = e^x \ln(1+y), f_y = \frac{e^x}{1+y}, f_{x^2} = e^x \ln(1+y), f_{y^2} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}, f_{xy} = \frac{e^x}{1+y}$

$f_{x^3} = e^x \ln(1+y), f_{y^3} = \frac{2e^x}{(1+y)^3}, f_{xy^2} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}, f_{yx^2} = \frac{e^x}{1+y}$

则在点 $(0, 0)$ 处, $f = 0, f_x = f_{x^2} = f_{x^3} = 0, f_y = 1, f_{xy} = 1, f_{y^2} = -1, f_{xy^2} = -1, f_{yx^2} = 1, f_{y^3} = 2$

于是 $f(x, y) = y + xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3$.

第十五章 极值和条件极值

§1. 极值和最小二乘法

1. 求下列函数的极值:

$$(1) z = x^2 - (y-1)^2$$

$$(2) z = (x-y+1)^2$$

$$(3) z = 3axy - x^3 - y^3 \quad (a > 0)$$

$$(4) z = \sin x + \cos y + \cos(x-y) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(5) z = xy \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b > 0)$$

解:

$$(1) \text{ 令 } z_x = 2x = 0, z_y = -2(y-1) = 0$$

则得 $x=0, y=1$, 于是点 $(0, 1)$ 为可能极值点

又 $z_{x^2} = 2, z_{xy} = 0, z_{y^2} = -2$, 则 $A = 2, B = 0, C = -2$, 于是 $H = -4 < 0$, 从而此函数无极值.

$$(2) \text{ 令 } z_x = 2(x-y+1) = 0, z_y = -2(x-y+1) = 0$$

则当点分布在 $x-y+1=0$ 上时, 函数可能有极值

又 $A = 2, B = -2, C = 2$, 则 $H = 0$, 故需进一步判断

因对直线 $x-y+1=0$ 上的点均有 $z=0$, 且 $z \geq 0$ 恒成立

则函数 z 在直线 $x-y+1=0$ 上各点取得极小值 $z=0$.

$$(3) \text{ 令 } z_x = 3ay - 3x^2 = 0, z_y = 3ax - 3y^2 = 0$$

则得 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = a \\ y_2 = a \end{cases}$ 即在点 $(0, 0), (a, a)$ 处可能有极值

又 $z_{x^2} = -6x, z_{xy} = 3a, z_{y^2} = -6y$

则在点 $(0, 0)$, $A = 0, B = 3a, C = 0$, 于是 $H = -9a^2 < 0$, 此时函数无极值;

在点 (a, a) , $A = -6a < 0, B = 3a, C = -6a$, 于是 $H = 27a^2 > 0$, 此时函数有极大值 $z = a^3$.

$$(4) \text{ 令 } z_x = \cos x - \sin(x-y) = 0, z_y = -\sin y + \sin(x-y) = 0$$

则得 $\cos x = \sin y$, 于是 $y = \frac{\pi}{2} - x$, 故 $\cos x - \sin(x-y) = \cos x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3}{2}x = 0$

因 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $\cos \frac{x}{2} \neq 0, \cos \frac{3}{2}x = 0$, 于是 $x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}$, 即在点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 处可能有极值

又 $z_{x^2} = -\sin x - \cos(x-y), z_{xy} = \cos(x-y), z_{y^2} = -\cos y - \cos(x-y)$

则 $A = -\sqrt{3} < 0, B = \frac{\sqrt{3}}{2}, C = -\sqrt{3}$, 于是 $H = \frac{9}{4} > 0$, 即在点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 处函数有极大值 $z = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$$(5) \text{ 令 } z_x = y \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{x^2 y}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0, z_y = x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{xy^2}{b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0$$

$$\text{则得 } \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y_2 = \frac{b}{\sqrt{3}} \end{cases} \begin{cases} x_3 = -\frac{a}{\sqrt{3}} \\ y_3 = -\frac{b}{\sqrt{3}} \end{cases} \begin{cases} x_4 = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y_4 = -\frac{b}{\sqrt{3}} \end{cases} \begin{cases} x_5 = -\frac{a}{\sqrt{3}} \\ y_5 = \frac{b}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

于是在点 $P_1(0, 0), P_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), P_3\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right), P_4\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right), P_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 处可能取极值

$$\text{又 } z_{x^2} = \frac{-3a^2b^2xy + 2b^2x^3y + 3a^2xy^3}{a^4b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, z_{xy} = \frac{a^4b^4 - 3a^2b^4x^2 + 2b^4x^4 - 3a^4b^2y^2 + 3a^2b^2x^2y^2 + 2a^4y^4}{a^4b^4\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{y^2} = \frac{3b^2x^3y - 3a^2b^2xy + 2a^2xy^3}{a^2b^4\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

在点 $P_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right), P_3\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 处, $A = -\frac{4\sqrt{3}b}{3a} < 0, B = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, C = -\frac{4\sqrt{3}a}{3b}$

此时 $H = 4 > 0$, 于是函数有极大值 $z = \frac{\sqrt{3}}{9}ab$;

在点 $P_4\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right), P_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 处, $A = \frac{4\sqrt{3}b}{3a} > 0, B = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, C = \frac{4\sqrt{3}a}{3b}$

此时 $H = 4 > 0$, 于是函数有极小值 $z = -\frac{\sqrt{3}}{9}ab$;

在点 $P_1(0, 0)$ 处, $A = 0, B = 1, C = 0$, 此时 $H = -1 < 0$, 于是函数无极值.

2. 证明函数 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值, 但无极小值.

证明: 令 $z_x = -(1 + e^y) \sin x = 0$ $z_y = e^y \cos x - e^y - ye^y = 0$

因 $1 + e^y \neq 0$, 则 $\sin x = 0$, 于是 $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

又 $e^y \neq 0$, 则 $\cos x - 1 - y = 0$ 即有 $y = \cos x - 1$

当 k 为偶数时, $y = 0$; 当 k 为奇数时, $y = -2$, 则可能的极值点为 $\begin{cases} x_1 = 2k\pi \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = (2k+1)\pi \\ y_2 = -2 \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

又 $z_{x^2} = -(1 + e^y) \cos x, z_{xy} = -e^y \sin x, z_{y^2} = e^y \cos x - 2e^y - ye^y$

则在点 $(2k\pi, 0)$, $A = -2 < 0, B = 0, C = -1$, 此时 $H = 2 > 0$, 则此时函数有极大值 $z = 2$

在点 $((2k+1)\pi, -2)$, $A = 1 + \frac{1}{e^2}, B = 0, C = -\frac{1}{e^2}$, 此时 $H = -\frac{1}{e^2}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right) < 0$, 则此时函数无极值

综上所述, 函数 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值, 但无极小值.

3. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中求出面积最大的三角形.

解: 设三角形的边长分别为 x, y, z , 则 $C = x + y + z = 2p$, $D = \frac{x + y + z}{2} = p$, 于是 $z = 2p - x - y$

则 $S = \sqrt{D(D-x)(D-y)(D-z)} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$

考虑函数 $u = S^2 = p(p-x)(p-y)(x+y-p)$, $0 < x, y < p$

S 的极值均为 u 的极值且当 u 在点 (x, y) 取得的极值不为 0 时, S 也在点 (x, y) 取得极值

令 $u_x = p(p-y)(2p-2x-y) = 0, u_y = p(p-x)(2p-x-2y) = 0$

因 $p \neq 0, 0 < x, y < p$, 则解得 $x = y = \frac{2}{3}p$, 于是 $z = \frac{2}{3}p$

则当 $x = y = z = \frac{2}{3}p$ 时, u 有极值即 S 有极值

从而当 $x = y = z = \frac{2}{3}p$ 时, 面积最大且值为 $S = \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$.

4. 曲面 $z = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}$ 在何处有最高点或最低点?

解: 由 $\begin{cases} z_x = x - 4y + 3 = 0 \\ z_y = -4x + 18y - 14 = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 即在点 $(1, 1)$ 可能有极值

又 $z_{x^2} = 1, z_{xy} = -4, z_{y^2} = 18$, 则 $A = 1 > 0, B = -4, C = 18$, 于是 $H = 2 > 0$

则此时函数有极小值 $z = -5$, 从而曲面有最低点 $(1, 1, -5)$

又当 $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ 时, $z \rightarrow +\infty$, 故曲面无最高点.

5. 已知 $y = ax^2 + bx + c$, 现测得一组数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, 利用最小二乘法, 求系数 a, b, c 所满足的三元一次方程组.

解: 由已知, 得 $\varepsilon = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$, 为使总偏差 $\varepsilon(a, b, c)$ 达到最小, 由极值的必要条件, 有

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0$$

$$\text{即 } a, b, c \text{ 满足下列三元一次方程组: } \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^4\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right)b + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)c = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)b + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)c = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b + nc = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

6. 曲线 $y = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上要用什么样的直线 $\eta = ax + b$ 来代替, 才能使它的平方误差的积分

$$J(a, b) = \int_0^1 (y - \eta)^2 dx \text{ 为极小的意义下为最佳近似?}$$

解: $J(a, b) = \int_0^1 (y - \eta)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \frac{1}{5} + \frac{a^2}{3} + b^2 - \frac{a}{2} - \frac{2}{3}b + ab$

为了选择 a, b 使平方误差的积分 $J(a, b)$ 达到极小, 由极值的必要条件, 有

$$\text{令 } \frac{\partial J}{\partial a} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}a + b = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = -\frac{2}{3} + a + 2b = 0$$

$$\text{则 } a = 1, b = -\frac{1}{6}$$

于是曲线 $y = x^2$ 用直线 $\eta = x - \frac{1}{6}$ 来代替, 可达到最佳近似的要求.

§2. 条件极值

1. 求下列函数在所给条件下极值:

(1) $f = x + y$, 若 $x^2 + y^2 = 1$;

(2) $f = x - 2y + 2z$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(3) $f = xyz$, 若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ ($x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$);

(4) $f = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, 若 $x + y = 2$;

(5) $f = xyz$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

解:

(1) 作函数 $L = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

又 $L_{x^2} = 2\lambda, L_{xy} = 0, L_{y^2} = 2\lambda$

则 $d^2L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}(dx^2 + dy^2) < 0$, 于是函数在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处取得极大值 $\sqrt{2}$;

同理可得, 函数在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处取得极小值 $-\sqrt{2}$.

(2) 作函数 $L = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -2 + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2 + 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ y_1 = -\frac{2}{3} \\ z_1 = \frac{2}{3} \\ \lambda_1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \\ z_2 = -\frac{2}{3} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

又 $L_{x^2} = L_{y^2} = L_{z^2} = 2\lambda, L_{xy} = L_{xz} = L_{yz} = 0$

则 $d^2L(x_2, y_2, z_2) = 3(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$, 于是函数在 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 处取得极小值 -3 ;

同理可得, 函数在 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 处取得极大值 3 .

(3) 作函数 $L = xyz + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} L_x = yz - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ L_y = xz - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ L_z = xy - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ L_\lambda = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a} = 0 \end{cases}, \text{得} x = y = z = 3a, \lambda = 81a^4$$

又 $L_{x^2}(3a, 3a, 3a) = L_{y^2}(3a, 3a, 3a) = L_{z^2}(3a, 3a, 3a) = 6a$,

$L_{xy}(3a, 3a, 3a) = L_{xz}(3a, 3a, 3a) = L_{yz}(3a, 3a, 3a) = 3a$

则 $d^2L(3a, 3a, 3a) = 3a[(dx + dy + dz)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2] > 0$, 于是函数在 $(3a, 3a, 3a)$ 处取得极小值 $27a^3$.

(4) 作函数 $L = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(x + y - 2)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} L_x = -\frac{1}{x^2} + \lambda = 0 \\ L_y = -\frac{1}{y^2} + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y - 2 = 0 \end{cases}, \text{得 } x = y = \lambda = 1$$

又 $L_{x^2}(1, 1) = L_{y^2}(1, 1) = 2, L_{xy}(1, 1) = 0$

则 $d^2L(1, 1) = 2(dx^2 + dy^2) > 0$, 于是函数在 $(1, 1)$ 处取得极小值 2.

(5) 作函数 $L = xyz + u(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + v(x + y + z)$

$$\text{解方程组} \begin{cases} L_x = yz + 2ux + v = 0 \\ L_y = xz + 2uy + v = 0 \\ L_z = xy + 2uz + v = 0 \\ L_u = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ L_v = x + y + z = 0 \end{cases}, \text{得}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ y_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ u_1 = \frac{\sqrt{6}}{12} \\ v_1 = \frac{1}{6} \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ z_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ u_2 = -\frac{\sqrt{6}}{12} \\ v_2 = \frac{1}{6} \end{cases} \begin{cases} x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ y_3 = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ z_3 = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ u_3 = \frac{\sqrt{6}}{12} \\ v_3 = \frac{1}{6} \end{cases} \begin{cases} x_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ y_4 = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ z_4 = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ u_4 = -\frac{\sqrt{6}}{12} \\ v_4 = \frac{1}{6} \end{cases} \begin{cases} x_5 = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ y_5 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ z_5 = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ u_5 = \frac{\sqrt{6}}{12} \\ v_5 = \frac{1}{6} \end{cases} \begin{cases} x_6 = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ z_6 = -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ u_6 = -\frac{\sqrt{6}}{12} \\ v_6 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

又 $d^2L = 2u(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(z dx dy + y dx dz + x dy dz)$

则在点 (x_1, y_1, z_1) 处, $d^2L = \frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2 + dy^2 + dz^2 - 4 dx dy + 2 dx dz + 2 dy dz)$

由 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 得 $2x dx + 2y dy + 2z dz = 0$, 则在点 (x_1, y_1, z_1) 处, 有 $dx + dy = 2 dz$

又由 $x + y + z = 0$, 得 $dx + dy + dz = 0$, 则 $dx = -dy, dz = 0$, 于是 $d^2L(x_1, y_1, z_1) = \sqrt{6} dx^2 > 0$,

则函数在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 处取得极小值 $-\frac{\sqrt{6}}{18}$

同理可得, 函数在 $(x_3, y_3, z_3), (x_5, y_5, z_5)$ 处取得极小值 $-\frac{\sqrt{6}}{18}$

函数在 $(x_2, y_2, z_2), (x_4, y_4, z_4), (x_6, y_6, z_6)$ 处取得极大值 $\frac{\sqrt{6}}{18}$.

2. 求 $f = x^m y^n z^p$ 在条件 $x + y + z = a, a > 0, m > 0, n > 0, p > 0, x > 0, y > 0, z > 0$ 之下的最大值.

解: 因 $x > 0, y > 0, z > 0$, 则 $f = x^m y^n z^p$ 最大时, $\ln f = m \ln x + n \ln y + p \ln z$ 也最大, 反之亦然, 故只需求 $\ln f$ 的极大点, 它也是 f 的极大点

令 $L = m \ln x + n \ln y + p \ln z + \lambda(x + y + z - a)$

$$\text{则解方程} \begin{cases} L_x = \frac{m}{x} + \lambda = 0 \\ L_y = \frac{n}{y} + \lambda = 0 \\ L_z = \frac{p}{z} + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y + z - a = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = \frac{ma}{m+n+p} \\ y = \frac{na}{m+n+p} \\ z = \frac{pa}{m+n+p} \\ \lambda = -\frac{m+n+p}{a} \end{cases}$$

则 $\left(\frac{ma}{m+n+p}, \frac{na}{m+n+p}, \frac{pa}{m+n+p}\right)$ 为可能极值点

又 $L_{x^2} = -\frac{m}{x^2}, L_{xy} = L_{yz} = L_{xz} = 0, L_{y^2} = -\frac{n}{y^2}, L_{z^2} = -\frac{p}{z^2}, d^2L = \left(-\frac{m}{x^2} dx^2 - \frac{n}{y^2} dy^2 - \frac{p}{z^2} dz^2\right) < 0$

故在 $\left(\frac{ma}{m+n+p}, \frac{na}{m+n+p}, \frac{pa}{m+n+p}\right)$ 处 $\ln f$ 有极大值, 即 f 有极大值 $\frac{m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}} a^{m+n+p}$

又 $f = x^m y^n z^p$ 当 (x, y, z) 趋于边界 $\begin{cases} x+y=a \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} x+z=a \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y+z=a \\ x=0 \end{cases}$ 时, $f \rightarrow 0$, 故 f 的唯一极大点也是它的最大点.

3. 求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内接等腰三角形, 使其底边平行于椭圆的长轴, 而面积最大.

解: 由于题中三角形内接于椭圆 $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 是等腰三角形, 且底边平行于长轴

故其底边所对顶点必是短轴上椭圆的顶点 $(0, \pm 2)$

设三角形的另一个顶点坐标为 (x, y) ($x, y > 0$), 则其内接等腰三角形底边长为 $2x$, 高为 $y + 2$

等腰三角形三顶点坐标为 $A(0, -2), B(x, y), C(-x, y)$, 由椭圆的对称性, 得 $A(0, 2), B(x, -y), C(-x, -y)$ 也是其顶点

则 $S = x(y + 2)$, 点 (x, y) 在椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 上

又因此问题是求 $S = x(y + 2)$ 在限制条件 $x^2 + 3y^2 = 12$ 上的最大值($x, y > 0$)

作函数 $L = x(y + 2) + \lambda(x^2 + 3y^2 - 12)$

$$\text{则解方程} \begin{cases} L_x = y + 2 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = x + 6\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

于是其顶点坐标为 $A(0, 2), B(3, -1), C(-3, -1)$ 或 $A(0, -2), B(3, 1), C(-3, 1)$

因此问题为实际问题, 最大值必存在, 则在 $(0, 2), (3, -1), (-3, -1)$ 或 $(0, -2), (3, 1), (-3, 1)$ 处其面积最大, 其值为9.

4. 试求抛物线 $y^2 = 4x$ 上的点, 使它与直线 $x - y + 4 = 0$ 相距最近.

解: 设所求点坐标为 (x, y) , 则它到直线的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{2}} |x - y + 4|$, 其中 $y^2 = 4x$

直线 $x - y + 4 = 0$ 将平面分为左、右两部分, 左面 $x - y + 4 < 0$, 右面 $x - y + 4 > 0$

而抛物线 $y^2 = 4x$ 在右面部分, 因而点 (x, y) 到它的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - y + 4)$

$$\text{令 } L = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - y + 4) + \lambda(y^2 - 4x)$$

$$\text{则解方程组} \begin{cases} L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\lambda = 0 \\ L_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = y^2 - 4x = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ \lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{又 } L_{x^2} = 0, L_{y^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, L_{xy} = 0, d^2 L(1, 2) = L_{x^2} dx^2 + 2L_{xy} dx dy + L_{y^2} dy^2 = \frac{dy^2}{2\sqrt{2}} > 0$$

故 $(1, 2)$ 为极小点, 即点 $(1, 2)$ 到直线的距离最近.

5. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求原点到这椭圆的最长与最短距离.

解: 据题意, 求距离 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在限制条件 $z = x^2 + y^2, x + y + z = 1$ 的最值

即求 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在限制条件下的最值

作 $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \gamma(x + y + z - 1)$

$$\text{则解方程组} \begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x + \gamma = 0 \\ L_y = 2y - 2\lambda y + \gamma = 0 \\ L_z = 2z + \lambda + \gamma = 0 \\ L_\lambda = z - x^2 - y^2 = 0 \\ L_\gamma = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ y_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ z_1 = 2 - \sqrt{3} \\ \lambda_1 = \frac{-5\sqrt{3} + 9}{3} \\ \gamma_1 = -7 + \frac{11}{3}\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ z_2 = 2 + \sqrt{3} \\ \lambda_2 = \frac{5\sqrt{3} + 9}{3} \\ \gamma_2 = -7 - \frac{11}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{于是 } d(x_1, y_1, z_1) = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}, d(x_2, y_2, z_2) = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$$

据问题的实际意义, 最长、最短距离存在

则最长距离为原点到点 $\left(-\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 2 + \sqrt{3}\right)$ 的距离, 为 $\sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$;

最短距离为原点到点 $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 2 - \sqrt{3}\right)$ 的距离, 为 $\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}$.

6. 求空间一点 (a, b, c) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离.

解: 设 (x, y, z) 为平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上任一点, 则它与 (a, b, c) 点的距离为 $d = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, 其中 (x, y, z) 满足 $Ax + By + Cz + D = 0$

因 $d > 0$, 故 d 最大 $\iff d^2$ 最大

按题设, 应求 $d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ 在条件 $Ax + By + Cz + D = 0$ 下的极值

令 $L = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D)$

$$\text{则解方程组} \begin{cases} L_x = 2(x-a) + \lambda A = 0 \\ L_y = 2(y-b) + \lambda B = 0 \\ L_z = 2(z-c) + \lambda C = 0 \\ L_\lambda = Ax + By + Cz - D = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x = a - \frac{1}{2} \lambda A \\ y = b - \frac{1}{2} \lambda B \\ z = c - \frac{1}{2} \lambda C \\ \lambda = \frac{2(Aa + Bb + Cc + D)}{A^2 + B^2 + C^2} \end{cases}$$

$$\text{于是 } d = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

又当 x, y, z 中有任一趋于 ∞ 时, $d \rightarrow \infty$, 因此在 $\{(x, y, z) | (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < d\}$ 内必取最小值

$$\text{则点 } (a, b, c) \text{ 到平面 } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ 的最短距离为 } d = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

第十六章 隐函数存在定理、函数相关

§1. 隐函数存在定理

1. 若在隐函数存在定理中条件改为:

- (1) 在区域 $D: (x_0 - a \leq x \leq x_0 + 1, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b)$ 上连续;
- (2) $F(x_0, y_0) = 0$;
- (3) 当 x 固定时, 函数 $F(x, y)$ 是 y 的单调函数; 则可得到什么样的结论, 试证明之.

证明: 结论及证明:

- (1) 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内, 由方程 $F(x, y) = 0$ 能唯一确定 $y = f(x)$ 是 x 的单调函数且 $y_0 = f(x_0)$.
 由条件(3)知, 当 x 固定时, $F(x, y)$ 是 y 的严格单调函数. 不妨设它是 y 的严格单增函数
 固定 x_0 , 函数 $F(x_0, y)$ 是 y 的严格增函数, 且 $F(x_0, y_0) = 0$, 因此有 $F(x_0, y_0 + b) > 0, F(x_0, y_0 - b) < 0$
 由条件(1)知, $F(x, y)$ 在区域 D 上连续, 因而存在 $\eta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \eta$ 时, 亦有
 $F(x, y_0 + b) > 0, F(x, y_0 - b) < 0$
 那末对 $\forall x \in O(x_0, \eta)$, 由函数 $F(x, y)$ 在 $[y_0 - b, y_0 + b]$ 的连续性 & $F(x, y_0 + b) > 0, F(x, y_0 - b) < 0$
 据零点存在定理, 必存在 $\bar{y} \in (y_0 - b, y_0 + b)$, 使 $F(x, \bar{y}) = 0$
 由于 $F(x, y)$ 在 $[y_0 - b, y_0 + b]$ 严格单调, 从而当 $y > \bar{y}$ 时, $F(x, y) > 0$; 当 $y < \bar{y}$ 时, $F(x, y) < 0$
 故上述 \bar{y} 是唯一的
 这表明对 $\forall x \in O(x_0, \eta)$, 通过上述方法, 有唯一的 \bar{y} 与 x 对应, 且满足 $F(x, \bar{y}) = 0$, 于是确定了定义在 $O(x_0, \eta)$ 上的单值函数 $y = f(x)$ 满足 $F(x, f(x)) = 0$, 特别有 $F(x_0, y_0) = 0$ 即 $y_0 = f(x_0)$.

- (2) $f(x)$ 是连续函数.

$\forall x_1 \in O(x_0, a)$, 下证 $y = f(x)$ 在 x_1 点连续.

对 $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < b)$, 设 $y_1 = f(x_1)$, 于是 $F(x_1, y_1) = 0$

又由条件(3), $F(x, y)$ 是 y 的严格单增函数

因此 $F(x_1, y_1 + \varepsilon) > 0, F(x_1, y_1 - \varepsilon) < 0$

则由 F 的连续性, 知存在邻域 $O(x_1, \delta) \subset O(x_0, a)$, 使得当 $x \in O(x_1, \delta)$ 时, 恒有

$F(x, y_1 + \varepsilon) > 0, F(x, y_1 - \varepsilon) < 0$

于是据零点存在定理, 得必有 $y \in O(y_1, \varepsilon)$, 使 $F(x, y) = 0$ 即 $y = f(x)$

即只要 $|x - x_1| < \delta$, 就有 $|f(x) - f(x_1)| = |y - y_1| < \varepsilon$ 即 $y = f(x)$ 在 x_1 点连续

由 $x_1 \in O(x_0, a)$ 的任意性, 得 $f(x)$ 为连续函数.

2. 函数 $F(x, y) \equiv y^2 - x^2(1 - x^2) = 0$ 在哪些点近旁可唯一地决定单值连续, 且有连续导数的函数 $y = y(x)$.

解: 二元函数 $F(x, y) = y^2 - x^2(1 - x^2)$ 在整个二维空间连续, 它的偏导数 $F_x = 4x^3 - 2x, F_y = 2y$ 也连续

由 $y^2 - x^2(1 - x^2) = 0$, 若 $y = 0$, 则 $x^2(1 - x^2) = 0$, 解得 $x = 0, x = \pm 1$

又 $y^2 \geq 0, x^2 \geq 0$, 故 $1 - x^2 \geq 0$ 即 $-1 \leq x \leq 1$

当 $y \neq 0$ 时, $F_y \neq 0$

由隐函数存在定理1, 在任何满足 $\{(x, y) | |x| < 1, x \neq 0, y^2 - x^2(1 - x^2) = 0\}$ 近旁可唯一地决定单值连续且有连续导数的函数 $y = y(x)$.

3. 证明有唯一可导的函数 $y = y(x)$ 满足方程 $\sin y + \sinh y = x$, 并求出导数 $y'(x)$.

证明: 二元函数 $F(x, y) = \sin y + \sinh y - x$ 在整个二维空间连续, $F_x = -1, F_y = \cos y + \cosh y$ 也连续

又 $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq 1$ 且等号只在 $y = 0$ 时成立, 而此时 $\cos y = 1$, 在一般情况下 $|\cos y| \leq 1$

则对一切点 (x, y) , 恒有 $F_y = \cos y + \cosh y > 0$, 于是 $F_y \neq 0$

由隐函数存在定理1, 在任何满足上述方程的点 (x, y) , 有唯一可导的函数满足方程 $\sin y + \sinh y = x$

其导函数为 $y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{1}{\cos y + \cosh y}$.

4. 设 D 是点 $P_0: (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ 的邻域, 若

- (1) $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$;

- (2) F, G 关于一切变量的偏导数在 D 中连续;

- (3) $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$ 在 P_0 点不为零;

则在 (x_0, y_0, z_0) 的邻域 R 内存在唯一的一对函数

$$u = f(x, y, z); v = g(x, y, z)$$

满足:

- (1) $u_0 = f(x_0, y_0, z_0), v_0 = g(x_0, y_0, z_0)$
 (2) $F(x, y, z, f, g) \equiv 0, G(x, y, z, f, g) \equiv 0$
 (3) $u = f(x, y, z), v = g(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的邻域 R 内有对一切变量的偏导数, 且
- $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(x, v)}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(y, v)}, \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(z, v)}$$
- $$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(u, x)}, \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(u, y)}, \frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(u, z)}$$

证明: 由条件(3)知, F_u, F_v 中至少有一个在 P_0 点不等于 0

不妨设 $F_v(P_0) \neq 0$, 则由隐函数存在定理 2, 知在 P_0 点的某个邻域内可以把 v 从 $F(x, y, z, u, v) = 0$ 中解出来.

设 $v = \varphi(x, y, z, u)$ 且 $v_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0, u_0)$ 在 (x_0, y_0, z_0, u_0) 的某个邻域内是唯一的, 具有关于 x, y, z, u 的连续偏导数

把 $v = \varphi(x, y, z, u)$ 代入 $G(x, y, z, u, v)$ 中得 $G(x, y, z, u, \varphi(x, y, z, u)) = \psi(x, y, z, u)$

$$\text{故 } \psi_u = G_u + G_v \cdot v_u = G_u + G_v \left(-\frac{F_u}{F_v} \right) = -\frac{J}{F_v}$$

由假设 $F_v(P_0) \neq 0$ 且在 P_0 点 $J \neq 0$, 故 $\psi_u(x_0, y_0, z_0, u_0) \neq 0$

则由定理 2, 得在 (x_0, y_0, z_0, u_0) 的某邻域内可从方程 $G = G(x, y, z, u, \varphi) \equiv \psi(x, y, z, u) = 0$ 中解出 u 来.

设 $u = f(x, y, z)$, 它在 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域内有连续偏导数, 且 $u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$

把 $u = f(x, y, z)$ 代入 $\varphi(x, y, z, u)$ 中得 $v = \varphi(x, y, z, f(x, y, z)) = g(x, y, z)$

则有 $g(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_0, y_0, z_0, u_0) = v_0$

故 $u = f(x, y, z), v = g(x, y, z)$ 即为所求

$$\text{对方程组 } \begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases} \text{ 两端关于 } x \text{ 求导, 得 } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{解之, 得 } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(x, v)}, \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(x, u)}$$

$$\text{同理可得 } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(y, v)}, \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(z, v)}, \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(u, y)}, \frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{1}{J} \frac{D(F, G)}{D(u, z)}$$

5. 设 $\varphi_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 x 的连续可导函数, 且

$$G_i(x_1, \dots, x_n) = F_i(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n))$$

$$\text{证明 } \frac{\partial(G_1, G_2, \dots, G_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \Delta(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)) \prod_{i=1}^n \varphi_i'(x_i)$$

$$\text{其中 } \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$\prod_{i=1}^n \varphi_i'(x_i) = \varphi_1'(x_1) \varphi_2'(x_2) \cdots \varphi_n'(x_n).$$

证明: 因 $\varphi_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 x 的连续可导函数, 且 $G_i(x_1, \dots, x_n) = F_i(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n))$

$$\text{则 } \frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_j} \varphi_j'(x_j) (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{于是 } \frac{\partial(G_1, G_2, \dots, G_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_1(x_1)} \varphi_1'(x_1) & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_2(x_2)} \varphi_2'(x_2) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_n(x_n)} \varphi_n'(x_n) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_1(x_1)} \varphi_1'(x_1) & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_2(x_2)} \varphi_2'(x_2) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_n(x_n)} \varphi_n'(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_1(x_1)} \varphi_1'(x_1) & \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_2(x_2)} \varphi_2'(x_2) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_n(x_n)} \varphi_n'(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$\varphi_1'(x_1) \varphi_2'(x_2) \cdots \varphi_n'(x_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_1(x_1)} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_2(x_2)} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_n(x_n)} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_1(x_1)} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_2(x_2)} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_n(x_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_1(x_1)} & \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_2(x_2)} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_n(x_n)} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \varphi_i'(x_i) \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots, \varphi_n(x_n))} =$$

$$\Delta(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)) \prod_{i=1}^n \varphi_i'(x_i).$$

6. 设 $F(x, y, z)$ 有二阶连续偏导数, 并由 $F(x, y, z) = 0$ 可确定 $z = f(x, y)$. 讨论 $z = f(x, y)$ 的极值的必要和充分条

件.再求由

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

所确定的 $z = f(x, y)$ 的极值.

证明: 因函数 $z = f(x, y)$ 取得极值的必要条件为 $\begin{cases} z_x = f_x(x, y) = 0 \\ z_y = f_y(x, y) = 0 \end{cases}$

又 $z_x = -\frac{F_x}{F_z}, z_y = -\frac{F_y}{F_z}$, 则 $F(x, y, z)$ 取得极值的必要条件为 $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$

又隐函数取极值的充分条件与显函数类同, 只是求二阶偏导数时要用隐函数的高阶偏导数求法

令 $\begin{cases} F_x = 2x - 2 = 0 \\ F_y = 2y + 2 = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, 对应的 z 值为 $z_1 = -2, z_2 = 6$

又 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2-z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+y}{2-z}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x-1)^2 + (2-z)^2}{(2-z)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(1+y)^2 + (2-z)^2}{(2-z)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x-1)(1+y)}{(2-z)^3}$

于是在点 $(1, -1, -2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{4}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{4}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, 由 $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{16} > 0$ 及 $\frac{1}{4} > 0$, 则 $z_1 = -2$ 为极小值;

在点 $(1, -1, 6)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, 由 $\left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{16} > 0$ 及 $-\frac{1}{4} < 0$, 则 $z_2 = 6$ 为极大值

§2. 函数行列式的性质、函数相关

1. 证明 $\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$ 函数独立

证明: 因 $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2 \cos \theta$

则在 $r \neq 0$ 且 $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 的区域 D 内 $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} \neq 0$

于是据定理5, 得原函数组在区域 D 内函数独立.

2. 证明 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ y_3 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \end{cases}$ 函数相关, 并写出其函数关系式.

证明: 因存在函数 $\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2)$, 使得 $y_3 = \varphi(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2)$ 在整个 n 维空间 (x_1, x_2, \cdots, x_n) 内成为恒等式

则函数组在整个 n 维空间中函数相关, 其函数关系式为 $y_3 = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2)$.

3. 下列函数是否相关?

(1) $\frac{x-y}{x-z}, \frac{y-z}{y-x}, \frac{z-x}{z-y}$

(2) $\frac{x}{1-x-y-z}, \frac{y}{1-x-y-z}, \frac{z}{1-x-y-z}$

解:

(1) 因 $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = -1$, 则函数相关.

(2) 令 $f_1(x, y, z) = \frac{x}{1-x-y-z}, f_2(x, y, z) = \frac{y}{1-x-y-z}, f_3(x, y, z) = \frac{z}{1-x-y-z}$

则 Jacobi 矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-y-z}{(1-x-y-z)^2} & \frac{x}{(1-x-y-z)^2} & \frac{x}{(1-x-y-z)^2} \\ y & 1-x-z & y \\ \frac{1-y-z}{(1-x-y-z)^2} & \frac{z}{(1-x-y-z)^2} & \frac{1-x-y}{(1-x-y-z)^2} \end{pmatrix}$

又此矩阵的秩为3, 则据定理6, 得函数组函数独立.

第三部分 含参变量的积分和广义积分

第十七章 含参变量的积分

1. 设 $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx$, 计算 $F'(y)$.

解: 因定理4条件满足, 应用定理4, 有

$$F'(y) = \int_y^{y^2} (-x^2) e^{-x^2 y} dx + 2ye^{-y^5} - e^{-y^3} = \frac{5}{2} ye^{-y^5} - \frac{3}{2} e^{-y^3} - \frac{1}{2y} F(y).$$

2. 设 $F(y) = \int_0^y (x+y)f(x) dx$, 其中 $f(x)$ 为可微函数, 求 $F''(y)$.

解: 因 $f(x)$ 为可微函数, 则 $f(x)$ 连续, 于是 $(x+y)f(x)$ 连续, 则定理4条件满足

$$\text{于是 } F'(y) = \int_0^y f(x) dx + 2yf(y), \quad F''(y) = 3f(y) + 2yf'(y).$$

3. 若 $F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$, 直接计算积分, 求出 $F(y)$, 再求出 $F'(0)$, 并检验应用定理4计算 $F'(0)$ 的正确性.

解: 当 $y \neq 0$ 时, 有 $F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx = x \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx = \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 +$

$$y \int_0^1 \frac{\frac{dx}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} dx = \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 + y \arctan \frac{1}{y}.$$

$$\text{因 } F(0) = \int_0^1 \ln x dx = -1$$

$$\text{则 } F_+'(0) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{F(y) - F(0)}{y} = \frac{\pi}{2}, \quad F_-'(0) = \lim_{y \rightarrow -0} \frac{F(y) - F(0)}{y} = -\frac{\pi}{2}$$

于是 $F'(0)$ 不存在

另一方面, 当 $x > 0$ 时, $\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{y=0} = \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0} = 0$, 则 $\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx = 0$

$$\text{又 } F_+'(0) = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx, \quad F_-'(0) = -\frac{\pi}{2} \neq 0 = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx$$

则当 $y = 0$ 时, 不能在积分号下求导数, 即使求左、右导数也不行.

4. 求函数

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \text{ 和 } F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

的导数且证明 $E(k)$ 满足方程:

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0$$

$$\text{解: } E'(k) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] d\varphi = \frac{1}{k} [E(k) - F(k)]$$

$$F'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = -\frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right] d\varphi = -\frac{1}{k} F(k) + \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

$$\text{因 } \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) = \frac{k^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) (1 - k^2 \sin^2 \varphi) + k^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k^2 - 1 + (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^2}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{k^2 - 1}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\text{则 } \frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - k^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{1 - k^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right)$$

$$\text{于是 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{1 - k^2} E(k)$$

$$\text{则 } F'(k) = \frac{1}{k(1-k^2)} E(k) - \frac{1}{k} F(k)$$

$$\text{于是 } E''(k) = \frac{(E'(k) - F'(k))k - (E(k) - F(k))}{k^2} = -\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k^2}$$

$$\text{从而 } E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = -\frac{E(k)}{k^2(1-k^2)} + \frac{F(k)}{k^2} + \frac{E(k) - F(k)}{k^2} + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

5. 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx, (y \geq 0)$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续且为正的函数.

解: 设 $d > c > 0$, 取 $y \in [c, d]$, 则被积函数 $\frac{yf(x)}{x^2 + y^2}$ 在 $[0, 1] \times [c, d]$ 上连续

由定理1, 得 $F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$ 在 $[c, d]$ 上连续, 由 c, d 的任意性, 得 $F(y)$ 在 $y > 0$ 连续

又 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续且为正的函数, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上必有最小值 $m > 0$

由于 $F(y) \geq m \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = m \arctan \frac{1}{y}$ 及 $\lim_{y \rightarrow +0} \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{y \rightarrow +0} F(y) \geq \frac{m\pi}{2} > 0$

又 $F(0) = 0$, 则 $F(y)$ 当 $y = 0$ 时不连续.

6. 应用对参数求导法计算积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx \quad (a > 1) \text{ (不必定常数, 若计算时出现无界情况, 取极限计算);}$$

$$(2) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx \quad (|a| < 1)$$

解:

$$(1) \text{ 设 } I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx$$

因被积函数 $\ln(a^2 - \sin^2 x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [1, +\infty]$ 上不连续

则不能用定理2, 为了能用定理, 缩小范围 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [b, c] (b > 1, c \rightarrow +\infty)$

这时 $f(x, a) = \ln(a^2 - \sin^2 x)$ 及 $f_a = \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x}$ 都在闭矩形 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [b, c]$ 上连续

$$\text{由定理2, 有 } I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x} dx = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \left[\arctan \frac{a+1}{\sqrt{a^2 - 1}} + \arctan \frac{a-1}{\sqrt{a^2 - 1}} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

对 a 积分, 得 $I(a) = \pi \ln |a + \sqrt{a^2 - 1}| + C$

因 $a \in [b, c]$, 由 b, c 的任意性, 则 $I(a) = \pi \ln |a + \sqrt{a^2 - 1}| + C$

$$(2) \text{ 设 } I(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$$

当 $|a| < 1$ 时, 由于 $1 - 2a \cos x + a^2 \geq 1 - 2|a| + a^2 = (1 - |a|)^2 > 0$

则 $f(x, a) = \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$ 及 $f_a = \frac{-2 \cos x + 2a}{1 - 2a \cos x + a^2}$ 都在闭矩形 $[0, \pi] \times [-b, b] (|a| \leq b < 1)$

$$\text{由定理2, 有 } I'(a) = \int_0^{\pi} \frac{-2 \cos x + 2a}{1 - 2a \cos x + a^2} dx = \frac{\pi}{a} - \frac{1 - a^2}{a} \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + a^2) - 2a \cos x} = \frac{\pi}{a} - \frac{1 - a^2}{a(1 + a^2)} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \left(-\frac{2a}{a^2 + 1}\right) \cos x}$$

作代换 $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\text{则 } \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \left(-\frac{2a}{a^2 + 1}\right) \cos x} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 + a^2}{(1 - a)^2 + (1 + a)^2 t^2} dt = \frac{1 + a^2}{1 - a^2} \pi$$

于是 $I'(a) = 0$, 从而 $I(a) = C$

又 $I(0) = 0$, 则 $C = 0$, 于是 $I(a) = 0$

因 $a \in [-b, b]$, 由 b 的任意性, 得当 $|a| < 1$ 时, $I(a) = 0$.

7. 应用积分号下求积分方法计算积分:

$$\int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0)$$

(若出现无界情况与前面同样处理).

解: 不妨设 $a < b$

$$\text{因 } \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx.$$

这里, 当 $x = 0$ 时, $\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$ 理解为 0, 从而 $\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$ 在 $0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b$ 上连续

则可应用积分号下的积分法交换积分次序

$$\text{作代换 } x = e^{-t}, \text{ 可得 } \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx = \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t} \sin t dt = \frac{1}{1 + (1+y)^2}$$

$$\text{于是 } \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_a^b \frac{dy}{1 + (1+y)^2} = \arctan(1+b) - \arctan(1+a) = \arctan \frac{b-a}{1 + (1+b)(1+a)}$$

$$8. \text{ 证明 } \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

$$\text{证明: 因 } \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = - \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{则 } \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

9. 设函数 $f(x, y)$ 在 $D = [a, A; b, B]$ 有界, 除去 D 内有限条连续曲线 $y = \varphi_i(x)$, f 在 D 连续, 证明:

$$F(x) = \int_b^B f(x, y) dy$$

在 $[a, A]$ 连续.

证明: 不妨设只有一条连续曲线 $y = \varphi_1(x)$, $f(x, y)$ 在这条曲线上间断

因 $f(x, y)$ 有界, 记 $M = \sup_{[a, A; b, B]} |f(x, y)|$

任取 $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset [a, A], y_0 = \varphi_1(x_0) \in [b, B]$

下证 $F(x) = \int_b^B f(x, y) dy$ 在 x_0 点连续, 即证 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_b^B f(x, y) dy - \int_b^B f(x_0, y) dy \right| < \varepsilon$$

由于 $y = \varphi_1(x)$ 在 x_0 点连续, 则对 $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $|x - x_0| < 2\delta_1$ 时, 有 $|y - y_0| = |\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0)| < \varepsilon_1$
于是在 $x_0 - \delta_1 \leq x \leq x_0 + \delta_1, b \leq y \leq B$ 的带域内使 $f(x, y)$ 间断的点只含于以 (x_0, y_0) 为中心的矩形域 $x_0 - \delta_1 \leq x \leq x_0 + \delta_1, y_0 - \varepsilon_1 < y < y_0 + \varepsilon_1$ 在这带域的上、下两侧(若 $y_0 - \varepsilon_1$ 恰好等于 b 或 $y_0 + \varepsilon_1$ 恰好等于 B , 则只有上侧或下侧), 闭域中 $f(x, y)$ 为连续

因而在这两个(或一个)闭域中 $f(x, y)$ 为一致连续, 特别对 $\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 有

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon_2$$

现取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 当 $|x' - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|F(x') - F(x)| = \left| \int_b^B f(x', y) dy - \int_b^B f(x_0, y) dy \right| \leq \int_b^{y_0 - \varepsilon_1} |f(x', y) - f(x_0, y)| dy + \int_{y_0 - \varepsilon_1}^{y_0 + \varepsilon_1} |f(x', y)| dy +$$

$$\int_{y_0 - \varepsilon_1}^{y_0 + \varepsilon_1} |f(x_0, y)| dy + \int_{y_0 + \varepsilon_1}^B |f(x', y) - f(x_0, y)| dy \leq \varepsilon_2(B - b) + 4\varepsilon_1 M$$

$$\text{若取 } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{8M}, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(B - b)}$$

则当 $|x' - x_0| < \delta$ 时, 有 $|F(x') - F(x_0)| < \varepsilon$

当 $x_0 \in [a, \alpha]$ 或 $x_0 \in [\beta, A]$ 时, $F(x)$ 在 x_0 连续, 故 $F(x)$ 在 $[a, A]$ 连续

若 $f(x, y)$ 有间断的连续曲线有几条, 则只需把使 $f(x, y)$ 可能成为间断的点用至多几个小矩形隔开就行了
其余论证相同

由于 $f(x, y)$ 有界且至多有几条间断线, 则 $F(x) = \int_b^B f(x, y) dy$ 存在且在 $[a, A]$ 连续.

第十八章 含参变量的广义积分

1. 证明: 若在 $[a, +\infty; c, d]$ 内成立 $|f(x, y)| \leq F(x, y)$, 并且关于 $y \in [c, d]$ 积分 $\int_a^{+\infty} F(x, y) dx$ 一致收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 亦一致收敛, 且绝对收敛.

证明: 因积分 $\int_a^{+\infty} F(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, 则由含参变量的广义积分的柯西一致收敛原理, 得

对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在与 y 无关的 $A_0(\varepsilon) > a$, 当 $A, A' \geq A_0$ 时, 对一切 $y \in [c, d]$, 有 $\left| \int_A^{A'} F(x, y) dx \right| < \varepsilon$

而 $\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} |f(x, y)| dx \right| \leq \left| \int_A^{A'} F(x, y) dx \right| < \varepsilon$ 对一切 $y \in [c, d]$ 都成立

由无穷限含参变量广义积分的柯西一致收敛原理, $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛, $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛

则 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 关于 $y \in [c, d]$ 一致收敛且绝对收敛.

2. 证明下列积分在所给定的区间内一致收敛:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2} dx \quad (y \geq a > 0)$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + 1} dx \quad (-\infty < y < +\infty)$$

$$(3) \int_0^1 \ln xy dx \quad \left(\frac{1}{b} \leq y \leq b, b > 1 \right)$$

证明:

$$(1) \text{ 因 } y \geq a > 0, \text{ 则 } \left| \frac{\cos xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + a^2} \text{ 而 } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \text{ 收敛}$$

于是由魏氏判别法, 得 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + y^2} dx$ 关于 y 在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 内一致收敛.

$$(2) \text{ 因 } y \in (-\infty, +\infty), \left| \frac{\cos xy}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{x^2 + 1} \text{ 而 } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \text{ 收敛}$$

于是由魏氏判别法, 得 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + 1} dx$ 关于 y 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛.

$$(3) x = 0 \text{ 是奇点, 当 } \frac{1}{b} \leq y \leq b, b > 1, 0 < x \leq 1 \text{ 时, } |\ln xy| \leq |\ln x| + |\ln y| \leq -\ln x + \ln b = \ln \frac{b}{x}$$

因 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{4}} \ln \frac{b}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \frac{b}{x}}{x^{-\frac{1}{4}}} = 0$, 则由无界函数广义积分判别法的极限形式, 得 $\int_0^1 \ln \frac{b}{x} dx$ 收敛

从而由魏氏判别法, 得 $\int_0^1 \ln xy dx$ 关于 y 在 $[\frac{1}{b}, b]$ ($b > 1$) 上一致收敛.

3. 设 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty; c, d]$ 连续, 对 $[c, d]$ 上每一个 y , $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 收敛, 但积分在 $y = d$ 发散. 证明这积分在 $[c, d]$ 非一致收敛.

证明: 由 $\int_a^{+\infty} f(x, d) dx$ 发散, 得 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A_0 > a, \exists A', A'' \geq A_0$, 使 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, d) dx \right| \geq \varepsilon_0$

这表明对 $y = d \in [c, d]$ 有 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon_0$, 说明 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在 $[c, d]$ 非一致收敛.

4. 讨论下列积分在指定区间的一致收敛性:

$$(1) \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \quad (a \leq \alpha \leq b; a, b \text{ 为任意实数})$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 < \alpha < +\infty)$$

- (3) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$
 (i) $a < \alpha < b$
 (ii) $-\infty < \alpha < +\infty$
- (4) $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx$
 (i) $p \geq p_0 > 0$
 (ii) $p > 0$
- (5) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx \quad (\alpha > 0)$

解:

- (1) 因 $\alpha \in [a, b], x \in (1, +\infty)$, 则 $0 < |x^\alpha e^{-x}| \leq x^b e^{-x}$
 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot x^b e^{-x} = 0$, 则据无穷限广义积分的柯西判别法的极限形式, 得 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 一致收敛
 于是由魏氏判别法, 得 $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$ 关于 $\alpha \in [a, b]$ (a, b 为任意实数) 一致收敛.
- (2) $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 收敛, 但它在 $(0, +\infty)$ 关于 α 非一致收敛
 对 $\forall A > 0$, 因 $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\sqrt{\alpha} A}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
 故对于 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 必存在 $\alpha_0 > 0$, 使得 $\left| \int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha_0} e^{-\alpha_0 x^2} dx \right| = \int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha_0} e^{-\alpha_0 x^2} dx > \varepsilon_0$,
 即 $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$ 关于 α 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.
- (3) 对任意固定的 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ 都收敛, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx = \sqrt{\pi}$
 (i) $|x|$ 充分大时, 对一切 $a < \alpha < b$, 有 $0 < e^{-(x-\alpha)^2} < 2e^{-\frac{x^2}{4}}$
 因 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx$ 收敛
 则由魏氏判别法, 得 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ 对 $a < \alpha < b$ 一致收敛.
 (ii) 对 $\forall A > 0$, 有 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{A-\alpha}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$
 则当 α 充分大时, $\int_A^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
 由此, 得 $\int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ 在 $-\infty < \alpha < +\infty$ 上非一致收敛
 从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ 在 $-\infty < \alpha < +\infty$ 上非一致收敛.
- (4) (i) $|x^{p-1} \ln^2 x| = x^{p-1} \ln^2 x \leq x^{p_0-1} \ln^2 x \quad (p \geq p_0 > 0, 0 \leq x \leq 1)$
 积分 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx = \int_0^{+\infty} e^{-p_0 z} z^2 dz$
 $\lim_{z \rightarrow +\infty} z^2 \cdot e^{-p_0 z} z^2 = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^4}{e^{p_0 z}} = 0 \quad (p_0 > 0)$
 则由柯西判别法的极限形式 $\int_0^{+\infty} e^{-p_0 z} z^2 dz$ 收敛, 于是 $\int_0^1 x^{p_0-1} \ln^2 x dx$ 收敛
 从而由魏氏判别法, 得 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx$ 关于 p 在 $p \geq p_0 > 0$ 上一致收敛.
 (ii) 因当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right), \ln^2 x \geq 1$
 故有 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx > \int_0^{\frac{1}{e}} x^{p-1} \ln^2 x dx > \int_0^{\frac{1}{e}} x^{p-1} dx = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{e}\right)^p \rightarrow +\infty \quad (p \rightarrow +0)$
 于是 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 x dx$ 在 $p > 0$ 时不一致收敛.

(5) 用反证法.

假设 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx$ 关于 $\alpha > 0$ 一致收敛, 则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, 当 $A'' > A' > M$ 时, 对一切 $\alpha > 0$ 成立

$$\left| \int_{A'}^{A''} e^{-\alpha x} \sin x \, dx \right| < \varepsilon$$

从而对于 $\alpha \in (0, 1)$ 亦成立 $\left| \int_{A'}^{A''} e^{-\alpha x} \sin x \, dx \right| < \varepsilon$

在不等式两边令 $\alpha \rightarrow 0$, 则有 $\left| \int_{A'}^{A''} \sin x \, dx \right| \leq \varepsilon$, 从而 $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ 收敛

而 $\int_0^A \sin x \, dx = 1 - \cos A$, 当 $A \rightarrow +\infty$ 时, $\cos A$ 的极限不存在, 于是 $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ 发散, 则矛盾, 故假设不成立

从而 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx$ 关于 $\alpha > 0$ 不一致收敛.

5. 证明:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \, dx$ 在不含 $\alpha = 0$ 的任何区间上是连续函数;

(2) $F(p) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx$ 在 $(0, 2)$ 内连续.

证明:

(1) 设 $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \, dx$.

对任何 $\alpha_0 \neq 0$, 不妨设 $\alpha_0 > 0$, 今取 $\delta > 0$, 使得 $\alpha_0 - \delta > 0$, 下证 $F(\alpha)$ 在 $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ 内一致收敛

事实上, 当 $\alpha \in [\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ 时, $\frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \leq \frac{\alpha_0 + \delta}{x^2 + (\alpha_0 - \delta)^2}$

因积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha_0 + \delta}{(\alpha_0 - \delta)^2 + x^2} \, dx$ 收敛, 则由魏氏判别法, 得 $F(\alpha)$ 在 $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ 上关于 α 一致收敛

于是由连续定理, 得 $F(\alpha)$ 在该区间上是 α 的连续函数, 特别在 α_0 点连续

由于 $\alpha_0 \neq 0$ 的任意性, 得 $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \, dx$ 对任何 $\alpha \neq 0$ 连续, 由此可知 $F(\alpha)$ 在任何不含 $\alpha = 0$ 的区间上都连续

但由 $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{\alpha \rightarrow -0} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \, dx = -\frac{\pi}{2}$

得 $F(\alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 处不连续, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \, dx$ 在不含 $\alpha = 0$ 的任何区间上是连续函数.

(2) 任取 $p \in (0, 2)$, 则存在 $0 < p_1, p_2 < 2$, 使 $0 < p_1 \leq p \leq p_2 < 2$

因 0 和 π 均可能是奇点, 将积分分为三段

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx + \int_1^{\pi-1} \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx + \int_{\pi-1}^\pi \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx$$

对于 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx$

因 $\frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \leq \frac{\sin x}{x^{p_2}(\pi - x)^{2-p_2}} \quad (0 \leq x \leq 1, 0 < p_1 \leq p \leq p_2 < 2)$

且 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{p_2-1} \frac{\sin x}{x^{p_2}(\pi - x)^{2-p_2}} = \frac{1}{\pi^{2-p_2}}$

因 $p_2 < 2$, 则 $p_2 - 1 < 1$, 于是由柯西判别法的极限形式, 得 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{p_2}(\pi - x)^{2-p_2}} \, dx$ 收敛

从而由魏氏判别法, 得 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx$ 关于 $p \in [p_1, p_2]$ 一致收敛

又被积函数 $\frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}}$ 在 $(0, 1] \times [p_1, p_2]$ 上连续, 则由连续性定理, 得 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx$ 在 $[p_1, p_2]$ 连续

续 $\int_1^{\pi-1} \frac{\sin x}{x^p(\pi - x)^{2-p}} \, dx$ 是含参变量的常义积分

因被积函数 $\frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}}$ 在 $[1, \pi-1] \times [p_1, p_2]$ 连续, 则由连续性定理, 得 $\int_1^{\pi-1} \frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}} dx$ 在 $[p_1, p_2]$ 连续

对于 $\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}} dx$

因 $\frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}} \leq \frac{\sin(\pi-x)}{x^{p_1}(\pi-x)^{2-p_1}} (\pi-1 \leq x \leq \pi, 0 < p_1 \leq p \leq p_2 < 2)$

且 $\lim_{x \rightarrow \pi-0} (\pi-x)^{1-p_1} \frac{\sin(\pi-x)}{x^{p_1}(\pi-x)^{2-p_1}} = \frac{1}{\pi^{p_1}}$

因 $p_1 > 0$, 则 $1-p_1 < 1$, 于是由柯西判别法的极限形式, 得 $\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{\sin(\pi-x)}{x^{p-1}(\pi-x)^{2-p_1}} dx$ 收敛

从而由魏氏判别法, 得 $\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}} dx$ 关于 $p \in [p_1, p_2]$ 一致收敛

又被积函数 $\frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}}$ 在 $[\pi-1, \pi) \times [p_1, p_2]$ 上连续, 则由连续性定理, 得 $\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}} dx$ 在 $[p_1, p_2]$ 连续

综合以上, 得 $F(p)$ 在 $[p_1, p_2]$ 连续, 从而在其上任一点 p 连续

又由 $p \in (0, 2)$ 的任意性, 得 $F(p) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^p(\pi-x)^{2-p}} dx$ 在 $(0, 2)$ 内连续..

6. 设 $f(t)$ 当 $t > 0$ 时连续. 如果 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 当 $\lambda = a, \lambda = b$ 时都收敛, 那末 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

证明: 因 $f(t)$ 当 $t > 0$ 时连续, 则被积函数 $t^\lambda f(t)$ 的奇点只可能是 0

于是 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt = \int_0^1 t^\lambda f(t) dt + \int_1^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$

对于 $\int_0^1 t^\lambda f(t) dt = \int_0^1 t^{\lambda-a} t^a f(t) dt$

因 $\int_0^{+\infty} t^a f(t) dt$ 收敛, 则 $\int_0^1 t^a f(t) dt$ 收敛, 从而关于 $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛, 而 $t^{\lambda-a}$ 对于 $\lambda \geq a$ 单调减且 $|t^{\lambda-a}| \leq 1 (0 \leq t \leq 1, \lambda \geq a)$

则由 Abel 判别法, 得 $\int_0^1 t^\lambda f(t) dt$ 关于 $\lambda \geq a$ 一致收敛

对于 $\int_1^{+\infty} t^\lambda f(t) dt = \int_1^{+\infty} t^{\lambda-b} t^b f(t) dt$

因 $\int_0^{+\infty} t^b f(t) dt$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty} t^b f(t) dt$ 收敛, 从而关于 $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛, 而 $t^{\lambda-b}$ 对于 $\lambda \leq b$ 单调减且 $|t^{\lambda-b}| \leq 1 (1 \leq t < +\infty, \lambda \leq b)$

则由 Abel 判别法, 得 $\int_1^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 关于 $\lambda \leq b$ 一致收敛

于是 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t) dt$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

7. 从等式 $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$ 出发, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx (b > a > 0)$$

解: 因 $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy$

函数 e^{-xy} 在 $[0, +\infty) \times [a, b]$ 上连续

又对 $y \in [a, b] (a > 0)$, 则 $|e^{-xy}| \leq e^{-ax}$ 且 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$ 收敛

于是由魏氏判别法, 得 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 关于 y 在 $[a, b]$ 一致收敛

由积分交换顺序定理, 得 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \int_a^b \frac{dy}{y} =$

$\ln \frac{b}{a} (b > a > 0)$

8. 试证明 $\Gamma(s)$ 的导数存在, 求出 $\Gamma'(s)$ 的积分表达式, 说明推导过程是合理的.

证明: $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$

因 $x^{s-1}e^{-x}$ 及 $\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x}) = x^{s-1}e^{-x} \ln x$ 在 $0 < x < +\infty, s > 0$ 上连续

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

对于任意的 $s > 0$, 总可取 $0 < s_0 \leq s \leq S_0$

$$x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s_0-1} e^{-x} (0 \leq x \leq 1)$$

因若 $s_0 < 1$, 0为奇点, 由 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{1-s_0} x^{s_0-1} e^{-x} = 1$ 及柯西判别法的极限形式, 得 $\int_0^1 x^{s_0-1} e^{-x} dx$ 收敛;

若 $s_0 \geq 1$, 则 $\int_0^1 x^{s_0-1} e^{-x} dx$ 为常义积分, 故收敛

总之 $\int_0^1 x^{s_0-1} e^{-x} dx$ 收敛, 从而由魏氏判别法, 得 $\int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx$ 关于 s 在 $s \geq s_0$ 上一致收敛

$$\text{又 } x^{s-1} e^{-x} \leq x^{S_0-1} e^{-x} (1 \leq x < +\infty)$$

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^{S_0-1} e^{-x} = 0$, 则由柯西判别法的极限形式, 得 $\int_1^{+\infty} x^{S_0-1} e^{-x} dx$ 收敛

于是由魏氏判别法, 得 $\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ 关于 s 在 $s \leq S_0$ 上一致收敛

从而 $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ 在 $[s_0, S_0]$ 上一致收敛, 故收敛.

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} \ln x dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$$

对上面的 $0 < s_0 \leq s \leq S_0$, $|x^{s-1} e^{-x} \ln x| \leq x^{s_0-1} |\ln x|$ ($0 < x \leq 1$)

因 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{1-\frac{s_0}{2}} x^{s_0-1} \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{s_0}{2}}} = 0$, 则由柯西判别法的极限形式, 得

$$\int_0^1 x^{s_0-1} e^{-x} |\ln x| dx = - \int_0^1 x^{s_0-1} e^{-x} \ln x dx \text{ 收敛}$$

于是由魏氏判别法, 得 $\int_0^1 x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 在 $s \geq s_0$ 上一致收敛

$$\text{又 } x^{s-1} e^{-x} \ln x = x^s e^{-x} \frac{\ln x}{x} < x^{S_0} e^{-x} (1 \leq x < +\infty)$$

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^{S_0} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{S_0+2}}{e^x} = 0$, 则由柯西判别法的极限形式, 得 $\int_1^{+\infty} x^{S_0} e^{-x} dx$ 收敛, 于是由魏氏

判别法, 得 $\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 在 $s \leq S_0$ 上一致收敛

从而 $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$ 在 $[s_0, S_0]$ 上一致收敛

则由积分号下求导定理, 得 $\Gamma(s)$ 在 $[s_0, S_0]$ 上可导, 当然在 s 可导, 且 $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$

再由 $s > 0$ 的任意性, 得 $\Gamma(s)$ 在 $s > 0$ 可导且 $\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \ln x dx$.

9. (1) 从 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 推出 $L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}$;

(2) 利用积分号下求导的法则引出 $\frac{dL}{dc} = -2L$ 来求得同一结果, 并推出 $\int_0^{+\infty} e^{-ay^2 - \frac{b}{y^2}} dy$ ($a > 0, b > 0$)之值.

证明:

$$(1) L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \int_0^{+\infty} e^{-\left(y - \frac{c}{y}\right)^2 - 2c} dy = e^{-2c} \int_0^{+\infty} e^{-\left(y - \frac{c}{y}\right)^2} dy = e^{-2c} \int_0^{+\infty} e^{-\left(y - \frac{c}{y}\right)^2} d\left(y - \frac{c}{y}\right) + e^{-2c} \int_0^{+\infty} e^{-\left(y - \frac{c}{y}\right)^2} d\frac{c}{y}$$

在前一积分中令 $u = y - \frac{c}{y}$, 在后一积分中令 $v = \frac{c}{y}$

$$\text{则 } L(c) = e^{-2c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du - e^{-2c} \int_0^{+\infty} e^{-(v - \frac{c}{v})^2} dv = \sqrt{\pi} e^{-2c} - L(c)$$

$$\text{于是 } L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}.$$

$$(2) \quad L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy, \quad \frac{dL}{dc} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \left(-\frac{c}{y^2} \right) dy$$

$$\text{令 } v = \frac{c}{y}, \text{ 则 } \frac{dL}{dc} = -2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2 - \frac{c^2}{v^2}} dv = -2L(c)$$

$$\text{于是 } \ln L = -2c + \ln c_0 \text{ 即 } \ln \frac{L}{c_0} = -2c \text{ 亦即 } L = c_0 e^{-2c}$$

$$\text{又 } L(0) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ 则 } c_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ 于是 } L(c) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}$$

则令 $u = \sqrt{ay}$, 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-ay^2 - \frac{b}{y^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 - \frac{(\sqrt{ab})^2}{u^2}} du = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \quad (a > 0, b > 0).$$

第四部分 多变量积分学

第十九章 积分(二重、三重积分, 第一类曲线、曲面积分)的定义和性质

§2. 积分的性质

1. 证明中值定理: 若 $f(M), g(M)$ 在 Ω 上连续, $g(M)$ 在 Ω 不变号, 则

$$\int_{\Omega} f(M)g(M) d\Omega = f(P) \int_{\Omega} g(M) d\Omega$$

其中 $P \in \Omega$.

证明: 设 Ω 是有界闭区域且有度量

因 $f(M), g(M)$ 在 Ω 上连续, $g(M)$ 在 Ω 不变号

则 $f(M), g(M)$ 在 Ω 上可积, 且可设 $g(M) \geq 0$, $M = \max_{M \in \Omega} \{f(M)\}, m = \min_{M \in \Omega} \{f(M)\}$

由性质4, 得 $m \int_{\Omega} g(M) d\Omega \leq \int_{\Omega} f(M)g(M) d\Omega \leq M \int_{\Omega} g(M) d\Omega$

若 $\int_{\Omega} g(M) d\Omega = 0$, 由于 $g(M) \geq 0$ 且连续, 则必有 $g(M) \equiv 0, M \in \Omega$, 从而 $\int_{\Omega} f(M)g(M) d\Omega = 0$ 即要证不等式成立;

$$\text{若 } \int_{\Omega} g(M) d\Omega > 0, \text{ 则 } m \leq \frac{\int_{\Omega} f(M)g(M) d\Omega}{\int_{\Omega} g(M) d\Omega} \leq M$$

由连续函数的介值定理, 得必存在 $P \in \Omega$, 使 $\frac{\int_{\Omega} f(M)g(M) d\Omega}{\int_{\Omega} g(M) d\Omega} = f(P)$

$$\text{即 } \int_{\Omega} f(M)g(M) d\Omega = f(P) \int_{\Omega} g(M) d\Omega$$

同理, 当 $g(M) \leq 0$ 时, 亦有 $\int_{\Omega} f(M)g(M) d\Omega = f(P) \int_{\Omega} g(M) d\Omega$.

2. 证明: 若 $f(M)$ 在 Ω 上连续, $f(M) \geq 0$, 但 $f(M) \not\equiv 0$, 则

$$\int_{\Omega} f(M) d\Omega > 0$$

证明: 因 $f(M) \geq 0, f(M) \not\equiv 0$, 则至少存在一点 $M_0 \in \Omega$, 使得 $f(M_0) > 0$

又 $f(M)$ 在 Ω 上连续, 当然在 M_0 连续, 则必存在 $\delta > 0$, 当 $M \in O(M_0, \delta)$ 时, 有 $f(M) > 0$

$$\text{于是 } \int_{\Omega} f(M) d\Omega = \int_{\Omega \setminus O(M_0, \delta)} f(M) d\Omega + \int_{O(M_0, \delta)} f(M) d\Omega \geq \int_{O(M_0, \delta)} f(M) d\Omega > 0$$

3. 证明: 若 $f(M)$ 在 Ω 上连续, 在 Ω 的任何部分区域 $\Omega' \subseteq \Omega$ 上

$$\int_{\Omega'} f(M) d\Omega = 0$$

则 $f(M) \equiv 0$

由此证明: 若 $f(M), g(M)$ 在 Ω 上连续, 在 Ω 的任何部分区域 $\Omega' \subseteq \Omega$ 上成立:

$$\int_{\Omega'} f(M) d\Omega = \int_{\Omega'} g(M) d\Omega$$

则在 Ω 上成立: $f(M) \equiv g(M)$.

证明: 用反证法. 若存在点 $M' \in \Omega$, 使 $f(M') \neq 0$, 不妨设 $f(M') > 0$

由于 $f(M)$ 在 Ω 上连续, 则存在 M' 的邻域 $\Omega' = O(M', \delta) \subset \Omega (\delta > 0)$, 使得 $f(M) > \frac{f(M')}{2} > 0, \forall M \in \Omega'$

于是有 $\int_{\Omega'} f(M) d\Omega \geq \frac{f(M')}{2} \|\Omega'\| > 0$ 与题设 $\int_{\Omega'} f(M) d\Omega = 0$ 矛盾

则假设不成立, 即有 $f(M) \equiv 0$

令 $F(M) = f(M) - g(M)$, 则在 Ω 的任何部分区域 $\Omega' \subseteq \Omega$ 上 $\int_{\Omega'} F(M) d\Omega = \int_{\Omega'} f(M) d\Omega - \int_{\Omega'} g(M) d\Omega = 0$

从而由上面所证结论, 有 $F(M) \equiv 0$, 即 $f(M) - g(M) \equiv 0$ 亦即 $f(M) \equiv g(M)$.

4. 若 $|f(M)|$ 在 Ω 上可积, 那末 $f(M)$ 在 Ω 上是否可积? 考察函数 $f(x, y) = -1$, 当 x 和 y 中至少有一个是无理数时; $f(x, y) = 1$, 当 x 和 y 都是有理数时, 在 $[0, 1; 0, 1]$ 上的积分.

解: 未必.

事实上, $f(x, y)$ 在 $[0, 1; 0, 1]$ 上的上和、下和分别为 $S' = \sum_{i_k} M_{i_k} \Delta\Omega_{i_k} = 1, S = \sum_{i_k} m_{i_k} \Delta\Omega_{i_k} = -1$

其中 $M_{i_k} = \max_{[0, 1; 0, 1]} f(x, y) = 1, m_{i_k} = \min_{[0, 1; 0, 1]} f(x, y) = -1$

从而 $f(x, y)$ 在 $[0, 1; 0, 1]$ 上不可积

然而 $|f(x, y)| \equiv 1$ 在 $[0, 1; 0, 1]$ 上可积.

第二十章 重积分的计算及应用

§1. 二重积分的计算

1. 化二重积分

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的二次积分), 其中积分域 D 分别为:

- (1) D 是由 x 轴与 $x^2 + y^2 = r^2 (y > 0)$ 所围成的区域;
- (2) D 是由 $y = 0, y = x^2 (x > 0)$ 及 $x + y = 2$ 所围成的区域;
- (3) D 是由 $y = x, x = 2$ 及 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 所围成的区域;
- (4) D 是圆环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

解:

$$(1) I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y) dx$$

$$(2) I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^3} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$$

$$(3) I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy$$

$$(4) I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right] + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy =$$

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \left[\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right] + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

2. 设 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续, 其中 D 是由 $y = x, y = a$ 及 $x = b (b > a)$ 所围成的, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$$

证明: 由 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 故可积

令 $\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in [a, b; a, b] \setminus D \end{cases}$ 除 $y = x$ 外连续, 故必可积

$$\text{则} \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{[a, b; a, b]} \bar{f}(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_a^b \bar{f}(x, y) dy = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{[a, b; a, b]} \bar{f}(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_a^b \bar{f}(x, y) dx = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

3. 在下列积分中改变逐次积分的次序:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y) dy.$$

解:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy = \int_0^a dy \left[\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx \right] + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx.$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \\
& \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy - \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx. \\
(3) \quad & \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy. \\
(4) \quad & \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.
\end{aligned}$$

4. 计算下列二重积分:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \iint_{[a,b;c,d]} xy e^{x^2+y^2} dx dy; \\
(2) \quad & \iint_{\Omega} xy^2 dx dy, \Omega \text{ 是由抛物线 } y^2 = 2px \text{ 和直线 } x = \frac{\rho}{2} (\rho > 0) \text{ 所界的区域}; \\
(3) \quad & \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} \quad (a > 0), \Omega \text{ 是由圆心在点 } (a, a) \text{ 半径为 } a \text{ 且与坐标轴相切的圆周的较短一段弧和坐标轴所围成的区域}; \\
(4) \quad & \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy, \Omega \text{ 是以 } y = x, y = x + a, y = a \text{ 和 } y = 3a \quad (a > 0) \text{ 为边的区域}.
\end{aligned}$$

解:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \iint_{[a,b;c,d]} xy e^{x^2+y^2} dx dy = \int_a^b x e^{x^2} dx \int_c^d y e^{y^2} dy = \frac{1}{4} (e^{b^2} - e^{a^2})(e^{d^2} - e^{c^2}). \\
(2) \quad & \iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^{\frac{\rho}{2}} x dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y^2 dy = \frac{p\rho^3}{21} \sqrt{p\rho}. \\
(3) \quad & \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a-x}} \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dy = \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) a\sqrt{a}. \\
(4) \quad & \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx = 14a^4.
\end{aligned}$$

5. 证明

$$J = \int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b f(y)(b-y) dy = \int_a^b f(x)(b-x) dx$$

证明: 将 $\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy$ 逐项积分, 得 $\iint_{\Omega} f(y) dx dy$, 其中 Ω 是 $x = b, x = y, y = a$ 所围成的区域

对此积分可化为先对 x 后对 y 的积分, 则得

$$\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(y) dx = \int_a^b f(y)(b-y) dy = \int_a^b f(x)(b-x) dx.$$

6. 设平面上区域 D 在 x 轴和 y 轴上的投影长度为 l_x, l_y , D 的面积为 $|D|$, (α, β) 为 D 内任一点, 证明:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \left| \iint_D (x-\alpha)(y-\beta) dx dy \right| \leq l_x l_y |D|; \\
(2) \quad & \left| \iint_D (x-\alpha)(y-\beta) dx dy \right| \leq \frac{l_x^2 l_y^2}{4}.
\end{aligned}$$

证明:

(1) 由于 $(x-\alpha)(y-\beta)$ 在 D 上连续, 故由积分中值定理, 存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\left| \iint_D (x-\alpha)(y-\beta) dx dy \right| = \left| (\xi-\alpha)(\eta-\beta) \iint_D dx dy \right| \leq l_x l_y |D|$$

(2) 设 $l_x = b - a, l_y = d - c$, 则

$$\begin{aligned} \left| \iint_D (x - \alpha)(y - \beta) dx dy \right| &\leq \iint_D |x - \alpha||y - \beta| dx dy \leq \iint_{[a, b; c, d]} |x - \alpha||y - \beta| dx dy = \\ &\int_a^b |x - \alpha| dx \int_c^d |y - \beta| dy = \left(\int_a^\alpha (\alpha - x) dx + \int_\alpha^b (x - \alpha) dx \right) \left(\int_c^\beta (\beta - y) dy + \int_\beta^d (y - \beta) dy \right) = \\ &\frac{(b - \alpha)^2 + (\alpha - a)^2}{2} \cdot \frac{(d - \beta)^2 + (\beta - c)^2}{2} \leq \frac{(b - a)^2}{2} \cdot \frac{(d - c)^2}{2} = \frac{l_x^2 l_y^2}{4} \end{aligned}$$

7. 用极坐标计算 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 时, 积分限如何配置(写出下列区域上的两种逐次积分)?

- (1) Ω : 半圆 $x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$;
- (2) Ω : 半环 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x \geq 0$;
- (3) Ω : 圆 $x^2 + y^2 \leq ay (a > 0)$;
- (4) Ω : 正方形: $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$.

解:

- (1) $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{|a|} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \int_0^{|a|} r dr \int_0^{\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$.
- (2) $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{|a|}^{|b|} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \int_{|a|}^{|b|} r dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$.
- (3) $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \int_0^a r dr \int_{\arcsin \frac{r}{a}}^{\pi - \arcsin \frac{r}{a}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$.
- (4) $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
 $= \int_0^a r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \int_a^{\sqrt{2}a} r dr \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\arcsin \frac{a}{r}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$.

8. 在下列积分中引进新变量 u, v , 变换下列积分.

- (1) $\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$, 若 $\begin{cases} u = x, \\ v = \frac{y}{x}; \end{cases}$
- (2) $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy$, 若 $u = x + y, v = x - y$;
- (3) $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, 其中 Ω 是由曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 与坐标轴所界的区域. 若 $\begin{cases} x = u \cos^4 v \\ y = u \sin^4 v \end{cases}$

解:

- (1) 因 $\begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases}$, 则 $|J| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = u > 0$
于是 $\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy = \int_a^b u du \int_{\alpha}^{\beta} f(u, uv) dv$
- (2) 因 $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$, 则 $|J| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \frac{1}{2}$
于是 $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv$
- (3) 因 $\begin{cases} x = u \cos^4 v \\ y = u \sin^4 v \end{cases}$, 则 $|J| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \frac{u \sin^3 2v}{2}$
于是 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2v f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) dv = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2v dv \int_0^a u f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du$.

9. 应用极坐标计算下列二重积分:

$$(1) \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy;$$

$$(2) \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy;$$

$$(3) \iint_{\Omega} (x+y) dx dy, (\Omega \text{ 是圆 } x^2+y^2 \leq x+y \text{ 的内部}).$$

解:

$$(1) \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

$$(2) \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr = -6\pi^2$$

$$(3) \text{ 作变换 } x = \frac{1}{2} + r \cos \theta, y = \frac{1}{2} + r \sin \theta, \text{ 则 } |J| = r$$

$$\text{于是 } \iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [r + r^2(\sin \theta + \cos \theta)] dr = \frac{\pi}{2}.$$

10. 求由锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2+y^2}$ 、平面 $z = 0$ 及圆柱面 $x^2+y^2 = R^2$ 所围的立体体积.

解: 锥面 $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2+y^2}$ 、平面 $z = 0$ 及圆柱面 $x^2+y^2 = R^2$ 所围的立体在 XOY 平面上的射影域是圆域 $\Omega = \{(x, y) | x^2+y^2 \leq R^2\}$, 在第一象限部分记为 Ω_1
则利用对称性, 得所求立体体积为

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = 4 \iint_{\Omega_1} z dx dy = \frac{4h}{R} \iint_{\Omega_1} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \frac{4h}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

11. 求球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2 = ax$ ($a > 0$) 公共部分的体积.

解: 由对称性, 得 $V = 2 \iint_{\Omega} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{2}{3} a^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$

12. 求由抛物线 $y^2 = mx, y^2 = nx$ ($0 < m < n$) 和直线 $y = \alpha x, y = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$) 所围成区域的面积.

解: 作变换: $u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{y}{x}$, 则 $|J| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \frac{1}{\left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right|} = \frac{1}{\frac{y^2}{x^3}} = \frac{u}{v^4}$

$$\text{于是所求面积为 } D = \iint_{\Omega} dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v^4} \int_m^n u du = \frac{1}{6} (n^2 - m^2) \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right).$$

13. 求曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{xy}{c^2}$ 所围的面积.

解: 此曲线只在1、3象限且关于原点对称, 故只需计算图形在第一象限中的面积, 再2倍即可

令 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$, 则 $|J| = |ab|r, r = \frac{\sqrt{|ab|}}{|c|} \sqrt{\sin \theta \cos \theta}$

$$\text{于是 } D = \iint_D dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{|ab|}}{|c|} \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} |ab|r dr = \frac{a^2 b^2}{2c^2}.$$

14. 求一物体的体积, 此物体的界面为: 平面 $z = 0$, 抛物面 $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, 以及以球面 $x^2+y^2+(z-c)^2 = c^2$ 与这个抛物面的交线为准线的正柱面 ($a, b, c > 0$).

解: 将 $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ 代入球方程, 得 $x^2+y^2 + \left(\frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} - c \right)^2 = c^2$

令 $x = \sqrt{a} r \cos \theta, y = \sqrt{b} r \sin \theta$, 则 $r = 2\sqrt{c - (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta)}, |J| = \sqrt{ab} r$

$$\text{于是 } V = \iint_D \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sqrt{c - (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta)}} \frac{\sqrt{ab}}{2} r^3 dr = 4\sqrt{ab}\pi \left(\frac{3}{8} a^2 + \frac{3}{8} b^2 + \frac{1}{4} ab - ac - bc + c^2 \right).$$

15. 求边长为 a 的正方形薄板的质量, 设薄板上每一点的密度与该点距正方形某一顶点的距离成正比, 且在正方形的中点处密度为 ρ_0 .

解: 设某一顶点为原点 $(0, 0)$, 则 $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}$ 且当 $x = y = \frac{a}{2}$ 时, $\rho = \rho_0$, 于是 $k = \frac{\sqrt{2} \rho_0}{a}$

则密度函数为 $\rho(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{a} \rho_0 \sqrt{x^2 + y^2}$

于是利用第7题(4), 得

$$\begin{aligned} m &= \iint_{[0, a; 0, a]} \frac{\sqrt{2} \rho_0}{a} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} \frac{\sqrt{2} \rho_0}{a} r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sin \theta}} \frac{\sqrt{2} \rho_0}{a} r^2 dr \\ &= \frac{\rho_0 a^2}{3} [2 + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})]. \end{aligned}$$

§2. 三重积分的计算

1. 计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz, V: \text{由曲面 } z = xy, y = x, z = 0, x = 1 \text{ 所围成};$$

$$(2) \iiint_V xyz dx dy dz, V: \text{由曲面 } x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ 围成}.$$

解;

$$(1) \iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz = \frac{1}{364}.$$

$$(2) \iiint_V xyz dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{48}.$$

2. 指示下列三重积分的区域 V 的形状并改变积分次序:

$$(1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz;$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz;$$

$$(3) \int_1^2 dx \int_0^1 dy \int_{1-x-y}^0 f(x, y, z) dz;$$

$$(4) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz;$$

$$(5) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$$

解;

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \\ &= \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dy \int_y^1 dz \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz &= \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_{\frac{z}{x}}^x f(x, y, z) dy = \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_{\frac{z}{x}}^x f(x, y, z) dy \\ &= \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_y^1 f(x, y, z) dx + \int_0^1 dz \int_z^{\sqrt{z}} dy \int_{\frac{z}{y}}^1 f(x, y, z) dx \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dz \int_y^1 f(x, y, z) dx + \int_0^1 dy \int_{y^2}^y dz \int_{\frac{z}{y}}^1 f(x, y, z) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_1^2 dx \int_0^1 dy \int_{1-x-y}^0 f(x, y, z) dz &= \int_0^1 dy \int_1^2 dx \int_{1-x-y}^0 f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dy \int_{-y}^0 dz \int_1^2 f(x, y, z) dx + \int_0^1 dy \int_{-1-y}^{-y} dz \int_{1-y-z}^2 f(x, y, z) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} dz \int_{-1-z}^1 dy \int_{1-y-z}^2 f(x, y, z) dx + \int_{-1}^0 dz \int_0^{-z} dy \int_{1-y-z}^2 f(x, y, z) dx + \int_{-1}^0 dz \int_{-z}^1 dy \int_1^2 f(x, y, z) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{-1} dz \int_{-z}^2 dx \int_{1-x-z}^1 f(x, y, z) dy + \int_{-1}^0 dz \int_1^{1-z} dx \int_{1-x-z}^1 f(x, y, z) dy + \int_{-1}^0 dz \int_{1-z}^2 dx \int_0^1 f(x, y, z) dy \\
&= \int_1^2 dx \int_{1-x}^2 dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_1^2 dx \int_{-x}^{1-x} dz \int_{1-x-z}^1 f(x, y, z) dy \\
(4) \quad &\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \\
&= \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dx \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy \\
&= \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx = \int_{-1}^1 dy \int_{|y|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx \\
(5) \quad &\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \\
&= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy + \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dx \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dx \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \\
&= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx \\
&= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dx + \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^2+1} dz \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx
\end{aligned}$$

3. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$, 其中积分区域 V 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与抛物面 $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ 所围成的立体;

(2) $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$, 其中 V 是 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;

(3) $\iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz$, V 由两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ 的公共部分所组成;

(4) $\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \, dx \, dy \, dz$, V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

解:

(1) 利用柱面坐标, 得 $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} r z \, dz = \frac{13}{4} \pi$

(2) 利用球面坐标, 得 $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^4 \, d\rho = \frac{4}{5} \pi$

(3) 利用球面坐标, 得

$$\begin{aligned}
\iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^4 \, d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho^4 \, d\rho \\
&= \frac{59}{480} \pi R^5
\end{aligned}$$

(4) 由广义球面坐标, 得

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \, dx \, dy \, dz = abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

4. 利用球面坐标或柱面坐标计算下列曲面所界体积:

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ 的内部被 $x^2 + y^2 = 2Rx$ 所划出的部分;

(2) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

解;

- (1) 利用柱面坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ 且 $|J| = r$, 在此变换下, 曲面方程变为:
 $r^2 + z^2 = 4R^2, r = 2r \cos \theta$

$$\text{则 } V = \iiint_V dx dy dz = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R \cos \theta} r dr \int_0^{\sqrt{4R^2 - r^2}} dz = \frac{16}{3} R^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$$

- (2) 由题知立体在第一、第三、第六及第八卦限内, 对于这些卦限分别有
 $x, y, z \geq 0; x, y \leq 0, z \geq 0; x, z \leq 0, y \geq 0; x \geq 0, y, z \leq 0$ 因原式左端及右端当 x, y, z 中任两个同时变号时等式仍成立, 故立体在这四个卦限内的各部分, 一一对地对称于坐标轴之一.

由球面坐标 $x = \rho \sin \varphi \cos \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \varphi, |J| = \rho^2 \sin \varphi$

曲面方程变为: $\rho^6 = 3\rho^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta$ 即 $\rho^3 = 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta$,

且在第一卦限内, $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\text{于是 } V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{3 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta}} \rho^2 d\rho = \frac{1}{2}.$$

5. 利用适当的坐标变换计算下列曲面所围体积:

$$(1) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$(2) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1, (x > 0, y > 0, z > 0, a, b, c > 0)$$

$$(3) z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y, (\text{其中 } x, y > 0)$$

解;

- (1) 由广义球面坐标: $x = a\rho \sin \varphi \cos \theta, y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, z = c\rho \cos \varphi$, 其中 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$,
 这时 $|J| = abc\rho^2 \sin \varphi$

曲面方程变为: $\rho = \sin \varphi$

$$\text{则 } V = abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{\pi^2}{4} abc$$

- (2) 作变换: $x = ar \cos^2 \theta \cos \varphi, y = br \sin^2 \theta \cos \varphi, z = cr \sin \varphi$, 其中 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,
 这时 $|J| = 2abcr^2 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi$

$$\text{则 } V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (2abcr^2 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi) dr = \frac{abc}{3}$$

- (3) 令 $z = u(x^2 + y^2), xy = v, x = wy$, 则 $x = \sqrt{wv}, y = \sqrt{\frac{v}{w}}, z = u \left(wv + \frac{v}{w} \right)$

$$\text{此时 } |J| = \frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2}, \text{ 且 } 1 \leq u \leq 2, a^2 \leq v \leq 2a^2, \frac{1}{2} \leq w \leq 2$$

$$\text{于是 } V = \int_1^2 du \int_{a^2}^{2a^2} v dv \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2w^2} \right) dw = \frac{9}{4} a^4$$

6. 求具有单位体积 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的物体的质量, 若物体在点 $M(x, y, z)$ 的密度为 $\mu = x + y + z$.

$$\text{解; } m = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz = \frac{3}{2}.$$

§3. 积分在物理上的应用

1. 求下列曲线所界薄板的质心坐标:

(1) $ay = x^2, x + y = 2a \ (a > 0)$

(2) $r = a(1 + \cos \varphi) \ (0 \leq \varphi \leq \pi)$

解:

(1) 密度 ρ 为常数, 则 $x_G = \frac{\iint_{\Omega} x \, d\Omega}{\iint_{\Omega} d\Omega}, y_G = \frac{\iint_{\Omega} y \, d\Omega}{\iint_{\Omega} d\Omega}$

$$\text{由 } \iint_{\Omega} d\Omega = \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \frac{9}{2} a^2$$

$$\iint_{\Omega} x \, d\Omega = \int_{-2a}^a x \, dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = -\frac{9}{4} a^3$$

$$\iint_{\Omega} y \, d\Omega = \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y \, dy = \frac{36}{5} a^3$$

$$\text{则 } x_G = -\frac{a}{2}, y_G = \frac{8}{5} a$$

(2) 密度 ρ 为常数, 则 $x_G = \frac{\iint_{\Omega} r \cos \varphi \, d\Omega}{\iint_{\Omega} d\Omega}, y_G = \frac{\iint_{\Omega} r \sin \varphi \, d\Omega}{\iint_{\Omega} d\Omega}$

$$\text{由 } \iint_{\Omega} d\Omega = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r \, dr = \frac{3}{4} a^2 \pi$$

$$\iint_{\Omega} r \cos \varphi \, d\Omega = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 \cos \varphi \, dr = \frac{5}{8} a^3 \pi$$

$$\iint_{\Omega} r \sin \varphi \, d\Omega = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 \sin \varphi \, dr = \frac{4}{3} a^3$$

$$\text{则 } x_G = \frac{5}{6} a, y_G = \frac{16a}{9\pi}.$$

2. 求由下列曲面所界的物体的质心:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

(2) $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$

解:

(1) 密度 ρ 为常数, 则 $x_G = \frac{\iiint_V x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}, y_G = \frac{\iiint_V y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}, z_G = \frac{\iiint_V z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}$

令 $x = a\rho \sin \varphi \cos \theta, y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, z = c\rho \cos \varphi$, 其中 $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 此时 $|J| = abc\rho^2 \sin \varphi$

$$\text{则 } \iiint_V dx \, dy \, dz = abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{\pi}{6} abc$$

$$\iiint_V x \, dx \, dy \, dz = a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{16} a^2 bc$$

$$\text{于是 } x_G = \frac{3}{8} a, \text{ 由对称性, 得 } y_G = \frac{3}{8} b, z_G = \frac{3}{8} c$$

(2) 密度 ρ 为常数, 则 $x_G = \frac{\iiint_V x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}, y_G = \frac{\iiint_V y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}, z_G = \frac{\iiint_V z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}$

$$\text{由 } \iiint_V dx \, dy \, dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{a^4}{6}$$

$$\iiint_V x \, dx \, dy \, dz = \int_0^a x \, dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{a^5}{15}$$

$$\iiint_V y \, dx \, dy \, dz = \frac{a^5}{15}, \quad \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \frac{7}{180} a^6$$

$$\text{则 } x_G = \frac{2}{5} a, y_G = \frac{2}{5} a, z_G = \frac{7}{30} a^2.$$

3. 求均匀分布于两个圆 $r = 2 \sin \theta$ 及 $r = 4 \sin \theta$ 之间的区域上的质量的质心.

解: 由对称性, 得 $\bar{x} = 0$

$$\text{又 } \bar{y} = \frac{1}{3\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{2 \sin \theta}^{4 \sin \theta} r^2 \sin \theta \, dr = \frac{7}{3}, \quad \text{则所求形心为 } \left(0, \frac{7}{3}\right).$$

4. 在某一生产过程中, 要在半圆形的直边上添上一个边与直径等长的矩形, 使整个平面图形的质心落在圆心上, 试求矩形的另一边长.

解: 设密度 ρ 为常数, 矩形的另一边长为 l , 圆心在坐标原点 $(0, 0)$, 取圆位于 x 轴上方, 取矩形位于 x 轴下方

$$\text{于是 } \bar{x} = \frac{\rho \int_{-R}^R x \, dx \int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy}{\rho \left(\frac{1}{2} \pi R^2 + 2Rl\right)} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\rho \int_{-R}^R dx \int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}} y \, dy}{\rho \left(\frac{1}{2} \pi R^2 + 2Rl\right)} = \frac{2}{\pi R + 4l} \left(\frac{2}{3} R^2 - l^2\right)$$

$$\text{令 } \bar{y} = 0, \quad \text{则得 } l = \frac{\sqrt{6}}{3} R.$$

5. 求均匀分布在由 $y = x^2$ 与 $y = 1$ 所围成的平面图形上的质量关于直线 $y = -1$ 的转动惯量.

$$\text{解: } I_{y=-1} = \iint_{\Omega} (y+1)^2 \, d\Omega = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y+1)^2 \, dy = \frac{368}{105}.$$

6. 求由下列曲面所界均匀体对于所示轴的转动惯量:

$$(1) \quad z = x^2 + y^2, x + y = \pm 1, x - y = \pm 1, z = 0 \text{ 关于 } z \text{ 轴};$$

$$(2) \quad \text{长方体关于它的一棱.}$$

解:

- (1) 曲面所界均匀物体对于 OZ 轴的转动惯量记为 I_{OZ}

$$\begin{aligned} \text{则 } I_{OZ} &= \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} dy \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) \, dz + \int_{-1}^0 dx \int_{-(1+x)}^{x+1} dy + \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) \, dz = \frac{14}{45} \end{aligned}$$

- (2) 设长方体 $0 \leq z \leq c, 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq a$

$$\text{关于 } z \text{ 轴的转动惯量为 } I_{OZ} = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2 + y^2) \, dz = \frac{abc}{3} (a^2 + b^2).$$

7. 求均匀薄片 $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$ 对于 z 轴上一点 $(0, 0, c)$ ($c > 0$) 处单位质量的引力.

解: 引力在 OX, OY 轴上的射影为 0, 即 $F_x = F_y = 0$, 设 $\rho = \rho_0$

$$\text{则 } F_z = k \iint_{\Omega} \rho_0 \frac{c}{d^3} \, d\Omega = k \rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{cr}{(r^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \, dr = 2k \rho_0 \pi c \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2}} \right].$$

8. 求均匀柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$ 对于 $p(0, 0, c)$ ($c > h$) 点处的单位质量的引力.

解: 设 $\rho = \rho_0$, 由对称性, 得引力在 OX, OY 轴上的射影为 0, 即 $F_x = F_y = 0$

利用柱面坐标, 得引力在 OZ 轴上的射影为:

$$\begin{aligned} F_z &= k \rho_0 \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^h \frac{z-c}{(x^2 + y^2 + (z-c)^2)^{\frac{3}{2}}} \, dz = k \rho_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \, dr \int_0^h \frac{z-c}{[r^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \, dz \\ &= 2\pi k \rho_0 (\sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + (c-h)^2} - h). \end{aligned}$$

§4. 广义重积分

1. 计算下列广义重积分之值:

$$(1) \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q}$$

$$(2) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \text{ 并由此证明概率积分}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1$$

解:

$$(1) \text{ 由于被积函数非负, 故 } I = \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q}$$

当 $q \leq 1$ 时, 由 $x \geq 1$, 知 $0 < \frac{1}{x} \leq 1$, 则得积分 $\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q}$ 发散且有 $\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q} = +\infty$,

$$\text{于是 } I = \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = +\infty$$

$$\text{当 } q > 1 \text{ 时, } \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q} = \frac{x^{q-1}}{q-1}$$

$$\text{此时, 当 } p > q \text{ 时, } I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q} = \frac{1}{q-1} \int_1^{+\infty} x^{q-p-1} dx = \frac{1}{(q-1)(p-q)}$$

$$\text{当 } p \leq q \text{ 时, } (p+1)-q \leq 1, \text{ 则积分 } \frac{1}{q-1} \int_1^{+\infty} x^{q-p-1} dx = +\infty, \text{ 从而得 } I = \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = +\infty$$

$$\text{综上所述, 当 } p > q > 1 \text{ 时, } I = \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \frac{1}{(q-1)(p-q)}, \text{ 其余情况 } I = +\infty.$$

$$(2) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\varepsilon \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi.$$

$$(3) \text{ 作变换 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, r > 0), |J| = r$$

$$\text{则 } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \pi.$$

$$\text{由 } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \text{ 且 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \text{ 为某一}$$

$$\text{值} \\ \text{则 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

2. 讨论下面广义重积分的收敛性:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

$$(2) \iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy, \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$$

$$(3) \int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x-y|^p} dx dy, \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$$

$$(4) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dx dy, \quad 0 < m \leq |\varphi(x,y)| \leq M$$

解:

$$(1) \text{ 因被积函数为正且关于 } OX, OY \text{ 轴对称, 则 } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+x^p)(1+y^q)}$$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \frac{1}{1+x^p} = 1$, 则由无穷限广义积分柯西判别法的极限形式, 得

当 $p > 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p}$ 收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p}$ 发散

同理可得, 当 $q > 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q}$ 收敛; 当 $q \leq 1$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q}$ 发散

综上所述, 当 $p > 1$ 且 $q > 1$ 时, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 收敛, 其余情况均发散.

$$(2) \text{ 因 } \frac{m}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \frac{M}{(1+x^2+y^2)^p}$$

则由广义重积分的比较判别法及广义重积分性质, 得 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$ 与 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$

同敛散

由被积函数的对称性及非负性, 得 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p} = 2 \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}$

由于 $0 \leq y \leq 1$, 则

若 $p \geq 0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p}$

若 $p < 0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p}$

对于 $\alpha > 0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p} \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^p} = 1$, 则积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^p}$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛; 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散

于是 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛; 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散

从而 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛; 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散.

$$(3) \text{ 因 } 0 < \frac{m}{|x-y|^p} \leq \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p} \leq \frac{M}{|x-y|^p}$$

则由广义重积分的比较判别法及广义重积分性质, 得 $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p} dx dy$ 与 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 同敛散

由被积函数的对称性及非负性, 得 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p} = 2 \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p}$

当 $p < 1$ 时, $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} = \frac{a^{2-p}}{(2-p)(1-p)}$

则 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p} = 2 \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} = \frac{2a^{2-p}}{(2-p)(1-p)}$

当 $p \geq 1$ 时, $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^a dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^p}$

当 $p = 1$ 时, $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^a dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{x-y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (a \ln a - a + \varepsilon - a \ln \varepsilon) = +\infty$

则 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 当 $p = 1$ 时发散;

当 $p = 2$ 时, $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^a dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{a + \varepsilon \ln \varepsilon}{\varepsilon} - 1 - \ln a \right) = -\infty$

则 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 当 $p = 2$ 时发散;

$$\begin{aligned} & \text{当 } p > 1 \text{ 且 } p \neq 2 \text{ 时, } \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^a dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^p} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\frac{1}{(p-1)\varepsilon^{p-1}} \left(a - \frac{p-1}{p-2} \varepsilon \right) + \frac{1}{(p-1)(p-2)a^{p-2}} \right] = +\infty \end{aligned}$$

则 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 当 $p > 1$ 且 $p \neq 2$ 时发散

综上可知 $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p} dx dy$ 当 $p < 1$ 时收敛; 当 $p \geq 1$ 时发散.

(4) $(0,0)$ 是奇点, 由于 $x^2 + xy + y^2 > 0$ (当 $(x,y) \neq (0,0)$), 则

$$\frac{m}{(x^2 + xy + y^2)^p} \leq \frac{\varphi(x,y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2 + xy + y^2)^p}$$

由广义重积分的比较判别法及广义重积分性质, 得 $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} dx dy$ 与 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p}$

同敛散

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \sin \theta \cos \theta)^p} = N \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$= \begin{cases} N \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-\ln \varepsilon) = +\infty, & p = 1 \\ N \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1 - \varepsilon^{2-2p}}{2-2p} = \begin{cases} \frac{N}{2-2p}, & p < 1 \\ \infty, & p > 1 \end{cases} \end{cases} \quad \left(\text{其中 } N = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \sin \theta \cos \theta)^p} \text{ 为常义积分, 为常量} \right)$$

总之, $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛; 当 $p \geq 1$ 时发散

从而 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} dx dy$ 当 $p < 1$ 时收敛; 当 $p \geq 1$ 时发散.

3. 证明 设 D 是由在第一象限的抛物线 $y = x^2$, 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及 x 轴所围成的区域, 则 $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$ 存在.

证明: $(0,0)$ 是奇点

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{\theta_0} d\theta \int_{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}^1 \frac{dr}{r} = \int_0^{\theta_0} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta, 0 \text{ 是奇点}$$

$$\left(\text{其中 } \theta_0 \text{ 满足 } \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} = 1 \text{ 即 } \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

因 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \theta^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = 0$, 则由柯西判别法的极限形式, 得 $\int_0^{\theta_0} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta$ 收敛

从而原积分 $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$ 存在.

4. 求均匀正圆锥体关于在它的顶点处的质量为 m 的质点的引力.

解: 引力在 OX, OY 轴上的射影为 0, 即 $F_x = F_y = 0$,

$$F_z = \iiint_V \frac{mz}{gr^3} dV = \frac{m}{g} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \int_0^{\frac{h}{R}\rho} \frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz = \frac{2mR\pi}{gl} (l - g).$$

第二十一章 曲线积分和曲面积分的计算

§1. 第一类曲线积分的计算

1. 计算 $\int_l (x+y) ds$, l 是以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形.

解: $I = \int_l (x+y) ds = \left\{ \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BO}} \right\} (x+y) ds$

在直线段 \overline{OA} 上, $y=0, ds=dx$, 则 $\int_{\overline{OA}} (x+y) ds = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$;

在直线段 \overline{AB} 上, $y=1-x, ds=\sqrt{2} dx$, 则 $\int_{\overline{AB}} (x+y) ds = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}$;

在直线段 \overline{BO} 上, $x=0, ds=dy$, 则 $\int_{\overline{BO}} (x+y) ds = \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}$

于是 $I = 1 + \sqrt{2}$.

2. 计算 $\int_l (x^2 + y^2) ds$, l 是以原点为中心, 半径为 R 的左半圆周.

解: 因 $l: x = R \cos \theta, y = R \sin \theta, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$, 则 $ds = \sqrt{x_\theta'^2 + y_\theta'^2} d\theta = R d\theta$

于是 $\int_l (x^2 + y^2) ds = \pi R^3$.

3. 计算 $\int_l (x^2 + y^2 + z^2) ds$, l 是圆螺旋线: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解: 因 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$

则 $I = \int_l (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3} \pi (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. 计算 $\int_l x^2 ds$, l 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 相交的圆周.

解: 由对称性, 得 $\int_l x^2 ds = \int_l y^2 ds = \int_l z^2 ds$, 则 $\int_l x^2 ds = \frac{1}{3} \int_l (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_l ds = \frac{2}{3} \pi a^3$.

5. 计算 $\int_l \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$, l 是螺旋线: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$, ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解: 因 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{2} dt$, 则 $I = \int_l \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi^3 a$.

6. 设一金属丝 l 的方程为:

$$x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, (0 \leq t \leq t_0)$$

它在每一点的密度与该点的矢径平方成反比, 且在点 $(1,0,1)$ 处为 1, 求它的质量.

解: 因 $\rho = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}$ 且在点 $(1,0,1)$ 处 $\rho = 1$, 则 $k = 2$, 于是 $\rho = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} = e^{-2t}$

又 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{3} e^t dt$, 则 $m = \int_l \rho ds = \sqrt{3} (1 - e^{-t_0})$.

7. 求椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t$ 周界的质量 ($0 \leq t \leq 2\pi$), 若曲线在点 $M(x,y)$ 的线性密度为 $\rho = |y|$.

解: $M = \int_l |y| ds$, 其中 l 为椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

(1) 设 $a > b$, 则 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = a \sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \cos^2 t} dt$, 其中 $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

于是 $M = \int_l |y| ds = \int_0^\pi ab \sin t \sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \cos^2 t} dt + \int_\pi^{2\pi} a(-b \sin t) \sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \cos^2 t} dt =$
 $2ab \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} + \frac{2ab}{\varepsilon_1} \arcsin \varepsilon_1 = 2b^2 + \frac{2ab}{\varepsilon_1} \arcsin \varepsilon_1$

(2) 设 $a < b$, 则 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = a \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 \cos^2 t} dt$, 其中 $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$

于是 $M = \int_l |y| ds = \int_0^\pi ab \sin t \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 \cos^2 t} dt + \int_\pi^{2\pi} a(-b \sin t) \sqrt{1 + \varepsilon_2^2 \cos^2 t} dt =$
 $2ab \sqrt{1 + \varepsilon_2^2} + \frac{2ab}{\varepsilon_2} \ln(\varepsilon_2 + \sqrt{1 + \varepsilon_2^2}) = 2b^2 + \frac{2ab}{\varepsilon_2} \ln(\varepsilon_2 + \sqrt{1 + \varepsilon_2^2})$

(3) 若 $a = b$, 则 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = a dt$, 于是 $M = \int_l |y| ds = \int_0^\pi a^2 \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} a(-a \sin t) dt = 4a^2$

$$\text{从而 } M = \begin{cases} 2b^2 + \frac{2ab}{\varepsilon_1} \arcsin \varepsilon_1, & a > b \\ 4a^2, & a = b \\ 2b^2 + \frac{2ab}{\varepsilon_2} \ln(\varepsilon_2 + \sqrt{1 + \varepsilon_2^2}), & a < b \end{cases}$$

§2. 第一类曲面积分的计算

1. 计算下列曲面面积:

- (1) $z = axy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内的部分;
- (2) 锥面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$ 与平面 $x + y + z = 2a (a > 0)$ 所界部分的表面;
- (3) 柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被二平面 $x + z = 0, x - z = 0 (x > 0, y > 0)$ 所截部分.

解:

- (1) 由 $z_x = ay, z_y = ax$, 得 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + a^2x^2 + a^2y^2}$
由对称性, 并利用柱面坐标, 得

$$S = 4 \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{1 + a^2x^2 + a^2y^2} \, dx \, dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \sqrt{1 + a^2r^2} \, r \, dr = \frac{2}{3a^2} \pi \left[(1 + a^4)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

- (2) 曲面的交线在 xoy 平面上的射影为 $3x^2 + 3y^2 = (2a - x - y)^2$ 即 $x^2 + y^2 - xy + 2a(x + y) = 2a^2$

$$\text{令 } x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \text{ 则方程变为 } \frac{(x' + 2\sqrt{2}a)^2}{(2\sqrt{3}a)^2} + \frac{y'^2}{(2a)^2} = 1$$

由此可见, 曲面所界的物体在 xoy 平面上的射影域为以 $2a$ 为短半轴, $2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆
物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成

$$\text{对于 } z = 2a - x - y, z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \text{ 分别有 } \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{3}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 2$$

$$\text{于是物体的表面积为 } S = \iint_{\Omega} \sqrt{3} \, dx \, dy + \iint_{\Omega} 2 \, dx \, dy = (\sqrt{3} + 2)\pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}\pi = 4\pi(3 + 2\sqrt{3})a^2.$$

- (3) 由 $y_x = -\frac{x}{y}, y_z = 0$, 得 $\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$\text{则 } S = \iint_{\sigma_{xz}} \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx \, dz = \int_0^{|a|} dx \int_{-x}^x \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dz = 2a^2.$$

2. 计算第一类曲面积分:

- (1) $\iint_S (x + y + z) \, dS$, S : 左半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y \leq 0$;
- (2) $\iint_S x \, dS$, S : 螺旋面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = cv$ 上的一部分 $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi$;
- (3) $\iint_S dS$, S : 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz (c > 0)$ 夹在锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 内的部分;
- (4) $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$, S : 体积 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界;
- (5) $\iint_S \frac{dS}{r^2}$, S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 介于 $z = 0$ 和 $z = H$ 之间的部分, 其中 r 为表面上的点到原点的距离.

解:

- (1) 将 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 投影到 xoz 平面, 此时有 $y = -\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$

$$\text{则 } y_x = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, y_z = \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, \text{ 于是 } \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}$$

$$\text{于是 } \iint_S (x + y + z) \, dS = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}} (x - \sqrt{a^2 - x^2 - z^2} + z) \, dz = -\pi a^3$$

- (2) $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1, F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0, G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = u^2 + c^2$

$$\text{则 } \iint_S x \, dS = \iint_{\Sigma} u \cos v \sqrt{u^2 + c^2} \, du \, dv = \int_0^a u \sqrt{u^2 + c^2} \, du \int_0^{2\pi} \cos v \, dv = 0$$

(3) 因 $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$, 则 $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$, $z = c + \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$

于是 $z_x = -\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}}$, $z_y = -\frac{y}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}}$, 则 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}}$

于是 $\iint_S dS = \iint_{\sigma} \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^c \frac{cr}{\sqrt{c^2 - r^2}} dr = 2\pi c^2$.

(4) 分为两部分:

第一部分: $z = 1$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 1$; 第二部分: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2}$

则 $\iint_S (x^2 + y^2) dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{2} r^3 dr = \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$.

(5) $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, $z = z$ ($0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq z \leq H$)

则 $E = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = R^2$, $F = x_\theta x_z + y_\theta y_z + z_\theta z_z = 0$, $G = x_z^2 + y_z^2 + z_z^2 = 1$

于是 $\sqrt{EG - F^2} = R$, 从而 $\iint_S \frac{dS}{r^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H \frac{R}{R^2 + z^2} dz = 2\pi \arctan \frac{H}{R}$.

3. 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 1$ 的质量. 此壳的密度为 $\rho = z$.

解: 因 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 则 $z_x = x$, $z_y = y$, 于是 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

则质量 $M = \iint_S \rho dS = \frac{1}{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = \frac{2(1 + 6\sqrt{3})}{15} \pi$.

§3. 第二类曲线积分

1. 计算下列第二类曲线积分:

- (1) $\int_l (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, l 为 $y = x^2$ 从 $(1, 1)$ 到 $(-1, 1)$;
- (2) $\oint_l (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, l 为以 $A(1, 0), B(2, 0), C(2, 1), D(1, 1)$ 为顶点的正方形, 正向;
- (3) $\int_l (2a - y) dx + dy$, l 为旋轮线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, 从 $(0, 0)$ 到 $(2\pi, 0)$;
- (4) $\int_l y dx - x dy + (x^2 + y^2) dz$, l 为曲线 $x = e^t, y = e^{-t}, z = at$ 从 $(1, 1, 0)$ 到 (e, e^{-1}, a)

解:

- (1) $\int_l (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_1^{-1} [x^2 - 2x^3 + 2x(x^4 - 2x^3)] dx = \frac{14}{15}$.
- (2) $I = \oint_l (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = \left(\int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CD}} + \int_{\overline{DA}} \right) (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$
沿 \overline{AB} , $y = 0$, 故 $\int_{\overline{AB}} (x^2 - y^2) dy = 0$
同样, 有 $\int_{\overline{BC}} (x^2 + y^2) dx = \int_{\overline{CD}} (x^2 - y^2) dy = \int_{\overline{DA}} (x^2 + y^2) dx = 0$
则 $I = \int_1^2 x^2 dx + \int_0^1 (4 - y^2) dy + \int_2^1 (x^2 + 1) dx = \int_1^0 (1 - y^2) dy = 2$.
- (3) $\int_l (2a - y) dx + dy = \int_0^{2\pi} [(a + a \cos t) \cdot a(1 - \cos t) + a \sin t] dt = a^2 \pi$.
- (4) $\int_l y dx - x dy + (x^2 + y^2) dz = \int_0^1 [e^{-t} \cdot e^t - e^t(-e^{-t}) + (e^{2t} + e^{-2t})a] dt = 2 + \frac{a}{2}(e^2 - e^{-2})$.

2. 求积分

$$J = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \cdot d\mathbf{r}$$

其中 $d\mathbf{r}$ 为矢径方向, 积分路径分别为:

- (1) 沿直线;
- (2) 沿曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j}(1 - \cos \varphi) + \mathbf{k} \frac{2\varphi}{\pi}$, $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$.

解:

- (1) 直线方程为: $x = y = z$
则 $J = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz =$
 $\int_0^1 (x - x) dx + \int_0^1 (y - y) dy + \int_0^1 (z - z) dz = 0$.
- (2) $J = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{2\varphi}{\pi} - (1 - \cos \varphi) \right] \cos \varphi + \left(\sin \varphi - \frac{2\varphi}{\pi} \right) \sin \varphi + [(1 - \cos \varphi) - \sin \varphi] \cdot \frac{2}{\pi} \right\} d\varphi =$
 $1 - \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi}$.

3. 设光滑闭曲线 L 在光滑曲面 S 上, S 的方程为 $z = f(x, y)$, 曲线 L 在 XY 面上的投影曲线为 l , 函数 $P(x, y, z)$ 在 L 上连续, 证明

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P[x, y, f(x, y)] dx$$

证明: 不妨设 S 为曲面的上侧, $z = f(x, y), (x, y) \in D$

则曲线的边界 L 在 XY 平面上的投影应是逆时针方向的曲线 $l: x = \varphi(t), y = \psi(t), a < b, a \leq t \leq b$

空间曲线 L 的方程随之可表为 $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = f[\varphi(t), \psi(t)], a \leq t \leq b$

于是 $\oint_L P(x, y, z) dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t), f[\varphi(t), \psi(t)]) \varphi'(t) dt = \oint_l P[x, y, f(x, y)] dx$.

4. 证明: 对于曲线积分的估计式为

$$\left| \int_l P dx + Q dy \right| \leq LM, \quad (\text{式中 } L \text{ 为积分曲线段长度})$$

$$M = \max_{(x,y) \in l} \sqrt{P^2 + Q^2}$$

利用这个不等式估计:

$$I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

并证明 $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

证明:

$$(1) \left| \int_l P dx + Q dy \right| = \left| \int_l [P \cos \alpha + Q \sin \alpha] dS \right| \leq \int_l |(P, Q) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)| dS \leq \int_l |(P, Q)| |(\cos \alpha, \sin \alpha)| dS = \int_l \sqrt{P^2 + Q^2} dS = \sqrt{P^2(\xi, \eta) + Q^2(\xi, \eta)} \int_l dS \leq ML.$$

$$(2) \text{ 因 } P = \frac{y}{(x^2 + xy + y^2)^2}, Q = \frac{-x}{(x^2 + xy + y^2)^2}, \text{ 则 } \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \frac{R}{(R^2 + xy)^2}$$

$$\text{于是 } M = \max_{(x,y) \in l} \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{R}{(R^2 + xy)^2} \bigg|_{\substack{x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R \\ y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} R}} = \frac{4}{R^3}$$

$$\text{则 } 0 \leq |I_R| = \left| \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2} \right| \leq LM = \frac{8\pi}{R^2}$$

$$\text{又 } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{8\pi}{R^2} = 0, \text{ 则 } \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0.$$

5. 设平面区域 D 由一条连续闭曲线 L 所围成, 区域 D 的面积设为 S , 推导用曲线积分计算面积 S 的公式:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

证明:

(1) 首先考虑图形 $D = PQRS$, 其中 $QR, PS \parallel Y$ 轴, $PQ: y = y_0(x); SR: y = y_1(x)$ 且在 $[a, b]$ 上连续
这时 $L: PSRQP$

将 D 的面积看作两曲边梯形 $abPS$ 和 $abQP$ 的面积之差 (其中 a, b 分为 SP, RQ 与 X 轴的交点)

$$\text{于是有 } S = \int_a^b [y_1(x) - y_0(x)] dx$$

$$\text{另一方面, 据 II 型曲线计算公式, 有 } \int_{PQ} y dx = \int_a^b y_0(x) dx, \int_{SR} y dx = \int_a^b y_1(x) dx$$

$$\text{并注意到 } \int_{PS} y dx = \int_{PQ} y dx = 0$$

$$\text{则 } - \int_L y dx = \int_{PSRQP} y dx = \left(\int_{PS} + \int_{SR} + \int_{RQ} + \int_{QP} \right) y dx = \int_a^b y_1(x) dx - \int_a^b y_0(x) dx = S$$

$$\text{即 } S = - \int_L y dx.$$

(2) 对于区域 $D = PQRS$, 其中 $PQ, RS \parallel X$ 轴, 同理, 有 $\int_L x dy = S$.

(3) 对于更复杂的区域情形可化为上两种情形, 同样计算诸小块面积, 然后相加, 注意重复路线相互抵消, 同样可得上两种结果.

$$\text{综上所述, 有 } S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

6. 计算下列曲线所围区域的面积:

(1) 椭圆: $x = a \cos t, y = b \sin t, (0 \leq t \leq 2\pi)$;

(2) 星形线: $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, (0 \leq t \leq 2\pi)$.

解：

$$(1) \quad S = \frac{1}{2} \oint_L x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = \pi ab.$$

$$(2) \quad S = \frac{1}{2} \oint_L x \, dy - y \, dx = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

§4. 第二类曲面积分

1. 计算 $\iint_S (x+y) dy dz + (y+z) dz dx + (z+x) dx dy$

S 是以原点为中心的正方体(每边长度为2)的边界, 指向外侧.

$$\text{解: } I = \iint_S (x+y) dy dz + (y+z) dz dx + (z+x) dx dy = \iint_S (x+y) dy dz + \iint_S (y+z) dz dx + \iint_S (z+x) dx dy$$

$$\text{计算 } I = \iint_S (x+y) dy dz$$

因正方体六个面中有四个面垂直于 YOZ 平面, 则此四个面的面积为0

$$\text{于是 } \iint_S (x+y) dy dz = \iint_{\substack{-1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 1}} (1+y) dy dz - \iint_{\substack{-1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 1}} (-1+y) dy dz = 2 \iint_{\substack{-1 \leq y \leq 1 \\ -1 \leq z \leq 1}} dy dz = 8$$

$$\text{同理可得 } \iint_S (y+z) dz dx = 8, \iint_S (z+x) dx dy = 8$$

$$\text{于是 } I = \iint_S (x+y) dy dz + (y+z) dz dx + (z+x) dx dy = 24.$$

2. 计算 $\iint_S f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy$

式中 f, g, h 为连续函数, S 为平行六面体 $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c)$ 的边界, 指向外侧.

解: 设 $S_1: x=a; S_2: x=0; S_3: y=b; S_4: y=0; S_5: z=c; S_6: z=0$

$$\text{则 } I = \iint_S f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy =$$

$$\left(\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} + \iint_{S_5} + \iint_{S_6} \right) f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy$$

$$\text{因 } \iint_{S_1} f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy = \iint_{S_1} f(x) dy dz = f(a)bc$$

$$\iint_{S_2} f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy = \iint_{S_2} f(x) dy dz = -f(0)bc$$

$$\iint_{S_3} f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy = \iint_{S_3} g(y) dz dx = g(b)ac$$

$$\iint_{S_4} f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy = \iint_{S_4} g(y) dz dx = -g(0)ac$$

$$\iint_{S_5} f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy = \iint_{S_5} h(z) dx dy = h(c)ab$$

$$\iint_{S_6} f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy = \iint_{S_6} h(z) dx dy = -h(0)ab$$

$$\text{则 } I = \iint_S f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy = abc \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right].$$

3. 计算 $\iint_S yz dz dx$

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 的上半表面的上侧.}$$

解: 将椭圆面表为参数 (φ, θ) 形式: $x = a \sin \varphi \cos \theta, y = b \sin \varphi \sin \theta, z = c \cos \varphi \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right)$

$$I = \iint_S yz dz dx = \pm \iint_{\Omega} bc \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cdot B d\varphi d\theta, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为 } \varphi\theta \text{ 平面上的区域 } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{且 } B = z_\varphi x_\theta - x_\varphi z_\theta = ac \sin^2 \varphi \sin \theta$$

$$\text{因积分沿上侧, 应取正号, 即得 } I = abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} abc^2$$

4. 计算 $\iint_S z \, dx \, dy + x \, dy \, dz + y \, dx \, dz$

S 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截部分的外侧.

解: 由于柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 在 XOY 平面上的投影为一圆周, 故其面积为 0, 从而 $\iint_S z \, dx \, dy = 0$

$$\text{又 } \iint_S x \, dy \, dz = \left(\iint_{S_{\text{前}}} + \iint_{S_{\text{后}}} \right) x \, dy \, dz = \iint_{S_{yz}} \sqrt{1-y^2} \, dy \, dz - \iint_{S_{yz}} (-\sqrt{1-y^2}) \, dy \, dz =$$

$$2 \int_0^2 dz \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \, dy = 3\pi$$

$$\iint_S y \, dx \, dz = \left(\iint_{S_{\text{右}}} + \iint_{S_{\text{左}}} \right) y \, dx \, dz = 2 \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = 3\pi$$

$$\text{则 } \iint_S z \, dx \, dy + x \, dy \, dz + y \, dx \, dz = 6\pi.$$

5. 计算 $\iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy$

S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解: 据轮换对称, 只需计算 $\iint_S x^3 \, dy \, dz$, 且 $\iint_S x^3 \, dy \, dz = \iint_{S_1} x^3 \, dy \, dz + \iint_{S_2} x^3 \, dy \, dz$

其中 S_1 及 S_2 分别表示下半球面及上半球面, 即 $S_2: x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ 应取上侧; $S_1: x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$ 应取下侧

$$\text{则 } \iint_S x^3 \, dy \, dz = \iint_{S_2} x^3 \, dy \, dz + \iint_{S_1} x^3 \, dy \, dz = 2 \iint_{y^2+z^2 \leq a^2} (a^2 - y^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \, dy \, dz =$$

$$2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \, dr = \frac{4}{5} \pi a^5$$

$$\text{于是 } \iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy = \frac{12}{5} \pi a^5.$$

第二十二章 各种积分间的联系和场论初步

§1. 各种积分间的联系

1. 利用格林公式计算曲线积分:

- (1) $\oint_l xy^2 dx - x^2 y dy, l$: 圆周 $x^2 + y^2 = a^2$;
- (2) $\oint_l (x+y) dx - (x-y) dy, l$: 椭圆周 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- (3) $\oint_l (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy, l$: 顶点为 $A(1, 1), B(3, 2), C(2, 5)$ 的三角形的边界;
- (4) $\int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$,
其中 \widehat{AMO} 为由点 $A(a, 0)$ 至点 $O(0, 0)$ 经过上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 的道路;
- (5) $\oint_l e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy], l$: 区域 $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$ 的边界.

解:

- (1) 由格林公式, 此时 $P = xy^2, Q = -x^2 y$
则 $\oint_l xy^2 dx - x^2 y dy = \iint_D (-2xy - 2xy) dx dy = -4 \int_{-a}^a x dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy = 0$
- (2) $P = x + y, Q = -(x - y)$, 则 $\oint_l (x + y) dx - (x - y) dy = -2 \iint_D dx dy = -2\pi ab$
- (3) AB, BC, CA 的方程分别为: $AB: x - 2y + 1 = 0; BC: 3x + y - 11 = 0; CA: 4x - y - 3 = 0$
 $P = (x + y)^2, Q = -(x^2 + y^2)$
则 $I = \oint_l (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy = -2 \iint_D (2x + y) dx dy$
 $= -2 \left[\int_1^2 dx \int_{\frac{x+1}{2}}^{4x-3} (2x + y) dy + \int_2^3 dx \int_{\frac{x+1}{2}}^{11-3x} (2x + y) dy \right] = -46\frac{3}{2}$
- (4) 在 Ox 轴上连接点 $O(0, 0)$ 与 $A(a, 0)$, 这样便构成封闭的半圆形 $AMOA$, 且在线段 OA 上
 $\int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0$
则 $\int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$
利用格林公式, 得 $\int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = m \iint_D dx dy = \frac{\pi m}{8} a^2$
于是 $\int_{\widehat{AMO}} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \frac{\pi m^2}{8} a^2$
- (5) $P = e^x(1 - \cos y), Q = (y - \sin y)(-e^x)$
则 $\oint_l e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy] = - \iint_D ye^x dx dy = - \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y dy = -\frac{1}{5} (e^\pi - 1)$.

2. 利用格林公式计算下列曲线所围面积:

- (1) 星形线: $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$;
- (2) 抛物线: $(x + y)^2 = ax (a > 0)$ 和 x 轴

解:

- (1) 由格林公式, 面积 D 为 $D = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_l x dy - y dx$
又 $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$, 则 $D = \frac{1}{2} \oint_l x dy - y dx = \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi ab$

(2) 作代换 $y = tx$, 则原方程化为 $x^2(1+t)^2 = ax$ ($a > 0, x > 0$)

于是得曲线参数方程 $x = \frac{a}{(1+t)^2}, y = \frac{at}{(1+t)^2}$ ($0 \leq t < +\infty$)

它与 Ox 轴的交点为 $(a, 0)$ 与 $(0, 0)$

在 Ox 轴上从 $(0, 0)$ 点到 $(a, 0)$ 点的一段上有 $x dy - y dx = 0$; 在抛物线上有 $x dy - y dx = \frac{a^2}{(1+t)^4} dt$

于是面积 $D = \frac{1}{2} \oint_l x dy - y dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^4} = \frac{a^2}{6}$.

3. 证明若 C 为平面上封闭曲线, \mathbf{l} 为任意方向则

$$\oint_C \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) ds = 0$$

式中 \mathbf{n} 为 C 的外法线方向.

证明: 不妨设 C 的方向为逆时针方向

因 $(\mathbf{l}, \mathbf{n}) = (\mathbf{l}, x) - (\mathbf{n}, x)$, 则 $\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{l}, x) \cos(\mathbf{n}, x) + \sin(\mathbf{l}, x) \sin(\mathbf{n}, x)$

又 $\sin(\mathbf{n}, x) = -\cos(\mathbf{t}, x)$, $\cos(\mathbf{n}, x) = \sin(\mathbf{t}, x)$ 且 $\cos(\mathbf{t}, x) = \frac{dx}{ds}$, $\sin(\mathbf{t}, x) = \frac{dy}{ds}$

则 $\cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) ds = \cos(\mathbf{l}, x) dy - \sin(\mathbf{l}, x) dx$

于是 $\oint_C \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) ds = \oint_C [-\sin(\mathbf{l}, x) dx + \cos(\mathbf{l}, x) dy]$

由 $P = -\sin(\mathbf{l}, x)$, $Q = \cos(\mathbf{l}, x)$, 得 $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$

于是 $\oint_C \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$

4. 设 $u(x, y), v(x, y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数, 并设

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

证明:

$$(1) \iint_{\sigma} \Delta u dx dy = \int_l \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$(2) \iint_{\sigma} v \Delta u dx dy = - \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \oint_l v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$(3) \iint_{\sigma} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = - \int_l \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

其中 σ 为闭曲线 l 所围的平面区域, $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 为沿 l 外法线方向导数.

证明:

$$\begin{aligned} (1) \int_l \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\mathbf{n}, x) \right) ds = \int_l \frac{\partial u}{\partial x} \sin(\mathbf{t}, x) ds - \int_l \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{t}, x) ds \\ &= \int_l \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_l \frac{\partial u}{\partial y} dx = \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dx dy = \iint_{\sigma} \Delta u dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 因 } \oint_l v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_l v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\mathbf{n}, x) \right) ds = \oint_l \left[v \frac{\partial u}{\partial x} \sin(\mathbf{t}, x) - v \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{t}, x) \right] ds \\ &= \oint_l v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx = \iint_{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\sigma} v \Delta u dx dy \\ \text{则 } \iint_{\sigma} v \Delta u dx dy &= - \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \oint_l v \frac{\partial u}{\partial n} ds \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 由(2), 得 } \iint_{\sigma} u \Delta v \, dx \, dy = - \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy + \oint_l u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds$$

$$\text{则 } \iint_{\sigma} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx \, dy = - \oint_l \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

5. 求以下积分之值

$$I = \oint_l [x \cos(\mathbf{n}, x) + y \cos(\mathbf{n}, y)] \, ds$$

l : 包围有界区域的简单封闭曲线, \mathbf{n} 为它的外法线方向.

$$\text{解: } I = \oint_l [x \cos(\mathbf{n}, x) + y \cos(\mathbf{n}, y)] \, ds = \oint_l [x \sin(\mathbf{t}, x) - y \cos(\mathbf{t}, x)] \, ds$$

$$= \oint_l x \, dy - y \, dx = \iint_{\sigma} \left(\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} \right) dx \, dy = 2 \iint_{\sigma} dx \, dy = 2S$$

6. 证明:

$$\oint_l \frac{\cos(r, \mathbf{n})}{r} \, ds = 0$$

其中 l 是一单连通区域 σ 的边界而 r 是 l 上的一点到 σ 外某一定点的距离.若 r 表示 l 上一点到 σ 内某一定点的距离,那末这积分之值等于 2π .

证明: 设 \mathbf{r} 为点 $A(x, y)$ 到 l 上的点 $M(\xi, \eta)$ 的向量, \mathbf{n}, \mathbf{r} 与 Ox 轴的夹角分别为 α, β

$$\text{则 } (\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \alpha - \beta, \text{ 于是 } \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{\xi - x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r} \sin \alpha$$

$$\text{则 } \oint_l \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} \, ds = \oint_l \left(\frac{\eta - y}{r^2} \sin \alpha + \frac{\xi - x}{r^2} \cos \alpha \right) ds = \oint_l \frac{\xi - x}{r^2} d\eta - \frac{\eta - y}{r^2} d\xi$$

$$\text{因 } P = -\frac{\eta - y}{r^2}, Q = \frac{\xi - x}{r^2}, \text{ 则 } \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{-(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{r^4} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

因而 P, Q 的偏导数除去点 A (此处 $r = 0$)外, 在全平面上是连续的, 且 $\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$

$$\text{于是利用格林公式, 知当点 } A \text{ 在曲线 } l \text{ 之外时, } \oint_l \frac{\cos(r, \mathbf{n})}{r} \, ds = 0$$

当点在曲线 l 之内时, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial \eta}, \frac{\partial Q}{\partial \xi}$ 均在 (x, y) 不连续, 则不能直接使用格林公式, 为此在 l 所包围的区域 σ 内, 以 A 为圆心, R 为半径作一圆, 以其圆周作为曲线 l' , 并使其包围的区域 $\sigma' \subset \sigma$, 再将 σ 扩大为 σ'' , 使 $\sigma \subset \sigma''$

$$\text{因 } P, Q, \frac{\partial P}{\partial \eta}, \frac{\partial Q}{\partial \xi} \text{ 均在除 } (x, y) \text{ 外的整个平面上连续且 } \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

$$\text{则在复连通区域 } \sigma'' \setminus (x, y) \text{ 中连续且 } \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

$$\text{这时 } \oint_l \frac{\xi - x}{r^2} d\eta - \frac{\eta - y}{r^2} d\xi = \oint_{l'} \frac{\xi - x}{r^2} d\eta - \frac{\eta - y}{r^2} d\xi$$

$$\text{而 } \oint_{l'} \frac{\xi - x}{r^2} d\eta - \frac{\eta - y}{r^2} d\xi = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\text{则 } \oint_l \frac{\cos(r, \mathbf{n})}{r} \, ds = 2\pi$$

$$(\text{当点 } A \text{ 在 } l \text{ 上时, } \oint_l \frac{\cos(r, \mathbf{n})}{r} \, ds = \pi)$$

7. 利用高斯公式变换以下积分:

$$(1) \iint_S xy \, dx \, dy + xz \, dx \, dz + yz \, dy \, dz$$

$$(2) \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是曲面的外法线方向余弦.

解:

(1) 因 $P = yz, Q = xz, R = xy$, 则 $P_x = Q_y = R_z = 0$

于是由高斯公式, 得 $\iiint_S xy \, dx \, dy + xz \, dx \, dz + yz \, dy \, dz = 0$

(2) 因 $P = u_x, Q = u_y, R = u_z$, 则由高斯公式, 得

$$\iiint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx \, dy \, dz$$

8. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\iiint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy, S$: 立方体 $0 \leq x, y, z \leq a$ 的外表面;

(2) $\iiint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dx \, dz + z^3 \, dx \, dy, S$: 单位球外表面;

(3) $\iiint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS, S$: $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h$; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为此曲面外法线方向余弦.

解:

(1) 因 $P = x^2, Q = y^2, R = z^2$,

则由高斯公式, 得 $\iiint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dx \, dz + z^2 \, dx \, dy = 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) \, dz = 3a^4$

(2) 因 $P = x^3, Q = y^3, R = z^3$

则由高斯公式, 得 $\iiint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dx \, dz + z^3 \, dx \, dy = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$
 $= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^4 \, dr = \frac{12}{5} \pi$

(3) 由高斯公式, 得

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS &= 2 \iiint_V (x + y + z) \, dx \, dy \, dz \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r \, dr \int_r^h [r(\cos \varphi + \sin \varphi) + z] \, dz = \frac{\pi h^4}{2}. \end{aligned}$$

9. 证明: 若

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

S 是 V 的边界曲面, 则成立下面公式:

$$(1) \iiint_V \Delta u \, dx \, dy \, dz = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS$$

$$(2) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx \, dy \, dz + \iiint_V u \Delta u \, dx \, dy \, dz$$

式中 u 在 $V + S$ 上有连续二阶导数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 外法线方向的导数.

证明:

$$(1) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iint_S \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, z) \right] dS = \iiint_V \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] dx \, dy \, dz = \iiint_V \Delta u \, dx \, dy \, dz$$

$$\begin{aligned} (2) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS &= \iint_S \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, z) \right] dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iiint_V u \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] dx dy dz \\
&= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iiint_V u \Delta u dx dy dz
\end{aligned}$$

10. 证明由曲面 S 所包围的体积等于

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

证明: 由高斯公式, 得

$$V = \iiint_V dx dy dz = \frac{1}{3} \iint_S (x dy dz + y dz dx + z dx dy) = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS.$$

11. 利用斯托克司公式计算曲线积分:

- (1) $\oint_l y dx + z dy + x dz$, l : 圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 从 x 轴正向看去圆周是逆时针方向的;
- (2) $\oint_l (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz$, l 是从 $(a, 0, 0)$ 经 $(0, a, 0)$ 和 $(0, 0, a)$ 回到 $(a, 0, 0)$ 的三角形.

解:

- (1) 把平面 $x + y + z = 0$ 上 l 所包围的区域记为 σ , 则 σ 的法线方向为 $(1, 1, 1)$

则其方向余弦为 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{于是 } \oint_l y dx + z dy + x dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = - \iint_S (\sqrt{3} dS = -\sqrt{3} \pi a^2$$

- (2) 把 l 所包围的区域记为 σ , 则 σ 的法线方向为 $(1, 1, 1)$, 则其方向余弦为 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

又 $P = z - y, Q = x - z, R = y - x$, 则 $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$

$$\text{于是 } \oint_l (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz = 2\sqrt{3} \iint_S dS = 3a^2$$

§2. 曲线积分和路径的无关性

1. 设在某闭矩形区域 D 内 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 试证

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$$

为 $P dx + Q dy$ 的原函数, 其中 $C = U(x_0, y_0)$.

证明: 因 $U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$

$$\text{则 } \frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x P_y(x, y) dx + Q(x_0, y) = \int_{x_0}^x Q_x(x, y) dx + Q(x_0, y) = Q(x, y)$$

于是 $dU = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

又 $U(x_0, y_0) = C$, 则 $U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C$ 为 $P dx + Q dy$ 的原函数, 其中 $C = U(x_0, y_0)$

2. 计算下列全微分式的线积分:

$$(1) \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$$

$$(2) \int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy), \text{ 式中 } f(u) \text{ 是连续函数};$$

$$(3) \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y dx - x dy}{x^2}, \text{ 沿不和 } Oy \text{ 轴相交的途径};$$

$$(4) \int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz$$

$$(5) \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 沿不通过原点的途径};$$

$$(6) \int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy, \text{ 其中 } \varphi, \psi \text{ 为连续函数}.$$

解:

$$(1) \text{ 因 } (x-y)(dx-dy) = d\frac{(x-y)^2}{2}, \text{ 则 } \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy) = \frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 0$$

$$(2) \text{ 因 } P+Q = f(x+y), \text{ 则 } \frac{\partial P}{\partial y} = f'(x+y) = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 于是从 } (0,0) \text{ 到 } (a,b) \text{ 积分与路径无关}$$

取 $(0,0) \rightarrow (a,0) \rightarrow (a,b)$,

$$\text{则 } \int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx+dy) = \int_0^a f(x+0) dx + \int_0^b f(a+y) dy = \int_0^{a+b} f(u) du$$

$$(3) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时}, \frac{y dx - x dy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right), \text{ 则 } \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y dx - x dy}{x^2} = -\frac{y}{x} \Big|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{3}{2}$$

$$(4) \text{ 因 } yz dx + xz dy + xy dz = dxyz, \text{ 则 } \int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz = 0$$

$$(5) \text{ 当 } (x,y) \neq (0,0) \text{ 时}, \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d\sqrt{x^2 + y^2}, \text{ 则 } \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 9$$

$$(6) \text{ 由于 } \varphi, \psi \text{ 是连续函数, 故有 } \varphi(x) dx + \psi(y) dy = d(F(x) + G(y))$$

$$\text{其中 } F(x) = \int_2^x \varphi(u) du, G(y) = \int_1^y \psi(v) dv$$

$$\text{于是有 } \int_{(2,1)}^{(1,2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy = (F(x) + G(y)) \Big|_{(2,1)}^{(1,2)} = \int_2^1 \varphi(u) du + \int_1^2 \psi(v) dv = \int_1^2 [\psi(x) - \varphi(x)] dx$$

3. 求原函数 u :

- (1) $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$
 (2) $(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$
 (3) $\frac{a}{z} dx + \frac{b}{z} dy + \frac{-by - ax}{z^2} dz$
 (4) $(x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$
 (5) $e^x [e^y(x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y(x - y) + 1] dy$

解:

- (1) 因 $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
 于是 $u = \int_0^x (x^2 + 2xy - y^2) dx + \int_0^y (-y^2) dy + C = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$
 (2) 因 $(2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy = \cos y dx^2 + x^2 d \cos y + y^2 d \cos x + \cos x dy^2 = d(x^2 \cos y + y^2 \cos x)$
 则 $u = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$
 (3) 因 $\frac{a}{z} dx + \frac{b}{z} dy + \frac{-by - ax}{z^2} dz = a \frac{z dx - x dz}{z^2} + b \frac{z dy - y dz}{z^2} = d \frac{ax + by}{z}$
 则 $u = \frac{1}{z} (ax + by) + C$
 (4) 因 $(x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz = \frac{1}{3} (dx^3 + dy^3 + dz^3) - 2(yz dx + xz dy + xy dz) = d \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz \right)$
 则 $u = \frac{1}{3} (x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$
 (5) 因 $e^x [e^y(x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y(x - y) + 1] dy = (x - y)e^{x+y} (dx + dy) + 2e^{x+y} dx + d(ye^x) = d((x - y)e^{x+y}) + e^{x+y} d(x + y) + d(ye^x) = d((x - y + 1)e^{x+y}) + d(ye^x)$
 则 $u = (x - y + 1)e^{x+y} + ye^x + C$

4. 验证:

$$P dx + Q dy = \frac{1}{2} \frac{x dy - y dx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$$

(A, B, C 为常数, 且 $AC - B^2 > 0$) 适合条件:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

求: 关于奇点(0, 0)的循环常数.

证明: 因 $P = -\frac{y}{2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)}$, $Q = \frac{x}{2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)}$

$$\text{则 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{Cy^2 - Ax^2}{2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \omega &= \oint_{x^2+y^2=1} P dx + Q dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2(A \cos^2 t + 2B \sin t \cos t + C \sin^2 t)} = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \arctan \frac{C(\tan t + \frac{B}{C})}{\sqrt{AC - B^2}} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}, & C > 0 \\ -\frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}, & C < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5. 证明:

$$\int \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$$

关于奇点(0, 0)的循环常数为0, 从而 $\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ 的积分与路径无关.

证明: 因 $P = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{y}{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\text{于是 } \omega = \oint_{x^2+y^2=1} P dx + Q dy = 0$$

- (1) 若闭路 l 不包围 $(0, 0)$ 点, 可将奇点 $(0, 0)$ 与区域 D 的边界用一条曲线 C 连接起来, 于是复连通区域变成了单连通区域

$$\text{又 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 则由等价条件, 得 } \oint_l \frac{x \, dx + y \, dy}{x^2 + y^2} = 0$$

- (2) 若闭路 l 包围奇点 $(0, 0)$, 因沿环绕奇点的任一闭路的积分等于循环常数, 则 $\oint_l \frac{x \, dx + y \, dy}{x^2 + y^2} = 0$

总之 $\frac{x \, dx + y \, dy}{x^2 + y^2}$ 的积分与路径无关.

§3. 场论初步

1. 设 $\mathbf{H}(t) = e^t \mathbf{a} + e^{-t} \mathbf{b}$, 其中 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为常向量, t 为参数,

(1) 求 $\frac{d\mathbf{H}}{dt}$

(2) 证明 $\frac{d^2\mathbf{H}}{dt^2} = \mathbf{H}$

解: 因 $\mathbf{H}(t) = e^t \mathbf{a} + e^{-t} \mathbf{b}$, \mathbf{a}, \mathbf{b} 为常向量, 则

(1) $\frac{d\mathbf{H}}{dt} = e^t \mathbf{a} - e^{-t} \mathbf{b}$

(2) $\frac{d^2\mathbf{H}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right) = e^t \mathbf{a} + e^{-t} \mathbf{b} = \mathbf{H}$

2. 证明: $\frac{d}{dt}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C} \right) + \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right)$

证明: 设 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$

则 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$, 对等式两端求导, 右端用对行列式求导法则, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] &= \begin{vmatrix} A_{x_t} & A_{y_t} & A_{z_t} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_{x_t} & B_{y_t} & B_{z_t} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_{x_t} & C_{y_t} & C_{z_t} \end{vmatrix} \\ &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{C} \right) + \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{dt} \right) \end{aligned}$$

3. 设 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$, 对下列数量场 ϕ 分别求出 $\text{grad}\phi$ 及 $\text{div}(\phi\mathbf{a})$.

(1) $\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$

(2) $\phi = x^2 + y^2 + z^2$

(3) $\phi = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

解:

(1) $\text{grad}\phi = \phi_x \mathbf{i} + \phi_y \mathbf{j} + \phi_z \mathbf{k} = \frac{-x}{(x^2 + xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i} + \frac{-y}{(x^2 + xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{j} + \frac{-z}{(x^2 + xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{k}$

$$\text{div}(\phi\mathbf{a}) = \phi \text{div}\mathbf{a} + \text{grad}\phi \cdot \mathbf{a} = \text{grad}\phi \cdot \mathbf{a} = \frac{-3x - 20y + 15z}{(x^2 + xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) $\text{grad}\phi = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, $\text{div}(\phi\mathbf{a}) = 6x + 40y - 30z$

(3) $\text{grad}\phi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{k}$, $\text{div}(\phi\mathbf{a}) = \frac{6x + 40y - 30z}{x^2 + y^2 + z^2}$

4. 设 $U(x, y, z) = xyz$

(1) 求 $U(x, y, z)$ 在点 $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 1, 1)$ 及 $P_3(2, 1, 1)$ 处沿 $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ 的方向导数;

(2) 在上述三点处, $U(M)$ 的最大方向导数为何值?

(3) 在上述三点处, 求 $\text{divgrad}U(M)$ 及 $\text{rotgrad}U(M)$.

解:

(1) 因 \mathbf{b} 的方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{29}}$, $\cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{29}}$

则 $\frac{\partial U}{\partial b} = yz \cos\alpha + xz \cos\beta + xy \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{29}} (2yz + 3xz - 4xy)$

于是在 $P_1(0, 0, 0)$ 点 $\frac{\partial U}{\partial b} = 0$; 在 $P_2(1, 1, 1)$ 点 $\frac{\partial U}{\partial b} = \frac{\sqrt{29}}{29}$; 在 $P_3(2, 1, 1)$ 点 $\frac{\partial U}{\partial b} = 0$

(2) 因 $\frac{\partial U}{\partial b} = \text{grad}U \cdot \mathbf{b}_0 = |\text{grad}U| \cos(\text{grad}U, \mathbf{b}_0)$, 其中 \mathbf{b}_0 是 \mathbf{b} 方向的单位向量

则 $U(M)$ 的最大方向导数为 $|\text{grad}U| = \sqrt{y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2}$

于是在 $P_1(0, 0, 0)$ 点 $|\text{grad}U| = 0$; 在 $P_2(1, 1, 1)$ 点 $|\text{grad}U| = \sqrt{3}$; 在 $P_3(2, 1, 1)$ 点 $|\text{grad}U| = 3$

(3) 因 $\text{grad}U = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

$$\text{则 } \text{divgrad}U = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0$$

$$\text{rotgrad}U = \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial(yz)}{\partial z} - \frac{\partial(xy)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

于是在上述三点处, $\text{divgrad}U(M) = 0, \text{rotgrad}U(M) = \mathbf{0}$.

5. 求向量 $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ 穿过球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$ 的流量.

$$\text{解: } \Phi = \iiint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-r^2)r dr = \frac{\pi}{8}$$

类似地, 分别向 XOZ, YOZ 平面投影, 可得 $\iint_S y^2 dx dz = \iint_S x^2 dy dz = \frac{\pi}{8}$, 于是 $\Phi = \frac{3}{8}\pi$.

6. 求 $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ 通过 S 的流量, 设

(1) S 为圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$ 的侧面;

(2) S 为(1)中圆柱体的上底面;

(3) S 为(1)中圆柱体的表面.

解:

$$(3) \iint_S a_n dS = \iiint_V \text{div} \mathbf{a} dV = \iiint_V \left[\frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right] dV = 0$$

于是向量 \mathbf{a} 穿过圆柱体表面的流量为0

$$(2) \text{因在圆柱体的上、下底面 } a_n = xy, \text{ 则 } \iint_{S_{\text{上}}} a_n dS = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} xy dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 \sin \theta \cos \theta dr = 0$$

同理 $\iint_{S_{\text{下}}} a_n dS = 0$, 于是向量 \mathbf{a} 穿过圆柱体上底面的流量为0

$$(1) \text{因 } \iint_S a_n dS = \iint_{S_{\text{侧}}} a_n dS + \iint_{S_{\text{上}}} a_n dS + \iint_{S_{\text{下}}} a_n dS, \text{ 则 } \iint_S a_n dS = 0.$$

7. 求 $\mathbf{a} = \text{grad} \left(\arctan \frac{y}{x} \right)$ 沿曲线 l 的环流量:

(1) l 为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1, z = 0$;

(2) l 为 $x^2 + y^2 = 4, z = 1$.

解:

$$(1) \text{由已知, 有 } \mathbf{a} = \text{grad} \left(\arctan \frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{j}$$

$$\text{则 } \text{rot} \mathbf{a} = \left[\frac{\partial \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \right)}{\partial y} \right] \mathbf{k} = 0 \text{ (除 } x = y = 0 \text{ 即 } Oz \text{ 轴上的点)}$$

因 $l: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1, z = 0$ 是不围绕 z 轴的曲线, 故可于 l 上张一曲面 S , 使 S 与 Oz 轴不相交

$$\text{则据斯托克司公式, 有环流量 } \oint_l \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a} dS = 0$$

(2) 因 $l: x^2 + y^2 = 4, z = 1$, 此时 l 正好围绕 Oz 轴旋转一周, 取常数 $c > 0$ 充分小 ($c < 2$), 使 l 位于平面 $z = c$ 的上方, 在平面 $z = c$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 $l_r: x^2 + y^2 = r^2, z = c, r$ 充分小, 使 r 小于2, 以 l 与 l_r 为边界张上一曲面 S , 使 S 与 Oz 轴不相交

$$\text{由斯托克司公式, 得 } \oint_l \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{-l_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{a} dS = 0, \text{ 其中 } -l_r \text{ 表示沿顺时针方向}$$

$$\text{于是环流量 } \oint_l \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{l_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\text{又取 } l_r \text{ 的参数方程 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = c, \text{ 得 } \oint_{l_r} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\text{从而 } \oint_l \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

8. 求向量 $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (c 为常数) 的环流量:

(1) 沿圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$;

(2) 沿圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

解:

(1) 因 $l: x^2 + y^2 = 1, z = 0$, 则 $\mathbf{l} = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

于是 $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = dt$, 从而所求环流量为 $\oint_l \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

(2) 因 $l: (x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$, 则 $\mathbf{l} = (2 + \cos t)\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)

于是 $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = (2 \cos t + 1) dt$, 从而所求环流量为 $\oint_l \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (2 \cos t + 1) dt = 2\pi$

9. 证明:

(1) $\text{rot}(u\mathbf{A}) = u\text{rot}\mathbf{A} + \text{grad}u \times \mathbf{A}$;

(2) $\text{div}(\phi\mathbf{a}) = \phi\text{div}\mathbf{a} + \text{grad}\phi \cdot \mathbf{a}$

(3) $\text{graddiv}\mathbf{a} - \text{rotrota} = \Delta\mathbf{a}$

证明:

(1) 因 $\text{rot}_x(u\mathbf{A}) = u \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \left(A_z \frac{\partial u}{\partial y} - A_y \frac{\partial u}{\partial z} \right) = u\text{rot}_x\mathbf{A} + (\text{grad}u \times \mathbf{A})_x$

同法可得, $\text{rot}_y(u\mathbf{A}) = u\text{rot}_y\mathbf{A} + (\text{grad}u \times \mathbf{A})_y, \text{rot}_z(u\mathbf{A}) = u\text{rot}_z\mathbf{A} + (\text{grad}u \times \mathbf{A})_z$

于是 $\text{rot}(u\mathbf{A}) = u\text{rot}\mathbf{A} + \text{grad}u \times \mathbf{A}$

(2) 因 $\frac{\partial(\phi a_x)}{\partial x} = \phi \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial(\phi a_y)}{\partial y} = \phi \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial(\phi a_z)}{\partial z} = \phi \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$

则 $\text{div}(\phi\mathbf{a}) = \phi\text{div}\mathbf{a} + \text{grad}\phi \cdot \mathbf{a}$

(3) 因 $\text{graddiv}\mathbf{a} = \text{grad} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)$

$= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}$

$\text{rotrota} = \text{rot} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right]$

$= \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} \right) \mathbf{k}$

则 $\text{graddiv}\mathbf{a} - \text{rotrota} = \Delta a_x \mathbf{i} + \Delta a_y \mathbf{j} + \Delta a_z \mathbf{k} = \Delta \mathbf{a}$

10. 求 $\text{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{r})$, \mathbf{w} 为常矢量, \mathbf{r} 为矢径向量.

解: 设 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3), \mathbf{r} = (x, y, z)$

于是 $\mathbf{w} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_2 z - w_3 y) \mathbf{i} + (w_3 x - w_1 z) \mathbf{j} + (w_1 y - w_2 x) \mathbf{k}$

$\text{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = 2w_1 \mathbf{i} + 2w_2 \mathbf{j} + 2w_3 \mathbf{k} = 2\mathbf{w}$

11. 证明 $\mathbf{a} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$ 为保守场, 并求其势函数.

证明: 对空间任一点 (x, y, z) , 有

$\text{rota} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [xy(x + y + 2z)] - \frac{\partial}{\partial z} [xz(x + 2y + z)] \right\} \mathbf{i}$

$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [yz(2x + y + z)] - \frac{\partial}{\partial x} [xy(x + y + 2z)] \right\} \mathbf{j}$

$+ \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [xz(x + 2y + z)] - \frac{\partial}{\partial y} [yz(2x + y + z)] \right\} \mathbf{k}$

$= 0$

则 \mathbf{a} 为保守场

由于势 ϕ 满足 $d\phi = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = a_x dx + a_y dy + a_z dz = d[xyz(x + y + z)]$

则其势函数为 $u(x, y, z) = xyz(x + y + z) + C$, 其中 C 为任意常数.

12. 求向量 $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ 沿螺旋线 $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的一段所作的功.

解: 因 $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, l: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt (0 \leq t \leq 2\pi)$

$$\text{则所求的功 } W = \int_l x dx + y dy + z dz = 2b^2 \pi^2$$

13. 设 ϕ 为可微函数, 计算: $\text{grad} \phi(r), \text{div}(\phi(r)\mathbf{r})$ 及 $\text{rot}(\phi(r)\mathbf{r})$.

$$\text{解: } \text{grad} \phi(r) = \phi'(r) \text{grad} r = \phi'(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\text{div}(\phi(r)\mathbf{r}) = \phi(r) \text{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \text{grad} \phi(r) = 3\phi(r) + r\phi'(r)$$

$$\text{rot}(\phi(r)\mathbf{r}) = \phi(r) \text{rot} \mathbf{r} + \text{grad} \phi(r) \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

14. 求满足条件 $\text{div}(\phi(r)\mathbf{r}) = 0$ 的函数 $\phi(r)$.

解: 由上题, 得 $\text{div}(\phi(r)\mathbf{r}) = 3\phi(r) + r\phi'(r)$

$$\text{要使 } \text{div}(\phi(r)\mathbf{r}) = 0, \text{ 只要 } 3\phi(r) + r\phi'(r) = 0 \text{ 即要 } \frac{\phi'(r)}{\phi(r)} = -\frac{3}{r}$$

$$\text{则得 } \phi(r) = \frac{c}{r^3} \text{ (} c \text{ 为常数)}$$

15. 求以下各向量的散度及旋度 (\mathbf{a}, \mathbf{b} 为常向量):

(1) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}$

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$

(3) $\phi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$

(4) $\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$

解:

(1) $\text{div}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \text{div} \mathbf{b} + \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$$\text{rot}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \text{rot} \mathbf{b} + \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{b} = \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

(2) 因 $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})_x = a_y z - a_z y, (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_y = a_z x - a_x z, (\mathbf{a} \times \mathbf{r})_z = a_x y - a_y x$

$$\text{则 } \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_y z - a_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z x - a_x z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_x y - a_y x) = 0$$

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y z - a_z y & a_z x - a_x z & a_x y - a_y x \end{vmatrix} = 2\mathbf{a}$$

(3) $\text{div}[\phi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = \phi(r) \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \text{grad}(\phi(r))(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \phi(r)(\mathbf{r} \cdot \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot} \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \phi'(r)) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) =$

$$\phi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \frac{\phi'(r)}{r} [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = 0$$

$$\text{rot}[\phi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = \phi(r) \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \text{grad}(\phi(r)) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) =$$

$$\phi(r)[-(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) + 3\mathbf{a}] + \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \phi'(r) \right) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\phi(r)\mathbf{a} + \frac{\phi'(r)}{r} [\mathbf{r}^2 \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}]$$

(4) 因 $\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^2 \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$

$$\text{则 } \text{div}[\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = |\mathbf{r}|^2 \text{div} \mathbf{a} + \text{grad} |\mathbf{r}|^2 \cdot \mathbf{a} - [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \text{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] = (a_x + a_y + a_z) - 4(xa_x + ya_y + za_z)$$

$$\text{rot}[\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})] = |\mathbf{r}|^2 \text{rot} \mathbf{a} + \text{grad} |\mathbf{r}|^2 \times \mathbf{a} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \text{rot} \mathbf{r} - \text{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{r} = \frac{1}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times \mathbf{r}.$$

16. 证明以下等式:

(1) $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}$

(2) $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\text{div} \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\text{div} \mathbf{a}) \mathbf{b}$

(3) $\mathbf{c} \cdot \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{a}$

(4) $(\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{a}$

证明:

(1) $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \text{grad}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) =$

$$\left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial x} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial x} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{i} +$$

$$\left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial y} + b_x \frac{\partial a_x}{\partial y} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) \mathbf{j} +$$

$$\begin{aligned}
& \left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial z} + b_x \frac{\partial a_x}{\partial z} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial z} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial z} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \\
&= \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} \\
(2) \quad \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \left(b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{a} - \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{b} + (\operatorname{div} \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\operatorname{div} \mathbf{a}) \mathbf{b} \\
&= (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\operatorname{div} \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\operatorname{div} \mathbf{a}) \mathbf{b} \\
(3) \quad \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \\
& c_x \left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial x} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial x} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \\
& c_y \left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial y} + b_x \frac{\partial a_x}{\partial y} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial y} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) + \\
& c_z \left(a_x \frac{\partial b_x}{\partial z} + b_x \frac{\partial a_x}{\partial z} + a_y \frac{\partial b_y}{\partial z} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial z} + a_z \frac{\partial b_z}{\partial z} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \\
&= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \cdot \nabla) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{a} \\
(4) \quad (\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \left(c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z} \right) [(a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}] \\
&= \left(b_z c_x \frac{\partial a_y}{\partial x} + a_y c_x \frac{\partial b_z}{\partial x} - b_y c_x \frac{\partial a_z}{\partial x} - a_z c_x \frac{\partial b_y}{\partial x} + b_z c_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + a_y c_y \frac{\partial b_z}{\partial y} - b_y c_y \frac{\partial a_z}{\partial y} - a_z c_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + \right. \\
& \quad \left. b_z c_z \frac{\partial a_x}{\partial z} + a_x c_z \frac{\partial b_z}{\partial z} - b_y c_z \frac{\partial a_z}{\partial z} - a_z c_z \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\
& \quad \left(b_x c_x \frac{\partial a_z}{\partial x} + a_z c_x \frac{\partial b_x}{\partial x} - b_z c_x \frac{\partial a_x}{\partial x} - a_x c_x \frac{\partial b_z}{\partial x} + b_x c_y \frac{\partial a_z}{\partial y} + a_z c_y \frac{\partial b_x}{\partial y} - b_z c_y \frac{\partial a_x}{\partial y} - a_x c_y \frac{\partial b_z}{\partial y} + \right. \\
& \quad \left. b_x c_z \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z c_z \frac{\partial b_x}{\partial z} - b_z c_z \frac{\partial a_x}{\partial z} - a_x c_z \frac{\partial b_z}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \\
& \quad \left(b_y c_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x c_x \frac{\partial b_y}{\partial x} - b_x c_x \frac{\partial a_y}{\partial x} - a_y c_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + b_y c_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + a_x c_y \frac{\partial b_y}{\partial y} - b_x c_y \frac{\partial a_y}{\partial y} - a_y c_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + \right. \\
& \quad \left. b_y c_z \frac{\partial a_x}{\partial z} + a_x c_z \frac{\partial b_y}{\partial z} - b_x c_z \frac{\partial a_y}{\partial z} - a_y c_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \right) \mathbf{k} \\
&= \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{a}
\end{aligned}$$

17. 试证 $\operatorname{divgrad} \sin^2 r$ 可表示成 $F(r)$ 的形式, 并写出 $F(x)$.

$$\text{证明: } \operatorname{divgrad} \sin^2 r = \Delta \sin^2 r = \frac{\partial^2 \sin^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sin^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sin^2 r}{\partial z^2} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sin 2r \cdot \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin 2r \cdot \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sin 2r \cdot \frac{z}{r} \right) = 2 \cos 2r + 2 \sin 2r \cdot \frac{1}{r} = \frac{2}{r} (\sin 2r + r \cos 2r)$$

$$\text{即 } F(r) = \frac{2}{r} (\sin 2r + r \cos 2r)$$

$$\text{则 } F(x) = \operatorname{divgrad} \sin^2 x r = \frac{d^2 \sin^2 x}{dx^2} = 2 \cos 2x$$

18. 证明: 当 $|\mathbf{a}|^2 = \text{常数}$ 时, 有 $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}$.

证明: 因 $|\mathbf{a}|^2 = \text{常数}$, 则 $\operatorname{grad} |\mathbf{a}|^2 = 0$

由16题(1), 得 $\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2[\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}] = 0$

则 $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}$.