# 浙江大学2013年7月常微分方程（甲）期末试卷

参考解答

一.求解下列方程（20分）

1.

$$xy^3dy + (y^4 + x^3)dx = 0$$

**解.**

$$M_y - N_x = 4y^3 - y^3 = 3y^3 \sim N$$

(5)
$$(M_y - N_x)/N = 3/x$$

(2)
$$a(x) = e^{\int 3/xdx} = x^3$$

所以乘以方程，得到通解

(3)
$$(xy)^4/4 + x^7/7 = c$$

2.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{3x} - \frac{x}{y^2} = 0, y(1) = 2$$

**解.** $z = y^3$, $z_y = 3y^2$

(5)
$$z' + \frac{z}{x} = 3x, z(1) = 8$$

$$(xz)' = 3x^2, z(1) = 8$$

$$xz = C + x^3, z(1) = 8$$

(4)
$$z = (7 + x^3)/x$$

(1)
$$y = (x^2 + 7/x)^{1/3}$$

二.（20分）

1.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = x^2\sin(\ln x)$$

**解.** Euler 方程，$y = x^k$, $x = e^t$, $k(k-1) - 3k + 5 = k^2 - 4k + 5 = (k-2)^2 + 1$ 齐次通解

(4)
$$y = c_1e^{2t}\cos t + c_2e^{2t}\sin t$$

猜测方程

$$y_{tt} - 4y_t + 5y = e^{2t}\sin t$$

的特解为

(3)
$$y = tAe^{2t}\cos t + tBe^{2t}\sin t$$

代入得

$$2A(e^{2t}\cos t)' + 2B(e^{2t}\sin t)' - 4A(e^{2t}\cos t) - 4B(e^{2t}\sin t) = e^{2t}\sin t$$

---

*Date*: 2013年7月7日.

$4Ae^{2t}\cos t - 2Ae^{2t}\sin t + 4Be^{2t}\sin t + 2Be^{2t}\cos t - 4Ae^{2t}\cos t) - 4B(e^{2t}\sin t) = e^{2t}\sin t$

(2)
$$B = 0, A = -1/2$$

得到

(1)
$$y = (c_1 - t/2)e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\sin t = (c_1 - \frac{\ln x}{2})x^2\cos(\ln x) + c_2 x^2 \sin(\ln x)$$

2.

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$$

**解.**

(5)
$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7$$

(4)
$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

三.（20分）考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = (y - x)e^{y^2},\ y(0) = 2$$

假设其饱和解的存在区间为$(-T_2, T_1)$。

- 判断$T_1$ 是否有限并给出充足的理由;
- 判断$T_2$ 是否有限并给出充足的理由。

**解.** (I)

(3)
$$T_1 < \infty$$

令$F(x, y) = (y - x)e^{y^2}$, $u(x) = x + c$ (任取$1 \le c \le 2$), 则对于$x \ge 0$,

$$\frac{du}{dx} = 1, F(x, u(x)) = ce^{(x+c)^2} \ge ce^{c^2} > 1, u(0) \le y(0)$$

所以$u$是$y$的右行下解,

(4)
$$y(x) \ge u(x), x \ge 0$$

由此

$$\frac{dy}{dx} \ge ce^{y^2} \ge e^y \Rightarrow \frac{d}{dx}(-e^{-y}) \ge 1$$

积分

$$e^{-2} > e^{-2} - e^{-y(x)} \ge x - 0 = x$$

(3)
$$x < 2e^{-2}$$

于是$T_1 \le 2e^{-2}$.

(II)

(3)
$$T_2 = \infty$$

做变量替换$t = -x$，则原问题转化为

$$\frac{dy}{dt} = -(t + y)e^{y^2},\ y(0) = 2,\ t \in (-T_1, T_2)$$

令$F(t,y)=-(t+y)e^{y^2}$，

可以用方向场结合延拓定理说明整体解（$y=-t$上方向下走，$y=-t$下方向上走，但是不能到达$y=-t$和$y=3$，结合延拓定理）。也可以用上下解。

令

$$u(t)=3,w(t)=-t$$

(3) $$\frac{du}{dt}=0,F(t,u(t))=(-3-t)e^{3^2}<0,u(0)>y(0)$$

(4) $$\frac{dw}{dt}=-1,F(t,w(t))=0>-1,w(0)<y(0)$$

（$w$可取很多其他函数，例如$w=-t-c$ $(c>0)$

$$\frac{dw}{dt}=-1,F(t,w(t))=ce^{(t+c)^2}>0,w(0)<y(0)$$

）

于是右行上下解，$t>0$，$w(t)<y(t)<u(t)$，由延拓定理知$T_2=\infty$。

五．（10分）在区域$D=\{(x,y):|x|<a,|y|<b\}$中，假设$f(x,y)$连续并且关于$y$满足局部Lipschitz条件，$g(y)$是一个恒正的连续函数，由Peano存在定理我们知道方程

$$y'=f(x,y)g(y),y(0)=0$$

在$D$内有局部解。试证明这样的局部解是唯一的。

**解．** i)引入

(3) $$Y(y):\frac{dY}{dy}=\frac{1}{g(y)},Y(0)=0,\ Y(y)=\int_0^y\frac{1}{g(s)}ds$$

$y$与$Y$一一对应；$Y$满足方程：

(2) $$Y'=f(x,y(Y))\equiv F(x,Y),Y(0)=0,\ Y(x)=\int_0^x F(t,Y(t))dt$$

在区间$|y|\le b/2$上

(2) $$m\le g(y)\le M,\frac{dy}{dY}=g(y)\in[m,M],$$

所以：

(2) $$|F(x,Y)-F(x,Z)|=|f(x,y(Y))-f(x,y(Z))|\le L|y(Y)-y(Z)|\le LM|Y-Z|$$

(1) $$Gronwall\Rightarrow Y(x)=Z(x)$$

六．（20分）假设点$(2,2)$ 是系统$\begin{cases}x'=-2x+ay\\ y'=4-x^2\end{cases}$ 的平衡点（奇点）。问

1）$a$是多少？找出系统所有奇点。

2）写出奇点$(2,2)$所相应的线性化系统，判断奇点类型并画出该系统的相图（草图）。

3）给其他奇点分类和判断稳定性。

**解．** 1)

(2) $$a=2$$

$\begin{cases} x' = -2x + 2y \\ y' = 4 - x^2 \end{cases}$ 所以另有一个奇点

$$(-2, -2) \tag{3}$$

2) $(2,2)$, 令$x_1 = x - 2,\ y_1 = y - 2,$ $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 2y_1 \\ y_1' = (2-x)(2+x) = -x_1(x_1+4) \end{cases}$ 线性化为$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 2y_1 \\ y' = -4x_1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0, \lambda = -1 \pm \sqrt{7}i \tag{2}$$

渐近稳定焦点

(3)

$$A(0,1) = (2,0), clockwise \tag{2}$$

顺时针方向

3) $(-2,-2)$, 令$x_1 = x + 2,\ y_1 = y + 2,$ $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 2y_1 \\ y' = (2-x)(2+x) = x_1(-x_1+4) \end{cases}$ 线性化为$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 2y_1 \\ y' = 4x_1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2$$

一正一负，为不稳定的鞍点。

(2)

六.（10分）已知方程$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 3x^2$ $(x > 0)$所对应的齐次方程有特解$y = e^{2x}$，求该方程的通解。

**解.** Liouville公式或者降阶法(或者$(xD-1)(D-2)y = 3x^2$)

$y = ue^{2x}$

$$u'' + (2 - 1/x)u' = 3xe^{-2x} \tag{5}$$

积分因子

$$e^{\int (2-1/x)dx} = e^{2x - \ln x} = e^{2x}/x$$

$$u' = e^{-\int (2-1/x)dx}(c + \int e^{\int (2-1/x)dx} 3xe^{-2x} dx) = xe^{-2x}(c + 3x) \tag{2}$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2(2x+1) - 3/2x^2 \tag{3}$$

附加题（10分）：考虑方程组

$$X' = (A + B(t))X,$$

其中$A$是常数矩阵，$B(t)$是关于$t$连续的矩阵函数，且$\int_0^\infty \|B(t)\|dt < \infty$. 如果$X' = AX$的一切解在$t \geq 0$上有界，则（1）的一切解在$t \geq 0$上也保持有界。

**解.**

如果$X' = AX$的一切解在$t \geq 0$上有界，知道$A$的所有特征值实部非正，于是存在常数$M > 0$，使得

(2) $$\|e^{At}\| \leq M, \forall t \geq 0$$

因为是线性方程组，解的右行极大存在区间为$[0, \infty)$。

对于任意给定初值$X(0) = X_0$，方程组的解$X(t)$满足如下积分方程组

(4) $$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)X(s)ds$$

于是

(2)
$$\|X(t)\| \leq \|e^{At}\|\|X_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\|\|B(s)\|\|X(s)\|ds \leq M(\|X_0\| + \int_0^t \|B(s)\|\|X(s)\|ds$$

由Gronwall不等式，我们得到

(2) $$\|X(t)\| \leq M\|X_0\|e^{\int_0^t \|B(s)\|ds} \leq M\|X_0\|e^{\int_0^\infty \|B(s)\|ds} < \infty$$