每日一题（6）

2019.03.25

1. 证明或给出反例: 若 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 线性无关, $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 也线性无关, 则 $v_1+w_1, v_2+w_2, \cdots, v_m+w_m$ 线性无关.

2. 已知复数域上的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$, 那么当 λ 取何值时, 向量 $\alpha_1-\lambda\alpha_2, \alpha_2-\lambda\alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1}-\lambda\alpha_n, \alpha_n-\lambda\alpha_1$ 线性无关?

1. 解: 反例如下: 取 $m=2$, $v_1=(1,0), v_2=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right), w_1=(0,1), w_2=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$, 则此时 $v_1+w_1=v_2+w_2=(1,1)$, 线性相关.

2. 解: 设 $k_1(\alpha_1-\lambda\alpha_2)+k_2(\alpha_2-\lambda\alpha_3)+\cdots+k_n(\alpha_n-\lambda\alpha_1)=0$, 其中 $k_i\in\mathbb{C}$, 整理得

$$(k_1-\lambda k_n)\alpha_1+(k_2-\lambda k_1)\alpha_2+\cdots+(k_n-\lambda k_{n-1})\alpha_n=0.$$

因为 $\alpha_1-\lambda\alpha_2, \alpha_2-\lambda\alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1}-\lambda\alpha_n, \alpha_n-\lambda\alpha_1$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1-\lambda k_n=0, \\ -\lambda k_1+k_2=0, \\ \cdots \\ -\lambda k_{n-1}+k_n=0. \end{cases}$$

又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 所以上述方程组只有零解, 故

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & -\lambda \\ -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0, \iff 1-\lambda^n=0 \wedge \lambda=0.$$

所以 λ 的值为 0 或 $\omega^k(\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}, k=1,2,\cdots,n)$