吉林大学2015-2016学年第一学期“高等代数Ⅰ”期中考试试题

参考解析

一、简答题(共55分)

1、求多项式 $f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+9$ 在有理数域上的标准分解.

解：由韦达定理知，多项式 $f(x)$ 在有理数域上的根必在集合 $\{1,3,9,-1,-3,-9\}$ 中，
逐个检验知1、−3是 $f(x)$ 的根，可得 $f(x)=(x-1)^2(x+3)^2$.

2、设多项式 $f(x)=(x^2+1)^m+a\in\Omega[x]$ 有重因式，其中 $a\in\Omega, m>1$ 是正整数，求 a.

解： $f'(x)=2mx(x^2+1)^{m-1}$，有三个根，分别为 $0,\pm i$. 我们知道 $f(x)$ 的重根必为 $f'(x)$ 的根，下面对 $f'(x)$ 的根进行讨论：

（1）若0是 $f(x)$ 的重根，则 $f(0)=0$，此时 $a=-1$，$f(x)=(x^2+1)^m-1=x^2\sum_{k=1}^{m}(x^2+1)^{k-1}$；

（2）若 i 是 $f(x)$ 的重根，则 $f(i)=0$，得 $a=0$， $f(x)=(x^2+1)^m$，有重根 $\pm i$.

综上所述，所求 a 的值为0或1.

3、求行列式 $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & \dots & n \\ 1 & 2-x & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-x \end{vmatrix}$ 第一列元素的代数余子式之和.

解：相当于求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2-x & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-x \end{vmatrix}$ 的值，而：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2-x & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}=(-x)^{n-1}$$，故所求为 $(-x)^{n-1}$.

4、设 $f(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & x_n \end{vmatrix}$，那么 $f(x_1,\dots,x_n)$ 是否为对称多项式？说明理由.

解：是.　若存在一个 $x_i=a$，（$i=1,2,\dots\dots,n$）则显然有 $f(x_1+x_2+\dots\dots+x_n)=0$；
若存在一个 $x_i=a$，（$i=1,2,\dots\dots,n$）则显然有 $f(x_1+x_2+\dots\dots+x_n)=a\prod_{i\neq k}(x_i-a)$；

若不存在 $x_i=a$，（i=1,2,……,n）则有：

$$f(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} x_1 & a & \ldots & a \\ a & x_2 & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & \ldots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1 & a & \ldots & a \\ 1 & a & x_2 & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a & a & \ldots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & \ldots & -a \\ 1 & x_1-a & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & x_2-a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & x_n-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n}\frac{a}{x_k-a} & -a & -a & \ldots & -a \\ 0 & x_1-a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x_2-a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_n-a \end{vmatrix}=a\sum_{k=1}^{n}[\prod_{i\neq k}(x_i-a)].$$

综上所述，总有 $f(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)=a\sum_{k=1}^{n}[\prod_{i\neq k}(x_i-a)].$

显然，改变 $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ 的顺序并不影响 $f(x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n)$的表达式.故其为对称多项式.

二.(共 15 分)

设 $f\in R[x]$，证明 f 在 R 上无重根当且仅当 (f,f') 无实根.

证明：在以下证明过程中既约因式 p 都是首一的.

充分性：若 f 在 R 上无重根但 (f,f') 有实根，设 $(f,f')=g$，则 g 中必有一个重数为一的既约因式 p，则 $f=pk$，(p,k)无实根，$f'=pk'+k$，显然构成矛盾!充分性得证.

必要性：若 (f,f') 无实根，但 f 在 R 上有重根，设 $f=p^kg$，其中(p,g)无实根,正整数 k≥2.

$f'=p^kg'+kp^{k-1}g$，有$(f,f')=p^{k-1}$，与假设矛盾！必要性得证.

三.(共 15 分)

设 $f(x)\in Z[x]$ 有一个整数根 a，证明存在 $g(x)\in Z[x]$ 使得 $f(x)=(x-a)g(x)$.

证明：显然存在 $g(x)\in Q[x]$，使得 $f(x)=(x-a)g(x)$ 成立.设 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 和

$g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$， 则 $(x-a)g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}ab_kx^k=b_nx^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(b_{k-1}-ab_k)x^k-a$.

则有 $\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=\sum_{k=0}^{n}b_kx^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}ab_kx^k=b_nx^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(b_{k-1}-ab_k)x^k-a$

比较系数，得：$b_n=a_n$，$b_{n-1}=a_{n-1}+ab_n,\ldots\ldots,b_0=a_0+ab_1$，注意 a_i（i=0,1,2,……,n）是正整数，则可以依次得到 b_n，b_{n-1}，……，b_1，b_0 都是正整数，命题得证.

四.(共 15 分)

设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\in\Omega[x]$，设 $c_1,\ldots,c_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个复根，

证明对 $\Omega[x]$ 上任意的 n 元对称多项式 $g(x_1,\ldots,x_n)$ 均有 $g(c_1,\ldots,c_n)\in\Omega$.

证明：由对称多项式基本定理，知 $\Omega[x]$ 上任意的 n 元对称多项式 $g(x_1,\ldots,x_n)$，

都可以被若干个 n 元初等对称多项式唯一表示，记为 $g(x_1,\ldots,x_n)=G(\sigma_1,\ldots\ldots,\sigma_n)$.

而由韦达定理知 $\sigma_1(c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n)=c_1+c_2+\ldots\ldots+c_n=-a_1\in\Omega$,

$$\sigma_2(c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n)=\sum_{1\le i<j\le n}c_ic_j=a_2\in\Omega$$

…………………………………………………

$$\sigma_k(c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n)=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n}\prod_{l=1}^{k}c_{j_l}=(-1)^k a_k\in\Omega$$

…………………………………………………

$$\sigma_n(c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n)=\prod_{i=1}^{n}c_i=(-1)^n a_n\in\Omega$$

故由数域的运算封闭性，知 $g(c_1,\ldots,c_n)=G(\sigma_1,\ldots\ldots,\sigma_n)\in\Omega$.