2019-2020春学期《微分几何》作业五

P_{22} 4. **解** 对旋转曲面$\mathbf{x}(t,\theta)=(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, t)$, $\mathbf{x}_1=(f'\cos\theta, f'\sin\theta, 1)$, $\mathbf{x}_2=(-f\sin\theta, f\cos\theta, 0)$, $\mathbf{x}_{11}=(f''\cos\theta, f''\sin\theta, 0)$, $\mathbf{x}_{12}=(-f'\sin\theta, f'\cos\theta, 0)$, $\mathbf{x}_{22}=(-f\cos\theta, -f\sin\theta, 0)$, $\mathbf{n}=\frac{(-f\cos\theta,-f\sin\theta,ff')}{|f|\sqrt{1+(f')^2}}$. 于是得$h_{11}=\frac{-ff''}{|f|\sqrt{1+(f')^2}}$, $h_{12}=0$, $h_{22}=\frac{f^2}{|f|\sqrt{1+(f')^2}}$. 由渐近线满足的方程$\mathrm{II}=0$, 得

$$-ff''\mathrm{d}t^2+f^2\mathrm{d}\theta^2=0, \quad \text{即}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{\frac{f''}{f}}.$$

这便是渐近线的微分方程. ▌

5. **证明** 曲面上的渐近线满足$h_{11}(\mathrm{d}u^1)^2+2h_{12}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2+h_{22}(\mathrm{d}u^2)^2=0$. 若$h_{11}=h_{22}=0$, 则两族渐近线为$u^1$曲线和$u^2$曲线. 它们正交 $\iff$ $\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2=0$ $\iff$ $g_{12}=0$ $\iff$ $h_{11}g_{22}-2h_{12}g_{12}+h_{22}g_{11}=0$ $\iff$ $H=0$, 即曲面为极小曲面.

下设h_{11},h_{22}不全为0, 不妨设$h_{11}\neq 0$. 将方程化为$h_{11}(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}u^2})^2+2h_{12}\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}u^2}+h_{22}=0$, 则切方向为$\frac{\mathrm{d}\bar{u}^1}{\mathrm{d}\bar{u}^2}$和$\frac{\mathrm{d}\bar{u}^{1*}}{\mathrm{d}\bar{u}^{2*}}$的两族曲线为渐近线时, 满足$\frac{\mathrm{d}\bar{u}^1}{\mathrm{d}\bar{u}^2}+\frac{\mathrm{d}\bar{u}^{1*}}{\mathrm{d}\bar{u}^{2*}}=-\frac{2h_{12}}{h_{11}}$, $\frac{\mathrm{d}\bar{u}^1}{\mathrm{d}\bar{u}^2}\frac{\mathrm{d}\bar{u}^{1*}}{\mathrm{d}\bar{u}^{2*}}=\frac{h_{22}}{h_{11}}$. 因此两族渐近线正交 $\iff$ $g_{11}\frac{\mathrm{d}\bar{u}^1}{\mathrm{d}\bar{u}^2}\frac{\mathrm{d}\bar{u}^{1*}}{\mathrm{d}\bar{u}^{2*}}+g_{12}(\frac{\mathrm{d}\bar{u}^1}{\mathrm{d}\bar{u}^2}+\frac{\mathrm{d}\bar{u}^{1*}}{\mathrm{d}\bar{u}^{2*}})+g_{22}=0$ $\iff$ $g_{11}\frac{h_{22}}{h_{11}}-g_{12}\frac{2h_{12}}{h_{11}}+g_{22}=0$ $\iff$ $g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}=0$ $\iff$ $H=0$ $\iff$ 曲面为极小曲面. ▌

6. **证明** 由题意, $III=\varphi^2 I$, 代入$III-2HII+KI=0$, 得$2HII=(\varphi^2+K)I$. 若$H=0$, 则曲面为极小曲面; 若$H\neq 0$, 则$II=\frac{\varphi^2+K}{2H}I$, 即为脐点, 从而是球面或平面. 又因平面也是极小曲面, 因此曲面必为球面或极小曲面.▌

7. **证明** 取坐标u,v,w, 使坐标曲面$u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$及$w=\mathrm{const}$恰为三族曲面. 每点可用向径表为$\mathbf{x}=\mathbf{x}(u,v,w)$, 三族曲面正交条件为

$$\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=0,\ \mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_w=0,\ \mathbf{x}_w\cdot\mathbf{x}_u=0.$$

微分得

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{wu}+\mathbf{x}_{vu}\cdot\mathbf{x}_w &= 0,\\
\mathbf{x}_w\cdot\mathbf{x}_{uv}+\mathbf{x}_{wv}\cdot\mathbf{x}_u &= 0,\\
-\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vw}-\mathbf{x}_{uw}\cdot\mathbf{x}_v &= 0.
\end{aligned}$$

合并得

$$2\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_w=0.$$

因$\mathbf{x}_w$为$w=\mathrm{const}$的法向量, 在曲面$w=\mathrm{const}$上, $\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_w=0$得$h_{uv}=0$, $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v$得$g_{uv}=0$, 从而$u=\mathrm{const}$, $v=\mathrm{const}$为该曲面的曲率线, 其他同理可得. ▌

8. **证明** (1) 首先对正螺面, 由例题计算得其平均曲率$H=0$, 从而为极小曲面.

设直纹极小曲面$S:\mathbf{x}(u,v)=\mathbf{a}(u)+v\mathbf{b}(u)$, 其中$\mathbf{b}(u)$ 为单位向量, $\mathbf{a}'(u)\cdot\mathbf{b}(u)=0$, u为$\mathbf{a}(u)$的弧长参数. 可得$g_{11}=\mathbf{a}'^2+2v\mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'+v^2\mathbf{b}'^2$, $g_{12}=0$, $g_{22}=1$, 及$h_{11}=\frac{1}{|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|}(\mathbf{a}''+v\mathbf{b}'',\mathbf{a}'+v\mathbf{b}',\mathbf{b})$, $h_{12}=h_{22}=0$. 因S为极小曲面, 故$g_{11}h_{11}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}=0$, 即$(\mathbf{a}''+v\mathbf{b}'',\mathbf{a}'+v\mathbf{b}',\mathbf{b})=0$对任意$v$成立, 从而

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{b}) &= 0,\\ (\mathbf{a}'',\mathbf{b}',\mathbf{b})+(\mathbf{b}'',\mathbf{a}',\mathbf{b}) &= 0,\\ (\mathbf{b}'',\mathbf{b}',\mathbf{b}) &= 0.\end{aligned}$$

由第三式, $\mathbf{b}$在固定平面上, 不妨设$\mathbf{b}=(\cos u,\sin u,0)$, 则$\mathbf{b}''=-\mathbf{b}$, 由$\mathbf{a}'=\mathbf{T},\mathbf{a}''=k\mathbf{N}$, 第一式表示$k(\mathbf{N}\times\mathbf{T})\cdot\mathbf{b}=0$. 因曲面非平面, 故$k\neq 0$, 则有$\mathbf{b}\cdot\mathbf{B}=0$, 又$\mathbf{b}\cdot\mathbf{T}=0$, 知$\mathbf{b}$平行于$\mathbf{N}$, 不妨设$\mathbf{b}=\mathbf{N}$. 由$\mathbf{b}'=-k\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}$, $\mathbf{b}''=-k'\mathbf{T}-(k^2+\tau^2)\mathbf{N}+\tau'\mathbf{B}$及$\mathbf{b}''//\mathbf{b}$知$k'=\tau'=0$, 即$k,\tau$为常数, 从而$\mathbf{a}(u)$是圆柱螺线, S为$\mathbf{a}(u)$的主法线曲面, 即为正螺面.

(2) 可设旋转曲面为$S:\mathbf{x}(u,v)=(f(v)\cos u,f(v)\sin u,v)$的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=f^2(du)^2+(f'^2+1)(dv)^2.$$

第二基本形式为

$$\mathrm{II}=\frac{1}{\sqrt{f'^2+1}}(-f(du)^2+f''(dv)^2).$$

若S为极小曲面, 则$g_{11}h_{11}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}=0$, 即$f^2f''-f(f'^2+1)=0$, 可化为

$$\frac{f'}{f}=\frac{f'f''}{f'^2+1},\quad \text{即}\quad (\ln f)'=\frac{1}{2}(\ln(f'^2+1))'$$

得

$$f=\frac{1}{c}\sqrt{f'^2+1},\quad \text{即}\quad f'=\pm\sqrt{(cf)^2-1}$$

从而

$$\frac{cf'}{\sqrt{(cf)^2+1}}=\pm c,\quad \text{得}\quad (\cosh^{-1}(cf))'=\pm c$$

积分得

$$\cosh^{-1}(cf)=\pm cv+c_1,\quad \text{于是}\quad f=\frac{1}{c}\cosh(\pm cv+c_1).$$

因此曲面为悬链面. ▌

网上附加题

9.**证明** 设曲面为$X=(x,y,z(x,y))$, 则在原点处，有

$X_1=(1,0,z_x)=(1,0,0)$, $\qquad X_2=(0,1,z_y)=(0,1,0)$,
$n=\frac{(-z_x,-z_y,1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=(0,0,1)$,
$X_{11}=(0,0,z_{xx})=(0,0,a_1)$, $X_{12}=(0,0,z_{xy})=(0,0,0)$,
$X_{22}=(0,0,z_{yy})=(0,0,a_2)$.
于是,

$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = 1$
$h_{11} = a_1,\ h_{12} = 0,\ h_{22} = a_2$ 因为$g_{12} = h_{12} = 0$,于是在原点处曲率线网下
$k_1 = \frac{h_{11}}{g_{11}} = a_1,\ k_2 = \frac{h_{22}}{g_{22}} = a_2$
因此$b_1 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}k_1$, 其它同理。$\blacksquare$

14.**证明** 曲面$r = (f(t)cos(\theta), f(t)sin(\theta), t)$, 计算得

$g_{11} = 1 + (f')^2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = f^2$

$h_{11} = -\frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}},\ h_{12} = 0,\ h_{22} = \frac{f}{\sqrt{1+(f')^2}}$
故由曲率线得微分方程可得：$(g_{11}h22 - g_{22}h_{11})d\theta dt = 0$, 即

$$(f(f')^2 + f + f^2 f'')d\theta dt = 0$$

则当$f(f')^2 + f + f^2 f'' = 0$时（即存在脐点），曲率线为任意光滑曲线；当$f(f')^2 + f + f^2 f'' \neq 0$时,参数线网即为曲率线网。$\blacksquare$

21.**证明** 由Weingarten公式，$n_\alpha = -h_\alpha^b x_\beta$, 可得

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= \det(h_\alpha^\beta) x_1 \times x_2 \\ &= \frac{\det(h_{\alpha\beta})}{\det(g_{\alpha\beta})}|x_1 \times x_2| n \\ &= \frac{\det(h_{\alpha\beta})}{\det(g_{\alpha\beta})}\sqrt{\det(h_{\alpha\beta})} n \\ &= K\sqrt{g} n \end{aligned}$$

$\blacksquare$

33.**证明** 对于曲面S上一点处，在曲率线网下
$g_{12} = h_{12} = 0, \qquad h_{11} = k_1 g_{11}, \qquad h_{22} = k_2 g_{22}$
$\bar{r}_1 = r_1 + \lambda n_1 = r_1 - \lambda k_1 r_1, \qquad \bar{r}_2 = r_2 + \lambda n_2 = r_2 - \lambda k_2 r_2$
则有
$\bar{g}_{11} = (1-\lambda k_1)^2 g_{11}, \qquad \bar{g}_{12} = 0, \qquad \bar{g}_{22} = (1-\lambda k_2)^2 g_{22}$
$\bar{r_1} \times \bar{r_2} = (1 - \lambda k_1 - \lambda k_2 - \lambda^2 k_1 k_2)\sqrt{g} n$
不妨选取$\bar{S}$的法向量$\bar{n}$为n, 则
$\bar{h}_{11} = -\bar{r}_1 n_1 = (1-\lambda k_1)h_{11}, \qquad \bar{h}_{12} = -\bar{r}_1 n_2 = 0, \qquad \bar{h}_{22} = -\bar{r}_2 n_2 = (1-\lambda k_2)h_{22}.$
从而
$\bar{K} = \frac{\det(\bar{h}_{\alpha\beta})}{\det(\bar{g}_{\alpha\beta})} = \frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}, \qquad \bar{H} = \frac{1}{2}\frac{\bar{h}_{11}\bar{g}_{22}+\bar{h}_{22}\bar{g}_{11}}{\det(\bar{g}_{\alpha\beta})} = \frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}.$ $\blacksquare$

36. **证明** $(\Rightarrow)$
对平面, $H = K = 0$; 对半径为r的球面, $H = \frac{1}{r}$, $K = \frac{1}{r^2}$, 故均成立$H^2 = K$.
$(\Leftarrow)$

由$H^2=K$知, $(k_1+k_2)^2=4k_1k_2\Rightarrow(k_1-k_2)^2=0,\ k_1=k_2=k$, 即$M$上每一点都是脐点. 在$M$上取正交参数网, 这时$h_{\alpha\beta}=kg_{\alpha\beta}$, 即$h_\alpha^\beta=k\delta_\beta^\alpha$.

由Gauss-Weingarten公式,

$$\mathbf{n}_\alpha=-h_\alpha^\beta\mathbf{e}_\beta=-k\delta_\alpha^\beta\mathbf{e}_\beta=-k\mathbf{e}_\alpha$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_{\alpha\gamma} &= -k_\gamma\mathbf{e}_\alpha-k_\alpha\mathbf{e}_\gamma\\ &= -k_\gamma\mathbf{e}_\alpha-k(\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta\mathbf{e}_\beta+h_{\alpha\gamma}\mathbf{n})\\ &= -k_\gamma\mathbf{e}_\alpha-k(\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta\mathbf{e}_\beta+kg_{\alpha\gamma}\mathbf{n})\end{aligned}$$

由于$\mathbf{n}_{\alpha\gamma}=\mathbf{n}_{\gamma\alpha},\ \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta=\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta\Rightarrow\alpha$与$\gamma$指标可交换, 即$k_\gamma\mathbf{e}_\alpha=k_\alpha\mathbf{e}_\gamma$. 取$\gamma=1,\ \alpha=2$, 则$\frac{\partial k}{\partial u^1}\mathbf{e}_2=\frac{\partial k}{\partial u^2}\mathbf{e}_1$. 由于$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$线性无关$\Rightarrow\frac{\partial k}{\partial u^1}=\frac{\partial k}{\partial u^2}=0\Rightarrow k=$常数.

① $k=0$时, M上的点都是平点$\Rightarrow\mathbf{n}_\alpha=0,\ \mathbf{n}$是常向量

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}[(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}]=\mathbf{x}_\alpha\cdot\mathbf{n}=0\Rightarrow(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}=\text{常数}=C_1.$$

又$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$时, $C_1=0\Rightarrow(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n}=0$是平面的方程.

② $k\neq0$. 不妨设$k>0$

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\mathbf{x}+\frac{1}{k}\mathbf{n}\right)=\mathbf{x}_\alpha+\frac{1}{k}(-k\mathbf{x}_\alpha)=0,\ \mathbf{x}+\frac{1}{k}\mathbf{n}=\text{常向量}\mathbf{b}.$$

$|\mathbf{x}-\mathbf{b}|=|\frac{1}{k}\mathbf{n}|=\frac{1}{k}$, 是球面. ▍