第 4 讲：全纯函数 2020-3-5

1. 令 $f(z)=az^2+bz\overline{z}+c\overline{z}^2$, 求 $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

2. 证明复值函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 在 $z_0\in\Omega$ 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)=0$ 的充要条件是极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

存在.

3. 函数 $f(z)=z(z-1)\mathrm{Re}(z)$ 在哪些点导数存在? 哪些点导数不存在？证明你的结论.

4. 利用微分算子的定义证明

$$\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}=1,\ \frac{\partial z}{\partial \overline{z}}=0.$$

5. 设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 实可微，证明如下等式

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}},\quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

(利用微分算子的定义，证明实部虚部相等)

6. 设 $f:D\to\Omega$, $g:\Omega\to\mathbb{C}$ 都是实可微函数，证明

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

7. 假设 $f=u+iv:\Omega\to\mathbb{C}$ 全纯, 满足以下条件之一:

(1). u 是常数.

(2). $|f|$ 是常数.

(3). $u=v^2$.

证明 f 是常数.

8. 证明 Laplace 算子

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}}.$$