第二十章　曲线积分

§1　第一型曲线积分

1. 计算下列第一型曲线积分：

(1) $\int_L (x+y)ds$，其中 L 是以 $0(0,0)$，$A(1,0)B(0,1)$ 为顶点的三角形；

(2) $\int_L (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}ds$，其中 L 是以原点为中心，R 为半径的右半圆周；

(3) $\int_L xyds$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限中的部分；

(4) $\int_L |y|ds$，其中 L 为单位圆 $x^2+y^2=1$

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 L 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的一段；

(6) $\int_L xyzds$，其中 L 是曲线 $x=t, y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}, z=\frac{1}{2}t^2\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的一段；

(7) $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}ds$，其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周.

解　(1) $\int_L (x+y)ds=\int_{oA}(x+y)ds+\int_{AB}(x+y)ds+\int_{Bo}(x+y)ds$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1\sqrt{2}dx+\int_0^1 ydy$$

$= 1 + \sqrt{2}$

(2) 右半圆的参数方程为:

$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta. (-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$

从而

$$\int_L (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 d\theta = \pi R^2$$

(3) $\because y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, y' = \frac{-bx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

从而

$$\int_L xyds = \int_0^a \frac{b}{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + y^2}dx$$

$$= \int_0^a \frac{b}{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}dx$$

$$= \frac{b}{2a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2}dx^2$$

$$= \frac{b}{2a^2}\int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^3}dx^2$$

$$= \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$$

(4) 由于圆的参数方程为: $x = \cos\theta, y = \sin\theta. (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$,从而

$$\int_L |y| ds = \int_0^\pi \sin\theta d\theta - \int_\pi^{2\pi} \sin\theta d\theta = 4$$

(5) $\int_L (x^2 + y^2 + z^2)ds = \int_0^{2x} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2 + b^2}dt$

$= \frac{2}{3}\pi(3a^2 + 4\pi^2b^2)\sqrt{a^2 + b^2}$

(6) $\int_L xyzds = \int_0^1 t \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2t^3} \cdot \frac{1}{2}t^2\sqrt{1 + 2t + t^2}dt$

$= \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1 + t)dt$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{143}$$

(7) 其截线为圆 $2y^2 + z^2 = a^2$,其参数方程为 $x = y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t, z = a\cos t, (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

$$\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds = \int_0^{2\pi} a\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} dt = 2a^2\pi$$

2. 求曲线 $x = a, y = at, z = \frac{1}{2}at^2 (0 \leqslant t \leqslant 1, a > 0)$ 的质量,设其线密度为 $\rho = \sqrt{\frac{2z}{a}}$

解　曲线质量为:

$$M = \int_L \sqrt{\frac{2z}{a}} ds = \int_0^1 t\sqrt{a^2 + a^2t^2} dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^1 \sqrt{1 + t^2} d(1 + t^2) = \frac{a}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

3. 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 的重心,设其质量分布是均匀的.

解　因 $ds = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t} dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt$

$$M = 2a\rho_0\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}dt = 4a\rho_0$$

故重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(t - \sin t) 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}dt - \frac{a}{2}\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= -\mathrm{at}\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi + a\int_0^\pi \cos\frac{t}{2}dt + \frac{a}{4}\int_0^\pi (\cos\frac{3t}{2} - \cos\frac{t}{2})dt$$

$$= \frac{4}{3}a$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_0^\pi P_0 a(1 - \cos t) 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt - \frac{a}{4}\int_0^{\pi}(\sin\frac{3}{2}t - \sin\frac{t}{2})dt = \frac{4}{3}a$$

4. 若曲线以极坐标 $\rho = \rho(\theta)(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$ 表示，试给出计算 $\int_L f(x,y)ds$ 的公式，并用此公式计算下列曲线积分

(1) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 为曲线 $\rho = a(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4})$ 的一段；

(2) $\int_L xds$，其中 L 为对数螺线 $\rho = ae^{x\theta}(x > 0)$ 在圆 $r = a$ 内的部分

解　因 L 的参数方程为 $x = \rho(\theta)\cos\theta, y = \rho(\theta)\sin\theta(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$ 且

$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}d\theta = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta$$

故 $\int_L f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta$

$$(1)\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{a^2+0}\,d\theta = \frac{a\pi}{4}e^a$$

$$(2)\int_L xds = \int_{-\infty}^0 ae^{k\theta}\cos\theta \cdot \sqrt{a^2e^{2k\theta} + a^2k^2e^{2k\theta}}d\theta$$

$$= a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^0 e^{2k\theta}\cos\theta d\theta = \frac{4ka^2\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}$$

5. 证明：若函数 f 在光滑曲线 $L: x = x(t), y = y(t)(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 上连续，则存在点 $(x_0, y_0) \in L$ 使得，$\int_L f(x,y)ds = f(x_0,y_0)\triangle L$ 其中 $\triangle L$ 为 L 的长.

证明　由于 f 在光滑曲线 L 上连续，从而曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，且

$$\int f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

又因 f 在 L 上连续，L 为光滑曲线，所以

$f[x(t),y(t)]$ 与 $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，由积分中

值定理知：$\exists\, t_0 \in [\alpha,\beta]$　使

$$\int_L f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$$= f[x(t_0),y(t_0)]\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

$$= f[x(t_0),y(t_0)]\cdot \triangle L$$

令 $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$，显然 $(x_0,y_0)\in L$　且

$$\int_L f(x,y)ds = f(x_0,y_0)\cdot \triangle L$$

§2　第二型曲线积分

1. 计算第二型曲线积分：

(1) $\int_L xdy - ydx$，其中 L 为本节例 2 的三种情形；

(2) $\int_L (2a-y)dx + dy$，其中 L 为螺线 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 沿 t 增加方向的一段；

(3) $\oint_L \frac{-xdx+ydy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，依逆时针方向；

(4) $\oint_L ydx + \sin xdy$，其中 L 为 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 x 轴所围的闭曲线，依顺时针方向；

(5) $\int_L xdx+ydy+zdz$，其中 L 为从 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的直线段.

解　(1) 若积分沿抛物线 $\overset{\frown}{OB}: y = 2x^2$，且 $dy = 4xds$

则 $\int_{\overset{\frown}{OB}} xdy - ydx = \int_0^1 (4x^2-2x^2)dx = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}$

若积分沿直线 $OB: y = 2x$，且 $dy = 2dx$　则

$$\int_{\overline{OB}} xdy - ydx = \int_0^1 (2x-2x)dx = 0$$

若积分沿折线 OAB，$OA: y=0\quad 0\leqslant x\leqslant 1$，$AB: x=1, 0\leqslant y\leqslant 2$

则$\int_L = \int_{OA} + \int_{AB} = \int_0^1 0dx + \int_0^2 dy = 2$

(2) 因 $dx = a(1-\cos t)dt, dy = a\sin tdt$,从而

$\int_L (2a-y)dx + dy = \int_0^{2\pi} [(2a - a + a\cos t)\cdot a(1-\cos t) + a\sin t]dt$

$= \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a\sin t)dt$

$= a^2\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}dt - a\cos t \mid_0^{2\pi}$

$= a^2\pi$

(3) 由圆的参数方程

$x = a\cos t, y = a\sin t, (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 则

$\oint_L \frac{-xdx + ydy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2\sin t\cos t + a^2\sin t\cos t}{a^2}dt$

$= \int_0^{2\pi} \sin 2tdt = 0$

(4) $\oint_L ydx + \sin xdy = \int_{\overset{\frown}{OA}} + \int_{\overset{\frown}{AO}}$

$= \int_0^{\pi} (\sin x + \sin x\cos x)dx + \int_{\pi}^{0} (0 + \sin x\cdot 0)dx$

$= \int_0^{\pi} \sin xdx + \int_0^{\pi} \sin x\cos xdx$

$= 2$

(5) 直线的参数方程是:

$x = 1+t, y = 1+t, z = 1+3t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$

$\int_L xdx + ydy + zdz = \int_0^1 [(1+t) + 2(1+2t) + 3(1+3t)]dt$

$= \int_0^1 (6+14t)dt = 13$

2. 质点受力的作用,力的反方向指向原点,大小与质点离原点的距离成正比,若质点由$(a,0)$沿椭圆移动到$(0,b)$,求力所作的功:

解　椭圆的参数方程为：

$$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$$

$$F = k\sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = (-kx, -ky), (k > 0)$$

则　$$W = \int_L Pdx + Qdy = \int_L -k(xdx + ydy)$$

$$= -k\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\cos t \cdot (-a\sin t) + b^2\sin t\cos t]dt$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2 - b^2)\sin t d\sin t = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$$

3. 设质点受力的作用，力的方向指向原点，大小与质点到 xy 平面的距离成反比，若质点沿直线 $x = at, y = bt, z = ct (c \neq 0)$，从 $M(a, b, c)$ 到 $N(2a, 2b, 2c)$，求力所作的功.

解　$F = \frac{k}{z}$，因为力的方向指向原点，故其方向余弦为：

$$\cos\alpha = \frac{-x}{r}, \cos\beta = \frac{-y}{r}, \cos r = \frac{-z}{r}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

力的三个分力为 $P = -\frac{k}{z}\frac{x}{r}, Q = -\frac{k}{z}\frac{y}{r}, R = -\frac{k}{z}\frac{z}{r}$

$$W = -\int_L \frac{kx}{rz}dx + \frac{ky}{rz}dy + \frac{k}{r}dz$$

$$= -\int_1^2 \frac{k(a^2 + b^2 + c^2)t}{ct\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}t}dt$$

$$= -\frac{k}{c}\int_1^2 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\frac{1}{t}dt$$

$$= -\frac{k}{c}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ln 2$$

$$= \frac{k'}{c}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ln 2$$

4. 证明曲线积分的估计公式：

$$\int_{AB} Pdx + Qdy | \leqslant LM,$$

其中 L 为 AB 的弧长，M 为：$\max\limits_{(x,y)\in AB}\sqrt{P^2+Q^2}$

利用上述不等式估计积分

$$I_R=\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=0$

证　(1) 因 $\int_{AB}pdx+Qdy=\int_{AB}(p\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds})ds$ 且

$$|p\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}|\leqslant\sqrt{(p^2+Q^2)[(\frac{dx}{ds})^2+(\frac{dy}{ds})^2]}$$

$$=\sqrt{P^2+Q^2}$$

从而

$$|\int_{AB}pdx+Qdy|\leqslant\int_{AB}|p\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}|ds$$

$$\leqslant\int_{AB}\sqrt{p^2+Q^2}ds\leqslant\int_{AB}Mds=LM$$

(2) 因 $\max\limits_{x^2+y^2=R^2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}}=\frac{4}{R^4}$

由(1)知 $|\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}|\leqslant2\pi R\cdot\frac{4}{R^3}=\frac{8\pi}{R^2}$

由于 $|I_R|\leqslant\frac{8\pi}{R^2}\to0(R\to+\infty)$　故

$$\lim_{n\to\infty}I_R=0$$

5. 计算沿空间曲线的第二型曲线积分：

(1) $\int_L xyzdz$，其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 相交的圆，其方向按曲线依次经过 1,2,7,8 卦限；

(2) $\int_L(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界线，其方向按曲线依次经过 xy 平面部分，yz 平面部分和 zx 平面部分.

解　(1) 曲线的参数方程为 $x=\cos\theta, y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，当 θ 从 0 增加到 2π 时，点 (x,y,z) 依次经过 1,2,7,8 卦限，于是

$$\int_L xyzdz=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$$

(2) 设 $\mathrm{I}=\int_L(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$

$$=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}$$

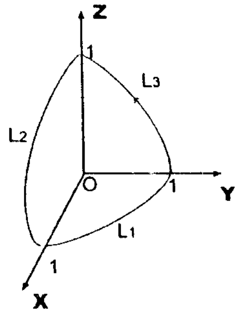

图 20—1

其中

$$L_1:\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=0\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$$

$$L_2:\begin{cases}x=0\\ y=\cos\varphi\\ z=\sin\varphi\end{cases}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$$

$$L_3:\begin{cases}x=\sin\psi\\ y=0\\ z=\cos\psi\end{cases}\quad(0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2})$$

因 $\int_{L_1}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta+\cos^3\theta)d\theta=-\frac{4}{3}$$

同理 $\int_{L_2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)d\varphi=-\frac{4}{3}$

$$\int_{L_3}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\psi+\cos^3\psi)d\psi=-\frac{4}{3}$$

所以 $\quad \mathrm{I}=-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$

总 练 习 题

1. 计算下列曲线积分

(1) $\int_L y ds$，其中 L 是由 $y^2=x$ 和 $x+y=2$ 所围的闭曲线；

(2) $\int_L |y| ds$，其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$；

(3) $\int_L z ds$，其中 L 为圆锥曲线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in[0,t_0]$；

(4) $\int_L xy^2dy-x^2ydx$，L 是以 a 为半径，圆心在原点的右半圆周从最上面的一点 A 到最下面一点 B；

(5) $\int_L \frac{dy-dx}{x-y}$，L 是抛物线 $y=x^2-1$ 从 $A(0,-4)$ 到 $B(2,0)$ 的一段；

(6) $\int_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$，L 是维维安尼曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax(z\geqslant 0, a>0)$，若从 x 轴正向看去，L 是逆时针方向进行的.

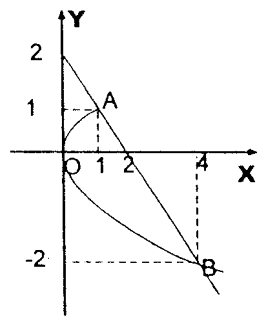

图 20—2

解 (1) 闭曲线 L 如图所示，其中 AOB 一段为 $x=y^2, y\in[-2,1], ds=\sqrt{1+4y^2}dy$，$AB$ 直一段为 $x=2-y, y\in[-2,1], ds=\sqrt{2}dy$，所以

$$\int_L yds=\int_{\overset{\frown}{AOB}} yds+\int_{\overline{BA}} yds$$

$$=\int_{-1}^{2} y\sqrt{1+4y^2}dy+\int_{-2}^{1}\sqrt{2}ydy$$

$$=\frac{1}{12}(1+4y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}y^2\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 17\sqrt{17}) - \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

(2) 双组线的极坐标方程是

$$r^2 = a^2\cos 2\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

故　$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\ \ d\theta = \sqrt{r^2 + \frac{a^4\sin^2 2\theta}{r^2}}d\theta = \frac{a^2}{r^2}d\theta$

由于被积函数与 L 的对称性,有

$$\int_L |y| ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta \frac{a^2}{r}d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta = 4a^2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

(3) 由 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$ 有

$$ds = \sqrt{(t\cos t)'^2 + (t\sin t)'^2 + (t)'^2}dt$$

$$= \sqrt{2 + t^2}dt$$

所以　$\int_L zds = \int_0^{t_0} t\sqrt{2 + t^2}dt = \frac{1}{3}(2 + t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0}$

$$= \frac{1}{3}[(2 + t_0)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}]$$

(4) 有向曲线 L 如图所示,它的参量方程是

$x = a\cos t, y = a\sin t$, 曲线从 $A(t = \frac{\pi}{2})$ 到 $B(t = -\frac{\pi}{2})$, 所以

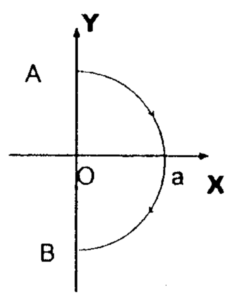

图 20—3

$$\int_L xy^2dy - x^2ydx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (a^4\cos^2 t\sin^2 t + a^4\cos^2 t\sin^2 t)dt$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt = \frac{a^4}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)dt$$

$$=-\frac{a^4}{4}\pi$$

(5) 对 $L: y = x^2 - 4 \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$,有

$$\int_L \frac{dy - dx}{x - y} = \int_0^2 \frac{2x - 1}{x - x^2 + 4} dx$$

$$= -\ln(x - x^2 + 4) \big|_0^2 = \ln 2$$

(6) 设 $x = a\sin^2 t$,则维维安尼曲线的参量方程是

$$x = a\sin^2 t, y = a\sin t\cos t, z = a\cos t$$

当 t 从$\frac{\pi}{2}$ 减少到 $-\frac{\pi}{2}$ 时,描出了曲线的方向,于是

$$\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} a^3[\sin^2 t\cos^2 t(2\sin t\cos t)] +$$

$$+ \cos^2 t(\cos^2 t - \sin^2 t) + \sin^4(-\sin t)]dt$$

$$= a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (2\sin^3 t\cos^3 t + \cos^4 t - \sin^2 t\cos^2 t - \sin^5 t) dt$$

$$= -2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t - \sin^2 t\cos^2 t) dt$$

$$= -\frac{\pi}{4}a^3$$

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数,试就如下曲线

(1)L_1:连接 $A(a,a)$,$C(b,a)$ 的直线段;

(2)L_2: 连 续 $A(a,a)$,$C(b,a)$,$B(b,b)$ 三点的三角形(逆时针方向)

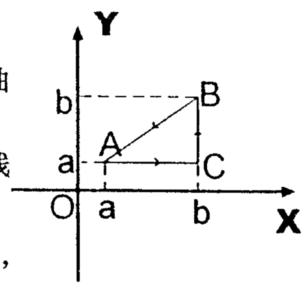

图 20—4

计算下列曲线积分:

$\int_L f(x,y)ds$;$\int_L f(x,y)dx$;$\int_L f(x,y)dy$

解　(1)直线段$L_1(AD)$的方程 $y=a, a\leqslant x\leqslant b$,所以$\int_{L_1} f(x,y)ds=\int_a^b f(x,a)dx$

$$\int_{L_1} f(x,y)dx=\int_a^b f(x,a)dx$$

$$\int_{L_1} f(x,y)dy=0$$

$$(2)\int_{L_2} f(x,y)ds=\int_{AC}+\int_{CB}+\int_{BA}$$

$$=\int_a^b f(x,a)dx+\int_a^b f(b,y)dy+\int_a^b \sqrt{2}f(t,t)dt;$$

$$\int_{L_2} f(x,y)dx=\int_{AC}+\int_{CB}+\int_{BA}$$

$$=\int_a^b f(x,a)dx+0+\int_b^a f(t,t)dt;$$

$$\int_{L_2} f(x,y)dy=\int_{AC}+\int_{CB}+\int_{BA}$$

$$=0+\int_a^b f(b,y)dy+\int_b^a f(t,t)dt$$

3. 设$f(x,y)$为定义在平面曲线弧段$\overset{\frown}{AB}$上的非负连续函数,且在$\overset{\frown}{AB}$上恒大于零

(1) 证明　$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds>0$;

(2) 试问在相同的条件下,第二型曲线积分

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dx>0;$$

是否成立,为什么?

证:(1) 由 §1 习题 5 知,存在点$(x_0,y_0)\in\overset{\frown}{AB}$,使

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = f(x_0,y_0)\triangle L \tag{1}$$

这里 $\triangle L$ 为$\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，又 $f(x,y)$ 在$\overset{\frown}{AB}$ 上恒大于零，$f(x_0,y_0) > 0$，所以由(1) 即知 $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds > 0$

(2) 不一定成立. 如取$\overset{\frown}{AB}$ 为从$A(0,0)$ 到 $B(0,1)$ 的直线段，取 $f(x,y) = 1$，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)dx = 0$$