解 析 几 何

October 25, 2018

第32页习题：

3 解: 直接计算得

$$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9.$$

所以此球面的圆心坐标为 $(-1,2,0)$, 半径为$R=3$. 因此其参数方程为

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi\cos\theta-1, \\ y=3\cos\varphi\sin\theta+2, \quad 0\le\theta<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}. \\ z=3\sin\theta, \end{cases}$$

4 解: (2) 曲面方程为

$$x^2+2y^2-4z^2=6$$

与$x0y$的交线,则令$z=0$,可得曲线方程为

$$x^2+2y^2=6,$$

所得曲线为椭圆. 类似的，可得曲面与$y0z$的交线方程为

$$y^2-2z^2=3.$$

交线为双曲线 曲面与$x0z$的交线方程为

$$x^2-4z^2=6.$$

交线为双曲线.

(4) 曲面方程为

$$x^2+y^2=z$$

则曲面与$x0y$的交线方程为

$$x^2+y^2=0,$$

交线为原点. 曲面与$y0z$的交线方程为

$$y^2=z,$$

交线为抛物线. 曲面与$x0z$的交线方程为

$$x^2=z,$$

交线为抛物线.

第36页习题：

3. 证明：设动平面族如下

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

那么依题

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k.$$

显然点 $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ 满足上面的方程，因而这族平面过定点.

5.解： 设 $P=(x,y,z)$ 是目所求曲面上一点. 记 $\vec{n}:=\frac{\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CB}\right|}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 那么

$$\left|\overrightarrow{AP}\cdot\mathbf{n}\right|=1.$$

因此，

$$2x-y+z=4\pm\sqrt{6}.$$

6. 解：因为 $A=(a,0,0)\,,B=(0,b,0)\,,C=(0,0,c)$, 所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}.$$

9. 证明：平面的法向量为 $\vec{n}=\frac{(bc,ac,ab)}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$, 那么

$$p=|(a,0,0)\cdot\vec{n}|=\frac{|abc|}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

即，

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

10-(1). 解：设 $P=(x,y,z)$ 是所求曲面上一点, 那么

$$\begin{aligned}&\left|(x-1,y-2,z)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right|\\=&\left|(x-2,y+1,z)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\right|.\end{aligned}$$

即,
$$\sqrt{5}\,|x+2y-z-5| = \sqrt{6}\,|2x-y-5|\,.$$

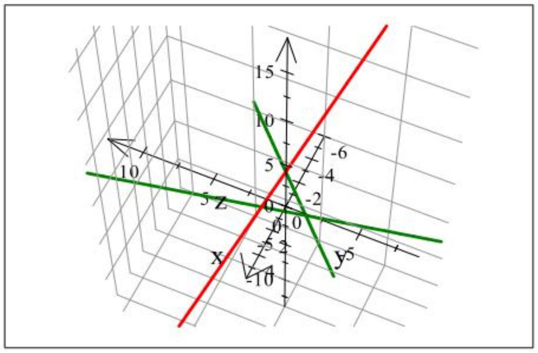
11. 解：P_1, P_2 关于平面的离差分别为
$$\delta_1 = \frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \delta_2 = \frac{Ax_2+By_2+Cz_2+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$
所以要求的比为
$$\lambda = -\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$
(注：此题求的是有向线段之比, 且通常说 P_0 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 之比指的是 $\overrightarrow{P_0P_1}:\overrightarrow{P_0P_2}$. 因为没有向量的除法运算, 这里的比不能写成 $\frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\overrightarrow{P_0P_2}}$, 不过可以用 $\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\overrightarrow{P_0P_2}|}$ 或 $\frac{P_0P_1}{P_0P_2}$ 表示这两个线段的长度之比. 注意到向量 $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ 的方向可能不同，所以这个比值不是简单的等于 $\frac{P_0P_1}{P_0P_2}$, 而是会据 P_0 与 P_1, P_2 的位置关系等于 $\frac{P_0P_1}{P_0P_2}$ 或 $-\frac{P_0P_1}{P_0P_2}$. 课本35页介绍的点到平面的离差恰好能很好的反映向量的方向问题, 所以用离差来计算此题又清楚又简单.)

第39页习题

1:(4).解：依题意，所求直线的方向矢量为 $\vec{v} = (2,1,1)\times(1,-1,0) = (1,1,-3)$. 又过定点 $P_0(1,0,1)$, 所以易知直线的向量式参数方程为:
$$\mathbf{r}\,(t) = (t+1, t, 1-3t)\,,$$
坐标式参数方程为:
$$\begin{cases} x = t+1, \\ y = t, \\ z = -3t+1, \end{cases}$$
标准方程为:
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-3}.$$
(以上三种方程，任何一种均可)

(5).解：依题所求直线的方向矢量为
$$(\cos 60°, \cos 45°, \cos 120°) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}),$$
可取做 $(1, \sqrt{2}, -1)$. 又直线过 $P_0(1,1,1)$ 点，所以所求直线的标准方程为：
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z-1}{-1}.$$

3:(2). 解：首先由题知，所求平面过点 $(1,-1,0)$, 和两直线的方向矢量 $(1,-5,-1)$，$(2,-1,1)\times(1,2,-1) = (-1,3,5)$.



(据课本第33页可有以下三种做法)

方法一：由平面的点位式方程知，所求平面上的点(x,y,z)满足

$$((x-1,y+1,z),(1,-5,-1)(-1,3,5))=0,$$

即

$$11x+2y+z=9. \tag{*}$$

方法二：由前面的计算知 $(-1,3,5)\times(1,-5,-1)=(22,4,2)$ 为平面的法矢量. 所以由平面的点法式方程得

$$(x-1,y+1,z)\cdot(22,4,2)=0.$$

化简即得 (*)式.

方法三：设 (x,y,z) 为平面上的点，那么知平面的向量式参数方程为：

$$(x,y,z)=(1,-1,0)+\lambda(1,-5,-1)+\mu(-1,3,5)\ \ (\lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

即

$$\begin{cases} x=1+\lambda-\mu \\ y=-1-5\lambda+3\mu \\ z=-\lambda+5\mu \end{cases},$$

消去上面的参数 λ,μ 即得(*).

(3). 解：此题就是求通过直线且分别与三个坐标面垂直的平面. 回忆第22页习题5，实质上就是求此直线对三坐标面的射影柱面，因为是直线, 所以此时的射影柱面均是平面. 因此由习题5知，我们只需消去方程中相应的坐标即可. 得：

对yOz面的射影柱面为：$7y+z-3=0$;

对xOz面的射影柱面为：$7x+11z-5=0$;

对xOy面的射影柱面为：$x-11y+4=0.$

(3). 解：此题就是求通过直线且分别与三个坐标面垂直的平面. 回忆第22页习题5，实质上就是求此直线对三坐标面的射影柱面，因为是直线, 所以此时的射影柱面均是平面. 因此由习题5知，我们只需消去方程中相应的坐标即可. 得：

对yOz面的射影柱面为：$7y+z-3=0;$

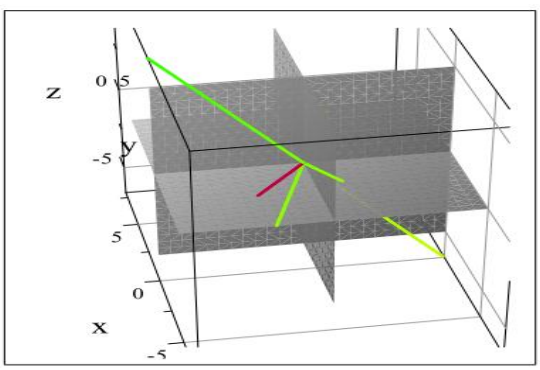
对xOz面的射影柱面为：$7x+11z-5=0;$

对xOy面的射影柱面为：$x-11y+4=0.$ **4**. 解：因为 l 在 yOz面上的射影直线为$\begin{cases} 4y-3z=0 \\ x=0 \end{cases}$, 所以$l$一定在平面 $4y-3z=0$ 内. 同理知l也在平面 $x+2z=0$ 内. 那么l就为两平面的交线，所以其方程为

$$\begin{cases} 4y-3z=0, \\ x+2z=0. \end{cases}$$

用上题的方法易知其在xOy面上的投影直线方程为

$$\begin{cases} 3x+8y=0, \\ z=0. \end{cases}$$



5:(2)解： 易知直线过点(0,0,1),直线的方向向量为

$$\vec{n}=(1,-1,-1)\times(1,1,1)=(0,-2,2)$$

取直线上一点 $A=(0,-2t,1+2t)$, 使得 $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ 解得 $t=-\frac{1}{2}, A=(0,1,0)$ 设P的对称点为Q,则有 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{QA}$, 即得$Q=(-1,2,1)$.

6:(2) 直线的方向向量为

$$\vec{v}=(1,1,-1)\times(2,1,-3)=(-2,1,-1)$$

易知直线过点$(0,-1,0)$,则点$(1,1,1)$到直线的距离为

$$d=\frac{|(1,2,1)\times(-2,1,-1)|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}$$

第44页习题：

1. 解：(方法1): 设所求直线 l 的方向矢量为 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, 则其对称式方程为

$$\frac{x-1}{v_1}=\frac{y-1}{v_2}=\frac{z-1}{v_3}.$$

因为l与l_1,l_2 均相交，那么由定理2.4.3知

$$\begin{cases}\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}=0\\ \det\begin{pmatrix}0&1&2\\2&1&4\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}=0\end{cases}.$$

由此得

$$v_1=0,\ v_2=\frac{1}{2}v_3.$$

则所求直线的方程为

$$l:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

(方法2)首先判断两条直线的关系可得 l_1,l_2 共面, 显然 l_1,l_2 不平行, 从而两条直线相交, 记交点为Q, 联立直线方程可得$Q=(1,2,3)$. 记直线 l_1,l_2 所在的平面为 π, 则π的法向向量为

$$\vec{n}=(1,2,3)\times(2,1,4)=(5,2,-3)$$

可得π的方程为

$$5(x-1)+2(y-2)-3(z-3)=5x+2y-3z=0$$

显然点P不在平面π上, 设所求直线为 l, 由于 l 与 l_1,l_2 都相交, 则l必过Q点, 即得 l 的方向向量为$\vec{v}=(0,1,2)$, l 的方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

7.解:(2) 直线的方向向量为$\vec{v}=(1,-2,9)$, 平面的法向向量为$\vec{n}=(3,-4,7)$, $\vec{v}$与 $\vec{n}$不平行,

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=3+8+63=74\neq 0$$

即知直线与平面相交.

(3)设直线的方向向量为$\vec{v}$, 则有

$$\vec{v}\cdot(1,0,-3)=\vec{v}\cdot(0,1,-2)=0$$

解得$\vec{v}=(3,2,1)$. 记平面的法向向量为$\vec{n}=(1,1,1)$, 显然$\vec{v}$与 $\vec{n}$不平行.

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=3+2+1=6\neq 0$$

即知直线与平面相交.