吉林大学 2010-2011 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

参考解析

一、（共 30 分）

1、求多项式 $f(x)=x^5+4x^4+x^3-10x^2-4x+8$ 在有理数域上的标准分解；

解：$f'(x)=4x^4+16x^3+3x^2-20x-4$，于是通过辗转相除法可得：

$(f'(x),f(x))=(x-1)(x+2)^2, f(x)/(f'(x),f(x))=(x-1)(x+2)$

故：$f(x)=x^5+4x^4+x^3-10x^2-4x+8=(x-1)^2(x+2)^3$.

2、计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$ 的值；

解：$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n\,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

3、求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解：对 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ 进行初等行变换，有：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

故有 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

二、（共 15 分）设 f, g 为不全为 0 的多项式.证明对任意正整数 n 都有$(f, g)^n=(f^n, g^n)$.

证明：设$(f,g)=d$,故存在多项式φ，ψ，使得$\varphi f+\psi g=d$，即$\varphi\frac{f}{d}+\psi\frac{g}{d}=1$.

即$\frac{f}{d},\frac{g}{d}$互素，故$(\frac{f}{d})^n,(\frac{g}{d})^n$互素，故存在多项式$\varphi'$，$\psi'$，使得$\varphi'(\frac{f}{d})^n+\psi'(\frac{g}{d})^n=1$，

故有$\varphi' f^n+\psi' g^n=d^n$.又$d\mid f,d\mid g$，故$d^n\mid f^n,d^n\mid g^n$，故$d^n=(f,g)^n=(f^n,g^n)$.

三、（共 15 分）设 A 是 n 阶方阵.证明若存在非零矩阵 B，使得 $AB=O$，则一定存在非零矩阵 C，使得 $CA=O$.

证明：此时知 A 必为奇异矩阵.否则，在等式两边同乘 A^{-1} 有 $B=O$，与条件矛盾！

不妨设$r(A)=r$，则有$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,|P||Q|\neq 0$.则取$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}$，

易知 C 非零，且 $CA=O$.

四、（共 15 分）讨论方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3 \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5 \end{cases}$解的情况，并在有解时求出这个方程组的所有解.

解；此方程组的增广矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{pmatrix}$，对其做初等行变换，有：

约化行阶梯形$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$.

①当 $a=-1$，$b\neq 0$ 时，增广矩阵的秩大于系数矩阵的秩，原方程组无解；

②当 $a\neq -1$，b 为任意值时，增广矩阵的秩与系数矩阵的秩都为 4，方程组有唯一解，为：

$x_1=-\frac{2b}{a+1},x_2=1+\frac{b}{a+1},x_3=\frac{b}{a+1},x_4=0$.

③当 $a=-1$，$b=0$ 时，增广矩阵的秩与系数矩阵的秩都为 $2<4$，方程组有无穷组解.

此时增广矩阵等价于$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得同解方程组：$\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \end{cases}$

可得一个基础解系为$(-2,1,1,0)^T,(1,-2,0,1)^T$，又一个特解为$(0,1,0,0)^T$，

故通解为：$x=s(-2,1,1,0)^T+t(1,-2,0,1)^T+(0,1,0,0)^T$

五、（共 15 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m(m\geq 2)$满足$\alpha_i\neq\theta$.

证明：对任意的数$k_1,k_2,\ldots,k_{m-1}$，向量组$\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_m$, $\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_m$, …, $\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m$

都线性无关当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.

证明：必要性.设对任意的数$k_1,k_2,\ldots,k_{m-1}$，向量组$\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_m,\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_m,\cdots,$

$\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m$都线性无关.取$k_1=k_2=\ldots=k_{m-1}=0$，则有：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-1}$线性无关.

假设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关，则有$\alpha_m=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\ldots+c_{m-1}\alpha_{m-1}$，由$\alpha_i\neq\theta$知，

$c_1,c_2,\ldots,c_{m-1}$不全为 0，不妨设$c_1\neq 0$.此时我们取$k_1=-\frac{1}{c}$，$k_2=\ldots=k_{m-1}=0$

有：$\beta_1=\alpha_1-\frac{1}{c_1}\alpha_m$，$\alpha_i=\beta_i,i=2,\ldots,m-1$，故：

$$\beta_1=\alpha_1-\frac{1}{c_1}\alpha_m=\alpha_1-\frac{1}{c_1}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{m-1})=-\frac{c_2}{c_1}\alpha_2-\ldots-\frac{c_{m-1}}{c_1}\alpha_{m-1}=-\frac{c_2}{c_1}\beta_2-\ldots-\frac{c_{m-1}}{c_1}\beta_{m-1}.$$

与假设矛盾！故$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.

充分性.若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关.假设有数$l_1,l_2,\ldots,l_{m-1}$，使得$l_1\beta_1+l_2\beta_2+\ldots+l_{m-1}\beta_{m-1}=\theta$.

将$\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_m,\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_m,\cdots,\beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+k_{m-1}\alpha_m$代入，有：

$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\ldots+l_{m-1}\alpha_{m-1}+(l_1k_1+l_2k_2+\ldots+l_{m-1}k_{m-1})\alpha_m=\theta$，此时有：

$l_1=l_2=\ldots=l_{m-1}=0(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\text{线性无关})$.故$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{m-1}$线性无关.

六、（共 10 分）设 A,B,C,D 均为 n 阶方阵，$AC=CA, AD=CB$，A 可逆，求证：$r\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=n.$

证明：由 Schur 公式可得：$\begin{pmatrix}I&O\\-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-A^{-1}B\\O&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$.

而由条件$\begin{pmatrix}A&O\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&D-A^{-1}CB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&D-A^{-1}AD\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&O\end{pmatrix}$,

又$\begin{pmatrix}I&O\\-CA^{-1}&I\end{pmatrix},\begin{pmatrix}I&-A^{-1}B\\O&I\end{pmatrix}$都可逆，故$r\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=n.$