浙江大学2017－2018学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷B

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：________

考试试卷：A卷、B卷√（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2018年7月7日，考试时间：120分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：__________学号：__________专业：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.84$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2)=0.98$，

$t_{0.10}(15)=1.34$，$t_{0.05}(15)=1.75$，$t_{0.025}(15)=2.13$，$\chi^2_{0.05}(15)=25.0$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.5$，

$\chi^2_{0.975}(15)=6.26$，$\chi^2_{0.95}(15)=7.26$，$\chi^2_{0.05}(5)=11.07$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.49$，$\chi^2_{0.05}(3)=7.82$.

一．填空题（每小格3分，共39分）：

1．设 A，B 是两个随机事件，已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.58$，则

$P(A|A\cup B)=$ ________；A 与 B 相互独立吗？答：________.

2.设 $X\sim P(\lambda)$（泊松分布），$\mathrm{Var}(X)=2$，则 $\lambda=$ ______，$P(X=1|X\geq 1)=$ ________.

3．设 (X,Y) 服从正态分布，$X\sim N(2,4), Y\sim N(1,4)$，$X$ 与 Y 的相关系数为 0.75，则

$P(X-1>Y)=$ ______，$2X+Y$ 与 $2X-Y$ 的相关系数为________.

4．设总体 $X\sim U(1,3)$（均匀分布），$X_1,\dots,X_n$ (n>2)是 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，

$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $P(\max(X_1,X_2)>2)=$ ______，当 $n\to\infty$ 时，$A_2\xrightarrow{P}$ ______；若

$n=192$，则 $P(\bar{X}>49/24)\approx$ ________.

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \ldots, X_{16}$ 是总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，(1)设 $\mu = 0$，若 $a\bar{X}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$，则 a= ________；(2)若 μ, σ^2 均未知，计算得 $\bar{x} = 5.464$，样本标准差 $s = 1.6$，则 σ^2 的置信度为 95%的双侧置信区间为________________,为检验假设 $H_0: \mu \geq 6, H_1: \mu < 6$，　$P\_$ =______，若显著水平 $\alpha = 0.05$，应该拒绝还是接受原假设？答：____________.

二.（12 分）设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1, \\ a(x-1), & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ (1)求常数 a；(2)求 X 的分布函数 $F(x)$；(3)若 $P(X>c)=0.68$，求 c 的值；(4)求 $E[(X-1)^2]$.

三.（12 分）设 $X \sim B(1, 0.4)$，$Y \sim B(2, 0.4)$，已知 $P(X=1, Y=2)=0$，且 X 与 Y 不相关，求 (X, Y) 的联合分布律；并判断 X 与 Y 是否相互独立？说明理由.

四．(13 分) 设(X,Y)的联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 1-x<y<1,0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (1) 求(X,Y)的联合分布函数值$F(1,0.5)$；(2)分别求X与Y的边际概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$，并判断X与Y是否相互独立；(3)求$Cov(X,Y)$，并判断X与Y是否相关.

五．(8 分)设总体X取值在区间$(0,3)$，对总体进行 216 次观察，数据统计如下：

X的取值	(0, 1]	(1, 1.5]	(1.5, 2]	(2, 2.5]	(2.5, 3)
频数	15	27	36	56	82

在显著水平 0.05 下，用χ^2拟合优度检验法检验假设H_0: X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x^2/9, & 0<x<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

六．(16 分) 设总体 $X \sim U[0,\theta]$，未知参数 $\theta > 0$，从总体中抽取容量为 $n(n>2)$的简单随机样本 $X_1,\ldots,X_n$， (1)分别求 θ 的矩估计量和极大似然估计量；(2)逐个判断 $\hat{\theta}_1 = 2X_1$，$\hat{\theta}_2 = X_1 + X_2$，$\hat{\theta}_3 = 1.5\max(X_1, X_2)$ 是否为 θ 的无偏估计量；(3)对于 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，$\hat{\theta}_3$ 中的无偏估计量，比较哪个最有效？说明理由.

浙江大学 2017－2018 学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷 B 解答

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院 ，任课教师：________

考试试卷：A 卷、B 卷√（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2018 年 7 月 7 日,考试时间：120 分钟

一．填空题（每小格 3 分，共 39 分）：

1. 20/29，独立.

2. 2，$\dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}=\dfrac{2}{e^2-1}=0.313$.

3. 0.5，3/4.

4. 3/4，13/3，0.16.

5. 16，$(1.396, 6.134)$，0.1，接受.

二．(12 分)

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 ax dx+\int_1^2 a(x-1)dx=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}=a$； 4 分

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2/2, & 0\le x<1,\\ x^2/2-x+1, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$； 6 分

(3) $F(c)=P(X\le c)=0.32,\Rightarrow 0<c<1,\therefore F(c)=c^2/2=0.32, c=0.8$； 10 分

(4) $E[(X-1)^2]=\int_0^1 x(x-1)^2dx+\int_1^2 (x-1)^3dx=\dfrac{1}{3}$. 12 分

三．(12 分)

解：$P(X=0)=0.6, P(X=1)=0.4$

$P(Y=0)=0.36, P(Y=1)=0.48, P(Y=2)=0.16$ 3 分

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0, \Rightarrow E(XY)=0.32$

所以，$E(XY)=P(X=1,Y=1)+2P(X=1,Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.32$，

$P(X=0,Y=1)=P(Y=1)-P(X=1,Y=1)=0.16$，，

$P(X=0,Y=2)=P(Y=2)=0.16$，

$P(X=1,Y=0)=P(X=1)-P(X=1,Y=1)-P(X=1,Y=2)=0.08$

$P(X=0,Y=0)=0.28$ 8 分

$X \ \backslash \ Y$	0	1	2
0	0.28	0.16	0.16
1	0.08	0.32	0
P(Y=j)	0.36	0.48	0.16

$P(X=1,Y=2)=0 \neq P(X=1)P(Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.064$，所以，$X$与 Y不独立。

12 分

四．(13 分)

解：(1) $F(1,0.5)=\int_{0.5}^{1}dx\int_{1-x}^{0.5}3x\,dy=\dfrac{5}{16}$， 3 分

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{1-x}^{1}3x\,dy=3x^2, 0<x<1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{1-y}^{1}3x\,dx=3y-3y^2/2, 0<y<1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$

X 与Y不相互独立，因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, $0<x,y<1$. 9 分

(3)

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1}3x^2y\,dy=\dfrac{9}{20}, E(X)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1}3x^2dy=\dfrac{3}{4}, E(Y)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1}3xy\,dy=\dfrac{5}{8}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{-3}{160}<0$，$X$ 与Y (负)相关。 13 分

五．(8 分)

X 的取值	(0, 1]	(1, 1.5]	(1.5, 2]	(2, 2.5]	(2.5, 3)
频数	15	27	36	56	82
理论概率	8/216	19/216	37/216	61/216	91/216
理论频数	8	19	37	61	91

4 分

$\chi^2=\sum_{k=1}^{5}\frac{n_k^2}{np_k}-n=10.82>\chi_{0.05}^2(4)=9.49$，拒绝原假设。 8 分

六．(16 分)

解：(1)矩估计法：$\mu_1=E(X)=\theta/2$，$\hat{\mu}_1=\bar{X}$ ，所以θ的矩估计量 $\hat{\theta}=2\bar{X}$， 4 分

极大似然估计：似然函数 $L(\theta)=\theta^{-n}$， $0\le x_i\le\theta, i=1,\dots,n$，

似然函数是θ的单调减函数，且 $\theta\ge\max\{X_1,\dots,X_n\}$ ，所以θ的极大似然估计量

$\hat{\theta}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$. 8 分

(2) $E(\hat{\theta}_1)=E(2X_1)=\theta$， $E(\hat{\theta}_2)=\theta$， $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 均是θ的无偏估计，

计算得 $M=\max\{X_1,X_2\}$ 的密度函数为 $f_M(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, 0\le x\le\theta,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_3)=\frac{3}{2}\int_0^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{3}{2}\times\frac{2\theta}{3}=\theta$； $\hat{\theta}_3$ 也是θ的无偏估计， 12 分

(3) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)=\mathrm{Var}(2X_1)=\theta^2/3$， $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)=2\mathrm{Var}(X_1)=\theta^2/6$，

$E(\hat{\theta}_3^2)=9\theta^2/8, \mathrm{Var}(\hat{\theta}_3)=\theta^2/8$，所以 $\hat{\theta}_3$ 最有效. 16 分