浙江大学2013－2014学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷解答

一．填空题（每小格3分，共33分）：

1. 0.72； 5/6.　　2. 0.086， 0.213.　　3. 0.75， 1/18.　　4. $3e^{-2}$， 8.

5. 0.04， F(1,2)， 0.16.

二．(10分)

解：(1) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.5, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$　　3分

(2) $0=Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)=P(X=1,Y=1)-P(X=1,Y=-1)$

所以，$P(X=1,Y=1)=P(X=1,Y=-1)=0.2$　　6分

X \ Y	-1	0	1	P(X=i)
0	0.05	0.4	0.05	0.5
1	0.2	0.1	0.2	0.5
P(Y=j)	0.25	0.5	0.25	

10分

三．（14分）

解：（1） $P(X+Y>1)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (2xy+x)dy=\dfrac{3}{4}$　　3分

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases}y+0.5, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$　　7分

X与Y相互独立，因为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$。　　10分

$$(3) f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z [2x(z-x)+x]dx=\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{z^2}{2}, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^1 [2x(z-x)+x]dx=-\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^2}{2}+3z-\dfrac{4}{3}, & 1<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

14分

四.（16 分）解：（1） $E(X)=\int_0^{\infty}\frac{\theta^2}{x^2}e^{\frac{-\theta}{x}}dx=\theta e^{\frac{-\theta}{x}}\Big|_0^{\infty}=\theta,\Rightarrow\hat{\theta}_1=\bar{X}$， 5 分

$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计量，因为$E(\hat{\theta}_1)=E(\bar{X})=\theta$。 7分

（2） $L(\theta)=f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)=\frac{\theta^{2n}}{(x_1...x_n)^3}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$ 10 分

$$\ln L(\theta)=-\ln(x_1...x_n)^3+2n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0,\quad\Rightarrow\quad\hat{\theta}_2=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$ 12 分

$\hat{\theta}_2$是θ的相合估计量，因为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\xrightarrow{P}E(\frac{1}{X})=\frac{2}{\theta},\quad\Rightarrow\hat{\theta}_2\xrightarrow{P}\theta$。 16 分

五.（14 分）解：（1） $P(\min_{1\le i\le 180}X_i>\frac{1}{90})=\left[P(X>\frac{1}{90})\right]^{180}=e^{-2}$ 3 分

$E(e^{-2X})=\frac{1}{3},E(e^{-2X})^2=\frac{1}{5},D(e^{-2X})=\frac{4}{45},\quad\sum_{i=1}^{180}e^{-2X_i}\overset{近似}{\sim}N(60,16),$

$P\{\sum_{i=1}^{180}e^{-2X_i}<64\}\approx\Phi(1)=0.84$ 7 分

X 的取值	$x<0.5$，	$0.5\le x<1$，	$1\le x<2$，	$x\ge 2$
频数	63	50	45	22
原假设为真时概率值	0.393	0.239	0.233	0.135
理论频数	70.74	43.02	41.94	24.30

$\chi^2=\sum_{i=1}^{4}\frac{n_i^2}{np_i}-n=2.42<\chi^2_{0.05}(3)=7.82$，接受原假设。 14 分

六. （13 分）（1） μ_1的置信度为 95%的双侧置信区间为

$(\bar{x}\pm\frac{s_1}{\sqrt{n}}t_{0.025}(5))=(6.9\pm0.36)=(6.54,7.26)$ 3 分

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
汽车	3.72	2	1.86	13.2857
误差	2.1	15	0.14	
总和	5.82	17		

F 比＝13.2857 ＞$F_{0.05}(2,15)$ ＝ 3.68，拒绝原假设。 13 分