浙江大学 2018－2019 学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

备用数据：$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2)=0.9772$，$t_{0.05}(15)=1.75$，$t_{0.025}(15)=2.13$，$t_{0.01}(15)=2.60$，$t_{0.05}(25)=1.71$，$t_{0.025}(25)=2.06$，$\chi^2_{0.05}(5)=11.1$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.49$.

一．填空题（每小格 3 分，共 33 分）

1. 某小区有 a 个人申请小区停车位，($a\geqslant 3$)，而小区的停车位只有 b 个，($0<b\leqslant a-2$)。管理者决定采用随机抽签方法确定停车位使用权。则排在第 3 位的抽签者抽中停车位的概率为__________；前三个人中恰好有一人抽中停车位的概率为____________.

2. 设 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 $P(X\le E(X))=$ _____________；现对 X 独立重复观察 200 次，结果记为 $X_1,\ldots,X_{200}$，则 $P(X_1=0|X_1+X_2\ge 1)=$ ______________，$P(\sum_{i=1}^{200}X_i>380)\approx$ ____________.

3. 设 (X,Y) 在区域 $\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 上均匀分布，则 $P(X^2+Y^2\le 1)=$______.

4. 设 $(X,Y)\sim N(1,2,4,1,-0.8)$，则 $Var(X-2Y-1)=$ __________；当 $a=$ __________ 时，$X+Y$ 与 $aX-Y$ 相互独立.

5. 设总体 X 的分布律为 $P(X=-1)=\dfrac{\theta}{3}, P(X=0)=\dfrac{2\theta}{3}, P(X=1)=\dfrac{2(1-\theta)}{3}$，$P(X=2)=\dfrac{1-\theta}{3}$，未知参数 $\theta\in(0,1)$．$X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则 $E(X)=$_________，θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=$________；当 $n\to+\infty$ 时，$(\bar{X}-\frac{4}{3})^2\xrightarrow{P}$______.

二．(15 分) 将一枚硬币独立抛 2 次，X 表示正面朝上的次数；Y 服从 $(0,2)$ 区间上的均匀分布，设 X 与 Y 相互独立，$M=\max(X,Y)$，$Z=X+Y$．分别求 X，Y，M，Z 的分布函数.

三．(15 分) 设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2}, & |y|<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ (1) 求 $P(X+Y\le 1)$；(2)求条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $P(X>0.5|Y=0)$；(3) 判断 X 与 Y 是否相关？说明理由.

四．(10 分) 为验证某汽车厂生产的汽车平均每公升汽油行驶里程是否达到 15km 以上，随机选取 16 辆车，记录下每辆车每公升汽油行驶的千米数，得到样本均值 $\bar{x}=14.22$，样本方差 $s^2=1.2^2$，假设数据来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。(1) 对于假设 $H_0:\mu\geq 15, H_1:\mu<15$，求 P _值并进行检验(取 $\alpha=0.05$)；(2)现有另一汽车厂生产的同类型汽车，其每公升汽油行驶的千米数 $Y\sim N(\mu_Y,\sigma^2)$，随机选取该类型汽车 11 辆车，测得样本均值 $\bar{y}=14.97$，样本方差 $s_y^2=1.4^2$，求 $\mu-\mu_Y$ 的置信度为 95%的双侧置信区间。(保留两位小数)

五．(12 分) 设总体 $X\sim N(\theta,\theta)$，未知参数 $\theta\in(0,\frac{1}{4})$，从总体中抽取容量为 $n(n>2)$的简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$， $\bar{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差，记 $T_k=k\bar{X}+(1-k)S^2$. (1)判断 T_k 是否为 θ 的无偏估计量？说明理由；(2)求 $Var(T_k)$，并比较 T_0 与 T_1 哪个更有效？说明理由.

六．(15 分) 设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}2x/\theta^2, & 0<x\leq\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，未知参数 $\theta>0$，$X_1,\dots,X_{400}$ 是总体 X 的简单随机样本，求 θ 的极大似然估计；若已知 400 个观察值中最小值为 0.48，最大值为 3.92，平均值为 2.72，数据统计如下：

X 取值	(0, 0.98]	(0.98, 1.96]	(1.96, 2.45]	(2.45, 2.94]	(2.94, 3.43]	$\{x>3.43\}$
频数	30	62	48	77	85	98

请在显著水平 0.05 下，用 χ^2 拟合优度检验法检验假设 H_0: X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2x/\theta^2, & 0<x\leq\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$