解 析 几 何

November 3, 2018

第44页习题：

3:(1). 解：首先计算出两个直线的标准方程为：

$$l_1 : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-3}{4}, \quad l_2 : \frac{x-7}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-4}.$$

因为

$$-2 : 3 : 4 = 2 : -3 : 4 \neq 7 : -1 : -3$$

所以由定理2.4.3知 $l_1 \parallel l_2$.

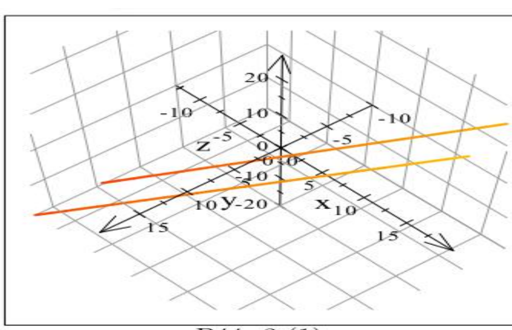
(3). 解： 两直线的对称式方程为

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}, \quad l_2 : \frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+2}{-5}.$$

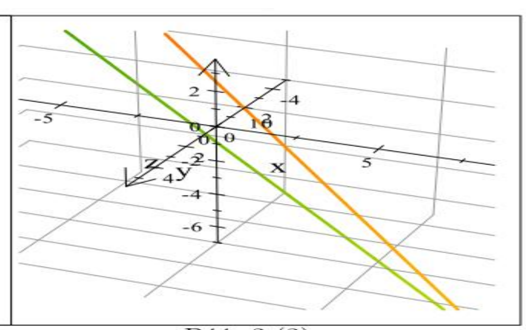
因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 l_1和l_2共面. 又显然 $1 : 2 : -1 \neq 4 : 7 : -5$, 所以它们相交.



P44: 3-(1)



P44: 3-(3)

5. 证明：二直线的标准方程为

$$l_1: \frac{x}{0} = \frac{y-\frac{b}{2}}{-\frac{1}{c}} = \frac{z-\frac{c}{2}}{\frac{1}{b}}, \quad l_2: \frac{x-2a}{\frac{1}{c}} = \frac{y}{0} = \frac{z-c}{\frac{1}{a}}.$$

依题它们之间的距离为$2d$,即

$$\begin{aligned}(2d)^2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2a & -\frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 0 & -\frac{1}{c} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{c} & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & 0 \end{vmatrix}^2} \\ &= \frac{4}{c^2\left(\frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^4}\right)},\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

8. 证明：不失一般性，设

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t,$$

其中$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 是一单位向量. 那么有

$$\begin{cases} |v_1| = |\vec{v}\cdot(1,0,0)| = \sin\alpha \\ |v_2| = |\vec{v}\cdot(0,1,0)| = \sin\beta \\ |v_3| = |\vec{v}\cdot(0,0,1)| = \sin\gamma \end{cases}.$$

所以

$$\begin{aligned} 1 &= |\vec{v}|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 \\ &= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \\ &= 3 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma. \end{aligned}$$

因此

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2.$$

11. 解：记$\triangle LMN$的重心为$G = (x, y, z)$. 设 $L = (x_1, y_1, z_1)$, $M = (x_2, y_2, z_2)$, $N = (x_3, y_3, z_3)$, 那么有

$$\begin{cases} x = \frac{\sum x_i}{3} \\ y = \frac{\sum y_i}{3} \\ z = \frac{\sum z_i}{3} \end{cases}.$$

所以

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz &= \frac{A\sum x_i}{3}+\frac{B\sum y_i}{3}+\frac{C\sum z_i}{3} \\ &= \frac{\sum(Ax_i+By_i+Cz_i)}{3} \\ &= -\frac{D_1+D_2+D_3}{3}. \end{aligned}$$

第48页习题:

2.

(3). 设所求的平面方程为

$$\pi:\lambda(x+3y-5)+\mu(x-y-2z+4)=0.$$

即

$$(\lambda+\mu)x+(3\lambda-\mu)y-2\mu z=5\lambda-4\mu.$$

因为它与x轴和y轴截距相等，所以

$$\frac{5\lambda-4\mu}{\lambda+\mu}=\frac{5\lambda-4\mu}{3\lambda-\mu}.$$

解得

$$\lambda=\mu \text{ 或 } \lambda=\frac{4}{5}\mu.$$

则所求的平面为

$$\pi_1: 2x+2y-2z-1=0 \quad \text{或} \quad \pi_2: 9x+7y-10z=0.$$

(4). 设所求的平面方程为

$$\pi_{\lambda,\mu}(s,t):\begin{cases} x=1+s\lambda \\ y=2+2t+3s\mu \\ z=-2-3t+2s\mu \end{cases}.$$

那么平面$\pi_{\lambda,\mu}$ 的法向量是 $\vec{n}_{\lambda,\mu}=(0,2,-3)\times(\lambda,3\mu,2\mu)=(13\mu,-3\lambda,-2\lambda)$.

由题意知

$$\begin{aligned} 2 &= \left|(2-1,2-2,2-(-2))\cdot\frac{\vec{n}_{\lambda,\mu}}{|\vec{n}_{\lambda,\mu}|}\right| \\ &= \left|(1,0,4)\cdot\frac{(13\mu,-3\lambda,-2\lambda)}{\sqrt{169\mu^2+13\lambda^2}}\right| \\ &= \frac{|13\mu-8\lambda|}{\sqrt{169\mu^2+13\lambda^2}}. \end{aligned}$$

解得

$$\frac{\mu}{\lambda}=\frac{2}{39},\text{或}-\frac{6}{13}.$$

那么所求的平面的方程为

$$\pi_1:\begin{cases}x=1+39s\\ y=2+2t+6s\\ z=-2-3t+4s\end{cases}\quad \text{且}\quad \pi_2:\begin{cases}x=1-13s\\ y=2+2t+18s\\ z=-2-3t+12s\end{cases},$$

即，

$$\pi_1:-2x+9y+6z=4\ \ \text{或}\ \ \pi_2:6x+3y+2z=8.$$

3. 解. 设所求的平面方程为

$$\pi:\lambda\left(2x+y-2\right)+\mu z=0.$$

即

$$2\lambda x+\lambda y+\mu z-2\lambda=0.$$

因为它在坐标轴上的截距分别为： $1,2$ 和 $\frac{2\lambda}{\mu}$, 那么依题意

$$2=\left|\frac{1}{6}\times 1\times 2\times\frac{2\lambda}{\mu}\right|.$$

解得

$$\lambda=3\mu\ \text{或}\ \lambda=-3\mu.$$

则所求的平面方程为

$$\pi_1:6x+3y+z-6=0\quad\text{或}\quad\pi_2:6x+3y-z-6=0.$$