几 何 学

2019-2020秋学期第一周作业 (P_8: 4, 5, 6)

4. 解: 取ΔABC的AB边的中点, 记为D, AC边的中点记为E. 则

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

从而DE与BC平行, 且DE长度为BC的一半, 其他情况同理可证.

5. 解:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\\
&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}\\
&+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PD}\\
&=4\overrightarrow{OP}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})
\end{aligned}$$

利用P是平行四边形的中心,

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0},$$

即得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OP}.$$

6. 解: 令

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}.$$

由已知,

$$\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{i+2}}=\lambda\overrightarrow{OA_{i+1}}.$$

其中$1\le i\le n$, 并记$A_{n+1}=A_1,\ A_{n+2}=A_2$. 从而

$$\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{i+2}})=\sum_{i=1}^{n}\lambda\overrightarrow{OA_{i+1}}.$$

即

$$2\vec{a}=\lambda\vec{a}.$$

由于

$$|\overrightarrow{OA_i}| = |\overrightarrow{OA_j}|, \forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

且$\overrightarrow{OA_i}$与$\overrightarrow{OA_{i+1}}$不共线, 从而$\lambda < 2$,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

.