吉林大学2008-2009学年第一学期“高等代数Ⅰ”期末考试试题

共七道大题 满分100分 时间120分钟

一、（共20分）

1、求多项式$f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$在有理数域上的标准分解.

2、设矩阵A,B满足$\widetilde{A}BA=2BA+5I$，求B.其中$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&5\\0&0&1&3\end{pmatrix}$.

二、（共10分）求证：整系数多项式$f(x)$与$g(x)$相等的充分必要条件是$f(t)=g(t)$，其中t是大于$f(x)$与$g(x)$任一系数绝对值2倍的正整数.

三、（共15分）设A是n阶方阵，证明：存在非零矩阵B，使得$AB=O$的充分必要条件是$|A|=0$.

四、（共10分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关，且向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关，其中$\beta\neq\theta$（零向量）.证明向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中有且只有一个向量$\alpha_j(1\le j\le m)$可由其前面的向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j-1}$线性表示.

五、（共15分）设有线性方程组$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$.

（1）证明当a_1,a_2,a_3,a_4两两不同时，此方程组无解；

（2）设$a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k$，且$\eta=(-1,1,1)^T$为此方程组的一个解，求此方程组的全部解.

六、（共10分）设A是n阶可逆矩阵，α与β均为n维列向量.证明：$|A+\alpha\beta^T|=|A|(1+\beta^TA^{-1}\alpha)$.

七、（共20分）设n阶方阵A的秩数为r，且$A^2=A$，求证：$Tr(A)=r$.