第一章　预备知识

在微积分中, 我们学习了黎曼积分, 这种积分对微积分的建立和发展起了无可替代的作用. 但是随着数学理论的发展, 人们逐渐发现黎曼积分具有一定的局限性. 首先, 黎曼积分所讨论的都是比较"好"的函数, 可积函数类不多; 其次, 极限与积分交换顺序要求函数列一致收敛这一相当强的条件; 最后, 我们知道微积分基本定理是微积分学的重要内容, 但可微函数的导函数未必黎曼可积.

为了克服以上问题, 法国数学家 Lebesgue 放弃了对函数的定义域进行分割进而求和的方法, 转而对函数的值域进行分割, 并于 1902 年在其博士论文"积分、长度与面积"中建立了一套新的积分理论. 这类积分具有更广泛的适用范围和更好的应用价值, 是黎曼积分的改进. 泛函分析中涉及到的可积函数大都是Lebesgue可积的, 本章将简单介绍Lebesgue积分相关理论.

§1.1　集合与点集

首先简单介绍集合的概念和主要性质.

定义1.1.1. 具有某种特定性质的对象的全体称为集合. 通常用大写英文字母 $A, B, X, \cdots$ 表示, 集合中的元素用小写英文字母 $a, b, x, \cdots$ 表示. 对于集合 A, $x \in A$ 表示 x 是 A 的一个元素, 当 x 不是 A 的元素时, 用 $x \notin A$（或 $x \overline{\in} A$）表示.

定义1.1.2. 假设 A, B 是两个集合, 如果 A 中的元素都是 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$, 或记作 $B \supset A$. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 称 A等于B, 记为 $A = B$; 如果 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 称 A 是 B 的真子集.

定义1.1.3. 设 A, B 是两个集合, 称由 A 与 B 中所有元素构成的新集合为 A 与 B 的并集 (或和集), 记为 $A \cup B$; 称由 A, B 的所有公共元素构成的新集合为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

定义1.1.4. 设 A, B 是两个集合, 称由属于 A 不属于 B 的所有元素构成的新集

合为 A 与 B 的差集, 记为 $A-B$(或 $A\backslash B$), 即

$$A-B=\{x|x\in A且x\notin B\}.$$

特别地, 若 $B\subset A$, 则称 $A-B$ 为 B 关于 A 的余集, 记为 B_A^C, 若$A=\mathbb{R}$或不引起混淆的情况下, 可简记为 B^C.

集合的并、交、差的运算具有下列性质：

定理1.1.5. 假设 A,B,C 是三个集合, 则

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(3) $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$;

(4) $(C-A)-B=C-(A\cup B)$;

(5) $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$;

(6) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

(7) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

定义1.1.6. 设 A,B 是两个集合, 如果在 A 和 B 之间存在一一对应关系, 则称集合 A 与集合 B对等, 记作 $A\sim B$. 如果集合$A\sim B$, 则称A与B具有相同的基数或势.

显然, $A\sim A$; 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$; 若 $A\sim B,B\sim C$, 则 $A\sim C$.

例1.1.7. 证明集合$(a,b)(a<b)$与 $(-\infty,\infty)$ 对等.

证明 定义(a,b) 到$(-\infty,\infty)$ 之间的映射：

$$y=\tan(\frac{x-b}{b-a}+\frac{1}{2})\pi,\quad x\in(a,b).$$

从而得到 $(a,b)(a<b)$ 与 $(-\infty,\infty)$ 间的一一对应. ∎

定义1.1.8. 设A是一个集合, 如果存在自然数n_0, 使得A与$\{1,2,\cdots,n_0\}$对等, 则称集合A为有限集, 否则称为无限集.

定义1.1.9. 设 A 是无限集, $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ 是自然数集, 若 $A\sim\mathbb{N}$, 则称 A 为可列集, 否则称为不可列集. 有限集与可列集统称可数集. 凡与实数集对等的集合称为具有连续势.

有两种常见的势, 一种是自然数集的势, 记为$\aleph_0$, 另一种是实数集的势, 记为$\aleph$.

定理1.1.10. 一个集合可列的充分必要条件是它与$\mathbb{N}$对等.

定理1.1.11. 任何无限集合都包含可列子集.

定理1.1.12. 有限个 (可列个) 可列集的并仍是可列集.

任何一个无限集都包含一个无限真子集. 一个集合同其真子集对等是无限集的一个特征.

例1.1.13. 全体有理数集合是可列集.

证明 令 $Q_+=\{x\in Q|x>0\}$, $Q_-=\{x\in Q|x<0\}$, $A_n=\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{i}{n},\cdots\},n\in\mathbb{N}$. 显然 A_n 为可列集. 而$Q_+=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 所以 Q_+ 为可列集. 同理, Q_- 为可列集. 将 Q_+,Q_- 的元素分别排列为

$$Q_+:a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots,$$

$$Q_-:b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n,\cdots,$$

则 Q 中元素可以排列为

$$Q:0,a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots,$$

所以 Q 是可列集. ∎

下面给出实直线$\mathbb{R}$上的点集的概念. 除非特别指出, 我们后面讨论的集合均为$\mathbb{R}$的子集.

定义1.1.14. 假设x_0是一实数, $\delta>0$, 称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$是x_0点的δ邻域, 记为$B(x_0,\delta)$.

定义1.1.15. 设$A\subset\mathbb{R}$是一个非空集合, $x_0\in A$, 如果存在$B(x_0,\delta)\subset A$, 则称x_0是A的一个内点; A的全体内点称为A的内部, 并记为A°; 如果$A=A^\circ$, 则称A为开集.

定理1.1.16. 开集的运算性质

(1) 任意多个开集的并是开集;

(2) 有限多个开集的交是开集.

定理1.1.17. 实直线上任何非空的开集G都可以表示为至多可列个互不相交的开区间的并, 这些开区间称为G的构成区间.

证明参见文献[10].

定义1.1.18. 如果对任意的$\delta > 0$, $B(x_0, \delta)$中都含有A中除x_0外的点x, 则称x_0为A的聚点(或极限点); 集合A的聚点的全体称为A的导集, 记为A'; $A \cup A'$称为A的闭包, 记为$\overline{A}$. 如果$A = \overline{A}$, 称A为闭集.

定理1.1.19. 闭集的运算性质.

(1) 任意多个闭集的交是闭集;

(2) 有限个闭集的并是闭集.

开集与闭集之间具有如下关系.

定理1.1.20. 假设$F \subset \mathbb{R}$, F是闭集当且仅当$F^C = \mathbb{R} - F$是开集.

定理1.1.21. 若G是开集, F是闭集, 则$F_G^C = G - F$是开集, $G_F^C = F - G$是闭集.

例1.1.22. 康托(Cantor)三分集是一个不可列闭集.

将区间$[0,1]$三等分, 挖去中间的开区间$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; 将剩下的两个闭区间$[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$再分别三等分, 挖去各自中间的开区间$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; 再将剩余的四个闭区间分别三等分, 再挖去各自中间的开区间. 如此继续下去, 最终$[0,1]$中剩余的点所构成的集合称为康托(Cantor)三分集, 简称Cantor集, 记为K.

证明 首先K是一个闭集. 事实上, 挖去的集合为

$$G_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}) \cup (\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}) \cup \cdots,$$

显然G_0是一个开集, 所以$K = [0,1] - G_0$是个闭集.

假设K是可列集, 则K中的数可以排成一列$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 那么在区间$[0, \frac{1}{3}]$和$[\frac{2}{3}, 1]$中总有一个不含$x_1$, 设它为$[a_1, b_1]$. 将$[a_1, b_1]$三等分, 则其左右两个闭区间内至少有一个不含$x_2$, 设为$[a_2, b_2]$. 依此类推, 可得闭区间列$[a_n, b_n]$, 满足

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

(2) $b_n - a_n = \frac{1}{3^n} \to 0, n \to \infty$;

(3) $x_n \notin [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

由闭区间套定理, 存在唯一点$c \in [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, 但$c \neq x_n, n \in \mathbb{N}$, 且$c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 故$c$是$K$的聚点. 又因为$K$是闭集, $c \in K$. 与假设矛盾. ∎

§1.2 Lebesgue(勒贝格)测度

前面我们已经提到, Lebesgue积分比Rieman积分要好, 对于不连续的函数, 仍可以进行Lebesgue积分. 但是此时分割区间没有通常的"长度", 要解决这一问题, 我们必须要建立测度的概念, 它是长度概念的推广.

定义1.2.1. (**有界开集的测度**)

(1) 空集$\emptyset$的测度$m(\emptyset)$规定为零.

(2) 若G是$\mathbb{R}$中的任意非空有界开集,定义G的测度$m(G)$为G的所有构成区间的长度之和,设$G = \bigcup\limits_i (\alpha_i, \beta_i)$, 则

$$m(G) = \sum_i (\beta_i - \alpha_i). \tag{1.2.1}$$

注意这里$m(G) \geq 0$.

定理1.2.2. 开集测度具有如下性质:

(1) (单调性) 若$G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ 为有界开集,且$G_1 \subset G_2$, 则$m(G_1) \leq m(G_2)$;

(2) (次可加性) $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}$ 为有界开集,则$m(G_1 \cup G_2) \leq m(G_1) + m(G_2)$;

(3) (可数可加性) 设$G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$, 且$G_i \cap G_j = \emptyset(\ i \neq j)$, 则$m(G) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(G_i)$.

定义1.2.3. (非空有界闭集的测度) 设$F \subset \mathbb{R}$是有界闭集,定义

$$m(F) = (b - a) - m((a, b) - F) \tag{1.2.2}$$

其中(a, b)是包含F的任何开区间.

可以证明, F的测度与(a, b)的选取无关. 事实上, 若F为单点集, 此结论显然. 若F不是单点集, 令$\alpha = inf\{x : x \in F\}$, $\beta = sup\{x : x \in F\}$, 则$\alpha, \beta$为相异实数且均属于$F$. 容易证明对任意的包含$F$的开区间$(a, b)$, 有

$$(a,b)-F=(a,\alpha)\cup(\beta,b)\cup((\alpha,\beta)-F).$$

且右边三个开集互不相交, 据开集的测度的定义, 有

$$m((a,b)-F)=\alpha-a+b-\beta+m((\alpha,\beta)-F),$$

或

$$b-a-m((a,b)-F)=\beta-\alpha-m((\alpha,\beta)-F)=m(F).$$

可见$m(F)$与a,b的取法无关.

同开集相似,闭集的测度也具有单调性与次可加性.此外,具有一定关系的开集和闭集的测度之间有如下性质：

定理1.2.4. 设$F\subset\mathbb{R}$为有界闭集, $G\subset\mathbb{R}$为有界开集, $F\subset G$, 则$m(F)\subset m(G)$.

证明　因G是有界开集,存在开区间$\triangle=(a,b)\supset G\supset F$, 这时$m(F)=b-a-m((a,b)-F)$. 又因为$(a,b)=((a,b)-G)\cup G\subset((a,b)-F)\cup G$, 由开集测度的次可加性,得$b-a\le m((a,b)-F)+m(G)$, 即$m(F)\le m(G)$. ∎

例1.2.5. 求Cantor集K的测度.

解　因为Cantor集是有界闭集, 选取$(a,b)=(-1,2)\supset K$, 则$(a,b)-K=G_0\cup(-1,0)\cup(1,2)$, 而$m(G_0)=\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+\cdots+2^n\cdot\frac{1}{3^{n+1}}+\cdots=1$, 所以$m((a,b)-K)=3$, 而$m(a,b)=3$, 所以$m(K)=0$. ∎

这是一个测度为零的不可列集的例子.

利用开集、闭集的测度以及微积分中求曲边梯形面积的思想,可以定义任意非空有界集的测度.

定义1.2.6. 设$E\subset\mathbb{R}$非空有界,称所有包含E的有界开集的测度的下确界为E的外测度,记为$m^*(E)$,即

$$m^*(E)=\inf\{m(G)|G\text{ 为有界开集}, E\subset G\}\tag{1.2.3}$$

定义1.2.7. 设$E\subset\mathbb{R}$非空有界,称所有包含于E的有界闭集的测度的上确界为E的内测度,记为$m_*(E)$,即

$$m_*(E) = \sup\{m(F) \mid F \text{ 为有界闭集}, F \subset E\} \tag{1.2.4}$$

显然对任何集合E, $m_*(E) \le m^*(E)$.

定义1.2.8. 设$E \subset \mathbb{R}$非空有界,如果$m_*(E) = m^*(E)$, 则称E是Lebesgue可测集(简称可测集), 此时称$m^*(E)$为E的测度,记为$m(E)$.

按此定义有界开集、有界闭集都是可测集. 若$m^*(E) = 0$, 则E是可测集且测度为零.

定理1.2.9. (1) **单调性** 设E_1, E_2是有界可测集, $E_1 \subset E_2$, 则$m(E_1) \le m(E_2)$;

(2) **可加性** 设E_k是有界可测集, $E_i \cap E_j = \emptyset, i \ne j$, 且$E = \bigcup\limits_k E_k$有界, 则$E$可测, 且$m(E) = \sum\limits_k m(E_k)$.

定理1.2.10. 设$E \subset \mathbb{R}$是一个有界集,则E可测的充分必要条件是对任意的$\epsilon > 0$, 存在满足$F \subset E \subset G$的有界开集G与闭集F使得$m(G - F) < \epsilon$.

证明 必要性. 设E可测,则$m^*(E) = m_*(E)$. 由内外测度的定义,对任意的$\epsilon > 0$, 存在有界开集$G \supset E$与有界闭集$F \subset E$, 使得

$$m(G) < m^*(E) + \frac{\epsilon}{2},$$

$$m(F) > m_*(E) - \frac{\epsilon}{2},$$

由于$m^*(E) = m_*(E)$, 故$m(G) - m(F) < \epsilon$. 又$G = (G - F) \cup F$, 且$G - F$与F不相交,由定理1.2.9中的测度的可加性,有

$$m(G - F) = m(G) - m(F) < \epsilon.$$

充分性. 假设对任意的$\epsilon > 0$, 存在满足$F \subset E \subset G$的有界开集G与闭集F使得$m(G - F) < \epsilon$,则

$$m_*(E) \le m^*(E) \le m(G) < m(F) + \epsilon \le m_*(E) + \epsilon,$$

由ϵ的任意性,得$m_*(E) = m^*(E)$, 所以E是可测集. ∎

利用上面定理可以证明可测集对于并、交、差三种运算封闭.

定理1.2.11. (1) 设$E \subset \triangle = (a,b)$(有界)$\subset \mathbb{R}$是可测集, 则$E$关于$\triangle$的余集是可测集；

(2) 设E_1, E_2可测,则$E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 - E_2$均可测,并且当$E_1 \cap E_2 = \emptyset$时,有

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2). \tag{1.2.5}$$

证明参见文献[8].

上面定理的结论(2)可以推广到可列情形.

例1.2.12. 设E是可测集, $m(E) = 1$, $\{E_i\}$是E的一列可测子集,且对任意的$\epsilon > 0$,有这个集列中的一个集E_i, 使$m(E_i) > 1 - \epsilon$, 证明

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1.$$

证明 因为$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset E$, 所以$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq m(E) = 1$. 又对任意的$\epsilon > 0$, 选取$i$,使得$m(E_i) > 1 - \epsilon$, 所以

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq m(E_i) > 1 - \epsilon,$$

由ϵ的任意性,结论得证. ∎

接下来给出无界可测集的定义.

定义1.2.13. 设$E \subset \mathbb{R}$为无界集,若对任何的自然数n, $E_n = E \cap (-n, n)$为可测集,则称E为可测集, 并称极限$\lim\limits_{n \to \infty} m(E_n)$为$E$的测度, 记为$m(E)$.

此极限值可能是有限值, 也可能是$+\infty$, 若此极限是有限值, 则$m(E)$的测度定义为此极限值, 若不然, $m(E)$的测度定义为$+\infty$.

注记1.2.14. 对于无界集, 定理1.2.11的结论仍成立. 实直线上的不可测集是存在的.

最后, 再介绍两个常用的概念.

定义1.2.15. 由$\mathbb{R}$中的所有可测集组成的集合称为可测集类,记为L.

从开集、闭集出发,经过并、交、差、可列并、可列交运算后得到的集合称为$Borel$(波雷尔)集, 由$Borel$集组成的集类称为$Borel$集类, 记为B,显然$B \subset L$.

§1.3 可测函数

Lebesgue积分采用的是对值域进行划分的方法, 因而要求集合$E_i = \{x \in E | y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$具有某种长度意义,即应为可测集. 而集合$E_i$是否可测同函数$f$有密切关系. 因此, 我们要给出可测函数的定义.

定义1.3.1. 假设$f(x)$是定义在可测集E上的有界实值函数, 若对任意的$a \in \mathbb{R}$,, E的子集

$$E(f > a) = \{x \in E \mid f(x) > a\} \tag{1.3.1}$$

是可测集,则称f是E上的Lebesgue可测函数.

定理1.3.2. 设有界实值函数$f(x)$是可测集E上的可测函数,则对任意的$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 集合

$$E(f < a) = \{x \in E | f(x) < a\}, \quad E(f \geq a) = \{x \in E | f(x) \geq a\},$$
$$E(f \leq a) = \{x \in E | f(x) \leq a\}, \quad E(f = a) = \{x \in E | f(x) = a\},$$
$$E(a \leq f \leq b) = \{x \in E | a \leq f(x) \leq b\}$$

都是可测集.

证明 因为

$$E(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > a - \frac{1}{n}),$$
$$E(f < a) = E - E(f \geq a),$$
$$E(f \leq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < a + \frac{1}{n}),$$
$$E(f = a) = E(f \geq a) - E(f > a),$$
$$E(a \leq f \leq b) = E(f \geq a) \cap E(f \leq b),$$

所以上述集合均是可测集. ∎

例1.3.3. 定义在零测度集上的函数是可测函数.

证明 假设f是定义在可测集E上的函数,对任意的$a \in \mathbb{R}$, $E(f > a) \subset E$, 则

$$0 \leq m^*(E(f > a)) \leq m(E).$$

当$m(E) = 0$时,有$m^*(E(f > a)) = 0$, 从而$E(f > a)$是可测集. ∎

例1.3.4. 设$E_i(i=1,2,\cdots,n)$是可测集,且E_i互不相交, $E=\bigcup_{i=1}^n E_i$, f是定义于E上, 且在E_i上分别取值为$c_i(i=1,2,\cdots,n)$的函数(称为简单函数或阶梯函数),则$f(x)$是可测函数.

证明 不妨设$c_1<c_2<\cdots<c_n$, 因为对任意的$a\in\mathbb{R}$, 有

$$E(f>a)=\begin{cases}\emptyset & , \quad a\geq c_n\\ E_n & , \quad c_{n-1}\leq a<c_n\\ \cdots & \\ \bigcup\limits_{i=2}^{n} E_i & , \quad c_1\leq a<c_2\\ E & , \quad a<c_1\end{cases}$$

故$E(f>a)$是可测集, $f(x)$是可测函数. ∎

例1.3.5. 可测集上的连续函数为可测函数.

证明 任取$x\in E(f>a)$, $f(x)>a$. 因为f是E上的连续函数, 存在$\delta>0$, 当$x_1\in(x-\delta,x+\delta)$时, 有$f(x_1)>a$. 从而有$(x-\delta,x+\delta)\subset E(f>a)$, $E(f>a)$是开集, 因而是可测集, f是E上的可测函数. ∎

下面讨论可测函数的性质.

定理1.3.6. 设f定义在可测集$E_i(i=1,2)$的和集$E=E_1\cup E_2$上,则f在E上可测的充分必要条件是f在$E_i(i=1,2)$上均可测.

证明 必要性. 对任意的实数a, 因为$E_i(f>a)=E_i\cap E(f>a)$, 又f在E上可测, $E(f>a)$是可测集, 从而$E_i(f>a)$是可测集, 所以f在$E_i(i=1,2)$上可测. d

充分性. 对任意的实数a, 因为$E(f>a)=E_1(f>a)\cup E_2(f>a)$, 所以$f$在$E$上可测. ∎

推论1.3.7. f在可测集E上可测的充分必要条件是f在$E-E_1$上可测, 其中E_1是E的零测度子集.

从上面定理及推论可以看出,函数的可测性与其在零测度集上的取值无关. 因而有如下定义

定义1.3.8. 若f 在E上可测, g在E上有定义, 且$m(E(f\neq g))=0$, 则g在E上可测. 此时, 称函数g与f在E上几乎处处相等, 记为$f=g,a.e.$于E.

定理1.3.9. 设$f(x), g(x)$都是可测集E上的可测函数,则函数$kf(k \in \mathbb{R})$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $f/g(g \neq 0)$都是E上的可测函数.

证明 1. kf

因为$k = 0$时, $kf \equiv 0$, 故kf在E上可测. 当$k > 0$时, $\forall a \in \mathbb{R}$, $E(kf \geq a) = E(f \geq \frac{a}{k})$, 所以由$f$在$E$上可测知$kf$在$E$上可测. 同理, 当$k < 0$时, kf也在E上可测.

2. $f \pm g$

因为

$$E(f + g > a) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f > r_i) \cap E(g > a - r_i)],$$
$$E(f - g > a) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f > r_i) \cap E(g < r_i - a)],$$

其中$\{r_i\}$是全体有理数. 所以$f \pm g$是可测函数.

3. $f \cdot g$

先证当f可测时, f^2可测. 事实上, 对任意的$a \in \mathbb{R}$, 我们有

$$E(f^2 > a) = \begin{cases} E, & a < 0 \\ E(f > \sqrt{a}) \cup E(f < -\sqrt{a}), & a \geq 0 \end{cases}$$

所以f^2可测.

再由$f \cdot g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$, 可知$f \cdot g$是可测函数.

4. f/g

因为$f/g = f \cdot \frac{1}{g}$, 所以只需考虑$\frac{1}{g}$的可测性. 而

$$E(\frac{1}{g} > a) = \begin{cases} E(g > 0) \cap E(g < 1/a), & a > 0 \\ E(g > 0), & a = 0 \\ E(g > 0) \cup E(g < 1/a), & a < 0 \end{cases}$$

所以$\frac{1}{g}$是可测函数,进而f/g是可测函数. ∎

例1.3.10. 设f, g是E上的可测函数,讨论$E(f > g)$的可测性.

解 设$x \in E(f > g)$, 则存在有理数r, 使$f(x) > r > g(x)$, 因此$x \in E(f > r) \cap E(g < r)$. 所以

$$E(f > g) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f > r_i) \cap E(g < r_i)].$$

这里$\{r_i\}$是所有有理数.

反过来,设$x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}[E(f > r_i) \cap E(g < r_i)]$, 则存在$r_i$, 使得$x \in E(f > r_i)$且$x \in E(g < r_i)$, 即$x \in E(f > g)$. 因此

$$E(f > g) \supset \bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f > r_i) \cap E(g < r_i)].$$

总之

$$E(f > g) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[E(f > r_i) \cap E(g < r_i)].$$

所以$E(f > g)$是可测集. ∎

下面我们来介绍函数列收敛的概念.

定义1.3.11. 设$f, f_n, n = 1, 2, \cdots$都是E上的函数,

(1) $\forall \epsilon > 0$, $\forall x \in E$, $\exists N$(N与 ϵ, x 有关), 当$n > N$时,有$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 称$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上处处收敛于$f$, 记为

$$f_n \longrightarrow f, \quad n \longrightarrow \infty.$$

(2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$(N仅与ϵ有关), $\forall x \in E$, 当$n > N$时, 都有$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 称$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上一致收敛于$f$, 记为

$$f_n \xrightarrow{\text{一致}} f, \quad n \longrightarrow \infty.$$

(3)如果$\exists E_0 \subset E$, $m(E_0) = 0$, 且$f_n(x) \to f(x) (\forall x \in E - E_0)$, 称$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上几乎处处收敛于$f$, 记为$f_n \to f, a.e.$于$E$.

注记1.3.12. 上述收敛概念有如下蕴含关系：(2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3), 但反之不成立.

例1.3.13. 设函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中$f_n(x) = x^n$, 定义函数f如下

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

则f_n在$[0, 1]$上处处收敛于f, 但在$[0, 1]$上f_n不一致收敛于f. 而在去掉一个测度可任意小的正测集后, f_n在余下点集上一致收敛于f.

那么, 什么条件下处处收敛、甚至几乎处处收敛的函数列可以是一致收敛的呢？

定理1.3.14. (Egoroff) 设E是可测集, $m(E) < +\infty$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是E上的几乎处处有限的可测函数序列, f是E 上的可测函数, 则下列命题等价：

(1) $f_n \to f, a.e.$于E, 且f在E上$a.e.$有限；

(2) 对任意的$\delta > 0$, 存在可测子集$E_\delta \subset E$, 使得$m(E - E_\delta) < \delta$,而在E_δ上f_n一致收敛于f, 且f在E上$a.e.$有限.

证明参见文献[2].

对于可测函数列,还可以用测度描述函数列的另一种收敛.

定义1.3.15. 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是可测集E上的几乎处处有限的可测函数列, 如果存在几乎处处有限的函数f, 使得对于任意$\epsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x|\ \ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0,$$

则称$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$依测度收敛于f, 记为$f_n \Rightarrow f$.

依测度收敛是更弱的一种收敛.

定理1.3.16. (Lebesgue) 若$m(E) < \infty$, f_n几乎处处有限, $f_n \to f, a.e.$于E, 则$f_n \Rightarrow f$.

证明 由Egoroff定理, 对任意的$\delta > 0$, 存在E的可测子集E_δ, 使得$m(E - E_\delta) < \delta$, 且f_n在E_δ上一致收敛于f, 于是对任意的$\epsilon > 0$, 存在N, 当$n > N$时, 有$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ (x \in E_\delta)$, 于是对任意的$n > N$,

$$E\{x|\ \ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subset E - E_\delta,$$

从而

$$m(E\{x|\ \ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \leq m(E - E_\delta) < \delta.$$

由δ的任意性, 得$f_n \Rightarrow f$. ∎

上面定理的逆一般不成立.

关于可测函数的极限,有下面的几个定理(证明参见文献[14]. P142).

定理1.3.17. 设$f, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$分别是可测集$E$上的函数及可测函数列, 如果$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上几乎处处收敛于$f$, 则$f$在$E$上可测.

定理1.3.18. (Riesz) 设$\{f_n\}$在E上依测度收敛于f, 则存在子列$\{f_{n_k}\}$几乎处处收敛于f.

我们知道连续函数可以用多项式来逼近,从而可以将一些较为复杂的函数转化为简单的函数来考虑. 可测函数是连续函数的推广,它可以用怎样的较为简单的函数来逼近呢?

定理1.3.19. $f(x)$是E上可测函数的充分必要条件是$f(x)$可以表示为阶梯函数列的极限.

证明参见[14].

另外, 连续函数具有很多好的性质,因此人们在研究可测函数时,也希望用连续函数表征可测函数. 下面的定理说明闭区间上的可测函数与连续函数差别很小.

定理1.3.20. (Lusin) 设f是E上几乎处处有限的可测函数, $m(E) < \infty$, 则$\forall \delta > 0$, 存在闭子集$F_\delta \subset E$, 使得f在F_δ上连续, 且$m(E - F_\delta) < \delta$.

证明 因为可测函数是阶梯函数列的极限, 先考察f是阶梯函数的情况.

设$E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(\forall i \neq j)$, $\forall x \in E_i$, $f(x) = c_i$. 对每个E_i, 可以找到闭集$F_i^\delta \subset E_i$, 使$m(E_i - F_i^\delta) < \frac{\delta}{n}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 令$F_\delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i^\delta$,则$F_\delta$仍是闭集, 且$m(E - F_\delta) = m[\bigcup\limits_{i=1}^{n}(E_i - F_i^\delta)] < \delta$.

下证f是F_δ上的连续函数.

事实上, 设$x_0 \in F_\delta$,则存在$i_0 \leq n$, 使$x_0 \in F_{i_0}^\delta$, 由于$\{F_i^\delta\}_{i=1}^n$是互不相交的闭集, 所以存在$\epsilon_0 > 0$, 使得$d(x_0, F_j^\delta) \geq \epsilon_0, \forall j \neq i_0$. 取$\epsilon < \epsilon_0$,则当$x \in B(x_0, \epsilon) \cap F_\delta$时, 必有$x \in F_{i_0}^\delta$,从而$f$在$B(x_0, \epsilon) \cap F_\delta$上是常数, 因此$f$在$F_\delta$上每一点$x_0$处连续.

若f是可测函数, 不妨设f在E上处处有限, 否则可去掉一个零测度集, 使f在其上处处有限, 则存在阶梯函数序列$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, 使$\varphi_n \to f, a.e.$于$E$. 由Egoroff定理知, 对任意的$\epsilon > 0 (\epsilon < \frac{\delta}{2})$,存在$E_\epsilon \subset E$,使得$m(E - E_\epsilon) < \epsilon < \frac{\delta}{2}$且$\varphi_n$在$E_\epsilon$上一致收敛到$f$. 由上面的证明, 对任意的$\delta > 0$及每个$n$, 存在闭集$F_n^\delta \subset E_\epsilon$, 使得$m(E_\epsilon - F_n^\delta) < \frac{\delta}{2^{n+1}}$, 且$\varphi_n$是$F_n^\delta$上的连续函数. 记$F_\delta = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n^\delta$, 则$F_\delta$是闭集, 且$\varphi_n$在$F_\delta$上也一致收敛到$f$.

由φ_n在$F_\delta \subset F_n^\delta$上的连续性知$f$在$F_\delta$上连续. 并且有

$$m(E - F_\delta) = m(E - E_\epsilon) + m(E_\epsilon - F_\delta) \leq \frac{\delta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} m(E_\epsilon - F_n^\delta) < \delta.$$

§1.4 Lebesgue积分

下面我们来定义Lebesgue积分, 重点介绍有界可测集上有界可测函数的Lebesgue积分及其性质.

定义1.4.1. 假设$m(E) < +\infty$, $f(x)$是E上的有界可测函数, $\alpha < f(x) < \beta$. 对区间$[\alpha, \beta]$取任一分割:

$$\triangle : \alpha = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = \beta$$

令$\lambda(\triangle) = \max\limits_{1 \le i \le n}(y_i - y_{i-1})$, $E_i = E(y_{i-1} \le f < y_i)$. 任取$\xi_i \in [y_{i-1}, y_i]$, 作和式:

$$\sigma(\triangle) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i m(E_i) \tag{1.4.1}$$

如果当$\lambda(\triangle) \to 0$时, $\sigma(\triangle)$的极限存在,且该极限值与$[\alpha, \beta]$的分割方式及ξ_i的选取无关,则称$f(x)$在E上Lebesgue可积, 并称此极限值为$f(x)$在E上的Lebesgue积分(简称L积分),记为$\int_E f(x)dx$, 即

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\lambda(\triangle) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i m(E_i). \tag{1.4.2}$$

对$[\alpha, \beta]$的任意分割$\triangle$, 可做两个特殊的和式:

$$S(\triangle) = \sum_{i=1}^{n} y_i m(E_i), \quad s(\triangle) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i),$$

分别称$S(\triangle), s(\triangle)$为$f(x)$在$E$上关于分割$\triangle$的Lebesgue大和与小和.

由定义可得

(1)对$[\alpha, \beta]$的任意分割$\triangle$,有

$$s(\triangle) \le \sigma(\triangle) \le S(\triangle).$$

(2)当分割加细(即在原来的分点组中加入一些分点)时,小和不减,大和不增.

(3)任意分割的小和不大于另一分割的大和.

从上面性质可以看出, $\lim\limits_{\lambda(\triangle) \to 0} \sigma(\triangle)$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{\lambda(\triangle) \to 0} s(\triangle)$, $\lim\limits_{\lambda(\triangle) \to 0} S(\triangle)$存在且相等.

关于函数的Lebesgue可积性, 有如下定理.

定理1.4.2. 若f在E上可测,则f在E上可积.

证明 记$\underline{I} = \sup\{s(\triangle)|\ \triangle$是$E$的任意分割$\}$, $\overline{I} = \inf\{S(\triangle)|\ \triangle$是$E$的任意分割$\}$, 则对任意分割$\Delta$, 有

$$s(\triangle) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S(\triangle),$$

所以

$$0 \leq \overline{I} - \underline{I} \leq S(\triangle) - s(\triangle) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{i-1})m(E_i) \leq \lambda(\triangle)m(E).$$

令$\lambda(\triangle) \to 0$, 则$\underline{I} = \overline{I}$. 记$\underline{I} = \overline{I} = I$, 由于

$$|\sigma(\triangle) - I| \leq S(\triangle) - s(\triangle) \leq \lambda(\triangle)m(E),$$

所以$\lim\limits_{\lambda(\triangle)\to 0} \sigma(\triangle) = I$, 即$f$在$E$上可积. ∎

例1.4.3. 证明Dirichlet函数

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$$

在$[0,1]$上Lebesgue可积.

证明 只需证明Dirichlet函数在$[0,1]$上Lebesgue可测. 事实上, 因为Dirichlet函数和常函数$\tilde{\mathfrak{D}}(x) \equiv 0$几乎处处相等, 而可测集上的常函数是可测的, 所以Dirichlet函数可测. ∎

Lebesgue积分具有如下性质:

定理1.4.4. 假设$m(E) < \infty$, $f(x), g(x)$是E上的有界可测函数, 则

(1) 对任意的$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx;$$

(2) 若$E_1, E_2, \cdots, E_n$是E的可测子集, $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$, 则

$$\int_E f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)dx;$$

(3) 若$f(x) \le g(x)$ $a.e.$ 于E, 则

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx;$$

(4) 若$f(x) = g(x)$ $a.e.$于E, 则

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

证明 (1), (2) 证明略.

(3) 令$F(x) = g(x) - f(x)$, 则$F(x) \ge 0$ $a.e.$于E, 由Lebesgue积分的定义易知

$$\int_E F(x)dx \ge 0,$$

再由(1)得

$$\int_E g(x)dx - \int_E f(x)dx = \int_E (g(x) - f(x))dx \ge 0,$$

即

$$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx.$$

(4) 记$E_1 = \{f(x) = g(x)\}$, $E_2 = \{f(x) \ne g(x)\}$, 则$m(E_2) = 0$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 且$E = E_1 \cup E_2$, 注意零测度集上函数的积分总为0, 从而有

$$\begin{aligned}\int_E g(x)dx &= \int_{E_1} g(x)dx + \int_{E_2} g(x)dx = \int_{E_1} g(x)dx \\ &= \int_{E_1} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx = \int_E f(x)dx\end{aligned}$$

∎

定理1.4.5. 假设$m(E) < \infty$, $f(x)$是E上非负有界可测函数,且$\int_E f(x)dx = 0$, 则$f(x) = 0$ $a.e.$于E.

证明 任给正数ϵ, $E = E(f \ge \epsilon) \cup E(f < \epsilon)$且$E(f \ge \epsilon) \cap E(f < \epsilon) = \emptyset$,由定理1.4.4的(2),可得

$$\int_E f(x)dx = \int_{E(f\geq\epsilon)} f(x)dx + \int_{E(f<\epsilon)} f(x)dx,$$

由于$f(x) \geq 0$ $a.e.$ 于E, 再由定理1.4.4的(3)可得

$$\int_{E(f<\epsilon)} f(x)dx \geq 0,$$

$$\int_{E(f\geq\epsilon)} f(x)dx \geq \int_{E(f\geq\epsilon)} \epsilon dx = \epsilon\cdot m(E(f\geq\epsilon)).$$

于是

$$\int_E f(x)dx \geq \epsilon\cdot m(E(f\geq\epsilon)),$$

由已知$\int_E f(x)dx = 0$, 所以$m(E(f\geq\epsilon)) = 0$, 从而有

$$m(E(f\neq 0)) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f\geq \frac{1}{n})) \leq \sum_{n=1}^{\infty} mE(f\geq\frac{1}{n}) = 0.$$

∎

例1.4.6. 假设$E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, E_i为互不相交的可测集, $f(x) = c_i, x\in E_i$, 即$f(x)$是E上的简单函数, 则$f(x)$可积且$\int_E f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i m(E_i)$.

解 由定理1.4.4的(2)易证. ∎

定理1.4.7. 如果有界函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上是Riemann可积的, 则$f(x)$在$[a,b]$上也是Lebesgue可积的, 且

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

证明 只需证明f是$[a,b]$上的可测函数且上述等式成立. 由于f Riemann可积, 取$[a,b]$的分点组列$\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$, $D_m : a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \cdots < x_{i_m}^{(m)} = b$, $D_m \subset D_{m+1}$, $\delta(D_m) = \max\limits_{1\leq i\leq i_m}\{x_i^{(m)} - x_{i-1}^{(m)}\} \to 0,\ m\to\infty$. 记$m_i^{(m)}, M_i^{(m)}$分别为$f$在$[x_{i-1}^{(m)}, x_i^{(m)}]$上的上确界与下确界, 由Riemann积分的定义知

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{i_m} M_i^{(m)}(x_i^{(m)}-x_{i-1}^{(m)})\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{i_m} m_i^{(m)}(x_i^{(m)}-x_{i-1}^{(m)})\end{aligned}$$

令$\{\varphi_m\},\{\psi_m\}$为下面的函数列：

$$\varphi_m(x)=\begin{cases} m_i^{(m)}, & x\in(x_{i-1}^{(m)},x_i^{(m)}],\\ f(a), & x=a,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots i_m,$$

$$\psi_m(x)=\begin{cases} M_i^{(m)}, & x\in(x_{i-1}^{(m)},x_i^{(m)}],\\ f(a), & x=a,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,i_m,$$

因为$D_m\subset D_{m+1}$, 所以

$$\psi_1\geq\psi_2\geq\cdots\geq\psi_m\geq\cdots\geq f,$$

$$\varphi_1\leq\varphi_2\leq\varphi_3\leq\cdots\leq\varphi_m\leq\cdots\leq f.$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}\psi_m=\bar f\geq f,\quad \lim_{m\to\infty}\varphi_m=\underline{f}\leq f,$$

即

$$\underline{f}\leq f\leq\bar f.$$

注意到$\bar f,\underline{f}$都是有界可测的, 所以$\bar f-\underline{f}$是非负Lebesgue可积函数, 从而

$$\int_{[a,b]}(\bar f-\underline{f})dx=\int_{[a,b]}\bar f dx-\int_{[a,b]}\underline{f}dx\geq 0.$$

又

$$\int_{[a,b]}\underline{f}(x)dx\geq\int_{[a,b]}\varphi_m(x)dx=\sum_{i=1}^{i_m}m_i^{(m)}(x_i^{(m)}-x_{i-1}^{(m)})\to\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{[a,b]}\bar f(x)dx\leq\int_{[a,b]}\psi_m(x)dx=\sum_{i=1}^{i_m}M_i^{(m)}(x_i^{(m)}-x_{i-1}^{(m)})\to\int_a^b f(x)dx,$$

这说明

$$\int_{[a,b]}\bar f(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_{[a,b]}\underline{f}(x)dx,$$

故

$$\int_{[a,b]} \bar{f}(x)dx = \int_{[a,b]} \underline{f}(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

即

$$\int_{[a,b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x))dx = 0.$$

由定理1.4.5有$\bar{f} = \underline{f}$ a.e.于$[a,b]$, 进而有$f = \bar{f} = \underline{f} a.e.$于$[a,b]$. 因此$f$在$[a,b]$上可测, 而且$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. ∎

下面考虑一般可测函数的积分.

定义1.4.8. 设$m(E) < \infty$, $f(x)$是E上的非负可测函数, 对每一个整数n, 令

$$f_n(x) = \min\{f(x), n\},$$

则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是E上的非负有界可测函数列, 称

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

为$f(x)$在E上的积分, 若$\int_E f(x)dx < +\infty$, 则称$f(x)$为E上的Lebesgue可积函数.

命题1.4.9. 对Lebesgue可积函数有

(1) 若$f(x)$为非负可测函数, $E_0 \subset E$, 则$\int_{E_0} f(x)dx \le \int_E f(x)dx$;

(2) 假设$f(x), g(x)$为可测函数, 且$0 \le f(x) \le g(x)$ a.e.于E, 若$g(x)$可积, 则$f(x)$可积, 且$\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$.

注意到任意可测函数$f(x)$, 总可以表示成两个非负可测函数之差:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

其中

$$f^+(x) \triangleq \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) \triangleq -\min\{f(x), 0\},$$

所以可以给出如下定义:

定义1.4.10. 设$m(E) < \infty$, $f(x)$是E上可测函数, 若f^+, f^-在E上的积分至少有一个有限时, 则称$f(x)$在E上有积分, 并记

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx. \tag{1.4.3}$$

若$\int_E f(x)dx$为有限数, 则称$f(x)$在E上勒贝格可积.

对于任意无界可测集E, 令$E_n = (-n,n) \cap E, n = 1,2,\cdots$, 则$E_n$为有界可测集, 且$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$. 同上面方法类似, 可以给出无界可测集上可测函数积分的定义：

定义1.4.11. 设$f(x)$是无界可测集E上的非负可测函数, 记

$$J_n = \int_{E_n} f(x)dx,$$

显然$\{J_n\}$是单调递增的, 极限总存在. 定义$f(x)$在E上的积分为

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx.$$

若$\int_E f(x)dx$为有限数, 则称$f(x)$在E上Lebesgue可积.

定义1.4.12. 设$f(x)$是E上的可测函数, 对任意正整数n, 记

$$J_n^+ = \int_{E_n} f^+(x)dx, \quad J_n^- = \int_{E_n} f^-(x)dx,$$

若$\lim\limits_{n\to\infty} J_n^+ = \int_E f^+(x)dx$与$\lim\limits_{n\to\infty} J_n^- = \int_E f^-(x)dx$中至少一个是有限的, 则称$f(x)$在$E$上有积分, 并记

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx. \tag{1.4.4}$$

若$\int_E f^+(x)dx$, $\int_E f^-(x)dx$均有限, 则称$f(x)$在E上Lebesgue可积.

注记1.4.13. 可以证明, 对E上任一非负可测函数f, 有

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{E_k} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n(x)dx,$$

所以无界可测集E上的一般可测函数f的Lebesgue积分也可定义为

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n(x)dx.$$

一般可积函数具有如下性质：

定理1.4.14. 假设E是可测集, 则

(1) 对任意的$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx;$$

(2) 若$E_1, E_2, \cdots, E_n$是E的互不相交的可测子集, $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$, $f(x)$在E上可积时, $f(x)$在每一个E_i上可积, 且

$$\int_E f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f(x)dx.$$

(3) 若$f(x), g(x)$在E上可积, $f \leq g$ a.e.于E, 则

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx.$$

(4) 若$f(x)$在E上可测, $g(x)$在E上非负可积, $|f(x)| \leq g(x)$, a.e.于E时, $f(x)$也在E上可积, 且

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E g(x)dx.$$

证明 只对(3)、(4)加以证明, 其余留给读者.

(3) 若$0 \leq f(x) \leq g(x)$, 则$f_n(x) \leq g_n(x), n = 1, 2, \cdots$,

$$\int_{E_k} f_n(x)dx \leq \int_{E_k} g_n(x)dx \leq \int_{E_k} g(x)dx$$

$$\leq \int_E g(x)dx < +\infty.$$

其中k, n是任意正整数, 由积分定义有

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx.$$

现在假设$f(x), g(x)$为一般可积函数, 因为$f(x) \leq g(x)$, 所以$0 \leq f^+(x) \leq g^+(x)$, $f^-(x) \geq g^-(x) \geq 0$, 从而有

$$\int_E f^+(x)dx \leq \int_E g^+(x)dx,$$

$$\int_E f^- dx \geq \int_E g^- dx,$$

因此,

$$\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx \leq \int_E g^+(x)dx - \int_E g^-(x)dx$$

即

$$\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx.$$

(4) 由性质(3)及积分定义知, $|f(x)|$可积, 且

$$\int_E |f(x)|dx \leq \int_E g(x)dx.$$

注意到

$$f^+(x) \leq |f(x)| \ f^-(x) \leq |f(x)|,$$

于是$f^+(x)$, $f^-(x)$均可积, 故

$$\int_E f^+(x)dx \quad \int_E f^-(x)dx$$

皆有限, $f(x)$在E上可积, 又因为

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

由性质(3), 有

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|dx \leq \int_E g(x)dx.$$

此性质得证. ∎

从定理的证明容易看出, 可测函数$f(x)$的可积性与$|f(x)|$的可积性相同, 即

定理1.4.15. (积分的绝对可积性) 设$f(x)$是可测集E上的可测函数, 那么函数$f(x)$在E上Lebesgue可积当且仅当$|f(x)|$在E上Lebesgue可积.

注记1.4.16. 此性质对Riemann广义积分未必成立.

例如, $\int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, 但$\int_0^{+\infty} |\frac{sinx}{x}|dx = +\infty$.

定理1.4.17. (积分的绝对连续性) 假设$f(x)$在E上可积, 则对任意的$\epsilon > 0$, 总存在$\delta > 0$, 对任意$E_0 \subset E$, 当$m(E_0) < \delta$时,有

$$|\int_{E_0} f(x)dx| < \epsilon.$$

证明 令$g(x)=|f(x)|$, 则$g(x)$在E上可积,对任意的$\epsilon>0$, 取n充分大, 使

$$0\leq \int_E g(x)dx-\int_{E_n} g(x)dx=\int_{E-E_n} g(x)dx<\frac{\epsilon}{2}.$$

再取N充分大, 使

$$0\leq \int_{E_n} g(x)dx-\int_{E_n} g_N(x)dx$$

$$=\int_{E_n}(g(x)-g_N(x))dx<\frac{\epsilon}{4},$$

令$\delta=\frac{\epsilon}{4N}$, 则当$E_0\subset E,\ m(E_0)<\delta$ 时,

$$\int_{E_0\cap E_n} g_N(x)dx\leq Nm(E_0)<N\delta=\frac{\epsilon}{4},$$

于是

$$|\int_{E_0} f(x)dx|\leq \int_{E_0} g(x)dx=\int_{E_0\cap E_n} g(x)dx+\int_{E_0\cap(E-E_n)} g(x)dx$$

$$<\int_{E_0\cap E_n}(g(x)-g_N(x))dx+\int_{E_0\cap E_n} g_N(x)dx+\int_{E-E_n} g(x)dx$$

$$<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

∎

我们知道对于Riemann积分, 积分与极限交换次序要求很强的条件(一致收敛), 在使用上较为不便. 下面我们将会看到Lebesgue积分中积分与极限交换次序的条件比Riemann积分要弱得多, 因此Lebesgue积分应用更为广泛.

下面给出三个等价定理：Levi(勒维)引理, Fatou(法都)引理以及Lebesgue控制收敛定理, 证明参见文献[8].

定理1.4.18. (Levi引理) 设

(1) $f_n(x),\ \ n\in\mathbb{N}$, 是$E$上的非负可测函数序列;

(2) $f_n(x)\leq f_{n+1}(x),\ \ x\in E,\ n\in\mathbb{N}$;

(3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $a.e$ 于E, 则

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

定理1.4.19. (Fatou引理) 设$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$是$E$上的非负可测函数列, 则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

定理1.4.20. (Lebesgue控制收敛定理) 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是E上可测函数列, 满足

(1) $f_n \Rightarrow f$;

(2) 存在E上的可积函数$F(x)$, 使

$$|f_n(x)|\le F(x) \quad a.e. \text{ 于 } E,$$

则$f(x)$在E上Lebesgue可积,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx. \tag{1.4.5}$$

注记1.4.21. (1) 将Lebesgue控制收敛定理中的条件$f_n\Rightarrow f$换成$f_n\to f$ $a.e.$ 于 E, 结论仍成立.

(2) Lebesgue控制收敛定理中控制函数这一条件不能去掉, 例如函数

$$f_n(x)=\begin{cases} n, \ x\in(0,\frac{1}{n}] \\ 0, \ x\in(\frac{1}{n},1]\end{cases}$$

在$(0,1]$上处处收敛于0, 且

$$\int_{(0,1]} f_n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{n}} ndx=1, \quad n\in\mathbb{N},$$

因此

$$\int_{(0,1]}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=0<1=\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1]} f_n(x)dx.$$

定理1.4.22. (Lebesgue 基本定理) 设$\{f_n\}$是E上非负可测函数列, 满足

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{1.4.6}$$

则
$$\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明参见文献[8].

最后给出复值函数Lebesgue可测、可积的定义.

定义1.4.23. 假定$f(z)=u+iv$, 若u,v均在E上可测时, 称$f(z)$在E上可测. 若u,v均在E上可积时, 称$f(z)$在E上可积.

这里u,v均为二元实函数, 其可测(可积)的定义与性质同一元实函数可测(可积)的定义与性质相类似.

§1.5 逻辑基础

本节介绍zorn引理.

数学归纳法是我们大家所熟悉的关于可数多个命题的证明方法, 一个自然的问题是：如果我们要讨论的不是可数个命题呢？这时我们需要更一般的方法.

定义1.5.1. 假定集合A(A未必是可数集)中任意两个元素a,b之间总有先后次序, 并且

(1) 若a在b之先, 则b便不在a之先；

(2) 若a在b之先, b又在c之先, 则a在c之先.

这样的集合A称为有序集.以下把a在b之先记为$a\prec b$. 若A的任何非空子集D都有一个属于D的最先的元素, 称A为良序集.显然, 良序集总有最先的元素, 这个元素记作α_0.

定理1.5.2. 对良序集A, 如果命题$P(\alpha)$, $\alpha\in A$满足

(1) $P(\alpha_0)$为真, 这里α_0是A中最先的元素;

(2) 若对一切α, $\alpha_0\prec\alpha\prec\beta$, $P(\alpha)$ 为真, 则$P(\beta)$亦真.

那么$P(\alpha)$对一切$\alpha\in A$皆真.

证明 若定理不真, 则集合$D=\{\alpha\in A|P(\alpha)\text{不真}\}$非空. 从$A$是良序的, 可知$D$有最先的元素$\alpha_*$.

由(1)有$\alpha_0\prec\alpha_*$. 显然当$\alpha_0\prec\alpha\prec\alpha_*$时, $P(\alpha)$为真. 由(2)知$P(\alpha_*)$亦真, 这与$\alpha_*\in D$矛盾. ∎

人们把这个定理称为超限归纳法.

但是, 是否每个集合都能赋予一个先后次序并且使之成为良序集呢? 答案是肯定的, 这叫做良序定理, 可以用Zermelo 选择公理来证明.

定理1.5.3. (Zermelo 选择公理) 设$\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$是非空集合$A_\alpha$构成的族, 则必有定义在$\mathcal{A}$上的函数$f$, 使得对一切$A_\alpha \in \mathcal{A}$都有$f(A_\alpha) \in A_\alpha$.

B.Russell说得很有意思, 对于无穷多双鞋子, 选择公理显然是对的. 但是对于无穷多双袜子, 就很不显然了. 由于选择公理与世所公认的公理系统ZF既是相容的, 也是独立的, 更由于选择公理在泛函分析中的重要性, 我们承认选择公理和与之等价的良序定理以及下文的Zorn引理.

定义1.5.4. 设A是一个非空集合, $\prec$是A上二元关系, 它具有性质:

(1) $a \prec a, \forall a \in A$;

(2) 若$a \prec b, b \prec a$, 则$a = b$;

(3) 若$a \prec b, b \prec c$, 则$a \prec c$.

则称$\prec$是A中的半序, 称A按$\prec$是一个半序集. 如果对A中任意两个元素a, b, 必有$a \prec b$或$b \prec a$成立, 则称A是一个全序集.

定义1.5.5. 设A按$\prec$是一个半序集, 如果$A_1 \subset A, b \in A$使得$a \prec b, \quad \forall a \in A_1$, 则称$b$是$A_1$的一个上界; 如果$a \in A$, 且当$b \in A, a \prec b$时, 必有$b = a$, 则称$a$是$A$的一个极大元.

定理1.5.6. (Zorn 引理) 设A是非空的半序集, 如果A的任何全序子集均有上界, 则A必有极大元.

习　题

1. 证明$[0, 1]$与$(0, 1)$对等.
2. 证明整系数多项式全体是可列集.
3. 设$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, 则下列命题等价:

    (1) x_0是A的聚点;

    (2) x_0的任意邻域内都含有A中无限多个点;

    (3) A中存在点列$\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$, $n \in \mathbb{N}$, 使得$n \to \infty$时, $x_n \to x_0$.

4. 如果 $A' = A$, 称 A 为完备集. 证明康托 (Cantor)三分集是完备集.
5. 设F_1, F_2为$\mathbb{R}$中闭集, 且$F_1 \cap F_2 = \emptyset$. 试证存在开集G_1, G_2, 使得$G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 并且$G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.
6. 设E_1, E_2可测且测度有限, 试证

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2).$$

7. 证明可列集 $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 是可测集且测度为零.

   试证$\mathbb{R}$上单调函数的不连续点集是零测度集.
8. 设G_1, G_2是开集, 且G_1是G_2的真子集, 是否一定有$m(G_1) < m(G_2)$?
9. 证明定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数是可测函数.
10. 证明Dirichlet函数是可测函数.
11. 试作$E = [0, 1]$上的可测函数$f(x)$, 使对任何连续函数$g(x)$, 都有$m(f \neq g) \neq 0$. 此结果与Lusin定理有无矛盾?
12. 设E是有界可测集, $f(x)$是几乎处处有限的可测函数, 则对任意的$\delta > 0$, 存在闭集$F_\delta \subset E$及连续函数$g(x)$, 使得

    (1) 当$x \in F_\delta$时, $f(x) = g(x)$;

    (2) $m(E - F_\delta) < \delta$.
13. 设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是$E$上可积函数列, $f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$, 且

$$\int_E |f_n(x)| dx \le K \quad (K\text{为常数}),$$

则$f(x)$可积.

第二章　空间理论

§2.1　距离空间

§2.1.1　定义及实例

距离空间是一类重要的拓扑空间, 我们熟悉的$\mathbb{R}^n$就是一种特殊的距离空间.

定义2.1.1. 设X是非空集合, 映射$d: X\times X\to\mathbb{R}$满足：对任何$x,y,z\in X$,

(1)　$d(x,y)\geq 0, d(x,y)=0$ 当且仅当$x=y$;

(2)　$d(x,y)=d(y,x)$;

(3) (三角不等式) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$,

则称$d(x,y)$为x与y的距离, (X,d)为距离空间.

定义2.1.2. 设(X,d)是距离空间, 对于任意的$x\in X$以及$\delta>0$, 称X的子集$B(x,\delta)=\{y\in X\mid d(x,y)<\delta\}$是以$x$为中心, δ为半径的开球(或x的δ邻域).

定义2.1.3. 设(X,d)是距离空间, A是X的子集, $x_0\in A$, 若存在$\delta>0$使得$B(x_0,\delta)\subset A$, 则称x_0是A的内点, A的内点的全体称为A的内部. 若A中任意点均为内点, 则称A是开集.

引进距离的目的是为了刻画收敛.

定义2.1.4. 如果距离空间(X,d)中的点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$d(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$, 则称该点列收敛于$x_0$, 并记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$或$x_n\to x_0$.

在上面距离空间的定义中我们只涉及到X上的拓扑, 当X还是线性空间时, 我们常把其上的代数运算和拓扑联系起来, 从而引出下面概念

定义2.1.5. 设X是数域$\mathbb{K}$上的线性空间, 赋予距离$d(\cdot,\cdot)$, 使得元素的加法和数乘按d所确定的极限都是连续的, 即

(1)　$d(x_n,x)\to 0,\ d(y_n,y)\to 0\Rightarrow d(x_n+y_n,x+y)\to 0$;

(2)　$d(x_n,x)\to 0\Rightarrow d(\alpha x_n,\alpha x)\to 0,\ \ \forall\alpha\in\mathbb{K}$;

(3)　$\alpha_n\to\alpha,\ x\in X\Rightarrow d(\alpha_n x,\alpha x)\to 0$.

那么线性空间X称为距离线性空间.

在介绍常见距离空间之前, 先给出两个常用公式.

引理2.1.6. (Hölder不等式) 设$p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

(1) 对于任意的复数列$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, 恒有不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

成立.

(2) 对于区间$[a,b]$上的"p幂可积"(即$\int_a^b|x(t)|^p dt<+\infty$)函数$x(t)$和"$q$幂可积"函数$y(t)$, 有

$$\int_a^b|x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明 对任意的$A,B\ge 0$, 必有

$$AB \le \frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q} \tag{2.1.1}$$

事实上, 注意到函数$f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$ $(x\ge 0)$ 在$x=1$时取得最小值, 从而在不等式$f(x)\ge f(1)$中令$x=\frac{AB}{B^q}$(此处$B\ne 0$, 而$B=0$不等式为真)即得.

(1) 在不等式(2.1.1)中令

$$A=\frac{|\xi_k|}{(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}},\quad B=\frac{|\eta_k|}{(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q)^{\frac{1}{q}}},$$

则有

$$\frac{|\xi_k||\eta_k|}{(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{|\xi_k|^p}{p\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p}+\frac{|\eta_k|^q}{q\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q},$$

对k求和, 化简即得所要结论.

(2) 令

$$A=\frac{|x(t)|}{(\int_a^b|x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}},\quad B=\frac{|y(t)|}{(\int_a^b|y(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}},$$

则有

$$\frac{|x(t)y(t)|}{(\int_a^b|x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b|y(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{|x(t)|^p}{p\cdot\int_a^b|x(t)|^p dt}+\frac{|y(t)|^q}{q\cdot\int_a^b|y(t)|^q dt},$$

由于上面不等式右端是可积函数, 由定理1.4.14知左端也是可积函数. 将上式两边积分有

$$\frac{\int_a^b |x(t)y(t)|dt}{(\int_a^b |x(t)|^p)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b |y(t)|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

即

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \leq (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b |y(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}.$$

∎

注记2.1.7. 当$p=q=2$时, (1), (2)即为Cauchy不等式和Schwarz不等式.

引理2.1.8. (Minkowski不等式) 设$p \geq 1$, 则

(1) 对于任意的复数列$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, 恒有不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

成立.

(2) 对于区间$[a,b]$上的“p幂可积”函数$x(t)$和$y(t)$, 有

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 当$p=1$时, 由三角不等式易证以上结论是正确的. 当$p>1$时, 设$q=\frac{p}{p-1}$, 则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(1) 若$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$或$\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$不是$p$幂可和的, 结论显然成立; 假设$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$和$\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 都是p幂可和的, 因为$(p-1)q=p$, 所以级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|\xi_k|^{p-1})^q$收敛, 从而$[\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|\xi_k|^{p-1})^q]^{\frac{1}{q}} < +\infty$. 由引理2.1.6, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\xi_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\eta_k| \\
&\leq (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}[(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}] \\
&= (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^p)^{\frac{1}{q}}[(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p)^{\frac{1}{p}}]\},
\end{aligned}$$

两端同除以$(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^p)^{\frac{1}{q}}$(不妨设$(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k+\eta_k|^p)^{\frac{1}{q}} \neq 0$, 否则结论显然成立), 并注意到$1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$, 命题得证.

(2) 证明与(1)类似. ∎

例2.1.9. 空间l^p $(1 \le p < +\infty)$. l^p是由满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty$的全体序列$x = \{x_i\}$生成的空间. 对任意的$x = \{x_i\}, y = \{y_i\} \in l^p$, $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义

$$x + y = \{x_i + y_i\}, \quad \alpha x = \{\alpha x_i\},$$

$$d(x,y) = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

则l^p是线性距离空间.

证明：对任意复数a, b, 显然

$$\begin{aligned} |a+b|^p &\le (|a| + |b|)^p \\ &\le (2\max\{|a|, |b|\})^p \\ &\le 2^p(|a|^p + |b|^p). \end{aligned}$$

据此容易证明l^p按上述定义的加法和数乘是一个线性空间. 下证l^p是一个距离空间.

容易证明距离空间定义中的(1), (2), 下证三角不等式成立.

设$x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$, $z = \{z_i\} \in l^p$, 由Minkowski不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i - z_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

易知

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z).$$

再证明线性运算按此距离是连续的.

设$x_n = \{x_i^n\} \to x_0 = \{x_i^0\}$, $y_n = \{y_i^n\} \to y_0 = \{y_i^0\}$, $\lambda_n \to \lambda_0$, 由Minkowski不等式有

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n + y_i^n - x_i^0 - y_i^0|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^0|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i^n - y_i^0|^p)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$d(x_n + y_n, x_0 + y_0) \le d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0) \to 0,$$

以及

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_n x_i^n - \lambda_0 x_i^0|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_n x_i^n - \lambda_n x_i^0|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_n x_i^0 - \lambda_0 x_i^0|^p)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$d(\lambda_n x_n, \lambda_0 x_0) \le d(\lambda_n x_n, \lambda_n x_0) + d(\lambda_n x_0, \lambda_0 x_0) \to 0,$$

从而加法和数乘运算按此距离均为连续的. 综上知l^p是一个线性距离空间. ∎

类似的可以定义$L^p[a,b]$ $(1 \le p < +\infty)$空间,

$$L^p[a,b] \triangleq \{x(t) \mid x(t)\text{是}[a,b]\text{上Lebesgue可测函数且}\int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty\},$$

对任意的$x(t), y(t) \in L^p[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, 定义

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t), \quad t \in [a,b]$$

$$d(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

则$L^p[a,b]$是线性距离空间(几乎处处相等函数视为同一函数).

例2.1.10. 有界序列空间l^∞, 即对每个$x = \{x_i\}_{i=1}^\infty \in l^\infty$, 存在常数$M_x > 0$, 使得对所有的$i$, $|x_i| \le M_x$. 对$x = \{x_i\}_{i=1}^\infty, y = \{y_i\}_{i=1}^\infty \in l^\infty$, 定义$d(x,y) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$, 则$l^\infty$是一个距离空间.

证明 易证距离空间定义中的(1), (2). 下证三角不等式成立. 因为$|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$, 所以$|x_i - z_i| \le \sup\limits_i |x_i - y_i| + \sup\limits_i |y_i - z_i|$, 从而有

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z).$$

所以l^∞是一个距离空间. ∎

在给出下面例子之前,先介绍本质上确界的概念.

设f是$[a,b]$上的Lebesgue可测函数, 如果存在$[a,b]$上的一个零测度子集E, 使得f在$[a,b]-E$上有界的, 则称f是$[a,b]$上的本质有界可测函数. 称

$$\operatorname*{ess\text{-}sup}_{[a,b]} |f(t)| = \inf_{m(E)=0} \{ \sup_{[a,b]-E} |f(t)| \}$$

为f在$[a,b]$上的本质上确界.

例2.1.11. 用$L^\infty[a,b]$表示$[a,b]$上所有本质有界可测函数全体构成的空间,几乎处处相等的函数看作同一函数. 在$L^\infty[a,b]$中定义距离

$$d(x,y) = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{[a,b]} |x(t) - y(t)|, \quad \forall x, y \in L^\infty[a,b].$$

则$L^\infty[a,b]$是距离空间.

证明 (1) 显然$d(x,y)\geq 0$. 如果$x(t)=y(t)$ $a.e.$于$[a,b]$, 则$d(x,y)=0$. 反过来,如果$d(x,y)=0$, 则对每个自然数n, 存在$E_n\subset[a,b]$, $m(E_n)=0$, 且

$$\sup_{[a,b]-E_n}|x(t)-y(t)|<\frac{1}{n}.$$

令$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 则$m(E)=0$, 而且

$$\sup_{[a,b]-E}|x(t)-y(t)|\leq\sup_{[a,b]-E_n}|x(t)-y(t)|<\frac{1}{n}.$$

令$n\to\infty$, 得

$$\sup_{[a,b]-E}|x(t)-y(t)|=0.$$

所以$x(t)=y(t)$ $a.e.$于$[a,b]$, 即$x=y$.

(2) $d(x,y)=d(y,x)$ 显然.

(3) 设$x(t),y(t),z(t)\in L^{\infty}[a,b]$, 则对任意的$\epsilon>0$, 存在$[a,b]$上的零测度集$E_0,E_1$使得

$$\sup_{[a,b]-E_0}|x(t)-y(t)|<d(x,y)+\frac{\epsilon}{2},$$

$$\sup_{[a,b]-E_1}|y(t)-z(t)|<d(y,z)+\frac{\epsilon}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sup_{[a,b]-E_0\cup E_1}|x(t)-z(t)|\\
&\quad\leq\sup_{[a,b]-E_0\cup E_1}|x(t)-y(t)|+\sup_{[a,b]-E_0\cup E_1}|y(t)-z(t)|\\
&\quad\leq\sup_{[a,b]-E_0}|x(t)-y(t)|+\sup_{[a,b]-E_1}|y(t)-z(t)|\\
&\quad\leq d(x,y)+d(y,z)+\epsilon.
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
d(x,z)&=\inf_{m(E)=0}\{\sup_{[a,b]-E}|x(t)-z(t)|\}\\
&\leq d(x,y)+d(y,z)+\epsilon.
\end{aligned}$$

由ϵ的任意性知三角不等式成立. 综上, $L^{\infty}[a,b]$是一个距离空间. ∎

例2.1.12. 设(s)表示一切序列的全体, 对$x=\{x_i\},y=\{y_i\}\in(s)$, 定义

$$x+y=\{x_i+y_i\},\quad \alpha x=\{\alpha x_i\},\alpha\in\mathbb{K}$$
$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|},$$

则(s)是一个距离线性空间.

证明 只证明三角不等式. 即证

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|y_i-z_i|}{1+|y_i-z_i|},$$

只需证明对每个$i\in\mathbb{N}$, 有

$$\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\le\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|},$$

即可. 为此, 考虑$(0,\infty)$上的函数$f(t)=\frac{t}{1+t}$, 因为$f'(t)>0$, $f(t)$是$(0,\infty)$上的单调增函数. 所以当$0<t_1<t_2$时, $\frac{t_1}{1+t_1}\le\frac{t_2}{1+t_2}$, 从而有

$$\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\le\frac{|x_i-z_i|+|z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i|+|z_i-y_i|}\le\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}.$$

容易验证s中加法和数乘按上述定义的距离是连续的, 所以(s)是距离线性空间. ∎

定义2.1.13. 距离空间(X,d)上的子集A称为闭集是指**:** 对任意的$\{x_n\}\subset A$, 若$x_n\to x_0$,则$x_0\in A$.

定理2.1.14. 在距离空间中, 开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集.

证明 假设集合A是距离空间X中开集, 下证A的余集$X-A$是闭集, 即证对任意的$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X-A$, 若$x_n\to x_0$, 则$x_0\in X-A$.

若不然, $x_0\in A$, 由A是开集知存在x_0的邻域$B(x_0,\delta)$使得$x_0\in B(x_0,\delta)\subset A$. 而$x_0$是极限点, 在$B(x_0,\delta)$中必有序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中元存在, 矛盾. 所以$X-A$是闭集.

假设A是距离空间X中闭集, 下证A的余集$X-A$是开集. 即证对任意的$x\in X-A$, 存在$B(x,\delta)$, 使得$B(x,\delta)\subset X-A$.

若不然, 存在$x_0\in X-A$, 对任意的$B(x_0,\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}$, 都有$B(x_0,\frac{1}{n})$不含于$X-A$. 因而可以选取序列$x_n\in A\cap B(x_0,\frac{1}{n})$, 显然$x_n\to x_0$, 而$A$是闭集, 所以$x_0\in A$, 矛盾. 因此$X-A$是开集. ∎

定义2.1.15. 设f是从距离空间(X,d)到距离空间(Y,ρ)的映射, $x_0\in X$, 如果对$f(x_0)$的任意邻域V, 都存在x_0的邻域U, 使得$f(U)\subset V$, 则称f在点x_0处连续. 如果f在X上每一点都连续, 就称f是连续映射.

定理2.1.16. 设f是从距离空间(X,d)到距离空间(Y,ρ)的映射, 则f是连续映射的充分必要条件是对Y中任意开集V, $f^{-1}(V)$是X中开集, 其中$f^{-1}(V)=\{x\in X \mid f(x)\in V\}$表示集合$V$的原像.

证明 必要性 假设f连续, V是Y中开集. 对任意的$x_0\in f^{-1}(V)$, 取$f(x_0)$的邻域$V_{f(x_0)}\subset V$, 由f的连续性, 存在x_0的邻域U_{x_0} 使得对任意的$x\in U_{x_0}$, 有$f(x)\in V_{f(x_0)}$. 故$U_{x_0}\subset f^{-1}(V_{f(x_0)})\subset f^{-1}(V)$, 即$f^{-1}(V)$是$X$中开集.

充分性 任给$x_0\in X$, 取$f(x_0)$的任意邻域$V_{f(x_0)}$. 由假设知$f^{-1}(V_{f(x_0)})$是开集. 因为$x_0\in f^{-1}(V_{f(x_0)})$, 存在$x_0$的邻域$U_{x_0}$使得$U_{x_0}\subset f^{-1}(V_{f(x_0)})$. 即$f(U_{x_0})\subset V_{f(x_0)}$, 故$f$在$x_0$处连续. ∎

§2.1.2 可分性与完备性

定义2.1.17. 设(X,d)为距离空间, $A\subset X$, 如果对任给的$\epsilon>0$以及任意的$x\in X$, 都存在$x_0\in A$, 使得$d(x_0,x)<\epsilon$, 则称A为X的稠密子集. 如果X内存在一个可数的稠密子集, 则称空间X为可分的.

定理2.1.18. 若(X,d)是可分距离空间, 则X的任意子集A均可分.

证明 由(X,d)可分, 知存在一序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$在$X$中稠密. 作开球

$$B(x_n,\frac{1}{k})=\{x\mid d(x,x_n)<\frac{1}{k},x\in X\},\quad n,k\in\mathbb{N}.$$

设A非空($A=\emptyset$时不需证明), 因为 $\bigcup\limits_{n,k=1}^{\infty}B(x_n,\frac{1}{k})=X$, 所以 $\bigcup\limits_{n,k=1}^{\infty}[A\cap B(x_n,\frac{1}{k})]=A\neq\emptyset$, 对于使$A\cap B(x_{n'},\frac{1}{k'})\neq\emptyset$的集, 任取一元素$y_{n',k'}\in A\cap B(x_{n'},\frac{1}{k'})$,则这些$y_{n',k'}$的全体就构成了$A$的一个可数集,记为$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

下证$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$在A中稠密. 事实上, 对任意的$y\in A$, 以及任意的$\epsilon>0$, 由于$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$在X中稠密, 存在x_{n_0}以及$\frac{1}{k_0}<\frac{\epsilon}{2}$, 使得$y\in B(x_{n_0},\frac{1}{k_0})$. 所以$A\cap B(x_{n_0},\frac{1}{k_0})\neq\emptyset$, 因而可以得到$y_{n_1}\in\{y_n\}$, 使得$y_{n_1}\in A\cap B(x_{n_0},\frac{1}{k_0})$, 从而

$$d(y_{n_1},y)\leq d(y_{n_1},x_{n_0})+d(x_{n_0},y)<\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_0}<\epsilon.$$

即$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$在A中稠密. ∎

常见的空间$\mathbb{R}^n, l^p(1 \le p < +\infty)$都是可分的距离空间, 但是不可分的距离空间也是存在的.

例2.1.19. l^p $(1 \le p < +\infty)$是可分的距离空间

证明 以实的l^p为例证明.

令$A = \{y \mid y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, \cdots, 0),\ \ y_i$ 为有理数, $i = 1, \cdots, n,\ n \in \mathbb{N}\ \}$, 显然$A$是$l^p$的可列子集. 对任意的$x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in l^p, \forall \epsilon > 0, \exists N, n > N$时, 有

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{1}{2}\epsilon^p$$

由于有理数集$\mathbb{Q}$在实数集$\mathbb{R}$中稠密, 则对每个x_i, 存在$y_i \in Q$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p < \frac{1}{2}\epsilon^p.$$

则$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, 0, \cdots, 0) \in A$, 且

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

因此A在l^p中稠密, l^p可分. ∎

例2.1.20. 设$X = [0, 1]$, $\forall x, y \in X$, 定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, \ x = y, \\ 1, \ x \neq y. \end{cases}$$

则(X, d)是一个距离空间,但不可分.

证明 易证(X, d)是一个距离空间,下面证明(X, d)不可分.

假设(X, d)可分, 则存在可列子集$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$在$X$中稠密, 又$X = [0, 1]$是不可列集, 故存在$x^* \in X, x^* \neq x_n,\ n \in \mathbb{N}$. 取$\delta = \frac{1}{3}$, 则在$B(x^*, \delta)$中不含$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中的点, 矛盾. ∎

定义2.1.21. 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是距离空间(X, d)中的序列, 如果对任意的$\epsilon > 0$, 存在自然数N, 使得当$n, m \ge N$时, $d(x_n, x_m) < \epsilon$, 则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是Cauchy列(基本列). 如果距离空间(X, d)中的任何Cauchy序列均收敛, 则称(X, d)为完备的.

例2.1.22. $C[0,1]$表示$[0,1]$上所有复值连续函数构成的空间, 在$C[0,1]$中定义加法、数乘和距离如下：

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\quad (\alpha x)(t)=\alpha x(t),\ d(x,y)=\max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|,$$

其中$x(t)$, $y(t)\in C[0,1]$, $\alpha\in\mathbb{C}$, 则$C[0,1]$是一个完备的距离线性空间.

证明 只证$C[0,1]$是完备的. 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是$C[0,1]$中的Cauchy序列, 则任给$\epsilon>0$, 存在自然数N, 使得当$n,m\ge N$时,

$$d(x_n,x_m)=\max_{0\le t\le 1}|x_n(t)-x_m(t)|<\epsilon,\ n,m\ge N.$$

显然对$0\le t\le 1$, $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$, 则在上式中令$m\to\infty$得

$$|x_n(t)-x(t)|\le\epsilon,\ n\ge N,\ 0\le t\le 1.$$

这表明$\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$在$[0,1]$上一致地收敛到$x(t)$. 所以$x(t)$也是$[0,1]$上的连续函数. 由上式有

$$d(x_n,x)=\max_{0\le t\le 1}|x_n(t)-x(t)|\le\epsilon,\ n\ge N,$$

即$C[0,1]$是完备的. ∎

定义2.1.23. 设(X,d)是一个距离空间, $(\widetilde{X},\rho)$是一个完备的距离空间, 若存在映射$T:X\to\widetilde{X}$, 使得

$$d(x,y)=\rho(T(x),T(y)),\quad \forall x,y\in X,$$

且$T(X)$是$\widetilde{X}$中的稠密子集, 就称$\widetilde{X}$是X的完备化.

定理2.1.24. 任何距离空间都可以完备化.

证明 将距离空间(X,d)中所有Cauchy序列的集合记作$\widetilde{X}$. 对$\widetilde{X}$中元$\xi=\{x_n\}$, $\eta=\{y_n\}$, 若$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$, 则称$\xi$与$\eta$相等, 记作$\xi=\eta$. 对$\widetilde{X}$中元$\xi=\{x_n\}$, $\eta=\{y_n\}$, 定义

$$\rho(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n).$$

因为$\{x_n\},\{y_n\}$是X中的Cauchy序列, 易证$\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$是Cauchy数列, 所以上述极限存在. 假设又有Cauchy序列$\{x_n'\}$,$\{y_n'\}$使得$\xi=\{x_n'\}$, $\eta=\{y_n'\}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_n')=0,\quad \lim_{n\to\infty}d(y_n,y_n')=0.$$

又

$$d(x'_n, y'_n) \le d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n),$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

类似地有反向不等式成立, 总之

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

这说明$\rho(\xi,\eta)$不依赖于表示ξ,η的具体Cauchy序列. 因而$\rho(\cdot,\cdot)$的定义是完善的.

显然$\rho(\cdot,\cdot)$满足距离定义中的(1), (2). 设$\xi=\{x_n\}$, $\eta=\{y_n\}$, $\zeta=\{z_n\}\in\widetilde{X}$, 则

$$\begin{aligned}\rho(\xi,\zeta) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n,z_n) \le \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n,z_n)\\ &= \rho(\xi,\eta)+\rho(\eta,\zeta),\end{aligned}$$

即$\rho(\cdot,\cdot)$满足距离定义中的(3), $(\widetilde{X},\rho)$是距离空间.

定义(X,d)到$(\widetilde{X},\rho)$的映射T如下：

$$T(x)=\tilde{x}=\{x,x,\cdots,x,\cdots\},\ \forall x\in X.$$

设$y\in X$, 则$T(y)=\tilde{y}=\{y,y,\cdots,y,\cdots\}$, 于是

$$\rho(T(x),T(y))=\lim_{n\to\infty} d(x,y)=d(x,y).$$

所以$T:X\to\tilde{X}$是一个等距映射.

往证$T(X)$在$\widetilde{X}$中稠密. 设$\xi=\{x_n\}\in\tilde{X}$. 令$\tilde{x}_k=\{x_k,x_k,\cdots,x_k,\cdots\}$, $k\in\mathbb{N}$, 则$\tilde{x}_k=T(x_k)\in T(X)$. 对任何的$\epsilon>0$, 因为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是$X$中Cauchy列, 故存在自然数$N$, 使得当$n,m\ge N$时, $d(x_n,x_m)<\epsilon$. 于是

$$\rho(\xi,\tilde{x}_k)=\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_k)\le\epsilon, k\ge N.$$

即$T(X)$在$\widetilde{X}$中稠密.

最后证明$\widetilde{X}$完备. 设$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\widetilde{X}$中Cauchy序列, 由于$T(X)$在$\widetilde{X}$中稠密, 对每个ξ_n, 必有$x_n\in X$, 使得$\tilde{x}_n=T(x_n)$, 且$\rho(\tilde{x}_n,\xi_n)<\frac{1}{n}$, 于是

$$\begin{aligned}d(x_n,x_m) &= \rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)\le\rho(\tilde{x}_n,\xi_n)+\rho(\xi_n,\xi_m)+\rho(\xi_m,\tilde{x}_m)\\ &\le \tfrac{1}{n}+\rho(\xi_n,\xi_m)+\tfrac{1}{m},\end{aligned}$$

所以$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的Cauchy序列, 记$\xi=\{x_n\}$, 则$\xi\in\widetilde{X}$, 并且当$n\to\infty$时,

$$\begin{aligned}\rho(\xi_n,\xi)&\le\rho(\xi_n,x_n)+\rho(x_n,\xi)\\&\le\tfrac{1}{n}+\lim_{m\to\infty}d(x_n,x_m)\to 0.\end{aligned}$$

即$\widetilde{X}$是完备的. ∎

距离空间的完备化具有重要的意义. 例如, 有理数集$\mathbb{Q}$在欧氏距离下不完备, 但是如果把$\mathbb{R}$看作是稠密集$\mathbb{Q}$的扩充, 则扩充后其具有完备性, 从而使得$x^2-2=0$这类方程有解.

§2.1.3 紧集与列紧集

§2.1.3.1 紧集

在距离空间中, 紧、列紧和全有界密切相关.

定义2.1.25. 设(X,d)是距离空间, $A\subset X$, 如果A 中任何点列都有收敛于X中点的子列, 则称A是列紧集.

定义2.1.26. 设(X,d)是距离空间, $A\subset X$, 如果A的任何开覆盖都存在有限的子覆盖, 则称A是紧集. 如果X是紧集, 则称空间X是紧空间.

开覆盖定义如下：

定义2.1.27. 设X是一个非空集合, $\{A_\alpha\}$是X的一族开子集, $A\subset X$, 如果$A\subset\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$, 则称开集族$\{A_\alpha\}$覆盖$A$或$\{A_\alpha\}$是$A$的一个开覆盖.

可以证明紧集必是闭集, 紧集的闭子集是紧集.

定义2.1.28. 设(X,d)是距离空间, $A,B\subset X$, ϵ为给定正数. 如果对A中的任何点x, 必有B中的点x', 使得$d(x,x')<\epsilon$, 则称B是A的一个ϵ-网.

定义2.1.29. 设(X,d)是距离空间, $A\subset X$. 如果对任意给定正数ϵ, A总存在有限的ϵ-网, 则称A是X中的全有界集.

定理2.1.30. 设(X,d)是一个距离空间, 则

(1) 列紧集必是全有界集;

(2) 若(X,d)是完备的, $A\subset X$, 则A是列紧集的充分必要条件是A是全有界集.

证明 (1) 设A是列紧集. 对任意的$\epsilon>0$, 任取$x_1\in A$, 若$A\subset B(x_1,\epsilon)$, 则$\{x_1\}$是A的有限ϵ-网. 否则, 取$x_2\in A-B(x_1,\epsilon)$, 如果$B(x_1,\epsilon)\cup B(x_2,\epsilon)\supset A$, 则$\{x_1,x_2\}$是$A$的有限$\epsilon$-网.$\cdots$, 依此下去, 经过有限次选取后, 例如$n$次后必有$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x_i,\epsilon)\supset A$, 则得到$A$的有限的$\epsilon$-网. 否则, 可得点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$满足$d(x_n,x_m)\geq\epsilon$, $n\neq m$, 因而$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$无收敛子列, 与A的列紧性矛盾.

(2) 只需证明充分性. 若$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是A中任意无穷点列, 想找一个收敛子列.

对$1-$网, 存在$y_1\in A$, 使得$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中无穷点的子列$\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}\subset B(y_1,1)$;

对$\frac{1}{2}$-网, 存在$y_2\in A$, 使得$\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$中无穷点的子列$\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}\subset B(y_2,\frac{1}{2})$;

$$\cdots,\cdots,\cdots$$

对$\frac{1}{k}$-网, 存在$y_k\in A$, 使得$\{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^{\infty}$中无穷点的子列$\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}\subset B(y_k,\frac{1}{k})$;

$$\cdots,\cdots,\cdots$$

最后抽出对角线元$\{x_k^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, 它是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列, 因为$\{x_n^{(n+p)}\}_{n=1}^{\infty}$是$\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$的子列,

$$d(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\leq d(x_{n+p}^{(n+p)},y_n)+d(x_n^{(n)},y_n)\leq\frac{2}{n},$$

所以$\{x_k^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$是一个Cauchy列. 而$(X,d)$是完备的, $\{x_k^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$收敛. ∎

定理2.1.31. 在距离空间中, 任何全有界集都是可分的.

证明 设A是距离空间(X,d)的全有界集, 则对任给的$\epsilon>0$, 可取A的有限子集作为A的ϵ-网. 事实上, 由假设存在A的$\frac{\epsilon}{2}$-网, 记为$\{y_1,y_2,\cdots,y_j\}$. 任取$x_k\in A\cap B(y_k,\frac{\epsilon}{2})$, $k=1,\cdots,j$, 则$\{x_1,\cdots,x_j\}\subset A$. 易见它是$A$的$\epsilon$-网.

现在, 对每个自然数n, 设$N_n\subset A$是A的有限的$\frac{1}{n}$-网. 令$N=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}N_n$, 则$N\subset A$, 且是一个可数集. 任给$\epsilon>0$, $x\in M$,应有自然数n, 使得$\frac{1}{n}<\epsilon$, 及$x_n\in N_n$, 使得

$$d(x_n,x)<\frac{1}{n}<\epsilon.$$

可见N在A中稠密. 总之, A是可分的. ∎

距离空间中紧性与列紧性关系如下:

定理2.1.32. 设(X,d)是一个距离空间, $A\subset X$, 则A为紧集的充分必要条件是A是列紧闭集.

证明 若A是X中的紧集, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是A中的点列. 如果$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$不存在收敛于A中某点的子序列, 则对每点$\xi\in A$, 必存在$\delta_\xi>0$使得$B(\xi,\delta_\xi)$不包含$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中异于ξ的点. 否则, 存在某个$\xi\in A$, 在ξ的任意邻域内都包含$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中异于ξ的点, 则ξ便是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中某个子序列的极限, 与假设矛盾. 显然$B(\xi,\delta_\xi)$的全体形成A的一个开覆盖. 因为A是紧的,必存在有限子覆盖, 设其为$B(\xi_1,\delta_{\xi_1}),\cdots,B(\xi_k,\delta_{\xi_k})$. 根据选取方式, 每个$B(\xi_j,\delta_{\xi_j})$最多只包含$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中一个点. 于是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中只有有限个不同点, 从而$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有收敛于$A$中某点的子序列, 这和假设矛盾, 所以$A$列紧.

反之, 若A是X中的列紧闭集, 由定理2.1.30, 2.1.31可知A是可分的, 即A中存在可数稠密子集A_0.

设$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是$A$的任意开覆盖. 任给$x\in A$, 必有某个$A_\lambda$使得$x\in A_\lambda$. 因为$A_\lambda$是开集, 存在$\delta>0$, 使得$B(x,\delta)\subset A_\lambda$. 因$A_0$是$A$的稠密子集, 故存在某个$x'\in A_0$及有理数$r'>0$使得

$$x'\in B(x',r')\subset B(x,\delta)\subset A_\lambda.$$

现在我们考虑以A_0的元为心, 正有理数为半径, 而且包含于某个A_λ内的球的全体, 它们至多是可数个, 记为$B_1,B_2,\cdots$, 它们形成了A的一个开覆盖. 我们断言, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$中必有有限个覆盖了A. 若不然, 对每个自然数n,都存在点$x_n\in A-\bigcup\limits_{j=1}^{n}B_j$. 因为$A$是列紧的, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中存在一个子序列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛于一点$x_0\in A$. 易证$x_0$不属于任何$B_n$. 这与$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$是$A$的覆盖矛盾, 故存在有限个$\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$覆盖了$A$. 由$B_n$的构造应有$A_{\lambda_j}$, $\lambda_j\in\Lambda$,使得$A_{\lambda_j}\supset B_j$, $j=1,2,\cdots,k$. 于是$\{A_{\lambda_1},A_{\lambda_2},\cdots,A_{\lambda_k}\}$是$A$的有限子覆盖. ∎

下面详细介绍一种证明紧性的典型方法–对角线法.

设$\{a_{kn}\}_{k,n=1}^{\infty}$是一有界数列, 则对每个$k$, 存在收敛子序列$\{a_{kn_k(j)}\}_{j=1}^{\infty}$. 一般说来, 对不同的$k$,$\{n_k(j)\}_{j=1}^{\infty}$是不同的自然数子序列. **对角线方法就是要对所有的k, 找到一个共同的自然数子序列$\{n(j)\}_{j=1}^{\infty}$使得对每个k, $\{a_{kn(j)}\}_{j=1}^{\infty}$都收敛.** 具体过程是：把$\{a_{kn}\}_{k,n=1}^{\infty}$排成一个无穷方阵, 第一个数列$\{a_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ 排在第一行, 第二个数列$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$排在第二行, 依此类推, 有

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

先看第一行, 由于$\{a_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$是有界数列, 必有收敛子序列$\{\alpha_{1n_1(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, 再看第二行的子序列$\{a_{2n_1(j)}\}_{n=1}^{\infty}$, 它也存在收敛的子序列$\{a_{2n_2(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, 再看第三行的子序列$\{a_{3n_2(j)}\}_{n=1}^{\infty}$, 它也存在收敛的子序列, 记为$\{a_{3n_3(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, 如此继续下去, 便得到一串收敛数列排成的无穷方阵

$$\begin{array}{cccccc} a_{1n_1(1)} & a_{1n_1(2)} & a_{1n_1(3)} & \cdots & a_{1n_1(j)} & \cdots \\ a_{2n_2(1)} & a_{2n_2(2)} & a_{2n_2(3)} & \cdots & a_{2n_2(j)} & \cdots \\ a_{3n_3(1)} & a_{3n_3(2)} & a_{3n_3(3)} & \cdots & a_{3n_3(j)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{kn_k(1)} & a_{kn_k(2)} & a_{kn_k(3)} & \cdots & a_{kn_k(j)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

这个方阵中的每一行都是一个收敛的无穷数列.

对应地, 我们得到这些数列的第二个指标排成的无穷方阵:

$$\begin{array}{ccccc} n_1(1) & n_1(2) & \cdots & n_1(j) & \cdots \\ n_2(1) & n_2(2) & \cdots & n_2(j) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_k(1) & n_k(1) & \cdots & n_k(j) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

根据前面的选取, 我们看到该方阵中下面一行的指标序列都是上面一行的指标序列的子序列.现在我们把上面无穷方阵中对角线上的元素取出来, 得到一个指标序列$n_j(j)_{j=1}^{\infty}$, 这就是我们要找的自然数的子序列, 使对每个k, $\{a_{kn_j(j)}\}_{j=1}^{\infty}$都收敛. 事实上, 对每个$k$, 当$j \geq k$时, $\{n_j(j)\}_{j=1}^{\infty}$便是$\{n_k(j)\}_{j=1}^{\infty}$的子序列, 从而序列$\{a_{kn_j(j)}\}_{j=1}^{\infty}$就是$\{a_{kn_k(j)}\}_{j=1}^{\infty}$的子序列, 因而是收敛的.

§2.1.3.2 列紧集的应用

定义2.1.33. 设(X,d)是距离空间, $C(X)$是X上连续函数空间, $A\subset C(X)$. 如果对任意给定正数ϵ, 存在$\delta>0$, 使得当$x,y\in X$, $d(x,y)<\delta$时, 对任意的$f\in A$, $|f(x)-f(y)|<\epsilon$, 则称A是等度连续的函数族.

定理2.1.34. (Arzelá-Ascoli定理) $A\subset C[0,1]$是列紧集的充分必要条件是A为一致有界且等度连续的函数族.

证明 充分性. 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是A中的无穷序列, 因为$C[0,1]$中序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛等价于$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$在$[0,1]$上一致收敛. 故只须证明存在$\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$的某个子序列$\{f_{n_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$在$[0,1]$上一致收敛.

将$[0,1]$中全体有理数排成序列$r_1,r_2,\cdots,r_j,\cdots$, 考虑无穷方阵

$$f_n(r_j)_{n,j=1}^{\infty},$$

由假设它们是一致有界的. 根据对角线方法, 有子序列$\{f_{n_i(i)}(t)\}_{i=1}^{\infty}$在一切$r_j$, $j\in\mathbb{N}$处收敛, 简记这个子序列为$\{f_{n(i)}(t)\}_{i=1}^{\infty}$.

任给$\epsilon>0$, 由$\{f_{n(i)}(t)\}_{i=1}^{\infty}$的等度连续性, 有$\delta>0$, 使对一切$i\in\mathbb{N}$, 当$|t''-t'|<\delta$时,

$$|f_{n(i)}(t'')-f_{n(i)}(t')|<\frac{\epsilon}{3},$$

显然我们可以找到有限个$r_j, j=1,2,\cdots,J$使得

$$[0,1]\subset\bigcup_{j=1}^{J}(r_j-\delta,r_j+\delta).$$

因为对每个r_j, $\{f_{n(i)}(r_j)\}_{i=1}^{\infty}$收敛, 于是存在$N=N(\epsilon)$, 对每个$j=1,\cdots,J$, 当$i,k\geq N$时,

$$|f_{n(i)}(r_j)-f_{n(k)}(r_j)|<\frac{\epsilon}{3}.$$

对任何$t\in[0,1]$, 应有某个r_j $(j=1,2,\cdots,J)$使$|t-r_j|<\delta$. 从而

$$\begin{aligned}|f_{n(i)}(t)-f_{n(k)}(t)| &\leq |f_{n(i)}(t)-f_{n(i)}(r_j)|+|f_{n(i)}(r_j)-f_{n(k)}(r_j)|\\ &\quad +|f_{n(k)}(r_j)-f_{n(k)}(t)|\\ &< \tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3}\\ &= \epsilon,\end{aligned}$$

这说明$\{f_{n(i)}(t)\}_{i=1}^{\infty}$在$[0,1]$上一致收敛.

必要性. 设A列紧, 则A全有界, 从而一致有界, 即存在常数$K > 0$, 使得对一切$t \in [0,1]$, $f \in A$, 有$|f(t)| \le K$. 任给$\epsilon > 0$, A存在有限的$\frac{\epsilon}{3}$-网$\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$使对任给的$f \in A$, 都有一个$f_i$ $(1 \le i \le m)$使得$d(f, f_i) < \frac{\epsilon}{3}$, 其中$d(\cdot,\cdot)$是$C[0,1]$上的距离. 注意$f_1(t), f_2(t), \cdots, f_m(t)$都在$[0,1]$上一致连续, 因此存在$\delta > 0$使得对一切$t', t'' \in [0,1]$, 当$|t' - t''| < \delta$时,

$$|f_i(t') - f_i(t'')| < \frac{\epsilon}{3},\ i = 1, 2, \cdots, m.$$

对任意的$f \in A$, 当$|t'' - t'| < \delta$时, 有

$$\begin{aligned}
|f(t'') - f(t')| &\le |f(t'') - f_i(t'')| + |f_i(t'') - f_i(t')| + |f_i(t') - f(t')| \\
&\le d(f, f_i) + |f_i(t'') - f_i(t')| + d(f, f_i) \\
&< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

即A是等度连续的函数族. ∎

§2.2 赋范线性空间

§2.2.1 赋范线性空间的定义与性质

定义2.2.1. 设X是一个复(或实)线性空间, 若有从X到$\mathbb{R}$的函数$\|x\|$, 使得$\forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$为实数域或复数域, 有

(1) $\|x\| \ge 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$;

则称$\|x\|$为x的范数, $(X, \|\cdot\|)$为复(或实)赋范线性空间.

定义2.2.2. 设X是赋范线性空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的序列, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$按范数收敛于x, 记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$或$x_n \to x$.

定义2.2.3. 若X按距离$d(x, y) = \|x - y\|$是完备的,称X为Banach 空间.

定义2.2.4. 若上述对应的$\|x\|$满足定义2.2.1中条件(1), (3)以及条件

$$(2)' \ \ \|-x\| = \|x\|, \ \lim_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\| = 0, \ \ \lim_{x_n\to 0}\|\alpha x_n\| = 0,$$

则称$\|x\|$为x的准范数, 相应的空间称为复(或实)赋准范线性空间.

若上述对应的$\|x\|$满足定义2.2.1中条件(2), (3)以及条件

$$(1)' \ \ \|x\| \geq 0, \ x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0,$$

则称$\|x\|$为x的拟范数, $(X, \|\cdot\|)$为复(或实)赋拟范线性空间.

例2.2.5. 在l^p $(1 \leq p < +\infty)$中定义

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ x = \{x_i\} \in l^p,$$

则l^p是Banach空间.

证明 由例2.1.9知l^p是一线性空间. 由正项级数性质知, 上面定义的$\|x\|$满足定义2.2.1中条件(1), (2), 而(3)可由Minkowski不等式直接得出, 所以$\|x\|$是一个范数. 因而l^p是一赋范线性空间.

下证l^p 是完备的, 即l^p是Banach空间.

设$\{x_n = \{\xi_k^{(n)}\}\}_{n=1}^{\infty}$是$l^p$中Cauchy列, 则对任意的$\epsilon > 0$, 存在自然数$N$, 使得$i, j > N$时, 有

$$\|x_i - x_j\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(i)} - \xi_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

于是, 对每个下标k,一致的有$|\xi_k^{(i)} - \xi_k^{(j)}| < \epsilon$. 从而由数列的Cauchy判别法知, 对于每一个下标k, 相应数列$\{\xi_k^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$均有极限$\xi_k^0$. 又对任意的$n \in \mathbb{N}$, 均有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(i)} - \xi_k^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \ (\forall i, j > N),$$

故对以上有限项, 取$j \to \infty$时的极限, 可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(i)} - \xi_k^{0}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon \ (\forall i > N),$$

再取$n \to \infty$时的极限可得

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(i)} - \xi_k^0|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \epsilon \ (\forall i > N).$$

令$x_0 = \{\xi_k^0\}$,则$x_i - x_0 \in l^p$, 所以$x_0 = x_i - (x_i - x_0) \in l^p$, 且$\|x_i - x_0\| \to 0$, 因而$l^p$ 是完备的. ∎

例2.2.6. 在$L^p[a,b](1 \le p < +\infty)$中定义

$$\|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{1/p},$$

则L^p是Banach空间.

证明 显然$\|x\|$满足范数定义2.2.1中条件(1), (2), 而由Minkowski不等式, 可证$\|x\|$满足(3), 因而是一个范数.由例2.1.9后说明知$L^p[a,b]$是一线性空间.

下证$L^p[a,b]$是完备的.

设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是$L^p[a,b]$上的Cauchy列, 则$\forall k \in \mathbb{N}$, 存在正整数N_k, 只要$n, m \ge N_k$, 就有

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}.$$

不妨取$N_1 < N_2 < \cdots$, 于是, 我们可以得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

令

$$y_m(t) = |x_{N_1}(t)| + \sum_{k=1}^{m} |x_{N_{k+1}} - x_{N_k}(t)|,$$

显然有$\{y_m(t)\}_{m=1}^{\infty} \in L^p[a,b]$. 从而有

$$\begin{aligned}\|y_m\| &\le \|x_{N_1}\| + \sum_{k=1}^{m} \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| \\ &\le \|x_{N_1}\| + 1 \quad (m \in \mathbb{N}),\end{aligned}$$

又因$\{(y_m(t))^p \ge 0\}_{m=1}^{\infty}$均是可测的, 故由Fatou引理, 有

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b \varliminf_{m\to\infty} (y_m(t))^p dt &\le \varliminf_{m\to\infty} \textstyle\int_a^b (y_m(t))^p dt \\ &= \varliminf_{m\to\infty} \|y_m\|^p \le (\|x_{N_1}\| + 1)^p.\end{aligned}$$

又$\{y_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$是单调增函数列, 所以$\lim\limits_{m\to\infty} y_m(t)$总存在(有限或者为$\infty$), 从而有

$$\int_a^b (\lim_{m\to\infty} y_m(t))^p dt \le (\|x_{N_1}\| + 1)^p.$$

因而有$\lim\limits_{m\to\infty} y_m(t) < \infty$ $(a.e.)$, 即

$$|x_{N_1}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{N_{k+1}}(t) - x_{N_k}(t)|$$

a.e.收敛于$[a,b]$, 由此推出

$$x_{N_{m+1}}(t) = x_{N_1}(t) + \sum_{k=1}^{m} (x_{N_{k+1}}(t) - x_{N_k}(t))$$

也a.e.收敛于$[a,b]$.于是$\lim\limits_{m\to\infty} x_{N_m}(t)$在$[a,b]$上a.e.存在, 可设

$$x(t) = \lim_{m\to\infty} x_{N_m}(t) \quad a.e.\text{于}[a,b],$$

则$x(t)$可测. 再由

$$\begin{aligned}|x(t)| &\le |x_{N_1}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{N_{k+1}}(t) - x_{N_k}(t)| \\ &= \lim_{m\to\infty} y_m(t) \in L^p[a,b],\end{aligned}$$

可知$x(t) \in L^p[a,b]$. 又因为$\{x_{n_m}\}_{n,m=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为一Cauchy列, 并且有

$$\|x - x_{N_m}\| \le \sum_{k=m}^{\infty} \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\|,$$

以及

$$\|x - x_n\| \le \|x - x_{N_m}\| \le \|x_{N_m} - x_n\|,$$

所以

$$\|x - x_n\| \to 0, \ \text{当} n \to \infty.$$

∎

例2.2.7. $C[a,b]$在通常加法、数乘意义下构成线性空间. 在$C[a,b]$上定义

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|,$$

则$C[a,b]$是一个Banach空间.

证明 因为闭区间$[a,b]$上的连续函数能达到最大值, 所以此范数定义是有意义的, 并且容易证明它满足范数的三条性质, 从而$C[a,b]$是一个赋范线性空间.

又因为在此范数定义下, 距离为

$$d(x,y)=\|x-y\|=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,$$

如例2.1.22一样可以证明$C[a,b]$按上述距离是完备的, 所以$C[a,b]$是一个Banach空间. ∎

注记2.2.8. 若在$C[a,b]$上定义

$$\|x\|=\int_a^b|x(t)|dt,$$

则$C[a,b]$也构成一个赋范线性空间, 但不是完备的.

由上面例子可知, 在同一个线性空间中,可以用多种方式来定义范数.由此引出等价范数的概念.

定义2.2.9. 设$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$是线性空间X中的两个范数, 如果对任何$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$,

$$\|x_n\|_2\to 0,\ n\to\infty \Rightarrow \|x_n\|_1\to 0,\ n\to\infty$$

则称$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$强.

如果$\|\cdot\|_2$比$\|\cdot\|_1$强, 而且$\|\cdot\|_1$比$\|\cdot\|_2$强, 则称$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$等价.

定理2.2.10. 设X是赋范线性空间, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中的序列.

(1) 若$x_n\to x$, 则$\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$有界;

(2) 若$x_n\to x$, $y_n\to y$, 则$x_n+y_n\to x+y$, $\alpha x_n\to\alpha x$, 其中α为常数;

(3) 范数$\|x\|$是x的连续函数.

证明 仅证(3). 由于

$$\|x_n\|\le\|x_n-x\|+\|x\|$$

以及

$$\|x\|\le\|x-x_n\|+\|x_n\|,$$

从而有

$$|\|x_n\|-\|x\||\le\|x_n-x\|.$$

即若$x_n\longrightarrow x$, 则$\|x_n\|\to\|x\|$. ∎

赋范线性空间也可以完备化.

定义2.2.11. 设$(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$是同一数域上的两个赋范线性空间, 如果存在单且满的线性映射$T: X_1 \to X_2$, 满足

$$\|Tx\|_2 = \|x\|_1, \quad \forall x \in X_1$$

则称$(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$线性等距同构, T是线性等距同构映射.

定理2.2.12. 设X是赋范线性空间,那么必存在Banach 空间Y, 使得X与Y的一个稠密子集Y_1线性等距同构, 且在线性等距同构意义下, Y是唯一的.

证明参见文献[1], P59.

赋范线性空间的可分性定义同距离空间相类似, 常见的l^p, L^p $(1 < p < \infty)$都是可分的赋范线性空间.

为了讨论$C[a, b]$的可分性, 我们先介绍著名的Weierstrass定理, 它在近似计算、概率论等学科都有广泛的应用.

定理2.2.13. (**Weierstrass 定理**) 假设$x \in C[0, 1]$, 相应的多项式

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x(\frac{k}{n}) t^k (1-t)^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

其中C_n^k是二项式系数. 则有

$$\|B_n - x\| = \sup_{0 \le t \le 1} |B_n(t) - x(t)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

证明 首先, 假设

$$b_{n,k}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

则有

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) = 1,$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k b_{n,k}(t) &= nt \sum_{k=0}^{n} \tfrac{k}{n} C_n^k t^{k-1} (1-t)^{n-k} \\ &= nt \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(t) = nt, \end{aligned}$$

和

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) b_{n,k}(t) = n(n-1)t^2 \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k}(t) = n(n-1)t^2,$$

进而有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nt)^2 b_n^k(t) &= n^2t^2-(2nt-1)nt+n(n-1)t^2\\ &= nt(1-t) \ \ (n\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

其次, 由闭区间上的连续函数性质知：存在$\beta>0$, 有$|x(t)|\le\beta$, 且$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对任意的$t',t''\in[0,1]$, 只要$|t'-t''|<\delta$, 就有$|x(t')-x(t'')|<\frac{\epsilon}{2}$. 最后, 若取$N=[\frac{\beta}{\delta^2\epsilon}+1]$(取整), 则当$n\ge N$时, 便可导出

$$\begin{aligned}|B_n(t)-x(t)| &= |\sum_{k=0}^{n}(x(\tfrac{k}{n})-x(t))b_{n,k}(t)|\\ &\le \tfrac{\epsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(t)+2\beta\sum_{\{k||k-nt|>n\delta}b_{n,k}(t)\\ &\le \tfrac{\epsilon}{2}+2\beta\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k-nt}{n\delta})^2 b_{n,k}(t)\\ &= \tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{2\beta}{n^2\delta^2}nt(1-t)\\ &\le \tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{2\beta}{n\delta^2}\tfrac{1}{4}<\epsilon,\ \forall t\in[0,1].\end{aligned}$$

∎

定理2.2.14. (**Weierstrass 定理**) 假设$x\in C[a,b]$, 必有一列多项式$\{P_n(t)\}$, 使得

$$\|P_n-x\|\to 0 \ \ (n\to\infty).$$

例2.2.15. 空间$C[a,b]$是可分的.

§2.2.2 纲定理

§2.2.2.1 纲定理

分析中许多重要定理的实现, 依赖于它们所处系统的完备性, Baire定理就是一个典型的例子.

定义2.2.16. 设X是一个距离空间, $A\subset X$. 如果集合A的闭包具有空的内部, 称A为无处稠密的. X中可数个无处稠密集的并称为第一纲集. 不是第一纲的集合称为第二纲集.

定理2.2.17. (Baire定理) 如果(X,d)是完备的距离空间, 则X的可数个稠密开子集的交仍在X中稠密. 即完备的距离空间是第二纲集.

证明 假设$A_1, A_2, \cdots$是X的稠密开子集, $B_0 = B(x_0, r_0)$是X中任意一个开球. 由于A_1的稠密性,存在$B_1 = B(x_1, r_1) \neq \emptyset$ $(r_1 < 1)$, 并且$\bar{B}_1 \subset A_1 \cap B_0$;

对B_1, 由A_2的稠密性, 存在$B_2 = B(x_2, r_2) \neq \emptyset$ $(r_2 < \frac{1}{2})$, 并且$\bar{B}_2 \subset A_2 \cap B_1$;

$\cdots\cdots\cdots$

依此继续下去, 对B_{n-1}, 存在$B_n = B(x_n, r_n) \neq \emptyset$ $(r_n < \frac{1}{n})$, 并且$\bar{B}_n \subset A_n \cap B_{n-1}$,

$\cdots\cdots\cdots$

从而$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个Cauchy列. 因为X完备, 有$x_n \to x \in X$. 令$K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$, 注意到当$m \geq n$时, $x_m \in B_n$, 所以$x \in \bar{B}_n \subset A_n \cap B_{n-1}$, 因而$K$非空, 且$K \subset B_0 \cap (\cap A_n)$, $n \in \mathbb{N}$. 所以B_0与$\cap A_n$相交, 定理得证. ∎

例2.2.18. 在$I = [0, 1]$上存在处处连续但处处不可微的函数.

解 设X是所有周期为1的连续函数组成的集合. 易见按范数

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|, f \in X,$$

构成完备赋范线性空间.令

$$N_n = \{f \in X \mid 有一点x \in I,\ 使\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq n,\ \forall h > 0\}$$

显然每个$f \in X$, 只要在I中一点可微, 便一定在某个N_n中. 下面证明:

(1) N_n是X中闭集.

设$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in N_n$, 且$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$在$[0, 1]$上一致收敛于$f_0$. 按$N_n$的定义, 应有$x_k \in I$, 使

$$\left|\frac{f_k(x_k + h) - f_k(x_k)}{h}\right| \leq n,\ \forall h > 0.$$

注意$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$有收敛子序列, 不妨设当$k \to \infty$时, $x_k \to x_0$,则$x_0 \in I$. 现对任意的$h \geq 0$,

$$|f_k(x_k + h) - f_0(x_0 + h)| \leq |f_k(x_k + h) - f_0(x_k + h)| + |f_0(x_k + h) - f_0(x_0 + h)|,$$

再由$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$的一致收敛性, 在式

$$\left|\frac{f_k(x_k + h) - f_k(x_k)}{h}\right| \leq n,\ \forall h > 0$$

中令$k \to \infty$, 可得

$$\left|\frac{f_0(x_0 + h) - f_0(x_0)}{h}\right| \leq n,\ \forall h > 0,$$

即$f_0 \in N_n$.

(2) N_n无处稠密.

若不然, 则存在球$K = \{f \mid \|f - f_0\| < \epsilon\} \subset N_n$. 显然我们可以找到一个折线函数$\varphi(x)$使得

$$\|\varphi - f_0\| = \max_{0 \le x \le 1} |\varphi(x) - f_0(x)| < \epsilon,$$

而且φ之每段斜率的绝对值都大于n. 于是$\varphi \in K$, 但$\varphi \notin N_n$, 矛盾.

所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$是第一纲的. 由Baire定理, X是第二纲的. 故必存在$\psi \in X$, 但ψ不在任何N_n中, 显然这个ψ便是处处连续且处处不可微的函数. ∎

§2.2.3 有限维赋范线性空间

有限维线性赋范空间比一般的赋范线性空间具有更好的性质,下面给出有限维赋范线性空间的特征刻画.

引理2.2.19. 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是赋范线性空间X中线性无关的元素, 则存在$\mu > 0$,使得对任意的数$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 有

$$|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \le \mu \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|$$

成立.

证明 设

$$r = \inf\{\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \mid \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1\}.$$

往证$r > 0$. 由下确界定义, 有

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(k)}| = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

使

$$\|y_k\| \to r, \ k \to \infty.$$

从$|\alpha_i^{(k)}| \le 1, \ k \in \mathbb{N}, \ i = 1, 2, \cdots, n$, 可知存在$\{k\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$使

$$\alpha_i^{(k_l)} \to \beta_i, \ l \to \infty, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

而且

$$|\beta_1| + \cdots + |\beta_n| = 1.$$

当然$x=\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n\neq 0$. 此外由

$$\|y_{k_l}-x\|\le\sum_{i=1}^n|\alpha_i^{(k_l)}-\beta_i|\|x_i\|,$$

可见$y_{k_l}\to x$, 从而$\|y_{k_l}\|\to\|x\|$, $l\to\infty$. 于是$0<\|x\|=r$. 取$\mu=\frac{1}{r}$, 则由r的定义,

$$1\le\mu\|\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\|,\quad |\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|=1.$$

现在, 对一般的不全为零的$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,我们有

$$1\le\mu\left\|\sum_{k=1}^n\frac{\alpha_k}{\sum\limits_{i=1}^n|\alpha_i|}x_k\right\|,$$

由此可见定理成立. ∎

定理2.2.20. 任何n维实赋范线性空间X必与$\mathbb{R}^n$线性同胚, 即X与$\mathbb{R}^n$之间存在单且满的映射T, 并且T及T^{-1}均连续.

证明 设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是X中的一组基, 即$\forall x\in X$, 存在唯一的表示

$$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n,$$

称$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$为x关于$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$的坐标. 这样对每个$x\in X$, 按其坐标与n维欧氏空间中的点$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$建立一一对应$T$:

$$Tx=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\tilde{x},\ x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n.$$

易证T是线性同构映射. 下证T及T^{-1}是连续的.

由引理2.2.19, 存在$\mu>0$, 对一切$(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^n|\xi_i|\le\mu\|\sum_{i=1}^n\xi_ie_i\|.$$

于是对每个$x=\sum\limits_{i=1}^n\xi_ie_i\in X$,

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&=\sum_{i=1}^n\|\xi_i\|^2\le(\sum_{i=1}^n|\xi_i|)^2\\&\le\mu^2\|\sum_{i=1}^n\xi_ie_i\|^2=\mu^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

即$\|Tx\| \leq \mu\|x\|$. 这说明T是有界的, 根据引理2.2.19, T是连续的.

另一方面, 对任何$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X$, 由Hölder不等式,

$$\begin{aligned}\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\|e_i\| &\leq (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2)^{\frac{1}{2}}\|Tx\|,\end{aligned}$$

这里$(\sum\limits_{i=1}^{n} \|e_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$是与$x$无关的常数. 这说明$T$的逆映射$T^{-1}$是有界的, 从而连续. 因此$X$必与$\mathbb{R}^n$线性同胚. ∎

引理2.2.21. (Riesz引理) 设A是赋范线性空间X的闭子空间, $A \neq X$. 则对于任给的正数$\epsilon < 1$, 存在$x_\epsilon \in X$, 使得$\|x_\epsilon\| = 1$, $d(x_\epsilon, A) = \inf\{\|x_\epsilon - y\| \mid y \in A\} \geq 1 - \epsilon$.

证明 取定$x_0 \in X - A$, 因为A是闭的, $\inf\{x_0 - y\| \mid y \in A\} \triangleq d > 0$. 对任给的正数$\epsilon < 1$与$\eta$, 由$d$的定义, 存在$y_0 \in A$使得

$$d \leq \|x_0 - y_0\| < d + \eta.$$

令

$$x_\epsilon = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}(x_0 - y_0),$$

则$x_\epsilon \in X$, $\|x_\epsilon\| = 1$, 且对任何$x \in A$,

$$\begin{aligned}\|x - x_\epsilon\| &= \|x - \tfrac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}\| \\ &= \tfrac{1}{\|x_0 - y_0\|}(\|x_0 - y_0\|x + y_0) - x_0\| \\ &\geq \tfrac{d}{d+\eta} \geq 1 - \epsilon.\end{aligned}$$

当$\eta \leq \frac{d\epsilon}{1-\epsilon}$时定理得证. ∎

定理2.2.22. 设X是赋范线性空间,则X是有限维的充分必要条件是X中每个有界集是列紧的.

证明 必要性显然,仅证明充分性.

设$S = \{x \mid \|x\| = 1,\ x \in X\}$是$X$的单位球面, 由于$S$是$X$中的列紧集, 故对$\epsilon = \frac{1}{2}$, S存在有限ϵ-网$A_\epsilon = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\} \subset X$, 令

$$F = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_N\} = \{x \in X \mid x = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_Nx_N\},$$

$k_1,\cdots,k_N \in \mathbb{K}$. 显然$F$是$X$的$m$维子空间$(m \le N)$. 下证$F = X$. 用反证法. 假设$F \ne X$,由Riesz引理, 存在$x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ 使得$d(x_0,F) > 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 而$x_0 \in S$, $A_\epsilon = \{x_1,x_2,\cdots,x_N\} \subset F$, 这和$A_\epsilon$是$S$的$\frac{1}{2}-$网矛盾. 所以$F = X$, X是有限维的. ∎

有界集是列紧集这一结论是有限维空间独有的性质.

定理2.2.23. 设X是无穷维赋范线性空间,则X中的闭单位球不是紧集.

证明 因为X是无穷维的, 则X必有线性无关的无穷序列$\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 令

$$X_n = \mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

则X_n是X的n维闭线性子空间,且有$X_n \subset X_{n+1}$, $X_n \ne X_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, 由Riesz引理知, 存在$y_n \in X_{n+1}$, $\|y_n\| = 1$, $d(y_n,X_n) \ge \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, 显然有

$$\|y_n - y_m\| \ge \frac{1}{2}, \quad m \ne n;\ m,n \in \mathbb{N}$$

故点列$\{y_n\}_{n=1}^\infty$没有收敛子列,因此X的闭单位球不是紧集. ∎

§2.2.4 商空间与积空间

§2.2.4.1 商空间

在代数学中, 我们把对于“模”余数相同者归为一类, 而每一类的全体可视为同一元素. 在实变函数论中, 我们也常把“几乎处处相等”的函数看作同一元素. 当把一个“元素类”视为一个“元素”时, 就有所谓”商空间”的概念.

定义2.2.24. 设X是数域$\mathbb{K}$上的线性空间, 设N是线性空间X的子空间. 对每个$x \in X$, 称$\pi(x) = x + N \equiv \{x+y|y \in N\}$是$N$的包含$x$的陪集. N的所有陪集的全体构成一个线性空间, 称为X以N为模的商空间, 记为X/N.

商空间中元素的加法和数乘定义如下：

$$\pi(x)+\pi(y) = \pi(x+y), \quad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x), \quad \forall x,y \in X, \alpha \in \mathbb{K}.$$

因为N是子空间, 这个定义是完善的.

例2.2.25. 设$X = \mathbb{R}^3$, N为x_1轴, 则商空间X/N由所有平行于x_1轴的空间直线组成.

证明 因为$N=\{(x_1,0,0)\mid x_1\in\mathbb{R}\}$, 所以$\forall\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\in\mathbb{R}^3$, 有

$$\pi(\bar{x})=\{\bar{x}+x_0\mid x_0\in N\}=\{(\bar{x}_1+x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)\mid x_1\in\mathbb{R}\}$$

故当x_1跑遍$\mathbb{R}$时, $\bar{x}_1+x_1$也跑遍$\mathbb{R}$, 即从x_2,x_3轴上的坐标$\bar{x}_2,\bar{x}_3$就可将$\bar{x}$确定出来, 它即为过x_2Ox_3坐标平面上的一点$(0,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$且平行于x_1轴的一条直线. ∎

定理2.2.26. 设X是赋拟范线性空间, N是X的闭线性子空间, 在商空间X/N中定义

$$\|\pi(x)\|=\inf\{\|x-z\|\mid z\in N\},$$

则X/N构成一个赋范线性空间.

证明 只需证明$\|\pi(x)\|$满足范数的三个条件.

(1) 由定义知$\|\pi(x)\|\geq 0$. 当$\pi(x)=\pi(0)=N$时, 由定义可得$\|\pi(x)\|=0$. 若$\|\pi(x)\|=0$, 则存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset N$, 使得$\|x-x_n\|\to 0$, 即$x_n\to x$. N是闭子空间, 所以$x\in N$, 所以$\pi(x)=N=\pi(0)$.

(2) 对任意的$\bar{x}\in\pi(x),\bar{y}\in\pi(y)$, 存在$z\in N$, 使得$\bar{x}+\bar{y}=x+y-z$, 于是

$$\|\pi(x)+\pi(y)\|=\|\pi(x+y)\|=\inf_{z\in N}\|x+y-z\|\leq\|\bar{x}+\bar{y}\|\leq\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|,$$

先对后式$\bar{x}\in\pi(x)$取下确界, 再对$\bar{y}\in\pi(y)$取下确界, 即得

$$\|\pi(x)+\pi(y)\|\leq\|\pi(x)\|+\|\pi(y)\|.$$

(3) 因为$\alpha\neq 0$, 所以

$$\|\alpha\pi(x)\|=\|\pi(\alpha x)\|=\inf_{z\in N}\|\alpha x-z\|=\inf_{y\in N}\|\alpha(x-y)\|=|\alpha|\inf_{y\in N}\|x-y\|=\alpha\|\pi(x)\|.$$

综上, X/N构成一个赋范线性空间. ∎

定理2.2.27. 设X是赋拟范线性空间, N是X的闭线性子空间, 在商空间X/N中定义

$$\|\pi(x)\|=\inf\{\|x-z\|\mid z\in N\},$$

则N和X/N完备的充分必要条件是X是完备的.

证明 必要性. 设$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$是X中Cauchy列, 则

$$\|\pi(x_n)-\pi(x_m)\|=\|\pi(x_n-x_m)\|\le\|x_n-x_m\|,\ \ \forall x_n,x_m\in\{x_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

因而$\{\pi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$是$X/N$中的Cauchy列. 于是, 存在$\pi(x_0)\in X/N$, 使得$\pi(x_k)\to\pi(x_0)$ $(k\to\infty)$. 又N是线性子空间, 由关系式

$$\begin{aligned}d(x_k,\pi(x_0))&=\inf_{z\in N}\{x_k-(x_0+z)\|=\inf_{z\in N}\{(x_k-x_0)+z\|\\&=\|\pi(x_k-x_0)\|=\|\pi(x_k)-\pi(x_0)\|\to 0(k\to 0)\end{aligned}$$

可知存在一单调自然数列$\{k_n\}_{k=1}^{\infty}$以及$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\pi(x_0)$, 使得$d(x_{k_n},z_n)<\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. 由关系式

$$\begin{aligned}\|z_n-z_m\|&\le\|z_n-x_{k_n}\|+\|x_{k_n}-x_{k_m}\|+\|x_{k_m}-z_m\|\\&\le\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}+\|x_{k_n}-x_{k_m}\|\end{aligned}$$

以及$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$为Cauchy列可知$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$是一Cauchy列, 进而$\{z_n-x_0\}$是N中一Cauchy列. 又因为N是完备空间, 从而存在$z_0\in X$, 使得$\|z_n-z_0\|\to 0$ $(n\to\infty)$. 又

$$\begin{aligned}\|x_k-z_0\|&\le\|x_k-x_{k_n}\|+\|x_{k_n}-z_n\|+\|z_n-z_0\|\\&\le\tfrac{1}{n}+\|x_k-x_{k_n}\|+\|z_n-z_0\|,\end{aligned}$$

可得$x_k\to z_0\in X$ $(k\to\infty)$, 即X是完备空间.

充分性. 假设X是完备空间, 则N也是完备空间. 设$\{\pi(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$是空间$X/N$的一Cauchy列, 因为$\|\pi(x_n)-\pi(x_m)\|\to 0$ $(n,m\to\infty)$, 我们可以选取一子列$\{\pi(x_{k_n})\}_{n=1}^{\infty}$使其满足

$$\|\pi(x_{k_{n+1}}-(x_{k_n})\|=\|\pi(x_{k_{n+1}})-\pi(x_{k_n})\|<\frac{1}{2^n},\ \ n\in\mathbb{N}.$$

再由商空间范数的定义, 可找到一列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$使其满足$z_n\in\pi(x_{k_{n+1}}-x_{k_n})$, $\|z_n\|<\frac{1}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$. 令$z_1=(\bar{x}_{k_2}-\bar{x}_{k_1})+z_0$, $\bar{x}_{k_2}\in\pi(x_{k_2})$, $\bar{x}_{k_1}\in\pi(x_{k_1})$, $z_0\in N$, 那么可以作出X的一序列$\{x_{k_n}^0\}_{n=1}^{\infty}$如下:

$$x_{k_1}^0=\bar{x}_{k_1},x_{k_2}^0=z_1+x_{k_1}^0,x_{k_3}^0=z_2+x_{k_2}^0,$$

$$x_{k_{n+1}}^0=z_n+x_{k_n}^0,\cdots.$$

并且由归纳法显然有

$$x_{k_n}^0\in\pi(x_{kn}),\ z_n=x_{k_{n+1}}^0-x_{k_n}^0,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

因而

$$\|x^0_{k_{n+1}} - x^0_{k_n}\| = \|z_n\| < \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

即$\{x^0_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$是$X$中的Cauchy列, 因而存在$x^0 \in X$使得$x^0_{k_n} \to x^0 \quad (n \to \infty)$. 又因为

$$\begin{aligned}\|\pi(x_k) - \pi(x^0)\| &\le \|\pi(x_k) - \pi(x_{k_n})\| + \|\pi(x_{k_n}) - \pi(x^0)\| \\ &\le \|\pi(x_k) - \pi(x_{k_n})\| + \|x^0_{k_n} - x^0\|\end{aligned}$$

进而有$\pi(x_k) \to \pi(x^0)(k \to \infty)$, 所以商空间$X/N$完备. ∎

注记2.2.28. 上面定理中的条件N完备不能去掉, 存在商空间完备, 但X不完备的情况. 例如：设X是空间(c) (复数域上所有收敛数列的全体按通常数列运算定义加法和数乘构成的线性空间, 其上范数定义为$\|x\| = \max\limits_{n} |\xi_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\} \in (c)$) 中使$\{\xi_k\}$仅有“有限个坐标非0”的元之全体, N为X中使得$\{\xi_k\}$的前n_0项坐标恒为0的元之全体, 那么相应的商空间X/N是完备的, 但是X不完备. 证明如下

容易验证N是X的闭子空间. 下面验证X/N是完备的. 事实上, 当假设$\{\pi(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset X/N$为一Cauchy列时, 与上面定理的证明类似, 只要注意空间(c)内的范数定义, 就可以取那里的元z_n, $n \in \mathbb{N}$, 使其除前n_0项以外其余坐标均为零, 于是相应地得到序列$\{x^0_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$. 由$x^0_{k_{n+1}} - x^0_{k_n} = z_n$, z_n坐标的性质以及X/N中元素的特点, 也可设$x^0_{k_n}$的除前n_0项以外其余后面的坐标均为零. 又因为有限维赋范线性空间一定是完备的, 我们可以找到$x_0 \in X$使得$x_{k_n} \to x_0$ $(n \to \infty)$. 由此类似地就可以推出$\pi(x_k) \to \pi(x_0)$ $(k \to \infty)$, 即X/N是完备的.

X的不完备性容易证明. 例如只要取X中序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$如下：

$$x_1 = (1, 0, \cdots) \quad x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, \cdots), \cdots,$$

$$x_n = (1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, \cdots), \cdots,$$

那么, 由

$$\|x_n - x_m\| = \max(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{m+1}) \to 0, \quad (n, m \to \infty),$$

可知$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为X中的Cauchy列, 但其在X中却无极限存在.

事实上, 若令$x_0 = (1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots)$, 显然有$x_n \to x_0 (n \to \infty)$, 但是$x_0 \notin X$. 由距离空间中序列极限的唯一性知$X$不完备. ∎

§2.2.4.2 积空间

定义2.2.29. 设X_1, X_2是数域$\mathbb{K}$上的赋范线性空间, 定义

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|,$$

则称$X_1 \times X_2$为X_1和X_2的积空间.空间中元素的加法和数乘定义如下：

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

其中

$$x_1, y_1 \in X_1,\ x_2, y_2 \in X_2,\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

定理2.2.30. 设X_1, X_2是两个赋范线性空间, 那么积空间$X_1 \times X_2$仍为赋范线性空间, 并且$X_1 \times X_2$为Banach空间的充分必要条件是X_1, X_2均为Banach空间.

证明 前一结论显然, 只证明后一结论.

必要性. 假设$X_1 \times X_2$为Banach空间, 则对于X_1中的Cauchy列$\{x_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, 由于此时$\{(x_1^{(n)}, 0)\}_{n=1}^{\infty}$也是积空间的Cauchy列, 因而存在元$(x_1^0, \bar{x}_2) \in X_1 \times X_2$, 使得$\{(x_1^{(n)}, 0)\} \to (x_1^0, \bar{x}_2)\ \ (n \to \infty)$. 注意到

$$\begin{aligned}\|x_1^{(n)} - x_1^0\| \le \|x_1^{(n)} - x_1^0\| + \|\bar{x}_2\| &= \|(x_1^{(n)} - x_1^0, -\bar{x}_2)\| \\ &= \|(x_1^{(n)}, 0) - (x_1^0, \bar{x}_2)\|,\end{aligned}$$

可以得出$x_1^{(n)} \to x_1^0 \in X_1\ (n \to \infty)$, 即$X_1$是Banach空间. 同理可证$X_2$是Banach空间.

充分性. 若X_1, X_2均为Banach空间, 假设$\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$为$X_1 \times X_2$中的Cauchy列, 由于

$$\begin{aligned}\|x_1^{(n)} - x_1^{(m)}\| + \|x_2^{(n)} - x_2^{(m)}\| &= \|(x_1^{(n)} - x_1^{(m)}, x_2^{(n)} - x_2^{(m)})\| \\ &= \|(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - (x_1^{(m)}, x_2^{(m)})\| \to 0, \quad n, m \to \infty.\end{aligned}$$

所以

$$\|x_1^{(n)} - x_1^{(m)}\| \to 0, \quad \|x_2^{(n)} - x_2^{(m)}\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

即$\{x_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_2^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$分别为空间$X_1, X_2$的Cauchy列, 因此, 存在$x_1^0 \in X_1$, $x_2^0 \in X_2$使得

$$\|x_1^{(n)} - x_1^0\| \to 0,\ \|x_2^{(n)} - x_2^0\| \to 0 (n \to \infty).$$

因此

$$\|(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) - (x_1^0, x_2^0)\| = \|x_1^{(n)} - x_1^0\| + \|x_2^{(n)} - x_2^0\| \to 0 \quad n \to \infty.$$

即积空间$X_1 \times X_2$也是Banach空间. ∎

§2.3 内积空间

§2.3.1 内积空间

在欧氏空间中, 向量的长度以及向量间的夹角都可以用内积来定义. 本节将把内积的概念推广到无穷维空间.

定义2.3.1. 设X是复线性空间,如果对任给的$x, y \in X$都恰有一个复数(x, y)与之对应,并且对任意的$x, y, z \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$, 满足

(1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

(4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

则称(x, y)为x与y的内积,称X为内积空间.

例2.3.2. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$都是内积空间, 其上的内积分别定义为

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n,$$

其中$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

定义2.3.3. 内积空间X中的元素x, y如果满足$(x, y) = 0$, 则称x, y为正交的, 记作$x \perp y$.

定义2.3.4. 内积空间X中的一族元素$\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, 如果满足

$$(x_j, x_k) = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

则称$\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$为正规正交集.

定理2.3.5. 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是内积空间X的正规正交集, 则对任意的$x\in X$, 有

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{N}|(x,x_n)|^2+\|x-\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\|^2.$$

其中$\|x\|=\sqrt{(x,x)},\forall x\in X$.

不难证明内积空间按$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$构成赋范线性空间.

证明 将x表成

$$x=[\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n]+[x-\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n].$$

由内积空间的定义, 容易验证上式右端第一项与第二项是正交的. 因而有

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\|\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\|^2+\|x-\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\|^2\\&=\sum_{n=1}^{N}|(x,x_n)|^2+\|x-\sum_{n=1}^{N}(x,x_n)x_n\|^2.\end{aligned}$$

∎

推论2.3.6. (Bessel不等式) 设$\{x_n\}_{n=1}^{N}$(N可以是正整数或可列无穷元素)是内积空间X中的正规正交集, 则对于任何的$x\in X$都有

$$\sum_{n=1}^{N}|(x,x_n)|^2\le\|x\|^2.$$

推论2.3.7. (Schwarz不等式) 对内积空间X中任意两个向量x,y都有

$$|(x,y)|\le\|x\|\|y\|.$$

证明 若$y=0$,则

$$(x,y)=(x,0y)=0(x,y)=0.$$

可见等式成立.

若$y\neq 0$, $\{y/\|y\|\}$就是正规正交集. 由Bessel不等式, 有

$$\|x\|^2\ge|(x,y/\|y\|)|^2=\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2}.$$

结论得证. ∎

由Schwarz不等式容易证明, 若在内积空间X中定义$\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$, 则$X$按此范数构成赋范线性空间. 显然, 若$x,y$正交, 则

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

定义2.3.8. 若内积空间X是完备的, 则称X为Hilbert空间.

反过来, 对于内积空间, 我们有如下重要结果：

定理2.3.9. (**极化恒等式**)对内积空间X中任意两个向量x, y都有

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

证明 由范数与内积关系易得

$$\|x+y\|^2 = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y);$$

$$\|x-y\|^2 = (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y);$$

$$\|x+iy\|^2 = (x,x) - i(x,y) + i(y,x) + (y,y);$$

$$\|x-iy\|^2 = (x,x) + i(x,y) - i(y,x) + (y,y),$$

进而有

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2,$$

定理得证. ∎

定理2.3.10. 赋范线性空间X成为内积空间的充分必要条件是对任意的$x, y \in X$, 满足如下的平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

证明 必要性. 若X为内积空间, 则

$$\|x+y\|^2 = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y);$$

$$\|x-y\|^2 = (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y),$$

所以

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

充分性. 当X是实赋范线性空间时, 定义

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

当X是复赋范线性空间时, 定义

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)+\frac{1}{4}i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2),$$

则X按此定义构成内积空间. ∎

例2.3.11. 在空间$C[0,1]$中, 取$x(t)=1,\ y(t)=t$, 则

$$\|x+y\|=\max_{0\le t\le 1}|1+t|=2,$$

$$\|x-y\|=\max_{0\le t\le 1}|1-t|=1,$$

$$\|x\|=1,\ \ \|y\|=1,$$

显然不满足平行四边形法则, 这说明$C[0,1]$不是内积空间.

例2.3.12. l^2是Hilbert空间, 其上的内积定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i,$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^2$.

解 首先, 由Hölder不等式, $|(x,y)|=|\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i\bar{y}_i|\le(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\bar{y}_i|^2)^{\frac{1}{2}}<\infty$, 此定义有意义, 并且容易验证它满足内积条件, l^2按$(\cdot,\cdot)$成为内积空间.

下面证明l^2是完备的.

设$x^k=\{x_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$是$l^2$中的Cauchy序列, 于是任给$\epsilon>0$, 存在自然数$N$, 使得$j,k\ge N$时,

$$\|x^k-x^j\|=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}|^2)^{\frac{1}{2}}<\epsilon. \tag{2.3.1}$$

从而对每个自然数n,

$$|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}|<\epsilon,\quad j,k\ge N.$$

这说明$\{x_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$是Cauchy数列, 故$\lim\limits_{k}x_n^{(k)}=x_n^{(0)}$存在且有限. 记$x^0=\{x_n^{(0)}\}$, 由(2.3.1)式, 对每个自然数$m$,

$$\sum_{n=1}^{m}|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}|^2<\epsilon^2,\quad j,k\ge N.$$

令$j\to\infty$,可得
$$\sum_{n=1}^{m}|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|^2\le\epsilon^2,\quad k\ge N.$$
再令$m\to\infty$, 可得
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|^2\le\epsilon^2,\quad k\ge N.$$
这说明$x^k-x^0\in l^2$, $k\ge N$. 因l^2是线性空间, 故$x^0\in l^2$. 再由上式得
$$\|x^k-x^0\|=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n^{(0)}|^2)^{\frac{1}{2}}\le\epsilon,\quad k\ge N.$$
即$x^k\to x^0$, 所以l^2是Hilbert空间. ∎

例2.3.13. $L^2[a,b]$是Hilbert空间, 其上的内积定义为
$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,\quad f,\ g\in L^2[a,b].$$
可见$L^2[a,b]$上的范数恰好是由内积定义的.

证明 首先由Hölder不等式知此定义有意义, 并且容易验证它满足内积条件, 而且按这个内积确定的范数恰好是例2.2.6中$p=2$时的范数, 从那里知$L^2[a,b]$是完备的, 从而是Hilbert空间.

§2.3.2 正规正交基

线性代数中的Schmidt正交化过程可以完全复制到内积空间上来.

设$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$是线性无关的序列. 令
$$\begin{aligned}
&w_1=u_1, && v_1=w_1/\|w_1\|,\\
&w_2=u_2-(u_2,v_1)v_1, && v_2=w_2/\|w_2\|\\
&\cdots && \cdots\\
&w_n=u_n-\sum_{k=1}^{n-1}(u_n,v_k)v_k, && v_n=w_n/\|w_n\|\\
&\cdots && \cdots
\end{aligned}$$
则$\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$是一个正规正交集, 并且对任何自然数m, 都有
$$\mathrm{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}=\mathrm{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}\tag{2.3.2}$$

定义2.3.14. 内积空间X的正规正交集$S=\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$称为一个基是指对任意的$x\in X$, 有唯一的表示

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda, \tag{2.3.3}$$

其中$x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}z_\lambda$表示至多可列个$z_\lambda\neq 0$. $\{(x,e_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$称为$x$关于基$\{e_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$的Fourier系数(坐标).

定理2.3.15. 假设X是Hilbert空间, S是X中正规正交集. 下列命题等价：

(1) S是内积空间X的正规正交基;

(2) X中没有其它的正规正交集真包含S;

(3) X中没有非零元与S中每个元正交.

证明 (1)⇒(2) 反证法. 假设X中有正规正交集$S_1\supset S$, 取非零的$x\in S_1-S$, 则x与S中每个元都正交, 表达式(2.3.3)右端为零, 而$x\neq 0$, 与S是正规正交基矛盾.

(2)⇒(3) 设$x\in X$与S中每个元正交. 如果$x\neq 0$, 令$x_1=x/\|x\|$, 则$S_1=S\cup\{x_1\}$便是X中真包含S的正规正交集, 矛盾.

(3)⇒(1) 令$S=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$, 设$x\in X$, 由Schwarz不等式, 对每个$\lambda\in\Lambda$,

$$|(x,e_\lambda)|\leq\|x\|.$$

注意

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k+1}\|x\|,\frac{1}{k}\|x\|]=(0,\|x\|].$$

于是, 若有不可数个$(x,e_\lambda)\neq 0$,则至少有一个区间

$$[\frac{1}{k+1}\|x\|,\frac{1}{k}\|x\|]$$

中包含无穷多个$|(x,e_\lambda)|$, 与Bessel不等式矛盾. 现在$\{(x,e_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$中至多只有可数个不为0者, 将它们排列成

$$(x,e_{\lambda_1}),(x,e_{\lambda_2}),\cdots,(x,e_{\lambda_j}),\cdots,$$

由Bessel不等式, 对任意自然数N,

$$\sum_{j=1}^{N}|(x,e_{\lambda_j})|^2\leq\|x\|^2.$$

故$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|(x,e_{\lambda_j})|^2$收敛. 令$y_n=\sum\limits_{j=1}^{n}(x,e_{\lambda_j})e_{\lambda_j}, n\in\mathbb{N}$, 则当$n>m$时,

$$\|y_n-y_m\|^2=\|\sum_{j=m+1}^{n}(x,e_{\lambda_j})e_{\lambda_j}\|^2=\sum_{j=m+1}^{n}|(x,e_{\lambda_j})|^2,$$

可见$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$是X中Cauchy列. 因为X是完备的, 所以可设$y_n\to x'\in X$. 下证$x=x'$.

显然, 对一切的e_{λ_k}有

$$\begin{aligned}(x-x',e_{\lambda_k}) &= \lim_{n\to\infty}(x-\sum_{j=1}^{n}(x,e_{\lambda_j})e_{\lambda_j},e_{\lambda k})\\ &= (x,e_{\lambda_k})-(x,e_{\lambda_k})=0.\end{aligned}$$

而对$e_\lambda\in S,\lambda\neq\lambda_k,(x,e_\lambda)=0$, 且$(e_{\lambda_j},e_\lambda)=0, j\in\mathbb{N}$.
故

$$(x-x',e_\lambda)=\lim_{n\to\infty}(x-\sum_{j=1}^{n}(x,e_{\lambda_j})e_{\lambda_j},e_\lambda)=0.$$

于是$x-x'$与S中一切元正交, 由假设$x-x'=0$.即

$$\begin{aligned}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(x,e_{\lambda_j})e_{\lambda_j}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(x,e_{\lambda_j})e_{\lambda_j}\\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda.\end{aligned}$$

∎

推论2.3.16. 若X是可分的Hilbert空间, 则X存在可数的正规正交基$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 并且对任意的$x\in X$,都有

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2. \tag{2.3.4}$$

式(2.3.4)通常称为**Parseval公式**.

证明 由于X可分, X中存在可数稠密子集S. 利用数学归纳法可以证明存在S中一个线性无关子集$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,使得S中每个元都可以表示成$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中某些元的线性组合. 将Schmidt正交化方法应用于$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 得到正交正规集$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

若有$e\in X$,使得

$$(e,e_n)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

注意由式(2.3.3), 每个x_n可以表示成$x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j e_j$, 从而

$$(e, x_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

又任给$x \in S$, 可以表成$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中某些元的线性组合, 故

$$(e, x) = 0, \quad \forall x \in S.$$

由于S是X中稠密子集, 所以$e = 0$. 由上面定理知, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是X的正规正交基. ∎

下面给出一些正规正交基的例子.

例2.3.17. l^2空间的一组正规正交基为$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中$e_n = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1}, 1, 0, \cdots), \ n \in \mathbb{N}$.

例2.3.18. $L^2[0, 2\pi]$空间的一组正规正交基为$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.并且对任意的$u \in L^2[0, 2\pi]$, 对应的Fourier系数为

$$(u, e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

定理2.3.19. 复数域$\mathbb{C}$上的Hilbert空间X可分的充分必要条件是它有至多可数的正规正交基S. 若S的元素个数$N < \infty$, 则X同构于$\mathbb{C}^N$; 若S的元素个数$N = \infty$, 则X同构于l^2.

证明 必要性. 见推论2.3.16.

充分性. 设$\{e_n\}, n = 1, 2, \cdots, N$ ($N < \infty$或$N = \infty$)是X的正规正交基, 那么集合

$$\{x = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \mid \mathrm{Re}a_n\text{与}\mathrm{Im}a_n\text{皆为有理数}\}$$

是X中的可数稠密子集, 所以X可分.

对正规正交基$\{e_n\}, n = 1, 2, \cdots, N$ ($N < \infty$或$N = \infty$), 作对应$T: x \to \{(x, e_n), \ n = 1, 2, \cdots, N\}, \forall x \in X$. 根据Parseval等式有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2, \quad \forall x \in X.$$

由此可见对应T是$X \to \mathbb{C}^N$ (当$N < \infty$)或$X \to l^2$ (当$N = \infty$)的既单且满的线性同构. 此外,

$$\begin{aligned}(x, y) &= (\sum_{i=1}^{N} (x, e_i) e_i, \sum_{j=1}^{N} (y, e_j) e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (x, e_i) \overline{(y, e_i)}, \quad \forall x, y \in X.\end{aligned}$$

因此T还保持内积, 于是当$N<\infty$时, X同构于$\mathbb{C}^N$; 当$N=\infty$时, X同构于l^2. ∎

§2.3.3 正交分解与射影定理

定义2.3.20. 设X是内积空间, $M,N\subset X$.

(1) 设$x\in X$, 若$\forall y\in M$, 都有$(x,y)=0$, 则称x与M正交, 记为$x\perp M$;

(2) 若$\forall x\in M$, $\forall y\in N$, 都有$(x,y)=0$, 则称M与N正交, 记为$M\perp N$.

定义2.3.21. 设X是内积空间, $M\subset X$, 称X中一切与M正交的元素组成的集合叫做M的正交补, 即

$$M^{\perp}=\{x|x\perp M, x\in X\}.$$

容易验证, $M^{\perp}$是X的闭子空间.

定理2.3.22. (**射影定理**) 设H是Hilbert空间, $M\subset H$为闭子空间, 则H中的每个元素x都可以唯一地表示为

$$x=y+z,\quad y\in M,\quad z\in M^{\perp},$$

人们称这个由x和M唯一确定的y为x在M上的正交射影, 上式也称为x的正交分解.

证明 对任意的$x\in H$, 令

$$d(x,M)=\inf_{z\in M}\|x-z\|=a\geq 0,$$

则存在$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$, 使得$\|y_n-x\|\to a$ $(n\to\infty)$. 可证$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$是M中的Cauchy列. 事实上,对任意的m,n, 有$\frac{1}{2}(y_m+y_n)\in M$, $\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\|\geq a$, 由平行四边形法则,有

$$\begin{aligned}0&\leq\|y_m-y_n\|^2=\|(y_m-x)+(x-y_n)\|^2\\&=\|(y_m-x)+(x-y_n)\|^2+\|(y_m-x)-(x-y_n)\|^2-\|(y_m-x)-(x-y_n)\|^2\\&=2\|y_m-x\|^2+2\|x-y_n\|^2-\|(y_m+y_n)-2x\|^2\\&\leq 2\|y_m-x\|^2+2\|y_n-x\|^2-4a^2\to 0,\ m,n\to\infty.\end{aligned}$$

故$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$是M中的Cauchy列. 由M闭可知M是H的完备子空间. 故存在$y\in M$使得$y_n\to y$ $(n\to\infty)$, 则$a=\|x-y\|=\inf\limits_{z\in M}\|x-z\|$.

记$x-y=z$, 则$x=y+z$. 下证$z\in M^{\perp}$.

$\forall m_1 \in M\ (m_1 \neq 0), \forall \lambda \in \mathbb{K},\ y + \lambda m_1 \in M$, 则

$$\begin{aligned} a^2 &\le \|x - (y + \lambda m_1)\|^2 = ((x-y) - \lambda m_1, (x-y) - \lambda m_1) \\ &= (x-y, x-y) - ((x-y), \lambda m_1) - (\lambda m_1, (x-y)) + |\lambda|^2 (m_1, m_1) \cdot \\ &= a^2 - 2Re[\bar{\lambda}(x-y, m_1)] + |\lambda|^2 \|m_1\|^2 \end{aligned}$$

特别的, 选取$\lambda = \frac{(x-y,m_1)}{\|m_1\|^2}$, 代入上式得

$$\begin{aligned} a^2 &\le a^2 - 2Re[\overline{\tfrac{(x-y,m_1)}{\|m_1\|^2}} \cdot (x-y, m_1)] + \tfrac{|(x-y,m_1)|^2}{\|m_1\|^4} \|m_1\|^2 \\ &= a^2 - \tfrac{|(x-y,m_1)|^2}{\|m_1\|^2}, \end{aligned}$$

故$(x-y, m_1) = 0$, 即$z = x - y \perp M$.

假设又有$x = y_1 + z_1, y_1 \in M, z_1 \in M^\perp$, 于是$y + z = y_1 + z_1, y - y_1 = z_1 - z \in M \cap M^\perp$. 而$M \cap M^\perp = 0$, 所以$y - y_1 = 0,\ z_1 - z = 0$, 即$y = y_1,\ z = z_1$. ∎

从这个定理可以看出：用子空间M中的元素y'逼近x时, 当且仅当y'等于x在M上的投影y时, 逼近程度最好. 在随机过程理论、逼近论、最优化理论以及其他学科中, 经常用投影的这一性质来研究最佳逼近问题.

Hilbert空间是几何性质最丰富的空间, 理由之一就在于它有上述射影定理.

习　题

1. 证明距离空间中的任何Cauchy序列都是有界的.
2. 设X是距离空间, $A \subset X$. 对任意的$x \in X$, 定义

$$\rho(x, A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\},$$

证明：$\rho(x, A)$是关于x的连续函数.

3. 举例说明, 在无穷维距离线性空间中, 有界无穷集未必含有收敛子列.
4. 证明l^∞不可分.
5. 如果在n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$上定义

$$\rho(x, y) = \max_{1 \le j \le n} |\xi_j - \eta_j|,\ \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n),\ y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

证明$\mathbb{R}^n$按距离ρ是完备的距离线性空间.

6. 对于$C[a,b]$中的任意两个元素$x(t), y(t)$, 定义$d(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$, 证明$C[a,b]$是一个距离空间.
7. 设(X,d)是完备距离空间, E是X的闭子集, 证明(E,d)也是完备距离空间.
8. 举例说明, 在一般的距离空间中, 全有界集未必是列紧的.
9. 证明紧集的闭子集也是紧的.
10. 证明s空间中的子集A列紧的充分必要条件是对每个自然数n, 存在$C_n>0$, 使得对一切$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in A$, 有
$$|\xi_n|\le C_n,\quad n\in\mathbb{N}.$$
11. 设c是一切收敛序列组成的集, 线性运算与l^p中相同, 在c中令
$$\|x\|=\sup_{n\ge 1}|\xi_n|,$$
其中$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in c$, 则$c$是可分的Banach空间.
12. 设$M[a,b]$是区间$[a,b]$上有界函数的全体按逐点定义的加法和数乘形成的线性空间. 定义
$$\|x\|=\sup_{a\le t\le b}|x(t)|,\quad \forall x=x(t)\in M[a,b].$$
证明$M[a,b]$按此范数构成Banach空间.
13. 证明在有限维赋范线性空间中, Bolzano-Weierstrass聚点原理成立.
14. 假设X_1, X_2是两个线性空间, 且有$X_1\cap X_2=\{0\}$, $X=X_1+X_2$, 即X为X_1与X_2的直接和, 则商空间X/X_1与X_2线性同构.
15. 设X_1, X_2均为Banach空间, 定义积空间
$$X=X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)|x_i\in X_i\ (i=1,2), \sup_{i=1,2}\|x_i\|<\infty\},$$
在X中定义运算及范数
$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\quad \alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2),$$
$$\|(x_1,x_2)\|=\sup_{i=1,2}\|x_i\|,\ \forall x_i,y_i\in X_i\ (i=1,2),\ \alpha\in\mathbb{K}.$$
证明X是一个Banach空间.
16. 证明空间l^2与$L^2[a,b]$等价 (称两个赋范线性空间X_1, X_2等价, 是指存在一个从X_1到X_2上的线性同构且保范的映射).

17. 设X是内积空间, $x, y \in X$都是非零元, 证明：

    (1) 如果x与y正交, 则x与y线性无关;

    (2) x与y正交的充要条件是对任意数α,

$$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|.$$

    (3) x与y正交的充要条件是对任意数α,

$$\|x+\alpha y\| \geq \|x\|.$$

18. 设$\{e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$是内积空间X中的正规正交集, 则对任意的$x, y \in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)(y, e_n)| \leq \|x\|\|y\|.$$

19. 证明非零内积空间X必存在正规正交基.

20. 证明：在$L^2[0, 2\pi]$上,

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \ \ (n = 0, \pm, \pm 2, \cdots)$$

是一个正规正交基.

21. 在$L^2[a, b]$上定义：

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx, \ \ f, g \in L^2[a, b].$$

证明$L^2[a, b]$按如上定义的内积是一个Hilbert 空间.

第三章　线性算子

线性算子实际上就是一类映射, 其定义域和值域均是线性空间(既可相同,也可不同), 某种意义下可以理解成是我们在线性代数中所学的线性变换的一种推广. 而本章中, 我们讨论的重点是赋范线性空间上的有界线性算子, 这是线性泛函分析中非常重要的一部分内容.

§3.1　算子及连续性

定义3.1.1. 设$\mathbb{K}$是一个实数或复数域, X, Y是$\mathbb{K}$上的两个线性空间, $\mathscr{D}(T)$是X的线性子空间, T是$\mathscr{D}(T)$到Y中的一个映射. 如果对一切$x, y \in \mathscr{D}(T)$和$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$都有

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y,$$

则称T为线性算子.

我们称$\mathscr{D}(T)$为T的定义域, $\mathscr{R}(T) = \{T(x) \mid x \in \mathscr{D}(T)\}$为$T$的值域. 特别的, 如果线性算子$T$的值域$\mathscr{R}(T) \subset \mathbb{K}$, 则称$T$为（实或复的）线性泛函, 通常简称为泛函.

容易验证, 当T是线性算子时, $\mathscr{R}(T)$是Y的子空间；$\mathscr{N}(T) \triangleq T^{-1}(0)$是$X$的子空间（称为$T$的核或零空间）；$T$保持线性相关性.

例3.1.2. 在n维向量空间$\mathbb{R}^n$中取定一组基$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 相应于任何一个实矩阵$(t_{ij})_{n\times n}$, 作$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$的算子$T$如下：当$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$时,

$$y = Tx = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

而$y_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j, i = 1, 2, \cdots, n$.

众所周知, T就是我们在线性代数中所讨论的线性变换, 而按照我们上面的定义, 它确实是一个线性算子. 因算子T由矩阵(t_{ij})唯一确定, 有时就直接记为$T = (t_{ij})_{n\times n}$.

反过来, 设T是$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$的任何一个线性算子, 由于$Te_j$是$e_1, e_2, \cdots, e_n$的线性组合, 所以必有矩阵$(t_{ij})_{n\times n}$, 使得

$$Te_j = t_{1j} e_1 + \cdots + t_{nj} e_n, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.1.1}$$

因此, 当$x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$时, 由T的线性性可得$Tx=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$, 其中$y_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j$, 即$T$是对应于矩阵$(t_{ij})_{n\times n}$的算子.

由此可以看出, 在有限维的线性空间上, 如果选定了空间的基, 则线性算子和矩阵是相对应的.

如设$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$是一组数, 那么当$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in\mathbb{R}^n$时,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i \tag{3.1.2}$$

为$\mathbb{R}^n$上的线性泛函. 反过来, 如果f是$\mathbb{R}^n$上的线性泛函, f必可表示为(3.1.2)的形式. 可见, n维线性空间$\mathbb{R}^n$上的线性泛函与数组$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$相对应.

通过本例, 大家就可以理解, 为什么我们前面说线性算子是我们在线性代数中所学的线性变换的一种推广.

例3.1.3. 设X是一个线性空间, 易验证映射

$$T:x\mapsto\alpha x\ \ (\alpha\in\mathbb{K})$$

是X上的线性算子, 称为相似算子, 记做αI. 如果$\alpha=0$, T是零算子, 记为$\mathbf{0}$; 当$\alpha=1$时, 称为单位算子（或恒等算子）, 记做I.

今后如无特殊说明, 我们总是假定X,Y是定义在$\mathbb{K}$上的赋范线性空间, 线性算子的定义域是全空间, 即$\mathscr{D}(T)=X$.

定义3.1.4. 设$T:X\to Y$, $x_0\in X$, 如果对于任意的$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 使得当$\|x-x_0\|<\delta$时, $\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$, 则称T在x_0点连续; 如果T在X上每一点都连续, 则称T在X上连续.

注记3.1.5. 尽管我们可以在一般的度量空间中来定义映射的连续, 但此处仅针对赋范线性空间上的线性算子给出. 而且由定义可以看出,

$$T\text{在}x_0\text{点连续}\Leftrightarrow\text{对}\forall x_n\in X,\text{当}x_n\to x_0\text{时},\text{有}Tx_n\to Tx_0.$$

关于线性算子的连续性, 我们有如下的等价刻画.

定理3.1.6. 设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子. 则下述论断等价:

(1) T在X上连续;

(2) T在某点$x_0 \in X$连续;

(3) 存在$M > 0$, 使得对所有满足$\|x\| \le 1$的$x \in X$, 都有$\|Tx\| \le M$;

(4) 存在$M > 0$, 使得对于任意的$x \in X$, 都有$\|Tx\| \le M\|x\|$.

证明 $(1) \Rightarrow (2)$易见, 所以我们只需证明$(2) \Rightarrow (3)$, $(3) \Rightarrow (4)$和$(4) \Rightarrow (1)$即可.

$(2) \Rightarrow (3)$ 由T在点x_0连续, 所以对于$\varepsilon = 1$, 一定存在$\delta > 0$, 使得当$x \in X$且$\|x - x_0\| < \delta$时, $\|T(x - x_0)\| < 1$.

设$\omega \in X$且$\|\omega\| \le 1$. 由

$$\left\|\frac{\delta(\omega - x_0)}{2(1 + \|x_0\|)}\right\| = \frac{\delta}{2(1 + \|x_0\|)}\|\omega - x_0\| \le \frac{\delta}{2(1 + \|x_0\|)}(\|\omega\| + \|x_0\|) < \delta,$$

可知$\|T(\frac{\delta(\omega - x_0)}{2(1+\|x_0\|)})\| < 1$.

而由于T是线性算子, 所以

$$\begin{aligned} \tfrac{\delta}{2(1+\|x_0\|)}\|T(\omega)\| &= \|T(\tfrac{\delta\omega}{2(1+\|x_0\|)})\| = \|T(\tfrac{\delta(\omega - x_0 + x_0)}{2(1+\|x_0\|)})\| \\ &\le \|T(\tfrac{\delta(\omega - x_0)}{2(1+\|x_0\|)})\| + \|T(\tfrac{\delta(x_0)}{2(1+\|x_0\|)})\| \\ &< 1 + \tfrac{\delta}{2(1+\|x_0\|)}\|Tx_0\| \end{aligned}$$

即$\|T(\omega)\| < \frac{2(1+\|x_0\|)}{\delta} + \|Tx_0\|$. 取$M = \frac{2(1+\|x_0\|)}{\delta} + \|Tx_0\|$, 可见(3)成立.

$(3) \Rightarrow (4)$ 设存在$M > 0$, 使得对所有满足$\|x\| \le 1$的$x \in X$, 都有$\|Tx\| \le M$. 因为$T(0) = 0$, 易见$\|T(0)\| \le M\|0\|$. 设$0 \ne y \in X$, 由于$\|\frac{y}{\|y\|}\| = 1$, 所以$\|T(\frac{y}{\|y\|})\| \le M$. 再次利用$T$是线性算子, 有

$$\frac{1}{\|y\|}\|T(y)\| = \|\frac{1}{\|y\|}T(y)\| = \|T(\frac{y}{\|y\|})\| \le M,$$

所以, $\|T(y)\| \le M\|y\|$, 进而有(4)成立.

$(4) \Rightarrow (1)$ 设$x_0 \in X$, 对于任意的$\varepsilon > 0$, 取$\delta = \frac{\varepsilon}{2M} > 0$, 则当$\|x - x_0\| < \delta$时,

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \le M\|x - x_0\| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon,$$

所以T在点x_0连续. 由x_0的任意性, 知T在X上连续. ∎

由此定理可以看出, 要证一个线性算子是连续的, 只需验证它在某点$x_0 \in X$连续就够了. 通常情况下, 取$x_0 = 0$.

§3.2 有界线性算子

§3.2.1 定义及实例

定义3.2.1. 设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子. 如果存在$M > 0$, 使得对于任意的$x \in X$, 都有

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \tag{3.2.1}$$

则称T是有界线性算子. 不是有界的算子就称为无界算子.

注记3.2.2. 此处的算子有界和我们在微积分中所学的函数有界是不同的, 例如: 函数$f(x) = x$在$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$上是无界函数, 但是, 如果看成是$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$上的线性算子却是有界的.

根据定理3.1.6, 立刻可以看出

定理3.2.3. 设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子, 则T有界等价于T连续.

这是一个非常漂亮的结果, 它说明了有界线性算子不但能够与线性运算可交换($T(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i T x_i$, 其中$\sum_i \alpha_i x_i, \alpha_i \in \mathbb{K}$, 是$X$中元素的有限线性组合), 而且也可以和极限运算可交换($T(\sum_n x_n) = \sum_n T x_n$, 其中级数$\sum_n x_n, x_n \in X$收敛).

在很多著作中, 给出的是下面的有界性定义:

定义3.2.4. 如果线性算子T把X中的任何有界集都映成Y中的一个有界集, 则称T是有界线性算子.

但是, 我们有如下的定理, 保证了两种不同定义方式的等价性.

定理3.2.5. 定义3.2.1和3.2.4是等价的.

证明 设S是X的有界集, 即存在$L > 0$, 使得任意的$x \in S$, 都有$\|x\| \leq L$, 则根据(3.2.1), 任意的$x \in S$, $\|Tx\| \leq M\|x\| \leq ML$, 即得$T(S)$是$Y$中的有界集.

反之, 对任意的$x \in X, x \neq 0$, 易见$\left\{\frac{x}{\|x\|} \mid x \in X, x \neq 0\right\}$是$X$中的有界集, 故$\left\{T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\}$是$Y$中的有界集, 所以存在$M > 0$, 使得$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq M$, 即有$\|Tx\| \leq M\|x\|$. ∎

例3.2.6. 例3.1.2中定义的$T = (t_{ij})_{n\times n}$是有界线性算子.

证明 取$\mathbb{R}^n$中的范数为$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 则利用Schwarz不等式可得

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2=\|y\|^2=\sum_{i=1}^n y_i^2&=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n t_{ij}x_j\right)^2\\&\leq\sum_{i=1}^n\left[\left(\sum_{j=1}^n t_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n t_{ij}^2\right)\|x\|^2.\end{aligned}$$

令$M=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n t_{ij}^2$, 可见$T$是有界线性算子. ∎

例3.2.7. 易见, 例3.1.3中定义的相似算子是有界线性算子.

因为有限维赋范线性空间都拓扑同构于n维欧氏空间, 所以其上的依范数收敛就等价于依Euclid范数收敛, 或等价于按坐标收敛. 很容易证明, 有限维赋范线性空间上的所有线性算子都是连续的, 或者说是有界的(可参见文献[16], P93). 但在无限维赋范线性空间中, 结果并非都是如此. 请看下例.

例3.2.8. 用$C^1[0,1]$表示$[0,1]$上连续可微函数的全体, 则$C^1[0,1]$是$C[0,1]$的线性子空间. 定义

$$\begin{aligned}T:\ C^1[0,1]&\to C[0,1]\\ x&\mapsto x'\end{aligned}$$

这里x'表示x的导函数, 则T是无界线性算子.

证明 线性易证, 下证无界性. 取$x_n(t)=t^n$, 则$\|x_n\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|t^n|=1$, 但是$\|Tx_n\|=\|nt^{n-1}\|=n$, 也就是说, 不存在$M>0$, 使得对于任意的$x\in X$, $\|Tx\|\leq M\|x\|$成立, 故T是无界线性算子. ∎

当$Y=\mathbb{K}$时, 线性算子就变成了线性泛函, 前面所有关于线性算子的讨论都可以平行的移植到线性泛函上来. 但对于线性泛函来说, 我们还有如下的连续性等价结果.

定理3.2.9. 设X是赋范线性空间, f是X上的线性泛函, 那么f连续等价于f的零空间$\mathscr{N}(f)$为X的闭子空间.

证明 必要性：设f连续. 当$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{N}(f), x_n \to x$时, 由$f$的连续性得到

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

因此$x \in \mathscr{N}(f)$, 所以$\mathscr{N}(f)$为X的闭子空间.

充分性：设$\mathscr{N}(f)$为X的闭子空间, 如果f不是有界的, 根据定理3.1.6知, 必有一点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 适合$\|x_n\| = 1, f(x_n) \geq n$. 作$y_n = \frac{x_n}{f(x_n)} - \frac{x_1}{f(x_1)}$, 那么$f(y_n) = 0$, 因此$y_n \in \mathscr{N}(f)$. 然而, 由于$\|\frac{x_n}{f(x_n)}\| = \frac{1}{|f(x_n)|} \to 0$, 就得到$y_n \to -\frac{x_1}{f(x_1)}$. 但是$f(-\frac{x_1}{f(x_1)}) = -1$, 表明$-\frac{x_1}{f(x_1)}$不属于$\mathscr{N}(f)$. 这和$\mathscr{N}(f)$为$X$的闭子空间矛盾！因此$f$是有界的. ∎

§3.2.2 算子的范数

设X, Y是赋范线性空间, 我们用$L(X,Y)$表示从X到Y的全体有界线性算子的集合(通常把$L(X,X)$简记为$L(X)$), 本小节我们将证明$L(X,Y)$是一个赋范线性空间. 有时, 在同一个表达式中我们会用同一符号$\|\cdot\|$来表示多至三种不同的范数, 但大家应该能够根据元素的归属理解$\|\cdot\|$到底是哪一个空间上的范数.

定义3.2.10. 设T是赋范线性空间X到赋范线性空间Y的线性算子, 称

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{3.2.2}$$

为T的范数.

可以验证, 由(3.2.2)式定义的$\|\cdot\|$满足范数的三个公理. 可参见文献([16], P97).

由此定义可以看出, 对于有界线性算子而言, 其范数是有限的. 而且我们还有三种$\|T\|$的等价定义

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \inf\{M \mid \|Tx\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X\}. \tag{3.2.3}$$

定义的等价性请读者自证.

从几何意义上考虑, 由于$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$可以理解为Tx和x的长度之比, 所以我们在(3.2.2)中定义的$\|T\|$是算子T的各个方向上伸缩系数的上确界. 而如果从(3.2.3)来考虑, 则$\|T\|$表示Y中以0为中心且包含$T(\overline{B}(0,1))$的闭球的最小半径.

在一般情况下, 要想证明T的范数等于M, 需要从两个方面着手：一方面, $\forall x \in X$, $\|x\| = 1$, $\|Tx\| \leq M$；另一方面, 设法取一个特殊的$x_0, \|x_0\| = 1$, 使得$\|Tx_0\| = M$, 或者构造序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\| = 1$, 使得$\|Tx_n\| \to M$.

下面, 我们通过两个实例来说明如何计算T的范数.

例3.2.11. 设线性算子$T : C[0,1] \to \mathbb{K}$, 定义为

$$Tf = f(0),$$

则$\|T\| = 1$.

证明 对于任意$f \in C[0,1]$, 易证$|Tf| = |f(0)| \le \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} = \|f\|$. 因此$\|T\| = \inf\{M \mid \|T(f)\| \le M\|f\|, \forall f \in C[0,1]\} \le 1$.

另一方面, 取$g \in C[0,1]$, $g(x) \equiv 1$, 此时$\|g\| = \sup\{|g(x)| \mid x \in [0,1]\} = 1$, $|Tg| = |g(0)| = 1$. 因此$1 = |Tg| \le \|T\|\|g\| = \|T\|$, 所以$\|T\| = 1$. ∎

例3.2.12. 设$K(s,t)$在矩形$[0,1] \times [0,1]$上连续, 则$C[0,1]$上的积分算子

$$(Tx)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

的范数为

$$\|T\| = \sup_{0 \le s \le 1} \int_0^1 |K(s,t)|dt.$$

证明 令$M = \sup\limits_{0 \le s \le 1} \int_0^1 |K(s,t)|dt$. 一方面, $\forall x \in C[0,1]$, 有

$$|Tx(s)| \le \int_0^1 |K(s,t)||x(t)|dt \le \|x\| \int_0^1 |K(s,t)|dt,$$

从而

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{0 \le s \le 1} |Tx(s)| \\ &\le \|x\| \sup_{0 \le s \le 1} \int_0^1 |K(s,t)|dt \\ &= M\|x\|, \end{aligned}$$

所以$\|T\| \le M$.

另一方面, 注意到$\int_0^1 |K(s,t)|dt$关于s是$[0,1]$上的连续函数, 因此存在$s_0 \in [0,1]$, 使得$M = \int_0^1 |K(s_0,t)|dt$. 令

$$k_0(t) = \mathrm{sgn} K(s_0,t),\ 0 \le t \le 1, \qquad \text{其中}\mathrm{sgn} z = \begin{cases} 0 & , \text{当} z = 0; \\ \frac{\bar{z}}{|z|} & , \text{当} z \ne 0, \end{cases}$$

则$k_0(t)$是可测函数, $\sup\limits_{0 \le t \le 1} |k_0(t)| \le 1$, 且

$$\int_0^1 K(s_0,t)k_0(t)dt = \int_0^1 |K(s_0,t)|dt = M.$$

对任意$\varepsilon > 0$, 令$\delta = \frac{\varepsilon}{2C}$, 其中$C = \sup\limits_{0\le s\le 1}|K(s,t)|$. 根据Lusin定理, 存在$[0,1]$上的连续函数$x(t)$, 满足$|x(t)|\le 1$且

$$m(\{t\in[0,1]\mid x(t)\ne k_0(t)\})<\delta.$$

从而

$$\left|\int_0^1 K(s_0,t)[x(t)-k_0(t)]dt\right| \le 2Cm(\{t\in[0,1]\mid x(t)\ne k_0(t)\})<\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}|Tx(s_0)| &= |\textstyle\int_0^1 K(s_0,t)x(t)dt|\\ &= |\textstyle\int_0^1 K(s_0,t)k_0(t)dt + \int_0^1 K(s_0,t)[x(t)-k_0(t)]dt|\\ &\ge \textstyle\int_0^1 |K(s_0,t)|dt - |\int_0^1 K(s_0,t)[x(t)-k_0(t)]dt|\\ &\ge M-\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\|Tx\|\ge M-\varepsilon.$$

注意到$\|x\|\le 1$, 故$\|T\|\ge M-\varepsilon$. 根据ε的任意性, 可得$\|T\|\ge M$.

综上可知, $\|T\| = M = \sup\limits_{0\le s\le 1}\int_0^1 |K(s,t)|dt$. ∎

设$T,S\in L(X,Y),\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 在逐点运算

$$(\alpha T+\beta S)x = \alpha Tx+\beta Sx \quad (x\in X) \tag{3.2.4}$$

下, 容易验证$L(X,Y)$是$\mathbb{K}$上的向量空间. 而由(3.2.2)式定义的$\|\cdot\|$是$L(X,Y)$上的范数, 所以$L(X,Y)$是赋范线性空间. 进一步的结果为

定理3.2.13. 当Y是Banach空间时, $L(X,Y)$为Banach空间.

证明 只需证明$L(X,Y)$是完备的. 设$\{T_n\}_{n=1}^\infty$是$L(X,Y)$中的Cauchy列, 则对任意$x\in X$有$\|T_nx-T_mx\|\le\|T_n-T_m\|\|x\|$, 由此可见$\{T_nx\}_{n=1}^\infty$是$Y$中的Cauchy列. 而由$Y$的完备性可知, 存在唯一的$y\in Y$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=y$. 定义$Tx=y$, 易见$T$是线性的. 因为赋范线性空间中的Cauchy列是有界的, 所以存在常数$M>0$, 使得$\|T_n\|\le M$, $n\in\mathbb{N}$. 故

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty}\|T_nx\| \le \lim_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|\le M\|x\|.$$

所以$T \in L(X,Y)$. 又因为

$$\begin{aligned}\|T_n - T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T)x\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \lim_{m\to\infty} \|(T_n - T_m)x\| \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T_m)x\| \\ &= \lim_{m\to\infty} \|T_n - T_m\| \to 0 \ \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

证毕. ∎

设X是一个赋范线性空间, 当$Y = \mathbb{K}$时, 根据定理3.2.14可知$L(X,\mathbb{K})$是一个Banach空间, 称之为X的对偶空间或共轭空间, 常用X'表示. 关于对偶空间, 我们后面还会专门进行讨论.

§3.2.3 代数$L(X)$及算子的逆

设$T, S \in L(X)$, 定义乘法

$$(TS)x = T(Sx), \ x \in X. \tag{3.2.5}$$

有如下定理.

定理3.2.14. 设$T, S \in L(X)$, 则$TS \in L(X)$, 且

$$\|TS\| \le \|T\|\|S\|. \tag{3.2.6}$$

特别的, 对任意$n \in \mathbb{N}$,

$$\|T^n\| \le \|T\|^n.$$

证明 对于任意$x \in X$, $\|(TS)x\| = \|T(Sx)\| \le \|T\|\|Sx\| \le \|T\|\|S\|\|x\|$, 所以有$\|TS\| \le \|T\|\|S\|$成立. 特殊情况易见. ∎

容易验证$L(X)$的元素关于运算(3.2.4)和(3.2.5)满足如下关系,

(1). $(AB)C = A(BC)$;

(2). $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$;

(3). $(\alpha A)(\beta B) = (\alpha\beta)(AB)$,

其中$A, B, C \in L(X), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. 事实上, $L(X)$是一个赋范代数, 而且当X是一个Banach空间时, 它还是一个Banach代数.

我们知道, 在求解矩阵方程$Ax = y$时, 其途径就是寻找A^{-1}(如果存在), 则可得方程的解为$x = A^{-1}y$. 但能否将这种方法推广到我们现在讨论的无限维空间? 我们又如何来定义T的逆T^{-1}呢?

定义3.2.15. 设X是一个赋范线性空间, $T \in L(X)$, 如果存在$S \in L(X)$, 满足$ST = I = TS$(I为单位算子), 则称算子T是可逆的, 且称S为T的逆, 记为T^{-1}.

约定用$GL(X)$表示$L(X)$中所有可逆算子之全体.

例3.2.16. 设$X = L^2([0,1]), h \in C[0,1]$, 定义$T_h \in L(X)$如下:

$$(T_h g)(t) = h(t)g(t),\ t \in [0,1],\ \forall g \in X,$$

容易验证$T_h \in L(X)$. 如果$f(t) = 1 + t$, 则T_f是可逆的.

证明 令$k(t) = \frac{1}{1+t}$, 则$k \in C[0,1]$且

$$(T_k T_f g)(t) = (T_k f g)(t) = k(t)f(t)g(t) = g(t), \forall t \in [0,1]$$

因此$T_k T_f g = g, \forall g \in X$, 所以$T_k T_f = I$. 类似可得$T_f T_k = I$, 所以$T_f$是可逆的, $T_f^{-1} = T_k$. ∎

在通常情况下, 确定算子的逆是否存在并不容易. 比如在上例中, 如果令$f(t) = t \in C[0,1]$, 则类似得到的$\frac{1}{t}$不再有效. 但此时我们并不能断定T_f不是可逆的, 原因就在于我们无法检验它是否存在不具有形式$T_h, h \in C[0,1]$的逆. 所以我们必须寻求其它的可判断算子是否可逆的方法. 下面给出的就是基于算子范数的一个结果.

定理3.2.17. 设X是一个Banach空间, $T \in L(X)$, 如$\|T\| < 1$, 则$I - T$是可逆的, 且

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \qquad \|(I-T)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|T\|},$$

其中$T^0 = I$是恒等算子.

证明 从$\|T^n\| \le \|T\|^n,\ n \in \mathbb{N},\ \|T\| < 1$, 以及$L(X)$为Banach空间, 可知

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + \cdots$$

按算子范数收敛, 且其和在$L(X)$中. 而对于任意$n \in \mathbb{N}$,

$$(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^n)=(I+T+T^2+\cdots+T^n)(I-T)=I-T^{n+1},$$

令$n\to\infty$, 可得

$$(I-T)\sum_{n=0}^{\infty}T^n=\sum_{n=0}^{\infty}T^n(I-T)=I,$$

因而$I-T$是可逆的, 且$(I-T)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T^n$, 从而

$$\|(I-T)^{-1}\|=\|\sum_{n=0}^{\infty}T^n\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|T\|^n=\frac{1}{1-\|T\|}.$$

∎

也可从几何上来解释此定理, 设$S=I-T$, 则当$\|I-S\|=\|T\|<1$时, S在$L(X)$中可逆. 所以以单位元I为中心的开单位球$\{S\in L(X)\mid \|I-S\|<1\}$中的元素全部都是$L(X)$的可逆元.

利用定理3.2.17, 我们可以求出例3.2.12中积分方程的解.

例3.2.18. 设$A\in\mathbb{K}$, $K(x,y)=A\sin(x-y)$是定义在$[0,1]\times[0,1]$上的连续函数. 试证明当$|A|<1$时, 对任意的$f\in C[0,1]$ 都存在$g\in C[0,1]$满足积分方程

$$g(x)=f(x)+\int_0^1 K(x,y)g(y)dy.$$

证明 定义$C[0,1]$上的积分算子$(Tx)(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$, 则根据例3.2.12可知, $\|T\|\le|A|$.

改写积分方程为

$$(I-T)g=f,$$

由定理3.2.17知$I-T$可逆, 可见积分方程有唯一解$g=(I-T)^{-1}f$. ∎

定理3.2.17不但有着很重要的理论价值, 也给我们提供了计算形如$x-Tx=y$的方程近似解的一种实用迭代方法. 令

$$\begin{aligned}
x_0&=y\\
x_1&=y+Tx_0\\
x_2&=y+Tx_1=y+Ty+T^2y\\
&\vdots\\
x_n&=y+Tx_{n-1}=S_ny,\quad \text{此处}S_n=\textstyle\sum_{k=0}^n T^k.
\end{aligned}$$

如果T满足定理3.2.17的条件, 则$x_n \to x = (I-T)^{-1}y$. 而且可以估计出逼近误差

$$\|x - x_n\| \leq \|(I-T)^{-1} - S_n\|\|y\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|T\|^k\right)\|y\| = \frac{\|T\|^{n+1}}{1-\|T\|}\|y\|.$$

§3.3 基本定理及应用

本节主要介绍线性算子理论的四大基本定理：Hahn-Banach延拓定理、逆算子定理、闭图像定理和一致有界定理. 这些定理贯穿于整个泛函分析理论, 有着极其重要的应用.

§3.3.1 Hahn-Banach延拓定理

设X是赋范线性空间, G是它的子空间, f是定义在G上的连续线性泛函. 本小节我们要讨论的就是能否在保持范数不变的情况下, 将f延拓成整个空间X上的连续线性泛函F.

先看一下算子的延拓问题.

定义3.3.1. 设X, Y是赋范线性空间, T是$\mathscr{D}(T)(\subset X)$到$Y$中的线性算子, 又设$G \subset \mathscr{D}(T)$. 如果

$$\|T\|_G = \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

是一个有限的数, 则称T在G上有界, $\|T\|_G$为T在G上的范数.

设A, B是赋范线性空间X的子空间到赋范线性空间Y的两个有界线性算子, 如果B是A的延拓, 即$\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(B)$, 并且当$x \in \mathscr{D}(A)$时, $Ax = Bx$, 那么

$$\|B\| = \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(B)\\ \|x\|=1}} \|Bx\| \geq \sup_{\substack{x\in\mathscr{D}(A)\\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \|A\|$$

可见, 算子延拓时范数不会减少.

定理3.3.2. 设X是赋范线性空间, Y是Banach空间, G是X的稠密的线性子空间, A是G到Y的有界线性算子, 那么A必可延拓成X到Y的有界线性算子B, 并且保持范数不变.

证明可参考文献[10].

此定理所描述的可延拓性是比较明显的, 但现在我们关心的是另外一种复杂的延拓问题：如果$\overline{\mathscr{D}(T)} \neq X$, 一个算子是否能够保范的延拓到$X$上? 对于连续线性泛函, Hahn-Banach定理给出了肯定的回答.

利用上面的定理, 我们不妨假设有界线性算子T的定义域$\mathscr{D}(T)$总是X的闭子空间.

定理3.3.3. (Hahn-Banach) 设X是赋范线性空间, G是X的线性子空间, 对于任意的定义在G上的连续线性泛函f, 必可以作出X上的连续线性泛函F, 满足：

(1) 当$x \in G$时, $F(x) = f(x)$;

(2) $\|f\|_G = \|F\|$.

在证明此定理之前，我们先来讨论一般的实（复）向量空间上的延拓定理(定理3.3.4, 3.3.5).

定理3.3.4. 设X是实线性空间, G是X的线性子空间, f是G上的实线性泛函. 如果有X上的实值泛函p, 使得

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y),\ \ x, y \in X$ (次可加性),

(2) $p(tx) = tp(x),\ \ x \in X,\ t \geq 0$ (正齐次性),

(3) $f(x) \leq p(x),\ \ x \in G.$

则存在X上的实线性泛函$F(x)$, 满足：

(1) $F(x) = f(x),\ \ x \in G,$

(2) $F(x) \leq p(x),\ \ x \in X.$

证明 若$G = X$, 结论显然成立;

若$G \neq X$, 取$x_0 \in X \backslash G$, 记$G' = \text{span}\{x_0, G\}$, 则$G'$是包含$x_0$和$G$的最小的子空间，并且对任意的$x' \in G'$, 均可唯一的写成$x' = x + tx_0$，$x \in G, t \in \mathbb{R}$的形式.

任取$c \in \mathbb{R}$, 令

$$F_1(x') = f(x) + tc,\ \ \forall x' = x + tx_0 \in G',$$

容易验证F_1是G'上的线性泛函且$F_1(x) = f(x), x \in G$, 所以F_1是f从G到G'上的延拓.

下面我们来选择合适的c, 以使$F_1(x') \leq p(x'), \forall x' \in G'$.

对任意的$x, y \in G$, 由

$$f(x)+f(y)=f(x+y) \le p(x+y) \le p(x-x_0)+p(x_0+y)$$

知

$$f(x)-p(x-x_0) \le p(x_0+y)-f(y).$$

进而存在c，满足

$$\sup_{x\in G}[f(x)-p(x-x_0)] \le c \le \inf_{y\in G}[p(x_0+y)-f(y)].$$

考虑满足上述要求的c所对应的线性泛函F_1.

若$x'=x+tx_0, t>0$, 在关系式$p(x_0+y)-f(y)\ge c, \forall y\in G$中, 用$t^{-1}x$替代$y$, 则可得$p(x_0+t^{-1}x)-f(t^{-1}x)\ge c$, 从而$p(x+tx_0)\ge f(x)+tc$,

$$F_1(x')=f(x)+tc \le p(x+tx_0)=p(x').$$

若$x'=x+tx_0, t<0$, 在关系式$f(x)-p(x-x_0)]\le c, \forall x\in G$中, 用$-t^{-1}x$替代$x$, 类似可得

$$F_1(x')\le p(x').$$

若$t=0$, 显然$F_1(x')=f(x)\le p(x)=p(x')$. 可见$F_1$是$f$的从$G$到$G'$上的满足结论要求的延拓.

考察实线性泛函g, 其定义域记为$\mathscr{D}(g)$. 如果$G\subset \mathscr{D}(g)$, 且

$$g(x)=f(x), x\in G; \quad g(x)\le p(x), x\in \mathscr{D}(g),$$

则称g是f的延拓.

记f的所有延拓的集合为$\mathfrak{R}$, 规定$\mathfrak{R}$中的序为：若$g_1, g_2\in\mathfrak{R}$, 且$\mathscr{D}(g_1)\subset\mathscr{D}(g_2)$, $g_1(x)=g_2(x)$, 当$x\in\mathscr{D}(g_1)$, 则$g_1\prec g_2$. 于是$\mathfrak{R}$是非空的半序集.

对于$\mathfrak{R}$的任何全序子集$\mathfrak{R}_o$, 可以作出实线性泛函h, 使得

$$\mathscr{D}(h)=\bigcup_{g\in\mathfrak{R}_o}\mathscr{D}(g),$$

$$h(x)=g(x),\ x\in\mathscr{D}(g), g\in\mathfrak{R}_o.$$

则$h\in\mathfrak{R}$, 且对一切的$g\in\mathfrak{R}_o$, 都有$g\prec h$. 也就是说h是$\mathfrak{R}_o$的上界.

根据Zorn引理, $\mathfrak{N}$中有极大元F. 泛函F就是满足要求的延拓. 为此, 只须证明$\mathscr{D}(F)=X$即可.

如果$\mathscr{D}(F)\neq X$, 类似于本定理的前半部分的证明, F还可以再延拓, 与F的极大性相矛盾. ∎

现在我们来考虑复空间上线性泛函的延拓，它是在上面的定理出现十多年以后才得到的一个结果.

先介绍一个事实：

若f是复线性空间X上的复线性泛函, u是f的实部, 则u是X上的实线性泛函, 且有$f(x)=u(x)-iu(ix), x\in X$. 也就是说f可由其实部唯一确定.

反过来, 如果u是复线性空间X上的实线性泛函, 则由关系式$f(x)=u(x)-iu(ix), x\in X$所定义的函数f是X上的复线性泛函.

定理3.3.5. 设X是复线性空间, G是X的线性子空间, f是G上的线性泛函. 如果有X上的实值泛函p, 使得

(1) $p(x+y)\leq p(x)+p(y),\ \ x,y\in X,$

(2) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x),\ \ x\in X,\ \alpha\in\mathbb{C},$

(3) $|f(x)|\leq p(x),\ \ x\in G.$

则存在X上的线性泛函F, 满足：

(1) $\quad F(x)=f(x),\ \ x\in G;$

(2) $\quad |F(x)|\leq p(x),\ \ x\in X.$

证明 设$f(x)$的实部为$f_1(x)$, 则有$f(x)=f_1(x)-if_1(ix), x\in G$.

因为复线性空间也可以看成实线性空间, 故f_1可以看成是实线性子空间G上的实线性泛函, 而且

$$f_1(x)\leq|f(x)|\leq p(x),\ x\in G.$$

由定理3.3.4, f_1可以延拓为X上的实线性泛函F_1, 且

$$F_1(x)=f_1(x),\ x\in G,$$

$$F_1(x)\leq p(x),\ x\in X.$$

令$F(x)=F_1(x)-iF_1(ix),\ x\in X$, 则$F(x)$是复线性空间$X$上的线性泛函.

当$x \in G$, 也有$ix \in G$, 从而

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix) = f_1(x) - if_1(ix) = f(x).$$

设$F(x) = re^{i\theta}$,则$F(e^{-i\theta}x)$是实数, 故

$$|F(x)| = |F(e^{-i\theta}x)| = |F_1(e^{-i\theta}x)| \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

F即为所求. ∎

定理3.3.2的证明

令$p(x) = \|f\|_G\|x\|, x \in X$. 不难验证$f, p$满足定理3.3.5的条件, 于是存在$X$上的线性泛函$F$, 使

$$F(x) = f(x), \text{当} x \in G,$$

且

$$|F(x)| \leq p(x) = \|f\|_G\|x\|, x \in X.$$

因此F是X上的有界线性泛函, 而且$\|F\| \leq \|f\|_G$. 而F是f的延拓, 所以$\|F\| \geq \|f\|_G$. 故$\|F\| = \|f\|_G$. ∎

注记3.3.6. 上面定理中的延拓方式不是唯一的.

例3.3.7. 设$X = \mathbb{R}^2$, 即X是点$x = (x_1, x_2)$的全体, $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. 又设$G = \{(x_1, 0)\}$, f是定义在G上的泛函：$f\{(x_1, 0)\} = x_1$, 显然f是G上的连续线性泛函, 而且

$$|f\{(x_1, 0)\}| = |x_1| = \|(x_1, 0)\|,$$

即$\|f\|_G = 1$. 然而, 对任意的$\beta \in \mathbb{R}$, X上的连续线性泛函$F\{(x_1, x_2)\} = x_1 + \beta x_2$都是$f$的延拓. 由于

$$|F\{(x_1, x_2)\}| = |x_1 + \beta x_2| \leq \max(1, |\beta|)\|(x_1, x_2)\|$$

所以, 只要$|\beta| < 1$, F都是f的保范延拓.

下面我们就可以利用Hahn-Banach定理来证明一些满足特殊要求的有界线性泛函的存在性定理.

设X是赋范线性空间, G是X的线性子空间, $x_0 \in X$. 设f是X上的连续线性泛函, 而且在G上为0, 那么必有

$$|f(x_0)| \leq \|f\|\rho(x_0, G) \tag{3.3.1}$$

这里$\rho(x_0, G) = \inf\limits_{y \in G} \|x_0 - y\|$是$x_0$和子空间$G$的距离.

事实上, 取序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$, 使得$\|x_n - x_0\| \to \rho(x_0, G)$, 那么

$$|f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\|\|x_n - x_0\| \to \|f\|\rho(x_0, G).$$

反之, 我们的问题就是：是否存在不恒为零的连续线性泛函f, 在G上为零, 而且使得(3.3.1)式中的等号成立？这个问题的答案也是肯定的.

定理3.3.8. 设X是赋范线性空间, G是X的线性子空间, $x_0 \in X$, 而且$d = \rho(x_0, G) > 0$. 那么必存在X上的连续线性泛函满足如下条件：

(1) 当$x \in G$时, $f(x) = 0$;

(2) $f(x_0) = d$;

(3) $\|f\| = 1$.

证明 考虑由G及x_0生成的子空间A. 由于$x_0 \overline{\in} G$, 所以A中任一元素x能唯一的表示成

$$x = x' + tx_0, \quad x' \in G.$$

定义

$$g(x) = td,$$

那么g是A上的线性泛函, 而且$g(x_0) = d$. 又当$x \in G$时, $g(x) = 0$. 所以g满足定理中的(1), (2). 由于

$$\|x\| = \|x' + tx_0\| = |t|\left\|x_0 + \frac{x'}{t}\right\| \geq |t|\rho(x_0, G) = |t|d = |g(x)|,$$

所以g是A上的连续泛函, 且$\|g\|_A \leq 1$.

根据Hahn-Banach定理, 必有X上的连续线性泛函f, 它是g的延拓, 而且$\|f\| = \|g\|_A$. 由于f是g的延拓, 所以f也满足定理的(1), (2). 再由(3.3.1), $\|f\| \geq 1$. 从$\|g\|_A \leq 1$便得到$\|f\| = 1$. ∎

本定理有两个非常重要的推论.

推论3.3.9. 设X是赋范线性空间, 对任何$0 \neq x_0 \in X$, 必存在X上的连续线性泛函f满足:

(1) $f(x_0) = \|x_0\|$;

(2) $\|f\| = 1$.

证明 在定理3.3.8中取$G = \{0\}$即可. ∎

推论3.3.9表明, 在任意的非零的赋范线性空间上, 必存在足够多的非零的连续线性泛函. 而对于$x \in X$, 如果对于所有的$f \in X'$, 都有$f(x) = 0$, 则一定有$x = 0$. 这一点通过下面的推论3.3.10也可以很容易的看出. 所以这两个推论也给我们提供了判定X中元是否为0元的方法.

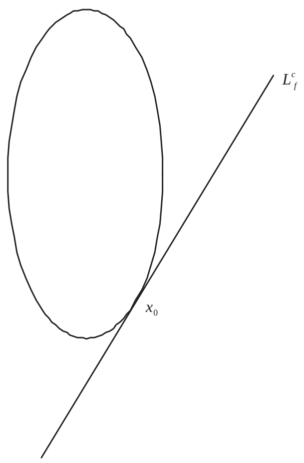
推论3.3.9还有如下的几何意义:

设X是赋范线性空间, 对任意的$f \in X'$, 集合

$$L_f^c = \{x \in X | f(x) = c\}, \quad c\text{是实数}$$

称为X中的超平面.

设$\Omega \subset X$, 如果对于任何的$x \in \Omega$, 有$f(x) \leq c$(或$f(x) \geq c$), 则称Ω位于L_f^c的一侧; 如果进一步有$x_0 \in \Omega \cap L_f^c$, 就说超平面$L_f^c$在$x_0$处支撑着$\Omega$. (如图)



如果Ω是X中的球$\{x | \|x\| \leq r\}$, 推论3.3.9就是说: 在球面$\|x\| = r$上的每一点x_0处, 必存在一个在x_0处支撑着Ω的超平面L_f^c. 这是因为, 当$x \in \Omega$时, $f(x) \leq \|f\|\|x\| \leq r$, 而且$f(x_0) = \|x_0\| = r$.

推论3.3.10. 设X是赋范线性空间, 对任何$x_0 \in X$, 总有

$$\|x_0\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\|=1}} |f(x_0)|.$$

证明 当$f \in X'$, 且$\|f\| = 1$时, 显然$|f(x_0)| \le \|f\|\|x_0\|$, 可得

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\|=1}} |f(x_0)| \le \|x_0\|.$$

另一方面, 根据推论3.3.9, 必有$f \in X'$, $\|f\| = 1$, 使得$f(x_0) = \|x_0\|$. 所以

$$\sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\|=1}} |f(x_0)| \ge \|x_0\|.$$

∎

当然, Hahn-Banach定理的应用远不止这些, 后面的章节中, 我们还会进行讨论.

§3.3.2 逆算子定理

设X, Y是赋范线性空间, $T: X \to Y$是线性算子. 若T是单的, 则T^{-1}存在, 而且易证$T^{-1}: \mathscr{R}(T) \to X$也是线性算子. 此时, 对于每个$y \in \mathscr{R}(T)$, 算子方程$Tx = y$有解存在, $x = T^{-1}(y)$. 但一个自然的问题就是随着y的微小变动, x是否也仅有微小的变化? 这是微分方程理论中经常要考虑的适定问题. 这些问题的解决依赖的是T^{-1}的有界性(或连续性).

如果X, Y是赋范线性空间, $T: X \to Y$是有界线性算子, T^{-1}存在, $\mathscr{R}(T) = Y$, 甚至于再要求X是Banach空间, 也不能保证T^{-1}的有界性.

例3.3.11. 设T是定义在$C[0,1]$上的积分算子:

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(s)ds, \quad x \in C[0,1],$$

Y是$C[0,1]$中具有连续导函数$y'(t)$, 而且$y(0) = 0$的函数$y(t)$的全体. 它按照$C[0,1]$中的范数成为一个赋范线性空间. 此时T是Banach空间$C[0,1]$到Y上的有界线性算子, 是单的, 满的. 但是$(T^{-1}y)(t) = y'(t)$就是例3.2.8中的算子, 我们已证明它是无界的.

但是, 如果进一步要求Y完备的话, 我们就可以得到非常重要的Banach逆算子定理. 但在证明该定理时, 需要用到开映射定理, 我们将会看到, 当T是单的线性算子时, T是开映射等价于T^{-1}有界.

定义3.3.12. 设X,Y是赋范线性空间, $T:\ X\to Y$是线性算子, 若T将X中的任何开集都映成了$\mathscr{R}(T)$中的开集, 称T为开映射.

定理3.3.13. 设X是Banach空间, Y是赋范线性空间, 若$T\in L(X,Y)$并且$\mathscr{R}(T)$是Y中的第二纲集, 则T必是开映射并且$\mathscr{R}(T)=Y$.

定理的证明可以参考文献[5], $P69-71$.

根据Baire纲定理, Banach空间必是第二纲集, 所以很容易可以看出从Banach空间到Banach空间上的有界线性算子一定是开算子.

定理3.3.14. (Banach逆算子定理) 设X,Y都是Banach空间, $T\in L(X,Y)$, 如果T是双射, 则T^{-1}是有界线性算子.

证明 记$S_X(0,1)=\{x\in X,\|x\|<1\}$, 由定理3.3.13可知, $TS_X(0,1)$是Y中的开集, 又因为$0\in TS_X(0,1)$, 故存在$\delta>0$, 使得$S_Y(0,\delta)\subset TS_X(0,1)$.

对任何$u\in S_Y(0,\delta)$, 存在$x\in S_X(0,1)$ 使$u=Tx$, 即$T^{-1}(u)=x\in S_X(0,1)$. 所以当$\|u\|<\delta$时, $\|T^{-1}(u)\|<1$.

对任意的非零的$y\in Y$, 令$u=\frac{\delta}{2\|y\|}y$, $\|u\|=\frac{\delta}{2}<\delta$, 故有

$$1>\|T^{-1}(u)\|=\|T^{-1}(\frac{\delta}{2\|y\|}y)\|=\|\frac{\delta}{2\|y\|}T^{-1}(y)\|=\frac{\delta}{2\|y\|}\|T^{-1}(y)\|,$$

即

$$\|T^{-1}(y)\|<\frac{2}{\delta}\|y\|=M\|y\|,\quad M=\frac{2}{\delta},$$

故T^{-1}是有界线性算子. ∎

此处, 我们来看一下逆算子定理在范数等价性方面的应用.

定理3.3.15. 设在同一线性空间X上赋以两个范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$, 它们都使得X成为Banach空间, 如果$\|\cdot\|_1$强于$\|\cdot\|_2$, 则$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价.

证明 定义算子$T:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$ 为$Tx=x$, 容易验证T是Banach空间$(X,\|\cdot\|_1)$到$(X,\|\cdot\|_2)$上的有界线性算子. T是双射也易证明, 所以由Banach逆算子定理可知T^{-1}是有界的, 即存在正数c, 使得$\|x\|_1\le c\|x\|_2$. 所以$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价. ∎

§3.3.3 闭图像定理

设X,Y是赋范线性空间, 则

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|,\quad \forall x\in X,y\in Y,$$

是乘积空间$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$上的范数. 并且$X\times Y$是Banach空间当且仅当$X$和$Y$均是Banach空间([5], $P47$).

设$\mathscr{D}(T)$是X的线性子空间(下同), $T:\mathscr{D}(T)\to Y$是一个线性算子, 称集合$G(T)=\{(x,Tx)\mid x\in\mathscr{D}(T)\}\subset X\times Y$是算子$T$的图像.

若T是线性算子, 则易证$G(T)$是$X\times Y$的线性子空间.

定义3.3.16. 若$G(T)$是$X\times Y$中的闭集, 则称T为闭算子.

下面给出闭算子的一个容易操作的等价条件, 也有学者将之直接作为闭算子的定义.

定理3.3.17. 设X,Y是赋范线性空间, $T:\ \mathscr{D}(T)\to Y$是一个线性算子, 则T为闭算子当且仅当对于$\mathscr{D}(T)$中的任一序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 若$x_n\to x, Tx_n\to y$, 则$y=Tx$.

证明 若T为闭算子, $x_n\in\mathscr{D}(T)$, $x_n\to x, Tx_n\to y$, 则

$$\|(x_n,Tx_n)-(x,y)\|=\|x_n-x\|+\|Tx_n-y\|\to 0$$

即在$G(T)$中$(x_n,Tx_n)\to(x,y)$, 由于$G(T)$闭, 所以$(x,y)\in G(T)$, 即$y=Tx$.

反之, 若$(x_n,Tx_n)\in G(T), (x_n,Tx_n)\to(x,y)\in X\times Y$, 由

$$\|x_n-x\|\le\|(x_n,Tx_n)-(x,y)\|\to 0,$$

$$\|Tx_n-y\|\le\|(x_n,Tx_n)-(x,y)\|\to 0,$$

所以$x_n\to x, Tx_n\to y$. 于是$y=Tx$, 即$(x,y)\in G(T)$, $G(T)$闭. ∎

定理3.3.18. 设X,Y是赋范线性空间, $T:\ \mathscr{D}(T)\to Y$是一个有界线性算子, 则T为闭算子.

证明 设$T:\ \mathscr{D}(T)\to Y$是一个有界线性算子, 若$x_n\in\mathscr{D}(T)$, $x_n\to x, Tx_n\to y$, 则由T连续, 知$Tx_n\to Tx$, 从而$Tx=y$, 所以T为闭算子. ∎

但闭线性算子是否一定是有界线性算子呢? 请看实例.

例3.3.19. 用$C^1[0,1]$表示$[0,1]$上连续可微函数的全体, 则$C^1[0,1]$是$C[0,1]$的线性子空间. 定义

$$\begin{aligned} T:\ C^1[0,1]&\to C[0,1]\\ x&\mapsto x' \end{aligned}$$

则T是无界线性算子, 但T是闭线性算子.

证明 T的无界性在例3.2.8中我们已经证明过, 现在证明它是闭算子.

设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C^1[0,1], x\in C[0,1], \|x_n-x\|\to 0$, 并且$\|Tx_n-y\|\to 0$, 即在$[0,1]$上, x_n一致收敛于x, Tx_n一致收敛于y. 由数学分析中求导和极限符号的交换定理,

$$\begin{aligned}(Tx)(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\lim_{n\to\infty} x_n(t)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}x_n(t) = \lim_{n\to\infty} Tx_n(t) = y(t).\end{aligned}$$

即$y=Tx$, 所以T是闭线性算子. ∎

上例表明, 在一般情况下, 线性算子的闭性不能蕴含有界性, 但在什么条件下, 闭算子就是有界线性算子呢?

定理3.3.20. (闭图像定理) 设X,Y是Banach空间, $T:\ X\to Y$是线性算子. 若T为闭算子, 则T有界.

证明 注意到$X\times Y$是Banach空间, $G(T)$是闭的, 所以$G(T)$是Banach空间. 定义

$$P:\ G(T)\to X, P(x,Tx)=x,\ \ \forall (x,Tx)\in G(T),$$

则P是线性的, 双射. 故P^{-1}存在, $P^{-1}x=(x,Tx),\forall x\in X$. 因为

$$\|P(x,Tx)\| = \|x\| \le \|(x,Tx)\|,$$

所以$\|P\|\le 1$. 由逆算子定理, P^{-1}有界, 从而

$$\|Tx\|\le\|x\|+\|Tx\| = \|(x,Tx)\| = \|P^{-1}x\|\le\|P^{-1}\|\|x\|,\forall x\in X,$$

即$\|T\|\le\|P^{-1}\|$, T有界. ∎

由于在本定理的证明中, 用到了逆算子定理, 所以本定理常被看成是逆算子定理的一个应用, 但本定理也有着很重要的应用价值.

要想明白闭图像定理的好处, 可考察线性算子T的下面三个描述:

(1) $x_n\to x_0$;

(2) $Tx_n\to y_0$;

(3) $Tx_0=y_0$.

通常证明T在x_0连续时, 需要从(1)推出(2)和(3)来. 现在由闭图像定理, 则只需从(1)和(2)推出(3)即可, 多了一个假设, 所以验证起来更容易. 这一点在用泛函方法研究偏微分问题时显得特别重要.

例3.3.21. 设无穷矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty, j\in\mathbb{N}$, 并对任何$x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)\in l^2$有

$$\begin{aligned} y=Ax=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots)&\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \\ =(y_1,y_2,\cdots,y_j,\cdots)\in l^2, \end{aligned}$$

其中$y_j=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ia_{ij}, j\in\mathbb{N}$. 证明$A$是有界线性算子.

证明 因为l^2是Banach空间, 所以由闭图像定理可知, 要证A有界, 只需证A闭即可. 即要证

$$\forall (x_n,Ax_n)\in G(A),(x_n,Ax_n)\to(x,y)\in l^2\times l^2\Rightarrow y=Ax.$$

记

$$\begin{aligned} &x_n=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_j^{(n)},\cdots),\\ &Ax_n=(y_1^{(n)},y_2^{(n)},\cdots,y_j^{(n)},\cdots),\\ &y=(y_1,y_2,\cdots,y_j,\cdots),\\ &Ax=(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\cdots,y_j^{(0)},\cdots). \end{aligned}$$

由$Ax_n\to y$知, 对每个j, 有

$$|y_j^{(n)}-y_j|\le\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j^{(n)}-y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

另一方面, 对每个j, 有

$$\begin{aligned}|y_j^{(n)}-y_j^{(0)}| &= |\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}(x_i^{(n)}-x_i)| \\ &\le \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}(x_i^{(n)}-x_i)| \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}-x_i|\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x_n-x\| \to 0, n\to\infty,\end{aligned}$$

所以$y_j=y_j^{(0)}$, 即$y=Ax$. 根据定理3.3.17可知A是闭线性算子. ∎

§3.3.4 一致有界定理

设$\{T_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是$X$上一族算子, 若$\forall x\in X$, $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda x\|<\infty$, 则称算子族$\{T_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$在$X$上点点有界. 若$\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda\|<\infty$, 则称算子族$\{T_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是一致有界的.

本小节讨论的一致有界定理, 又称为共鸣定理, 利用此定理可以由点点有界性导出一致有界性.

定理3.3.22. (一致有界定理) 设X是Banach空间, Y是赋范线性空间, $G=\{T_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是$L(X,Y)$中的一个算子族. 若

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda x\|<\infty,\ \forall x\in X,$$

则$\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|T_\lambda\|<\infty$.

关于本定理的证明, 有着不同的方法, 参见文献[10], $P202-204$; [3], $P96$; [23], $P214$.

例3.3.23. (Fourier级数发散问题) 在19世纪, 人们就已经提出了连续函数的Fourier级数的收敛问题. 许多人举例说明确有连续函数, 其Fourier级数在某一点发散. 现在, 我们用一致有界性定理来证明：存在一个实值的周期为2π的连续函数, 它的Fourier级数在$t=0$点发散.

证明 用$C_{2\pi}$表示周期为2π的实值连续函数的全体, 对$f\in C_{2\pi}$, 其相应的Fourier级数为

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

当$t = 0$时, 级数为$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其前$n+1$项部分和为

$$S_n(f) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt.$$

利用三角恒等式

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}, \quad t \neq 2m\pi,$$

就可将前$n+1$项部分和写成Dirichlet积分形式

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{3.3.2}$$

这是我们讨论Fourier级数收敛问题的出发点.

至此, 我们要证明的问题就转化为：存在$f \in C_{2\pi}$, 使数列$\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$发散. 如能证明数列$\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$无界即可.

由(3.3.2)可知, $S_n: C_{2\pi} \to \mathbb{R}$是线性泛函, 且

$$|S_n(f)| \leq \max_{-\pi\leq t\leq\pi}|f(t)| \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt \leq M_n\|f\|,$$

其中$M_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt$. 表明$S_n$是$C_{2\pi}$上的连续线性泛函. 实际上, 利用例3.2.12的结果, 可以进一步证明

$$\|S_n\| = M_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt.$$

由于$C_{2\pi}$是Banach空间, 为了证明存在$f \in C_{2\pi}$, 使数列$\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$无界, 根据一致有界定理, 只需证明$\{\|S_n\|\}_{n=1}^{\infty}$无界即可.

而

$$\begin{aligned}\|S_n\| &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt\\ &\geq \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)s}{\sin s}\right|ds\\ &\geq \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)s}{s}\right|ds\\ &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{|u|}du\\ &\to \infty, \quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

即$\{\|S_n\|\}_{n=1}^{\infty}$无界, 所以存在$f \in C_{2\pi}$, 使数列$\{S_n(f)\}$发散. ∎

§3.4 对偶空间与有界线性算子的共轭

赋范线性空间和它的对偶空间之间的相互依赖关系不只在泛函分析理论本身,而且在数学物理和近代偏微分方程中都起着重要的作用.

本节的主要内容就是介绍对偶空间的基本理论,常见空间上的连续线性泛函的表示,有界线性算子的共轭.

§3.4.1 对偶与二次对偶

设X是一个赋范线性空间,在§3.2.2节的最后,我们曾经定义过X的对偶空间X',并证明了X'是一个Banach空间.在§3.3.1节,我们也已讨论过与X'有关的一些重要结果.

下面的结果可以看成是定理3.3.8的一个应用.

定理3.4.1. 如果X'可分的,则X也可分.

证明 由X'可分,易知存在球面$\{x' \in X' \mid \|x'\| = 1\}$上的可数的稠密子集$\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$.根据$\|x'\|$的定义,存在一点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\|x_n\| = 1$,使得

$$|x'_n(x_n)| > \frac{3}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

设M是由点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$张成的X的闭子空间.如果$M \neq X$,根据定理3.3.8,存在$x' \in X'$满足$\|x'\| = 1$且$x'(x) = 0, x \in M$.因此$x'(x_n) = 0, n \in \mathbb{N}$,从而

$$\frac{3}{4} < |x'_n(x_n)| = |x'_n(x_n) - x'(x_n)| \leq \|x'_n - x'\|\|x_n\| = \|x'_n - x'\|.$$

这与$\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$是球面$\{x' \mid \|x'\| = 1\}$上的稠密子集矛盾!所以$M = X$.可见X可分. ∎

注记3.4.2. 定理3.4.1的逆命题不正确.比如l^1是可分的,在下一小节中我们将会看到$(l^1)'$等距同构于l^∞,而l^∞是不可分的.

设X是一个赋范线性空间,我们用X''表示X'的对偶空间,有时我们也称X''为X的二次对偶空间.常用x''表示X''中的一般元素.

给定$x \in X$,定义泛函

$$\begin{aligned} Jx:\ X' &\to \quad \mathbb{K} \\ x' &\mapsto x'(x) \end{aligned}$$

易见, Jx是线性的, 并且根据$|Jx(x')| = |x'(x)| \le \|x\|\|x'\|$知, Jx是X'上的连续线性泛函.

映射$J:\ X \to X''$, $x \mapsto Jx$被称为是X到X''中的典型映射(Canonical mapping).

根据$Jx(x') = x'(x)$可知J是一个线性映射, 而且根据(3.3.10)式

$$\|Jx\| = \sup_{\|x'\|=1} |Jx(x')| = \sup_{\|x'\|=1} |x'(x)| = \|x\|.$$

这表明J可以把X保范的嵌入到X''中.

定义3.4.3. 如果$J(X) = X''$, 则称X是自反空间.

根据定义知, 当X是自反空间时, J是X到X''上的一个等距同构. 而我们知道, 无论X是否是完备的, X''都是完备的, 所以如果X不完备, 则X不可能是自反的, 这是因为等距同构的两个空间, 如一个完备, 则另一个也必定完备. 但是, 我们应该认识到, 即便X是完备的, 且X等距同构于X'', 也不能保证X是自反的. 此时, X与X''之间的等距同构映射一定不是典型映射(R.C.James曾构造过一个实例, 文献[21]).

下面是几个有关自反性的结果:

定理3.4.4. 设X是Banach空间, 则X自反当且仅当X'自反.

证 令$J_0:\ X \to X''$与$J_1:\ X' \to X'''$是相应的典型映射.

设X自反, 任取$x''' \in X'''$, 令$x' = x''' \circ J_0$. 因为x'是连续线性映射的复合, 所以$x' \in X'$. 又因为$\mathscr{R}(J_0) = X''$, 那么对于任意$x'' \in X''$, 存在$x \in X$使得$x'' = J_0 x$, 于是有

$$J_1 x'(x'') = x''(x') = J_0 x(x') = x'(x) = (x''' \circ J_0)(x) = x'''(J_0 x) = x'''(x'').$$

由$x'' \in X''$的任意性可知$J_1 x' = x'''$, 所以$\mathscr{R}(J_1) = X'''$, X'自反.

相反的, 假设X'自反, 但是X不是自反的. 则根据X完备和J_0是等距的可知, $J_0(X)$是X''的一个真的闭子空间. 根据定理3.3.8, 存在$\omega''' \in X'''$, 使得$\|\omega'''\| = 1$, 且对任意的$x'' \in J_0(X)$有$\omega'''(x'') = 0$. 因为X'自反, 所以存在$v' \in X'$使得$\|v'\| = \|\omega'''\| = 1$且$J_1 v' = \omega'''$, 即

$$\omega'''(x'') = x''(v'), x'' \in X''.$$

此时, 对任意$x \in X$,

$$0 = \omega'''(J_0 x) = J_0 x(v') = v'(x),$$

表明v'是X上的零泛函, 与$\|v'\|=1$矛盾. 所以X自反. ∎

定理3.4.5. 如Banach空间X是自反的, 则X的任何闭子空间M也是自反的.

证明 我们只需证明任给$m_0''\in M''$, 存在$x_0\in M$, 使

$$m_0''(m')=m'(x_0),\forall m'\in M'.$$

对每个$x'\in X'$, 我们用x'_M来表示x'在M上的限制, 即

$$x'_M(x)=x'(x),\forall x\in M.$$

易见, $x'_M\in M'$.

对$m_0''\in M''$, 定义$x_0''(x')=m_0''(x'_M),\forall x'\in X'$, 因为

$$|x_0''(x')|=|m_0''(x'_M)|\le\|m_0''\|\|x'_M\|\le\|m_0''\|\|x'\|,\forall x'\in X',$$

所以x_0''是X'上的连续线性泛函. 由假设X是自反的, 故存在$x_0\in X$, 使得$x_0''(x')=x'(x_0),\ \forall x'\in X'$.

特别的, 当$x'_M=0$时, 我们有

$$x'(x_0)=x_0''(x')=m_0''(x'_M)=0,$$

根据定理3.3.8可知$x_0\in M$.

现在对每个$m'\in M'$, 设$x'\in X'$是m'的延拓, 使得$x'_M=m'$, 则

$$m_0''(m')=m_0''(x'_M)=x_0''(x')=x'(x_0)=m'(x_0).$$

∎

定理3.4.6. 任何有限维赋范线性空间都是自反的.

此定理的证明读者可自证, 或参阅文献[3], $P114$.

§3.4.2 常见空间上的连续线性泛函的表示

设X是一个赋范线性空间, 尽管我们知道X'一定是一个Banach空间, 但通常情况下, X'是非常抽象的, 很难进行进一步的研究. 如果我们能够建立X'和某一个比较具体的空间Y之间的一个等距同构, 则认为我们用具体的空间Y表示出了抽象空间X', 有时也称Y是X'的一个表示.

l^p**空间**$(1 \le p < \infty)$

对于任意的$p \in [1,\infty]$, 通过如下方式定义q

$$q = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{如}1 < p < \infty, \\ \infty, & \text{如}p = 1, \\ 1, & \text{如}p = \infty. \end{cases}$$

易见：当$1 < p < \infty$时, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有时我们也称$p, q$为一对共轭数.

设$1 \le p < \infty$, 考察l^p中的点列

$$e_1 = \{1,0,0,0,\cdots\},\ e_2 = \{0,1,0,0,\cdots\},\ e_3 = \{0,0,1,0,\cdots\},\cdots$$

则对任意的$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0\ (n \to \infty).$$

这表明级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$按$l^p$中范数收敛于$x$. 所以$x$可以唯一的表示成

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

设$x' \in (l^p)'$, 则有$x'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k x'(e_k)$. 此时, 寻求$x'$的表示, 实际上已转化为研究序列$x'(e_k), k \in \mathbb{N}$以及如何用之刻画$\|x'\|$的问题.

定理3.4.7. 设$1 \le p < \infty$, l^p上的任一有界线性泛函x'都可唯一的表示为

$$x'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k, \tag{3.4.1}$$

其中$c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$. 反之, 任意的$c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$, 按照(3.4.1)式, 都定义了$l^p$上的一个有界线性泛函.

x'与c的这种对应就是$(l^p)'$到l^q的等距同构. 且

$$\|x'\| = \|c\| = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{如}1 < p < \infty \\ \sup_k |c_k|, & \text{如}p = 1. \end{cases}$$

证明 设$x' \in (l^p)'$, 定义$c_k = x'(e_k)$, 则$x'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$.

首先考虑$1 < p < \infty$的情形. 对于给定的正整数n, 定义$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$, 如下：

$$\xi_k = \begin{cases} |c_k|^{q-1}\mathrm{sgn}\overline{c_k} & 如1 \le k \le n, \\ 0 & 如k > n. \end{cases}$$

可见, 当$1 \le k \le n$时, $c_k \xi_k = |c_k|^q = |\xi_k|^p$. 所以

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},\ x'(x) = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^q.$$

又因为$|x'(x)| \le \|x'\| \|x\|$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \le \|x'\| (\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q)^{\frac{1}{p}},$$

进而可见

$$\left((\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|x'\|.$$

令$n \to \infty$, 便有

$$\left((\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|x'\|,$$

这表明$c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$, 且$\|c\| \le \|x'\|$.

相反的, 假设给定$c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$, 此时, 可按照(3.4.1)式定义$x'$. 利用Hölder 不等式可得,

$$|x'(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|c\| \|x\|,$$

易见$x' \in (l^p)'$, $\|x'\| \le \|c\|$. 所以$\|x'\| = \|c\|$.

假设还有$c' = \{c'_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$使得$x'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \xi_k$. 则对任何的$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$, 总有

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k - c'_k) \xi_k = 0.$$

依次取$x = e_n, n \in \mathbb{N}$, 即得$c_n = c'_n, n \in \mathbb{N}$. 故$c = c'$, 唯一性得证.

当$p = 1$时, 对每个$n \in \mathbb{N}$, 定义$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其中

$$\xi_k = \begin{cases} \mathrm{sgn}\overline{c_n} & 如k = n, \\ 0 & 如k \ne n. \end{cases}$$

易见$\|x\| \leq 1$, 且$|c_n| = |x'(x)| \leq \|x'\|\|x\| \leq \|x'\|$. 所以$c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{\infty}$, $\|c\| \leq \|x'\|$. 剩下的讨论留给读者完成. ∎

注记3.4.8. 当$p = \infty$时, 定理3.4.7不成立. 如果定理成立的话, 则$(l^{\infty})'$等距同构于l^1. 而l^{∞}不可分, l^1可分, 与定理3.4.1矛盾!

$L^p[a,b]$**空间**$(1 \leq p < \infty)$

定理3.4.9. 设$1 \leq p < \infty$, 则对于$L^p[a,b]$上的任一有界线性泛函x', 都存在唯一的函数$y \in L^q[a,b]$, 使得

$$x'(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt, \ \ \forall x \in L^p[a,b].$$

反之, 对任意的$y \in L^q[a,b]$, 按照上式, 都定义了$L^p[a,b]$上的一个有界线性泛函.

x'与y的这种对应就是$(L^p[a,b])'$到$L^q[a,b]$的等距同构. 且

$$\|x'\| = \|y\| = \begin{cases} (\int_a^b |y(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}, \text{ 如} 1 < p < \infty, \\ \text{ess-}\sup\limits_{t \in [a,b]} |y(t)|, \text{ 如} p = 1. \end{cases}$$

该定理的证明请参考[3], $P109$.

作为定理3.4.9的一个应用, 我们来证明

定理3.4.10. $L^p[a,b](1 < p < \infty)$是自反的.

证明 只需证明任给$x_0'' \in (L^p[a,b])''$, 存在$x_0 \in L^p[a,b]$, 使得

$$x_0''(x') = x'(x_0), \ \ \forall x' \in (L^p[a,b])'.$$

任给$y \in L^q[a,b]$, 考察映射$T : L^q[a,b] \to (L^p[a,b])'$, $Ty = x'$. 这里

$$x'(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt, \ \forall x \in L^p[a,b].$$

根据定理3.4.9, T是等距同构. 设

$$x''(y) = x_0''(Ty), \forall y \in L^q[a,b],$$

易证$x'' \in (L^q[a,b])'$. 又由定理3.4.9知, 存在$x_0 \in L^p[a,b]$, 使

$$x''(y) = \int_a^b y(t)x_0(t)dt, \ \forall y \in L^q[a,b].$$

现在对任意的$x' \in (L^p[a,b])'$, 令$y = T^{-1}x'$, 则$y \in L^q[a,b]$, 且

$$x'(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt, \ \forall x \in L^p[a,b].$$

于是,

$$x_0''(x') = x_0''(Ty) = x''(y) = \int_a^b y(t)x_0(t)dt = x'(x_0).$$

∎

如果令定理3.4.7和定理3.4.9中的$p=2$, 则可见$q=2$. 表明l^2和$L^2[a,b]$都可以用自身来作为它的对偶空间的表示. 显然, 空间l^2和$L^2[a,b]$都是Hilbert空间, 所以有理由相信对于一般的Hilbert空间, 也会有同样的结果.

Hilbert空间

定理3.4.11. (Fréchet-Riesz) 设X是一个Hilbert空间, 则对于任意的$x' \in X'$, 都存在唯一的$y \in X$, 满足:

$$\|y\| = \|x'\|, \quad x'(x) = (x,y), \ \forall x \in X.$$

这里(x,y)表示x,y之内积.

证明 若$x' = 0$, 则可取$y = 0$. 所以不妨假定$x' \neq 0$, 根据$x' \in X'$可知, $M = \mathscr{N}(x') = \{x \mid x'(x) = 0\}$ 是X的闭子空间, 且$X = M \oplus M^{\perp}$. 因为$M \neq X$, 所以存在$0 \neq z \in M^{\perp}$. 不妨假设$x'(z) = 1$(总可以乘以一个适当的数得到满足要求的z). 对任意的$x \in X$, 有$x - x'(x)z \in M$. 利用$z \in M^{\perp}$, 可得$(x,z) = x'(x)(z,z)$. 令$y = \frac{z}{\|z\|^2}$, 则

$$x'(x) = (x,y), \ \ \forall x \in X.$$

一方面, 利用Cauchy-Schwarz不等式, 有

$$\|x'\| = \sup_{\|x\|=1} |(x,y)| \le \|y\|,$$

另一方面, 取$x_0 = \frac{y}{\|y\|}$, 有

$$\|x'\| \ge |x'(x_0)| = |(x_0,y)| = \|y\|.$$

所以$\|x'\| = \|y\|$.

假设存在两个量$y_1, y_2 \in X$使得定理成立, 则对任意的$x \in X$必有$(x, y_1) = (x, y_2)$成立. 如取$x = y_1 - y_2$, 则可得$\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, 所以$y_1 = y_2$, 唯一性得证. ∎

定理3.4.11通常被称为Hilbert空间中的Fréchet-Riesz定理, 是由M.Fréchet和F.Riesz针对$L^2(a, b)$空间, 在1907年同时、独立得到的. 该定理在研究Hilbert空间上的谱理论时有着非常重要的作用.

根据Fréchet-Riesz定理, 每个$x' \in X'$对应唯一的$y \in X$, 使得

$$x'(x) = (x, y),\ \forall x \in X.$$

而对于任意给定的$y \in X$, 如令$x'(x) = (x, y)$, $\forall x \in X$, 则容易验证$x' \in X'$. 于是, 我们可以定义如下映射:

$$\begin{aligned} \tau : X' &\to X \\ x' &\mapsto y \end{aligned}$$

这里, y是Fréchet-Riesz定理中由x'所唯一确定的X中的元素. 易见τ是X'到X上的一一、保范的映射. 又因为

$$\tau(\alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2') = \overline{\alpha_1}\tau(x_1') + \overline{\alpha_2}\tau(x_2'),\ \ x_1', x_2' \in X',\ \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

所以τ是共轭线性的.

如果在X'中定义内积

$$(x_1', x_2') = \overline{(y_1, y_2)},\ \ x_1', x_2' \in X',$$

其中$y_i (i = 1, 2)$是Fréchet-Riesz定理中$x_i' (i = 1, 2)$所对应的元素. 容易验证X'成为Hilbert空间. 于是$\tau : X' \to X$是两个Hilbert空间之间的共轭同构. 如果我们将共轭同构的两个Hilbert空间视为同一空间的话, 则有$X = X'$. Hilbert空间这种性质称为是自共轭性, 它是Hilbert空间的基本性质之一.

利用定理3.4.11, 我们可以证明"任意的Hilbert空间都是自反的". 读者可参考文献[3], $P115$.

关于空间$C[a, b]$上的连续线性泛函的表示, 读者可参考文献[3], $P106-108$.

§3.4.3 有界线性算子的共轭

线性算子的共轭和我们线性代数中所学的矩阵的转置是密切相关的, 是矩阵之转置的推广. 相对于有限维空间中的矩阵的转置而言, 线性算子的共轭摆脱了坐标系的束缚, 适用于无穷维赋范线性空间上的线性算子.

§3.4.3.1 基本性质

本小节, 我们只考虑Banach空间上的有界线性算子的共轭, 即算子的Banach共轭. 有关一般的赋范线性空间上的线性算子的共轭, 感兴趣的读者可参考[23], $P226$.

以下均设X,Y均是Banach空间, $T\in L(X,Y)$.

如$y'\in Y'$, 则作为连续线性映射T和y'的复合, 线性泛函$x\mapsto y'(Tx)$是连续的, 因此必属于X', 用$T'y'$记之.

由此得到如下的线性算子T':

$$\begin{aligned} T': Y' &\to X' \\ y' &\mapsto T'y' \end{aligned}$$

定义3.4.12. 由上面过程或通过关系式

$$(T'y')(x)=y'(Tx),\ x\in X, y'\in Y'$$

定义的算子T'就称为T的Banach共轭算子.

注记3.4.13. 正如我们上面指出的那样, 线性算子的共轭是矩阵之转置的推广, 对有限维空间中的算子T, 算子T'相应的矩阵就是T相应的矩阵的转置.

定理3.4.14. $T'\in L(Y',X')$, 且$\|T'\|=\|T\|$.

证明 首先, 由$\|T'y'\|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}|T'y'(x)|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}|y'(Tx)|\le\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|y'\|\|Tx\|=\|y'\|\|T\|$可得$T'\in L(Y',X')$, 且$\|T'\|\le\|T\|$.

其次, 设$\|x\|\le 1$, $\|y'\|=1$, 易见$|y'(Tx)|=|T'y'(x)|\le\|T'y'\|\le\|T'\|$. 由推论3.3.10可得$\|Tx\|\le\|T'\|$, 所以$\|T\|\le\|T'\|$.

综上可知$\|T'\|=\|T\|$. ∎

下面的定理罗列的是Banach共轭算子的一些代数性质, 证明都比较简单, 请读者自证.

定理3.4.15. 设X,Y,Z是Banach空间, $T\in L(X,Y)$则

(1) $(T+S)'=T'+S', S\in L(X,Y)$;

(2) $(\alpha T)'=\alpha T', \alpha\in\mathbb{K}$;

(3) $(ST)'=T'S', S\in L(Y,Z)$;

(4) 若T^{-1}存在, 且$T^{-1}\in L(Y,X)$, 则$(T')^{-1}$存在, 且$(T')^{-1}=(T^{-1})'$.

例3.4.16. 设$1<p<\infty$, p,q是一对共轭数, $K(t,s)$是定义在$[a,b]\times[a,b]$上的复值有界可测函数, 且

$$\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^q dtds<\infty,$$

则以$K(t,s)$为核的积分算子

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds,\ x\in L^p[a,b],$$

是从$L^p[a,b]$到$L^q[a,b]$的有界线性算子.

T的有界性, 可由Hölder不等式证之. 由Hölder不等式知

$$\begin{aligned}\int_a^b|(Tx)(t)|^q dt &= \int_a^b|\int_a^b K(t,s)x(s)ds|^q dt\\ &\le \int_a^b[\int_a^b|K(t,s)|^q ds][\int_a^b|x(s)|^p ds]^{\frac{q}{p}}dt\\ &\le \int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^q dsdt\|x\|^q,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= (\int_a^b|(Tx)(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}\\ &\le (\int_a^b\int_a^b|K(t,s)|^q dsdt)^{\frac{1}{q}}\|x\|,\end{aligned}$$

即得T的有界性.

由定理3.4.9, 每个$f\in(L^q[a,b])'$对应唯一的$y\in L^p[a,b]$, 使

$$f(z)=\int_a^b z(t)y(t)dt,\ z\in L^q[a,b].$$

故对任意的$x\in L^p[a,b]$,

$$\begin{aligned}(T'f)(x) &= f(Tx)\\ &= \int_a^b(Tx)(t)y(t)dt\\ &= \int_a^b[\int_a^b K(t,s)x(s)ds]y(t)dt\\ &= \int_a^b x(s)[\int_a^b K(t,s)y(t)dt]ds.\end{aligned}$$

如果将f与y等同, 则$T'f$可由$T'y$来替代, 即

$$(T'f)(x)=\int_a^b x(s)(T'y)(s)ds,\ x\in L^p[a,b].$$

比较如上两式, 根据唯一性可得

$$(T'y)(s)=\int_a^b K(t,s)y(t)dt,$$

即
$$(T'y)(t)=\int_a^b K(s,t)y(s)ds,\ y\in L^p[a,b].$$
此时T'的核$K(s,t)$与积分算子T的核$K(t,s)$相比较，恰好互换了s,t的位置.

§3.4.3.2 零化子，值域和零空间

设T是有限维空间中的算子(或矩阵), 在求解方程$Tx=y$时, 我们有

$$\begin{aligned}Tx=y\text{有解}\Leftrightarrow y\in\mathscr{R}(T)&=T\text{的列向量空间}\\&=T'\text{的行向量空间}\\&=\mathscr{N}(T')^{\perp},\end{aligned}$$

即方程$Tx=y$有解等价于$y\perp\mathscr{N}(T')$.

可见, 方程的求解会和算子的值域, 零空间, 正交补, 以及共轭算子有关. 因为在一般的Banach空间中, 不再有内积, 正交补的概念, 为此, 需要引入零化子的概念.

定义3.4.17. 设X是Banach空间,

(1) 如$M\subset X$, M的零化子M^o定义为$M^o=\{y'\in X': y'(x)=0, x\in M\}$;

(2) 如$G\subset X'$, G的零化子${}^oG$定义为${}^oG=\{x\in X: y'(x)=0, y'\in G\}$.

我们知道, 在Hilbert空间中, 如M是闭的, 则$(M^{\perp})^{\perp}=M$. 既然零化子是正交补的推广, 有没有类似的结果呢?

定理3.4.18. (1) 如果M是X的闭子空间, 则${}^o(M^o)=M$;

(2) 如果X是自反的, G是X'的闭子空间, 则$({}^oG)^o=G$.

关于T,T'以及它们的值域和零空间之间有如下定理.

定理3.4.19. 设T是Banach空间X上的有界线性算子, 则

(1) $(\overline{\mathscr{R}(T)})^o=\mathscr{N}(T')$;

(2) $\overline{\mathscr{R}(T)}={}^o(\mathscr{N}(T'))$;

(3) ${}^o(\overline{\mathscr{R}(T')})=\mathscr{N}(T)$;

(4) $\overline{\mathscr{R}(T')}\subset(\mathscr{N}(T))^o$, 进一步, 如$X$是自反的, 等号成立.

上面的定理都是关于值域的闭包的结果, 如想得到有关值域的结果, 则需要下面Banach给出的著名的闭值域定理.

定理3.4.20. 设X, Y均是Banach空间, $T \in L(X, Y)$, 则下面命题等价:

(1) $\mathscr{R}(T)$是闭集;

(2) $\mathscr{R}(T')$是闭集;

(3) $\mathscr{R}(T) = {}^{o}(\mathscr{N}(T'))$;

(4) $\mathscr{R}(T') = (\mathscr{N}(T))^{o}$.

如上三个定理的证明, 请参考[3], P123-126.

§3.5 有界线性算子的谱

尽管我们可以针对X为赋范线性空间, T为X上的线性算子这种最一般的情形来定义和研究线性算子的谱, 但如果想要深入讨论算子的谱理论的话, 则需要适当加强所给的条件, 所以在本节的讨论中, 我们总假定X是复的非零Banach空间, $T \in L(X)$, 并用I表示X上的恒等算子.

在线性代数中, 我们学过矩阵理论, 特别是极其重要的特征值理论, 特征值理论在求解齐次方程或者非齐次方程时有着非常重要的应用.

设X是n维空间, T是其上的有界线性算子, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则对于选定的一组基, T都可以用矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$来表示, 此时考虑齐次方程

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{3.5.1}$$

和非齐次方程

$$(\lambda I - A)x = y \tag{3.5.2}$$

的解.

当$\det(\lambda I - A) \neq 0$时, 方程(3.5.1)只有零解, 非齐次方程(3.5.2)有唯一解$x = (\lambda I - A)^{-1}y$.

如果$\det(\lambda I - A) = 0$, 方程(3.5.1)有非零解, 此时非齐次方程(3.5.2)并不能保证对任何的$y \in \mathbb{C}$都有解, 既便有, 也未必唯一! 使得$\det(\lambda I - A) = 0$的那些λ, 就是我们通常所说的矩阵的特征值.

由上可见, 对于方程(3.5.1), (3.5.2)的解的存在性、唯一性以及解关于初始条件的连续依赖性都和λ的不同取值有关.

当X是无限维Banach空间时, 方程$(\lambda I-T)x=y$的求解问题要复杂的多, 这时我们希望能将有限维情况下矩阵特征值的概念进行推广, 这就是我们本节要讨论的有界线性算子的谱问题. 当然, 我们这儿仅仅介绍谱的最基本的理论, 更详尽的内容可以参阅相关的文献.

§3.5.1 谱的定义及求解实例

当X是Banach空间时, 在§3.2.3节, 我们通过(3.2.5)式定义了$L(X)$上的乘法, 并且证明了$L(X)$是一个Banach代数. 下面定义中所说的算子可逆请参考§3.2.3节定义3.2.15.

定义3.5.1. 设$\lambda\in\mathbb{C}$, 如果$\lambda I-T$可逆, 则称λ是T的正则点, T的全体正则点的集合称为T的预解集, 记为$\rho(T)$. 当$\lambda\in\rho(T)$时, 相应的算子$(\lambda I-T)^{-1}$, 称为T的预解式, 通常简记为$R(\lambda,T)$. T的谱$\sigma(T)$则定义为$\mathbb{C}\backslash\rho(T)$.

进一步, 根据导致$\lambda I-T$不可逆的原因, 我们可以将$\sigma(T)$细分为三种不同的谱.

定义3.5.2. (1) 若$\mathscr{N}(\lambda I-T)\neq\{0\}$, 即$\lambda I-T$不是单的, 则称$\lambda$是$T$的特征值. 特征值的全体称为$T$的点谱, 简记为$\sigma_p(T)$. 满足$(\lambda I-T)x=0$的非零向量$x$称为$T$相应于$\lambda$的特征向量.

(2) 若$\mathscr{N}(\lambda I-T)=\{0\}$, $\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}=X$, 但$\mathscr{R}(\lambda I-T)\neq X$(此时$(\lambda I-T)^{-1}$不连续), 则称$\lambda$属于$T$的连续谱, 记作$\lambda\in\sigma_c(T)$.

(3) 若$\mathscr{N}(\lambda I-T)=\{0\}$, $\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}\neq X$, 则称$\lambda$属于$T$的剩余谱, 记作$\lambda\in\sigma_r(T)$.

根据定义易见, $\sigma_p(T),\sigma_c(T),\sigma_r(T)$彼此互不相交, 且

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T).$$

类似于有限维的情形, 算子的谱和算子方程的解的情况有着直接的关系, 算子方程解的存在性、唯一性以及解关于初始条件的连续依赖性都可以由谱来决定.

定理3.5.3. X是Banach空间, $T\in L(X)$

(1) $\lambda\in\rho(T)$当且仅当非齐次方程

$$(\lambda I-T)x=y \tag{3.5.3}$$

关于任何的$y\in X$的解存在、唯一. 此时存在常数$c>0$, 使得$\|x\|\leq c\|y\|$, 其中x是相应于y的方程(3.5.3)的解.

(2) $\lambda \in \sigma_p(T)$当且仅当齐次方程

$$(\lambda I - T)x = 0 \tag{3.5.4}$$

有非零解.

(3) $\lambda \in \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$当且仅当齐次方程(3.5.4)有唯一零解, 而相应的非齐次方程(3.5.3)不是对所有的$y \in X$都有解.

利用定义可以很容易的给出本定理的证明, 读者或参考文献[5], $P169-170$.

例3.5.4. 考虑$C[0,1]$上的算子

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(s)ds, \ \ x \in C[0,1],$$

其值域为

$$\mathscr{R}(T) = \{y \mid y\text{在}[0,1]\text{上有连续导数, 且}y(0)=0\}.$$

显然$1 \notin \overline{\mathscr{R}(T)}$, 从而$\overline{\mathscr{R}(T)} \neq C[0,1]$. 另外, 从$Tx=0$可见$x=0$, 故$T$是单射. 综合可见$0 \in \sigma_r(T)$.

对于算子T, 我们还可以证明$\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$, 根据稍后的定理3.5.15, 可得0是$T$的唯一谱点, 即$\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.

例3.5.5. 设T是如下定义的$L^2[0,1]$上的乘法算子

$$(Tx)(t) = tx(t), \ x \in L^2[0,1].$$

证明: $\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0,1]$.

证明 对任意$\lambda \notin [0,1]$, $(\lambda - t)^{-1} \in C[0,1]$, 而且乘以$(\lambda - t)^{-1}$的乘法算子恰好就是$(\lambda I - T)^{-1}$, 故$\lambda \in \rho(T)$.

当$\lambda \in [0,1]$时, 方程$[(\lambda I - T)x](t) = (\lambda - t)x(t) = 0, a.e.$于$[0,1]$显然只有零解$x(t) = 0, a.e.$于$[0,1]$, 即$\lambda I - T$是单射. 又因为$(\lambda - t)^{-1} \notin L^2[0,1]$, 故$x(t) \equiv 1 \notin \mathscr{R}(\lambda I - T)$, 即$\mathscr{R}(\lambda I - T) \neq L^2[0,1]$.

另一方面, 设$y \in L^2[0,1]$, 任给$\varepsilon > 0$, 由积分的绝对连续性, 存在$\delta > 0$, 使

$$\int_E |y(t)|^2 dt < \varepsilon^2, \text{当}E \subset [0,1]\text{且}m(E) < \delta.$$

记$E_\lambda=[\lambda-\frac{\delta}{3},\lambda+\frac{\delta}{3}]\cap[0,1]$, 则$m(E_\lambda)<\delta$, 令

$$x_\varepsilon(t)=\begin{cases}(\lambda-t)^{-1}y(t), & \text{当}t\in[0,1]\backslash E_\lambda,\\ 0, & \text{当}t\in E_\lambda.\end{cases}$$

易见, $x_\varepsilon\in L^2[0,1]$, 且

$$\begin{aligned}\|(\lambda I-T)x_\varepsilon-y\|^2&=\int_0^1|(\lambda-t)x_\varepsilon(t)-y(t)|^2dt\\&=\int_{E_\lambda}|y(t)|^2dt<\varepsilon^2,\end{aligned}$$

故$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}=L^2[0,1]$.

总之, $\lambda\in\sigma_c(T)$. 故$\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1]$. ∎

例3.5.6. 设$X=l^1$, 线性算子$T:X\to X$由下式给出:

$$Tx=y=(x_1,\frac{1}{2}x_2,\cdots,\frac{1}{n}x_n,\cdots),$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^1.$$

试讨论T的谱.

解 (1) 如果$\lambda\notin\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$, 则可以将算子方程$(\lambda I-T)x=y$写成

$$((\lambda-1)x_1,(\lambda-\frac{1}{2})x_2,\cdots,(\lambda-\frac{1}{n})x_n,\cdots)=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots),$$

比较可得

$$x_1=\frac{y_1}{\lambda-1},\ x_2=\frac{y_2}{\lambda-\frac{1}{2}},\ \cdots,\ x_n=\frac{y_n}{\lambda-\frac{1}{n}},\cdots$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{1}{\lambda-\frac{1}{n}}|=|\lambda|^{-1}>0$, 所以存在$M>0$, 使得$|\frac{1}{\lambda-\frac{1}{n}}|\le M$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\le M\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|,\ \forall y\in l^1.$$

可见, λ是T的正则点, 即$\lambda\in\rho(T)$.

(2)如果$\lambda\in\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$, 不妨设$\lambda=\frac{1}{n}$, 考虑齐次算子方程$(\frac{1}{n}I-T)x=0$. 同样可以将之写成向量形式

$$((\frac{1}{n}-1)x_1,\cdots,(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1})x_{n-1},0x_n,(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})x_{n+1},\cdots)=0,$$

可见无论x_n取何值, 只要其余的分量全取为0, 则相应的x都是方程的$(\frac{1}{n}I-T)x=0$的解. 所以$\mathscr{N}(\lambda I-T)\neq\{0\}$, 即得$\lambda\in\sigma_p(T)$.

(3)如果$\lambda=0$, 考虑方程$Tx=0$, 即$(x_1,\frac{1}{2}x_2,\cdots,\frac{1}{n}x_n,\cdots)=0$, 易见$\mathscr{N}(T)=\{0\}$, T^{-1}存在. 如取

$$y^{(n)}=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1},1,0,\cdots)\in\mathscr{R}(T)=\mathscr{D}(T^{-1}),\ n\in\mathbb{N}.$$

此时

$$T^{-1}y^{(n)}=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1},n,0,\cdots),\ n\in\mathbb{N}.$$

$\|y^{(n)}\|=1$, 但是$\|T^{-1}y^{(n)}\|=n\to\infty$.证得$T^{-1}$无界, 所以$\mathscr{R}(T)\neq l^1$.

现证$\overline{\mathscr{R}(T)}=l^1$. 易见向量

$$(1,0,\cdots,0,\cdots),(0,\frac{1}{2},0,\cdots),\cdots,(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1},\frac{1}{n},0,\cdots),\cdots$$

都属于$\mathscr{R}(T)$, 所以$\overline{\mathscr{R}(T)}=l^1$, 得$0\in\sigma_c(T)$.

综上可知,

$$\sigma_c(T)=\{0\},\ \ \sigma_p(T)=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\},\ \ \sigma_r(T)=\phi,$$

$$\rho(T)=\mathbb{C}\backslash\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}.$$

通过上面三个实例, 可以加深大家对于谱的概念的理解, 但通常情况下我们并没有计算算子谱的一般方法, 即使可计算, 有时也是非常困难的.但是, 我们有时也可以给出线性算子谱集的一些定性的、甚至是定量的描述.

§3.5.2 向量值解析函数

定义3.5.7. 设f是定义在复平面的开集Δ内, 取值于复Banach空间X中的向量值函数. 如果对任意的$\lambda_0\in\Delta$, 都存在一个$f'(\lambda_0)\in X$, 使得

$$\|\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}-f'(\lambda_0)\|\to 0,\ \ (\text{当}\lambda\to\lambda_0\text{时})$$

则称f在Δ上局部解析, 当Δ是连通集时(即区域), 称f在Δ上解析, $f'(\lambda_0)$称为f在点λ_0处的导数.

注记3.5.8. 当f在Δ上局部解析时, 对于任意的$x' \in X'$, 利用x'的连续性和线性性质, 可知

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{x'(f(\lambda))-x'(f(\lambda_0))}{\lambda-\lambda_0}=x'\left(\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right)=x'(f'(\lambda_0)),$$

可见, 复合函数$x'\circ f$在Δ上任一点都解析.

上述注记表明, 条件“f在Δ上局部解析”要强于条件“$x'\circ f$ $(\forall x'\in X')$在Δ上解析”. 但是一个非同寻常的结果是:

定理3.5.9. 设f是定义在复平面的开集Δ内, 取值于复Banach空间X中的向量值函数. 如果对于任意的$x'\in X'$, 都有$x'\circ f$在Δ上任一点解析, 则f在Δ上局部解析.

该定理的证明可以参考文献[3], P148或[23], P266.

我们也可以这样来描述定理3.5.9: 对任意的$\lambda_0\in\Delta$, 如果差商$\dfrac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}$弱收敛于$f'(\lambda_0)$, 则它也按照$X$中的范数收敛于$f'(\lambda_0)$. 这当然是一个非同寻常的结果, 因为在通常情况下, 序列的弱收敛无法导出按范数收敛.

所谓弱收敛是指: 设X是赋范线性空间, $x_n, x\in X$. 若对任何$x'\in X'$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}x'(x_n)=x'(x),$$

则称x_n弱收敛于x, 记为$x_n\xrightarrow{\omega}x$.

当X是Banach空间$L(X)$时, 相应的向量值局部解析函数又可称为算子值局部解析函数, 也有完全一致的结果.

在复变函数论中, 我们学过很多有关解析函数的经典结果. 如果在相应的结果和证明当中, 用范数代替原来的绝对值的话, 则可以很容易地将之移植到我们现在讨论的向量值函数上来. 比如Cauchy定理, Liouville定理, Taylor定理和其它一些重要定理对向量值函数仍然成立. 通常, 可以利用线性泛函将相应结果的证明退化到经典情形.

下面以最大模定理为例进行说明, 请读者仔细体会.

定理3.5.10. 设X是复Banach空间, 区域$\Delta\subseteq\mathbb{C}$, f是取值于X, 在Δ上解析的函数. 设$\|f(\lambda)\|$在Δ上不是常值函数, 则$\|f(\lambda)\|$不能在Δ内任何点取得最大值.

证明 (反证法) 假设定理不成立, 则存在$\lambda_0\in\Delta$, 使得对任意的$\lambda\in\Delta$, 有$\|f(\lambda)\|\le\|f(\lambda_0)\|$. 根据Hahn-Banach定理, 存在$x'\in X'$, 满足$\|x'\|=1$且$x'(f(\lambda_0))=\|f(\lambda_0)\|$.

则$x'\circ f$是Δ上的复值解析函数, 并且在λ_0点取到最大模. 经典的最大模原理告诉我们, 此时, $x'(f(\lambda))$在Δ上为常值函数, 而且其值就是$\|f(\lambda_0)\|$. 但是$|x'(f(\lambda))|\le\|f(\lambda)\|$, 而且在某些点$\|f(\lambda)\|<\|f(\lambda_0)\|$, 得到矛盾. ∎

§3.5.3 谱的基本性质

定理3.5.11. 预解集$\rho(T)$是开集, $\sigma(T)$是闭集.

为证明该定理, 先看如下的一个引理.

引理3.5.12. 设X是Banach空间, 如果$A\in GL(X)$, $B\in L(X)$, 且$\|A-B\|<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$, 则$B\in GL(X)$,

证明 因为$\|I-A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A-B)\| \le \|A^{-1}\|\|(A-B)\| < 1$, 所以由定理3.2.17可知$A^{-1}B$可逆. 又由$B=A(A^{-1}B)$可见$B^{-1}=(A^{-1}B)^{-1}A^{-1}\in GL(X)$. ∎

定理3.5.11的证明: 设$\lambda\in\rho(T)$, 则$\lambda I-T\in GL(X)$, 如果μ满足$|\lambda-\mu|<\frac{1}{\|(\lambda I-T)^{-1}\|}$, 易见

$$\|(\lambda I-T)-(\mu I-T)\| = |\lambda-\mu| < \frac{1}{\|(\lambda I-T)^{-1}\|},$$

所以, 根据引理3.5.12可知$\mu I-T\in GL(X)$, 即$\mu\in\rho(T)$, 所以预解集$\rho(T)$是开集, $\sigma(T)=\mathbb{C}\backslash\rho(T)$是闭集. ∎

同样根据定理3.2.17, 可知当$|\lambda|>\|T\|$时, $\lambda I-T=\lambda(I-\frac{T}{\lambda})$可逆, 即$\lambda\in\rho(T)$, 所以$\sigma(T)\subseteq\{\lambda:|\lambda|\le\|T\|\}$. 据此可得$\sigma(T)$是紧集.

那么$\sigma(T)$是否会为空集呢? 我们有

定理3.5.13. (Gelfand-Mazur)设X是Banach空间, 如果$T\in L(X)$, 则$\sigma(T)\neq\emptyset$.

证明 当$|\lambda|>\|T\|$时, 我们有

$$\|\lambda x-Tx\|\ge|\lambda|\|x\|-\|Tx\|\ge(|\lambda|-\|T\|)\|x\|.$$

可见$\|R(\lambda,T)\|=\|(\lambda I-T)^{-1}\|\le(|\lambda|-\|T\|)^{-1}$. 从而当$|\lambda|\to\infty$时, $\|R(\lambda,T)\|\to 0$.

如果$\sigma(T)=\emptyset$, 则对于任意的$\lambda_0\in\rho(T)=\mathbb{C}$, 我们知道, 只要$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|}$, 利用定理3.2.17和下式

$$\lambda I-T=(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-T)=(\lambda_0 I-T)(I+\frac{\lambda-\lambda_0}{R(\lambda_0,T)}),$$

就有

$$R(\lambda,T)=R(\lambda_0,T)[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n R(\lambda_0,T)^n(\lambda-\lambda_0)^n],$$

即$R(\lambda,T)$表示成了$\lambda-\lambda_0$的幂级数, 因此$R(\lambda,T)$在整个复平面$\mathbb{C}$上解析, 并且是有界的. 根据Liouville定理, 我们可知$R(\lambda,T)\equiv 0$. 这和$R(\lambda,T)$是可逆的矛盾. ∎

到目前为止, 我们知道$\sigma(T)$是非空紧集, 并且$\sigma(T)$包含在以原点为中心, $\|T\|$为半径的圆盘之内. 一个自然的问题就是：包含$\sigma(T)$的圆盘的最小半径是什么呢？从而导出如下定义：

定义3.5.14. 设X是Banach空间, $T\in L(X)$, 称

$$r(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$$

为算子T的谱半径.

定理3.5.15. (Gelfand) 设X是Banach空间, $T\in L(X)$, 则$r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

为了证明此定理, 我们先讨论一下多项式的谱映射定理.

设$p(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_0$是一个复系数多项式, 如果$T\in L(X)$, 根据我们定义过的(3.2.5)式, T的正整数次幂无歧义, 所以我们可以定义

$$p(T)=\alpha_nT^n+\alpha_{n-1}T^{n-1}+\cdots+\alpha_0I,$$

易见$p(T)\in L(X)$, 并且$p(\lambda)$和$p(T)$有一样的分解式. 即, 如果

$$P(\lambda)=\alpha_n(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)\cdots(\lambda-\beta_n),$$

则$P(T)=\alpha_n(T-\beta_1I)(T-\beta_2I)\cdots(T-\beta_nI)$.

引理3.5.16. (谱映射定理) 设X是Banach空间, $T\in L(X)$, p是一个复系数多项式, 则

$$\sigma(p(T))=\{p(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(T)\}.$$

有时, 形式上记为$p(\sigma(T))=\{p(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(T)\}$.

证明 当$n=0$时, $p(\lambda)=\alpha_0$, 所以$p(T)=\alpha_0I$. 因此$\sigma(p(T))=\sigma(\alpha_0I)=\{\alpha_0\}=p(\sigma(T))$.

当$n\geq 1$时, 记$p(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_0$, $\alpha_n\neq 0$.

若$\lambda\in\sigma(T)$, 利用分解式$p(\lambda)-p(\mu)=(\lambda-\mu)Q(\lambda,\mu)$, $Q(\lambda,\mu)$是μ的多项式, 可得$p(\lambda)I-p(T)=(\lambda I-T)Q(\lambda,T)\in L(X)$, 其中$Q(\lambda,T)$是$T$的多项式. 假若$p(\lambda)I-p(T)$可逆, 则

$$(\lambda I-T)Q(\lambda,T)(p(\lambda)I-p(T))^{-1}=I,$$

$$(p(\lambda)I-p(T))^{-1}(\lambda I-T)Q(\lambda,T)=I.$$

因为$\lambda I-T$与$Q(\lambda,T)$及$Q(\lambda,T)$与$(p(\lambda)I-p(T))^{-1}$ 都可交换, 从而得到

$$(\lambda I-T)[Q(\lambda,T)(p(\lambda)I-p(T))^{-1}]=[Q(\lambda,T)(p(\lambda)I-p(T))^{-1}](\lambda I-T)=I,$$

即$\lambda\in\rho(T)$, 矛盾.于是$p(\lambda)\in\sigma(p(T))$, $p(\sigma(T))\subseteq\sigma(p(T))$.

反之, 若$\mu\notin p(\sigma(T))$, 考虑多项式因式分解

$$\mu-p(\lambda)=\alpha_n(\mu_1-\lambda)\cdots(\mu_n-\lambda),$$

这里$\mu_1,\cdots,\mu_n\notin\sigma(T)$. 相应的,

$$\mu I-p(T)=\alpha_n(\mu_1 I-T)\cdots(\mu_n I-T),$$

由于$\mu_i I-T, i\in\mathbb{N}$皆有界可逆, 故$\mu I-p(T)$亦有界可逆, 即$\mu\notin\sigma(p(T))$, 因而$\sigma(p(T))\subseteq p(\sigma(T))$.

综上可知, $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$. ∎

注记3.5.17. 尽管针对解析函数, 我们也有相应的谱映射定理, 但限于篇幅, 不再赘述.

引理3.5.18. 设X是Banach空间, $T\in L(X)$, 则当$|\lambda|>r(T)$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1}$按算子范数收敛, 且

$$R(\lambda,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1}. \tag{3.5.5}$$

如果$|\lambda|<r(T)$, 则级数发散.

证明 因为当$|\lambda|>r(T)$时, $R(\lambda,T)$是解析的, 所以我们可以得到其唯一的收敛的Laurent展式. 而我们又知道当$|\lambda|>\|T\|$时, (3.5.5)式是成立的, 所以根据Laurent展式的唯一性知道, 式(3.5.5)就是$|\lambda|>r(T)$时的Laurent展式.

如果对于某一个满足条件$|\lambda_0| < r(T)$的λ_0, 级数收敛的话, 则根据幂级数收敛的一般性理论, 可知当$|\lambda| > |\lambda_0|$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}T^{n-1}$收敛, 当然会包含某些$\lambda \in \sigma(T)$. 而我们又知道当$\lambda \in \sigma(T)$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}T^{n-1}$不可能收敛. 得到矛盾. ∎

定理3.5.15的证明：([23], p279或[4], p247)

一方面, 根据引理3.5.16, $\sigma(T^n) = \{\lambda^n, \lambda \in \sigma(T)\}$, 所以$r(T^n) = [r(T)]^n$. 而$r(T^n) \leq \|T^n\|$, 所以$r(T) \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, 进而

$$r(T) \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

另一方面, 我们可以将引理3.5.18中的式(3.5.5)看成是关于λ^{-1}的幂级数, 其收敛半径是$r(T)$.

因为$\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n}T^{n-1}\| = \|\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}T^n\| \leq |\lambda^{-1}|\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n|\lambda^{-1}|^n$, 根据幂级数收敛的哈达玛公式, 可知

$$r(T) = \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

所以,

$$r(T) \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r(T).$$

即得$r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

如下两例可看成是定理3.5.15的应用.

例3.5.19. 设l^1到l^1上的线性算子T由如下的无穷阶矩阵所定义

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

易验证$T \in L(l^1)$. 对于$L(l^1)$中的元素$A = (\alpha_{ij})$，可以证明

$$\|A\| = \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|.$$

则通过直接计算可得$\|T^n\| = \frac{1}{n!}$, 所以$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$, 进而得$\sigma(T) = \{0\}$.

例3.5.20. 讨论Volterra方程

$$\lambda x(t) - \int_a^t K(t,s)x(s)ds = v(t), \ \ t \in [a,b]$$

的解的存在性和唯一性, 其中$x, v \in X = C[a,b], \lambda \in \mathbb{C}, K(t,s)$在矩形$[a,b] \times [a,b]$上连续.

解 定义算子$T: X \to X$,

$$Tx(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds \ \ t \in [a,b],$$

则原方程可以写成

$$(\lambda I - T)x = v.$$

因为

$$\|Tx\| = \max_{t\in[a,b]} |Tx(t)| = \max_{t\in[a,b]} |\int_a^t K(t,s)x(s)ds| \leq (b-a)M\|x\|,$$

其中$M = \max\limits_{a\leq t,s\leq b} |K(t,s)|$, 所以$T \in L(X)$.

可以验证$T^n : X \to X$具有如下形式：

$$T^n x(t) = \int_a^t K_n(t,s)x(s)ds, \ \ t \in [a,b],$$

其中$K_n(t,s)$定义为

$$K_n(t,s) = \begin{cases} \int_a^t K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau, & a \leq s,t \leq b, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

应用归纳法可证

$$\int_a^t |K_n(t,s)|ds \leq \frac{M^n(t-a)^n}{n!}.$$

从而有

$$\|T^n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T^n x\| = \sup_{\|x\|=1} \max_{t\in[a,b]} |\int_a^t K_n(t,s)x(s)ds|$$

$$\leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |K_n(t,s)|ds \leq \frac{M^n(b-a)^n}{n!}.$$

根据定理3.5.15知

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M(b-a)}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = 0.$$

因此$\lambda=0$是算子T的唯一的谱点. 当$\lambda\neq 0$时, $\lambda I-T$可逆, 且有

$$(\lambda I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

所以原方程有唯一解

$$x=(\lambda I-T)^{-1}v=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}v.$$

§3.6 紧算子

§3.6.1 定义、实例及性质

在线性代数中, 我们曾学过有限维空间中算子(矩阵)的很多性质. 正如我们已经看到的那样, 无限维空间中的情形要复杂得多, 但也有一类算子能保持有限维情况下算子的大多数性质, 这就是我们本小节要学习的紧算子. 紧算子不但有其自身理论上的重要性, 在积分和微分方程等诸多领域也有着很广泛的应用.

定义3.6.1. 设X,Y是赋范线性空间, T是X到Y上的线性算子. 如对于任意的有界序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$, 序列$\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Y$都有收敛的子列, 则称$T$是紧算子(或全连续算子). 我们用$\mathscr{K}(X,Y)$表示$X$到$Y$上的全体紧算子构成的集合, $\mathscr{K}(X,X)$常简记为$\mathscr{K}(X)$.

注记3.6.2. (1) 定义中的条件等价于说T把X中的每个有界集都映成Y中的列紧集;

(2) 如果$T\in\mathscr{K}(X,Y)$, 则$T\in L(X,Y)$.

事实上, 如果T是无界的, 则对于任意的正整数$n\geq 1$, 都存在范数为1的向量x_n, 使得$\|Tx_n\|\geq n$. 易见序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有界, 利用$T\in\mathscr{K}(X,Y)$可知必存在收敛的子列$\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. 这和$\|Tx_{n_k}\|\geq n_k$矛盾.

所以有时在定义中我们会直接假设$T\in L(X,Y)$.

例3.6.3. 设$T\in L(X,Y)$, 若$\dim\mathscr{R}(T)<\infty$, 则称$T$是有限秩算子. 试证明有限秩算子一定是紧算子. 从而进一步可得当$\dim X<\infty$或$\dim Y<\infty$时, T是紧算子.

证明 由$T\in L(X,Y)$, 可知T映X中的有界集S为$\mathscr{R}(T)$中的有界集$T(S)$. 利用$\dim\mathscr{R}(T)<\infty$, 得$T(S)$列紧, 于是$T\in\mathscr{K}(X,Y)$.

当$\dim X < \infty$时, 易见$\dim \mathscr{R}(T) \le \dim X < \infty$. 当$\dim Y < \infty$时, 易见$\dim \mathscr{R}(T) \le \dim Y < \infty$. 利用上面的证明都可知$T \in \mathscr{K}(X,Y)$. ∎

例3.6.4. 设$K(s,t)$是$[0,1]\times[0,1]$上的连续函数, 则第一型Fredholm积分算子

$$(Tx)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt,\ x \in C[0,1]$$

是$C[0,1]$上的紧算子.

证明 设$M = \sup\limits_{0\le s,t\le 1} |K(s,t)|$, $S = \{x \mid \|x\| \le B\}$是$X$中的有界集, 则

$$|(Tx)(s)| \le \int_0^1 |K(s,t)x(t)|dt \le MB,$$

表明$T(S)$是一致有界的.

另外, 利用$K(s,t)$的一致连续性, 对任给的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使

$$|K(s_1,t) - K(s_2,t)| < \varepsilon,\ |s_1 - s_2| < \delta,\ 0 \le t \le 1.$$

从而

$$|(Tx)(s_1) - (Tx)(s_2)| \le \int_0^1 |K(s_1,t) - K(s_2,t)||x(t)|dt \le B\varepsilon,$$

表明$T(S)$的等度连续性.

利用Arzelà-Ascoli定理, 可知$T(S)$是列紧集, 所以T是紧算子. ∎

例3.6.5. 如果X是一个无限维赋范线性空间, 则X上的恒等算子I一定不是紧算子. 进一步可得如$T \in \mathscr{K}(X)$, 则T不可逆.

证明 如果I是紧算子, 则可得X中的单位球是列紧集, 表明$\dim X < \infty$. 矛盾!

如T可逆, 则利用如下的定理3.6.6可得$I = T^{-1}T \in \mathscr{K}(X)$, 与上一步结果矛盾. ∎

下面是紧算子的一些简单的代数性质

定理3.6.6. 设X, Y, Z是赋范线性空间,

(1) 设$S, T \in \mathscr{K}(X,Y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 则$\alpha S + \beta T \in \mathscr{K}(X,Y)$. 即$\mathscr{K}(X,Y)$是$L(X,Y)$的一个线性子空间;

(2) 设$S \in L(X,Y)$, $T \in L(Y,Z)$, 如果S, T至少有一个是紧算子, 则$TS \in \mathscr{K}(X,Z)$.

证明 (1) 对于任意的有界序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 利用$S \in \mathscr{K}(X,Y)$, 知存在子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使$\{Sx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛. 然后, 再利用$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$的有界性和$T$是紧算子, 可得存在$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$, 使得$\{Tx_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$收敛. 因此, 序列$\{\alpha Sx_{n_{k_l}} + \beta Tx_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$收敛, 所以$\alpha S + \beta T \in \mathscr{K}(X,Y)$.

(2) 对于任意的有界序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 如$S$紧, 则存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使$\{Sx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛. 因为$T \in L(Y,Z)$, 所以序列$\{TSx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛. 可得$TS \in \mathscr{K}(X,Z)$.

如$S \in L(X,Y)$非紧, 则序列$\{Sx_n\}_{n=1}^{\infty}$仍是有界的. 然后利用T是紧算子, 可知存在$\{Sx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列$\{Sx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得$\{TSx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛. 可得$TS \in \mathscr{K}(X,Z)$. ∎

进一步, 我们有

定理3.6.7. 设Y是Banach空间, 则$\mathscr{K}(X,Y)$是$L(X,Y)$的闭子空间.

证明 等价于证明“如$\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{K}(X,Y), \|T_n - T\| \to 0$ $(n \to \infty)$, 则$T \in \mathscr{K}(X,Y)$”. 下证之

对于任意的有界序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 由$T_1 \in \mathscr{K}(X,Y)$知, 存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列$\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$使得$\{T_1x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$收敛. 由$T_2 \in \mathscr{K}(X,Y)$知, 存在$\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$的子列$\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$使得$\{T_2x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$收敛. 如此继续下去, 得到一串子列

$$\begin{array}{c}
x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n},\ \cdots \\
x_{21},\ x_{22},\ \cdots,\ x_{2n},\ \cdots \\
\cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots \\
x_{k1},\ x_{k2},\ \cdots,\ x_{kn},\ \cdots \\
\cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots
\end{array}$$

此处, $\{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$是$\{x_{k-1n}\}_{n=1}^{\infty}$的子序列, 且$\{T_kx_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$收敛. 将对角线上的元素选出来, 得到$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$的子序列$\{x_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$, 使得对于一切$j \in \mathbb{N}$, $\{T_jx_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$收敛.

下证$\{Tx_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$收敛. 任给$\varepsilon > 0$.

首先, 利用$\{x_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$有界知, 存在$M > 0$, 使得对任意的$n \in \mathbb{N}$, $\|x_{nn}\| \le M$;

其次, 利用$\|T_n - T\| \to 0$知, 存在一个正整数K, 使得$\|T_K - T\| < \frac{\varepsilon}{3M}$;

最后, 利用$\{T_Kx_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$收敛知, 存在$N \in \mathbb{N}$, 使得当$n, m \ge N$时,

$$\|T_Kx_{nn} - T_Kx_{mm}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

所以, 对任意$n,m\geq N$,

$$\begin{aligned}\|Tx_{nn}-Tx_{mm}\| &\leq \|Tx_{nn}-T_Kx_{nn}\|+\|T_Kx_{nn}-T_Kx_{mm}\|+\|T_Kx_{mm}-Tx_{mm}\|\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

表明$\{Tx_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$是Cauchy列, 根据$Y$完备, 可知$\{Tx_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$收敛. ∎

该定理为我们提供了一个证明算子为紧算子的一个简单有效的方法. 在实际运用时, 紧算子列T_n通常会选为有限秩算子.

例3.6.8. 设$T\in L(l^2)$由$T\{a_n\}=\{n^{-1}a_n\}$所定义, 试证明$T\in \mathscr{K}(l^2)$.

证明 对任意的$k\in\mathbb{N}$, 通过下式定义T_k:

$$T_k\{a_n\}=\{b_n^k\},\ \ 其中\begin{cases} b_n^k=n^{-1}a_n,\ n\leq k,\\ b_n^k=0, \qquad\ \ n>k.\end{cases}$$

易见, $T_k\in L(l^2)$, 并且是有限秩的.

而对于任意的$a=(a_n)\in l^2$, 我们有

$$\|(T_k-T)a\|^2=\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^2}\leq\frac{1}{(k+1)^2}\sum_{n=k+1}^{\infty}|a_n|^2\leq\frac{1}{(k+1)^2}\|a\|^2.$$

因此,

$$\|T_k-T\|\leq\frac{1}{k+1},$$

所以$\|T_k-T\|\to 0\ (k\to\infty)$. 由定理3.6.7可知$T\in\mathscr{K}(l^2)$. ∎

例3.6.9. 设有满足$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty$的无穷阶矩阵$(a_{ij})$. 定义算子$T: l^2\to l^2$:

$$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j,\ i\in\mathbb{N},\ \ x=(x_n),\ \ Tx=y=(y_n)$$

试证$T\in\mathscr{K}(l^2)$.

证明 利用Hölder不等式, 容易估计出

$$\|T\|\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

所以$T \in L(l^2)$.

现在定义算子$T_k : l^2 \to l^2$为：其n阶主子式与上面矩阵的n阶主子式一样, 其余位置上的元素为0, 易见T_k是有限秩算子.

又由于

$$\|T_k - T\| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ (k \to \infty),$$

所以$T \in \mathscr{K}(l^2)$. ∎

利用这种方法证明一个算子是紧算子的例子还有很多, 可以参考文献[23], P295.

有限秩算子是一类非常简单的算子, 我们已经知道, 如果一个算子可以作为有限秩算子的极限, 则这个算子必将是紧算子. 反过来, 当Y是Hilbert空间时, 我们有

定理3.6.10. 设X是赋范线性空间, H是Hilbert空间, $T \in \mathscr{K}(X, H)$, 则一定存在$L(X, H)$中的有限秩算子列$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其极限是T.

证明请参考文献[16], P167.

实际上, 我们可以证明当Y是有Schauder基的Banach空间时, 上述定理的结论也成立. 但对于一般的可分Banach空间, 结论是否成立曾经是一个悬而未决的问题. 直到1973年数学家Enflo([18])举出反例, 说明结论不成立. 现在最简单的反例被认为是A.M.Davie构造的([23]).

如下有关紧算子的Banach共轭算子的紧性结果, 是由J.Schauder在1930年给出的：

定理3.6.11. 设X, Y是Banach空间, $T \in \mathscr{K}(X, Y)$, 则其Banach共轭算子$T' \in \mathscr{K}(Y', X')$.

证明请参考文献[3], P166.

§3.6.2 紧算子的谱理论

本小节中均假定设X是复Banach空间.

定理3.6.12. 设$T \in \mathscr{K}(X)$, $\lambda \ne 0$, 则$\dim \mathscr{N}(\lambda I - T) < \infty$, $\mathscr{R}(\lambda I - T)$是$X$的闭子空间.

证明 由$\lambda I - T \in L(X)$知$\mathscr{N}(\lambda I - T)$是$X$的闭子空间.

设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{N}(\lambda I - T)$, 且$\|x_n\| \le 1, n \in \mathbb{N}$. 利用$T \in \mathscr{K}(X)$, 可见存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得$\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛. 因为$(\lambda I - T)x_{n_k} = 0$, 所以$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda} T x_{n_k}$, 故$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛. 即空间$\mathscr{N}(\lambda I - T)$的单位球是列紧的, 从而证得$\dim \mathscr{N}(\lambda I - T) < \infty$.

由于$\dim \mathscr{N}(\lambda I - T) < \infty$, 所以存在$X$的闭子空间$\mathscr{M}$, 使得

$$X = \mathscr{N}(\lambda I - T) \oplus \mathscr{M}.$$

定义算子$S : \mathscr{M} \to X$如下

$$Sx = (\lambda I - T)x, \ \ x \in \mathscr{M}.$$

显然$S \in L(\mathscr{M}, X)$, 且$\mathscr{R}(\lambda I - T) = \mathscr{R}(S)$. 转化为证明$\mathscr{R}(S)$闭.

易见S是单射, 并且存在$\delta > 0$使得

$$\|Sx\| \geq \delta \|x\|, \ x \in \mathscr{M}.$$

若不然, 存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$, $\|Sx_n\| < n^{-1}\|x_n\|$. 不失一般性, 可设$\|x_n\| = 1$, 则$\|Sx_n\| < n^{-1}$, $Sx_n \to 0$. 因T是紧算子, 所以有子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $Tx_{n_k} \to y_0 \in X$. 但$Tx_{n_k} = \lambda x_{n_k} - Sx_{n_k}$, 故$\lambda x_{n_k} \to y_0$. 根据$\mathscr{M}$闭, 知$y_0 \in \mathscr{M}$.

一方面, 利用S的连续性,

$$Sy_0 = \lim_{k\to\infty} S(\lambda x_{n_k}) = \lambda \lim_{k\to\infty} S(x_{n_k}) = 0,$$

从而由S是单射可知, $y_0 = 0$.

另一方面,

$$\|y_0\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| > 0.$$

矛盾.

若$y_n = Sx_n \in \mathscr{R}(S)$, $y_n \to y$, 则

$$\|y_m - y_n\| = \|S(x_m - x_n)\| \geq \delta \|x_m - x_n\|.$$

所以$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathscr{M}$中的Cauchy列, $\mathscr{M}$闭, 故存在$x_0 \in \mathscr{M}$, $x_n \to x_0$. 因此

$$y = \lim_{n\to\infty} Sx_n = Sx_0 \in \mathscr{R}(S),$$

所以$\mathscr{R}(S)$闭, 从而$\mathscr{R}(\lambda I - T)$闭. ∎

引理3.6.13. 设$T \in L(X)$, 则对应于T的不同特征值的特征向量是线性无关的.

证明 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$T$的不同的特征值, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是相应的非零特征向量, 满足$Tx_i = \lambda_i x_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 若$x_1, x_2, \cdots, x_n$线性相关, 不失一般性, 可假设$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$.

一方面,

$$\begin{aligned}(\lambda_1 I - T)\cdots(\lambda_{n-1}I - T)x_n &= (\lambda_1 I - T)\cdots(\lambda_{n-1}x_n - \lambda_n x_n)\\ &= (\lambda_1 I - T)\cdots(\lambda_{n-2}I - T)x_n(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\\ &= \quad \cdots\cdots\\ &= (\lambda_1 - \lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_n\\ &\neq 0;\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(\lambda_1 I - T)\cdots(\lambda_{n-1}I - T)x_n &= (\lambda_1 I - T)\cdots(\lambda_{n-1}I - T)\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\lambda_1 I - T)\cdots(\lambda_{n-1}I - T)x_i\\ &= 0.\end{aligned}$$

矛盾! 所以对应于T的不同特征值的特征向量是线性无关的. ∎

引理3.6.14. 设$T \in \mathscr{K}(X)$, $\lambda \neq 0$, 若$\mathscr{N}(\lambda I - T) = \{0\}$, 则$\mathscr{R}(\lambda I - T) = X$.

证明 只需证$\lambda = 1$时成立即可.

假设$\mathscr{R}(I - T) \neq X$, 令

$$X_0 = X, X_n = (I - T)X_{n-1}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

则$X_0 \supsetneqq X_1$.

假设$X_{n-1} \supsetneqq X_n$, 则必有$X_n \supsetneqq X_{n+1}$.

如$X_n = X_{n+1} = (I-T)X_n$, 则对于任意的$x \in X_{n-1}$, $(I-T)x \in X_n$, 从而有$y \in X_n$, 使得$(I-T)x = (I-T)y$. 又因为$I-T$是单射, 所以$x = y \in X_n$, 与$X_{n-1} \supsetneqq X_n$矛盾. 根据数学归纳法有

$$X_0 \supsetneqq X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \cdots .$$

又因为$X_n = (I-T)^n X_0 = (I - C_n^1 T + \cdots + (-1)^n C_n^n T^n)X_0 = (I - B)X_0$, 其中$B = C_n^1 T - \cdots - (-1)^n C_n^n T^n$是紧算子, 所以由定理3.6.12可知$X_n$是闭的.

根据Riesz引理, 存在$x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$, 使得

$$\rho(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}, \ n \in \mathbb{N}.$$

对于任意的自然数$m > n$,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - [(x_n - Tx_n) - (x_m - Tx_m) + x_m]\| \geq \frac{1}{2},$$

这是因为$(x_n - Tx_n) - (x_m - Tx_m) + x_m \in X_{n+1}$. 从而$\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$不存在收敛的子列, 与$T \in \mathscr{K}(X)$矛盾! ∎

定理3.6.15. 设$T \in \mathscr{K}(X)$, 则

(1) 如$\lambda \neq 0$, 必有$\lambda \in \rho(T)$ 或者$\lambda \in \sigma_p(T)$；(Fredholm 择一定理)

(2) $\sigma(T)$是可数集, 0是唯一可能的聚点；

(3) 若$\dim X = \infty$, 则$0 \in \sigma(T)$;

(4) 对应于每个非零特征值的特征向量空间是有限维的.

证明 (1) 若$\lambda \notin \sigma_p(T)$, 则$\mathscr{N}(\lambda I - T) = \{0\}$, 根据引理3.6.14可知, $\mathscr{R}(\lambda I - T) = X$. 由Banach逆算子定理, $\lambda I - T$可逆, 所以$\lambda \in \rho(T)$.

(2) 先证明, 对于任意的$t > 0$, $\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(T), |\lambda| > t\}$是有限集.

若不然, 由(1)可知, 存在互不相同的一列$\lambda_n \in \sigma_p(T)$, $|\lambda_n| > t$. 设x_n是相应的非零特征向量, $Tx_n = \lambda_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$. 由引理3.6.13, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是线性无关的. 记$M_n = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$, 则$\dim M_n = n$. M_n是闭子空间, 并且$M_n \supsetneqq M_{n-1}$. 根据Riesz引理, 存在

$$y_n \in M_n,\ \|y_n\| = 1,\ \rho(y_n, M_{n-1}) \geq \frac{1}{2},\ (n = 2, 3, \cdots)).$$

不妨设$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n} x_i$, 则

$$\begin{aligned}\lambda_n y_n - Ty_n &= \alpha_{nn}(\lambda_n I - T)x_n + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,n}(\lambda_n I - T)x_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,n}(\lambda_n - \lambda_i)x_i \in M_{n-1}.\end{aligned}$$

记$\lambda_i y_i - Ty_i = z_{i-1}$ $(i = 2, 3, \cdots)$. 若$m > n$, 则$z_{n-1} \in M_{n-1} \subset M_{m-1}$, $y_n \in M_n \subset M_{m-1}$, 所以

$$\begin{aligned}\|Ty_m - Ty_n\| &= \|(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n) - (z_{m-1} - z_{n-1})\| \\ &= |\lambda_m| \|y_m - (\tfrac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n + \tfrac{z_{m-1}}{\lambda_m} - \tfrac{z_{n-1}}{\lambda_m})\| \\ &\geq |\lambda_m| \rho(y_m, M_{m-1}) \geq \tfrac{|t|}{2} > 0.\end{aligned}$$

与$T \in \mathscr{K}(X)$矛盾. 故对于任意的$t > 0$, $\{\lambda : \lambda \in \sigma(T), |\lambda| > t\}$是有限集. 所以$\sigma(T) = \{0\} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\lambda \mid \lambda \in \sigma(T), |\lambda| > \dfrac{1}{n}\}$是可数集, 0是唯一可能的聚点.

(3) 如$0 \in \rho(T)$, 则T可逆, 又因为$T \in \mathscr{K}(X)$, 所以$I = TT^{-1}$是紧算子, 说明X是有限维空间, 与所设条件矛盾!

(4) 若$\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$, λ对应的特征向量空间为$\mathscr{N}(\lambda I - T)$, 由定理3.6.12可见结论成立. ∎

Fredholm 择一定理是非常重要的, 相应于算子方程$(\lambda I - T)x = y$而言, 相当于要么此方程对任意的$y \in X$有唯一解, 要么相应的齐次方程$(\lambda I - T)x = 0$有非零解. 这和线性方程组的情况是一致的.

§3.7 自伴算子

本节中, H, K均为复的Hilbert空间, 并且其上的内积均用$(\cdot, \cdot)$表示.

§3.7.1 算子的伴随

定理3.7.1. 设$T \in L(H, K)$, 则存在唯一的$T^* \in L(K, H)$, 使得$(Tx, y) = (x, T^*y)$对所有的$x \in H, y \in K$成立.

证明 设$y \in K$, 则由

$$f(x) = (Tx, y), \ \ x \in H$$

所定义的f是H上的一个连续线性泛函. 由Fréchet-Riesz定理知存在唯一$z \in H$, 使得

$$f(x) = (x, z), x \in H.$$

定义$T^*y = z$, 易证T^*满足定理中的所有要求. ∎

定义3.7.2. 定理3.7.1中所定义的算子T^*, 常被人们称为T的伴随算子或Hilbert共轭算子.

定理3.7.1中算子T^*的唯一性, 在求解伴随算子时是非常有用的. 如果我们能够找到一个满足$(Tx, y) = (x, Sy), x \in H, y \in K$的算子$S$, 则利用唯一性即可知$S = T^*$. 在实际的求解伴随算子时, 通常会归结为求解相应的方程, 而这是非常容易的.

下面是两个求解伴随算子的例子:

例3.7.3. 设$\{e_1, e_2\}$是$\mathbb{C}^2$的一组正规正交基, T是$\mathbb{C}^2$上的线性算子, $(a_{ij})_{2\times 2}$是T在$\{e_1, e_2\}$下的矩阵表示.

如设T^*相应的矩阵表示为$(b_{ij})_{2\times 2}$, 则根据定义, 对所有的$(x_1,x_2)^T$, $(y_1,y_2)^T\in\mathbb{C}^2$, 我们有

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}\right),$$

所以

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1\overline{y_1}+a_{12}x_2\overline{y_1}+a_{21}x_1\overline{y_2}+a_{22}x_2\overline{y_2} \\ = & \overline{b_{11}}x_1\overline{y_1}+\overline{b_{21}}x_2\overline{y_1}+\overline{b_{12}}x_1\overline{y_2}+\overline{b_{22}}x_2\overline{y_2}. \end{aligned}$$

可见$a_{11}=\overline{b_{11}}, a_{12}=\overline{b_{21}}, a_{21}=\overline{b_{12}}, a_{22}=\overline{b_{22}}$, 因此$(b_{ij})_{2\times 2}=(\overline{a_{ji}})_{2\times 2}$.

注记3.7.4. 此例表明, 此处定义的Hilbert空间上的线性算子的Hilbert共轭(Adjoint) T^*和前面定义的线性算子的Banach共轭(Conjugates)T'是不一样的. 两者既有区别, 也有联系.

例3.7.5. 设$H=L^2[0,1]$, 对任一$k\in C[0,1]$, 试证明由$(T_kg)(t)=k(t)g(t), g\in H$所定义的算子$T_k\in L(H)$, 如$f\in C[0,1]$, 则$(T_f)^*=T_{\overline{f}}$.

证明 设$g,h\in H$, 记$k=(T_f)^*h$, 则根据定义$(T_fg,h)=(g,(T_f)^*h)=(g,k)$可得

$$\int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)}dt=\int_0^1 g(t)\overline{k(t)}dt.$$

易见上式对$k(t)=\overline{f(t)}h(t)$成立. 所以由伴随算子的唯一性, 可推出$(T_f)^*h=k=\overline{f(t)}h(t)$, 即得$(T_f)^*=T_{\overline{f}}$. ∎

下面的定理描述的是伴随算子的一些性质

定理3.7.6. 设H,K,L都是复的Hilbert空间, $S,T\in L(H,K), R\in L(K,L), \lambda,\mu\in\mathbb{C}$. 则

(1) $(\lambda S+\mu T)^*=\overline{\lambda}S^*+\overline{\mu}T^*$;

(2) $(RT)^*=T^*R^*$;

(3) $(T^*)^*=T$;

(4) $\|T^*\|=\|T\|$;

(5) $\|T^*T\|=\|T\|^2$.

证明 (1), (2) 易证;

(3) 对任意的$x \in H, y \in K$, 有

$$(y, (T^*)^*x) = (T^*y, x) = \overline{(x, T^*y)} = \overline{(Tx, y)} = (y, Tx),$$

所以$(T^*)^* = T$.

(4) 对任意的$y \in K$, 利用Cauchy-Schwarz不等式, 有

$$\|T^*y\|^2 = (T^*y, T^*y) = (TT^*y, y) \le \|TT^*y\|\|y\| \le \|T\|\|T^*y\|\|y\|,$$

所以

$$\|T^*y\| \le \|T\|\|y\|.$$

故$\|T^*\| \le \|T\|$.

利用(3), 在上式中以T^*代T, 得$\|T\| = \|(T^*)^*\| \le \|T^*\|$, 即得$\|T^*\| = \|T\|$.

(5) 因为$\|T^*\| = \|T\|$, 所以

$$\|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2.$$

另一方面

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \le \|T^*Tx\|\|x\| \le \|T^*T\|\|x\|^2.$$

因此$\|T\|^2 \le \|T^*T\|$, 可见(5)成立. ∎

定理3.7.7. 设$T \in L(H)$是可逆的, 则T^*也有界可逆, 且$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

根据定理3.7.6和恒等算子I的伴随算子还是恒等算子, 易证之.

定理3.7.8. 设$T \in L(H, K)$, 则有

$$\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^{\perp}, \ \ \mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T)^{\perp};$$

$$\overline{\mathscr{R}(T)} = \mathscr{N}(T^*)^{\perp}, \ \ \overline{\mathscr{R}(T^*)} = \mathscr{N}(T)^{\perp}.$$

证明 设$x \in \mathscr{N}(T)$, 则$Tx = 0$. 从而对任意的$y \in K$,

$$(x, T^*y) = (Tx, y) = 0,$$

表明$x \in \mathscr{R}(T^*)^{\perp}$.

如$x \in \mathscr{R}(T^*)^\perp$, 对任意的$y \in K$,

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = 0,$$

可得$Tx = 0$, 即$x \in \mathscr{N}(T)$. 故$\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^\perp$.

以T^*替代T, 则得$\mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}((T^*)^*)^\perp = \mathscr{R}(T)^\perp$.

另外两个关系式类似可证, 留给读者. ∎

§3.7.2 自伴算子的基本性质

利用前面定义的伴随算子, 我们可以定义三类算子: 正规算子, 自伴算子和酉算子. 人们对这三类算子研究的非常深入, 而且这三类算子的应用也十分广泛. 本节我们只介绍一些自伴算子的结果, 对其它两类算子感兴趣的读者, 可参考文献[23].

定义3.7.9. 设$T \in L(H)$, 若$T^* = T$, 则称T是自伴算子.

在验证一个算子是自伴算子时, 可以通过求出T^*, 并证明$T^* = T$的方法; 也可以通过证明$(Tx, y) = (x, Ty)$对任意的$x, y \in H$成立, 再结合伴随的唯一性的方法.

例3.7.10. 在例3.7.5中, 如果$f \in C[0,1]$是实值函数, 则T_f是自伴算子.

定理3.7.11. 设$T \in L(H)$, 则

$$T\text{是自伴的} \Leftrightarrow (Tx, x),\ \ x \in H\text{恒为实数}.$$

证明 如果T是自伴的, 则对任意的$x \in H$,

$$(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)},$$

可见(Tx, x)恒为实数.

反之, 若$(Tx, x), x \in H$恒为实数, 易见

$$(Tx, x) = (x, Tx), x \in H. \tag{3.7.1}$$

利用复内积空间上的极化等式(Polarization identity)

$$(x, y) = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|^2,\ \ x, y \in H$$

和(3.7.1)式, 可得

$$(Tx, y) = (x, Ty),\ \ \forall x, y \in H.$$

因此, $T^* = T$, 即T是自伴的. ∎

引理3.7.12. 设$T \in L(H)$, 记

$$\mu = \sup\{|(Tx, y)| \mid \|x\| = 1, \|y\| = 1\},$$

则$\|T\| = \mu$.

证明 很明显, 对任何的$x, y \in H$,

$$|(Tx, y)| \leq \mu \|x\| \|y\|,$$

故对任意的$x \in H$,

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) \leq \mu \|x\| \|Tx\|,$$

从而

$$\|Tx\| \leq \mu \|x\|,$$

可见$\|T\| \leq \mu$.

另一方面, 对任何的$x, y \in H$,

$$|(Tx, y)| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|,$$

可见$\mu \leq \|T\|$.

所以$\|T\| = \mu$. ∎

定理3.7.13. 设$T \in L(H)$是自伴的, 则

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, x)| \mid \|x\| = 1\}.$$

证明 记$M = \sup\{|(Tx, x)| \mid \|x\| = 1\}$, 结合引理3.7.12, 只需证$\mu \leq M$即可.

设$x, y \in H, \|x\| = 1, \|y\| = 1$, 则易证

$$(T(x+y), (x+y)) = (Tx, x) + 2Re(Tx, y) + (Ty, y),$$

$$(T(x-y), (x-y)) = (Tx, x) - 2Re(Tx, y) + (Ty, y).$$

两式相减, 可得

$$4Re(Tx, y) = (T(x+y), (x+y)) - (T(x-y), (x-y)).$$

所以

$$\begin{aligned}4Re(Tx,y) &\le |(T(x+y),(x+y))| + |(T(x-y),(x-y))| \\ &\le M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \qquad M\text{的定义} \\ &= 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \text{平行四边形法则} \\ &= 4M.\end{aligned}$$

设$(Tx,y) = e^{i\theta}|(Tx,y)|$, 并在上面不等式中以$e^{-i\theta}x$代替$x$, 得到

$$|(Tx,y)| = Re(T(e^{-i\theta}x),y) \le M.$$

从而

$$\mu = \sup\{|(Tx,y)| \mid \|x\| = 1, \|y\| = 1\} \le M.$$

证毕. ∎

下面的两个定理是有关自伴算子的谱的结果.

定理3.7.14. 设$T \in L(H)$是自伴的, 则

(1) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$;

(2) $\sigma_r(T) = \phi$;

(3) 设$Tx_j = \lambda_j x_j, x_j \ne 0, j = 1,2$, 且$\lambda_1 \ne \lambda_2$, 则$x_1 \perp x_2$.

证明 (1) 设$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 注意到

$$((T-\lambda I)^2 x, x) = ((T-\lambda I)x,\ (T-\lambda I)x) = \|(T-\lambda I)x\|^2,$$

便有

$$\begin{aligned}\|(T-(\lambda+i\mu)I)x\|^2 &= ((T-(\lambda+i\mu)I)x, (T-(\lambda+i\mu)I)x) \\ &= ((T-(\lambda+i\mu)I)^*(T-(\lambda+i\mu)I)x, x) \\ &= ((T-(\lambda-i\mu)I)(T-(\lambda+i\mu)I)x, x) \\ &= (((T-\lambda I)^2 + \mu^2 I)x, x) \\ &= \|(T-\lambda I)x\|^2 + \mu^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

如$\mu \ne 0$, 则

$$\|(T-(\lambda+i\mu)I)x\| \ge |\mu|\|x\|.$$

可见$T-(\lambda+i\mu)I$是单射, 且$\mathscr{R}(T-(\lambda+i\mu)I)$闭. （ $T-(\lambda-i\mu)I$具有一样结果）

假如$\mathscr{R}(T-(\lambda+i\mu)I)\neq H$, 根据定理3.7.8, 有

$$\mathscr{N}(T-(\lambda-i\mu)I)=\mathscr{N}((T-(\lambda+i\mu)I)^*)=\mathscr{R}((T-(\lambda+i\mu)I))^{\perp}\neq\{0\}.$$

与$T-(\lambda-i\mu)I$是单射矛盾. 故$\mathscr{R}(T-(\lambda+i\mu)I)=H$, $T-(\lambda+i\mu)I$是有界可逆的, 即$\lambda+i\mu\in\rho(T)$. 可见$\sigma(T)\subset\mathbb{R}$.

(2) 设$z_0\in\sigma_r(T)$, 则$\overline{\mathscr{R}(T-z_0I)}\neq H$. 由(1)可知$z_0\in\mathbb{R}$. 所以$(T-z_0I)^*=T-z_0I$, 再根据定理3.7.8, 有

$$\mathscr{N}(T-z_0I)=\overline{\mathscr{R}(T-z_0I)}^{\perp}\neq\{0\}.$$

于是$z_0\in\sigma_p(T)$. 这与$\sigma_r(T)\bigcap\sigma_p(T)=\phi$矛盾, 所以$\sigma_r(T)=\phi$.

(3) 由$\sigma(T)\subset\mathbb{R}$知, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. 于是

$$\lambda_1(x_1,x_2)=(\lambda_1x_1,x_2)=(Tx_1,x_2)=(x_1,Tx_2)=(x_1,\lambda_2x_2)=\lambda_2(x_1,x_2).$$

由假定$\lambda_1\neq\lambda_2$知必有$x_1\perp x_2$. ∎

记$m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Tx,x), M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$.

定理3.7.15. 设$T\in L(H)$是自伴算子, 则$\sigma(T)\subset[m,M]$, 且$m,M\in\sigma(T)$.

本定理的证明，请参考文献[3], P184.

定理3.7.16. 设$T\in L(H)$是自伴算子, 则$r(T)=\|T\|$.

证明 因为$\|T^2\|=\|T^*T\|=\|T\|^2$, 所以, 由数学归纳法可知对一切正整数n, 有

$$\|T^{2^n}\|=\|T\|^{2^n}.$$

根据定理3.5.15, $r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}=\|T\|$. ∎

§3.7.3 紧自伴算子

在本小节中，我们恒假定H是可分的Hilbert空间, T是H上的非零紧自伴算子.

定理3.7.17. T必有非零的特征值.

证明 如若不然, 由Fredholm择一定理, 可知所有的$\lambda\neq0$均在$\rho(T)$中, 于是, $r(T)=0$. 而由T的自伴性, 利用定理3.7.16, 可知$\|T\|=r(T)=0$. 故$T=0$, 与假设矛盾. ∎

现在, 我们可以将T的非零的特征值进行如下形式的排序(排序的准则是, 随n增加$|\lambda_n|$递减, 并且如果特征值λ_n的重数是m_n的话, 则λ_n在排序时连排m_n次.)

$$\text{有限集:}\quad \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l,$$

$$\text{可数无限集:}\quad \lambda_1, \lambda_2, \cdots,$$

均记为$\{\lambda_n\}_{n\in J}$. 对于每个非零的特征值λ_n, 其特征向量空间都是有限维的, 因此可以利用Gram-Schmidt正交化算法, 将其特征向量正规正交化, 并将特征向量按照特征值的同样的次序排列, 则得到特征向量集

$$\text{有限集:}\quad \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_l,$$

$$\text{可数无限集:}\quad \varphi_1, \varphi_2, \cdots,$$

均记为$\{\varphi_n\}_{n\in J}$. 根据3.7.14的(3), 可知$\{\varphi_n\}_{n\in J}$是正规正交集.

而由假定H是可分的Hilbert空间, 知$\mathscr{N}(T)$也是可分的Hilbert空间, 所以可取$\mathscr{N}(T)$的一个正规正交基$\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$. 至此, 我们得到了$H$中一个正规正交集$\{\varphi_n\}_{n\in J}\bigcup\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$, 但该集合是不是$H$的一个正规正交基呢?

下面的定理给出了肯定的回答.

定理3.7.18. (Hilbert-Schmidt)

(1) $\{\varphi_n\}_{n\in J}\bigcup\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$是$H$的一个正规正交基, 且满足

$$T\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \lambda_n \neq 0, n\in J, \quad T\psi_\alpha = 0, \alpha\in\mathscr{A}.$$

(2) 对于任给的$\psi\in H$, 有展开式

$$T\psi = \sum_{n\in J}\lambda_n(\psi,\varphi_n)\varphi_n.$$

级数在H中按范数收敛.

证明 (1) 记$\mathscr{M} = \overline{\operatorname{span}}\{\{\varphi_n, n\in J\}, \{\psi_\alpha\, \alpha\in\mathscr{A}\}\}$. 易见$T(\mathscr{M})\subset\mathscr{M}$. 若$f\in\mathscr{M}^\perp$, 则对任何的$g\in\mathscr{M}$, $(Tf,g) = (f,Tg) = 0$, 可得$T(\mathscr{M}^\perp)\subset\mathscr{M}^\perp$.

设H到$\mathscr{M}^\perp$上的正交投影为P, 则$T|_{\mathscr{M}^\perp}$可表示为PTP, 可见$T|_{\mathscr{M}^\perp}$也是紧自伴算子. 如果$T|_{\mathscr{M}^\perp}$非零, 由定理3.7.17, 知存在$\lambda\neq 0$及$0\neq\varphi\in\mathscr{M}^\perp$, 使得$(T|_{\mathscr{M}^\perp})(\varphi) = \lambda\varphi$,

即$T(\varphi) = \lambda\varphi$. 根据$\mathscr{M}$的定义, 应有$\varphi \in \mathscr{M}$, 矛盾! 故$T|_{\mathscr{M}^\perp} = 0$. 若$\mathscr{M}^\perp \neq \{0\}$, 则$\mathscr{M}^\perp \subset \mathscr{N}(T) \subset \mathscr{M}$, 矛盾! 所以$\mathscr{M}^\perp = \{0\}$, 证得$\{\varphi_n\}_{n\in J} \bigcup \{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$是$H$的一个正规正交基.

由$\{\varphi_n\}$ 和$\{\psi_\alpha\}$的取法, 关系式易得.

(2) 对于任给的$\psi \in H$, 有展开式

$$\psi = \sum_{n\in J}(\psi, \varphi_n)\varphi_n + \sum_{\alpha\in\mathscr{A}}(\psi, \psi_\alpha)\psi_\alpha,$$

两个级数均在H中按范数收敛, 且$\sum\limits_{\alpha\in\mathscr{A}}(\psi, \psi_\alpha)\psi_\alpha$中至多有可数个非零项.

于是利用(1), 有

$$\begin{aligned} T\psi &= \textstyle\sum_{n\in J}(\psi, \varphi_n)T(\varphi_n) + \sum_{\alpha\in\mathscr{A}}(\psi, \psi_\alpha)T(\psi_\alpha) \\ &= \textstyle\sum_{n\in J}\lambda_n(\psi, \varphi_n)\varphi_n. \end{aligned}$$

∎

习 题

1. 设X, Y是赋范线性空间, $T: X \to Y$是线性算子, 则T不是连续的当且仅当存在$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$满足$x_n \to 0$, 但$\|Tx_n\| \to \infty$.
2. 设线性算子$T: C[0,1] \to \mathbb{K}$, 定义为$T(f) = f(0)$, 证明T连续.
3. 设线性算子$T: l^1 \to \mathbb{K}$, 定义为$T(\{x_n\}) = \sum\limits_{n=1}^\infty c_n x_n$, $\{c_n\} \in l^\infty$, 证明T连续.
4. 设$\mathcal{P}$是由全体多项式生成的空间, 线性算子$T: \mathcal{P} \to \mathbb{K}$, 定义为$T(p) = p'(1)$, 这里$p'(1)$表示$p$的导函数$p'$在1点的值, 试问$T$的连续性?
5. 设X, Y是赋范线性空间, $T: X \to Y$是线性算子, 试证明：如果T是有界的, 则T的零空间$\mathscr{N}(T)$是闭的. 反之, $\mathscr{N}(T)$的闭性能否保证T一定是有界的?
6. 设线性算子$T: L^1[a,b] \to C[a,b]$定义为

   $$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad f \in L^1[a,b],$$

   试证$\|T\| = 1$.
7. 设赋范线性空间$\mathbb{R}^2$上的范数为

   $$\|x\| = |x_1| + |x_2|, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

定义$\mathbb{R}^2$上的泛函f:

$$f(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

试求$\|f\|$.

8. 对每个$\alpha \in L^\infty[a,b]$, 定义线性算子$T : L^p[a,b] \to L^p[a,b](1 \le p < \infty)$为

$$(Tx)(t) = \alpha(t)x(t), \quad x \in L^p[a,b].$$

试求$\|T\|$.

9. 设H是一个复的Hilbert空间, $y \in H$, 有界线性泛函$f : H \to \mathbb{C}$定义为$f(x) = (x, y)$, 试求$\|f\|$.

10. 设X是赋范线性空间, $\{T_n\}, \{S_n\}$是$L(X)$中的算子列, 满足

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

试证$\lim\limits_{n\to\infty} S_nT_n = ST$.

11. 设X是赋范线性空间, $x_1, x_2 \in X$, 若对任意的$f \in X'$, 都有$f(x_1) = f(x_2)$, 则$x_1 = x_2$.

12. 设X是赋范线性空间, E是X的线性子空间, 则

    (1) $x_0 \in \overline{E} \Leftrightarrow$ 对任意的$f \in X'$, 当$f(E) = \{0\}$时, $f(x_0) = 0$.

    (2) $\overline{E} = X \Leftrightarrow$对任意的$f \in X'$, 当$f(E) = \{0\}$时, $f = 0$.

13. 设X是赋范线性空间, E是X的子集合, $x \in X, y \in E$. 若

$$\|x - y\| = \inf_{z \in E} \|x - z\|,$$

则称y是x关于E的最佳逼近元. 现设X是赋范线性空间, E是X的闭线性子空间, $x_0 \notin E$, 则$y \in E$是x_0关于E的最佳逼近元当且仅当存在$f \in X', \|f\| = 1, f(x) = 0, \forall x \in E$, 并且$f(x_0) = \|x_0 - y\|$.

14. 设X是赋范线性空间, E是X的有限维子空间, 试证明对任意$x \in X$, x关于E的最佳逼近元存在.

15. 设l_0^2是l^2中至多有限多个坐标不为0的元素集合, 以l^2中范数为范数. 令$T : l_0^2 \to l_0^2$, $T(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots, \frac{x_n}{n}, \cdots)$, 证明$T$是一一的有界线性算子, 但$T^{-1}$不是有界的. (与逆算子定理对照理解.)

16. 设X, Y是Banach空间, $T: X \to Y$是闭算子, 则

(1) $\mathscr{N}(T)$是X的闭线性子空间;

(2) 如T是单射, 则T^{-1}是闭算子;

(3) T将X中的紧集映为Y中的紧集;

(4) Y中的紧集的原像是X中的闭集.

17. 设X是赋范线性空间, E_1, E_2均是X的线性子空间,

(1) 若$X = E_1 + E_2$, $E_1 \bigcap E_2 = \{0\}$, 则存在$T: E_2 \to X/E_1$, T是一一的到上的线性映射;

(2) 若X是Banach空间, E_1, E_2是X的闭线性子空间, 则T是到上的, 并且T, T^{-1}连续.

18. 用闭图象定理证明: 若X, Y是Banach空间, $T : X \to Y$是线性算子, 满足$\forall f \in Y'$, $fT \in X'$, 则T一定是有界线性算子.

19. 设$(X, \|\cdot\|)$是Banach空间, $(Y, \|\cdot\|_1)$是赋范线性空间, $(Y, \|\cdot\|_2)$是Banach空间. 如果$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$, 那么任何$(X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|_1)$的有界线性算子$T$必是$(X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|_2)$的有界线性算子.(用闭图象定理)

20. 举例说明一致有界定理中空间的完备性的假设不可去掉.

21. 证明定理3.4.6.

22. 证明l^1空间不是自反的.

23. 证明任意的Hilbert空间都是自反的.

24. 证明定理3.4.15.

25. 设X, Y是赋范线性空间, 线性算子$T: X \to Y$定义为:

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i, \quad x \in X, \quad f_i \in X', \quad y_i \in Y, i = 1, 2, \cdots, n.$$

试证明

$$T'g = \sum_{i=1}^{n} g(y_i) f_i, \quad g \in Y'.$$

26. 设线性算子$T: l^p \to l^p$ $(1 < p < \infty)$定义为:$T(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$, 试求$T'$.

27. 证明定理3.4.18.

28. 证明定理3.4.19.

29. 设$x \in C[a,b]$, 线性算子$T: C[a,b] \to C[a,b]$定义为: $(Tf)(t) = x(t)f(t)$, $f \in C[a,b]$, 证明T的谱$\sigma(T) = \{x(t) | t \in [a,b]\}$.

30. 设$x \in C[0,2\pi]$, $(Ax)(t) = e^{it}x(t), x \in X$. 证明$\sigma(T) = \{\lambda | |\lambda| = 1\}$.

31. 若$T \in L(X), T^2 = T, T \neq 0, I$, 则$\sigma(T) = \{0,1\}$.

32. 设$T: l^2 \to l^2$定义为: $Tx = T(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$, 试求$\sigma(T)$.

33. 设λ为线性算子T^n的特征值, 则λ的n次根中至少有一个是算子T的特征值.

34. 若$T \in GL(X)$, 则$\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

35. 设X是复Banach空间, $T \in L(X)$, $\lambda, \mu \in \rho(T)$, 试证:

    (1) $R(\lambda,T) - R(\mu,T) = (\mu - \lambda)R(\lambda,T)R(\mu,T)$;

    (2) 若$S \in L(X), ST = TS$, 则$SR(\lambda,T) = R(\lambda,T)S$;

    (3) $R(\lambda,T)R(\mu,T) = R(\mu,T)R(\lambda,T)$.

36. 设X是Banach空间, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(X), T \in L(X)$, $\|T_n - T\| \to 0 (n \to \infty)$. 试证明：如果$\lambda_0 \in \rho(T)$, 则当$n$充分大时, $\lambda_0 \in \rho(T_n)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_0 I - T_n)^{-1} = (\lambda_0 I - T)^{-1}.$$

37. 设X是复Banach空间, $S, T \in L(X)$, 证明

    (1) $r(ST) = r(TS)$;

    (2) 如$ST = TS$, 则$r(S+T) \le r(S) + r(T)$.

38. 设数列$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$\alpha_n \to 0, n \to \infty$. 在$l^1$中定义算子$T$为

$$y = Tx : y = \{\alpha_n \xi_n\}, x = \{\xi_n\},$$

    试证明T是l^1上的紧算子.

39. 设X是Banach空间, 取定$z \in X$, $f \in X'$, 则由$Tx = f(x)z, x \in X$定义的线性算子T是紧算子.

40. 设T为l^2上的线性算子, 定义如下

$$Te_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} e_j, \quad 其中 e_n = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1}, 1, 0, \cdots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

    若$\displaystyle\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$, 试证$T$为$l^2$上的紧算子.

41. 设$K(x,y)$是$[a,b]\times[a,b]$上的可测函数, 设$p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\int_a^b(\int_a^b|K(x,y)|^q dy)^{\frac{p}{q}}dx<\infty.$$

证明L^p上线性算子

$$(Tf)(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

是紧算子.

42. 设$T\in L(X,Y)$, Y是Banach空间, T'是紧算子, 则T是紧算子.(对照定理3.6.11.)

43. 设H是一个Hilbert空间, $T\in K(H)$, 试证明如$r(T)<\infty$, 则$\sigma(T)$是一个有限集.

44. 设$T\in L(H)$, $\{e_n\}$是H的标准正交基, 并且

$$(Te_n,e_m)=\overline{(Te_m,e_n)},\forall m,n\geq 1,$$

试证T是自伴算子.

45. 设$T\in L(H)$是自伴算子, 证明

$$\lambda\in\sigma(T)\Leftrightarrow\exists x_n\in H,\|x_n\|=1,\ n\in\mathbb{N},\text{使得}\lim_{n\to\infty}\|Tx_n-\lambda x_n\|=0.$$

46. 设H是Hilbert空间, $T,W\in L(H)$. 如果T是自伴的, 则W^*TW也是自伴的.

47. 设P是Hilbert空间H上的投影, 如果PH与$(I-P)H$是相互正交的子空间, 则称P为正交投影. 请证明: 如果P是Hilbert空间H上的非零正交投影, 则$\|P\|=1$.

48. 设$T\in L(H)$, 若$\forall x\in H$, $(Tx,x)\geq 0$, 则$(I+T)^{-1}$存在.

第四章　非线性算子

本章我们将介绍Banach空间上非线性算子的连续性、有界性, 微分、积分的概念和相应理论.

§4.1　非线性算子的连续性和有界性

以下我们假设X和Y是两个实Banach空间, f是从X到Y的算子, 其定义域为$\mathscr{D}(f)$. 与前面几章不同, 这里并不假设算子f是线性算子, 它可以是非线性的. 事实上, 作用在无穷维空间中的非线性算子正是本章的主要研究对象. 对于非线性算子, 我们首先讨论其连续性和有界性.

定义4.1.1. 设$x_0 \in \mathscr{D}(f)$, 如果对于任意$\varepsilon > 0$, 都存在$\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, 使得

$$\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon, \quad \forall x \in B(x_0, \delta) \cap \mathscr{D}(f),$$

则称算子f在点x_0处是连续的. 如果f在$\mathscr{D}(f)$中每一点处都是连续的, 则称f是连续算子. 如果上述δ只与ε有关而与x_0无关, 那么称算子f是一致连续的.

算子f的连续性及一致连续性的上述定义与古典分析中函数的连续性及一致连续性的定义是类似的. 显然, 算子f在给定点$x_0 \in \mathscr{D}(f)$处的连续性还可以由以下方式等价地刻画: 对任意序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}(f)$, 只要$\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$, 就有$\lim\limits_{n\to\infty} \|f(x_n) - f(x_0)\|_Y = 0$.

定义4.1.2. 如果$\mathscr{D}(f)$的任一有界子集在f下的象都是Y中的有界集, 那么称算子f是有界的.

我们知道若$D \subset \mathbb{R}^n$是有界闭集, 函数$f: D \to \mathbb{R}$ 连续, 那么$f(D)$是$\mathbb{R}$中的有界闭集. 也就是说, 在n维欧氏空间中由函数的连续性可知它在有界闭集D上的有界性, 并且函数在D上可取得最大值和最小值. 在一般的无穷维赋范线性空间中, 对线性算子而言连续性与有界性是等价的; 但是对于非线性算子而言其连续性不一定保证其有界性. 此外, 即使连续算子是有界的, 它也不一定在有界闭集上达到最大值或最小值.

例4.1.3. 在l^2中, 任取$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)$, 记$r_k=\max\{|x_k|-1,0\},k\in\mathbb{N}$. 考察泛函

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kr_k,\quad \forall x\in l^2, \tag{4.1.1}$$

试证明f是连续的, 但不是有界的.

证明 首先注意到对任意$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in l^2$, 都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$, 于是对于充分大的$k$必有$|x_k|<1$, 从而$r_k=0$, 也就是说序列$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$中只有有限个不为0, 所以(4.1.1)式中实际上是有限项求和, $f(x)$是有限数. 现在任意取定$x\in l^2$, 设序列$\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset l^2$满足

$$\lim_{n\to\infty}\|x^{(n)}-x\|=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k|^2\right)^{1/2}=0.$$

显然对任意$k\in\mathbb{N}$有$|x_k^{(n)}-x_k|\to 0(n\to\infty)$, 于是

$$|(|x_k^{(n)}|-1)-(|x_k|-1)|\le|x_k^{(n)}-x_k|\to 0(n\to\infty),$$

从而可知$|f(x^{(n)})-f(x)|\to 0$, 得证f在l^2上连续.

下面证明f是无界的. 任取$\varepsilon_0>0$, 取序列$\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset l^2$如下,

$$x_k^{(n)}=\begin{cases}1+\varepsilon_0, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\qquad x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots),\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

这时$\|x^{(n)}\|=1+\varepsilon_0(\forall n\in\mathbb{N})$, 即$\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset\{x\in l^2|\|x\|\le 1+\varepsilon_0\}$. 然而

$$f(x^{(n)})=n\varepsilon_0,\quad n\in\mathbb{N},$$

从而$f(x^{(n)})\to\infty$, 即f是无界的. ∎

例4.1.4. 考虑Banach空间$(C[0,1],\|\cdot\|)$, 其中范数$\|\cdot\|$定义如下,

$$\|f\|=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|,\quad \forall f\in C[0,1].$$

设$U=\{x\in C[0,1]\mid x(0)=x(1)=0\}$. 考察$U$上的泛函

$$f(x)=\int_0^1|x(t)|^2dt,\quad \forall x\in U,$$

试证明f是连续、有界的, 但在有界闭集$\bar{B}=\{x\in U\mid \|x\|\le 1\}$上$f$不能达到最大值.

证明 首先证明f是连续的. 任意取$x \in U$, 以及$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$满足

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x(t)| = 0. \tag{4.1.2}$$

对于$\varepsilon_0 = 1$, 由(4.1.2)可知存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 当$n \ge n_0$时有$\|x_n\| \le \|x\| + 1$, 于是n充分大时,

$$\begin{aligned}\left||x_n(t)|^2 - |x(t)|^2\right| &\le |x_n(t) - x(t)|\,(|x_n(t)| + |x(t)|)\\ &\le |x_n(t) - x(t)|\,(\|x_n\| + \|x\|)\\ &\le (2\|x\| + 1)\,|\,x_n(t) - x(t)\,|\,, \quad \forall t \in [0,1].\end{aligned}$$

由此可知$\{|x_n|^2\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于$|x|^2$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t)|^2 dt = \int_0^1 |x(t)|^2 dt,$$

故f是连续的. 此外, 若集合$P = \{x \in U|\ \|x\| \le M\}$, 其中常数$M > 0$, 那么

$$|f(x)| \le \int_0^1 M^2 dt = M^2, \quad \forall x \in P, \tag{4.1.3}$$

即f还是有界的.

下面证明f在有界闭集$\bar{B}$上取不到最大值. 由(4.1.3)式, $|f(x)| \le 1, \forall x \in \bar{B}$. 事实上, $\sup\limits_{x\in\bar{B}} |f(x)| = 1$. 令

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} t, & 0 \le t < \varepsilon,\\ 1, & \varepsilon \le t \le 1-\varepsilon,\\ \frac{1}{\varepsilon}(1-t), & 1-\varepsilon < t \le 1, \end{cases} \quad \varepsilon > 0.$$

显然$x_\varepsilon \in \bar{B}$, 而且

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon\right) = 1.$$

又注意到任意$x \in \bar{B}$都满足$x(0) = x(1) = 0$, 那么存在$0 < \delta < 1/2$使得

$$|x(t)| \le \frac{1}{2}, \quad \forall t \in (0,\delta) \cup (1-\delta, 1),$$

于是可知

$$f(x) = \int_0^\delta |x(t)|^2 dt + \int_\delta^{1-\delta} |x(t)|^2 dt + \int_{1-\delta}^1 |x(t)|^2 dt \le 1 - \frac{3}{2}\delta < 1,\ \ \forall x \in \bar{B},$$

即f在$\bar{B}$上取不到最大值. ∎

定理4.1.5. 设X, Y为赋范线性空间, 若算子$f : \overline{B}(x_0, r) \subset X \to Y$是一致连续的, 那么$f$必为有界算子.

证明 由于f在$\overline{B}(x_0, r)$上一致连续, 那么对于$\varepsilon = 1$, 存在$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 只要$x', x'' \in \overline{B}(x_0, r)$满足$\|x' - x''\|_X < \delta$, 就有

$$\|f(x') - f(x'')\|_Y < 1.$$

对上述δ, 取$N_0 \in \mathbb{N}$充分大, 使得$r/N_0 < \delta$. 任取$x \in \overline{B}(x_0, r)$, 令

$$x_i = x_0 + \frac{i}{N_0}(x - x_0), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, N_0.$$

显然$x_i \in \overline{B}(x_0, r)(i = 0, 1, 2, \cdots, N_0)$, 并且对于$i \in \{0, 1, \cdots, N_0 - 1\}$,

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x_i\|_X &= \left\| \left[x_0 + \frac{i+1}{N_0}(x - x_0) \right] - \left[x_0 + \frac{i}{N_0}(x - x_0) \right] \right\|_X \\ &= \frac{1}{N_0}\|x - x_0\|_X \le \frac{r}{N_0} < \delta. \end{aligned}$$

从而由f的一致连续性有

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_Y &\le \|f(x_{N_0}) - f(x_0)\|_Y + \|f(x_0)\|_Y \\ &\le \sum_{i=0}^{N_0-1} \|f(x_{i+1}) - f(x_i)\|_Y + \|f(x_0)\|_Y \\ &\le N_0 + \|f(x_0)\|_Y, \end{aligned}$$

故f是有界算子. ∎

注记4.1.6. 上述定理中, 若将$\overline{B}(x_0, r)$换为一般的有界闭集, 结论不一定成立; 但是若将$\overline{B}(x_0, r)$换为有界凸集, 结论仍成立. 事实上, 在上述定理证明中x_i正是x_0与x的凸组合.

我们还知道, 在n维欧氏空间中, 有界闭集上的连续函数必定是一致连续的. 但是, 在无穷维赋范线性空间中, 有界闭集上的连续算子却不一定一致连续. 事实上, 结合例4.1.3的证明过程可知, 即使是作用在有界闭凸集上的连续算子仍有可能是无界的, 因而由上述定理可知它不是一致连续的.

在线性算子理论中我们知道全连续算子(即紧算子)具有很好的性质, 这些性质使它在许多方面接近于有限维空间中的线性算子. 对于非线性算子来说, 全连续性也是很好的性质.

定义4.1.7. 设X, Y是两个实Banach空间, 算子$f : \mathscr{D}(f) \subset X \to Y$. 如果$\mathscr{D}(f)$中任何有界集$B$在$f$下的象$f(B)$是$Y$中的列紧集, 则称$f$是紧算子.

注记4.1.8. 因为任何紧集都是有界集, 所以紧算子必是有界算子.

定义4.1.9. 设X, Y是两个实Banach空间, 如果算子$f : \mathscr{D}(f) \subset X \to Y$是连续的紧算子, 则称$f$是全连续算子.

注记4.1.10. 我们知道, 线性算子的连续性和有界性是等价的, 所以线性的紧算子必是全连续算子(见定义3.6.1). 但是, 非线性的紧算子不一定是全连续算子. 考察Dirichlet函数$\mathfrak{D}(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$$

任意$x \in \mathbb{R}$都是$\mathfrak{D}$的第二类间断点, 即函数$\mathfrak{D}$处处不连续. 但它的值域$\mathscr{R}(\mathfrak{D}) = \{0, 1\}$, 显然$\overline{\mathscr{R}(\mathfrak{D})} = \mathscr{R}(\mathfrak{D})$是$\mathbb{R}$中的紧集, 所以$\mathfrak{D}$是非连续的紧算子.

例4.1.11. 设函数$k(s, t, u)$在$[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$上连续, 定义$C[0, 1]$上的积分算子$K$如下

$$(Ku)(s) = \int_0^1 k(s, t, u(t))dt, \quad \forall u \in C[0, 1],$$

则$K : C[0, 1] \to C[0, 1]$为全连续算子.

证明 对于$u \in C[0, 1]$, 由k的连续性容易验证$Ku \in C[0, 1]$. 下面首先证明K是连续的. 设$u \in C[0, 1]$以及$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[0, 1]$满足

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = \lim_{n\to\infty} \max_{0\le t\le 1} |u_n(t) - u(t)| = 0, \tag{4.1.4}$$

那么存在$R > 0$, 使得$\|u_n\| \le R(\forall n \in \mathbb{N})$. 由$k(s, t, u)$的连续性可知在闭区域$[0, 1] \times [0, 1] \times [-R, R]$上$k(s, t, u)$是一致连续的. 于是对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 只要$(s_i, t_i, z_i) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [-R, R](i = 1, 2)$满足$|s_1 - s_2| < \delta, \quad |t_1 - t_2| < \delta, \quad |z_1 - z_2| < \delta$, 就有

$$|k(s_1, t_1, z_1) - k(s_2, t_2, z_2)| < \varepsilon. \tag{4.1.5}$$

对上述$\delta > 0$, 由(4.1.4)可知, 存在$n_0 \in \mathbb{N}$, 当$n \ge n_0$时, $|u_n(t) - u(t)| < \delta, \forall t \in [0, 1]$. 从而由(4.1.5)可知当$n$充分大时,

$$\|Ku_n - Ku\| = \max_{0\le s\le 1} \left| \int_0^1 (k(s, t, u_n(t)) - k(s, t, u(t)))dt \right|$$

$$\leq \max_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 |k(s,t,u_n(t)) - k(s,t,u(t))| dt < \varepsilon,$$

即得K是连续的.

现在证明K是紧算子. 任给有界集$B \subset C[0,1]$, 记

$$a = \sup_{u \in B} \|u\|, \quad M = \sup\{|k(s,t,z)| \mid (s,t,z) \in [0,1] \times [0,1] \times [-a,a]\}.$$

对任意$u \in B$, 有

$$\|Ku\| = \max_{0 \leq s \leq 1} \left| \int_0^1 k(s,t,u(t)) dt \right| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 |k(s,t,u(t))| dt \leq M.$$

也就是说$K(B)$是$C[0,1]$中一致有界集. 又由条件可知$k(s,t,u)$在$[0,1] \times [0,1] \times [-a,a]$上是一致连续的, 故对于任给定的$t \in [0,1]$以及$u \in B$, $k(s,t,u(t))$关于s在$[0,1]$上一致连续, 那么对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 只要$s_1, s_2 \in [0,1]$满足$|s_1 - s_2| < \delta$, 就有

$$|(Ku)(s_1) - (Ku)(s_2)| \leq \int_0^1 |k(s,t,u(t)) - k(s_2,t,u(t))| dt < \varepsilon,$$

即$K(B)$还是等度连续的. 由Arzela-Ascoli定理可知$K(B)$是$C[0,1]$中的列紧集, 因此K是全连续算子. ∎

定理4.1.12. 设X, Y是两个实Banach空间, $D \subset X$, $f_n : D \to Y (n \in \mathbb{N})$是一族全连续算子, $f : D \to Y$. 如果对于D中任何有界集B, $\lim_{n \to \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_Y = 0$在$B$上一致成立, 那么$f$全连续.

证明 任取$x_0 \in D$, 设$B = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$满足$\|x_k - x_0\|_X \to 0$, 则$B$是$D$中的有界集. 于是对于任意$\varepsilon > 0$, 可取$n \in \mathbb{N}$充分大使得

$$\|f_n(x_k) - f(x_k)\|_Y < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{4.1.6}$$

对满足上述条件的固定的n, 由f_n的连续性可知存在$k' \in \mathbb{N}$, 当$k > k'$时恒有$\|f_n(x_k) - f_n(x_0)\|_Y < \frac{\varepsilon}{3}$. 注意到(4.1.6)式, 可知当$k > k'$时恒有

$$\|f(x_k) - f(x_0)\|_Y \leq \|f(x_k) - f_n(x_k)\|_Y + \|f_n(x_k) - f_n(x_0)\|_Y + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

于是f的连续性获证.

下证f是紧算子. 设$B \subset D$是任一有界集, 任意取点列$\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset f(B)$, 设相应的点列$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset B$满足$y_k = f(x_k)$. 对于任意$\varepsilon > 0$, 由假设可取定$n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|f_n(x) - f(x)\|_Y < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in B, \tag{4.1.7}$$

故$f_n(B)$是$f(B)$的一个$\varepsilon/3-$网. 由f_n的全连续性可知$f_n(B)$列紧, 于是$\{f_n(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$有收敛子列$\{f_n(x_{k_l})\}_{l=1}^{\infty}$. 也就是说, 对上述$\varepsilon>0$, 存在$L(\varepsilon)>0$, 当$m,l>L(\varepsilon)$时, 总有

$$\|f_n(x_{k_m})-f_n(x_{k_l})\|\le\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.1.8}$$

利用(4.1.7)和(4.1.8)可知, 此时相应地有$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$满足: 当$m,l>L(\varepsilon)$时,

$$\begin{aligned}\|y_{k_m}-y_{k_l}\| &= \|f(x_{k_m})-f(x_{k_l})\|\\ &\le \|f(x_{k_m})-f_n(x_{k_m})\|+\|f_n(x_{k_m})-f_n(x_{k_l})\|+\|f_n(x_{k_l})-f(x_{k_l})\|\\ &\le \varepsilon.\end{aligned}$$

注意到上述子列$\{y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$的取法实际上与$\varepsilon$有关, 为最终得证$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$有收敛子列, 下面采用取对角线方法. 对于$\varepsilon=1$, 由上面的讨论可知存在$L(1)\in\mathbb{N}$以及$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{y_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$满足：当$m,l>L(1)$时,

$$\|y_m^{(1)}-y_l^{(1)}\|\le 1.$$

对于$\varepsilon=1/2$, 存在$L(2)\in\mathbb{N}$以及$\{y_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{y_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$满足：当$m,l>L(2)$时,

$$\|y_m^{(2)}-y_l^{(2)}\|\le\frac{1}{2}.$$

以此类推, 对于$\varepsilon=1/p$, 存在$L(p)\in\mathbb{N}$以及$\{y_k^{(p-1)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列$\{y_k^{(p)}\}_{k=1}^{\infty}$满足：当$m,l>L(p)$时,

$$\|y_m^{(p)}-y_l^{(p)}\|\le\frac{1}{p}.$$

最后抽取对角线子列$\{y_p^{(p)}\}_{p=1}^{\infty}$, 显然该子列满足：对于任意$\varepsilon>0$, 只要$p\in\mathbb{N}$ 充分大, 就有

$$\|y_{(p+i)}^{(p+i)}-y_p^{(p)}\|\le\varepsilon,\quad \forall i\in\mathbb{N}.$$

从而得证$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$有收敛子列, 所以$f(B)$也是列紧集, 即f是紧算子. 综上可知f是全连续的. ∎

全连续算子可以用连续、有界的有限维算子一致逼近.

定义4.1.13. 设X,Y是两个实Banach空间, $f:D\subset X\to Y$, 若$f(D)$包含在Y的有限维子空间中, 则称f为有限维算子.

连续有界的有限维算子是全连续算子. 下面的结论告诉我们, 一般的全连续算子可以用连续有界的有限维算子一致逼近.

定理4.1.14. 设X, Y是两个实Banach空间, D是X中的有界子集, $f: D \to Y$, 下列三个结论是等价的,

(1) f是全连续的;

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_\varepsilon : D \to Y_\varepsilon$连续有界, 使对一切$x \in D$均有$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$. 这里$Y_\varepsilon$表示$Y$中某个有限维子空间.

(3) f可表示为如下形式:

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in D,$$

其中$f_n : D \to Y_n$是连续且有界的, $Y_n (n = 0, 1, \cdots)$表示Y中的某个有限维子空间, 且对于任意$x \in D$都有

$$\|f_n(x)\| \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 由假设条件可知$f(D)$是Y中的列紧集, 那么对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$f(D)$的有限ε–网$\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, 用$Y_\varepsilon$表示$y_1, y_2, \cdots, y_m$张成的有限维子空间, 即$Y_\varepsilon = \mathrm{span}\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$. 对上述$\varepsilon > 0$, 令

$$d_i(y) = \max\{\varepsilon - \|y - y_i\|, 0\}, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad \forall y \in Y.$$

显然$d_i(y)$非负且只在球$\{y \in Y | \|y - y_i\| < \varepsilon\}$上为正. 此外, 容易验证每个$d_i$都是$Y$上的连续泛函. 又令

$$d(y) = \sum_{i=1}^{m} d_i(y), \quad \forall y \in Y.$$

注意到对任意$x \in D$, 一定存在某个$y_i \in \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, 使得$\|f(x) - y_i\| < \varepsilon$. 所以$d_i(f(x)) > 0$, 从而可得$d(f(x)) > 0, \forall x \in D$. 现在定义非线性算子$f_\varepsilon : D \to Y_\varepsilon$如下:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{d(f(x))} \sum_{i=1}^{m} d_i(f(x)) y_i, \quad \forall x \in D.$$

显然f_ε是连续的. 由于$\|f(x) - y_i\| \geq \varepsilon$时相应地有$d_i(f(x)) = 0$, 所以当$x \in D$时,

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| = \left\| \frac{1}{d(f(x))} \sum_{i=1}^{m} d_i(f(x))(f(x) - y_i) \right\|$$

$$\leq \frac{1}{d(f(x))}\sum_{i=1}^{m} d_i(f(x))\|f(x)-y_i\| < \varepsilon.$$

而$f(D)$列紧, 那么存在$M>0$, 使得$\|f(x)\|\leq M,\forall x\in D$. 于是可得

$$\|f_\varepsilon(x)\|\leq\|f_\varepsilon(x)-f(x)\|+\|f(x)\|\leq M+\varepsilon,\quad \forall x\in D.$$

即f_ε是有界的.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 由(2)中的假设, 特别地对于$\varepsilon_n=2^{-(n+2)}, n=0,1,2,\cdots$, 存在$Y$的有限维子空间$H_n$, 以及连续有界算子$h_n:D\to H_n, n=0,1,2,\cdots$满足

$$\|f(x)-h_n(x)\|<2^{-(n+2)},\quad \forall x\in D,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{4.1.9}$$

令$f_0=h_0$, $f_1=h_1-h_0$, $\cdots$, $f_n=h_n-h_{n-1}$, $\cdots$. 显然$h_n=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, 且

$$f_n:D\to Y_n\triangleq\{y|y=y_n+y_{n-1},y_n\in H_n,y_{n-1}\in H_{n-1}\}.$$

容易验证每个Y_n都是Y的有限维子空间, f_n是连续有界的. 由(4.1.9)可知对于任意$x\in D$以及$n\in\mathbb{N}$都有

$$\begin{aligned}\|f_n(x)\| &= \|h_n(x)-h_{n-1}(x)\|\\ &\leq \|h_n(x)-f(x)\|+\|f(x)-h_{n-1}(x)\|\\ &< 2^{-(n+2)}+2^{-(n+1)}<2^{-n},\end{aligned}$$

于是由(4.1.9)可知

$$f(x)=f_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\quad \forall x\in D.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) 设$f=f_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, 对任意$n\in\mathbb{N}$, 取充分大的$\tau(n)\in\mathbb{N}$, 使得$2^{-\tau(n)}<\frac{1}{n^2}$, 又令$K_{\tau(n)}=\sum\limits_{k=0}^{\tau(n)} f_k$, 以及$G_{\tau(n)}=\{y|y=y_0+y_1+\cdots+y_{\tau(n)},y_i\in Y_i,i=0,1,\cdots,\tau(n)\}$. 显然$K_{\tau(n)}:D\to G_{\tau(n)}$是连续有界的, 而$G_{\tau(n)}$是$Y$的一个有限维子空间, 所以$K_{\tau(n)}$ 是全连续算子. 由(3)的假设条件可知在D上$\{K_{\tau(n)}\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于$f$, 由定理4.1.12即知$f$是全连续的. ∎

下面介绍全连续算子的延拓定理, 证明参见[6].

定理4.1.15. 设X和Y是实Banach空间, $D\subset X$是闭集, $f:D\to Y$全连续. 那么必存在全连续算子$\tilde{f}:X\to Y$, 使得当$x\in D$时, 恒有$\tilde{f}(x)=f(x)$, 并且$\tilde{f}(X)\subset\overline{\mathrm{co}}f(D)$, 这里$\overline{\mathrm{co}}f(D)$表示$f$的值域$f(D)$在$Y$中的凸闭包[1].

[1] 见定理4.3.14中的注释.

§4.2 微分和积分理论

这一节我们将学习Banach空间中的算子的微分和积分理论, 重点介绍Fréchet微分(简称F-微分)和Gâteaux微分(简称G-微分). F-微分和G-微分分别是多元函数全微分概念和方向导数概念在抽象Banach空间中算子上的推广. 作为预备知识, 我们先介绍一下抽象函数的积分理论.

§4.2.1 抽象函数的积分

下面讨论抽象函数的Riemann积分, 它是微积分学中Riemann积分的推广. 设X是一个实Banach空间, 其范数为$\|\cdot\|$. 我们称定义域为$\mathbb{R}$中的区间$[a,b]$而值域在实Banach空间X中的算子$x(\cdot):[a,b]\to X$为抽象函数.

定义4.2.1. 设$x(\cdot):[a,b]\to X$是一个抽象函数, 对于$[a,b]$的任一分割

$$P=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\in[a,b]\mid a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\},$$

$d(P)\triangleq\max\{t_i-t_{i-1}|1\le i\le n\}$表示该分割的模. 作积分和

$$S(P)=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i,\quad \text{其中}\ \ \Delta t_i=t_i-t_{i-1},\quad \xi_i\in[t_{i-1},t_i],\quad 1\le i\le n.$$

如果存在某元素$I\in X$, 使得对于任给$\varepsilon>0$, 都存在$\delta>0$, 只要分割P满足$d(P)<\delta$, 无论$\xi_i\in[t_{i-1},t_i](i=1,2,\cdots,n)$如何选取, 总有

$$\|S(P)-I\|<\varepsilon,$$

则称抽象函数$x(t)$在$[a,b]$上是Riemann可积的, 元素I称为$x(t)$在$[a,b]$上的抽象Riemann积分, 简称积分, 记为

$$I=\int_a^b x(t)dt.$$

上述抽象函数Riemann积分定义是由通常的数值函数Riemann积分定义平移过来的, 因而数值函数Riemann积分的许多性质对抽象函数的Riemann积分也成立. 我们列举如下常用结论, 其证明可参阅[6].

定理4.2.2. 设X是Banach空间, $x(t)$在$[a,b]$上连续, 则$x(t)$在$[a,b]$上Riemann可积.

命题4.2.3. 设$x(t),x_1(t),x_2(t)$都在$[a,b]$上Riemann可积, $a<c<b$, α,β为实数, $f\in X'$, 则

(1) $\int_a^b[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]dt=\alpha\int_a^b x_1(t)dt+\beta\int_a^b x_2(t)dt$.

(2) $\int_a^b x(t)dt=\int_a^c x(t)dt+\int_c^b x(t)dt$.

(3) $\left\|\int_a^b x(t)dt\right\|\le\int_a^b\|x(t)\|dt$.

(4) $f\left(\int_a^b x(t)dt\right)=\int_a^b f(x(t))dt$.

(5) 设抽象函数序列$\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$中的每一项都在$[a,b]$上Riemann可积, 且该序列在$[a,b]$上一致收敛于$x(t)$, 则$x(t)$在$[a,b]$上Riemann可积, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)dt=\int_a^b x(t)dt.$$

定义4.2.4. 设$x(t):[a,b]\to X$是一个抽象函数, $t_0\in(a,b)$, 若存在$y_0\in X$, 使得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-y_0\right\|=0,$$

则称$x(t)$在$t=t_0$点可微, y_0称为$x(t)$在t_0点的导数, 记为$\frac{dx(t_0)}{dt}$或$x'(t_0)$, 即

$$x'(t_0)=\frac{dx(t_0)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}.$$

特别地, 若在上述极限中限制$\Delta t>0$(或$\Delta t<0$), 那么称$x(t)$在t_0右(或左)可微. 如果$x(t)$在$[a,b]$中每一点均可微(在a点右可微, 在b点左可微), 则称$x(t)$在$[a,b]$上可微, 导函数$x'(t):[a,b]\to X$是一个抽象函数.

显然, 若$x(t)$在点t_0可微, 则$x(t)$必在t_0连续.

定理4.2.5. 若$x(t):[a,b]\to X$连续, 则

$$y(t)\triangleq\int_a^t x(s)ds,\quad \forall t\in[a,b],$$

在$[a,b]$上可微, 且

$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t).$$

证明 设$t\in[a,b),\Delta t>0$且$t+\Delta t\in(a,b]$, 则有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-x(t)\right\|&=\left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}x(s)ds-x(t)\right\|\\&=\left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}(x(s)-x(t))ds\right\|\\&\le\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\|x(s)-x(t)\|ds\\&\le\max_{t\le s\le t+\Delta t}\|x(s)-x(t)\|\to 0(\Delta t\to 0).\end{aligned}$$

类似地, 对于$t \in (a,b]$考虑当$\Delta t < 0$且$t+\Delta t \in [a,b)$时可得同样结果. 故y在$[a,b]$上是可微的, 并且$y'(t) = x(t)$. ∎

定理4.2.6. 若$x(t) : [a,b] \to X$在$[a,b]$上具有连续的导函数$x'(t)$, 则成立Newton-Leibniz公式

$$\int_c^d x'(t)dt = x(d) - x(c),$$

这里$[c,d] \subset [a,b]$.

证明 任取$f \in X'$, 令

$$g(t) = f(x(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

显然g是$[a,b]$上实值连续函数, 而且对于$t \in [a,b], t+\Delta t \in [a,b]$,

$$\frac{1}{\Delta t}(g(t+\Delta t) - g(t)) = \frac{1}{\Delta t}(f(x(t+\Delta t)) - f(x(t))) = f\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right).$$

由f的连续性可知g是可微的, 而且

$$g'(t) = f(x'(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

由条件$x'(t)$连续, 那么$g'(t)$是$[a,b]$上的连续函数. 利用Newton-Leibniz公式就有

$$\int_c^d f(x'(t))dt = f(x(d)) - f(x(c)),$$

而

$$\int_c^d f(x'(t))dt = f\left(\int_c^d x'(t)dt\right),$$

于是利用f的线性有

$$f\left(\int_c^d x'(t)dt - x(d) + x(c)\right) = 0.$$

由$f \in X'$的任意性就得

$$\int_c^d x'(t)dt = x(d) - x(c).$$

定理得证. ∎

定理4.2.7. 若$x(t)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可微, 则必存在$a < \xi < b$, 使得

$$\|x(b) - x(a)\| \le (b-a)\|x'(\xi)\|.$$

证明 若$x(b) = x(a)$, 那么结论显然成立. 不妨设$x(b) \neq x(a)$, 由Hahn-Banach延拓定理可知存在$f \in X'$, 满足$\|f\| = 1$, 且

$$f(x(b) - x(a)) = \|x(b) - x(a)\|.$$

令$g(t) = f(x(t))$, 那么由条件知g是(a, b)上连续可微实值函数, 且

$$g'(t) = f(x'(t)), \quad \forall t \in (a, b).$$

由中值公式可得, 存在$a < \xi < b$,

$$g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a),$$

即

$$f(x(b)) - f(x(a)) = f(x'(\xi))(b - a),$$

从而有

$$\|x(b) - x(a)\| = f(x'(\xi))(b - a) \leq \|f\| \|x'(\xi)\|(b - a) = (b - a)\|x'(\xi)\|.$$

定理得证. ∎

§4.2.2 Fréchet微分

在许多研究领域中我们往往需要处理一些非线性问题, 例如非线性微分方程、非线性积分方程. 对于非线性问题, 首先考虑相应的线性问题是比较自然的一种研究途径, 而微分是常用的线性化手段. 下面介绍的Fréchet意义下的微分, 由M. Fréchet于1925年首次引入, 是有限维欧氏空间中函数全微分概念的在一般的Banach空间中算子上的自然推广.

定义4.2.8. 设X, Y为实Banach空间, $U \subset X$为开集, 算子$f : U \to Y$称为在点$x_0 \in U$是Fréchet可微的(简称F-可微), 是指存在某有界线性算子$A \in L(X, Y)$, 只要$h \in X$使得$x_0 + h \in U$, 就有

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \omega(x_0, h), \tag{4.2.1}$$

其中$\|\omega(x_0, h)\|_Y = o(\|h\|_X)$, 即

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \tag{4.2.2}$$

这时Banach空间Y中的元素Ah称为f在x_0处的Fréchet微分(简称F-微分); 有界线性算子A就称为f在x_0点的Fréchet导算子(简称F-导算子), 记为$f'(x_0)$.

若f在U内每点都Fréchet可微, 则称f在U内F-可微, 这时映射$f' : U \to L(X,Y)$称为算子f的F-导映射. 若导映射f'在x_0点处连续, 则称算子f在x_0点处连续可微. 如果f在U中每一点都是连续可微的, 就称f在U上是连续可微的. U上连续可微算子全体记作$C^1(U,Y)$.

注记4.2.9. 算子的Fréchet可微性并不依赖于空间X,Y上的范数. 若$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是定义在X上的两个等价范数, 那么算子f在点$x_0 \in (X, \|\cdot\|_1)$处F-可微等价于在点$x_0 \in (X, \|\cdot\|_2)$处F-可微, 并且具有相同的F-微分.

命题4.2.10. 在上述定义下, 以下结论成立:

(1) F-导算子是唯一的, 即若$A_1, A_2 \in L(X,Y)$都使得(4.2.1), (4.2.2)成立, 那么必有$A_1 = A_2$.

(2) 求导运算是线性的, 即若$f_1, f_2 : U \to Y$均在点$x \in U$处F-可微, c_1, c_2是常数, 则$c_1 f_1 + c_2 f_2$也在点x处F-可微, 且

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)'(x) = c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x).$$

(3) 常值算子的F-导映射是0, 即若对于任意$x \in X$都有$f(x) \equiv y_0 \in Y$, 则

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

(4) 有界线性算子的F-导映射为常映射, 即若对于某个$A \in L(X,Y)$, $f(x) = Ax$对于任意$x \in X$成立, 那么

$$f'(x) = A, \quad \forall x \in X.$$

例4.2.11. 设由m个n元函数$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(i = 1, 2, \cdots, m)$确定一个映$\mathbb{R}^n$入$\mathbb{R}^m$的算子$f$如下:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

设每个f_i都在$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$的某个邻域内具有连续的一阶偏导数. 于是

对$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbb{R}^n$, 当$\|h\|\triangleq\left(\sum\limits_{i=1}^n h_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 充分小时, 利用中值公式就有

$$\begin{aligned}f(x^{(0)}+h)-f(x^{(0)}) &= (f_1(x^{(0)}+h)-f_1(x^{(0)}),\cdots,f_m(x^{(0)}+h)-f_m(x^{(0)}))\\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\Big|_{x^{(0)}+\theta_1 h}\cdot h_i,\cdots,\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\Big|_{x^{(0)}+\theta_m h}\cdot h_i\right).\end{aligned}$$

由每个$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$的连续性知$f$在$x^{(0)}$处$F$-可微, 且$f'(x^{(0)})$由下式表示

$$\begin{aligned}f'(x^{(0)})h &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\Big|_{x^{(0)}}\cdot h_i,\cdots,\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\Big|_{x^{(0)}}\cdot h_i\right)\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \cdots\\ h_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

也就是说线性算子$f'(x^{(0)})$是由$m\times n$矩阵$\left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}\right)_{1\le i\le m,1\le j\le n}$所确定的线性变换.

例4.2.12. X是一个实Hilbert空间, $(\cdot,\cdot)$表示其内积, 试求泛函$J(x)=\|x\|^2$在给定点$x_0\in X$处的Fréchet微分.

解 对于任意$h\in X$, 简单计算可知

$$J(x_0+h)-J(x_0)=(2x_0,h)+\|h\|^2.$$

显然$(2x_0,\cdot)$定义了X上的一个有界线性泛函, 且$\omega(x_0,h)\triangleq\|h\|^2=o(\|h\|)$. 于是$J$在点$x_0$处是Fréchet可微的, 且$J'(x_0)h=(2x_0,h),\forall h\in X$. ∎

设X是实Hilbert空间, U是X中的开集, 若泛函$J:U\to\mathbb{R}$在点$x_0\in U$处是Fréchet可微的, 那么J在x_0处的Fréchet-导算子$J'(x_0)\in L(X,\mathbb{R})=X'$. 由Fréchet-Riesz定理, 存在$X$中的某元素, 记为$\nabla J(x_0)$, 使得

$$J'(x_0)h=(\nabla J(x_0),h),\quad \forall h\in X.$$

X中的该元素$\nabla J(x_0)$称为泛函J在x_0处的梯度(gradient).

命题4.2.13. 设$f:U\to Y$在点$x_0\in U$处是F-可微的, 则f在点x_0处连续.

证明 依据定义$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\omega(x_0,h)$, 其中$\|\omega(x_0,h)\|_Y=o(\|h\|_X)$. 于是

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\le\|f'(x_0)\|\|h\|_X+\|\omega(x_0,h)\|_Y,$$

由此式即可得证f在x_0点处连续. ∎

定理4.2.14. (**链锁规则**)设X,Y,Z均为实Banach空间, 开集$U\subset X$, $V\subset Y$, 算子$f:U\to Y$, $g:V\to Z$, 而且$f(U)\subset V$. 如果f在点$x_0\in U$处F-可微, g在点$y_0=f(x_0)$处F-可微, 则复合算子$g\circ f$在点x_0处是F-可微的, 且

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

证明 由条件可知存在有界线性算子$f'(x_0)\in L(X,Y), g'(y_0)\in L(Y,Z)$, 只要$h\in X, k\in Y$使得$x_0+h\in U, y_0+k\in V$, 就有

$$\begin{aligned}f(x_0+h)-f(x_0)&=f'(x_0)h+\omega(x_0,h),\\ g(y_0+k)-g(y_0)&=g'(y_0)k+\omega(y_0,k),\end{aligned}$$

其中$\|\omega(x_0,h)\|_Y=o(\|h\|_X), \|\omega(y_0,k)\|_Z=o(\|k\|_Y)$. 现在取$h\in X$满足$x_0+h\in U$, 且取$k=f(x_0+h)-f(x_0)$. 于是

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)&=g(f(x_0+h))-g(f(x_0))\\ &=g'(y_0)k+\omega(y_0,k)\\ &=g'(y_0)f'(x_0)h+g'(y_0)\omega(x_0,h)+\omega(y_0,k).\end{aligned}$$

记$\tilde{\omega}(x_0,h)=g'(y_0)\omega(x_0,h)+\omega(y_0,k)$, 那么

$$\frac{\|\tilde{\omega}(x_0,h)\|_Z}{\|h\|_X}\le\|g'(y_0)\|\frac{\|\omega(x_0,h)\|_Y}{\|h\|_X}+\frac{\|\omega(y_0,k)\|_Z}{\|h\|_X}. \tag{4.2.3}$$

注意到f在x_0处连续, 以及

$$\begin{aligned}\frac{\|\omega(y_0,k)\|_Z}{\|h\|_X}&=\frac{\|\omega(y_0,k)\|_Z}{\|k\|_Y}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)\|_Y}{\|h\|_X}\\ &\le\frac{\|\omega(y_0,k)\|_Z}{\|k\|_Y}\left(\|f'(x_0)\|+\frac{\|\omega(x_0,h)\|_Y}{\|h\|_X}\right),\end{aligned}$$

可知$\|\tilde{\omega}(x_0,h)\|_Z=o(\|h\|_X)$. 从而(4.2.3)表明$g\circ f$在点$x_0$处F-可微, 且

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0).$$

定理得证. ∎

例4.2.15. 设X是一个实Hilbert空间, $(\cdot,\cdot)$表示其内积, 试求泛函$N(x)=\|x\|$在给定非零点$x_0\in X$处的Fréchet微分.

解 由例4.2.12知$J(x)=\|x\|^2$是Fréchet可微的. 定义函数$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$为$f(t)=t^{\frac{1}{2}}$, 这里$\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$. 显然$f$是连续可微的, 于是由链锁法则可知复合算子$f\circ J$在$x_0\neq 0$处是Fréchet可微的. 又注意到$N=f\circ J$, 所以$N$在$x_0\neq 0$处是Fréchet可微的, 且

$$N'(x_0)h=\frac{1}{2\|x_0\|}(2x_0,h),\quad \forall h\in X.$$

$N(x)$在$x=0$处不是Fréchet可微的. 若不然, 存在$A\in X'$使得$\|h\|=Ah+\omega(0,h)$ $(\forall h\in X)$. 用$-h$替代h可得$\|h\|=-Ah+\omega(0,h)$, 于是$\|h\|=o(\|h\|)$, 显然谬误. ∎

推论4.2.16. 设$f:U\subset X\to Y$在点$x_0\in U$处Fréchet可微, 且$g\in L(Y,Z)$, 则$g\circ f$在x_0处也Fréchet可微, 且

$$(g\circ f)'(x_0)=gf'(x_0).$$

定理4.2.17. 设X,Y是两个实Banach空间, U是X中的开集. 对于$x_0,h\in X$, 用ℓ表示线段$\{x\in X|x=x_0+th,0\leq t\leq 1\}$. 以下设$\ell\subset U$,

(1) 若泛函$f:U\to\mathbb{R}$在ℓ上是Fréchet可微的, 则存在$0<\tau<1$, 使中值公式成立

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\tau h)h. \tag{4.2.4}$$

(2) 若算子$f:U\to Y$在ℓ上是Fréchet可微的, 则存在$0<\tau<1$, 使

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\leq\|f'(x_0+\tau h)h\|. \tag{4.2.5}$$

证明 (1) 对于给定的$x_0,h\in X$, 设$g:[0,1]\to X$为$g(t)=x_0+th$. 令实值函数$\varphi(t)=(f\circ g)(t),\forall t\in[0,1]$. 由链锁规则易知$\varphi(t)$在$[0,1]$上Fréchet可微, 而且

$$\varphi'(t)=f'(x_0+th)h,\quad \forall t\in[0,1].$$

由微分中值定理, 存在$0<\tau<1$, 使得$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$, 由此可得(4.2.4).

(2) 不妨假设$f(x_0+h)-f(x_0)\neq 0$, 由Hahn-Banach定理可知, 存在$\psi\in Y'$, 满足$\|\psi\|=1$, 且

$$\psi(f(x_0+h)-f(x_0))=\|f(x_0+h)-f(x_0)\|. \tag{4.2.6}$$

设实值函数$\varphi(t)=(\psi\circ f\circ g)(t),\forall t\in[0,1]$, 其中$g$如上定义. 利用推论4.2.16和链锁规则易得

$$\varphi'(t)=\psi(f'(x_0+th)h),\quad \forall t\in[0,1].$$

于是由中值公式知, 存在$0<\tau<1$, 使$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$, 即

$$\psi(f(x_0+h)-f(x_0))=\psi(f'(x_0+\tau h)h).$$

利用(4.2.6)就有

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|=\psi(f'(x_0+\tau h)h)\leq\|\psi\|\|f'(x_0+\tau h)h\|=\|f'(x_0+\tau h)h\|.$$

定理得证. ∎

注记4.2.18. 对于泛函, 中值公式(4.2.4)成立, 但对于一般的算子, 只能得出公式(4.2.5), 而(4.2.4)一般不成立. 例如, 设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$定义为$f(x_1,x_2)=(x_1^2,x_2^3)$. 对于$x^{(0)}=(0,0),h=(1,1)$, 有$f(x^{(0)}+h)-f(x^{(0)})=(1,1)$. 由例4.2.11可知

$$f'(x^{(0)}+\tau h)h=(2\tau,3\tau^2),\quad \tau\in(0,1).$$

若中值公式(4.2.4)成立, 那么τ应同时满足$1=2\tau$和$1=3\tau^2$, 显然这是不可能的.

下面我们将引入算子的高阶微分, 并建立Taylor公式. 作为准备, 首先介绍多重线性算子等概念.

定义4.2.19. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y$为实的赋范线性空间, 积空间$X=\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$到$Y$的映射$\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为为$n$重线性算子, 是指对于任意$i\in\{1,2,\cdots,n\}$以及任意给定$x_j\in X_j,\ j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$,

$$f(\cdot)\triangleq\Gamma(x_1,\cdots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\cdots,x_n):X_i\to Y$$

是线性算子. 如果还存在常数$M>0$, 使得

$$\|\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_Y\leq M\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}\cdots\|x_n\|_{X_n},\quad \forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X,$$

则称Γ为n重有界线性算子.

记$L(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i,Y)$为$\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$到$Y$的$n$重有界线性算子的全体, 并在其上定义加法与数乘运算

$$(\Gamma+\tilde{\Gamma})(x_1,\cdots,x_n)=\Gamma(x_1,\cdots,x_n)+\tilde{\Gamma}(x_1,\cdots,x_n),$$
$$(\alpha\Gamma)(x_1,\cdots,x_n)=\alpha\Gamma(x_1,\cdots,x_n),$$

又引入范数

$$\|\Gamma\|\triangleq\sup_{\|x_1\|_{X_1}\le 1,\cdots,\|x_n\|_{X_n}\le 1}\|\Gamma(x_1,\cdots,x_n)\|_Y,\quad\forall\Gamma\in L(\prod_{i=1}^{n}X_i,Y),$$

那么$L(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i,Y)$成为一个赋范线性空间. 当$Y$是Banach空间时, $L(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i,Y)$为Banach空间.

设X和Y是两个赋范线性空间, 并引入下列空间：

$$\begin{aligned}L_1(X,Y)&=L(X,Y),\\ L_2(X,Y)&=L(X,L_1(X,Y)),\\ \cdots\quad\cdots&\quad\cdots\quad\cdots\\ L_n(X,Y)&=L(X,L_{n-1}(X,Y)),\end{aligned}$$

可以归纳地证明上述空间都是赋范线性空间, 而且当Y是Banach空间时, $L_1(X,Y)$, $\cdots$, $L_n(X,Y)$都是Banach空间.

定理4.2.20. 设X和Y是实Banach空间, 则$L(\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n},Y)$与$L_n(X,Y)$等距同构.

证明 仅就$n=2$的情形证明, 一般情形可由归纳法得到. 任取$\Gamma\in L(X\times X,Y)$, 对任意给定$x\in X$, 定义$\Gamma_x(\lambda)=\Gamma(x,\lambda),\forall\lambda\in X$, 那么$\Gamma_x\in L(X,Y)$. 令

$$\mathscr{M}(x)=\Gamma_x,\quad\forall x\in X,\tag{4.2.7}$$

显然$\mathscr{M}$是X到$L(X,Y)$的线性算子, 且

$$\|\mathscr{M}(x)\|=\|\Gamma_x\|=\sup_{\|\lambda\|_X\le 1}\|\Gamma(x,\lambda)\|_Y\le\|\Gamma\|\|x\|_X,$$

故$\mathscr{M} \in L_2(X,Y)$, 且$\|\mathscr{M}\| \le \|\Gamma\|$. 现在定义$L(X\times X,Y)$到$L_2(X,Y)$的映射$\varphi$为

$$\varphi(\Gamma) = \mathscr{M}, \quad \forall \Gamma \in L(X\times X, Y),$$

其中$\Gamma, \mathscr{M}$满足(4.2.7), 显然φ是单射. 又对于任意$\mathscr{M} \in L_2(X,Y)$, 令

$$\Gamma_{\mathscr{M}}(x_1,x_2) = (\mathscr{M}(x_1))(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

那么$\Gamma_{\mathscr{M}}$是$X\times X$到Y的双线性算子, 且对任意$(x_1,x_2)\in X\times X$,

$$\|\Gamma_{\mathscr{M}}(x_1,x_2)\|_Y = \|(\mathscr{M}(x_1))(x_2)\|_Y \le \|\mathscr{M}(x_1)\|\|x_2\|_X \le \|\mathscr{M}\|\|x_1\|_X\|x_2\|_X,$$

即$\Gamma_{\mathscr{M}} \in L(X\times X,Y)$且$\|\Gamma_{\mathscr{M}}\| \le \|\mathscr{M}\|$. 而对于任意给定的$x\in X$,

$$\Gamma_{\mathscr{M}}(x,\lambda) = (\mathscr{M}(x))(\lambda), \quad \forall \lambda \in X,$$

故$(\Gamma_{\mathscr{M}})_x = \mathscr{M}(x)$, 即$\varphi(\Gamma_{\mathscr{M}}) = \mathscr{M}$, 由此可知映射$\varphi$还是满射. 此外, 容易验证

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha\Gamma) &= \alpha\varphi(\Gamma), \quad \forall \alpha\in\mathbb{R},\ \forall\Gamma\in L(X\times X,Y),\\ \varphi(\Gamma+\tilde{\Gamma}) &= \varphi(\Gamma)+\varphi(\tilde{\Gamma}), \quad \forall \Gamma,\tilde{\Gamma}\in L(X\times X,Y).\end{aligned}$$

从而可知$\varphi: L(X\times X,Y)\to L_2(X,Y)$是同构, 且$\|\varphi(\Gamma)\| = \|\Gamma\|$. 于是$L(X\times X,Y)$与$L_2(X,Y)$等距同构. ∎

定义4.2.21. 设X,Y为实Banach空间, U为X中的开集. 若算子$f: U\to Y$在U上是Fréchet可微的, 且导映射$f': U\to L(X,Y)$在点$x_0\in U$处是Fréchet可微的, 则称算子f在点x_0处是二阶Fréchet可微的. 这时称f'在点x_0处的Fréchet导算子$(f')'(x_0)$为f在点x_0处的二阶Fréchet导算子, 记为$f''(x_0)$.

若$f': U\to L(X,Y)$在U上Fréchet可微且其导映射$f'': U\to L_2(X,Y)$在点x_0处是Fréchet可微的, 那么就称算子f在点x_0处是三阶Fréchet可微的, 这时称f''在点x_0处的Fréchet导算子$(f'')'(x_0)$为f在点x_0处的三阶Fréchet导算子, 记为$f'''(x_0)$.

一般地, 若$f^{(n-2)}: U\to L_{n-2}(X,Y)$在$U$内Fréchet可微且其导映射$f^{(n-1)}: U\to L_{n-1}(X,Y)$ 在点x_0处是Fréchet可微的, 则称算子f在点x_0处是n阶Fréchet可微的, 这时称$f^{(n-1)}$在点x_0处的Fréchet导算子$f^{(n)}(x_0)$为f在点x_0处的n阶Fréchet导算子, 并记为$f^{(n)}(x_0)$.

注记4.2.22. 显然$f'(x) \in L_1(X,Y) = L(X,Y)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x) \in L_n(X,Y)$, 根据定理4.2.20, 可以认为$f'(x) \in L(X,Y)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x) \in L(\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n}, Y)$, 并简记$f^{(n)}(x)(\underbrace{h, h, \cdots, h}_{n}) = f^{(n)}(x)h^n$.

定理4.2.23. (**Taylor公式**) 设U是Banach空间X中的开集, $x_0 \in U, h \in X$, 并且设直线段$\ell \triangleq \{x | x = x_0 + th, 0 \le t \le 1\} \subset U$. 若泛函$f : U \to \mathbb{R}$在$l$上是$n+1$阶Fréchet可微的, 则存在$\theta \in (0,1)$, 使下式成立

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}. \end{aligned}$$

证明 记$g(t) = f(x_0+th) (\forall t \in [0,1])$. 既然$f$在$l$上是$n+1$阶Fréchet可微的, 那么由链锁规则可知$g(t)$在$[0,1]$上$n+1$阶可微, 且

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(x_0+th)h, \\ g''(t) &= f''(x_0+th)h^2, \\ \cdots &\quad \cdots \\ g^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}. \end{aligned}$$

由Taylor公式即知, 存在$\theta \in (0,1)$, 使得

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta).$$

由此即得欲证公式. ∎

§4.2.3 Gâteaux微分

下面介绍的Gâteaux微分是多元函数方向导数的推广, 由R. Gâteaux于1922年首先引入.

定义4.2.24. 设X和Y是两个实Banach空间, U是X中的开集, 算子$f : U \to Y$, $x_0 \in U$. 若对于任何$h \in X$, 极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} \tag{4.2.8}$$

都存在, 那么称f在点x_0处Gâteaux可微(简称G-可微), 极限(4.2.8) 叫做f在x_0处(沿方向h)的Gâteaux微分, 记为$df(x_0,h)$, 即

$$df(x_0,h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}. \tag{4.2.9}$$

若f在U中每一点处都是Gâteaux可微的, 就称f在U上是Gâteaux可微的.

命题4.2.25. 根据上述定义, 以下结论成立:

(1) 如果f在点x_0处是Gâteaux可微的, 那么它在该点处沿任意方向h的Gâteaux微分$df(x_0,h)$是唯一确定的.

(2) 若f在点x_0处是Gâteaux可微的, 那么对于任意方向$h\in X$,

$$df(x_0,\lambda h)=\lambda df(x_0,h),\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

(3) 对于任意$\Phi\in Y'$以及任意$h\in X$, 函数$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$定义为$\varphi(t)=\Phi(f(x_0+th))$. 若$f$在点$x_0$处是Gâteaux可微的, 那么$\varphi$在$t=0$处是可微的, 且$\varphi'(0)=\Phi(df(x_0,h))$.

Gâteaux微分也有类似于Fréchet微分的中值公式.

定理4.2.26. 设X是实Banach空间, U是X中的开集, $x_0\in U$, $h\in X$. ℓ表示直线段$\{x\in X|x=x_0+th,0\le t\le 1\}$. 以下假设$\ell\subset U$,

(1) 若泛函$f:U\to\mathbb{R}$在ℓ上是Gâteaux可微的, 则存在$0<\tau<1$, 使得如下中值公式成立

$$f(x_0+h)-f(x_0)=df(x_0+\tau h,h).$$

(2) 设Y是另一个实Banach空间, 算子$f:U\to Y$在ℓ上是Gâteaux可微的, 则存在$0<\tau<1$, 使得

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|_Y\le\|df(x_0+\tau h,h)\|_Y.$$

我们已经学习了抽象空间上算子的两种微分—Fréchet微分和Gâteaux微分, 下面研究算子Fréchet可微性与Gâteaux可微性的关系. Fréchet微分相对于Gâteaux微分而言对算子的要求强一些. 我们知道若算子f在点$x_0\in D$处Fréchet可微, 则f必定在该点处是连续的, 但f在x_0处Gâteaux可微一般不能保证f在该点处连续.

例4.2.27. 考察如下函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\left(\frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}\right)^2, & x_2\neq 0,\\ 0, & x_2=0.\end{cases}$$

试证明f在$\theta=(0,0)$是Gâteaux可微的, 但不连续.

证明 对于任意向量$h=(h_1,h_2)$, 若$h_2=0$, 则

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\theta+th)-f(\theta)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(th_1,0)-f(0,0)}{t}=0. \tag{4.2.10}$$

若$h_2\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f(\theta+th)-f(\theta)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{(th_1)^2th_2}{(th_1)^4+(th_2)^2}\right)^2\\&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{t^3h_1^2h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}\right)^2=0.\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

(4.2.10)和(4.2.11)表明f在点θ处是Gâteaux可微的, 但是如果令$x_2=x_1^2, x_1\neq 0$,

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)}f(x_1,x_2)=\lim_{x_1\to 0}\left(\frac{x_1^2x_1^2}{x_1^4+(x_1^2)^2}\right)^2=\frac{1}{4}\neq f(0,0),$$

这表明f在θ处不连续. ∎

以下诸结论进一步表明Gâteaux微分相对于Fréchet微分而言是一种较弱的微分.

定理4.2.28. 设X和Y是实Banach空间, U是X中的开集, 若算子$f:U\to Y$在点$x_0\in U$处Fréchet可微, 则f必在x_0处是Gâteaux可微的, 并且

$$df(x_0,h)=f'(x_0)h,\quad \forall h\in X.$$

证明 因为f在x_0点处Fréchet可微, 那么只要$h\in X$使得$x_0+h\in U$, 就有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\omega(x_0,h),$$

其中$\|\omega(x_0,h)\|_Y=o(\|h\|_X)$. 于是对于$|t|$充分小的$t\in\mathbb{R}$就有

$$\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)h+\frac{\omega(x_0,th)}{t}.$$

注意到

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\omega(x_0,th)}{t}\right\|_Y=\lim_{t\to 0}\frac{\|\omega(x_0,th)\|_Y}{\|th\|_X}\|h\|_X=0,$$

从而可得

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)h.$$

因此f在x_0处Gâteaux可微, 且$df(x_0,h)=f'(x_0)h$. ∎

设算子f在点x_0处Gâteaux可微, 如果存在$B\in L(X,Y)$, 可以把Gâteaux微分表示为$df(x_0,h)=Bh$, 则称f在x_0处具有有界线性的Gâteaux微分. 以上定理表明f在某点Fréchet可微, 则f一定在该点处Gâteaux可微且具有有界线性的Gâteaux微分; 但是, 一般而言Gâteaux可微不能保证Fréchet可微, 即使f在点x_0处具有有界线性的Gâteaux微分, 也不能断言f在点x_0处Fréchet可微.

例4.2.29. 考察如下函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1+x_2+\frac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2}, & (x_1,x_2)\neq(0,0),\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0).\end{cases}$$

试证明f在$\theta=(0,0)$处连续且是Gâteaux可微的, 但不是Fréchet可微的.

证明 对于任意非零点$x=(x_1,x_2)$, 在极坐标变换下记$x_1=r\cos\alpha$, $x_2=r\sin\alpha$, 其中$r=\|x\|\triangleq\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, 这时有

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)}f(x_1,x_2)=\lim_{r\to 0}\left(r(\cos\alpha+\sin\alpha)+\frac{r^4\cos^3\alpha\sin\alpha}{r^4\cos^4\alpha+r^2\sin^2\alpha}\right)=0=f(0,0),$$

这表明f在点θ处是连续的. 又对于任意非零向量$h=(h_1,h_2)$都有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\theta+th)-f(\theta)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(th_1+th_2+\frac{t^4h_1^3h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}\right)=h_1+h_2, \tag{4.2.12}$$

也就是说, f在点θ处是Gâteaux可微的, 而且具有有界线性的Gâteaux微分$df(\theta,h)=(1,1)(h_1,h_2)^T$. 如果$f$在点$\theta$处是Fréchet可微的, 即$f$在点$\theta$的$F$-导算子$f'(\theta)$存在且满足

$$f(\theta+h)-f(\theta)=f'(\theta)h+\omega(\theta,h),\quad \forall h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2,$$

其中$\|\omega(\theta,h)\|=o(\|h\|)$, 那么依据定理4.2.28有$f'(\theta)h=df(\theta,h)=h_1+h_2$. 于是

$$\omega(\theta,h)=f(\theta+h)-f(\theta)-f'(\theta)h=\frac{h_1^3h_2}{h_1^4+h_2^2},$$

如果令$h_2=h_1^2$,

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(\theta,h)\|}{\|h\|}=\lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^5}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

这与$\|\omega(\theta,h)\|=o(\|h\|)$矛盾, 所以$f$在点$\theta$处不是Fréchet可微的. ∎

在这个例子中, f在点θ处的Gâteaux微分(4.2.12)并不是f在点θ处的增量的线性主部.

定理4.2.30. 设X和Y是实Banach空间, U是X中的开集, 算子$f:U\to Y$在U中任一点处都有有界线性的Gâteaux微分, 即

$$\forall x\in U,\ \ \exists B(x)\in L(X,Y),\ \ \text{s.t.}\quad df(x,h)=B(x)h,\quad \forall h\in X,$$

若映射$B:U\to L(X,Y), x\to B(x)$在点$x_0\in U$处连续, 则f在点x_0处Fréchet可微, 而且$f'(x_0)=B(x_0)$.

证明 由映射$B:U\to L(X,Y)$在点x_0处的连续性可知, 对于任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$\|h\|_X<\delta$时,

$$\|B(x_0+h)-B(x_0)\|_{L(X,Y)}\le\varepsilon.$$

记$\omega(x_0,h)=f(x_0+h)-f(x_0)-B(x_0)h$. 不失一般性, 设$\omega(x_0,h)\neq 0$. 由Hahn-Banach延拓定理, 存在$\Phi\in Y'$满足$\|\Phi\|=1$, 且$\Phi(\omega(x_0,h))=\|\omega(x_0,h)\|_Y$. 现在定义函数$\varphi(t)=\Phi(f(x_0+th)),\forall t\in[0,1]$. 因为$f$在$U$中任一点处都有有界线性的Gâteaux微分, 由命题4.2.25可知φ可微, 并且

$$\varphi'(t)=\Phi(B(x_0+th)h),\quad \forall t\in[0,1].$$

于是利用中值公式, 存在$0<\theta<1$, 使得

$$\Phi(f(x_0+h)-f(x_0))=\Phi(B(x_0+\theta h)h).$$

从而

$$\begin{aligned}\|\omega(x_0,h)\|_Y&=\Phi(f(x_0+h)-f(x_0)-B(x_0)h)\\&=\Phi(B(x_0+\theta h)h-B(x_0)h)\\&\le\|\Phi\|\|B(x_0+\theta h)-B(x_0)\|_{L(X,Y)}\|h\|_X.\end{aligned}$$

于是对上述$\varepsilon>0$, 只要$\|h\|_X<\delta$, 就有$\frac{\|\omega(x_0,h)\|_Y}{\|h\|_X}<\varepsilon$, 也就是说$\|\omega(x_0,h)\|_Y=o(\|h\|_X)$. 故$f$在点$x_0$处Fréchet可微, $f'(x_0)h=B(x_0)h$. ∎

定理4.2.30告诉我们, 在一定的条件下可由算子的Gâteaux可微性得到其Fréchet可微性, 更为重要的是此定理实际上提供了一种求算子Fréchet微分的可行方法. 求算

子的Gâteaux微分实际上是求单个实变量抽象函数的微分, 这比直接由定义求算子的Fréchet微分更容易. 这类似于求多元函数的梯度, 我们只需求函数对各个变量的偏导数即可; 当各偏导数都连续时, 函数是可微的并且容易写出函数的全微分.

例4.2.31. X是一个实Hilbert空间, 试求泛函$J(x)=\|x\|^2$在给定点$x_0\in X$处的Fréchet微分.

解 在例4.2.12中我们曾直接由定义求得J的Fréchet微分, 现在我们从另一个角度求J的Fréchet微分. 对于任意$x\in X$以及任意给定$h\in X$, 简单计算可知

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(x+th)-J(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\big((2x,h)+t\|h\|^2\big)=(2x,h).$$

即$dJ(x,h)=(2x,h)$. 而$(2x,\cdot)$定义了X上的一个有界线性泛函$B(x)\in X'$, 也就是说J在每一点处都有有界线性Gâteaux微分, 而且显然$x\to B(x)$是连续的. 于是J在点x_0处是Fréchet可微的, 且$J'(x_0)h=(2x_0,h),\forall h\in X$. ∎

§4.3 不动点定理

随着现代计算机技术的发展, 逐次逼近的迭代法被广泛应用于求解代数方程、常微分方程、偏微分方程和积分方程. 对一个方程, 一旦找到一个迭代公式就基本可以完成对该方程的求解, 当然我们必须保证迭代过程中得到的序列是收敛的. 逐次逼近的迭代法求解方程的实质就是寻求映射的不动点. 所谓映射f的不动点是指满足方程$f(x)=x$的点$x\in\mathscr{D}(f)$. 对于任意方程$g(x)=0$, 我们都可以将它转化为不动点方程. 事实上, 对于给定的映射g, 定义映射$G(x)=x+\Phi(g(x))$, 其中映射Φ满足"$\Phi(s)=0$当且仅当$s=0$". 于是求解方程$g(x)=0$就等价于求解不动点方程$G(x)=x$. 不动点定理告诉我们当映射G满足何种条件时不动点方程解存在.

不动点理论是非线性泛函分析理论中的重要组成部分, 与许多数学分支有紧密的联系, 特别是在研究各类方程解的存在唯一性问题中起着重要作用. 此外, 不动点理论在数学之外的其它领域也有广泛而重要的应用, 例如它是研究经济学中均衡问题的一个重要工具, Nash均衡的概念在数学上就是一个不动点的概念, Arrow-Debreu一般经济均衡存在定理和博弈论中的Nash定理就是运用不动点定理证明的. 下面我们将学习Banach不动点定理(压缩映象原理), Brouwer不动点定理和Schauder不动点定理.

Banach不动点定理是最重要、最基本的不动点定理, 它不仅给出不动点的存在性, 而且还保证了不动点的唯一性. 尽管Banach不动点定理依赖于空间的度量, 但是它的应用非常广泛并且是许多重要定理的基础(例如下一节将要学习的隐函数定理).

定义4.3.1. 设X是任一集合, 给定映射$F: X\to X$. 如果点$x\in X$满足$Fx=x$, 那么称x是F的一个不动点.

定义4.3.2. 设(X,d)是一个距离空间, 映射$F: X\to X$满足

$$d(Fx,Fy)\le d(x,y),\quad \forall x,y\in X, \tag{4.3.1}$$

那么称F是X上的压缩映射. 如果还存在常数$\mu<1$, 使得

$$d(Fx,Fy)\le \mu d(x,y),\quad \forall x,y\in X, \tag{4.3.2}$$

那么称F是X上的严格压缩映射.

定理4.3.3. (Banach不动点定理, 压缩映象原理) 完备距离空间上的严格压缩映射存在唯一不动点.

证明 设(X,d)是一个完备的距离空间, F是(X,d)到其自身的一个严格压缩映射. 首先容易证明F是连续映射, 事实上F还是Lipschitz连续的[2]. 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 取$\delta=\varepsilon/\mu$, 那么当$x,y\in X$满足$d(x,y)<\delta$时, 就有

$$d(Fx,Fy)\le \mu d(x,y)<\mu\delta=\varepsilon.$$

现在任意取一点$x_0\in X$, 构造迭代序列如下,

$$x_1=Fx_0,\quad x_2=Fx_1=F^2x_0,\quad \cdots,\quad x_n=F^nx_0,\quad \cdots.$$

下面证明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是(X,d)中的Cauchy列.

$$d(x_{n+1},x_n)=d(Fx_n,Fx_{n-1})\ \le\ \mu d(x_n,x_{n-1})=\mu d(Fx_{n-1},Fx_{n-2})$$

[2]距离空间(X,d)到距离空间(Y,ρ)的映射f称为是Lipschitz连续的, 是指存在常数$L>0$, 使得

$$\rho(f(x_1),f(x_2))\le Ld(x_1,x_2),\quad \forall x_1,x_2\in\mathscr{D}(f)\subset X.$$

满足上述不等式的最小常数L, 称为映射f的Lipschitz常数.

$$
\begin{aligned}
&\le \mu^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\cdots \\
&\le \mu^n d(x_1, x_0).
\end{aligned}
$$

于是, 当$n > m$时,

$$d(x_n, x_m) \le \sum_{j=m+1}^{n} d(x_j, x_{j-1}) \le \mu^m (1-\mu)^{-1} d(x_1, x_0) \to 0, \quad m \to \infty.$$

由于空间是完备的, 所以存在$x \in X$, 使得$x_n \to x(n \to \infty)$. 从而由F的连续性可得

$$Fx = \lim_{n\to\infty} Fx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

这表明x是F的不动点.

下面证明不动点的唯一性. 若存在$x, y \in X$满足$Fx = x$, $Fy = y$, 那么

$$d(x, y) = d(Fx, Fy) \le \mu d(x, y).$$

注意到$0 < \mu < 1$且$d(x, y) \ge 0$, 由上式即得$d(x, y) = 0$, 从而$x = y$. 定理得证. ∎

在Banach不动点定理中, 映射F是“严格压缩的”这一条件是很重要的, 即“存在常数$\mu < 1$”使得(4.3.2)成立这一条件是很重要的. 一般地, 压缩映射(即使(4.3.1)中严格不等式成立)不一定有不动点.

例4.3.4. 在实直线$\mathbb{R}$上定义通常的欧氏度量$d(x, y) = |x-y|$, 取其闭子空间$[0, \infty)$, 映射$F : [0, \infty) \to [0, \infty)$定义为

$$Fx = x + \frac{1}{1+x}, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

容易验证F是压缩映射, 即

$$d(Fx, Fy) < d(x, y), \quad \forall x, y \in [0, \infty).$$

但F在$[0, \infty)$中没有不动点.

因为Banach不动点定理中距离空间的完备性条件和算子的严格压缩性条件是比较容易验证的, 所以这一不动点定理的应用非常广泛, 并且由它得到许多重要的结论. 下面我们介绍Banach不动点定理在常微分方程初值问题解的存在唯一性定理中的应用.

例4.3.5. 考虑如下常微分方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = f(t, u(t)), \quad 0 \le t \le T, \\ u(0) = \alpha, \end{cases} \tag{4.3.3}$$

其中$\alpha \in \mathbb{R}$是任意给定的. 设函数$f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续, 关于第二个分量满足Lipschitz条件, 即

$$\exists M > 0, \quad \text{s. t.} \quad |f(t, u) - f(t, v)| \le M|u - v|, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{4.3.4}$$

那么上述Cauchy问题在整个区间$[0, T]$上存在唯一解$u \in C[0, T]$.

证明 容易验证Cauchy问题(4.3.3)等价于如下的积分方程

$$u(t) = \alpha + \int_0^t f(s, u(s))ds \quad \forall t \in [0, T].$$

在集合$C[0, T]$上赋以范数$\|w\|_e = \max\limits_{0 \le t \le T} e^{-Mt}|w(t)|$, 则得到Banach空间$(C[0, T], \|\cdot\|_e)$, 且容易验证$\|\cdot\|_e$与例4.1.4中定义的范数$\|\cdot\|$等价. 现在定义映射

$$(Fw)(t) = \alpha + \int_0^t f(s, w(s))ds \quad \forall w \in C[0, T], \quad \forall t \in [0, T].$$

显然$F : C[0, T] \to C[0, T]$. 于是Cauchy问题(4.3.3)存在唯一解$u \in C[0, T]$等价于F在Banach空间$(C[0, T], \|\cdot\|_e)$上有唯一不动点. 为利用Banach不动点定理, 下面只需验证F是$(C[0, T], \|\cdot\|_e)$上的严格压缩映射. 利用Lipschitz条件有

$$\begin{aligned} \|Fu - Fw\|_e &= \max_{0 \le t \le T} e^{-Mt} \left| \int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, w(s)))ds \right| \\ &\le \max_{0 \le t \le T} e^{-Mt} \int_0^t e^{Ms} e^{-Ms} M \left| u(s) - w(s) \right| ds \\ &\le M\|u - w\|_e \max_{0 \le t \le T} e^{-Mt} \int_0^t e^{Ms} ds \\ &\le M\|u - w\|_e \max_{0 \le t \le T} e^{-Mt} \frac{e^{Mt} - 1}{M} \\ &\le (1 - e^{-MT})\|u - w\|_e. \end{aligned}$$

显然$0 < 1 - e^{-MT} < 1$, 所以F是严格压缩映射. 由Banach不动点定理可知Cauchy问题(4.3.3)在整个区间$[0, T]$上存在唯一解$u \in C[0, T]$. ∎

Banach不动点定理的证明方法是构造性的, 也就是借助映射的严格压缩性质构造了一个Cauchy列, 该序列在完备的距离空间中收敛到严格压缩映射的不动点. 这一构造性方法实际上也为我们提供了寻找不动点或近似解的方法.

例4.3.6. (Newton法) 设f是定义在有界区间$[a,b]$上的二次连续可微的实值函数, 又假设$\xi\in(a,b)$是方程$f(x)=0$的根, 而且$f'(\xi)\neq 0$. 求证存在ξ的邻域$U(\xi)\subset[a,b]$, 使得以$U(\xi)$中的任意点x_0为初始点, 以下的迭代序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$都是收敛的

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{4.3.5}$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

证明 由于$f'(\xi)\neq 0$, 那么存在$\delta_1>0$, 使得$[\xi-\delta_1,\xi+\delta_1]\subset[a,b]$, 且

$$f'(x)\neq 0,\quad \forall x\in[\xi-\delta_1,\xi+\delta_1].$$

于是定义映射F如下

$$F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},\quad \forall x\in[\xi-\delta_1,\xi+\delta_1].$$

在区间$[\xi-\delta_1,\xi+\delta_1]$上方程$f(x)=0$等价于不动点方程$F(x)=x$. 显然有$F(\xi)=\xi$, 即$\xi$是$F$的一个不动点. 此外

$$F'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},\quad \forall x\in(\xi-\delta_1,\xi+\delta_1).$$

由此可知$\lim\limits_{x\to\xi}F'(x)=F'(\xi)=0$. 从而存在$0<\delta<\delta_1$, 使得

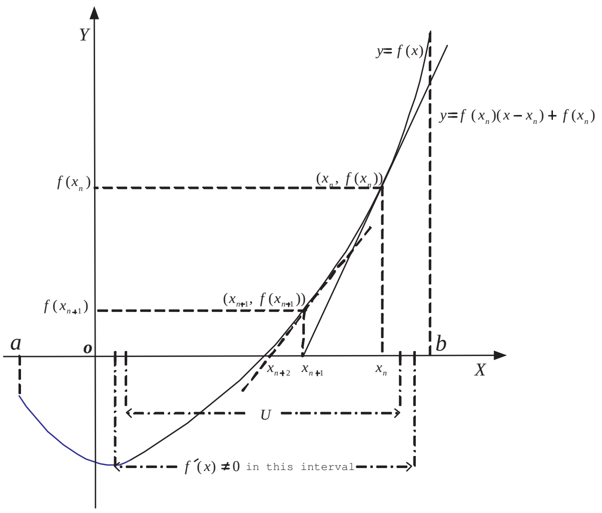
$$|F'(x)|\le\frac{1}{2},\quad \forall x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]. \tag{4.3.6}$$

另一方面, 对于任意$x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$, 都有

$$F(x)-\xi=F(x)-F(\xi)=F'(\eta)(x-\xi),\quad \text{其中}\eta\text{位于}x\text{与}\xi\text{之间}.$$

利用(4.3.6)可得$|F(x)-\xi|<\delta$, 也就是说$F(x)\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$对于任意$x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$都成立, 这表明$F$是$[\xi-\delta,\xi+\delta]$上的自映射. 结合(4.3.6)还可知$F:[\xi-\delta,\xi+\delta]\to[\xi-\delta,\xi+\delta]$是严格压缩映射. 现在记$U(\xi)=(\xi-\delta,\xi+\delta)$, 任取一点$x_0\in U(\xi)$, 构造迭代序列

$$x_n=F(x_{n-1})=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n\in\mathbb{N}.$$



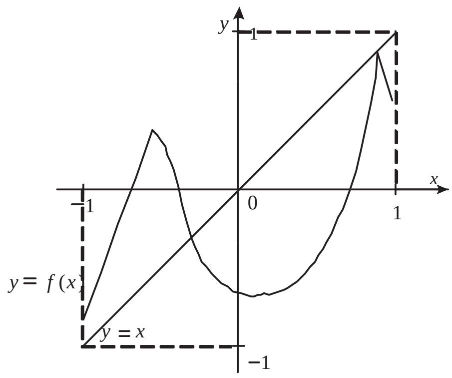
类似于Banach不动点定理的证明可以验证$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$是$[\xi-\delta,\xi+\delta]$中的Cauchy列. 注意到$[\xi-\delta,\xi+\delta]$在通常的欧氏度量下是完备的距离空间, 而且$\xi\in[\xi-\delta,\xi+\delta]$是$F$的不动点, 于是由Banach不动点定理可知序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 必收敛到ξ. ∎

上述例子实际上告诉了我们一种近似求解方程$f(x)=0$的方法: 通过把方程$f(x)=0$等价转化为不动点方程$F(x)=x$后, 利用严格压缩映射F构造逐次逼近序列, 从而得到方程$f(x)=0$的近似解.

下面我们来学习一个重要的拓扑不动点定理–Brouwer不动点定理, 在介绍该定理之前先看一个有趣的现象: 取一个浅纸盒与一张纸, 这张纸恰好能盖住盒的底面, 此时纸上每个点正好与它下面盒底上的点一一对应. 把纸拿起来随便揉成一个小纸球(不能把纸撕破), 再把小纸球扔进盒里. 这时可以断言: 不管小纸球是怎样揉的, 也不管它落在盒底什么地方, 揉成小纸球的纸上至少有一个这样的点, 它恰好处在盒底原来与它对应的点的正上方. 也许大家对这一现象半信半疑, 但实际上Brouwer不动点定理可以严格论证上述现象.

定理4.3.7. (Brouwer不动点定理) 记$\bar{B}=\{x\in\mathbb{R}^n|\|x\|\le 1\}$为$\mathbb{R}^n$中的闭单位球. 若映射$f:\bar{B}\to\bar{B}$是连续的, 那么必定存在点$x\in\bar{B}$, 使得$f(x)=x$.

注记4.3.8. 当$n=1$时, Brouwer不动点定理告诉我们, 只要定义在$[-1,1]$上的连续函数f满足$-1\le f(x)\le 1$, 那么一定存在一点$x\in[-1,1]$使得$f(x)=x$. 也就是说连续函数$y=f(x)$的图像必定与直线段$y=x$相交, 如图所示.



注记4.3.9. 在一维情形下Bouwer不动点定理的证明也是非常容易的. 这时可以令辅助函数$g(x) = x - f(x)$, 显然g是$[-1,1]$上的连续函数, 且函数f在$[-1,1]$上的不动点存在性等价于函数g在$[-1,1]$上零点的存在性. 由于$-1 \leq f(x) \leq 1$, 那么

$$g(-1) \leq 0, \qquad g(1) \geq 0.$$

若$g(-1) = 0$, 则$x = -1$即为f的不动点; 若$g(1) = 0$, 则$x = 1$即为f的不动点; 否则成立$g(-1) < 0$且$g(1) > 0$, 于是由介值定理, 必定存在$\xi \in (-1,1)$使得$g(\xi) = 0$, 那么$x = \xi$即为f的不动点.

Brouwer不动点定理是近代数学中最重要的成就之一, 它的证明方法比较多, 但早期的证明方法依赖于拓扑度工具, 请参阅[20, 6, 13]. 后来有不少数学工作者给出了该定理几种分析的和比较初等的证明方法, 有兴趣的读者可以参考[19, 20, 7]. 在这里我们不再给出证明.

注意到$\mathbb{R}^n$中的有界闭凸集同胚[3] 于闭单位球$\bar{B}$, 我们有以下比较一般的结论.

推论4.3.10. 如果K是$\mathbb{R}^n$中的有界闭凸集, 映射$f : K \to K$连续, 则f在K上存在不动点.

证明 K同胚于$\mathbb{R}^n$中的闭单位球$\bar{B}$, 即存在映射$\varphi : K \to \bar{B}$连续可逆且φ^{-1}也连续. 现在考察映射

$$F \triangleq \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \bar{B} \to \bar{B}.$$

显然F是连续的, 由Brouwer不动点定理可知存在$x \in \bar{B}$, 使得$F(x) = x$. 于是点$y = \varphi^{-1}(x) \in K$就是$f$在$K$上的不动点. ∎

[3]距离空间(X,d)到距离空间(Y,ρ)的连续映射f如果既是单射也是满射, 而且其逆映射$f^{-1} : Y \to X$ 也是连续的, 则称映射f是同胚. 如果距离空间(X,d)和(Y,ρ)之间存在同胚f, 则称这两个距离空间同胚.

推论4.3.11. 设X是n维赋范线性空间, $K \subset X$是有界闭凸集, 映射$f: K \to K$连续, 则f在K上存在不动点.

Brouwer不动点定理只保证不动点的存在性, 并不保证其唯一性. 下面介绍该定理在经济均衡理论中的一个应用.

设$P_1, P_2, \cdots, P_N$是N个生产者同时也是消费者, 他们各生产一种产品并消费其它生产者的产品. 现在用x_i表示生产者P_i的收入, 用$f_{ij}(x_i)$表示P_i收入为x_i时其用于购买P_j的产品的资金总数, 自然地成立$f_{ii}(x_i) = 0 (\forall i = 1, 2, \cdots, N)$. 如果每一个生产者都把他的收入用以购买其他生产者的产品, 那么有

$$x_i = \sum_{j=1}^{N} f_{ij}(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{4.3.7}$$

由经济规律我们知道P_j的收入x_j由下面的方式决定：生产者销售商品的资金总数等于其他生产者购买该商品的资金总数, 即有

$$x_j = \sum_{i=1}^{N} f_{ij}(x_i), \quad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{4.3.8}$$

因此经济平衡问题就是：给定满足(4.3.7)的连续函数f_{ij}, 寻求$x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$使得(4.3.8)成立.

对于此问题如下结论成立.

例4.3.12. 如果f_{ij}是连续正函数且满足(4.3.7), 那么存在$x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$使得(4.3.8)成立.

证明 令集合$\mathcal{C} = \left\{ y = (y_1, \cdots, y_N) \mid y_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{N} y_i = 1 \right\}$, 显然它是$\mathbb{R}^N$中一个有界闭凸集. 定义函数$G: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, 其第$j$个分量$g_j$为

$$g_j(y) = \sum_{i=1}^{N} f_{ij} \circ \pi_i(y), \quad j = 1, 2, \cdots, N.$$

其中$\pi_i: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$是自然投影, 即$\pi_i(y) = y_i$. 容易验证$G$是映$\mathcal{C}$到$\mathcal{C}$的连续映射. 于是由Brouwer不动点定理可知$G$存在不动点, 此不动点即为所求. ∎

我们知道$\mathbb{R}^n$是有限维空间, 一个自然的问题是：Brouwer不动点定理及其推论的结果是否可以直接推广到无穷维赋范线性空间中去？首先, 我们来看下面由S. Kakutani给出的例子.

例4.3.13. 在ℓ^2的闭单位球$\bar{B}=\left\{x\in\ell^2\middle|\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\le 1\right\}$上定义映射$f$如下,

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=\left((1-\|x\|^2)^{\frac{1}{2}},x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\cdots\right),\quad \forall x\in\bar{B}. \tag{4.3.9}$$

显然f是连续的, 且$f(\bar{B})\subset\bar{B}$ ($\|f(x)\|=1,\forall x\in\bar{B}$). 试证明$f$在$\bar{B}\subset\ell^2$上没有不动点.

证明 假设存在$x\in\bar{B}$满足$f(x)=x$, 那么有

$$x_n=x_{n+1},\quad n\in\mathbb{N},$$

结合$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$可知$x_n=0$, 即$x=0$. 而由(4.3.9), 这时必有$f(x)=(1,0,\cdots,0,\cdots)$. 显然矛盾, 从而$f$在$\ell^2$的单位球$\bar{B}$上不存在不动点. ∎

以上例子表明不能直接将Brouwer定理的结论推广到无穷维赋范线性空间中去, 这是因为$\mathbb{R}^n$中的闭单位球$\bar{B}$ 是紧的, 而一般的无穷维赋范线性空间中的闭单位球并不具备紧性. 为了在无穷维赋范线性空间中得到与Brouwer不动点定理类似的结论, 仅要求映射f连续是不够的, 需要f满足更多的条件.

定理4.3.14. (Schauder不动点定理) 设X是一个赋范线性空间, C是X中的闭凸子集, 映射$f:C\to C$是连续的, 且$f(C)$是列紧的, 那么f在C上存在不动点.

证明 由于$f(C)$列紧, 则任意$n\in\mathbb{N}$, $f(C)$存在有限的$\frac{1}{n}$-网$\{y_1,y_2,\cdots,y_{k(n)}\}$, 也就是说,

$$\exists\{y_1,y_2,\cdots,y_{k(n)}\}\subset f(C),\quad \text{使得}\quad f(C)\subset\bigcup_{i=1}^{k(n)}B(y_i,\frac{1}{n}). \tag{4.3.10}$$

记$E_n=\operatorname{span}\{y_1,y_2,\cdots,y_{k(n)}\}$, E_n是X的有限维子空间. 对于$i\in\{1,2,\cdots,k(n)\}$, 令

$$d_i(y)=\begin{cases}1-n\|y-y_i\|, & y\in B(y_i,\frac{1}{n}),\\ 0, & y\bar{\in}B(y_i,\frac{1}{n}),\end{cases}\quad \forall y\in f(C).$$

显然$d_i(y)\ge 0$, 并且由(4.3.10)可知对于任意$y\in f(C)$, 必定存在某$i_0\in\{1,2,\cdots,k(n)\}$使得$d_{i_0}(y)>0$. 于是记$\lambda_i(y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{k(n)}d_i(y)\right)^{-1}d_i(y)$, 那么

$$\lambda_i(y)\ge 0(\forall i\in\{1,2,\cdots,k(n)\}),\qquad \sum_{i=1}^{k(n)}\lambda_i(y)=1.$$

定义映射$\Phi_n : f(C) \to V \triangleq \mathrm{co}\{y_1, y_2, \cdots, y_{k(n)}\}$ [4] 如下

$$\Phi_n(y) = \sum_{i=1}^{k(n)} y_i \lambda_i(y), \quad \forall y \in f(C).$$

这时有

$$\begin{aligned}\|\Phi_n(y) - y\| &= \left\|\sum_{i=1}^{k(n)} y_i \lambda_i(y) - \sum_{i=1}^{k(n)} y \lambda_i(y)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k(n)} (y_i - y)\lambda_i(y)\right\| \\ &\le \sum_{y \in B(y_i, \frac{1}{n})} \|y_i - y\|\lambda_i(y) + \sum_{y \bar{\in} B(y_i, \frac{1}{n})} \|y_i - y\|\lambda_i(y) < \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

由于C是凸的, 故而$V \subset C$. 现在考察映射$F_n \triangleq \Phi_n \circ f|_V : V \subset E_n \to V \subset E_n$, 注意到$V$是有限维空间$E_n$中的有界闭凸子集, 所以利用Brouwer不动点定理有

$$\exists x_n \in V \subset C, \quad 使得 \quad F_n(x_n) = x_n.$$

于是得到序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$. 由于$f(C) \subset C$列紧且$C$是闭的, 故而存在子列$\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$和$x \in C$, 使得

$$\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = x. \tag{4.3.12}$$

从而结合(4.3.11)就有

$$\begin{aligned}\|x_{n_m} - x\| &= \|F_{n_m}(x_{n_m}) - x\| \\ &\le \|F_{n_m}(x_{n_m}) - f(x_{n_m})\| + \|f(x_{n_m}) - x\| \\ &= \|\Phi_{n_m}(f(x_{n_m})) - f(x_{n_m})\| + \|f(x_{n_m}) - x\| \\ &< \frac{1}{n_m} + \|f(x_{n_m}) - x\| \to 0 \quad (m \to \infty).\end{aligned}$$

因为f连续, 所以由上式可得

$$\lim_{m \to \infty} f(x_{n_m}) = f(x). \tag{4.3.13}$$

联合(4.3.12)和(4.3.13)就得到$f(x) = x$, 定理得证. ∎

[4] 若$M = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是线性空间$X$的子集, 则$M$的凸包(convex hull)co$M$定义为

$$\mathrm{co}M = \left\{ w \in X \,\middle|\, w = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \ \ a_i \ge 0, \ \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}.$$

推论4.3.15. 设X是一个赋范线性空间, C是X中的有界闭凸子集, 映射$f: C \to C$是全连续的, 那么f在C上存在不动点.

推论4.3.16. 设X是一个赋范线性空间, C是X中的紧凸子集, 映射$f: C \to C$是连续的, 那么f在C上存在不动点.

Schauder不动点定理要求算子具备紧性而不必具备压缩性. 该定理和Brouwer 不动点定理一样只能保证不动点的存在性而不能保证其唯一性, 也没有给出求不动点的迭代格式. 下面是Schauder不动点定理在非线性常微分方程Cauchy问题中的一个应用.

例4.3.17. 设二元函数$f(t,x)$在矩形区域$D = \{(t,x) \mid |t-t_0| \le a,\ |x-x_0| \le r\}$上连续, 记$M = \max\limits_{(t,x)\in D} |f(t,x)|$. 考察如下常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

试证明该问题存在解$X \in C[t_0-h, t_0+h]$, 其中$h = \min\{a, \frac{r}{M}\}$.

证明 初值问题等价于积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{4.3.14}$$

现在定义算子T如下

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad \forall x \in C[t_0-h, t_0+h].$$

记$\bar{B}(x_0,r) = \{x \in C[t_0-h,t_0+h] \mid \|x-x_0\| \le r\}$. 显然$\bar{B}(x_0,r)$是$C[t_0-h,t_0+h]$中的有界闭凸集, 下证算子$T: \bar{B}(x_0,r) \to \bar{B}(x_0,r)$是全连续的. 任取$x \in \bar{B}(x_0,r)$, 因为$|x(t)-x_0| \le r (\forall t \in [t_0-h,t_0+h])$, 于是

$$|(Tx)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \right| \le Mh \le r. \tag{4.3.15}$$

即$Tx \in \bar{B}(x_0,r) (\forall x \in \bar{B}(x_0,r))$. 又对于任意序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bar{B}(x_0,r)$以及$x \in \bar{B}(x_0,r)$, 若$\|x_n - x\| \to 0$, 则$f(\tau, x_n(\tau))$在$[t_0,t]$上一致收敛于$f(\tau,x(\tau))$, 那么

$$|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x(\tau)))d\tau \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

由此可知T是闭球$\bar{B}(x_0,r)$上的连续算子. 对于$x\in\bar{B}(x_0,r)$, 由(4.3.15)可知$|(Tx)(t)|\leq|x_0|+Mh$, 也就是说$T(\bar{B}(x_0,r))$是一致有界的. 此外, 对于任意$t,t'\in[t_0-h,t_0+h]$, 都有

$$|(Tx)(t)-(Tx)(t')|\leq\left|\int_t^{t'}f(\tau,x(\tau))d\tau\right|\leq M|t'-t|,$$

从而可知$T(\bar{B}(x_0,r))$是等度连续的. 由Ascoli-Arzela定理即得$T(\bar{B}(x_0,r))$是$\bar{B}(x_0,r)$中的列紧集, 于是T 是映$\bar{B}(x_0,r)$到自身的全连续算子. 根据推论4.3.15, 算子T在$\bar{B}(x_0,r)$中存在不动点X, 即

$$(TX)(t)=X(t)\Longleftrightarrow X(t)=x_0+\int_{t_0}^t f(\tau,X(\tau))d\tau.$$

故常微分方程初值问题存在解$X(t)\in C[t_0-h,t_0+h]$. ∎

Brouwer不动点定理和Schauder不动点定理还有很多形式的推广和应用, 例如多值映射的Kakutani不动点定理等, 感兴趣的读者可以参阅[20, 12].

§4.4 隐函数定理

在多元函数微积分理论中我们学习了隐函数定理和反函数定理. 在求解非线性方程解的存在性(尤其是局部存在性) 时, 隐函数定理和反函数定理发挥着重要作用. 这一节我们将学习无穷维Banach空间中的隐函数定理和反函数定理.

设X,Y和Z是Banach空间, D是乘积空间$X\times Y$中的一个开集, 对于非线性算子$F:D\subset X\times Y\to Z$, 考察如下方程:

$$F(x,y)=0,\quad (x,y)\in D. \tag{4.4.1}$$

若点$(x_0,y_0)\in D$满足$F(x_0,y_0)=0$, 那么对于$x_0\in X$某邻域中的一点x, 是否可以确定存在相应一点$y\in Y$使得方程(4.4.1)仍然成立? 这个问题等价于: 是否可以在已知点(x_0,y_0)的某邻域中由方程(4.4.1)唯一地确定一个映射f, 使得$y=f(x)$?

定义4.4.1. 设Banach空间X,Y,Z, $U\subset X$, $V\subset Y$, 并设从乘积空间$X\times Y$到Z的算子F的定义域D 包含了$U\times V$. 如果对于每个$\bar{x}\in U$, 恰好存在唯一的元素$\bar{y}\in V$, 使得$F(\bar{x},\bar{y})=0$, 则称由方程$F(x,y)=0$确定了从U到V的隐函数.

若把如上所述的从U到V的隐函数记为f, 则对于任意$x \in U$, 都有$f(x) \in V$而且$F(x, f(x)) = 0$. 由此可知隐函数f的对应法则就是: 把每个$x \in U$映射为满足方程$F(x, y) = 0$的唯一的$y \in V$.

类似于二元函数偏导数的概念, 我们可以引入抽象空间上二元映射偏导算子和偏导映射的概念. 设$(x_0, y_0) \in D$, 若$F(x, y_0)$在点x_0处对x的Fréchet导算子$F'_x(x_0, y_0)$存在, 则称它为F在点(x_0, y_0)处对x的偏导算子. 同样地可以定义F在点(x_0, y_0)处对y的偏导算子$F'_y(x_0, y_0)$. 显然$F'_x(x_0, y_0) \in L(X, Z)$, $F'_y(x_0, y_0) \in L(Y, Z)$. 若$F$在$D$内每一点处对$x$(或对$y$)的Fréchet导算子都存在, 则在$D$上确定了$F$对$x$(或对$y$)的Fréchet导映射$F'_x(x, y)$(或$F'_y(x, y)$).

现在假设方程$F(x, y) = 0$有解$(x_0, y_0) \in D$, 并假设F在点(x_0, y_0)的某邻域中具有连续的F-导映射, 那么由Taylor公式[5]可得

$$F(x, y) = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|_{X \times Y}).$$

于是考察方程$F(x, y) = 0$的近似方程

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

显然, 若有界线性算子$F'_y(x_0, y_0)$是可逆的, 即存在$[F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \in L(Z, Y)$使得

$$[F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F'_y(x_0, y_0) = I,$$

这时通过近似方程对每一给定的x都可唯一地确定y,

$$y = y_0 - [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F'_x(x_0, y_0)(x - x_0).$$

由此受到启发, 在探索由方程$F(x, y) = 0$确定隐函数存在的条件时, 得到如下结果.

定理4.4.2. (**隐函数定理**) 设X, Y, Z为Banach空间, D为积空间$X \times Y$中的开集. 若算子$F : D \to Z$连续, 且满足以下条件:

(i) 存在点$(x_0, y_0) \in D$使得$F(x_0, y_0) = 0$;

(ii) 偏导映射$F'_y(x, y)$在D内存在且$F'_y(x, y)$在点(x_0, y_0)处连续;

(iii) 偏导算子$F'_y(x_0, y_0) : Y \to Z$有有界逆,

[5]参见§4.2的习题13和习题15.

则存在$r>0$和$\delta>0$, 以及唯一的连续算子$f:B(x_0,r)\subset X\to B(y_0,\delta)\subset Y$, 使得

$$\begin{cases} B(x_0,r)\times B(y_0,\delta)\subset D, \\ f(x_0)=y_0, \\ F(x,f(x))=0, \forall x\in B(x_0,r). \end{cases}$$

证明 由条件不妨设$\|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}\|\le M$. 由于$F_y'(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处连续, 对上述$M>0$, 存在$\tilde r>0$和$\delta>0$, 使得$B(x_0,\tilde r)\times B(y_0,\delta)\in D$, 并且

$$\|F_y'(x,y)-F_y'(x_0,y_0)\|<\frac{1}{2M}, \quad \forall x\in B(x_0,\tilde r),\forall y\in B(y_0,\delta).$$

又因为$F(x,y_0)$在$B(x_0,\tilde r)$上关于x连续, 对于上述M和δ, 存在$r\in(0,\tilde r]$, 使得

$$\|F(x,y_0)\|_Z=\|F(x,y_0)-F(x_0,y_0)\|_Z<\frac{\delta}{2M}, \quad \forall x\in B(x_0,r). \tag{4.4.2}$$

现在任意取$x\in B(x_0,r)$, 定义映射$T(x,\cdot):Y\to Z$如下,

$$T(x,y)=y-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y).$$

显然, 对于给定的x, 算子方程$F(x,y)=0$存在唯一解$y\in Y$等价于$T(x,\cdot)$在Y中存在唯一不动点$y\in Y$. 因此, 下面证明$T(x,\cdot)$在球$B(y_0,\delta)$内存在唯一不动点. 首先注意到$T(x,\cdot)$是Fréchet可微的, 且

$$\begin{aligned}\|T_y'(x,y)\| &= \|I-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F_y'(x,y)\| \\ &\le \|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}\|\|F_y'(x_0,y_0)-F_y'(x,y)\|<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

对于$y_1,y_2\in B(y_0,\delta)$, 存在$\theta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}\|T(x,y_2)-T(x,y_1)\|_Y &\le \|T_y'(x,y_1+\theta(y_2-y_1))(y_2-y_1)\|_Y \\ &\le \|T_y'(x,y_1+\theta(y_2-y_1))\|\|y_2-y_1\|_Y \\ &< \frac{1}{2}\|y_2-y_1\|_Y.\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

也就是说$T(x,\cdot)$是闭球$\bar B(y_0,\delta)$上的严格压缩算子. 又由(4.4.2)和(4.4.3)有

$$\begin{aligned}\|T(x,y)-y_0\|_Y &\le \|T(x,y)-T(x,y_0)\|_Y+\|T(x,y_0)-y_0\|_Y \\ &= \|T(x,y)-T(x,y_0)\|_Y+\|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y_0)\|_Y\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{2}\|y-y_0\|_Y + M\cdot\frac{\delta}{2M} \le \delta, \quad \forall y\in B(y_0,\delta),$$

即$T(x,\cdot)$将闭球$\bar{B}(y_0,\delta)$映入开球$B(y_0,\delta)$. 由压缩映象原理可知, 对于任意给定的$x\in \bar{B}(x_0,r)$, 算子$T(x,\cdot)$在$\bar{B}(y_0,\delta)$内存在唯一不动点$y\in B(y_0,\delta)$, 记为$y=f(x)$. 显然有$y_0=f(x_0)$.

下面证明f在$B(x_0,r)$内连续. 任意取$x_1,x_2\in B(x_0,r)$, 设$y_i=f(x_i)(i=1,2)$. 由(4.4.3)可得

$$\begin{aligned}\|y_2-y_1\|_Y &= \|T(x_2,y_2)-T(x_1,y_1)\|_Y\\ &\le \|T(x_2,y_2)-T(x_2,y_1)\|_Y + \|T(x_2,y_1)-T(x_1,y_1)\|_Y\\ &< \frac{1}{2}\|y_2-y_1\|_Y + \|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}(F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1))\|_Y\\ &\le \frac{1}{2}\|y_2-y_1\|_Y + M\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)\|_Z.\end{aligned}$$

从而有

$$\|f(x_2)-f(x_1)\|_Y < 2M\|F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\|_Z. \tag{4.4.4}$$

由此根据$F(x,y)$的连续性即知当$\|x_2-x_1\|_X$充分小时, $\|f(x_2)-f(x_1)\|_Y$充分小. ∎

以上定理告诉我们在一定条件下可以由方程$F(x,y)=0$唯一确定一个算子$y=f(x)$, 当然该算子的显式表达式往往不是明确的. 该定理给出了在方程$F(x,y)=0$的初始解(x_0,y_0)某邻域内算子f(隐函数)存在的条件, 这是一个局部存在性定理, 算子f(隐函数)的唯一性和连续性也只能保证局部地成立.

从上述定理中可以得知算子f是连续的, 至于其它的分析性质(例如可微性), 则需要更多的条件. 现在考察方程$F(x,f(x))=0$, 当假设下面出现的所有微分运算都是可行的时候, 利用链锁规则关于x微分, 形式上可得

$$F'_x(x,f(x)) + F'_y(x,f(x))f'(x) = 0.$$

若$F'_y(x,f(x))$有有界逆, 那么由上式可得

$$f'(x) = -[F'_y(x,f(x))]^{-1}F'_x(x,f(x)).$$

以下定理给出了定理4.4.2中算子f是Fréchet可微的条件. 从中可以发现, 尽管f本身的显式表达式未知, 但我们仍可以通过偏导映射$F'_x(x,y)$和$F'_y(x,y)$给出导映射$f'(x)$的显式表达式.

定理4.4.3. 设X, Y, Z为Banach空间, D为积空间$X \times Y$中的开集. 若算子$F : D \to Z$连续, 且满足以下条件：

(i) 存在点$(x_0, y_0) \in D$使得$F(x_0, y_0) = 0$;

(ii) 偏导映射$F'_x(x, y)$和$F'_y(x, y)$在D内存在且连续；

(iii) 偏导算子$F'_y(x_0, y_0) : Y \to Z$有有界逆,

则在上一定理中可取$r > 0, \delta > 0$使得f在$B(x_0, r)$上连续可微, 并且

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x)]^{-1} F'_x(x, f(x)), \quad \forall x \in B(x_0, r). \tag{4.4.5}$$

证明 定理条件告诉我们偏导算子$F'_y(x_0, y_0) : Y \to Z$有有界逆, 下面进一步证明在(x_0, y_0)的某邻域中$F'_y(x, y)$也具有有界逆. 为此, 定义$G : D \subset X \times Y \to Y$,

$$G(x, y) = [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y).$$

那么在D中$G'_y(x, y) = [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F'_y(x, y)$, $G'_y(x_0, y_0) = I$, 并且由定理条件还可知$G'_y(x, y)$在(x_0, y_0)的某邻域中连续. 于是根据Banach代数的相关结论(参阅[22]之定理10.12), $G'_y(x, y)$在(x_0, y_0)的某邻域中也存在有界逆, 并且$[G'_y(x, y)]^{-1}$连续. 注意到在D中

$$F'_y(x, y) = F'_y(x_0, y_0)]G'_y(x, y),$$

从而可知在相应的(x_0, y_0)的某邻域中$F'_y(x, y)$具有有界逆, 而且

$$[F'_y(x, y)]^{-1} = [G'_y(x, y)]^{-1} [F'_y(x_0, y_0)]^{-1}$$

也是连续的. 现在取$r > 0, \delta > 0$使得定理4.4.2的结论仍成立且$B(x_0, r) \times B(y_0, \delta)$是上述$(x_0, y_0)$的某邻域的子集, 那么在$B(x_0, r) \times B(y_0, \delta)$内$F'_x(x, y), F'_y(x, y), [F'_y(x, y)]^{-1}$都存在且连续.

设$x \in B(x_0, r), h \in X$使得$x+h \in B(x_0, r)$. 这时$F(x, f(x)) = F(x+h, f(x+h)) = 0$. 因为$F(x, y)$在$D$内存在关于$x$和$y$的偏导映射, 于是

$$\begin{aligned} 0 &= [F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x+h))] + [F(x, f(x+h)) - F(x, f(x))] \\ &= F'_x(x, f(x+h))h + \omega_0(x, h) + F'_y(x, f(x))(f(x+h) - f(x)) \\ &\quad + \omega(f(x), f(x+h) - f(x)), \end{aligned}$$

其中$\|\omega_0(x,h)\|_Z = o(\|h\|_X)$, $\|\omega(f(x), f(x+h)-f(x))\|_Z = o(\|f(x+h)-f(x)\|_Y)$. 由此可得

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= -[F'_y(x,f(x))]^{-1}F'_x(x,f(x+h))h \\ &\qquad -[F'_y(x,f(x))]^{-1}\left(\omega_0(x,h)+\omega(f(x),f(x+h)-f(x))\right). \end{aligned}$$

注意到$F'_x(x,y)$与$f(x)$均连续, 所以

$$F'_x(x,f(x+h))h = F'_x(x,f(x))h + \omega_1(x,h),$$

其中$\|\omega_1(x,h)\|_Z = o(\|h\|_X)$. 从而

$$f(x+h)-f(x) = -[F'_y(x,f(x))]^{-1}F'_x(x,f(x))h + \tilde{\omega}(x,h), \tag{4.4.6}$$

这里$\tilde{\omega}(x,h) = -[F'_y(x,f(x))]^{-1}\{\omega_1(x,h)+\omega_0(x,h)+\omega(f(x),f(x+h)-f(x))\}$. 由$f$连续可知$\|\tilde{\omega}(x,h)\|_Z = o(\|h\|_X)$. (4.4.6)即表明$f$是Fréchet可微的, 并且(4.4.5)成立. ∎

设X, Y是两个赋范线性空间, $U \subset X$, $V \subset Y$, 假设算子$f: U \to V$是一一映射, 即满足如下条件:

(i) f是单射, 即对于$x_1, x_2 \in U$, 只要$x_1 \neq x_2$, 就有$f(x_1) \neq f(x_2)$;

(ii) f是满射, 即任意$y \in V$, 都存在$x \in U$, 使得$y = f(x)$.

那么我们可按如下方式定义算子$g: V \to U$:

$$g(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y.$$

显然这时有$f(g(y)) = y, \forall y \in V$且$g(f(x)) = x, \forall x \in V$. 通常把$g$称为$f$的逆算子, 并记之为$f^{-1}$.

定义4.4.4. 设X, Y是两个赋范线性空间, $U \subset X$, $V \subset Y$, 如果存在U到V的一一映射f满足如下条件:

(i) $f: U \to V$是连续的;

(ii) $f^{-1}: V \to U$也是连续的,

则称U与V同胚, 并称f是一个同胚映射(简称同胚).

下面的定理告诉我们在一定的条件下, 可以保证一个算子是局部同胚的, 即其逆算子局部地存在并且连续.

定理4.4.5. (**反函数定理、同胚定理**) 设X和Y是两个实Banach空间, U是X中的开集. 算子$f: U \to Y$是Fréchet可微的, 导映射$f': U \to L(X, Y)$在点$x_0 \in U$处连续且$f'(x_0)$具有有界逆, 那么存在$r > 0$, 使得

$$f: B(x_0, r) \subset U \to f(B(x_0, r)) \subset Y \tag{4.4.7}$$

是同胚.

证明 定义算子$F: U \times Y \subset X \times Y \to Y$如下

$$F(x, y) = f(x) - y, \quad \forall (x, y) \in U \times Y.$$

显然$F(x, y)$是连续的, 而且$(x_0, f(x_0)) \in U \times Y$满足$F(x_0, f(x_0)) = 0$. 记$y_0 = f(x_0)$, 由$f$的Fréchet可微性可得$F'_x(x, y) = f'(x) (\forall (x, y) \in U \times Y)$, 且由假设条件知$F'_x(x_0, y_0)$具有有界逆. 由隐函数定理可知, 存在$\delta > 0, r > 0$以及连续映射$\varphi: B(y_0, \delta) \subset Y \to B(x_0, r)) \subset U$, 使得

$$x = \varphi(y), \quad \text{且} \quad F(\varphi(y), y) = f(\varphi(y)) - y = 0, \quad \forall y \in B(y_0, \delta).$$

于是$\varphi(B(y_0, \delta)) = f^{-1}(B(y_0, \delta)) \cap B(x_0, r)$. 注意到$f$是连续的, 从而$\varphi(B(y_0, \delta))$ 是X中的包含x_0的开集. 显然f在$\varphi(B(y_0, \delta))$上的限制使$\varphi(B(y_0, \delta))$ 与$B(y_0, \delta)$一一对应. 此外, f在$\varphi(B(y_0, \delta))$上连续, $f^{-1} = \varphi$在$B(y_0, \delta)$上连续, 也就是说f是$\varphi(B(y_0, \delta))$与$B(y_0, \delta)$之间的同胚. ∎

根据定理4.4.3, 当$f \in C^1(U, Y)$, 即f在U上连续可微时, 可得到以下结果.

推论4.4.6. 在上述定理中, 如果进一步假设Fréchet导映射$f'(x)$在U中连续, 那么f在x_0处局部微分同胚, 也就是说存在x_0的某邻域$\mathcal{U}(x_0) \subset U$以及$y_0$的某邻域$\mathcal{V}(y_0)$, 使$f$在$\mathcal{U}(x_0)$上的限制是$\mathcal{U}(x_0)$与$\mathcal{V}(y_0)$之间的同胚, f在$\mathcal{U}(x_0)$上具有连续的Fréchet导算子, 而且f^{-1}在$\mathcal{V}(y_0)$上也具有连续的Fréchet导算子.

习　题

1. 记$l_0 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) |$ 只有有限个$x_n \neq 0\}$. 在l_0上赋以范数

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

定义泛函$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^n, \forall x\in l_0$. 试证明$f$是连续但无界的.

2. 算子$T: l^2\to l^2$定义如下：

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=(x_1,x_2^2,\cdots,x_n^n,\cdots),\quad \forall(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2.$$

试证明对于任何$r>1$, T在$\bar{B}(\theta,r)$上连续, 但无界.

3. 设X和Y是两个实Bananch空间, V是X中的有界闭凸集. 如果算子$f: V\to Y$是一致连续的, 试证明f必为有界算子.

4. 设X为自反Banach空间, 算子$f:\mathscr{D}(f)\subset X\to X$, $x_0\in X$, 称算子f在x_0 处强连续, 是指对于任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(f)$, 若该点列弱收敛到$x_0$ (也就是说, 对于X的对偶空间中的任意元素φ, 都有$\varphi(x_n)\to\varphi(x_0)$), 就有$\|f(x_n)-f(x_0)\|_X\to 0(n\to\infty)$. 现在假设$f:\bar{B}(x_0,r)\subset\mathscr{D}(f)\to X$ 强连续, 试证明f在$\bar{B}(x_0,r)$上一致连续.

5. 定义泛函$f: C[0,1]\to\mathbb{R}$如下

$$f(x)=\int_0^1 x^2(t)dt,\quad \forall x\in C[0,1].$$

试求在点x处的Fréchet导算子$f'(x)$.

6. 设$X=C^1[0,1]$, $Y=C[0,1]$, 在X上赋以范数$\|x\|_1=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. 又设算子$f: X\to Y$定义为

$$(f(x))(t)=x'(t)+[x(t)]^2.$$

试证明f在X中每一点处Fréchet可微, 并求出f在点$x_0\in X$处的Fréchet导算子$f'(x_0)$.

7. 设X为Banach空间, 算子$f: X\to X$在X上连续Fréchet可微, 并且满足

$$f(tx)=tf(x),\quad \forall x\in X,\ t\in\mathbb{R}.$$

试证明f是线性的. 实际上$f(x)=f'(\theta)x$.

8. 设X,Y是两个实Banach空间, $U\subset X$是开集, 有界闭区间$[a,b]\subset\mathbb{R}$, 算子$f: [a,b]\times U\to Y$连续且偏导映射[6]$f'_x(t,x)$连续, 记

$$g(x)=\int_a^b f(t,x)dt.$$

[6]定义见§4.4

试证明g在U上是Fréchet可微的, 且

$$g'(x) = \int_a^b f'_x(t,x)dt.$$

9. 设$[a,b] \subset \mathbb{R}$是给定的闭区间, $X = \{u \mid u \in C[a,b], u(a) = u(b) = 0\}$, 二元函数$K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$连续且满足$K(s,t) = K(t,s)$, 定义积分算子$\mathscr{K}$如下

$$(\mathscr{K}u)(s) = u(s)\int_a^b K(s,t)u(t)dt, \quad a \le s \le b, \quad u \in X.$$

证明$\mathscr{K}$在X上是Fréchet可微的, 并求出它的Fréchet导映射.

10. 设$K(s,t,u)$是定义在$[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$上的实值连续函数, 且存在连续的偏导数$K_u(s,t,u)$. 算子$\mathscr{K} : C[0,1] \to C[0,1]$定义如下

$$(\mathscr{K}x)(s) = \int_0^1 K(s,t,x(t))dt.$$

试证明$\mathscr{K}$在$x_0 \in C[0,1]$处的Fréchet微分为

$$(\mathscr{K}'x_0)h(s) = \int_0^1 K_u(s,t,x_0(t))dt, \quad \forall h \in C[0,1].$$

11. 设X, Y是两个实Banach空间, $f : X \to Y$在X上是紧算子. 试证明: 若f在$x_0 \in X$处是$F-$可微的, 则F-导算子$f'(x_0)$也是X到Y的紧算子.

12. 设$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$定义为

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2.$$

求f在点$x = (x_1,x_2)$处的二阶Fréchet导算子$f''(x)$.

13. 设X, Y, Z是实赋范线性空间, Ω是乘积空间$X \times Y$中的开集, 算子$f : \Omega \to Z$在点$(x_0,y_0) \in \Omega$处是Fréchet可微的. 试证明f在(x_0,y_0)处对x和y的偏导算子[7]都存在, 而且

$$f'(x_0,y_0)(x,y) = f'_x(x_0,y_0)x + f'_y(x_0,y_0)y.$$

14. **(Taylor公式)** 设X, Y是两个实赋范线性空间, $U \subset X$是凸开集, 算子$f : U \to Y$ 有连续的$n+1$阶F-导映射, 则对于任意$x_0 \in U$以及$h \in X$, 当$x_0 + h \in U$时, 就有

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n \\ &\quad + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}d\theta. \end{aligned}$$

[7]定义见§4.4

15. 如上题所设, 试证明如下形式的Taylor公式

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+\mathscr{R}(h),$$

其中余项$\mathscr{R}(h)$有以下估计

$$\|\mathscr{R}(h)\|_Y \le \sup_{0\le\theta\le1}\frac{1}{n!}\|f^{(n)}(x_0+\theta h)-f^{(n)}(x_0)\|_Y\cdot\|h\|_X^n$$

和$\|\mathscr{R}(h)\|_Y = o(\|h\|_X^n)$.

16. 试证明推论4.3.11.

17. 试证明推论4.3.15和推论4.3.16.

18. 设C是欧氏空间$\mathbb{R}^n$中有界闭集, $\mathscr{A}: C\to C$, 对任何$x,y\in C$, 当$x\ne y$时, 有

$$d(\mathscr{A}x,\mathscr{A}y)<d(x,y).$$

试证明$\mathscr{A}$在C中存在唯一不动点.

19. 设X为实Banach空间, $r>0$, 算子$T:\bar{B}(\theta,r)\to X$满足

   (i) $\|Tx-Ty\|\le\lambda\|x-y\|$, 其中$0<\lambda<1$;

   (ii) $\|T\theta\|\le r(1-\lambda)$.

   证明存在唯一一点$x\in\bar{B}(\theta,r)$使得$Tx=x$.

20. 设X是一个Banach空间, C是X的非空闭子集. 对于映射$f:C\to C$, 存在$n\in\mathbb{N}$使得f^n是严格压缩的. 试证明存在唯一$x\in C$满足$f(x)=x$.

21. 设X是实Banach空间, 算子$f:X\to X$, 记

$$a_n=\sup_{x,y\in X}\frac{d(f^n(x),f^n(y))}{d(x,y)},$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 试证明$f$在$X$中有唯一不动点.

22. 设X是一个Banach空间, $x_0\in X$, $r>0$, $\bar{B}(x_0,r)$是X中的闭球. 映射$T:\bar{B}(x_0,r)\times X\to\bar{B}(x_0,r)$连续, 而且存在常数$k\in(0,1)$, 使得对于任一给定的$\alpha\in X$都有

$$\|T(x,\alpha)-T(y,\alpha)\|\le k\|x-y\|.$$

由Banach不动点定理$T(x,\alpha)$有唯一不动点x_α, 于是定义映射$f(\alpha)=x_\alpha$. 试证明f是连续的.

23. 设函数$y(t) \in C[0,1]$, 常数λ满足$|\lambda| < 1$. 考虑积分方程

$$x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds = y(t).$$

试证明上述方程存在唯一解$x(t) \in C[0,1]$.

24. 设$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$连续且存在$K > 0$, 使得

$$\|f(t,y)\| \leq K(1 + \|y\|), \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

试证明以下Cauchy问题有解：

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

25. 设$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是连续映射, $r > 0$, 球面$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \big| \|x\| = (\sum\limits_{i=1}^n x_i^2)^{1/2} = r\}$. 若$f$满足

$$f(x) + \lambda x \neq 0, \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in S_r.$$

试证明存在一点$x_0 \in B(0,r)$使得$f(x_0) = 0$.

26. 设X是n维实赋范线性空间, $r > 0$, 试证明$\bar{B}(0,r) \subset X$与$\bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$同胚.

27. 试证明推论4.4.6.

28. 设$K(s,t,u)$在$[0,1] \times [0,1] \times [-a,a]$上连续, 且满足$K(s,t,0) \equiv 0$. 此外, 还假设$K$关于$u$的偏导函数$K_u(s,t,u)$也在$[0,1] \times [0,1] \times [-a,a]$上连续. 考察非线性积分方程

$$x(s) = \lambda \int_0^1 K(s,t,x(t)) dt, \tag{4.4.8}$$

其中λ为参数. 试证明: 若$\lambda_0 \neq 0$不是线性积分方程

$$x(s) = \lambda \int_0^1 K_u(s,t,0) x(t) dt$$

的特征值(即$x(s) = \lambda_0 \int_0^1 K_u(s,t,0)x(t)dt$没有非零解), 则存在$r > 0$以及$\tau \in (0,r)$, 使得当$|\lambda - \lambda_0| < r$时, 方程4.4.8在$C[0,1]$中没有满足$\|x(s)\| < \tau$的非零解.

29. 设$x_0 \in \mathbb{R}^n$是给定的点, n个n元函数$f_i(x_1, \cdots, x_n)(i = 1, \cdots, n)$都在$x_0$的某邻域内具有连续的一阶偏导数. 试证明：当Jacobi行列式

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0$$

时, 映射$F(x) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n))$在点$x_0$处局部微分同胚.

参考文献

[1] 定光桂, *Banach*空间引论, 科学出版社, 1997.

[2] 胡适耕, 泛函分析, 高等教育出版社, 2001.

[3] 江泽坚, 孙善利, 泛函分析（第二版）, 高等教育出版社, 2005.

[4] 欧文.克雷斯齐格, 蒋正新等译, 泛函分析导论及应用, 北京航空航天大学出版社, 1987.

[5] 刘培德, 泛函分析基础, 科学出版社, 2006.

[6] 郭大钧, 非线性泛函分析, 山东科学技术出版社(第二版), 2004.

[7] 冯德兴, 凸分析基础, 科学出版社, 1995.

[8] 李广民, 刘三阳, 应用泛函分析, 西安电子科技大学出版社, 2003.

[9] 陆启韶, 周梦, 高宗升, 郭定辉, 现代数学基础, 北京航空航天大学出版社, 2005.

[10] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 舒五昌, 实变函数论与泛函分析（下册,第二版）, 高等教育出版社, 1985.

[11] 张恭庆, 林源渠, 泛函分析(上册), 北京大学出版社, 1987.

[12] 张石生, 不动点理论及应用, 重庆出版社, 1984.

[13] 赵义纯, 非线性泛函分析及其应用, 高等教育出版社, 1989.

[14] 周民强, 实变函数论, 北京大学出版社, 2005.

[15] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[16] Bryan P. Rynne, Martin A. Youngson, *Linear Functional Analysis*, Tsinghua University Press/Springer,2005.

[17] Kung-Ching Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[18] Enflo P, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., 1973(130):309-317.

[19] Joel Franklin, *Methods of Mathematical Economics*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[20] Vasile I. Istratescu, *Fixed Point Theory: An Introduction*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1981.

[21] James R. C., A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1951(37):174-177.

[22] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc, New York, 1991

[23] Angus E. Taylor, David C. Lay,*Introduction to Functional Analysis*, Wiley, New York, 1980.