浙江大学2015——2016学年秋冬学期
《常微分方程》课程期末考试试卷参考解答

一. 求下列方程的通解（10分）

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y)dy = 0.$$

解. 由于$M = e^x$, $N = e^x \cot y + 2y$，则

$$\frac{M_y - N_x}{M} = -\cot y,$$

可得积分因子

$$\mu = \sin y$$

原问题转化为

$$e^x \sin y dx + (e^x \cos y + 2y \sin y)dy = 0.$$
$$d(e^x \sin y - 2y \cos y + 2\sin y) = 0$$

通解是

$$e^x \sin y - 2y \cos y + 2\sin y = C$$

二. （20分）

1.求下列方程组的通解

$$\begin{cases} x' = -n^2 y + \cos(nt), \\ y' = -n^2 x + \sin(nt), \end{cases}$$

其中n是一个给定的正整数。

解. 由第二式得到

(1) $$x = -\frac{1}{n^2} y' + \frac{1}{n^2} \sin(nt)$$

代入第一式得到

$$y'' - n^4 y = (n - n^2)\cot(nt),$$

特征方程

$$\lambda^2 - n^4 = 0, \ \lambda = \pm n^2.$$

奇次方程的解是

$$Y = C_1 e^{n^2 t} + C_2 e^{-n^2 t}$$

设特解是$y^* = A\sin(nt) + B\cos(nt)$得$A = 0$, $B = \frac{n-1}{n(1+n^2)}$ 所以

$$y = C_1 e^{n^2 t} + C_2 e^{-n^2 t} + \frac{n-1}{n(1+n^2)} \cos(nt)$$

代入(1)得

$$x = -C_1 e^{n^2 t} + C_2 e^{-n^2 t} + \frac{n+1}{n(1+n^2)} \sin(nt)$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{n^2 t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-n^2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(1+n^2)} \sin(nt) \\ \frac{n-1}{n(1+n^2)} \cos(nt) \end{pmatrix}$$

2. 考虑如下三阶齐次线性常微分方程

$$xy''' + (3 + 4x)y'' + (4x + 8)y' + 4y = 0, \ x > 1.$$

已知方程有一解$y_1 = 1/x$，求方程的通解。进一步，判断零解的李雅普诺夫稳定性。

解：设$y = \frac{u}{x}$，得到

$$u''' + 4u'' + 4u' = 0, \ \lambda(\lambda + 2)^2 = 0$$

则

$$u = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + C_3$$

所以通解是

$$y = \frac{C_1}{x} e^{-2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{C_3}{x}$$

渐近稳定

三.（10分）讨论下面方程组零解的李雅普诺夫稳定性

$$(1)\begin{cases} x' = 4y + 2x \\ y' = -2x + y^3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x' = -x^2 y + y^3 \\ y' = -2x^3 + xy^2 \end{cases}$$

解. (1) 线性化系统$\lambda = 1 \pm \sqrt{7}i$，不稳定
另外，可以定义$H = x^2 + 2y^2$, $\frac{dH}{dt} = 4(x^2 + y^4)$，不稳定
(2) 首次积分$H = 2x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = x^4 + (y^2 - x^2)^2$，稳定但是不渐近稳定

四. (10分) 判断平衡点的类型并画出相图的草图$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$

解. $trA = -2 < 0$, $detA = -3 + 4 = 1$,

$$(trA)^2 - 4detA = 0$$

渐近稳定的星形结点或者退化结点。

$$\frac{4-3k}{1-k} = k$$

唯一解$k = 2$，所以渐近稳定的退化结点。
$c = 4 > 0$所以在(1,0)点逆时针旋转。

五.（10分）对于以$(0,0)$为平衡点（奇点）的系统$\begin{cases} x' = x - y(1-y) \\ y' = 2x + 4y - \sin y \end{cases}$,

(1) 写出相应的线性化系统
(2) 判断该线性化系统平衡点的类型并画出相图的草图

解. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ $trA = 4 > 0$, $detA = 3 + 2 = 5$,

$$(trA)^2 - 4detA < 0$$

不稳定的焦点
$c = 2 > 0$所以在(1,0)点逆时针旋转。

六(10分). 设$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$在区间$(0,1)$连续，$X_j(t) = \begin{pmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{pmatrix}$ $(j = 1, 2)$ 是2阶齐次线性方程组$X' = A(t)X$的两个解, $W(t) = \left|\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}\right|$. 叙述并证明关于$W(t)$的刘维尔(Liouville)公式。

证明.

$$X_j'(t) = \begin{pmatrix} x_j'(t) \\ y_j'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_j(t) \\ y_j(t) \end{pmatrix}$$

$$(X_1', X_2') = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}(X_1, X_2)$$

$$W'(t) = \left|\begin{pmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}\right|$$

$$= a(t)\left|\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}\right| + b(t)\left|\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}\right| + c(t)\left|\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}\right| + d(t)\left|\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}\right|$$

$$= (a(t) + d(t))W(t)$$

所以我们得到

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} (a(s) + d(s))ds\right) \forall t \in (0,1)$$

七(20分). 设$f(x, y)$在$[0,2] \times \mathbb{R}$有界连续，$y = \phi(x)$ $(x \in [0,1])$ 是方程

$$y' = f(x, y), y(0) = 0\ ,$$

的一个解。设$[0,1]$区间上的连续可微函数$w(x)$满足$w(0)=0$且

$$w' > f(x,w), \forall x \in [0,1]. \tag{*}$$

(1) 问能否判断$\phi(x) < w(x)$, $\forall x \in (0,1]$, 并给出充足理由(证明或者举例);
(2) 如果(*)式仅在$x \in (0,1]$成立, 判断并给出充足理由;
(3) 第2问中如果已知f连续可微, 判断并给出充足理由。

(若需要, 可直接用Peano或者Picard定理)

证明. 1. 可以。首先(*)式零点的信息($w(0)=\phi(0)$, $w'(0) > f(0,w(0)) = f(0,\phi(0)) = \phi'(0)$)告诉我们存在$\delta > 0$, 使得

$$\phi(x) < w(x), \forall x \in (0,\delta]$$

下面证明δ可以取1, 如若不然, 必然存在$x_1 \in (\delta,1]$, 使得

$$\phi(x) < w(x), \forall x \in (0,x_1), \phi(x_1) = w(x_1)$$

由此, 导数的定义告诉我们

$$\phi'(x_1) \geq w'(x_1)$$

也就是说

$$f(x_1,w(x_1)) = f(x_1,\phi(x_1)) = \phi'(x_1) \geq w'(x_1)$$

这与题目已知条件(*)矛盾。

2. 不可以。例如$\phi = x^{3/2}$, $w = -\frac{1}{8}x^{3/2}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^{1/3} & |y| \leq 1 \\ 3/2 & y > 1 \\ -3/2 & y < -1 \end{cases}$$

$$w' = -\frac{3}{16}x^{1/2} > f(x,w) = -\frac{3}{4}x^{1/2}, \forall x \in (0,1]$$

3. 可以。首先, 记ϕ_n为对应于$f_n = f(x,y) - 1/n$的解(由于f有界, 在$[0,1]$区间存在解), 则由1,知道

$$\phi_n(x) < \phi_{n+1}(x) < w(x), \forall x \in (0,1]$$

显然$\phi_n \to \phi(x)$(由积分方程知极限函数是解, 由解的唯一性知极限函数就是ϕ), 于是我们得到

$$\phi(x) \leq w(x), \forall x \in (0,1] \tag{2}$$

然后我们证明$\phi(x) < w(x)$, $\forall x \in (0,1]$。我们用反证法, 若否, 则存在$x_1 \in (0,1]$使得$\phi(x_1) = w(x_1)$, 于是由(*)

$$\phi'(x_1) = f(x_1,\phi(x_1)) = f(x_1,w(x_1)) < w'(x_1)$$

由此存在$x_2 \in (0,x_1)$, 使得

$$\phi(x_2) > w(x_2)$$

这与(2)矛盾。

八(10分). 判断是否存在一个$[1,\infty)$上的连续可微函数$F(t)$使得

$$F'(t) \geq t^{-2}F^3(t), F(t) \geq t, \forall t \geq 1$$

(1) 如果存在请举例或给出证明
(2) 如果不存在, 给出证明

答: 不存在。反证法, 如果存在, 则由不等式知道:

$$F^{-3}F'(t) \geq t^{-2}$$

$$\frac{F^{-2}(t) - F^{-2}(1)}{-2} \geq 1 - t^{-1}$$

$$F^{-2}(t) \leq F^{-2}(1) + 2t^{-1} - 2 \leq 2/t - 1$$

$$F(t) \geq \sqrt{t/(2-t)}$$

$t \to 2$时, F趋于无穷大, 与连续性(保证有界闭区间上有界)矛盾!