高等代数 期中考试题

本试卷共计十道试题，每题满分 10 分；用 E 表示单位矩阵，矩阵 A 的转置矩阵表示为 A^T.

1. 假设 $D_1=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}, D_i=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{i-2} & x_2^{i-2} & \cdots & x_n^{i-2} \\ x_1^i & x_2^i & \cdots & x_n^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}, i=2,3,\cdots,n$，计算 $\sum_{i=1}^{n} D_i$.

2. 设 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X^TY=\alpha, A=E+XY^T$.

当 $\alpha\neq -1$ 时，证明 A 是可逆矩阵，并且求出它的逆矩阵 A^{-1} .

3. 设 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)^T, i=1,2,\cdots,n$ ， $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 一个全排列矩阵 $P=((-1)^{i_1}e_{i_1},(-1)^{i_2}e_{i_2},\cdots,(-1)^{i_n}e_{i_n})$，计算 P 的行列式.

4. 求参数 p,t 使得方程 $XA=B$ 有唯一解，无穷多解，无解，在有解时求出所有的解，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 6 & p & -10 \\ 3 & 1 & 15 & 12 \end{pmatrix}, X=(x_1,x_2,x_3,x_4), B=(1,3,3,t).$$

5. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，从 A 的行中任意取 s 行组成一个矩阵 B，从 B 中任意取 t 列组成举证 C，证明 (1) $r(B)\geq r(A)+s-m$; (2) $r(C)\geq r(A)+s+t-m-n$.

6. $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个任意矩阵，证明 $|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 其中

$$a_k=(-1)^k\sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n}\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{vmatrix}$$，并计算 $|\lambda E-B|$ 其中 $B=\begin{pmatrix}1\\2\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$.

7. 设 A 是一个秩等于 1 的 $m\times n$ 矩阵，$b\neq 0$ 是一个 $m\times 1$ 的列向量，η 是 $AX=b$ 的解，而矩阵 $B=(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$ 的秩等于 $n-1$，满足 $AB=0$，证明矩阵 $C=(\eta,\eta+\alpha_2,\cdots,\eta+\alpha_n)$ 是可逆矩阵.

8. 设 A,B 是 n 阶对称矩阵，证明 $A=B$ 的充要条件是对任意 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足 $XAX^T=XBX^T$. 对任何矩阵 C 都存在对称矩阵 D 使得 $XCX^T=XDX^T$ 对所有 X 成立.

9. 计算 A^n，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

10. 证明包含 $\sqrt[3]{2}$ 的最小数域是 $P=\{a_0+a_1\sqrt[3]{2}+a_2\sqrt[3]{4}\mid a_0,a_1,a_2$ 都是有理数$\}$（即任何其余包含了 $\sqrt[3]{2}$ 数域 Q 都有 $Q\supseteq P$. 试刻画包含了圆周率 π 的最小数域.

高等代数(I)期中练习 2009

1. 给出矩阵秩的定义，说明秩的意义，亦即你认为为何要引入秩的概念；给出秩的至少三种等价刻划.

2. 证明 Frobeuius 不等式，即：对 A、B、$C \in P^{n\times n}$，有 $r(ABC) \geq r(AB)+r(BC)-r$

3. 证明：对矩阵 $A \in P^{s\times t}$

$r(A)=1 \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in P^{s\times 1}$ $\beta \in P^{t\times 1}$ 使得 $A=\alpha\beta^T$

4 (1) 设 A、B 分别是 $n\times m$ 阵和 $m\times n$，试证.

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|$$

(2) 设 A 是 n 阶可逆阵，α, β 是两个 n 元列向量，试证：$|A+\alpha\beta^T| = |A|(1+\beta^T A^{-1}\alpha)$

(3) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & a_2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & a_3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a_{n-1} & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & a_n \end{vmatrix}$$