解 析 几 何

October 20, 2018

第22页习题:

3-(2). 证明: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2\sin^2\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le\vec{a}^2\vec{b}^2.$

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$ 当且仅当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$

3-(3).证明: 由矢量积对加法的分配律直接计算得

$$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\times\left(-\vec{b}-\vec{a}\right)=-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b},$$
$$\vec{c}\times\vec{a}=\left(-\vec{b}-\vec{a}\right)\times\vec{a}=-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}.$$

3-(5). 证明： 因为 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$， 所以由上题的结论知

$$\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\times\overrightarrow{PA}.$$

又因为

$$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right|,S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PC}\right|,$$
$$S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}\right|,$$

所以知

$$S_{\triangle APB}=S_{\triangle APC}=S_{\triangle BPC}.$$

3-(6). 证明：将向量平移到共同的起点 O. 首先注意到他们的夹角和为 2π, 因此若三向量共线，那么 $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=0$，则要证明的式子显然成立.

现在设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共线. 记 $\vec{v}:=\sin\alpha\vec{a}+\sin\beta\vec{b}+\sin\gamma\vec{c}.$

方法一：利用向量的点积. 因为 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, 所以

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{a}&=\sin\alpha+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta\\&=\sin\alpha+\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha+\sin(2\pi-\alpha)\\&=\sin\alpha-\sin\alpha=0.\end{aligned}$$

因此知 $\vec{v}\perp\vec{a}$.

同样的计算可知 $\vec{v}\perp\vec{b}, \vec{v}\perp\vec{c}$. 因为 $\vec{v}$ 与 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，但$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共线，所以只能有 $\vec{v}=\vec{0}$.

方法二： 利用向量的模长.

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2 &= \sin^2\alpha|\vec{a}|^2+\sin^2\beta|\vec{b}|^2+\sin^2\gamma|\vec{c}|^2+2\sin\alpha\sin\beta\vec{a}\cdot\vec{b}\\ &\quad+2\sin\beta\sin\gamma\vec{b}\cdot\vec{c}+2\sin\alpha\sin\gamma\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\\ &\quad+2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta+2\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha.\end{aligned}$$

由积化和差公式知

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta&=\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)=-\sin^2\alpha,\\ \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha&=\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)=-\sin^2\gamma,\\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha&=\sin\beta\sin(\alpha+\gamma)=-\sin^2\beta.\end{aligned}$$

结合上面的计算式知 $|\vec{v}|^2=0$. 所以$\vec{v}=\vec{0}$.

4-(1). 解：因为 $\overrightarrow{AB}=(-1,0,2)$ ， $\overrightarrow{AC}=(0,1,-3)$, 所以

$$Area_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&2\\0&1&-3\end{pmatrix}\right|=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

4-(2). 解：因为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$, 所以 AB 边上的高为

$$h_{AB}=\frac{2S}{|\overrightarrow{AB}|}=\sqrt{\frac{14}{5}}.$$

同理可得另外两边上的高分别为 $\sqrt{\frac{7}{5}},\sqrt{\frac{14}{27}}$.

5. 证明： 由题知 $\overrightarrow{AC}=\vec{r}_3-\vec{r}_1$, $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$. 设 $\vec{n}=\vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_2\times\vec{r}_3+\vec{r}_3\times\vec{r}_1$, 那么有

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} &= \vec{r}_1\times\vec{r}_2\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)+\vec{r}_2\times\vec{r}_3\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)+\vec{r}_3\times\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)\\ &= \vec{r}_1\times\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3-\vec{r}_2\times\vec{r}_3\cdot\vec{r}_1\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} &= \vec{r}_1\times\vec{r}_2\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\vec{r}_2\times\vec{r}_3\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\vec{r}_3\vec{\times}r_1\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\\ &= -\vec{r}_2\times\vec{r}_3\cdot\vec{r}_1+\vec{r}_3\times\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

因此 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$, 且 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$, 所以 $\vec{n}\perp\triangle ABC$.

6. 证明： 此题有多种有趣的证明，几何法和代数法均有. 感兴趣的同学可在 Internet 上查询到. 这里写出利用余弦定理的证法. 因为

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

那么

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = \frac{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}{4b^2c^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A\\ &= \frac{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}{16}\\ &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}\\ &= p(p-a)(p-b)(p-c).\end{aligned}$$

下面用向量法证明：

$$令\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c},\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{b},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}$$

$$则\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0},\Rightarrow(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2=(\overrightarrow{c})^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{c}^2-\overrightarrow{a}^2-\overrightarrow{b}^2)$$

$$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})^2+(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=(\overrightarrow{a})^2(\overrightarrow{b})^2,记a,b,c分别为BC,AC,AB的边长$$

$$4S^2+\tfrac{1}{4}(c^2-a^2-b^2)^2=a^2b^2,这里三角形的面积用S表示$$

$$\Rightarrow 4s^2=a^2b^2-[\tfrac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)]^2$$

$$=[ab+\tfrac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)][ab-\tfrac{1}{2}(c^2-a^2-b^2)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[c^2-(a-b)^2]frac12[(a+b)^2-c^2]$$

$$=\tfrac{1}{4}(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)$$

$$利用p=\tfrac{1}{2}(a+b+c),即得结论$$

7. 过B做BH垂直于OA, 垂足为H. 以$\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}$, $\frac{\vec{HB}}{|\vec{HB}|}$, $\frac{\vec{OA}\times\vec{HB}}{|\vec{OA}\times\vec{HB}|}$为幺正标架，易得

$$\vec{OC}=|\vec{OH}|\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}+|\vec{HC}|\cos\theta\frac{\vec{HB}}{|\vec{HB}|}+|\vec{HC}|\sin\theta\frac{\vec{OA}\times\vec{HB}}{|\vec{OA}\times\vec{HB}|}$$

又

$$|\vec{OH}|=|\vec{OB}|\cos<\vec{OB},\vec{OA}>=\frac{\vec{OB}\cdot\vec{OA}}{|\vec{OA}|}.$$

$$|\vec{HC}| = \frac{|\vec{OB} \times \vec{OA}|}{|\vec{OA}|}.$$

$$\vec{HB} = \vec{OB} - \vec{OH} = \vec{OB} - \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} \cdot \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OA}}{|\vec{OA}|}.$$

整理得

$$\vec{OC} = (1-\cos\theta)\vec{OB} \cdot \vec{OA}\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \cos\theta\vec{OB} + \frac{\sin\theta}{|\vec{OA}|}\vec{OA} \times \vec{OB}.$$

第26页习题：

1. (1), (2), (3) 的证明显然.

1-(4). 证明：设 S 是$1,2,3$ 的所有排列的集合. 直接由定义计算得

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) &= \left(\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\vec{e}_j\right)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} c_k\vec{e}_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_i b_j c_k \left((\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k\right) \\
&= \sum_{\sigma\in S} a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} \left(\left(\vec{e}_{\sigma(1)} \times \vec{e}_{\sigma(2)}\right) \cdot \vec{e}_{\sigma(3)}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in S} sign\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} \left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right).
\end{aligned}$$

(注意：课本P.23的定理1.5.3 只适用于直角坐标系，而这里的 $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ 不一定要求是两两垂直且单位长，任意三个不共线的向量均可，相当于斜角坐标系. 标准的证明应该是这样.)

3. 证明：举两例证明此题.

方法一: 利用混合积的性质, 只需证明

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OF} = \vec{0}$$

由

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2},\ \overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2},\ \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

代入上式, 即得

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OF} =& \frac{1}{2}[\overrightarrow{OA} \times (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} \times (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OC} \times (\overrightarrow{OA} \\
=& \vec{0}
\end{aligned}$$

方法二：因为 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}$ 共线，所以

$$\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OP}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OD}\right)\cdot\overrightarrow{OP}=0$$

同理可得 $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}\right)=\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OF}\right)=0.$ 所以

$$\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}\right)+\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OF}\right)=0.$$

P26页习题：

第4题：略.

5-(1). 证明：运用第25页公式(1.5.6)得

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\left[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}\right]&=\vec{b}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{a}\right]=\vec{b}\cdot\left[|\vec{a}|^2\vec{b}-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})\vec{a}\right]\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\angle(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\angle(\vec{a},\vec{b}).\end{aligned}$$

5-(5). 证明：不失一般性，设 $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\times\vec{c}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\times\vec{a}\neq\vec{0}$.
由于

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a},$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\right)&=\left(\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times(\vec{c}\times\vec{a})\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\&=\left(\left(\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\right)\vec{c}-(\vec{c}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}))\,\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\&=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2.\end{aligned}$$

因此 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$ 当且仅当 $\left(\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$， 即 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面当且仅当 $\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}$ 共面.

P26页习题：

第4题：略.

5-(1). 证明：运用第25页公式(1.5.6)得

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\left[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}\right]&=\vec{b}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{a}\right]=\vec{b}\cdot\left[|\vec{a}|^2\vec{b}-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})\vec{a}\right]\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\angle(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\angle(\vec{a},\vec{b}).\end{aligned}$$

5-(5). 证明：不失一般性，设 $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\times\vec{c}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\times\vec{a}\neq\vec{0}$.
由于

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a},$$

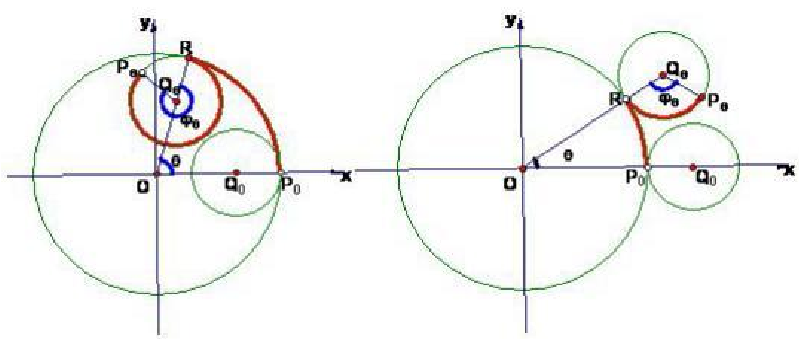
所以

$$\begin{aligned}\left(\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\right) &= \left(\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times(\vec{c}\times\vec{a})\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\ &= \left(\left(\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\right)\vec{c}-(\vec{c}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}))\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\\ &= \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2.\end{aligned}$$

因此 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$ 当且仅当 $\left(\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$， 即 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面当且仅当 $\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}$ 共面.

第32页习题：

1-(3),(5).



解：(3): 如上左图所示，以大圆心为圆坐标原点O, 初始时两圆圆心的连线为 x 轴建立直角坐标系. 不妨设小圆沿大圆逆时针方向滚动. 记初始时小圆圆心为 Q_0, 滚动一段时间后到达 Q_θ, 其中 θ 为此时 x 轴到两圆心连线的旋转角. 那么 Q_θ 的坐标为 $(a-b)(\cos\theta,\sin\theta)$, 也即

$$\overrightarrow{OQ_\theta}=(a-b)(\cos\theta,\sin\theta).$$

记初始的切点为 P_0. 设此时 P_0 滚动到 P_θ, 而现在的切点记为 R, 显然 P_0R 的弧长等于 $P_\theta R$ 的弧长. 记$\overrightarrow{Q_\theta P_\theta}$ 旋转到 $\overrightarrow{Q_\theta R}$ 的角为 φ_θ, 则有

$$\varphi_\theta=\frac{a}{b}\theta.$$

注意到向量

$$\overrightarrow{Q_\theta R}=b(\cos\theta,\sin\theta),$$

而向量 $\overrightarrow{Q_\theta P_\theta}$ 相当于向量 $\overrightarrow{Q_\theta R}$ 旋转 $-\varphi_\theta$ 角度而来, 所以有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_\theta P_\theta} &= e^{-i\varphi_\theta}\overrightarrow{Q_\theta R}=e^{-i\varphi_\theta}b(\cos\theta,\sin\theta)\\ &= b(\cos(\theta-\varphi_\theta),\sin(\theta-\varphi_\theta))\\ &= b\left(\cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta,-\sin\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta\right).\end{aligned}$$

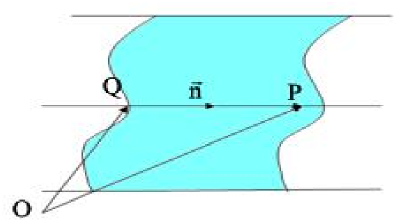
因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_\theta} &= \overrightarrow{OQ_\theta}+\overrightarrow{Q_\theta P_\theta}\\ &= \left((a-b)\cos\theta+b\cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta,(a-b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta\right).\end{aligned}$$

所以 P_θ, 即动点所满足的参数方程为

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos\theta+b\cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta, \\ y=(a-b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta, \end{cases} -\infty<\theta<+\infty.$$

此曲线的参数方程为左图，右图为下题曲线的图:



(5): 与(3)的方法相同, 注意到此时

$$\overrightarrow{OQ_\theta}=(a+b)(\cos\theta,\sin\theta),\ \overrightarrow{Q_\theta R}=b(\cos(-\theta),\sin(-\theta))=-b(\cos\theta,\sin\theta),$$

且向量 $\overrightarrow{Q_\theta P_\theta}$ 相当于向量 $\overrightarrow{Q_\theta R}$ 旋转 φ_θ 角度, 所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_\theta P_\theta} &= e^{i\varphi_\theta}\overrightarrow{Q_\theta R}=-e^{i\varphi_\theta}b(\cos\theta,\sin\theta)\\ &= -b(\cos(\theta+\varphi_\theta),\sin(\theta+\varphi_\theta))\\ &= -b\left(\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta,\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta\right).\end{aligned}$$

那么，

$$\overrightarrow{OP_\theta}=\left((a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta,(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta\right).$$

因此所求的参数方程为

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta, \\ y=(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta, \end{cases} -\infty<\theta<+\infty\,.$$

2-(3) 解：由方程知，此平面的法向量为 $\vec{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$. 设$P=(x,y,z)$ 是所求曲面上一点. 注意到 $Q=(1,0,z)$ 在原平面中，所以 P 满足下面的方程

$$\left|\overrightarrow{QP}\cdot\mathbf{n}\right|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

即所求的方程为

$$(x-y)^2+2(x+y)-1=0.$$

2-(5) 解：设 $P=(x,y,z)$ 为目标曲面上的点， 那么有

$$\begin{cases} |x|=|y| \\ |y|=|z| \end{cases}$$

2-(6) 解：设 $P=(x,y,z)$ 为目标曲面上的点， 那么有

$$\begin{cases} \sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{x^2+z^2} \\ \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+z^2} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} |x|=|y| \\ |y|=|z| \end{cases}.$$