

第 30 讲 球面几何

1. 证明在平面上连接两点的最短的光滑曲线为直线段.
2. Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上赋予共形度量, 限制在 \mathbb{C} 上,

$$\rho = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}$$

证明 (1). 此度量在 $z = \infty$ 处也有定义, 且使得度量密度是光滑函数 (提示: 坐标变换 $z \mapsto 1/z$); (2) 此度量的 Gauss 曲率 $\kappa_\rho \equiv 1$. (有兴趣者可思考与球极投影的关系)

3. 单位球面上半径为 r 的测地圆盘记为 $D(r)$, 证明其面积为

$$4\pi \sin^2(r/2).$$

4. 在单位圆盘作为双曲空间的模型中, 在 $(-1, 1)$ 这条测地线上, 原点的右侧站了一列等距 L , 等高 h (指的是双曲距离与高度) 的一排人, 每人都沿着测地线方向站直 (双曲意义下垂直于 $(-1, 1)$), 第一个人与原点距离为 L , 求第 n 个人的头顶的坐标.