

第 31 讲 模函数与应用

1. 类似于模函数的构造, 构造一个从单位圆 \mathbb{D} 到 $\mathbb{C} - \{0, 1, t\}$ 的覆盖映射, 其中 t 是一个不为 $0, 1$ 的实数.

(注: 此题可以推广到平面去掉 $n(\geq 3)$ 个点的情形).

2. 证明 $f(t) = e^{2\pi it}$ 是从 \mathbb{R} 到 $\partial\mathbb{D}$ 的覆盖映射.

3. 证明 Picard 小定理等价于如下命题:

假设 f, g 都是整函数, 满足 $e^f + e^g = 1$, 则 f, g 都是常数.

4. 证明任何覆盖映射 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 都是同胚

5. 假设 f, g 都是整函数, 满足 $f^n + g^n = 1$, 其中 $n \geq 3$ 是整数, 证明 f, g 都是常数.

(注: $n = 2$ 时, 此题结论不成立, 反例: $\cos^2(z) + \sin^2(z) \equiv 1$).