一. 求解下列方程（20分）

1. $x\frac{dy}{dx}-4y=x^2\sqrt{y},\ x>0,\ y(1)=1.$

解：令$z=\sqrt{x}$, 则

$$z'-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$$

所以

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}(C+\int\frac{2}{x}e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx)=cx^2+\frac{x}{2}\ln x$$

因为$y(1)=1$，所以$c=1$

则有

$$\sqrt{y}=x^2+\frac{x}{2}\ln x$$

还有特解$y=0$.

2. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-2y=0$, $-1<x<1$, 已知$y_1=x$.

解：

$$y''+\frac{2x}{1-x^2}y'-\frac{2}{1-x^2}y=0$$

由刘伟尔公式，得

$$y=y_1(c_1+c_2\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx)$$

$$=x(c_1+c_2\int x^{-2}e^{-\int\frac{2x}{1-x^2}dx}dx)$$

$$=c_1x-c_2(1+x).$$

二. 求解下列方程（组）（20分）

1. 求常微分方程 $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}-6y=x^2$, $x>0$, 的通解.

解：令$x=e^t$，得到

$$\frac{d^3y}{dt^3}-6\frac{d^2y}{dt^2}+11\frac{dy}{dt}-6y=e^{2t}$$

特征方程$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$ 得

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

奇次方程通解是

$$Y=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$$

设非奇次方程特解是$y^*=Ate^{2t}$，带入方程得到$A=-1$，所以

$$y^*=-te^{2t}$$

所以解

$$y=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}-te^{2t}=c_1x+c_2x^2+c_3x^3-x^2\ln x$$

2. 求常微分方程组

$$\begin{cases} x' = y + z, \ t > 0, \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

的通解。指出零解的稳定性。

解:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1(\text{二重根})$$

$\lambda_1 = 2$对应特征向量$\xi_1 = (1,1,1)^\top$, 解是$X_1 = (1,1,1)^\top e^{2t}$

$\lambda_2 = -1$对应特征向量$\xi_2 = (1,-1,0)^\top$, $\xi_3 = (1,0,-1)^\top$, 解是$X_2 = (1,-1,0)^\top e^{-t}$, $X_3 = (1,0,-1)^\top e^{-t}$

通解是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

三. （10分）

证明奇次方程$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$，有积分因子

$$\mu = \frac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}.$$

用积分因子法求下面方程的通解解，

$$xydx - (x^2 + y^2)dy = 0.$$

（提示；奇次方程指，存在正整数n，对于任意$\lambda, P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x,y), Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x,y)$。则有 $P(x,y) = x^n P(1, \frac{y}{x}), Q(x,y) = x^n Q(1, \frac{y}{x})$）

解：令$P(x,y) = x^n f(\frac{y}{x})$, $Q(x,y) = x^n g(\frac{y}{x})$

$$(\mu P)_y = \frac{yx^{2n-1} f'(\frac{y}{x}) g(\frac{y}{x}) - x^{2n} f(\frac{y}{x}) g(\frac{y}{x}) - yx^{2n-1} f(\frac{y}{x}) g'(\frac{y}{x})}{(x^{n+1} f(\frac{y}{x}) + yx^2 g(\frac{y}{x}))^2} = (\mu Q)_x$$

所以μ是积分因子。

对于

$$xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$$

取$\mu = -y^{-3}$得到

$$-\frac{x}{y^2}dx + \frac{x^2}{y^3}dy + \frac{1}{y}dy = 0$$

$$d(-\frac{x^2}{2y^2} + \ln|y|) = 0$$

$$-\frac{x^2}{2y^2}+\ln|y|=C$$

四. （20分）叙述皮亚诺（Peano）存在性定理，并证明。

五. （10分）设初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=x+(1+y)^2, \\ y(0)=0, \end{cases}$$

的解的右行最大存在区间是$[0,\beta)$。证明：

$$\frac{\pi}{4}<\beta<1.$$

解：对于$x\in[0,1]$,有

$$(1+y)^2\le x+(1+y)^2\le 1+(1+y)^2$$

考虑右行下解

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=(1+y)^2, x>0 \\ y(0)=0, \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{1-x}-1, x\in[0,1)$$

考虑右行上解

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=1+(1+y)^2, \\ y(0)=0, \end{cases}$$

$$y=tan(x+\frac{\pi}{4})-1, x\in[0,\frac{\pi}{4})$$

由比较定理得到

$$\frac{\pi}{4}\le\beta\le 1.$$

设原方程的解$y=\phi(x)$, 取ξ是一个充分靠近0的正数考虑右行下解

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=(1+y)^2, x>\xi \\ y(\xi)=\phi(\xi), \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{\xi+\frac{1}{1+\phi(\xi)}-x}-1, x\in[0,\xi+\frac{1}{1+\phi(\xi)})$$

令$C(\xi)=\xi+\frac{1}{1+\phi(\xi)}$, 有$C(0)=1$,

$$C'(\xi)=1-\frac{\xi+(1+\phi(\xi))^2}{(1+\phi(\xi))^2}<0$$

则有$C(\xi)<1$. 由比较定理得到

$$\beta\le C(\xi)<1.$$

考虑右行上解, 取充分靠近1的$s \in (0,1)$,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = s + (1+y)^2, x > 0 \\ y(0) = \phi(0), \end{cases}$$

$$y = \sqrt{s} tan(x\sqrt{s} + arctan\frac{1}{\sqrt{s}}) - 1, x \in [0, \frac{1}{\sqrt{s}}(\frac{\pi}{2} - arctan\frac{1}{\sqrt{s}}))$$

令$B(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}(\frac{\pi}{2} - arctan\frac{1}{\sqrt{s}})$, 有$B(s) = \frac{\pi}{4}$,

$$B'1 = -\frac{\pi}{4s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} arctan\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2s(1+s)} = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} < 0$$

则有$B(s) > \frac{\pi}{4}$. 由比较定理得到

$$\beta \geq B(s) > \frac{\pi}{4}.$$

六. （20分）

1. 求解二阶奇次线性方程 $x'' + 5x' + 6x = 0, \ t > 0$. 并分析解$x = 0$的稳定性。
2. 求解二阶非奇次线性方程 $x'' + 5x' + 6x = f(t), \ t > 0$.
3. 假设函数$g(t)$是$[0, \infty)$上的有界连续函数，并且$\int_0^{+\infty} |g(t)| dt$有界。设方程

$$x'' + 5x' + (6 + g(t))x = 0,$$

在$t \geq 0$上有解，证明此解在$t \geq 0$上保持有界。

解：特征方程

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

通解$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$.

2, 常数变异法,令$x = u_1 e^{-2t} + u_2 e^{-3t}$

$$\begin{cases} u_1' e^{-2t} + u_2' e^{-3t} = 0, \\ -2u_1' e^{-2t} - 3u_2' e^{-3t} = f(t) \end{cases}$$

$$u_1' = fe^{2t}. \ u_2' = -fe^{3t}$$

$$u_1(t) = c_1 + \int_0^t f(s)e^{2s} ds, \ u_2(t) = c_2 + \int_0^t f(s)e^{3s} ds,$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \int_0^t f(s)(e^{-2(t-s)} + e^{-3(t-s)}) ds$$

3, 设$\int_0^{+\infty} |g(t)| dt \leq M$.

$$x'' + 5x' + 6x = g(t)x$$

则有

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \int_0^t g(s)x(s)(e^{-2(t-s)} + e^{-3(t-s)}) ds$$

$$|x(t)| = |c_1| + |c_2| + \int_0^t |g(s)||x(s)| ds$$

用Gronwall不等式得到

$$|x(t)| \leq (|c_1| + |c_2|) e^{\int_0^t |g(s)| ds} \leq (|c_1| + |c_2|) e^M$$