

吉林大学 2016-2017 学年第一学期“数学分析 I”期末复习试题

共八道大题 满分 100 分 时间 180 分钟

一、(共 8 分) 叙述零点存在性定理并证明该定理.

二、(共 10 分) 用定义证明

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 4} = 3; (2) \lim_{x \rightarrow 2} \sin x = \sin 2.$$

三、(共 24 分) 计算下列各题.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k}; (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x + x}{\ln(1+x)}; (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{\tan x - \sin x}; (4) \int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}.$$

四、(共 18 分) 按要求计算下列导数.

$$(1) \text{ 设 } f(x) = x^{2016} e^{\frac{1}{x}}, \text{ 求 } f^{(2017)}(1);$$
$$(2) \text{ 已知 } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos t, y = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos t, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2};$$
$$(3) \text{ 已知函数 } y = f(x) \text{ 由方程 } (x+y) \ln x - x^2 = 0 \text{ 确定, 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$$

五、(共 16 分) 证明题.

- (1) 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{2}, 1 = x_{n+1}(2 - x_n)$, 试讨论其敛散性, 并说明理由. 若其收敛, 请求出极限;
- (2) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 连续, 且有 $\{x_n\} \subset [0, 1]$, 使得 $g(x_n) = f(x_{n+1}), n \in N_+$. 证明必存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

六、(共 13 分) 设函数 $f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的凹凸区间;
- (3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线.

七、(共 6 分) 讨论 $y = x^\alpha, \alpha > 0$ 的一致连续性.

八、(共 5 分) 已知 $f(x)$ 为实数域上二阶可导函数, 满足 $f(0) = f'(0) = 0$, 且有不等式 $|f''(x)| \leq 2017 |f(x)f'(x)|, \forall x \in R$ 成立. 证明 $f(x)$ 的值恒为 0.