北京大学2016-2017学年第一学期“数学分析Ⅰ”期中考试试题

参考解析

一、（共30分）计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\sin\dfrac{1}{n}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\ln n}$；

解：（1）对 $\forall\varepsilon>0,\exists N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$，使得 $\forall n>N$，有 $|\cos n\sin\dfrac{1}{n}|\le|\sin\dfrac{1}{n}|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

故由定义知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos n\sin\dfrac{1}{n}=0.$

（2）$\forall n\in N_+,n>2$，有 $1<\sqrt[n]{n\ln n}<(\sqrt[n]{n})^2$ 成立.由二项式定理知，$\forall n\in N_+,n<(1+\sqrt{\dfrac{2}{n}})^n$，

故有 $1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\sqrt{\dfrac{2}{n}})=1$，故由夹挤定理 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n})^2=1$，由夹挤定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\ln n}=1$.

注意：下面的(3)(4)两题任选一道小题！

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$；（4）使极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^\alpha}$ 存在且有限的正实数 α

解：（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{1}{\sin^2x})^{-\frac{\tan x}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{1}{\tan^2x}+1)^{-\frac{\tan x}{2}}=\lim\limits_{t\to+\infty}(\dfrac{1}{t^2}+1)^{-\frac{t}{2}}=e^0=1$.

（4）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{2\alpha}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{x}{x^{2\alpha}}+\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^{4\alpha}}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{x}{x^{2\alpha}}+\sqrt{\dfrac{x}{x^{4\alpha}}+\sqrt{\dfrac{x}{x^{8\alpha}}}}}$，

故若极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^\alpha}$ 存在且有限，则 $\alpha\in(0,\dfrac{1}{8}]$.

二、（共20分）

（1）若数列 $\{a_n\}$ 的任一子列都有一个收敛的子列，则数列 $\{a_n\}$ 是否一定收敛？请证明或举出反例；

解：不一定收敛.反例为数列 $\{(-1)^n\}$，其任一子列中都必有一个收敛于1或-1的子列.

（事实上，本题的条件等价于 $\{a_n\}$ 是有界数列.）

注意：下面的(2)(3)两题任选一道小题！

（2）设 $y=f(x)$ 定义在实数集上的连续函数，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，问该函数能否取到最大，最小值？给出理由；

（3）设 $y=f(x)$ 是定义在实数集上的连续函数，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，问该函数能否取到最大，最小值？给出理由.

解：（2）一定有最小值，不一定有最大值. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x},x\ne0\\0\qquad,\ x=0\end{cases}$ 连续且取不到最大值.

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，则存在 $X>0$，使得对任意$|x|>X$，有$|f(x)-1|<1$ 成立.

则在区间 $(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ $(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 中，$f(x)>0$.而函数 $f(x)$ 区间在$[-X,X]$上连续，

故由最值定理知必存在最小值 $M\le0$，其即为整个函数 $f(x)$ 的最小值.

（3）最大值和最小值至少能取到一个.首先，若 $f(x)=1$ 为常函数，则结论显然成立.
若存在 x_0 使得 $f(x_0)=A\neq 1$，不妨设 $A>1$，则由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ 知，存在 $X>0$，使得对任意$|x|>X$，有$|f(x)-1|<A-1$成立.则在区间 $(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 中，$f(x)<A$.而函数 $f(x)$ 在区间$[-X,X]$上连续，故由最值定理知必存在最大值 $M\geq A$，其即为整个函数 $f(x)$ 的最大值.类似可证明当 $A<1$时，函数 $f(x)$ 有最小值.

三、(共 20 分)
（1）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 均在区间$(0,1)$上一致连续，则函数 $f(x)g(x)$ 在此区间是否一致连续？证明或举出反例；
（2）设函数 $f(x)$、$g(x)$ 均在区间$[1,+\infty)$上一致连续，且函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在此区间上有界。则函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在此区间是否一致连续？证明或举出反例.
解：(1) 一致连续.我们先来证明函数 $f(x)$、$g(x)$ 均在区间$(0,1)$上有界，只需考虑 $f(x)$.
由一致连续性知：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使$\forall x$，$y\in(0,1)$，且$|x-y|<\delta$，有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，又因在$-\delta<x-1<0,-\delta<y-1<0$时，有$|x-y|<\delta$，故有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，则由 *Cauchy* 准则知 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 存在且有限，记为b.同理 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在且有限，记为a.　　故设函数 $F(x)$：

$$F(x)=\begin{cases}a & ,x=0\\ f(x),& x\in(0,1)\\ b & ,x=1\end{cases}$$

，则其为闭区间$[0,1]$上的连续函数，其有界，则显然 $f(x)$ 有界.
同理 $g(x)$ 有界，记 $f(x)$、$g(x)$ 的界为正数 M、N.由函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间$(0,1)$上一致连续，知$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得$\forall x$，$y\in$(0,1) 且$|x-y|<\delta$,有$|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2M},|g(x)-g(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2N}$
故有$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=|f(x)[g(x)-g(y)]+g(y)[f(x)-f(y)]|\leq|f(x)[g(x)-g(y)]|+$
$|g(y)[f(x)-f(y)]|\leq M\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M}+N\cdot\dfrac{\varepsilon}{2N}=\varepsilon$，故函数 $f(x)g(x)$ 在此区间一致连续.
（2）不一定一致连续. 考虑 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$，则由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 知 $f(x)$、$g(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上一致连续.而 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sin x^2$，下证其不一致连续.
取 $x_n=\sqrt{2n\pi},y_n=\sqrt{(2n+1)\pi}$.则：$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(2n+1)\pi}-\sqrt{2n\pi})=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\pi}{\sqrt{(2n+1)\pi}+\sqrt{2n\pi}})=0$
而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{f(y_n)}{g(y_n)}-\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)})=\lim\limits_{n\to\infty}[\sin(2n+1)\pi-\sin 2n\pi]=1\neq0$，故 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sin x^2$ 不一致连续.
[注]函数 f 在有限区间 I 一致连续的充要条件是对于任意一个在区间 I 上的收敛数列$\{a_n\}$,都有$\{f(a_n)\}$是收敛数列.
充分性.假设 f 在区间 I 不一致连续，则$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0$，使$\forall x$，$y\in I$，且$|x-y|<\delta$，有$|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon_0$，我们取$\delta=\dfrac{1}{n}$，$a_s=x$、$a_t=y$.则显然$\{a_n\}$有界，故存在收敛的子列$\{a_{n_k}\}$，但其又满足$|f(a_{n_s})-f(a_{n_t})|\geq\varepsilon_0$,与$\{f(a_n)\}$是收敛数列矛盾！故充分性得证.
必要性.因函数 f 在区间 I 一致连续，故有：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使$\forall x$，$y\in(0,1)$，且$|x-y|<\delta$，有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.而对于收敛数列$\{a_n\}$，其为柯西列，故$\forall\delta>0,\exists M\in N$，使得$m,n>M$时$|a_m-a_n|<\delta$.从而$\forall\varepsilon>0,\exists M\in N_+$，使得$m,n>M$时$|f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon$.故$\{f(a_n)\}$收敛.

四、(共 10 分) **注意：本题任选一道小题！**

(1) 证明：若函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)上连续，且$|f(x)|$在此区间单调，则 $f(x)$ 也单调；

(2) 证明：闭区间上只有第一类间断点的函数 $f(x)$ 一定有界.

证明:(1) 只需证明函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)上符号一定.否则若有 $m<n$，使 $f(m)f(n)<0$. 则存在 $l\in(m,n)$，使 $f(l)=0$.若 l 为函数 $f(x)$ 的极值点，则与$|f(x)|$在此区间单调矛盾. 故 l 不为极值点，不妨设 $\lim\limits_{x\to l^+}f(x)=0^+,\lim\limits_{x\to l^-}f(x)=0^-$，此时 $\lim\limits_{x\to l^+}|f(x)|=|\lim\limits_{x\to l^-}f(x)|=0^+$，与单调性矛盾！故函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)上定号，易知命题成立.

(2) 记满足条件的闭区间为$[a,b]$.先来证明函数 $f(x)$在区间$[a,b]$处处局部有界.

设 $x_0\in(a,b)$ 为函数 $f(x)$的第一类间断点，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在，故由极限的有界性知：$\exists\delta>0,M_1>0,M_2>0,$ 使得 $|f(x)|\le M_1,\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，$|f(x)|\le M_2,\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$

从而有 $|f(x)|\le\max\{M_1,M_1,f(x_0)\},\forall x:|x-x_0|<\delta$，即 $f(x)$在 x_0 处局部有界.

又函数 $f(x)$在其非间断点上显然局部有界，故其在闭区间$[a,b]$上处处局部有界.

假设函数 $f(x)$在$[a,b]$无界，则可找到在区间$[a,b]$内的数列$\{x_n\}$，使得$|f(x_n)|\geqslant n$.

由数列$\{x_n\}$的有界性可知，存在子数列 $\{x_{n_k}\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A\in[a,b]$.

由 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上处处局部有界知：$\exists\delta>0,M>0,$ 使得 $|f(x)|\le M,\forall x:|x-A|<\delta$，又 $\exists N\in N_+$，使得 $\forall k>N,$ 有 $|x_{n_k}-A|<\delta$，进而 $|f(x_{n_k})|\le M$.

另一方面，由 $|f(x_{n_k})|\ge n_k$ 及 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=+\infty$ 知 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=+\infty$，这与 $|f(x_{n_k})|\le M$ 矛盾！

五、(共 15 分)

(1)(10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，且 $f(1)=f(0)$.证明：对任意的 $0<a<1$，只要其倒数是自然数，则总存在区间 $[0,1-a]$ 上的实数 m，使得 $f(a+m)=f(m)$；

(2)(5 分) 证明：对任意的 $0<a<1$,只要其倒数不是自然数，则总存在连续函数 $g(x)$，满足 $g(1)=g(0)$，且对所有在区间 $[0,1-a]$ 上的实数 x，使得 $g(x+a)\ne g(x)$.

证明：(1) 设 $n=\dfrac{1}{a}$，函数 $F(x)=f(x+\dfrac{1}{n})-f(x)$，分别取 $x=0,\dfrac{1}{n},\ldots,\dfrac{n-1}{n}$ 代入 $F(x)$，可得 $F(0)=f(\dfrac{1}{n})-f(0),F(\dfrac{1}{n})=f(\dfrac{2}{n})-f(\dfrac{1}{n}),\cdots,F(\dfrac{n-1}{n})=f(1)-f(\dfrac{n-1}{n})$.

相加，并结合 $f(1)=f(0)$，可知 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}F(\dfrac{k}{n})=0$. 若存在 k 使得 $F(\dfrac{k}{n})=0$，则命题已成立；

反之则必有正整数 s,t，使得 $F(\dfrac{s}{n})<0$，$F(\dfrac{t}{n})>0$，不妨设 $s>t$ 从而由零点存在性定理知，

函数 $F(x)$ 在区间 $[\dfrac{t}{n},\dfrac{s}{n}]$ 存在零点 x_0，即存在 x_0 使得 $f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0)$.

(2) 设函数 $k(x)$ 周期为 a，且满足 $k(1)\ne 0$,则设函数 $g(x)=k(x)-k(1)x$.易知 $g(1)=g(0)$，且 $g(x+a)=k(x+a)-k(1)(x+a)=k(x)-k(1)(x+a)\ne g(x)-k(1)x=g(x)$，命题得证.

六、(共 5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上一致连续，求证：$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{f(x)}{x}<+\infty$.

证明:由一致连续 $\exists\delta>0,\forall x_1,x_2:x_1\in[1,+\infty),x_2\in[1,+\infty),|x_1-x_2|<\delta$，使得 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$. 易知 $\forall x\in[1,+\infty)$，$\exists n\in N$，使 $\dfrac{1}{n}|x|<\delta\le\dfrac{1}{n-1}|x|$，由 $|f(x)|-|f(1)|\le|f(x)-f(1)|=$

$|\sum\limits_{k=1}^{n}[f(1+\dfrac{k(x-1)}{n})-f(1+\dfrac{(k-1)(x-1)}{n})]|\le\sum\limits_{k=1}^{n}|f(1+\dfrac{k(x-1)}{n})-f(1+\dfrac{(k-1)(x-1)}{n})|<n$.得 $|f(x)|<|f(1)|+n$.

故 $n\le\dfrac{|x|}{\delta}+1$，得 $|f(x)|<|f(1)|+\dfrac{|x|}{\delta}+1$.故 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{f(x)}{x}\le\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|\dfrac{f(x)}{x}|\le\dfrac{1}{\delta}<+\infty.$