第 2 讲：复数与几何 2020-2-27

1. (平行四边形的特征) 证明平面上四个点 z_1, z_2, z_3, z_4 依次为平行四边形的四个顶点的充要条件是

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0.$$

2. (单位圆周上的矩形) 给定单位圆周上的四个点 z_1, z_2, z_3, z_4, 证明这四个点是一矩形的顶点的充要条件是

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

3. (重心) 求三角形 $\Delta z_1 z_2 z_3$ 的重心. (进一步, 你能求出内心，垂心，外心吗?)

4. (Thebault 定理, 1937) 沿着平行四边形的每条边都向外做一个正方形, 证明得到的四个正方形的中心也构成正方形的四个顶点.

5. (正三角形) 假设 $ABCDEF$ 是单位圆周上的六边形, 满足 $AB = CD = EF = 1$. 记 BC 中点为 X, DE 中点为 Y, FA 中点为 Z, 证明 ΔXYZ 是正三角形.

6. (三点共线) 证明三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. (凸多边形的内点) 假设 $z_1, \cdots, z_n$ 是凸 n 边形的 n 个顶点, a 满足

$$\frac{1}{z_1 - a} + \cdots + \frac{1}{z_n - a} = 0,$$

证明 a 在凸 n 边形的内部.

8. (三角恒等式) 证明

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

(提示: 考虑方程 $(z+1)^n = 1$ 的 $n-1$ 个非零根点乘积)

9. (距离乘积的最大值) 假设 $P_1P_2\cdots P_n$ 是单位圆内接正 n 边形. 对于单位圆周上任意一点 Q, 记 QP_k 为 Q 到 P_k 的距离. 求如下乘积的最大值.

$$QP_1 \cdot QP_2 \cdots QP_n.$$

10. (附加题, 不做要求)

利用复数的方法证明一个漂亮的几何定理. 证明发到 wxg688@163.com