2019-2020春夏学期《微分几何》第九周作业

P_{55}

1. **证明** (1) 对于平面, 由其第一基本形式的系数

$$g_{11}=g_{22}=1,\quad g_{12}=0$$

对其上的测地线, 带入Liouville公式得

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}=0,\quad \theta=\mathrm{const}$$

又因

$$\frac{dv}{du}=\tan\theta=c_1=\mathrm{const}$$

故测地线为

$$v=c_1u+c_2$$

即为直线.

(2) 设圆柱面方程为$\mathbf{x}(u,v)=(a\cos u,a\sin u,v)$, 计算得

$$g_{11}=a^2,\quad g_{12}=0,\quad g_{22}=1$$

对其上的测地线, 带入Liouville公式得

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}=0,\quad \theta=\mathrm{const}$$

又因

$$\frac{dv}{du}=\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\tan\theta=a\tan\theta=\mathrm{const}$$

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时, 测地线为v-曲线, 即为直母线; 当θ为其他时, 测地线为圆柱螺线. ▌

2. **证明** (1) 由曲面的方程得

$$g_{11}=1+f'^2,\quad g_{12}=0,\quad g_{22}=f^2$$

代入Liouville公式,

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}+\frac{f'}{f\sqrt{1+f'^2}}\sin\theta=0$$

且有

$$\frac{du^1}{ds}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+f'^2}},\quad \frac{du^2}{ds}=\frac{\sin\theta}{f}$$

以上三式即为测地线的微分方程. 由此得

$$\begin{aligned}\frac{d(f\sin\theta)}{ds} &= f'\frac{du^1}{ds}\sin\theta+f\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\\ &= f'\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+f'^2}}\sin\theta+f\cos\theta\left(-\frac{f'}{f\sqrt{1+f'^2}}\sin\theta\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

因此$f\sin\theta=$常数.

(2) 若θ为定角, 则$\sin\theta$为常数, 因而f为常数, 即旋转曲面是圆柱面. ▌

3. **证明** 取正交参数系(u,v), 且使一族测地线为u-曲线. 设两族测地线交成定角α, 则这两族测地线分别为$\theta=0$和$\theta=\alpha$. 代入Liouville公式, 对$\theta=0$

$$k_g=-\frac{1}{2\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial v}=0$$

即$\frac{\partial g_{11}}{\partial v}=0$. 对$\theta=\alpha$

$$k_g=\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\ln g_{22}}{\partial u}\sin\alpha=0$$

即$\frac{\partial g_{22}}{\partial u}=0$. 因$\omega^1=\sqrt{g_{11}}du$, $\omega^2=\sqrt{g_{22}}dv$, 由此得$d\omega^1=d\omega^2=0$, 从而$\omega_1^2=0$, 于是

$$K=-\frac{d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}=0$$

因此曲面必是可展曲面. ▌

4. **证明** 由球面方程得

$$g_{11}=r^2,\quad g_{12}=0,\quad g_{22}=r^2\cos^2 u$$

代入Liouville公式得

$$\begin{aligned}k_g &= \frac{d\theta}{ds}+\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\ln g_{22}}{\partial u}\sin\theta\\ &= \frac{d\theta}{ds}-\sin u\frac{\sin\theta}{r\cos u}\end{aligned}$$

又因为

$$\frac{dv}{ds}=\frac{\sin\theta}{r\cos u}$$

故

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\sin u\frac{dv}{ds}$$

其中θ表示曲线与u-曲线, 即经线的夹角.

对于经线, 有$\theta=0$, $v=$常数, 由上式, $k_g=0$; 对于大圆纬线, 有$\theta=\frac{\pi}{2}$, $u=0$, 同样得$k_g=0$. 因此一切经线和大圆纬线是测地线. ▌