

解析几何

November 23, 2018

作业 (P62: 2. P63: 5, 6, 7; P69: 1, 4, 5, 9, 10; P77:1, 3, 4)

第62页习题 2.解: 由已知, 可设椭圆抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

利用其过点 $(1, 2, 5), (\frac{1}{3}, -1, 1)$, 带入上面方程, 即得

$$a^2 = \frac{5}{18}, b^2 = \frac{5}{8}.$$

从而椭圆抛物面方程为

$$9x^2 + 4y^2 = 5z.$$

5.解: 不妨设过 x 轴的平面是 $\pi: z = ky$, 那么它与此单叶双曲面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = ky \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 a^2 (\frac{1}{b^2} - \frac{k^2}{c^2}) = a^2 \\ z = ky \end{cases} \quad (5-1)$$

因为要求的交线是圆, 那么依题可知, 此圆的圆心为原点, 圆关于 x 轴对称, 且 $(\pm a, 0, 0)$ 在圆上, 所以此圆可看成以原点为球心, 以 a 为半径的球与平面 $z = ky$ 的交线, 即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = ky \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2(1 + k^2) = a^2 \\ z = ky \end{cases} \quad (5-2)$$

比较(5-1)式和(5-2)式得

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} \right) = \frac{(1 + k^2)}{a^2}.$$

因为 $a > b$, 可解得

$$k = \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}} \quad \text{或} \quad k = -\frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}.$$

所以要求的平面为

$$\pi : b\sqrt{a^2 + c^2}z \pm c\sqrt{a^2 - b^2}y = 0.$$

6. 解： 依题知此椭圆抛物面关于 y 轴对称，且平面的法矢量为 $(1, m, 0)$. 记它们的交线为

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = y \\ x + my - 2 = 0 \end{cases}.$$

因为只有当平面和抛物面的对称轴平行时才可能截得抛物线， y 轴的方向矢量为 $(0, 1, 0)$, 所以只能要求

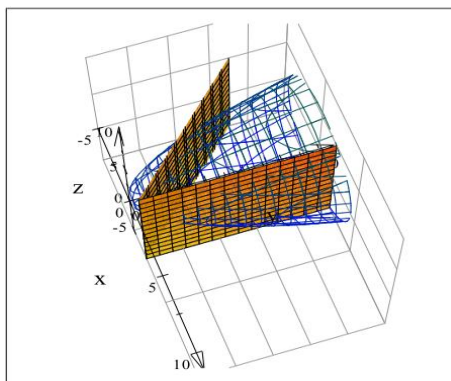
$$(1, m, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0.$$

因此 $m = 0$ 时， Σ 是抛物线。

也因此只有当 $m \neq 0$ 时， Σ 有可能是椭圆. 既然 $m \neq 0$ ，可将 Σ 重新写做

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{3}z^2 = \frac{4m+1}{m^2} \\ x + my - 2 = 0 \end{cases}.$$

显然，若 $\frac{4m+1}{m^2} > 0$ ，即 $m > -\frac{1}{4}$ 时， $\left(x + \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{3}z^2 = \frac{4m+1}{m^2}$ 是个平行与 y 轴的柱面. 因为 $m \neq 0$ ，平面 $x + my - 2 = 0$ 不会平行与此柱面的轴，所以它们的交线一定是椭圆.



7 证明： (1) 用平行于 xOy 的平面 $\pi : z = h, |h| > c$, 分别去截3个曲面, 则有 π 与单叶双曲面的交线为

$$C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

π 与二次锥面的交线为

$$C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

π 与双叶双曲面的交线为

$$C_3: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

显然, 曲线 C_3 包含在 C_2 里, C_2 包含在 C_1 里.

(2) 仍然利用 (1) 中的做法, 取 $y = 0$. 则由上面的交线方程, 对于 C_1 , 取 $x_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, 对于 C_3 , 取 $x_2 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$. 则有

$$x_1 - x_3 = \frac{2a}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1} + \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}}.$$

当 $h \rightarrow \infty$, $(x_1 - x_3) \rightarrow 0$, 而曲面之间的距离 $\leq (x_1 - x_3)$. 从而当 $|z| \rightarrow \infty$, 曲面之间的距离 $\rightarrow 0$.

第69页习题

1. 解: 设直母线方程为

$$\begin{cases} \lambda_1(x + \frac{z}{3}) = \mu_1(1 - \frac{y}{2}) \\ \mu_2(x - \frac{z}{3}) = \lambda_1(1 + \frac{y}{2}) \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \lambda_2(x + \frac{z}{3}) = \mu_2(1 + \frac{y}{2}) \\ \mu_2(x - \frac{z}{3}) = \lambda_2(1 - \frac{y}{2}) \end{cases}$$

直线过点 $A = (1, 2, 3)$, 可解得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \mu_2$. 即得所求直线方程为

$$\begin{cases} 1 - \frac{y}{2} = 0 \\ x - \frac{z}{3} = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x + \frac{z}{3} = 1 + \frac{y}{2} \\ x - \frac{z}{3} = 1 - \frac{y}{2} \end{cases}$$

(也即 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{3}$ 和 $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$).

4. (方法1) 设单叶双曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

设三条直母线 l_1, l_2, l_3 的方程分别为

$$\begin{cases} \lambda_i(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \mu_i(1 - \frac{y}{b}) \\ \mu_i(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \lambda_i(1 + \frac{y}{b}) \end{cases}$$

可得直线的方向向量分别为

$$\vec{v}_i = \left(\frac{\lambda_i}{a}, \frac{\mu_i}{b}, \frac{\lambda_i}{c} \right) \times \left(\frac{\mu_i}{a}, -\frac{\lambda_i}{b}, -\frac{\mu_i}{c} \right) = \left(\frac{\lambda_i^2 - \mu_i^2}{bc}, \frac{2\lambda_i\mu_i}{ac}, -\frac{\lambda_i^2 + \mu_i^2}{ab} \right)$$

则不妨设方向向量为

$$\vec{u}_i = abc\vec{v}_i = (a(\lambda_i^2 - \mu_i^2), 2b\lambda_i\mu_i, -c(\lambda_i^2 + \mu_i^2))$$

反证法:假设存在一张平面 π 与上面三条直线平行, 则 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 共面, 即 $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) =$

0. 直接计算可得

$$\begin{vmatrix} a(\lambda_1^2 - \mu_1^2) & 2b\lambda_1\mu_1 & -c(\lambda_1^2 + \mu_1^2) \\ a(\lambda_2^2 - \mu_2^2) & 2b\lambda_2\mu_2 & -c(\lambda_2^2 + \mu_2^2) \\ a(\lambda_3^2 - \mu_3^2) & 2b\lambda_3\mu_3 & -c(\lambda_3^2 + \mu_3^2) \end{vmatrix} = -4abc \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\mu_1 & \mu_1^2 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2\mu_2 & \mu_2^2 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3\mu_3 & \mu_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= -4abc(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)$$

情形1: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都不为0. 则不妨设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 则

$$(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) = (\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2) = 0$$

从而不妨设 $\mu_2 - \mu_1 = 0$, 即 $\mu_1 = \mu_2$. 从而 l_1, l_2 的直线方程相同, 这与 l_1, l_2 是不同的直母线矛盾, 从而这样的平面 π 不存在.

情形2: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 至少有一个为0, 不妨设 $\lambda_1 = 0$, 此时

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = -4abc\mu_1^2\lambda_2\lambda_3(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) = 0$$

则 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2$ 中至少有一个为0.

若 $\lambda_2 = 0$, 则 \vec{u}_1, \vec{u}_2 方向相同, 从而 l_1, l_2 平行, 这与 l_1, l_2 是同组直母线矛盾(类似, 若 $\lambda_3 = 0$, 则 \vec{u}_1, \vec{u}_3 方向相同, 从而 l_1, l_3 平行, 这与 l_1, l_3 是同组直母线矛盾).

若 λ_2, λ_3 不为0, $\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2 = 0$, 则由情形1知, l_2, l_3 平行, 矛盾.

综上所述, 与单叶双曲面的三条同组直母线都平行的平面是不存在的.

(方法2)

反证法:设三条同组直母线为 l_1, l_2, l_3 , 则 l_1, l_2, l_3 两两异面. 设平面 π 与这三条直母线平行. 由单叶双曲面的性质, 分别存在 l_2, l_3 的异族直母线 l'_2, l'_3 使得 l'_2, l_2 平行, l'_3, l_3 平行, 此时 l'_2, l'_3 都与平面 π 平行. 由于 l_1, l'_2 是异族直母线, 且这两条直线不平行, 从而 l_1, l'_2 相交, 记 l_1, l'_2 确定的平面为 π_1 . 则平面 π 与 π_1 平行.

同理, 直线 l_1, l'_3 是异族直母线, 它们也相交, 而直线 l'_3 与平面 π 平行, 从而 l'_3 与平面 π' 平行, 可知直线 l'_3 在平面 π' 上. 这样就有直线 l'_2, l'_3 都在平面 π' 上, 但直线 l'_2, l'_3 是同族直母线, 它们一定异面, 矛盾. 所以假设不成立, 与单叶双曲面的三条同组直母线都平行的平面是不存在的.

(方法3) 设单叶双曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

设直母线 l 所在的母线族的为

$$\begin{cases} \lambda(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \mu(1 - \frac{y}{b}) \\ \mu(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \lambda(1 + \frac{y}{b}) \end{cases}$$

则其方向向量为 $\vec{v} = (a(\lambda^2 - \mu^2), 2b\lambda\mu, -c(\lambda^2 + \mu^2))$. 对于任意一张平面 π , 记其法向量为 $\vec{n} = (l, m, n)$, 若直线 l 与平面 π 平行, 则 $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, 即

$$a(\lambda^2 - \mu^2)l + 2b\lambda\mu m - c(\lambda^2 + \mu^2)n = (al - cn)\lambda^2 - (al + cn)\mu^2 + 2bm\lambda\mu = 0 \quad (1)$$

下证对于任意的 $\vec{n} = (l, m, n) (\vec{n} \neq \vec{0})$, 上面方程只存在两组解 $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ (其中要保证 $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$, 否则这两条同族直母线是相同的.)

若 $al + cn = 0$, 则方程(1) 化为 $(al - cn)\lambda^2 + 2bm\lambda\mu = 0$, 显然这个方程最多有两组解.

若 $al + cn \neq 0$, 则 $\lambda \neq 0$, 令 $t = \frac{\mu}{\lambda}$. 方程(1)化为

$$-(al + cn)t^2 + 2bmt + (al - cn) = 0$$

上面方程最多有两个解.

综上所述, 对于任意一张平面 π , 最多有两条同族直母线与 π 平行. 从而与单叶双曲面的三条同组直母线都平行的平面是不存在的.

5. 解: 因为过单叶双曲面上任意一点, 有且仅有两条不同直母线通过它. 不妨设这两条直母线分别为

$$l_{\lambda:\mu} : \begin{cases} \lambda(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \mu(1 - \frac{y}{b}) \\ \mu(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \lambda(1 + \frac{y}{b}) \end{cases}, \quad l_{\lambda':\mu'} : \begin{cases} \lambda'(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \mu'(1 + \frac{y}{b}) \\ \mu'(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \lambda'(1 - \frac{y}{b}) \end{cases}.$$

那么它们的方向矢量分别为

$$\mathbf{v}_{\lambda:\mu} = \left(\frac{1}{bc} (\lambda^2 - \mu^2), \frac{2\lambda\mu}{ac}, -\frac{1}{ab} (\lambda^2 + \mu^2) \right),$$

和

$$\mathbf{v}_{\lambda':\mu'} = \left(\frac{1}{bc} (\mu'^2 - \lambda'^2), \frac{2\lambda'\mu'}{ac}, \frac{1}{ab} (\lambda'^2 + \mu'^2) \right).$$

由题 $l_{\lambda:\mu} \perp l_{\lambda':\mu'}$, 所以 $\vec{v}_{\lambda:\mu} \cdot \vec{v}_{\lambda':\mu'} = 0$, 即

$$a^2 (\lambda^2 - \mu^2) (\mu'^2 - \lambda'^2) + 4b^2 \lambda \mu \lambda' \mu' - c^2 (\lambda^2 + \mu^2) (\lambda'^2 + \mu'^2) = 0. \quad (5-1)$$

设这两直母线相交与点 $P(X, Y, Z)$, 则

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1. \quad (5-2)$$

情形1: 若 $1 + \frac{Y}{b} \neq 0$, 有

$$\begin{cases} \lambda = \frac{X}{a} - \frac{Z}{c} \\ \mu = 1 + \frac{Y}{b} \\ \lambda' = 1 + \frac{Y}{b} \\ \mu' = \frac{X}{a} + \frac{Z}{c} \end{cases}. \quad (5-3)$$

结合 (5-1), (5-2) 和 (5-3) 得

$$4 \left(1 + \frac{Y}{b}\right)^2 \left(a^2 \left(\frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2}\right) + b^2 \left(\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2}\right) - c^2 \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right)\right) = 0.$$

因为 $1 + \frac{Y}{b} \neq 0$, 得

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} X^2 + \frac{a^2 - c^2}{b^2} Y^2 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} Z^2 = 0. \quad (5-4)$$

再由(5-2)和(5-4)得 $P(X, Y, Z)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}.$$

情形2: 若 $1 + \frac{Y}{b} = 0$, 有

$$\begin{cases} \lambda = 1 - \frac{Y}{b} \\ \mu = \frac{X}{a} + \frac{Z}{c} \\ \lambda' = \frac{X}{a} - \frac{Z}{c} \\ \mu' = 1 - \frac{Y}{b} \end{cases}. \quad (5-5)$$

结合(5-1), (5-2)和 (5-5) 得

$$4 \left(1 - \frac{Y}{b}\right)^2 \left(a^2 \left(\frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2}\right) + b^2 \left(\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2}\right) - c^2 \left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right)\right) = 0.$$

由 $1 + \frac{Y}{b} = 0$ 可得 $1 - \frac{Y}{b} \neq 0$, 所以

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} X^2 + \frac{a^2 - c^2}{b^2} Y^2 - \frac{a^2 + b^2}{c^2} Z^2 = 0. \quad (5-6)$$

由 (5-2) 和 (5-5) 得 $P(X, Y, Z)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}.$$

注意： $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ 时, 无交点.

9. 解： 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上一点, 则必存在一直线 l 过 P 点, 且与抛物线 C_1, C_2 相交. 又因为 l 与平面 $\pi: y - z = 0$ 平行, 则可设 l 的方向矢量为 (l, m, m) . 因此直线 l 的方程为

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - x_0}{m},$$

因为它与 C_1, C_2 相交, 可知存在数 λ, μ , 使得

$$\begin{cases} (y_0 + \lambda m)^2 = 2(x_0 + \lambda l) \\ z_0 + \lambda m = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} (z_0 + \mu m)^2 = -2(x_0 + \mu l) \\ y_0 + \mu m = 0 \end{cases}.$$

从而可得

$$(y_0 - z_0)^2 = 2(x_0 + l\lambda), \quad (z_0 - y_0)^2 = -2(x_0 + l\mu)$$

利用 $z_0 + m\lambda = 0, y_0 + m\mu = 0$ 可得

$$y_0(y_0 - z_0)^2 + z_0(y_0 - z_0)^2 = 2y_0x_0 - 2lm\lambda\mu - 2x_0z_0 + 2lm\lambda\mu$$

即得

$$(y_0 + z_0)(y_0 - z_0)^2 = 2x_0(y_0 - z_0)$$

利用直线平行与平面 $y - z = 0$, 可知 $y_0 - z_0 \neq 0$, 则得要求的曲面方程为

$$y^2 - z^2 = 2x.$$

曲面为双曲抛物面.

(方法2)

由已知, 可设曲面 C_1 上的点为 $(\frac{s^2}{2}, s, 0)$, 设曲线 C_2 上点的坐标为 $(-\frac{t^2}{2}, 0, t)$, 其中 s, t 为参数. 从而直线 l 的方程为

$$\frac{x - \frac{s^2}{2}}{\frac{s^2+t^2}{2}} = \frac{y - s}{s} = \frac{z}{-t} \quad (8.1)$$

利用直线 l 平行于平面 $\pi: y - z = 0$, 可得 $s + t = 0$. 消去方程(8.1)中的参数, 即得曲面方程为

$$y^2 - z^2 = 2x.$$

10. 解： 因为直线 l_1, l_2 间的距离为 $2a$, 夹角为 2θ , 可取坐标系 $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 使得它们的方程分别为

$$l_1: \frac{x}{\cos \theta} = \frac{y}{\sin \theta} = \frac{z - a}{0}, \quad l_2: \frac{x}{\cos \theta} = \frac{y}{-\sin \theta} = \frac{z + a}{0}.$$

(1) 设 $P = (X, Y, Z)$ 为与 l_1, l_2 等距离的点, 即, $\text{dist}^2(P, l_1) = \text{dist}^2(P, l_2)$. 因为

$$\begin{aligned}\text{dist}^2(P, l_1) &= |(X, Y, Z - a) \times (\cos \theta, \sin \theta, 0)|^2 = (Z - a)^2 + (X \sin \theta - Y \cos \theta)^2, \\ \text{dist}^2(P, l_2) &= |(X, Y, Z + a) \times (\cos \theta, -\sin \theta, 0)|^2 = (Z + a)^2 + (X \sin \theta + Y \cos \theta)^2.\end{aligned}$$

所以得 P 轨迹的方程为

$$XY \sin 2\theta + 2aZ = 0.$$

(2) 因为 l_1, l_2 得方程也可写为

$$l_1: \begin{cases} x \tan \theta - y = 0 \\ z - a = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad l_2: \begin{cases} x \tan \theta + y = 0 \\ z + a = 0 \end{cases},$$

所以过它们的平面方程为

$$\pi_1: \lambda(x \tan \theta - y) + \mu(z - a) = 0,$$

$$\pi_2: \lambda'(x \tan \theta + y) + \mu'(z + a) = 0.$$

因为 $\pi_1 \perp \pi_2$, 所以

$$\begin{aligned}0 &= (\lambda \tan \theta, -\lambda, \mu) \cdot (\lambda' \tan \theta, \lambda', \mu') \\ &= \lambda \lambda' (\tan^2 \theta - 1) + \mu' \mu.\end{aligned}$$

不失一般性, 可设 $\mu \neq 0$. 那么由上式可知 $\lambda' \neq 0$. 因为若 $\lambda' = 0$, 可得 $\mu' = 0$, 那么就不存在平面 π_2 了. 因此

$$\frac{\lambda}{\mu} (\tan^2 \theta - 1) = -\frac{\mu'}{\lambda'}. \quad (10-1)$$

设 $P(X, Y, Z) \in \pi_1 \cap \pi_2$, 代入平面 π_1, π_2 的方程得

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{z - a}{x \tan \theta - y} \quad \text{和} \quad \frac{\mu'}{\lambda'} = -\frac{x \tan \theta + y}{z + a}. \quad (10-2)$$

那么由 (10-1) 和 (10-2) 可得

$$-\frac{(z - a)(\tan^2 \theta - 1)}{x \tan \theta - y} = \frac{x \tan \theta + y}{z + a},$$

化简为

$$-\frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta} x^2 + \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} y^2 + z^2 = a^2.$$

由已知 $2\theta \leq \frac{\pi}{2}$, 当 $\cos 2\theta > 0$ 时所得的交线的轨迹是单叶双曲面.

当 $\cos 2\theta = 0$ 时, 得到的为两平面 $x - y = 0$ 和 $x + y = 0$.

P77 习题

在做本节习题之前, 我们首先注意到下面的公式: 设直角坐标系 $I = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 到直角坐标系 $I^* = \{O; \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad (0-1)$$

其中 C 为 I 到 I^* 的过渡矩阵, 即 $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) C$. 首先可将(0-1)写为

$$C \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}. \quad (0-2)$$

由课本P70页内容知 $C^T C = E$, 其中 C^T 是 C 的转置, E 为三阶单位阵. 用 C^T 同时左乘上 (0-2) 式得 I^* 到 I 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - C^T \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (0-3)$$

1. 解: 由题知 I 到 I^* 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

直接计算知

$$C^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad C^T \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

所以用上面的 (0-3) 式可计算得 I^* 到 I 的点坐标变换式为

$$\begin{cases} x^* = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ y^* = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}. \quad (1-2)$$

(1). 将点坐标变换式 (1-1) 代入直线方程 $2x + y + 1 = 0$, 并整理得其在 I^* 中的方程为

$$x^* + 3y^* + 2\sqrt{2} = 0.$$

(2). 将点坐标变换式 (1-2) 代入平面方程 $x^* + y^* - 2 = 0$, 并整理得其在 I 中的方程为

$$x = 2 + \sqrt{2}.$$

3. 解: 因为 I 到 I^* 的点坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x^* + \frac{1}{\sqrt{3}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^* - 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}y^* - \frac{2}{\sqrt{6}}z^* + 1 \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^* + \frac{1}{\sqrt{3}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^* + 1 \end{cases}, \quad (3-1)$$

所以过渡矩阵和 C , 以及 I^* 的原点在 I 中坐标为

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

直接计算知

$$C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(1). 记向量 $\vec{v} = (1, 1, 1)$ 在 I^* 的坐标为向量 \vec{w} , 则 $(\vec{w})^T = C^T(\vec{v})^T$, 从而所求坐标为 $(0, \sqrt{3}, 0)$

(注意: 题目要求的是向量 $\vec{v} = (1, 1, 1)$ 而不是点 $(1, 1, 1)$ 在新的坐标系下的坐标, 坐标系的平移会改变点的坐标, 但是不改变向量的坐标)

(2). 由 (3-1) 式知, 球面 $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ 在 I^* 的方程为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^* + \frac{1}{\sqrt{3}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^*\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}y^* - \frac{2}{\sqrt{6}}z^*\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x^* + \frac{1}{\sqrt{3}}y^* + \frac{1}{\sqrt{6}}z^*\right)^2 = 1.$$

化简得

$$x^{*2} + y^{*2} + z^{*2} = 1.$$

4. 解: (参照例题3.4.2) 设平面 π_i 的法向量为 \vec{n}_i^* , $i = 1, 2, 3$. 由平面的方程知

$$\begin{cases} \vec{n}_1^* = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, 1, -1) \\ \vec{n}_2^* = \frac{1}{\sqrt{66}}(1, 4, 7) \\ \vec{n}_3^* = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) \end{cases}.$$

设 I 到 I^* 的过渡矩阵 C 为

$$C = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}.$$

由题意知对每一个 $i = 1, 2, 3$, $\vec{e}_i^* \parallel \vec{n}_i^*$, 又因为要求 I^* 的坐标分量在 I 中的第一分量均为负, 所以 $a_k^1 < 0, k = 1, 2, 3$. 因此

$$\begin{cases} \vec{e}_1^* = \frac{1}{\sqrt{11}}(-3, -1, 1) \\ \vec{e}_2^* = \frac{1}{\sqrt{66}}(-1, -4, -7) \\ \vec{e}_3^* = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \end{cases}.$$

即过渡矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{66}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{7}{\sqrt{66}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

另一方面, 可得三平面的交点为 $O^* = \cap_{i=1}^3 \pi_i = (\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{11})$. 故从 I 到 I^* 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{11}}x^* - \frac{1}{\sqrt{66}}y^* - \frac{1}{\sqrt{6}}z^* + \frac{3}{11} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{11}}x^* - \frac{4}{\sqrt{66}}y^* + \frac{2}{\sqrt{6}}z^* + \frac{1}{11} \\ z = \frac{1}{\sqrt{11}}x^* - \frac{7}{\sqrt{66}}y^* - \frac{1}{\sqrt{6}}z^* - \frac{1}{11} \end{cases}.$$