吉林大学 2016-2017 学年第一学期“解析几何”期末考试试题

参考解析

一、简答题（共 30 分）

1、已知向量$\alpha=(2,-3,1),\beta=(-1,1,-1),\gamma=(-1,2,1)$，求$\alpha\times\beta$，$\gamma$的夹角.

解：为$\arccos\frac{1}{6}$.

2、由条件分别写出向量α，β的关系：

（1）向量$\alpha\times\beta$，α共线；

（2）向量$\alpha\times\beta$，α，β共面.

解：（1）共线；（2）共线.

3、写出两条直线$l_i:\overrightarrow{M_iM}\times\vec{u_i}=\vec{0}(i=1,2)$异面的一个充要条件，并求其距离.

解：$\left|u_1\quad u_2\quad M_1M_2\right|\neq 0$，距离为$d=\dfrac{(u_1,u_2,M_1M_2)}{|u_1\times u_2|}$.

4、写出曲线$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$以$z$轴为轴旋转而成的旋转面的参数方程.

解：为$\begin{cases}x=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\cos\theta\\y=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sin\theta,\quad（t,\theta\text{为参数}）\\z=z(t)\end{cases}$

5、列出马鞍面所有可能的平面截线.

解：一条直线，两条相交直线，一条双曲线，一条抛物线.

二、计算题（共 50 分）

1、在空间直角坐标系中，按要求求出直线方程：

（1）平行于向量$u=(1,2,3)$，且与直线$\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z}{1},\frac{x-1}{1}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$都相交；

（2）过点$M_0(-3,5,1)$，平行于平面$x+y+z-1=0$，且与直线$\begin{cases}x+2y-z-5=0\\z-1=0\end{cases}$垂直.

解：（1）设直线上的点为(x,y,z).

由条件，有：$\begin{cases}\begin{vmatrix}x+3 & y+5 & z\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}x-1 & y+7 & z\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=0\end{cases}$，即为$\begin{cases}7x-5y+z-4=0\\5x-y-z-12=0\end{cases}$为所求.

（2）该直线为过点$M_0(-3,5,1)$，平行于平面$x+y+z-1=0$的平面与过点$M_0(-3,5,1)$且与直线$\begin{cases}x+2y-z-5=0\\z-1=0\end{cases}$垂直的平面的交线.

过点$M_0(-3,5,1)$，平行于平面$x+y+z-1=0$的平面方程为$x+y+z-2=0$.

直线$\begin{cases}x+2y-z-5=0\\z-1=0\end{cases}$的方向向量为$(2,-1,0)$，故过点$M_0(-3,5,1)$且与直线$\begin{cases}x+2y-z-5=0\\z-1=0\end{cases}$垂直的平面方程为$2x-y+11=0$故所求为：$\begin{cases}x+y+z-2=0\\2x-y+11=0\end{cases}$.

2、已知平面直角坐标系内，曲线的方程为：$8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0$.

（1）判断其的曲线类型；
（2）求出其对称轴；
（3）化简其至标准方程.

解：其矩阵为$A=\begin{pmatrix}8 & 2 & 4\\ 2 & 5 & -8\\ 4 & -8 & -16\end{pmatrix}$，$A_0=\begin{pmatrix}8 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

（1）由条件，其不变量$I_2>0$，$I_3\neq 0$，故其为椭圆.

（2）由$\begin{cases}8x+2y+4=0\\2x+5y-8=0\end{cases}$，得其中心坐标为$(-1,2)$.

设其渐进方向为(m,n).由$(m,n)\ //\ (8m+2n,2m+5n)$，得其渐进方向为$(1,-2),(2,1)$.
故对称轴为$x+2y-3=0,2x-y+4=0$.

（3）先做移轴变换：$\begin{cases}x=x'-1\\y=y'+2\end{cases}$，得：$8x'^2+4x'y'+5y'^2+20=0$

再做正交变换：$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x''+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y''\\ y'=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}x''+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y''\end{cases}$，得：$\dfrac{x''^2}{9}+\dfrac{y''^2}{4}=1$为标准方程.

3、求空间直角坐标系中过三个坐标轴的圆锥面的方程.

解：易知其锥顶为原点，不妨设其轴所在的方向向量为$(1,1,1)$，则不难知此时：

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$为其一条母线，则有：$\begin{cases} x+t+y+t+z+t=1 \\ (x+t)^2+(y+t)^2+(z+t)^2=1 \end{cases}(t为参数)$.

解得$xy+yz+zx=0$，类似可得其他方程为：$-xy+yz+zx=0$，$xy-yz+zx=0$，

$xy+yz-zx=0$.

三、证明题（共20分）

1、求证：过椭圆中心的任何一条直线都为该椭圆的一条直径.

证明：不妨设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，则中心为原点，方向$(m,n)$所对应的直径斜率为$(a^2m,b^2n)$，其包含了所有斜率，故所有过中心的直线都可以找到一个方向，使其成为该方向对应的直径.

（或者对任意一个斜率找一个对应的方向）

2、设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是 l 与 m 的公垂线的中点，A,B 两点分别在直线 l，m 上滑动，且$\angle ACB$=90°，试证直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

证明：以 l，m 的公垂线作为 z 轴，C 作为坐标原点，再令 x 轴与 l，m 的夹角均为α，公垂线的长为 $2c$，若设$k=\tan\alpha\neq 1$，知可写出 A，B 的坐标分别为：

$A(a,-ka,c),B(b,kb,-c)$，由$AC\perp CB$知$ab-k^2ab-c^2=0$.

又设$M(x,y,z)$为 AB 上任一点，则有：$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y+kb}{k(b+a)}=\frac{z-c}{-2c}$.

消去 a 和 b，有：$k^2(1-k^2)x^2-(1-k^2)y^2+k^2z^2=k^2c^2(k\neq 1)$.

即$\frac{x^2}{\frac{c^2}{1-k^2}}-\frac{y^2}{\frac{k^2c^2}{1-k^2}}+\frac{z^2}{c^2}=1$，为单叶双曲面.