中国科学院大学2014-2015学年第一学期“高等代数IB”期末

共八道大题 满分100分 时间180分钟

一、（共20分）给定带有参数 s,a,b 的线性方程组 $\begin{cases} sx_1 + x_2 = a \\ 3x_1 + sx_2 = b \end{cases}$.

（1）在整数范围内给出参数 s 的两个值以保证对任意整数 a 和 b 上述线性方程组都有唯一整数解，并求出该解；

（2）证明当参数 s,a,b 是有理数时上述线性方程组具有唯一有理数解.

二、（共10分）给定正整数 n，$P_n = \{p \in Q[x] \mid \deg p \le n\}$.证明：集合 P_n 在多项式加法和有理数纯量乘法下构成有理数域 Q 上的一个 n+1 维线性空间；且 P_n 与 Q 上的向量空间 Q^{n+1} 同构.

三、（共10分）设 $Z[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} \mid a,b \in Z\} \subset R$，证明：

（1）$Z[\sqrt{7}]$ 在实数加法和实数乘法下是一个整环；（2）整环 $Z[\sqrt{7}]$ 中有无穷多个可逆元.

四、（共20分）给定下述两个矩阵 A 和 B：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 12 & 1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

（1）用初等行变换将矩阵 A 转化为上三角矩阵，并以此计算行列式 $det(A)$；

（2）找出一个主对角元都是1的下三角矩阵 L 与一个上三角矩阵 U，使 $A=LU$；

（3）应用行或列展开的方法计算行列式 $det(B)$.

五、（共10分）设 $(R,+,\cdot,0,1)$ 和 $(H,\oplus,\otimes,0,1)$ 为两个整环.又设 τ：$R \to H$ 是一个环同态映射，设 $\ker(\tau)$ 为 τ 的核.求证：

（1）$\ker(\tau)$ 在 R 的加法下是 $(R,+,0)$ 的一个子群；

（2）$\ker(\tau)$ 具备后述乘法封闭性：若 $a \in R$，$b \in \ker(\tau)$，则 $a \cdot b = \ker(\tau)$.

六、（共10分）设 $Q^*[x]$ 为以有理数为系数的非零多项式的集合；为 Q^* 全体非零有理数的集合；$GL_n(Q)$ 为全体以有理数为矩阵元素的 n(n>1)阶可逆矩阵的集合.证明：

（1）存在一个交换幺半群 $(Q^*[x],\cdot,1)$ 到交换幺半群 $(N,+,0)$ 的幺半群满同态映射；

（2）存在一个从非交换群 $(GL_n(Q),\cdot,E_n)$ 到交换群 $(Q^*[x],\cdot,1)$ 的群满同态.

七、（共10分）设 $T(R^n) = \{T：R^n \to R^n \mid T\text{为线性双射}\}(n>1)$.证明集合 $T(R^n)$ 在函数的复合运算$\circ$下构成一个非交换群.

八、（共10分）设 $(H,\cdot,1)$ 是一个满足消去律的交换幺半群，且不含可逆元.在这个幺半群上可定义整除关系以及相伴关系：$a \mid b \Leftrightarrow \exists c \in H$；$a \sim b \Leftrightarrow a \mid b\text{且}b \mid a$

证明：H 上的这个相伴关系~可以由 H 上的置换群 $S(H)$的一个交换子群 G 按照以下定义给出：$a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G(a = g(b))$.