# ≪ 概率论 ≫ 习题解答

第一章　事件及其概率

1. 把 1,2,3,4,5 诸数任取其三组成一个三位数，求所得数是偶数的概率.

解　从 1,2,3,4,5 这五个数中任取 3 个数组成一个三位数，共有 $P_5^3$ 个不同的三位数. 要使所得数为偶数，只须个位数为偶数，因而共可以组成 $P_2^1P_4^2$ 个偶的三位数. 故所求概率为

$$\frac{P_2^1P_4^2}{P_5^3}=\frac{2}{5}.$$

2. 袋中有白球 5 只，黑球 6 只，陆续取出三球，求顺序为黑白黑的概率.

解　从该袋中陆续取出三球，共有 $P_{11}^3$ 种不同的选法，顺序为黑白黑的共有 $P_6^1P_5^1P_5^1$ 种. 故所求概率为

$$\frac{P_6^1P_5^1P_5^1}{P_{11}^3}=\frac{5}{33}.$$

3. 在一个装有 $n$ 只白球 $n$ 只黑球 $n$ 只红球的口袋中，任取 $m$ 只球，求其中白，黑，红各有 $m_1,m_2,m_3(m_1+m_2+m_3=m)$ 只的概率.

解　从该袋中任取 $m$ 只球，共有 $C_{3n}^m$ 种不同的选法，其中白，黑，红各有 $m_1,m_2,m_3$ 的选法有 $C_n^{m_1}C_n^{m_2}C_n^{m_3}$. 故所求概率为

$$\frac{C_n^{m_1}C_n^{m_2}C_n^{m_3}}{C_{3n}^m}.$$

4. 由盛有号码为 $1,2,\ldots,N$ 的球的箱子中有放回的摸了 n 次，依次记其号码，求这些号码按严格上升次序排列的概率.

解　从号码为 $1,2,\ldots,N$ 的球的箱子中有放回的摸了 n 次，共有 $N^n$ 种取法. 由于任意 n 个不同的号码排成一排的所有排法中，有且只有一种是按严格上升次序排列的，因而其中号码按严格上升次序排列的共有 $C_N^n$ 个. 故所求概率为 $\frac{C_N^n}{N^n}$ .

5. 在中国象棋棋盘上任放一红车和一黑车，求两车可相互吃掉的概率.

解　中国象棋棋盘上有 10 条横线和 9 条纵线，当且仅当双方的车位于同一条横线或纵线时才可以互相吃掉. 故所求概率为

$$\frac{10\times C_9^2+9\times C_{10}^2}{C_{90}^2}=\frac{17}{89}.$$

6. 对任意凑在一起的 40 人，求他们中没有两人生日相同的概率.

解　一年有 365 日，这 40 人的生日的种数为 $365^{40}$ , 没有两人生日相同的种数为 $P_{365}^{40}$, 故所求概率为

$$\frac{P_{365}^{40}}{365^{40}}=0.89.$$

7. 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r(2r\le n)$ 只，求下列事件的概率： (1) 没有成双的鞋子； (2) 只有一双鞋子； (3) 恰有二双鞋子； (4) 有 $r$ 双鞋子.

解　由于 n 双不同的鞋子共 2n 只，任取 $2r$ 只，共 $C_{2n}^{2r}$ 种取法. (1) 先从 n 种型号中选取不同的 $2r$ 种，再在每种型号的 2 只鞋中都选取 1 只，因而没有成双的取法共有 $C_n^{2r}2^r$ , 故所求概率为

$$\frac{C_n^{2r}2^{2r}}{C_{2n}^{2r}};$$

(2) 先从 n 双中任取一双鞋子，再从剩下的 $n-1$ 双中任取 $2r-2$ 只没有成双的鞋子，共有 $C_n^1C_{n-1}^{2r-2}2^{2r-2}$ 取法. 故所求概率为

$$\frac{C_n^1C_{n-1}^{2r-2}2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}};$$

(3) 先从 n 双中任取二双鞋子，再从剩下的 $n-2$ 双中任取 $2r-4$ 只没有成双的鞋子，共有 $C_n^2C_{n-2}^{2r-4}2^{2r-4}$ 取法. 故所求概率为

$$\frac{C_n^2C_{n-2}^{2r-4}2^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}};$$

(4) 从 n 双中任取 $r$ 双鞋子，有 $C_n^r$ 取法. 故所求概率为

$$\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}.$$

8. 10 层楼的一架电梯在底层登上 7 位乘客，从第二层起乘客可离开电梯，求每层至多一位乘客离开的概率 (乘客在各层离开是等可能的).

解　每位乘客在各层离开是等可能的，因而 7 位乘客共有 $9^7$ 离开方法. 每层至多一位乘客离开，即指 7 位乘客在不同的楼层离开，有 $P_9^7$ 种离开方法. 故所求概率为

$$\frac{P_9^7}{9^7}=0.038.$$

9. 从 52 张的一副扑克牌中，任意取出 13 张，问 5 张黑桃， 3 张红心， 3 张方块和 2 张草花的概率.

解　一付扑克有这四种花色各 13 张，由古典概率公式，易知，所求概率为

$$\frac{C_{13}^5C_{13}^3C_{13}^3C_{13}^2}{C_{52}^{13}}=0.0129.$$

10. 从 52 张的一副扑克牌中，任取 5 张，求下列事件的概率： (1) 取得以 A 为打头的顺次同花色顺次 5 张； (2) 有 4 张同点数； (3) 5 张同花色； (4) 3 张同点数且另 2 张也同点数.

解　从 52 张的一副扑克牌中，任取 5 张，有 $C_{52}^5$ 种取法.

(1) 取得以 A 打头的同花色顺次 5 张，即 A,K,Q,J,10. 因而只有 4 种选法. 故所求概率为

$$4/C_{52}^5=0.00000154;$$

(2) 先选出该同点数，有 $C_{13}^1$ 种选法；再从剩下的 48 张牌中任取 1 张，有有 $C_{48}^1$ 种选法．因而共有 $C_{13}^1C_{48}^1$ 种选法．故所求概率为

$$\frac{C_{13}^1C_{48}^1}{C_{52}^5}=0.00024;$$

(3) 先选好花色，有 $C_4^1$ 种选法；而后从选定的花色中任取 5 张，有有 $C_{13}^5$ 种选法．因而共有 $C_4^1C_{13}^5$ 种选法．故所求概率为

$$\frac{C_4^1C_{13}^5}{C_{52}^5}=0.00198;$$

(4) 先选出一种点数并任取 3 张，有 $C_{13}^1C_4^3$ 种选法；再从剩下的牌中再选出一种点数并任取 2 张，有 $C_{12}^1C_4^2$ 种选法．因而共有 $C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2$ 种选法．故所求概率为

$$\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2}{C_{52}^5}=0.000144.$$

11. 一颗骰子投 4 次至少的一个 6 点的概率与两颗骰子投 24 次至少得一个双六的概率哪一个大？

解　记 A=" 投掷一颗骰子 4 次至少的一个 6 点 ", B=" 投掷一颗骰子 24 次至少得一个双六 ". 则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(\frac{5}{6})^4=0.518,$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-(\frac{35}{36})^4=0.491.$$

因而 " 一颗骰子投 4 次至少的一个 6 点 " 的概率大.

12. 某码头只能容纳一只船．现知某日将独立到来两只船，且在 24 小时内到来的可能性均相等，如果它们停靠的时间分别为 3 小时和 4 小时，求一只船要在江中等待的概率.

解　记停靠时间为 3 小时和 4 小时的两只船到达该码头的时刻分别为 x 和 y. 由题知样本空间为 $\Omega=\{(x,y):0\le x<24,0\le y<24\}$. 而两船要在江中等待的充分必要条件为事件 $A=\{(x,y):0\le x-y\le 4,$ 或 $0\le y-x\le 3\}$ 发生．由几何概型，所求概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=1-\frac{(24-3)^2+(24-4)^2}{2\times 24^2}=0.27.$$

13. 在一线段 $AB$ 中随机取两点 $C$ 和 $D$, 求线段 $AC$,$CD$,$DB$ 可构成三角形的概率.

设 AB 的长度为单位 1, AC 的长度为 x, AD 的长度为 y. 则样本空间为 $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$. 而 $AC$,$CD$,$DB$ 可构成三角形的充分必要条件为成立下不等式组

$$\begin{cases} x+1-y>|x-y| \\ x+|x-y|>1-y \\ 1-y+|x-y|>x \end{cases}$$

即为事件 $A=\{(x,y):0<y<1/2,0<x<1/2$, 或 $0<y<1/2,1/2<x<1\}=\{(x,y):0<y<1/2,0<x<1\}$ 发生. 故所求概率为 $P(A)=1/2$.

14. 在线段 $[0,1]$ 上任投三个点，求 0 到这三点的三条线段能构成三角形的概率.

解　不妨设这三段长分别为 x,y,z. 记 A="0 到这三点的三条线段能构成三角形 ". 则样本空间为 $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1\}$. 而事件 A 发生的充分必要条件为成立下不等式组

$$\begin{cases} x+y>z \\ x+z>y \\ y+z>x \end{cases}$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{V_A}{V_\Omega}=1-3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}.$$

15. 在一张打方格的纸上投一枚直径为 1 的硬币，问方格要多小时才能使硬币与线不相交的概率小于 0.01

解　设至多为 x 才能使硬币与线不相交的概率小于 0.01. 由题意应满足

$$(\frac{x-1}{x})^2<0.01,$$

解得 $x<10/9$, 故方格至多为 10/9 时才能使硬币与线不相交的概率小于 0.01.

16. $P(\phi)=0$. 但若事件 $A$ 使 $P(A)=0$, 问是否必有 $A=\phi$? 如是，请说明理由；否则请举出反例.

解　不一定有 $A=\phi$. 例如取 $\Omega=(0,1)$, $A=\{1/3,1/2\}$. 则 $P(A)=0$ 但 $A\neq\phi$.

17. 设 A, B, C, D 是四个事件，试用它们表示下列事件：

(1) 四个事件至少发生一个；

(2) 四个事件恰好发生两个；

(3) A,B 都发生而 C, D 不发生；

(4) 这四个事件都不发生；

(5) 这四个事件至多发生一个；

(6) 这四个事件至少发生两个；

(7) 这四个事件至多发生两个.

解　(1) $A\cup B\cup C\cup D$;

(2)$AB\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}\overline{B}CD$;

(3)$AB\overline{C}\overline{D}$;

(4)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$;

(5)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$;

(6)$AB\cup AC\cup AD\cup BC\cup BD\cup CD$;

(7) $\overline{ABC\cup ABD\cup ACD\cup BCD}$.

18. 设 A, B, C 是三个事件，说明下列关系式的概率意义： (1) $A \cup B \cup C = A$; (2) $A \subset \overline{BC}$.

解 (1) 事件 B 或 C 发生必会导致事件 A 的发生； (2) 事件 A 的发生必会导致事件 B 不发生或 C 不发生.

19. 在某班同学中任选一位，记 A={ 选到的是男同学 }, B={ 选到的人不喜欢唱歌 }, C={ 选到一名运动员 }.

(1) 表述 $AB\overline{C}$ 与 $A\overline{B}C$ 的含义；(2) 在什么条件下成立 $ABC = A$? (3) 何时成立 $\overline{C} \subset B$? (4) 何时成立 $A = B$?

解 (1)$AB\overline{C}$ 指选到的是一位不喜欢唱歌且不是运动员的男同学， $A\overline{B}C$ 指选到的是一位喜欢唱歌且是运动员的男同学；

(2) 在“男同学都不喜欢唱歌且都是运动员 ”的条件下成立 $ABC = A$;

(3) 在”喜欢唱歌的同学都是运动员”时成立 $\overline{C} \subset B$;

(4) 在“男同学都不喜欢唱歌且女同学都喜欢唱歌”成立 $A = B$.

20. 元件 A,D 与并联 B,C 串联如图. 以 A,B,C,D 记相应元件能正常工作的事件.

(1) 以 A,B,C,D 表示 { 线路能正常工作 } 这一事件； (2) 以 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ 表示 { 线路不能正常工作 } 的事件.

解 易知 (1) $ABD \cup ACD$; (2)$\overline{A} \cup \overline{BC} \cup \overline{D}$.

21. 从两事件相等的定义证明事件的下列运算规律：

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$; (2)$A(B \cup C) = AB \cup AC$.

证 (1) 若 $\omega \in \overline{A \cup B}$, 则有 $\omega \overline{\in} A \cup B$, 也就是说 $\omega \overline{\in} A$ 且 $\omega \overline{\in} B$, 即有 $\omega \in \overline{A}$ 且 $\omega \in \overline{B}$, 因而 $\omega \in \overline{A}\overline{B}$.

反过来，若 $\omega \in \overline{A}\overline{B}$, 则有 $\omega \in \overline{A}$ 且 $\omega \in \overline{B}$, 也就是说 $\omega \overline{\in} A$ 且 $\omega \overline{\in} B$, 即有 $\omega \overline{\in} A \cup B$, 因而 $\omega \in \overline{A \cup B}$.

故 $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$.

(2) 若 $\omega \in A(B \cup C)$, 则有 $\omega \in A$ 且 $\omega \in B \cup C$, 也就是说 $\omega \in A$ 且 $\omega \in B$, 或者 $\omega \in A$ 且 $\omega \in C$, 即有 $\omega \in AB$ 或者 $\omega \in AC$, 因而 $\omega \in AB \cup AC$.

反过来，若 $\omega \in AB \cup AC$, 则有 $\omega \in AB$ 或者 $\omega \in AC$, 也就是说 $\omega \in A$ 且 $\omega \in B$, 或者 $\omega \in A$ 且 $\omega \in C$. 即有 $\omega \in A$ 且 $\omega \in B \cup C$, 因而 $\omega \in A(B \cup C)$.

故 $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

22. 袋中 $n$ 个球，编号为 $1, 2, \ldots, n$. 求下列事件的概率：

(1) 任意取出两个球，号码恰为 1,2;

(2) 任意取出 3 个球，没有号码 1;

(3) 任意取出 5 个球，号码 1,2,3 中至少出现一个.

解 易知，所求概率为

(1)$\frac{1}{C_n^2} = \frac{2}{n(n-1)}$;

(2)$\frac{C_{n-1}^3}{C_n^3} = \frac{n-3}{n}$;

(3)$1 - \frac{C_{n-3}^5}{C_n^5} = 1 - \frac{(n-6)(n-7)}{n(n-1)}$.

23. 用数学归纳法证明 §3 的 $n$ 个事件和的概率公式 (1).

证　(1) $n=2$ 时， $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$, 故命题成立;
(2) 假设 n=k 时，命题成立．则当 n=k+1 时，

$$\begin{aligned}
&P(A_1\cup\ldots\cup A_k\cup A_{k+1})\\
&=P(A_1\cup\ldots\cup A_k)+P(A_{k+1})-P(A_1A_{k+1}\cup\ldots\cup A_kA_{k+1})\\
&=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le k}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{k-1}P(A_1\cup\ldots\cup A_k)+\\
&\qquad+P(A_{k+1})-[\sum_{i=1}^{k}P(A_iA_{k+1})-\sum_{1\le i<j\le k}P(A_iA_jA_{k+1})+\ldots+\\
&\qquad(-1)^{k-1}P(A_1\cup\ldots\cup A_kA_{k+1})]\\
&=\sum_{i=1}^{k+1}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le k+1}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{k}P(A_1\cup\ldots\cup A_kA_{k+1}).
\end{aligned}$$

故 $n=k+1$ 时，命题成立．故由数学归纳法，命题成立．
24. 任意 $n$ 阶行列式的展开式中的一项，求至少包含一个主对角线元素的概率．
解　记 $A_i$ 为展开式中的项中包含第 $i$ 个主对角线元素， $i=1,2,\ldots,n$. 则所求为

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\cup\ldots\cup A_n).$$

易知 $P(A_i)=1/n, P(A_iA_j)=1/(n(n-1)), P(A_iA_jA_k)=1/(n(n-1)(n-2)),\ldots.$
故

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

25. 考试时共有 $n$ 张考签，有 $m(m\ge n)$ 个同学参加考试．若被抽过的考签立即放回，求在考试结束后，至少有一张考签没有被抽到的概率．
解　不妨设 $n$ 张考签分别标号为 $1,2,\ldots,n$ ，记 $A_i$=第 i 张签没被抽到,$i=1,2,\ldots,n$.
注意到是有放回的抽签，故所求为

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\cup\ldots\cup A_n).$$

易知 $P(A_i)=(1-1/n)^m, P(A_iA_j)=(1-2/n)^m, P(A_iA_jA_k)=(1-3/n)^m,\ldots.$
故

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}C_n^i(1-i/n)^m.$$

26. 在 §3 例 5 中，求恰好有 $k(k\le n)$ 个人拿到自己的枪的概率．
解　$A_k$="n 个人中恰有 k 个人拿到自己的枪 ". 则由 §3 例 5 知

$$P(A_0)=1-(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!})=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}.$$

下面讨论 $1 \le k \le n$. 记 $B_k$="恰好指定的个人拿到自己的枪", 这时, $P(A_k) = C_n^k P(B_k)$. 注意到 " 恰有指定的 $k$ 个人拿到自己的枪 "发生的有利基本事件数, 即为 "其余确定的 $n-k$ 个人没拿到自己的枪" 发生的有利基本事件数, 由 §3 例 5 知, 共有 $(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}$ 种情形. 而所有基本事件数为 $n!$. 故

$$P(B_k) = \frac{(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}}{n!},$$

因而

$$P(A_k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!} \qquad (k \le n).$$

27. 给定 $p = P(A), q = P(B), r = P(A \cup B)$ , 求 $P(A\overline{B})$ 及 $P(\overline{AB})$ .

解　由

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

得

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A \cup B) - P(B) = r - q,$$

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - r.$$

28. 已知若 $A_1$ 与 $A_2$ 同时发生则 $A$ 发生, 求证: $P(A) \ge P(A_1) + P(A_2) - 1$.

证　由题知 $P(A_1A_2) \le P(A)$. 故

$$P(A) \ge P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \ge P(A_1) + P(A_2) - 1,$$

得证.

29. 对任意的随机事件 $A_1, A_2$, 求证:

(1)$P(A_1A_2) = 1 - P(\overline{A_1}) - P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$;

(2)$1 - P(\overline{A_1}) - P(\overline{A_2}) \le P(A_1A_2) \le P(A_1 \cup A_2) \le P(A_1) + P(A_2)$.

证　(1) 由

$$P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) - P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

及

$$P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = P(\overline{A_1A_2}) = 1 - P(A_1A_2),$$

即得 (1) 成立.

(2) 由 (1) 即得

$$1 - P(\overline{A_1}) - P(\overline{A_2}) \le P(A_1A_2) \le P(A_1 \cup A_2) \le P(A_1) + P(A_2).$$

30. 对任意随机事件 $A, B, C$, 求证: $P(AB) + P(AC) - P(BC) \le P(A)$.

证　由

$$P(A) \ge P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$

及

$$P(ABC) \le P(BC),$$

即得结论成立.

31. 求包含事件 $A, B$ 的最小 $\sigma-$ 域.

解　把样本空间划分基本事件之和，即 $\Omega = AB + \overline{AB} + \overline{A}B + A\overline{B}$. 显然包含事件 $A, B$, 根据 $\sigma-$ 域性质，所求最小 $\sigma-$ 域为 $\{\phi, AB, \overline{AB}, \overline{A}B, A\overline{B}, A, B, \overline{A}, \overline{B}, A \cup B, A \cup \overline{B}, \overline{A} \cup B, \overline{A} \cup \overline{B}, AB \cup \overline{AB}, \overline{A}B \cup A\overline{B}, \Omega\}$.

32. 在三个孩子的家庭中，已知至少有一个是女孩，求至少有一个男孩的概率.

解　记 A=”至少有一个是女孩”, B=”至少有一个男孩”. 则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{6/8}{7/8} = 6/7.$$

33.$n$ 件产品中有 $m$ 件废品，任取两件，求：

(1) 在所取两件中至少有一件是废品的条件下，另一件也是废品的概率;

(2) 在所取两件中至少有一件不是废品的条件下，另一件是废品的概率.

解:　（1）记 A=“至少有一件是废品”， B=“另一件也是废品”，则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{C_m^2/C_n^2}{1 - C_{n-m}^2/C_n^2} = \frac{m-1}{2n-m-1}.$$

(2) 记 A=“至少有一件不是废品”， B=“另一件是废品”, 则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{C_m^1 C_{n-m}^1/C_n^2}{1 - C_m^2/C_n^2} = \frac{m-1}{2n-m-1}.$$

34. 某厂有甲、乙、丙三台机器生产的螺丝钉，产量各占 25%,35%,40%; 在各自的厂品里，不合格品各占 5%,4%,2%.

(1) 从产品中任取一只，求它恰是不合格品的概率;

(2) 若任取一只恰是不合格品，求它是机器甲生产的概率.

解　记 $A_1$ 、$A_2$ 、$A_3$ 分别为“任取一只，是甲、乙、丙三台机器生产的螺丝钉”, B=”是不合格品”. 则

$$P(A_1) = 0.25, P(A_2) = 0.35, P(A_3) = 0.4$$

$$P(B|A_1) = 0.05, P(B|A_2) = 0.04, P(B|A_3) = 0.02$$

故

$$(1) P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k) P(B|A_k) = 0.0345;$$

$$(2) P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.25 \times 0.05}{0.0345} = 0.362.$$

35. 甲袋中有 a 只白球， b 只黑球；乙袋中有 c 只白球， d 只黑球. 某人从甲袋中任取两球投入乙袋，然后再从乙袋中任取两球，求最后所得的两球全是白球的概率.

解　记 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 分别表示"从甲袋中取出的两球是两个白球、一个白球一个黑球、两个黑球", B="最后所得的两球全是白球". 则由全概率公式

$$P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B|A_k)=\frac{C_a^2C_{c+2}^2+C_a^1C_b^1C_{c+1}^2+C_b^2C_c^2}{C_{a+b}^2C_{c+d+2}^2}.$$

36. 袋中有 a($a\geq 3$) 只白球， b 只黑球，甲乙丙三人依次从袋中取出一球 (取后不放回). 试用全概率公式分别求甲乙丙各取得白球的概率.

解记 A 、 B 、 C 分别表示甲、乙、丙各取得白球. 显然 $P(A)=\frac{a}{a+b}$. 由全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{a}{a+b};$$

$$\begin{aligned}&P(C)=P(AB)P(C|AB)+P(A\overline{B})P(C|A\overline{B})+P(\overline{A}B)P(C|\overline{A}B)+P(\overline{AB})P(C|\overline{AB})\\&=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{a-2}{a+b-2}+\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b-1}\frac{a-1}{a+b-2}\\&\quad\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b-1}\frac{a-1}{a+b-2}\frac{b}{a+b}\frac{b-1}{a+b-1}\frac{a}{a+b-2}\\&=\frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

37. 敌机被击中部位分成三部分：在第一部分被击中一弹，或第二部分被击中两弹，或第三部分被击中三弹时，敌机才能被击落. 其命中率与各部分面积成正比. 假如这三部分面积之比为 0.1, 0.2, 0.7. 若已中两弹，求敌机被击落的概率.

解　用 $A_i$ 、 $B_i$ 、 $C_i$ 分别表示第 $i$ 弹击中部位为第一、二、三部位， $i=1,2$. D="击中两弹"， E="敌机被击落". 则有

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A_1A_2\cup A_1B_2\cup A_1C_2\cup B_1A_2\cup C_1A_2\cup B_1B_2|D)\\&=1-P(C_1B_2\cup B_2C_2\cup C_1C_2|D)=1-(0.2\times0.7+0.7\times0.2+0.7\times0.7)=0.27\end{aligned}$$

38. 产品中 0.96 是合格品的. 现有一种简化的检查法，把真正的合格品确认为合格品的概率为 0.98, 误认废品为合格品的概率为 0.05. 求以简化法检查为合格品的一个产品确实合格的概率.

解　记 A 为"产品为合格品", B 为"产品检查确认为合格品". 则 $P(A)=0.96, P(B|A)=0.98, P(B|\overline{A})=0.05$. 故

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.96\times0.98}{0.96\times0.98+0.04\times0.05}=0.998.$$

39. 甲乙两人从装有九个球，其中三个是红球的盒子中，依次摸一个球，并且规定摸到红球的将受罚.

(1) 如果甲先摸，他不受罚的概率有多大？

(2) 如果甲先摸并且没有受罚，求乙也不受罚的的概率.

(3) 如果甲先摸并且受罚，求乙不受罚的的概率.
(4) 乙先摸是否对甲有利？
(5) 如果甲先摸，并且已知乙没有受罚，求甲也不受罚的概率.
解　记 $A_i$= “甲第 i 次摸摸到红球 ”，　$B_i$= “乙第 i 次摸摸到红球 ”, $i = 1, 2$.
(1)$P(\overline{A_1}) = 6/9 = 2/3$;
(2)$P(\overline{B_2}|\overline{A_1}) = 5/8$;
(3)$P(\overline{B_2}|A_1) = 6/8 = 3/4$;
(4) 由抽签问题知无任乙先摸还是后摸，甲不受罚的概率皆为 2/3；
(5) $P(\overline{A_1}|\overline{B_2}) = \frac{P(\overline{A_1})P(\overline{B_2}|\overline{A_1})}{P(\overline{B_2})} = \frac{6/9 \times 5/8}{2/3} = 5/8$.
40. 8 枝枪中 3 枝未经校正，5 枝已校正. 一射手用前者射击，中靶概率 0.3; 而用后者，中靶概率 0.8. 他从 8 枝枪中任取一枝射击，结果中靶，求这枪是已校正过的概率.
解　记 A= “任取一枝为未经校正 ”, B= “射击中靶 ”. 则由贝叶斯公式

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})} == \frac{5/8 \times 0.8}{3/8 \times 0.3 + 5/8 \times 0.8} = 0.816.$$

41. 有一均匀正八面体，其第 1 、 2 、 3 、 4 面染有红色，其第 1 、 2 、 3 、 5 面染有白色，其第 1 、 6 、 7 、 8 面染有黑色. 分别以 A,B,C 记投一次正八面体出现红，黑，白的事件，问 A,B,C 是否相互独立？
解　显然，

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2, P(AB) = 1/4, P(AC) = P(BC) = P(ABC) = 1/8.$$

由于

$$P(AC) \neq P(A)P(C),$$

故 A,B,C 不相互独立.
42. 设事件 A, B, C 相互独立，求证：　$A \cup B, AB, A - B$ 皆与 C 相互独立.
证　由于事件 A, B, C 相互独立，故

$$\begin{aligned} &P((A \cup B)C) = P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= P(C)(P(A) + P(B) - P(AB)) = P(A \cup B)P(C). \end{aligned}$$

因而 $A \cup B$ 与 C 相互独立.
由

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = P(AB)P(C),$$

知 $AB$ 与 C 相互独立.
由

$$\begin{aligned} &P((A - B)C) = P(A\overline{B}C) = P(AC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) = P(A)(P(A) - P(AB)) = P(A)P(A - B), \end{aligned}$$

因而 $A-B$ 与 C 相互独立.

43. 设事件 A, B, C 相互独立，求证： $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 也相互独立.

证　由于事件 A, B, C 相互独立，故

$$
\begin{aligned}
P(\overline{ABC}) &= 1-P(A\cup B\cup C)\\
&= 1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C))\\
&= (1-P(A))(1-P(B))(1-P(C)) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}).
\end{aligned}
$$

故 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 也相互独立.

44. 口袋中有 5 只球： 2 红 2 白 1 黑，有放回地取出三球，求下列各事件的概率：

(1) 得全红;

(2) 没有一个红球;

(3) 至少一个红球;

(4) 所得各球颜色全不相同.

解　记 $A_i$=" 第 i 次取到红球 "， $i=1,2,3$. 故

(1)$P(A_1A_2A_3)=(2/5)^3=8/125$;

(2)$P(\overline{A_1A_2A_3})=(1-2/5)^3=27/125$;

(3)$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1A_2A_3})=98/125$;

(4) 因为取球是有放回的，易知，所求概率为 $6\times 2/5\times 2/5\times 1/5=24/125$.

45. 加工某一零件需经过三道工序，各道工序的次品率分别为 2%,3%,5%, 假定各工序互不影响，求加工后所得零件的次品率

解　$A_i$= "经第 $i$ 道工序加工后所得零件为次品率 ",$i=1,2,3$. 故所求概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1A_2A_3})=1-0.98\times 0.97\times 0.95=0.903.$$

46. 对同一目标进行三次独立射击，各次射击命中率依次为 0.4, 0.5 和 0.7. 求：

(1) 三次射击中恰好一次击中目标的概率;

(2) 至少一次击中目标的概率.

解　记 A 、 B 、 C 依次表示第一、二、三射击并击中目标. 故

(1)$P(A\overline{BC}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{AB}C)=0.4\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7=0.36$;

(2)$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1A_2A_3})=1-0.6\times 0.5\times 0.3=0.91$.

47. 掷一次硬币出现正面的概率为 $p$, 掷了 $n$ 次，求下列各事件的概率：

(1) 恰好出现一次正面;

(2) 至少出现一次正面;

(3) 至少出现两次正面.

解　这是一伯努里概型，故所求概率为

(1)$C_n^1(1-p)^{n-1}p$;

(2)$1-(1-p)^n$;

(3)$1-(1-p)^n-C_n^1(1-p)^{n-1}p$.

48. 某交往式计算机有 20 个终端，这些终端被各单位独立使用，使用率都为 0.7. 求有

10 个或更多个终端同时被使用的概率.

解　这是一伯努里概型，故所求概率为

$$\sum_{k=10}^{20} b(k;20,0.7)=\sum_{k=10}^{20} C_{20}^{k}0.7^{k}0.3^{20-k}.$$

49. 在一电器中，某元件随机开、关，每万分之一秒按下面规律改变它的状态：

(1) 如果当前状态是开的，那么万分之一秒后，它仍然处于开状态的概率为 $1-\alpha$ , 变为闭状态的概率为 $\alpha$ ;

(2) 如果当前状态是闭的，那么万分之一秒后，它仍然处于闭状态的概率为 $1-\beta$ , 变为开状态的概率为 $\beta$ .

假设 $0<\alpha<1, 0<\beta<1$ , 并且用 $\theta_n$ 表示该元件万分之 $n$ 秒后处于闭状态的概率. 请给出 $\theta_n$ 的递推公式.

解　记 $A_n$= “该元件万分之 $n$ 秒后是闭的 ” ，则由全概率公式

$$P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\overline{A_{n-1}})P(A_n|\overline{A_{n-1}}),$$

即有

$$\theta_n=\theta_{n-1}(1-\beta)+(1-\theta_{n-1})\alpha,\quad n\geq 2.$$

故有 $\theta_n=\theta_{n-1}(1-\beta-\alpha)+\alpha,\quad n\geq 2.$

50. 在伯努里概型中，若 $A$ 出现的概率为 $p$, 求在出现 $m$ 次 $\overline{A}$ 以前出现 $k$ 次的 $A$ 概率 (可以不连续出现).

解　 “在出现 $m$ 次 $\overline{A}$ 以前出现 $k$ 次的 $A$” 即为 “在前 $k+m-1$ 试验中恰有 $k$ 次出现 A 出现，且第 $k+m$ 次试验出现 $\overline{A}$”. 故所求概率为

$$C_{m+k-1}^{k}p^{k}(1-p)^{m-1}\cdot p=C_{m+k-1}^{k}p^{k}(1-p)^{m}.$$

51. 一质点在时刻 0 位于原点，以后向左右随机移动，每次移动一格，设向右移动的概率为 $p$, 求移动 $n$ 次后位于原点右边 $k$ 格 (也可能 $k<0$) 的概率.

解　 “移动 $n$ 次后位于原点右边 $k$ 格 ” 这一事件等价于 “这 $n$ 次移动中，有 $(n+k)/2$ 次是向右移动，有 $(n-k)/2$ 次是向左移动 ”. 故所求概率为

$$C_n^{\frac{n-k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}.$$

52. 一质点从平面上某点开始，等可能地向上、下、左、右四个方向移动，每次移动一格. 求经过 $2n$ 次移动后质点回到出发点的概率.

解　 “经过 $2n$ 次移动后质点回到出发点 ” 等价于 “上与下、左与右移动的次数相同 ”. 故所求概率为

$$\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}=\frac{C_{2n}^{n}}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_n^{n-k}=\frac{(C_{2n}^{n})^2}{4^{2n}}.$$

53. 甲乙丙三人进行某项比赛，设三人胜每局的概率相等．比赛规定先胜三局者为整场比赛的优胜者．若甲胜了第一、三局，乙胜了第二局，问丙成了整场比赛优胜者的概率是多少？

解　由题知，丙要成了整场比赛优胜者，在第三局比赛后，甲不能胜了，乙至多再胜一局，因而等价于下列事件发生，“第四，五，六局都丙胜，或者第四，五，六局中两局丙胜、一局乙胜，且第七局仍丙胜”．故所求概率为

$$(\frac{1}{3})^3 + C_3^1(\frac{1}{3})^4 = \frac{2}{27}.$$

54. 一个人的血型为 O 、A 、B 、AB 型的概率分别为 0.46 、0.40 、0.11 和 0.03. 现任选五人，求下列事件的概率：

(1) 两人为 O 型，其他三人分别为其他三种血型；

(2) 三人为 O 型，两人为 A 型；

(3) 没有一人为 AB 型.

解　(1) 由多项式分布公式，所求概率为

$$\frac{5!}{2!1!1!}0.46^2 \times 0.40 \times 0.11 \times 0.03 = 0.0168;$$

(2) 由多项式分布公式，所求概率为

$$\frac{5!}{3!2!}0.46^3 \times 0.40^2 = 0.156;$$

(3) 可以看作一个二项分布，所求概率为 $(1-0.03)^5 = 0.859$.

55. 每个蚕产 $k$ 个卵的概率为 $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(\lambda > 0)$, 而每个卵能变为成虫的概率为 $p$, 各卵是否变为成虫相互独立．求证每蚕养出 $r$ 个小蚕的概率为 $\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}$.

解　$A_k$ 为“每个蚕产 $k$ 个卵”, B 为“每蚕养出 $r$ 个小蚕”. 则由全概率公式

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=r}^{\infty} P(A_k)P(B|A_k) \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} C_k^r p^r (1-p)^{k-r} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{k-r}}{(k-r)!} \cdot \frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

证毕.

56. 在单位间隔时间内电话总机接到 $k$ 次呼叫的概率为 $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, 其中 $\lambda > 0$ 为常数．若在任意两个相邻的间隔时间内呼叫次数的多少是相互独立的，求在两个单位的间隔时间内接到 $s$ 次呼叫的概率 $P_2(s)$.

解　记 $A_k, B_i$ 分别为前一个单位的间隔时间内和后一个单位的间隔时间内接到 $k, i$ 次呼叫．则全概率公式

$$
\begin{aligned}
P_2(s) &= \sum_{k=0}^{s} P(A_k)P(B_{s-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{s} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{s-k}}{(s-k)!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{(2\lambda)^s}{s!}e^{-2\lambda}.
\end{aligned}
$$

57. (选票问题) 投票选举甲乙两人，已知甲共得 P 张，乙共得 Q 张， $P > Q$. 问在计票过程中，甲得票数始终超过乙得票数的概率.

解以横坐标表示计票过程中的票数，纵坐标表示甲得票与乙得票之差．则每一种计票过程对应着一条折线，共有 $C_{m+n}^{m}$ 条折线，即表示有 $C_{m+n}^{m}$ 种计票过程．我们先来算事件 A= “在计票过程中出现甲乙得票数相同 ” 的概率．事件 A 发生，意味着所对应的折线必与横坐标相交．显然，这 $C_{m+n}^{m}$ 条折线可分为两类，一类是“第一张票是乙所得 ”; 另一类是“第一张票是甲所得 ”．由于 $P > Q$, 第一类折线必与横坐标相交，且共有 $C_{m+n}^{m-1}$ 条；另一类有两种情形，一种情形与横坐标相交，由反射原理也有 $C_{m+n}^{m-1}$ 条，而另一种情形不与横坐标相交，即对应于甲得票数始终超过乙得票数的情形．故 $P(A) = \frac{2C_{m+n}^{m-1}}{C_{m+n}^{m}} = \frac{2m}{m+n}$, 因而所求概率为

$$1 - P(A) = 1 - \frac{2m}{m+n} = \frac{n-m}{n+m}.$$

第二章　随机变量与分布函数

1. 应各取何值才能使下列各式成为分布列？

(1) $P(\xi=k)=c/n,\quad k=1,2,\ldots,n;$

(2) $P(\xi=k)=c\lambda^k/k!,\quad k=1,2,\ldots,\lambda>0.$

解　(1) 由 $\sum_{k=1}^n \frac{c}{n}=1$, 得 $c=1$.

(2) 由 $\sum_{k=1}^n c\frac{\lambda^k}{k!}=c(e^{-\lambda}-1)=1$, 得 $c=\frac{1}{e^{-\lambda}-1}$.

2. 设 $\xi$ 为重复独立伯努里试验中开始后第一个连续成功或连续失败的次数，求 $\xi$ 的分布.

解　所求为 $P(\xi=k)=p^kq+q^kp,k\geq 1$.

3. 直线上一质点在时刻 0 从原点出发，每经过一个单位时间分别以概率 $p$ 及 $1-p$ 向右或向左移动一格，每次移动是相互独立的．以 $\xi_n$ 表示在时刻 $n$ 质点向右移动的次数，以 $S_n$ 表示时刻 $n$ 质点的位置，分别求 $\xi_n$ 与 $S_n$ 的分布列.

解　这是一伯努里概型，故 $P(\xi_n=k)=C_n^kp^kq^{n-k},k=0,1,\ldots,n$.

显然，　$S_n=\xi_n-(n-\xi_n)=2\xi_n-n$, 因而

$$P(S_n=m)=P(\xi_n=\frac{m+n}{2})=\begin{cases}C_n^{(m+n)/2}p^{(m+n)/2}q^{(n-m)/2}, & m=-n,-n+2,\ldots,n-2,n;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

4. 口袋中 5 个球编号为 1,2,3,4,5. 同时取出 3 个球，以 $\xi$ 表示取得球的最大号码，求 $\xi$ 的分布列.

解　由于 $P(\xi=1)=\frac{1}{C_5^3}=0.1,P(\xi=1)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=0.3,P(\xi=1)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=0.6$, 故 $\xi$ 的分布列为

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 0.1 & 0.3 & 0.6\end{pmatrix}.$$

5. 随机变量的分布列为 $P(\xi=k)=k/15,\quad k=1,2,3,4,5$. 求：

(1)$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$;

(2)$P(1/2<\xi<5/2)$;

(3)$P(1\leq\xi\leq 2)$.

解　(1)$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$=1/15+2/15=1/5;

(2)$P(1/2<\xi<5/2)$=$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$=1/5;

(3)$P(1\leq\xi\leq 2)$=$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$=1/5.

6. 每月电费帐单是由电力公司派人上门抄表给用户的．如果平均有百分之一的帐单与实际不符，那么在 500 张帐单中至少有 10 张不符的概率是多少？

解　记 $\xi$ 表示在 500 张帐单中与实际不符的张数．则 $\xi\sim B(500,0.01)$. 由 Poisson 定理，

$$P\{\xi \geq 10\} = 1 - P\{\xi \leq 9\} = 1 - \sum_{k=0}^{9} C_{500}^{k} 0.01^{k} 0.99^{500-k}$$
$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{5^k}{k!} e^{-5} \approx 0.031828.$$

7. 某车间有 12 台车床独立工作，每台开车时间占总工作时间的 2/3, 开车时每台需用电力 1 单位，问：
(1) 若供给车间 9 单位电力，则因电力不足而耽误生产的概率等于多少？
(2) 至少供给车间多少电力，才能使因电力不足而耽误生产的概率小于 0.01?
解　记 $\xi$ 表示该车间车床同时工作的台数，则 $\xi \sim B(12, 2/3)$.
(1)$P\{\xi \times 1 > 9\} = \sum_{k=10}^{12} C_{12}^{k} (\frac{2}{3})^k (\frac{1}{3})^{12-k} = 0.181.$
(2) 设至少为 $x$ 单位电力．则由题意
$P\{\xi \times 1 > x\} < 0.01$, 即 $\sum_{k=x+1}^{12} C_{12}^{k} (\frac{2}{3})^k (\frac{1}{3})^{12-k} < 0.01.$
当 $x = 11$ 时，左边 $=(\frac{2}{3})^{12} = 0.0077 < 0.01;$
当 $x = 10$ 时，左边 $=(\frac{2}{3})^{12} + 12 \times (\frac{2}{3})^{11} \times \frac{1}{3} = 0.054 > 0.01.$
故至少供给车间 11 单位电力，才能使因电力不足而耽误生产的概率小于 0.01.
8. 从大批发芽率为 0.8 的种子中任取 10 粒，求发芽粒数不少于 8 的概率.
解　记 $\xi$ 表示发芽粒数，则 $\xi \sim B(10, 0.8)$.
故 $P\{\xi \geq 8\} = \sum_{k=8}^{10} C_{10}^{k} (0.8)^k (0.2)^{10-k} = 0.678.$
9. 一本 500 页的书中共有 500 个错误，每个错误等可能地出现在每一页上，求指定一页上至少有 3 个错误的概率.
解　指定一页上错误个数为 $\xi$, 则 $\xi \sim B(500, 1/500)$. 由 Poisson 定理,

$$P\{\xi \geq 3\} = 1 - P\{\xi \leq 2\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{500}^{k} 0.002^{k} 0.998^{500-k}$$
$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{1^k}{k!} e^{-1} \approx 0.08.$$

故所求概率为 0.08.
10. 螺丝钉的废品率为 0.01. 问一盒中应装多少螺丝钉才能保证每盒有 100 只以上好螺丝钉的概率不小于 0.80?
解　设至少应装 $100 + k$ 只. 记 $\xi$ 表示一盒中的不好螺丝钉数，则 $\xi \sim B(100 + k, 0.01)$.
由题意

$$P\{\xi < k\} \geq 0.80,$$

即
$$\sum_{i=0}^{k-1} C_{100+k}^{i} (0.01)^i (0.99)^{100+k-i} \approx \sum_{i=0}^{k-1} \frac{((100+k)/100)^i}{i!} e^{-(100+k)/100} \geq 0.8.$$

取 $k=1$, 不等式左边 $=0.3642<0.8$;
取 $k=2$, 不等式左边 $=0.7284<0.8$;
取 $k=3$, 不等式左边 $=0.9155\geq 0.8$.
故应装 103 只螺丝钉.
11. 随机变量 $\xi$ 服从泊松分布, $P(\xi=1)=P(\xi=2)$, 求 $P(\xi=4)$.
解　由 $P(\xi=1)=P(\xi=2)$, 得 $\lambda e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$. 因而 $\lambda=2$. 故

$$P(\xi=4)=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=0.0902.$$

12. 某商店某种商品每月销售量服从参数为 6 的泊松分布. 问在月初应进货多少件这种商品才能保证当月不脱销的概率大于 0.999?
解　设应进货 $k$ 件，由题意得

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{6^i}{i!}e^{-6}>0.999.$$

查泊松分布表知，应取 $k=15$.

13. 某项保险在确定时期内发生 0,1,2 和 3 次理赔的概率依此为 0.1,0.3,0.4 和 0.2; 个体理赔量 1,2 和 3 的概率分别为 0.5,0.4 和 0.1. 计算理赔总量 $S$ 的概率分布.
解记 $A_i$= "该项保险在确定时期内发生 i 次理赔 ",$i=0,1,2,3$. $B_j$= "个体理赔量为 j", $j=1,2,3$. 则

$$P(S=0)=0.1,$$

$$P(S=1)=P(B_1|A_1)\cdot P(A_1)=0.15,$$

$$P(S=2)=P(B_2|A_1)\cdot P(A_1)+P(B_1B_1|A_2)\cdot P(A_2)=0.22,$$

同理

$$P(S=3)=0.215, P(S=4)=0.164, P(S=5)=0.095, P(S=6)=0.0408,$$

$$P(S=7)=0.0126, P(S=8)=0.0024, P(S=9)=0.0002.$$

故理赔总量 $S$ 的概率分布为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0.1 & 0.15 & 0.22 & 0.215 & 0.164 & 0.095 & 0.0408 & 0.0126 & 0.0024 & 0.0002 \end{pmatrix}.$$

14. 某疫苗所含细菌数服从泊松分布，每一毫升中平均含有一个细菌，把这种疫苗放入 5 只试管中，每管 2 毫升，求：(1) 5 只试管中都有细菌的概率；(2) 至少有 3 只试管含有细菌的概率.

解　每一毫升中平均含有一个细菌，知每试管中平均含 2 个细菌．记 $\xi$ 为 1 只试管中所含细菌数．则 $\xi \sim P(2)$, 因而 1 只试管中含有细菌的概率为 $p = P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - e^{-2} = 0.865$. 故

(1) 5 只试管中都有细菌的概率为 $p^5 = 0.484$;

(2) 至少有 3 只试管含有细菌的概率为 $C_5^3 p^3(1-p)^2 + C_5^4 p^4(1-p) + p^5 = 0.98$.

15. 设 $\xi \sim P(\lambda)$, 求 $\xi$ 最可能出现的次数.

解　$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, 由于

$$\frac{P\{\xi = k+1\}}{P\{\xi = k\}} = \frac{\lambda}{k+1} \geq 1.$$

因而若 $\lambda$ 为整数，当 $k = \lambda - 1$ 时，$P\{\xi = k\}$ 最大；若 $\lambda$ 不为整数，当 $k = [\lambda]$ 时，$P\{\xi = k\}$ 最大.

16. 下列函数是否可以作为某随机变量的分布函数？若可以，请在未定义处补充定义.

(1) $F(x) = 1/(1+x^2), -\infty < x < \infty$;

(2) $x > 0$ 时 $F(x) = 1/(1+x^2), x \leq 0$ 时 $F(x)$ 适当定义；

(3)$x > 0$ 时 $F(x) = 1/(1+x^2), x \geq 0$ 时 $F(x)$ 适当定义

解　(1) 不可以．因为 $F(x)$ 不是非降函数；

(2) 不可以．因为 $F(x)$ 不是非降函数；

(3) 可以．只须定义 $F(x) = 1, x \geq 0$.

17. 在半径为 R, 球心为 O 的球内任取一点 P, (1) 求 $\xi = OP$ 的分布函数；

(2) 求 $P(-2 < \xi < R/2)$.

解　(1)

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ (\frac{x}{R})^3, & 0 < x \leq R; \\ 1, & x \geq R. \end{cases}$$

(2) $P(-2 < \xi < R/2) = F(R/2) - F(-2) = 1/8$.

18. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是分布函数，常数 $a, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 求证：$F(x) = aF_1(x) + bF_2(x)$ 也是分布函数.

证　由于 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是分布函数，且 $a + b = 1, a, b > 0$. 故

(1) $F(x)$ 是非降函数；

(2) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = a\lim_{x\to-\infty} F(x) + b\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} F(x) = a\lim_{x\to\infty} F(x) + b\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

(3) $F(x)$ 是右连续函数，即

$$F(x+) = aF_1(x+) + bF_2(x+) = aF_1(x) + bF_2(x) = F(x).$$

故 $F(x)$ 也是分布函数.

19. 设 $\xi$ 的分布函数为 $F(x) = A + B\arctan x$, 求常数 A 及 B.

解　由

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=A+B\cdot(-\frac{\pi}{2})=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=A+B\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

易得 $A=1/2, B=1/\pi$.

20. 求证上题中的 $\xi$ 是连续型随机变量，并求其密度函数.

证　取 $p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}, -\infty<x<+\infty$, 则有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du.$$

由于 $p(x)$ 非负，故 $\xi$ 是连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$.

21. 确定下列函数中的常数 A, 使它们为密度函数：

(1)　$p(x)=Ae^{-|x|}$;

(2)　$p(x)=\begin{cases}A\cos x, & -\pi/2\le x\le\pi/2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3)　$p(x)=\begin{cases}Ax^2, & 1\le x<2;\\ Ax, & 2\le x<3;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

解　(1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=2A\int_0^{\infty}e^{-x}dx=2A=1$, 得 $A=1/2$;

(2) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}A\cos xdx=2A=1$, 得 $A=1/2$;

(3) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\int_1^2Ax^2dx+\int_2^3Axdx=29A/6=1$, 得 $A=6/29$.

22. 求与上题中各密度相对应的分布函数.

解　$(1)F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|u|}du=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

$(2)F(x)=\int_{-\pi/2}^{x}\frac{1}{2}\cos udu=\begin{cases}0, & x<-\pi/2;\\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\pi/2\le x<\pi/2;\\ 1, & x\ge\pi/2.\end{cases}$

(3) 当 $x<1$ 时，　$F(x)=0$;

当 $1\le x<2$ 时，　$F(x)=\int_1^x\frac{6}{29}u^2du=\frac{2}{29}(x^3-1)$;

当 $2\le x<3$ 时，　$F(x)=\int_1^2\frac{6}{29}u^2du+\int_2^x\frac{6}{29}udu=3x^2/29+2/29$;

当 $x\ge3$ 时，　$F(x)=1$.

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \frac{2}{29}(x^3-1), & 1\le x<2;\\ 3x^2/29+2/29, & 2\le x<3.\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

23. $\xi$ 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1;\\ 2-x, & 1\le x<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求：

(1) 分布函数 $F(x)$;

(2)$P(\xi<0.5), P(\xi>1.3), P(0.2<\xi<1.2)$.

解　(1) 当 $x<0$ 时，　$F(x)=0$;

当 $0\le x<1$ 时，　$F(x)=\int_0^x udu=x^2/2$;

当 $1\le x<2$ 时，　$F(x)=\int_0^1 udu+\int_1^x(2-u)du=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$;

当 $x\ge 2$ 时，　$F(x)=1$.

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2/2, & 0\le x<1;\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1, & 1\le x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

(2) $P(\xi<0.5)=F(0.5)=0.125, P(\xi>1.3)=1-F(1.3)=0.245, P(0.2<\xi<1.2)=F(1.2)-F(0.2)=0.66$.

24. 某城市每天用电量不超过 100 万度，以 $\xi$ 表示每天耗电量 (即用电量 /100), 其密度为 $p(x)=12x(1-x)^2(0<x<1)$. 问每天供电量为 80 万度时，不够需要的概率为多少？供电量为 90 万度呢？

解　所求概率为

$$P(\xi>0.8)=\int_{0.8}^1 12x(1-x)^2dx=[3(1-x)^4-4(1-x)^3]|_{0.8}^1=0.0272.$$

$$P(\xi>0.9)=\int_{0.9}^1 12x(1-x)^2dx=[3(1-x)^4-4(1-x)^3]|_{0.9}^1=0.0037.$$

25. 设 $\xi\sim N(10,4)$, 求：

(1)$P(6<\xi<9)$;

(2)$P(7<\xi<12)$;

(3)$P(13 \le \xi \le 15)$.

解 (1)$P(6<\xi<9)=P(-2<\frac{\xi-10}{\sqrt{4}}<-1/2)=\Phi(2)-\Phi(1/2)=0.2858$;

(2)$P(7<\xi<12)=P(-1.5<\frac{\xi-10}{\sqrt{4}}<1)=\Phi(1)-(1-\Phi(1.5)))=0.7745$;

(3)$P(13\le\xi\le15)=P(1.5<\frac{\xi-10}{\sqrt{4}}<2.5)=\Phi(2.5)-\Phi(1.5)=0.0606$.

26. 设 $\xi\sim N(5,4)$, 求 $a$, 使 (1)$P(\xi<a)=0.90$; (2)$P(|\xi-5|>a)=0.01$.

解 (1)$P(\xi<a)=P(\frac{\xi-5}{\sqrt{4}}<\frac{a-5}{2})=\Phi(\frac{a-5}{2})$, 查正态分布表得

$\frac{a-5}{2}=1.282$, 故 $a=7.564$;

(2)$P(|\xi-5|>a)=P(|\frac{\xi-5}{\sqrt{4}}|>\frac{a}{2})=2(1-\Phi(\frac{a}{2}))=0.01$,

即 $\Phi(\frac{a}{2})=0.995$, 查正态分布表得 $\frac{a}{2}=2.576$, 故 $a=5.152$.

27. $\xi\sim U[0,5]$, 求方程 $4x^2+4\xi x+\xi+2=0$ 有实根的概率.

解 方程有实根的充分必要条件为 $\Delta\ge0$. 由 $\xi\sim U[0,5]$, 得

$$P(\Delta\ge0)=P((4\xi)^2-4\times4(\xi+2)\ge0)=P(\xi\ge2)=0.6.$$

故所求概率为 0.6.

28. 推广的伯努里试验中，每次有三个可能结果 $A_1,A_2,A_3$, 出现各结果的概率分别为 $p_1,p_2,p_3$, 进行 $n$ 次重复独立试验，记出现 $A_1$ 的次数为 $\xi$, 出现 $A_2$ 的次数为 $\eta$, 求 $(\xi,\eta)$ 的联合分布列 (三项分布) 与边际分布.

解 $(\xi,\eta)$ 的联合分布列为

$$P(\xi=i,\eta=j)=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^ip_2^jp_3^{n-i-j}, i>0, j>0, i+j\le n.$$

边际分布为

$$\begin{aligned}P(\xi=i)&=\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^ip_2^jp_3^{n-i-j}\\&=\sum_{j=0}^{n-i}C_{n-i}^jp_2^jp_3^{n-i-j}\cdot C_n^ip_1^i=C_n^ip_1^i(1-p_1)^{n-i}, i=0,1,2,\ldots,n.\end{aligned}$$

同理

$$P(\eta=j)=C_n^jp_2^j(1-p_2)^{n-j}, j=0,1,2,\ldots,n.$$

29. 求证:二元函数 $F(x,y)=\begin{cases}1, x+y\ge0,\\0, x+y<0.\end{cases}$ 对每个变量单调非降、右连续,且 $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$, 但 $F(x,y)$ 并不是一个分布函数.

证 显然, $F(x,y)$ 对每个变量单调非降、右连续,且 $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$. 但由于 $F(2,2)-F(-1,2)-F(2,-1)+F(-1,-1)=-1<0$, 故 $F(x,y)$ 并不是一个分布函数.

30. 试用 $(\xi,\eta)$ 的分布函数表示下列概率:

(1)$P(a\le\xi\le b,\eta\le y)$;
(2)$P(\xi=a,\eta\le y)$;
(3)$P(\xi<-\infty,\eta<+\infty)$.
解　(1)$P(a\le\xi\le b,\eta\le y)=P(\xi\le b,\eta\le y)-P(\xi<a,\eta\le y)=F(b,y)-F(a-,y)$;
(2)$P(\xi=a,\eta<y)=P(\xi\le a,\eta<y)-P(\xi<a,\eta<y)=F(a,y-)-F(a-,y-)$;
(3)$P(\xi<-\infty,\eta<+\infty)=F(-\infty,+\infty)=0$.

31. 若 $(\xi,\eta)$ 的密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+y)}, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$. 求：
(1) 常数 A;
(2) 分布函数 $F(x,y)$;
(3)$\xi$ 的边际密度;
(4)$P(\xi<2,0<\eta<1)$;
(5)$P(\xi+\eta<2)$;
(6)$P(\xi=\eta)$.
解　(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-(2x+y)}dxdy=A/2=1$, 故 $A=2$.
(2) 当 $x>0,y>0$ 时，　$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y Ae^{-(2u+v)}dudv=(1-e^{-2x})(1-e^{-y})$; 其它情形, $F(x,y)=0$. 故分布函数 $F(x,y)$ 为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $\xi$ 的边际密度为

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dy=2e^{-2x}, & x\ge 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4)

$$P(\xi<2,0<\eta<1)=F(2,1)-F(2,0)=(1-e^{-2})(1-e^{-1});$$

(5)

$$P(\xi+\eta<2)=\int_0^2dx\int_0^{2-x}2e^{-(2x+y)}dy$$
$$=\int_0^2(2e^{-2x}-2e^{-(2+x)})dx=(1-e^{-2})^2.$$

(6)$P(\xi=\eta)=0$.

32. 设 $(\xi,\eta)$ 服从矩形区域 $D:\{0<x<1,0<y<2\}$ 上的均匀分布.
(1) 写出联合密度;
(2) 求边际密度;

(3) 求联合分布函数；
(4) 求 $P(\xi+\eta<1)$.

解 (1) 联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases}1/2, & 0<x<1, 0<y<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$;

(2) 边际密度为

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int_0^2 1/2dy=1, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\int_0^1 1/2dx=1/2, & 0<y<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(3) 求联合分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0, or y<0;\\ xy, & 0\le x<1, 0\le y<2;\\ x, & 0\le x<1, y\ge 2;\\ y, & x\ge 1, 0\le y<2;\\ 1, & x\ge 1, y\ge 2.\end{cases}$$

(4)$P(\xi+\eta<1)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}1/2dy=(x/2-x^2/4)|_0^1=1/4$.

33. 设联合密度 $p(x,y)$ 如 31 题所示，求条件密度 $p_{\eta|\xi}(y|x)$.

解 给定 $x>0$, $p_{\eta|\xi}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

34. 对二元正态密度

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{2}(2x^2+y^2+2xy-22x-14y+65)\}.$$

(1) 把它化为标准形式，并指出 $a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r$ 各为何值；
(2) 求出边际密度 $p_\xi(x)$; (3) 求条件密度 $p_{\eta|\xi}(y|x)$.

解 先算 (2) 边际密度为

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[y+(x-7)]^2}dy\cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}, -\infty<x<+\infty;$$

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[x+\frac{y-1}{2}]^2}dx\cdot e^{-\frac{(y-3)^2}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(y-3)^2}{4}}, -\infty<y<+\infty.$$

(1) 标准形式为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}$$
$$\exp\{-\frac{1}{2(1-(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2)}[\frac{(x-4)^2}{1}-2(-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{x-4}{1})(\frac{y-3}{\sqrt{2}})+\frac{(y-3)^2}{2}]\}.$$

故 $a=4,b=3,\sigma_1^2=1,\sigma_2^2=2,r=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(3) 条件密度 $p_{\eta|\xi}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(x+y-7)^2}{2}\}$.
35. 下列 $(\xi,\eta)$ 的联合分布列中， $a,b$ 各取什么值才能使 $\xi,\eta$ 独立？

| $\xi\backslash\eta$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/6 | 1/9 | 1/18 |
| 2 | 1/3 | a | b |

| $\xi\backslash\eta$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 3/10 | a | 1/5 |
| 1 | b | 1/10 | 1/5 |

解　(1) 由性质 $\sum_{i,j}p_{ij}=1$, 得 $a+b=1$.
由独立性知， $P(\xi=1,\eta=2)=P(\xi=1)P(\eta=2)$, 即 $1/9=1/3\times(1/9+a)$.
故 $a=2/9,b=1/9$. 易验证，当 $a=2/9,b=1/9$ 时 $\xi,\eta$ 相互独立.
(2) 由性质 $\sum_{i,j}p_{ij}=1$, 得 $a+b=1/5$.
由独立性知， $P(\xi=1,\eta=2)=P(\xi=1)P(\eta=2)$, 即 $1/5=(b+1/10+1/5)\times(1/5+1/5)$.
故 $a=0,b=1/5$. 此时，由于 $P(\xi=0,\eta=1)\neq P(\xi=0)P(\eta=1)$. 故 $\xi,\eta$ 不相互独立.
36. 设随机变量 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立，且 $P(\xi=1)=P(\eta=1)=p>0$ , 又 $P(\xi=0)=P(\eta=0)=1-p>0$, 定义：
$\zeta=1(\xi+\eta$ 为偶数时$)$; $\zeta=0(\xi+\eta$ 为奇数时$)$.
问 $p$ 取什么值能使 $\xi,\zeta$ 独立？
解　由题意易得，

$$P(\xi=0,\zeta=0)=P(\xi=0,\eta=1)=p(1-p),$$

$$P(\xi=0,\zeta=1)=P(\xi=0,\eta=0)=(1-p)^2,$$

$$P(\xi=1,\zeta=0)=P(\xi=1,\eta=0)=p(1-p),$$

$$P(\xi=1,\zeta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=p^2.$$

故

| $\xi\backslash\zeta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $p(1-p)$ | $(1-p)^2$ |
| 1 | $p(1-p)$ | $p^2$ |

可得 $\zeta$ 的分布列为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2p(1-p) & 2p^2-2p+1 \end{pmatrix}$ 故要使 $\xi,\zeta$ 独立，需满足

$$\begin{cases} P(\xi=0,\zeta=0)=P(\xi=0)P\zeta=0) \\ P(\xi=0,\zeta=1)=P(\xi=0)P\zeta=1) \\ P(\xi=1,\zeta=0)=P(\xi=1)P\zeta=0) \\ P(\xi=1,\zeta=1)=P(\xi=1)P\zeta=1) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (1-p)^2=(1-p)\cdot(2p^2-2p+1) \\ p(1-p)=(1-p)\cdot 2p(1-p) \\ p^2=p\cdot(2p^2-2p+1) \\ p(1-p)=p\cdot 2p(1-p) \end{cases}$$

解得 $p=1/2$. 故易验证当 $p=1/2$ 时， $\xi,\zeta$ 相互独立.

37. 判断 31 题中是否相互独立.

解　由于 $\eta$ 的边际密度为

$$p_\eta(y)=\begin{cases} \int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)}dx=2e^{-y}, & y\ge 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$, 因而 $(\xi,\eta)$ 相互独立.

38. 设 $(\xi,\eta)$ 服从圆 $x^2+y^2\le r^2$ 上的均匀分布;

(1) 求 $\xi,\eta$ 各自的密度; (2) 判断 $\xi$ 与 $\eta$ 是否相互独立.

解　显然， $p(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(1) 故 $\xi,\eta$ 的边际密度为

$$p_\xi(x)=\begin{cases} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\ge r; \\ 0, & |x|\ge r. \end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|\ge r; \\ 0, & |x|\ge r. \end{cases}$$

(2) 易知 $p(x,y)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)$ , 故 $\xi$ 与 $\eta$ 不相互独立.

39. 设 $\xi,\eta$ 的密度函数为 $p(x,y)$ , 求证 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立的充分必要条件为 $p(x,y)$ 可分离变量，即 $p(x,y)=g(x)h(y)$ . 此时 $g(x),h(y)$ 与边际密度有何关系？

证　若 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立，则对任意的 $x,y$, $F(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y)$ , 即有

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}p_\xi(u)du\int_{-\infty}^{y}p_\eta(v)dv=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p_\xi(u)p_\eta(v)dudv.$$

故 $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$, 因而为 $p(x,y)$ 可分离变量.

下证充分性：若 $p(x,y)$ 为可分离变量，即 $p(x,y)=g(x)h(y)$. 故

故 $\xi,\eta$ 的边际密度分别为

$$p_\xi(x)=g(x)\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)dy,-\infty<x<+\infty;$$

$$p_\eta(y)=h(y)\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx,-\infty<y<+\infty.$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=1$, 因而 $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$ , 故 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立，且此时 $g(x),h(y)$ 与边际密度相差一个常数.

40. 利用上题的充分必要条件判断 $\xi$ 与 $\eta$ 的独立性，若它们的密度函数分别为：

(1) 当 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 时 $p(x,y)=4xy$, 其他情况 $p(x,y)=0$;

(2) 当 $0\le x\le y\le 1$ 时 $p(x,y)=8xy$, 其他情况 $p(x,y)=0$.

解 (1) 取

$$g(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}\qquad h(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

显然， $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$, 根据上题知 $\xi$ 与 $\eta$ 的独立.

(2) 边际密度分别为

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int_x^1 8xydy=4x(1-x^2), & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}\qquad p_\eta(y)=\begin{cases}\int_0^y 8xydy=4y^3, & 0\le y\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因而 $p(x,y)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)$, 故 $\xi$ 与 $\eta$ 不相互独立.

41. 设 $(\xi,\eta,\zeta)$ 的联合密度为

$$p(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1-\sin x\sin y\sin z}{8\pi^3}, & 0\le x\le\pi,0\le y\le\pi,0\le z\le\pi;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求证： $(\xi,\eta,\zeta)$ 两两独立，但不相互独立.

证　由于

$$p_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\int_0^\pi\frac{1-\sin x\sin y\sin z}{8\pi^3}dz=\frac{1}{4\pi^2}, & 0\le x\le\pi,0\le y\le\pi;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{1-\sin x\sin y\sin z}{8\pi^3}dydz=\frac{1}{2\pi}, & 0\le x\le\pi;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

同理

$$p_{\xi,\eta}(y,z)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi^2}, 0\le y\le\pi, & 0\le z\le\pi;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$p_{\xi,\zeta}(x,z)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi^2}, & 0\le x\le\pi, 0\le z\le\pi;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le y\le\pi;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$p_\zeta(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le z\le\pi;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

故

$$p_{\xi,\eta}(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y), p_{\xi,\zeta}(x,z)=p_\xi(x)p_\eta(z),$$

$$p_{\eta,\zeta}(y,z)=p_\eta(y)p_\zeta(z), p(x,y,z)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)p_\eta(z).$$

因而 $(\xi,\eta,\zeta)$ 两两独立，但不相互独立.

42. $\xi$ 的分布列为 $\begin{pmatrix}0 & \pi/2 & \pi\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$, 求 (1)$\eta=2\xi+\pi/2$ 与 (2)$\zeta=\sin\xi$ 的分布.

解　(1) $\eta=a+b\xi$ 的分布列为

$$\begin{pmatrix}\pi/2 & 3\pi/2 & 5\pi/2\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$$

(2)$\zeta=\xi^2$ 的分布列为

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

43. 设 $\xi$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，求 (1)$\eta=a+b\xi$ 与 (2)$\zeta=\xi^2$ 的分布.

解　(1)$\eta=a+b\xi$ 的分布列为

$$P(\eta=a+bk)=P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots.$$

(2)$\zeta=\xi^2$ 的分布列为

$$P(\eta=k^2)=P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\ldots.$$

44. 四张小纸片分别写有数字 0, 1, 1, 2. 有放回地取两次，每次取一张，以 $\xi,\eta$ 分别记两次取得的数字，求 $\xi,\eta$ 各自的分布以及 $\zeta=\xi\eta$ 的分布.

解　由于是有放回地取，故 $\xi,\eta$ 独立同分布，分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\zeta=\xi\eta$ 的分布列为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 7/16 & 1/4 & 1/4 & 1/16 \end{pmatrix}$$

45. 设 $\xi,\eta$ 是独立随机变量，分别服从参数为 $\lambda_1$ 及 $\lambda_2$ 的泊松分布，试直接证明：

(1) $\xi+\eta$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布；

(2) $P(\xi=k|\xi+\eta=n)=C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k},k=0,1,\ldots,n.$

证　(1) 由独立性,

$$P(\xi+\eta=k)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi=i,\eta=k=i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\cdot\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},k=0,1,\ldots$$

即 $\xi+\eta$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布；

(2)

$$P(\xi=k|\xi+\eta=n)=\frac{P(\xi=k,\xi+\eta=n)}{P(\xi+\eta=n)}$$
$$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}$$
$$=C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k},k=0,1,\ldots,n.$$

46. 设 $\xi,\eta$ 相互独立，都以 1/2 的概率取值 +1 和 −1, 令 $\zeta=\xi\eta$, 求证：　$\xi,\eta,\zeta$ 两两独立，但不相互独立.

证

$$P(\zeta=-1)=P(\xi=1,\eta=-1)+P(\xi=-1,\eta=1)=1/2,$$

$$P(\zeta=1)=P(\xi=1,\eta=1)+P(\xi=-1,\eta=-1)=1/2,$$

$\xi,\eta$ 的联合分布列为

| $\xi\backslash\zeta$ | -1 | 1 | $p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|
| -1 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| 1 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| $p_{\cdot j}$ | 1/2 | 1/2 | |

故 $\xi,\zeta$ 相互独立. 同理 $\eta,\zeta$ 相互独立.
由于

$$1/4=P(\xi=1,\eta=1,\zeta=1)\neq P(\xi=1)P(\eta=1)P(\zeta=1)=1/8,$$

故 $\xi,\eta,\zeta$ 不相互独立.
47. 设 $\xi$ 的密度函数为 $p(x)$, 求下列随机变量的分布密度:
(1)$\eta=1/\xi$, 这里 $P(\xi=0)=0$; (2)$\eta=|\xi|$;(3)$\eta=\tan\xi$.
解　(1) 由于 $P(\xi=0)=0$, 故

$$F_\eta(x)=P(1/\xi\leq x)=\begin{cases}\int_{1/x}^0 p(u)du, & x<0;\\ \int_{-\infty}^0 p(u)du+\int_{1/x}^{+\infty}p(u)du, & x\geq 0.\end{cases}$$

故 $\eta$ 的密度函数为 $p_\eta(x)=\frac{1}{x^2}p(\frac{1}{x}),x\neq 0$.
(2)

$$F_\eta(x)=P(|\xi|\leq x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \int_{-x}^x p(u)du, & x\geq 0.\end{cases}$$

故 $\eta$ 的密度函数为 $p_\eta(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ p(x)+p(-x), & x\geq 0.\end{cases}$
(3)

$$F_\eta(x)=P(\xi\leq\arctan x)=\int_{-\infty}^{\arctan x}p(u)du.$$

故 $\eta$ 的密度函数为 $p_\eta(x)=\frac{p(\arctan x)}{1+x^2},-\infty<x<+\infty$.
48. 对圆的直径 D 作近似测量，设其值在 $[a,b]$ 上的均匀分布，求圆面积 S 的密度函数.
解　$S=\pi D^2/4$, 其中 $D\sim U[a,b]$.
由于 $y=\pi x^2/4,a\leq x\leq b$ 的反函数为 $x=2\sqrt{y/\pi},\pi a^2/4\leq y\leq\pi b^2/4$.
故圆面积 S 的密度函数为

$$p_S(y)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi y}}=\frac{1}{(b-a)\sqrt{\pi y}},\pi a^2/4\leq y\leq\pi b^2/4.$$

49. 设 $\xi \sim N(a,\sigma^2)$, 求 $e^{\xi}$ 的密度函数.
解　$y=e^x$ 的反函数为 $x=\ln y, y>0$.
故 $e^{\xi}$ 的密度函数为

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma}\exp\{-\frac{(\ln y-a)}{2\sigma^2}\}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

50. 若 $\theta$ 服从 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上的均匀分布，　$\psi=\tan\theta$ 求 $\psi$ 的密度.
解　$y=\tan x, -\pi/2\le x\le \pi/2$ 的反函数为 $x=\arctan y$.
故 $\psi$ 的密度函数为

$$p_\psi(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

51. 设 $\xi,\eta$ 相互独立，且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求 $\zeta=\xi+\eta$ 的密度函数.
解 $p_\xi(x)=1, 0\le x\le 1; p_\eta(y)=1, 0\le y\le 1$. 由卷积公式，

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)p_\eta(z-x)dx.$$

因而当且仅当 $p_\xi(x)p_\eta(z-x)\ne 0$ 时 $p_\zeta(z)\ne 0$. 由 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$

故 $\zeta=\xi+\eta$ 的密度函数为

$$p_\zeta(z)=\begin{cases}\int_0^z dx=z, & 0\le z<1;\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z, & 1\le z<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

52. 设 $\xi,\eta$ 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，求 $\zeta=\xi/\eta$ 的分布密度.
解　由商的密度函数公式

$$\begin{aligned}&p_\zeta(z)=\int_0^{+\infty}yp_\xi(yz)p_\eta(y)dy-\int_{-\infty}^0 yp_\xi(yz)p_\eta(y)dy\\ &=\int_0^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2z^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy-\int_{-\infty}^0 y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2z^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\\ &=\frac{1}{2\pi(1+z^2)}\cdot(-e^{-\frac{(1+z^2)y^2}{2}}\ |_0^{+\infty}+\frac{1}{2\pi(1+z^2)}\cdot(-e^{-\frac{(1+z^2)y^2}{2}}\ |_{-\infty}^0=\frac{1}{\pi(1+z^2)}.\end{aligned}$$

53. 设 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 相互独立,且都服从指数分布,参数分别为 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, 求 $\eta=\min(\xi_1,\dots,\xi_n)$ 的密度函数.

解

$$F_\eta(x) = 1 - \Pi_{k=1}^n P(\xi_k > x) = 1 - (1 - F_{\xi_1}(x))^n$$
$$= \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-n\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

故 $\eta$ 的密度函数为 $p_\eta(x) = n\lambda e^{-n\lambda x}, x \geq 0.$

54. 设系统 L 由两个子系统 $L_1$ 和 $L_2$ 联接而成， $L_1$ 与 $L_2$ 的寿命 $X, Y$ 分别服从参数为 $a$ 与 $b(a \neq b)$ 的指数分布．试分别就下列三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的密度： (1)$L_1$ 与 $L_2$ 串联； (2)$L_1$ 与 $L_2$ 并联； (3)$L_1$ 为 $L_2$ 的备用.

解 (1) 这时 $Z = \min(X, Y)$,

$$F_Z(z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$
$$= \begin{cases} 0, & z < 0; \\ 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z \geq 0. \end{cases}$$

故 $Z$ 的密度函数为 $p_Z(z) = (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, z \geq 0.$

(2) 这时 $Z = \max(X, Y)$,

$$F_Z(z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z)$$
$$= \begin{cases} 0, & z < 0; \\ (1 - e^{-\lambda_1 z})(1 - e^{-\lambda_2 z}), & z \geq 0. \end{cases}$$

故 $Z$ 的密度函数为 $p_Z(z) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} + (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, z \geq 0.$

(3) 这时 $Z = \max(X, Y)$, 由卷积公式,

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z - x)dx.$$

因而当且仅当 $p_X(x)p_Y(z - x) \neq 0$ 时 $p_Z(z) \neq 0$. 由 $\begin{cases} x > 0 \\ z - x > 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x > 0 \\ x < z \end{cases}$

故 $Z = X + Y$ 的密度函数为

$$p_\zeta(z) = \begin{cases} \int_0^z e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2(z-x)}dx = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}), & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

55. 某种商品一周的需要量是一个随机变量，密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

各周的需要量是相互独立的，求两周需要量的密度.

解　设这两周需要量分别为 $\xi,\eta$. 则 $\xi,\eta$ 相互独立，且密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

由卷积公式，两周需要量 $\zeta=\xi+\eta$ 的密度函数为

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)p(z-x)dx.$$

因而当且仅当 $p(x)p(z-x)\ne 0$ 时 $p_\zeta(z)\ne 0$. 由 $\begin{cases} x\le 0\\ z-x\ge 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases} x\ge 0\\ x\le z\end{cases}$

故 $\zeta$ 的密度函数为

$$p_\zeta(z)=\begin{cases} \int_0^z xe^{-x}\cdot(z-x)e^{-(z-x)}dx=z^3e^{-z}/6, & z\ge 0;\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

56. 设 $\xi,\eta$ 相互独立，分别服从参数为 $\lambda$ 与 $\mu$ 的指数分布，求 $\xi-\eta$ 密度函数.

解　记 $\zeta=\xi-\eta$. 故当 $z<0$ 时，

$$\begin{aligned} F(z)&=P(\xi-\eta\le z)=\int_0^{+\infty}dx\int_{x-z}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}dy\\ &=\lambda e^{\mu z}\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda+\mu)x}dx=\frac{\lambda e^{\mu z}}{\lambda+\mu};\end{aligned}$$

当 $z\ge 0$ 时，

$$\begin{aligned} F(z)&=P(\xi-\eta\le z)=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}dx\\ &=\int_0^{+\infty}(\mu e^{-\mu y}-\mu e^{-\lambda z}e^{-(\lambda+\mu)y})dy=1-\frac{\mu e^{-\lambda z}}{\lambda+\mu}.\end{aligned}$$

故 $\zeta$ 的密度函数为

$$p_\zeta(z)=\begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\mu z}, z<0,\\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda z}, z\ge 0.\end{cases}$$

57. 在线段 $(0,a)$ 上随机投掷两点，求两点间距离的密度函数.

解　记 $\xi,\eta$ 分别表示所投两点的坐标，显然 $(\xi,\eta)$ 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1/a^2, & 0<x,y<a;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

两点间距离为 $\zeta=|\xi-\eta|$ . 利用几何概率公式，则其分布函数为

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$; 当 $z\geq a$ 时，$F(z)=1$;

当 $0\leq z<a$ 时，$F(z)=1-\frac{(a-z)^2}{a^2}$.

故 $\zeta$ 的密度函数为 $p_\zeta(z)=\frac{2(a-z)}{a^2},0<z<a$.

58. 设火炮射击时弹着点坐标 $(\xi,\eta)$ 服从二维正态分布 $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$, 求距离 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 的分布密度.

解　当 $z<0$ 时，$F(z)=0$; 当 $z\geq 0$ 时,

$$F(z)=P(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\leq z)=\int\int_{x^2+y^2\leq z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

故 $\rho$ 的密度函数为 $p(z)=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},z\leq 0$.

59. 若气体分子的速度是随机向量 $V=(X,Y,Z)$, 各分量相互独立，都服从 $N(0,\sigma^2)$, 求证 $S=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ 服从马克斯威尔 (Maxwell) 分布，其密度为

$$p(s)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s^2}{\sigma^2}\exp(-\frac{s^2}{2\sigma^2}), & s\geq 0;\\ 0, & s<0.\end{cases}$$

证　　当 $s<0$ 时，$F(s)=0$; 当 $s\geq 0$ 时,

$$F(s)=P(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\leq s)=\int\int_{x^2+y^2+z^2\leq s^2}\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}}dxdydz$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^s\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\int_0^s r^2e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr.$$

故其密度为

$$p(s)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s^2}{\sigma^2}\exp(-\frac{s^2}{2\sigma^2}),s\geq 0,\\ 0,s<0.\end{cases}$$

60. 设 $\xi,\eta$ 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 问 $\xi+\eta$ 与 $\xi/(\xi+\eta)$ 是否相互独立？

解　记 $\begin{cases}U=\xi+\eta\\ V=\xi/(\xi+\eta)\end{cases}$ . 由于 $\begin{cases}u=x+y\\ v=x/(x+y)\end{cases}$ $(x>0,y>0)$ 的反函数组为 $\begin{cases}x=uv\\ y=u(1+v)\end{cases}$

$(u>0, 0<v<1)$.

故 $(U,V)$ 的联合密度为

$$p_{UV}(u,v)=e^{-uv}\cdot e^{-u(1-v)}\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=ue^{-u}, u>0, 0<v<1,$$

因而 $U$ 与 $V$ 相互独立.

61. 设 $(\xi,\eta)$ 的联合密度为

$$p(x)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $(\xi^2,\eta^2)$ 的联合密度.

解 记 $\begin{cases}U=\xi^2\\ V=\eta^2\end{cases}$. 由 $\begin{cases}u=x^2\\ v=y^2\end{cases}$ $(0<x<1, 0<y<1)$ 的反函数组为

$$\begin{cases}x=\sqrt{u}\\ y=\sqrt{v}\end{cases}\quad(0<u<1, 0<v<1)$$

. 因而

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{u}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{4\sqrt{uv}}.$$

故 $(U,V)$ 的联合密度为

$$p_{UV}(u,v)=4\sqrt{u}\cdot\sqrt{v}\cdot\cdot|J|=1, 0<u<1, 0<v<1.$$

62. 设 $\xi,\eta$ 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，求 $\xi+\eta$ 与 $\xi-\eta$ 的联合分布密度与边际分布密度.

解 由 $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}$ $(x>0, y>0)$ 的反函数组为

$$\begin{cases}x=(u+v)/2\\ y=(u-v)/2\end{cases}\quad(u>0, -u<v<u)$$

.

因而

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=-1/2.$$

故 $(U,V)$ 的联合分布密度与边际分布密度为

$$p_{UV}(u,v)=e^{-\frac{u+v}{2}}\cdot e^{-\frac{u-v}{2}}\cdot\cdot|J|=e^{-u}/2,u>0,-u<v<u.$$

$$p_U(u)=\int_{-u}^{u}e^{-u}/2dv=ue^{-u},u\geq 0.$$

$$p_V(v)=\int_{|v|}^{+\infty}e^{-u}/2du=e^{-|v|}/2,-\infty<v<+\infty.$$

63. 设 $(\xi,\eta)$ 服从二元正态分布 $N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$, 求 $\xi+\eta$ 与 $\xi-\eta$ 相互独立的充分必要条件.

解　由于 $(\xi,\eta)$ 服从二元正态分布，则 $(\xi+\eta,\xi-\eta)$ 也服从二维正态分布，因而相互独立的充分必要条件为 $Cov(\xi+\eta,\xi-\eta)=0$. 而

$$Cov(\xi+\eta,\xi-\eta)=E(\xi^2-\eta^2)=\sigma_1^2-\sigma_2^2.$$

故 $\xi+\eta$ 与 $\xi-\eta$ 相互独立的充分必要条件 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

64. 在随机向量变换中，如果 (13) 式的条件中的反函数组不是唯一的，怎样利用 (13) 式求出变换后的随机向量的密度？

解　不妨设该变换 $y_k=f_k(x1,\ldots,x_n),k=1,2,\ldots,n$ 可以分为 $N$ 个反函数组, 其值域分别记为 $D_i,i=1,\ldots,N$. 对每个 $1\leq i\leq N,x_{ik}=x_{ik}(y_1,\ldots,y_n),k=1,2,\ldots,n;(y_1,\ldots,y_n)\in D_i$, 且 $J_i=\frac{\partial(x_{i1},\ldots,x_{in})}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\neq 0$. 则 $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ 是连续型随机向量. 当 $(y_1,\ldots,y_n)\in(f_1,\ldots,f_n)$ 的值域时，其密度为

$$q(y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i:(y_1,\ldots,y_n)\in D_i}p[x_{i1}(y_1,\ldots,y_n),\ldots,x_{in}(y_1,\ldots,y_n)]\cdot|J_i|;$$

其它情形 $q(y_1,\ldots,y_n)=0$.

65. 设 $(\xi,\eta)$ 的联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases}(1+xy)/4, & |x|<1,|y|<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求证：　$\xi,\eta$ 不相互独立，但 $\xi^2,\eta^2$ 相互独立.

证

$$p_\xi(x)=\int_{-1}^{1}(1+xy)/4dy=1/2.|x|<1$$

$$p_\eta(y)=\int_{-1}^{1}(1+xy)/4dx=1/2.|y|<1$$

故 $p(x,y)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)$, 因而 $\xi,\eta$ 不相互独立.　由于 $\begin{cases}u=x^2\\ v=y^2\end{cases}$ $(|x|<1,|y|<1)$ 有下列四个反函数组．即 $\begin{cases}x=\pm\sqrt{u}\\ y=\pm\sqrt{v}\end{cases}$ $(0<u<1,0<v<1)$. 故由 64 题知，　$\xi^2,\eta^2$ 的联合密

度为

$$p_{UV}(u,v) = [(1+\sqrt{uv})/4 + (1+\sqrt{uv})/4 + (1-\sqrt{uv})/4 + (1-\sqrt{uv})/4] \cdot \frac{1}{4\sqrt{uv}}$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{uv}}, 0 < u < 1, 0 < v < 1.$$

因而其边际密度为

$$p_U(u) = \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{uv}} dv = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{u}}, 0 < u < 1.$$

$$p_V(v) = \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{uv}} du = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{v}}, 0 < v < 1.$$

故 $p_{UV}(u,v) = p_U(u)p_V(v)$, 因而 $U, V$ 相互独立.

66. 设 $\xi, \eta$ 的联合密度为 $p(x,y)$. $U = \xi, V = \xi + \eta$, 求 $(U,V)$ 的联合密度，再求边际密度，与 §5(7) 式相对照.

解　由 $\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$ 的反函数组为 $\begin{cases} x = u \\ y = v - u \end{cases}$

因而 $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1$. 故 $(U,V)$ 的联合分布密度与关于 $V$ 边际分布密度为

$$p_{UV}(u,v) = p(u, v-u), p_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, v-u) du.$$

67. 设 $\xi, \eta$ 的联合密度为 $p(x,y)$. $U = \xi, V = \xi + \eta$, 求 $(U,V)$ 的联合密度，再求边际密度，与 §5(8) 式相对照.

解　由 $\begin{cases} u = x \\ v = x/y \end{cases}$ 的反函数组为 $\begin{cases} x = u \\ y = u/v \end{cases}$

因而

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{vmatrix} = -u/v^2.$$

故 $(U,V)$ 的联合分布密度与关于 $V$ 的边际分布密度为

$$p_{UV}(u,v) = p(u, u/v) \cdot [(-u/v^2)I(u<0) + u/v^2 I(u>0)].$$

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{UV}(u,v) du$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, u/v) \cdot \cdot [(-u/v^2)I(u<0) + u/v^2 I(u>0)] du = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| p(yv, y) dy.$$

68. 设 $(\xi,\eta,\zeta)$ 有联合密度为. $p(x,y,z)=\begin{cases}6(1+x+y+z)^{-4}, & x>0,y>0,z>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 $U=\xi+\eta+\zeta$ 的密度.

解　记 $U=\xi+\eta+\zeta, V=\eta, W=\zeta$. 由于 $\begin{cases}u=x+y+z\\ v=y\\ w=z\end{cases}$ $(x>0,y>0,z>0)$ 的反函数组为 $\begin{cases}x=u-v-w\\ y=v\\ z=w\end{cases}$ $(v>0,w>0,v+w<u)$. 易得, $J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=1$. 故 $(U,V)$ 的联合分布密度为

$$P_{UVW}(u,v,w)=6(1=u)^{-4},\quad (v>0,w>0,v+w<u).$$

因而关于 $U$ 的边际分布密度为

$$p_U(u)=\int\int_{v>0,w>0,v+w<u}6(1+u)^{-4}dvdw=\frac{3u^2}{(1+u)^4},u>0.$$

第三章数字特征与特征函数

1. 设随机变量 $\xi$ 有下列分布，求

(1)$P(\xi=k)=1/5, k=1,2,3,4,5$;(2)$P(\xi=k)=a^k/(1+a)^{k+1}, a>0$ 为常数 $k=0,1,2,\dots$.

解 (1) $E\xi=(1+2+3+4+5)/5=3$;

(2) 由于当 $|x|<1$ 时， $\Sigma_{k=0}^{\infty}kx^k=\frac{x}{1-x}$. 故

$$E\xi=\Sigma_{k=0}^{\infty}k\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}=a.$$

2. 袋中有 $k$ 号球 $k$ 只， $k=1,2,\dots,n$. 从中摸出一球，求所得号码的数学期望.

解 记 $\xi$ 为所得号码. 则 $P(\xi=k)=\frac{2k}{n(n+1)}$. 故

$$E\xi=\frac{2(1^2+2^2+\dots+n^2)}{n(n+1)}=(2n+1)/3.$$

3. 某人有 $n$ 把钥匙，只有一把能打开家门. 当他随意使用这 $n$ 把钥匙时，求打开家门时已被使用过的钥匙数的数学期望. 假设：

(1) 每次使用过的钥匙不再放回；

(2) 每次使用过的钥匙与其它钥匙混在一起.

解 记 $\xi$ 为打开家门时已被使用过的钥匙数. 则

(1)$P(\xi=k)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+2}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}, 1\le k\le n$. 故

$$E\xi=(1+2+\dots+n)/n=(n+1)/2.$$

(2) 这是一几何分布，故 $P(\xi=k)=(\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}, k=1,2,\dots$. $E\xi=\frac{1}{1/n}=n$.

4. 设为 $\xi$ 非负整数值的随机变量，数学期望存在. 求证 $E\xi=\Sigma_{k=1}^{\infty}P(\xi\ge k)$.

证

$$\begin{aligned}E\xi&=\Sigma_{n=0}^{+\infty}n\cdot P(\xi=n)=\Sigma_{n=1}^{+\infty}\Sigma_{k=1}^{n}P(\xi=n)\\&=\Sigma_{k=1}^{n}\Sigma_{n=1}^{+\infty}P(\xi=n)=\Sigma_{k=1}^{n}P(\xi\ge n).\end{aligned}$$

5. 某城市共有 N 辆车，车牌号从 1 到 N. 若随机地记下 $r$ 辆车的车牌号，其最大号码为 $\xi$ , 求 $E\xi$.

解 $\xi$ 可取 $r,r+1,\dots,N$, $P(\xi<k)=\frac{C_{k-1}^r}{C_N^r}, k=r+1,\dots,N$, 由第 4 题,

$$\begin{aligned}E\xi&=\Sigma_{k=r}^{N}P(\xi\ge k)=\Sigma_{k=r+1}^{N}(1-P(\xi<k))\\&=(N-r+1)-\Sigma_{k=r+1}^{N}\frac{C_{k-1}^r}{C_N^r}=(n-r+1)-\frac{C_N^{N-r-1}}{C_N^r}=N-r+1-\frac{N-r}{r+1}.\end{aligned}$$

6. 设随机变量 $\xi$ 分别具有下列密度，求 $E\xi$.

$(1)p(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\pi/2\le x\le\pi/2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$(2)p(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1;\\ 2-x, & 1\le x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$(3)p(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-|x-\mu|/\lambda}, -\infty<x<\infty, \lambda, \mu$ 为常数.

解　(1) 由积分性质 $E\xi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=0$;

$(2)E\xi=\int_0^1 x\cdot xdx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx=x^3/3|_0^1+(x^2-x^3/3)|_1^2=1$;

(3) $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-|x-\mu|/\lambda}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(u+t)\frac{1}{2\lambda}e^{-|t|/\lambda}dt=\mu$.

7. 设 $\xi$ 服从 $[-1/2,1/2]$ 上的均匀分布，求 $\eta=\sin\xi$ 的数学期望.

解　$E\eta=E\sin\xi=\int_{-1/2}^{1/2}\sin xdx=0$.

8. 设分子的速度的分布密度有马克斯韦尔分布律给出：

$$p(x)=\begin{cases}\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分子的质量为 $m$，求分子的平均速度和平均动能. 解记 $\xi$ 为分子的平均速度. 分子的平均速度和平均动能为

$$E\xi=\int_0^\infty x\cdot\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx=-e^{-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{2x^2}{a\sqrt{\pi}}|_0^\infty+\frac{4}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x\cdot -e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx$$
$$=\frac{4}{a\sqrt{\pi}}\cdot(-\frac{a^2}{2})e^{-\frac{x^2}{a^2}}|_0^\infty=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}.$$

$$Em\xi^2/2=\frac{1}{2}m\int_0^\infty x^2\cdot\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx=\frac{1}{2}m(-e^{-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{2x^3}{a\sqrt{\pi}}|_0^\infty+\frac{6}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2\cdot -e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx)$$
$$=\frac{3m}{a\sqrt{\pi}}(-\frac{a^2x}{2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}|_0^\infty+\frac{a^2}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx)=3ma^2/4.$$

9. 设 $\xi_1,\xi_2$ 相互独立，均服从 $N(a,\sigma^2)$, 求证：　$E\max(\xi_1,\xi_2)=a+\sigma/\sqrt{\pi}$.

证　易知 $\max(\xi_1,\xi_2)=|\xi_1-\xi_2|/2+(\xi_1+\xi_2)/2$.

由于 $\xi_1,\xi_2$ 相互独立，均服从 $N(a,\sigma^2)$. 故 $E(\xi_1+\xi_2)/2$=a, $\xi_1-\xi_2\sim N(0,2\sigma^2)$, 因而

$$E|\xi_1-\xi_2|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{x^2}{4a^2}}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{4a^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\cdot 2\sigma^2)|_0^\infty=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

故 $E\max(\xi_1,\xi_2)=a+\sigma/\sqrt{\pi}$.

10. 设事件 A 在第 $i$ 次试验中出现的概率为 $p_i$, $\mu$ 是在 $n$ 次独立试验中 A 出现的次数,

求 $E\mu$.

解　记 $\begin{cases} 0, & \text{第 i 次试验时 A 不出现;} \\ 1, & \text{第 i 次试验时 A 出现.} \end{cases}$ $i=1,2,\ldots,n$. 则由题意 $\mu=\sum_{i=1}^n X_i$ ，且 $EX_i=p_i$ ，由期望性质 $E\mu=\sum_{i=1}^n p_i$.

11. 袋中有 $n$ 张卡片，号码记为 $1,2,\ldots,n$, 从中有放回地抽出 $k$ 张卡片，求所得号码之和 $\mu$ 的数学期望.

解　记 $X_i$ 为第 $i$ 抽出卡片号码， $i=1,2,\ldots,n$. 易知 $X_i, i=1,2,\ldots,n$ 独立同分布，且 $\mu=\sum_{i=1}^k X_i$. 由于 $P(X_i=j)=1/n, j=1,\ldots,n$ ，故 $EX_i=\sum_{i=1}^n i/n=(n+1)/2$. 由期望性质 $E\mu=\sum_{i=1}^k EX_i=(n+1)/2$.

12. 流水作业线上生产的每个产品为不合格的概率是 $p$, 当生产出 $k$ 个不合格品时即检修一次．求两次检修其间产品总数的数学期望.

解　记 $X_i$ 为两次检修其间第 i-1 个不合格品与第 i 个不合格品间的产品数， $i=1,2,\ldots,k$. 则两次检修其间产品总数 $\eta =_{i=1}^k \xi_i$. 显然 $\xi_i, i=1,2,\ldots,k$ 独立同分布且服从几何分布．故 $E\xi_i=1/p$, $E\eta=\sum_{i=1}^k E\xi_i=k/p$.

13. 在长为的线段 $a$ 上任取两点 $M_1$ 与 $M_2$, 求线段长度 $M_1M_2$ 的数学期望.

解　记 $\xi,\eta$ 分别为距左端的距离．则线段长度 $M_1M_2$ 为 $\zeta=|\xi-\eta|$. 显然 $(\xi,\eta)$ 的联合密度为 $p(x,y)=1, < x<1, 0<y<1$. 故

$$\begin{aligned} E|\xi-\eta| &= \int_0^1\int_0^1 |x-y|dxdy = 2\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy \\ &= 2\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + 2\int_0^1 (\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2 dx = 1/3. \end{aligned}$$

14. 口袋中有 N 个球，其中白球数是随机变量，只知其数学期望为 $a$, 试求从该袋中任摸一球得到是白球的概率.

解　记 $\xi$ 为白球数．由题意 $E\xi=a$, 即 $\sum_{k=1}^N kP(\xi=k)=a$. 记 A=" 从该袋中任摸一球得到是白球 ". 则

$$P(A)=\sum_{k=1}^N P(A|\xi=k)\cdot P(\xi=k)=\sum_{k=1}^N \frac{k}{N}\cdot P(\xi=k)=\frac{a}{N}.$$

15. $(\xi,\eta)\sim N(0,0,1,1,r)$, 求证 $E\max(\xi,\eta)=\sqrt{(1-r)/\pi}$.

证　$\max(\xi,\eta)=\frac{|\xi-\eta|+\xi+\eta}{2}$. 显然， $E\xi=E\eta=0, \xi-\eta\sim N(0,2(1-r))$. 故

$$\begin{aligned} E|\xi-\eta| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi(1-r)}}e^{-\frac{x^2}{4(1-r)}}dx \\ &= \left(\frac{1-r}{\sqrt{\pi(1-r)}}e^{-\frac{x^2}{4(1-r)}}\right)|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{1-r}{\pi}}. \end{aligned}$$

16. 求第 1 题中各随机变量的方差.

解　(1) $E\xi^2=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)/5=11$, $E\xi=3$. 故 $Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=2$.
(2) 由于 $|x|<1$ 时，$\sum_{k=1}^{2}k^2x^k=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. 故

$$E\xi^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}=a(2a+1).$$

则 $Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=a(2a+1)-a^2=a(a+1)$.
17. 求第 2 题的随机变量的方差.
解　$E\xi^2=(1^2+2^2+\ldots+n^2)/n=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$. 故

$$Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-(\frac{n+1}{2})^2=\frac{n^2-1}{12}.$$

18. 求第 3 题中钥匙数的方差.
解　(1) $E\xi^2=(1^2+2^2+\ldots+n^2)/n=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$. 故

$$Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-(\frac{n+1}{2})^2=\frac{n^2-1}{12}.$$

(2) $P(\xi=k)=(\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n},k=1,2,\ldots$ 为几何分布，因而 $Var\xi=(\frac{1}{n})^{-2}\frac{n-1}{n}=n(n-1)$.
19. 求第 6 题中各随机变量的方差.
解　(1)

$$\begin{aligned}E\xi^2&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x^2\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x^2(1+\cos 2x)dx\\&=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2\sin 2x}{2}|_{-\pi/2}^{\pi/2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\sin 2xdx\\&=\frac{\pi^2}{12}+\frac{x}{2\pi}\cos 2x|_{-\pi/2}^{\pi/2}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2xdx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故

$$Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}.$$

(2)

$$E\xi^2=\int_0^1x^2\cdot xdx+\int_1^2x^2\cdot(2-x)dx=7/6.$$

故

$$Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=1/6.$$

(3)

$$\begin{aligned}E\xi^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-|x-\mu|/\lambda}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(t+\mu)^2\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-|t|/\lambda}dt\\&=\mu^2+\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{\lambda}e^{-t/\lambda}dt=\mu^2+(-\frac{t^2e^{-\lambda/t}}{2}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}te^{-\lambda/t}dt)=\mu^2+1/\lambda^2.\end{aligned}$$

故
$$Var\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1/\lambda^2.$$
20. 求第 7 题的方差.
解
$$E\eta = \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 \pi x dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1-\cos 2\pi x}{2} dx = 1/2.$$
故
$$Var\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = 1/2.$$
21. 求第 10 题的 $Var\mu$.
解　显然，$VarX_i = p_i q_i$. 故 $Var\mu = \Sigma_{i=1}^n Var\xi_i = \Sigma_{i=1}^n p_i q_i$.
22. 求第 11 题的 $Var\mu$.
解　显然，$VarX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 = \frac{n^2-1}{12}$. 故
$$Var\mu = \Sigma_{i=1}^k VarX_i = \frac{k(n^2-1)}{12}.$$
23. 若对随机变量 $\xi$, 有 $E|\xi|^r < \infty (r > 0)$. 求证对任意 $\epsilon > 0$, 有 $P(|\xi| > \epsilon) \le E|\xi|^r/\epsilon^r$.
证　记随机变量 $\xi$ 的分布函数为 $F(x)$. 则
$$P(|\xi| > \epsilon) \le \int_{|x|>\epsilon} \frac{|x|^r}{\epsilon^r} dF(x) \le \int \frac{|x|^r}{\epsilon^r} dF(x) = \frac{E|\xi|^r}{\epsilon^r}.$$
24. 设 $f(x)(x \ge 0)$ 是单调非降函数，且 $f(x) > 0$. 对随机变量 $\xi$, 若 $Ef(|\xi|) < +\infty$, 求证：对任意 $x > 0$, 有 $P(|\xi| \ge x) \le Ef(|\xi|)^r/f(x)$.
证　记随机变量 $\xi$ 的分布函数为 $F(x)$. 对任给 $x > 0$,
$$P(|\xi| > x) \le \int_{|u|>x} \frac{f(|u|)}{f(x)} dF(u) \le \int \frac{f(|u|)}{f(x)} dF(u) = \frac{Ef(|\xi|)}{f(x)}.$$
25. 设 $\xi$ 只取值于 $[a, b]$, 求证 $Var\xi \le (b-a)^2/4$.
解　由于 $a \le \xi \le b$, 故 $|\xi - \frac{a+b}{2}| \le \frac{b-a}{2}$. 又由方差性质，
$$Var\xi = E(\xi - E\xi)^2 \le E(\xi - \frac{a+b}{2})^2 \le \frac{(b-a)^2}{4}.$$
26. 设 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 相互独立，$Var\xi_i = \sigma_i^2$, 试找“权 ” $a_1, \ldots, a_n$(它们满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$), 使 $\sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ 的方差最小.
解　由于 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 相互独立，则 $Var \sum_{i=1}^n a_i\xi_i = \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2$. 引入函数
$$G(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \lambda(\sum_{i=1}^n a_i - 1).$$

求偏导得，$\begin{cases} 2a_i\sigma_i^2 - \lambda_i = 0, i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n a_i = 1 \end{cases}$

解得 $\lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i^2}, a_k = \frac{1/\sigma_k^2}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i^2}, k = 1, \dots, n.$

故“权”取 $a_k = \frac{1/\sigma_k^2}{\sum_{i=1}^n 1/\sigma_i^2}, k = 1, \dots, n$ 时，$\sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ 的方差最小.

27. 在汽车保险业务中，汽车损坏索赔金额 B 依赖于损坏程度，现假设 B 在区间 $0 \le x < L$ 内为连续型随机变量，具有密度函数

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0 \le x < L. \end{cases}$$

而在点 $x = L$ 处有一个跳跃 $e^{-\lambda L}$, 即有 $P(B = L) = e^{-\lambda L}$, 并且最大索赔金额 B 不超过 L. 另外，汽车损坏的概率为 0.10, 汽车未损坏的概率为 0.90. 按求保险公司理赔量 $X$ 的数学期望和方差.

解记 A= “汽车损坏”. $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \le x < L; \\ 1, & x \ge L. \end{cases}$$

因而

$$EX = E(X|A) \cdot P(A) + E(X|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0.01 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$
$$= 0.01(\int_0^L x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx + e^{-\lambda L} \cdot L) = \frac{1 - e^{-\lambda L}}{100\lambda}.$$

$$EX^2 = E(X^2|A) \cdot P(A) + E(X^2|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = 0.01 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$$
$$= 0.01(\int_0^L x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx + e^{-\lambda L} \cdot L^2) = 0.02 \int_0^L x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1 - e^{-\lambda L} - \lambda L e^{-\lambda L}}{50\lambda^2}.$$

故

$$VarX = EX_i^2 - (EX_i)^2 = \frac{3 - 2e^{-\lambda L} - e^{-2\lambda L} - \lambda L e^{-\lambda L}}{10000\lambda^2}.$$

28. 一家财产保险公司承保 160 份建筑火险，相应的最高赔款及保单数如下表所示：

| 类别 $k$ | 最大赔款 $L_k$ | 保单数 $n_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 80 |
| 2 | 20 | 35 |
| 3 | 30 | 25 |
| 4 | 50 | 15 |
| 5 | 100 | 5 |

假设每一建筑发生火灾的概率都为 0.04, 各建筑物发生火灾的事件相互独立，且第 $k$ 类火险的索赔金额服从 $(0, L_k)$ 上的均匀分布．记 $S$ 为总赔付额，求 $S$ 的数学期望和方差.

解　记 A=" 建筑发生火灾 ", 第 $i$ 张保单的索赔金额为 $X_i, i = 1, 2, \ldots, 160$. 则 $S = \sum_{i=1}^{160} X_i$. 由全数学期望

$$ES = \sum_{i=1}^{160} EX_i = \sum_{i=1}^{160}(E(X_i|A)\cdot P(A) + E(X_i|\overline{A})\cdot P(\overline{A}))$$
$$= \sum_{i=1}^{5} n_k \cdot \frac{L_k}{2} p_k = 70000.$$

$$VarS = \sum_{i=1}^{160} VarX_i = \sum_{i=1}^{160}(E(X_i^2|A)\cdot P(A) - (E(X_i|A)\cdot P(A))^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{5}(n_k \cdot \frac{L_k^2}{3} p_k - n_k \cdot (\frac{L_k}{2})^2 p_k^2) = 1.7\times 10^9.$$

29. 求下列随机变量的数学期望和方差.

(1)$\xi$ 服从自由度为 $n$ 的 $\chi^2$ 分布；

(2)$\xi$ 服从自由度为 $n$ 的 $t$ 分布；

(3)$\xi$ 服从 $F(m,n)$ 分布.

解　(1) 可记 $\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, 其中 $X_1, \ldots, X_n$ 为独立同分布且服从 $N(0,1)$. 故 $EX_1^2 = 1$,

$$EX_1^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3.$$

$DX_1^2 = EX_1^4 - (EX_1^2)^2 = 2$, 故 $E\xi = n, Var\xi = \Sigma_{i=1}^{n} Var\xi_i = 2n.$

(2) $n>1$ 时， $E\xi=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot(1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}dx=0$; $n>2$ 时，

$$\begin{aligned}E\xi^2&=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot(1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}dx \qquad (t=\frac{1}{1+x^2/n})\\&=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot 2\int_0^1 t^{n/2-2}(1-t)^{1/2}dt\\&=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot 2\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\frac{n+1}{2}}=\frac{n}{n-2}.\end{aligned}$$

故 $Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{n}{n-2},\quad n>2.$

(3) 当 $k_2>2$ 时，

$$\begin{aligned}E\xi&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot k_1^{k_1/2}k_2^{k_2/2}\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x^{k_1/2}-1}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}}dx \qquad (t=\frac{k_1x}{k_1x+k_2})\\&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot\frac{k_2}{k_1}\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-2}dt\\&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot\frac{k_2}{k_1}\frac{\Gamma(\frac{k_1}{2}+1)\Gamma(\frac{k_2}{2}-1)}{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}=\frac{k_2}{k_2-2}.\end{aligned}$$

当 $k_2>4$ 时，

$$\begin{aligned}E\xi^2&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot k_1^{k_1/2}k_2^{k_2/2}\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x^{k_1/2}-1}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}}dx \qquad (t=\frac{k_1x}{k_1x+k_2})\\&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot(\frac{k_2}{k_1})^2\int_0^1 t^{\frac{k_1}{2}+1}(1-t)^{\frac{k_2}{2}-3}dt\\&=\frac{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}{\Gamma(\frac{k_1}{2})\Gamma(\frac{k_2}{2})}\cdot(\frac{k_2}{k_1})^2\frac{\Gamma(\frac{k_1}{2}+2)\Gamma(\frac{k_2}{2}-3)}{\Gamma(\frac{k_1+k_2}{2})}=\frac{(k_1+2)k_2^2}{k_1(k_2-2)(k_2-4)}.\end{aligned}$$

故 $Var\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)},\quad k_2>4.$

30. 设二维随机向量 $\xi$ 的分布密度如下，求协方差矩阵.

$$(1)p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1;\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$(1)p(x,y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x<1,0<y<1;\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解 (1)

$$E\xi=\int_0^1\int_0^1 x(2-x-y)dxdy=\int_0^1(\frac{3}{2}x-x^2)dx=\frac{5}{12},$$

$$E\eta=\int_0^1\int_0^1 y(2-x-y)dxdy=\frac{5}{12},$$

$$E\xi^2=\int_0^1\int_0^1 x^2(2-x-y)dxdy=\int_0^1(\frac{3}{2}x^2-x^3)dx=\frac{1}{4},$$
$$E\eta^2=\int_0^1\int_0^1 y^2(2-x-y)dxdy=\frac{1}{4},$$
$$E\xi\eta=\int_0^1\int_0^1 xy(2-x-y)dxdy=\int_0^1(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x^2)dx=\frac{1}{6}.$$

故 $Cov(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=-\frac{1}{144}, D\xi=D\eta=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{11}{144}$, 因而协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} 11/144 & -1/144 \\ -1/144 & 11/144 \end{pmatrix}$$

(2)

$$E\xi=\int_0^1\int_0^1 x\cdot 6xy^2dxdy=\frac{2}{3}, E\eta=\int_0^1\int_0^1 y\cdot 6xy^2dxdy=\frac{3}{4},$$
$$E\xi^2=\int_0^1\int_0^1 x^2\cdot 6xy^2dxdy=\frac{1}{2}, E\eta^2=\int_0^1\int_0^1 y^2\cdot 6xy^2dxdy=\frac{3}{5},$$
$$E\xi\eta=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot 6xy^2dxdy=\frac{1}{2}.$$

故 $Cov(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=0, D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{1}{18}, D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=\frac{3}{80}$, 因而协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1/18 & 0 \\ 0 & 3/80 \end{pmatrix}$$

31. 设 $U=a\xi+b, V=c\eta+d, a,b,c,d$ 为常数， $a,c$ 同号，求证 $U,V$ 的相关系数等于 $\xi,\eta$ 的相关系数.

解　由协方差性质，及 $a,c$ 同号.

$$Cov(U,V)=acCov(\xi,\eta), DU=\sqrt{a^2}D\xi, DV=\sqrt{c^2}D\eta,$$

故 $\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU\cdot DV}}=\frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}}=\rho_{\xi\eta}$.

32. 设 $\xi,\eta$ 相互独立，具有相同分布 $N(a,\sigma^2)$, 求 $p\xi+q\eta$ 与 $u\xi+v\eta$ 的相关系数.

解　由协方差性质，

$$Cov(p\xi+q\eta,u\xi+v\eta)=puD\xi+qvD\eta=(pu+qv)\sigma^2,$$

$$D(p\xi+q\eta)=p^2D\xi+q^2D\eta=(p^2+q^2)\sigma^2, D(u\xi+v\eta)=u^2D\xi+v^2D\eta=(u^2+v^2)\sigma^2.$$

故所求为

$$\rho=\frac{Cov(p\xi+q\eta,u\xi+v\eta)}{\sqrt{D(p\xi+q\eta)\cdot D(u\xi+v\eta)}}=\frac{pu+qv}{\sqrt{(p^2+q^2)(u^2+v^2)}}.$$

33. 设随机变量 $\xi_1,\ldots,\xi_{n+m}(n>m)$ 相互独立，有相同分布，且方差存在，求 $S=\xi_1+\ldots+\xi_n$ 与 $T=\xi_{m+1}+\ldots+\xi_{n+m}$ 之间的相关系数.
解　记 $E\xi_1=\mu, D\xi_1=\sigma^2$, 则

$$Cov(S,T)=Cov(\xi_1+\ldots+\xi_n,\xi_{m+1}+\ldots+\xi_{n+m})=D(\xi_{m+1}+\ldots+D\xi_{n+m})=(n-m)\sigma^2,$$

$$DS=\sum_{k=1}^{n}D\xi_k=n\sigma^2, DT=\sum_{k=m+1}^{m+n}D\xi_k=n\sigma^2$$

故所求为

$$\rho=\frac{Cov(S,T)}{\sqrt{DS\cdot DT}}=\frac{n-m}{n}.$$

34. 设随机变量 $\xi_1,\ldots,\xi_{2n}$ 的数学期望都为 0, 方差都为 1, 两两间的相关系数都为 $\rho$, 求 $\eta=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 与 $\zeta=\sum_{j=n+1}^{2n}\xi_j$ 之间的相关系数.
解由协方差性质及定义

$$Cov(\eta,\zeta)=Cov(\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\sum_{j=n+1}^{2n}\xi_j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{2n}Cov(\xi_k,\xi_j)=n^2\rho,$$

$$D\eta=D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=\sum_{k=1}^{n}D\xi_k+\Sigma_{k\neq j}Cov(\xi_k,\xi_j)=n+(n^2-n)\rho,$$

$$D\zeta=D(\sum_{k=n+1}^{2n}\xi_k)=\sum_{k=n+1}^{2n}D\xi_k+\Sigma_{k\neq j}Cov(\xi_k,\xi_j)=n+(n^2-n)\rho.$$

故 $\eta$ 与 $\zeta$ 之间的相关系数为

$$\rho=\frac{Cov(\eta,\zeta)}{\sqrt{D\eta\cdot D\zeta}}=\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}.$$

35. 设 $(\xi,\eta)$ 服从圆 $x^2+y^2\le 1$ 上的均匀分布，求证 $\xi,\eta$ 不相关，但它们不独立.
解 $(\xi,\eta)$ 的联合密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1;\\ 0, & x^2+y^2>1.\end{cases}$ 故

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}1/\pi dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & |x|\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}1/\pi dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & |y|\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因而 $p(x,y)\neq p_\xi(x)p_\eta(y)$, 即知它们不独立.
而 $E\xi=E\eta=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}=0$, $E\xi\eta=\int\int_{x^2+y^2\le 1}\frac{xy}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{\pi}dy=0$. 得

$Cov(\xi,\eta)=0$, 即知它们不相关.

36. 设 $\xi$ 的密度函数是偶函数，且 $E\xi^2<\infty$. 求证： $|\xi|$ 与 $\xi$ 不相关，但它们不独立.

证设 $\xi$ 的密度函数为 $p(x)$, 且 $p(x)=p(-x)$, $-\infty<x<+\infty$.

则 $E\xi=\int_{-\infty} xp(x)dx=0, E\xi|\xi|=\int_{-\infty} x|x|p(x)dx=0$. 故 $|\xi|$ 与 $\xi$ 不相关.

假设 $|\xi|$ 与 $\xi$ 独立. 由于 $E\xi^2<\infty$, 因而存在正数 $M$, 使得 $0<P(|\xi|<M)<1$, 再由对称性知： $0<P(\xi<M)<1$. 根据独立性有

$$P(|\xi|<M)=P(|\xi|<M,\xi<M)=P(|\xi|<M)P(\xi<M).$$

则必有 $P(|\xi|<M)=0$ 或 $=P(\xi<M)=1$. 相互矛盾，因而假设错误， $|\xi|$ 与 $\xi$ 不独立.

37. 设 $\xi,\eta$ 都是只取两个值的随机变量，求证：如果它们不相关，则它们独立.

证　不妨设 $\xi,\eta$ 的分布分别为

| $\xi$ | a | b |
|---|---|---|
| p | $p_1$ | $q_1$ |

| $\xi$ | c | d |
|---|---|---|
| p | $p_2$ | $q_2$ |

记 $\xi^*=\xi-b, \eta^*=\eta-d$. 由 $\xi,\eta$ 不相关，知 $E\xi\eta=E\xi E\eta$. 因而 $E\xi^*\eta^*=E(\xi-b)(\eta-d)=E(\xi-b)E(\eta-d)=E\xi^*E\eta^*$.

直接计算易得

$$E\xi^*\eta^*=(a-b)(c-d)P(\xi=a,\eta=c),$$
$$E\xi^*E\eta^*=(a-b)(c-d)P(\xi=a)P(\eta=c).$$

即有 $P(\xi=a,\eta=c)=P(\xi=a)P(\eta=c)$, 同理可得另外三个情形的等式成立. 故 $\xi$ 与 $\eta$ 相互独立.

38. 设 $\xi,\eta$ 相互独立，且方差存在，求证：

$$Var(\xi\eta)=Var\xi\cdot Var\eta+(E\xi)^2\cdot Var\eta+(E\eta)^2\cdot Var\xi.$$

证　由于 $\xi,\eta$ 相互独立，

$$\begin{aligned}&Var(\xi\eta)=E\xi^2\eta^2-(E\xi\eta)^2\\&=Var\xi\cdot Var\eta+(E\xi)^2\cdot E\eta^2+(E\eta)^2\cdot E\xi^2-2(E\xi E\eta)^2\\&=Var\xi\cdot Var\eta+(E\xi)^2\cdot Var\eta+(E\eta)^2\cdot Var\xi.\end{aligned}$$

39. 设随机变量中任意两个的相关系数都是 $\rho$, 求证 $\rho\geq-1/(n-1)$.

证　记 $\xi^*$ 为 $\xi_k$ 的标准化变量. 易知对 $k\neq j$, $Cov(\xi_k^*,\xi_j^*)=\frac{Cov(\xi_k,\xi_j)}{\sqrt{D\xi_k\cdot D\xi_k}}=\rho$.

故

$$D(\sum_{k=1}^n\xi_k)=\sum_{k=1}^n D\xi_k+\sum_{k\neq l}Cov(\xi_k^*,\xi_j^*)=n+(n^2-n)\rho\geq0.$$

即得 $\rho\geq-1/(n-1)$.

40. 求下列分布的特征函数：

(1) $P(\xi=k)=pq^{k-1}, k=1,2,\ldots,q=1-p$;
(2) $\xi$ 服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布；
(3) $\xi$ 服从参数为 $\lambda$ 指数分布；
(4) $\Gamma$ 的分布为 $G(\lambda,r)$;
(5) $\xi$ 的密度为 $p(x)=\begin{cases}(2+x)/4,, & -2\le x<0;\\ (2-x)/4, & 0\le x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$
(6)$\eta=a\xi+b$, 其中 $\xi$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布；
(7)$\eta=\ln\xi$, 其中 $\xi$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.
解 (1) $\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikt}\cdot pq^{k-1}=\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qe^{it})^k=\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$;
(2) $\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{ixt}dx=\frac{\sin at}{at}$;
(3)

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=Ee^{i\xi t}=\int_0^{\infty}e^{ixt}\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx\\&=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cos txdx+\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\sin txdx=\lambda(I_1+iI_2).\end{aligned}$$

由分部积分法

$$\begin{cases}I_1=\frac{\lambda}{t}I_2\\ I_2=\frac{1}{t}-\frac{\lambda}{t}I_1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}I_1=\frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}\\ I_2=\frac{t}{\lambda^2+t^2}\end{cases}$$

故 $\varphi(t)=\frac{\lambda(\lambda+it)}{\lambda^2+t^2}=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$.
(4) $\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=\int_0^{\infty}e^{ixt}\cdot\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty}x^{r-1}e^{(it-\lambda)x}dx$.
由复变函数知识，对复数 $z=b+ic,b>0$, 有 $\int_0^{\infty}e^{-zx}x^{r-1}dx=\frac{\Gamma(r)}{z^r}$, 故
$\varphi(t)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot\frac{\Gamma(r)}{(\lambda-it)^r}=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$.
(5)

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=Ee^{i\xi t}=\int_{-2}^{0}e^{ixt}\cdot\frac{2+x}{4}dx+\int_0^2e^{ixt}\cdot\frac{2-x}{4}dx\\&=\int_0^2(1-\frac{x}{2})\cos xtdx=\frac{\sin 2t}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin 2t}{t}+\frac{\cos 2t-1}{t^2}\right)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.\end{aligned}$$

(6) 由于 $\varphi_\xi(t)=\frac{e^{it}-1}{it}$, 故 $\varphi_\eta(t)=Ee^{i(a\xi+b)t}=e^{ibt}\varphi_\xi(at)=\frac{e^{i(a+b)t}-e^{ibt}}{it}$.

(7) 由复变函数知识，对复数 $z=b+ic, b>0$, 有 $\int_0^\infty e^{-zx}x^{r-1}dx=\frac{\Gamma(r)}{z^r}$, 故

$$\varphi_\eta(t)=Ee^{it\ln\xi}=\int_0^1 e^{it\ln x}dx=\int_0^\infty e^{-(it+1)y}dy=\frac{1}{1+it}.$$

41. 若分布函数满足 $F(x)=1-F(-x-0)$, 则称它是对称的. 求证分布函数对称的充要条件是它的特征函数是实的偶函数.
证充分性由 $\xi$ 的特征函数是实的偶函数及特征函数性质，有

$$\varphi_\xi(t)=\varphi_\xi(-t)=\varphi_{-\xi}(t).$$

故 $\xi$ 与 $-\xi$ 有相同的分布函数. 因而

$$F_\xi(x)=F_{-\xi}(x)=P(-\xi\le x)=1-P(\xi<-x)=1-F_\xi(-x-0).$$

即 $\xi$ 的布函数是对称的.
必要性由 $F_\xi(x)=1-F_\xi(-x-0)$, 得

$$F_\xi(x)=1-F_\xi(-x-0)==1-P(\xi<-x)=P(-\xi\le x)=F_{-\xi}(x).$$

故 $\xi$ 与 $-\xi$ 有相同的分布函数. 因而有相同的特征函数，由特征函数性质，有

$$\varphi_\xi(t)=\varphi_{-\xi}(t)=\varphi_\xi(-t).$$

因而 $\xi$ 的特征函数是实的偶函数.
42. 设 $\varphi(t)$ 是特征函数，求证下列函数也是特征函数： (1) $[\varphi(t)]^n$, ($n$ 为正整数);
(2) $\varphi(t)\frac{\sin at}{at}, (a>0)$.
解 (1) 设 $\xi_1,\dots,\xi_n$ 独立同分布，且特征函数为 $\varphi(t)$. 则由性质， $\sum_{k=1}^n$ 的特征函数为 $[\varphi(t)]^n$, 故 (1) 是特征函数.
(2) 设 $\xi$ 特征函数为 $\varphi(t)$. 而 $\eta$ 服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布，且与 $\xi$ 相互独立. 由特征函数性质， $\xi+\eta$ 的特征函数为

$$\varphi(t)\varphi_\eta(t)=\varphi(t)\frac{\sin at}{at}.$$

故 (2) 是特征函数.
43. 证明下列函数是特征函数，并找出相应的分布.
(1)$\cos^2 t$; (2) $(1+it)^{-1}$; (3) $(\frac{\sin at}{at})^2$;
(4) $(2e^{-it}-1)^{-1}$; (5) $(1+t^2)^{-1}$.
证 (1) 取 $\xi$ 的分布列为 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.
则 $\varphi(t)=Ee^{i\xi t}=\frac{e^{-2it}+e^{2it}}{4}+\frac{1}{2}=\cos^2 t$.

故 $\cos^2 t$ 是特征函数，且其分布列为 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

(2) 设 $\xi$ 为参数是 1 的指数分布．则 $\varphi_\xi(t) = (1-it)^{-1}$.
且 $\eta = -\xi$ 的特征函数为 $\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = (1+it)^{-1}$.
故 $(1+it)^{-1}$ 是特征函数，且其密度函数为

$$p_\eta(x) = p_\xi(-x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

(3) 设 $\xi_1, \xi_2$ 独立同分布，且服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布．则由特征函数性质， $\xi_1+\xi_2$ 的特征函数为

$$\varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) = (\frac{e^{it}-e^{-it}}{2it})^2 = (\frac{\sin t}{t})^2.$$

且由卷积公式，其密度函数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(z-x)dx = \begin{cases} \int_0^z dx = z, & 0 < z \le 1; \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z, & 1 < z \le 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $(\frac{\sin t}{t})^2$ 是特征函数，且其密度函数为 $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(z-x)dx = \begin{cases} z, & 0 < z \le 1; \\ 2-z, & 1 < z \le 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(4) 设 $\xi$ 为服从参数为 $p=1/2$ 的几何分布．则 $\xi$ 的特征函数为

$$\varphi(t) = \frac{\frac{1}{2}e^{it}}{1-\frac{1}{2}e^{it}} = \frac{1}{2e^{-it}-1}.$$

故 $\frac{1}{2e^{-it}-1}$ 是特征函数，且其分布列为 $P(\xi=k) = (\frac{1}{2})^k, k=1,2,\ldots$.
(5) 设 $\xi$ 为参数是 1 的指数分布， $\eta$ 与 $\xi$ 相互独立，且 $\eta$ 与 $-\xi$ 具有相同的分布．则
$\varphi_\xi(t) = (1-it)^{-1}, \varphi_\eta(t) = \varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = (1+it)^{-1}$.
因而 $\xi+\eta$ 的特征函数为

$$\varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t) = (1-it)^{-1}(1+it)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}.$$

由卷积公式，其密度函数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(z-x)dx = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-x}\cdot e^{z-x}dx = e^z/2, & z\le 0; \\ \int_z^\infty e^{-x}\cdot e^{z-x}dx = e^{-z}/2, & z>0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $\frac{1}{1+t^2}$ 是特征函数，且其密度函数为 $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(z-x)dx = \begin{cases} e^z/2, & z\le 0; \\ e^{-z}/2, & z>0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

44. 试举一个满足及但不是特征函数的例子.

解　取 $\varphi(t)=\begin{cases} 1-t^2, & |t|<1; \\ 0, & |t|\ge 1. \end{cases}$ 显然 $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}, |\varphi(t)|\le\varphi(0)=1.$

下面验证 $\varphi(t)$ 不是非负定的. 考察 $n=3$ 的复二次型

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varphi(t_j-t_k)\lambda_j\overline{\lambda_k},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是任意复数， $t_1,t_2$ 是任意实数. 特别取 $0<t_1<1, 0<t_2<1, t_3=\frac{t_1+t_2}{2}$, 选取其三阶主子式.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(t_1-t_2) & \varphi(t_1-t_3) \\ \varphi(t_2-t_1) & 1 & \varphi(t_2-t_3) \\ \varphi(t_3-t_1) & \varphi(t_3-t_2) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-(t_1-t_2)^2 & 1-(t_1-t_3)^2 \\ 1-(t_2-t_1)^2 & 1 & 1-(t_2-t_3)^2 \\ 1-(t_3-t_1)^2 & 1-(t_3-t_2)^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-(t_1-t_2)^2 & 1-(t_1-t_2)^2/4 \\ 1-(t_2-t_1)^2 & 1 & 1-(t_2-t_1)^2/4 \\ 1-(t_2-t_1)^2/4 & 1-(t_1-t_2)^2/4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-4t & 1-t \\ 1-4t & 1 & 1-t \\ 1-t & 1-t & 1 \end{vmatrix} = -8t^3 \le 0$$

其中 $t = \frac{(t_1 - t_2)}{4}$. 故 $\varphi(t)$ 不是非负定的. 因此 $\varphi(t)$ 不是特征函数.

45. $\varphi(t) = (1 - i|t|)^{-1}$ 是特征函数吗？为什么？

解　$\varphi(\pm t) = (1 - i|t|)^{-1} = \frac{1+i|t|}{1+t^2}, \overline{\varphi(t)} = \frac{1-i|t|}{1+t^2}$.

故 $\varphi(-t) \ne \overline{\varphi(t)}$. 因而 $\varphi(t)$ 不是特征函数.

46. 证明 $\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|/a, & |t| < a; \\ 0, & |t| \ge a. \end{cases}$ $(a > 0)$ 是特征函数，并求出对应的分布.

证　由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a} e^{-itx}(1 - \frac{|t|}{a})dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a} \cos tx(1 - \frac{|t|}{a})dt = \frac{1 - \cos ax}{\pi a x^2}.$$

故设 $\xi$ 的密度函数为 $p(x) = \frac{1-\cos ax}{\pi a x^2}, -\infty < x < +\infty$, 则 $\xi$ 的特征函数为 $\varphi(t)$, 得证.

47. 证明同时满足下列各等式的连续函数是特征函数：

(1)$\varphi(t) = \varphi(-t)$; (2)$\varphi(t + 2a) = \varphi(t)$; (3)$\varphi(t) = (a - t)/a(0 \le t \le a)$.

48. 设 $\xi$ 为取整数值的随机变量，分布列为 $P(\xi = k) = p_k, k = 0, \pm 1, \ldots$, 特征函数为 $f(t)$, 求证：　$p_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(t)dt$.

证　利用 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\delta t}dt = \begin{cases} 2\pi, & \delta = 0; \\ 0, & \delta \ne 0. \end{cases}$, 故

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ilt}p_l)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-l)x}dt)p_l = p_k.$$

结论成立.

49. 设 $(\xi, \eta) \sim N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$, 求 $\zeta = \xi + \eta$ 的分布.

解　由于 $(\xi, \eta) \sim N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$, 故 $\zeta = \xi + \eta$ 也服从正态分布，且

$$E\zeta = E\xi + E\eta = a + b, Var\xi = Var\xi + Var\eta = 2Cov(\xi, \eta) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2.$$

故 $\zeta \sim N(a + b, \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2)$.

50. 设 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 相互独立，都服从 $N(a, \sigma^2)$,

(1) 求 $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)'$ 的分布，写出数学期望及协方差矩阵；
(2) 求 $\overline{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n$ 的分布.
解　$\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)'$ 的联合密度函数为

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x_k-a)^2}{2\sigma^2}\}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}\exp\{-\frac{\sum_{k=1}^n(x_k-a)^2}{2\sigma^2}\}$$

$$E\xi=(E\xi_1,\dots,E\xi_n)'=a(1,\dots,1)',Var\xi=(Cov(\xi_i,\xi_j))_{n\times n}=\sigma^2 I_n;$$

(2) $E\overline{\xi}=a,Var\overline{\xi}=\frac{\sigma^2}{n}$, 故 $\overline{\xi}\sim N(a,\frac{\sigma^2}{n})$.
51. 证明：设多元正态分布各分量相互独立，同方差，则经正交线性变换后的多元正态分布各分量也相互独立，同方差.
证　不妨设 $\xi=(\mathbf{\xi_1},\dots,\mathbf{\xi_n})'\sim\mathbf{N}(\mathbf{a},\sigma^2\mathbf{I_n})$, $C$ 为一正交矩阵. 记 $\eta=C\xi$, 则由于 $C\sigma^2I_nC'=\sigma^2I_n$. 故 $\eta\sim N(C\mathbf{a},\sigma^2\mathbf{I_n})$, 因而其各分量也相互独立，同方差.
52. 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)'\sim\mathbf{N}(\mathbf{a},\mathbf{B})$, 其中 $\mathbf{a}=(\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3})'$, $\mathbf{B}=(\mathbf{b_{ij}})_{3\times3}$. 作变换
$\begin{cases}\eta_1=\xi_1/2-\xi_2+\xi_3/2\\ \eta_2=-\xi_1/2-\xi_3/2\end{cases}$, 求 $\eta=(\eta_1,\eta_2)'$ 的分布.

解　由于 $\eta=\mathbf{C}\xi$, 其中 $C=\begin{pmatrix}1/2 & -1 & 1/2\\ -1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$. 故 $\eta=(\eta_1,\eta_2)'\sim\mathbf{N}(\mathbf{Ca},\mathbf{CBC'})$.

53. 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2)'\sim\mathbf{N}(\mathbf{a},\mathbf{B})$ 为 $2n$ 维正态变量，$\xi_1,\xi_2$ 都是 $n$ 维向量，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$
其中 $B_{22}=B_{11},B_{12}=B_{21}$, 求证 $\xi_1+\xi_2$ 与 $\xi_1-\xi_2$ 相互独立.

解　记 $\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1-\xi_2$, 即 $\eta=\mathbf{C}\xi$, 其中 $C=\begin{pmatrix}I_n & I_n\\ I_n & -I_n\end{pmatrix}$. 因而 $\eta=(\eta_1,\eta_2)'$ 的协方差阵为

$$\begin{pmatrix}I_n & I_n\\ I_n & -I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & I_n\\ I_n & -I_n\end{pmatrix}=4^n\begin{pmatrix}B_{11}+B_{12} & 0\\ 0 & B_{11}-B_{12}\end{pmatrix}$$

故 $\xi_1+\xi_2$ 与 $\xi_1-\xi_2$ 相互独立.
54. $\xi=(\xi_1,\xi_2)'\sim\mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{I})$, 这里 $I$ 是二阶单位阵. 求给定 $\xi_1+\xi_2=x_1+x_2$ 时 $\xi_1$ 的条件分布.

解　记 $\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1$. 则 $(\eta_1,\eta_2)'\sim N(0,B)$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由 $\xi=(\xi_1,\xi_2)'\sim \mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{I})$, 易得 $\xi_1+\xi_2\sim N(0,2)$, 故给定 $\xi_1+\xi_2=x_1+x_2$ 时 $\xi_1$ 的条件密度函数为

$$\frac{\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1+x_2,x)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x \end{pmatrix}\right\}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\{-\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\{-(x-\frac{x_1+x_2}{2})^2\},$$

因而给定 $\xi_1+\xi_2=x_1+x_2$ 时 $\xi_1$ 的条件分布为 $N((x_1+x_2)/2,1/2)$.

55. $\xi=(\xi_1,\xi_2)'\sim \mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{B})$, 其中 $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 试找到正交变换 $U$ 及 $d_1,d_2$, 使 $\eta=U\xi\sim N(a_1,B_1)$, 其中 $B_1=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.

解　利用线性代数知识易得 $UBU'=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 这里其中正交变换 $U=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

即得所求为 $U=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $d_1=5,d_2=0$.

第四章极限定理

1. 下列分布函数列是否弱收敛于分布函数？

(1)$x < -1/n$ 时， $F_n(x) = 0$; $x \geq -1/n$ 时， $F_n(x) = 1$.

(2)$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -n; \\ (x+n)/2n, & -n \leq x < n; \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$

解 (1)$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$, 因而 $F_n(x)$ 弱收敛于分布函数.

(2)$F(x) = 1/2, -\infty < x < \infty$, 因而 $F_n(x)$ 不弱收敛于分布函数.

2. 设 $\xi_n$ 的分布列为 $P(\xi_n = 0) = 1 - 1/n, P(\xi_n = n) = 1/n, n = 1, 2, \ldots$. 求证相应的分布函数列收敛于分布函数，但 $E\xi_n$ 不收敛于相应分布的期望.

解 $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - 1/n, & 0 \leq x < n; \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$ 故 $F_n \to F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

而 $E\xi_n = 1$, 相应分布 $F(x)$ 的期望为 0. 因而 $E\xi_n$ 不收敛于相应分布的期望.

3. 设 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列，$\xi_n$ 的分布列为 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k / 2^k$.

求证 $\eta_n$ 的分布收敛于 [-1,1] 上的均匀分布.

解 $\{\xi_n\}$ 的特征函数为 $f_n(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$. 由于 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布随机变量序列，故 $\eta_n$ 的特征函数为

$$g_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f_k(\frac{t}{2^k}) = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{t}{2^k} = \frac{\sin t}{2^n \sin t/2^n}.$$

其极限为 $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \frac{\sin t}{t} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2t}$ , 为 [-1,1] 上的均匀分布的特征函数. 故 $\eta_n$ 的分布收敛于 [-1,1] 上的均匀分布.

4. 某计算机系统有 120 个终端.

(1) 每个终端有 5% 时间在使用，若各终端使用与否是相互独立的，求有 10 个或更多终端在使用的概率.

(2) 若每个终端有 20% 时间在使用，求解上述问题.

解 (1) 设这 120 个终端有 $S$ 个在同时使用，则 $S \sim B(120, 0.05)$. 由中心极限定理,

$$P(S \geq 10) = P\left(\frac{S - 120 \times 0.05}{\sqrt{120 \times 0.05 \times 0.95}} \geq \frac{10 - 120 \times 0.05}{\sqrt{120 \times 0.05 \times 0.95}}\right) \approx 1 - \Phi(1.675) = 0.047.$$

(2) $S \sim B(120, 0.20)$. 由中心极限定理，

$$P(S \geq 10) = P\left(\frac{S - 120 \times 0.2}{\sqrt{120 \times 0.2 \times 0.8}} \geq \frac{10 - 120 \times 0.2}{\sqrt{120 \times 0.2 \times 0.8}}\right) \approx \Phi(3.2) = 0.999.$$

5. 现有一大批种子，其中良种占 1/6. 在其中任取 6000 粒，问在这些种子中良种所占比例与 1/6 之差小于 1% 的概率是多少？

解 (1) 设 6000 粒种子中良种数为 $S$, $S \sim B(6000, 1/6)$. 由中心极限定理，

$$P(\left|\frac{S}{6000} - \frac{1}{6}\right| < 0.01) = P(\left|\frac{S - 6000 \times 1/6}{\sqrt{6000 \times 1/6 \times 5/6}}\right| < 0.01 \times \frac{6000}{\sqrt{6000 \times 1/6 \times 5/6}})$$
$$= 2\Phi(2.08) - 1 = 0.96.$$

6. 设某车间有 200 台同型机床，工作时每台车床 60% 的时间在开动，每台开动时耗电 1 千瓦. 问应供给该车间多少千瓦电力才能有 0.999 的把握保证正常生产？

解 设至少供给该车间 $x$ 千瓦. 记 $S$ 为该车间中车床的开动台数， $S \sim B(200, 0.6)$. 由题意， $P(S \leq x) \geq 0.999$. 由中心极限定理，

$$P(S \leq x) = P(\frac{S - 200 \times 0.6}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}} \leq \frac{x - 200 \times 0.6}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}})$$
$$= \Phi(\frac{x - 120}{4\sqrt{3}}) \geq 0.999.$$

查标准正态表得，只需 $\frac{x-120}{4\sqrt{3}} \geq 3.09$ ，故取 $x = 142$, 即至少供电 142 千瓦才能使该车间正常工作的概率不小于 0.999.

7. 一家保险公司有 10000 个同类型人参加某种事故保险，每人每年付 12 元保险费，在一年中一个人发生此种事故的概率为 0.006, 发生事故时该人可向保险公司领得 1000 元. 问： (1) 对该项保险保险公司亏本的概率有多大？

(2) 对该项保险保险公司一年的利润不少于 60000 元的概率有多大？

解 设这 10000 个人中有 $S$ 个人发生此种事故， $S \sim B(10000, 0.006)$. 由中心极限定理， (1)

$$P(1000S > 10000 \times 12) = P(\frac{S - 10000 \times 0.006}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times 0.994}} > \frac{120 - 10000 \times 0.006}{\sqrt{10000 \times 0.006 \times 0.994}})$$
$$\approx 1 - \Phi(7.769) \approx 0.$$

(2) $P(1000S \leq 10000 \times 12 - 60000) = P(\frac{S-10000\times0.006}{\sqrt{10000\times0.006\times0.994}} \leq 0) = 0.5.$

8. 一家火灾保险公司承保 160 幢房屋，最高保险金额有所不同，数值如下表所示：

| 最大保险金额 (万元) | 投保房屋数 |
|---|---|
| 10 | 80 |
| 20 | 35 |
| 30 | 25 |
| 50 | 15 |
| 100 | 5 |

假设： (1) 每幢房屋每年一次理陪概率为 0.04, 大于一次理陪概率为 0;
(2) 各幢房屋是否发生火灾相互独立;
(3) 如果理陪发生，理陪量从 0 到最高保险金额间的均匀分布.
记 N 为一年中理陪次数， S 为理陪总量,
a. 计算 N 的数学期望和方差;
b. 计算 S 的数学期望和方差;
c. 确定相对保证附加系数 $\theta$, 即 $\theta$=(每份保单保费收入 - 平均理陪量)/ 平均理陪量，以确保保险公司的保费收入大于理陪总量的概率等于 0.99.

解 a 显然 $N \sim B(160, 0.04)$, 因而 $EN = 6.4, VarN = 6.144$ ;
b 分别记这 160 幢房屋的理陪量为 $X_i, i = 1, 2, \ldots, 160$. 故 $S = \sum_{i=1}^{160} X_i$. 由于各幢房屋是否发生火灾相互独立，且理陪量是从 0 到最高保险金额间的均匀分布. 故由题意

$$ES = \sum_{i=1}^{160} EX_i = \sum_{k=1}^{5} n_k \frac{b_k}{2} q_k = 70,$$

$$VarS = \sum_{i=1}^{160} VarX_i = \sum_{k=1}^{5} n_k (\frac{b_k^2}{3} q_k - \frac{b_k^2}{4} q_k^2) = 1707.2.$$

c. 由题意，保险公司的保费收入大于理陪总量的概率为

$$P(160 \times \frac{70}{160}(1+\theta) > S) = P(S < 70(1+\theta))$$

要使 $P(S < 70(1+\theta)) = 0.99$, 由中心极限定理

$$P(S < 70(1+\theta)) = P\left(\frac{S-70}{\sqrt{1707.2}} < \frac{70\theta}{\sqrt{1707.2}}\right) \approx \Phi(\frac{70\theta}{\sqrt{1707.2}}) = 0.99$$

查正态分布表得 $\frac{70\theta}{\sqrt{1707.2}} = 2.33$ , 因而 $\theta = 1.375$.

9. 某保险公司开办 5 种人寿险，每种险别 (一旦受保人死亡) 的赔偿额 $b_k$ 及投保人数

$n_k$ 如下表所示：

| 类别 $k$ | 赔偿额 (万元)$b_k$ | 投保人数 $n_k$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 8000 |
| 2 | 2 | 3500 |
| 3 | 3 | 2500 |
| 4 | 5 | 1500 |
| 5 | 10 | 500 |

设死亡是相互独立的，其概率皆为 0.02. 保险公司为安全起见，对每位受保人寻再保险. 其机制如下：确定一个自留额，设为 2 万元；若某人的索赔在 2 万以下呒则由该保险公司偿付；若索赔金超过 2 万元，则超过部分由再保险公司偿付；再保险率为投保金额的 2.5%. 该保险公司 (相对于再保险公司而言，也称为分出公司) 希望它的全部费用 (即实际索赔总额 S+ 再保险费) 不超过 825 万，求实际费用突破此限额的概率.

10. 设 $\{\xi_n\}$ 独立同分布，其分布列分别为 (1)$[-a,a]$ 上的均匀分布； (2) 泊松分布. 记 $\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\xi_k-E\xi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}Var\xi_k}}$, 计算 $\eta_n$ 的特征函数，并求 $n\to\infty$ 时的极限，从而验证林德贝格勒维定理在这种情况成立.

证： (1) 由于 $\{\xi_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，都服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布. 故 $E\xi_n=0, Var\xi_n=\frac{a^2}{3}$, $\xi_n$ 特征函数为 $f_n(t)=\frac{e^{ita}-e^{-ita}}{2ita}=\frac{\sin at}{at}$. 再由特征函数性质， $\eta_n$ 的特征函数为

$$\prod_{k=1}^{n}f_k(\frac{t}{\sqrt{\frac{a^2}{3}}})=\frac{\sin\sqrt{3/n}t}{\sqrt{3/n}t}=(1-\frac{t^2}{2n}+0(\frac{1}{n}))^n\to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

为 $N(0,1)$ 的特征函数，由逆极限定理， $\eta_n$ 依分布收敛于 $N(0,1)$. 从而验证了林德贝格 - 勒维定理在这种情况成立.

(2) 由于 $\{\xi_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，都服从参数为 $\lambda$ 泊松分布. 故 $E\xi_n=\lambda, Var\xi_n=\lambda$, $\xi_n$ 特征函数为 $f_n(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$. 再由特征函数性质， $\eta_n$ 的特征函数为

$$\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-it\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{n\lambda}}}f_k(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}})\right)=e^{-i\sqrt{n\lambda}t}\cdot e^{n\lambda(e^{\frac{it}{\sqrt{n\lambda}}}-1)}=e^{(-\frac{t^2}{2}+0(1))}\to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

为 $N(0,1)$ 的特征函数，由逆极限定理， $\eta_n$ 依分布收敛于 $N(0,1)$. 从而验证了林德贝格 - 勒维定理在这种情况成立.

11. 用得莫佛拉普拉斯定理证明：在伯努里试验中，若 $0<p<1$, 则不管是 $k$ 多大的常数，总有

$$P(|\mu_n-np|<k)\to 0,\quad n\to\infty.$$

证　当 $n\to\infty$ 时,

$$P(|\mu_n-np|<k)=P\left(\left|\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\right|<\frac{k}{\sqrt{npq}}\right)$$
$$=2\Phi(\frac{k}{\sqrt{npq}})-1\to 2\Phi(0)-1=0.$$

12. 求证：泊松分布的标准化变量当参数 $\lambda\to\infty$ 时趋近标准正态分布．证设 $\xi$ 服从参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布，记 $\eta=\frac{\xi-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$. 则 $\eta_n$ 的特征函数为

$$f(t)=e^{-it\sqrt{\lambda}}\cdot e^{\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1)}.$$

因而当 $\lambda\to\infty$ 时,

$$f(t)=e^{(-\frac{t^2}{2}+0(1))}\to e^{-\frac{t^2}{2}},$$

为 $N(0,1)$ 的特征函数，由逆极限定理，当参数 $\lambda\to\infty$ 时 $\eta$ 趋近标准正态分布.

13. 求证：当 $n\to\infty$ 时，　$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\to\frac{1}{2}$.

证设 $\{\xi_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，且都服从参数为 $\lambda=1$ 泊松分布．故 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 服从参数为 $\lambda=n$ 泊松分布．由中心极限定理

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\sum_{k=1}^{n}P(S_n=k)=P(S_n\le n)$$
$$=P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}})\to\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

14. 设 $\{\xi_n\}$,$\{\eta_n\}$ 各自独立同分布，也相互独立．　$E\xi_n=0,Var\xi_n=1,\ P\{\eta=\pm1\}=1/2$. 求证：　$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k$ 的分布函数弱收敛于 $N(0,1)$.

证　由于 $\{\xi_n\}$,$\{\eta_n\}$ 各自独立同分布, 也相互独立. 故 $\{\xi_n\eta_n\}$ 独立同分布. 且 $E\{\xi_n\eta_n\}=E\xi_nE\eta_n=0,Var\xi_n\eta_n=E(\xi_n\eta_n)^2=1$. 根据林德贝格 - 勒维定理，$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k$ 的分布函数弱收敛于 $N(0,1)$.

15. 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列，都服从 $(0,\pi)$ 上的均匀分布．记 $\eta_n=A_n\cos\xi_n$, 其中 $A_n>0$ 且 $\frac{\sum_{k=1}^{n}A_k^3}{(\sum_{k=1}^{n}A_k^2)^{3/2}}\to 0(n\to\infty)$. 证明 $\{\eta_n\}$ 服从中心极限定理.

证

$$E\eta_k=EA_k\cos\xi_k=A_k\int_{k=0}^{\pi}\cos x\cdot\frac{1}{\pi}dx=0,$$

$$Var\eta_k=E\eta_k^2=EA_k^2\cos^2\xi_k=A_k\int_{k=0}^{\pi}\cos^2 x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{A_k^2}{2},$$

$$E|\eta_k|^3=EA_k^3\cos^3\xi_k=A_k^3\int_{k=0}^{\pi}|\cos^3 x|\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{4}{3}.$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{\sum_{k=1}^n E|\eta_k-E\eta_k|^3}{(\sum_{k=1}^n A_k^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sum_{k=1}^n A_k^3}{(\sum_{k=1}^n A_k^2)^{3/2}}\to 0.$$

因而满足李雅普诺夫定理，$\{\eta_n\}$ 服从中心极限定理.

16. 设 $\xi_n$ 服从柯西分布，其密度为 $p_n(x)=\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$. 求证： $\xi_n\to 0\quad(P)$.

证　当 $n\to\infty$ 时，

$$P(|\xi_n|<\epsilon)=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\arctan nx|_{-\epsilon}^{\epsilon}$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\arctan n\epsilon\to 1.$$

故 $\xi_n\to 0\quad(P)$.

17. 设 $\xi_n$ 独立同分布，密度为 $p(x)=\begin{cases}e^{-(x-a)}, & x>a;\\ 0, & x\le a.\end{cases}$ ，令 $\eta_n=\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ，求证： $\xi_n\to a\quad(P)$.

证　当 $n\to\infty$ 时，

$$P(|\eta_n-a|\ge\epsilon)=P(\eta_n\ge a+\epsilon)+P(\eta_n\le a-\epsilon)$$
$$=P(\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)\ge a+\epsilon)=\prod_{k=1}^n P(\xi_k\ge a+\epsilon)$$
$$=(\int_{a+\epsilon}^{\infty}e^{-(x-a)}dx)^n=e^{-n\epsilon}\to 0.$$

故 $\eta_n\to a\quad(P)$.

18. 求证：(1) 若 $\xi_n\to\xi\quad(P),\eta_n\to\eta\quad(P)$ , 则 $\xi_n\pm\eta_n\to\xi\pm\eta\quad(P)$;

(2) 若 $\xi_n\to\xi\quad(P),\eta_n\to\eta\quad(P)$, 则 $\xi_n\eta_n\to\xi\eta\quad(P)$;

(3) 若 $\xi_n\to\xi\quad(P),\eta_n\to c\quad(P)$, $c$ 为常数，　$\eta_n$ 与 $c$ 都不为 0, 则 $\xi_n/\eta_n\to\xi/c\quad(P)$;

(4) 设 $\xi_n\to\xi\quad(d),\eta_n\to c\quad(P),c$ 为常数, 则 $\xi_n+\eta_n\to\xi+c\quad(d)$; $\xi_n/\eta_n\to\xi/c\quad(d),(c\ne 0)$.

证　(1) 由

$$P(|(\xi_n\pm\eta_n)-(\xi\pm\eta)|\ge\epsilon)$$
$$\le P(|\xi_n-\xi|\ge\epsilon/2)+P(|\eta_n-\eta|\ge\epsilon/2)\to 0.$$

故 $\xi_n\pm\eta_n\to\xi\pm\eta\quad(P)$;

(2) 任给 $\delta>0$, 存在 $M>0$ 及正整数 $N$, 使当 $n\ge N$ 有

$$P(|\xi|\ge M/2)\le\delta/8, P(|\eta|\ge M/2)\le\delta/8,$$

$$P(|\xi_n-\xi|\ge M/2)\le\delta/8, P(|\xi_n-\xi|\ge\epsilon/2M)\le\delta/4,$$
$$P(|\eta_n-\eta|\ge\epsilon/2M)\le\delta/4.$$

故当 $n\ge N$ 时

$$\begin{aligned}&P(|\xi_n|\ge M)=P(|\xi|\ge M/2,|\xi_n|\ge M)+P(|\xi|<M/2,|\xi_n|\ge M)\\&\le P(|\xi|\ge M/2)+P(|\xi_n-\xi|\ge M/2)\le\delta/4.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}&P(|\xi_n\eta_n-\xi\eta|\ge\epsilon)\le P(|\xi_n||\eta_n-\eta|\ge\epsilon/2)+P(|\xi_n-\xi||\eta|\ge\epsilon/2)\\&\le P(|\xi_n|\ge M)+P(|\eta_n-\eta|\ge\epsilon/2M)+P(|\eta|\ge M/2)+P(|\xi_n-\xi|\ge\epsilon/2M)<\delta.\end{aligned}$$

故 $\xi_n\eta_n\to\xi\eta\quad(P)$;
(3) 由 (2) 只需证 $1/\eta\to1/c\quad(P)$.
当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&P(|1/\eta_n-1/c|\ge\epsilon)=P(\frac{|\eta_n-c|}{|\eta_n||c|}\ge\epsilon)\\&\le P(|\eta_n|\le|c|/2)+P(|\eta_n|>|c|/2,|\eta_n-c|\ge\epsilon\cdot|\eta_n||c|)\\&\le P(|\eta_n-c|\ge|c|/2)+P(|\eta_n|>|c|/2,|\eta_n-c|\ge\epsilon c^2/2)\to0.\end{aligned}$$

即证.
(4) 记 $\xi$ 的分布函数为 $F(x)$, 我们有

$$\begin{aligned}&P(\xi_n+\eta_n\le x)-P(\xi+\eta\le x)\\&\le P(\xi_n+\eta_n\le x,|\eta_n-c|\le\epsilon)+P(|\eta_n-c|\ge\epsilon)-F(x-c)\\&\le P(\xi_n\le x-c+\epsilon)-F(x-c)+P(|\eta_n-c|\ge\epsilon)\end{aligned}$$

另外,

$$\begin{aligned}&P(\xi_n+\eta_n\le x)-P(\xi+\eta\le x)\\&\ge P(\xi_n\le x-c-\epsilon)-F(x-c)-P(|\eta_n-c|\ge\epsilon)\end{aligned}$$

故由 $\xi_n\to\xi\quad(d)$, $\eta_n\to c\quad(P)$, 即得 $\xi_n+\eta_n\to\xi+c\quad(d)$.
不妨设 $c>0$, 任给 $0<\epsilon<c$,

$$\begin{aligned}&P(\xi_n/\eta_n\le x)-P(\xi/c\le x)\\&\le P(\xi_n/\eta_n\le x,|\eta_n-c|<\epsilon)+P(|\eta_n-c|\ge\epsilon)-P(\xi/c\le x)\\&\le P(\xi_n\le cx+c\epsilon)+P(|\eta_n-c|\ge\epsilon)-P(\xi\le cx),\end{aligned}$$

另外

$$
\begin{aligned}
&P(\xi_n/\eta_n \le x) - P(\xi/c \le x) \\
&\ge P(\xi_n \le cx - c\epsilon) - P(|\eta_n - c| \ge \epsilon) - P(\xi \le cx),
\end{aligned}
$$

故由 $\xi_n \to \xi \quad (d), \eta_n \to c \quad (P)$, 即得 $\xi_n/\eta_n \to \xi/c \quad (d)$.

19. 求证下列各独立的随机变量序列 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律.

(1)$P(\xi_k = \sqrt{\ln k}) = P(\xi_k = -\sqrt{\ln k}) = \frac{1}{2}$;

(2)$P(\xi_k = 2^k) = P(\xi_k = -2^k) = 2^{-(2k+1)}, P(\xi_k = 0) = 1 - 2^{-2k}$;

(3)$P(\xi_k = \frac{2^n}{n^2}) = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \ldots$;

(4)$P(\xi_k = n) = \frac{c}{n^2 \ln^2 n}, n = 2, 3, \ldots; c$ 为常数.

证　(1)$E\xi_k = 0, Var\xi_k = E\xi_k^2 = \frac{\ln k}{2}$. 故

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var\xi_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{2} \le \frac{\ln n}{2n} \to 0.$$

因而服从切贝雪夫大数定律.

(2)$E\xi_k = 0, Var\xi_k = 1$. 故

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} Var\xi_k = \frac{1}{n} \to 0.$$

因而服从切贝雪夫大数定律.

(3) 由于 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，且 $E\xi_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 故 $\{\xi_k\}$ 服从辛钦大数定律.

(4) 由于 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，且 $E\xi_k = c\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\ln n} = C_0 < \infty$. 故 $\{\xi_k\}$ 服从辛钦大数定律.

20. 设 $\{\xi_k\}$ 服从同一分布， $Var\xi_k < +\infty$, $\xi_k$ 与 $\xi_{k+1}$ 相关， $k = 1, 2, \ldots$, 但当 $|k-l| \ge 2$ 时， $\xi_k$ 与 $\xi_l$ 独立，求证这时大数定律成立.

证　由于当 $|k-l| \ge 2$ 时， $\xi_k$ 与 $\xi_l$ 独立， $Var\xi_k < +\infty$. 故当 $n \to \infty$ 时

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}Var\xi_k + \sum_{k\ne l}Cov(\xi_k, \xi_l)) \\
&= \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}Var\xi_k + 2\sum_{k=1}^{n-1}Cov(\xi_k, \xi_{k+1})) \\
&\le \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}Var\xi_k + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{Var\xi_k \cdot Var\xi_{k+1}}) \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

因而服从马尔科夫大数定律.

21. 设 $\{\xi_k\}$ 的方差有界： $Var\xi_k \le c$, 且当 $|i-j| \to +\infty$ 时， $Cov(\xi_i, \xi_j) \to 0$ . 则 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律. 试证明之.

证　对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $N$, 使当 $|i-j|>N$ 时， $|Cov(\xi_i,\xi_j)|<\epsilon$. 又对所有 $i,j$, 有 $|Cov(\xi_i,\xi_j)|<\sqrt{Var\xi_i\cdot Var\xi_j}\le c$. 因而当 $n>N$ 时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^n\xi_k)=\frac{1}{n^2}(\sum_{|i-j|>N}Cov(\xi_i,\xi_j)+\sum_{|i-j|\le N}Cov(\xi_i,\xi_j))\\&\le\frac{1}{n^2}\{[(2N+1)n-N(N+1)]c+[n^2-(2N+1)n+N(N+1)]\epsilon\}\\&=\epsilon+(\frac{2N+1}{n}-\frac{N(N+1)}{n^2})\cdot(c-\epsilon).\end{aligned}$$

由于 $\epsilon$ 可任意小，当 $n\to\infty$ 时上式右端也可任意小. 故 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律.

22. 在伯努里试验中，事件 A 出现的频率为 $p$, 令

$$\xi_k=\begin{cases}1, & \text{若在第 } k \text{ 次和第 } k+1 \text{ 次试验中 A 出现;}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求证 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律.

证　由题意， $\xi_k$ 的分布列为 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p^2 & p^2\end{pmatrix}$. 且当 $|k-l|\ge 2$ 时， $\xi_k$ 与 $\xi_l$ 独立. 根据题 20 即得证.

23. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，都服从 [0,1] 上的均匀分布，令 $\eta_n=(\prod_{k=1}^n\xi_k)$, 求证： $\eta_n\to c(P)$(常数), 并求出 $c$. 证　显然， $\{\ln\xi_n\}$ 独立同分布，且

$$E\ln\xi_n=\int_0^1\ln xdx=x\ln x|_0^1-1=-1.$$

由辛钦大数律得 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln\xi_k\longrightarrow-1(P)$. 取连续函数 $f(x)=e^x$, 由本章例 2 知

$$\left(\prod_{k=1}^n\xi_k\right)^{1/n}\longrightarrow 1/e.$$

因而 $c=1/e$.

24. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布， $E\xi_k=a, Var\xi_k<\infty$. 求证：

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n k\xi_k\longrightarrow a\quad(P).$$

证　由切比雪夫不等式,

$$\begin{aligned}&P\{|\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n k\xi_k-a|\ge\epsilon\}\\&=P\{|\sum_{k=1}^n k\xi_k-E(\sum_{k=1}^n k\xi_k)|\ge\frac{\epsilon n(n+1)}{2}\}\\&\le\frac{4Var\sum_{k=1}^n k\xi_k}{\epsilon^2n^2(n+1)^2}=\frac{2(2n+1)Var\xi_1}{3\epsilon^2n(n+1)}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

故 $\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\xi_k \longrightarrow a \quad (P)$.

25. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，都服从 $N(0,1)$ 分布， $\eta_n=\frac{n\xi_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}$. 求证： $\eta_n$ 的分布函数弱收敛于 $N(0,1)$.

证　由于 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，且都服从 $N(0,1)$ 分布．则

$$\xi_{n+1}\to N(0,1) \quad (d), \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}{n}\to 1 \quad (P).$$

根据习题 18(4), 有 $\frac{n\xi_{n+1}}{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}\to N(0,1)(d)$. 即证得 $\eta_n$ 的分布函数弱收敛于 $N(0,1)$.

26. 设 $\{\xi_k\}$ 为独立同分布随机变量序列， $Var\xi_k<+\infty$. $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为绝对收敛级数，令 $\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, 则 $\{a_n\eta_n\}$ 服从大数定律.

证　由于，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}a_k\eta_k)=\frac{1}{n^2}Var(\sum_{k=1}^{n}a_k(\sum_{l=1}^{k}\xi_l))\\&=\frac{1}{n^2}Var(\sum_{l=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_k)\xi_l))=\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)Var\xi_1\le\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2)Var\xi_1\longrightarrow 0\end{aligned}$$

故 $\{a_n\eta_n\}$ 服从马尔科夫大数定律.

27. 设 $\{\xi_k\}$ 为独立同分布随机变量序列，数学期望为 0, 方差为 1, $\{a_n\}$ 为常数列, $a_n\longrightarrow\infty$. 求证：

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\sqrt{n}a_n}\longrightarrow 0 \quad (P).$$

证　由切比雪夫不等式，当 $n\longrightarrow\infty$ 时，

$$\begin{aligned}&P\{|\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\sqrt{n}a_n}|\ge\epsilon\}=P\{|\sum_{k=1}^{n}\xi_k-E(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)|\ge\epsilon\sqrt{n}a_n\}\\&\le\frac{Var\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\epsilon^2na_n^2}=\frac{1}{\epsilon^2a_n}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{\sqrt{n}a_n}\longrightarrow 0 \quad (P).$$

28. 设 $\{\xi_k\}$,$\{\eta_k\}$ 相互独立，均服从 $N(0,1)$ 分布． $\{a_n\}$ 为常数列，求证：

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\eta_k}{n}\longrightarrow 0 \quad (P)$$

的充要条件是 $\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{n^2}\longrightarrow 0$.

证　充分性由于

$$\frac{Var(\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\eta_k)}{n^2}=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{n^2}+\frac{1}{n}\longrightarrow 0.$$

故根据马尔科夫大数定律 $\frac{\sum_{k=1}^n a_k\xi_k+\sum_{k=1}^n \eta_k}{n} \longrightarrow 0(P)$.
必要性　易知 $\sum_{k=1}^n a_k\xi_k+\sum_{k=1}^n \eta_k \sim N(0,\sum_{k=1}^n a_k^2+n)$, 故

$$P(|\frac{\sum_{k=1}^n a_k\xi_k+\sum_{k=1}^n \eta_k}{n}| \geq \epsilon) = 2P(N(0,\sum_{k=1}^n a_k^2+n) \geq \epsilon n)$$
$$= 2P(N(0,1) \geq \frac{\epsilon n}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2+n}}) \longrightarrow 0.$$

则必有 $\frac{\epsilon n}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2+n}} \longrightarrow \infty (n \longrightarrow \infty)$, 因而 $\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n^2} \longrightarrow 0$.
29. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，都服从 $N(0,1)$ 分布，求证：　$\eta_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}$ 渐近正态分布 $N(0,1)$.
证　由 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，且都服从 $N(0,1)$ 分布，知

$$\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}} \to N(0,1) \quad (d),$$

$$\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n} \to 1 \quad (P).$$

由例 2 及题 18(4) 得 $\eta_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}$ 渐近正态分布 $N(0,1)$.
30. 设 $\{\xi_k\}$ 独立同分布，都服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布，求证：(1)$\{\xi_n^2\}$ 服从大数定律；(2)$U_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}$ 的分布函数收敛于 $N(0,1)$.
证　(1) 由于 $\{\xi_n^2\}$ 独立同分布，某种原因且 $E\xi_n^2 = 1/3$. 故 $\{\xi_n^2\}$ 服从辛钦大数定律；
(2) 由中心极限定理及 (1) 知

$$\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n/3}} \to N(0,1) \quad (d),$$

$$\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n} \to 1/3 \quad (P).$$

由例 2 及题 18(4) 得 $U_n = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}}$ 的分布函数收敛于 $N(0,1)$.
31. 设 $\{\xi_k\}$ 为相互独立的随机变量序列，成立中心极限定理，则它服从大数定律的充要条件是 $Var(\sum_{k=1}^n \xi_k) = 0(n)$.
证　充分性由马尔科夫大数定律即得.
必要性记 $B_n^2 = Var(\sum_{k=1}^n \xi_k)$. 设 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律. 由中心极限定理，　$\forall x > 0, \epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^n(\xi_k - E\xi_k)}{B_n}\right| < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^n(\xi_k - E\xi_k)| < \epsilon\right\} = 1$$

故

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{B_n}{n}\cdot\frac{1}{B_n}|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E\xi_k)| < \epsilon\right\} = P\left\{\cdot\frac{1}{B_n}|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E\xi_k)| < \epsilon\frac{n}{B_n}\right\} \to 1.$$

因而当 $n\to\infty$ 时必有 $\frac{\epsilon n}{B_n}\to\infty$, 即 $\frac{B_n}{n}\to 0$. 所以 $Var(\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = 0(n)$.

32. 取 $\Omega = (0,1]$, $F$ 为其中波雷尔全体所成的域. 对任一事件 $A = \{\omega \in (a,b) \subset \Omega\}$, 定义 $P(A) = b - a$. 现定义

$$\xi(\omega) \equiv 0, \quad \xi_n(\omega) = \begin{cases} n^{1/r}, & 0 < \omega \le 1/n; \\ 0, & 1/n < \omega \le 1. \end{cases}$$

求证: $\xi_n \longrightarrow \xi \quad (P)$, 但 $\xi_n \longrightarrow \xi \quad (L_r)$ 不成立.

证 $0 < \epsilon < 1$, 则

$$P\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} = \frac{1}{n} \to 0 (n\to\infty).$$

故 $\xi_n \longrightarrow \xi \quad (P)$, 而 $E|\xi_n - \xi|^r = 1$, 故 $\xi_n \longrightarrow \xi \quad (L_r)$ 不成立.