第 20 讲 半纯函数与留数定理

1. 假设 $f(z)=p(z)/q(z)$ 为有理函数,p,q 没有公因子.

(1). 如果 z_0 是 q 的 1 阶零点, 证明

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

(2). 如果 z_0 是 q 的 2 阶零点, 证明

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{6p'(z_0)q''(z_0)-2p(z_0)q'''(z_0)}{3q''(z_0)^2}.$$

(3). 如果 p 的次数低于 q 的次数，并且 q 的所有零点都是一阶的, 证明

$$f(z)=\sum_{w:q(w)=0}\frac{p(w)}{(z-w)q'(w)}.$$

(4). 假设 $z_0\in\mathbb{C}$ 不是 f 的极点, 则 f 可在 z_0 附近展成 Taylor 级数. 此级数的收敛半径是多少?

2. 证明 Riemann 球面到自身的双全纯映射为分式线性变换。

3. 函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z^2-1}$. 求 $\operatorname{Res}(f,0),\operatorname{Res}(f,1),\operatorname{Res}(f,\infty)$.

4. 有理函数 $f(z)=p(z)/q(z)$ 在平面上的所有极点记为 $p_1,\cdots,p_n$, 证明

$$\operatorname{Res}(f,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,p_k)=0.$$

由此，对于第 1(3) 小题, 求出 $\operatorname{Res}(f,\infty)$.

5. 假设 f 是有理函数, 映射度 $d=\deg(f)\geq 1$.

(1). 证明对任意 $\zeta\in\widehat{\mathbb{C}}$, 方程

$$f(z)=\zeta$$

的解的个数 (计重数意义) 为 d.

(2). 问 f 的不动点 (即 $f(z)=z$ 的解 $z\in\widehat{\mathbb{C}}$) 的个数 (计重数意义) 为多少? 证明你的结论.

(下一页有附加题, 对作业题意犹未尽的同学, 请尽情发挥你的才华!)

附加题 (不做要求)

这些漂亮的数学问题带给我很多思考的乐趣，这些乐趣让我感到在一生之中稍有所得，比那些在思想真空里煎熬一世的人幸福.

请将解答发至 wxg688@163.com. 无截止日期.

问题 2.1. 假设 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 非常值, 在边界点 $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ 上取得最大模. 证明:

$$|f'(z_0)| \geq \frac{|f(z_0)-f(0)|^2}{(|f(z_0)|^2-|f(0)|^2)}|f(z_0)|.$$

问题 2.2. 假设 f 是有理函数, 映射度 $d=\deg(f)\geq 1$. 称 $c\in\widehat{\mathbb{C}}$ 是 f 的临界点, 如果 f 限制在 c 的任意邻域上都不是一一的. 问 f 的临界点总数 (计重数: 在适当的坐标下, 临界点就是导数的零点, 重数就是导数零点的重数) 是多少?

注: 对于平面区域的全纯函数而言, 临界点就是导数的零点. 对一般的全纯映射 $f:\Omega\to\widehat{\mathbb{C}}$,

如果 $\infty\in\Omega, f(\infty)\neq\infty$, 称 ∞ 是临界点, 如果 0 是 $g(w)=f(1/w)$ 的导数的零点;

如果 $\infty\in\Omega, f(\infty)=\infty$, 称 ∞ 是临界点, 如果 0 是 $g(w)=1/f(1/w)$ 的导数的零点;

如果 $f(p)=\infty, p\neq\infty$, 称 p 是临界点, 如果 p 是 $g(w)=1/f(w)$ 的导数的零点.