吉林大学 2015-2016 学年第一学期“解析几何”期末考试试题

参考解析

一、简答题（共 25 分）

1、已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，满足 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不垂直，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，求满足 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=h$，$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

解：由条件，$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，而$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}$，故 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}$.

即为 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=h\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}$，从而得：$\boldsymbol{x}=\dfrac{h\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}}{a\cdot b}$.

2、在直角坐标系中，求过点 $M(1,0,1)$，正交于直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的直线方程.

解：（解法一）先求过点 $M(1,0,1)$ 与直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的平面方程.

设该平面为 $\lambda(x-y+2)+\mu(2y+z-7)=0$，代入 $M(1,0,1)$，可得一组 $\lambda=2,\mu=1$..

故所求过点 $M(1,0,1)$ 与直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的平面方程为：$2x+z-3=0.$

而过点与直线垂直的平面方程为：$x+y-2z+1=0.$

故所求直线方程为：$\begin{cases}2x+z-3=0\\ x+y-2z+1=0\end{cases}$.

（解法二）设所求直线与直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$ 交于点 $(t,t+2,3-2t)(t\in R)$.

则有 $(t-1,t+2,2-2t)\cdot(1,1,-2)=0$，得 $t=\dfrac{1}{2}$，故交点坐标 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2},2)$.

又方向向量为 $(-2,4,1)$，故所求直线方程为：$\dfrac{x-\frac{1}{2}}{-2}=\dfrac{y-\frac{5}{2}}{4}=\dfrac{z-2}{1}$.

3、求两条异面直线 $l_i:\overrightarrow{M_iM}\times\overrightarrow{u_i}=\vec{0}(i=1,2)$ 的公垂线的方程.

解：设 $M_i(x_i,y_i,z_i),u_i=(a_i,b_i,c_i)(i=1,2)$，则由混合积的几何性质与向量外积的性质可知所求

的共垂线方程为：$\cap\begin{vmatrix}x-x_i & y-y_i & z-z_i\\ a_i & b_i & c_i\\ b_1c_2-c_1b_2 & c_1a_2-a_1c_2 & a_1b_2-b_1a_2\end{vmatrix}=0(i=1,2)\cdot$

4、若二次曲面 $(a-k)x^2+(b-k)y^2+(c-k)z^2=1(a>b>c>0)$ 是一个直纹面，求参数 k 的取值范围.

解:若其为单叶双曲面，则 $b>k>c$;若其为柱面（包括双曲柱面与椭圆柱面的情况），则 $k=a,b,c$.
综上参数 k 的取值范围为 $[c,b]\cup\{a\}$.

5、求二次曲面$4x^2+4xy+3y^2-20x-14y-6=0$的中心坐标.

解：由定义知，中心坐标满足方程组$\begin{cases}4x+2y-20=0\\2x+3y-14=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$，故所求为(4,2).

二、计算题（共45分）

1、已知直线$L_1:\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\\x=0\end{cases}$和$L_2:\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=1\\y=0\end{cases}$.

（1）求过直线L_1且与直线L_2平行的平面的方程；

（2）若直线L_1与直线L_2的距离为$2d$，求证：$\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

解：（1）设为$\lambda(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1)+\mu x=0$，即$\mu x+\dfrac{\lambda}{b}y+\dfrac{\lambda}{c}z-\lambda=0$.

而直线L_2的方向向量为$\vec{u}=(a,0,c)$，故由平行，有：$a\mu+\lambda=0$.

取$\mu=1,\lambda=-a$，得所求平面方程为：$bcx-acy-abz+acb=0$.

（2）取直线L_2上一点$(a,0,0)$，则其到（1）中所求平面的距离的一半即为d.

故$d=\dfrac{|abc|}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$，故$\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$得证.

2、求以y轴为旋转轴，$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$（参数$t\in R$）为母线的旋转曲面的参数方程.

解：母线的方程为$\begin{cases}y=x^2\\z=x^3\end{cases}$，取$M(x,y,z)$为所成的旋转曲面上的一点，则有$M_0(x_0,y_0,z_0)$为母线上一点，使得$y=y_0,x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2$，又$\begin{cases}y_0=x_0^2\\z_0=x_0^3\end{cases}$，故

旋转曲面的方程为：$x^2+z^2=y+y^3$，参数方程为：$\begin{cases}x=\dfrac{1}{t+t^2+t^3+1}\\y=-\dfrac{1}{t+t^2+t^3+1}(t\in R)\\z=\dfrac{t}{t+t^2+t^3+1}\end{cases}$.

3、利用适当的坐标变换将空间直角坐标系中曲面方程$(2x+y+z)^2-(x-y-z)^2=y-z$化成标准方程，并说明其表示什么曲面.

解：考虑正交坐标变换：

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{6}}{3}x'+\frac{\sqrt{3}}{3}y' \\ y=\frac{\sqrt{6}}{6}x'-\frac{\sqrt{3}}{3}y'+\frac{\sqrt{2}}{2}z' \\ z=\frac{\sqrt{6}}{6}x'-\frac{\sqrt{3}}{3}y'-\frac{\sqrt{2}}{2}z' \end{cases}$$

，经过此变换后原方程变为：$6x'^2-3y'^2=\sqrt{2}z'$，为马鞍面.

三、证明题（共 30 分）

1、若 ***a***,***b***,***c*** 为空间中三个不共面的向量，求证：对任意一个向量 ***r***，

总有：$r=\frac{(r,b,c)}{(a,b,c)}a+\frac{(a,r,c)}{(a,b,c)}b+\frac{(a,b,r)}{(a,b,c)}c$成立.

证明：我们设$a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3),c=(c_1,c_2,c_3),r=(r_1,r_2,r_3)$.

考虑线性方程组：$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=r_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=r_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=r_3 \end{cases}$，即$ax+by+cz=r$.由于 ***a***,***b***,***c*** 为空间中三个不共面的向量，故混合积(***a***,***b***,***c***)≠0，则由 *Cramer* 法则：$\begin{cases} x=\frac{(r,b,c)}{(a,b,c)} \\ y=\frac{(a,r,c)}{(a,b,c)} \\ z=\frac{(a,b,r)}{(a,b,c)} \end{cases}$.

代入$ax+by+cz=r$即知原命题成立.

2、求证：曲面 S：$x^2+4xz+4z^2=y^2+3$是柱面.

证明：我们将其化为标准形式. 该方程对应的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$，

特征多项式为$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-5)$，的特征值分别为：

$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=5$.代回特征方程组$\begin{cases}(\lambda-1)x-2z=0\\(\lambda+1)y=0\\-2x+(\lambda-4)z=0\end{cases}$，可得对应的一组单位特征向量

为：$\overrightarrow{e_1}=(0,1,0),\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1),\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$.则考虑正交坐标变换：

$\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{5}}y'+\frac{1}{\sqrt{5}}z'\\y=x'\\z=-\frac{1}{\sqrt{5}}y'+\frac{2}{\sqrt{5}}z'\end{cases}$，经过此变换后 S 的方程变为：$5z'^2-x'^2=3$，为双曲柱面.

3、求证：椭圆的一个焦点在其任意切线上的垂足到中心的距离等于长半轴.

证明：不妨设所考察的椭圆方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由对称性，只需研究焦点 $F(c,0)$.

考虑任一切线的切点(x_0,y_0)，则该切线方程为：$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1=0$.

过点 F 且垂直于该切线的直线方程为：$\frac{y_0}{b^2}(x-c)-\frac{x_0}{a^2}y=0$，与该切线联立，可求出垂足的

坐标为 $H(\frac{a^2b^4x_0+a^4cy_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2},\frac{a^4b^2y_0-a^2b^2cx_0y_0}{b^4x_0^2+a^4y_0^2})$.

则$|OH|=\sqrt{(\frac{a^2b^4x_0+a^4cy_0^2}{b^4x_0^2+a^4y_0^2})^2+(\frac{a^4b^2y_0-a^2b^2cx_0y_0}{b^4x_0^2+a^4y_0^2})^2}=\sqrt{\frac{a^4b^8x_0^2+a^8c^2y_0^4+a^8b^4y_0^2-a^4b^4c^2x_0^2y_0^2}{(b^4x_0^2+a^4y_0^2)^2}}$

$$=\sqrt{\frac{a^4b^8x_0^2+a^4b^4(a^2-b^2)(a^2-x_0^2)^2+a^6b^6(a^2-x_0^2)-a^2b^6(a^2-b^2)x_0^2(a^2-x_0^2)}{[b^4x_0^2+a^2b^2(a^2-x_0^2)]^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^4b^8x_0^2+a^6b^4x_0^4-2a^4b^6x_0^4+-2a^4b^6x_0^4-2a^8b^4x_0^2+a^{10}b^4}{(b^4x_0^2-a^2b^2x_0^2+a^4b^2)^2}}=a.$$

故命题成立.