曲面论部分有关第一基本形式习题

2-1. 求球面的切平面方程。

2-2. 若一平面与一光滑曲面仅有一公共点，证明曲面在该点与平面相切。

2-3. 证明曲面$xyz = a^3$在任何点的切平面和三个坐标平面所构成的四面体体积等于常数。

2-4. 计算下面的Mobius带

$$\mathbf{r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) + v(\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta, \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \cos\frac{\theta}{2}), (-\pi < \theta < \pi, -1/2 < v < 1/2)$$

的法向量$\mathbf{n}$.

2-5. 证明：（1）曲面为旋转曲面的充要条件是法线通过定直线；

（2）曲面为锥面的充要条件是切平面通过定点。

2-6. 证明：（1）曲面$\mathbf{r} = (u^2 + v/3, 2u^3 + uv, u^4 + 2u^2v/3)$是可展曲面。

（2）双曲抛物面$\mathbf{r} = (a(u+v), b(u-v), 2uv)$不是可展曲面。

2-7. 证明曲面$\mathbf{r} = (\cos v - (u+v)\sin v, \sin v + (u+v)\cos v, u+2v)$ 是可展曲面，它是圆柱螺线$\mathbf{r} = (\cos v, \sin v, v)$的切线曲面。

2-8. 证明：非平面的绕曲线的主法线和从法线所生成的曲面都不是可展曲面。

2-9. 证明曲线C的切线曲面S沿任意母线l的切平面就是C在切线l的切点处的密切平面。

2-10. 证明直纹面上两条相邻母线之间的距离一般为一级无穷小。而当此直纹面为非柱面的可展曲面时，这个距离至少为二阶无穷小。

1. 求以下曲面的第一基本形式：

   (1) 椭圆面$\mathbf{r} = (a\cos\varphi\cos\theta, b\cos\varphi\sin\theta, c\sin\varphi)$

   (2) 单叶双曲面$\mathbf{r} = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)$

   (3) 双叶双曲面$\mathbf{r} = (a\cosh u, b\sinh u\cos v, c\sinh u\sin v)$

   (4) 椭圆抛物面$\mathbf{r} = (u, v, \frac{1}{2}(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}))$

   (5) 双曲抛物面$\mathbf{r} = (a(u+v), b(u-v), 2uv)$

   (6) 劈锥曲面$\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin v, \varphi(v))$

   (7) 一般螺面$\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin v, \varphi(u) + av)$

2. 将曲面$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$上的$\mathbf{n}\times\mathbf{r}_u, \mathbf{n}\times\mathbf{r}_v$ 写成$\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$的线性组合.

3. 从球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$的北极向xy平面作球极投影. 证明: 可将球面的线素写成

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{[1 + K(x^2 + y^2)]^2}$$

而从中心向$z=a$处的切平面作中心投影, 可将球面线素写成

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2+K(xdy-ydx)^2}{[1+K(x^2+y^2)]^2}$$

其中$K=\frac{1}{a^2}$.

4. 证明: 在螺面$\mathbf{r}=(u\cos v,u\sin v,\ln\cos u+v)$上, 每两条螺线($v$曲线)在任一$u$曲线上截取等长的曲线段.

5. 设曲面上曲线C的切线方向为$(\delta u,\delta v)$, 求

(1) C的正交轨线的微分方程;

(2) 当$A\delta u+B\delta v=0$时, C的正交轨线的微分方程.

6. 求曲面的参数曲线的二等分角轨线的微分方程.

7. 设在曲面上一点, 含du,dv的二次方程

$$Pdu^2+2Qdudv+Rdv^2=0$$

确定两个切线方向. 证明: 这两个方向相互正交的充要条件是

$$ER-2FQ+GP=0$$

8. 设$\varphi(u,v)=$常数以及$\psi(u,v)=$常数是曲面上两族正则曲线. 证明: 它们相互正交的充要条件是:

$$E\varphi_v\psi_v-F(\varphi_u\psi_v+\varphi_v\psi_u)+G\varphi_u\psi_u=0$$

9. 求球面的斜驶线(与子午线交定角的轨线)方程.

10. 设曲面线素为$ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$. 求

(1) 曲线$C_1:\ u+v=0,\ C_2:\ u-v=0$的交角;

(2) 曲线$C_1:\ u=\frac{a}{2}v^2,\ C_2:\ u=-\frac{a}{2}v^2,\ C_3:\ v=1$所构成三角形的边长与内角.

11. 设曲面参数变换为$u=\bar{u}\cos\theta+\bar{v}\sin\theta,v=-\bar{u}\sin\theta+\bar{v}\cos\theta$ (θ为常数)，求第一基本形式系数的变换公式。

12. 证明积分$A=\int\int_D\sqrt{EG-F^2}dudv$与曲面的参数变换无关。

13. 证明：螺面$\mathbf{r}=(u\cos v,u\sin v,u+v)$ 与旋转双曲面$\mathbf{r}=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\sqrt{\rho^2-1})$ $(\rho\geq 1,0\leq\theta<2\pi)$可建立等距对应

$$\theta=\tan^{-1}u+v,\rho=\sqrt{u^2+1}$$

14. 证明具有第一基本形式$ds^2=\frac{du^2-4vdudv+4udv^2}{4(u-v^2)},(u>v^2)$ 的曲面可与平面建立等距对应

$$u=\xi^2+\eta^2,v=\eta.$$

15. 证明：曲面$\mathbf{r}=(a(\cos u+\cos v),a(\sin u+\sin v),b(u-v))$可与一旋转面建立等距对应。

16. 若两曲面之间的对应使对应区域的面积保持相等，则称对应是等积的。证明既是共形的又是等积的对应必是等距对应。

17. 证明球面$\mathbf{r}=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$ 可与xy平面建立等积对应

$$x=a\sin u+f(v), y=av,$$

其中f是任意函数。

18. 证明平面上关于原点为中心，R为半径的圆周的反演是平面到自身的共形对应。

19. 证明球极投影是球面（去掉投影中心）到平面的共形对应。