华南理工大学 2008-2009 学年第一学期“解析几何”期末考试 B

参考解析

一、简答题（共 32 分）

（1）求通过点 $M(2,-3,-5)$ 且与平面 $6x-3y-5z+2=0$ 垂直的直线方程.

解：由条件，所求为：$\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$.

（2）若直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$ 与平面 $kx+3y-5z+1=0$ 平行,求 k 的值.

解：有 $4k+9-5=0$，$k=-1$.

（3）求二次曲线 $x^2-xy+y^2-1=0$ 通过点 $(0,2)$ 的切线方程.

解：设切线为 $y=kx+2$，与曲线联立，有：$(1-k+k^2)x^2+(4k-2)x+3=0$

由相切知：$(4k-2)^2-12(1-k+k^2)=0$，解得 $k=-1,2$.

故所求为 $y=-x+2, y=2x+2$.

（4）若向量 α，β，γ 两两相互垂直，且长度均为 2，求 $\alpha+\beta+\gamma$ 的长度.

解：$|\alpha+\beta+\gamma|=\sqrt{|\alpha+\beta+\gamma|^2}=2\sqrt{3}$.

（5）已知旧坐标系中有相互垂直的三条直线

$$l_1: x=y=z,\quad l_2: x=\frac{y}{-2}=z,\quad l_3: x=-z, y=0,$$

求以这三条直线为新坐标轴的右手直角坐标变换公式.

解: 三直线相交于点 $(0,0,0)$. 取三直线的方向向量, 要求构成右手系并将它们单位化, 这样便得到新坐标系的三个坐标向量. 其坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'-\dfrac{2}{\sqrt{6}}y' \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}.$$

（6）求通过点 $M(1,0,-2)$ 且与两直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 和 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$ 垂直的直线.

解：由于 $(1,1,-1)\times(1,-1,0)=(1,1,2)$，故所求为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

.

（7）求二次曲线 $x^2-2xy+y^2-4x=0$ 的主方向与对称轴.

解：设 $u=(m,n)$ 为其主方向，则有 $u \parallel \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u^T$，得：$m(m+n)=n(n+m)$.

解之得：$u_1=(1,1)$ 与 $u_2=(1,-1)$.而由 $I_2=0$，$I_3=-4\neq 0$ 知原曲线为抛物线.

考虑其开口朝向：由于 $I_1(a_{12}b_1-a_{11}b_2)=4>0$，故 $u_1=(1,1)$ 为其渐进方向.

故对称轴方程为：$x-y-1=0$.

（8）求母线 $\Gamma:\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得旋转曲面的方程.

解：为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$.

二、（共 10 分）证明直线 $l:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 与平面 $\pi:2x+y-z-3=0$ 相交，并求它们的交点和交角.

解：因 $2\times(-1)+1\times1-1\times2=-3\neq 0$ ，故直线与平面相交.

直线的坐标式参数方程为：$\begin{cases} x=-t \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$ 。设交点处对应的参数为 t_0，则有：

$2(-t_0)+(1+t_0)-(1+2t_0)-3=0$，解得 $t_0=-1$，故所求为 $(1,0,-1)$.

又设直线 l 与平面 π 的交角为 θ，则：$\sin\theta=\dfrac{|2\times(-1)+1\times1-1\times2|}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

三、（共 10 分）用矢量法证明：P 是△ABC 重心的充要条件是 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

证明：若 P 为△ABC 的重心，则 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$，从而 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$.

若 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$,则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CP}$.取 E,F,G 分别为 AB,BC,CA 之中点,则有 $\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})$.

从而 $\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CP}$.同理可证：$\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{PF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}$.故 P 为△ABC 的重心.

四、（共 10 分）已知两直线$l_1: \frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$； $l: \frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$，证明这两直线为异面直线，并求它们之间的距离.

解：由$\begin{vmatrix} 3+3 & 8+7 & 3-6 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -270 \neq 0$知其不共面.

其距离为：$d=\frac{|-270|}{|(3,-1,1)\times(-3,2,4)|}=3\sqrt{30}$.

五、（共 14 分）按参数λ的值讨论曲线$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$的类型.

解：其不变量$I_1=2\lambda, I_2=\lambda^2-1, I_3=(5\lambda+3)(\lambda-1), K_1=10\lambda-2$.

（1）$-1<\lambda<1$时，其为双曲型曲线.

①若$\lambda=-\frac{3}{5}$，则其为一对相交直线；

②若$\lambda\neq-\frac{3}{5}$，则其为双曲线.

（2）$-1>\lambda$或$\lambda>1$时，其为椭圆型曲线.

①若$\lambda>1$，其为空集（虚椭圆）；

②若$-1>\lambda$，其为椭圆.

（3）$\lambda=\pm1$时，其为抛物型曲线.

①若$\lambda=1$，其为空集（虚平行直线）；

②若$\lambda=-1$，其为抛物线.

六、（共 14 分）求单叶双曲面$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$上经过点$M(0,2,0)$的两条直母线方程.

解：其两族直母线的方程为：$\begin{cases} s(\frac{x}{3}+\frac{z}{4})=t(1-\frac{y}{2}) \\ t(\frac{x}{3}-\frac{z}{4})=s(1+\frac{y}{2}) \end{cases}$和$\begin{cases} s(\frac{x}{3}+\frac{z}{4})=t(1+\frac{y}{2}) \\ t(\frac{x}{3}-\frac{z}{4})=s(1-\frac{y}{2}) \end{cases}$.

代入点$M(0,2,0)$后可求得满足要求的两条直母线的方程为$\begin{cases} 4x+3z=0 \\ y=2 \end{cases}$，$\begin{cases} 4x-3z=0 \\ y=2 \end{cases}$.

七、（共 10 分）求过三条平行直线$x=y=z$，$x+1=y=z-1$和$x-1=y+1=z-2$的圆柱面方程.

解：一条准线方程为：$\begin{cases} (x+\frac{2}{15})^2+(y+\frac{11}{15})^2+(z-\frac{13}{15})^2=\frac{98}{75} \\ x+y+z=0 \end{cases}$.（取截面求圆）

所求方程为$5(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+2x+11y-13z=0$.