

浙江大学2012——2013学年春夏学期 《常微分方程（甲）》课程期末考试试卷

课程号：_____，开课学院：__理学院_____

考试试卷：A卷、B卷（请在选定项上打✓）

考试形式：闭、开卷（请在选定项上打✓），允许带__无__入场

考试日期：2013年7月6日，考试时间：120分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：_____ 学号：_____ 所属院系：_____

题序	一	二	三	四	五	六	附加	总分
得分								
评卷人								

一. 求解下列方程（20分）

1. $xy^3dy + (y^4 + x^3)dx = 0$

2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{3x} - \frac{x}{y^2} = 0, y(1) = 2$

二. 求解下列方程 (组) (20分)

1. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 5y = x^2 \sin(\ln x)$

2.

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$$

三. (20分) 考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = (y - x)e^{y^2}, \quad y(0) = 2$$

假设其饱和解的存在区间为 $(-T_2, T_1)$ 。

- (1) 判断 T_1 是否有限并给出充足的理由;
- (2) 判断 T_2 是否有限并给出充足的理由。

四. (10分) 在区域 $D = \{(x, y) : |x| < a, |y| < b\}$ 中, 假设 $f(x, y)$ 连续并且关于 y 满足局部Lipschitz条件, $g(y)$ 是一个恒正的连续函数, 由Peano存在定理我们知道方程

$$y' = f(x, y)g(y), y(0) = 0$$

在 D 内有局部解。试证明这样的局部解是唯一的。

五. (20分) 假设点(2, 2) 是系统 $\begin{cases} x' = -2x + ay \\ y' = 4 - x^2 \end{cases}$ 的平衡点 (奇点)。问

- 1) a 是多少? 找出系统所有奇点。
- 2) 写出奇点(2, 2)所相应的线性化系统, 判断奇点类型并画出该系统的相图 (草图)。
- 3) 给其他奇点分类和判断稳定性。

六. (10分) 已知方程 $xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 3x^2$ 所对应的齐次方程有特解 $y = e^{2x}$, 求该方程的通解。

附加题 (求是科学班学生必做题, 10分) : 考虑方程组

$$(1) \quad X' = (A + B(t))X,$$

其中 A 是常数矩阵, $B(t)$ 是关于 t 连续的矩阵函数, 且 $\int_0^\infty \|B(t)\| dt < \infty$. 如果 $X' = AX$ 的一切解在 $t \geq 0$ 上有界, 则方程组(1)的一切解在 $t \geq 0$ 上也保持有界。