第 26 讲 正规族

记号: $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 为单位圆盘; $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为扩充复平面 (Riemann 球面)

1. 函数族 $\mathcal{F} = \{f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}; n \geq 1\}$, 其中 $f_n(z) = z^n$, 在 $\mathbb{D}$ 上是否等度连续? 是否内闭等度连续? 说明理由.

2. 假设 D 为平面上的区域, (Y, d_Y) 是一个度量空间, $C(D, Y)$ 是所有连续函数 $f : D \to Y$ 的全体. 回顾 Areza-Ascoli 定理: 给定函数族 $\mathcal{F} \subseteq C(D, \mathbb{C})$, 如果 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭一致有界与内闭等度连续, 则 $\mathcal{F}$ 是 D 上的正规族. 注意此时 $Y = \mathbb{C}$, d_Y 为欧氏度量.

现在将 $\mathcal{F}$ 改为 $C(D, \widehat{\mathbb{C}})$ 的子函数族 (此时 $Y = \widehat{\mathbb{C}}$, d_Y 为球面度量), 给出 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭一致收敛, 内闭等度连续的定义, 证明此时如果 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭等度连续, 则 $\mathcal{F}$ 是正规族.

(此题说明, 同样的函数族, 值域放在不同的目标空间中看, 正规性的要求可以不一样. 证明类似经典的 Areza-Ascoli 定理的证明, 需要换一下度量)

3. (接上题) 函数族 $\mathcal{F} = \{f_n(z) = z + n; n \geq 1\}$.

(a). 视 $\mathcal{F}$ 为 $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ 的子函数族, 证明 $\mathcal{F}$ 不是正规族.

(b). 视 $\mathcal{F}$ 为 $C(\mathbb{C}, \widehat{\mathbb{C}})$ 的子函数族, 证明 $\mathcal{F}$ 是正规族.

(此题说明, 同样的函数族, 取值在不同的目标空间中看, 正规性可以不一样)

4. 给定平面区域 Ω, 常数 $M > 0$. 定义函数族

$$\mathcal{F} = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ 全纯}; \int_{\Omega} |f(z)| dx dy \leq M \right\}$$

证明 $\mathcal{F}$ 是正规族.

附加题 (不做要求)

请将解答发至 wxg688@163.com. 无截止日期.

问题 2.10. 幂级数 $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ 的和函数 f 在其收敛圆周上有极点 z_0, 除此之外再无其他奇点, 证明

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$