吉林大学 2008-2009 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

参考解析

一、（共 20 分）

1、求多项式 $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$ 在有理数域上的标准分解.

解：直接验证可知-1,4 为 $f(x)$ 的根，故 x+1, x-4 都为 $f(x)$ 的因式，直接分解可知：

$f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4=(x+1)(x-4)(x^3+3x^2+3x+1)=(x+1)^4(x-4)$.

2、设矩阵 A,B 满足 $\widetilde{A}BA=2BA+5I$，求 B.其中 $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&5\\0&0&1&3\end{pmatrix}$.

解：因|A|=1，故 A 可逆，且 $\widetilde{A}=A^{-1}$.故 $A^{-1}BA=2BA+5I$.等式两边同时左乘 A，有：

$BA=2ABA+5A$，同时右乘，有：$B=2AB+5I$，即 $(I-2A)B=5I$.故有：

$$B=5I(I-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}5&-10&0&0\\-10&15&0&0\\0&0&5&-10\\0&0&-2&3\end{pmatrix}.$$

二、（共 10 分）求证：整系数多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等的充分必要条件是 $f(t)=g(t)$，其中 t 是大于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 任一系数绝对值 2 倍的正整数.

证明：必要性是显然的，下面证明充分性.设 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}f_kx^k, g(x)=\sum_{k=0}^{n}g_kx^k$.

因为 $f(t)-g(t)=\sum_{k=0}^{n}(f_k-g_k)t^k=0$，故 $t\mid f_0-g_0$，但 $t>|f_0|+|g_0|\geq|f_0-g_0|$，故只可能是 $f_0-g_0=0$，因此 $\sum_{k=1}^{n}(f_k-g_k)t^k=0$，即 $\sum_{k=1}^{n}(f_k-g_k)t^{k-1}=0$，类似于上可得 $f_1-g_1=0$.

一直这样操作即可知 $f(x)=g(x)$.

三、（共 15 分）设 A 是 n 阶方阵，证明：存在非零矩阵 B，使得 AB=O 的充分必要条件是|A|=0.

证明：注意到 AB=O 当且仅当 B 的列向量都是 Ax=0 的解.因此，有非零矩阵 B 使得 AB=O 当且仅当 Ax=0 有非零解，当且仅当|A|=0

四、（共 10 分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关，且向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性相关，其中$\beta\neq\theta$（零向量）.证明向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中有且只有一个向量$\alpha_j(1\le j\le m)$可由其前面的向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j-1}$线性表示.

证明：由题给条件知，非零向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$唯一地线性表示，不妨设为$\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_m\alpha_m$，其中$a_1,a_2,\ldots,a_m$不全为 0.设$a_j$为$a_1,a_2,\ldots,a_m$中的最后一个非零数，则$\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_j\alpha_j$，从而$\alpha_j$可由其前面的向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{j-1}$线性表示.假设$\alpha_i(i\neq j)$可由其前面的向量$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{i-1}$线性表示，设为：

$\alpha_i=b_0\beta+b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\ldots+b_{i-1}\alpha_{i-1}$.因为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i$线性无关，故$b_0\neq 0$，从而

$\beta=b_0^{-1}\alpha_i-b_0^{-1}b_1\alpha_1-b_0^{-1}b_2\alpha_2-\ldots-b_0^{-1}b_{i-1}\alpha_{i-1}$，由$\beta$表法唯一可知必有$i=j$.

五、（共 15 分）设有线性方程组$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$.

（1）证明当a_1,a_2,a_3,a_4两两不同时，此方程组无解；

（2）设$a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k$，且$\eta=(-1,1,1)^T$为此方程组的一个解，求此方程组的全部解.

证明：方程组的系数矩阵为$\begin{pmatrix}1&a_1&a_1^2\\1&a_2&a_2^2\\1&a_3&a_3^2\\1&a_4&a_4^2\end{pmatrix}$，增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{pmatrix}$.

（1）此时增广矩阵秩为 4，系数矩阵秩为 3，无解.

（2）此时原方程组的一个同解方程组为$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}$，可得：$\begin{cases}x_1+k^2x_3=0\\kx_2=k^3\end{cases}$.

又$\eta=(-1,1,1)^T$为此方程组的一个解，可知$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2=1\end{cases}$，故$\alpha=(0,1,0)^T$为一个基础解系，故可知方程组的通解为：$x=\eta+m\alpha(m\in R)$.

六、(共 10 分)设 A 是 n 阶可逆矩阵，α 与 β 均为 n 维列向量.证明：$|A+\alpha\beta^T|=|A|(1+\beta^T A^{-1}\alpha)$.
证明：由 *Schur* 公式可得：

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\beta^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & -1-\beta^T A^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+\beta^T\alpha & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

同取行列式即得所要证的等式.

七、（共 20 分）设 n 阶方阵 A 的秩数为 r，且 $A^2=A$，求证：$Tr(A)=r$.
证明：首先注意到，对于可逆矩阵 B，由 $Tr(B^{-1}AB)=Tr(ABB^{-1})=Tr(A)$.

其次注意到，若 $r(A)=r$，则存在可逆矩阵 Q 使得：$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$，其中

A_1 是 $r\times r$ 列满秩矩阵.这是因为有可逆矩阵 P,Q 使得 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，从而：

$$Q^{-1}AQ=Q^{-1}P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $(Q^{-1}AQ)^2=Q^{-1}AQQ^{-1}AQ=Q^{-1}A^2Q=Q^{-1}AQ$，故

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}，即\begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_1A_2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

从而 $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}A_1=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$，注意到 A_1 是列满秩矩阵，故有左逆，因此得：

$A_1=I_r$.于是 $Tr(A)=Tr(Q^{-1}AQ)=Tr(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix})=Tr(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix})=r$.