解 析 几 何

November 9, 2018

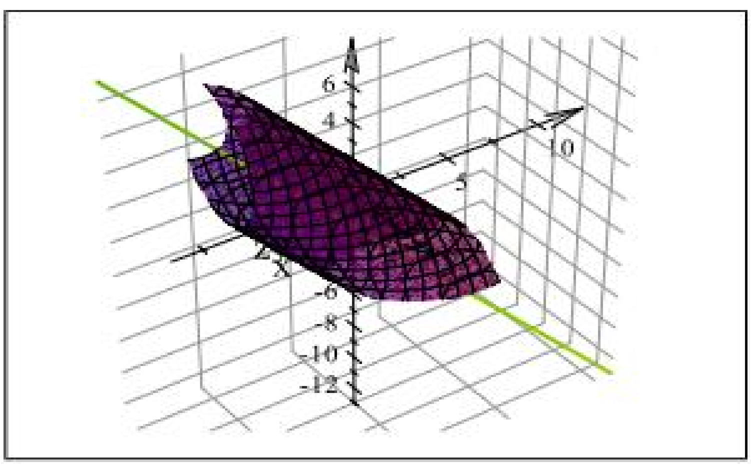
3. 解: 设 $l_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$，其方向矢量为 $\vec{v} = (1, 2, -2)$. 易知 $Q(0, 1, -3) \in l_1$. 设 Σ 是要求的柱面，且 $P(x, y, z) \in \Sigma$, 那么

$$\frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{\left|\overrightarrow{MQ} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}.$$

所以得

$$(2x - y + 1)^2 + (2y + 2z + 4)^2 + (2x + z + 3)^2 = 65.$$

即 $\quad 8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8yz + 4xz + 16x + 14y + 22z - 39 = 0.$



5解: (1). 回顾第33页习题5.

消去x，得关于yOz面的射影柱面: $z^4 + a^2y^2 - a^2z^2 = 0$,

消去y，得关于xOz面的射影柱面: $z^2 + ax = a^2$,

消去z，得关于xOy面的射影柱面: $x^2 + y^2 - ax = 0$.

(2). 设 Σ 是所求的柱面, $P(x,y,z)\in\Sigma$. 注意到曲线C的方程可写为

$$C:\begin{cases} ax+z^2=a^2 \\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases},$$

则其参数方程为

$$C:\begin{cases} x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta) \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta \\ z=\pm a\sin\frac{\theta}{2} \end{cases}.$$

所以要求的柱面方程为

$$\Sigma:\begin{cases} x=\frac{a}{2}(1+\cos\theta)+lt, \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta+mt, \\ z=\pm a\sin\frac{\theta}{2}+nt, \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

6.(3).解: 任取准线上一点$P(x_1,y_1,z_1)$. $M(x,y,z)$为点P与定点连线上一点, 则有

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-2}{z_1-2}.$$

P点在准线上, 则

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2=4y_1, \\ z_1=1 \end{cases}$$

联立方程, 消去x_1,y_1,z_1即得

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4y(2-z).$$

即

$$x^2+y^2+z^2+4yz-8y-4z+4=0.$$

7.(3).解：设$M(x,y,z)$ 是圆锥面上的任一点. 因为顶点是原点O，所以过M的直母线的方向矢量为$\vec{\alpha}=(x,y,z)$. 已知球面的球心为$O'(-1,2,-2)$, 半径为2. 所以外切锥面轴的方向矢量为$\vec{n}=(-1,2,-2)$, 记轴与母线的夹角为θ, 则

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}, \qquad \cos\theta=\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

另一方面

$$\cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{n}}{|\alpha||\vec{n}|}=\frac{-x+2y-2z}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

化简得：

$$4x^2+y^2+z^2+4xy-4xz+8yz=0.$$

8. 解：首先考虑包含三正半轴$+x,+y,+z$的锥面. 设$M\left(x,y,z\right)$ 是其上的任一点, 则过M的直母线的方向矢量为$\vec{\alpha}=(x,y,z)$. 易知此锥面的轴的方向矢量为$\vec{n}=(1,1,1)$. 记轴与母线的夹角为θ, 则

$$\cos\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{n}}{|\alpha||\vec{n}|}=\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{3}}.$$

另一方面，因为x正半轴在锥面上，其方向矢量为$\vec{v}=(1,0,0)$, 所以

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1+0+0}\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

所以化简得

$$xy+yz+xz=0.$$

同理可知:包含坐标轴$+x,+y,-z$的圆锥面的方程为：$-xy+yz+xz=0$;
包含坐标轴$+x,-y,+z$的圆锥面的方程为：$xy+yz-xz=0$;
包含坐标轴$+x,-y,-z$的圆锥面的方程为：$-xy+yz-xz=0$;
包含坐标轴$-x,+y,+z$的圆锥面的方程为：$xy-yz+xz=0$;
包含坐标轴$-x,+y,-z$的圆锥面的方程为：$-xy-yz+xz=0$;
包含坐标轴$-x,-y,+z$的圆锥面的方程为：$xy-yz-xz=0$;
包含坐标轴$-x,-y,-z$的圆锥面的方程为：$-xy-yz-xz=0$.

第57页习题:

9 解：(1). 设$M(x,y,z)$为旋转曲面上任一点，过M点的纬圆与直线 $l_2:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 交于点$P(x_1,y_1,z_1)$. 过P点的纬圆为：

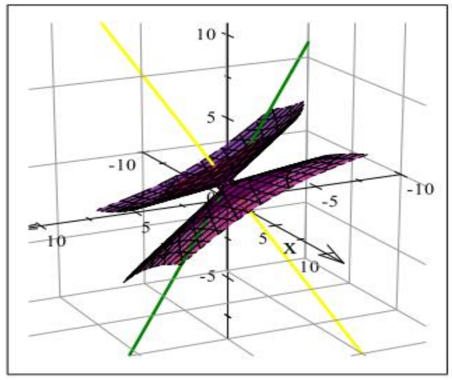
$$\left\{\begin{array}{l}(x-x_1)-(y-y_1)+2\left(z-z_1\right)=0\\ x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=x_1^2+y_1^2+\left(z_1-1\right)^2\end{array}\right..$$

又P点在直线$l_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$上，所以

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1-1}{-1}.$$

从上面两方程消去参数x_1,y_1,z_1得

$$x^2+y^2+\left(z-1\right)^2=\frac{9}{4}\left(x-y+2z-2\right)^2$$



(4).设$M(x,y,z)$为旋转曲面上任一点，过M点的纬圆与曲线交于点$P(x_1,y_1,z_1)$. 过P点的纬圆为：

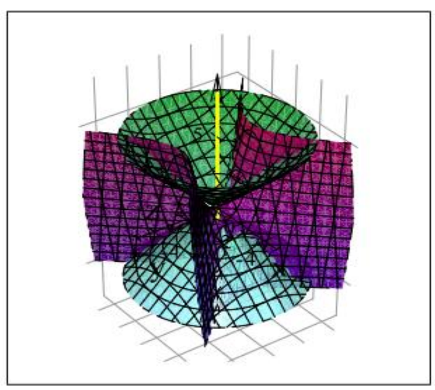
$$\begin{cases} z = z_1 \\ x^2+y^2+z^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2 \end{cases}.$$

又P点满足曲线方程

$$\begin{cases} z_1 = x_1^2 - y_1^2 \\ x_1^2+y_1^2-z_1^2 = 1 \end{cases}.$$

从上面的方程中消去参数x_1,y_1,z_1得旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2-z^2=1$$



10. 解：首先直线 l_2 可以写做 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$，则$l_2$的方向矢量为$\vec{n}_2=(1,0,1)$, 且过点$A(0,1,0)$. 又直线$l_1$的方向矢量为$\vec{n}_1=(1,-1,1)$, 且过点$B(a,0,0)$. 因为 $l_1\cap l_2\neq\varnothing$, 所以有

$$(\vec{AB},\vec{n}_1,\vec{n}_2)=(a,-1,0)\times(1,-1,1)\cdot(1,0,1)=0$$

解得 $a=0$.

所以l_1的方程为$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. 设$M(x,y,z)$为旋转曲面上任一点，过$M$点的纬圆与曲线交于点$P(x_1,y_1,z_1)$. 过$P$点的纬圆为：

$$\left\{\begin{array}{l}(x-x_1)-(y-y_1)+(z-z_1)=0\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2\end{array}\right..$$

又P点在直线l_1上，即

$$\frac{x_1}{1}=\frac{y_1}{-1}=\frac{z_1}{1}$$

因此从上面的方程消去参数x_1,y_1,z_1得

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz+2yz-2x+2y-2z=3.$$

(如果是按照$l_1:\frac{x-a}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$来解题的话, 则易得$a=-2$. 此时, 两条直线垂直, 曲面方程为:$x+y-z=1$)

第62页习题

1.解：设这个椭球面 Σ 满足

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

因为 $M\left(1,2,\sqrt{23}\right)\in\Sigma$, 可以得

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{16}+\frac{23}{c^2}=1.$$

所以 $c^2=36$. 因此

$$\Sigma:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1.$$

2.解：由已知, 可设椭圆抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

利用其过点 $(1,2,5),(\frac{1}{3},-1,1)$, 带入上面方程, 即得

$$a^2=\frac{5}{18},b^2=\frac{5}{8}.$$

从而椭圆抛物面方程为

$$9x^2+4y^2=5z.$$

4.证明： 设 $\overrightarrow{OP_i}=r_i\vec{e_i},i=1,2,3$, 其中$\{\vec{e_i}\}$是都单位向量，且可用其方向余弦表示为

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{e_1}=\cos\alpha_1\vec{i}+\cos\beta_1\vec{j}+\cos\gamma_1\vec{k}\\ \vec{e_2}=\cos\alpha_2\vec{i}+\cos\beta_2\vec{j}+\cos\gamma_2\vec{k}\\ \vec{e_3}=\cos\alpha_3\vec{i}+\cos\beta_3\vec{j}+\cos\gamma_3\vec{k}\end{array}\right. \qquad (*)$$

因为 P_i 都在椭球面上，所以有

$$\frac{r_i^2\cos^2\alpha_i}{a^2}+\frac{r_i^2\cos^2\beta_i}{b^2}+\frac{r_i^2\cos^2\gamma_i}{c^2}=1, i=1,2,3.$$

那么可得

$$\frac{\sum_{i=1}^3\cos^2\alpha_i}{a^2}+\frac{\sum_{i=1}^3\cos^2\beta_i}{b^2}+\frac{\sum_{i=1}^3\cos^2\gamma_i}{c^2}=\sum_{i=1}^3\frac{1}{r_i^2}.$$

另一方面，因为$\{\vec{e_i}\}$互相垂直，那么$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\pm 1$. 不失一般性，我们设$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=1$. 那么由(*)式可解得

$$\begin{cases}\vec{i}=\cos\alpha_1\vec{e}_1+\cos\alpha_2\vec{e}_2+\cos\alpha_3\vec{e}_3\\ \vec{j}=\cos\beta_1\vec{e}_1+\cos\beta_2\vec{e}_2+\cos\beta_3\vec{e}_3\\ \vec{k}=\cos\gamma_1\vec{e}_1+\cos\gamma_2\vec{e}_2+\cos\gamma_3\vec{e}_3\end{cases}$$

因为$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$也是单位向量，所以

$$\sum_{i=1}^3\cos^2\alpha_i=\sum_{i=1}^3\cos^2\beta_i=\sum_{i=1}^3\cos^2\gamma_i=1.$$

因此

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\sum_{i=1}^3\frac{1}{r_i^2}.$$