吉林大学2016-2017学年第一学期“高等代数Ⅰ”期末考试试题

参考解析

一、（共15分）求多项式 $f(x)=x^4+2x^3+x^2-2x-2$ 在有理数域上的标准分解.

解：$f(x)=x^4+2x^3+x^2-2x-2=(x^2-1)(x^2+2x+2)$.

二、（共15分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$，求：（1）$A^{-1}$；（2）$A^{2017}$.

解：（1）$A^{-1}=\widetilde{A}\,|A|^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

（2）记 $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^{2017}=(2I+B)^{2017}=\sum\limits_{k=0}^{2017}C_{2017}^{k}(2I)^{2017-k}B^k=$

$$C_{2017}^{0}(2I)^{2017}+C_{2017}^{1}(2I)^{2016}B^1+C_{2017}^{2}(2I)^{2015}B^2=\begin{pmatrix}2^{2017}&C_{2017}^{1}2^{2016}&C_{2017}^{2}2^{2015}\\0&2^{2017}&C_{2017}^{1}2^{2016}\\0&0&2^{2017}\end{pmatrix}.$$

三、（共15分）已知方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2+3x_3+cx_4=1\\x_1+4x_2+9x_3+c^2x_4=1\\x_1+8x_2+27x_3+c^3x_4=1\end{cases}$.

（1）求其解唯一的条件；

（2）若 c=1，求其通解.

解：（1）其解唯一等价于：$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&c\\1&4&9&c^2\\1&8&27&c^3\end{vmatrix}\neq 0$，即为 $(c-1)(c-2)(c-3)\neq 0$.

（2）此时其增广矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&1&1\\1&4&9&1&1\\1&8&27&1&1\end{pmatrix}$，进行行初等变换，化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，故原方程组的等价方程组为$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，则有：$\begin{cases} x_1 = -x_4 + 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

故其通解为$x = k(-1,0,0,1)^T + (1,0,0,0)^T$，$k \in R$.

四、（共 10 分）已知矩阵 A 为秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，求证存在秩为 r 的幂等矩阵 B，使得 $AB=A$.

证明：①$m=n$ 时，有 $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, |P||Q| \neq 0$，则令 $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$，有 $r(B)=r$，且

$$B^2 = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = B$$，故其为秩为 r 的幂等矩阵.

而 $AB = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QQ^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = A$，此时命题成立.

②$m>n$ 时，令 $X = \begin{pmatrix} A & O_{m\times(m-n)} \end{pmatrix}$为秩为 r 的方阵，由①知存在秩为 r 的幂等矩阵 B，使得 $XB=X$.

即$\begin{pmatrix} A & O_{m\times(m-n)} \end{pmatrix}B = \begin{pmatrix} A & O_{m\times(m-n)} \end{pmatrix}$，得 $AB=A$，此时命题成立.

③$m<n$ 时，令 $X = \begin{pmatrix} A \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}$为秩为 r 的方阵，由①知存在秩为 r 的幂等矩阵 B，使得 $XB=X$.

即$\begin{pmatrix} A \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}B = \begin{pmatrix} A \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}$，得 $AB=A$，此时命题成立.

综上，命题成立.

五、（共 10 分）已知 n 阶可逆矩阵 A,B 满足 $AB=BA$，求证：$r\begin{pmatrix} A & B \\ B^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix} = n$.

证明：由条件，$B^{-1}ABB^{-1}=B^{-1}BAB^{-1}$，即 $B^{-1}A=AB^{-1}$.

故有$\begin{pmatrix} I & O \\ -B^{-1}A^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A^{-1} - B^{-1}A^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A^{-1} - B^{-1}BA^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}$.

又$\begin{pmatrix} I & O \\ -B^{-1}A^{-1} & I \end{pmatrix}$为可逆矩阵，故$r\begin{pmatrix} A & B \\ B^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix} = n$.

六、（共 15 分）已知向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n (n > 2)$线性无关.求证：

（1）向量组$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \alpha_1 + \alpha_2, \cdots\cdots$，$\alpha_1 + \alpha_n$线性无关；

（2）若向量 β,γ 使得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\gamma$ 等价，且向量组 $\alpha_1-\beta,\alpha_2-\beta,\cdots\cdots$，$\alpha_n-\beta$ 线性相关，则 γ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示.

证明：(1) 记 $\beta_1=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$，$\beta_k=\alpha_1+\alpha_k(k=2,3,\ldots,n)$，则有：

$$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix}1&1&\ldots&1\\1&1&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&1\end{pmatrix}$$，故要证向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 线性无关，只需

证 $\begin{pmatrix}1&1&\ldots&1\\1&1&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&1\end{pmatrix}$ 可逆，即 $\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1\\1&1&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&1\end{vmatrix}\neq 0$.

而 $\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1\\1&1&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-n&&&\\1&1&&\\\vdots&&\ddots&\\1&&&1\end{vmatrix}=2-n\neq 0(n>2)$，故命题得证.

(2)由条件，存在不全为零的实数 $c_1,\ldots,c_n$，使得 $c_1(\alpha_1-\beta)+c_2(\alpha_2-\beta)+\ldots+c_n(\alpha_n-\beta)=\theta$.

则有 $\beta=\frac{c_1}{\sum_{k=1}^n c_k}\alpha_1+\frac{c_2}{\sum_{k=1}^n c_k}\alpha_2+\ldots+\frac{c_n}{\sum_{k=1}^n c_k}\alpha_n$，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，秩为 r.

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\gamma$ 线性相关，秩为 r，又 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\gamma$ 的一个极大无关组，

故 γ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示.

七、(共 10 分)求证：数域 Ω 上的多项式 f 与 g 互质的充要条件是，对任意 n 阶方阵 A，$f(A)x=0$ 与 $g(A)x=0$ 的解空间的交集中的元素只有零向量.

证明：充分性.若多项式 f 与 g 互质，则存在多项式 m,n 使得 $mf+ng=1$.对任意 n 阶方阵 A，设 a 为 $f(A)x=0$ 与 $g(A)x=0$ 的解空间的交集中的元素，则有 $a=m(A)f(A)a+n(A)g(A)a=0$.

必要性.若对任意 n 阶方阵 A，$f(A)x=0$ 与 $g(A)x=0$ 的解空间的交集中的元素只有零向量.

设 f 与 g 的最大公因式为 d，有 $mf+ng=d$.设 $f=Fd$，$g=Gd$，有 $(F,G)=1$，有 $(mF+nG-1)d=0$.

对任意 n 阶方阵 A，有：$(m(A)F(A)+n(A)G(A)-I)d(A)=0$.设向量 a 为 $f(A)x=0$ 的解空间中的任一非零元素，则 $g(A)a\neq0$.若 $d\neq1$，只可能有 $F(A)a=0$（$d(A)a\neq0$.），故 $n(A)G(A)a-a=0$.

故 $n(A)G(A)=I$，即，$n(A)$ 与 $G(A)$ 互逆，但由于多项式 n 有无穷多种取法，故 $n(A)$ 不可能相同，这与逆矩阵唯一性矛盾，故只有 $d=1$，即 f 与 g 互质.