第四次讨论班习题

1.设

$$\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$$

则下列哪个条件能使得$\{x_n\}$收敛？如果不能，请举出反例；如果能，请证明。

(1)$\{x_n\}$是单调的；

(2)$\{x_n\}$是有界的；

(3)$\{x_{2n}\}$单调递增，$\{x_{2n+1}\}$单调递减；

(4)$\{x_{2n}\}$,$\{x_{2n+1}\}$之一是收敛的。

2.求下列极限。

(1)$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n^3}$

(2)$\lim_{n\to 0}\frac{\sin\omega n}{n}$($\omega$ 是一个常数)

(3)$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{kn}$

3.试证明下列命题：

(1)设有数列a_n,若$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$,则$lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$

(2)设$\lim_{n\to\infty}a_n=a$.若$\lim_{n\to\infty}n(a_{n+1}-a_n)=l$,则$l=0$

4.试证明下列命题：

(1)不存在极限$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

(2)$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$

5.试证明下列命题：

(1)设$f(x)$,$g(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的周期函数，若有$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$,则有$f(x)=g(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$

(2)设$f(x)$是$(-a,a)$上的正值函数，若有$\lim_{x\to\infty}[f(x)-1/f(x)]=2$,则$lim_{x\to+\infty}f(x)=0$