

南京大学数学系试卷 ( A 卷 )

2018/2019
学年第一学期
考试形式
闭卷
课程名称
数学分析

班级
学号
姓名

考试时间
2019.1.13
任课教师
梅加强等
考试成绩

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一. 简答题. (每题 15 分, 共 30 分)

(1) 请完整地叙述 Newton-Leibniz 公式, 并谈谈你对它的认识和体会.

(2) 请完整地叙述 Lagrange 中值定理, 并举一例以展现其应用.

二. 计算题. (每题 8 分, 共 40 分)

(1) 求函数  $f(x) = x^{2018}e^{-x}$  在  $\mathbb{R}$  中的极值; (2) 求积分  $\int_a^b (x - a) \left[ x - \frac{a + b}{2} \right]^2 (b - x) \, dx$ ;

(3) 求积分  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$ ; (4) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \ln^2(1 + x)}{x \sin^2 x}$ ;

(5) 利用高阶导数的 Leibniz 公式求  $\ln^2(1 + x)$  的 Maclaurin 展开 (即原点处的 Taylor 展开).

三. 综合题. (每题 10 分, 共 20 分)

(1) 证明: 当  $x \geq 0$  时,  $\sin^2 x - x^2 + \frac{1}{3}x^4 \geq 0$ .

(2) 记  $f(x) = \int_0^x \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \, dt$ , 求  $f$  的显式表达式, 并证明它是凸函数.

四. 证明题. (每题 5 分, 共 10 分)

(1) 设  $f$  在  $[0, \infty)$  中二阶可导, 且  $|f''| \leq |f|$ . 如果  $f(0) = f'(0) = 0$ , 证明  $f \equiv 0$ .

(2) 设  $\alpha \geq 1$ . 证明  $\frac{1}{\alpha + 1/2} < \int_0^1 e^t (1-t)^\alpha \, dt < \frac{1}{\alpha}$ .

五. 附加题 ( 10 分): 设  $f$  在  $(0, \infty)$  中二阶可导. 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \beta \in \mathbb{R}$ , 且  $f''(x) = O(1/x)$  ( $x \rightarrow \infty$ ), 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \beta$ .