吉林大学2016-2017学年第一学期“数学分析Ⅰ”期末考试试题

参考解析

一、（共8分）叙述连续函数在闭区间上的有界性定理并对其进行证明.

解：[连续函数在闭区间上的有界性定理]若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则存在$M>0$，使得$f(x)$满足$|f(x)|\le M$在闭区间$[a,b]$上恒成立.

[证明]假设$f(x)$在$[a,b]$无界，二等分区间$[a,b]$，则存在一子区间$[a_1,b_1]$，使$f(x)$在$[a_1,b_1]$上无界.再二等分$[a_1,b_1]$，则同样可以得到一个子区间$[a_2,b_2]$，使$f(x)$在$[a_2,b_2]$上无界，如此下去可得一闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，$f(x)$在任意$[a_n,b_n]$无界，$b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0(n\to\infty)$，由闭区间套定理可以推知存在$\exists\xi\in[a_n,b_n],\forall n$.由$f(x)$在$\xi$处的连续性知，存在$\delta>0$，使$f(x)$在$[a,b]\bigcap U(\xi,\delta)$有界，而$n$充分大时，$[a,b]\subset U(\xi,\delta)$，这与$f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界矛盾.

二、（共10分）用定义证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{n^2-3}=4$；（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16}{25x^2-9}=1$.

证明：（1）对任意$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\dfrac{2}{13\varepsilon}\right]+2$，使得$\forall n>N$：

$|\dfrac{4n^2+3}{n^2-3}-4|=|\dfrac{13}{n^2-3}|<|\dfrac{13}{2n}|<\varepsilon$.故由定义知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{n^2-3}=4$.

（2）对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta=\min\{\dfrac{1}{5},\dfrac{3\varepsilon}{11}\}$，使得$\forall x:0<|x-1|<\delta$，有：

$|\dfrac{16}{25x^2-9}-1|=|\dfrac{25x+25}{25x^2-9}||x-1|<\dfrac{11}{3}|x-1|<\dfrac{11}{3}\delta<\varepsilon$.故由定义知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16}{25x^2-9}=1$.

三、（共24分）计算下列各题.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(1-n\sin\dfrac{1}{n})$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}$；

（3）$\int a^{\cos x}\sin xdx,a>0\wedge a\ne 1$；（4）$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(1-n\sin\dfrac{1}{n})\overset{Heine}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(1-x\sin\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan+\dfrac{\tan^3 x}{3}-\sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3}}{\tan x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{\tan^2 x+\tan x\sin x+\sin^2 x}{3})=1$.

（3）$\int a^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x=-\int a^{\cos x}\mathrm{d}\cos x=-\dfrac{a^{\cos x}}{\ln a}$.

（4）$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x=\int t\mathrm{d}\sinh t=t\sinh t-\int\sinh t\mathrm{d}t=t\sinh t-\cosh t+C$.

四、（共 24 分）按要求计算下列导数或微分.

（1）设 $f(x)=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a},a>0$，求 $f'(x)$；

（2）设 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$，求 $f^{(2017)}(0)$；

（3）已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $\sin(x+y)-xy=0$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（4）已知 $x=\ln(1+t^2)+1,y=2\arctan t-(t+1)^2$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：（1） $f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{a^2-x^2}$.

（2）由 *Leibniz* 定理，$f^{(2017)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{2017}(x^2)^k(\mathrm{e}^{-x})^{2017-k}=-C_{2017}^0x^2\mathrm{e}^{-x}+C_{2017}^1 2x\mathrm{e}^{-x}-C_{2017}^2 2\mathrm{e}^{-x}$

故 $f^{(2017)}(0)=-2C_{2017}^2=-4066272$.

（3）在方程 $\sin(x+y)-xy=0$ 两端同时对 x 进行微分，得：

$(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\cos(x+y)-y-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，从而可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x}$.

在方程 $(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\cos(x+y)-y-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 两端同时对 x 进行微分，得：

$-(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2\sin(x+y)+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\cos(x+y)-2\dfrac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x}-x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，即为：

$$-(1+\frac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x})^2\sin(x+y)+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\cos(x+y)-2\frac{y-\cos(x+y)}{\cos(x+y)-x}-x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

可得：$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(y-x)^2\sin(x+y)}{(\cos(x+y)-x)^3}-2\dfrac{y-\cos(x+y)}{(\cos(x+y)-x)^2}$.

（4）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=[\dfrac{2}{1+t^2}-2(t+1)]\cdot\dfrac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{-2t^3-2t^2-2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{1+t^2}{2t}=-t^2-t-1$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(-2t-1)\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{(1+2t)(1+t^2)}{2t}.$$

五、（共 16 分）证明题.

（1）已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=3x_n(1-x_n)$，试讨论其敛散性，并说明理由.若其收敛，请求出极限；

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0,a\neq0$.求证：函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

证明：（1）断言其收敛，极限为 1.先用归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调递增且范围为 $(\dfrac{1}{2},1)$.

①$n=1$ 时，由条件知 $x_2=\dfrac{3}{4}$，故结论成立.

②假设 $n=k$ 时命题成立，即 $x_{k+1}>x_k$ 且 $x_{k+1}\in(0,1)$.则在 $n=k+1$ 时，有

$\dfrac{x_{k+2}}{x_{k+1}}=3(1-x_{k+1})>0$，且 $x_{k+2}=3x_{k+1}(1-x_{k+1})\in(\dfrac{1}{2},1)$.故命题成立，从而易知原命题成立.

（2）我们先来证明 $g(x)=f(x)-(ax+b)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续.对 $\forall\varepsilon>0,\exists M>1$，当 $x>M$ 时有 $|g(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立.又由 $Cantor$ 定理知 $g(x)$ 在 $[1,M+1]$ 上一致连续.因此对上述 ε，存在 $\delta>0$，使得当 $x_1,x_2\in[1,M+1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$ 成立.
我们不妨令 $\delta\in(0,1)$，则在 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$ 成立.
事实上，若 $x_1,x_2\in[1,M+1]$，则命题已成立.又若 $x_1,x_2>M$，则有
$|g(x_1)-g(x_2)|\le|g(x_1)|+|g(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.故 $g(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续得证.
再证明原命题，由 $g(x)$ 一致连续与 $h(x)=-(ax+b)$ 一致连续，可得对 $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$，易见 $|f(x_1)-f(x_2)|<|h(x_1)-h(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$ 成立.故命题得证.

六、（共 13 分）设函数 $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.求：
（1）函数 $f(x)$ 的单调区间；（2）函数 $f(x)$ 的凹凸区间；（3）函数 $f(x)$ 的渐近线.
解：（1） $f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\dfrac{x+2}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
故 $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(-1,0)\cup(0,2)$ 时，$f'(x)<0$.
故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1),(2,+\infty)$，单调减区间为 $(-1,0),(0,2)$.
（2） $f''(x)=-\dfrac{x^2-x-2}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\dfrac{x^2+4x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\dfrac{5x+2}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
故 $x\in(-\dfrac{2}{5},0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$；$x\in(-\infty,\dfrac{2}{5})$ 时，$f''(x)<0$.
故 $f(x)$ 的下凸区间为 $(-\dfrac{2}{5},0),(0,+\infty)$，上凸区间为 $(-\infty,\dfrac{2}{5})$.
（3）因 $\lim\limits_{x\to0^+}(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty,\lim\limits_{x\to0^-}(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，故 $x=0$ 为铅直渐近线.又 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$，故函数无水平渐近线.而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x]=3$，故其有渐近线 $y=x+3$.

七、（共 5 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 可导，且存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$，求证存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.
证明：设 $F(x)=[f(x)-f(a)]e^{-\frac{x}{b-a}}$，有 $F'(x)=[f'(x)-\dfrac{f(x)-f(a)}{b-a}]e^{-\frac{x}{b-a}}$，它们都连续.
①若 $\dfrac{f(c)-f(a)}{b-a}=0$，则 $f'(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{b-a}$，命题成立；
②若 $\dfrac{f(c)-f(a)}{b-a}>0$，则 $F'(c)<0,F(c)>0$.故 $\exists\delta>0,x\in(c-\delta,c)$ 时，$F(x)>F(c)$，又 $F(a)=0<F(c)$，故 $\exists\xi\in(a,c),F(\xi)>0$ 是上的最大值，故 $F'(\xi)=0$，即命题成立.
③若 $\dfrac{f(c)-f(a)}{b-a}<0$，则 $F'(c)>0,F(c)<0$.故 $\exists\delta>0,x\in(c-\delta,c)$ 时，$F(x)<F(c)$，又 $F(a)=0>F(c)$，故 $\exists\xi\in(a,c),F(\xi)>0$ 是上的最小值，故 $F'(\xi)=0$，即命题成立.