第 13 讲：幂级数的进一步讨论 2019.4.7

1. 证明 $\mathbb{C}\setminus\{1/n; n\geq 1\}$ 上的有界全纯函数必为常数.

进一步，是否存在非常值全纯函数 $f:\mathbb{C}\setminus\{1/n; n\geq 1\}\to\mathbb{H}=\{z;\Im(z)>0\}$？证明你的结论.

2. 利用 Morera 定理证明 Riemann 可去奇点定理的原始形式：假设 a 是 f 的孤立奇点, 如果 f 在 a 处连续，则 a 是 f 的可去奇点.

(提示：考虑沿三角形边界的积分，讨论奇点与三角形的位置关系)

3. 假设 f 在原点邻域内全纯, 如果存在常数 $\rho\in(0,1), C>1$, 使得对充分大的自然数 n, 总有

$$f\big(1/n\big)\leq C\rho^n,\ \forall n\geq N.$$

证明 $f\equiv 0$.

4. 利用幂级数展开证明最大模原理：给定 $D(a,R)$ 上的非常值全纯函数 f，证明: 存在 $b\in D(a,R)$, 满足 $|f(b)|>|f(a)|$.

5. 假设 $f:D(0,r)\to\mathbb{C}$ 全纯，幂级数展式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 满足

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|r^{n-1}\leq|a_1|.$$

证明 f 是单射.

6. 假设 Ω 是平面有界区域, $f:\Omega\to\Omega$ 全纯, $z_0\in\Omega$. 如果 f 满足 $f(z_0)=z_0$, 证明 $|f'(z_0)|\leq 1$.

(提示：迭代想法的乐趣，你体验了吗？)