5. 用活动幺正标架法计算下列第一基本形式的 Gauss 曲率:

(1) $I = \dfrac{4((\mathrm{d}\,u^1)^2 + (\mathrm{d}\,u^2)^2)}{[1-(u^1)^2-(u^2)^2]^2}$;

(2) $I = \dfrac{(\mathrm{d}\,u^1)^2 + (\mathrm{d}\,u^2)^2}{(u^2)^2}$;

(3) $I = \dfrac{1}{4(u^1-(u^2)^2)}[(\mathrm{d}\,u^1)^2 - 4u^2\,\mathrm{d}\,u^1\,\mathrm{d}\,u^2 + 4u^1(\mathrm{d}\,u^2)^2]$.

6. 利用 (4.22) 证明: 在正交网下 Gauss 曲率为

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\left(\frac{(\sqrt{g_{11}})_2}{\sqrt{g_{22}}}\right)_2 + \left(\frac{(\sqrt{g_{22}})_1}{\sqrt{g_{11}}}\right)_1\right],$$

其中下标 α 表示关于 u^α 的偏导数.

7. 证明: 在曲率线网下, Codazzi 方程化为

$$(h_{11})_2 = H(g_{11})_2, \quad (h_{22})_1 = H(g_{22})_1,$$

其中 H 为曲面的平均曲率. 由此证明: 除平面和球面外, 平均曲率为常数的曲面的第一和第二基本形式可化为:

$$I = \rho^2[(\mathrm{d}\,u^1)^2 + (\mathrm{d}\,u^2)^2], \quad II = (1+H\rho^2)(\mathrm{d}\,u^1)^2 - (1-H\rho^2)(\mathrm{d}\,u^2)^2.$$

8. 已给曲面 $M : x = \left(au^1, bu^2, \dfrac{a(u^1)^2+b(u^2)^2}{2}\right)$ 和曲面 $\overline{M} : \overline{x} = \left(\overline{a}\,\overline{u}^1, \overline{b}\overline{u}^2, \dfrac{\overline{a}(\overline{u}^1)^2+\overline{b}(\overline{u}^2)^2}{2}\right)$ ($a, b, \overline{a}, \overline{b}$ 都为常数). 证明: 当 $ab = \overline{a}\overline{b}$ 时, 在点 (u^1, u^2) 与 $(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$ 处有相等的 Gauss 曲率, 但它们不能等距对应.

9. 用活动幺正标架法计算下列圆环面 T^2 的平均曲率和 Gauss 曲率:

$$x(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u),$$

其中 $b < a, 0 \leqslant u < 2\pi, 0 \leqslant v < 2\pi, a, b$ 为常数.

10. 已给两个微分二次型:

$$I = [1+(u^1)^2](\mathrm{d}\,u^1)^2 + (u^1)^2(\mathrm{d}\,u^2)^2, \quad II = \frac{(\mathrm{d}\,u^1)^2 + (u^1)^2(\mathrm{d}\,u^2)^2}{\sqrt{1+(u^1)^2}},$$

求曲面 M, 使得它的第一和第二基本形式就是上述的 I 和 II.

8. 证明下列曲面之间不存在等距对应:

(1) 球面; (2) 柱面; (3) 鞍面$z = x^2 - y^2$.

9. 证明: 曲面S : $\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin v, \ln u)$与$\bar{S}$: $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{u}\cos\bar{v}, \bar{u}\sin\bar{v}, \bar{v})$在点$(u,v)$与$(\bar{u},\bar{v})$处总曲率相等, 但$S$与$\bar{S}$不存在等距对应.

11. 利用曲面论基本定理证明: 不存在曲面, 使

$$E = G = 1,\ F = 0; \quad L = 1,\ M = 0,\ N = -1$$

又: 是否存在曲面, 使

$$E = 1,\ F = 0,\ G = \cos^2 u; \quad L = \cos^2 u,\ M = 0,\ N = 1$$

12. 设曲面的第一, 第二基本形式为

$$\mathrm{I} = \mathrm{II} = du^2 + \cos^2 u dv^2$$

证明: 曲面是单位球面.