

第 32 讲 Blaschke 乘积

1. 假设 B 是一个有限 Blaschke 乘积, 证明当 $|z| = 1$ 时, $B'(z) \neq 0$.

2. 对任意有限 Blaschke 乘积 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 证明

$$\prod_{a \in f^{-1}(\zeta)} |a| = \left| \frac{\zeta - f(0)}{1 - \overline{f(0)}\zeta} \right|, \zeta \in \mathbb{D}.$$

如果考虑满足 Blaschke 定理条件的无限 Blaschke 乘积, 上式还成立吗? 说明理由.

3. (本节最漂亮的一个问题: 互补律) 对任意两个有限 Blaschke 乘积 $f, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, 证明互补律:

$$\prod_{f(a)=g(0)} |a| = \prod_{g(b)=f(0)} |b|.$$

上式的值是多少?