微分几何第二周作业

教材P6.

10. 设曲线$x_2(t)$在曲线$x_1(t)$的切线上，并且在对应点它们的切向量相互正交，则$x_2(t)$称为$x_1(t)$的渐伸线，而$x_1(t)$称为$x_2(t)$的渐缩线。现设$x(s)$是弧长为参数的曲线，$x_1(t)$与$x_2(t)$是$x(s)$的两条不同的渐伸线。证明：$x_1(t)$与$x_2(t)$为Bertrand曲线对的充要条件是$x(s)$为平面曲线。

12. 证明：曲线C的切线的球面标线为（部分）大圆的充要条件是C为平面曲线；曲线的主法线的球面标线永远不为常值曲线。

P13.

1. 设在 $\mathbf{E}^3$ 中已给曲面 $f(x^1, x^2, x^3) = 0$, 其中 f 是光滑函数, 求该曲面的单位法向量和第一基本形式. 证明: 曲面 $x^1x^2x^3 = c^3$ (c 为常数) 在任何点的切平面与三个坐标平面所围成的四面体的体积是常数.

2. 计算下列 Möbius 曲面的单位法向量:

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u, \sin u, 0) + v\left(\sin\frac{u}{2}\cos u, \sin\frac{u}{2}\sin u, \cos\frac{u}{2}\right) \quad (-\pi < u < \pi,\ -\varphi < v < \varphi).$$

3. 下列方程中, 设 $a > b > c$ 为常数:

$$\frac{(x^1)^2}{a-\lambda} + \frac{(x^2)^2}{b-\lambda} + \frac{(x^3)^2}{c-\lambda} = 1.$$

当 λ 分别在以下三个区间: $(-\infty, c)$、(c, b)、(b, a) 取值时, 我们分别可得一族椭球面、一族单叶双曲面和一族双叶双曲面. 证明: 过空间不在坐标平面上的每一点, 都有这三族曲面的一张通过, 并且它们在该点相互正交 (**三重正交系**).

5. 若曲面上的参数曲线所构成的四边形对边长相等, 则称为 **Chebyshev 网**. 证明: 在 Chebyshev 网下, 曲面的第一基本形式可化为

$$I = (\mathrm{d}\,u^1)^2 + 2\cos\theta\,\mathrm{d}\,u^1\,\mathrm{d}\,u^2 + (\mathrm{d}\,u^2)^2,$$

其中 θ 是参数曲线之间的交角. 例如, 平移曲面 $\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{a}(u) + \mathbf{b}(v)$ 的参数网就构成 Chebyshev 网.

6. 证明: 单位球面 $\mathbf{x} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ 的第一基本形式是 $I = \cos^2\theta(\mathrm{d}\,\varphi)^2 + (\mathrm{d}\,\theta)^2$. 令 $x^1 = \varphi,\quad x^2 = \ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 证明: 球面 I 可与平面 $\bar{I} = (\mathrm{d}\,x^1)^2 + (\mathrm{d}\,x^2)^2$ 共形对应 (Mercator 地图法).

8. 球面上与子午线交成定角的曲线称为**斜驶线**. 求斜驶线的方程.