**注**：若无特别说明，用 $\widehat{f}$ 表示 $f$ 的 Fourier 变换，用 $f^{\vee}$ 表示 Fourier 逆变换.

**练习 1.** 假设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 求证：$\widehat{f}$ 与 $f^{\vee}$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界、连续函数.

**练习 2.** 完成下列问题：

(i) 假设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 求证：当 $|\xi| \to \infty$ 时，$\widehat{f}(\xi) \to 0$. (提示：取 $\xi' = \frac{1}{2}\frac{\xi}{|\xi|^2}$，试将 $\widehat{f}$ 写成 $\widehat{f}(\xi)\frac{1}{2}\int[f(x) - f(x-\xi')]e^{-2\pi i\cdot\xi}dx$.)

(ii) 作为 (i) 的推论，证明：如果 $f$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的可积函数，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx = 0.$$

(iii) 假设 $f$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的可积函数，$E$ 是 $[0, 2\pi]$ 的可测子集，$\{t_k\}$ 是任一数列，求证：

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \cos^2(kx + t_k)dx = \frac{m(E)}{2}.$$

**练习 3.** 假设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 证明如下两个性质.

(i) $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi$.

**练习 4.** 考察 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$. 求证：其傅里叶变换为 $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.

**练习 5.** 假设 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的光滑函数. 我们使用记号 $f(x) \longrightarrow g(\xi)$ 表示 $f$ 的傅里叶变换是 $g$. 求证：

$$\text{(i) } \partial_{x^\alpha} f(x) \longrightarrow (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \quad \text{以及} \quad \text{(ii) } (-2\pi i x)^\alpha f(x) \longrightarrow \partial_{\xi^\alpha}\widehat{f}(\xi)$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots)$ 表示多重指标 ($\alpha_i$ 中仅有限项不为 0)，$\partial_{x^\alpha} = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_k}^{\alpha_k}\cdots$，并且 $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_k^{\alpha_k}\cdots$.

**练习 6.** 试用 Fourier 变换的方法得到全直线 $\mathbb{R}$ 上的常微分方程 $\frac{d^2}{dx^2}u + u = f$ 解的表达式.

**练习 7.** 试说明在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的光滑函数构成的集合 (常记为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$) 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中关于由范数 $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ 诱导的度量稠密. 即：对于任何 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，存在一列 $g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得 $\|g_k - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$.