2016-2017学年春夏学期实变函数期末试卷

July 3，2017

1.设$0 < \alpha < 1$,证明：$x^{-\alpha} \in L([0,1])$

2.若$1 < p < \infty$,证明：$f(x) = \frac{sinx}{x} \in L^p((0,\infty))$
$f \in L^1((0,\infty))$吗？$f \in L^\infty((0,\infty))$吗？

3.设f在$\mathcal{R}$上连续，证明：若f把任何零测集映成零测集，则f把任何可测集映成可测集。

4.设f在$\mathcal{R}$上可微，证明：$f'(x)$可测,且若$f' = 0\ a.e. x \in \mathcal{R}$,则有$f$在$\mathcal{R}$上恒为常数。

5.设f、f_n是可测集D上几乎处处有限的可测函数。
（i）叙述f_n在D上依测度收敛至f的定义；
（ii）证明：若f_n在D上近一致收敛至f，则f_n在D上依测度收敛至f；
（iii）举例说明（ii）中结论反之不成立。

6.设$f \in L(\mathcal{R})$,证明：如果对任意开集G有：$\int_G f(x)dx = \int_{\overline{G}} f(x)dx$,则有：$f = 0\ a.e. x \in \mathcal{R}$

7.设$f \in L(\mathcal{R})$,证明：

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{\mathcal{R}} |f(x-h) + f(x)|\, dx = 2 \int_{\mathcal{R}} |f(x)|\, dx$$