2019-2020春学期《微分几何》第一周作业

$(P_{5,6}: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9)$.

2. **证明** $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{|\mathbf{x}'(t)|}$. 设曲线的弧长参数为$s$, 则$s'(t) = |\mathbf{x}'(t)|$, 所以

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}(t)s'(t),$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}''(t) &= \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}s'(t) + \mathbf{T}(t)s''(t) \\
&= \frac{d\mathbf{T}(t)}{ds}(s'(t))^2 + \mathbf{T}(t)s''(t) \\
&= k(t)\mathbf{N}(t)(s'(t))^2 + \mathbf{T}(t)s''(t),
\end{aligned}$$

故

$$\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) = k(t)(s'(t))^3\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = k(t)(s'(t))^3\mathbf{B}(t).$$

由此得到曲线的曲率是

$$k(t) = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{(s'(t))^3} = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3},$$

从法向量

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)}{|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)|}.$$

这样, 曲线的主法向量

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t).$$

由定义

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= -\left(\mathbf{B}'(t)\frac{dt}{ds}\right)\mathbf{N}(t) = -\frac{1}{|\mathbf{x}'(t)|}\mathbf{B}'(t)\mathbf{N}(t) \\
&= -\frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''')(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' \times \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'|^2|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2} = \frac{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

3. **解** 知圆柱螺线弧长参数方程为$\mathbf{x}(s) = (r\cos\sigma s, r\sin\sigma s, a\sigma s)$. 其切向量$\mathbf{T}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s) = \sigma(-r\sin\sigma s, r\cos\sigma s, a)$,主法向量$\mathbf{N}(s) = \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{|\ddot{\mathbf{x}}|} = (-\cos\sigma s, -\sin\sigma s, 0)$, 从法向量$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \sigma(a\sin s, -a\cos\sigma s, r)$, 中心轴$\mathbf{Z} = (0, 0, 1)$. 因$\mathbf{NZ} = 0$, $\mathbf{BZ} = \sigma r =$定值. 故主法线与中心轴正交, 从法线与中心轴成定角.

该圆柱螺线曲率$k(s) = \frac{1}{\rho(s)} = \sigma^2 r$, 得曲率中心为$\mathbf{x}(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s) = ((r - \frac{1}{\sigma^2 r})\cos\sigma s, (r - \frac{1}{\sigma^2 r})\sin\sigma s, a\sigma s) = (b\cos\sigma s, b\sin\sigma s, a\sigma s)$, 显然也是圆柱螺线. $\blacksquare$

4. **解** 由$\mathbf{x}^2 = 1$, 得$\mathbf{xT} = 0$, 对s求导, $\mathbf{T}^2 + \mathbf{x}\dot{\mathbf{T}} = 0$, 即$\mathbf{x}\dot{\mathbf{T}} = -1$. 取$\mathbf{e} = \mathbf{x}, \mathbf{f} = \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{g} = \mathbf{e} \times \mathbf{f}$, 则$\mathbf{e}\dot{\mathbf{f}} = -1$, 故$\dot{\mathbf{f}} = -\mathbf{e} + \lambda(s)\mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{f} + \mathbf{e} \times \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{e} \times (-\mathbf{e} + \lambda(s)\mathbf{g}) = \lambda(s)\mathbf{e} \times \mathbf{g} = -\lambda\mathbf{f}$. $\blacksquare$

5. $\mathbf{T}(s)=(\dot{x}^1(s),\dot{x}^2(s))$, 由$\{\mathbf{T}(s),\mathbf{N}(s)\}$为右手系, 知

$$\mathbf{N}(s)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\mathbf{T}(s)=(-\dot{x}^2(s),\dot{x}^1(s)),$$

$\ddot{\mathbf{x}}(s)=k_r(s)\mathbf{N}(s)=k_r(s)(-\dot{x}^2(s),\dot{x}^1(s))$. ▌

6. **证明** (1) 设$\mathbf{x}_1$非直线, 以s为弧长参数, 且其所有切线同时是$\mathbf{x}_2$的切线, 则可表为$\mathbf{x}_2(s)=\mathbf{x}_1(s)+\lambda(s)\mathbf{T}_1(s)$. 对$s$求导得$\mathbf{x}_2'=(1+\lambda')\mathbf{T}_1+\lambda k_1\mathbf{N}_1$. 于是$\mathbf{T}_2//(1+\lambda')\mathbf{T}_1+\lambda k_1\mathbf{N}_1$, 但又由假定, $\mathbf{T}_2//\mathbf{T}_1$. 因此$\lambda k_1=0$, 而$\mathbf{x}_1$非直线, 即$k_1\neq 0$, 只能有$\lambda=0$, 从而两曲线重合.

(2) 因圆柱螺线$\mathbf{x}(s)=(r\cos\sigma s,r\sin\sigma s,a\sigma s)$的曲率$k(s)=\sigma^2 r$, 挠率$\tau(s)=\sigma^2 a$, 其中$\sigma=1/\sqrt{r^2+a^2}$. 于是对给定的非零常数$k_0,\tau_0$, 令

$$\sigma^2 r=k_0,\ \sigma^2 a=\tau_0,$$

解得

$$a=\frac{1}{\tau_0(1+\lambda_0^2)},\ r=\frac{\lambda_0}{\tau_0(1+\lambda_0^2)},\ \sigma=|\tau_0|\sqrt{1+\lambda_0^2}\quad\text{其中}\lambda_0=\frac{k_0}{\tau_0}\tag{1}$$

于是r,a,σ取(1)式值时的圆柱螺线满足曲率为k_0, 挠率为τ_0. 由曲线论基本定理, 在只差空间的一个运动下, 曲线是唯一确定的, 于是曲率和挠率都是常数的正则曲线必是圆柱螺线.▌

8. **证明** (1) 对任意平面弧长参数曲线$\mathbf{x}_1(s)$, 令$\mathbf{x}_2(s)=\mathbf{x}_1(s)+\lambda\mathbf{N}_1(s)$, 其中$\lambda$为常数. 则$\mathbf{x}_2'(s)=\mathbf{T}_1(s)+\lambda\dot{\mathbf{N}}_1(s)=(1-\lambda k_1(s))\mathbf{T}_1(s)$, 其中$k_1(s)$为$\mathbf{x}_1(s)$的曲率. 于是有$\mathbf{T}_2=\pm\mathbf{T}_1$. 从而$\mathbf{N}_2=\pm\mathbf{N}_1$, 因此它们为Bertrand曲线.

(2) 必要性: C_1,C_2为Bertrand曲线, 则$\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1+\lambda\mathbf{N}_1$, λ为常数. $\mathbf{x}_2'=(1-k_1)\mathbf{T}_1+\lambda\tau_1\mathbf{B}_1$, $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2=\cos\theta=$const. 由

$$\cos\theta=\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2=\mathbf{T}_1\mathbf{x}_2'\frac{ds_1}{ds_2}=\left|(1-\lambda k_1)\frac{ds_1}{ds_2}\right|=\text{const},$$

因而

$$|\sin\theta|=|\mathbf{T}_1\times\mathbf{T}_2|=\left|\lambda\tau_1\frac{ds_1}{ds_2}\right|=\text{const}.$$

消去$\frac{ds_1}{ds_2}$, 得$\frac{1-\lambda k_1}{\lambda\tau}=\text{const}$, 即可找到$\mu$, 使$\lambda k_1+\mu\tau_1=1$.

充分性: 已知曲线C_1满足$\lambda k_1+\mu\tau_1=1$, 作曲线C_2: $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1+\lambda\mathbf{N}_1$, 则$\mathbf{x}_2'=(1-\lambda k_1)\mathbf{T}_1+\lambda\tau_1\mathbf{B}_1=\tau_1(\mu\mathbf{T}_1+\lambda\mathbf{B}_1)$. 单位化, 得

$$\mathbf{T}_2=\frac{\mu\mathbf{T}_1+\lambda\mathbf{B}_1}{\lambda^2+\mu^2},\ \mathbf{T}_2'=\frac{\mu k_1-\lambda\tau_1}{\lambda^2+\mu^2}\mathbf{N}_1,$$

从而$\mathbf{N}_2=\pm\mathbf{N}_1$, 曲线$C_1$与$C_2$为Bertrand曲线. ▌

9. **解** 因$c \neq 0$, 故曲线非平面曲线. 首先由已知及弧长参数s下的Frenet公式有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= k\mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} &= -k\mathbf{T} + ck\mathbf{B} \\ \dot{\mathbf{B}} &= -ck\mathbf{N}. \end{aligned}$$

下令$t(s) = \int_0^s k(\theta)d\theta$, 则$\frac{dt}{ds} = k$, 此时公式化为

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{N} \tag{2}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = -\mathbf{T} + c\mathbf{B} \tag{3}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -c\mathbf{N}. \tag{4}$$

先对(2)式求导得

$$\frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2} = -\mathbf{N} - c^2\mathbf{N} = -r^2\mathbf{N},\ r = \sqrt{1+c^2}.$$

解得

$$\mathbf{N} = \cos rt\boldsymbol{\alpha} + \sin rt\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\text{为常向量}.$$

再由(1)式得

$$\mathbf{T} = \frac{1}{r}(\sin rt\boldsymbol{\alpha} - \cos rt\boldsymbol{\beta}) + d\boldsymbol{\gamma},\ d\text{为常数},\boldsymbol{\gamma}\text{为常向量}.$$

通过调整$\boldsymbol{\gamma}$, 使其前面系数变为$\frac{c}{r}$, 此时

$$\mathbf{T} = \frac{1}{r}(\sin rt\boldsymbol{\alpha} - \cos rt\boldsymbol{\beta} + c\boldsymbol{\gamma}).$$

把$\mathbf{T},\mathbf{N}$代入(2)式, 得

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{r}(c\sin rt\boldsymbol{\alpha} - c\cos rt\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}).$$

在初始位置时, $\{\mathbf{T}(0),\mathbf{N}(0),\mathbf{B}(0)\}$为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(0) &= -\frac{1}{r}\boldsymbol{\beta} + \frac{c}{r}\boldsymbol{\gamma} \\ \mathbf{N}(0) &= \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{B}(0) &= \frac{c}{r}\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{r}\boldsymbol{\gamma}, \end{aligned}$$

与$\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$之间的变换矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{r} & \frac{c}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{r} & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

为正交阵, 于是常向量$\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$应取为单位正交右手标架. 最后对$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}$积分, 得满足题意的曲线方程为

$$\mathbf{x}(s) = \frac{1}{r}\left(\int_0^s \sin rt(\theta)d\theta\boldsymbol{\alpha} - \int_0^s \cos rt(\theta)d\theta\boldsymbol{\beta} + cs\boldsymbol{\gamma}\right) + \boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\delta}\text{为常向量.} \blacksquare$$