浙江大学2014——2015学年春夏学期
《常微分方程》课程期末考试试卷答案

一. 求解下列方程（25分）

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+y^2}$

解: $y=0$是解

当$y=0$时, $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2y}x+\frac{y}{2}$

$$x=C\sqrt{|y|}+\frac{1}{3}y^2, C\text{为任意常数}$$

所以解是$y=0$或$x=C\sqrt{|y|}+\frac{1}{3}y^2$, C为任意常数

2. $2y^2+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4$

解: 设$y=\sqrt{2}\sin t$, $y'=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos t$, $x=x$. 则

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos t=y'=\frac{d(\sqrt{2}\sin t)}{dx}=\sqrt{2}\cos t\frac{dt}{dx}$$

$$t=\frac{\sqrt{10}}{5}x+C\text{或}\cos t=0$$

$$y=\sqrt{2}\sin(\frac{\sqrt{10}}{5}x+C), C\text{为任意常数}$$

或特解$y=\pm\sqrt{2}$

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+5y=x^2\sin(\ln x)$

解: 令$x=e^t$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+5y=e^{2t}\sin t$$

特征方程

$$\lambda^2-4\lambda+5=0,$$
$$\lambda=2\pm i.$$

齐次方程解$Y=c_1e^{2t}\cos t+c_2e^{2t}\sin t$

设非齐次方程解为$y^*=Ate^{2t}\cos t+Bte^{2t}\sin t$, 得到

$$A=-\frac{1}{2}, B=0.$$

$$y=c_1e^{2t}\cos t+c_2e^{2t}\sin t-\frac{t}{2}e^{2t}\cos t$$

$$=c_1x^2\cos\ln x+c_2x^2\sin\ln x-\frac{\ln x}{2}x^2\cos\ln x$$

二. 求解下列方程（组）（25分）

1. 用幂级数法求解$y''+4xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

解：设$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}[a_{n+2}(n+2)(n+1)+4a_{n-1}]x^n=0$$

所以$a_2=0$, $a_{n+2}=\frac{-4a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$, $n=1,2,\dots$ 则

$$a_{3k}=\frac{(-1)^k4^k}{(3k)(3k-1)\dots(3\cdot 2)}a_0=\frac{(-1)^k4^k(3k-2)!!!}{(3k)!}a_0$$

$$a_{3k+1}=\frac{(-1)^k4^k}{(3k+1)(3k)\dots(4\cdot 3)}a_1=\frac{(-1)^k4^k(3k-1)!!!}{(3k+1)!}a_1$$

$$a_{3k+2}=0,\ k=1,2,\dots$$

因为$y(0)=1$, $y'(0)=0$, 所以$a_0=1$, $a_1=0$

$$y=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k4^k(3k-2)!!!}{(3k)!}x^{3k}$$

2.

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2y-5x+e^{-t} & (1)\\ \frac{dy}{dt}=x-6y+e^{-2t} & (2)\end{cases}$$

解：(1)得到

$$y=\frac{1}{2}(x'+5x-e^{-t})$$

代入(2)，

$$x''+11x'+28x=5e^{-t}+2e^{-2t}$$

特征方程$\lambda^2+11\lambda+28=0$

$$\lambda_1=-4,\lambda_2=-7$$

齐次方程解

$$X=c_1e^{-4t}+c_2e^{-7t}$$

设$x''+11x'+28x=5e^{-t}$解为$x_1^*=Ae^{-t}$，则$A=\frac{5}{18}$, $x_1^*=\frac{5}{18}e^{-t}$
设$x''+11x'+28x=2e^{-2t}$解为$x_2^*=Be^{-2t}$，则$B=\frac{1}{5}$, $x_2^*=\frac{1}{5}e^{-2t}$

$$x=c_1e^{-4t}+c_2e^{-7t}+\frac{5}{18}e^{-t}+\frac{1}{5}e^{-2t}$$

则

$$y=\frac{c_1}{2}e^{-4t}-c_2e^{-7t}+\frac{1}{18}e^{-t}+\frac{3}{10}e^{-2t}$$

3.

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}+x-2z=0 & (1)\\ \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}+x=0 & (2)\\ \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}+x+2y=0 & (3)\end{cases}$$

解：(1)+(2)得$2x'-2y'+2x-2z=0$ (4)
(1)+(3)得$2x'-2z'+2x+2y-2z=0$ (5)

(2)+(3)得$2x'+2x+2y=0$ (6)
(5)-(6)得$z'+z=0$,

$$z=c_1e^{-t}$$

(4)-(5)得$-2y'+2z'-2y=0$

$$y'+y=-c_1e^{-t}$$

$$y=c_2e^{-t}-c_1te^{-t}$$

代入(6)得$x'+x+c_2e^{-t}-c_1te^{-t}=0$

$$x=c_3e^{-t}+\frac{c_1}{2}t^2e^{-t}-c_2te^{-t}$$

三.（20分）对于系统$\begin{cases} x'=1-x+y-x^2 \\ y'=x(x-y) \end{cases}$ 找出所有平衡点（奇点），写出关于这些平衡点所相应的线性化系统，判断平衡点的类型，并画出平衡点附近相图的草图。

解: 奇点: $M_1(0,-1)$, $M_2(1,1)$, $M_3(-1,-1)$

$M_1(0,-1)$所相应的线性化系统$\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=x \end{cases}$

$$A_1=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

特征$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, 鞍点

$$k=\frac{1}{-1+k},\ k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$(1,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})$点$x'>0$, $y'>0$

$M_2(1,1)$所相应的线性化系统$\begin{cases} x'=-3x+y \\ y'=x-y \end{cases}$

$$A_2=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

特征$\lambda=-2\pm\sqrt{2}$, 稳定结点

$$k=\frac{1-k}{-3+k},\ k=1\pm\sqrt{2}$$

$\frac{dy}{dx}|_{y=x}=0<1$

$M_3(-1,-1)$所相应的线性化系统$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=-x+y \end{cases}$

$$A_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

特征$\lambda=1\pm i$, 不稳定焦点

$xy'-yx'=-x^2-y^2<0$，顺时针

四.（15分）讨论下面2个方程组零解的李雅普诺夫稳定性

$$(1)\begin{cases} x'=4y^3-x^3 \\ y'=-4x-y^3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x'=-x^4y \\ y'=x^3y^2 \end{cases}$$

构造

$$V(x,y)=y^4+2x^2,$$
$$V'(x,y)=4x(4y^3-x^3)+4y^3(-4x-y^3)=-4x^4-4y^6$$

渐近稳定

首次积分$V=xy$

$$V'(x,y)=y(-x^4y)+x(x^3y^2)=0$$

不稳定或者：区域$A=\{x>0,y>0\}$，构造

$$V(x,y)=xy^2$$
$$V'(x,y)=y^2(-x^4y)+2xy(x^3y^2)=x^4y^3$$

不稳定或者：区域$A=\{x>0,y<0\}$，构造

$$V(x,y)=-x^2y$$
$$V'(x,y)=-2xy(-x^4y)-x^2(x^3y^2)=x^5y^2$$

不稳定

五.（15分）给定区间$I=[0,a]$，非负连续函数$u(t)\le 1$，$u(0)=0$，连续可微函数$f:(t,x)\in I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，以及区间$[-2,0]$中的一个连续可微函数$\phi(t)$，并满足$\phi'(0-)=f(0,\phi(0))$. 考虑如下问题

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x(t-u(t))) & t\in[0,a]\\ x(t)=\phi(t) & t\in[-2,0]\end{cases}$$

(1) 试证明存在一个$\alpha>0$使得该问题在$t\in[0,\alpha]$至少存在一个解。

(2) 更进一步，这样的解是否有唯一性，给出充足的理由。

1. 方程在$[-2,T]$的解与积分方程的等价性

$$x(t)=\begin{cases}\phi(0)+\int_0^t f(s,x(s-u(s)))ds & t\in[0,T]\\ \phi(t) & t\in[-2,0]\end{cases}$$

2. 基本设定。记

$$M=\max_{t\in[-2,0]}|\phi(t)|$$
$$N=\max_{t\in[-2,a],x\in[-2M,2M]}|f(t,x)|,L=\max_{t\in[-2,a],x\in[-2M,2M]}|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)|$$
$$B_\alpha=\{x\in C^1([-2,\alpha]):|x(t)|\le 2M,x(t)=\phi(t),t\le 0\}$$

3. 存在性。可以用欧拉折线法，或者Picard迭代，或者压缩映射。这里用压缩映射来说明。

对于$0<\alpha\le\min(\frac{M}{N},\frac{1}{2L},a)$，我们定义映射

$$T:B_\alpha\to C^1([-2,\alpha])$$
$$y(t)=(Tx)(t):=\begin{cases}\phi(0)+\int_0^t f(s,x(s-u(s)))ds, & t>0,\\ \phi(t), & t\le 0\ .\end{cases}$$

所以

$$|y(t)|\le|y(t)-\phi(0)|+|\phi(0)|\le N\alpha+M\le 2M, T:B_\alpha\to B_\alpha$$

另外，如果$t\ge 0$，$x,y\in B_\alpha$，$\|x\|=\max_{t\in[-2,\alpha]}|x(t)|$，

$$|Tx-Ty(t)|\le L\int_0^t|x(s-u(s)))-y(s-u(s))|ds\le L\alpha\|x-y\|\le 1/2\|x-y\|$$

4. 唯一性。

需要证明区间$[-2,\beta](0<\beta\le a)$中的两个解$x(t),y(t)$相等即可。记

$$M'=\max_{t\in[-2,\beta]}|x(t)|+|y(t)|, L'=\max_{t\in[-2,\beta],x\in[-M',M']}|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)|$$

则如果$t\in[0,\beta]$，记非负非减函数$\|x-y\|(t):=\max_{s\in[-2,t]}|x-y(s)|$，则$\|x-y\|(0)=0$，并且

$$|x-y(t)|\le L'\int_\beta^t\|x-y\|(s)ds\Rightarrow\|x-y\|(t)\le L'\int_\beta^t\|x-y\|(s)ds\Rightarrow\|x-y\|(t)\equiv 0$$

（Gronwall不等式）证毕。