浙江大学2014——2015学年春夏学期
《常微分方程》课程期末考试试卷

课程号：06123700，开课学院：数学科学学院

考试试卷：A✓卷、B卷（请在选定项上打✓）

考试形式：闭✓、开卷（请在选定项上打✓），允许带 无 入场

考试日期：2015 年 7 月 8 日,考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：________ 学号：________ 所属院系：________

题序	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷人								

一. 求解下列方程（25分）

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+y^2}$

2. $2y^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4$

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = x^2\sin(\ln x)$

二. 求解下列方程（组）（25分）

1. 用幂级数法求解$y'' + 4xy = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x - 2z = 0 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + x = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x + 2y = 0 \end{cases}$$

三.（20分）对于系统$\begin{cases} x' = 1 - x + y - x^2 \\ y' = x(x-y) \end{cases}$找出所有平衡点（奇点），写出关于这些平衡点所相应的线性化系统，判断平衡点的类型，并画出平衡点附近相图的草图。

四.（15分）讨论下面2个方程组零解的李雅普诺夫稳定性

$$(1)\begin{cases} x' = 4y^3 - x^3 \\ y' = -4x - y^3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x' = -x^4 y \\ y' = x^3y^2 \end{cases}$$

五.（15分）给定区间$I = [0,a]$，非负连续函数$u(t) \le 1$，$u(0) = 0$，连续可微函数$f : (t,x) \in I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，以及区间$[-2,0]$中的一个连续可微函数$\phi(t)$，并满足$\phi'(0-) = f(0,\phi(0))$. 考虑如下问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t-u(t))) & t \in [0,a] \\ x(t) = \phi(t) & t \in [-2,0] \end{cases}$$

(1) 试证明存在一个$\alpha > 0$使得该问题在$t \in [0,\alpha]$至少存在一个解。

(2) 更进一步，这样的解是否有唯一性，给出充足的理由。