第四章 函数的连续性

§1 连续性概念

1. 按定义证明下列函数在其定义域内连续

(1)$f(x)=\dfrac{1}{x}$ (2)$f(x)=|x|$

证:(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

当 $x,x_0\in D$ 时,有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|x||x_0|}$$

由三角不等式可得:$|x|\geqslant|x_0|-|x-x_0|$,故

当 $|x-x_0|<|x_0|$ 时,有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|}{|x_0|^2-|x-x_0||x_0|}$$

对任给正数 ε,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon|x_0|}>0$,则 $\delta<|x_0|$

当 $x\in D$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$$

可见 $f(x)$ 在 x_0 连续.

由 x_0 的任意性知:$f(x)$ 在其定义域内连续.

(2) $f(x)=|x|$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对任何

$x_0\in(-\infty,+\infty)$,由于,$||x|-|x_0||\leqslant|x-x_0|$

从而对任给正数 ε,取 $\delta=\varepsilon$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|=||x|-|x_0||\leqslant|x-x_0|<\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在 x_0 连续,由 x_0 的任意性知,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$连续.

2. 指出下列函数的间断点并说明其类型

(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$　(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$

(3) $f(x)=[|\cos x|]$　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$

(5) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$　(6) $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数}\\ -x, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

$$(7)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty\end{cases}$$

解　(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 间断. 由于$\lim\limits_{x\to 0}(x+\dfrac{1}{x})$不存在,故$x=0$是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(2) $f(x)$ 在 $x=0$ 间断. 由于　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$,故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(3) $f(x)$ 在 $x=n\pi$ 间断,$(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 由于 $\lim\limits_{x\to n\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to n\pi^+}[|\cos x|]=0$, $\lim\limits_{x\to n\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to n\pi^-}[|\cos x|]=0$

故 $x=n\pi$ 是$f(x)$的可去间断点$(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

(4)$f(x)$ 在 $x=0$ 间断. 由于$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}|x|=-1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}|x|=1$,故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

(5)$f(x)$ 在 $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 间断. 由于

$$\lim_{x\to\frac{4k+1}{2}\pi^+}f(x)=1,\quad \lim_{x\to\frac{4k+1}{2}\pi^-}f(x)=1,$$

$$\lim_{x\to\frac{4k-1}{2}\pi^+}f(x)=1,\quad \lim_{x\to\frac{4k-1}{2}\pi^-}f(x)=-1$$

故 $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(6) $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 的点间断且若 $x_0\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，故 $x\neq 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(7) $f(x)$ 在 $x=-7, x=1$ 间断且 $\lim\limits_{x\to -7^+}f(x)=-7$，$\lim\limits_{x\to -7^-}f(x)$ 不存在，故 $x=-7$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点. 又因

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1).\sin\frac{1}{x-1}=0,\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=1.$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

3. 延拓下列函数，使其在 R 上连续：

(1) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ (2) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (3) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$

解 (1) 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 没有定义. 而

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$ 于是函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, x\neq 2\\ 12, x=2\end{cases}$$ 是 $f(x)$ 的延拓，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 没有定义，而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ 于是函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, x=0\end{cases}$$ 是 $f(x)$ 的延拓，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(3) 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 没有定义，而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$ 于是函数

$$F(x)=\begin{cases}0, x=0\\ x\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0\end{cases}$$ 是 $f(x)$ 的延拓，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

4. 证明：若 f 在 x_0 连续，则 $|f|$ 与 f^2 也在点 x_0 连续. 又问：若 $|f|$ 或 f^2 在 I 上连续，那么 f 在 I 上是否必连续？

证:(1) 若 f 在 x_0 连续,则 $|f|$ 与 f^2 也在 x_0 连续.

(ⅰ) $|f|$ 在 x_0 连续.事实上,由于 $f(x)$ 在 x_0 连续,从而对任给正数 ε,存在正数 δ,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,而 $||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|$　故当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$||f(x)|-|f(x_0)||<\varepsilon$,因此 $|f(x)|$ 在 x_0 连续.

(ⅱ) f^2 在 x_0 连续.事实上,由于 $f(x)$ 在 x_0 连续,从而由局部有界性知:存在 $M>0$ 及 $\delta_1>0$ 使当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时,有

$|f(x)|<\dfrac{M}{2}$　①,由连续的定义知:对任给正数 ε,存在正数 δ_2,当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$　②　现取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|x-x_0|<\delta$ 时,① 与 ② 同时成立,因此

$$|f^2(x)-f^2(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|\cdot|f(x)+f(x_0)|$$
$$\leqslant|f(x)-f(x_0)|(|f(x)|+|f(x_0)|)<\varepsilon$$

故 f^2 在 x_0 连续.

(2) 逆命题不成立,例如设　$f(x)=\begin{cases}-1,x\text{ 为有理数}\\1,x\text{ 为无理数}\end{cases}$

则 $|f|,f^2$ 均为常函数,故是连续函数,但 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中的任一点都不连续.

5. 设当 $x\neq0$ 时 $f(x)\equiv g(x)$,而 $f(0)\neq g(0)$.证明:f 与 g 两者中至多一个在 $x=0$ 连续.

证:(反证)　假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $x=0$ 连续,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,$\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$　又因 $x\neq0$ 时,$f(x)\equiv g(x)$,于是 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)$　从而 $f(0)=g(0)$,这与 $f(0)\neq g(0)$ 相矛盾.故 f 与 g 至多有一个在 $x=0$ 处连续.

6. 设 f 为区间 I 上的单调函数.证明:若 $x_0\in I$ 为 f 的间断点,则 x_0 必是 f 的第一类间断点.

证　不妨设 f 为区间 I 上的递增函数.于是当 $x\in I$ 且 $x<x_0$ 时,$f(x)<f(x_0)$.从而,由函数极限的单调有界定理可知:$f(x_0-0)$ 存

在且 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\leqslant f(x_0)$

同理可证 $f(x_0+0)$ 存在且 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\geqslant f(x_0)$

因此，x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

7. 设函数 f 只有可去间断点，定义 $g(x)=\lim\limits_{y\to x}f(y)$. 证明 g 为连续函数.

证　设 f 的定义域为区间 I，则 $g(x)$ 在 I 上处处有定义(因 f 只有可去间断点，从而极限处处存在). 任取 $x_0\in I$，下证 $g(x)$ 在 x_0 连续. 由于 $g(x_0)=\lim\limits_{y\to x_0}f(y)$ 且 $g(x)=\lim\limits_{y\to x}f(y)(x\in I)$，从而对任给正数 ε，存在正数 δ，当 $0<|y-x_0|<\delta$ 时，有

$$g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}<f(y)<g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

任取 $x\in U^\circ(x_0,\delta)$，则必存在 $U(x,\eta)\subset U^\circ(x_0\delta)$ 于是当 $y\in U(x,\eta)$ 时，(1) 成立. 由极限的不等式性质知

$$g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant g(x)=\lim_{y\to x}f(y)\leqslant g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $x\in U^\circ(x_0,\delta)$ 时，有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$ 故 $g(x)$ 在 x_0 处连续.

8. 设 f 为 R 上的单调函数，定义 $g(x)=f(x+0)$，证明 g 在 R 上每一点都右连续.

证　由于 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 上单调函数，故 f 只有第一类间断点. 故右极限处处存在. 于是 $g(x)$ 处处有定义，任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，下证 g 在 x_0 右连续. 由于 $g(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{y\to x_0^+}f(y)$ 且 $g(x)=\lim\limits_{y\to x^+}f(y)(-\infty<x<\infty)$，从而对任给正数 ε，存在正数 δ，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有

$$g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}<f(y)<g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

任取 $x\in U_+{}^\circ(x_0,\delta)$，则必存在 $U_+{}^\circ(x,y)\subset U_+{}^\circ(x_0,\delta)$. 于是

当 $y \in U_+^\circ(x,y)$ 时,(1) 成立. 由极限不等式性质知

$$g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant g(x)=\lim_{y \to x^+} f(y) \leqslant g(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $x \in U_+^\circ(x_0,\delta)$ 时, 有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$, 故 $g(x)$ 在 x_0 处右连续.

9. 举出定义在$[0,1]$上符合下述要求的函数:

(1) 只在$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$三点不连续的函数;

(2) 只在$\frac{1}{2},\frac{1}{3}$和$\frac{1}{4}$三点连续的函数;

(3) 只在$\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$上间断的函数;

(4) 只在 $x=0$ 右连续,而在其他点都不连续的函数.

解　(1) $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{1}{4x-1}$

(2) $f(x)=\begin{cases}0, x \text{ 是}[0,1]\text{中有理数} \\ (x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2}), x \text{ 是}[0,1]\text{中无理数}\end{cases}$

(3) $f(x)=[\frac{1}{x}]$

(4) $f(x)=\begin{cases}-x, x \text{ 是}[0,1]\text{中无理数} \\ x, x \text{ 是}[0,1]\text{中有理数}\end{cases}$

§2　连续函数的性质

1. 讨论复合函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 的连续性,设

(1) $f(x)=\mathrm{sgn}x, g(x)=1+x^2$

(2) $f(x)=\mathrm{sgn}x, g(x)=(1-x^2)x$

解　(1) 由于 $f(x)=\mathrm{sgn}x, g(x)=1+x^2$,故$(f\circ g)(x)=\mathrm{sgn}(1+x^2)\equiv 1$ 是连续函数. 又因为

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}2, x \neq 0 \\ 1, x=0\end{cases}$$

因此,$x=0$ 是 $g\circ f$ 的可去间断点,其余点处处连续.

(2) 由于 $f(x)=\operatorname{sgn}x, g(x)=(1-x^2)x$，于是 $(g\circ f)(x)\equiv 0$，可见 $g\circ f$ 处处连续. 因为

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}1, x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\\ 0, x=-1,0,1\\ -1, x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

故 $x=-1,0,1$ 是 $f\circ g$ 跳跃间断点

2. 设 f,g 在点 x_0 连续，证明：

(1) 若 $f(x_0)>g(x_0)$，则存在 $U(x_0,\delta)$，使在其内有 $f(x)>g(x)$；

(2) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$，则 $f(x_0)\geqslant g(x_0)$

证 (1) 由于 $f(x_0)>g(x_0)$，从而 $\varepsilon_0=\dfrac{f(x_0)-g(x_0)}{2}>0$，因 f 在 x_0 连续，于是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 因此，存在正数 δ_1，使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0$

可见 $\quad f(x)>\dfrac{f(x_0)+g(x_0)}{2} \quad (1)$

又因 g 在 x_0 连续，从而存在正数 δ_2，当 $|x-x_0|<\delta_2$，

可见 $\quad g(x)<\dfrac{f(x_0)+g(x_0)}{2} \quad (2)$

现取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，(1)，(2) 同时成立

因此 $\quad f(x)>g(x), x\in U(x_0,\delta)$

(2) 假设命题不真，从而 $f(x_0)<g(x_0)$，由(1)可知，存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0,\delta)$，使 $f(x)<g(x), x\in U(x_0,\delta)$ 这与 $x\neq x_0$ 时，$f(x)>g(x)$ 矛盾，故 $f(x_0)\geqslant g(x_0)$

3. 设 f,g 在区间 I 上连续，记 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ $G(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 证明 F 和 G 也都在 I 上连续.

提示：利用第一章总练习题 1.

证：由 $F(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$

$G(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$

又由,若 $f(x)$ 在 I 上连续　$\therefore h(x)=|f(x)|$ 在 I 上也连续.

由 $f(x),g(x)$ 在 I 上连续.所以,$F(x),G(x)$ 在 I 上连续.

4. 设 f 为 R 上连续函数,常数 $c>0$,记

$$F(x)=\begin{cases}-c, & 若\ f(x)<-c\\ f(x), & 若\ |f(x)|\leqslant c\\ c, & 若\ f(x)>c\end{cases}$$

证明 F 在 R 上连续.

提示:$F(x)=\max\{-c,\min\{c,f(x)\}\}$

证明:因为 $F(x)=\dfrac{1}{2}\{|c+f(x)|-|c-f(x)|\}$

由题设,$f(x)$ 在 R 上连续.从而 $|f(x)\pm c|$ 在 R 上连续.

所以 $F(x)$ 在 R 上连续.

5. 设 $f(x)=\sin x,g(x)=\begin{cases}x-\pi,x\leqslant 0\\ x+\pi,x>0\end{cases}$　证明:复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 连续,但 g 在 $x=0$ 不连续.

证　由于 $f(x)=\sin x,g(x)=\begin{cases}x-\pi,x\leqslant 0\\ x+\pi,x>0\end{cases}$

于是 $f(g(x))=\begin{cases}\sin(x-\pi),x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi),x>0\end{cases}$

$$\lim_{x\to0^+}f(g(x))=\lim_{x\to0^+}\sin(x-\pi)=0$$

$$\lim_{x\to0^-}f\circ g(x)=\lim_{x\to0^-}\sin(x+\pi)=0\qquad f\circ g(0)=0$$

故　$\lim\limits_{x\to0^+}f\circ g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f\circ g(x)=f\circ g(0)$

从而 $f\circ g(x)$ 在 $x=0$ 连续

但 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+\pi)=\pi,\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-\pi)=-\pi$.

于是 $x=0$ 是 g 的跳跃间断点,从而 g 在 $x=0$ 不连续.

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.证明:f 在 $[a,+\infty)$ 上有界,又问 f 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值或最小值吗?

证　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在,不妨记 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,对 $\varepsilon=1$,存在正数

证　假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为正且不恒为负，则必存在 $x_1,x_2\in[a,b]$ 使 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 异号，不妨设 $x_1<x_2$，$f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$. 由于函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续. 由根的存在性定理可得，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(\xi)=0$，这与不存在任何 x，使得 $f(x)=0$ 相矛盾，故 f 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

10. 证明：任一实系数奇次方程至少有一实根

证　设 $a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 为一实系数奇次方程且 $a_0\neq 0$，令其左端为 $f(x)$ 且可设 $a_0<0$，因而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，从而存在 $a<b$，使 $0<f(a)$ 且 $f(b)<0$，在 $[a,b]$ 上应用根的存在性定理可知：$f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内至少有一个实根.

11. 试用一致连续的定义证明：若 f,g 都在区间 I 上一致连续，则 $f+g$ 也在 I 上一致连续.

证：$\forall\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 在 I 上一致收敛，故 $\exists\delta_1>0$ 对任意 $x',x''\in I$. 只要 $|x'-x''|<\delta_1$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，又由于 $g(x)$ 在 I 上一致收敛，故 $\exists\delta_2>0$，对任意 $x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta_2$，就有 $|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 对任意 $x',x''\in I$ 只要 $|x'-x''|<\delta$，恒有 $|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|$

$$\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $f(x)+g(x)$ 在 I 上一致连续.

12. 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

提示：$[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty]$，利用定理4.9和例10的结论.

证明：因为 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，故对任意的 $a>0$，$\sqrt{x}$ 在 $[0,a]$ 上连续，故在 $[0,a]$ 上一致连续，所以对任给的 $\varepsilon>0$，总 $\exists\delta_1>0$ 对 $[0,a]$ 中的任意 x_1,x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时有

证　假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为正且不恒为负，则必存在 $x_1,x_2\in[a,b]$ 使 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 异号，不妨设 $x_1<x_2$，$f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$. 由于函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续. 由根的存在性定理可得，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(\xi)=0$，这与不存在任何 x，使得 $f(x)=0$ 相矛盾，故 f 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

10. 证明：任一实系数奇次方程至少有一实根

证　设 $a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 为一实系数奇次方程且 $a_0\neq 0$，令其左端为 $f(x)$ 且可设 $a_0<0$，因而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，从而存在 $a<b$，使 $0<f(a)$ 且 $f(b)<0$，在 $[a,b]$ 上应用根的存在性定理可知：$f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 内至少有一个实根.

11. 试用一致连续的定义证明：若 f,g 都在区间 I 上一致连续，则 $f+g$ 也在 I 上一致连续.

证：$\forall\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 在 I 上一致收敛，故 $\exists\delta_1>0$ 对任意 $x',x''\in I$. 只要 $|x'-x''|<\delta_1$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，又由于 $g(x)$ 在 I 上一致收敛，故 $\exists\delta_2>0$，对任意 $x',x''\in I$，只要 $|x'-x''|<\delta_2$，就有 $|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 对任意 $x',x''\in I$ 只要 $|x'-x''|<\delta$，恒有 $|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|$

$$\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $f(x)+g(x)$ 在 I 上一致连续.

12. 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

提示：$[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty]$，利用定理4.9和例10的结论.

证明：因为 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，故对任意的 $a>0$，$\sqrt{x}$ 在 $[0,a]$ 上连续，故在 $[0,a]$ 上一致连续，所以对任给的 $\varepsilon>0$，总 $\exists\delta_1>0$ 对 $[0,a]$ 中的任意 x_1,x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时有

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，对上述的任意 $\varepsilon>0$，对 $[a,+\infty)$ 上的任意 x_1,x_2. 因为 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{|\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}|}<\frac{|x_1-x_2|}{2\sqrt{a}}$，只要 $\frac{|x_1-x_2|}{2\sqrt{a}}<\varepsilon$ 即可，取 $\delta_2=2\sqrt{a}\varepsilon$. 当 $|x_1-x_2|<\delta_2$ 时，有 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\frac{a}{2}\}$，当任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，总有 $x_1,x_2\in[0,a]$ 或 $x_1,x_2\in[\frac{a}{2},+\infty)$，有 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|<\varepsilon$ 成立.

综上知 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

13. 证明：$f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

证　(1) 先证 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 对任给 $x_1,x_2\in[a,b]$，因 $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2|\cdot|x_1-x_2|\leqslant 2\max\{|a|,|b|\}\cdot|x_1-x_2|$，于是对任给正数 ε，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2\max\{|a|,|b|\}}$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

(2) 再证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续. 取 $\varepsilon_0=1$，不论正数 δ 取的多么小，只要 n 充分大，我们总可使

$$x_n'=n+\frac{1}{n} \text{ 与 } x_n''=n \text{ 的距离 } |x_n'-x_n''|=\frac{1}{n}<\delta,$$

但 $|f(x')-f(x'')|=2+\frac{1}{n^2}>\varepsilon_0$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

14. 设函数 f 在区间上满足利普希茨(Lipschitz)条件，即存在常数 $L>0$，使得对 I 上任意两点 x',x'' 都有

$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|$，证明 f 在 I 上一致连续.

证　对任给正数 ε，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L+1}$，对 I 上任意两点 x',x''，当

$|x'-x''|<\delta$ 时,由利普希茨条件可得

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|\leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{L+1}<\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

15. 证明 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 提示:利用不等式 $|\sin x'-\sin x''|\leqslant|x'-x''|$(见第三章 §1 例 4)

证　对任给正数 ε,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,当 $|x'-x''|<\delta$ 时有 $|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x'-x''|<\delta<\varepsilon$　故 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续.

16. 设函数 f 满足第 6 题的条件. 证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证:$\forall\varepsilon>0$ 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 故 $\exists Z>a$,使当 $x'>Z,x''>Z$ 时恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,由于 $f(x)$ 在 $[a,Z+1]$ 上连续,从而 $\exists\delta'>0$. 使当 $x'\in[a,Z+1],x''\in[a,Z+1]$,$|x'-x''|<\delta$ 时,恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,取 $\delta=\min\{\delta',Z\}$ 时,现设 x',x'' 满足;$a\leqslant x'<+\infty,a\leqslant x''<+\infty$,$|x'-x''|<\delta$ 的任何两点,由于 $|x'-x''|<\delta$,故 x' 与 x'' 或同时属于 $[a,Z+1]$,或同时满足 $x'>Z,x''>Z$,因此,恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

17. 设函数 f 在 $[0,2a]$ 上连续,且 $f(0)=f(2a)$ 证明:存在点 $x_0\in[0,a]$,使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$

证　设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ 由于 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续,故 $f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续,于是 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续. 且

$$F(0)=f(0)-f(a),F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

(Ⅰ)若 $f(0)=f(a)$,则 $x=0,a$ 均是使得 $f(x)=f(x+a)$ 成立的 x

(Ⅱ)若 $f(0)\neq f(a)$,则 $F(0)\cdot F(a)<0$,由根的存在性定理可知:存在 $x\in(0,a)$,使得 $F(x)=0$　即 $f(x)=f(x+a)$

由(Ⅰ)(Ⅱ)知结论成立.

18. 设 f 为 $[a,b]$ 上的增函数，其值域为 $[f(a),f(b)]$ 证明 f 在 $[a,b]$ 上连续.

证 （反证法） 设 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的间断点，由于 $f(x)$ 递增，故 $f(x)$ 在 (a,b) 上的间断点是第一类的. 于是 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在，且 $f(x_0)-f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)-f(x_0)$ 中至少有一个大于0，不妨设 $f(x_0)-f(x_0-0)>0$ 由函数单调性可知

当 $a\leqslant x<x_0$ 时，$f(x)\leqslant f(x_0-0)$

当 $x_0<x\leqslant b$ 时，$f(x)>f(x_0)$

即 $f(x)$ 不能取得 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0)$ 之间的实数，这与 $f(x)$ 的值域是 $[f(a),f(b)]$ 相矛盾. 故 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续. 类似可证 $f(x)$ 在 a,b 处单侧连续. 从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

19. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\quad f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$

证 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 f 在 $[x_1,x_n]$ 上连续. 故 f 在 $[x_1,x_n]$ 上取得最大值 M 与最小值 m，于是对任给 $x\in[x_1,x_n]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 从而

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$$

设 $x',x''\in[x_1,x_n]$，使得 $f(x')=M\quad f(x'')=m$ 不妨设 $x'<x''$ 由介值性定理得：存在 $\xi\in[x',x'']\subset[x_1,x_n]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

20. 证明 $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续

提示：$[0,+\infty)=[0,1]\cup[1,+\infty)$ 在 $[1,+\infty)$ 上成立不等式

$$|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}|\leqslant|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\leqslant|x'-x''|$$

证 任取 $a>0$，$f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,a]$ 上连续，从而一致连续. 即对任给正数 ε，存在正数 δ_1，对 $x_1,x_2\in[0,a]$，当 $|x_1-x_2|<\delta_1$ 时，有 $\qquad |\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}|<\varepsilon$

现再考虑 $f(x)$ 在$[\frac{a}{2},+\infty)$ 上的一致连续性.

由于当 $x_1,x_2\in[\frac{a}{2},+\infty)$ 时

$$|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}|=\left|2\sin\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{2}\right|\leqslant|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2a}}|x_1-x_2|$$

对上述 ε,令 $\delta_2=\sqrt{2a}\varepsilon$,当 $x_1-x_2\in[\frac{a}{2},+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta_2$ 时,有　$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

现取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\frac{a}{2}\}$,当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,必有 $x_1,x_2\in[0,a]$ 或 $x_1,x_2\in[\frac{a}{2},+\infty)$,从而有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续.

注　该题也可由不等式 $|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}|\leqslant|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|$ 及 $y=\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续证明.

§3　初等函数的连续性

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}$;(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;　　(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}$

解　(1) 因为该函数在 $x=0$ 处连续,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}=\frac{e^0\cos 0+5}{1+0+0}=6$$

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$,则当 $x\to+\infty$ 时,$t\to 0^+$,于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{1+\sqrt{t+\sqrt{t^3}}}+1}=\frac{1}{2}\text{,从而}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}$$

(3) 由于

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}$$

由于此函数在 $x=0$ 处右连续,故

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)=1$$

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$

令 $t=\dfrac{1}{x}$,当 $x\to+\infty$ 时,$t\to0^+$,于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{t+\sqrt{t^3}}}}{\sqrt{1+t}}$$

而此函数在 $t=0$ 处右连续.故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{t+\sqrt{t^3}}}}{\sqrt{1+t}}=1$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$

令 $t=\sin x$ 则当 $\sin x\to0$ 时 $t\to0$

故 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n{}^{b_n}=a^b$

提示:$a_n^{b_n}=e^{b_n lna_n}$

证:由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$ 知:存在 N,当 $n>N$ 时,有 $a_n>0$.
当 $n>N$ 时,令 $A_n=a_n{}^{b_n}$,于是由 $lnA_n=b_n lna_n$ 知

$$\lim_{n\to\infty}lnA_n=b\cdot lna$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n{}^{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{b_n}lna_n=\lim\limits_{n\to\infty}ln^{A_n}=e^{b\ln a}=a^b$

总 练 习 题

1. 设函数 f 在 (a,b) 连续,且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 为有限值.证明:(1) f 在 (a,b) 内有界

(2) 若存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$,则 f 在 (a,b) 内能取到最大值.

证:(1) 把 f 延拓到闭区间 $[a,b]$:定义

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), x=a\\ f(x), x\in(a,b)\\ f(b-0), x=b\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，由于 $x\in(a,b)$ 时，$F(x)=f(x)$，于是 f 在 (a,b) 上有界.

(2) 设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 $F(x_0)$，$x_0\in[a,b]$，则

$$f(\xi)=F(\xi)\leqslant F(x_0),\xi\in(a,b)$$

若 $f(\xi)=F(x_0)$，则 $F(\xi)=f(\xi)$ 也是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值.

若 $f(\xi)<f(x_0)$，则由题设知 $F(x_0)>F(a+0)=F(a)$ 且 $F(x_0)>f(b-0)=F(b)$，从而 $a<x_0<b$，又因在 (a,b) 上，$F(x)=f(x)$，故 $f(x)$ 在 (a,b) 内取得最大值.

2. 设函数 f 在 (a,b) 内连续，且 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$

证明：f 在 (a,b) 内能取到最小值.

证：由于 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$，令 $c=\dfrac{a+b}{2}$，则必存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$，使得，当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，有 $f(x)>f(c)$，当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时 $f(x)>f(c)$ 任取 $x_1\in(a,a+\delta_1)$，$x_2\in(b-\delta_2,b)$，$x_1<c<x_2$，于是有 $f(x_1)>f(c)$，$f(x_2)>f(c)$. 由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$ 上连续. 所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上取最小值，且最小值在 (x_1,x_2) 内取得，设为 $f(x_0)$，则 $f(x_0)\leqslant f(x)$. 又当 $x\in(a,x_1)$ 或 $\in(x_2,b)$ 时有 $f(x)>f(c)$，于是对任意 $x\in(a,b)$ 时有 $f(x)>f(x_0)$，

而 $x_0\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$. 故 $f(x)$ 在 (a,b) 内有最小值.

3. 设函数 f 在区间 I 上连续. 证明：

(1) 若对任何有理数 $r\in I$ 有 $f(r)=0$，则在 I 上 $f(x)\equiv 0$

(2) 若对任意两个有理数 $r_1,r_2,r_1<r_2$，有 $f(r_1)<f(r_2)$. 则 f 在 I 上严格增.

证：(1) 只要证明对任一无理数 $\alpha\in[a,b]$，$f(\alpha)=0$ 即可，在 $[a,b]$ 内取有理数 $\{r_n\}$，使 $r_n\to\alpha(n\to\infty)$. 则由连续函数性质可知，

$f(r_n) \to f(\alpha)(n \to \infty)$，而 $f(r_n) = 0,(n = 1,2,\cdots)$　故 $f(\alpha) = 0$

(2) 对任意的 $x_1, x_2 \in [a,b]$，$x_1 < x_2$，可在 $[a,b]$ 内取有理数列 $\{r_n'\}$ 与 $\{r_n\}$，使 $\{r_n'\}$ 递减且 $r_n' \to x_1(n \to \infty)$，$\{r_n\}$ 递增且 $r_n \to x_2(n \to \infty)$，$r_1' < r_1$，则由函数的连续性与极限性质可知 $f(x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n') \leqslant f(r_1') < f(r_1) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(x_2)$.

故 f 是 $[a,b]$ 上的严格递增函数.

4. 设 a_1, a_2, a_3 为正数，$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$，证明：方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$$

在区间 (λ_1, λ_2) 与 (λ_2, λ_3) 内各有一个根.

提示：考虑 $f(x) = a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) + a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3) + a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

证：令　$f(x) = \dfrac{a_1}{x-\lambda_1} + \dfrac{a_2}{x-\lambda_2} + \dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$

则当 $x \to \lambda_1^+$ 时，$f(x) \to +\infty$；当 $x \to \lambda_2^-$ 时，$f(x) \to -\infty$，于是存在 $x_1 < x_2$，$x_1, x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$ $\exists x_0$，使 $f(x_1)f(x_2) < 0$，易见 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$，使 $f(x_0) = 0$. 所以 $f(x)$ 在 (λ_1, λ_2) 内有一实根.

同理，$f(x)$ 在 (λ_2, λ_3) 内也有一实根.

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x \in [a,b]$，存在 $y \in [a,b]$，使得　$|f(y)| < \dfrac{1}{2}|f(x)|$

证明：存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$.

提示：函数 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上有最小值 $m = f(\xi)$，若 $m = 0$，则已得证；若 $m > 0$，可得矛盾.

证：若对任何 $x \in [a,b]$，有 $f(x) \neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒为负. 否则，由介值性知有零点存在，与假设矛盾. 不妨设 $f(x) > 0$，$x \in [a,b]$，因 f 在 $[a,b]$ 上连续. 故必有最小值，设 $f(x_0) = \min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，则 $f(x_0) > 0$. 另一方面，据题设，存在与之相

应的$y_0 \in [a,b]$,使得 $f(y_0) = |f(y_0)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_0)| < f(x_0)$,但这与 $f(x_0)$ 为最小值矛盾.所以 f 在$[a,b]$上必有零点.

6. 设 f 在$[a,b]$上连续,$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$,另有一组正数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ 证明:存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得

$$f(\xi) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

注:本章 §2 习题 19 是本题的特例,其中 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$

证 因 f 在$[a,b]$上连续,所以存在最大值 M 与最小值 m。

令 $m' = \min\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$

$M' = \max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$ 则

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \leqslant \lambda_1 M' + \lambda_2 M' + \cdots + \lambda_n M' = M'$$

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \geqslant \lambda_1 m' + \lambda_2 m' + \cdots + \lambda_n m' = m'$$

于是 $m \leqslant m' \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \leqslant M' \leqslant M$

由介值定理,必存在$\xi \in [a,b]$,使得$f(\xi) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$

7. 设 f 在$[0, +\infty)$上连续,满足$0 \leqslant f(x) \leqslant x, x \in [0, +\infty)$,设 $a_1 \geqslant 0, a_{n+1} = f(a_n), n = 1,2,\cdots$ 证明:

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列;(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$,则有 $f(t) = t$

(3) 若条件改为 $0 \leqslant f(x) < x, x \in (0, +\infty)$,则 $t = 0$.

证 (1) 由于 $0 \leqslant f(x) \leqslant x, x \in [0, +\infty)$, 因此有 $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n \leqslant 0, n = 1,2,\cdots$ 即$\{a_n\}$ 为单调递减数列.又因 $a_1 > 0, f(x) \geqslant 0, a_{n+1} = f(a_n)$, 所以 $a_n \geqslant 0, n = 1,2,\cdots$ 综上可知$\{a_n\}$ 为单调递减有下界数列,故必为收敛数列.

(2) 因$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$, $f(x)$ 在$[0, +\infty)$上连续,且 $t \in [0, +\infty)$,故有

$$t = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(t)$$

(3) 由 $a_n \geqslant 0$ 及$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t$ 知$t \geqslant 0$,若 $t \neq 0$,则 $t \in (0, +\infty)$ 且 $f(t) < t$,但由(2)知 $f(t) = t$,矛盾.故 $t = 0$.

8. 设f 在$[0,1]$上连续,$f(0) = f(1)$.证明:对任何正整数 n,存在

$\xi \in [0,1]$，使得 $\qquad f(\xi + \frac{1}{n}) = f(\xi)$

提示：$n = 1$ 时取 $\epsilon = 0$，$n > 1$ 时令 $F(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$，

则有 $\quad F(0) + F(\frac{1}{n}) + \cdots + F(\frac{n-1}{n}) = 0$

证　当 $n = 1$ 时　由 $f(0) = f(1)$ 知 $\xi = 0$ 满足要求

不妨设 $n > 1$. 令 $\qquad g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $f(x+\frac{1}{n})$ 在 $[-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ 上连续，

从而 $g(x)$ 在 $[0, 1-\frac{1}{n}]$ 上连续.

若对任何 $\quad x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ 有 $g(x) \neq 0$，则恒有 $g(x) > 0$ 或有 $g(x) < 0$，否则，将由介值定理知存在零点.

不妨设 $g(x) > 0, x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$，即 $f(x) > f(x + \frac{1}{n})$，

于是推得

$$f(0) > f(\frac{1}{n}) > f(\frac{2}{n}) > \cdots > f(\frac{n-1}{n}) > f(\frac{n}{n}) = f(1)$$

这与 $f(0) = f(1)$ 矛盾，故必存在 $\xi \in [0, 1-\frac{1}{n}] \subset [0,1]$，使得

$g(\xi) = 0$. 即 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$

9. 设 f 在 $x = 0$ 连续，且对任何 $x, y \in R$ 有

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

证明：(1) f 在 R 上连续；(2) $f(x) = f(1)x$

提示：(1) 易见 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x - x_0) + f(x_0)] = f(x_0)$；

(2) 对整数 $p, q(\neq 0)$ 有 $f(p) = pf(1), f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}f(1) \Rightarrow$

对任何有理数有 $f(r) = rf(1) \Rightarrow$ 结论.

证 (1) 因 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$

所以 $f(0)=0$,又对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)=f(x)+f(\triangle x)-f(x)=f(\triangle x)$$

所以 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle y=\lim\limits_{\triangle x\to 0}f(\triangle x)=f(0)=0$,即 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 先证对任何有理数 r,有 $f(rx)=rf(x)$.事实上,令 $y=x$,得 $f(2x)=2f(x)$,由数学归纳法知,对任何自然数 n,有 $f(nx)=nf(x)$ 即有 $f(x)=\frac{1}{n}f(nx)$ 用 $\frac{x}{n}$ 代替 x,有

$$f(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}f(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}f(x)$$

设 $r=\frac{p}{q}$(p,q 为自然数),则有

$$f(rx)=f(\frac{p}{q}x)=pf(\frac{x}{q})=\frac{p}{q}f(x)=rf(x)$$

又因 $f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$,且 $f(0)=0$,所以,$f(-x)=-f(x)$,因之对任何负有理数 $-r(r>0)$ 有

$$f(-rx)=-f(rx)=-rf(x)$$

综上可知对任何有理数 r 都有 $f(rx)=rf(x)$

再证对任何无理数 α 也有 $f(\alpha x)=\alpha f(x)$

事实上,取有理数列 $\{r_n\}$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\alpha$,则由 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续性及 $f(r_nx)=r_nf(x)$ 知

$$f(\alpha x)=f(\lim_{n\to\infty}r_nx)=\lim_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim_{n\to\infty}r_nf(x)=\alpha f(x)$$

于是对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 及任何实数 c 都有 $f(cx)=cf(x)$

因此,对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)$

10. 设定义在 R 上的函数 f 在 0,1 两点连续,且对任何 $x\in R$ 有 $f(x^2)=f(x)$.证明 f 为常量函数.

提示:易见 f 偶;对任何 $x\in R^+$,$f(x)=f(x^{2^{\frac{1}{n}}})\to f(1)(n\to\infty)$

从而得:$x\neq 0$ 时,$f(x)=f(1)$;$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(1)$.

证　当 $x \in (-1,1)$ 且 $x \neq 0$ 时,由条件知

$f(x) = f(x^2) = f(x^4) = \cdots = f(x^{2^n})$,由于 f 在 $x = 0$ 连续,令 $n \to \infty$,得 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x^{2^n}) f(\lim\limits_{n\to\infty} x^{2^n}) = f(0)$.

于是,当 $x = 1$ 时,由 f 的连续性可得

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(0) = f(0)$$

当 $x = -1$ 时,$f(-1) = f((-1)^2) = f(1) = f(0)$

于是可知 $f(x) \equiv f(0, x \in [-1,1]$　又当 $x \in (1, +\infty)$ 时有

$f(x) = f(\sqrt{x}) = f(\sqrt[4]{x}) = \cdots = f(\sqrt[2^n]{x})$

因 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x} = 1$ 且 f 在 $x = 1$ 连续

于是有　$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt[2^n]{x}) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = f(0)$

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时,由于 $x^2 \in (1, +\infty)$,于是有

$f(x) = f(x^2) = f(1) = f(0)$

综上可知,对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $f(x) \equiv f(0)$.