第 17 讲 辐角原理的应用

1. 假设 $f:\Omega\to\Omega$ 全纯, 记 $f^{\circ n}$ 为 f 的 n 次复合. 如果存在自然数列 $n_k\to+\infty$, 满足 $f^{\circ n_k}$ 在 Ω 上内闭一致收敛于恒等映射, 证明 $f:\Omega\to\Omega$ 双全纯.

2. 假设全纯函数列 $f_n:\Omega\to\Omega$ 全纯在 Ω 上内闭一致收敛于 g. 证明: 要么 $g(\Omega)\subset\Omega$, 要么 $g\equiv w_0\in\partial\Omega$.

3. 利用最大模原理证明代数学基本定理.

4. (辐角原理来推出最大模原理) 假设 f 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯, 边界 $\partial\Omega$ 为分段光滑的简单闭曲线. 利用辐角原理证明：对任意 $z\in\Omega$, 成立

$$f(z)\in\mathrm{Conv}(f(\partial\Omega)).$$

这里 $\mathrm{Conv}(E)$ 表示集合 E 的凸包. 这说明,

$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)|=\max_{z\in\partial\Omega}|f(w)|$$

5. 设 f 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯, 连续到边界. f 在上半圆弧上模有上界 m, 在下半圆弧上模有上界 M, 证明

$$|f(0)|\leq\sqrt{mM}.$$