吉林大学 2015-2016 学年第一学期“解析几何”期中考试试题

参考解析

一、(共 15 分)任意 3 个向量α,β,γ不共面当且仅当$\alpha\times\beta$, $\beta\times\gamma$, $\gamma\times\alpha$不共面.

证明：只需证明：任意 3 个向量α,β,γ共面当且仅当$\alpha\times\beta$, $\beta\times\gamma$, $\gamma\times\alpha$共面.

充分性。若α,β,γ共面，则$\exists a,b\in R,\vec{\alpha}=a\vec{\beta}+b\vec{\gamma}$，故有：$\vec{\beta}\times\vec{\alpha}=\vec{\beta}\times b\vec{\gamma}$与

$\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}=a\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$，则$\alpha\times\beta$, $\beta\times\gamma$, $\gamma\times\alpha$共线，从而共面。

必要性。若当$\alpha\times\beta$, $\beta\times\gamma$, $\gamma\times\alpha$共面，则$\exists a,b\in R,\vec{\beta}\times\vec{\gamma}=a\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+b\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$，

从而（$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$）$=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\times\vec{\gamma}=a\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\times\vec{\beta}-b\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\times\vec{\gamma}=0$，故向量$\alpha,\beta,\gamma$共面.

二、(共 15 分)l_1和l_2是两条异面直线，求l_1上任意一点到l_2上任意一点连线的中点轨迹.

解：不妨这样建立空间仿射坐标系，使得有$l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{0}$，$l_2:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$.

则 $M(2a,0,0)$与 $N(0,2,2b)$（$a,b\in R$）分别为l_1和l_2上的任意一点，其则中点坐标为：$P(a,1,b)$.

其轨迹为 y=1.

三、(共 15 分)证明：平面$5x-13y+32z-24=0$上所有的点到平面$2x-y+2z-3=0$和平面$3x+2y-6z+1=0$的距离都相等.

证明：设$P(a+1,\dfrac{5a+32b+13}{13},b+1)$（$a,b\in R$），为平面$5x-13y+32z-24=0$上任一点.

则其到平面$2x-y+2z-3=0$的距离为$d_1=\dfrac{|2(a+1)-\dfrac{5a+32b+13}{13}+2(b+1)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$

$=\dfrac{|2a-\dfrac{5a+32b}{13}+2b|}{3}=\dfrac{|26a-5a-32b+26b|}{39}=\dfrac{|21a-6b|}{39}=\dfrac{|7a-2b|}{13}$；

其到面$3x+2y-6z+1=0$的距离为$d_2=\dfrac{|3(a+1)+2\times\dfrac{5a+32b+13}{13}-6(b+1)+1|}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}}$

$$=\frac{\left|3a+2\times\dfrac{5a+32b}{13}-6b\right|}{7}=\frac{|39a+10a+64b-78b|}{91}=\frac{|49a-14b|}{91}=\frac{|7a-2b|}{13}.$$

有 $d_1=d_2$，即平面 $5x-13y+32z-24=0$ 上所有的点到平面 $2x-y+2z-3=0$ 和

平面 $3x+2y-6z+1=0$ 的距离都相等.

四、(共 25 分)证明空间中 3 次齐次方程 $a_{ijk}x_ix_jx_k=0(\sum a_{ijk}x_ix_jx_k=0)$ 所表示的曲面为锥面，其中 a_{ijk} 都是实数，$i,j,k\in\{1,2,3\}$.

证明：我们来证明 $F(x,y,z)=\sum a_{ijk}x_ix_jx_k=0$ 为锥顶为原点的锥面.

对于不过原点的平面 *z*=*h*，记 Γ_h：$\begin{cases}f_h(x,y)=0\\z=h\end{cases}$，其中 $f_h(x,y)=F(x,y,h)$，

则对于 Γ_h 上任一点 $M(x_h,y_h,h)$，其也在 $F(x,y,z)=0$ 上，即 $F(x_h,y_h,h)=0$

而对于过原点的直线 l_M：$\dfrac{x}{x_h}=\dfrac{y}{y_h}=\dfrac{z}{h}$，考虑 $F(tx_h,ty_h,th)=t^3F(x_h,y_h,h)=0(t\neq 0)$

故任意的这样的直线 l_M 都在 $F(x,y,z)=0$，故 $F(x,y,z)=0$ 上的每一点都在被包含于曲线 $F(x,y,z)=0$ 的过原点的一条直线上，故 $F(x,y,z)=0$ 为锥面.

五、(共 30 分)分析曲面 $(x-y)(x^2+y^2+z^2)=1$ 的形状和几何属性.

解：显然 *x*>*y*，故方程可化为 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{x-y}$.

不难得知其经过 $\begin{cases}x=\dfrac{x'+z'}{\sqrt{2}}\\y=\dfrac{x'-z'}{\sqrt{2}}\\z=y'\end{cases}$ 之后化为：$x^2+y^2+z^2=\dfrac{2}{z}$，形状与几何属性不变。研究其截线，

知有：$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{2}{h}-h^2\\z=h\end{cases}(0<h<\sqrt[3]{2})$，其为一个以 *z* 轴为转轴的旋转面，一条母线的方程为：

$\begin{cases}z(y^2+z^2)=2\\x=0\end{cases}$.