2018—2019 学年第 1 学期《数学分析I》第 1 次摸底考试

2018年10月22日

总分	一	二	三	四	五	六	七

得　分

一、(共10 分) 判断题

(1) 若存在正整数 N, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 则数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限; (　　)

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 若 $A = B$, 由数列极限的唯一性可知 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 为同一数列; (　　)

(3) 若数列 $\{x_n\}$ 的奇数列 $\{x_{2k-1}\}$ 和偶数列 $\{x_{2k}\}$ 及数列 $\{x_{7k}\}$ 都收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 一定收敛; (　　)

(4) $\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n+1}\}$ 分别是单调递增和递减的, 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 必有界; (　　)

(5) 存在上下界的数集必存在上下确界, 其上确界一定是数集中的最大元素, 其下确界一定是数集中的最小元素; (　　)

得　分

二、(共10 分) 定理的叙述和证明

叙述并证明闭区间套定理.

得　分

三、(共10 分) 按定义证明下列极限

(1) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}=2.$　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{arccot} n=0.$

得　分

四、(共20 分) 计算下列数列极限

(1) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^n.$　　(2) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}\sin n.$

(3) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(2^n+3^n+6^n)^{2/n}.$　　(4) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[2n+2]{n^2+2n}.$

得　分

五、(共20 分) 证明数列的敛散性

(1) 设 $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}a_n=a$, 若 $p_k>0\,(k=1,2,\cdots)$, 且

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0.$$

证明

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

(2) 证明数列 $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}-\sqrt{n}$ 收敛.

得　分

六、(共16 分) 求上下确界

(1) 设 A, B 均为 $\mathbf{R}$ 中有上界的非空集合, 记 A 的上确界为 a, B 的上确界为 b, 试求集合 $A\cup B$ 的上确界.

(2) 求 数列 $x_n=\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{3n\pi}{2}$ 的上下确界.

得　分

七、(共14 分) 证明题

(1) 设 $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 存在, 证明 $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{n}(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)=0.$

(2) 利用不等式 $(1+\dfrac{1}{n})^n<\mathrm{e}<(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}, n\in N^+$, 证明 $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}.$