浙江大学2013－2014学年 夏 学期

《常微分方程》课程期末考试试卷

课程号： 061B0010 ，　　开课学院： 数学系

考试试卷：√A卷、B卷（请在选定项上打√）

考试形式：√闭、开卷（请在选定项上打√），允许带 无 入场

考试日期： 2014 年 06 月 28 日，考试时间： 120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：____________学号：____________所属院系：____________

题序	一	二	三	四	五	总 分
得分						
评卷人						

一、试求解下述一阶微分方程（每小题8分，共32分）

1. 求$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{10}{3}xy^{\frac{2}{5}}$，$y(0)=0$的一个不恒为零的特解.

2. 求$xdy+2y\ln y\ dx=4x^2ydx$的通解.

3. 求 $x^2\dfrac{dy}{dx}=y(y-x)$， $y(1)=1$ 的特解.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有一阶连续的导数，求微分方程

$$y(1+y^2 f(xy))dx+x(y^2 f(xy)-1)dy=0 \quad (y>0)$$

的通解；并说明该微分方程的任何一条解曲线与曲线 $xy=2$ $(y>0)$ 至多相交于一点.

二、试求出下列高阶方程的解（每小题 8 分，共 32 分）

1. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-(\dfrac{dy}{dx})^2=0$.

2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x^2+8\ln x$.

3. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x(x+1)\frac{dy}{dx}+2(x+1)y=10x^3\sin x$，其中相应齐次微分方程的一个特解为 $y=x$.

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

三、求解下列线性微分方程组（每小题 8 分，共 16 分）

1. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x+2y+2z\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-3y+2z\\ \dfrac{dz}{dt}=2x+2y-3z\end{cases}$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dx}{dt}=x+2y+3e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt}+2\dfrac{dx}{dt}=4x-y \end{cases}$$

四、（10 分）函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一阶连续的导数，$f(1)=1$，对任何 $x,t\in(0,+\infty)$ 满足

$$\int_1^{tx} f(u)du = t\int_1^x f(u)du + x\int_1^t f(u)du,$$

试求函数 $f(x)$.

五．(10 分) 记 $\varphi_1(x)=xe^x+\sin x$， $\varphi_2(x)=2xe^x$， $\varphi_3(x)=2\sin x$，试讨论：

(1). 如果 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是某个 k 阶齐次线性常微分方程的解，求最小的自然数 k？（需要给出适当的理由）

(2). 如果 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是某个 k 阶非齐次线性常微分方程的解，求最小的自然数 k？（需要给出适当的理由）

(3). 如果 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是某个 k 阶（实）常系数齐次线性常微分方程的解，求最小的自然数 k？并求出该方程的表达式.