

吉林大学 2016-2017 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

共七道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、(共 15 分) 求多项式 $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2$ 在有理数域上的标准分解.

二、(共 15 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求: (1) A^{-1} ; (2) A^{2017} .

三、(共 15 分) 已知方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + cx_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + c^2x_4 = 1 \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + c^3x_4 = 1 \end{cases}.$$

- (1) 求其解唯一的条件;
- (2) 若 $c=1$, 求其通解.

四、(共 10 分) 已知矩阵 A 为秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, 求证存在秩为 r 的幂等矩阵 B , 使得 $AB=A$.

五、(共 10 分) 已知 n 阶可逆矩阵 A, B 满足 $AB=BA$, 求证: $r \begin{pmatrix} A & B \\ B^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix} = n$.

六、(共 15 分) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n (n > 2)$ 线性无关. 求证:

(1) 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_n$ 线性无关;

(2) 若向量 β, γ 使得向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma$ 等价, 且向量组

$\alpha_1 - \beta, \alpha_2 - \beta, \dots, \alpha_n - \beta$ 线性相关, 则 γ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示.

七、(共 10 分) 求证: 数域 Ω 上的多项式 f 与 g 互质的充要条件是, 对任意 n 阶方阵 $A, f(A)x=0$ 与 $g(A)x=0$ 的解空间的交集中的元素只有零向量.