第十四章　幂级数

§1　幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛区域.

(1) $\sum nx^n$;(2) $\sum \frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$;(3) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

(4) $\sum r^{n^2}x^n,(0<r<1)$;(5) $\sum \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

(6) $\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;(7) $\sum (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$;

(8) $\sum \frac{1}{2^n}x^{n^2}$

解　(1) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以,收敛半径 $R=1$,即收敛区间为 $(-1,1)$;但当 $x=\pm 1$ 时,有 $\sum(\pm 1)^n n$ 均发散,所以级数 $\sum nx^n$ 在 $x=\pm 1$ 时发散. 于是这个级数的收敛域为 $(-1,1)$.

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}}=\frac{1}{2}$,所以,收敛半径 $R=2$;但当 $x=\pm 2$ 时,有 $\left|\frac{(\pm 2)^n}{n^2 2^n}\right|=\frac{1}{n^2}$,由于级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛,所以级数 $\sum\frac{x^n}{x^2 2^n}$ 在 $x=\pm 2$ 时也收敛,于是这个级数的收敛域为 $[-2,2]$.

(3) 由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{4}$,收敛半径 $R=4$;但当 $x=\pm 4$ 时,这个级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$,记通项为 u_n,则有

$$|u_n|=\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}=\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} > \sqrt{2n+1}$$

于是$\lim\limits_{n \to \infty} |u_n| = +\infty$,所以当$x = \pm 4$时,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$发散,从而可知这个级数的收敛域为$(-4,4)$.

(4) 由于$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{r^{n^2}} = 0$,所以收敛半径为$R = +\infty$,收敛域为$(-\infty, +\infty)$

(5) 由于$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n-1)!}} = 0$ 所以收敛半径$R = +\infty$,于是这个级数的收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

(6) 由于$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3$,所以收敛半径$R = \frac{1}{3}$,因而级数$\sum \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$的收敛区间为$|x+1| < \frac{1}{3}$即$(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$,当$x = -\frac{4}{3}$时,级数

$$\sum \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (-\frac{1}{3})^n = \sum [(-1)^n \frac{1}{n} + \frac{1}{n}(\frac{2}{3})^n]$$

收敛,当$x = -\frac{2}{3}$时,级数$\sum \frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n}$,而由于$\frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n} \sim \frac{1}{n} (n \to \infty)$且$\sum \frac{1}{n}$发散,故此时原级数发散.于是可得级数$\sum \frac{3^n + (-2)^n}{2}(x+1)^n$的收敛域为$(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

(7) 因为$\sqrt[n]{n \cdot \frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{n \cdot 1}$,又由,$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n \cdot 1} = 1$,所以$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1$,从而可得收敛半径$R = 1$;又当$x = \pm 1$时,$\lim\limits_{n \to \infty} |(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})(\pm 1)^n| \neq 0$,可见级数$\sum (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) x^n$在$x = \pm 1$处发散,故幂级数的收敛域为

$(-1,1)$.

(8) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{(n+1)^2}}{x^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{x^{n^2}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x^{2n+1}|}{2}$

$$= \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{2}, & |x| = 1 \\ +\infty, & |x| > 1 \end{cases}$$

所以收敛半径 $R=1$,收敛区域为 $[-1,1]$.

2. 利用逐项求导或逐项求积分的方法求下列幂级数的和函数.(应同时指出它们的定义域)

(1) $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$;

(2) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(3) $1\cdot 2x+2\cdot 3x+\cdots+n(n+1)x^n+\cdots$

解　(1) 因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\dfrac{1}{2n+1}} = 1$,且 $x=\pm 1$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$ 都是发散级数,所以此幂级数的收敛域为 $(-1,1)$,设其和函数为 $f(x)$,于是当 $|x|<1$ 时,逐项求导数可得:

$$f'(x) = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

所以,$f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad (|x|<1)$

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$,且当 $x=\pm 1$ 时这个幂级数发散,所以该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$,设其和函数为 $f(x)$,则

$$f(x) = x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$$

$$= x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1} = x\cdot g(x),\text{其中 } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}.$$

因为当 $|x|<1$ 时

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

所以，$g(x) = (\frac{x}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$，从而 $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}(|x|<1)$.

(3) 因为

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n} = 1$$

且当 $x=\pm 1$ 时，这个级数发散，所以该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$，设其和函数为 $f(x)$，则

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)t^n dt$$

$$= x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n = \frac{x^2}{(1-x)^2} \quad (|x|<1)$$

所以，$f(x) = [\frac{x^2}{(1-x)^2}]' = \frac{(1-x)^2\cdot 2x + x^2\cdot 2(1-x)}{(1-x)^4}$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3} \quad (|x|<1)$$

3. 证明：设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x|<R$ 内收敛，若 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛，则 $\int_0^R f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$.

（注意：这里不管 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ 是否收敛），应用这个结果证明：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

证　因为当 $|x|<R$ 时，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，则有

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}(x\in(-R,R))$$

但已知当 $x = R$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 收敛，从而可知，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x = R$ 左连续，于是

$$\int_0^R f(x)dx = \lim_{x \to R^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

应用这个结果，取 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}$，当 $|x| < 1$ 时有 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，所以

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

4．证明：(1) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)} = y$；

(2) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy'' + y' - y = 0$.

证　(1) 因为 $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(4n)!}} = 0$，故这个幂级数的收敛区间 $(-\infty, +\infty)$，所以它可以在区间为 $(-\infty, +\infty)$ 内逐项微分任意次，从而，

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}, y''' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}.$$

$$y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4(n-1)}}{[4(n-1)]!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y.$$

(2) 因为 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n!)^2}} = 0$，故该幂级数的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$，它可以在 $(-\infty, +\infty)$ 内逐项微分任意次.

注意到

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{[(n-1)!]^2}$$

可得，$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!(n-1)!}$，

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!(n-2)!}$$

所以

$$\begin{aligned} &xy'' + y' - y \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} [\frac{1}{n!(n-2)!} + \frac{1}{n!(n-1)!} - \frac{1}{[(n-1)!]^2}]x^{n-1} + 1 - 1, \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} [\frac{(n-1)!(n-1) + (n-1)! - n!}{n![(n-1)!]^2}]x^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

5. 证明：设 $f(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 上的和函数，若 $f(x)$ 为奇函数，则该级数仅出现奇次幂的项，若 $f(x)$ 为偶函数，则该级数仅出现偶次幂的项.

证　因为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$(|x| < R)$，所以有 $f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n (|x| < R)$，当 $f(x)$ 为奇函数时，有 $f(x) + f(-x) = 0\ (|x| < R)$，从而 $a_n + (-1)^n a_n = 0 (n = 0,1,\cdots)$ 而此式当且仅当 $a_{2k} = 0 (k = 0,1,2,\cdots)$，故这时必有 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} x^{2k-1}$ $(|x| < R)$，当 $f(x)$ 为偶函数时，$f(x) - f(-x) = 0 (|x| < R)$，从而 $a_n - (-1)^n a_n = 0 (n = 0,1,\cdots)$ 而此式当且仅当 $a_{2k-1} = 0$ $(k = 1,2,\cdots)$，故这时必有 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$.

6. 求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} (a > 0, b > 0)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$

解　(1) 记 $a_n = \frac{1}{a^n + b^n}$，则 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \max\{a, b\}$ 所以收敛半

径 $R=\max\{a,b\}$,由于 $|x|=R$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R^n}{a^n+b^n}=1\neq 0$,故这个幂级数在 $x=\pm R$ 处发散,从而此幂级数的收敛域为 $(-R,R)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 所以收敛半径 $R=\frac{1}{e}$,又因为当 $x=\pm\frac{1}{e}$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(\pm\frac{1}{e})^n\neq 0$. 所以这个幂级数在 $x=\pm\frac{1}{e}$ 处发散. 故此幂级数的收敛域为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

7. 证明定理 14.3,并求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$;

(2) $a+bx+ax^2+bx^3+\cdots,(0<a<b)$.

定理 14.3 对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,设 $\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$,$R$ 为收敛半径,则当

(ⅰ) $0<\rho<+\infty$ 时,$R=\frac{1}{\rho}$;

(ⅱ) $\rho=0$ 时,$R=+\infty$;

(ⅲ) $\rho=+\infty$ 时,$R=0$.

证　对于任意的 x,$\sqrt[n]{|a_nx^n|}=\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|$,因此 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|)=\rho|x|$. 于是根据正项级数 Cauchy 判别法的推论 2 知:当 $\rho|x|<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛;当 $\rho|x|>1$ 时,可知 $|a_nx^n|$ 不趋于零 $(n\to\infty)$,于是 a_nx^n 不趋于零 $(n\to\infty)$,从而可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散. 因此,

(ⅰ)当 $0<\rho<+\infty$ 时,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$;

(ⅱ)当 $\rho=0$ 时,对任何 x 皆有 $\rho|x|<1$,所以 $R=+\infty$;

(ⅲ)当 $\rho=+\infty$ 时,则除 $x=0$ 外,对任何 x 皆有 $\rho|x|>1$,所以可知 $R=0$,

解　(1)对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$,因为上极限,

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n}{n}}=4$,所以 $R=\frac{1}{4}$.

(2)对于 $a+bx+ax^2+bx^3+\cdots(0<a<b)$ 因为 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ $=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$,所以 $R=1$.

8. 求下列幂级数的收敛半径及其和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$

解　(1)因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}}=1$,故收敛半径 $R=1$,当 $x=\pm1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 都收敛,故这个幂级数的收敛域是 $[-1,1]$. 设 $g(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

则当 $|x|<1$ 时,

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},g''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

从而可得,

$$g'(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x),$$

$$\begin{aligned}g(x)&=-\int_0^x\ln(1-t)dt=-t\ln(1-t)\Big|_0^x+\int_0^x\frac{-t}{1-t}dt\\&=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)\\&=(1-x)\ln(1-x)+x.\end{aligned}$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & -1\leqslant x<1,\text{且 } x\neq 0.\\ 1, & x=1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}}=1$，所以 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，这个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm1)^n}{n(n+1)(n+2)}$ 是收敛的，从而该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$. 令

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}(|x|\leqslant 1)\end{aligned}$$

则当 $|x|<1$ 时，由(1)知

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=(1-x)\ln(1-x)+x$$

因此

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x[(1-t)\ln(1-t)+t]dt\\&=-\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}x^2(|x|<1)\end{aligned}$$

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$ 的和函数是 $S(x)$，则当 $0<|x|<1$ 时，

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}\\&=\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{(1-x)^2}{2x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}+\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

因为该幂级数在 $x=\pm1$ 时收敛，从而它在收敛域端点 $x=\pm1$ 处右、左连续，所以，

当 $x=1$ 时，$S(x)=\dfrac{1}{4}$；

当 $x=-1$ 时，$S(x)=2\ln\frac{1}{2}+\frac{5}{4}$；

当 $x=0$ 时，$S(x)=0$.

故和函数为

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{(1-x)^2}{2x^2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x}+\frac{3}{4},0<|x|<1\\ \frac{1}{4},x=1\\ 2\ln\frac{1}{2}+\frac{5}{4},x=-1\\ 0,x=0\end{cases}$$

9. 设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列($a_0\neq 0$)，试求：

(1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径；

(2) 数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 的和数.

解　(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则

$$a_{n+1}=a_0+(n+1)d,a_n=a_0+nd,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|1+\frac{d}{a_0+nd}\right|=1$，所以 $R=1$.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_0+nd}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}d$.

又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}=\frac{a_0}{1-\frac{1}{2}}=2a_0$，对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}d$ 可考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$，设

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$，则

$$\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}(|x|<2)$$

$$\int_0^x\frac{f(t)}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2^n}t^{n-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}(\text{其中} \mid \frac{x}{2} \mid < 1),$$

所以 $\frac{f(x)}{x} = (\frac{2}{2-x})' = \frac{2}{(2-x)^2}, f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}.$

令 $x=1$，可得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} = f(1) = \frac{2}{(2-1)^2} = 2$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}d = 2d$

从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nd}{2^n} = 2a_0 + 2d.$

§2　函数的幂级数展开

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的各阶导数一致有界，即存在正数 M，对一切 $x \in (a,b)$，有 $\mid f^{(n)}(x) \mid \leqslant M(n = 1,2,3,\cdots)$，证明：对 (a,b) 内任一点 x 与 x_0 有 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，$(f^{(0)}(x) = f(x), 0! = 1)$

证　对于任意的 $x, x_0 \in (a,b)$，由于

$$\mid R_n(x) \mid = \mid \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \mid$$

$$\leqslant \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \to 0(n \to \infty)$$

故由定理 14.11 可知

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2. 利用已知函数的幂级数展开式，求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式，并确定它收敛于该函数的区间：

(1) e^{x^2}；(2) $\frac{x^{10}}{1-x}$；(3) $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$；(4) $\sin^2 x$；(5) $\frac{e^x}{1-x}$；

(6) $\frac{x}{1+x-2x^2}$；(7) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$；(8) $(1+x)e^{-x}$；

(9) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解 (1) 利用 $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$.

(2) 因为当 $|x| < 1$ 时, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, 所以

$$f(x) = \frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+10}, (|x| < 1).$$

(3) 因为当 $t \in (-1,1]$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+t}} &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}t^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^n\end{aligned}$$

故当 $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 时有,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-2x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n\end{aligned}$$

所以 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(4) 因为 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}(|x| < \infty)$, 所以

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}, (|x| < ++\infty).\end{aligned}$$

(5) 因为 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, (|x| < +\infty), \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (|x| < 1)$

所以当 $|x| < 1$ 时

$$\frac{e^x}{1-x}=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!})(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})x^n,(|x|<1)$$

(6) 因为$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x})$ 且$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(|x|<1)$，$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$

所以$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x})=\frac{1}{3}[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^n]$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n,(|x|<\frac{1}{2})$$

(7) 因为 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(|x|<\infty)$，所以

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int^0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},(|x|<+\infty).$$

(8) 因为 $e^{-x}=1-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$，$(|x|<+\infty)$

所以

$$(1+x)e^{-x}=(1+x)$$

$$(1-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}x^n+\cdots)$$

$$=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$+x-x^2+\frac{1}{2!}x^3+\frac{1}{3!}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(-\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right)x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n!}x^n(|x| < +\infty)$$

(9) 因为$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}, t \in [-1,1]$从而有

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \int_0^x [\ln(t+\sqrt{1+t^2})]'dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$= \int_0^x [1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}]dt$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!! - x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}, (|x| \leqslant 1).$$

(当 $x = -1$ 时,该幂级数收敛).

3. 求下列函数在 $x = 1$ 处的泰勒展开式:

(1)$f(x) = 3 + 2x - 4x^2 + 7x^3$;　　(2)$f(x) = \frac{1}{x}$

解　(1) 因为 $f(1) = 8, f'(1) = 2 - 8x + 21x^2|_{x=1} = 15$,

$f''(1) = -8 + 42x|_{x=1} = 34, f'''(1) = 42, f^{(n)}(1) = 0, (n \geqslant 4)$

所以

$$f(x) = 8 + 15(x-1) + 17(x-1)^2 + 7(x-1)^3, x \in (-\infty, +\infty)$$

(2)$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n, (|x-1| < 1)$,

4. 求下列函数的马克劳林级数展开式:

(1) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;　　(2)$x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$;

解　(1) 令$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$

$$= \frac{A}{1-x} + \frac{C}{1+x} + \frac{B}{(1-x)^2}$$

可得 $A = -\frac{1}{4}$;$B = \frac{1}{2}$;$C = -\frac{1}{4}$,所以

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1) - \frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n, (|x| < 1).$$

其中$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$

$$= 1 + (-2)\cdot(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2$$

$$+ \cdots + \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n \qquad (|x| < 1)$$

(2) 因为 $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, (|x| < 1)$$

且 $\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$ 所以

$$x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n(2n-1)}x^{2n}, (|x| < 1)$$

5. 试将 $f(x)=\ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 的幂展开成幂级数.

解　因为 $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\quad(|x|<1)$$

所以 $\ln x=\ln\dfrac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1},(|x|<1)$

§3　复变量的指数函数·欧拉公式

1. 证明棣莫弗(*De Moivre*)公式：

$$\cos nx+i\sin nx=(\cos x+i\sin x)^n$$

证　由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 知

$$(\cos x+i\sin x)^n=(e^{ix})^n=e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$$

2. 应用欧拉公式与棣莫弗公式证明：

(1) $e^{x\cos\alpha}\cdot\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cos n\alpha$；

(2) $e^{x\cos\alpha}\cdot\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sin n\alpha$.

证　令 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$　　由欧拉公式有

$$e^z=e^{(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=e^{\cos\alpha}[\cos(\sin\alpha)+i\sin(\sin\alpha)]$$

故

$$e^{xz}=e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=e^{x\cos\alpha}[\cos(x\sin\alpha)+i\sin(x\sin\alpha)]$$

$$=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)+ie^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)\qquad(\text{i})$$

又因为，$e^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nz^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)}{n!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cos n\alpha+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sin n\alpha\qquad(\text{ii})$$

由(ⅰ),(ⅱ)两式比较实虚部可得

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cos n\alpha;$$

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sin n\alpha.$$

总 练 习 题

1. 证明：当 $|x|<\frac{1}{2}$ 时

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=1+3x+7x^2+\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots$$

证　因为

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$$

所以，当 $|2x|<1$ 即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，有

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n$$

$$=1+3x+7x^2+\cdots+(2^n-1)x^{n-1}+\cdots$$

2. 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；　　(2) $f(x)=\sin^3x$；

(3) $f(x)=\int_0^x\cos t^2dt$.

解　(1) 当 $x\in(-1,1]$ 时，有

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln(1+x)+x\ln(1+x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1}\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^n\end{aligned}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)} x^n$$

(当 $x = -1$ 时,右端收敛,所以有 $|x| \leqslant 1$)

(2) 由三角公式得知

$$f(x) = \sin^3 x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)]$$

$$= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1-3^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, (|x| < +\infty)$$

(3) 逐项积分可得

$$f(x) = \int_0^x \cos t^2 dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1}, (|x| < +\infty)$$

3. 确定下列幂级数的收敛域,并求其和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$; (4) $\sum (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n)^2 - 1}$

解 (1) 因为 $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$,所以 $R = 1$,当 $x = \pm 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n^2$ 都发散,所以收敛域是 $(-1,1)$,令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}, (|x| < 1) \text{ 则}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, (|x| < 1)$$

(2) 因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(\frac{x^2}{2})^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot (\frac{x^2}{2})^n$,

设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2})^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2-x^2}, (|\frac{x^2}{2}| < 1)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{x^2}{2})^n = \frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{x^2}{2})^{n-1}$$

$$= \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty} nx, (\frac{x^2}{2})^{n-1} (|\frac{x^2}{2} < 1)$$

则由$\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx(\frac{x^2}{2})^{n-1} = [(\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} nt(\frac{t^2}{2})^{n-1} dt)]'$

$$= [(\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{t^2}{2})^{n-1} d(\frac{t^2}{2}))]' = [\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n]'$$

$$= \left[\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}\right]' = \left[\frac{2}{2-x^2}\right]' = \frac{4x}{(2-x^2)^2}, (|\frac{x^2}{2}| < 1)$$

知 $g(x) = \frac{x}{2} \cdot \frac{4x}{(2-x^2)^2} = \frac{2x^2}{(2-x^2)^2}, (|\frac{x^2}{2}| < 1)$

故$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n} = f(x) + g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2})^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(\frac{x^2}{2})^n$

$$= \frac{1}{2-x^2} + \frac{2x^2}{(2-x^2)^2} = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, (|x| < \sqrt{2})$$

(3) 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}$,则当 $|x-1| < 1$ 时,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(t-1)^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n$$

$$= \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x},$$

所以 $f(x)=(\frac{1}{2-x})'=-\frac{1}{(2-x)^2},(0<x<2)$.

(4) 因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\sqrt[2n+1]{\frac{1}{4n^2-1}}=1$,所以 $R=1$. 当 $x=\pm 1$ 时此幂级数收敛, 故收敛域为 $[-1,1]$. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n)^2-1}$,则当 $|x|\leqslant 1$ 时

$$f'(x)=[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}]'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$$

$$\frac{f'(x)}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$=\arctan x(\text{参考 }P57,\text{例 }7)$$

所以 $f'(x)=x\cdot\arctan x,(|x|\leqslant 1)$. 从而

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x t\arctan t dt$$

$$=\frac{1}{2}[(1+x^2)\arctan x-x],(|x|\leqslant 1)$$

4. 应用幂级数性质求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

解　(1) 令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n+1}(|x|<+\infty)$,则由幂级数逐项微分的性质知

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}]'=\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{n}{n!}x^n$$

从而 $\frac{f'(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}$,由幂级数逐项积分的性质

$$\int_0^x\frac{f'(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{n!}t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x-1$$

所以 $\frac{f'(x)}{x}=(e^x-1)'=e^x$,故 $f'(x)=xe^x$,于是

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x te^t dt=(t-1)e^t\mid_0^x=(x-1)e^x+1.$$

令 $x=1$，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=f(1)=1.$

(2) 令 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1},(\mid x\mid<1)$

则由幂级数逐项微分的性质知

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3},(\mid x\mid<1)$$

从而可得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^3}dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(1-x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}})$$

该幂级数在 $x=1$ 处是收敛的，由定理 14.6 知和函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 这点是左连续的，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{3}\ln2+\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5. 设函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 定义在[0,1]上，证明它在(0,1)上满足下述方程：

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=f(1)$$

证　设 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x),x\in(0,1)$

则 $F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$-\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}=0$$

于是，$F(x)=$ 常数 $c,(0<x<1)$，从而 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=f(1)$，

故 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=f(1),(0<x<1)$.

6. 利用函数的幂级数展开求下列不定式的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2(x-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3}))]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o(\frac{1}{x})]=\frac{1}{2}$

(2) 因为 $\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+o(x^3),\sin x=x+o(x)$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x-[x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]}{[x+o(x)]^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=-\frac{1}{6}$$