吉林大学 2016-2017 学年第一学期“数学分析 I”期末考试试题

共七道大题 满分 100 分 时间 180 分钟

一、（共 8 分）叙述连续函数在闭区间上的有界性定理并对其进行证明.

二、（共 10 分）用定义证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{n^2-3}=4$；（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16}{25x^2-9}=1$.

三、（共 24 分）计算下列各题.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(1-n\sin\dfrac{1}{n})$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}$；

（3）$\int a^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x, a>0\wedge a\neq 1$；（4）$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

四、（共 24 分）按要求计算下列导数或微分.

（1）设 $f(x)=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}, a>0$，求 $f'(x)$；

（2）设 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$，求 $f^{(2017)}(0)$

（3）已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $\sin(x+y)-xy=0$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（4）已知 $x=\ln(1+t^2)+1, y=2\arctan t-(t+1)^2$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

五、（共 16 分）证明题.

（1）已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=3x_n(1-x_n)$，试讨论其敛散性，并说明理由.若其收敛，请求出极限；

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0, a\neq 0$.求证：函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

六、（共 13 分）设函数 $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）求函数 $f(x)$ 的凹凸区间；

（3）求函数 $f(x)$ 的渐近线.

七、（共 5 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 可导，且存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$，求证存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.