# 吉林大学 2016-2017 学年第一学期“高等代数 I”期中考试试题

## 参考解析

一、（共 15 分）设 $f(x)=(x^2-1)^{2m}-a\in\Omega[x]$ 有重因式，其中 $m\in N_+$，$a\in\Omega$，求 $a$ 的值.

解：$f'(x)=4mx(x^2-1)^{2m-1}$，若 $f(x)$有重因式，则必为 $f'(x)$ 的因式：$x, x-1, x+1$.

若 $x$ 是 $f(x)$的重因式，则 $f(0)=1-a=0$，$a=1$.

此时 $f(x)=(x^2-1)^{2m}-1=x^2(\sum_{k=1}^{m}x^{2k-2})[(x^2-1)^m+1]$，确有重因式 $x$.

若 $x-1$ 是 $f(x)$的重因式，则 $f(1)=-a=0$，$a=0$.

此时 $f(x)=(x^2-1)^{2m}=(x-1)^{2m}(x+1)^{2m}$，确有重因式 $x-1$ 和 $x+1$.

综上所述，$a$=0 或 1.

二、（共 15 分）求多项式 $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ 在有理数域上的标准分解.

解：由于其首项系数为 1，常数项为 4，故有理根只可能是±1，±2，±4，逐一代入检验，可得-1,2 是 $f(x)$的所有有理根，故可得：$f(x)=(x+1)^2(x-2)^2$.

三、（共 20 分）设 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 是多项式 $f(x)=x^n+2x^{n-1}+3x^{n-2}+\ldots+nx+1$ 的 $n$ 个复数根，

计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & c_1 & \cdots & c_n\\ c_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & 1\end{vmatrix}$（空白处为 0）的值.

解：①$n$=1 时，$f(x)=x+1$，$c_1=1$，$D=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$.

②$n$=2 时，$f(x)=x^2+2x+1, c_1=c_2=1, D=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1$.

③$n$≥3 时，$D=\begin{vmatrix}1 & c_1 & \cdots & c_n\\ c_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\sum_{k=1}^{n}c_k^2 & c_1 & \cdots & c_n\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{vmatrix}=1-\sum_{k=1}^{n}c_k^2$.

而由 Viète 定理，$1-\sum_{k=1}^{n}c_k^2=1-[(\sum_{k=1}^{n}c_k)^2-2\sum_{1\le i<j\le n}c_ic_j]=1-[(-2)^2-2\times 3]=3$.

四、（共 15 分）设 $f=p^n\in\Omega[x]$，其中 $p$ 为既约多项式，设 $g,h\in\Omega[x]$

求证：若 $f\mid gh$，则必有 $f\mid g$ 或存在正整数 $m$ 使得 $f\mid h^m$.

证明：设 $g=\prod_{k=1}^{m}p_k^{\alpha_k}$ ，$h=\prod_{k=1}^{m}p_k^{\beta_k}$ ，其中 $p_k$ 是不同的既约多项式，$\alpha_k,\beta_k$ 是自然数.

①若 $f\mid g$，则结论已成立.

②若 $f\nmid g$，则 $g=\prod_{k=1}^{m}p_k^{\alpha_k}$ 分解式中含有 $p$ 的次数小于 $n$.此时 $h=\prod_{k=1}^{m}p_k^{\beta_k}$ 中必定含有 $p$ 作为一个因式，否则 $gh$ 中因式 $p$ 的次数小于 $n$，与 $f\mid gh$ 矛盾，则易知存在 $m=n$ 使得 $f\mid h^m$.

五、（共 15 分）设线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=1\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=1\end{cases}$ 的系数行列式 $D$=1.

求证：对于该方程的解 $x_1=c_1,x_2=c_2,\ldots,x_n=c_n$ 必有 $c_1+c_2+\ldots+c_n$ 等于 $D$ 的所有元素的代数余子式之和.

证明：由条件：$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$.而由 $D$=1 知 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}^{-1}$ 存在.

故有 $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\A_{n1}&\cdots&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$（$D$=1）.

其中 $A_{ij}(i,j\in\{1,2,\ldots,n\})$ 是元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，故由上式不难看出：

$$c_1+c_2+\ldots+c_n=\sum_{k=1}^{n}A_{1k}+\sum_{k=1}^{n}A_{2k}+\ldots+\sum_{k=1}^{n}A_{nk}=\sum_{1\le i,j\le n}A_{ij}.$$

六、（共 15 分）设 $f\in\Omega[x_1,x_2,\ldots,x_n]$，$f\neq 0$，求证：对任意给定的正整数 $m$，均存在 $m$ 个互异的 $c_1\in\Omega$，$m$ 个互异的 $c_1\in\Omega$，……，$m$ 个互异的 $c_n\in\Omega$ 使得 $f(c_1,c_2,\ldots,c_n)\neq 0$.

证明：用归纳法.①$n$=1 时，若命题不成立，则存在无数个点使得 $f$=0，故 $f$ 有无数个零点，从而 $f$=0，与 $f\neq 0$ 矛盾！故此时命题成立.

②假设 $n=k$ 时命题成立，考虑 $n=k+1$.（$k\in N_+$）若此时命题不成立，我们这样表述 $f$ ：

$$f=f(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1})=\sum_{t=0}^{s}g_t x_{k+1}^t(g_t\in\Omega[x_1,x_2,\ldots,x_k]\text{且不全为0，}t\in N)\cdot$$

由归纳假设，任意给定的正整数 $m$，均存在 $m$ 个互异的 $c_1\in\Omega$，$m$ 个互异的 $c_1\in\Omega$，……，m 个互异的 $c_k\in\Omega$ 使得 $g_t(c_1,c_2,\ldots,c_k)\neq 0(t\in N)$，即 $g_t(c_1,c_2,\ldots,c_k)\neq 0(t\in N)$ 有无穷个非零点.知可以任取一组 $c_1,c_2,\ldots,c_k$，使得 $g_t(c_1,c_2,\ldots,c_k)\neq 0(t\in N)$，则有：

$$f=f(c_1,c_2,\ldots,c_k,x_{k+1})=\sum_{t=0}^{s}a_t x_{k+1}^t(a_t=g_t(c_1,c_2,\ldots,c_k)\neq 0,\ t\in N).$$

设 $h(x)=\sum_{t=0}^{s}a_t x^t$，则由①知此时命题成立，即 $n=k+1$ 时命题成立.

综合①、②知，命题总成立.