第 1 讲：复数. 2020-2-24

说明: 作业电子版建议以 PDF/word 格式上传到' 学在浙大' 课程主页. (如果是照片，请插入 word 编辑. 上传的文件需要为单个文件，非压缩格式)

1. (Euler 等式) 利用复数的性质证明欧拉的一个等式

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

2. (三角不等式的推广) 证明不等式

$$|z_1+\cdots+z_n|\le|z_1|+\cdots+|z_n|,$$

并给出不等式中等号成立的条件.

3. (不等式) 给定复数 a, z 满足 $|a|<1, |z|<1$. 证明：

$$\frac{||z|-|a||}{1-|a||z|}\le\left|\frac{z-a}{1-a\bar{z}}\right|\le\frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}<1.$$

4. (单位圆周上的正三角形) 给定三个点 z_1, z_2, z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 证明 z_1, z_2, z_3 是正三角形的三个顶点的充要条件是

$$z_1+z_2+z_3=0.$$

5. (恒等式) 给定两个复数 z_1, z_2, 证明恒等式

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2),$$

并说明等式的几何意义.

6. (Lagrange 恒等式) 假设 $z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_n$ 为 $2n$ 个复数，证明

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_jw_j\Big|^2=\Big(\sum_{j=1}^n|z_j|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n|w_j|^2\Big)-\sum_{1\le j<k\le n}|z_j\bar{w}_k-z_k\bar{w}_j|^2.$$

由此推出 Cauchy 不等式：

$$\Big|\sum_{j=1}^n z_jw_j\Big|^2\le\Big(\sum_{j=1}^n|z_j|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n|w_j|^2\Big).$$

不等式中等号成立的充要条件是什么？