作业编号：______________ 上课时间：______________

浙江大学 2018－2019 学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：________________

考试试卷：A 卷、B 卷✓（请在选定项上打✓）

考试形式：闭✓、开卷（请在选定项上打✓），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2019 年 1 月 20 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：______________学号：______________专业：____________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

备用数据：$\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2)=0.9772$，$t_{0.10}(8)=1.40$，$t_{0.05}(8)=1.86$，$t_{0.025}(8)=2.31$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.49$，$\chi^2_{0.05}(3)=7.82$.

一．填空题（每小格 3 分，共 33 分，各分布要写出参数）：

1. 设事件 A,B,C 两两不相容，$P(A)=P(B)=0.4$，$P(C)=0.2$，则 $P(A\cup B\mid B\cup C)=$________；$P(A\cup B-C)=$____________.

2. 设 X 服从参数为 2 的指数分布，则 $P(X\le 2|X\ge 1)=$ ________，$\mathrm{Var}(X-2)=$________，现对 X 独立重复观察 100 次，记为 $X_1,\dots,X_{100}$，则根据中心极限定理，$P(\sum_{i=1}^{100}X_i\ge 45)\approx$__________.

3. 设 X 与 Y 相互独立，$X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,2)$，则 $P(X>Y)=$_______.

4. 设 $(X,Y)\sim N(1,2,4,4,-0.5)$，则 $Var(2X-Y-1)=$ __________；当 $a=$ __________ 时，$X+Y$ 与 $aX-Y$ 相互独立.

5. 设总体 X 的分布律为 $P(X=-1)=\frac{\theta}{3}, P(X=0)=\frac{2\theta}{3}, P(X=1)=1-\theta$，未知参数

$\theta \in (0,1)$. $X_1,\ldots,X_n$是 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则 $E(X) =$ __________, θ 的矩估计量 $\hat{\theta} =$ _________ ；当 $n \to \infty$ 时，$\hat{\theta} \xrightarrow{P}$ _______.

二．(15 分) 设 $X \sim U(0,1)$， $Y \sim B(1, 0.7)$, 且 X 与 Y 独立， $M=\max(X,Y)$, $Z=X+Y$. 分别求 X，Y，M，Z 的分布函数.

三．(15 分) 设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 2, & 0<y<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ (1) 求 (X,Y) 的分布函数值 $F(1, 0.5)$; (2)求条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $P(X>0.5|Y=0.25)$; (3) 判断 X 与 Y 是否相关？说明理由.

四．(15 分) 设总体 $X \sim U(0,\theta]$，未知参数 $\theta>0$，$X_1,\dots,X_{400}$ 是总体 X 的简单随机样本，求 θ 的极大似然估计；若已知 400 个观察值中最小值为 0.48，最大值为 4.90，平均值为 2.52，数据统计如下：

X 取值	$(0, 0.98]$	$(0.98, 1.96]$	$(1.96, 2.94]$	$(2.94, 3.92]$	$\{x>3.92\}$
频数	72	62	88	97	81

请在显著水平 0.05 下，用 χ^2 拟合优度检验法检验假设 $H_0: X \sim U(0,\theta]$.

五．(12 分) 设总体 $X \sim N(\theta,\theta)$，未知参数 $\theta \in (\frac{1}{7},\frac{1}{4})$，从总体中抽取容量为 3 的简单随机样本 X_1, X_2, X_3， $\bar{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差，记 $T_1=\bar{X}, T_2=S^2$，$T_3=\frac{3}{5}\bar{X}+\frac{2}{5}S^2$. (1)判断 T_1, T_2, T_3 是否为 θ 的无偏估计量？说明理由；(2)在无偏估计量中问哪个最有效？说明理由.

六．(10 分) 为验证某汽车厂生产的汽车平均每公升汽油行驶里程是否达到 15km 以上，随机选取 9 辆车，记录下每辆车每公升汽油行驶的千米数，得到样本均值 $\bar{x}=14.426$，样本方差 $s^2=1.23^2$，假设数据来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。(1) 对于假设 $H_0:\mu\geq 15, H_1:\mu<15$，求 P _ 值并进行检验(取 $\alpha=0.05$)；(2)求总体均值 μ 的置信度为 95%的双侧置信区间。

浙江大学2018－2019学年秋冬学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷解答

课程号：061B9090，开课学院：数学科学学院，任课教师：________

考试试卷：A卷、B卷✓（请在选定项上打✓）

考试形式：闭✓、开卷（请在选定项上打✓），允许带无存储功能计算器入场

考试日期：2019 年 1 月 20 日,考试时间：120 分钟

一．填空题（每小格3分，共33分,各分布要写出参数）：

1. 2/3，0.8.

2. $1-e^{-1/2}$，1/4，0.8413.

3. 1/4.

4. (1) -4；(2) 1.

5. $1-\dfrac{4\theta}{3}$，$\dfrac{3-3\bar{X}}{4}$，θ.

二．(15分)解：$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$ 3分 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 0.3, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$ 4分

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 0.3z, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$ 4分

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=0.3F_X(z)+0.7F_X(z-1)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 0.3z, & 0\le z<1,\\ 0.7z-0.4, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$ 4分

三．(15分)解：(1) $F(1,0.5)=3/4$； 3分

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 2dx=2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 3分

所以，当$0<y<1$时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 2分

特别地，$f_{X|Y}(x|0.25)=\begin{cases}4/3, & 0.25<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $P(X>0.5|Y=0.25)=2/3$； 3 分

(3) X 与 Y 正相关。因为 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{36}>0$． 4 分

其中 $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xdy=\frac{2}{3}$, $E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x 2ydy=\frac{1}{3}$, $E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xydy=\frac{1}{4}$.

四．(15 分) 解：似然函数 $L(\theta)=\frac{1}{\theta^{400}}, 0<x_i\le\theta, i=1,\dots,400$ 3 分

$L(\theta)$ 是 θ 的单调减函数，且 $\theta\ge\max\{x_1,\dots x_{400}\}$，所以

θ 的极大似然估计值是 $\hat{\theta}=\max\{x_1,\dots x_{400}\}=4.90$ 3 分

为了检验假设 H_0，需要计算 $P(a<X\le b)=\frac{b-a}{\theta}$ 的估计值 $\frac{b-a}{\hat{\theta}}$，见下表：

X 取值	(0, 0.98]	(0.98, 1.96]	(1.96, 2.94]	(2.94, 3.92]	$\{x>3.92\}$
频数	72	62	88	97	81
概率估计	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5
理论频数	80	80	80	80	80

4 分

$\chi^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{n_i^2}{n\hat{p}_i}-400=9.275>\chi^2_{0.05}(3)=7.82$，拒绝原假设. 5 分

五．(12 分) 解：$E(X)=\theta$, $Var(X)=\theta$；

$E(\bar{X})=E(X)=\theta$, $Var(\bar{X})=\frac{Var(X)}{n}=\frac{\theta}{n}$

$E(S^2)=Var(X)=\theta$, $Var(S^2)=\frac{2(Var(X))^2}{n-1}=\frac{2\theta^2}{n-1}$，且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立，所以，

(1) $E(T_1)=E(T_2)=E(T_3)=\theta$，都是 θ 的无偏估计量； 4 分

(2) $Var(T_1)=Var(\bar{X})=\frac{\theta}{3}, Var(T_2)=Var(S^2)=\theta^2, Var(T_3)=\frac{3\theta}{25}+\frac{4\theta^2}{25}$， 4 分

$Var(T_1)>Var(T_2)>Var(T_3)$. T_3 最有效. 4 分

六．(10 分) 解：(1) $H_0:\mu\ge 15, H_1:\mu<15$

拒绝域为 $T=\dfrac{\bar{X}-15}{S/\sqrt{n}}<-t_{0.05}(n-1)$，

计算得 $t=\dfrac{14.426-15}{1.23/\sqrt{9}}=-1.40$，　　2 分

$P\_=P(t(8)<-1.40)=P(t(8)>1.4)=0.10$　　2 分

$t>-t_{0.05}(8)=-1.86$ 或 $P\_>0.05$，所以接受原假设.　　3 分

(2) 总体均值 μ 的置信度为 95%的双侧置信区间为

$(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1))$ 计算得 $(13.4789,\quad 15.3731)$.　　3 分