北京大学 2015-2016 学年第一学期“数学分析 I”期末考试试题

共九道大题 满分 100 分 时间 150 分钟

一、（共 10 分）设曲线 Γ 为 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, (t\in[0,2\pi))$，求 Γ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

二、（共 10 分）函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^2+\ln y=x^4$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

三、（共 15 分）求极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\sin(x-1)})$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x(x+1)}{x^3}$.

四、（共 15 分）求不定积分：

（1）$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；

（2）$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.

五、（共 10 分）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续且在 (a,b) 可导，再假设 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$ 存在，试问 $f(x)$ 是否在 $x=a$ 处存在右导数.

六、（共 10 分）求 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的带 *Peano* 余项的 *Maclaurin* 公式.

七、（共 10 分）设 $P_n(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-x)^k}{k}$，$n\in N_+$.求证：

（1）n 为奇数时，$P_n(x)$ 有唯一一个实零点；（2）n 为偶数时，$P_n(x)$ 没有实零点.

八、（共 10 分）设在 $f(x)$ 区间 I 上具有二阶导数且设 $F(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$.证明：

（1）若 $f(x)$ 是区间 I 上的下凸函数，则 $F(x)$ 也是区间 I 上的下凸函数；

（2）考虑（1）逆命题的真假.

九、（共 10 分）求证若 $f(x)$ 在 R 上有界且二阶可导，则 $f''(x)$ 必有零点.