

# 中国科学院大学 2014-2015 学年第一学期“数学分析 I”期末

共七道大题 满分 100 分 时间 180 分钟

一、(共 5 分) 用定义证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2015 \cdot 2^n + n^2 + 20 \sin n}{n!} = 0$ .

二、(共 10 分) 求极限

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2015}}{e^x}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^x} - 1)$ ;

三、(共 10 分) 设连续函数  $f(x)$  满足  $\sup_{x, y \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)| < \infty$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = 2015$ .

请证明  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - 2015x| < \infty$ .

四、(共 10 分) 在  $[0, 1]$  上构造一个实函数  $f(x)$ , 使得它在  $[0, 1]$  上单调, 在所有的有理点都不连续且满足  $f(0) = 0$  和  $f(1) = 1$ .

五、(共 10 分) 函数  $f(x)$  的泰勒公式为  $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ .

数  $\xi_n$  介于  $x_0$  和  $x_1$  之间, 如果  $f^{(n+2)}(x_0) \neq 0$ , 请证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\xi_n - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{n+2}$ .

六、(共 15 分) 计算不定积分

(1)  $\int e^{-2x} \sin(5x) dx$ ; (2)  $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx$ ; (3)  $\int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1} dx$ .

七、(共 15 分) 计算黎曼积分

(1)  $\int_1^{1+\pi} \sin^2(x) dx$ ; (2)  $\int_0^1 (1-x^2)^{2015} dx$ ; (3)  $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin(2x) \sin(3x) dx$ .

八、(共 10 分) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续可微且  $f(a) = 0$ . 若  $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

证明不等式  $M^2 \leq (b-a) \int_a^b (f'(x))^2 dx$ .

九、(共 10 分) 令  $A_n = \sum_{k=1}^n \ln(k+1)$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n}$  发散.

十、(共 5 分) 计算反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^{\ln x})x} dx$ .