2019-2020春夏学期《微分几何》第十三周作业

P_{92}

1.(1)**证明**:因为$\bar{s}$为$N(S)$的弧长参数，所以$(\frac{dN}{d\bar{s}})^2=1$.又$\frac{dN}{ds}=-kT+\tau B$.故

$$(\frac{ds}{d\bar{s}})^2=\frac{(\frac{dN}{d\bar{s}})^2}{(\frac{dN}{ds})^2}=\frac{1}{k^2+\tau^2}$$

□

(2).**证明**:由于$N(s)$在单位球面上，所以$n(s)=N(s)$,有$\bar{k_g}=(N^{''},N,N^{'})$,其中$N^{'}=\frac{dN}{d\bar{s}}=(-kT+\tau B)(\frac{ds}{d\bar{s}})$,而$N^{''}=\frac{dN^{'}}{d\bar{s}}=(-\frac{dk}{ds}T-k^2N-\tau^2N+\frac{d\tau}{ds}N)(\frac{ds}{d\bar{s}})^2+(-kT+\tau B)(\frac{d^2s}{d\bar{s}^2})$,将其代入至$\bar{k_g}=(N^{''},N,N^{'})$，并利用$(T,N,B)=1$化简得：

$$\bar{k_g}=(k\frac{d\tau}{d\bar{s}}-\tau\frac{dk}{d\bar{s}})(\frac{ds}{d\bar{s}})^2=\frac{d}{d\bar{s}}(arctan(\frac{\tau}{k}))=\frac{d}{ds}(arctan(\frac{\tau}{k}))\frac{ds}{d\bar{s}}$$

□

(3).**证明**:因为$\partial\Omega=N(s)$为球面上的简单闭曲线，故：

$$\int_{\partial\Omega}\bar{k_g}d\bar{s}=\int_{\partial\Omega}\frac{d}{ds}(arctan(\frac{\tau}{k}))ds=0$$

又由高斯博涅公式，得$\int\int_\Omega KdA+\int_{\partial\Omega}\bar{k_g}d\bar{s}=2\pi$,对于单位球面，$K=1$,即：

$$\int\int_\Omega dA=2\pi$$

即$N(s)$把S^2分成面积相等的两部分。□

2. **证明** 对于曲面M上的测地线，$\vec{N}$与$\vec{n}$重合，所以在高斯映射下，由C的法线所构成的简单闭曲线即为其主法线构成的简单闭曲面。所以直接由第一题Jacobi定理知，$N(A)$和$N(B)$面积相等。□

4.**证明** 因为E^3中的紧致闭曲面是可定向的，则由推论1.3知，若高斯曲率K不恒为零，则该曲面必同胚于球面。若$K\equiv 0$, 则为可展曲面，矛盾。□

5. **证明** 由已知，曲面M的亏格非零，i.e.$g\geq 1$,所以由Gauss-Bonnet公式，知

$$\int\int_M dA=4\pi(1-g)\leq 0$$

因为E^3中的紧致闭曲面上至少存在一个椭圆点，故存在M上的点，其高斯曲率为正，为负，由介值原理知存在点其高斯曲率为零。□