授课题目 与实数理论有关的三个基本定理

教学目的 理解三个基本定理, 并应用其证明和计算数列极限

重点难点 定理的内容与应用

第三次习题课

1 基础知识

1. 单调有界原理

   - 条件: I 数列单调; II 数列有界(可推广到 N_0 以后单调有界).
   - 结论: 满足条件 I 和 II 的数列必有极限.

2. 闭区间套定理

   - 条件: I $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in N^*$; II $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.
   - 结论: 存在唯一的一点 $c \in [a_n, b_n](n \geq 1)$, 使得 $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

3. 确界原理

   - 上确界: 对于一个有上界的数集 X, 如果存在最小的上界 M, 则称 M 为 X 的上确界, 记为 $M = \sup X$. 具两层意义:

     I **上界**: $\forall\, x \in X$, 都有 $x \leq M$. II **最小元**: $\forall\, \varepsilon > 0$, 都存在 $x_\varepsilon \in X$, $s.t.\ x_\varepsilon > M - \varepsilon$.

   - 下确界: 对于一个有下界的数集 X, 如果存在最大的下界 m, 则称 m 为 X 的下确界, 记为 $m = \inf X$. 具两层意义:

     I **下界**: $\forall\, x \in X$, 都有 $x \geq m$. II **最大元**: $\forall\, \varepsilon > 0$, 都存在 $x_\varepsilon \in X$, $s.t.\ x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

   - 定理内容: I 任何非空有上界数集必有上确界; II 任何非空有下界数集必有下确界.
   - 确界性质: 假设 X, Y 均为有界数集, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 为有界数列, 下面结论成立

     (1) **有界性**: $\inf X \leq x \leq \sup X,\ \ \forall\, x \in X$; $\inf\limits_{n\in N^*} x_n \leq x_n \leq \sup\limits_{n\in N^*} x_n,\ \ \forall\, n \in N^*$.

     (2) **四则运算**

     加法性质: $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$, $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$;

     减法性质: $\sup(X-Y) = \sup X - \inf Y$, $\inf(X-Y) = \inf X - \sup Y$;

乘法性质: 若 X, Y 中元素非负, 则 $\sup(XY) = \sup X \sup Y, \quad \inf(XY) = \inf X \inf Y$;

除法性质: 若 X 中元素非负, Y 有正下界, 则 $\sup(\dfrac{X}{Y}) = \dfrac{\sup X}{\inf Y}, \quad \inf(\dfrac{X}{Y}) = \dfrac{\inf X}{\sup Y}$.

(3) **序关系**: $\inf(X+Y) \le \inf X + \sup Y \le \sup(X+Y)$;

若 $X \subset Y$, 则 $\inf Y \le \inf X \le \sup X \le \sup Y$;

若 $\forall\, x \in X, \;\; y \in Y$, 都有 $x \le y$, 则 $\sup X \le \inf Y$;

若 $x_n \le y_n, \, \forall\, n \in N^*$, 则 $\sup\limits_{n\in N^*} x_n \le \sup\limits_{n\in N^*} y_n, \quad \inf\limits_{n\in N^*} x_n \le \inf\limits_{n\in N^*} y_n$.

4. 三个定理的等价性

$$\text{确界原理} \Rightarrow \text{单调有界原理} \Rightarrow \text{闭区间套定理} \Rightarrow \text{确界原理}.$$

2 习题

1. 证明数列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \ln n,$$
$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

都收敛且极限相等. 此极限值记为 c, 称为 Euler 常数, 值为

$$\mathrm{c} = 0.5772156649 \cdots.$$

2. 利用上题结论证明: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdot + \dfrac{1}{2n} \right) = \ln 2$;

3. 给定有界数集 A, B, 记 $S = A \cup B = \big\{ x \in S, x \in A \text{ 或 } x \in B \big\}$, 证明

(1) $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$, (2) $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

4. 求下列数集或数列的上下确界

(1) $\{\arctan x; x \in R\}$, (2) $\{\dfrac{1}{x}; x \ge 1 \& x \in R\}$.

(3) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, (4) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$

5. 设数集 S 有上界 $\xi = \sup S$. 求证: 若 $\xi \notin S$, 则存在严格递增数列 $\{a_n\} \subset S$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$.

6. 确界四则运算性质证明(以下确界为例, 上确界类似).

加法性质: $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$.

减法性质: $\inf(X-Y)=\inf X-\sup Y$.

乘法性质: $\inf(XY)=\inf X\inf Y, \forall\, x\geq 0,\ \ y\geq 0;$

除法性质: $\inf(\dfrac{X}{Y})=\dfrac{\inf X}{\sup Y}, \forall\, x\geq 0,\ \ y\geq c>0.$