4. 求旋转曲面 $x = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, t)$ 上的渐近线.

5. 证明: 曲面为极小曲面的充要条件是, 曲面上存在两族正交的渐近线.

6. 证明: 若曲面与其 Gauss 映射的像成共形对应, 则曲面必是球面或极小曲面.

7. 证明: 上节习题 3 中的三重正交系的曲面交线都是所在曲面的曲率线 (**Dupin 定理**).

8. 证明: (1) 除平面外, 直纹面为极小曲面的充要条件是它为正螺面. (2) 旋转极小曲面必是悬链面.

9. 设曲面方程的展开式为:

$$z = \frac{1}{2}(a_1x^2 + a_2y^2) + \frac{1}{3!}(b_1x^3 + 2b_2x^2y + 3b_3xy^2 + b_4y^3) + \cdots$$

证明: 在原点有

$$a_1 = k_1,\ a_2 = k_2,\ b_1 = \frac{\partial}{\partial x}k_1,\ b_2 = \frac{\partial}{\partial y}k_1,\ b_3 = \frac{\partial}{\partial x}k_2,\ b_4 = \frac{\partial}{\partial y}k_2$$

14. 求旋转曲面$\mathbf{r} = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, t)$的曲率线.

21. 证明: $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = K\sqrt{g}\mathbf{n}$

33. 设曲面$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$上没有抛物点, 并设$S$的一个平行曲面为$\bar{S} : \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{n}$($\lambda$为常数). 证明: 可选取$\bar{S}$ 的法向量$\bar{\mathbf{n}}$, 使$\bar{S}$的总曲率与平均曲率分别为

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}, \quad \bar{H} = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$$

36. 证明: 曲面为球面或平面的充要条件是$H^2 = K$.