浙江大学2013——2014学年春夏学期
《常微分方程（甲）》课程期末考试试卷

课程号：__06110131__，开课学院：__理学院__

考试试卷：✓A卷、B卷（请在选定项上打✓）

考试形式：✓闭、开卷（请在选定项上打✓），允许带__无__入场

考试日期：2014 年 7 月 3 日,考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：________ 学号：________ 所属院系：________

题序	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
评卷人							

一. 求解下列方程（20分）

1.

$$\begin{cases} x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y},\ x > 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

2. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 0,\ -1 < x < 1.$ 已知一个解$y_1 = x$，求通解。

二. 求解下列方程（组）（20分）

1. 求常微分方程 $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+6x\frac{dy}{dx}-6y=x^2$, $x>0$, 的通解.

2. 求常微分方程组

$$\begin{cases} x'=y+z,\ t\geq 0, \\ y'=x+z \\ z'=x+y \end{cases}$$

的通解。指出零解的稳定性。

三. （10分）证明奇次方程$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，有积分因子

$$\mu=\frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}.$$

用积分因子法求下面方程的通解，

$$xydx-(x^2+y^2)dy=0.$$

（提示；奇次方程指，存在正整数n，对于任意$\lambda, P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n P(x,y), Q(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n Q(x,y)$。则有 $P(x,y)=x^nP(1,\frac{y}{x}), Q(x,y)=x^nQ(1,\frac{y}{x})$）

四.（20分）叙述皮亚诺（Peano）存在性定理，并证明。

五. （10分）设初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + (1+y)^2,\ x \geq 0, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

的解的右行最大存在区间是$[0, \beta)$。证明：

$$\frac{\pi}{4} < \beta < 1.$$

六. （20分）1. 求解二阶奇次线性方程 $x'' + 5x' + 6x = 0,\ t \geq 0$. 并分析零解$x = 0$的稳定性。

2. 求解二阶非奇次线性方程 $x'' + 5x' + 6x = f(t),\ t \geq 0$.

3. 假设函数$g(t)$是$[0, \infty)$上的有界连续函数，并且$\int_0^{+\infty} |g(t)| dt$有界。设方程 $x'' + 5x' + (6 + g(t))x = 0$, 在$t \geq 0$上有整体解，证明此解在$t \geq 0$上保持有界。