微分几何第一周作业

教材P5-6.

2. 证明一般参数下曲线$x(t)$ 的曲率和挠率的计算公式是：

$$k(t)=\frac{|x'\times x''|}{|x|^3};\tau(t)=\frac{(x',x'',x''')}{|x'\times x''|^2}.$$

3. 证明：圆柱螺线的主法线与它的中心轴正交，它的从法线与它的中心轴作成定角，它的曲率中心轨迹仍然是圆柱螺线。

4. 设$x(s)$是单位球面上以弧长为参数的曲线，证明：存在向量$e(s),f(s),g(s)$和函数$\lambda(s)$，使得

$$\begin{cases}\dot e &= & f\\ \dot f &= -e & +\lambda(s)g\\ \dot g &= & -\lambda(s)f.\end{cases}$$

5. 设$x(s)=(x^1(s),x^2(s))$是平面上以弧长为参数的曲线，$\{T(s),N(s)\}$是它的Frenet标架，证明

$$N(s)=(-\dot x^2(s),\dot x^1(s)),\ddot x(s)=k_r(s)(-x^2(s),x^1(s)).$$

6. 证明：

(1)除直线外，一条曲线的所有切线不可能同时是另一条曲线的切线。

(2)曲率和挠率都是（非零）常数的正则曲线必定是圆柱螺线。

8. 证明：

（1）任何平面曲线都是Bertrand 曲线。

（2）若$k\tau\neq 0$, 则空间曲线为Bertrand曲线的充要条件是存在常数$\lambda(\neq 0)$ 和μ 使得$\lambda k+\mu\tau=1$.

9. 求满足条件$\tau=ck$ （c为非零常数，$k>0$)的曲线。