

第 29 讲 双曲几何

回顾：单位圆 \mathbb{D} 上的双曲度量为

$$\sigma = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

两点 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ 的双曲距离记为 $d_\sigma(z_1, z_2)$.

1. (裂纹平面) 求出裂纹平面 $\mathbb{C} - [0, +\infty)$ 的双曲度量.

2. (带域: 了解一下) 证明带状区域 $B = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z)| < \pi/2\}$ 的双曲度量为

$$\sigma_B = \frac{|dz|}{\cos y}.$$

尝试描述 B 中测地线的形状.

3. (双曲圆盘 vs 欧氏圆盘) 取单位圆作为双曲空间的模型,

(1). 证明半径为 r 的欧氏圆盘 $D_r = \{z \in \mathbb{D}, |z| < r\}$ 的双曲面积是

$$\frac{4\pi r^2}{1 - r^2}.$$

(2). 取定 $z_0 \in \mathbb{D}$, 证明半径为 r 的双曲圆盘 $D_\sigma(z_0, r) = \{z \in \mathbb{D}; d_\sigma(z_0, z) < r\}$ 的双曲面积为 $4\pi \sinh^2(r/2)$. (注意到这个面积与 z_0 位置没有关系)

(3). 双曲圆盘是欧氏圆盘吗?

4. (一种别致的等周不等式) 假设 \mathbb{D} 中的两条测地线相切于圆周上一点. 给你一条光滑曲线段 γ , 起点和终点分别在两条测地线上, 且与两条测地线围成一个区域 D . 如果 γ 的双曲长度给定, 能围成的区域 D 的最大双曲面积是多少? 证明

$$A_\sigma(D) \leq \ell_\sigma(\gamma).$$

等号成立的充要条件是什么?