华南理工大学 2009-2010 学年第一学期“解析几何”期末考试 A

共七道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、简答题（共 32 分）

（1）已知向量 $\vec{a}(0,1,-1),\vec{b}(1,0,2)$, 求与 $\vec{a},\vec{b}$ 都垂直,且使 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})<0$ 的单位向量 $\vec{c}$.

（2）求过点 $M(2,-3,5)$ 且与平面 $3x-y-4z+2=0$ 垂直的直线的参数方程.

（3）求直线 $\begin{cases} y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所产生的旋转面方程.

（4）求二次曲线 $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ 中心和主方向.

（5）已知相互垂直的三条直线：

$$l_1: x=y=z,\quad l_2: x=\frac{y}{-2}=z,\quad l_3: x=-z, y=0\ ,$$

求以这三条直线为新坐标轴的坐标变换公式.

（6）求通过点 $p(2,0,-1)$，且又通过直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 的平面.

（7）求直线族 $\dfrac{x-\lambda^2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-\lambda}{0}$ 所生成的曲面.

（8）设仿射坐标 I 到 II 的点的坐标变换公式为 $\begin{cases} x=-y'+3 \\ y=x'-2 \end{cases}$， 求直线 $l_1: 2x-y+1=0$ 在坐标系 II 中的方程为与直线 $l_2: 3x'+2y'-5=0$ 在坐标系 I 中的方程.

二、（共 12 分）用坐标法证明: 在 ΔABC 中, 设 P,Q,R 分别是直线 AB,BC,CA 上的点, 并且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BQ}=\mu\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{CR}=\nu\overrightarrow{RA}$. 证明: P,Q,R 共线的充要条件是 $\lambda\mu\nu=-1$.

三、（共 8 分）试证明方程 $xy+yz+zx+z^2-4=0$ 表示一个柱面.

四、（共 12 分）已知曲面的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{\alpha^2t^2+\beta^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{\alpha^2t^2+\beta^2}\sin\theta \\ z=t \end{cases}$ （θ,t 为参数), 试求这个曲面的普通方程, 并就α,β不同的取值情况,讨论此方程表示什么曲面.

五、（共 12 分） 按参数 λ 的值讨论曲面 $x^2-4xy+4y^2+8y+3+2\lambda(-2xy-x-1)=0$ 的类型.

六、（共 12 分）在双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=z$ 上，求平行于平面 $3x+2y-4z=0$ 的直母线方程.

七、（共 12 分）适当选取直角坐标系，求与两给定的异面直线等距离的点的轨迹，已知两异面直线间的距离为 $2a$，夹角为 2α.