

北京大学 2016-2017 学年第一学期“数学分析 I”期中考试试题

共六道大题 满分 100 分 时间 150 分钟

一、(共 30 分) 计算下列各题:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n \sin \frac{1}{n}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \ln n}$;

注意: 下面的(3)(4)两题任选一道小题!

(3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$; (4) 使极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x^\alpha}$ 存在且有限的正实数 α

二、(共 20 分)

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的任一子列都有一个收敛的子列, 则数列 $\{a_n\}$ 是否一定收敛? 请证明或举出反例;

注意: 下面的(2)(3)两题任选一道小题!

(2) 设 $y = f(x)$ 定义在实数集上的连续函数, $f(0) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 问该函数能否取到最大, 最小值? 给出理由;

(3) 设 $y = f(x)$ 是定义在实数集上的连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 问该函数能否取到最大, 最小值? 给出理由.

三、(共 20 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均在区间 $(0,1)$ 上一致连续, 则函数 $f(x)g(x)$ 在此区间是否一致连续? 证明或举出反例;

(2) 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均在区间 $[1, +\infty)$ 上一致连续, 且函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在此区间上有界. 则函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在此区间是否一致连续? 证明或举出反例.

四、(共 10 分) **注意: 本题任选一道小题!**

(1) 证明: 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 且 $|f(x)|$ 在此区间单调, 则 $f(x)$ 也单调;

(2) 证明: 闭区间上只有第一类间断点的函数 $f(x)$ 一定有界.

五、(共 15 分)

(1) (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(1) = f(0)$. 证明: 对任意的 $0 < a < 1$, 只要其倒数是自然数, 则总存在区间 $[0, 1-a]$ 上的实数 m , 使得 $f(a+m) = f(m)$;

(2) (5 分) 证明: 对任意的 $0 < a < 1$, 只要其倒数不是自然数, 则总存在连续函数 $g(x)$, 满足 $g(1) = g(0)$, 且对所有在区间 $[0, 1-a]$ 上的实数 x , 使得 $g(x+a) \neq g(x)$.

六、(共 5 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上一致连续, 求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < +\infty$.