第六章　微分中值定理及应用

§1　拉格朗日中值定理和函数的单调性

1. 试讨论下列函数在指定区间内是否存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{\pi}, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

(2) $f(x)=|x|,\ -1\leqslant x\leqslant 1$.

解　(1) 因为 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{\pi}]$ 上连续，在 $(0,\frac{1}{\pi})$ 内可导，且 $f(0)=f(\frac{1}{\pi})$，所以由罗尔中值定理存在一点 $\xi\in(0,\frac{1}{\pi})$，使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 虽然 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，$f(-1)=f(1)$. 但 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内 $x=0$ 点不可导. 可见，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不满足罗尔中值定理的条件，因此未必存在一点 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi)=0$

事实上，由于 $f'(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0, \end{cases}$

所以不存在一点 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

2. 证明：(1) 方程 $x^3-3x+c=0$ (这里 c 为常数) 在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的实根；

(2) 方程 $x^n+px+q=0$ (n 为自然数，p,q 为实数) 当 n 为偶数时至多有两个实根；当 n 为奇数时至多有三个实根.

证　(1) 记 $f(x)=x^3-3x+c$，用反证法. 假设 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内有两个不同的实根 x_1,x_2，那么 $f(x_1)=f(x_2)$，又因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，所以由罗尔中值定理知：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=3(x^2-1)$ 只有两个实根 $x=\pm1$，因此不存在 $\xi\in(0,$

1),使得 $f'(\xi)=0$,于是推出矛盾.

(2) 设 $f(x)=x^n+px+q$,用反证法.

1) 当 $n=2k(k=1,2,\cdots)$ 为偶数时,假设 $f(x)=0$ 至少有三个实根 x_1,x_2,x_3,不妨设 $x_1<x_2<x_3$,则由罗尔中值定理知:存在 $\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in x_2,x_3)$,使得

$f'(\xi_1)=2k\xi_1^{2k-1}+p=0, f'(\xi_2)=2k\xi_2^{2k-1}+p=0$,但由于幂函数 x^{2k-1} 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增,从而 $f'(x)=2kx^{2k-1}+p$ 也在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增,而 $\xi_1<x_2<\xi_2$,所以 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$,于是推出矛盾.

2) 当 $n=2k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 为奇数时,若 $k=0$,结论显然成立.若 $k=1,2,\cdots$,假设 $f(x)=0$ 至少有四个实根,则由罗尔中值定理知

$f'(x)=(2k+1)x^{2k}+p=0$,即 $x^{2k}+0\cdot x+\dfrac{p}{2k+1}=0$ 至少有三个实根,这与(1) 的结论矛盾.

3. 证明定理 6.3 的推论 2.

证　设 $F(x)=f(x)-g(x)$,则因为 $F(x)$ 在区间 I 上可导,且 $F'(x)=f'(x)-g'(x)\equiv 0$,所以由定理 6.3 的推论 1 知:$F(x)$ 为 I 上的一个常量函数,即

$$F(x)=f(x)-g(x)=c\quad (c\ 为某一定数).$$

从而,在 I 上有

$$f(x)=g(x)+c\quad (c\ 为某一定数).$$

4. 证明:(1) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'(x)\geqslant m$,则

$$f(b)\geqslant f(a)+m(b-a);$$

(2) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $|f'(x)|\leqslant M$,则 $|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a)$;

(3) 对任意实数 x_1,x_2,都有

$$|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|.$$

证　(1) 因为 f 在 $[a,b]$ 上可导,所以由拉格朗日中值定理知:存

在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

又 $f'(\xi) \geqslant m$,故

$$f(b)-f(a) \geqslant m(b-a),\text{即 } f(b) \geqslant f(a)+m(b-a).$$

(2) 因为 f 在$[a,b]$上可导,所以由拉格朗日中值定理知:存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$|f(b)-f(a)|=|f'(\xi)|(b-a),$$

又 $|f'(\xi)| \leqslant M$,所以 $|f(b)-f(a)| \leqslant M(b-a)$.

(3) 当 $x_1=x_2$ 时结论显然成立,当 $x_1 \neq x_2$ 时,对函数 $\sin x$ 在以 x_1,x_2 为端点的区间上应用拉格朗日中值定理,得

$$\sin x_1-\sin x_2=\cos\xi \cdot (x_1-x_2),$$

其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之间,因此

$$|\sin x_1-\sin x_2|=|\cos\xi||x_1-x_2| \leqslant |x_1-x_2|.$$

5. 应用拉格朗日中值定理证明下列不等式

(1) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$,其中 $0<a<b$;

(2) $\dfrac{h}{1+h^2}<\arctan h<h$,其中 $h>0$.

证　(1) 因为 $f(x)=\ln x$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,所以由拉格朗日中值定理,存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{b-a}{\xi},$$

从而

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

(2) 对函数 $f(x)=\arctan x$ 在$[0,h]$上应用拉格朗日中值定理知:存在 $\xi \in (0,h)$ 使得

$$\arctan h=\arctan h-\arctan 0=\frac{h}{1+\xi^2},$$

从而

$$\frac{h}{1+h^2} < \arctan h < h.$$

6. 确定下列函数的单调区间

(1) $f(x)=3x-x^3$ (2) $f(x)=2x^2-\ln x$

(3) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ (4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

解 (1) 由于 $f'(x)=3(1-x^2)$，故当 $|x|\leqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$；当 $|x|\geqslant 1$ 时，$f'(x)\leqslant 0$. 所以 f 在 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上递减，在 $[-1,1]$ 上递增.

(2) 由于 $f'(x)=\dfrac{1}{x}(4x^2-1)$，故当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)\leqslant 0$；当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<+\infty$ 时，$f'(x)\geqslant 0$. 所以 f 在 $(0,\dfrac{1}{2}]$ 上递减，在 $[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上递增.

(3) 由于 $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，$f$ 的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 2$，故 f 在 $[0,1]$ 上递增，在 $[1,2]$ 上递减.

(4) 由于 $f'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}>0$，$x\neq 0$，故 f 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内递增.

7. 应用函数的单调性证明下列不等式：

(1) $\tan x > x-\dfrac{x^3}{3}$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{3})$；

(2) $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$；

(3) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2(1+x)}$，$x>0$.

证 (1) 设 $f(x)=\tan x-x+\dfrac{x^3}{3}$，则 $f'(x)=\tan^2 x+x^2>0$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，所以 f 在 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 内严格递增. 只 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $f(0)=0$，故当 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 时，$f(x)>0$，即 $\tan x>x-\dfrac{x^3}{3}$.

(2) 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,则 $f'(x)=\dfrac{(x-\tan x)\cos x}{x^2}>0(0<x<\dfrac{\pi}{2})$. 令 $g(x)=x-\tan x, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,则 $g'(x)=-\tan^2 x<0, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,故 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内严格递减,又 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $g(0)=0$,故在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内 $g(x)<0$,即 $x-\tan x<0$,所以当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时,$f'(x)<0$. 从而 f 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内严格递减. 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 所以 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}<\dfrac{\sin x}{x}<1$,即 $\dfrac{2x}{\pi}<\sin x<x, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

(3) 设 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$,则 $f'(x)=\dfrac{x^2}{1+x}>0(x>0)$ 从而当 $x>0$ 时,f 严格递增. 又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $f(0)=0$,所以当 $x>0$ 时,$f(x)>0$ 时,$f(x)>0$,即 $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$.

设 $g(x)=x-\dfrac{x^2}{2(1+x)}-\ln(1+x), x>0$. 同理可证,当 $x>0$ 时,$g(x)>0$,即 $x-\dfrac{x^2}{2(1+x)}>\ln(1+x)$. 综合上述结果可得,当 $x>0$ 时,有

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}.$$

8. 以 $S(x)$ 记由 $(a,f(a)),(b,f(b)),(x,f(x))$ 三点组成的三角形面积,试对 $S(x)$ 应用罗尔中值定理证明拉格朗日中值定理.

证　易见

$$S(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & f(a) & 1\\ b & f(b) & 1\\ x & f(x) & 1\end{vmatrix},$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则 $S(x)$ 亦在 $[a,b]$ 上连

续,在(a,b)内可导,且$S(a)=S(b)=0$,所以由罗尔中值定理知:在(a,b)内至少存在一点ξ,使得$S'(\xi)=0$.而

$$S'(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ x & f(x) & 1 \end{vmatrix}'$$
$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ b-a & f(b)-f(a) & 0 \\ 1 & f'(x) & 0 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}[f'(x)(b-a)-(f(b)-f(a))],$$

故

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

9. 设f为$[a,b]$上二阶可导函数,$f(a)=f(b)=0$,并存在一点$c\in(a,b)$使得$f(c)>0$,证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)<0$.

证　由拉格朗日中值定理知:

$$f(c)=f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a),a<\xi_1<c$$
$$-f(c)=f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c),c<\xi_2<b$$

因为$f(c)>0$,所以$f'(\xi_1)>0,f'(\xi_2)<0$,从而

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)<0,\xi_2-\xi_1>0$$

又由拉格朗日中值定理知:存在一点$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)\quad\therefore f''(\xi)<0$$

10. 设函数f在(a,b)内可导,且f'单调,证明f'在(a,b)内连续.

证　不妨设f'在(a,b)内单调递增,则对任一$x_0\in(a,b)$,必存在x_0的某一邻域$U(x_0)\subset(a,b)$.因为f'在$U_+(x_0)$内单调递增有下界$f'(x_0)$,在$U_-(x_0)$内单调递增有上界$f'(x_0)$,所以$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$都存在.从而由拉格朗日中值定理的推论3,

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = f_+{}'(x_0), \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f_-{}'(x_0),$$

而 $f_+{}'(x_0) = f_-{}'(x_0) = f'(x_0)$,故 $f'(x)$ 在(a,b)内连续.

11. 设$P(x)$为多项式,α为$P(x)=0$的r重实根,证明:α必定是$P'(x)$的$r-1$重实根.

证　由题设 $P(x) = h(x)(x-\alpha)^r$,其中 $h(x)$ 为多项式,且 $h(\alpha)\neq 0$,从而

$$p'(x) = (x-\alpha)^{r-1}[h'(x)(x-\alpha) + \mathrm{rh}(x)],$$

又因$[h'(x)(x-\alpha) + \mathrm{rh}(x)]|_{x=\alpha} = \mathrm{rh}(\alpha)\neq 0$,所以 α 是$p'(x) = 0$ 的 $r-1$ 重实根.

12. 证明:设f为n阶可导函数,若方程$f(x)=0$有$n+1$个相异的实根,则方程 $f^{(n)}(x) = 0$ 至少有一实根.

证　设 $f(x) = 0$ 的 $n+1$ 个相异实根为

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

则由罗尔中值定理知:存在 $\xi_{1i}(i = 1,2,\cdots,n)$:

$$x_0 < \xi_{11} < x_1 < \xi_{12} < x_2 < \cdots < \xi_{1n} < x_n,$$

使得　$f'(\xi_{1i}) = 0,(i = 1,2,\cdots,n)$.

再由罗尔中值定理至少存在 $\xi_{2i}(i = 1,2,\cdots,n-1)$:

$$\xi_{11} < \xi_{21} < \xi_{12} < \xi_{22} < \xi_{13} < \cdots < \xi_{2n-1} < \xi_{1n},$$

使得　$f''(\xi_{2i}) = 0,(i = 1,2,\cdots,n-1)$.

如此作到第 n 步,则知至少存在一点 ξ:$\xi_{n-11} < \xi < \xi_{n-12}$,

使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

13. 设 $a,b>0$,证明方程 $x^3 + ax + b$ 不存在正根.

证　由于 $f'(x) = 3x^2 + a$

对于 $\forall x > 0, f'(x) = 3x^2 + a > 0$,单调增,

而当 $x = 0$　$f(0) = b > 0$

$\therefore f(x) = x^3 + ax + b$ 不存在正根.

14. 证明:$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

证 原式等价于 $\tan x \cdot \sin x > x^2, x \in (0,\frac{\pi}{2})$ 设 $f(x) = \tan x \cdot \sin x - x^2$，则

$$f'(x) = \sin x(\sec^x + 1) - 2x,$$
$$f''(x) = 3\sec x - \cos x - 2,$$
$$f'''(x) = 3\tan x\sec x + \sin x > 0, x \in (0,\frac{\pi}{2}).$$

故 $f''(x)$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内严格递增.又 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $f''(0) = 0$，所以 $f''(x) > 0, x \in (0,\frac{\pi}{2})$.从而 $f'(x)$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内严格递增.又 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)>0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.于是 $f(x)$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内严格递增，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=0$，所以 $f(x)>0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.即

$$\tan x \cdot \sin x > x^2, x \in (0,\frac{\pi}{2}).$$

15. 证明：若函数 f,g 在区间$[a,b]$上可导，且 $f'(x) > g'(x)$，$f(a) = g(a)$，则在$(a,b]$内有 $f(x) > g(x)$.

证 设 $F(x) = f(x) - g(x)$，则

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) > 0, x \in (a,b]$$

故 F 在$[a,b]$上严格递增，所以当 $x \in (a,b]$，有
$F(x) > F(a) = 0$.故在区间$(a,b]$上 $f(x) > g(x)$.

§2 柯西中值定理和不定式极限

1. 试问函数 $f(x) = x^2, g(x) = x^3$ 在区间$[-1,1]$能否应用柯西中值定理得到相应结论，为什么？

解 不能得到，因为 $f'(x) = 2x, g'(x) = 3x^2$，当 $x = 0$ 时，$f'(x) = g'(x) = 0$，不满足柯西中值定理的条件.

2. 设函数 f 在$[a,b]$上可导.证明：存在 $\xi \in (a,b)$.使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

证　设$F(x)=(b^2-a^2)f(x)-[f(b)-f(a)]x^2$,则$F(x)$在$[a,b]$上可导.且$F(a)=F(b)$.故由罗尔中值定理各:存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$F'(\xi)=(b^2-a^2)f'(\xi)-2\xi[f(b)-f(a)]=0.$$

即$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

3. 设函数f在点a,具有连续的二阶导数.证明:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

证　设$g(x)=f(x)-f(x-h)$,并取绝对值充分小的h,使得$f''(x)$在$U(a,2|h|)$内有定义.则由拉格朗日中值定理知

$$\begin{aligned}&f(a+h)+f(a-h)-2f(a)\\&=[f(a+h)-f(a)]-[f(a)-f(a-h)]\\&=g(a+h)-g(a)=g'(\xi_1)h\\&=[f'(\xi_1)-f'(\xi_1-h)]h=f''(\xi)h^2\end{aligned}$$

其中ξ_1在a与$a+h$之间,ξ在ξ_1与ξ_1-h之间.因此

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim_{h\to0}f''(\xi),$$

注意到当$h\to0$时,有$\xi\to a$,且$f''(x)$在点a连续,所以

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$$

4. 设$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,试证明存在$\theta\in(\alpha,\beta)$,使得

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\operatorname{ctan}\theta$$

证　因为$f(x)=-\sin x$,$g(x)=\cos x$在$[\alpha,\beta]$上连续,在(α,β)内可导,$f'(x)=-\cos x$,$g'(x)=-\sin x$在(α,β)内不同时为零,$g(\alpha)\neq g(\beta)$,所以由柯西中值定理知:存在$\theta\in(\alpha,\beta)$,使得

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\operatorname{ctan}\theta$$

5. 求下列不定式极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2x}\right)$;　　(12) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{\cos x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\cos x}{3\sin3x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sec^2x\tan x}{\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\sec^3x=2$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x-6}{\sec x+5}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2x}{\sec x\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin x}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln\tan x}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{\sin x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\sec^2x\sin x}=e^0=1.$$

(8) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{x}}=e^{-1}$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}} = e^0 = 1$$

(10) $\lim\limits_{x\to+} \sin x\ln x = \lim\limits_{x\to+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right) = 0.$$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x - 2x}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x - 2x}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x + 2x\sin 2x + x^2\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-2\sin 2x}{3\sin 2x + 6x\cos 2x - 2x^2\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-2}{3+3\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\cos 2x - 2x^2} = -\frac{1}{3}.$$

(12) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{\ln\frac{\tan x}{x}}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sec^2 x-\tan x}{2x^2\tan x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2 x\tan x}{2\tan x + x\sec^2 x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sec^2 x\tan^2 x+\sec^4 x}{3\sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

6. 设函数 f 在 a 点具有二阶导数，证明：对充分小的 h，存在 θ，$0<\theta<1$，使得

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = \frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}$$

证　令 $g(x) = f(a+x) + f(a-x)$

则：$\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$

$$=\frac{g(h)-g(0)}{h^2}$$

$$=\frac{g'(h)-0}{2h}\quad(\because g'(0)=f'(a)-f'(a)=0)$$

$$=\frac{g'(h)-g'(0)}{2h}$$

$$=\frac{g''(\theta h)h}{2h}=\frac{g''(\theta h)}{2}=\frac{f''(a+\theta h)+f''(a-\theta h)}{2}$$

7. 求下列不定式极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x$；

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan2x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctan}x-\dfrac{1}{x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{\dfrac{\pi}{2}\cos(x-1)\cos\dfrac{\pi x}{2}}$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{2}{\pi\cos(x-1)}\cdot\frac{\sin(x-1)}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi x}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\arctan x)\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{\dfrac{1}{\ln x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln^2x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x+2\ln x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\sin\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x})} = e^{-\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x})} = 1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\tan2x\ln\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\mathrm{ctan}2x}}$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin2x} = e^{-1}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\ln(1+x)^{(1+x)}}{x^2} - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$$

(6) $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{ctan}x - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = -\lim_{x\to0}\frac{\sin x + x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = \lim\limits_{x\to0}[(1-x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}]$

$$= e\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x^2)} = -\frac{e}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x}} = e^{-1}.$$

8. 设 $f(0)=0$，f' 在原点的某领域内连续，且 $f'(0)=0$. 证明：

$$\lim_{x\to0^+} x^{f(x)} = 1$$

证　$\lim\limits_{x\to0^+} x^{f(x)} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{f(x)\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{\ln x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x\ln^2 x f(x))} = e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x\ln^2 x\cdot\lim\limits_{x\to0^+}f(x)} = e^{0\cdot f(0)} = 1.$$

9. 证明：定理 6.6 中，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，情形时的罗比达法则.

(ⅰ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

(ⅱ) 存在 $M_0>0$,使得 f 与 g 在$(M_0,+\infty)$内可导,且 $g'(x)\neq 0$;

(ⅲ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$ 为实数,也可为 $\pm\infty$ 或 ∞)则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

证　令 $y=\dfrac{1}{x}$, $f(\dfrac{1}{y})=F(y)$, $g(\dfrac{1}{y})=G(y)$,则 $x\to+\infty$ 等价于 $y\to 0^+$,并由条件有

(ⅰ) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(y)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(y)=0$;

(ⅱ)F 与 G 在原点的某右空心邻域 $U_+^{\circ}(0)$ 内可导,且

$$G'(y)=-\frac{1}{y^2}g'(\frac{1}{y})\neq 0;$$

(ⅲ) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(y)}{G'(y)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{y^2}f'(\frac{1}{y})}{-\frac{1}{y^2}g'(\frac{1}{y})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})}=A.$$

补充定义 F 与 G 在 $y=0$ 的值为 $F(0)=G(0)=0$,在 $U_+^{\circ}(0)$ 内任取一点 y,在区间$[0,y]$上应用柯西中值定理,有

$$\frac{F(y)}{G(y)}=\frac{F(y)-F(0)}{G(y)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},0<\xi<y,$$

由于 $y\to 0^+$ 时,$\xi\to 0^+$,所以令 $y\to 0^+$ 对上式取极限得

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{F(y)}{G(y)}=\lim_{\xi\to 0^+}\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\lim_{y\to 0^+}\frac{F'(y)}{G'(y)}=A,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$

10. 证明:$f(x)=x^2e^{-x^2}$ 为有界函数.

证　因为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4xe^{x^2}}=0,$$

所以存在 $G>0$,使得当 $|x|>G$ 时 $|f(x)|<1$;又 $f(x)$ 在闭区间

$[-G,G]$ 上连续,所以存在 $M_1>0$,使得对一切 $x\in[-G,G]$,有 $|f(x)|\leqslant M_1$. 取 $M=\max\{1,M_1\}$,则对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $|f(x)|\leqslant M$. 故 $f(x)$ 为有界函数.

§3　泰勒公式

1. 求下列函数带佩亚诺余项的麦克劳林公式

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;

(2) $f(x)=\arctan x$ 到含 x^5 的项;

(3) $f(x)=\tan x$ 到含 x^5 的项

解:(1) 因为 $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$

$\therefore f^{(n)}(0)=(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}$

因此　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

$$=1+(-\frac{1}{2})x+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^n+O(x^n)$$

(2) 因为 $f(0)=0$,

$$f'(x)=(1+x^2)^{-1},f'(0)=1,$$
$$f''(x)=-2x(1+x^2)^{-2},f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=-2(1+x^2)^{-2}+8x^2(1+x^2)^{-3},f'''(0)=-2,$$
$$f^{(4)}(x)=24x(1+x^2)^{-3}-288x^2(1+x^2)^{-4},(0)=0,$$
$$f^{(5)}(x)=24(1+x^2)^{-3}-288x^2(1+x^2)^{-4}+384x^4$$
$$(1+x^2)^{-5},f^{(5)}(0)=24,$$

所以

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{24x^5}{5}+0(x^5).$$

(3) 因为 $f(0)=0$

$f'(x)=\sec^2 x,f'(0)=1$

$f''(x)=2\sec^2 x\tan x,f''(0)=0,$

$f'''(x) = 4\sec^2 x\tan^2 x + 2\sec^4 x, f'''(0) = 2,$
$f^{(4)}(x) = 8\sec^2 x\tan^3 x + 16\sec^4 x\tan x, f^{(4)}(0) = 0,$
$f^{(5)}(x) = 16\sec^2 x\tan^4 x + 88\sec^4 x\tan^2 x + 16\sec^6 x,$
$f^{(5)}(0) = f^{(5)}(0) = 16$

所以

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + 0(x^5).$$

2. 按例 4 的方法求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \mathrm{ctan}x)$.

解 (1) 因为

$$e^x\sin x = [1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)][x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)]$$
$$= x + x^2 + \frac{x^2}{3} + o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}[\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}] = \frac{1}{3}.$$

(2) 因为

$$\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}),$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})] = \lim_{x\to\infty}[\frac{1}{2} + \frac{o(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}}] = \frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \mathrm{ctan}x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x[1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)]}{x^2\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x + o(x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}\frac{x}{\sin x} + \frac{x}{\sin x}\frac{o(x)}{x}\right] = \frac{1}{3}.$$

3. 求下列函数在指定点处带拉格朗日余项的泰勒公式

(1) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5$,在 $x = 1$ 处;

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ 在 $x = 0$ 处

解 (1) 因为 $f(1) = 10$,

$$\left.\begin{aligned} &f'(x) = 3x^2 + 8x, f'(1) = 11,\\ &f''(x) = 6x + 8, f''(1) = 14,\\ &f'''(x) = 6, f^{(n)}(x) = 0, (n \geqslant 4), \end{aligned}\right\}$$

所以

$$f(x) = 10 + 11(x-1) + 7(x-1)^2 + (x-1)^3$$

(2) 因为 $f(0) = 1$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}, f^{(k)}(0) = (-1)^k k!,$$

$k = 1,2,\cdots,$

所以

$$f(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1} (0 < \theta < 1)$$

4. 估计下列近似公式的绝对误差:

(1) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$,当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

(2) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$,当 $x \in [0,1]$.

解 (1) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}\sin(\theta x + \dfrac{5\pi}{2}), (0 < \theta < 1)$,

因此

$$|R_4(x)| \leqslant \frac{|x|^5}{5!} \leqslant \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{3840}, (|x| \leqslant \frac{1}{2}).$$

(2) 设 $f(x)=\sqrt{1+x}$,则因为

$f(0)=1, f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f'(0)=\frac{1}{2}$,

$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f''(0)=-\frac{1}{4}$,

$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$,

所以 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 带拉格朗日型余项的二阶马克劳林公式为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}},(0<\theta<1),$$

从而

$$|R_2(x)|=\frac{|x|^3}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}\leqslant\frac{1}{16}\ x\in[0,1]$$

5. 计算:(1) 数 e 准确到 10^{-9};

(2)lg11 准确到 10^{-5}.

解　(1)$e=1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta},(0<\theta<1)$,使 $\left|\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}\right|<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-9}$,解得 $n\geqslant 12$,取 $n=12$ 得

$$\begin{aligned}e&\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{12!}\\&\approx 1+1+0.5+0.1666666667+0.416666667+0.0083333333\\&+0.0013888889+0.0001984127+0.0000248016+0.0000027557\\&+0.0000002756+0.0000000251+0.0000000021\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\frac{1}{(1+\theta x)^5}(0<\theta<1),$$

所以

$$\lg(1+x)=\lg e^{\ln(1+x)}=\lg e^{\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\frac{1}{(1+\theta x)^5}\right\}},$$

从而

$$\lg 11=1+\lg 1.1\approx 1+\lg e^{0.1-\frac{0.1^2}{2}+\frac{0.1^3}{3}-\frac{0.1^4}{4}}$$

$$\approx 1 + 0.043429 - 0.002171 + 0.000145 - 0.000011$$
$$\approx 1.04139$$

其误差为

$$\lg e^{\frac{0.1^5}{5}} \cdot \frac{1}{(1+0.1\theta)^5} < \frac{0.15}{5} < 10^{-5}$$

§4　函数的极值与最大(小)值

1. 求下列函数的极值

(1) $f(x) = 2x^3 - x^4$; (2) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$;

(3) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$; (4) $f(x) = \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

解:(1) 令 $f'(x) = 6x^2 - 4x^3 = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{3}{2}$. 又 $f''(\dfrac{3}{2}) = -9 < 0$, 所以在 $x = \dfrac{3}{2}$ 处 $f(x)$ 有极大值$\dfrac{27}{16}$. 由于当 $x \in U^\circ(0,1)$ 时. $f'(x) > 0$. 故在 $x = 0$ 的邻域内 f 严格递增, 所以在 $x = 0$ 处 $f(x)$ 不能取得极值.

(2) 令 $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0$, 得 $x = \pm 1$. 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 故在 $x = 1$ 处 f 取得极大值 $f(1) = 1$. 当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$; $0 > x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 故在 $x = -1$ 处 f 取得极小值 $f(-1) = -1$.

(3) 令 $f'(x) = \dfrac{(2-\ln x)\ln x}{x^2} = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = e^2$. 因为当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $1 < x < e^2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e^2$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 f 在 $x = 1$ 处有极小值 $f(1) = 0$, 在 $x = e^2$ 处有极大值 $f(e^2) = 4e^{-2}$.

(4) 令 $f'(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2} = 0$, 得 $x = 1$, 由于当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 f 在 $x = 1$ 处有极大值 $f(1) =$

$\frac{\pi-2\ln 2}{4}$.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$$

(1) 证明：$x=0$ 是函数 f 的极小值点；

(2) 说明在 f 的极小值点 $x=0$ 处是否满足极值的第一充分条件或第二充分条件.

证 (1) 因为对任 $x\neq 0$，有

$$f(x)=x^4\sin^2\frac{1}{x}\geqslant 0=f(0)$$

所以 $x=0$ 是 f 的极小值点.

(2) 易见

$$f'(x)=\begin{cases}x^2(4x\sin^2\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{2}{x}), x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

令 $x_n=(2n\pi+\frac{\pi}{4})^{-1}, y_n=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^{-1}(n=1,2,\cdots,)$，则 $x_n, y_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 计算可知 $0<f'(y_n), f'(x_n)<0(n=1,2,\cdots)$. 于是 f' 在任一 $U_+{}^\circ(0,\delta)$ 内变号，从而 f 不满足第一充分条件. 又 $f''(0)=0$，于是 f 也不满足第二充分条件.

3. 证明：若函数 f 在 x_0 处有 $f_+'(x_0)<0(>0)$　$f_-'(x_0)>0(<0)$，则 x_0 为 f 的极大(小)值点.

证 因 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_+'(x_0)<0$，故存在某 $U_+^0(x_0,\delta_1)$，当 $x\in U_+^0(x_0,\delta_1)$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，所以 $f(x)<f(x_0)(x\in U_+^0(x_0,\delta_1))$.

又因 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)>0$，故存在某 $U^0(x_0,\delta_2)$，当

$x \in U^0(x_0,\delta_2)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(x0)}{x-x_0}>0$，而 $x-x_0<0$，故 $f(x)<f(x_0)(x\in U^0(x_0,\delta_2))$. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in U(x_0,\delta_2)$ 时有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，故 x_0 为 f 的极大值点.

另一情形同理可证.

4. 求下列函数在给定区间上的最大最小值：

(1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1,[-1,2]$；

(2) $y=2\tan x-\tan^2 x,[0,\dfrac{\pi}{2}]$；

(3) $y=\sqrt{x}\ln x,(0,+\infty)$

解　(1) 令 $y'=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x-1)(x-3)=0$ 得 $x=0,1,3$. $3\overline{\in}[-1,2]$，舍去，而 $y(0)=1,y(1)=2,y(-1)=-10,y(2)=-7$，所以函数在 $x=1$ 处取得最大值 2，在 $x=-1$ 处取得最小值 -10.

(2) 令 $y'=2\sec^2 x(1-\tan x)=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{4}\in[0,\dfrac{\pi}{2})$. 由于 $y(0)=0,y(\dfrac{\pi}{4})=1$ 且 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\tan x-\tan^2 x)=-\infty$，所以函数在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处取得最大值 1，但无最小值.

(3) 令 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)=0$，得 $x=e^{-2}$. 因 $y(e^{-2})=\dfrac{-2}{e}<0$，且 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\ln x=+\infty$. 所以函数在 $x=e^{-2}$ 处取得最小值 $\dfrac{-2}{e}$，但无最大值.

5. 设 $f(x)$ 在区间 I 连续，并且在 I 仅有唯一的极值点 x_0

证明：若 x_0 是 f 的极大(小)值点，则 x_0 是 $f(x)$ 在 I 上的最大(小)值点.

证明　反证法. 假设 x_0 不是最大(小)值，则必存在不同于 x_0 的点 $x_1\in I$，当 $x=x_1$ 函数 f 取得最大(小)值. 这时 x_1 点也必为极大(小)值点，这于在 I 有唯一的极值点矛盾.

6. 把长为 1 的线段截为两段,问怎样截法能使以这两段线为边所组成的矩形的面积为最大?

解 设两段线长为 $x,1-x$,则矩形面积为 $S=x(1-x),x\in(0,1)$. 令 $S'=1-2x=0$,得 $x=\frac{1}{2}$. 又 $S''=-2<0$,故 $x=\frac{1}{2}$ 是 S 的唯一极大值点. 又在端点处 $S=0$,从而 $x=\frac{1}{2}$ 就是最大值点. 所以当两段线长均为$\frac{1}{2}$,矩阵面积为最大.

7. 一个无盖的圆柱形容器,当给定体积为 V 时,要使容器的表面积为最小,问底的半径与容器的高的比例应该怎样?

解 设底半径为 R,高为 h,则体积为

$$V=\pi R^2h,$$

表面积为

$$S=\pi R^2+2\pi Rh=\pi R^2+\frac{2v}{R}.$$

令 $S'=2\pi R-\frac{2v}{R^2}=0$,得 $R=h$. 所以,当底半径与高的比例为 1 : 1 时,容器的表面积为最小.

8. 设用某仪器进行测量时,读得 n 次实验数据为$a_1,a_2,\cdots,a_n$. 问以怎样的数值 x 表达所要测量的真值,才能使它与这 n 个数之差的平方和为最小?

解 设 $S=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$.

令 $S'=2\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)=0$,得 $x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 又 $S''=2n>0$,故 $x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 为S 的唯一极小值点. 又因 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}S=+\infty$,从而$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 也是最小值点,即当用 $x=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 表达真值时,它与 n 个数之差的平方和为最小.

9. 求正数 a,使它与其倒数之和为最小.

解　设 $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$，则

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2},(x>0)$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm 1, x=-1$ 不合题意．又

$$f''(1)=2>0,$$

故 $x=1$ 即为所求．

10．求下列函数的极值．

(1) $f(x)=|x(x^2-1)|$；

(2) $f(x)=\frac{x(x^2+1)}{x^4-x^2+1}$；

(3) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$．

解　(1) $f'(x)=(3x^2-1)\operatorname{sgn}(x^3-x)(x\neq 0,\pm 1)$．令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$．另外，在 $x=0,\pm 1$ 处导数均不存在．当 $x\in(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$ 时，$f'(x)<0$．故在 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处 f 取得极大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$．

同理可得在 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 处 f 也取得极大值 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$．

因为 $f(x)\geqslant 0$，又 $f(0)=f(\pm 1)=0$，故在 $x=0,\pm 1$ 处 f 取得极小值 0．

(2) $f'(x)=\frac{-(x^2-1)(x^4+5x+1)}{(x^4-x^2+1)^2}$．

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm 1$．当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；$-1<x<1$ 时，$f'(x)>0$；$x>1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(-1)=-2$ 是极小值，$f(1)=2$ 是极大值．

(3) 令 $f'(x)=(x-1)(x+1)^2(5x-1)=0$，得 $x=\pm 1,\frac{1}{5}$．当 $-\infty<x<-1$ 时，$f'(x)>0$；$-1<x<\frac{1}{5}$ 时，$f'(x)>0$；$\frac{1}{5}<x$

<1 时,$f'(x)<0$,$1<x<+\infty$ 时,$f'(x)>0$;故在 $x=\frac{1}{5}$ 处 f 取得极大值$\frac{3456}{3125}$,在 $x=1$ 处 f 取得极小值 0.

11. 设 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$,在 $x_1=1$,$x_2=2$ 处都取得极值;试定出 a 与 b 的值;并问这时 f 在 x_1 与 x_2 是取得极大值还是极小值?

解　由于 $f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 为极值点,从而必是稳定点,即

$$\begin{cases} a+2b+1=0 \\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases}$$

解得　$a=-\frac{2}{3}$,$b=-\frac{1}{6}$,于是

$$f(x)=-\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{6}x^2+x$$

因 $f''(1)=\frac{1}{3}>0$,$f''(2)=-\frac{1}{6}<0$,故 f 在 $x=1$ 处取得极小值,在 $x=2$ 处取得极大值.

12. 在抛物线 $y^2=2px$ 上哪一点的法线被抛物线所截之线段最短.

解　设 (a,b) 为抛物线上满足要求的一点 $(b^2=2pa)$,由于 $2yy'=2p$,故 $y'=\frac{p}{y}$,$y'(a)=\frac{p}{b}$. 于是抛物线在点 (a,b) 的法线方程为:$y=-\frac{b}{p}(x-a)+b$. 解方程组

$$\begin{cases} y=-\dfrac{b}{p}(x-a)+b & (1) \\ y^2=2px & (2) \end{cases}$$

以求法线与抛物线的另一交点:

将(1)代入(2),得

$$b^2x^2-(2b^2a+2pb^2+2p^3)x+p^2b^2+b^2a^2+2pb^2a=0.$$

设另一交点为(a',b')，则由违达定理，得

$$a+a'=\frac{2b^2a+2pb^2+2p^3}{b^2},$$

所以 $a'=\frac{2b^2a+2pb^2+2p^3-2b^2}{b^2}$. 又 $b^2=2pa$，故

$$a'=\frac{(a+p)^2}{a}.$$

将上式代入(1)，得 $b'=-\frac{b(a+p)}{a}$. 所以法线被抛物线所截线段长度的平方为：

$$D(a)=(a'-a)^2+(b'-b)^2=\frac{p(p+2a)^3}{a^2}.$$

由 $D'(a)=\frac{2p(p+2a)^2(a-p)}{a^3}=0$，得 $a=p,-\frac{p}{2}$. 由于 p 与 a 同号，故 $a=p$. 于是 $b=\pm\sqrt{2}P$. 故所求点为$(p,\pm\sqrt{2}p)$.

13. 要把货物从运河边上 A 城运往与运河相距为 $BC=a$ 千米的 B 城(见图 6－1). 轮船运费的单价是 α 元／千米. 火车运费的单价是 β 元／千米($\beta>\alpha$)，试求运河边上的一点 M，修建铁路 MB，使总运费最省.

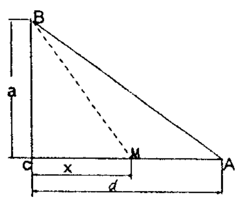

图 6—1

解　设 $MC=x$，则 $AM=d-x$，$BM=\sqrt{a^2+x^2}$. 于是总运费为：

$$f(x)=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{a^2+x^2}\,(x>0).$$

由 $f'(x)=-\alpha+\frac{\beta x}{\sqrt{a^2+x^2}}=0$，

得 $x=\frac{a\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$.

由于

$f(0)=\alpha d+\beta a$

$f(d)=\beta\sqrt{a^2+d^2}$

$$f\left(\frac{a\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\right)=\frac{\alpha d+a}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}<\alpha d+a\beta=f(0)$$

令 $\alpha=\beta\sin\theta$，则

$$=\beta\sqrt{a^2+d^2}\left(\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}\sin\theta+\frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}\cos\theta\right)$$

$$=\beta\sqrt{a^2+d^2}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\beta\sqrt{a^2+d^2}$$

$$=f(d)$$

故 $f\left(\frac{\alpha a}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\right)$ 为 $f(x)$ 在 $[0,d]$ 上的最小值. 即离 C 点 $\frac{\alpha a}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$ 公里处修铁路运费最省.

§ 5　函数的凸性与拐点

1. 确定下列函数的凸性区间与拐点：

(1) $y=2x^3-3x^2-36x+25$；(2) $y=x+\frac{1}{x}$；

(3) $y=x^2+\frac{1}{x}$；(4) $y=\ln(x^2+1)$；

(5) $y=\frac{1}{1+x^2}$

解　(1) 令 $y''=12x-6=0$，得 $x=\frac{1}{2}$. 当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$y''<0$，故函数 y 在 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 内为凹函数. 当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$y''<0$，故 y 为 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内的凸函数.

由于在 $U_+^\circ(\frac{1}{2})$ 与 $U_-^\circ(\frac{1}{2})$ 内 y'' 的符号相反，故 $(\frac{1}{2},\frac{13}{2})$ 为曲线的拐点.

(2) 由于 $y''=\frac{2}{x^3}$，当 $x<0$ 时，$y''<0$，$x>0$ 时，$y''>0$，于是函数 y 为 $(-\infty,0)$ 内的凹函数，为 $(0,+\infty)$ 内的凸函数.

由于 $x=0$ 不在函数的定义域中，故曲线无拐点.

(3) 令 $y''=2+\dfrac{2}{x^3}=0$，得 $x=-1$. 当 $x<-1$ 时，$y''>0$；$-1<x<0$ 时，$y''<0$；$x>0$ 时，$y''>0$，故函数 y 在 $(-\infty,-1)$ 内为凸函数，在 $(-1,0)$ 内为凹函数，在 $(0,+\infty)$ 内为凸函数，$(-1,0)$ 是曲线的拐点.

(4) 令 $y''=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0$，得 $x=\pm1$. 当 $x>1$ 时，$y''<0$；$x<-1$ 时，$y''<0$；$-1<x<1$ 时，$y''>0$. 故函数 y 在 $(1,+\infty)$ 内为凹函数，在 $(-\infty,-1)$ 内为凹函数，在 $(-1,1)$ 内为凸函数. $(-1,\ln2)$ 与 $(1,\ln2)$ 均是曲线的拐点.

(5) 令 $y''=\dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}=0$，得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt3}$ 当 $x>\sqrt{\dfrac13}$ 或 $x<-\sqrt{\dfrac13}$ 时，$y''>0$；$-\sqrt{\dfrac13}<x<\sqrt{\dfrac13}$ 时，$y''<0$，故函数 f 在 $(-\infty,-\sqrt{\dfrac13}]$ 与 $[\sqrt{\dfrac13},+\infty)$ 内为凸函数；在 $[-\sqrt{\dfrac13},\sqrt{\dfrac13}]$ 内为凹函数. $[-\sqrt{\dfrac13},\dfrac34]$ 与 $[\sqrt{\dfrac13},\dfrac34]$ 均是曲线的拐点.

2. 问 a 和 b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解　因为 $(1,3)$ 在曲线上，所以 $y(1)=a+b=3$. 又 $(1,3)$ 为拐点且 $y''=6ax+2b$，故 $y''(1)=6a+2b=0$. 解方程组

$$\begin{cases}a+b=3\\6a+2b=0\end{cases}$$

得　$a=-\dfrac32,b=\dfrac92$.

即 a 为 $-\dfrac32$，b 为 $\dfrac92$ 时，点 $(1,3)$ 为曲线的拐点.

3. 证明：

(1) 若 f 为凸函数，λ 为非负实数，则 λf 为凸函数；

(2) 若 f,g 均为凸函数，则 $f+g$ 为凸函数；

(3) 若 f 为区间 I 上凸函数，g 为 $J\supset f(I)$ 上凸的递增函数，则 $g\circ f$

为 I 上凸函数.

证　(1) 设 x_1, x_2 为任意两点, $\mu \in (0,1)$, 则

$$f(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \leqslant \mu f(x_1) + (1-\mu)f(x_2).$$

给上式两端乘以 $\lambda(>0)$, 得

$$\lambda f(\mu x_2 + (1-\mu)x_2) \leqslant \mu(\lambda f(x_1) + (1-\mu)(\lambda f(x_2)).$$

由定义, λf 为凸函数.

(2) 设 x_1, x_2 为任意两点, $\lambda \in (0,1)$, 则

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

$$g(\lambda x_1 + (1-x)x_2) \leqslant \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$$

上述二式相加, 得

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$
$$\leqslant \lambda(f(x_1) + g(x_1)) + (1-\lambda)(f(x_2) + g(x_2)).$$

由定义, $f+g$ 为凸函数.

(3) 设 x_1, x_2 为 I 上任意两点, $\lambda \in (0,1)$, 则

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

由于 $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)(x_2) \in f(I) \subset J$, 且 g 为 J 上递增函数, 故

$$g[f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)] \leqslant g[\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)]$$

又 g 为 J 上凸函数, 于是

$$g[\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)] \leqslant \lambda g[f(x_1)] + (1-\lambda)[g(x_2)]$$

综合上述讨论可得

$(g \circ f)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda(g \circ f)(x_1) + (1-\lambda)(g \circ f)(x_2)$. 所以, $g \circ f$ 为 I 上凸函数.

4. 设 f 为区间 I 上严格凸函数. 证明: 若 $x_0 \in I$ 为 f 的极小值点, 则 x_0 为 f 在 I 上唯一的极小值点.

证　假设 f 在 I 上还有另一极小值点 x', 不妨设 $x_0 < x'$. 由定义, 存在某正数 δ(取 $\delta < \frac{x' - x_0}{2}$). 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) \geqslant f(x_0)$; $x \in U(x', \delta)$ 时, 有 $f(x) \geqslant f(x')$. 现在 $U_+^\circ(x_0, \delta)$ 内任取一点 x_1, 在 U_-

$^{\circ}(x',\delta)$ 内任取一点 x_2,则

$$f(x_1)\geqslant f(x_0),f(x_2)\geqslant f(x')$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,\frac{f(x')-f(x_2)}{x'-x_2}\leqslant 0 \tag{1}$$

另一方面,由于 $x_0<x_1<x_2<x'$,且 f 为 I 上严格凸函数,故

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x-x_0}<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x')-f(x_2)}{x'-x_2}$$

与(1)矛盾,所以 x_0 为 f 在 I 上唯一的极小值点.

5. 应用凸函数概念证明如下不等式:

(1) 对任意实数 a,b,有 $e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(e^a+e^b)$;

(2) 对任何非负实数 a,b,有

$$2arctan(\frac{a+b}{2})\geqslant arctan a+arctan b.$$

证　(1) 设 $y=e^x$,则 $y''=e^x>0,x\in(-\infty,\infty)$. 故 y 为$(-\infty,+\infty)$上凸函数. 从而对 $x_1=a,x_2=b,\lambda=\frac{1}{2}$,有

$$y(\frac{1}{2}x_1+(1-\frac{1}{2})x_2)\leqslant\frac{1}{2}y(x_1)+(1-\frac{1}{2})y(x_2),$$

即　$e^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(e^a+e^b)$.

(2) 设 $y=arctan x$,则 $y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}<0,x\in(0+\infty)$. 故 y 为 $(0,+\infty)$ 内的凹函数. 令 $x_1=a>0,x_2=b>0,\lambda=\frac{1}{2}$,则

$$y(\frac{x_1+x_2}{2})\geqslant\frac{1}{2}[y(x_1)+y(x_2)],$$

即　$2arctan(\frac{a+b}{2})\geqslant arctan a+arctan b$.

6. 证明:若 f,g 均为区间 I 上凸函数,则 $F(x)=max\{f(x),g(x)\}$ 也是 I 上凸函数.

证　设 x_1,x_2 为 I 上任意两点,$\lambda\in(0,1)$,则

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\leqslant\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)$$

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)\leqslant\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)$$

从而

$$\begin{aligned}&F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\\&=max\{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2),g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\}\\&\leqslant\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 是 I 上凸函数.

7. 证明:(1)f 为区间 I 上凸函数的充要条件是对 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,恒有

$$\triangle=\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\1 & x_2 & f(x_2)\\1 & x_3 & f(x_3)\end{vmatrix}\geqslant 0.$$

(2)f 为严格凸函数的充要条件是对任意 $x_1 < x_2 < x_3$,$\triangle > 0$.

证 (1)

$$\begin{aligned}\triangle&=\begin{vmatrix}1 & x_1 & f(x_1)\\0 & x_2-x_1 & f(x_2)-f(x_1)\\0 & x_3-x_2 & f(x_3)-f(x_2)\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & f(x_2)-f(x_1)\\x_3-x_2 & f(x_3)-f(x_2)\end{vmatrix}\\&=(x_2-x_1)[f(x_3)-f(x_2)]-(x_3-x_2)[f(x_2)-f(x_1)]\end{aligned}\tag{1}$$

由引理,f 为 I 上凸函数的充要条件是对 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\tag{2}$$

由(1)式得,(2)式成立的充要条件是 $\triangle\geqslant 0$. 所以 f 为 I 上凸函数的充要条件是对 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,恒有 $\triangle\geqslant 0$.

(2) 与(1) 同理可证.

8. 应用詹禁不等式证明:

(1) 设 $a_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(2) 设 $a_i,b_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$,有

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{m} b_i^n)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $P > 0, q > 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

证　(1) 设 $f(x) = -\ln x$,则 $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, x \in (0,+\infty)$. 故 f 是 $(0,+\infty)$ 内的凸函数. 取 $x_i = a_i \in (0,+\infty), \lambda_1 > 0(i = 1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. 由詹森不等式,有

$$-\ln(\sum_{i=1}^{n} \lambda_ia_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(-\ln a_i) = -\sum_{i=1}^{n} \ln a^{\lambda_i}$$
$$= -\ln(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$$

由 $\ln x$ 的单调性,有

$$a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_ia_i \tag{1}$$

取 $x_1 = \frac{1}{a_1} > 0, \lambda_1 > 0(i = 1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,则有

$$-\ln(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(-\ln \frac{1}{a_i}) = -\ln \frac{1}{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}}$$

从而
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i} \geqslant \frac{1}{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}} \tag{2}$$

取 $\lambda_i = \frac{1}{n}(i = 1,2,\cdots,n)$. 由(1)、(2) 两式即得

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(2) 首先证明：若 $a,b \geqslant 0, p > 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$ab \leqslant \frac{1}{p}n^p + \frac{1}{q}b^q \tag{3}$$

在(1)式中，令 $n=2, \lambda_1=\frac{1}{p}, \lambda_2=\frac{1}{q}, a_1=a^p>0, a_2=b^s>0$，则

$$(a^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

即　$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

分别设　$a=\frac{a_k}{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}}, b=\frac{b_k}{(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q)^{\frac{1}{q}}}, (k=1,2,\cdots,n)$

则由(3)式，得

$$\frac{a_kb_k}{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p)} + \frac{1}{q}\frac{b_k^q}{(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q)}(k=1,2,\cdots,n)$$

将 $k=1,2,\cdots,n$ 的 n 个不等式两端分别相加，可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \leqslant (\sum_{k=1}^{n}a_k^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{k=1}^{n}b_k^q)^{\frac{1}{q}}$$

§6　函数图像的讨论

按函数作图步骤，作下列函数图象：

(1) $y=x^3+6x^2-15x-20$；

解　1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

2) 曲线与 x 轴交于点 $(-\frac{5+\sqrt{105}}{2},0),(-1,0),(\frac{-5+\sqrt{105}}{2},0)$，与 y 轴交于点 $(0,-20)$；

3) 令 $y'=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1)=0$，解得 $x=-5,1$.

令 $y''=6x+12=6(x+2)=0$，解得 $x=-2$.

现列表讨论函数的单调区间、极值点、凸性区间及拐点：

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗凹	80,极大	↘凹	26,拐点	↘凸	−28,极小	↗凸

4) 无渐近线.

根据上述讨论结果作函数图形如图 6 − 2.

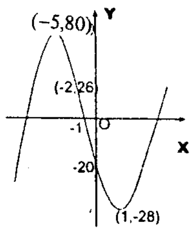

图 6—2

(2) $y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$;

解　1) 定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;

2) 曲线与坐标轴仅交于原点(0,0);

3) 令 $y'=\dfrac{x^2(x+3)}{2(1+x)^3}=0$,解得 $x=-3,0$.

令 $y''=\dfrac{3x}{(1+x)^4}=0$,解得 $x=0$.

现列表讨论函数的单调区间,极值点,凸性区间及拐点:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	+	0	+
y''	−	−	−	−	0	+
y	−↗凹	$-\frac{27}{8}$,极大	−↘凹	−↗凹	0,拐点	+↗凸

4) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2(1+x)^2}=\dfrac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{2(1+x)^2}=-1,$$

所以直线 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ 是曲线的斜渐近线.

又因为

$$\lim_{x\to-1}y=\lim_{x\to-1}\frac{x^3}{2(1+x)^2}=\infty,$$

所以直线 $x=-1$ 是曲线的垂直渐近线.

据上述讨论结果作函数图形,如图 6-3.

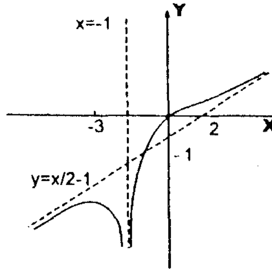

图 6—3

(3) $y = x - 2arctan x$;

解　1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

2) 函数为奇函数,其图形关于原点对称;

3) 曲线过原点 $(0,0)$;

4) 令 $y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{1+x^2} = 0$,解得 $x=-1,1$. 令 $y'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2} = 0$,解得 $x = 0$.

现列表讨论函数的单调区间,极值点,凸性区间及拐点:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗凹	$\frac{\pi}{2}-1$,极大	↘凹	0,拐点	↘凹	$1-\frac{\pi}{2}$,极小	↗凸

5) 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2arctan x}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}(-2arctan x) = -\pi,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-x) = \lim_{x\to-\infty}(-2arctan x) = \pi,$$

所以曲线有两条斜渐近线 $y = x \pm \pi$. 而无垂直渐近线.

据以上讨论结果作函数图形如图 6-4.

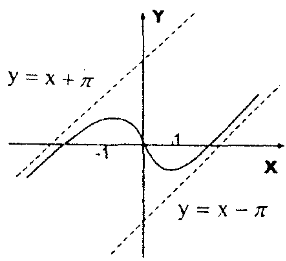

图 6—4

(4) $y = xe^{-x}$.

解　1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

2) 曲线与坐标轴仅交于原点 $(0,0)$;

3) 令 $y' = \frac{1-x}{e^x} = 0$,解得 $x = 1$.

令 $y'' = \dfrac{x-2}{e^x} = 0$，解得 $x = 2$.

现列表讨论函数的单调区间，极值点，凸性区间及拐点：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−
y''	−	−	−	0	+
y	↗凹	e^{-1}，极大	↘凹	$2e^{-2}$，拐点	↘凸

4）因为

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0,$$

所以曲线有一条水平渐近 $y = 0$.

无垂直渐近线.

据以上讨论结果作函数图形如图 6－5.

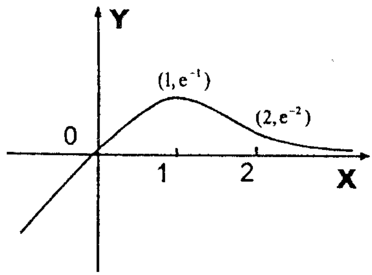

图 6—5

(1) $y = 3x^5 - 5x^3$；

解　1）定义域为 $(-\infty, +\infty)$；

2）函数为奇函数，其图形关于原点对称，因此可只讨论 $[0, +\infty)$ 上的情形；

3）曲线与坐标轴交于点 $(0,0)$，$(-\dfrac{\sqrt{15}}{3},0)$，$(\dfrac{\sqrt{15}}{3},0)$；

4）令 $y' = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x+1)(x-1) = 0$，解得 $x = 0, \pm 1$，令

$$y'' = 60x^3 - 30x = 60x(x+\frac{\sqrt{2}}{2})(x-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0,\text{解得}$$

$$x = 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

现列表讨论函数在 $[0, +\infty)$ 上的单调区间，极值点，凸性区间及拐点：

x	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	−	−	−	0	+
y''	0	−	0	+	+	+
y	0,拐点	↘凹	$-\frac{7\sqrt{2}}{8}$,拐点	↘凸	−2,极小	↗凸

5) 无渐近线.

据以上讨论结果作函数图形如图 6 − 6.

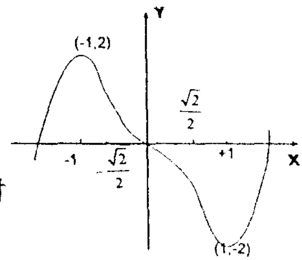

图 6—6

(6) $y = e^{-x^2}$;

解　1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

2) 函数为偶函数,其图形关于 y 轴对称,因此可只讨论 $[0, +\infty)$ 上的情形;

3) 曲线在 x 轴的上方,且与 y 轴交于点 $(0,1)$;

4) 令 $y' = -\frac{2x}{e^{x^2}} = 0$,解得 $x = 0$.

令 $y'' = \dfrac{4(x+\frac{\sqrt{2}}{2})(x-\frac{\sqrt{2}}{2})}{e^{x^2}} = 0$,解得 $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

现列表讨论函数在 $[0, +\infty)$ 上的单调区间,极值点,凸性区间及拐点:

x	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
y'	0	−	−	−
y''	−	−	0	+
y	1,极大	↘凹	$e^{-\frac{1}{2}}$,拐点	↘凸

5) 因为

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0,$$

所以曲线有一条水平渐近线 $y = 0$.

无垂直渐近线.

据以上讨论结果作函数图形如图 6 − 7.

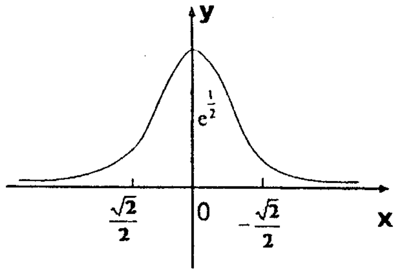

图 6—7

(7)$y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$;

解　1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$;

2) 曲线与坐标轴交于点$(0,0)$,$(1,0)$;

3) 令 $y'=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}=0$,解得 $x=\frac{2}{5}$,且函数在 $x=0$ 点不可导.

令 $y''=\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)(-\frac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2(5x+1)}{9x^{\frac{4}{3}}}=0$,解得 $x=-\frac{1}{5}$,且当 $x=0$ 时,y'' 不存在.

现列表讨论函数的单调区间,极值点,凸性区间及拐点:

x	$(-\infty,-\frac{1}{5})$	$-\frac{1}{5}$	$(-\frac{1}{5},0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
y'	+	+	+	不存在	−	0	+
y''	−	0	+	不存在	+	+	+
y	$-\nearrow$ 凹	$-\frac{6\sqrt[3]{5}}{25}$,拐点	$-\nearrow$ 凸	0,极大	$-\searrow$ 凸	$-\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$,极小	$\nearrow$ 凸

4) 无渐近线.

据以上讨论结果作函数图形如图 6 − 8.

(8)$y=|x|^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$.

解　所给函数即 $y=x^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$.

1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$;

2) 曲线与坐标轴交于点(0,0)(2,0);

3) 令 $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)^3 + 2x^{\frac{2}{3}}(x-2) = \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2x-1)(x-2) = 0$,解得 $x = \frac{1}{2}, 2$,且函数在点 $x = 0$ 不可导.

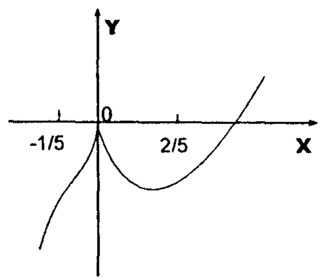

图 6—8

令 $y'' = \frac{8}{9}x^{-\frac{4}{3}}(5x^2-5x-1) = 0$,解得 $x_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{10}\sqrt{5}$,且当 $x = 0$ 时,y'' 不存在.

现列表讨论函数的单调区间,极值点,凸性区间及拐点(记 $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}, x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}$):

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$
y'	−	−	−	不存在	+
y''	+	0	−	不存在	−
y	+↘凸	拐点	+↘凹	0,极小	+↗凹
$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, x_2)$	x_2	$(x_2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
0	−	−	−	0	+
−	−	0	+	+	+
$\frac{9\sqrt[3]{2}}{8}$,极大	+↘凹	拐点	+↘凸	0,极小	+↗凸

4) 无渐近线.

据以上讨论结果作函数,如图 6 − 9.

§7 方程的近似解

1. 求 $\frac{x^3}{3} - x^2 + 2 = 0$ 的实根到三位有效数字.

解　设 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+2$，则 $f'(x)=x(x-2)$，从而当 $x<0$ 时 $f(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上严格递增，又 $f(0)=2$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，因此这时方程有一个实根；当 $0<x<2$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上其值由 2 严格递减到 $f(2)=\frac{2}{3}$，这时方程没有实根；当 $x>2$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上其值由 $\frac{2}{3}$ 严格递增，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因此这时方程也没有实根. 综合上述讨论，方程有唯一的一个负实根 ξ.

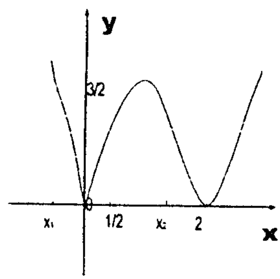

图 6—9

由于 $f(-2)=-\frac{14}{3}$，所以可在区间 $[-2,0]$ 上求此实根，又此时 $f''(x)=2(x-1)<0$，故从点 $(-2,f(-2))$ 起作切线来求近似解.

$$x_1=-2-\frac{f(-2)}{f'(-2)}=-1.417,$$

$$x_2=-1.417-\frac{f(-1.417)}{f'(-1.417)}=-1.219,$$

$$x_3=-1.219-\frac{f(-1.219)}{f'(-1.219)}=-1.196,$$

$$x_4=-1.196-\frac{f(-1.196)}{f'(-1.196)}=-1.195.$$

因此，取 $\xi\approx-1.20$.

2. 求方程 $x=0.538\sin x+1$ 的根的近似值，精确到 0.001.

解　设 $f(x)=x-0.538\sin x-1$，则因为 $f'(x)=1-0.538\cos x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增，又 $f(0)=-1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故方程有唯一的一个正实根 ξ.

由于 $f(1)=-0.538\sin 1=-0.415$，$f(2)=1-0.538\sin 2=0.51$，所以可在区间 $[1,2]$ 上求上实根，在 $[1,2]$ 上 $f''(x)=0.53\sin x>0$，故从点 $(2,f(2))$ 起作切线来求近似根.

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{0.51}{1.219} = 1.582$$

现估计用 x_1 代替 ξ 的误差. $f'(x)$ 在$[1,2]$上的最小值 $m = f'(1) = 0.707$,而 $f(x_1) = 0.582 - 0.538\sin 1.582 = 0.044$, $\frac{|f(x_1)|}{m} = \frac{0.044}{0.707} = 0.062$,因此,若取 $\xi \approx 1.582$,则其精确度尚不合要求.

再在点$(1.582, f(1.582))$作切线,求得

$$x_2 = 1.582 - \frac{f(1.582)}{f'(1.582)} = 1.582 - 0.044 = 1.538.$$

由于 $f(x_2) = 0.538(1 - \sin 1.538) = 0.0000538$,故

$$\frac{|f(x_2)|}{m} = \frac{0.0000538}{0.707} < 0.001,$$

因此,取 $\xi \approx 1.538$.

总 练 习 题

1. 证明:若 $f(x)$ 在有限开区间(a,b)内可导,且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$,则至少存在一点 $\xi \in a,b)$,使 $f'(\xi) = 0$.

证　定义　$f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $f(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a) = f(b)$,由罗尔中值定理至少存在一点 $\xi \in (a,b)$,使 $f'(\xi) = 0$.

2. 证明:若 $x > 0$,则

(1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$,其中$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\theta(x) = \frac{1}{2}$.

证　(1) 由拉格朗日中值定理

$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$, $(0 < \theta(x) < 1)$,由此得

$$2\sqrt{x+\theta(x)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x},$$

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x] \qquad (*)$$

由于　$\sqrt{x(x+1)}-x>\sqrt{x^2}-x=0,$

$$\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\frac{1}{2},$$

所以　$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}.$

(2) 由(*)式，$\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{4}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}=\frac{1}{2}.$$

3. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $ab>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix}a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证　设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，$G(x)=\frac{1}{x}$，则 $F(x)$，$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件，从而存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix}a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$$

$$=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$$

证　设

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)[f'(x)+f'(a)],$$

$$G(x)=(x-a)^2,$$

则 $F(x)$，$G(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且

$$F(a)=F'(a)=0 \quad G(a)=G'(a)=0,$$

连续运用柯西中值定理两次得

$$\frac{E(b)}{G(b)}=\frac{f(b)-f(a)-\frac{1}{2}(b-a)[f'(b)+f'(a)]}{(b-a)^2}$$

$$=\frac{f'(\eta)-\frac{1}{2}[f'(\eta)+f'(a)]-\frac{1}{2}(\eta-a)f''(\eta)}{3(\eta-a)^2}$$

$$=-\frac{1}{12}f'''(\xi),$$

其中 $a<\xi<\eta<b$. 故存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

5. 对 $f(x)=ln(1+x)$ 应用拉格朗日中值定理, 证明: 对 $x>0$ 有

$$0<\frac{1}{ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1.$$

证　对函数 $f(x)=ln(1+x)$ 在区间 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$$ln(1+x)=ln(1+x)-ln1=\frac{x}{1+\xi},(0<\xi<x),$$ 因此

$$\frac{1}{ln(1+x)}=\frac{1+\xi}{x}=\frac{1}{x}+\frac{\xi}{x},\frac{1}{ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{\xi}{x},$$

而 $0<\frac{\xi}{x}<1$, 所以

$$0<\frac{1}{ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1$$

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正实数, 且

$$f(x)=\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

证明: (ⅰ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\sqrt[n]{a_1,a_2,\cdots,a_n}$;

(ⅱ) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

证　(ⅰ) 由罗比塔法则知

$$\lim_{x\to0}f(x)=e\lim_{x\to0}\frac{1}{x}ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}$$

$$= e \lim_{x\to0} \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_w + \cdots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}$$

$$= e \frac{\ln(a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x)}{n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

(ⅱ)记 $A = max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则 $0 < \frac{a_k}{A} \leqslant 1, (k = 1,2,\cdots,n)$.
因为

$$f(x) = A\left[\frac{(\frac{a_1}{A})^x + (\frac{a_2}{A})^x + \cdots + (\frac{a_n}{A})^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}},$$

所以

$$A(\frac{1}{n})^{\frac{1}{x}} < f(x) \leqslant A(\frac{1+1+\cdots+1}{n})^{\frac{1}{x}} = A,$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty} A(\frac{1}{n})^{\frac{1}{x}} = A$，故

$$\lim_{x\to\infty} = A = max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

7. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1^-} (1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x)}} = e^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x^2)}{\ln(1-x)}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x}{1+x}} = e.$$

(2) $$\lim_{x\to0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{e^x + xe^x - \frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2e^x + xe^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x}\right)=0.$

8. 设 $h>0$，函数 f 在 $U(a,h)$ 内具有 $n+2$ 阶连续导数，且 $f^{(n+2)}(a)\neq0$，f 在 $U(a,h)$ 内的泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},0<\theta<1.$$

证明：$\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$.

证　f 在 $U(a,h)$ 内带皮亚诺型余项的 $n+2$ 阶泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}h^{n+1}+o(h^{n+2}),$$

与题给泰勒公式相减得

$$\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)-f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}h^{n+2}+o(h^{n+2}),$$

从而

$$\frac{\theta}{(n+1)!}\cdot\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)-f^{(n+1)}(a)}{\theta h}=\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}+\frac{o(h^{n+2})}{h^{n+2}},$$

令 $h\to0$ 两端取极限得

$$\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+1)!}\lim_{h\to0}\theta=\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}\ \frac{(a)}{(n+2)!},\text{故}\lim_{h\to0}\theta=\frac{1}{n+2}.$$

9. 设 $k>0$，试问 k 为何值时，方程 $\arctan x-kx=0$ 存在正根.

解　若方程 $\arctan x-kx=0$ 存在正根 x_0，则因为 $f(x)=\arctan x-kx$ 在 $[0,x_0]$ 上可导，且 $f(0)=f(x_0)=0$，所以由罗尔中值定理知：存在 $\xi\in(0,x_0)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}-k=0,$$

可见 $0<k<1$.

反之，若 $0<k<1$，则因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-k$ 连续，$f'(0)=1-$

$k>0$,所以存在 $x=0$ 的某一邻域 $U(0,\delta)$,使得在 $U(0,\delta)$ 内.$f'(x)>0$,$f(x)$ 严格递增,从而存在 $a>0$ 使得 $f(a)>f(0)=0$.又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$,所以存在 $b>a$ 使得 $f(b)<0$,于是由根的存在定理知,$f(x)=\arctan x-kx=0$ 在(a,b) 内存在正根.

故当且仅当 $0<k<1$ 时,原方程存在正根.

10. 证明:对任一多项式 $p(x)$ 来说,一定存在点 x_1 与 x_2,使 $p(x)$ 在$(x_1,+\infty)$ 与$(-\infty,x_2)$ 上分别为严格单调.

证　设 $p(x)=a_0x^n+a_0x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,其中 $a_0\neq 0$,不妨设 $a_0>0$.

1) 当 $n=1$ 时,$p(x)=a_0x+a_1$,$p'(x)=a_0>0$,因此 $p(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上严格递增,结论显然成立.

2) 当 $n\geqslant 2$ 时,$P(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a^{n-1}$,

若 n 为奇数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}P'(x)=+\infty$.从而对任给的 $G>0$,存在 $M>0$,使得当 $|X|>M$ 时,有 $P'(x)>G>0$.取 $x_1=M$,$x_2=-M$,则 $p(x)$ 在$(x_1,+\infty)$ 与$(-\infty,x_2)$ 上均严格递增.

若 n 为偶数,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}P'(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty}P'(x)=-\infty$,,从而对任给的 $G>0$,存在 $M>0$,使得当 $x>M$ 时,有 $P'(x)>G>0$,当 $x<-M$ 时,有 $P'(x)<-G<0$,取 $x_1=M$,$x_2=-M$,则 $P(x)$ 在$(x_1,+\infty)$ 上严格递增,在$(-\infty,x_2)$ 上严格递减.

综上证得本题结论成立.

11. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

(1) 在 $x=0$ 点是否可导?

(2) 在 $x=0$ 的任何邻域内函数是否单调?

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导.

(2) 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内可导，但因为

$$f'(\frac{1}{nx})=\frac{1}{2}-\cos n\pi=\begin{cases}-\frac{1}{2}<0, & n\text{为偶数},\\ \frac{3}{2}>0, & n\text{为奇数},\end{cases}$$

且 $n\to\infty$ 时 $\frac{1}{n\pi}\to 0$，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内总要变号，故在 $x=0$ 的任何邻域 $f(x)$ 都不单调.

12. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

证：将 $f(\frac{a+b}{2})$ 分别在点 a 和 b 展成一阶泰勒公式，并注意 $f'(a)=f'(b)=0$，有

$$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2, a<\xi_1<\frac{a+b}{2}$$

$$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{b-a}{2})^2, \frac{a+b}{2}<\xi_2<b$$

令 $|f''(\xi)|=max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则

$$|f(b)-f(a)|\leqslant|f(b)-f(\frac{a+b}{2})|+|f(\frac{a+b}{2})-f(a)|$$

$$=|\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2|+|\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2|$$

$$=\frac{1}{2}(|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|)(\frac{b-a}{2})^2$$

$$\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$$

则：$f''(\xi)\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

13. 设函数 f 在$[0,a]$上具有二阶导数，且$|f''(x)|\leqslant M$，f，在$(0,a)$内取得最大值.证明：

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$$

证　设 f 在 $x_0\in(0,a)$ 处取得最大值，则此最大值同时也是极大值.又 f 在 x_0 可导，故 $f'(x_0)=0$.

又因为 $f'(x)$ 在$[0,a]$上可导，所以由拉格朗日中值定理知：存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,a)$ 使得

$|f'(0)|=|f'(x_0)-f'(0)|=|f''(\xi_1)|x_0\leqslant Mx_0$，

$|f'(a)|=|f'(a)-f'(x_0)|=|f''(\xi_2)|(a-x_0)\leqslant M(a-x_0)$，从而

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$$

14. 设 f 在$[0,+\infty)$上可微，且 $0\leqslant f'(x)\leqslant f(x)$，$f(0)=0$

证明：在$[0,+\infty)$上 $f(x)\equiv0$.

证　对任一 $x>0$，由拉格朗日中值定理知

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x\leqslant f(\xi)x\leqslant f(x)x,$$

从而　$f(x)(1-x)\leqslant0,(x\geqslant0)$，

于是当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)\leqslant0$，又 $f(x)\geqslant0(x\geqslant0)$，因而在$[0,1)$上 $f(x)\equiv0$，再由 f 的连续性 $f(1)=0$，故在$[0,1]$上 $f(x)\equiv0$.

假设在$[0,n]$上 $f(x)\equiv0$，n 为某自然数，则对 $x>n$，由拉格朗日中值定理知

$$f(x)=f(x)-f(n)=f'(\xi)(x-n)\leqslant f(\xi)(x-n)\leqslant f(x)(x-n),$$

从而　$f(x)(n+1-x)\leqslant0,(x>n)$，

于是当 $0\leqslant x<n+1$ 时，$f(x)\leqslant0$，又因 $f(x)\geqslant0(x\geqslant0)$.

所以在$[0,n+1)$上 $f(x)\equiv0$，再由 f 的连续性 $f(n+1)=0$，故在$[0,n+1]$上 $f(x)\equiv0$.

由归纳法原理知：$f(x)\equiv0,x\in[0,n],n=1,2,\cdots$，故在$[0,+\infty)$上 $f(x)\equiv0$.

15. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$，其中 $g(x)$ 为任一函数.证明：若 $f(x_0)=f(x_1)=0(x_0<x_1)$，则 f 在$[x_0,x_1]$上恒等于 0.

证　用反证法.假设存在一点 $\xi_1 \in (x_0,x_1)$,使得 $f(\xi_1) \neq 0$,不妨设 $f(\xi_1)>0$,则 f 必在 $[x_0,x_1]$ 的某一内点 ξ 处取得最大值(同时也是极大值) $f(\xi)>0$,因此 $f'(\xi)=0$.从而由题设条件

$$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$$

得 $f''(\xi)=f(\xi)>0$,于是 $f(\xi)$ 为严格极小值.这与 $f(\xi)$ 为极大值矛盾.

16. 证明:定圆内接正 n 边形面积将随 n 的增加而增加.

证　设圆的半径为 R,因为圆内接正 n 边形每一边所对圆心角之半为 $\frac{\pi}{n}$,所以圆内接正 n 边形的面积 $S=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$,$(n\geqslant 3)$.

令 $S(x)=xR^2\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$,$(3\leqslant x\leqslant +\infty)$,

则因为

$$S'(x)=R^2\left[\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos^2\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin^2\frac{\pi}{x}\right]$$

$$=R^2\cos^2\frac{\pi}{x}\left[\tan\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\right]+\frac{\pi R^2}{x}\sin^2\frac{\pi}{x}>0$$

$$(3\leqslant x<+\infty),$$

所以 $S(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 严格递增.从而 $S=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}(n\geqslant 3)$ 将随 n 的增加而增加.

17. 证明:f 为 I 上凸函数的充要条件是对任何 $x_1,x_2\in I$,函数 $\varphi(\lambda)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ 为 $[0,1]$ 上的凸函数.

证　必要性　设 f 为 I 上的凸函数,那么对任意的 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 及 $k\in(0,1)$,总有

$$\begin{aligned}&\varphi(k\lambda_1+(1-k)\lambda_2)\\&=f([k\lambda_1+(1-k)\lambda_2]x_1+[1-k\lambda_1-(1-k)\lambda_2]x_2)\\&=f(k[\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2]+(1-k)[\lambda_2x_1+(1-\lambda_2)x_2])\\&\leqslant kf(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2)+(1-k)f(\lambda_2x_1+(1-\lambda_2)x_2)\\&=k\varphi(\lambda_1)+(1-k)\varphi(\lambda_2),\end{aligned}$$

由定义知 $\varphi(\lambda)$ 为 $[0,1]$ 上的凸函数.

充分性　设$\varphi(\lambda)$为$[0,1]$上的凸函数,那么对任意的$x_1,x_2\in I$及$\lambda\in(0,1)$,总有

$$f(\lambda x_1+(I-\lambda)x_2)=\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0)$$

$$\leqslant\lambda\varphi(1)+(1-\lambda)\varphi(0)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

由定义知f为I上的凸函数.

18. 证明:(1) 设f在$(a,+\infty)$可导,若$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$都存在

则　$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(2) 设f在$(a,+\infty)$上n阶可导,若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$都存在

则　$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0(k=1,2,\cdots,n)$

证　(1) 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$都存在所以由柯西收敛 则知:对$\forall\varepsilon>0$总存在$M>a$,使对$\forall x',x''>M$时有,$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$,$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon/2$

当$x>M$时,由拉格朗日中值定理得:存在$\xi\in(x,x+1)$使

$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$再由(1)知

$|f(\xi)|=|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon/2$,$|f'(\xi)-f'(x)|<\varepsilon/2$

从而　$|f'(x)|\leqslant|f'(x)-f'(\xi)|+|f'(\xi)|<\varepsilon$

由定义知　$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(2) 由题设条件及(1)的结论即知.

19. 设f为$(-\infty,+\infty)$上的二阶可导函数,若f在$(-\infty,+\infty)$上有异,则存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$,使$f''(\xi)=0$.

证　若$f''(x)$变量,则由导数的介质性,$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$f''|\xi|=0$;下面证明$f''$不含不变量.

若不然,即$f''(x)$不变号,不妨设$f''(x)>0$,则$f'(x)$单调增.取x_0使$f'(x_0)\neq 0$.如果$f'(x_0)>0$,则$x>x_0$时,$\exists\eta_1\in(x_0,x)$,使

$$f(x)=f(x_0)+f'(\eta_1)(x-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty(x\to+\infty)$$

如果$f'(x_0)<0$,则$x<x_0$时,$\exists\eta_2\in(x,x_0)$使

$$f(x)=f(x_0)+f'(\eta_2)(x-x_0)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty\,(x\to-\infty)$$

与 $f(x)$ 有界性矛盾.