浙江大学 2007－2008 学年春、夏学期

《数学分析》课程期末考试试卷

开课学院：__理学院__，考试形式：闭

考试时间：2008 年 06 月 27 日，所需时间：__120__分钟

考生姓名：____________学号：________专业：____________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

一、

1、用 ε－δ 语言严格叙述不一致连续的定义。

（书上第 79 页）

存在某$\varepsilon_0>0$，对任何正数δ(无论δ多么小)，总存在两点$x',x''\in I$，尽管$|x-x_0|<\delta$，但有$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon_0$.

2、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^2(e^x-1)}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^2(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^2\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x^2\cdot x}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x-\sin x}-1)}{x^3}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{6}$$

3、已知 $y=x^x$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解:

$$y=e^{x\ln x}, y'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(\ln x+1)$$

$$y''=(x^x)'(\ln x+1)+x^x(\ln x+1)'$$

$$=x^x(\ln x+1)^2+\frac{x^x}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^x(\ln x+1)^2+\frac{x^x}{x}$$

4、求不定积分 $\int x\arctan x dx$

解：

$$\int x\arctan x dx=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

5、求定积分 $\int_{-1}^{1}(\sin x+x^4)\sqrt{1-x^2}dx$ 的值

$$\int_{-1}^{1}(\sin x+x^4)\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-1}^{1}\sin x\sqrt{1-x^2}dx+\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{1-x^2}dx$$
$$=0+2\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x d\sin x$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x-\sin^6 x)dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 dx-2\int_0^{1}\sin^6 dx$$
$$=\frac{1}{16}\pi(\text{用书上227页公式})$$

二、

已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+b+1,x<0\\ c,x=0\\ e^x+ax,x>0\end{cases}$ 在定义域内可导

（1） 求 a、b、c 的值。

解：

由$f(x)$在定义域内连续可知，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b+1,\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$

所以$c=1,b=0$

因为$f(x)$在定义域内连续，故可用导数极限定理求导数。

$f_-^{'}(x)|_{x=0}=2x|_{x=0}=0,$

$f_+^{'}(x)|_{x=0}=e^x+a|_{x=0}=1+a=f_-^{'}(x)|_{x=0}=0,$

$a=-1$

（2） 求 $\int_{-1}^{x}f(t)dt.$

解：

$$当x<0时,\int_{-1}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{x}(t^2+1)dt=\frac{1}{3}t^3+t|_{-1}^{x}=\frac{1}{3}x^3+x-(-\frac{4}{3})=\frac{1}{3}x^3+x+\frac{4}{3}$$

$$当x>0时,\int_{-1}^{x} f(t)dt=\int_{-1}^{0}(t^2+1)dt+\int_{0}^{x}(e^t-t)dt$$

$$=\frac{4}{3}+e^x-\frac{1}{2}x^2-1$$

$$=e^x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}$$

三、已知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=2,F(x)=\int_0^1 f(xt)dt.$

（1）求 $F^{'}(x).$

解：

$$设u=xt,则t=\frac{u}{x},dt=d\frac{u}{x}=\frac{1}{x}du$$

$$F(x)=\int_0^1 f(u)dt=\int_0^x f(u)\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$$

$$F^{'}(x)=\frac{f(x)\cdot x-\int_0^x f(u)du}{x^2}$$

（2）若 $\lim\limits_{x->0}\frac{F(x)}{x^k}$ 存在（k>0），求 k 的取值范围

解：

$$\lim_{x->0^+}\frac{F(x)}{x^k}=\lim_{x->0^+}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^{k+1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{(k+1)x^k}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{(k+1)x}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}$$

$$由已知\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=2,则\lim_{x->0^+}\frac{F(x)}{x^k}存在的充要条件是\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{k-1}}存在$$

$$所以0<k\le 1.$$

四、已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,用\varepsilon-\delta定义证明\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$

解：

由$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$,得

$\forall\varepsilon,\exists\delta_1>0,0<|x-x_0|<\delta_1,|f(x)-A|<\varepsilon,$

$\forall\varepsilon,\exists\delta_2>0,0<|x-x_0|<\delta_2,|g(x)-B|<\varepsilon,$

由函数极限的局部有界　性知，$\exists\delta_3>0,0<|x-x_0|<\delta_3,|g(x)|<|M|$

取$\delta_3=\min\{\delta_1,\delta_2,\ \delta_3\},0<|x-x_0|<\delta_3,$

$|f(x)g(x)-AB|=|f(x)g(x)+f(x)B-f(x)B-AB|$

$=|f(x)(g(x)-B)+B(f(x)-A)|$

$\le|f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A|\le M\cdot\varepsilon+|B|\cdot\varepsilon$

$=(M+|B|)\cdot\varepsilon$

由ε的任意性知，$\lim\limits_{x\to x_0} f=AB$

五、证明：若f在[a,b]上可积，F 在[a,b]上连续，且除$\tilde{x}\in[a,b]$外有$F'(x)=f(x)$，则有$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

解：

在$[a,b]$上任取点$x_i,(0\le i\le n)$,取$T=\{x_0,x_1,...,x_n\}$,使得$a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b,$

且使$\tilde{x}\in T$,即$\tilde{x}$包含于分点之中。

则$F(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上连续，在(x_{i-1},x_i)上可导且$F'(x)=f(x)$

因而利用拉格朗日中值定理可得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

由于f在$[a,b]$上可积，故$F(b)-F(a)=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$

六、已知$f(x)$在[0,2]上可导，且$f(1)=-e,f(2)=e^2$，证明存在$\xi\in(0,2)$,使得$\xi f'(\xi)=(\xi-1)f(\xi)$

解：

先用原函数法求辅助函数。把ξ改写为x,得$xf^{'}(x)=(x-1)f(x)$

整理得$\dfrac{f^{'}(x)}{f(x)}=\dfrac{x-1}{x}$

两边求不定积分，得

$$\int\frac{f^{'}(x)}{f(x)}dx=\int\frac{x-1}{x}dx$$

$$\ln|f(x)|=x-\ln|x|+\ln C$$

两边取e次方，得

$$f(x)=\frac{Ce^{x}}{x}$$

整理得

$$C=\frac{x\cdot f(x)}{e^{x}}$$

取$F(x)=\dfrac{x\cdot f(x)}{e^{x}}$,则

$F(0)=0,F(1)=-1,F(2)=2$

$F^{'}(x)=f(x)e^{-x}+xf^{'}(x)e^{-x}-xf(x)e^{-x}$

由于$F(x)$在$[0,2]$上连续，所以由连续函数的介值定理得

$\exists\eta\in(1,2)$,使得$F(\eta)=0$

因为$F(x)$在$[0,\eta]$上连续,在$(0,\eta)$上可导,由罗尔定理得

$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,2)$,使得$F^{'}(\xi)=0$

$F'(\xi)=f(\xi)e^{-\xi}+\xi f^{'}(\xi)e^{-\xi}-\xi f(\xi)e^{-\xi}=0$

$f(\xi)+\xi f^{'}(\xi)-\xi f(\xi)=0,$

即$\xi f^{'}(\xi)=(\xi-1)f(\xi)$