吉林大学 2009-2010 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

参考解析

一、(共 35 分)

1、求多项式 $f(x)=x^4-x^3-x^2+5x-2$ 在有理数域上的标准分解;

解:直接验证知:1,−2 都为 $f(x)$ 的根,故 x+2,x−1 为 $f(x)$ 的因式,又其互素,故这两者的乘积 x^2+x-2 也是 $f(x)$ 的因式.

再利用长除法即有: $f(x)=(x^2+x-2)(x^2-2x+1)=(x+2)(x-1)^3$.

2、设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & -1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & 1 & x+1 & 1 \\ x^3 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ x^4 & 1 & x^2 & x^3 & x^5 \end{vmatrix}$,分别求 D 的第一列元素的代数余子式与余子式之和;

解:其第一列元素的代数余子式之和为: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & x^2 & x^3 & x^5 \end{vmatrix}=0$;

其第一列元素的余子式之和为: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & x^2 & x^3 & x^5 \end{vmatrix}=6x^3-6x$.

3、设 A,X 都为三阶矩阵,且 $X\widetilde{A}+\widetilde{A}XA^{-1}=3I$,其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求 X.

解:由条件 $|A|=1$,故 A 可逆且有 $\widetilde{A}=A^{-1}$.故 $XA^{-1}+A^{-1}XA^{-1}=3I$.

可得 $AX+X=3A^2$,即 $X=3A^2(A+I)^{-1}=3\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

二、（共 15 分）求线性方程组方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ -x_1-3x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 2x_1+6x_2-4x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+5x_2-x_3+6x_4=3 \end{cases}$的通解.

解：将其增广矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$进行初等行变换，得：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

故原方程组的一个同解方程组为：$\begin{cases} x_1-x_4=-3 \\ x_2+2x_4=2 \\ x_3+2x_4=1 \end{cases}$，取 $x_4=t$ 可得：$\begin{cases} x_1=-3+t \\ x_2=2-2t \\ x_3=1-2t \\ x_4=t \end{cases}$.

则令 $\alpha=(1,-2,-2,1), \beta=(-3,2,1,0)$， $x=k\alpha+\beta$，$k\in Z$ 为通解.

三、（共 15 分）设 A,B,C 均为 n 阶方阵，求证$\begin{pmatrix} A & AC \\ BA & BC \end{pmatrix}$可逆当且仅当 $A, B, C, I-A$ 均可逆.

证明：由$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & AC \\ BA & BC \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & AC \\ 0 & BC-BAC \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & AC \\ 0 & B(I-A)C \end{pmatrix}$

知：$\begin{vmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & AC \\ BA & BC \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & AC \\ 0 & B(I-A)C \end{vmatrix}=|A||B||I-A||C|$.又$\begin{vmatrix} I & 0 \\ -B & I \end{vmatrix}\neq 0$，故结论显然成立.

四、（共 15 分）设 n 阶矩阵 A 非零.证明 $r(A)=r$ 当且仅当 A 中有一个 r 阶非奇异子块，且存在秩数为 $n-r$ 的矩阵 B，使得 $AB=0$.

证明：充分性.若 $r(A)=r$.则其有 r 阶非零子式，对应子块非 0，且有 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, |P||Q|\neq 0$.

取 $B=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$，则 B 满足所有条件.（也可以取 B 为 $Ax=0$ 的一个基础解系组成的矩阵）

必要性.由于 A 中有一个 r 阶非奇异子块，故 $r(A)\geq r$.
又存在秩数为 $n-r$ 的矩阵 B，使得 $AB=0$，故线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系中的元素数目不少于 $n-r$，故 $r(A)\leq r$.故有 $r(A)=r$.

五、（共 10 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1$ 线性相关且

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_2$ 线性无关.证明：对任意数 c，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,c\beta_1+\beta_2$ 必线性无关.

证明：（方法一）设有一组数 $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ 使 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_m\alpha_m + a_{m+1}(c\beta_1 + \beta_2) = 0$.

由条件存在一组数 $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$，使得 $\beta_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m$，代入上面的等式，可得：

$(a_1 + c_1 c a_{m+1})\alpha_1 + (a_2 + c_2 c a_{m+1})\alpha_2 + \ldots + (a_m + c_m c a_{m+1})\alpha_m + a_{m+1}\beta_2 = 0$.

由条件 $a_1 + c_1 c a_{m+1} = a_2 + c_2 c a_{m+1} = \ldots = a_m + c_m c a_{m+1} = a_{m+1} = 0$，

可得 $a_1 = a_2 = \ldots = a_{m+1} = 0$，故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, c\beta_1 + \beta_2$ 线性无关.

（方法二）不妨认为所有的向量都是列向量.只需证明矩阵 $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c\beta_1 + \beta_2)$ 的秩数为 m+1.由条件 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1$ 线性相关，知 $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c\beta_1 + \beta_2)$ 可用列变换为 $(a_1, a_2, \ldots, a_m, \beta_2)$ 又 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_2$ 线性无关，故 $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c\beta_1 + \beta_2)$ 的秩为 m+1.

六、(共 10 分）设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质，且 $f(x)$ 没有常数项，已知 A,B 均为 n 阶矩阵，若 $f(A) = 0$，且 $r\begin{pmatrix} g(A) & 0 \\ 0 & g(B) \end{pmatrix} = n$,证明：$B$ 可逆.

证明：因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质，故存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使得：
$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$，代入 A 可得：$u(A)f(A) + v(A)g(A) = I$，即：
$v(A)g(A) = I$，故 $g(A)$ 可逆，$r(g(A)) = n$.

又 $r(g(A)) + r(g(B)) = r\begin{pmatrix} g(A) & 0 \\ 0 & g(B) \end{pmatrix} = n$，故 $r(g(B)) = 0$，即 $g(B) = O$.

而由 $f(x)$ 没有常数项知，$g(x)$ 的常数项 $a \neq 0$，故有：

$O = g(B) = g(B) - aI + aI$，有：$I = -a^{-1}(\dfrac{g(B) - aI}{B})B$，故 B 可逆，

且其逆矩阵为：$B^{-1} = -a^{-1}(\dfrac{g(B) - aI}{B})$.