吉林大学 2009-2010 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

共六道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、（共 35 分）

1、求多项式 $f(x)=x^4-x^3-x^2+5x-2$ 在有理数域上的标准分解；

2、设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & -1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & 1 & x+1 & 1 \\ x^3 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ x^4 & 1 & x^2 & x^3 & x^5 \end{vmatrix}$，分别求 D 的第一列元素的代数余子式与余子式之和；

3、设 A,X 都为三阶矩阵，且 $X\widetilde{A}+\widetilde{A}XA^{-1}=3I$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 X.

二、（共 15 分）求线性方程组方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ -x_1-3x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 2x_1+6x_2-4x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+5x_2-x_3+6x_4=3 \end{cases}$ 的通解.

三、（共 15 分）设 A,B,C 均为 n 阶方阵，求证 $\begin{pmatrix} A & AC \\ BA & BC \end{pmatrix}$ 可逆当且仅当 A, B, C, $I-A$ 均可逆.

四、（共 15 分）设 n 阶矩阵 A 非零.证明 $r(A)=r$ 当且仅当 A 中有一个 r 阶非奇异子块，且存在秩数为 $n-r$ 的矩阵 B，使得 $AB=0$.

五、（共 10 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1$ 线性相关且 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_2$ 线性无关.证明：对任意数 c，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,c\beta_1+\beta_2$ 必线性无关.

六、（共 10 分）设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质，且 $f(x)$ 没有常数项，已知 A,B 均为 n 阶矩阵，若 $f(A)=0$，且 $r\begin{pmatrix} g(A) & 0 \\ 0 & g(B) \end{pmatrix}=n$,证明：$B$ 可逆.