《常微分方程》计算题类型整理

注：针对 1 学分的《常微分方程》（课程代码 061B0010）。这里只给结果，不给出证明过程。

Zhejiang University

最近修订：2012-6-19 11:18 PM (GMT+8)

I. 一阶、全微分方程

A. 可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x)\psi(y)$$

方法：分离变量

$$\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)}$$

，然后积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\varphi(x)}。$$

注意：考虑存在y^*使得$\psi(y^*)=0$的情况，$y=y^*$也是一解。

B. 齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

方法：令$u=\frac{y}{x}$即$y=ux$，由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{g(u)-u}{x}$$

，回到可分离变量的情况。

注意：分三种情况，$g(u)-u\neq 0$、存在u_0使得$g(u_0)-u_0=0$（$u=u_0$也是一解）、$g(u)-u\equiv 0$（原式变为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$）。

C. 一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=f(x)$$

方法：通解公式

$$y=e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int f(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

；另外，对于初值问题（$y|_{x=x_0}=y_0$），有

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(\xi)\mathrm{d}\xi}\left[\int_{x_0}^{x}f(\zeta)e^{\int_{x_0}^{\zeta}p(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\zeta+y_0\right]。$$

D. 伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=f(x)y^n,n\neq 0,1$$

方法：先同除以y^n得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-n}=f(x)$$

，令$z=y^{1-n}$，则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入原式得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)p(x)z=(1-n)f(x)。$$

这是一个一阶线性方程，求出z后用$z=y^{1-n}$代回即可。

注意：当$n>0$时，显然有解$y=0$。

E. 全微分方程（积分因子只考查一元函数）

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

方法：先验证

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

是否成立（即平面第二类曲线积分与路径无关的条件），若是则说明原方程左边是一个全微分$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$，可以用三种方法算得$u(x,y)$。

方法一：利用积分与路径无关性，有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}N(x,y)\mathrm{d}y\left(\text{先右再上}\right)\\&=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}M(x,y)\mathrm{d}x\left(\text{先上再右}\right)。\end{aligned}$$

方法二：先把y看作常量，对x积分得

$$u(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)$$

，此时对y求偏导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)=N(x,y)$$

，解得$\varphi'(y)$，这个函数一定与x无关，求得$\varphi(y)$，把此代回即可。

方法三：分项组合法，常见的二元函数全微分有

$$\begin{gathered}y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy)\text{，}\\\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)\text{，}\\\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)\text{，}\\\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)\text{，}\\\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)。\end{gathered}$$

注意：如果$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$，那么需要求出积分因子$\mu(x,y)\neq 0$使得$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$成为全微分方程。当

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\varphi(x)$$

时，$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$；当

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\psi(y)$$

时，$\mu(y)=e^{\int\psi(y)\mathrm{d}y}$。

II. 二阶（高阶的方法类似）

A. 可降阶方程

1. 不含y和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f(x)$$

方法：连续积分两次即可。

注意：不要漏掉每次积分的常数项。

2. 不含y

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right)$$

方法：令$\frac{dy}{dx}=p$，则$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$，代入原方程即得到

$$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

，用原来的办法求得p后，关于x积分即可得到y。

3. 不含x

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\frac{dy}{dx}\right)$$

方法：令$\frac{dy}{dx}=p(y)$，则$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程得

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

，化为p关于y的一阶方程，用原来的办法求得p后，代入$\frac{dy}{dx}=p(y)$，分离变量并积分即可得到y。

B. 常系数线性方程

1. 齐次

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$$

方法：解特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$，原方程的通解为

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}\ \left(\text{两个不相等实根}\lambda_1\neq\lambda_2\right),$$

$$y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}\ \left(\text{两个相等实根}\lambda_1=\lambda_2=\lambda\right),$$

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x\ \left(\text{两个不相等的共轭复根}\lambda=\alpha\pm\beta\mathrm{i}\right)。$$

2. 非齐次

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

通解结构定理告诉我们，“非齐次方程通解$y=$齐次方程通解$Y+$非齐次方程特解y^*”，由于Y的求解方法已给出，下面只讨论y^*。（下文带有脚标m的函数指m次多项式）

a) $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$

方法：特解具有$y^*=x^kR_m(x)e^{\alpha x}$的形式，$k$是指：$\alpha$是特征方程的$k$重根（如果$\alpha$不是特征方程的根则$k=0$）。

b) $f(x)=P_m(x)e^{ax}\cos bx$或$Q_m(x)e^{ax}\sin bx$或二者之和

方法：特解具有$y^*=x^k[R_m(x)e^{ax}\cos bx+S_m(x)e^{ax}\sin bx]$的形式，$k$是指：$a\pm b\mathrm{i}$的每个值各是特征方程的$k$重根（如果不是特征方程的根则$k=0$）。

C. 一般系数（非常系数）线性方程

1. 欧拉方程

$$\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}x^k\frac{d^ky}{dx^k}=f(x)\text{，二阶情况为}a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=f(x)$$

方法：当$x>0$时令$x=e^t$（当$x<0$时令$x=-e^t$），现针对二阶情况讨论。求得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{x}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{1}{x}$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)。\ \left(\text{若为高阶方程，继续算高阶导数}\right)$$

代入欧拉方程得

$$a_0\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_2y=f(e^t)\text{，相应的}f(-e^t)\text{。}$$

即

$$a_0\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(a_1-a_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_2y=f(e^t)\text{，相应的}f(-e^t)\text{。}$$

这样就化为了y关于t的二阶常系数线性方程。

2. 一般形式（齐次）

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0$$

a) *已知一个非零解y_1的齐次方程*

方法：二阶情况下有刘维尔公式

$$y=y_1\left[c_1+c_2\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\text{。}$$

b) *可化为常系数的齐次方程（满足$2p'(x)+p^2(x)-4q(x)=a$）*

方法：先算出常数a的值，令$y=uv$，其中$v=e^{\int -\frac{p}{2}\mathrm{d}x}$，把$v$代入$y$，求出$y$关于$x$的一阶和二阶导数代回原方程得

$$u''-\frac{a}{4}u=0$$

，这是个二阶常系数方程，算出u的通解，再乘以v就得到y的值。

3. 一般形式（非齐次）

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=f(x)$$

方法：变动任意常数法。先解出对应齐次方程的通解

$$Y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

。这意味着y_1和y_2成为已知条件。现令非齐次方程（原方程）的通解为

$$y=u_1y_1(x)+u_2y_2(x)$$

，其中u_1和u_2是关于x的函数。解下面关于u_1'和u_2'的方程组：

$$\begin{cases}u_1'y_1+u_2'y_2=0\\u_1'y_1'+u_2'y_2'=f(x)\end{cases}$$

，解出u_1'和u_2'之后，积分求得u_1和u_2，代入通解表达式即求得原方程通解。

III. 线性方程组（只考查常系数的情况）

以下内容，记$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\\vdots\\\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}f_1(t)\\\vdots\\f_n(t)\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$。

A. 齐次（只考查特征根是单根的情况）

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

方法：首先令$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$，这里$\lambda$和$\boldsymbol{v}$待求。则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\lambda\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$。把二者代入原方程移项化简得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

。先解特征根（特征值）λ。特征根是下面方程的解：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

。这里解得n个特征根$\lambda_1,\dots,\lambda_n$。对每个特征根$\lambda_k$，代入$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$解得特征向量$\boldsymbol{v}_k$。从而$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{v}_ke^{\lambda_kt}$是圆方程组的一个解。故原方程的通解是

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{x}_i=\sum_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{v}_i e^{\lambda_i t}。$$

注意：如果特征根出现复根（一定是共轭成对出现的），如$\lambda_1=\alpha+\beta\mathrm{i}$和$\lambda_2=\alpha-\beta\mathrm{i}$，解出的特征向量分别是$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\mathrm{i}$和$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\mathrm{i}$，此时会有两个复值解

$$\boldsymbol{x}_{1,2}=(\boldsymbol{p}\pm\boldsymbol{q}\mathrm{i})e^{(\alpha+\beta\mathrm{i})t}=e^{\alpha t}(\boldsymbol{p}\cos\beta t-\boldsymbol{q}\sin\beta t)\pm e^{\alpha t}(\boldsymbol{p}\sin\beta t+\boldsymbol{q}\cos\beta t)\mathrm{i}$$

。按照以往的类似解决办法，这复值解的实部和虚部也都是原方程的（实数）解，即下面的x_1'和x_2'：

$$\begin{cases}x_1'=e^{\alpha t}(\boldsymbol{p}\cos\beta t-\boldsymbol{q}\sin\beta t)\\x_2'=e^{\alpha t}(\boldsymbol{p}\sin\beta t+\boldsymbol{q}\cos\beta t)\end{cases}$$

B.　非齐次（只考查消元法）

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$$

方法：与中学的解线性方程组类似，仍然是利用代入法、加减法这两种方法消去多余字母，得到只含两个变量的方程。

代入法：在一个方程（如$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+2y+e^t$）中将一个函数（如前面例子中的$y$）用另一个变量（如前面例子中的$x$）表示（用前面的例子讲，即$y=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x-e^t\right)$），然后代入其他方程中消去该字母。

加减法：主要用于得到一个消掉多余的导数项的方程，如下面方程组

$$\begin{cases}2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y-t=0\\\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x-y-2t=0\end{cases}$$

的两式相减即可消去$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，得到$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x+2y+t=0$，再把$y$用$x(t)$表示代入一个式子解得$x(t)$，进而得到$y(t)$。