# 概率论与数理统计

龙永红，第三版，高等教育出版社

# 课后习题详细答案

厦门大学 经济学院

08 经济 周玉龙

08 金融 王骁 李政宵

09 金融 孙士慧 许彩灵 唐艺烨

李欣 林家敏 凌芝君 罗莘 苏英彪

**联合编写**

2011 年 6 月 3 日 第二版

# 目录

# 前言

各位学弟学妹们，大家好。

这份答案是我在 2010 年学习概率统计的时候，和几个好朋友一起编写的。

我在大二上学线性代数的时候，当时找不到习题答案，于是很多不会做的题目，我就直接放弃了，期末线性代数成绩很不理想。大二下在学概率统计的时候，我决定要把书上的题目都做会，但当时找不到一本参考答案，于是便想到了自己来编写一本答案书。这样我不仅可以强迫自己把书上的题目都做了，更重要的是，我还可以帮助今后很多的学弟学妹学习概率统计。于是找到 08 经济系的**周玉龙**同学，由他撰写手写初稿答案；我又找了几个愿意加入的朋友，我们一起将手写初稿录入进电脑，他们是 09 金融的**孙士慧**、**许彩灵**、**唐艺烨**和 08 金融的**李政宵**；我再将电子版初稿打印下来，并在上面进行打印错误的校正，再由我将这些错误在电脑中改过来。最后整理排版，这就是你眼前的这本电子书。

撰写初版答案是辛苦的，将初版手写答案录入电脑更是非常辛苦。我们都耗费了很多的时间在这上面。这里要特别感谢 09 级的三位同学，没有她们的参与，绝对没有这份成果。相信他们在录入的过程中，也学到了不少 WORD 技能，也提升了自己对数学的感觉。另外，我们 08 级的三位同学在半期和期末的概率统计考试中都取得了非常好的成绩。

由于时间紧张，书中 3.1 节（即半期考试）之后的内容我都已经在纸质版中做了校对并标注出了错误，但是还没来得及将这些错误在电子版中更正。**希望有兴趣的同学能够联系我，将那些我已经在纸质版上更正了的错误录入电脑，让这本书更加完善。**另外，除了习题一之外的其他习题由于难度很大，我们也没有写，希望有兴趣的同学可以联系我。能够在自己学习的过程中，稍作一些小小的努力，帮助今后很多的学弟学妹，这是最值得开心的事。

对于半期考试之前的内容，如果大家发现错误，欢迎提出。以便完善此书，造福学弟学妹。

我的联系方式：

wangxiaoclark【AT】qq.com

这是你们在漳州校区的最后一学期，好好珍惜。祝你们身体健康，学习进步，天天好心情！

王骁

2011 年 2 月 16 日于经院图书馆

## 编写任务记录

| 节次 | 手写初稿 | 录入 | 校对 | 更正 |
|---|---|---|---|---|
| 1.1 | 周玉龙 | 王骁 | 王骁 | 王骁 |
| 1.2 | 周玉龙 | 王骁 | 王骁 | 王骁 |
| 1.3 | 周玉龙 | 王骁 | 王骁 | 王骁 |
| 1.4 | 周玉龙 | 李政宵 | 王骁 | 王骁 |
| 1.5 | 周玉龙 | 李政宵 | 王骁 | 王骁 |
| 习题一 | 周玉龙 | 李政宵 | 王骁 | 王骁 |
| 2.1 | 周玉龙 | 王骁 | 王骁 | 王骁 |
| 2.2 | 周玉龙 | 王骁 | 王骁 | 王骁 |
| 2.3 | 周玉龙 | 孙士慧 | 王骁 | 王骁 |
| 2.4 | 周玉龙 | 孙士慧 | 王骁 | 王骁 |
| 2.5 | 周玉龙 | 孙士慧 | 王骁 | 王骁 |
| 习题二 | 周玉龙 | 孙士慧 | 未校对 | |
| 3.1 | 周玉龙 | 唐艺烨 | 王骁 | 部分校打 |
| 3.2 | 周玉龙 | 孙士慧 | 王骁 | |
| 3.3 | 周玉龙 | 唐艺烨 | 王骁 | 苏英彪 |
| 3.4 | 周玉龙 | 许彩灵 | 王骁 | 苏英彪 |
| 3.5 | 周玉龙 | 李政宵 | 王骁 | 苏英彪 |
| 习题三 | | | | |
| 4.1 | 周玉龙 | 许彩灵 | 王骁 | 林家敏 |
| 4.2 | 周玉龙 | 许彩灵 | 王骁 | 林家敏 |
| 4.3 | 周玉龙 | 许彩灵 | 王骁 | 凌芝君 |
| 4.4 | 周玉龙 | 许彩灵 | 王骁 | 苏英彪 |
| 习题四 | | | | |
| 5.1 | 周玉龙 | 唐艺烨 | 王骁 | 苏英彪 |
| 5.2 | 周玉龙 | 孙士慧 | 王骁 | 苏英彪 |
| 5.3 | 周玉龙 | 孙士慧 | 王骁 | 罗莘 |
| 5.4 | 周玉龙 | 孙士慧 | 王骁 | 罗莘 |
| 5.5 | 周玉龙 | 许彩灵 孙士慧 | 王骁 | 苏英彪 |
| 5.6 | 周玉龙 | 许彩灵 | 王骁 | 苏英彪 |
| 5.7 | 罗莘 | 苏英彪 | | |
| 习题五 | | | | |
| 6.2 | 李欣 | 苏英彪 | | |
| 7.1 | 罗莘 | 苏英彪 | | |
| 7.2 | 罗莘 | 苏英彪 | | |

**练习 1-1**

1、设样本空间为Ω.

（1）Ω={(i, j)|i=1, 2⋯6； j=1, 2...6}

（2）Ω=(0, +∞)

（3）Ω={0, 1, 2, 3}

（4）Ω=$N^*$

2、

（1）Ω={1324，1342，3124，3142
1423，1432，4123，4132
2314，2341，3214，3241
2413，2431，4213，4231}；

（2）A={1324，1342，1423，1432}；

（3）B={1324，1342，3124，3142
1423，1432，4123，4132}；

（4）$A \cup B = B$ 如前给出。
$A \cap B = A$ 如前给出。
$\overline{A}$={3124，3142，4123，4132，2314，2341，3214，3241
2413，2431，4213，4231}。

3、

（1）Ω={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

（2）A={HHT, HTH, THH}

（3）B={HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH}

（4）A∪B=B

A∩B=A

A—B=Ø

$\overline{B}$={TTT}

4、Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}

A={1, 3, 5}

B={1, 2, 3, 4}

C={2, 4}

A+B={1，2，3，4，5}

A—B={5}

B—A={2, 4}

AB={1, 3}

AC= Ø

$\overline{A}$+B={1, 2, 3, 4, 6}

5、（5）$\Omega - \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

（8） $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

（10）AB+BC+AC 或$\Omega$ －ABC

（11） $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

6、

（1）互不相容

（2）对立

（3）互不相容

（4）既不互不相容也不对立

（5）互不相容

（6）对立

（7）既不互不相容也不对立

7、注：事件之间的关系一共有五种：包含，等于，对立，互斥（互不相容），独立。

记每小题中“与”字之前的事件为 X，后者为 Y，则有：

（1）X：第 1-5 次至少 1 次击中目标

Y：5 次射击中至少 1 次击中目标

X=Y

（2）X：第 2-5 次至少 1 次击中目标

Y：5 次射击中至少 2 次击中目标

X$\subset$Y

（3）X：第 1、2 次至少 1 次击中目标

Y：第 3-5 次至少 1 次集中目标

独立

（4）X：5 次射击中，击中目标 1 或 2 次

Y：5 次设计中，击中目标 3、4 或 5 次

X、Y 互斥

（5）X：5 次射击中，击中目标 0、1 或 2 次

Y：5 次射击中，击中目标 3、4 或 5 次

X、Y 对立

（6）X：第 1、4、5 次击中目标，第 2、3 次未击中目标

Y：5 次射击中击中目标 3 次

X$\subset$Y

（7）X：第 1 次未击中目标

Y：5 次射击中最多击中目标 4 次

X$\subset$Y

（8）X：第 1-5 次至少 1 次未击中目标

Y：5 次射击中最多击中目标 4 次

X=Y

8、证明

①A∪（B－A）=A∪（B∩ $\bar{A}$ ）=（A∪B）∩（A∪ $\bar{A}$ ）=（A∪B）∩$\Omega$ =A∪B

②（A－B）∪（B－A）∪（A∩B）=（（A∩ $\bar{B}$ ）∪（A∩B））∪（B－A）=

$(((A\cap\bar{B})\cup A)\cap((A\cap\bar{B})\cup B))\cup(B-A)=(A\cap(A\cup B))\cup(B-A)$

$=A\cup(B-A)$

由①②得证。

## 练习 1-2

1、（1）7%；（2）30%；（3）57%

2、（1）即求“最多一位顾客购买洗衣机”的对立事件概率。0.913。

（2）所求的对立事件为“既不买滚筒洗衣机，又不买直筒洗衣机”。“既不买滚筒洗衣机”概率为 1－0.0768；“又不买直通洗衣机”概率为 1-0.0102。故“既不买滚筒洗衣机，又不买直筒洗衣机”的概率为（1－0.0768）×（1－0.0102）。所求即为 1－（1－0.0768）×（1－0.0102）=0.913

3、

性质 3：$P(\overline{A})=1-P(A)$

证明：取两互不相容的事件 $A,\overline{A}$，可知其组成完备事件组$\Omega$。

$P(\Omega)=P(\overline{A}+A)=P(\overline{A})+P(A)=1$ 即 $P(\overline{A})=1-P(A)$

性质 4：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

证明：$P(A-B)=P(A\overline{B})$ 。已知 $A\overline{B}$ 和 $AB$ 互不相容

故 $P(A\overline{B})+P(AB)=P(A\overline{B}+AB)=P(A\bigcap(\overline{B}\bigcup B))=P(A)$

即 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

若 $A\supset B$，则

（1）$P(A-B)=P(A)-P(B)$

证明：$A\supset B\Rightarrow P(AB)=P(B)$ 得证。

（2）$P(A)\geq P(B)$

证明：由（1）知 $P(A)=P(B)+P(A-B)$ 由公理 1 知 $P(A+B)\geq 0$ 。得证。

性质 5：$0\leq P(A)\leq 1$

证明：$\varnothing\subset A\subset\Omega$， $\because P(\varnothing)=0;P(\Omega)=1\therefore 0\leq P(A)\leq 1$

性质 6：$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

证明：$A\bigcup B=A+(B-A)$ $\because$ $A$ 与 $B-A$ 互不相容，有

$P(B-A)=P(B)-P(AB)\therefore P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推论：

$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

证明：$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B+C)-P(A(B+C))$

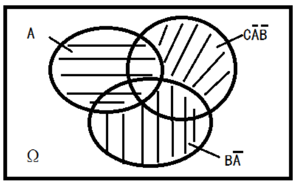
$=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AB+AC)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$

4、$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.15$ $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5$

$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.1$ $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\bigcup B})=1-P(A+B)=0.5$

5、方法①可以用韦氏图表示已知的各部分。




故 $A+B+C=A+B\overline{A}+C\overline{A}\overline{B}$ 又因其互不相容

故 $P(A+B+C)=P(A)+P(B\overline{A})+P(C\overline{A}\overline{B})=0.7$

方法②

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

$P(C\overline{A}\overline{B})=P(C\overline{A\cup B})=P(C-(A\cup B))$

$=P(C)-P(C(A+B))=P(C)-P(AC+BC)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

故 $P(A+B+C)=P(A)+P(B\overline{A})+P(C\overline{A}\overline{B})$

6、

（1） 0.88

（2）

$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\Rightarrow P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)$

$=0.06$

（3） $P(A_1A_3)=P(A_1)+P(A_3)-P(A_1\cup A_3)=0.03$

（4） $P(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})=P(A_1A_2)-P(A_1A_2A_3)=0.06-0.01=0.05$

（5） $\because P(A_2A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2\cup A_3)=0.02$

$\therefore P(A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3)=P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_2A_3)-3P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$

$=P(A_1A_2)+P(A_2A_3)+P(A_1A_3)-2P(A_1A_2A_3)=0.09$

（6）即求“出现三个问题”的对立事件的概率，即 $1-P(A_1A_2A_3)=0.09$

## 练习 1-3

1、第（2）种符合；概率为 $\frac{1}{2}$。

古典概型假设之一是每一个可能结果发生的可能性相同。而（1）中一正一反的概率为 $\frac{1}{2}$，两正概率和两反概率各为 $\frac{1}{4}$，不符合假设。

2、证明:

当且仅当 $P(\{(H,H),(H,T)\})=\frac{1}{2}$ 时， $P(\{(T,H),(T,T)\})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

即第一枚出现正面的概率和第二枚出现反面的概率皆为 $\frac{1}{2}$，即第一枚硬币是均匀的。同理可证第二枚硬币是均匀的当且仅当

$P(\{(H,H),(T,H)\})=\frac{1}{2}$。

析： $P(\{(H,H),(H,T)\})$ 表示“出现（H,H）或（H,T）”的概率，即“第一枚硬币是正面”的概率，为 $\frac{1}{2}$。只需证“第一枚硬币为反面”的概率也为 $\frac{1}{2}$，即可证明其为均匀的，又两事件相互对立，故得证。

3、此题为古典概型。事件总数为 $C_N^n$。

（1）分两步完成。先从 $N_1$ 件次品中选 $k$ 件，有 $C_{N_1}^k$ 种取法。再从 $N-N_1$ 件非次品中选择 $n-k$ 件，有 $C_{N-N_1}^{n-k}$ 种取法。故总取法为 $C_{N_1}^K\bullet C_{N-N_1}^{n-k}$ 种，

$\therefore$ 概率为 $\frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}$。

（2）此类题目先求其对立事件，即没有次品的概率。从 $N-N_1$ 件非次品中选择 $n$ 件，有 $C_{N-N_1}^n$ 种取法，故没有次品概率为 $\frac{C_{N-N_1}^n}{C_N^n}$，有次品概率为 $1-\frac{C_{N-N_1}^n}{C_N^n}$。

（3）其对立事件为“没有次品或者有一件次品”。没有次品的概率为

$\frac{C_{N-N_1}^n}{C_N^n}$，有 1 件次品的概率为 $\frac{C_{N-N_1}^{n-1}C_{N_1}^1}{C_N^n}$。$\therefore$ 所求概率为 $1-\frac{C_{N-N_1}^n}{C_N^n}-\frac{C_{N-N_1}^{n-1}C_{N_1}^1}{C_N^n}$。

4、

（1）由于每个同学到学校模式相同，所以可以将问题看做 30 个同学的排队问题，要求女生在最后六个位置。总的排法有 30！种，而男生排前 24 位，女生排后 6 位有 24！×6！种。故概率为 $\frac{24!\times 6!}{30!}=\frac{1}{C_{30}^{24}}$。

（2）所有事件可分为“李明比王菲早到”和“李明比王菲晚到”两类，且两类事件数相同。故所求概率为 $\frac{1}{2}$。

5、考虑其对立事件“没有任何两人生日在同一天”有 $P_{365}^n$ 种可能，而 n 个人生日所有可能情况为 $365^n$ 种。故对立事件概率为 $\frac{P_{365}^n}{365^n}$，所求为 $1-\frac{P_{365}^n}{365^n}$。（注：本题书后答案错误）

6、此题用到伯努利定理，见书 P34 例 1.30。

（1）对立事件为“在第 i 站不停车”，对于每个人，不在 i 站下车的概率为 $\frac{8}{9}$，故所有人都不在 i 站下车的概率为 $(\frac{8}{9})^{25}$，所求为 $1-(\frac{8}{9})^{25}$。

（2）对立事件为“在第 i, j 站均不停车”，即要求每个人都不在 i, j 站下车，概率为 $(\frac{7}{9})^{25}$，故所求为 $1-\left(\frac{7}{9}\right)^{25}$。

（3）设“第 i 站不停车”为 A，“第 j 站不停车”为 B，则

$P(A)=(\frac{8}{9})^{25}\quad P(B)=(\frac{8}{9})^{25}\quad P(AB)=(\frac{7}{9})^{25}$

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-2\times(\frac{8}{9})^{25}+(\frac{7}{9})^{25}$（4）根据伯努利定理易得 $C_{25}^3\left(\frac{1}{9}\right)^3\left(\frac{8}{9}\right)^{22}$

7、此为古典概型。每封信有 4 种投法，故样本总数为 $4^2$。要求前两个邮筒没有信，则每封信有 2 种投法，总投法为 $2^2$。第一个概率为 $\frac{2^2}{4^2}=\frac{1}{4}$；使第一个邮筒有 1 封信，分两步，首先选一封投入第一个邮筒有 $C_2^1$ 种投法，剩下那封信有 3 种投法。故总投法为 $C_2^1\times 3$，概率为 $\frac{C_2^1\times 3}{4^2}=\frac{3}{8}$

8、分两步完成，首先从 $a$ 个黑球中选择 $k$ 个，取法有 $C_a^k$ 种，然后从 $b$ 个白球中选择 $i-k$ 个，有 $C_b^{i-k}$ 种，故总取法有 $C_a^kC_b^{i-k}$。事件总数为 $C_{a+b}^i$，概率为两者之商 $\frac{C_a^kC_b^{i-k}}{C_{a+b}^i}$。

9、

（1）$\frac{C_4^1 9!}{10!}=\frac{2}{5}$

（2）即前两把钥匙不能开门，第三把才能开门，取前两把钥匙有 $5\times 6$ 种取法，第三把有 4 种取法，故总的取法为 $6\times 5\times 4$。又事件总数为 $10\times 9\times 8$，故所求为 $\frac{1}{6}$。

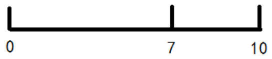
（3）易知其对立事件为“前三把均不能打开”，概率为 $\frac{A_6^3 7!}{10!}=\frac{1}{6}$。

10、从 10 次中选 3 次为正面，7 次为反面，又正反的概率均为$\frac{1}{2}$，故为$C_{10}^{3}\times(\frac{1}{2})^{3}\times(\frac{1}{2})^{7}=C_{10}^{3}\times(\frac{1}{2})^{10}$。

11、分三步，分别取红、白、黑球，共$5\times3\times2$种，又事件总数为$C_{10}^{3}$，故概率为$\frac{5\times3\times2}{C_{10}^{3}}=\frac{1}{4}$。

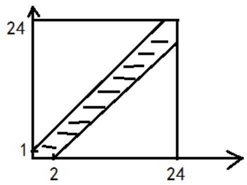
12、将 13 个字母全排列，有 13！种排法。因 A 有 3！种排法，I、M、T 各有 2！种排法。所以排成 MATHEMATICIAN 的方法一共有 3！×2！×2！×2！种，易得概率$\frac{48}{13!}$。

13、此题类似于例 1.17 的几何概型，可得下图




乘客在 7—10 分钟之间到才能满足要求，总长为 10，故概率为$\frac{3}{10}$。

14、此题类似于例 1.18，为会面问题。设要等待 1 小时的船 X 到达时刻为$x$，要等待 2 小时的船 Y 到达时刻为$y$，则样本空间为$\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x<24,0\le y<24\}$。以 A 表示事件“X 需要等待 Y”，则有$A=\{(x,y)\mid(x,y)\in\Omega,0<x-y\le 2\}$。以 B 表示事件“Y 需要等待 X”，则有$B=\{(x,y)\mid(x,y)\in\Omega,0<y-x\le 1\}$。设所求事件为$C$，有$C=A\cup B$。作图如下（阴影部分为 C）：




由几何计算，有$P(C)=\dfrac{24^2-23^2\times\frac{1}{2}-22^2\times\frac{1}{2}}{24^2}\approx 0.121$

## 练习 1-4

1、

（1）（2）题解法见 P23 例 1.20；答案皆为$\frac{a-1}{a+b-1}$.

（3）设事件“取出的两球中有黑球”为$A$，“另一个也是黑球”为$B$，则$\overline{A}$即为“全是白球”。

$P(\overline{A})=\frac{C_b^2}{C_{a+b}^2}$　$P(A)=1-P(\overline{A})$　$P(AB)=\frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}$

故所为$P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}}{1-\frac{C_b^2}{C_{a+b}^2}}=\dfrac{a-1}{a+2b-1}$

2、证明：

（1）$\because B\supset A$

故 $P(AB)=P(A)$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$

（2）

$$P(B_1+B_2|A)$$

$$=\frac{P((B_1+B_2)A)}{P(A)}=\frac{P(B_1A+B_2A)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(B_1A)+P(B_2A)-P(B_1B_2A)}{P(A)}$$

又 $B_1B_2=\varnothing$　故 $P(B_1B_2A)=0$

故原式左边$=\frac{P(B_1A)}{P(A)}+\frac{P(B_2A)}{P(A)}=$右边

得证

3 、（1）此题和第一题的（3）类似，$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

（2）设“第一胎为女孩”为 $A$，“第二胎也是女孩”为 $B$ 则所求得：

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

4、 设“点数不相同”为 $A$，“其中有一个点数为 4”为 $B$，则 $\overline{A}$ 为“点数相同”，且 $P(\overline{A})=\frac{6}{6\times6}=\frac{1}{6}$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{5}{6}$$

$$P(AB)=\frac{C_2^1\times1\times5}{6\times6}=\frac{5}{18}$$

故所求 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$

5、

（1）古典概型，易知为 $\frac{2}{5}$

（2）$\frac{6\times4}{10\times9}=\frac{4}{15}$

（3）$\frac{4\times3\times2}{10\times9\times8}=\frac{1}{30}$

6、

（1）$\because P(EF)=P(E)+P(F)-P(E\cup F)=0.2$

$\therefore P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$，$P(F|E)=\frac{P(EF)}{P(E)}=\frac{0.2}{0.4}=\frac{1}{2}$

（2）$\because P(E|F)=\frac{P(EF)}{P(F)}=0.4$　$\therefore P(E\cap F)=0.4\times0.5=0.2$

$\therefore P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(EF)=0.8-0.2=0.6$　　$P(F|E)=\frac{P(EF)}{P(E)}=\frac{2}{3}$

7、

（1）正确；$\because \quad P(E|F)=\dfrac{P(E\bigcap F)}{P(F)}$

$0<P(F)\le 1$，故 $P(E\cap F)\le P(E|F)$

（2）错误；设 $P(E)=0.4$， $P(F)=0.5$， $P(EF)=0.3$

则 $P(E|F)=\dfrac{0.3}{0.5}$，$P(F|E)=\dfrac{0.3}{0.4}$。

（3）正确；

由（1）方法可知 $P(E\cap F)\le P(F|E)$

故 $P(E\cup F)+P(F/E)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)+P(F/E)$

$=P(E)+P(F)$

（4）错误；

设 $P(E)=0.3$ $P(F)=0.4$ $P(EF)=0.1$ 则 $P(E|F)=\dfrac{P(EF)}{P(F)}=0.25<P(E)$。

（5）正确；

$$P((E\cap F)|F)=\frac{P(E\cap F\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=P(E|F)$$

8、由全概率公式可得

$$P=\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{5}=0.59$$

9、（1）$\dfrac{30}{30+20}\times 0.06+\dfrac{20}{30+20}\times 0.05=0.056$

（2）$\dfrac{30\times 100\times 0.06+20\times 120\times 0.05}{30\times 100+20\times 120}=\dfrac{1}{18}$

10、

（1）由全概率公式可得，设所求事件为 $A$，则

$$P(A)=\frac{C_3^3C_9^2C_3^1+C_3^2C_9^1C_8^2C_4^1+C_3^1C_9^2C_7^2C_5^1+C_9^3C_6^2C_6^1}{C_{12}^3C_{12}^3}\approx 0.455$$

（2）设“第一次恰有的一个新球”为 $B$，则所求

$$P(B/A)=P(AB)/P(A)=\frac{\dfrac{C_9^1C_3^2C_4^1C_8^2}{C_{12}^3C_{12}^3}}{0.455}\approx 0.137$$

11、（1）设“确实带有病毒”为 $A$，“检验为阳性”为 $B$，则

$P(A)=0.001$， $P(B|A)=0.95$， $P(B|\overline{A})=0.01$

由贝叶斯公式知，所求

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}\approx 0.087$$

（2）同理，设“确实带有病毒”为 $A$，“检验为阳性”为 $B$，则

$P(A)=0.01$ $P(B|A)=0.95$ $P(B|\overline{A})=0.01$ 所求即为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}\approx 0.490$$

12、

说法是错误的，原因如下：

我们假设“凶手是白人”为$A$，“凶手是其他色人”为$B$，“受害者正确识别”为$C$，则可知

$$0.8 = P(C|A) + P(C|B)$$

且 $$\underbrace{P(C|A) + P(C|B)}_{0.8} + \underbrace{P(\bar{C}|A) + P(\bar{C}|B)}_{0.2} = 1$$

受害者“断言凶手是白人”，表明

$$P(C|A) + P(\bar{C}|B) = 0.8$$

而 “袭击者确实为白人”的概率应为$P(C|A) + P(\bar{C}|A)$。但是我们不知道$P(\bar{C}|B)$是否与$P(\bar{C}|A)$相等。所以条件不足，故说法错误

13、否

设“死于肺癌”为$A$，“吸烟”为$B$。

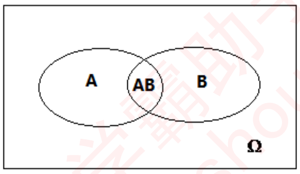
则当“吸烟是导致肺癌的重要因素”时，所指的应为$P(A/B)$较大。而“80%死者都吸烟”是指$P(B|A)$较大。

必须搞清何为条件，何为所求概率对应的事件。

## 练习 1-5

1、

如图所示




若$AB$相互独立，则$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$，由几何概型知

$$\frac{S_{AB}}{S_\Omega} = \frac{S_A}{S_\Omega}\cdot\frac{S_B}{S_\Omega} \quad 即 \quad S_{AB}\cdot S_\Omega = S_A\cdot S_B$$

即当$A.B$独立时，各部分面积的关系满足上式。

2、

由题意可知

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = \frac{1}{4}$$

有 $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$ $P(AC) = P(A)\cdot P(C)$ $P(CB) = P(C)\cdot P(B)$

故两两独立。

但是$P(ABC) \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

故不相互独立。

3、证明

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A)$$

当$P(A) = 0$时， $P(AB) = 0$

即$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

当$P(A) = 1$时， $A$为必然事件， $P(AB) = P(B/A) = P(B)$

即$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

得证。

4、否

假设相互独立，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)>0$

与 $AB$ 互不相容矛盾。

5、证明：

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A\cup B}C)=P(C)-P((A\cup B)C)=P(C)-P(AC\cup BC)$$
$$=P(C)-[P(AC)+P(BC)-P(ABC)]=P(C)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$$
$$=P(C)(1-P(A))(A-P(B))=P(C)P(\overline{A})P(\overline{B})$$

6、证明：性质一，用数学归纳法

（1）当 $m=1$ 时，$(2\le k\le n)$

$$P(\overline{A_{i_1}},A_{i_2},\ldots,A_{i_k})=P(A_{i_2},\ldots,A_{i_k})-P(A_{i_1},A_{i_2},\ldots,A_{i_k})$$
$$=P(A_{i_2},\ldots,A_{i_k})\cdot(1-P(A_{i_1}))$$
$$=P(\overline{A_{i_1}})\cdot P(A_{i_2})\cdot P(A_{i_3})\cdots\cdots P(A_{i_k})$$

（2）当 $m=p(p\ge 2)$ 时成立，即

$$P(\overline{A_{i_1}},\overline{A_{i_2}},\ldots A_{i_p},A_{i_{p+1}},\ldots,A_{i_k})=P(\overline{A_{i_1}})P(\overline{A_{i_2}})P(A_{i_3})\ldots P(A_{i_k}) \qquad (*)$$

（3）当 $m=p+1$ 时

$$P(\overline{A_{i_1}},\overline{A_{i_2}},\ldots\overline{A_{i_p}},A_{i_{p+1}},A_{i_{p+2}}\ \ldots,A_{i_k})$$
$$=P(\overline{A_{i_1}},\overline{A_{i_2}},\ldots\overline{A_{i_p}},A_{i_{p+2}},\ldots,A_{i_k})-P(\overline{A_{i_1}},\overline{A_{i_2}},\ldots\overline{A_{i_p}},A_{i_{p+1}},A_{i_{p+2}},\ldots,A_{i_k})$$

由 $(*)$ 式

$$=P(\overline{A_{i_1}},\overline{A_{i_2}},\ldots\overline{A_{i_p}},A_{i_{p+2}},\ldots,A_{i_k})\cdot(1-P(A_{i_{p+1}}))$$
$$=P(\overline{A_{i_1}})P(\overline{A_{i_2}})\ldots P(\overline{A_{i_p}})P(\overline{A_{i_{p+1}}})P(A_{i_{p+2}})\ldots P(A_{i_k})$$

综合 1，2，3 得证

性质二，证明：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-P\left(\prod_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)$$

由性质 1，得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$$

又 $P(\overline{A_i})=1-P(A_i)$　代入上式

故得证

7、$0.316=1-0.9\times0.95\times0.8$

8、$(1-0.1)\times(1-0.3)=0.63$

9、（1）可由全概率公式求得

$C_3^1\times0.3\times0.7^2\times0.2+C_3^2\times0.3^2\times0.7\times0.6+0.3^3=0.2286$

（2）设“被击落”为 $A$，“中两弹”为 $B$

则 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{C_3^2\times0.3^2\times0.7\times0.6}{0.2286}=0.4961$

10、（1）$1-0.1\times0.1\times(1-0.9\times0.9)=0.9981$

（2）$\dfrac{0.9}{0.9981}=0.9017$

**习题一**

1、事件总数为$C_{20}^{10}$，当最强的两队分在同一组的事件分两步选择：先为这两队选一组为$C_2^1$种选择，再从剩余的 18 队中选 8 队放入这一组，有$C_{18}^8$选择，故总数为$C_2^1C_{18}^8$。所以概率为

$$\frac{C_2^1C_{18}^8}{C_{20}^{10}}=\frac{9}{19}$$

“两队分在不同组”为“分在同一组”的对立事件，故概率为

$$1-\frac{9}{19}=\frac{10}{19}$$

2、（1） $A,B$之间恰有$r$个人按如下步骤实现：

把所有人全排列，故事件的总数为$A_j^{n_1}$；站成一行并且 AB 间夹 r 个人，AB 有$2\times(n-1-r)$种排法，其他人全排列有$(n-2)!$种。故概率为

$$\frac{2\times(n-1-r)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-1-r)}{n(n-1)}$$

（2）n 个人围成一圈时全排列方法为$\frac{n!}{n}$种。

AB 顺时针，A 定则 B 定，因此只考虑 A。则有$\frac{(n-1)!}{n-1}$种排法，因此

$$\frac{\frac{(n-1)!}{n-1}}{\frac{n!}{n}}=\frac{1}{n-1}$$

3、即要求前$2N-k$有$N$根是从变空的那盒中取得的，由伯努利概型知

$$P=C_{2N-k}^N\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}\left(\frac{1}{2}\right)^N=C_{2N-k}^N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}$$

4、如果每个坛子都从$1$至$m$号球中取一个，最大编号不超过$m$，有$m^k$种取法，同理，不超过$m-1$有$(m-1)^k$种取法

为了保证取到$m$，最大编号为$m$有$m^k-(m-1)^k$种取法

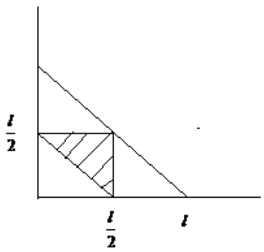
又 事件总数为$n^k$

则 $P=\dfrac{m^k-(m-1)^k}{n^k}$

5、设所折得三段分别为$x,y,l-x-y$，则构成三角形应满足“两边之和大于第三边”，“两边之差小于第三边”。即有：

$$\begin{cases}x+y>l-x-y\\x-y<l-x-y\\y-x<l-x-y\\l-x-y>0\end{cases}$$

由几何概型可知



$P=\frac{1}{4}$

6、由题意知，

甲得胜的概率为

$$P=\sum_{i=0}^{n}P_1^n(1-P_2)^{n-1}$$

$$=\lim_{n\to 0}\frac{P_1\left(1-P_1(1-P_2)^n\right)}{1-P_1(1-P_2)}=\frac{P_1}{1-P_1(1-P_2)}$$

乙得胜的概率为

$$1-P=\frac{P_2-P_1P_2}{P_1+P_2-P_1P_2}$$

7、（1）$\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}=\frac{29}{90}$

（2）$\frac{20}{61}$???

8、设“收到 $ABCA$”为 $A$，“被传为 $AAAA$”为 B

（1）由全概率公式可得

$$P(A)=\frac{1}{3}\times 0.6^2\times 0.2^2+\frac{1}{3}\times 0.2^3\times 0.6+\frac{1}{3}\times 0.2^3\times 0.6=0.008$$

（2）由条件概率可得

$$P(B\mid A)=\frac{\frac{1}{3}\times 0.2^2\times 0.6^2}{0.008}=0.6$$

## 练习 2-1

1、（1）$\{\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$，$\Omega$ 两个事件发生了，$\{\omega_1,\omega_2\}$，$\varnothing$ 两个事件没有发生。$\{\omega_3\},\{\omega_4\},\{\omega_5\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_3,\omega_5\},\{\omega_4,\omega_5\}$ 等事件是否发生不能确定。

（2）$\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4,\omega_5\},\varnothing,\Omega$ 等事件通过观察 $x$ 的取值一定能知道是否发生了。

2、（1）$\Omega=\{S,FS,FFS\cdots FF\cdots FS\cdots\}$

（2）$X(S)=1,X(FS)=2,\cdots,X(\underbrace{F\cdots FS}_{k-1个})=k$

3、$\Omega=\{(i,j)\mid i=1,2,\cdots 6,\ j=1,2,\cdots 6\}$

$X(i,j)=i+j,(i,j)\in\Omega\quad Y(i,j)=\max(i,j),(i,j)\in\Omega$

4、概率分布为：

$$X=\begin{cases}40,\text{出现正面}\\20,\text{出现反面}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1\ 0\text{出现正面}\\3\ 0\text{出现反面}\end{cases}$$

分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1 & x\ge 40\\ \frac{1}{2} & 20\le x<40\\ 0 & x<20\end{cases},\quad F_Y(x)=\begin{cases}1 & x\ge 30\\ \frac{1}{2} & 10\le x<30\\ 0 & x<10\end{cases}$$

图形，略。

5、由 $\sum_i P(x_i)=1$ 知

（1）$a\times 2+a\times 2^2+\cdots+a\times 2^{100}=1$

$a=\frac{1}{\sum_{i=1}^{100}2^i}=\frac{1}{2^{101}-2}$

（2）$\sum_{i=1}^{+\infty}2a^i=1$ 即 $2\times\lim_{n\to\infty}\frac{a(a-a^n)}{1-a}=1$。易知 $0<a<1$，故有

$2\times\frac{a}{1-a}=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$

6、由阶梯型函数的特点可知概率分布为

| $X$ | -5 | -2 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ |

7、概率分布如下

（1）

| $X$ | 1 | 2 | … | $k$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{3\times7}{10^2}$ | … | $\frac{3^{k-1}\times7}{10^k}$ | …… |

即 $P\{X=k\}=0.3^{k-1}\bullet0.7, k=1,2,\cdots$

（2）感觉这题有点问题

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{7}{120}$ | $\frac{1}{120}$ |

8、由概率分布可知

$P\{x>-3\}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$，$P\{|x|<3=P\{-3<x<3\}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$P\{|x+1|>2=P\{x>1或x<-3\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$

9、由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，即 $\int_0^1 f(x)dx=1$，$Ax^2|_0^1=1$，得 $A=1$

$P\{0.5<x\le0.8\}=x^2|_{0.5}^{0.8}=0.39$

10、（1）否，不符合单调性；

（2）否，不符合 $F(+\infty)=1$；

（3）是，符合分布函数的本征性质（见书 P40）。

可以这样定义

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x<0\\ 1 & x\ge0\end{cases}$$

11、（1）是，因为符合其本征性质。密度函数 $f(x)=F'(x)$，即

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）不是，因为 $\lim_{x\to1}F(x)=\frac{1}{2}\ne1$，不符合右连续性。不是理由.答案错

12、（1）即 $f(x)=\begin{cases}ae^{-x} & x\ge0\\ ae^{x} & x<0\end{cases}$。由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 得

$\int_{-\infty}^{0}ae^xdx+\int_0^{+\infty}ae^{-x}dx=1$ 即 $2\int_0^{+\infty}ae^{-x}dx=1\Rightarrow2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

故 $F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}e^{-x} & (x\ge 0)\\ \frac{1}{2}e^{x} & (x<0)\end{cases}$。

$P\{-1<x\le\frac{\sqrt{2}}{2}\}=F(\frac{\sqrt{2}}{2})-F(-1)=1-\frac{1}{2}(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}+e^{-1})$

$P\{\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\sqrt{2}\}=F(\sqrt{2})-F(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{-\sqrt{2}})$

$P\{x>1\}=1-F(1)=\frac{1}{2}e^{-1}$

（2）由 $\int_0^1 xdx+\int_1^a(2-x)dx=1$ 得 $\frac{1}{2}+2a-\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}=1$ 即 $a=2$

故 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1 & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$

故 $P\{-1<x\le\frac{\sqrt{2}}{2}\}=F(\frac{\sqrt{2}}{2})-F(-1)=\frac{1}{4}$

$P\{\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\sqrt{2}\}=F(\sqrt{2})-F(\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}-\frac{9}{4}$

$P\{x>1\}=1-F(1)=\frac{1}{2}$

13、证明：

等式左侧= $\int_{-\infty}^{u+x}f(t)dt+\int_{-\infty}^{u-x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{u+x}f(t)dt+\int_{u+x}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1$

得证。

## 练习 2-2

1、第 5 题（2）：

$EX=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=2\left[1\times\frac{1}{3}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$①

$\frac{1}{3}EX=2\left[1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$②

①−②，得 $\frac{2}{3}EX=2\times\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i-n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]=2\times\left[\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}-n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

当 $n\to+\infty$ 时，有 $\frac{2}{3}EX=2\times(\frac{1}{2}-0)\Rightarrow EX=\frac{3}{2}$

第 6 题： $EX=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=-5\times\frac{1}{5}-2\times\frac{1}{10}+0\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}$

2、10.37，0.0201

3、由题意知

$E(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^5\frac{1}{5}xdx=2.5$ 即 $\frac{1025-p}{p}=2.5\%$，得 $p=1000$ 即市场定价为 1000 元。

4、（1）证明：设组合收益率为$\rho$，则$\rho=\dfrac{X_0N_0+X_1N_1}{N_0P_0+N_1P_1}-1$

又设无风险资产收益率为$\rho_0$，风险资产为$\rho_1$，则$\rho_0=\dfrac{X_0}{P_0}-1$，$\rho_1=\dfrac{X_1}{P_1}-1$

$\rho=\dfrac{P_0\rho_0N_0+P_1\rho_1N_1}{P_0N_0+P_1N_1}$，代入$\rho_1$，$\rho_0$，得$\rho=\dfrac{X_0N_0+X_1N_1}{N_0P_0+N_1P_1}-1$得证。

（2）期望收益率为$\alpha_j\gamma_0+(1-\alpha_j)\mu$

方差为

$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\alpha_j\gamma_0+(1-\alpha_j)\mu_i-\alpha_j\gamma_0-(1-\alpha_j)\mu\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(1-\alpha_j)^2(\mu_i-\mu)^2=(1-\alpha_j)^2\sigma^2$ 标准差为$|1-\alpha_j|\sigma$。

（3）图见书 P260

5、证明：

$E(X-EX)^2=\int(x^2-2xEX+(EX)^2)f(x)dx$

$=\int x^2f(x)dx-2EX\int xf(x)dx+(EX)^2\int f(x)dx$

$=\int x^2f(x)dx-2(EX)^2+(EX)^2=EX^2-(EX)^2$得证。

6、2.31 证明：

$D(aX)=E(aX-EaX)^2=a^2EX^2+a^2(EX)^2-2a^2(EX)^2$

$=a^2(EX^2-(EX)^2)=a^2[EX^2-2(EX)^2+(EX)^2]=a^2E(X-EX)^2=a^2DX$

2.32 证明：

$E(X-C)^2=E(X^2-2CX+C^2)=C^2-2CEX+EX^2$

$=(C-EX)^2+EX^2-(EX)^2=(C-EX)^2+DX\geq DX$

即当$C=EX$时，$L(C)$最小，为$DX$。

2.33 证明：

$\because h(x)\geq\varepsilon$故$Eh(x)\geq\varepsilon$即$\dfrac{Eh(x)}{\varepsilon}\geq1$又$P\{h(x)\geq\varepsilon\}\leq1$，得证。

## 练习 2-3

1、服从二项分布，有

$P\left\{X=k\right\}=C_5^k\times0.6^k\times0.4^{5-k}(k=0,1,\ldots,5)$

2、服从二项分布：

$P\left\{X=k\right\}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\ldots,\mathrm{n})$

$D(X)=np(1-p)$，故

①当$D(X)=0$时，P=0 或 1

② $nP(1-p)=-n\left[\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right]$

故当$p=\dfrac{1}{2}$时，$D(X)$最大，为$\dfrac{n}{4}$

3、能出厂的概率为$0.7+0.3\times0.8=0.94$

不能出厂的概率为$0.3\times0.2=0.06$

(1)服从二项分布

$P\left\{X=k\right\}=C_n^k\times0.94^k\times0.06^{n-k}(k=0,1,\ldots,\mathrm{n})$

(2)将 k=n 代入上式，得概率为$0.94^n$

(3)设："至少两台不能出厂"为 A，则

$P(\overline{A}) = 0.96^n + C_n^{n-1} \times 0.94^{n-1} \times 0.06$

故 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.96^n - n \times 0.94^{n-1} \times 0.06$

⑷设不能出厂仪器数为 Y，则

$E(Y) = 0.06n$

$D(Y) = nP(1-P) = n \times 0.06 \times 0.94 = 0.0564n$

4、证明：由题意知，在 k+r 项独立重复试验中，前 k+r-1 次有 k 次失败，第 k+r 次成功，故概率分布为

$$P\{X=k\} = C_{k+r-1}^{k} p^{r-1}(1-p)^k \bullet p$$
$$= \binom{r+k-1}{k-1} p^r (1-p)^k (k=0,1,\ldots)$$

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k C_{k+r-1}^{k} p^r (1-p)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!} p^r (1-p)^k$$
$$= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{k=1}^{n} k \frac{(k+r-1)!}{k!r!} p^{r+1}(1-p)^{k-1}$$
$$= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{k=1}^{n} C_{k+r-1}^{r} p^r q^{k-1}$$
$$= \frac{r(1-p)}{p} \sum_{k=0}^{n} C_{r+k}^{r} p^r q^k$$
$$= \frac{r(1-p)}{p}$$

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_{k+n-1}^{k} p^r (1-p)^k$$

？？？EX2=之后未校对

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_{k+n-1}^{k} p^r (1-p)^k + \frac{r(1-p)}{p}$$
$$= \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} \sum_{k=2}^{n} k \frac{(k+r-1)!}{(r-2)!(r+1)!} p^{r+2}(1-p)^{k-2} + \frac{r(1-p)}{p}$$
$$= \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2} + \frac{r(1-p)}{p}$$

故 $D(X) = EX^2 - (EX)^2 == \dfrac{r(1-p)}{p^2}$ 得证。

5、服从几何分布：

$P\{X=k\} = (1-P)^k p(k=0,1,\ldots,\ n)$

$$E(X) = \frac{1}{1-p}$$

6、由题意知

$$\frac{\lambda!}{1!} e^{-\lambda} = 2 \times \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$$

得 $\lambda = 1$（$\lambda = 0$ 不符合泊松分布假设）

故 $EX = DX = \lambda = 1$

$EX^2 = \lambda^2 + \lambda = 2$

$$P\{X=3\} = \frac{1}{3!}e^{-1} = \frac{1}{6e}$$

7、（1） $\lambda = EX = np = 1$

即泊松分布为：

$$P\{X=k\} = \frac{e^{-1}}{k!}$$

二项分布为：

$$P\{X=k\} = C_{10}^{k} \times 0.1^{k} \times 0.9^{10-k}$$

列出两种分布列如下：

| K \ P | 泊松 | 二项 |
|---|---|---|
| 0 | 0.3679 | 0.3487 |
| 1 | 0.3679 | 0.3874 |
| 2 | 0.1839 | 0.1937 |
| 3 | 0.0613 | 0.0574 |
| 4 | 0.0153 | 0.0116 |
| 5 | 0.0031 | 0.015 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

（2）（3）（4）同理

此题提醒我们 n 足够大，$\lambda$ 足够小时，泊松分布才适合近似代替二项分布。

8、分别用两种概型表示，概率基本一致为 0.2642。

二项分布：

$$P\{X=k\} = C_{1000}^{k}(0.1\%)^{k}(1-0.1\%)^{1000-k}$$

$$\begin{aligned} P\{X \ge 2\} &= 1 - P\{X \le 1\} \\ &= 1-(1-0.1\%)^{1000} - 1000 \times (0.1\%)^{1} \times (1-0.1\%)^{999} \\ &= 0.2642 \end{aligned}$$

泊松分布：

$\lambda = np = 1$

$$P\{X=k\} = \frac{e^{-1}}{k!}$$

$$\begin{aligned} P\{X \ge 2\} &= 1 - P\{X \le 1\} \\ &= 1 - e^{-1} - e^{-1} \\ &= 0.2642 \end{aligned}$$

## 练习 2-4

1、考察均匀分布和二项分布

$$C_3^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.352$$

2、平均利润=期望收入-成本

$=500\times8000-40000\times0.01\times8000$

$=800000$（元）

3、指数分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

即 $F(X)=\begin{cases}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

得 $F(X)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty} xd(e^{-\lambda x})$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$$

$$=0-\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}d(-\lambda x)=\frac{1}{\lambda}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx=\int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}dx$$

$$=0+\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=0+\frac{2}{\lambda}EX$$

$$=0+\frac{2}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda}$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$DX=EX^2-E(X)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

4、即求证指数分布的“无亿忆性”

证明：$P\{X>r+s|X>s\}$

$$=\frac{P\{X>r+s\}}{P\{X>s\}}$$

$$=\frac{1-P\{x\le r+s\}}{1-P\{x\le s\}}$$

$$=\frac{1-\left[1-e^{-\lambda(r+s)}\right]}{1-(1-e^{-\lambda s})}$$

$$=e^{-\lambda r}$$

又 $P\{x>r\}=1-P\{x\le r\}=1-(1-e^{-\lambda r})=e^{-\lambda r}$

得证。

5、其分布函数为 $F(X)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{1000}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

故一个元件寿命不超过 1000h 的概率为

$P\{x\le 100\}=F(1000)=1-\dfrac{1}{e}$

故超过 1000h 概率为 $1-\left(1-\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}$

系统寿命超过 1000h 的概率为

$$\left(\frac{1}{e}\right)^3+C_3^2\times\left(\frac{1}{e}\right)^2\times(1-\frac{1}{e})=\frac{3}{e^2}-\frac{2}{e^3}$$

6、 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\ dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu+\mu)f(x)\ dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\mu f(x)\ dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx+\mu$$

令 $p=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，则 $dp=\dfrac{dx}{\sigma}$，

代入 $\mathrm{EX}=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{p}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{p^2}{2}}\sigma dp+\mu$

$=0+u=u$　　说明：奇对称函数的积分=0

$DX=E(X-\mu)^2$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(X-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2p^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{p^2}{2}}dp$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}pd\left(e^{-\frac{p^2}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-pe^{-\frac{p^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{p^2}{2}}dp\right)$$

$=\dfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\times\left(0+\sqrt{2\pi}\right)$　　说明：利用到了 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

$=\sigma^2$

7、先求一次实验误差绝对值不大于 19.6 的概率为

$P\{|X|\le 19.6\}=\Phi_0\left(\frac{19.6-0}{10}\right)-\Phi_0\left(\frac{-19.6}{10}\right)$

$=2\Phi_0(1.96)-1$

查表知，$\Phi_0(1.96)=0.975$

故 $P\{|x|\le 19.6\}=0.975$

$P\{|x|>19.6\}=1-0.95=0.05$

$\alpha=1-C_{100}^{0}0.975^{100}0.05^{0}-C_{100}^{1}0.975^{99}0.05^{1}-C_{100}^{2}0.975^{98}0.05^{2}$

$EX=100\times 0.05=5\Rightarrow\lambda=5$

即服从泊松分布 $P\{Y=k\}=\frac{5^k}{k!}e^{-5}$

$P\{Y\le 2\}=\sum_{k=0}^{2}\frac{5^k}{k!}e^{-5}=18.5e^{-5}$

所求为$1-P\{Y\le z\}=1-18.5e^{-5}$

8、(1) $P\{X\le 220\}=\Phi_0\left(\frac{200-220}{25}\right)$

$=1-\Phi_0(0.8)$(查表)

$=1-0.7881=0.2119$

$P\{X>240\}=1-P\{X\le 240\}$

$=1-\Phi_0\left(\frac{240-220}{25}\right)$

$=1-\Phi_0(0.8)$

$=0.2119$

故 $P\{220<X<240\}=1-2\times 0.2119=0.5762$

故损坏的概率为$0.2119\times 0.1+0.5762\times 0.01+0.2119\times 0.2$

$=0.0693$

(2)条件概率为

$\frac{0.5762\times 0.01}{0.0693}=0.0831$

9、设所求最少成绩为$x_0$，

(2)$1-P\{X\le x_0\}=5\%$

即 $P\{X\le x_0\}=0.95$

有 $\Phi_0\left(\frac{x_0-70}{10}\right)=0.95$

查表得 0.95 对应于 1.64 和 1.65 之间，故取 1.645

即 $\frac{x_0-70}{10}=1.645$，$x_0=86.45$

所求为 86.45 分

## 练习 2-5

1、

| X | 100π | 121π | 144π | 169π |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |

| Y | 20π | 22π | 24π | 26π |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |

2、由题意 x 分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}1,x>b\\ \dfrac{x-a}{b-a},a\le x\le b\\ 0,x<a\end{cases}$$

设 $Y=\alpha X+\beta$，分布函数为 $F_Y(y)$，

则当 $x>b$ 即 $y>b\alpha+\beta$ 时， $F_Y(y)=1$，

当 $a\le x\le b$ 即 $a\alpha+\beta\le y\le b\alpha+\beta$ 时，

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\alpha X+\beta\le y\}=P\{X\le\dfrac{y-\beta}{\alpha}\}=F_X(\dfrac{y-\beta}{\alpha})=\dfrac{y-\beta-a\alpha}{(b-a)\alpha}$ 当 $x<a$ 即 $y<b\alpha+\beta$ 时， $F_Y(y)=0$，

即 $F_Y(y)=\begin{cases}1,y>b\alpha+\beta\\ \dfrac{y-a\alpha-\beta}{(b-a)\alpha},a\alpha+\beta\le y\le b\alpha+\beta\\ 0,y<b\alpha+\beta\end{cases}$，得证。

3、由题意， $X$ 分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1,x>1\\ \dfrac{x-(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{x+1}{2},-1\le x\le 1\\ 0,x<-1\end{cases}$

设 $Y=X^2$，分布函数为 $F_Y(y)$，

则当 $x>1$ 即 $y=x^2>1$ 时， $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=1-0=1$

当 $-1\le x\le 1$ 即 $0\le y\le 1$ 时，

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=\sqrt{y}$ 当 $x<-1$ 即 $y>1$ 时， $F_Y(y)=0$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}1,y>1\\ \sqrt{y},0\le y\le 1\\ 0,y<0\end{cases}$

求导得密度函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0,\text{其他}\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}},0\le y\le 1\end{cases}$

4、即 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x},x\ge 0\\ 0,x<0\end{cases}$

当 $x\ge 0$ 即 $y\ge\beta$ 时，

$F_Y(y)=P\{\alpha X+\beta\le y\}=P\left\{X\le\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right\}=F_x\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)=1-e^{-\frac{y-\beta}{\alpha}}$ 当 $x<0$ 即 $y<\beta$ 时，

$F_Y(y)=0$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{\alpha}(y-\beta)}, y\geq\beta \\ 0, y<\beta\end{cases}$

5、设直径为 $X$，则

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\leq x\leq b \\ 0,其他\end{cases}$$

设体积为 $Y$，则 $Y=\dfrac{\pi X^3}{6}$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi X^3}{6}\frac{1}{b-a}dx$$ ？？？此步

$$=\frac{\pi\left(b^4-a^4\right)}{24(b-a)}=\frac{\pi}{24}(b+a)\left(a^2+b^2\right)$$

6、证明：当 $x>0$ 即 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\left\{\frac{2}{\theta}X\leq y\right\}$$

$$=F_X\left(\frac{\theta}{2}y\right)=\int_0^{\frac{\theta}{2}y}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$=-e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{\frac{\theta y}{2}}=1-e^{-\frac{y}{2}}$$

当 $x\leq 0$ 即 $y\leq 0$ 时，$F_Y(y)=0$

对 $F_Y(y)$ 求导得其密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0 \\ 0, y\leq 0\end{cases}$

得证。

7、由题意知，$X$ 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, x\geq 0 \\ 0, x<0\end{cases}$

故 $x\geq 0$ 即 $0\leq y<1$ 时，

$$F_Y(y)=\left\{1-e^{-2X}\leq y\right\}=P\left\{X\leq-\frac{\ln(1-y)}{2}\right\}=y$$

当 $y\geq 1$ 时，$F_Y(y)=1$

当 $x<0$ 即 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

即 $Y$ 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}1, y\geq 1 \\ y, 0\leq y<1 \\ 0, y<0\end{cases}$

求导得密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, 0\leq y\leq 1 \\ 0,其他\end{cases}$

8、全题重弄！由题意可设$Y=\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$

又知收益率 $R=\ln X-\ln10, \ln X=r+\ln10$

则其分布函数为$F_R(r)=P\{r\le x\}=P\{\ln X-\ln10\le x\}=P\{\ln X\le x+\ln10\}$

即 R 服从正态分布

又$Y\sim N(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e\frac{(\ln x-\mu)^2}{-2\sigma^2}$

故$R=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e\frac{(r+\ln10-\mu)^2}{-2\sigma^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e\frac{[r-(\mu-\ln10)]^2}{-2\sigma^2}$

$=N(\mu-\ln10,\sigma^2)$

又$\begin{cases}EX=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\\ DX=e^{\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)\end{cases}$

可得$\begin{cases}\mu-\ln10=\ln\frac{45}{2\sqrt{229}}\\ \sigma^2=\ln\frac{229}{225}\end{cases}$

即$r\sim N(\ln\frac{45}{2\sqrt{229}},\ln\frac{229}{225})$

9、证明：当$y>0$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{\sqrt{X}\le y\right\}=P\left\{X\le y^2\right\}=F_X(y^2)$

当$y\le0$时，$X$不存在即$F_Y(y)=0$

即$F_Y(y)=\begin{cases}F_X(y^2), y>0\\ 0, y\le0\end{cases}$

求导$F_X(y^2)=\int_0^{+\infty}f(y^2)dy^2=\int_0^{+\infty}2yf(y^2)dy$

得 $f_Y(y)=\begin{cases}2yf(y^2), y>0\\ 0, y\le0\end{cases}$

10、证明：当$a>0$时，

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{aX+b\le y\}=P\left\{X\le\frac{y-b}{a}\right\}=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$又知

$\left[F_X(x)\right]'=f_X(x)$，故

$f_Y(y)=\left[F_Y(y)\right]'=\frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

当$a<0$时，

$F_Y(y)=P\{aX+b\le y\}=P\left\{X\ge\frac{y-b}{a}\right\}=1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

求导得$f_Y(y)=[F_Y(y)]'=-\frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$

综上得证。

# 习题二

1、如图

| X | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| P | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

2、第一种情况如下：

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{125}$ | $\frac{7}{125}$ | $\frac{19}{125}$ | $\frac{37}{125}$ | $\frac{61}{125}$ |

第二种情况如下：

| X | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ |

3、证明：

设 X 密度函数为 $f(x)$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$，易知 $F(x)$ 可导且连续，

由拉格朗日中值定理得存在 $\varepsilon \in [x,a)$

使 $F(x+a)-F(x)=f(\varepsilon)a$

故原式左侧= $a\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon)d\varepsilon = a\times 1 = a$ $p^2(1-p)$

4、证明：

要使在接收之前启动 k 次，则第 k 次和（k-1）次成功，（k-2）次失败，即 $p^2(1-p)$

设前（k-3）次没有被接收为 A，则 $\overline{A}$ 表示“被接收之前需要启动 2、3、4...或（k-3）次”，即 $P(A)=\sum_{i=1}^{k-3} p_i$

$$P(\overline{A})=1-\sum_{i=1}^{k-3} p_i$$

又各事件相互独立，

故 $p_k=\left(1-\sum_{i=1}^{k-3} p_i\right)(1-p)p^2$

5、（1）$0.9^{10}=0.349$

（2）$C_{10}^1\times 0.1\times 0.9^9+C_{10}^2\times 0.1^2\times 0.9^8=0.581$

（3）$0.9^5=0.950$

（4）$0.581\times 0.590=0.343$

（5）$0.349\times 0.343=0.692$

6、由 $\xi$ 服从指数分布，故 $E\xi=\frac{1}{\lambda}=1000$ $\quad \lambda=\frac{1}{1000}$

（1）$f_\eta(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$

（2）易知 $X=x$ 时，要满足有 1 个电子管寿命为 x，概率为 $C_n^1\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}$

其余（n-1）个寿命不大于 x，由 $f_\eta(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{1000}},x\ge 0\\ 0,x<0\end{cases}$

可知概率为$\left(1-e^{-\frac{x}{1000}}\right)^{n-1}$

综之 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}\left(1-e^{-\frac{x}{1000}}\right)^{n-1},x\ge 0\\ 0,x<0\end{cases}$

（3）易知$Y=x$时，满足有 1 个电子管寿命为 x，

概率为$C_n^1\dfrac{1}{100}e^{-\frac{nx}{1000}}$，

其余寿命不小于 x，概率为$1-F_\eta(x)=e^{-\frac{x}{1000}}$

故 $f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{1000}e^{-\frac{nx}{1000}},x\ge 0\\ 0,x<0\end{cases}$

7、设 x 的分布函数为$F(x)$，则$F(50)=\Phi_0\left(\dfrac{50-40}{\sigma}\right)=0.75$

查表得

$\dfrac{50-40}{\sigma}=0.675$

$\sigma=14.815$

设进货量为 y，则需求量为 x，则损失概率分布为$f(y)=\begin{cases}70(x-y),y\le x\\ 100(y-x),y>x\end{cases}$

损失可表示为$Q(y)=\int_y^{+\infty}70(x-y)f(x)dx+\int_0^y 100(y-x)f(x)dx$

$=70\int_y^{+\infty}xf(x)dx-70\int_y^{+\infty}yf(x)dx+100\int_0^y yf(x)dx-100\int_0^y xf(x)dx$对 y 求导，令导数为 0 时$Q(y)$最小，得

$\dfrac{\partial Q(y)}{\partial y}=-70yf(y)-70\int_y^{+\infty}f(x)dx+70yf(y)+100\int_0^y f(x)dx+100yf(y)-100yf(y)$

$=-70\int_y^{+\infty}f(x)dx+100\int_0^y f(x)$

$=-70\left(1-\int_0^y f(x)dx\right)+100\int_0^y f(x)dx$

即$170\int_0^y f(x)dx=70$

$\int_0^y f(x)dx=\dfrac{7}{17}$

即 $\int_{-\infty}^{y} f(x)dx = \frac{7}{17}$

得 $\Phi_0\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{7}{17} < \frac{1}{2}$ 即 $y < \mu$

查表得 $\frac{y-\mu}{\sigma} = 0.22$，即 $\frac{-y_0+40}{14.815} = 0.22$

得 $y \approx 37$

故最优进货量为 37。

8、（1）由题意得 $Y = \begin{cases} 2, X \ge 2 \\ x, 0 \le X < 2 \\ \text{不存在，X<0} \end{cases}$

又 $\mathrm{F}_x(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

故 $\mathrm{F}_Y(y) = \begin{cases} 1, y \ge 2 \\ 1-e^{-\lambda y}, 0 \le y < 2 \\ 0, y < 0 \end{cases}$

（2）$P\{Y=2\} = P\{X \ge 2\} = 1-P\{X \le 2\} = 1-F_x(2) = e^{-2\lambda}$

（3）不连续，不符合右连续性的要求

（4）$P = \frac{P\{Y=2, X>3\}}{P\{Y=2\}} = \frac{P\{X>3\}}{P\{Y=2\}} = \frac{1-P\{X \le 3\}}{P\{Y=2\}} = \frac{e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-\lambda}$

9、如下表

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

10、（1）$C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \ (m=0,1,2...)$

（2）由题意知 $P\{X=n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \ (n=0,1,2...)$

又易知 $EY = p \times EX = p\lambda \ (m=0,1,2...)$

故 Y 服从泊松分布 $P\{Y=m\} = \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p} \ (m=0,1,2...)$

（3）$EY = p\lambda$

11、$P\{S_n = su^k d^{n-k}\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$ES_n = S\left[up + d(1-p)\right]^n$

12、空

13、（1）证明：

$E\left[Ef(x) - f(x)\right]^2$

$= E\left\{\left[Ef(x)\right]^2 - 2Ef(x)f(x) + \left[f(x)\right]^2\right\}$

$= \left[Ef(x)\right]^2 - 2Ef(x)Ef(x) + E\left[f(x)\right]^2$

$=\left[Ef(x)^2\right]-\left[Ef(x)\right]^2\geq 0$

即$\left[Ef(x)\right]^2\leq\left[Ef(x)^2\right]$

得证。

（2）空

## 练习 3-1

1、证明：不等式左侧$=P\{X\leq x_2,Y\leq y_2\}-P\{X\leq x_1Y\leq y_2\}$

$-(P\{X\leq x_2,Y\leq y_1\}-P\{X\leq x_1,Y\leq y_1\})=P\{x_1<X\leq x_2,Y\leq y_2\}$

$-P\{x_1<X\leq x_{2,}Y\leq y_1\}$

$=P\{x_1<X\leq x_2,y_1<Y\leq y_2\}\geq 0$

得证。

2、如下表

| x1 \ x2 | 0 | 1 | $p_i^{x_1}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 1 | $\frac{4}{5}$ | 0 | $\frac{4}{5}$ |
| $p_j^{x_2}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

3、分布为

| $x_1$ \ $x_2$ | -1 | 0 | 1 | $p_i^{x_1}$ |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| $p_j^{x_2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

$\therefore P\{X_1=X_2\}$=0

4、（1）$(x_1,x_2)$分布及边缘如下表

| $X_1$ \ $X_2$ | 0 | 1 | $p_i^{x_2}$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | $\frac{1}{56}$ | $\frac{5}{56}$ | $\frac{3}{28}$ |
| 1 | $\frac{5}{28}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{15}{28}$ |
| 2 | $\frac{5}{28}$ | $\frac{5}{28}$ | $\frac{5}{14}$ |
| $p_j^{x_1}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{8}$ | 1 |

（2） $P\{X_1=0, X_2\neq 0\}$

$=P\{X_1=0, X_2=1\}+P\{X_1=0, X_2=2\}$

$=\frac{5}{28}+\frac{5}{28}=\frac{5}{14}$

$P\{X_1=X_2\}$

$=P\{X_1=0, X_2=0\}+P\{X_1=1, X_2=1\}$

$=\frac{1}{56}+\frac{5}{14}=\frac{3}{8}$

$P\{X_1, X_2=0\}$

$=1-P\{X_1X_2\neq 0\}$

$1-P\{X_1=1, X_2=1\}-P\{X_1=1, X_2=2\}$

$1-\frac{5}{14}-\frac{5}{28}=\frac{13}{28}$

5、(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$得

$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}k_1e^{-3x-4y}dx$

$=\int_0^{+\infty}\frac{k_1}{3}e^{-4y}dy$

$=\frac{k_1}{12}=1\Rightarrow k_1=12$

同理，

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)dxdy=1$得

$\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x}k_2e^{-3x-4y}dy$

$=\int_0^{+\infty}\frac{k_2e^{-3x}-k_2e^{-7x}}{4}dx$

$=\frac{k_2}{12}-\frac{k_2}{28}=\frac{k_2}{21}=1\Rightarrow k_2=21$

（2）对于 $f(x,y)$

$x>0$时

$$f_{X_1}(x)=\int_0^{+\infty}12e^{-3x-4y}dy=3e^{-3x}$$

$x\le 0$时，$f_{X_1}(x)=0$

即$f_{X_1}(x)=\begin{cases}3e^{-3x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

同理，

$$f_{Y_1}(y)=\begin{cases}4e^{-4y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

对于

（2）空

$$g_{x_2}(x)=\int_0^x k_2e^{-3x-4y}$$

$$=\frac{4}{21}(e^{-3x}-e^{-7x})$$

$x\le 0$时，$g_{x_2}(x)=0$

$$g_{x_2}(x)=\begin{cases}\frac{4}{21}(e^{-3x}-e^{-7x})x>0\\ 0x\le 0\end{cases}$$

$y>0$时，

$$g_{y_2}(y)=\int_y^{+\infty}k_2e^{-3x-4y}dx=7e^{-7y}$$

$y\le 0$时，$g_{y_2}(y)=0$

即$g_{x_2}(x)=\begin{cases}7e^{-7y}y>0\\ 0y\le 0\end{cases}$

6、（1）G（s）=2,又服从均匀分布

故 f(x,y)=$\begin{cases}\frac{1}{2}(x,y)\in G\\ 0\text{其他}\end{cases}$

当x<0或y<0时，F（x, y)=0

当x<0或y<0$\in G$时

$$\mathrm{F}(x,y)=\int_0^x\int_0^y\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}xy$$

当$x>2,0\le y\le 1$

$$\mathrm{F}(x,y)=\int_0^x\int_0^1\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}x$$

当$0 \le x < 2, 0 \le y \le 1$时

$F(x,y) = \int_0^y \int_0^2 \frac{1}{2} dydx = y$

当$x > 2, y > 1$时

$F(x,y) = 1$

故分布函数为

$$F(x,y)\begin{cases} 0 & x < 0 \text{或} y < 0 \\ \frac{1}{2}xy & (x,y) \in G \\ \frac{1}{2}x & 0 \le x < 2, y > 1 \\ y & x > 2, 0 \le y \le 1 \\ 1 & x > 2, y > 1 \end{cases}$$

(2)$0 \le x \le 2$时

$f_x(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$

$x < 0$或$x > 2$时

$f_x(x) = 0$

即$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

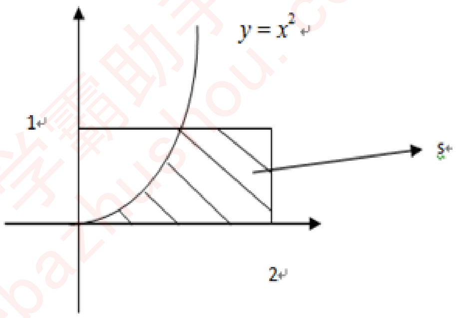
同理$f_y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

分布函数为

$$\mathrm{F}_x(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 2 \\ \frac{x}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{F}_y(y)\begin{cases} 1 & y > 1 \\ y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

(3) 如图




$$p\{Y<X^2\}=\frac{s}{s(G)}=\frac{1+\int_0^1\left[\int_0^{x^2}dy\right]dx}{2}=\frac{2}{3}$$

7、(1)

$s(G)=|x|\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,又服从均匀分布

故$f(x,y)=\begin{cases}2(x,y)\in G\\0其他\end{cases}$

(2)

$0\le x\le 1$时,

$$f_x(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x)$$

$x>1$或$x<0$时

$f_X(x)=0$

$$f_X(x)=\begin{cases}2(1-x)0\le x\le 1\\0其他\end{cases}$$

$0\le y\le 1$时,

$$f_y(y)=\int_0^y 2dx=2y$$

$$f_y(y)=\begin{cases}2y0\le y\le 1\\0其他\end{cases}$$

8、易知 $X_1,X_2$ 相互独立，由

$$p\{X_1\le 3,X_2\le 3\}=p\{X_1\le 3\}p\{X_2\le 3\}=\frac{9}{16}$$

得$p\{X_1\le 3\}=p\{X_2\le 3\}=\frac{3}{4}$

故$p\{X_1>3\}=p\{X_2>3\}=\frac{1}{4}$

$$p\{X_1>3,X_2>3\}=p\{X_1>3\},p\{X_2>3\}=\frac{1}{16}$$

9、由几何概型易知为$1-\frac{(T-t)^2}{T^2}$(与书例1.18（P19）类似)

10 若 $(x,y)$服从二元正态分布，则有

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\theta_1\theta_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}[\frac{(x-u_1)}{\theta_1^2}-2\rho\frac{(x-u_1)(x-u_2)}{\theta_1\theta_2}+\frac{(y-u_2)^2}{\theta_2^2}]}$$

$$\varphi_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_1}e^{-\frac{(x-u_1)}{\theta_1^2}}$$

$$\varphi_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_1}e^{-\frac{(y-u_2)^2}{\theta_2^2}}$$

因为$\varphi_x(x)$和$\varphi_y(y)$均无参数$\rho$，故二元分布的函数不能有密度函数确定

11、不一定

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}(1+\sin x\sin y)}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}(1+\sin x\sin y)}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}\sin x\sin y}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy(\text{泊松积分})$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

同理 $f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}$

即 x~N(0,1), Y~N(0,1)

但$(X,Y)$不服从正态分布

## 练习 3-2

1、（1） $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

$$F(x,y)=\begin{cases}0,x<0\text{或}y<1\\ \frac{x(y-1)}{2},0\le x\le 2,1\le y\le 2\\ \frac{x}{2},0\le x\le 2,y>2\\ y-1,x>2,1\le y\le 2\\ 1,x>2,y>2\end{cases}$$

（2） $F_\xi(x)=P\left\{X^2\le x\right\}=P\left\{-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x}\right\}$

$=F\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2}$,此时 $0\le x\le 4$

故 $F_\xi(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2}, 0\le x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$

同理，$F_\xi(y)=P\left\{Y^2\le y\right\}=\sqrt{y}-1, 1\le y\le 4$

故 $F_\xi(y)=\begin{cases}0, y<1\\ \sqrt{y}-1, 1\le y\le 4\\ 1, y>4\end{cases}$

故 $G(x,y)=\begin{cases}0, x<0\text{或}y<1\\ \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{y}-1)}{2}, 0\le x\le 2, 1\le y\le 4\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2}, 0\le x\le 4, y>4\\ \sqrt{y}-1, x>4, 1\le y\le 4\\ 1, x>4, y>4\\ \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}-1\right)}{2}, 0\le x\le 4, 1\le y\le 4\end{cases}$

（3）$P\left\{X<1, Y>\dfrac{3}{2}\right\}$

$=P\{X<1\}\times P\left\{Y>\dfrac{3}{2}\right\}$

$=P\{X<1\}\times\left\{1-P\left\{Y<\dfrac{3}{2}\right\}\right\}$

$=F_X(1)\left[1-F_Y(\dfrac{3}{2})\right]=\dfrac{1}{4}$

2、证明：$P\left\{x_1\le X\le x_2\right\}\bullet P\left\{y_1\le Y\le y_2\right\}$

$=\left[F(x_2)-F(x_1)\right]\left[F(y_2)-F(y_1)\right]$

$=F(x_2)F(y_2)-F(x_2)F(y_1)-F(x_1)F(y_2)+F(x_1)F(y_1)$

由 $X, Y$ 独立，有原式 $=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$

$=P\left\{x_1\le X\le x_2, y_1\le Y\le y_2\right\}$

即 $P\left\{x_1\le X\le x_2\right\}\bullet P\left\{y_1\le Y\le y_2\right\}=P\left\{x_1\le X\le x_2, y_1\le Y\le y_2\right\}$

得证。

3、$P\left\{X_1=0 \middle| X_2=1\right\}=\dfrac{P\left\{X_1=0,\ X_2=1\right\}}{P\left\{X=1\right\}}=\dfrac{\frac{5}{28}}{\frac{15}{28}}=\dfrac{1}{3}$

$$P\left\{X_1=1 \mid X_2=1\right\}=\frac{P\left\{X_1=1,\ X_2=1\right\}}{P\{X=1\}}=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{15}{28}}=\frac{2}{3}$$

4、（1） $p_{ij}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_i \mid X=x_i\}$

$$=p_i^X p_{j|i}(i=1,2\ldots,j=1,2\ldots)$$

（2） $P_j^Y=\sum_i p_{ij}=\sum_i p_i^X p_{j|i}(i=1,2\ldots,j=1,2\ldots)$

（3） $p_i \mid j=\frac{p_{ij}}{P_j^Y}=\frac{p_i^X p_{j|i}}{\sum_i p_i^X p_{j|i}}(i=1,2\ldots,j=1,2\ldots)$

5、（1） $p_{11}=\frac{1}{4}, p_{12}=0, p_{13}=\frac{1}{4}, p_{22}=\frac{1}{2}$

（2） $p^X p^Y=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\neq p_{11}=\frac{1}{4}$，故不独立

6、自左向右，自上而下，分别填$\frac{1}{24},\frac{1}{12},\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{3},1$

（待定）7、证明:

必要性：由 $X,Y$ 相互独立得 $p_{ij}=p_i^X p_j^Y$

$$\text{故}\left(p_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{cases} p_{x_1}p_{y_1}p_{x_1}p_{y_2}\cdots\cdots p_{x_1}p_{y_n} \\ p_{x_2}p_{y_1}\cdots\cdot \\ \vdots \\ p_{x_m}p_{y_1}\cdots\cdots p_{x_m}p_{y_n} \end{cases}$$

$$=p_{x_1}p_{x_2}\cdots\cdot p_{x_m}\begin{Bmatrix} p_{y_1},p_{y_2},\cdots\cdot,p_{y_n} \\ \vdots \\ p_{y_1},p_{y_2},\cdots\cdot,p_{y_n} \end{Bmatrix}$$

$$=p_{x_1}p_{x_2}\cdots\cdot p_{x_m}p_{y_1}p_{y_2}\cdots\cdot p_{y_n}\begin{Bmatrix} 1,0,\ldots,0 \\ 0 \\ 1,\cdots\cdots 0 \end{Bmatrix}\text{即秩为 1}$$

充分性：由 $\left(p_{ij}\right)_{\max}$ 秩为 1，设 $p_{11}=\alpha$

$$\text{故其可表示为}\begin{Bmatrix} \alpha,k_1\alpha,k_2\alpha\cdots\cdot,k_{n-1}\alpha \\ l_1\alpha,k_1l_1\alpha \\ \vdots \\ l_{m-1}\alpha,k_1l_{m-1}\alpha,\cdots\cdot,k_{n-1}l_{m-1}\alpha \end{Bmatrix}$$

又设 $P\{x=x_1\}=\sum_{j=1}^{n}p_1 j=\alpha\left(1+k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}\right)=\alpha\beta$

$$P\{Y=y_1\}=\sum_{i=1}^{n}p_{i1}=\alpha\left(1+l_1+l_2+\ldots+l_{n-1}\right)=\alpha\delta$$

又 $\sum_{i=1}^{n} P\{x=x_i\}=1=\alpha(1+k_1+k_2+\ldots+k_{n-1})$

$+l_1\alpha(1+k_1+k_2+\ldots+k_{n-1})+\ldots+l_{n-1}\alpha(1+k_1+k_2+\ldots+k_{n-1})$

$=\alpha\beta(1+l_1+l_2+\ldots+l_{n-1})=\alpha\beta\delta$

故 $P\{x=x_1\}P\{Y=y_1\}=\alpha^2\beta\delta=\alpha\cdot 1=\alpha=p_{11}$

同理可得 $P\{x=x_i\}P\{Y=y_i\}=p_{ij}$

即 X、Y 独立，

得证。

8、事件点数为 $6\times 6=36$，

有实根时 $B^2-4C\geq 0$，有 19 组 B、C 组合满足，故概率为 $\frac{19}{36}$

同理，有重根时，满足 $B^2-4C=0$ 的有 2 组，故概率为 $\frac{1}{18}$，满足。

9、（1） $f_{X_1|Y_1}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_{Y_1}(y)}$

故 $x\geq 0$ 时，$f_{X_1|Y_1}(x|y)=\frac{12e^{-3x-4y}}{4e^{-4y}}=3e^{-3x}$

$x<0$ 时，为 0。

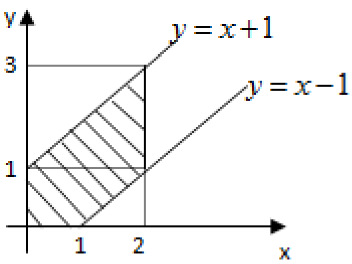
综之 $f_{X_1|Y_1}(x|y)=\begin{cases}3e^{-3x},x\geq 0\\0,x<0\end{cases}$

同理 $f_{Y_1|X_1}(y|x)=\begin{cases}4e^{-4y},y\geq 0\\0,y<0\end{cases}$

$g_{X_2|Y_2}(x|y)=\begin{cases}3e^{-3x+3y},x\geq y\\0,x<y\end{cases},(y>0)$

$g_{Y_2|X_2}(y|x)=\begin{cases}4\frac{e^{-4y}}{1-e^{-4x}},0<y\leq x\\0,其他\end{cases},(x>0)$

10、D 如下图阴影部分：




$S_D=\frac{7}{2}$，又 $(X,Y)$ 服从均匀分布，故 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{7},(x,y)\in D\\0,其他\end{cases}$

当 $0\leq x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{x+1}\frac{2}{7}dy=\frac{2}{7}(x+1)$

当$1\le x<2$时，$f_X(x)=\int_{x-1}^{x+1}\frac{2}{7}dy=\frac{4}{7}$

$x<0或x>2$时，$f_X(x)=0$，又 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

故当$0\le x<1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}(x+1)}=\frac{1}{(x+1)}$

当$1\le x<2$时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}}=\frac{1}{2}$

$x<0或x>2$时，为 0

综之，$0\le x<1$时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1},0\le y<x+1\\ 0,其他\end{cases}$

$1\le x<2$时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2},x-1\le y<x+1\\ 0,其他\end{cases}$

同理可得，$0\le y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{y+1},0\le x<y+1\\ 0,其他\end{cases}$

$1\le y<3$时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{3-y},y-1\le x<2\\ 0,其他\end{cases}$

11、设 D 面积为$S_D$，由$(X,Y)$均匀分布，则 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D},(x,y)\in D\\ 0,其他\end{cases}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{1}{S_D}dy=\frac{\psi(x)-\varphi(x)}{S_D}$

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\psi(x)-\varphi(x)}$

即 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{\psi(x)-\varphi(x)},\varphi(x)\le y\le\psi(x)\\ 0,其他\end{cases}$

即服从$(\varphi(x),\psi(x))$上的均匀分布，

同理可证 $f_{X|Y}(x|y)$服从$(a,b)$上的均匀分布，得证。（不通？）

12、（1） $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$

（2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$

（3） $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx}$

13、易知 $f_{X_1}(x)f_{Y_1}(y)=f(x,y)$

故 $X_1,Y_1$ 独立，

但 $x>y>0$ 时， $g_{X_2}(x)g_{Y_2}(y)=\dfrac{21}{4}\left(e^{-3x}-e^{-7x}\right)\cdot 7e^{-7y}$

$$\neq 21e^{-3x-4y}=g(x,y)$$

故 $X_2,Y_2$ 不独立。

14、易知 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，故不独立。

15、易知 $f_X(x)=\begin{cases}1,0\le x\le 1\\0,其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$，

又 $X,Y$ 独立，故 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},0\le x<1\\0,其他\end{cases}$

## 练习 3-3

1、（1） $\xi$ 可能取值为 0,1,2

$P\{\xi=0\}=P\{x+y=0\}=P\{x=0,y=0\}=\dfrac{1}{9}$

$P\{\xi=1\}=P\{x=0,y=1\}+P\{x=1,y=0\}=\dfrac{4}{9}$

$P\{\xi=2\}=1-P\{\xi=0\}-P\{\xi=1\}=\dfrac{4}{9}$

故 $\varphi$ 分布为

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ |

同理 $\eta$ 分布为

| $\eta$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

（2）如下表

| $\eta$ \ $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -2 | 0 | 0 | $\frac{1}{9}$ |
| -1 | 0 | $\frac{2}{9}$ | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{9}$ | 0 | $\frac{2}{9}$ |
| 1 | 0 | $\frac{2}{9}$ | 0 |
| 2 | 0 | 0 | $\frac{1}{9}$ |

2、如下表

| $\varphi$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

（待定）3、证明：用数列归纳法

①当 n=1 时，显然成立。

②假设 n=t($t\geq 2$)时成立，即 $\sum_{i=1}^{t}X_i \sim P(\sum_{i=1}^{t}\lambda_i)$

n=t+1 时，

$$p\{\sum_{i=1}^{t}X_i=k\}=p\{\sum_{i=1}^{t}\lambda_i+x_{t+1}=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{k}p\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=q,x_{t+1}=k-q\}$$

$$=\sum_{k=0}^{k}p\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=q\right\}.p\left\{x_{t+1}=k-q\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{k}\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=q\right\}^q}{q!}e^{\sum_{i=1}^{t}\lambda_i}\frac{\lambda_{t+1}^{\ k-q}}{(k-q)!}e^{\lambda_{t+1}}$$

$$=e^{-\sum_{i=1}^{t+1}\lambda_i}\frac{\left(-\sum_{i=1}^{t+1}\lambda_i\right)^k}{k!}$$

由①②得证

4、

$$X_1\sim f_{X_1}(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}x\geq 0\\ 0x<0\end{cases}\quad X_2\sim f_{X_2}(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}x\geq 0\\ 0x<0\end{cases}$$

令 $Z=X_1+X_2$，由卷积公式，有

$$f_z(\mathrm{z})=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{x_1}(x)f_{x_2}(\mathrm{z}-x)\ \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^z\lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda(z-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^z\lambda^2e^{-\lambda z}\mathrm{d}x$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda z}\cdot z$$

$$即f_Z(\mathrm{z})=\begin{cases}\lambda^2e^{-\lambda z}\cdot z,z\geq 0\\ 0,z<0\end{cases}$$

5、由题意知 $X_1$、$X_2$ 服从 $\sigma_1^{\ 2}=3$，$\sigma_2^{\ 2}=1$

$\rho=0$，$\mu_1=4$，$\mu_2=2$ 的二元正态分布

故 $X_1\sim$ N（4,3），$X_2\sim$ N（2,1）

又易知$X=\frac{X_1+X_2}{2},Y=\frac{X_1-X_2}{2}$

又$\mathrm{a}X_1+bY\sim N(\mathrm{a}\mu_1+\mathrm{b}\mu_2,\mathrm{a}^2\sigma_1^{\ 2}+\mathrm{b}^2\sigma_2^{\ 2})$

$\therefore X \sim$ N（3,1），$Y \sim$ N（1,1）

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$$

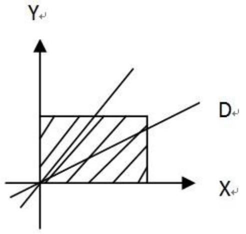
$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}$$

6、

如果 $X_1$、$X_2 \cdots\cdots X_n$相互独立，且 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$

则 $\sum_{i=1}^{n}a_iX_i \sim N(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2)$

7、如图




$z=\xi$

知 $S_d=2$, 又（X,Y）服从均匀分布

故 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},(x,y)\in D\\ 0，其他\end{cases}$

$F_z(\mathrm{z})=P\left\{\frac{X}{Y}\le z\right\}=P\left\{Y\ge\frac{1}{z}X\right\}$

当$0<z<2$时

$F_Z(\mathrm{z})=\int_0^z\int_{\frac{x}{z}}^1\frac{1}{2}\mathrm{dydx}=\frac{1}{4}\mathrm{z}$

当 $\mathrm{z}\ge 2$ 时，

$F_Z(z)=1-\int_0^2\int_0^{\frac{x}{z}}f(x,y)\mathrm{dydx}$

$=1-\frac{1}{\mathrm{z}}$

当 $\mathrm{z}\le 0$ 时，$\mathrm{F_z(z)}=0$

综之

$$F_z(\mathrm{z})=\begin{cases}0，z\le 0\\ \frac{1}{4}\mathrm{z},0<z<2\\ 1-\frac{1}{z}，z\ge 2\end{cases}$$

由 $f(z)=F'(z)$得

$$f(z)=\begin{cases}0,z\le 0\\ \frac{1}{4},z0<z<2\\ \frac{1}{z^2},z\ge 2\end{cases}$$

8、XY 概率分布如图

| XY | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $p$ | 0.1 | 0.8 | 0.1 |

故 EXY=-1$\times 0.1+0\times 0.8+1\times 0.1=0$

E(X+Y)=EX+EY

$=0\times 0.6+1\times 0.4+(-1)\times 0.4+0\times 0.2+1\times 0.4$

=0.4

9、设两人出价分别 X,Y，则有

$$f_X(x)=\begin{cases}1, 1\le x\le 2\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, 1\le y\le 2\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

当$1\le x\le 2, F_X(x)=x-1$ ， 当$1\le y\le 2, F_Y(y)=y-1$

设成交价为 $M=\max(X,Y)$

$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$

当$1\le z\le 2, F_M(z)=(z-1)^2, f_M(z)=2(z-1)$

$$EM=\int_1^2 f_M(z)zdz=\frac{5}{3}$$

法二：

$$EM=\int_1^2\int_1^2 f(x,y)\max(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 dx\left[\int_1^x xdy+\int_x^2 ydy\right]=\frac{5}{3}$$

10、证明：3．53

E（X+Y）$=\sum_{i,j}(x_i+y_j)p_{ij}$

$=\sum_{i,j}x_i p_{ij}+\sum_{i,j}y_j p_{ij}$

$=\sum_i x_i p_i^X+\sum_j y_j p_j^Y$

=EX+EY

3.54,

X、Y 相互独立，故 $p_{ij}=p_i^X p_j^Y$

EXY=$\sum_{ij}x_i y_j p_{ij}=\sum_{ij}x_i p_i^X y_j p_j^Y$

$=\sum_i x_i p_i^X\sum_{ij}y_j p_j^Y$

$=Exy$

11、取到红球的个数服从超几何分布

故 Ex=n p=20$\times$0.4=8

12、停车的次数服从二项分布

在某一站停车的概率 P=$1-(\frac{8}{9})^{25}$

故 EX=n p=9$\times 1-(\frac{8}{9})^{25}$

13、证明

充分性：有条件可知

$$P\{X\le x,Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_i^X p_j^Y$$

$$=\sum_{x_i\le x}p_i^X\sum_{y_j\le y}p_j^Y=P\{X\le x\}\cdot P\{Y\le y\}$$

必要性：

$A=\{X_i\},B=\{Y_j\}$

$P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X\in A\}\cdot P\{Y\in B\}$

即$P\{X\in x_i,Y\in y_j\}=P\{X\in x_i\}\cdot P\{Y\in y_j\}$

$\therefore p_{ij}=p_i^X p_j^Y$

## 练习 3-4

1、 $X_1,X_2$分布如图

| $X_1$ \ $X_2$ | 0 | 1 | 2 | $p_i^{X_1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{56}$ | $\frac{5}{28}$ | $\frac{5}{28}$ | $\frac{21}{56}$ |
| 1 | $\frac{5}{56}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{5}{28}$ | $\frac{35}{56}$ |
| $p_j^{X_2}$ | $\frac{3}{28}$ | $\frac{15}{28}$ | $\frac{5}{14}$ | |

则 $EX_1=\frac{21}{56}\times0+\frac{35}{56}\times1=\frac{5}{8}$  $EX_2=\frac{3}{28}\times0+\frac{15}{28}\times1+\frac{5}{14}\times2=$

$X_1,X_2$分布如图

| $X_1,X_2$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| p | $\frac{13}{28}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{5}{28}$ |

$$EX_1X_2=\frac{26}{56}\times0+\frac{5}{14}\times1+\frac{5}{28}\times2=\frac{5}{7}$$

$$\operatorname{cov}(X_1,X_2)=EX_1X_2-EX_1EX_2=\frac{5}{7}-\frac{5}{8}\times\frac{5}{4}=-\frac{15}{224}$$

2、易知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

故 $X_1,Y_1$独立， $\operatorname{cov}(X_1,Y_1)=0$

$$EX_2Y_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyg(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty}21xye^{-3x-4y}dxdy=\frac{13}{147}$$

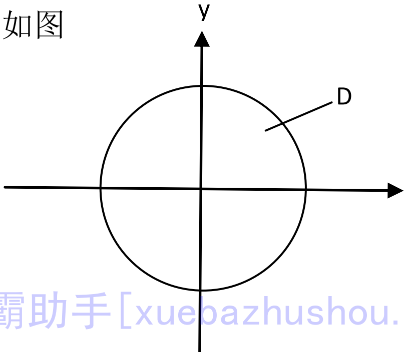
$$EX_2=\int_0^{+\infty}\frac{21}{4}xe^{-3x}\left(1-e^{-4x}\right)dx=\frac{10}{21}$$

$$EY_2=\int_0^{+\infty}7ye^{-7y}dy=\frac{1}{7}$$

故$\operatorname{cov}(X_2,Y_2)=EX_2Y_2-EX_2EY_2=\frac{1}{49}$

3、 $\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{2},\operatorname{cov}(X_1,X_2)=0$

4、如图



x

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & (x,y)\in D\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1}{\pi}dy=\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{\pi^2} & (x,y)\in D\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$\ne f(x,y)$

故$X,Y$不独立

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=0$

$EY=0$

$EXY=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xyf(x,y)dxdy=0$

而$\text{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$

故X, Y不相关

5、 $\rho_{X,Y}=\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{\dfrac{4}{225}}{\sqrt{\dfrac{11}{225}}\times\sqrt{\dfrac{2}{75}}}=\dfrac{4}{\sqrt{66}}$

6、由 $V=\begin{pmatrix}Dr_A & \text{cov}(r_A,r_B)\\ \text{cov}(r_B,r_A) & Dr_B\end{pmatrix}$

得$Dr_A=16\cdot Dr_B=9\cdot\text{cov}(r_A,r_B)=6$

（1） $\rho_{r_Ar_B}=\dfrac{\text{cov}(r_A,r_B)}{\sqrt{Dr_A}\sqrt{Dr_B}}=\dfrac{6}{\sqrt{16}\times\sqrt{9}}=\dfrac{1}{2}$

（2） 由$r_p=xr_A+(1-x)r_B$

故 $Dr_p=D(xr_A+(1-x)r_B)$

$=x^2Dr_A+(1-x)^2Dr_B+2x(1-x)\text{cov}(r_A,r_B)$

$=13x^2-6x+9$

（3） 由$\dfrac{dDr_p}{dx}=26x-6=0,$且$a=13>0$

得$x=\frac{3}{13}$时，$Dr_p$最小

由$13x^2-6x+9\le 9$

得$0\le x\le \frac{6}{13}$

即此时$Dr_p\le \min\left(Dr_A,Dr_B\right)$

7、（此题待商讨）设投资于 $A$ 的资金比例为 $x$， $B$ 的为$1-x$；则投资组合方差为

$Dp=x^2\sigma^2{}_A+\left(1-x\right)^2\sigma^2{}_B+2x\left(1-x\right)\rho_{AB}\sigma{}_A\sigma{}_B$

$(1)$ 由$-1<\rho_{AB}<1$

当不卖完，即$0\le x\le 1$时

$Dp>x^2\sigma^2{}_A+\left(1-x\right)^2\sigma^2{}_B-2x\left(1-x\right)\sigma{}_A\sigma{}_B\ge 0$

当卖完，即$x<0$

$Dp=x^2\sigma^2{}_A+\left(1-x\right)^2\sigma^2{}_B+2x\left(1-x\right)\sigma{}_A\sigma{}_B+2x\left(1-x\right)\left(\rho_{AB}-1\right)\sigma{}_A\sigma{}_B$

$=\left[x\sigma_A+\left(1-x\right)\sigma_B\right]^2+2x\left(1-x\right)\left(\rho_{AB}-1\right)\sigma{}_A\sigma{}_B>0$

综上， $Dp>0$，得证。

$(2)$ 当$\left|P_{AB}\right|=1$时，

$Dp=\left[x\sigma_A\pm\left(1-x\right)\sigma_B\right]^2=0$

即 $x\sigma_A\pm\left(1-x\right)\sigma_B=0$

$\rho_{AB}=1$时， $x=\frac{\sigma_B}{\sigma_B-\sigma_A}$

$\rho_{AB}=-1$， $x=\frac{\sigma_B}{\sigma_B+\sigma_A}$

此时可得无风险投资组合。

$(3)$ $Dp$ 可化为关于 $x$ 的方程，即

$Dp=\left(\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2-2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B\right)x^2+2\left(\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B-\sigma_B{}^2\right)x+\sigma_B{}^2$ $\quad\left(0\le x\le 1\right)$

设 $a=\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2-\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$ 则 $a\ge 0$

当 $a=0$时， $\sigma_A=\sigma_B$， 且 $\rho_{AB}=1$

不合题意

当 $a\ge 0$时，需满足 $Dp$ 的最小值小于 $\min\left(\sigma_A^2,\sigma_B^2\right)$

即 $\frac{4ac-b^2}{4a}<\min\left(\sigma_A^2,\sigma_B^2\right)$

$$\frac{4\left(\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2-2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B\right)\sigma_B{}^2-4\left(\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B-\sigma_B{}^2\right)^2}{4\left(\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2-2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B\right)}<\min\left(\sigma_A^2,\sigma_B^2\right)$$

合理得：

当 $\sigma_A\le\sigma_B$ 时， $\left(\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B-\sigma_A{}^2\right)^2>0$

当 $\sigma_A>\sigma_B$ 时， $\left(\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B-\sigma_B{}^2\right)^2>0$

即 $\rho_{AB} \neq \dfrac{\min(\sigma_A,\sigma_B)}{\max(\sigma_A,\sigma_B)}$，且此时需 $x=-\dfrac{b}{2a}\in[0,1]$

即 $-\dfrac{2(\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B-\sigma_B{}^2)}{2(\sigma_A{}^2+\sigma_B{}^2-2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)}\in[0,1]$

得 $\rho_{AB}\le\dfrac{\sigma_A}{\sigma_B}$,且 $\rho_{AB}\le\dfrac{\sigma_B}{\sigma_A}$，即 $\rho_{AB}\le\dfrac{\min(\sigma_A,\sigma_B)}{\max(\sigma_A,\sigma_B)}$

又讨论 $Dp$ 在 $x=0$ 或者 $x=1$ 时的取值皆不符合要求，故综合之

$\rho_{AB}\le\dfrac{\min(\sigma_A,\sigma_B)}{\max(\sigma_A,\sigma_B)}$

8、（1）即求

$Er=-3\%\times(0.015+0.025+0.06)+\cdots+7\%\times(0.015+0.025+0)=2.755\%$

（2）即求

$P(r_f=1.5\%)=0.025+0.05+\cdots+0.025=0.5$

$E(r|r_f=1.5\%)=-3\%\times\dfrac{0.025}{0.5}+\cdots+\times\dfrac{0.025}{0.5}=3\%$

9、$E[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y|x)dy$

又 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^2} & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

故$E[Y|X=x]=\int_x^1\dfrac{2y^2}{1-x^2}dy=\dfrac{2(x^2+x+1)}{3(1+x)}$

即 $E[Y|X=x]=\begin{cases}\dfrac{2(x^2+x+1)}{3(1+x)} & 0\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$E[Y|X]=\begin{cases}\dfrac{2(X^2+X+1)}{3(1+X)} & 0\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

10、由题易知，

$f(x,y)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\pi} & (x,y)\in D\\ 0 & 其他\end{vmatrix}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\dfrac{1}{\pi}dy & 0\le x\le 2\\ 0 & 其他\end{cases}$

即 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2x-x^2}}{\pi} & 0\le x\le 2\\ 0 & 其他\end{cases}$

则 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} & -\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{2x-x^2}\\ 0 & 其他\end{cases}$

故 $E[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy=\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{y}{2\sqrt{2x-x^2}}dy=0$

故 $E[Y|X]=0$

同理可得 $E[X|Y]=1$

## 练习 3-5

1、 设没人面临的损失 $\xi_i$ 均值为 $\mu$，方差 $\sigma^2$

合作后，每人分摊的损失为 $\xi=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}$

由大数定律，有 $\xi\sim\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$， $\frac{\sigma^2}{n}<\sigma^2$

$\therefore$降低了不确定性

即当 $n$ 足够大时，每个个体的损失约等于确定值 $\frac{1}{n}E\sum_{1}^{n}\xi_i$ 降低了不确定性。

2、由题意知，$S$ 的均值为 $5n$，方差为 $25n$， $n$ 较大，故 $S$ 服从中心极限定理，即

$$P\left\{\frac{S-5n}{\sqrt{25n}}\le\frac{np-5n}{\sqrt{25n}}\right\}=\Phi_0\left(\frac{np-5n}{\sqrt{25n}}\right)=0.95$$

得 $\frac{np-5n}{\sqrt{25n}}=1.645$

得 $p=5+\frac{8.225}{\sqrt{n}}$，得投保人数越多， $p$ 越小

3、亏损时，有 $k\mu_s<S$， $S$ 服从中心极限定理

$$P\{k\mu_s<S\}=P\left\{\frac{S-\mu_s}{\sigma_S}>\frac{(k-1)\mu_s}{\sigma_S}\right\}=1-\Phi_0\left\{\frac{(k-1)\mu_s}{\sigma_S}\right\}$$

得证

4、设正常工作的部件数为 $\xi$，则 $\xi\sim b(100,0.9)$，由于 n 较大， $\xi$ 服从正态分布

即 $\xi\sim N(100\times0.9,100\times0.9\times0.1)=N(90,3^2)$

$P${整个系统起作用}

$$=P\{\xi\ge85\}=P\left\{\frac{\xi-90}{\sqrt{(100\times0.9\times0.1)}}\ge\frac{85-90}{(100\times0.9\times0.1)}\right\}$$

$$=1-\Phi_0\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$=\Phi_0(1.67)=0.9525$$

即所求为0.9525

5、每个终端使用打印机的概率为 $\frac{3}{60}$=0.05， 设$\xi$为正在使用的打印机个数

有 $\xi\sim b(120,0.05)$，由于 $n$ 很大，有 $\xi\sim N\left(120\times\frac{1}{20},\ 120\times\frac{1}{20}\times\frac{19}{20}\right)$

即 $\xi\sim N(6,\ 5.7)$

$P(\xi\ge 10)=P\left(\frac{\xi-6}{\sqrt{5.7}}\ge\frac{10-6}{\sqrt{5.7}}\right)=1-\Phi_0(1.68)=1-0.95352$

6、设开动的机床数为 $\xi$，则 $\xi\sim b(200,0.7)$，设95%概率下开动的机床数为 $n$，则

$$P\{\xi\le n\}=P\left\{\frac{\xi-200\times0.7}{\sqrt{200\times0.7\times03}}\le\frac{n-200\times0.7}{\sqrt{200\times0.7\times03}}\right\}$$

$$=\Phi_0\left\{\frac{n-200\times0.7}{\sqrt{200\times0.7\times03}}\right\}\ge0.95$$

$$\frac{n-140}{\sqrt{42}}\ge1.65$$

得 $n$ 取符合题意的最小正整数为151，$15\times151=2265$

故最小供电量为2265度

7、(1) 设误差为 $\xi$，则 $E\xi=0, D\xi=\frac{1}{12}$，设300个数误差点为为 $S_{300}$

有 $S_{300}\sim\left(0,\frac{300}{12}\right)$

则

$$P\{|S_{300}|>15\}=1-P\{|S_{300}|<15\}=1-\left\{2\Phi_0\left(\frac{15}{\sqrt{\frac{300}{12}}}\right)-1\right\}$$

$$=2-2\Phi_0(3)=0.0027$$

(2) 即

$$P\{|S_n|<10\}$$

$$=P\left\{\frac{|S_n|}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}<\frac{10}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}\right\}$$

$$=2\Phi_0\left(\frac{10}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}\right)-1\ge0.9$$

得 $\frac{10}{\sqrt{n\times\frac{1}{12}}}\ge1.64$

$n\le446.16$，故 $n$ 取446

## 练习 4-1

1、总体：$\{0,0,0,1,1\}$

$P\{X=0\}=\frac{3}{5}, P\{X=1\}=\frac{2}{5}$

2、总体：$\{(0,0)(0,0)(0,1)(1,0)(1,1)\}$

$P\{(X,Y)=(0,1)\}=\frac{1}{5}, P\{(X,Y)=(0,0)\}=\frac{2}{5}$

$P\{(X,Y)=(1,1)\}=\frac{1}{5}, P\{(X,Y)=(1,0)\}=\frac{1}{5}$

3、$P\{X_1=i_1, X_2=i_2, X_3=i_3, X_4=i_4\}=\left(\frac{2}{5}\right)^s\left(\frac{3}{5}\right)^{4-s}$

$i_1,i_2,i_3,i_4$ 取 0 或 1， $s=i_1+i_2+i_3+i_4$

4、易知 $f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

故 $f_n(x_1,x_2\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$

$=\begin{cases}\alpha^n e^{-\alpha(x_1+x_2+\cdots+x_n)} & x_i\geq 0, i\in N^*\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

5、易知 $f(x)=\begin{cases}x & 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

故 $f_n(x_1,x_2,\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$

$=\begin{cases}1 & 0\leq x_i\leq 1, i\in N^*\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

6、易知 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p \quad (k\geq 1)$

故 $P\{X_1=k_1, X_2=k_2,\cdots X_n=k_n\}$

$=\prod_{i=1}^{n}P\{X=k_i\}$

$=(1-p)^{k_1+\cdots+k_n-n}p^n \qquad i,k_i\in N^*$

## 练习 4-2

1、$\bar{u}=\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i}{n}=\frac{\sum x_i-na}{nb}=\frac{\bar{x}-a}{b}$

$s_u^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{(n-1)b^2}$

$=\frac{1}{b^2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{s_x^2}{b^2}$

2、由修正的样本方差公式知

$S^2=\frac{n}{n-1}S_0{}^2$

$S_0{}^2=EX^2-(EX)^2$

$=A_2-(A_1)^2$

故 $S^2=\frac{n}{n-1}\left[A_2-(A_1)^2\right]$

即 $\frac{n-1}{n}S^2=A_2-(A_1)^2$

得证

3、统计量中不含总体分布未知参数，枢轴量含有一个未知参数，但其分布已知，举例略。

## 练习 4-3

1、证明：

① $P\{X\ge F_{1-\alpha}\}=1-\alpha\Rightarrow$

$P\{X\le F_{1-\alpha}\}=1-(1-\alpha)=\alpha$

②

$\because P\left\{X\ge F_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha$

$P\left\{X\ge F_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$

$\therefore P\left\{X\ge F_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}-P\left\{X\ge F_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\le X\le F_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$

2、验证查表即可，证明见 10 题

3、 $P\left\{X_{(1)}\le x\right\}=1-P\left\{X_{(1)}>x\right\}$

$=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots X_n>x\}$

$=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}$

$=1-(1-F(x))^n$

$P\left\{X_{(n)}\le x\right\}=P\{X_1\le x\}P\{X_2\le x\}\cdots P\{X_n\le x\}$

$=(F(x))^n$

当 $X$ 服从指数分布时将

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

代入，得

$P\left\{X_{(1)}\le x\right\}=1-e^{-n\alpha x}\qquad x\ge 0$

$P\left\{X_{(n)}\le x\right\}=\left(1-e^{-\alpha x}\right)^n\qquad x\ge 0$

4、 $X_i\sim\chi^2(m)$ 令 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim X^2(nm)\left(i\in N^*\right)$

$$f_Y(y)=\left[\frac{1}{2^{\frac{mn}{2}}\Gamma\left(\frac{mn}{2}\right)}y^{\frac{mn}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y}\right]'$$

$F_Y(y)=\int_0^{+\infty}f_Y(y)dy$

$$\because \bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}=\frac{Y}{n}$$

$$\therefore F_{\bar{X}}(x)=P(\bar{X}\le x)=P\left(\frac{Y}{n}\le x\right)=P(Y\le nx)$$

$$=F_Y(nx)=\int_0^{+\infty} f_Y(nx)d(nx)$$

$$f_{\bar{X}}(x)=\frac{dF_{\bar{X}}(x)}{dx}=\frac{n^{\frac{mn}{2}}}{2^{\frac{mn}{2}}\Gamma\left(\frac{mn}{2}\right)}x^{\frac{mn}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}nx},x>0$$

5、设 $Y_1=X_1+X_2+X_3\sim N(0,3)$

$Y_2=X_4+X_5+X_6\sim N(0,3)$

则 $\frac{Y_1}{\sqrt{3}}\sim N(0,1),\frac{Y_2}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$

则 $\frac{Y_1^2}{3}+\frac{Y_2^2}{3}\sim\chi^2(2)$

即 $cY=\frac{1}{3}\left(Y_1^2+Y_2^2\right)=\frac{1}{3}Y$

$c=\frac{1}{3}$, 自由度为 2

6、当 $n=2$ 时，易知 $X_1,X_2$ 独立且皆服从 $P(\lambda)$

$$P\{X_1+X_2=k\}=P\{X_1=m,X_2=k-m\}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\frac{\lambda^{k-m}e^{-\lambda}}{(k-m)!}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda^k e^{-2\lambda}}{m!(k-m)!}$$

$$=\frac{\lambda^k e^{-2\lambda}}{k!}\sum_{m=0}^{k}C_k^m$$

$$=\frac{(2\lambda)^k e^{-2\lambda}}{k!}$$ 即 $S_2\sim P(2\lambda)$

假设成立。

故 $S_n$ 确切分布为

$$P\{S_n=k\}=\frac{(n\lambda)^k e^{-n\lambda}}{k!}\qquad (k\in N)$$

易知 $ES_n=DS_n=n\lambda$

根据中心极限定理 $n\to+\infty$ 时

$S_n$ 服从正态分布，即其渐进分布为

$$P\{S_n\le x\}=\Phi_0\left(\frac{x-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)$$

7、查表易知，略

8、

由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 可知 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

$\Rightarrow \bar{X}-\mu\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})$

令$\bar{X}-\mu=Y$，有$Y\sim N(0,\frac{0.5}{n})$

设$\Phi(y)$为$Y$的分布函数

$$2\Phi(0.1)-1\geq 99.7\%\Rightarrow\Phi(0.1)99.85\%\Rightarrow\Phi_0\left(\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.5}{n}}}\right)\geq\Phi_0(2.97)$$

$$\Rightarrow\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.5}{n}}}\geq 2.97\Rightarrow n\geq 441.045$$

$\therefore n$取442

9、查表易知，略

10、证明：由 $X\sim F(m,n)$

易知 $P\{X>F_\alpha(m,n)\}=\alpha$

又知 $X^{-1}\sim F(n,m)$

即$P\left\{\frac{1}{X}>F_{1-\alpha}(n,m)\right\}=1-\alpha$

$$\Rightarrow P\left\{X<\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\right\}=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left\{X>\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}\right\}=\alpha$$

故 $F_\alpha(m,n)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$

其余查表易知，略

11、查表易知，略

## 练习 4-4

1、 证明：

（1）$\because\bar{X}\sim N\left(u_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right),\bar{Y}\sim N\left(u_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

再因两总体 $X,Y$ 相互独立，故 $\bar{X},\bar{Y}$ 相互独立

$\because\frac{n_1-1}{\sigma_1^2}S_1^2\sim\chi^2(n_1-1),\frac{n_2-1}{\sigma_2^2}S_2^2\sim\chi^2(n_2-1)$

$X,Y$ 独立，故 $S_1^2,S_2^2$ 相互独立

同理 $\bar{X}$ 与 $S_2^2$ 独立，$\bar{Y}$ 与 $S_1^2$ 独立

故 $\bar{X},\bar{Y},S_1^2,S_2^2$ 相互独立

（2）$\because U_1=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(u_1-u_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

$$S^2=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}S_1^2+\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}S_2^2$$

又 $\bar{X},\bar{Y},S_1^2,S_2^2$ 独立

故$U_1,S^2$独立

2、$Y=\frac{n}{n+1}X_{n+1}-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}X_i$

设 $Y=A+B$

易知 $A,B$ 相互独立

且 $A\sim N\left(\frac{n\mu}{n+1},\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\sigma^2\right)$

$B\sim N\left(-\frac{n\mu}{n+1},\frac{n\sigma^2}{(n+1)^2}\right)$

故 $A+B\sim N\left(0,\frac{n}{n+1}\sigma^2\right)$

即 $Y\sim N\left(0,\frac{n}{n+1}\sigma^2\right)$

3、易知 $\frac{X}{2}\sim N(0,1)$ 又 $X_i$ 相互独立 $(i=0,1,2,\cdots 15)$

故 $\frac{X_i}{2}\sim N(0,1)$

故设 $A=\frac{X_1{}^2+\cdots+X_{10}{}^2}{4}\sim\chi^2(10)$

$B=\frac{X_{11}{}^2+\cdots+X_{15}{}^2}{4}\sim\chi^2(5)$

由 $F$ 分布定义知

$\frac{A/10}{B/5}=Y\sim F(10,5)$

4、易知 $\frac{Y}{3}\sim N(0,1)$

故 $\frac{Y_i}{3}\sim N(0,1)$ ，同理 $\frac{X_i}{3}\sim N(0,1)$ $(i=1,\cdots,9)$

又 $\frac{X_1+\cdots+X_9}{3}\sim N(0,9)$，$\frac{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{9}X_i}{3}\sim N(0,1)$

$\frac{Y_1^2}{3^2}+\cdots+\frac{Y_9^2}{3^2}\sim\chi^2\sim(9)$

故 $A=\frac{X_1+\cdots+X_9}{9}\sim N(0,1)$

且 $B=\frac{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}{9}\sim\chi^2(9)$

由 $t$ 分布定义知

$U=\frac{A}{\sqrt{B/9}}\sim t(9)$

## 练习 5-1

1、令 $Y=x_{i+1}-x_i$

则 $Y\sim N(0,2\sigma^2),EY=0,DY=2\sigma^2$

故 $E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2\right]$

$$=E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(Y)^2\right]$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}\left[DY+(EY)^2\right]$$

$$=c(n-1)2\sigma^2=\sigma^2$$

得 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$

2.证明：

$$\mathrm{E}\,p=[(\frac{\sum x_i}{n})^2-\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}]$$

3.证明：

$$Eu_1=\frac{2}{3}Ex_1-\frac{1}{3}Ex_2+\frac{2}{3}Ex_3$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1=u$$

故$u_1$是无偏估计量，同理可证

$u_2$、$u_3$也为无偏估计量

又:$\sigma_1{}^2=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}=1$

$$\sigma_2{}^2=\frac{1}{9}\times3=\frac{1}{3}$$

$$\sigma_3{}^2=\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

$\sigma_2{}^2$最小，故$u_2$最有效

## 练习 5-2

1、(1)① $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{dx}$

$$=\int_0^1(\alpha+1)x^{\alpha+1}\mathrm{dx}$$

$$=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}x^{\alpha+2}\Big|_0^1=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

得$\alpha=\dfrac{2EX-1}{1-EX}$

又$EX=\overline{X}$

故$\alpha_{ME}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

② $f(x)=(\alpha+1)\ x^{\alpha}$

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i),(i\in N^*)$$

$$=(\alpha+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\alpha}$$

令$\dfrac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}=\dfrac{d[n\ln(1+\alpha)+\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln x_i]}{d\alpha}$

$$=\frac{n}{\alpha+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

得$\alpha_{MLE}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$

（2）①Ex=p,而 p=Ex

又 $\mathrm{E}x=\bar{x}$

故$p=\bar{x}, p_{ME}=\bar{x}$

$P$（X=x）$=p^x(1-p)^{1-x}$，$x$=0,1

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i},(i\in N^*)$$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

令$\frac{d\ln \mathrm{L}(p)}{dp}=0$,得

$$np=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$p=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$$

得$p_{MLE}=\bar{x}$

(3)由题意知

$$f(x;\ \lambda,\ \alpha)=\begin{cases}2\lambda\times\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha)}\bullet(2\lambda x)^{\alpha-1}\bullet e^{-\frac{1}{2}(2\lambda x)}, & x>0\\ 0 \quad 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\lambda\times x^2(2\lambda x;2\alpha)x>0\\ 0 \quad\quad 其他\end{cases}$$

①设Y=2$\lambda X$,则

Y~X$^2(2\alpha)$,即EY=2$\alpha$

得E2$\lambda$X=2$\alpha$

$\lambda=\frac{\alpha}{\mathrm{EX}}$

又$\mathrm{E}\hat{\mathrm{X}}=\bar{\mathrm{X}}$,故$\hat{\lambda}_{\mathrm{ME}}=\frac{\alpha}{\bar{\mathrm{X}}}$

②$\mathrm{L}(\lambda)=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha)}(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\alpha-1}\bullet e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}(i\in N^*)$

令$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=0$,得

$$\frac{n\alpha}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$\lambda=\frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{\alpha}{\bar{\mathrm{X}}}$$

(4) ①P{X=k}$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

故$EX=\lambda$, 又$EX=\overline{X}$

故$\hat{\lambda}_{ME}==\overline{X}$

②$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}p\{X=x_i\}(i\in N^*)$

$$=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}(i\in N^*)$$

$$\ln L(\lambda)=(\sum_{i=1}^{n}X_i)\ln\lambda-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i!)-n\lambda$$

令$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=0$,

得$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=n$

$\lambda=\overline{X}$

故$\hat{\lambda}_{MLE}==\overline{X}$

2.由题意知

$$P\{X=x_i\}=\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$$

$$L(\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}(i\in N^*)$$

$$\ln L(\lambda)=(\sum_{i=1}^{n}X_i)\ln\lambda-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i!)-n\lambda$$

令$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=0$,

解得$\hat{\lambda}_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$，故$\lambda$的最大似然估计值为

$\hat{\lambda}_{MLE}$=x=2.4167

由最大似然估计的不变性，无死亡的概率

p=$P(X=0)=e^{-\lambda}$

的最大似然估计值为

$p_{MLE}=e^{-\hat{\lambda}_{MLE}}\approx 0.089$

3、由题意知

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

$\mu=\overline{X}$

$$\therefore c=\frac{\sigma}{|\mu|}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}}{\left|\overline{X}\right|}$$

## 练习 5-3

1、易知 $x$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1 & x>\theta \\ \dfrac{x}{\theta} & 0<x\le\theta \\ 0 & x\le 0\end{cases}$

故 $X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{X_{(n)}}(x)=P\{X_{(n)}\le x\}=\begin{cases}1 & x>\theta \\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^n & 0<x\le\theta \\ 0 & x<0\end{cases}$

取枢轴量 $\mu=\dfrac{X_{(n)}}{\theta}$

则 $\dfrac{X_n}{\theta}$ 的分布函数为 $F_{\frac{X_{(n)}}{\theta}}(x)=\begin{cases}1 & x>1 \\ x^n & 0<x\le 1 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$

当 $0<x\le 1$ 时，令 $F_{\frac{X_{(n)}}{\theta}}(x)=1=x^n$ 得 $x=1$

当 $0<x\le 1$ 时，令 $F_{\frac{X_{(n)}}{\theta}}(x)=\alpha=x^n$ 得 $x=\sqrt[n]{\alpha}$

$\therefore P\left\{\sqrt[n]{\alpha}<\dfrac{x_{(n)}}{\theta}<1\right\}=1-\alpha$， $P\left\{x_{(n)}<\theta<\dfrac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}\right\}=1-\alpha$

故 $\theta$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $\left(x_{(n)},\dfrac{x_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}\right)$

法二 by 罗莘——寻求置信区间的方法：找区间长度最小

$X \sim U(0,\theta), X_{(n)} = \max\{X_1 \cdots X_n\}$

$F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} \le x\} = P\{\max\{X_1 \cdots X_n\} \le x\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \le x\}$

又$P\{X_i \le x\} = \frac{x-0}{\theta-0} = \frac{x}{\theta}$

令$Z=\frac{X_{(n)}}{\theta}$则$F_z(Z) = P\left\{\frac{X_{(n)}}{\theta} \le Z\right\} = P\{X_{(n)} \le \theta Z\} = \frac{(Z\theta)^n}{\theta^n} = Z^n$

又$X_{(n)} \in [0,\theta]$ 即$P\{\underline{\theta} \le Z \le \bar{\theta}\} = 1-\alpha$

$\Rightarrow (\bar{\theta})^n - (\underline{\theta})^n = 1-\alpha$

又$f_z(Z) = n \cdot Z^{n-1}$

为使$(\bar{\theta}-\underline{\theta})_{\min}$ 有$S = (\bar{\theta}-\underline{\theta}) \cdot h \Rightarrow h = \left(\frac{S}{(\bar{\theta}-\underline{\theta})}\right)_{\max}$

则取$\bar{\theta}$=1，此时$(\bar{\theta}-\underline{\theta})_{\min}$

其置信区间为：$\bar{\theta}$=1，$\underline{\theta}=\sqrt[n]{\alpha}$

即$(1,\sqrt[n]{\alpha})$

$\sqrt[n]{\alpha} < \frac{X_{(n)}}{\theta} < 1$

$\therefore X_{(n)} < \theta < \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{\alpha}}$

2、由题意得 $\bar{x} = 7.7$， $\alpha = 0.05$， $\mu_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$， $\sigma = 0.8$， $n = 10$

故 $u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.496$，

置信区间为$(\bar{x}-0.496, \bar{x}+0.496)$即$(7.204, 8.196)$

（本书答案有误）

3、

$S = 0.4, n = 15, \bar{X} = 5.4, \alpha = 0.05, t_{\frac{\alpha}{2}}(14) = 2.145$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} = 0.222$

$\therefore \mu$的95%置信区间为$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(14)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(14)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

即$(5.178, 5.622)$

4、

P=$\frac{568}{2154}$，$\alpha$=0.05，n=2154，由$\left(\bar{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$

得$(0.245, 0.282)$

## 练习 5-4

1、

当$\alpha$=0.05 时，拒绝域为

$$C=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):|\overline{x}-\mu_0|>\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

$$\therefore C=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=1.176$$

2、（1）犯第一类错误概率: $H_0$为真。$X\sim p(0.2)\Rightarrow\sum_{i=1}^{20}X_i\sim p(4)$

$$\alpha=P\{拒绝H_0|H_0为真\}=P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i=0\right\}=\frac{4^0e^{-4}}{0!}=e^{-4}$$

犯第二类错误概率: $H_1$为真。$X\sim p(0.1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{20}X_i\sim p(2)$

$$\beta=P\{接受H_0|H_0为假\}=P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i\neq 0\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i=0\right\}$$

$$=1-\frac{2^0e^{-2}}{0!}=1-e^{-2}$$

（2）犯第一类错误概率: $H_0$为真。$X\sim p(0.2)\Rightarrow\sum_{i=1}^{20}X_i\sim p(4)$

$$\alpha=P\{拒绝H_0|H_0为真\}=P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i\le 1\right\}=P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i=0\right\}+P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i=1\right\}$$

$$=\frac{4^0e^{-4}}{0!}+\frac{4^1e^{-4}}{1!}=5e^{-4}$$

犯第二类错误概率: $H_1$为真。$X\sim p(0.1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{20}X_i\sim p(2)$

$$\beta=P\{接受H_0|H_0为假\}=P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i>1\right\}=1-P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i=0\right\}-P\left\{\sum_{i=1}^{20}X_i=1\right\}$$

$$=1-\frac{2^0e^{-2}}{0!}-\frac{2^1e^{-2}}{1!}=1-3e^{-2}$$

3、（原题应改为“求证： $p=2\left[1-\Phi_0\left(\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{3/5}\right)\right]$”）

$$\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=u_{\frac{p}{2}}\Rightarrow\Phi_0\left(\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right)=\Phi_0\left(u_{\frac{p}{2}}\right)=1-\frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow p=2\left[1-\Phi_0\left(\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{3/5}\right)\right]$$

**练习 5-5**

1、建立统计假设 $H_0:\mu=80000\leftrightarrow H_1:\mu\neq 80000$，

由题意知 $\mu_0=80000$， $\sigma_0=4000$， $n=100$，

$\overline{x}=79600$， $\alpha=0.05$， $u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$，

计算得 $u_0=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{4000/10}=-1$，

由 $|u_0|<u_{\frac{\alpha}{2}}$

故接受 $H_0$，拒绝 $H_1$，即认为生产正常。

2、建立统计假设 $H_0:\mu\le 51.2 \leftrightarrow H_1:\mu>51.2$

由题意知 $\mu_0=51.2$， $n=9$， $\alpha=0.05$， $t_\alpha(n-1)=1.860$， $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=54.5$，

$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=10.83$， $t_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=3.01$，

由 $|t_0|>t_\alpha(n-1)$

故拒绝 $H_0$，接收 $H_1$，即认为效果显著。

3、建立统计假设 $H_0:\mu\le 23.8 \leftrightarrow H_1:\mu>23.8$

由题意知： $\mu_0=20.8+3=23.8$， $s^2=5.27$， $n=7$， $\alpha=0.05$，

$t_\alpha(n-1)=1.943$， $\bar{x}=24.2$， $t_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=0.461$

由 $t_0<t_\alpha$

故接受 $H_0$，拒绝 $H_1$

即认为不能说明有显著疗效

4、建立统计假设

$H_0:\sigma^2=0.112^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2\ne 0.112^2$

由题意知

$\sigma_0^2=0.112^2, n=7, \alpha=0.05$

$\chi^2_{0.975}(6)=1.237 \quad \chi^2_{0.025}(6)=14.449$

$\bar{x}=4.36, s^2=0.0351$

则 $\chi_0^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=16.789$

由 $\chi_0^2>\chi^2_{0.025}(6)$

故拒绝 $H_0$，接受 $H_1$

即不能认为方差不变

5、建立统计假设 $H_{01}:\mu=1000 \leftrightarrow H_{11}:\mu\ne 1000$

由题意知

$\mu_0=1000, n=10, \alpha=0.05$

$t_{0.025}(9)=2.262$

$\bar{x}=998, s^2=913.8$

则 $t_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=-0.21$

由 $|t_0|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

故接受 $H_{01}$，拒绝 $H_{11}$

即认为均值不变

进一步建立统计假设

$H_{02}:\sigma^2\le 15^2 \leftrightarrow H_{12}:\sigma^2>15^2$

由题意知

$\sigma^2=15^2, \chi_\alpha^2(n-1)=16.919$

则 $\chi_0^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=36.552$

由 $\chi_0^2 > \chi_\alpha^2(n-1)$

故拒绝 $H_{02}$,接受 $H_{12}$

即认为方差超过$15^2$

综之，机器工作不正常

6、建立统计假设

$H_{01}:\mu=18 \leftrightarrow H_{11}:\mu\neq 18$

这里有

$\mu_0=18, n=9, \alpha=0.01$

则 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=3.355$

$\bar{x}=17.5, s^2=0.55$

有 $t_0=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=-2.023$

由 $|t_0|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

故接受 $H_{01}$， 拒绝 $H_{11}$

即认为标准值为$18K$

进一步建立统计假设

$H_{02}:\sigma^2\leq 0.3^2 \leftrightarrow H_{12}:\sigma^2>0.3^2$

有 $\sigma_0^2=0.3^2, \chi_\alpha^2(n-1)=20.090$

则 $\chi_0^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=48.889$

由 $\chi_0^2>\chi_\alpha^2(n-1)$， 故拒绝 $H_{02}$， 接受 $H_{12}$

即认为方差大于$0.3^2$， 综之产品不合格

## 练习 5-6

1、 设 $X,Y$ 分别为甲、乙的去污率，则

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

建立统计假设（记 $\mu=\mu_1-\mu_2$）

$H_0:\mu=0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$

这里 $n_1=6, n_2=5$

$\alpha=0.05, t_{0.025}(9)=2.262$

计算得

$\bar{x}=78.7, s_1^2=7.28$

$\bar{y}=76, s_2^2=5.6$

则 $s^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

$t_0=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=1.745$

由 $H_{01}<t_{0.025}(9)$

故接受 $H_0$， 拒绝 $H_1$

即认为二者去污率无明显差异

2、 设旧、新工艺生产零件的直径分别为 $X,Y$

则 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$

建立统计假设（记 $r=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ）

$H_0: r\le 1 \leftrightarrow H_1: r>1$

这里： $n_1=9, n_2=8, \alpha=0.05$

$F_{0.05}(8,7)=3.44$

$F_{0.95}(8,7)=0.29$

计算知 $s_1^2=0.195, s_2^2=0.049$

$F_0=\frac{s_1^2}{s_2^2}=3.98$

由 $F_0>F_{0.05}(8,7)$

故拒绝 $H_0$， 接受 $H_1$

即认为支持采用新工艺

3、 分别设旧、新方法的提取率为 $X,Y$

则 $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$

建立统计假设（记 $r=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ ）

$H_{01}: r=1 \leftrightarrow H_{11}: r\ne 1$

则有 $n_1=n_2=9, \alpha=0.05$

$F_{0.025}(8,8)=4.43$

$F_{0.975}(8,8)=0.226$

计算知 $s_1^2=3.3, s_2^2=2.1375$

$F_0=\frac{s_1^2}{s_2^2}=1.544$

由 $F_{0.975}(8,8)<F_0<F_{0.025}(8,8)$

故接受 $H_{01}$， 拒绝 $H_{11}$

即认为二者方差无明显差异

进一步建立统计假设（记 $\mu=\mu_1-\mu_2$）

$H_{02}: \mu\ge 0 \leftrightarrow H_{12}: \mu<0$

有 $t_{0.05}(16)=1.746$

$\overline{x}=76.4, \overline{y}=1.746$

$$s^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=2.71875$$

$$t_0=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=-4.12$$

由 $|t_0|>t_\alpha(n_1+n_2-2)$

故拒绝 $H_{02}$， 接受 $H_{12}$

即认为有明显提高

## 练习 5-7

1、

$H_0: P_0 \le 50\%$

$H_1: P_0 > 50\%$

$$U = \frac{\bar{X} - P_0}{\sqrt{P(1-P)} / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

由于$t_0 = 1.8 > u_\alpha = 1.645$，落入拒绝域

$\therefore$拒绝$H_0$，认为可以说明该市50%以上成人患有牙疾

2、

$H_0$:该骰子均匀

$H_1$:该骰子不均匀

即$H_0: p_{i0} = \frac{1}{6}(i = 1, 2 \cdots 6)$

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(N_i - p_{i0} \cdot n)^2}{p_{i0} \cdot n} \sim \chi^2(6-1)$$

代入数据得$\chi_0^2 = 3.733$

拒绝域为$\chi^2 > \chi_\alpha^2(r-1) = \chi_{0.05}^2(5) = 11.071$

由于$3.733 < 11.071$

$\therefore$没有充分理由拒绝$H_0$，可以认为这颗骰子均匀

## 练习 6-2

1、

解：以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$分别表示品牌 A、B、C 的汽车的耗油量的效应

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$H_1: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$至少有一个不为0

$r = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 5, n = n_1 + n_2 + n_3 = 15$

$T_1 = n_1\bar{x}_1 = 5 \times 24.20 = 121.0$

$T_2 = n_2\bar{x}_2 = 5 \times 27.82 = 139.1$

$T_3 = n_3\bar{x}_3 = 5 \times 25.24 = 126.2$

$T = T_1 + T_2 + T_3 = 386.3$

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \frac{T^2}{n} = 10011.73 - \frac{386.3^2}{15} = 63.22$$

$$Q_A = \sum_{i=1}^{r} n_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{r}\frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T^2}{n} = 34.74$$

$Q_\varepsilon = Q - Q_A = 28.48$

得方差分析表

| 方差来源 | 平方和 | 自由度 | 均方 | $F$ 值 |
|---|---|---|---|---|
| 因素 | $Q_A=34.74$ | $r-1=2$ | $S_A=\frac{Q_A}{r-1}$ | $\frac{S_A}{S_\varepsilon}=7.32$ |
| 误差 | $Q_\varepsilon=28.84$ | $n-r=12$ | $S_\varepsilon=\frac{Q_\varepsilon}{n-r}$ | |
| 总和 | $Q=63.22$ | $n-1=14$ | | |

拒绝域

$F_0>F_\alpha(r-1,n-r)$

$F_0=7.32>F_\alpha(r-1,n-r)=F_{0.05}(2,12)=3.89$

故拒绝 $H_0$，认为不同品牌小汽车的耗油量有显著差异

## 练习 7-1

6、

（1）样本相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}}=\dfrac{l_{XY}}{\sqrt{l_{XX}l_{YY}}}$

其中

$$\bar{X}=232.89,\bar{Y}=146.78,\sum_{i=1}^{n}X_i^2=609290$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_iY_i=354906,\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=121150.23,\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=21895.56$$

则 $r\approx0.9176$

（2）

$Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i$

根据最小二乘法 $\begin{cases}\hat{\beta}_1=\dfrac{l_{XY}}{l_{XX}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2}\approx0.39\\ \hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}=55.95\end{cases}$

则 $\hat{Y}_i=55.95+0.39x_i$

## 练习 7-2

1、

$H_0:\beta_1=0$

$H_1:\beta_1\neq0$

$T_0=\dfrac{\hat{\beta}_1-0}{\sqrt{SSE/(n-2)}/\sqrt{l_{XX}}}\sim t(n-2)$,其中 $SSE=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2=l_{YY}-\hat{\beta}_1l_{XY}$

| $X_i$ | 102 | 124 | 156 | 182 | 194 | 229 | 272 | 342 | 495 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | 87 | 92 | 90 | 124 | 150 | 160 | 182 | 216 | 220 |
| $\hat{Y}_i$ | 95.73 | 104.31 | 116.79 | 126.93 | 131.61 | 145.26 | 162.03 | 189.33 | 249 |

则$SSE = 3464.12$

$\therefore t_0 = 6.10$

而拒绝域为$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) = t_{0.025}(7) = 2.365$

由于$t_0 > t_{0.025}(7)$

$\therefore$ 拒绝$H_0$,认为$X,Y$间线性关系显著

2、

$\bar{X} = 80.14, \bar{Y} = 79.28, \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 45425, \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = 44887$

回归模型$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{l_{XY}}{l_{XX}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} \approx 0.88 \\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 8.7568 \end{cases}$$

$\hat{Y}_i = 8.7568 + 0.88 x_i$

| $X_i$ | 76 | 69 | 82 | 92 | 88 | 70 | 84 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | 80 | 63 | 84 | 90 | 91 | 76 | 71 |
| $\hat{Y}_i$ | 75.64 | 69.48 | 80.92 | 89.72 | 86.20 | 70.35 | 82.67 |

$SSE = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = 261.7162$

$H_0 : \beta_1 = 0$

$H_1 : \beta_1 \neq 0$

$$T_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{SSE/(n-2)} / \sqrt{l_{XX}}} \sim t(n-2)$$

代入数据$t_0 = 2.63$

拒绝域为$|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) = t_{0.025}(5) = 2.571$

由于$t_0 = 2.63 > t_{0.025}(5)$

$\therefore$ 拒绝$H_0$，认为$X,Y$间现行关系显著