几 何 学 秋学期第二周作业

October 10, 2018

第 13 页习题:

2 解: 设平行四边形为$ABCD$, 并记

$$\vec{r_1}=\overrightarrow{OA},\vec{r_2}=\overrightarrow{OB},\vec{r_3}=\overrightarrow{OC},$$

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}=&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\\=&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{r_1}+\vec{r_3}-\vec{r_2}.\end{aligned}$$

记对角线交点为E, 则E 为AC的中点, 从而

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\vec{r_1}+\vec{r_3}).$$

4.: 略.

6. 解: 取坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$(注意不一定是直角坐标, 即当 $i\neq j$ 时, $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$ 可能不为$\vec{0}$). 我们有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\\&= 2\left(\vec{e}_1+\vec{e}_3\right)-\left(3\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)\\&= -\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3,\end{aligned}$$

所以 $A=(-1,-2,1)$.

类似有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}\\&= -\left(\vec{e}_1+\vec{e}_3\right)+2\times\left(3\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)\\&= 5\vec{e}_1+4\vec{e}_2+\vec{e}_3,\end{aligned}$$

可得 $B=(5,4,1)$.

7.证明: 参见 例1.1.6 的图1-15, 且采用图中相同的记号. 设 O_1,O_2,O_3,O_4 分别为 $\triangle ABC,\triangle ABD,\triangle CBD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心. 因为 DO_1, CO_2 位于面 CDE 中, AO_3 , BO_4 位于面 ABF 中, 则可设

$$\begin{cases}\overrightarrow{DO_1}\cap\overrightarrow{CO_2}=P\\\overrightarrow{AO_3}\cap\overrightarrow{BO_4}=Q\end{cases}.$$

所以只需证明 $P=Q$ 即可.

设 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$,$\vec{c}=\overrightarrow{AD}$. 因为 $\triangle O_1PO_2\sim\triangle DPC$, 且 $2EO_2=O_2D$, $2EO_1=O_1C$, 所以有 $\overrightarrow{DP}=3\overrightarrow{PO_1}$. 类似可知 $\overrightarrow{BQ}=3\overrightarrow{QO_4}$. 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1P}=\overrightarrow{AO_1}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO_1}\right)\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AO_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\frac{1}{4}\vec{c}\\ &= \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AO_4}+\overrightarrow{O_4Q}=\overrightarrow{AO_4}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO_4}\right)\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AO_4}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}.\end{aligned}$$

因此 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}$, 所以 $P=Q$.

第18页习题:

3. 解:

(2). $-\frac{3}{2}$.

(4) 由已知可得

$$(\vec{a}+3\vec{c})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=7\vec{a}^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\vec{b}^2=0$$

$$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7\vec{a}^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{b}^2=0$$

联立即得

$$\vec{a}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$$

从而$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$

(5) 直接计算得$\vec{a}\cdot\vec{b}=8+3-4=7,|\vec{b}|=3$, 即得$\vec{a}$在$\vec{b}$上的摄影为 $\frac{7}{3}$.

4.

$$\vec{a}\cdot[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b}\vec{c})]=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})=0.$$

$$\vec{a}\cdot[\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}]=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

5-(1). 证明: 设 D,E,F 分别为三角形ABC中BC,CA,AB的中点, 记

$$\vec{a}=\overrightarrow{BC},\vec{b}=\overrightarrow{CA},\vec{c}=\overrightarrow{AB}$$

则有

$$\overrightarrow{AD}=\vec{c}+\frac{\vec{a}}{2},\ \overrightarrow{BE}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{CF}=\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}$$

可得

$$|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BE}|^2+|\overrightarrow{CF}|^2=\frac{5}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)+(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})$$

利用$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 得

$$\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=0$$

从而

$$|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BE}|^2+|\overrightarrow{CF}|^2=\frac{3}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)$$

5-(5). 不妨设 E,F 分别为AC,BD的中点, 并记

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{CD},\vec{d}=\overrightarrow{DA}$$

则有

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b},\ B\vec{D}=\vec{b}+\vec{c},$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\vec{a}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

得

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=&(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}+\vec{c})^2+(\vec{b}+\vec{c})^2\\=&(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)+(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c})\\=&\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2\\=&\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2\end{aligned}$$

(这里用到了$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.)

6. 证明: 设 $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$, 那么

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}\\=&-\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{c}-\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}-(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{b}\\=&\ 0.\end{aligned}$$

7. 解: 采用正交标架 $\left\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$.

(1). $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3}$.

(2). $\angle A=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\angle B=\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\angle C=\arccos\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

(3). $\left|\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=\frac{\sqrt{19}}{2}$, $\left|\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right|=\frac{1}{2}$, $\left|\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right|=\frac{\sqrt{22}}{2}$.

(4). 设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$, 其中 $\lambda>0$. 所以 $D=\lambda\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

因为存在 μ 使得 $\overrightarrow{BD}=\mu\overrightarrow{BC}$, 所以有

$$\left(\frac{\lambda}{3},\frac{2}{3}\lambda+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}-1,\frac{2}{3}\lambda+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}-1\right)=\mu\left(1,1,1\right).$$

解得 $\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$. 所以

$$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}},\frac{2\sqrt{2}+3}{3+\sqrt{2}},\frac{2\sqrt{2}+3}{3+\sqrt{2}}\right).$$

方向余弦为

$$(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}},\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}},\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}})$$

(5). 因为 $I\in\overline{AD}$, 可设 $I=t\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}+3,2\sqrt{2}+3\right)$, 其中 $t\in\mathbb{R}$. 因为存在常数 s 使得

$$\overrightarrow{BI}=s\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}+\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}\right),$$

所以有

$$\left(\sqrt{2}t,2\sqrt{2}t+3t-1,2\sqrt{2}t+3t-1\right)=s\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

由此可得 $t=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+3}$. 所以

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+3}\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}+3,2\sqrt{2}+3\right).$$

9. 证明: 设 $S\left(O;R\right)$ 为其外接圆. 由P8页习题6知，$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$, 所以有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}\right|=\left|n\overrightarrow{PO}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right|=n\left|\overrightarrow{PO}\right|=nR=\text{常数}.$$