第十三章 函数列及函数项级数

§1 一致收敛性

1. 讨论下列函数列或函数项级数在所示区间 D 上是否一致收敛，并说明理由：

(1) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}, n=1,2,\cdots, D=(-1,1)$;

(2) $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}, n=1,2,\cdots, D=(-\infty,+\infty)$;

(3) $f_n(x)=\begin{cases}-(n+1)x+1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n+1}\\ 0, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant 1\end{cases} \quad (n=1,2,\cdots)$;

(4) $f_n(x)=\frac{x}{n}, n=1,2,\cdots$ (i) $D=[0,+\infty)$;

(ii) $D=[0,1000]$;

(5) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}, n=1,2,\cdots$, (i) $D=[-L,L]$;

(ii) $D=(-\infty,+\infty)$.

解 (1) $\lim f_n(x)=|x|=f(x)\, x\in D=(-1,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

故 $\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\rightrightarrows |x|, (n\to\infty), x\in(-1,1)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\frac{|x|}{1+n^2|x|^2}$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

故$\dfrac{x}{1+n^2x^2}\rightrightarrows 0,(n\to\infty),x\in(-\infty,+\infty)$

(3) 当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=1$

当 $0<x\leqslant 1$ 时，只要 $n>\dfrac{1}{x}-1$，就有 $f_n(x)=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，于是在 $[0,1]$ 上的极限函数为 $f(x)=\begin{cases}1,x=0\\0,0<x\leqslant 1\end{cases}$

因 $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|=1\not\to 0,(n\to\infty)$，故 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

(4) 易见极限函数为 $f(x)=0,x\in[0,+\infty)$

(ⅰ) 因为 $\sup\limits_{0\leqslant x<+\infty}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{0\leqslant x<+\infty}\left|\dfrac{x}{n}\right|=+\infty$，所以 $\left\{\dfrac{x}{n}\right\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(ⅱ) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(0,1000)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000}{n}=0$，

故$\dfrac{x}{n}\rightrightarrows 0,(n\to\infty),x\in[0,1000]$

(5) 易见极限函数为 $f(x)=0$

(ⅰ) 因为 $\sup\limits_{x\in[-L,L]}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in[-L,L]}\left|\sin\dfrac{x}{n}\right|\leqslant\dfrac{L}{n}\to 0$，$(n\to\infty)$，

故 $\sin\dfrac{x}{n}\rightrightarrows 0,(n\to\infty),x\in[-L,L]$

(ⅱ) 因为 $\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\sin\dfrac{\pi}{n}\right|=1\not\to 0$，$(n\to\infty)$；

故 $\left\{\sin\dfrac{x}{n}\right\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

2. 证明：设 $f_n(x)\to f(x),x\in D$；$a_n\to 0(n\to\infty),(a_n>0)$，若

对每一个自然数 n. 有 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n, x\in D$, 则 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f.

证 因 $|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n, (x\in D, n=1,2,\cdots)$, 且 $a_n\to 0, (n\to\infty)$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 故 $f_n(x)\rightrightarrows f(x), (n\to\infty), x\in D$.

3. 判别下列函数项级数在所示区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\dfrac{x^n}{(n-1)!}, x\in[-r,r]$;

(2) $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum\dfrac{n}{x^n}, |x|>r>0$; (4) $\sum\dfrac{x^n}{n^2}, x\in[0,1]$

(5) $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}, x\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $\sum\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}, x\in(-\infty,+\infty)$.

解 (1) $\forall x\in[-r,r]$, 有 $\left|\dfrac{x^n}{(n-1)!}\right|=\dfrac{|x|^n}{(n-1)!}\leqslant\dfrac{r^n}{(n-1)!}$, 令 $u_n=\dfrac{r^n}{(n-1)!}$, 则 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{r}{n}\to 0(n\to\infty)$, 所以 $\sum\dfrac{r^n}{(n-1)!}$ 收敛, 从而 $\sum\dfrac{x^n}{(n-1)!}$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

(2) 令 $u_n(x)=(-1)^{n-1}, v_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, 则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant 1, (n=1,2,\cdots)$, 又对每一个 $x\in(-\infty,+\infty)$, $\{v_n(x)\}$ 单调递减, 且由 $0\leqslant\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}\leqslant\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$ 知 $v_n(x)\rightrightarrows 0(n\to\infty), x\in(-\infty,+\infty)$, 由狄利克雷判别法知 $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 当 $|x| \geqslant r > 0$ 时，有 $\frac{n}{|x|^n} \leqslant \frac{n}{r^n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{r} = \frac{1}{r}$. 当 $\frac{1}{r} < 1$ 即 $r > 1$ 时，$\sum \frac{n}{r^n}$ 收敛，所以 $\sum \frac{n}{r^n}$ 在 $|x| \geqslant r > 1$ 上一致收敛.

当 $0 < r \leqslant 1$ 时，$\sup\limits_{|x|\geqslant r} \left|\frac{n}{x^n}\right| = \frac{n}{r^n} \not\to 0 (n \to \infty)$ 从而通项不在 $|x| \geqslant r$ 上一致收敛于 0，因此，此时 $\sum \frac{n}{x^n}$ 不在 $|x| \geqslant r$ 上一致收敛.

(4) 因 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} (x \in [0,1], n = 1,2,\cdots)$，所以 $\sum \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(5) 由莱布尼兹判别法知，对 $(-\infty, +\infty)$ 上任意一点 x，$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ 收敛，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} |R_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$，

故 $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(6) 当 $x \neq 0$ 时

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)} |R_n(x)| = \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \frac{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}}{1+\dfrac{1}{1+x^2}} = \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$= 1 \not\to 0, (n \to \infty)$，故 $\sum \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛.

4. 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，函数 $g(x)$ 在 D 上有界，证明级数 $\sum g(x)u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $g(x)S(x)$.

证　设 $|g(x)| \leqslant M, x \in D$，因 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，所以，$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，对一切 $x \in D$，都有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$，于是当 $n > N$ 时，对任一 $x \in D$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g(x)u_k(x) - g(x)S(x)\right| = |g(x)| \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x)\right| < \varepsilon$$

故$\sum g(x)u_k(x)$在D上一致收敛于$g(x)S(x)$.

5. 若在区间I上,对任何自然数n,$|u_n(x)|\leqslant v_n(x)$,证明当$\sum v_n(x)$在I上一致收敛时,级数$\sum u_n(x)$在I也一致收敛.

证 因$\sum v_n(x)$在I上一致收敛,所以,$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,对一切$x\in I$和一切自然数p,都$\left|\sum\limits_{k=1}^{p}v_{n+k}(x)\right|<\varepsilon$,从而

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}(x)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}|u_{n+k}(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{p}v_{n+k}(x)<\varepsilon$$

故$\sum u_n(x)$在I上一致收敛.

6. 设$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的单调函数. 证明:若$\sum u_n(a)$与$\sum u_n(b)$都绝对收敛,则级数$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上绝对且一致收敛.

证 因$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$是$[a,b]$上的单调函数,所以

$|u_n(x)|\leqslant|u_n(a)|+|u_n(b)|$,$(n=1,2,\cdots,x\in[a,b])$由$\sum|u_n(a)|$与$\sum|u_n(b)|$收敛知:$\sum(|u_n(a)|+|u_n(b)|)$收敛,故$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上绝对并一致收敛.

7. 在$[0,1]$上定义函数列$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n},x=\dfrac{1}{n}\\0,x\neq\dfrac{1}{n}\end{cases}\quad n=1,2,\cdots$

证明:级数$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛,但它不存在优级数.

证 因$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1},x=\dfrac{1}{n+1}\\\dfrac{1}{n+2},x=\dfrac{1}{n+2}\\\cdots\quad\cdots\\\dfrac{1}{n+p},x=\dfrac{1}{n+p}\\0,\qquad\text{其它点}\end{cases}$$

所以,当$0\leqslant x\leqslant1$时,恒有

$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\right| < \frac{1}{n}$,$(n,p=1,2,\cdots)$. 于是 $\forall \varepsilon>0$,取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[0,1]$ 和一切自然数 p,都有 $\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\right| < \varepsilon$. 故所给级数在$[0,1]$上一致收敛.

假设 $\sum u_0(x)$ 在$[0,1]$上存在优级数 $\sum M_n$,取 $x=\frac{1}{n}$ 则

$$M_n \geqslant |u_n(x)| = \left|u_n(\frac{1}{n})\right| | = \frac{1}{n} > 0$$

由 $\sum M_n$ 收敛得知 $\sum \frac{1}{n}$ 收敛,这与 $\sum \frac{1}{n}$ 发散矛盾. 故 $\sum u_n(x)$ 不存在优级数.

8. 讨论下列函数列或函数项级数在所示区间 D 上的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1-2n}{(x^2+n^2)[x^2+(n-1)^2]}, D=[-1,1]$;

(2) $\sum 2^n \sin\frac{x}{3^n}, D=(0,+\infty)$;

(3) $\sum \frac{x^2}{[1+(n-1)x^2](1+nx^2)}, D=(0,+\infty)$;

(4) $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}, D=[-1,0]$;

(5) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$　　$D=(-1,1)$;

(6) $\sum \frac{\sin nx}{n}, D=(0,2\pi)$;

解　(1) 因 $|S_{n+p}(x)-S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1-2k}{(x^2+k^2)[x^2+(k-1)^2]}\right|$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{x^2+k^2}-\frac{1}{x^2+(k-1)^2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x^2+(n+p)^2}-\frac{1}{x^2+n^2}\right| < \frac{1}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

所以,$\forall \varepsilon>0$,取 $N=[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]+1$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[-1,1]$ 和

一切自然数 p,都有 $|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

故所给级数在$[-1,1]$上一致收敛.

(2) 对任意自然数 n,取 $x_n=\frac{\pi}{2}\cdot 3^n\in(0,+\infty)$,有

$$\left|2^n\sin\frac{x_n}{3^n}\right|=2^n\not\to 0(n\to\infty)$$

所以$\sum 2^n\sin\frac{x}{3^n}$在$(0,+\infty)$内不一致收敛.

(3) 因为

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{1+(k-1)x^2}-\frac{1}{1+kx^2}\right]$$

$$=1-\frac{1}{1+nx^2}\to 1(n\to\infty)$$

$$\sup_{0<x<+\infty}|S_n(x)-1|\geqslant\frac{1}{1+n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=\frac{1}{2}(n=1,2,\cdots)$$

因此所给级数在$(0,+\infty)$内不一致收敛.

(4) 记 $u_n(x)=(-1)^n,v_n(x)=\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}$,则

$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant 1,x\in[-1,0]$,对每一个 $x\in[-1,0]$,$\{v_n(x)\}$单调递减,且$\left|\frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0(n\to\infty)$,即 $v_n(x)\to 0(n\to\infty)$, $x\in[-1,0]$由狄利克雷判别法知$\sum\frac{x^n}{\sqrt{n}}$在$[-1,0]$上一致收敛.

(5) 记 $u_n(x)=(-1)^n,v_n(x)=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,与(4)类似可得$\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$在$(-1,1)$上一致收敛.

(6) 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}\sin\frac{1}{2}$,对任意自然数 N,存在 $n=N,p=N+1$, $x_0=\frac{1}{2(N+1)}\in[0,2\pi]$使

$$|u_{n+1}(x_0)+u_{n+2}(x_0)+\cdots+u_{n+p}(x_0)|$$

$$=\frac{1}{N+1}\sin\frac{N+1}{2(N+1)}+\frac{1}{N+2}\sin\frac{N+2}{2(N+1)}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2N+1}\sin\frac{2N+1}{2(N+1)}$$

$$>\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{2N+1}\right)$$

$$>\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}>\varepsilon.$$

故 $\sum\frac{\sin n\pi}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上不一致收敛.

9. 证明:级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对并一致收敛,但由其各项绝对值组成的级数在 $[0,1]$ 上却不一致收敛.

证　易见 $|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}$

再求函数 $u_{n+1}(x)=(1-x)x^{n+1}$ 在 $[0,1]$ 上的最大值.

由 $u'_{n+1}(x)=(n+2)x^n\left(\frac{n+1}{n+2}-x\right)$,知 $u_{n+1}(x)$ 在 $x=\frac{n+1}{n+2}$ 时达到在 $[0,1]$ 上的最大值.所以

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|R_n(x)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0,$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛,对 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 各项绝对值组成的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ 由于 $S_n(x)=(1-x)\sum_{k=0}x^k=1-x^n$,

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x<1\\0,x=1\end{cases}$$

可见 $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|s_n(x)-s(x)|=1\nrightarrow 0(n\to\infty)$

故所给级数在 $[0,1]$ 上绝对并一致收敛,但其各项绝对值组成的

级数在[0,1]上却不一致收敛.

10. 设 f 为定义在区间 (a,b) 内的任一函数, 记 $f_n(x)=\dfrac{[nf(x)]}{n}$, $n=1,2,\cdots$, 证明函数列 $\{f_n\}$ 在 (a,b) 内一致收敛于 f.

证　由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}\left|[nf(x)]-nf(x)\right|\leqslant\frac{1}{n}\quad n=1,2,\cdots,$$

所以, $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 则当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in(a,b)$, 均有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 故 $\{f_n\}$ 在 (a,b) 内一致收敛于 f.

11. 设 $\{u_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上正的递减且收敛于零的函数列, 每一个 $u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数. 则级数

$u_1(x)-u_2(x)+u_3(x)-u_4(x)+\cdots$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证　记 $v_n(x)=(-1)^n$, 则 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}v_k(x)\right|\leqslant 1$, ($x\in[a,b]$, $n=1,2,\cdots$)

因 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则 $0<u_n(x)<u_n(a)+u_n(b)$, $x\in[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$, 又 $u_n(a)$, $u_n(b)$ 收敛于零, 所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $|u_n(a)+u_n(b)|<\varepsilon$ 从而对一切 $x\in[a,b]$, 有

$$|u_n(x)-0|\leqslant|u_n(a)+u_n(b)-0|<\varepsilon$$

故 $u_n(x)\rightrightarrows 0\ (n\to\infty)$, $x\in[a,b]$, 又对每一个 $x\in[a,b]$, $\{u_n(x)\}$ 递减, 由狄氏判别法知, 所给级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

§2　一致收敛函数列与函数项级数的性质

1. 讨论下列各函数列 $\{f_n\}$ 在所定义的区间上: (a) $\{f_n\}$ 与 $\{f'n\}$ 的一致收敛性; (b) $\{f_n\}$ 是否具有定理 13.9; 13.10; 13.11 的条件与结论.

(1) $f_n(x)=\dfrac{2x+n}{x+n}$, $x\in[0,b]$

(2)$f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}, x \in [0,1]$

(3)$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, x \in [0,1]$

解　(1)(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = f(x), x \in [0,b]$,

$$\sup_{0\leqslant a\leqslant b} | f_n(x) - f(x) | = \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \frac{x}{x+n} \right| = \frac{b}{n} \to 0(n \to \infty)$$

$$f'_n(x) = \frac{n}{(x+n)^2}, \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = 0 = g(x), x \in [0,b]$$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant b} | f'_n(x) - g(x) | = \sup_{0\leqslant x\leqslant b} \left| \frac{n}{(x+n)^2} \right| = \frac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$$

故$\{f_n\}$与$\{f'_n\}$都在$[0,b]$上一致收敛.

(b)因$\left\{\frac{2x+n}{x+n}\right\}$在$[0,b]$上一致收敛,且每一项都连续.所以$\left\{\frac{2x+n}{x+n}\right\}$具有定理13.9,13.10的条件,从而具有定理结论.又$\{f'n\}$在$[0,b]$上一致收敛,每一项在$[0,b]$上连续,所以$\left\{\frac{2x+n}{x+n}\right\}$具有定理13.11的条件,结论.

(2)(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x = f(x), x \in [0,1]$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} | f_n(x) - f(x) | = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$$ 所以

$$x - \frac{x^n}{n} \rightrightarrows x(n \to \infty), x \in [0,1]$$

$$f'_n(x) = 1 - x^{n-1}, \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \begin{cases} 1, 0 \leqslant x < 1, \\ 0, x = 1 \end{cases},$$

$\{f'_n(x)\}$的每一项在$[0,1]$上连续,$\{f'_n(x)\}$的极限函数在$[0,1]$上不连续,故$\{f'_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛.

(b)因$\{f_n\}$在$[0,1]$上一致收敛,且每一个项连续,所以$\{f_n(x)\}$具有定理13.9,13.10的条件,从而具有定理结论,由于$\{f'_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛,所以$\{f_n\}$不具有定理13.11的条件.又$f'(x) = x' = 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$,从而不具有定理13.10结论.

(3)(a) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}nxe^{-nx^2}=0=f(x),x\in[0,1]$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}nxe^{-nx^2},$$

由于 $f'_n(x)=ne^{-nx^2}(1-2nx^2)$ 知 $f_n(x)$ 在 $x=\frac{1}{\sqrt{2n}}$ 达到 $[0,1]$ 上的最大值，所以

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|=\sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}\to\infty(n\to\infty)$$

故 $\{nxe^{-nx^2}\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

$$f'_n(x)=ne^{-nx^2}(1-2nx^2),\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=\begin{cases}0,0<x\leqslant 1\\ +\infty,x=0\end{cases}$$

$\{f'_n(x)\}$ 的每一项在 $[0,1]$ 上连续，其极限函数在 $[0,1]$ 上不连续，故 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛，(b) 因 $\{f_n\}$ 与 $\{f'_n\}$ 在 $[0,1]$ 上都不一致收敛，所以 $\{f_n\}$ 不具有定理 13.9,13.10,13.11 的条件，又 $\{f_n\}$ 的极限函数 $f(x)=0$，在 $[0,1]$ 上连续，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\frac{1}{2}\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=0$$

$\{f'_n(x)\}$ 在 $x=0$ 不收敛，所以 $\{f_n\}$ 具有定理 13.9 的结论；不具有定理 13.10,13.11 的结论.

2. 证明：若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上满足定理 13.11 的条件，则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证　设 $f'_n(x)\rightrightarrows g(x)\quad(n\to\infty)\quad x\in[a,b]$

因对 $[a,b]$ 上任意 x,x_0，有

$$f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'_n(t)dt,$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}g(t)dt,$$

所以

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x_0)-f(x_0)+\int_{x_0}^{x}[f'_n(t)-g(t)]dt|$$

$$\leqslant |f_n(x_0)-f(x_0)|+|\int_{x_0}^{x}|f'_n(t)-g(t)|dt|$$

由$\{f_n(x)\}$在点x_0收敛，$\forall\varepsilon>0,\exists N_1$，当$n>N_1$时，有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

又　$f'_n(x)\rightrightarrows g(x),(n\to\infty),x\in[a,b]$对上述$\varepsilon>0,\exists N_2$，当$n>N_2$时，对一切$t\in[a,b]$，有

$$|f'_n(t)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2}$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则当$n>N$时，(1)，(2)成立，从而

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

因此$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad(n\to\infty)\quad x\in[a,b]$.

3. 证明定理13.12和13.14.

证　(定理13.12)设x_0为$[a,b]$上任意一点，$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$. 当$x\in[a,b]$时，

$$\begin{aligned}&|S(x)-S(x_0)|\\&=|S(x)-S_n(x)+S_n(x)-S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x_0)|\\&\leqslant|S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)|\end{aligned}$$

因$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，从而$\forall\varepsilon>0,\exists N$，当$n>N$时，对一切$x\in[a,b]$，有

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\ |S_n(x_0)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由$u_n(x)$在$[a,b]$上连续，$(n=1,2,\cdots)$知对取定的$n>N$，$S_n(x)$在$[a,b]$上连续，所以对上述$\varepsilon,\exists\delta>0$，当$x\in[a,b]$，且$|x-x_0|<\delta$时，$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$

于是　$|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon$

故和函数$S(x)$在x_0连续，从而在$[a,b]$上连续. 定理13.12得证.

下证定理13.14.

设$\sum u'_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S^*(x)$,由$u'_n(x)$在$[a,b]$上连续及定理13.12知,函数$S^*(x)$在$[a,b]$上连续.又由定理13.13知,$\forall x\in[a,b]$,

$$\int_a^x S^*(t)dt=\int_a^x\sum u'_n(t)dt=\sum\int_a^x u'_n(t)dt$$
$$=\sum u_n(x)-\sum u_n(a)=S(x)-S(a)$$

故$\int_a^x S^*(t)dt=S(x)-S(a)$ 两端关于x求导,得

$$S'(x)=S^*(x)=\sum u'_n(x).$$

4. 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^2},x\in[-1,1]$,计算积分$\int_0^x S(t)dt$.

解 $\left|\frac{x^{n-1}}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}(x\in[-1,1])$,由$M$判别法知$\sum\frac{x^{n-1}}{n^2}$,在$[-1,1]$上一致收敛,显然$\frac{x^{n-1}}{n^2}(n=1,2,\cdots)$在$[-1,1]$上连续,由定理13.13知 $\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{n-1}}{n^2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$.

5. 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\cdot\sqrt{n}},x\in(-\infty,+\infty)$,计算积分$\int_0^x S(t)dt$.

解 $\left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},x\in(-\infty,+\infty)$,由$M$判别法知$\sum\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.显然$\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}(n=1,2,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,由定理13.13有

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\sqrt{n}}.$$

6. 设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}(x>0)$,计算积分$\int_{\ln2}^{\ln3}S(t)dt$

解 由$(ne^{-nx})'=-n^2e^{-nx}<0$,有$ne^{-nx}\leqslant ne^{-n\ln2},x\in[\ln2,\ln3]$.对级数$\sum ne^{-n\ln2}$,有$\sqrt[n]{ne^{-n\ln2}}=\frac{\sqrt[n]{n}}{e^{\ln2}}=\frac{\sqrt[n]{n}}{2}\to\frac{1}{2}<1(n\to\infty)$.于

是$\sum ne^{-n\ln 2}$收敛，从而$\sum ne^{-nx}$在$[\ln 2,\ln 3]$上连续上一致收敛．显然$ne^{-nx}(n=1,2,\cdots)$，在$[\ln 2,\ln 3]$上都连续，由定理13.13知

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t)dt = \sum \int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}dx = \sum\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}.$$

7．证明：函数$f(x)=\sum \dfrac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且有连续的导函数．

证　由$\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right|\leqslant \dfrac{1}{n^3}$知$\sum \dfrac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛．

因$\left(\dfrac{\sin nx}{n^3}\right)'=\dfrac{\cos nx}{n^2}$，而$\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant \dfrac{1}{n^2}$，由$\sum \dfrac{1}{n^2}$收敛知$\sum \dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛．又$\dfrac{\cos nx}{n^2}(n=1,2,\cdots)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，从而由定理13.13知$f(x)$具有连续的导数，从而$f(x)$也连续．

8．证明：定义在$[0,2\pi]$上的函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos nx(0<r<1)$满足定理13.13条件，且$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos nx\right)dx=2\pi$.

证　因$|r^n\cos nx|\leqslant r^n$，且$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(0<r<1)$收敛知，$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos nx$在$[0,2\pi]$上一致收敛，又$r^n\cos nx$在$[0,2\pi]$上连续，所以$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos nx$满足定理13.13条件，且$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos nx\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^n\cos nx dx$.

因$\int_0^{2\pi}dx=2\pi$，$\int_0^{2\pi}\cos nx dx=0(n=1,2,\cdots)$所以，

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos nx\right)dx=2\pi$$

9．讨论下列函数列在所定义区间上的一致收敛性及其极限函数的连续性，可积性和可微性．

(1) $f_n(x) = xe^{-nx^2}, n = 1,2,\cdots 3, x \in [-L,L]$;

(2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}, n = 1,2,\cdots$,

(ⅰ) $x \in [0,+\infty)$，　(ⅱ) $x \in [a,+\infty)(a > 0)$;

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x), x \in [-L,L]$.

$$\sup_{x\in[-L,L]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-L,L]} |xe^{-nx^2}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} \to 0,$$

$(n\to\infty)$，所以 $xe^{-nx^2} \rightrightarrows 0(n\to\infty), x \in [-L,L]$

由其极限函数 $f(x) = 0$ 知 $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 上连续可积可微，且由 xe^{-nx^2} 在 $[-L,L]$ 上连续，及定理 13.10 有 $\int_{-1}^{1} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$. 但由 $f'_n(x) = e^{-nx^2}(1-2nx^2)$

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \begin{cases} 0, & -L \leqslant x \leqslant L, \text{且 } x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

知 $[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$

$$(2)(\text{ⅰ})\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, 0 < x < +\infty \end{cases} = f(x)$$

$\{f_n(x)\}$ 的每一项在 $[0,+\infty)$ 上连续，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不连续，所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

由 $f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, 0 < x < +\infty \end{cases}$ 知 $f(x)$ 不在 $[0,+\infty)$ 上连续，可积，可微.

(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = f(x), x \in [a,+\infty)$

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty)} \left|\frac{nx}{1+nx} - 1\right|$$

$$= \sup_{x\in[a,+\infty)} \left|\frac{1}{1+nx}\right| = \frac{1}{1+na} \to 0(n\to\infty),$$

所以 $\dfrac{nx}{1+nx} \rightrightarrows 1(n\to\infty), x \in [a,+\infty)(a > 0)$

由 $f(x)=1$ 知 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续,可微,不可积.

10. 证明函数 $S(x)=\sum\frac{1}{n^x}$ 在$(1,+\infty)$内连续,且有连续的各阶导数.

证　$\forall x_0\in(1,+\infty)$,取 $1<p<x_0$,则 $0<\frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^p}(x\geqslant p)$ 又 $\sum\frac{1}{n^p}(p>1)$ 收敛,从而 $\sum\frac{1}{n^x}$ 在$[p,+\infty)$上一致收敛.由 $\frac{1}{n^x}(n=1,2,\cdots)$ 在$[p,+\infty)$上连续及定理 13.12 知,函数 $S(x)$ 在$[p,+\infty)$上连续,特别 $S(x)$ 在 x_0 连续.由 x_0 的任意性知 $S(x)$ 在$(1,+\infty)$内连续.

因 $(\frac{1}{n^x})^{(k)}=(-1)^k\frac{1}{n^x}\ln^k n$ 在$(1,+\infty)$内连续,$(k=1,2,\cdots)$,$\forall x_0\in(1,+\infty)$,取 $p\in(1,x_0]$,使 $\left|(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}\right|\leqslant\frac{\ln^k n}{n^p}(x\geqslant p)$,因定 k,取 λ 使 $p>\lambda>1$,由 $(\frac{ln^k n}{n^p})/\frac{1}{n^\lambda}=\frac{\ln^k n}{n^{p-\lambda}}\to 0(n\to\infty)$ 及 $\sum\frac{1}{n^\lambda}(\lambda>1)$ 收敛知 $\sum\frac{\ln^k n}{n^p}$ 收敛,于是 $\sum(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}$ 在$[p,+\infty)$上一致收敛,显然 $\sum\frac{1}{n^x}$ 在 $x>1$ 时收敛,由逐项求导及连续性定理知,$S_{(x)}^{(k)}=\sum(\frac{1}{n^x})^{(k)}=\sum(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}$ 在$[p,+\infty)$上连续,特别在 x_0 点连续,由 x_0 的任意性知 $S_{(x)}^{(k)}$ 在$(1,+\infty)$内连续,故 $S(x)$ 在$(1,+\infty)$内连续且有连续的各阶导数.

11. 设 f 在$(-\infty,+\infty)$上有任何阶导数,记 $F_n=f^{(n)}$,且在任何有限区间内,$F_n\rightrightarrows\varphi(n\to\infty)$,试证　$\varphi(x)=ce^x$(c 为常数).

证明:$f^{(n)}(x)$ 在任何有限区间(a,b)内有连续的导数,又 $f^{(n)}$ 在(a,b)内一致收敛于 $\varphi(x)$,且其导数列 $f^{(n+1)}(x)$ 在(a,b)内也一致收敛于 $\varphi(x)$,由定理 13.11.

$$\varphi'(x)=[\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)]'=\lim_{n\to\infty}[f^{(n)}(x)]'=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=$$

$\varphi(x)$

积分得　$\ln\varphi(x) = x + c_1$　即 $\varphi(x) = e^{c_1}e^x = ce^x$，其中 $c = e^{c_1}$ 为常数.

总 练 习 题

1. 试问 k 为何值时，下列函数列 $\{f_n\}$ 一致收敛：

(1) $f_n(x) = xn^k e^{-nx}, 0 \leqslant x < +\infty$；

$$(2)\ f_n(x) = \begin{cases} xn^k, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ \left(\dfrac{2}{n} - x\right)n^k, & \dfrac{1}{n} < x \leqslant \dfrac{2}{n} \\ 0, & \dfrac{2}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x), x \in [0, +\infty)$

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} xn^k e^{-nx}.$$

由 $f'_n(x) = n^k e^{-nx}(1 - nx)$，知 $f_n(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{n}$ 达到 $[0, +\infty)$ 上的最大值，所以

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = n^{k-1}e^{-1},$$

于是，当 $k - 1 < 0$，即 $k < 1$ 时，

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

当 $k - 1 \geqslant 0$，即 $k \geqslant 1$ 时，

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \to \begin{cases} +\infty, & k > 0 \\ \dfrac{1}{e}, & k = 1 \end{cases} \quad (n \to \infty),$$

故 $k < 1$ 时，$\{xn^k e^{-nx}\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) 当 $x = 0$ 时，$f_n(x) = 0, f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

当 $0 < x \leqslant 1$ 时，只要 $n > \dfrac{2}{x}$，就有 $f_n(x) = 0$，所以 $f(x) = 0$ 于是 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上的极限函数为 $f(x) = 0$.

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=f_n(\frac{1}{n})$$

$$=n^{k-1}\to\begin{cases}0, & k<1\\ 1, & k=1\\ +\infty, & k>1\end{cases}\quad(n\to\infty)$$

故当 $k<1$ 时,$\{f_n(x)\}$ 在$[0,1]$上一致收敛.

2. 证明:(1) 若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty),x\in I$,且 f 在I上有界,则$\{f_n\}$ 至多除有限项外, 在 I 上是一致有界的; (2) 若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty),x\in I$,且对每一个自然数 n,f_n 在I上有界,则$\{f_n\}$ 在 I 上一致有界.

证　(1) 设 $|f(x)|\leqslant M_1,x\in I$,由 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty),x\in I$ 知, 对 $\varepsilon=1,\exists N$, 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in I$, 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon=1$,从而 $\forall x\in I,|f_n(x)|<M_1(n>N)$.

(2) 因 $f_n(x)\to f(x)(n\to\infty),x\in I$,由柯西准则,对 $\varepsilon=1$,$\exists N$,当 $n>N+1>N$ 时,对一切 $x\in I$ 有

$$|f_n(x)-f_{N+1}(x)|<\varepsilon=1,$$

所以当 $n>N+1$ 时,$\forall x\in I,|f_n(x)|<|f_{N+1}(x)|+1$

又对每个自然数 n,$f_n(x)$ 在 I 上有界,设 $|f_n(x)|\leqslant M_n(n=1,2,\cdots,N+1,x\in I)$,令 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_{N+1}\}$,则对一切自然数 n,有 $|f_n(x)|\leqslant M+1(x\in I)$

3. 设 f 为$[\frac{1}{2},1]$上的连续函数,证明:

(1)$\{x^nf(x)\}$ 在$[\frac{1}{2},1]$上收敛;

(2)$\{x^nf(x)\}$ 在$[\frac{1}{2},1]$上一致收敛的充要条件是 $f(1)=0$.

证　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x^nf(x)=\begin{cases}0, & \frac{1}{2}\leqslant x<1\\ f(1), & x=1\end{cases}$　即 $\{x^nf(x)\}$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上收敛,且极限函数为

$$g(x)=\begin{cases}0,\frac{1}{2}\leqslant x<1\\ f(1),x=1\end{cases}$$

(2) 必要性　因 f 在闭区间$[\frac{1}{2},1]$上连续,所以 f 在$[\frac{1}{2},1]$上有界,又$\{x^nf(x)\}$在$[\frac{1}{2},1]$上一致收敛,$x^nf(x)(n=1,2,\cdots)$在$[\frac{1}{2},1]$上连续,所以其极限函数 $g(x)$ 在$[\frac{1}{2},1]$上连续,从而

$$f(1)=g(1)=\lim_{x\to1^-}g(x)=0.$$

充分性　设 $|f(x)|\leqslant M,(x\in[\frac{1}{2},1])$,由 $f(1)=0$ 知$\{x^nf(x)\}$的极限函数 $g(x)=0$,考虑 $|x^nf(x)-0|$

由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续,从而 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,(不妨设 $\delta<\frac{1}{2}$),当 $1-\delta<x\leqslant1$ 时,$|f(x)-f(1)|=|f(x)|<\varepsilon$,从而

当 $1-\delta<x\leqslant1$ 时,$|x^nf(x)-0|\leqslant|f(x)|<\varepsilon$,

当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1-\delta$ 时,$|x^nf(x)-0|\leqslant(1-\delta)^nM$,

而 $(1-\delta)^nM\to0(n\to\infty)$,所以,对上述 ε,$\exists N$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[\frac{1}{2},1-\delta]$,有 $|x^nf(x)-0|\leqslant(1-\delta)^nM<\varepsilon$.

综上:$\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[\frac{1}{2},1]$ 有 $|x^nf(x)-0|<\varepsilon$,故$\{x^nf(x)\}$在$[\frac{1}{2},1]$上一致收敛.

4. 若把定理 13.10 中一致收敛函数列$\{f_n\}$的每一项在$[a,b]$上连续改为在$[a,b]$上可积,试证$\{f_n\}$上的极限函数在$[a,b]$上也可积.

证　对$[a,b]$任作一分割 T,$f(x)$ 在 $\triangle_i$ 上的振幅为

$$\omega_i=\sup_{x',x''\in\triangle_i}|f(x')-f(x'')|.$$

因 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty)$,$x\in[a,b]$,所以,$\forall\varepsilon>0,\exists N$.使

$$|f_N(x') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\ |f_N(x'') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(x', '' \in [a,b]).$$

又 $f_N(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以对上述 $\varepsilon, \exists \delta > 0$，只要 $\|T\| < \delta$，有 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega'_i \triangle x_i < \frac{\varepsilon}{3}$，其中 $\omega'_i = \sup\limits_{x', x'' \in \triangle_i} |f_N(x') - f(x'')|$

于是，当 $x', x'' \in \triangle_i$ 时

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leqslant |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x'')| \\ &\quad + |f_N(x'') - f(x'')| < \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega'_i \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \triangle x_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega'_i\right] \triangle x_i \\ &= \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i + \sum_{i=1}^{n} \omega'_i \triangle x_i < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

5. 设级数 $\sum a_n$ 收敛，证明 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sum \frac{a_n}{n^x} = \sum a_n$.

证　因 $\left|\frac{1}{n^x}\right| \leqslant 1 (x \in [0, +\infty))$，且 $\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$，所以 $\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$ 单调一致有界，又 $\sum a_n$ 收敛，从而 $\sum a_n$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛，由阿贝尔判别法 $\sum \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛，显然 $\frac{a_n}{n^x} (n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，由连续性定理知，$\sum \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

故　$\lim\limits_{x \to 0^+} \sum \frac{a_n}{n^x} = \sum \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{a_n}{n^x} = \sum a_n$.

6. 设可微函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛，$\{f'_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，证明：$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证　设 $|f'_n(x)| \leqslant M, (n = 1, 2, \cdots, x \in [a,b])$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，在 $[a,b]$ 上取 $m-1$ 个点，$x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$ 满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$$

使它们把$[a,b]$分割成 m 个(有限)小区间 $\triangle_i=[x_{i-1},x_i]$ 且

$$\triangle x_i=x_i-x_{i-1}<\frac{\varepsilon}{4M}(i=1,2,\cdots,m).$$

因$\{f_n\}$在$[a,b]$上收敛,所以对 $\triangle_i$ 上任意一点$\overline{x_i}$, $\exists N_i>0$,当 $n>N_i$ 时,对任意自然数 p,

$$|f_n(\overline{x_i})-f_{n+p}(\overline{x_i})|<\frac{\varepsilon}{2}(\forall\ \overline{x_i}\in\triangle_i),$$

对函数 $f_n(x)-f_{n+p}(x)$ 应用微分中值定理: $\forall\, x\in\triangle_i$

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)-f_n(\overline{x_i})-f_{n+p}(\overline{x_i})|$$

$$=|f'_n(\xi)-f'_{n+p}(\xi)||x-\overline{x_i}|<2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}$$

于是

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|\leqslant|f_n(x)-f_{n+p}(x)-f_n(\overline{x_i})+f_{n+p}(\overline{x_i})+$$

$$f_{n+p}(\overline{x_i})|+|f_n(\overline{x_i})-f_{n+p}(\overline{x_i})|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

取 $N=\max\{N_1,\cdots,N_m\}$,由 $n>N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon$,故$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.