第 16 讲 辐角原理 2020.4.16

1. (辐角原理的推广) 假设 Ω 是平面区域, 边界为分段光滑的简单闭曲线. g 在 $\overline{\Omega}$ 上全纯. f 都在 $\overline{\Omega}$ 上半纯. 假设 f 在 $\partial\Omega$ 上没有零点或极点, 在 Ω 中, 零点为 $a_1, \cdots, a_n$, 阶分别为 $k_1, \cdots, k_n$; 极点为 $p_1, \cdots, p_m$, 阶分别为 $q_1, \cdots, q_m$, 证明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} k_j g(a_j) - \sum_{s=1}^{m} q_s g(p_s).$$

(注: 此结论当 $g \equiv 1$ 时, 即为辐角原理, 故可以看成辐角原理的推广. 另外如果取 $f(z) = z - a_1$, 上式是 Cauchy 积分公式, 因此此结论又可以看成 Cauchy 积分公式的推广).

2. 利用 Rouché 理证明代数学基本定理.

3. (Rouché 定理的对称形式, Estermann 1962, Glicksberg 1976) 假设 Ω 是平面区域, 边界为分段光滑的简单闭曲线. f, g 都在 $\overline{\Omega}$ 上全纯, 且满足

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \ \forall z \in \partial\Omega.$$

则 f, g 在 Ω 内零点个数一样多.

4. 假设 $r > 0$, 证明当 n 很大时, 多项式

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

在 $D(0, r)$ 上没有根.

5. 求方程 $z^5 - 5z^3 + z - 2 = 0$ 在单位圆内根的个数.