## 第 18 讲：Schwarz 引理 2019.4.23

1. 假设 $f$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯有界, $\gamma=\{e^{it};0\le t\le\pi\}$ 为 $\partial\mathbb{D}$ 的上半圆周, 满足当 $z\to\gamma$ 时, $f(z)\to 0$, 证明 $f\equiv 0$.

2. $f:\mathbb{D}\to\mathbb{H}_R$ 全纯且 $f(0)=1$, 其中 $\mathbb{H}_R=\{z;\mathrm{Re}\,z>0\}$ 为右半平面. 利用 Schwarz 引理证明

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\le \mathrm{Re}f(z)\le |f(z)|\le\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad \forall z\in\mathbb{D}.$$

上式对某个 $z_0\ne 0$ 成立的充要条件是什么?

3. 记 $\mathbb{H}=\{z=x+iy;y>0\}$ 为上半平面, $f:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ 全纯，对任意 $z,w\in\mathbb{H}$, 证明

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{f(z)-\overline{f(w)}}\right|\le\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|.$$

由此说明

$$|f'(w)|\le\frac{\mathrm{Im}(f(w))}{\mathrm{Im}(w)}.$$

4. 设 $f$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯, $f(0)=-1$, 并且满足 $|1+f(z)|<1+|f(z)|$, $\forall z\in\mathbb{D}$. 求 $|f'(0)|$ 的最大值.

5. 设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全纯, 证明

$$\frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)||z|}\le|f(z)|\le\frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)||z|},\forall z\in\mathbb{D}.$$

6. 假设 $f$ 是一个 $k$ 次多项式, 在单位圆周上满足 $|f(z)|=1,\forall z\in\partial\mathbb{D}$. 证明对任意 $z$ 满足 $|z|>1$, 成立 $|f(z)|\le|z|^k$.

7. 设 $f$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上全纯, $|\mathrm{Re}f(z)|<1$, $f(0)=0$. 证明

$$|f'(0)|\le\frac{4}{\pi}.$$

等号成立的充要条件是啥?

8. (附加题) 写出你在学习复变函数的过程中, 认为最漂亮的三个定理, 以及这些定理打动你的理由. 另外你对课程有哪些建议？(请发送到 wxg688@163.com, 无截止日期)