吉林大学2013-2014学年第一学期“高等代数I”期末考试试题

参考解析

一、直接写出结果（共40分）

1、求多项式$f(x)=x^3+4x^2+5x+2$在有理数域上的标准分解.

解：$f(x)=x^3+4x^2+5x+2=(x+1)^2(x+2)$

2、若$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & t\end{pmatrix}$，且$|A|=1$，求$A$.

解：$A=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$（$t=7$）

3、已知行列式$|\alpha \quad \beta \quad \gamma|=1$，求$|\beta+\gamma \quad \alpha+\gamma \quad \alpha+\beta|$的值.

解：$|\beta+\gamma \quad \alpha+\gamma \quad \alpha+\beta|=|\beta-\alpha \quad \alpha+\gamma \quad \alpha+\beta|=|2\beta \quad \alpha+\gamma \quad \alpha+\beta|=|2\beta \quad \alpha+\gamma \quad \alpha|=|2\beta \quad \gamma \quad \alpha|=2$.

4、设$n(n>2)$阶行列式D的第一列元素都是2013，求D的第n列元素的代数余子式之和.

解：为0.

5、若$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

解：$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

6、是否存在实数域上的n阶幂等矩阵A也是反对称矩阵.若存在，请指出数目.

解：有且只有一个，为零矩阵.

7、已知2013阶矩阵$A=((i+j)^2)$，求$|A|$.

解：为0.

8、若 A,B,C 均为 $n(n\geq 3)$阶矩阵，若 $r(A)+r(B)=2n-3$，但 $r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\neq 2n-3$,求 $r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$.

解：由条件 $r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=2n-3$，又 $r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\neq 2n-3$，故：

$r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}>2n-3$.又 $r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}=\frac{1}{2}r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}+\frac{1}{2}r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}=\frac{1}{2}r\begin{pmatrix} O & O \\ C & B \end{pmatrix}+\frac{1}{2}r(A)+$

$\frac{1}{2}r\begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix}+\frac{1}{2}r(B)\leq 2n-\frac{3}{2}$，故 $r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}=2n-1$.

二、(共 10 分) 设 A 是秩为 r 的 n 阶方阵.证明存在矩阵 B，使得 BA 为秩为 r 的对称矩阵.

证明：有 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,|P||Q|\neq 0$，取 $B=Q^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$，则：

$BA=Q^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=Q^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$，则 BA 秩为 r，且

$(BA)^T=(Q^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q)^T=Q^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=BA$ 满足条件.

三、(共 20 分) 设正整数 $n>1$，讨论方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+\ldots\ldots+bx_n=a+\frac{1}{n} \\ bx_1+ax_2+\ldots\ldots+bx_n=b+\frac{1}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bx_1+bx_2+\ldots\ldots+ax_n=b+\frac{1}{n} \end{cases}$ 解的情况，并在有无穷多解时求出这个方程组的通解.

解：其增广矩阵做初等行变换可得矩阵 $\begin{pmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \ldots & a+(n-1)b & a+(n-1)b+1 \\ b & a & \ldots & b & b+\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \ldots & a & b+\frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

① $a+(n-1)b=0$ 时，易知方程组无解；

② $a+(n-1)b\neq 0$，$a\neq b$ 时，原方程组有唯一解；

③ $a+(n-1)b\neq 0$，$a=b$ 时，原方程组有无穷多解，通解为：

$x=(1+\frac{1}{nb})\varepsilon_1+t_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\ldots\ldots t_{n-1}(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)$.

四、（共 10 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\ldots+l_n\alpha_n$，其中$l_1+l_2+\ldots+l_n=1$.

证明：$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots\cdots$，$\alpha_n+\beta$线性无关.

证明：设$c_1(\alpha_1+\beta)+c_2(\alpha_2+\beta)+\ldots\ldots+c_n(\alpha_n+\beta)=0$.则有：

$(l_1(c_1+c_2+\ldots+c_n)+c_1)\alpha_1+(l_2(c_1+c_2+\ldots+c_n)+c_2)\alpha_2+\ldots\ldots+(l_n(c_1+c_2+\ldots+c_n)+c_n)\alpha_n=0$.

那么由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关，知：$l_i(c_1+c_2+\ldots+c_n)+c_i\equiv 0$.

得$c_1=c_2=\ldots=c_n\equiv 0$

五、（共 10 分）设$f,g,h\in Q[x]$.若$(f^3,g^4)=(f^4,g^3)=h^3$，则$(f,g)=h$.

证明：易知$\left(\frac{h}{(h,g)}\right)^3\left|\left(\frac{g}{(h,g)}\right)^3\right.$，故$\frac{h}{(h,g)}\left|\left(\frac{g}{(h,g)}\right)^2\right.$，$\frac{h}{(h,g)}\left|\frac{g}{(h,g)}\right.$.

故$h|g$，同理$h|f$.而由$(f^3,g^4)=h^3$知$\exists u,v$，使$uf^3+vg^4=h^3$，有：

$\left(u(\frac{f}{h})^2g\right)f+\left(v(\frac{g}{h})^2g\right)g=h$，又 h 首一，故$(f,g)=h$.

六、（共 10 分）设 A,B 均为 $n(n>2)$阶矩阵，$u=(1,2,\ldots,n)$.若 $Au=Bu=0$ 且秩 AB 为 $n-1$.
证明：A，B 行等价.

证明：考察齐次线性方程组$u^T(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)^T=0$，其维数为 $n-1$.由 $Au=0$，知 $u^TA^T=0$.

即得 A^T的各列都是方程组的解.再由的 A^T列秩也为 $n-1$ 知的列向量组也含有方程组的的一个基础解系.因此的 A^T列空间对于方程组的解空间.同理的 A^T列空间也等于的解空间.从而 A^T与 B^T二者的列空间相等，故其列等价，故 A 与行 B 等价.