每日一题（9）

2019.03.30

条件同上一题: 已知方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}, r(\boldsymbol{A})=1, \lambda=a_{11}+\cdots+a_{nn}$, 求: (可以用上一题已经证明的结论)

(1) $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$;

(2) 若 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 求它的逆矩阵(用 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \lambda$ 表示).

解: (1) $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{I}+\alpha\beta)=\det(1+\beta\alpha)=1+\lambda$. (利用结论: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则 $\det(\lambda\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\lambda^{n-m}\det(\lambda\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$.)

(2) 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}$, 代入 $\boldsymbol{A}^2=\lambda\boldsymbol{A}$ 并整理得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-(2+\lambda)\boldsymbol{I})=-(1+\lambda)\boldsymbol{I}$.

因为$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 所以 $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=1+\lambda\neq 0$, 故 $\boldsymbol{B}^{-1}=\left(-\dfrac{1}{1+\lambda}\right)(\boldsymbol{B}-(2+\lambda)\boldsymbol{I})$, 于是, 把 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 代入并化简即得 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}-\dfrac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{A}$.