习题一解答

1. 设 $\{A_j \mid j=1,2,\cdots\}$ 是事件列，求互不相容事件 $\{B_j \mid j=1,2,\cdots\}$，使得 $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$，且 $B_j \subset A_j$.

解　令 $A_0=\phi$, $B_j = A_j - \bigcup_{i=0}^{j-1} A_j$, 即有

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \qquad 且\ B_j \subset A_j, j=1,2,\cdots$$

上页　下页　返回

2．100件产品中有3件次品，从中任取两件，

求至少有一件次品的概率。

解 令 $A=$“至少有一件次品”，

$\overline{A}=$“两件都是合格品”

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{97}^{2}}{C_{100}^{2}}=0.0594$$

上页 下页 返回

3. 从一副扑克牌的52张中无放回地任取3张，求这3张牌同花色的概率和相互不同花色的概率。

解　令 $A=$“3张牌同花色”

$B=$“3张牌相互不同花色”

$$P(A)=\frac{C_4^1C_{13}^3}{C_{52}^3}=\frac{22}{425}\quad P(B)=\frac{C_4^3\cdot 13^3}{C_{52}^3}=\frac{169}{425}$$

上页　下页　返回

4. 从一副扑克牌的52张中有放回地任取3张，

求这3张牌互不同号的概率和同号的概率。

解　令 $A=$ “3张牌互不同号”

$B=$ “3张牌同号”

$$P(A)=\frac{C_{52}^{1}C_{52-4}^{1}C_{52-8}^{1}}{52^{3}}=\frac{132}{169}$$

$$P(B)=\frac{C_{52}^{1}C_{4}^{1}C_{4}^{1}}{52^{3}}=\frac{1}{169}$$

上页　下页　返回

5. 钥匙串上的5把钥匙中只有一把可以开房门，现在无放回地试开房门，计算

（1）第三次打开房门的概率。

（2）三次内打开房门的概率。

（3）如果5把中有2把可以打开房门，求三次内打开房门的概率。

解 （1） $p=\dfrac{4\times 3\times 1}{5\times 4\times 3}=\dfrac{1}{5}$

上页 下页 返回

（2）令 $A_i=$“第 i 次打开房门”，$i=1,2,3,$

则 $P(A_i)=\dfrac{1}{5}$，且 A_1,A_2,A_3 互斥，则

$$p=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

（3）因为 $P(A_1)=\dfrac{2}{5}$，$P(A_2)=\dfrac{3\times 2}{5\times 4}=\dfrac{3}{10}$，

$$P(A_3)=\frac{3\times 2\times 2}{5\times 4\times 3}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},\quad p=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{9}{10}$$

上页 下页 返回

6. 有15名新研究生随机选择3个专业，每个专业5人，

计算如果这15名学生中有3名女生，

（1）每个专业各得一名女生的概率

（2）3名女生分在同一专业的概率

解 （1）$p=\dfrac{12!}{4!4!4!}\Big/\dfrac{15!}{5!5!5!}=\dfrac{25}{91}$

（2）$p=\dfrac{12!}{2!5!5!}\Big/\dfrac{15!}{5!5!5!}=\dfrac{6}{91}$

上页 下页 返回

7. 直径为1的硬币随机地落在打有方格的平面上，问方格的边长为多少才能使硬币和网格不相交的概率小于0.01.

解 假设方格的边长为 x, 硬币的圆心落在方格内是等可能的，则圆心落在如图小方格 A 中时，硬币不与网格相交 $P(A)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}<0.01$, $x-1<\dfrac{x}{10}$,

$$x<\frac{10}{9}$$

上页 下页 返回

8. 在 $[0,1]$ 中任取三点 X, Y, Z, 求线段 X, Y, Z, 能构成三角形的概率。

解法一（三维） 构成三角形的充要条件是：两边和大于第三边。

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 < x, y, z < 1\} \qquad m(\Omega) = 1$$

$$A = \{(x, y, z) \mid x + y > z, x + z > y, y + z > x\}$$

上页 下页 返回

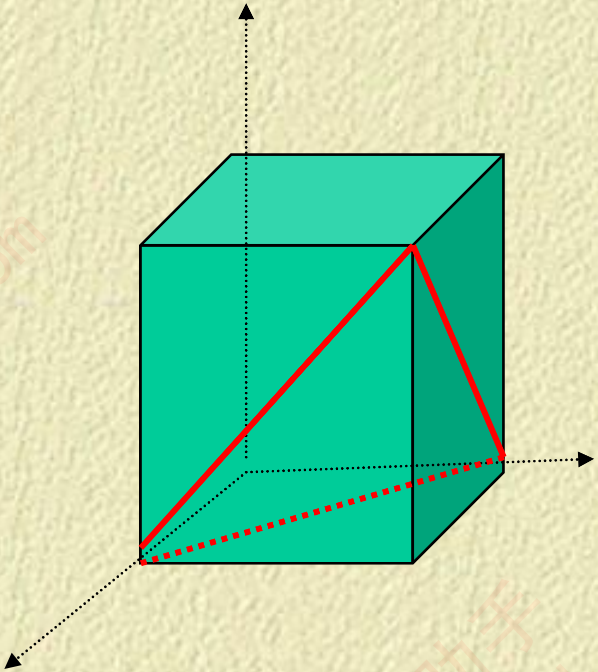
如图相当于立方体 Ω 切去三个角，

每个角的体积为

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6},$$

$$m(A)=1-3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A)=\frac{1}{2}$$



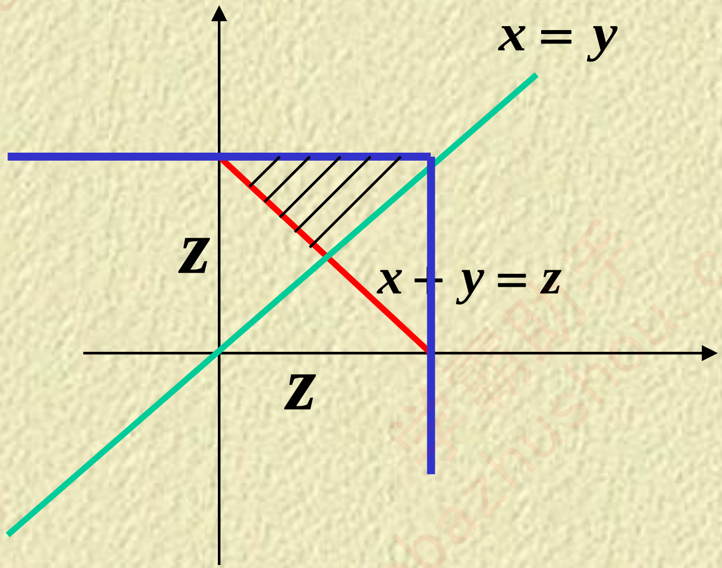
上页 下页 返回

解法二 不妨假设 $0 < x \le y \le z \le 1$，则

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x \le y \le z \le 1\}$$

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, x + y > z\}$$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}z^2}{\frac{1}{2}z^2} = \frac{1}{2}$$



上页 下页 返回

9. 已知24小时内有两条船相互独立且随机的到达码头，它们的停靠时间分别是3和4小时，如果码头只能容纳一只船，求后到的船需要等待的概率。

解 设 x, y 分别是两只船到达码头的时间，则

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \le x, y \le 24\}$$

$$A = \{(x, y) | x - y < 4 \text{或} y - x < 3\}$$

上页 下页 返回

$$p=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{24^2-\frac{1}{2}(21^2+20^2)}{24^2}=\frac{311}{1152}$$

10. 设对每个实数 α, F_α 是 Ω 上事件域，证 $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ 也是 Ω 上事件域。

证明 令 $F=\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$，只需证 F 满足事件域

的三个性质

上页 下页 返回

（1） $\because \forall \alpha,\ \Omega \in F_\alpha \Rightarrow\ \Omega \in \bigcap_{\alpha} F_\alpha = F$

（2） $\forall A \in \bigcap_{\alpha} F_\alpha = F \Rightarrow$ 对 $\forall \alpha,\ A \in F_\alpha \Rightarrow$

$\forall \alpha,\ \overline{A} \in F_\alpha \Rightarrow\ \overline{A} \in \bigcap_{\alpha} F_\alpha = F$

（3） $\forall A_j \in \bigcap_{\alpha} F_\alpha = F \Rightarrow \forall \alpha,\ A_j \in F_\alpha$

$\Rightarrow\ \forall \alpha,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in F_\alpha \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \bigcap_{\alpha} F_\alpha = F$

所以 $F = \bigcap_{\alpha} F_\alpha$ 也是Ω上事件域。

上页 下页 返回

11. 电梯中的两个人等可能地要去 $2,3,\cdots,n$ 层

（1）写出相应的概率空间 (Ω,F,P)，给出 $\#\Omega,\#F$

（2）用 A 表示这两个人到达不同的楼层，计算 $P(A)$

解 （1）用 $a_ib_j=$ 第一人去 i 层第二人去 j 层，则

$$\Omega=\{a_ib_j \mid i,j=2,3,\cdots.n\} \qquad \#\Omega=(n-1)^2$$

F 是 Ω 子集的全体，则 $\qquad \#F=2^{(n-1)^2}$

上页 下页 返回

对 $B\in F$，定义 $P(B)=\dfrac{\#B}{\#\Omega}$

（2）A 表示两个人到达不同楼层，

$\overline{A}$ 表示两个人到达相同楼层

$$P(\overline{A})=\frac{n-1}{(n-1)^2}=\frac{1}{n-1},$$

$$P(A)=1-\frac{1}{n-1}=\frac{n-2}{n-1}$$

上页 下页 返回

12. 两个人下棋，每局获胜者得一分，累计多于对手两分者获胜，设甲每局获胜的概率为 p, 求甲最终获胜的概率。

解（1）乙胜 a 局，甲要胜 $a+2$ 局才算最终获胜，所以下棋的总盘数是 $2a+2$, 为偶数。

（2）甲要最终获胜，最后要两局连胜

设下棋的盘数 $n=2k+2$,最后两局甲胜，前 $2k$ 局

上页 下页 返回

甲乙各胜 k 局。

前 $2k$ 局两盘两盘看成一个盒子，每个盒子中放入 V 和 X，V 表示甲先赢后输，X 表示甲先输后赢，则每个盒子有2种, 共有 2^k 种，所以

$$p=\sum_{k=0}^{\infty}p^2(2^k p^k q^k)=p^2\sum_{k=0}^{\infty}(2pq)^k$$

$$=p^2\frac{1}{1-2pq}=\frac{p^2}{p^2+q^2}\quad(p+q=1)$$

上页 下页 返回

13. 甲、乙二人比赛，如果甲胜的概率 $p > \frac{1}{2}$，三局两胜的比赛规则对甲有利，还是五局三胜的规则对甲有利？

解 设三局两胜下甲取胜的概率为 p_1, 则

$$p_1 = p^2 + 2p^2 q = p^2 + 2p^2(1-p) = 3p^2 - 2p^3$$

设五局三胜下甲取胜的概率为 p_2, 则

$$p_2 = p^3 + 3p^3 q + 6p^3 q^2 = 6p^5 - 15p^4 + 10p^3$$

所以 $p_2 - p_1 = 3p^2(p-1)^2(2p-1) > 0$

即五局三胜对甲有利

14. 一副眼镜第一次落地摔坏的概率是0.5，若第一次没摔坏，第二次摔坏的概率是0.7，若第二次没摔坏第三次落地摔坏的概率是0.9，求该眼镜落地三次没有摔坏的概率。

解 令$A_i =$ 眼镜第 i 次落地没有摔坏, $i = 1,2,3$

上页 下页 返回

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\setminus A_1)P(A_3\setminus A_1A_2)$$

$$=0.5\times0.7\times0.1=0.015$$

15. 甲吸烟时在两盒有差别的火柴中任选一盒，使用其中的一根火柴，设每盒火柴中有n根火柴，求遇到一盒空而另外一盒剩下r根火柴的概率。

解 吸烟一次看做一次试验，重复了$2n-r$次，两盒火柴有差别，则

上页 下页 返回

$$p = 2C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}$$

注 此题改为两盒火柴无差别，$p = C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}$

16. 一枚深水炸弹击沉、击伤和不能击中一艘潜水艇的概率分别是$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{6}$，设击伤该艘潜水艇两次也使该潜水艇沉没，求用4枚深水炸弹击沉该艘潜水艇的概率。

上页 下页 返回

解 令 $A=$ 潜水艇未被击中

（四枚全不中或三枚不中且一枚击伤）

$$P(A)=(\frac{1}{6})^4+C_4^3(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{2})=\frac{13}{36^2}=\frac{13}{1296}$$

$$P(\overline{A})=1-\frac{13}{1296}=\frac{1283}{1296}$$

上页 下页 返回

17. 设一辆出租车一天内穿过 k 个路口的概率是

$p_k=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},(k=0,1,2\cdots),\lambda$ 是正常数，如果各个路口的红绿灯是独立工作的，在每个路口遇到红灯的概率为 p，求这辆出租车一天内遇到 m 个红灯的概率。

解 设 $B_k=$ 出租车一天穿过 k 个路口，$(k=0,1,2\cdots)$

$A_m=$ 出租车一天内遇到 m 个红灯，$(m=0,1,2\cdots)$

上页 下页 返回

则 （ $k<m$ 时概率为0）

$$P(A_m)=\sum_{k=m}^{\infty}P(B_k)P(A_m \setminus B_k)$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}C_k^m p^m(1-p)^{k-m}$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\frac{k!}{m!(k-m)!}p^m(1-p)^{k-m}$$

上页 下页 返回

$$= \frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \lambda^{k-m} \frac{1}{(k-m)!} (1-p)^{k-m}$$

$$= \frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \frac{(1-p)^l}{l!} = \frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda}}{m!} e^{\lambda(1-p)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p} \qquad (m = 0,1,2\cdots)$$

上页 下页 返回

18. 瓮I中有2个白球3个黑球，瓮II中有4个白球和1个黑球，瓮III有3个白球和4个黑球，随机选一个瓮并从中随机地抽取一个球，发现是白球，求瓮I被选到的概率。

解　设 A_i = 选中瓮 i, $i = 1,2,3$　B = 取白球

$$P(A_1 \setminus B) = \frac{P(A_1)P(B \setminus A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \setminus A_i)}$$

上页　下页　返回

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}}=\frac{14}{57}$$

19. 甲乘汽车、火车的概率分别为0.6、0.4，汽车和火车正点到达的概率分别为0.8、0.9，现在甲已经正点到达，求甲乘火车的概率。

解 设 $A=$甲乘汽车，$B=$ 甲正点到，则

上页 下页 返回

$$P(A \backslash B)=\frac{P(A)P(B \backslash A)}{P(A)P(B \backslash A)+P(\bar{A})P(B \backslash \bar{A})}$$

$$=\frac{0.4\times 0.9}{0.4\times 0.9+0.6\times 0.8}=\frac{3}{7}$$

20. 设有 $n+1$ 个口袋，第 $i(0\le i\le n)$ 个口袋中有 i 个白球，$n-i$ 个红球，先在这 $n+1$ 个口袋中任意选定一个，然后在这袋中有放回地抽取 r 个球，

上页 下页 返回

如果这 r 个球都是红球，求再抽一个也是红球的概率。

解　设 A_i = 选中第 i 个口袋, $i = 0,1,2,\cdots,n$

B_j = 第 j 次抽红球, $j = 1,2,\cdots,r$

$$P(B_1) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1 \mid A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1}\frac{n-i}{n}$$

$$P(B_1B_2) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B_1B_2 \mid A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n-i}{n}\right)^2$$

上页　下页　返回

$$P(B_1B_2\cdots B_r)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B_1B_2\cdots B_r\mid A_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n-i}{n}\right)^r$$

$$\therefore P(B_{r+1}\setminus B_1\cdots B_r)=\frac{P(B_1\cdots B_rB_{r+1})}{P(B_1\cdots B_r)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{(n+1)n^{r+1}}\sum_{i=0}^{n}(n-r)^{r+1}}{\dfrac{1}{(n+1)n^{r}}\sum_{i=0}^{n}(n-r)^{r}}=\frac{\sum_{i=0}^{n}(n-r)^{r+1}}{n\sum_{i=0}^{n}(n-r)^{r}}$$

上页 下页 返回

21. 一台机床工作状态良好时，产品的合格率是 99%，机床发生故障时产品的合格率是 50%，设每次新开机器时机床处于良好状态的概率是 95%，如果新开机器后生产的第一件产品是合格品，求机床处于良好状态的概率。

解 设 $A =$ 机器良好 $B =$ 产品合格 则

上页 下页 返回

$$P(B \setminus A) = 99\%, \qquad P(B \setminus \overline{A}) = 50\%,$$

$$P(A) = 95\%, \qquad P(\overline{A}) = 5\%$$

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A)P(B \setminus A)}{P(A)P(B \setminus A) + P(\overline{A})P(B \setminus \overline{A})}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.99}{0.95 \times 0.99 + 0.05 \times 0.50} = \frac{9405}{9655} = 0.974$$

上页 下页 返回

22. 口袋中有质地相同的 n 个白球和 n 个红球，从中一次取 n 个，用 A_k 表示这 n 个球中恰有 k 个红球

（1）计算 $P(A_k)$

（2）证明 $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$

（3）对正整数 m，证明 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^{n-k} = C_{n+m}^n$

解（1） $P(A_k) = \dfrac{C_n^k C_n^{n-k}}{C_{2n}^n} = \dfrac{(C_n^k)^2}{C_{2n}^n}$

上页 下页 返回

（2）因为 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 组成完备事件组，则

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \frac{1}{C_{2n}^{n}} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 \quad \therefore \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^{n}$$

（3）假设口袋中有 m 个白球，n 个红球，从中一次取

n 个，令

$B_k =$ 取到的 n 个球中有 k 个红球，则 $B_0, B_1, \cdots, B_n$

组成完备事件组

上页 下页 返回

$$1=\sum_{k=0}^{n}P(B_k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^kC_m^{n-k}}{C_{n+m}^n}=\frac{\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_m^{n-k}}{C_{n+m}^n}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n}C_n^kC_m^{n-k}=C_{n+m}^n$$

23. 袋中有 $b+r$ 个红球，$a-r$ 个白球，从中无放回地任取 b 个（1）求恰有 k 个白球的概率（2）证明 $C_{a+b}^b=\sum_{k=0}^{a-r}C_{b+r}^{b-k}C_{a-r}^k$ （3）证明 $C_{a+b}^{a-r}=\sum_{k=0}^{a-r}C_b^kC_a^{k+r}$

上页 下页 返回

解　设 $A_k = b$ 个中恰有 k 个白球

（1）$P(A_k) = \dfrac{C_{a-r}^{k} C_{b+r}^{b-k}}{C_{a+b}^{b}}$

（2）$1 = \sum\limits_{k=0}^{a-r} P(A_k) = \sum\limits_{k=0}^{a-r} \dfrac{C_{a-r}^{k} C_{b+r}^{b-k}}{C_{a+b}^{b}}$

$$\therefore \sum_{k=0}^{a-r} C_{a-r}^{k} C_{b+r}^{b-k} = C_{a+b}^{b}$$

（3）在（2）中令 $b = a - r$, 则

$$C_{a+b}^{a-r} = \sum_{k=0}^{a-r} C_b^k C_{a-r+r}^{a-r-k} = \sum_{k=0}^{a-r} C_b^k C_a^{r+k}$$

上页　下页　返回

24. 证明以下组合公式

（1） $\sum_{i=k}^{n} C_{i-1}^{k-1} = C_n^k$ （2） $\sum_{k=0}^{m} C_{n-k-1}^{m-k} = C_n^m$

（3） $\sum_{j=0}^{n} C_{n+j}^{n} = C_{n+m+1}^{m+1}$

证明（1）在$\{1,2,\cdots,n\}$中无放回地任意取k个，令

$A_i =$ 取到的k个数最大的是$i(\geq k)$

上页 下页 返回

$$\therefore P(A_k)=\frac{C_{i-1}^{k-1}}{C_n^k} \qquad 1=\sum_{k=0}^{n}P(A_k)=\frac{\sum_{i=k}^{n}C_{i-1}^{k-1}}{C_n^k}$$

$$\therefore \sum_{i=k}^{n}C_{i-1}^{k-1}=C_n^k$$

（2）在（1）中令 $k=n-m$, $\sum_{i=n-m}^{n}C_{i-1}^{n-m-1}=C_n^{n-m}=C_n^m$

$$\text{而}\quad \text{左}=\sum_{i=n-m}^{n}C_{i-1}^{n-m-1}\underline{\underline{k=n-i}}\sum_{k=0}^{m}C_{n-k-1}^{m-k}=C_n^m=\text{右}$$

上页 下页 返回

（3）由公式（2）

$$C_{n+m+1}^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_{(n+m+1)-k-1}^{(m+1)-k} = \sum_{k=0}^{m} C_{n+m-k}^{m-k}$$

$$\underline{\underline{j = m - k}} \sum_{j=0}^{m} C_{n+j}^{j}$$

上页 下页 返回

习题二解答

1. 一射手击中目标的概率是$\frac{3}{4}$，现在他连续射击直到击中目标为止，用 X 表示首次击中目标时的射击次数，求 X 是偶数的概率。

解

$$p=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}pq^{2k-1}$$

$$=p\cdot\frac{q}{1-q^2}=\frac{q}{1+q}=\frac{1}{5}$$

2. 设X 服从$[2,5]$上的均匀分布，对X进行三次独立观测时，求观测值大于3的次数大于等于两次的概率。

解 观测值为X，设对事件"$X>3$"的观测次数为K，则

$$p=P(X>3)=\frac{5-3}{5-2}=\frac{2}{3}$$

$$P(K\geq 2)=P(K=2)+P(K=3)$$

$$=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$

3. 一辆汽车需要通过多个有红绿灯的路口，设各路口的红绿灯独立工作，且红灯和绿灯的显示时间相同，用 X 表示首次遇到红灯时已经通过的路口数，求 X 的概率分布。

解　每个路口遇到红灯的概率为 $\frac{1}{2}$，X 服从几何分布

$$P(X=k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$k=0,1,2\cdots$$

4. 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，求 $p_k = P(X=k)$ 的最大值点 k_0

解 $\begin{cases} \dfrac{P(X=k_0)}{P(X=k_0+1)} \ge 1 \\ \dfrac{P(X=k_0-1)}{P(X=k_0)} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k_0+1}{\lambda} \ge 1 \\ \dfrac{k_0}{\lambda} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_0 \ge \lambda - 1 \\ k_0 \le \lambda \end{cases}$

所以当 λ 为整数时， $k_0 = \lambda - 1$ 或 λ

当 λ 不为整数时，$k_0 = [\lambda - 1]$

5. 设 X 和 Y 是随机变量，则

（1）$\max\{X,Y\}=\dfrac{X+Y+|X-Y|}{2}$

（2）$\min\{X,Y\}=\dfrac{X+Y-|X-Y|}{2}$

（3）$\max\{X,Y\}+\min\{X,Y\}=X+Y$

证明　（1）不妨设 $X>Y$, 则 $\max\{X,Y\}=X$,

$$右 = \frac{X - Y + X + Y}{2} = X = 左$$

（2）同（1）可证之　　（3）显然

6. 将一颗骰子投掷 n 次，用 M 表示掷得的最大点数，m 表示掷得的最小点数，计算

（1）$P(m = k), 1 \le k \le 6$

（2）$P(M=k), 1\le k\le 6$

（3）$P(m=2, M=4)$

解（1）掷一颗骰子 n 次，每次都有6种可能，所以

$$\#\Omega = 6^n$$

若 $m=k$, 每次掷的骰子点数 $\ge k$, 在 $k, k+1, \cdots, 6$

中选，共有 $(6-k+1)^n$，但还应减去不出现 k 点的

情况，共有 $(6-k)^n$ 种，所以

$$P(m=k)=\frac{(6-k+1)^n-(6-k)^n}{6^n}$$

（2）同理 $P(M=k)=\frac{k^n-(k-1)^n}{6^n}$

（3）当 $m=2, M=4$ 时，点数只能为2，3，4，

共 3^n 种，但应减除全为2和全为4的，共 $2\cdot 2^n$ 种，

所以

$$p=\frac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n}=(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{3})^n+(\frac{1}{6})^n$$

7. 设 T 是表示寿命的非负随机变量，有连续的概率密度 $f(x)$, 引入 T 的生存函数 $s(x)=P(X\geq x)$, 失效函数 $\lambda(t)=\dfrac{f(t)}{s(t)}$, 证明 $s(x)=e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}$

证明 $\because s(x)=P(X\geq x)=\int_x^{+\infty} f(t)dt$

$$=\int_x^{+\infty}\lambda(t)s(t)dt \ >0$$

两边求导得 $s'(x)=-\lambda(x)s(x)$

$$\frac{ds(x)}{s(x)} = -\lambda(x)dx \qquad 且\ s(0) = P(X \geq 0) = 1$$

两边从0到 x 积分

$$\ln|s(x)|\Big|_0^x = -\int_0^x \lambda(t)dt$$

$$\Rightarrow \ln s(x) = -\int_0^x \lambda(t)dt$$

$$\Rightarrow s(x) = e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}$$

8. 某台机床加工的部件长度服从正态 $N(10,36\times10^{-6})$，当部件的长度在 10 ± 0.01 内为合格品，求一部件为合格品的概率。

解　$p=P(10-0.01<X<10+0.01)$

$$=F(10+0.01)-F(10-0.01)$$

$$=\Phi(\frac{0.01}{6\times10^{-3}})-\Phi(\frac{-0.01}{6\times10^{-3}})$$

$$=2\Phi(1.67)-1=2\times0.9525-1=0.905$$

9. 机床加工部件长度服从正态分布$N(10,\sigma^2)$, 当部件的长度在 10 ± 0.01 内为合格品，要使该机床生产的部件的合格率达到 99%, 应当如何控制机床的σ?

解 $p=P(10-0.01<X<10+0.01)$

$$=P\left(\frac{-0.01}{\sigma}<\frac{X-10}{\sigma}<\frac{0.01}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{0.01}{\sigma}\right)-1\geq 0.99$$

$$\Phi\left(\frac{0.01}{\sigma}\right)\geq 0.995\Rightarrow\frac{0.01}{\sigma}\geq 2.57\qquad\sigma\leq 0.00388$$

10. 设车间有100台型号相同的机床相互独立地工作着，每台机床发生故障的概率是0.01，一台机床发生故障时需要一人维修，考虑两种配备维修工人的方法

（1）5个工人每人负责20台机床

（2）3个工人同时负责100台机床

在以上两种情况下求机床发生故障时不能及时维修的概率，比较哪种方案的效率更高？

解 （1）20台机床中发生故障机器个数 $X>1$ 的概率

（得不到维修）

$$p=1-P(X=1)-P(X=0)$$

$$=1-C_{20}^{1}(0.01)(0.99)^{19}-(0.99)^{20}=0.0169$$

机器出故障不能及时维修应为五组中至少有一组机器出故障得不到及时维修，即

$$p_1=1-(1-0.0169)^5=0.0817$$

（2）三个人同时负责100台，Y 为100台中出故障的机器个数（服从二项，近似服从泊松）

$$p_2 = P(Y > 3) \qquad \lambda = 100 \times 0.01 = 1$$

$$= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) - P(Y = 3)$$

$$\approx 1 - P_\lambda(0) - P_\lambda(1) - P_\lambda(2) - P_\lambda(3)$$

$$= 1 - \frac{1}{0!}e^{-1} - \frac{1}{1!}e^{-1} \frac{1}{2!}e^{-1} \frac{1}{3!}e^{-1} = 1 - \frac{8}{3e} = 0.0189$$

所以方案（2）优于方案（1）

11. 收藏家在拍卖会上将参加对5件艺术品的竞买，各拍品是否竞买成功是相互独立的，如果他成功购买每件艺术品的概率是0.1，计算

（1）成功竞买2件的概率

（2）至少成功竞买3件的概率

（3）至少成功竞买1件的概率

解　令 X 为成功竞买的件数

（1） $P(X=2)=C_5^2(0.1)^2(0.9)^3=0.0729$

（2） $P(X\geq 3)$

$$=C_5^3(0.1)^3(0.9)^2+C_5^4(0.1)^4(0.9)+(0.1)^5$$

$$=0.0086$$

（3） $P(X\geq 1)=1-(0.9)^5=0.4095$

12.对一大批产品的验收方案如下：从中任取10件检验，无次品就接受这批产品，次品超过2件就拒收；遇到其他情况用下述方案重新验收：从中抽取5件产品，这5件中无次品就接受，有次品时拒收。设产品的次品率是 **10%**, 计算

（1）第一次检验产品被接受的概率

（2）需要作第二次检验的概率

（3）第二次检验产品才被接受的概率

（4）产品被接受的概率

解 产品共 N 件，次品 M 件

（1）从中取10件，次品件数 X 服从超几何分布

$$p_1 = P(X=0) \approx P_{10}(X=0) = (0.9)^{10} = 0.3487$$

（2）$p_2 = P(1 \le X \le 2) \approx P_{10}(X=1) + P_{10}(X=2)$

$$= C_{10}^1 (0.9)^9 (0.1) + C_{10}^2 (0.9)^8 (0.1)^2 = 0.5811$$

（3）第二次从中取5件，产品件数为Y

$$p_3 = P(Y=0, 1 \le X \le 2)$$

$$= P(Y=0)P(1 \le X \le 2)$$

$$= (0.9)^5 \times 0.5811 = 0.3431$$

（4） $p_4 = p_1 + p_3 = 0.692$

13. 一个房间有三扇完全相同的玻璃窗，其中只有一扇是打开的，两只麻雀飞入房间后试图飞出房间

（1）第一只麻雀是无记忆的，求它飞出房间时试飞次数 X 的分布

（2）第二只麻雀是有记忆的，求它飞出房间时试飞次数 Y 的分布

（3）计算 $P(X<Y), P(X>Y)$

解　(1)每次独立，飞出概率为$\frac{1}{3}$，服从几何分布

$$P(X=k)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1},k=1,2,\cdots$$

（2）每次不独立　$P(Y=k)=\frac{1}{3},k=1,2,3$

$$P(Y=1)=\frac{1}{3}$$

离散型均匀分布

$$P(Y=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

(3) $P(X<Y)=P(X=1,Y=2)+$

$$P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$$

$$P(X>Y)=1-P(X\leq Y)$$

$$=1-P(X<Y)-P(X=Y)$$

$$=1-\frac{8}{27}-(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{3})=\frac{38}{81}$$

14. 设 X,Y 独立，分别服从参数 λ_1,λ_2 的泊松分布，在条件 $X+Y=n$下，求 X 的分布。

解

$$P(X=k \setminus X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$$

$$=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{\sum_{j=1}^{n}P(X=j,Y=n-j)}=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_1^j}{j!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-j}}{(n-j)!}e^{-\lambda_2}}$$

$$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_1^j}{j!}\frac{\lambda_2^{n-j}}{(n-j)!}}=\frac{C_n^k\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{\sum_{j=0}^{n}C_n^j\lambda_1^j\lambda_2^{n-j}}$$

$$=\frac{C_n^k\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}=C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k}$$

15. 设 X 有概率分布

X	-2	-1	0	1	2	3	5
p	0.20	0.10	0.30	0.02	0.08	0.20	0.10

求 $Y=X^2$ 分布。

解

Y	0	1	4	9	25
p	0.30	0.12	0.28	0.20	0.10

16. 设 X 概率密度为 $f(x)$，求下列随机变量的密度

（1）$Y = X^{-1}$　（2）$Y = |X|$　（3）$Y = \tan X$

解　（1）$y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y}$

当 $y \neq 0$ 时，$f_Y(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)\left|\left(\dfrac{1}{y}\right)'\right| = \dfrac{1}{y^2} f\left(\dfrac{1}{y}\right)$

（2）$y = |x| \Rightarrow x = \pm y$

当 $y \geq 0$ 时，$f_Y(y) = f(y) + f(-y)$

（3） $y=\tan x \Rightarrow \quad x=k\pi+\arctan y$

$$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

$$\therefore f_Y(y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\pi+\arctan y)\frac{1}{1+y^2}$$

17. 设电流 I 服从8至9安之间均匀分布，当电流通过2欧的电阻时，消耗的功率 $W=2I^2$ 瓦，求W的密度。

解 $\because f_I(x)=\begin{cases}1 & x\in(8,9)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$W=2I^2 \Rightarrow y=2x^2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2y}}{2} \quad x\in(8,9)$$

当 $y\in(128,162)$时,

$$f_w(y)=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y}}f_I\left(\frac{\sqrt{2y}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{8y}}$$

18. 设 X 是随机变量, $\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$，证明 X 有密度 $f(x)=\dfrac{\exp[-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}]}{\sqrt{2\pi}\sigma x}, x>0$，这时称 X 服从对数正态分布。

解　令 $Y=\ln X \Rightarrow y=\ln x$　当 $x>0$ 时，有

$$f_X(x)=f_Y(\ln x)\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

19. 设 X,Y独立, $X\sim B(1,p)$,$Y\sim \varepsilon(\lambda)$,求$Z=X+Y$的分布函数和概率密度。

解 由全概公式

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)$$

$$=P(X=0)P(X+Y\le z\setminus X=0)$$

$$+P(X=1)P(X+Y\le z\setminus X=1)$$

$$=(1-p)P(Y\le z)+pP(Y\le z-1)$$

$$= (1-p)F_Y(z) + pF_Y(z-1)$$

而 $Y \sim \varepsilon(\lambda)$, 所以

$$F_Y(z) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$F_Y(z-1) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda(z-1)} & z \geq 1 \\ 0 & z < 1 \end{cases}$$

所以

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ (1-p)(1-e^{-\lambda z}) & 0\le z<1 \\ (1-p)(1-e^{-\lambda z})+p[1-e^{-\lambda(z-1)}] & z\ge 1 \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ (1-p)\lambda e^{-\lambda z} & 0\le z<1 \\ (1-p)\lambda e^{-\lambda z}+p\lambda e^{-\lambda(z-1)} & z\ge 1 \end{cases}$$

20. 设 X 有概率密度 $f(x)=\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, x\geq 0$，求 $Y=\ln X$ 的密度。

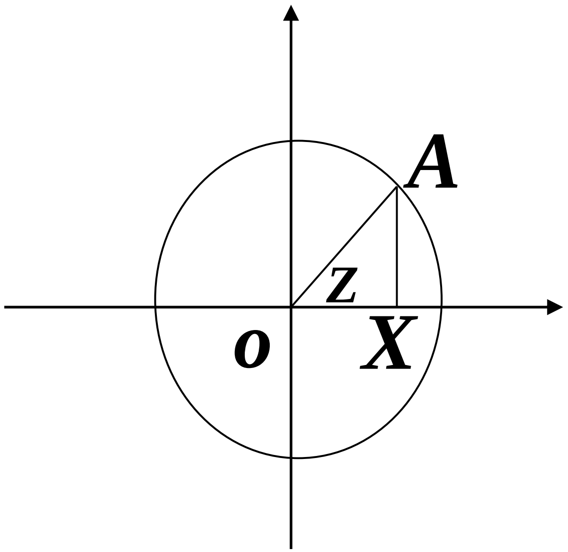
解 $y=\ln x \Rightarrow x=e^y$

$$\forall y \quad f_Y(y)=e^y f_X(e^y)=\frac{2e^y}{\pi(1+e^{y2})}$$

21. 设点随机的落在中心在原点，半径为 R 的圆上，求落点的横坐标的概率密度。

解　设 Z 是 OA 连线与 x 轴的夹角，则

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & z\in(0,2\pi)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



设落点 A 的横坐标为 X，则

$X=R\sin Z$，值域 $D=(-R,R)$

当 $z\in(0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$ 时，$z=\arcsin\dfrac{x}{R}$

当 $z\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$ 时，$z=\pi-\arcsin\dfrac{x}{R}$

所以当 $x \in (-R, R)$ 时，

$$f_X(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1/R}{\sqrt{1 - x^2/R^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{R^2 - x^2}}$$

22. 设 X 有概率密度 $f(x) = \dfrac{cx}{\pi^2}, x \in (0, \pi)$, 求 $Y = \sin X$ 的密度。

解 先求出c 值

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{\pi}\frac{cx}{\pi^2}dx\Rightarrow c=2$$

$Y=\sin X\Rightarrow$ 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时， $x=\arcsin y$

当$x\in[\frac{\pi}{2},\pi)$时，$\pi-\arcsin y$

$$f_Y(y)=\frac{2\arcsin y}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{2(\pi-\arcsin y)}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\quad y\in(0,1)$$

23. 设 $X \sim U[0,6\pi]$, 求 $Y=\cos X$ 的概率密度。

解 $x \in [0,\pi)$ $\quad x = \arccos y$

$x \in [\pi,2\pi)$ $\quad x = 2\pi - \arccos y$

$x \in [2\pi,3\pi)$ $\quad x = 2\pi + \arccos y$

$x \in [3\pi,4\pi)$ $\quad x = 4\pi - \arccos y$

$x \in [4\pi,5\pi)$ $\quad x = 4\pi + \arccos y$

$x \in [5\pi,6\pi]$ $\quad x = 6\pi - \arccos y$

$$\therefore f_Y(y) = 6 \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad y \in (-1,1)$$

24. 设 $X \sim \varepsilon(\lambda)$, 求 $Y = \cos X$ 的概率密度。

解 $\quad x = 2k\pi \pm \arccos y, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

所以当 $y \in [-1,1]$时

$$f_Y(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(2k\pi+\arccos y)} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(2k\pi-\arccos y)} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= [\lambda e^{-\lambda arccoosy} \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda}} + \lambda e^{\lambda arccoosy} \frac{e^{-2\pi\lambda}}{1-e^{-2\pi\lambda}}] \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{1-y^2}} [\frac{e^{-\lambda arccoosy}}{1-e^{-2\pi\lambda}} + \frac{e^{\lambda arccoosy}}{e^{2\pi\lambda}-1}]$$

习题三解答

1. 设随机变量 X,Y 都只取 $-1,1$, 满足

$$P(X=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(Y=1 \backslash X=1)=P(Y=-1 \backslash X=-1)=\frac{1}{3}$$

（1）求 (X,Y) 的联合分布

（2）求 t 的方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率

上页 下页 返回

解 （1）设联合分布为

$X \backslash Y$	1	-1
1	p_{11}	p_{12}
-1	p_{21}	p_{22}

$$p_{11} = P(X = 1, Y = 1)$$

$$= P(X = 1)P(Y = 1 \backslash X = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(X = -1) = \frac{1}{2}$$

$$p_{22} = P(X = -1, Y = -1)$$

$$= P(X = -1)P(Y = -1 \backslash X = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p_{21} = P(X=1, Y=-1)$$

$$= P(X=1)P(Y=-1 \setminus X=1) = \frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

$$p_{12} = P(X=-1, Y=1) = 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

X \ Y	1	−1
1	1/6	1/3
−1	1/3	1/6

（2） $p = P(\Delta \geq 0) = P(X^2 - 4Y \geq 0)$

$$= P(X = 1, Y = -1) + P(X = -1, Y = -1)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2. 设随机变量 (X, Y) 有如下的概率分布

$$P(X = i, Y = \frac{1}{j}) = c, \quad i = 1,2,\cdots 8, j = 1,2,\cdots,6$$

确定常数 c，并求 X 和 Y 的概率分布。

上页 下页 返回

解（1） $1=\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{6}c=48c\Rightarrow c=\frac{1}{48}$

（2） $P(X=i)=\sum_{j=1}^{6}P(X=i,Y=\frac{1}{j})=6c=\frac{1}{8}$

$i=1,2,\cdots,8$

$P(Y=\frac{1}{j})=\sum_{i=1}^{8}P(X=i,Y=\frac{1}{j})=8c=\frac{1}{6}$

$j=1,2,\cdots,6$

上页 下页 返回

3. 设随机变量(X,Y)有概率分布

$$P(X=i,Y=\frac{1}{i})=c, i=1,2,\cdots,8,$$

确定常数c, 并求X和Y的概率分布。

解 $$1=\sum_{i=1}^{8}c=8c\Rightarrow c=\frac{1}{8}$$

$$P(X=i)=\sum_{j=1}^{8}P(X=i,Y=\frac{1}{j})=c=\frac{1}{8}$$

$(j\neq i$ 时为0， $j=i$时为$c)$

上页 下页 返回

同理 $P(Y=\frac{1}{i})=c=\frac{1}{8}\quad i=1,2,\cdots,8$

4. 设 (X,Y) 在矩形 $D=\{(X,Y)|a<x<b,c<Y<d)\}$ 上均匀分布，求 (X,Y) 的边缘分布，并证明 X,Y 独立。（可当定理用）

解 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{(b-a)(d-c)}I_D$$

上页 下页 返回

则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_c^d\frac{1}{(b-a)(d-c)}dy=\frac{1}{b-a},$$

$$a<x<b$$

同理

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{d-c},\quad c<y<d$$

显然 $\quad f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

所以 X,Y 独立。

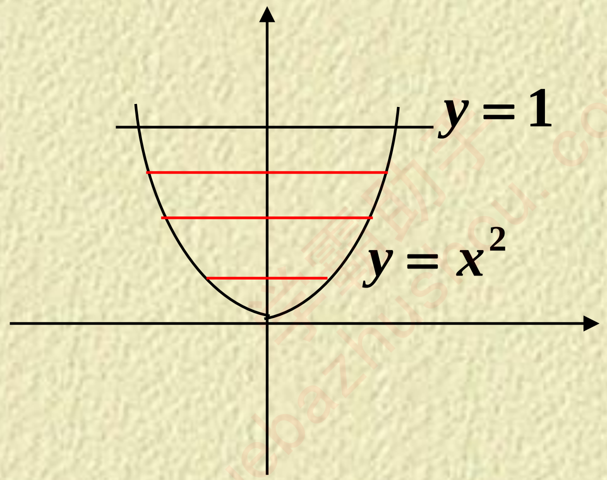
上页 下页 返回

5. 设α是常数，(X,Y)有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^2y & x^2<y<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases},$$

求(X,Y)的边缘分布，并证明X,Y不独立。

解（1）先求α值



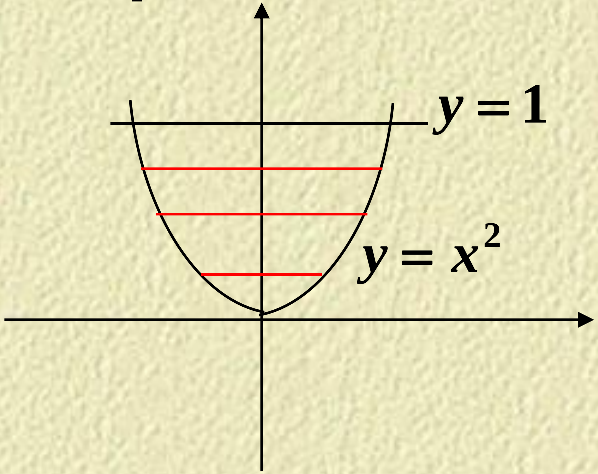
$$1=\iint_{R^2} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}\alpha x^2 y dy$$

上页 下页 返回

$$=\frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-x^6)dx=\frac{4\alpha}{21}\Rightarrow\alpha=\frac{21}{4}$$

（2）求边缘分布



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4),\quad |x|<1$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}},$$

$$0<y<1$$

上页 下页 返回

（3）显然 $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, 所以 X,Y 不独立。

6. 设随机向量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c(R-\sqrt{x^2+y^2}) & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

（1）求常数 c

（2）当 $R=2$ 时，向量(X,Y) 落在以原点为圆心，以 $r=1$ 为半径的区域内的概率是多少?

上页 下页 返回

解（1） $1=\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R c(R-r)rdr$$

$$=2\pi c\cdot[\frac{R}{2}r-\frac{1}{3}r^3]\Big|_0^R=\frac{\pi R^3}{3}c$$

$$\Rightarrow c=\frac{3}{\pi R^3}$$

上页 下页 返回

（2） $R = 2 \Rightarrow c = \dfrac{3}{8\pi}$

$$p = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{3}{8\pi}(2-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$= \frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2-r)rdr = \frac{1}{2}$$

上页 下页 返回

7. 随机向量(X,Y)在椭圆

$$D=\{(X,Y)\left|\frac{(x+y)^2}{8}+\frac{(x-y)^2}{2}\le 1\right.\}$$

内均匀分布，求联合密度。

解 此题只需求出椭圆的面积，令

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow |J|=\frac{1}{2}$$

上页 下页 返回

此变换下 D 变为 $D': \dfrac{u^2}{8}+\dfrac{v^2}{2}\le 1$

$$\therefore S=\iint_D dxdy=\iint_{D'}\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\pi\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=2\pi$$

联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}I_D$$

上页 下页 返回

8. 设随机向量 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases} a(6-x-y) & 0<x<2,2<y<4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求（1）a　　（2）$P(X\le 1,Y\le 3)$

（3）$P(X\le 1.5)$　　（4）$P(X+Y\le 4)$

解（1）$1=\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_2^4 a(6-x-y)dy$

$$=8a\Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

上页　下页　返回

（2） $P(X \le 1, Y \le 3) = \int_0^1 dx \int_2^3 \frac{1}{8}(6 - x - y)dy = \frac{3}{8}$

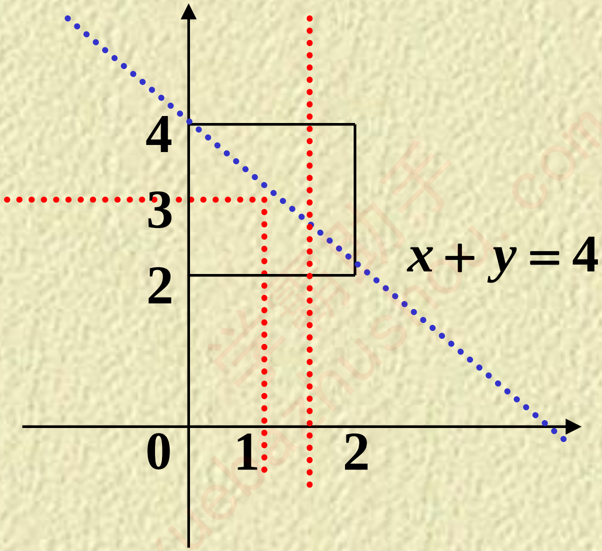
（3） $P(X \le 1.5) = P(X \le 1.5, -\infty < Y < +\infty)$

$$= \int_0^{1.5} dx \int_2^4 \frac{1}{8}(6 - x - y)dy = \frac{27}{32}$$

（4）$P(X + Y \le 4)$

$$= \iint\limits_{x+y\le 4} \frac{1}{8}(6 - x - y)dxdy$$

$$= \int_0^2 dx \int_2^{4-x} \frac{1}{8}(6 - x - y)dy = \frac{2}{3}$$



9. 设 X,Y 独立，$X\sim\varepsilon(\lambda), Y\sim\varepsilon(\mu)$, 计算$P(X>Y)$

解　X,Y 的边缘密度为

$$f_1(x)=\lambda e^{-\lambda x}I_{(x>0)},\quad f_2(y)=\mu e^{-\mu y}I_{(y>0)},$$

所以

$$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}dy=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

10. 设 X,Y 独立，$X \sim \varepsilon(\lambda), Y \sim \varepsilon(\mu)$, 求 $\min\{X,Y\}, \max\{X,Y\}, X+Y$ 的概率密度。

解　不适合次序统计量的公式(不同分布），

所以只能重新推导

设 X,Y 的分布函数分别为$G(x), H(y)$, 密度分别为 $g(x), h(y)$

（1）令 $Z = \min\{X,Y\}$

上页 下页 返回

$$F_Z(z)=P(\min\{X,Y\}\le z)$$ （次序统计量的一般推导方法）

$$=1-P(\min\{X,Y\}>z)=1-P(X>z,Y>z)$$

$$=1-[1-G(z)][1-H(z)]=1-e^{-\lambda z}e^{-\mu z}I_{(z>0)}$$

$$=1-e^{-(\lambda+\mu)z}I_{(z>0)}$$

所以 $\min\{X,Y\}$ 的密度

$$f_1(z)=(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)z}I_{(z>0)}$$

上页 下页 返回

（2）令 $Z=\max\{X,Y\}$

$$F_Z(z)=P(\max\{X,Y\}\le z)=P(X\le z,Y\le z)$$

$$=G(z)H(z)=(1-e^{-\lambda z})(1-e^{-\mu z})I_{(z>0)}$$

$$=[1-e^{-\lambda z}-e^{-\mu z}+e^{-(\lambda+\mu)z}]I_{(z>0)}$$

所以 $\max\{X,Y\}$ 的密度

$$f_2(z)=[\lambda e^{-\lambda z}+\mu e^{-\mu z}-(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)z}]I_{(z>0)}$$

上页 下页 返回

（3）令 $Z=X+Y$，由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)h(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\underline{I_{(x>0)}}\cdot\mu e^{-\mu(z-x)}\underline{I_{(z-x>0)}}dx$$

$$=\lambda\mu e^{-\mu z}\int_0^z e^{(\mu-\lambda)x}dx=\frac{\lambda\mu e^{-\mu z}}{\mu-\lambda}[e^{(\mu-\lambda)x}\Big|_0^z]$$

$$=\frac{\lambda\mu e^{-\mu z}}{\mu-\lambda}[e^{(\mu-\lambda)z}-1]=\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda z}-e^{-\mu z})$$

$$z>0$$

上页 下页 返回

11. 设(X,Y)有联合密度 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-x} & 0<y<x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$,

求 X,Y 的边缘密度。

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\int_0^x e^{-x}dy = xe^{-x} \qquad x>0$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\int_y^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_y^{+\infty} = e^{-y} \qquad y>0$$

上页 下页 返回

12. 设 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4} & x,y\in(-1,1)\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

证明 X,Y 不独立，但 X^2 与 Y^2 独立。

证明 （1）先求分别求 X,Y 的边缘密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{2}\qquad x\in(-1,1)$$

$\therefore X\sim U(-1,1)$ 同理 $Y\sim U(-1,1)$

上页 下页 返回

显然 $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立。

（2）再求 X^2 与 Y^2 的边缘密度

$$f_{X^2}(u) = [f_X(\sqrt{u}) + f_X(-\sqrt{u})]\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad u \in (0,1)$$

同理 $$f_{Y^2}(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \qquad v \in (0,1)$$

再求 (X^2,Y^2) 的联合密度 $g(u,v)$

$$\begin{cases} x^2=u \\ y^2=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{u} \\ y=\pm\sqrt{v} \end{cases}$$ （四个分支） $|J|=\dfrac{1}{4\sqrt{uv}}$

$$\therefore g(u,v)=\frac{1}{4\sqrt{uv}}[f(\sqrt{u},\sqrt{v})+f(-\sqrt{u},\sqrt{v})$$

$$+f(\sqrt{u},-\sqrt{v})+f(-\sqrt{u},-\sqrt{v})]$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{uv}}[2\cdot\frac{1+\sqrt{uv}}{4}+2\cdot\frac{1-\sqrt{uv}}{4}]$$

上页 下页 返回

$$=\frac{1}{4\sqrt{uv}} \qquad u,v\in(0,1)$$

所以 $g(u,v)=f_{X^2}(u)f_{Y^2}(v)$ $\qquad X^2$ 与 Y^2 独立。

13. 设 (X,Y) 有联合密度 $f(x)g(y)$, (U,V)有联合密度

$$p(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}f(u)g(v) & u\ge v\\ 0 & u<v\end{cases}$$

（1）求 (U,V) 的边缘密度

（2）证明 $\alpha=P(X\ge Y)$

上页 下页 返回

解（1） $p_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)dv=\int_{-\infty}^{u}\frac{1}{\alpha}f(u)g(v)dv$

$$=\frac{1}{\alpha}f(u)\int_{-\infty}^{u}g(v)dv=\frac{1}{\alpha}f(u)G(u)$$

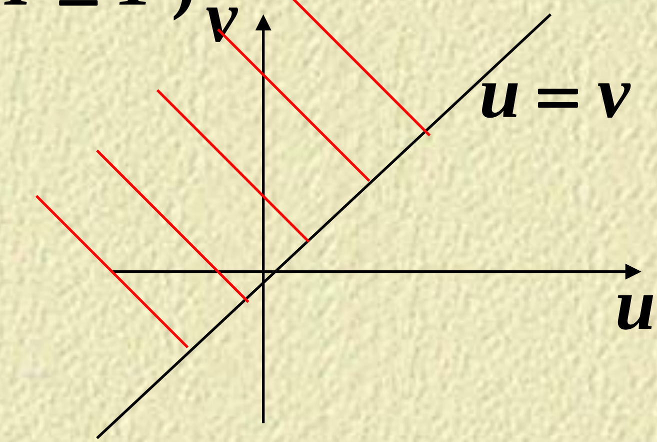
$p_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)du=\int_{v}^{+\infty}\frac{1}{\alpha}f(u)g(v)du$

$$=\frac{1}{\alpha}g(v)\int_{v}^{+\infty}f(u)du=\frac{1}{\alpha}g(v)[1-F(v)]$$

（2） $1=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)dv$

上页 下页 返回

$$=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{u}^{+\infty}f(u)g(v)dv=\frac{1}{\alpha}P(X\geq Y)$$



$$P(X\geq Y)=\alpha$$

14. 设 (X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} & x,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

上页 下页 返回

解　因为 $f(x,z-x)=\begin{cases}\frac{1}{2}ze^{-z} & 0<x<z \\ 0 & 其它\end{cases}$,

所以当 $z>0$ 时，由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\frac{1}{2}\int_0^z ze^{-z}dx$$

$$=\frac{1}{2}z^2e^{-z}\qquad z>0$$

上页　下页　返回

15. 设 $X \sim B(n,p), Y \sim \varepsilon(\lambda)$, 当 X,Y 独立时，求 $Y-X$ 的分布函数。

解　令 $Z=Y-X$, 则

$$F_Z(z)=P(Z\le z)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)P(Y-X\le z\setminus X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}P(Y\le z+k)$$

上页　下页　返回

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} [1 - e^{-\lambda(z+k)}] \qquad z + k \geq 0$$

16. 设 X 有离散分布 $p_i = P(X = x_i), i = 1,2,\cdots,$ Y 有概率密度 $f(y)$, X,Y 独立, $Z = X + Y$ 是连续型随机变量吗？如果是求它的概率密度。

解 $Z = X + Y$ 是连续型随机变量，且

$$F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

上页 下页 返回

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)P(X+Y\le z\setminus X=x_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}p_iP(Y\le z-x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}p_iF_Y(z-x_i)$$

$$\therefore\ f_Y(z)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i f_Y(z-x_i)$$

17. 设 $X\sim\varepsilon(1),Y\sim\varepsilon(1)$, X,Y 独立,

$$U=X^2+Y^2, V=X^2/Y^2,$$

求 (U,V) 的联合密度。

上页 下页 返回

解　$D=\{(u,v)|u,v\geq 0\}$，且 $x,y>0$, 则

$$\begin{cases} u=x^2+y^2 \\ v=x^2/y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{uv}{1+v}} \\ y=\sqrt{\dfrac{u}{1+v}} \end{cases} \Rightarrow J=-\frac{1}{4(1+v)\sqrt{v}}$$

所以

$$g(u,v)=f\left(\sqrt{\frac{uv}{1+v}},\sqrt{\frac{u}{1+v}}\right)|J|$$

$$=\frac{1}{4(1+v)\sqrt{v}}e^{-\sqrt{\frac{uv}{1+v}}}e^{-\sqrt{\frac{u}{1+v}}}=\frac{1}{4(1+v)\sqrt{v}}e^{-\frac{\sqrt{u}(\sqrt{v}+1)}{\sqrt{1+v}}}$$

上页　下页　返回

18. 设 X,Y 独立，都服从 $N(0,1)$ 分布，求

$$(U,V)=(X^2+Y^2,X^2-Y^2)$$

的联合密度。

解　$D=\{(u,v)\mid u\geq 0,-\infty<v<+\infty\}$

$$\begin{cases} u=x^2+y^2 \\ v=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{u+v}{2} \\ y^2=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

当 $u\pm v\geq 0 \Rightarrow |v|\leq u$ 时，有

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{u+v}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{u-v}{2}} \end{cases}$$ （四个分支） $$|J| = \frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}}$$

由 X,Y 独立，则

$$g(u,v) = 4\cdot\frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}e^{-\frac{u+v/2}{2}}e^{-\frac{u-v/2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}e^{-\frac{u}{2}}$$

$$|v| \le u$$

上页 下页 返回

19. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，都是 $[0,1]$ 上均匀分布，求极差 $R=X_{(n)}-X_{(1)}$ 的概率密度。

解 $D: r\in(0,1)$ ，由次序统计量密度公式

$(X_{(1)},X_{(n)})$ 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{n!}{(n-2)!}f(x)[F(y)-F(x)]^{n-2}f(y)$$

（独立同分布连续型次序统计量密度公式）

则由卷积公式

上页 下页 返回

$$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,r+x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n!}{(n-2)!}f(x)[F(r+x)-F(x)]^{n-2}f(r+x)dx$$

$$f(x)=I_{(0<x<1)}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n!}{(n-2)!}[F(r+x)-F(x)]^{n-2}I_{(0<x<1)}I_{(0<r+x<1)}dx$$

$$F(x)=xI_{(0<x<1)}$$

$$=\int_{0}^{1-r}\frac{n!}{(n-2)!}[(r+x)-(x)]^{n-2}dx=n(n-1)r^{n-2}\int_0^{1-r}dx$$

$$=n(n-1)r^{n-2}(1-r)\qquad r\in(0,1)$$

上页 下页 返回

20. 设一昆虫有$n(>0)$个后代，假设每只后代昆虫的寿命是相互独立的且服从参数是β的指数分布

（1）求这n只昆虫中寿命最长的那只昆虫的寿命的概率分布。

（2）求这n只昆虫中寿命最短的那只昆虫的寿命的概率分布。

解（1）$X_{(n)}$的概率密度

$$f_n(x) = nF^{n-1}(x)f(x) = n[1-e^{-\beta x}]^{n-1} \cdot \beta e^{-\beta x} \cdot I_{(x>0)}$$

$$= n\beta[1-e^{-\beta x}]^{n-1} e^{-\beta x} I_{(x>0)}$$

（2）$X_{(1)}$ 的概率密度

$$f_1(x) = nf(x)[1-F(x)]^{n-1} = n\beta e^{-\beta x}(e^{-\beta x})^{n-1} I_{(x>0)}$$

$$= n\beta e^{-n\beta x} I_{(x>0)}$$

$$\therefore X_{(1)} \sim \varepsilon(n\beta)$$

上页 下页 返回

21. 设一昆虫有N个后代，假设每只后代昆虫的寿命是相互独立的且服从参数是β的指数分布，又假设N服从几何分布$P(N=n)=pq^{n-1}(n\geq 1)$，并且和后代昆虫的寿命独立

（1）求这N只昆虫中寿命最长的那只昆虫的寿命的概率分布。

（2）求这N只昆虫中寿命最短的那只昆虫的寿命的概率分布。

上页 下页 返回

解（1）令 X 表示 N 只昆虫中寿命最长的那只昆虫的寿命，则其分布函数

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{n=1}^{\infty}P(N=n)P(X\le x\setminus N=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}pq^{n-1}F_n(x)$$

$F_n(x)$ 是上题中 $X_{(n)}$ 的分布函数, 所以 X 的概率密度（利用20题（1）的结果）

上页 下页 返回

$$f(x)=[\sum_{n=1}^{\infty}pq^{n-1}F_n(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}pq^{n-1}f_n(x) \qquad x>0$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}pq^{n-1}\cdot n\beta[1-e^{-\beta x}]^{n-1}e^{-\beta x}$$ 上题结果

$$=p\beta e^{-\beta x}\sum_{n=1}^{\infty}nq^{n-1}[1-e^{-\beta x}]^{n-1}$$ 令 $t=q(1-e^{-\beta x})$

$$=p\beta e^{-\beta x}\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=p\beta e^{-\beta x}(\sum_{n=1}^{\infty}t^n)'$$

$$=p\beta e^{-\beta x}(\frac{t}{1-t})' = p\beta e^{-\beta x}\frac{1}{(1-t)^2}$$

上页 下页 返回

$$= p\beta e^{-\beta x}\frac{1}{[1-q(1-e^{-\beta x})]^2} = p\beta e^{-\beta x}\frac{1}{(p-qe^{-\beta x})^2}$$

（2）同理令 Y 表示 N 只昆虫中寿命最短的那只昆虫的寿命，则其密度（20题（2）结果）

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}\cdot n\beta e^{-n\beta x} \quad x>0$$

$$= p\beta e^{-\beta x}\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}(e^{-\beta x})^{n-1}$$

上页 下页 返回

$$=\frac{p\beta e^{-\beta x}}{(1-qe^{-\beta x})^2} \qquad x>0 \qquad （利用\ \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}=\frac{1}{(1-t)^2}）$$

22. 设离散随机向量(X,Y)有如下概率分布

$Y\setminus X$	1	2	3	4	5
1	0.06	0.05	0.04	0.01	0.02
2	0.05	0.10	0.10	0.05	0.03
3	0.07	0.05	0.01	0.02	0.02
4	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
5	0.05	0.06	0.05	0.02	0.02

上页 下页 返回

（1）求 X,Y 的边缘分布

（2）求 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布

（3）求 $V=\min\{X,Y\}$ 的分布

（4）求 $P(X=2\backslash Y=3)$

解（1）

X	1	2	3	4	5
p	0.28	0.28	0.21	0.11	0.12

Y	1	2	3	4	5
p	0.18	0.33	0.17	0.12	0.20

上页 下页 返回

（2）

U	1	2	3	4	5
p	0.06	0.20	0.27	0.17	0.30

（3）

V	1	2	3	4	5
p	0.40	0.41	0.11	0.06	0.02

（4）$$P(X=2 \setminus Y=3)=\frac{P(X=2,Y=3)}{P(Y=3)}$$

$$=\frac{0.05}{0.17}$$

上页 下页 返回

23. 设 $X_1,\cdots,X_{n-1}$ 独立同分布，都是 $[0,y]$ 上的均匀分布

（1）求 $X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_{n-1}\}$ 的概率密度

（2）求 $X_1,\cdots,X_{n-1}$ 的次序统计量 $(X_{(1)},\cdots,X_{(n-1)})$ 的联合概率密度

解　由次序统计量的公式

上页 下页 返回

（1） $f_1(x)=\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!}f(x)[1-F(x)]^{n-2}$

$$=(n-1)\cdot\frac{1}{y}\cdot[1-\frac{x}{y}]^{n-2}I_{(0<x<y)}$$

（2） $f(x_1,\cdots,x_{n-1})=(n-1)!\,f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)$

$$=(n-1)!\frac{1}{y^{n-1}}I_{(x_1<\cdots<x_{n-1})}$$

上页 下页 返回

24. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，都是 $[0,1]$上的均匀分布，且 $y\in(0,1)$

（1）在条件 $X_{(n)}=y$ 下，求 $X_{(1)}$ 的条件密度

（2）在条件 $X_{(n)}=y$ 下，求 $(X_{(1)},\cdots,X_{(n-1)})$ 的条件密度

解　$X_{(n)}$ 的密度为

$$f_n(y)=nF^{n-1}(y)f(y)=ny^{n-1}I_{(0<y<1)}$$

上页　下页　返回

（1）$(X_{(1)}, X_{(n)})$ 的联合密度为

$$f(x,y)=\frac{n!}{(n-2)!}f(x)[F(y)-F(x)]^{n-2}f(y)I_{(x<y)}$$

$$=n(n-1)(y-x)^{n-2}I_{(0<x<y<1)}$$

所以在条件 $X_{(n)}=y$ 下，$X_{(1)}$ 的条件密度

$$f(x\setminus y)=\frac{f(x,y)}{f_n(y)}=\frac{n(n-1)(y-x)^{n-2}I_{(0<x<y<1)}}{ny^{n-1}I_{(0<y<1)}}$$

上页 下页 返回

$$=(n-1)(1-\frac{x}{y})^{n-2}\frac{1}{y}I_{(0<x<y<1)}$$

（2）$(X_{(1)},\cdots,X_{(n-1)})$ 的联合密度

$$f(x_1,\cdots,x_n)=n!\,f(x_1)\cdots f(x_n)=n!\,I_{(0<x_1<\cdots<x_n)}$$

在条件 $X_{(n)}=y$ 下，$(X_{(1)},\cdots,X_{(n-1)})$ 的条件密度

$$f((x_1,\cdots,x_{n-1})\setminus y)=\frac{f(x_1,\cdots,x_n)}{f_n(y)}$$

上页 下页 返回

$$= \frac{n!\, I_{(0<x_1<\cdots<x_{n-1}<y)}}{n y^{n-1}}$$

$$= (n-1)! \frac{1}{y^{n-1}} I_{(0<x_1<\cdots<x_{n-1}<y)}$$

上页 下页 返回

习题四解答

1. 设 X在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$上均匀分布，计算 $E(\sin X)$

解 $E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x f(x)dx=\int_0^{\pi/2}\dfrac{2}{\pi}\sin x dx=\dfrac{2}{\pi}$

2. 设 X,Y 独立同分布，都服从指数分布 $\varepsilon(\lambda)$,

证明 $E(\dfrac{X}{X+Y})=E(\dfrac{Y}{X+Y})$

上页 下页 返回

证明　X,Y 独立，则其联合分布密度为

$$f(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} I_{(x,y>0)}$$

所以

$$E\left(\frac{X}{X+Y}\right)=\iint_{R^2}\frac{x}{x+y}f(x,y)dxdy=\iint_{D}\frac{x}{x+y}f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{D}\frac{y}{x+y}f(y,x)dxdy=E\left(\frac{Y}{X+Y}\right)$$

（D 关于 $y=x$ 对称）

上页　下页　返回

3. 若二维随机向量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，证明

$$E\max\{X,Y\}=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}},\quad E\min\{X,Y\}=-\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$$

证明 有第二章习题，

$$\max\{X,Y\}=\frac{(X+Y)+|X-Y|}{2}$$

$$\min\{X,Y\}=\frac{(X+Y)-|X-Y|}{2}$$

上页 下页 返回

令 $\xi = X + Y,\ \eta = X - Y$ 则 $E\xi = 0,\ E\eta = 0,$ 但

$$Var\eta = Var(X - Y)$$

$$= Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = 2 - 2\rho$$

$$\therefore \eta \sim N(0,2(1-\rho)) \qquad \therefore \frac{\eta}{\sqrt{2(1-\rho)}} \sim N(0,1)$$

而

$$E|\eta| = \sqrt{2(1-\rho)}E\left(\left|\frac{\eta}{\sqrt{2(1-\rho)}}\right|\right)$$

上页 下页 返回

$$=\sqrt{2(1-\rho)}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=-2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d(-\frac{z^2}{2})=2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$$

$$\therefore E\max\{X,Y\}=\frac{E(X+Y)+E|X-Y|}{2}=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$$

$$E\min\{X,Y\}=\frac{E(X+Y)-E|X-Y|}{2}=-\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$$

上页 下页 返回

4. 50个签中有4个标有“中”，依次无放回抽签时，首次抽中前期望抽签多少次？

解 设 X :首次抽中前的抽签次数，$X=0,1,2,\cdots,46$

$$EX=\sum_{k=0}^{46}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{46}P(X\ge k)$$

$$=\sum_{k=1}^{46}\frac{46}{50}\frac{45}{49}\cdots\frac{(46-k+1)}{(50-k+1)}=\sum_{i=0}^{45}\frac{46}{50}\frac{45}{49}\cdots\frac{46-i}{50-i}$$

上页 下页 返回

$$=\sum_{i=0}^{45}\frac{46!}{50!}\frac{(50-i-1)!}{(46-i-1)!4!}4!$$

$$=\frac{46!4!}{50!}\sum_{i=0}^{45}C_{50-i-1}^{46-i-1}\qquad(\sum_{i=0}^{m}C_{n-i}^{m-i}=C_{n+1}^{m})$$

$$=\frac{46!4!}{50!}C_{50}^{45}=\frac{46!4!}{50!}\frac{50!}{45!5!}=\frac{46}{5}$$

上页 下页 返回

5. 盒中装有标号$1,2,\cdots,N$的卡片各一张，从中每次抽取一张，共抽取 $n(\leq N)$ 次，计算

（1）有放回地抽取时，抽到最大号码的数学期望。

（2）无放回地抽取时，抽到最大号码的数学期望。

解 （1）设 X_i：有放回抽取第 i 次抽到的卡片号码

令 $X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$

$$EX_{(n)}=\sum_{k=1}^{N}P(X_{(n)}\geq k)=\sum_{k=1}^{N}[1-P(X_{(n)}<k)]$$

上页 下页 返回

$$=\sum_{k=1}^{N}[1-P(X_1<k,\cdots,X_n<k)]=\sum_{k=1}^{N}[1-(\frac{k-1}{N})^n]$$

（2）设 $X_{(n)}$：无放回抽取第 i 次抽到的卡片号码，

取值为 $n,n+1,\cdots,N$

$$EX_{(n)}=\sum_{k=n}^{N}kP(X_{(n)}=k)=\sum_{k=n}^{N}k\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}$$

$$=\frac{1}{C_N^n}\sum_{k=n}^{N}k\frac{(k-1)!}{(n-1)!(n-k)!}$$

上页 下页 返回

$$=\frac{n}{C_N^n}\sum_{k=n}^{N}\frac{k!}{n!(n-k)!}=\frac{n}{C_N^n}\sum_{k=n}^{N}C_k^n=\frac{n}{C_N^n}\sum_{k=n}^{N}C_{k+1-1}^{n+1-1}$$

$$=\frac{n}{C_N^n}C_{N+1}^{n+1}=\frac{n(N+1)}{n+1}\qquad (P281,\mathrm{A}_4,\ \sum_{k=n}^{N}C_{k-1}^{n-1}=C_N^n)$$

6. 设(X,Y)有联合密度

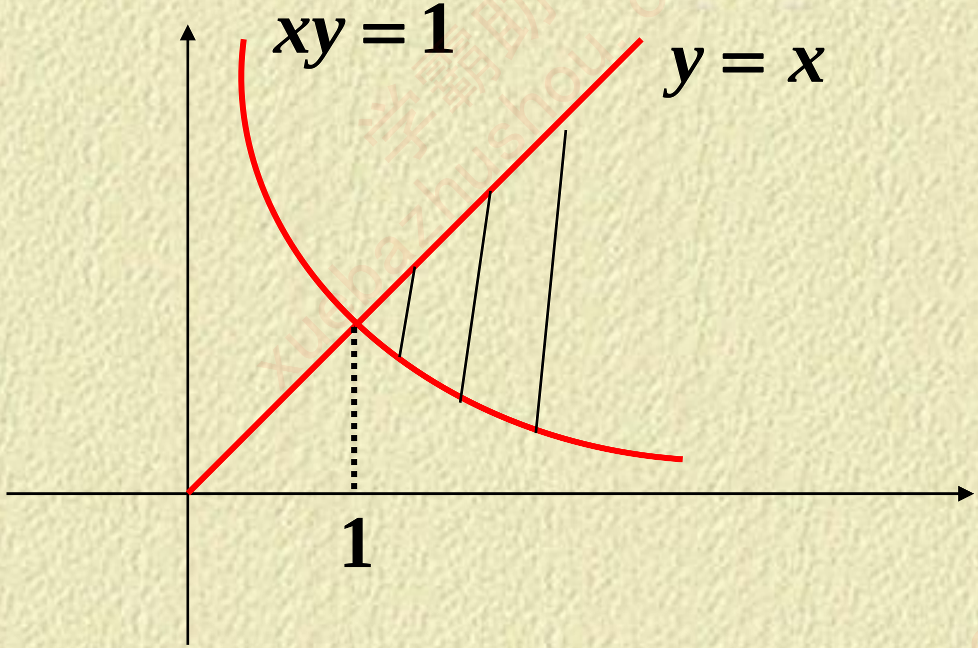
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2} & x>1,1<xy<x^2,\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求 $EY,E(\dfrac{1}{XY})$

上页 下页 返回

解 （1）$EY=\int_1^{+\infty}dx\int_{1/x}^{x}y\cdot\frac{3}{2x^3y^2}dy=\frac{3}{4}$

（2）$E(\frac{1}{XY})=\int_1^{+\infty}dx\int_{1/x}^{x}\frac{1}{xy}\cdot\frac{3}{2x^3y^2}dy=\frac{3}{5}$



7. 设商店每销售1吨大米获利 a 元，每库存1吨大米损失 b 元，假设大米的需求量 Y 服从指数分布 $\varepsilon(\lambda)$, 问库存多少吨大米才能获得最大的平均利润。

解　设库存 c 吨，利润 X 元，则

$$X = g(Y) = \begin{cases} aY - b(c - Y) & Y \le c \\ ac & Y. > c \end{cases}$$

$$EX = E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_Y(y) dy$$

上页　下页　返回

$$=\int_0^{+\infty} g(y)\lambda e^{-\lambda y}dy$$

$$=\int_0^c [(a+b)y-bc]\lambda e^{-\lambda y}dy+\int_x^{+\infty} ac\lambda e^{-\lambda y}dy$$

$$=-(a+b)\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda c}-1)-bc=h(c)$$

$$h'(c)=(a+b)e^{-\lambda c}-b=0 \quad \Rightarrow c=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{a+b}{b}$$

$$h''(c)=-\lambda(a+b)e^{-\lambda c}<0$$

答 库存 $c=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{a+b}{b}$ 吨才能获得最大的平均利润。

上页 下页 返回

8. 设 X,Y 独立，都服从 $N(0,1)$ 分布，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$，计算 EZ

解 $$EZ=\iint_{R^2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}dr=\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}dr \quad 令\ t=\frac{r^2}{2}$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

上页 下页 返回

9. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，有共同的离散分布，

$$p_k = P(X=k), k=0,1,\cdots,$$

引入$u_k = p_0 + p_1 + \cdots + p_{k-1}$，$v_k = 1-u_k$，证明

$$E(\min\{X_1,\cdots,X_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^n$$

$$E(\max\{X_1,\cdots,X_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-u_k^n)$$

证明 $EX_{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{(1)} \ge k)$

上页 下页 返回

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 \ge k, \cdots, X_n \ge k) = \sum_{k=1}^{\infty} [P(X_1 \ge k)]^n$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - u_k)^n = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^n$$

$$EX_{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_{(n)} \ge k) = \sum_{k=1}^{\infty} [1 - P(X_{(n)} < k)]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [1 - P(X_1 < k, \cdots, X_n < k)]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [1 - P^n(X_1 < k)] = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - u_k^n)$$

上页 下页 返回

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量,

$P(X_1>0)=1$, 证明

$$E\left[\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right]=\frac{k}{n} \qquad 1\le k\le n$$

证明　令 $Y=X_1+\cdots+X_n$

则 $\dfrac{X_i}{Y}$ 独立同分布，有相同的数学期望，而

上页 下页 返回

$$1=E\left(\frac{Y}{Y}\right)=E\left(\frac{X_1}{Y}+\cdots+\frac{X_n}{Y}\right)=nE\left(\frac{X_1}{Y}\right)$$

$$\therefore E\left(\frac{X_1}{Y}\right)=\frac{1}{n}$$

$$E\left[\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right]=E\left[\frac{X_1+\cdots+X_k}{Y}\right]$$

$$=kE\left(\frac{X_1}{Y}\right)=\frac{k}{n}$$

上页 下页 返回

11. 设 $X \sim N(0,\sigma^2)$,n 是正整数，证明

$$E(X^n)=\begin{cases}\sigma^n(n-1)!! & n=2m\\ 0 & n=2m+1\end{cases}$$

证明 $$E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

当 $n=2m+1$ 时，显然 $E(X^n)=0$

当 $n=2m+1$ 时，

上页 下页 返回

$$E(X^n)=2\int_0^{+\infty}x^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \qquad 令\ t=\frac{x^2}{2\sigma^2},$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{\pi}}\sigma^n\int_0^{+\infty}t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}dt=\frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{\pi}}\sigma^n\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{\pi}}\sigma^n\Gamma\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdots\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sigma^n\Gamma\cdot\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\pi}=\sigma^n(n-1)!!$$

上页 下页 返回

12. 一手机收到的短信中有2%是广告，你期望相邻的两次广告短信中有多少不是广告短信。

解　设 X : 相邻两次短信中不是广告的短信次数

则　$$P(X=k)=q^k p$$

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=p\sum_{k=0}^{\infty}kq^k=pq\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$$

$$=pq(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'=\frac{q}{p}=49$$

上页　下页　返回

13. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，都服从 $[0,1]$ 上均匀分布，计算 $E(X_{(1)}), E(X_{(n)}), E(X_{(n)}^m), m \ge 1$

解　X_i 的密度函数 $f(x) = I_{(0<x<1)}$，

分布函数 $F(x) = xI_{(0<x<1)}$，

则 $X_{(1)}$ 的密度函数

$$g_1(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1} = n(1 - x)^{n-1} I_{(0<x<1)}$$

$X_{(n)}$ 的密度函数

上页 下页 返回

$$g_n(x)=nF^{n-1}(x)f(x)=nx^{n-1}I_{(0<x<1)}$$

$$E(X_{(1)})=\int_{-\infty}^{+\infty}xg_1(x)dx=\int_0^1 nx(1-x)^{n-1}dx$$

$$=n\mathrm{B}(2,n)=n\frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(2+n)}=\frac{1}{n+1}$$

$$E(X_{(n)})=\int_{-\infty}^{+\infty}xg_n(x)dx=\int_0^1 x\cdot nx^{n-1}dx=\frac{n}{n+1}$$

$$E(X_{(n)}^m)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^m g_n(x)dx=\int_0^1 x^m\cdot nx^{n-1}dx=\frac{n}{n+m}$$

上页 下页 返回

14. 设办公室5台计算机独立工作，每台计算机等待病毒感染的时间服从参数为λ的指数分布$\varepsilon(\lambda)$

（1）你对首台计算机被病毒感染前的时间期望是多少？

（2）你对5台计算机都被病毒感染的时间期望是多少？

解 令 X_i 是第 i 台机器被病毒感染的等待时间

上页 下页 返回

$$X_i \sim \varepsilon(\lambda) \qquad (i=1,2,3,4,5),$$

（1）$X_{(1)}$ 是第首台机器被病毒感染的等待时间，

$X_{(1)}$ 的密度为

$$f_1(x) = nf(x)[1-F(x)]^{n-1} = 5\lambda e^{-\lambda x} \cdot e^{-4\lambda x} I_{(x>0)}$$

$$= 5\lambda e^{-5\lambda x} I_{(x>0)}$$

$$EX_{(1)} = \int_0^{+\infty} 5\lambda x e^{-5\lambda} dx = \frac{1}{5\lambda}$$

上页 下页 返回

（2）$X_{(5)}$ 是5台机器都被病毒感染的等待时间，

$X_{(5)}$ 密度为

$$f_5(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x) = 5\lambda e^{-\lambda x} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^4 I_{(x>0)}$$

$$EX_{(5)} = \int_0^{+\infty} 5\lambda x e^{-\lambda x} \cdot (1 - e^{-\lambda x})^4 dx \qquad 令\ t = \lambda x$$

$$= \frac{5}{\lambda}\int_0^{+\infty} t e^{-t} \cdot (1 - e^{-t})^4 dt$$

上页 下页 返回

$$=\frac{5}{\lambda}\int_0^{+\infty} t(e^{-t}-4e^{-2t}+6e^{-3t}-4e^{-4t}+e^{-5t})dt$$

$$=\frac{5}{\lambda}[\Gamma(2)-\frac{4}{4}\Gamma(2)+\frac{6}{9}\Gamma(2)-\frac{4}{16}\Gamma(2)+\frac{1}{25}\Gamma(2)]$$

$$=\frac{5}{\lambda}\cdot\frac{137}{300}=\frac{137}{60\lambda}$$

上页 下页 返回

15. 设活塞的直径 $X \sim N(20, 0.02^2)$, 气缸的直径 $Y \sim N(20.10, 0.02^2)$, 如果 X, Y 独立，计算活塞能装入气缸的概率。

解 $\because X - Y \sim N(-0.10, 2 \times 0.02^2)$

$$\therefore P(X < Y) = P(X - Y < 0) = \Phi\left(\frac{0 + 0.10}{\sqrt{2} \times 0.02}\right)$$

$$= \Phi(3.54) = 0.9998$$

上页 下页 返回

16. 如果正方形抽屉的平均边长是15.00厘米，标准差是0.02厘米，正方形抽屉框的平均边长是15.10厘米，标准差是0.02厘米，设抽屉与抽屉框的边长相互独立，且各自相邻边长也相互独立，都服从正态分布，8个直角无误差，计算抽屉能装入抽屉框的概率。

解 抽屉的边长 $X_i \sim N(15, 0.02^2)$,

上页 下页 返回

抽屉框的边长 $Y_i \sim N(15.10, 0.02^2)$

则 $X_i - Y_i \sim N(-0.10, 2\times 0.02^2)$

$$P = P(X_1 - Y_1 < 0, X_2 - Y_2 < 0) = [P(X_1 - Y_1 < 0)]^2$$

$$= 0.9998^2 = 0.9996$$

17. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的随机变量，$Var(X_i) = \sigma_i^2$，求满足 $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1, a_j \geq 0$ 的常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $Y = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j = 1$ 的方差最小。

上页 下页 返回

解 即求 $\begin{cases} VarY = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 VarX_j = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_j = 1 \end{cases}$ 的最小值点

用拉格朗日乘数法令

$$F = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2 + \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_j - 1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 2a_i\sigma_i^2 + \lambda = 0 \Rightarrow a_i = -\frac{\lambda}{2\sigma_i^2}$$

上页 下页 返回

代入 $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-2}{\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma_j^2}}$

所以

$$a_j = -\frac{\lambda}{2\sigma_j^2} = \frac{\sigma_j^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{-2}}$$ （唯一驻点）

且 $VarY$ 最小值存在，即为所求。

上页 下页 返回

18. 设一点随机地落在中心在原点，半径为R的圆上，求落点横坐标的数学期望和方差。

解　$(X,Y)\sim U(D)$，其中 $D: x^2+y^2\le R^2$，则

$$EX=\iint_D x\cdot\frac{1}{\pi R^2}dx=0$$

$$EX^2=\iint_D x^2\cdot\frac{1}{\pi R^2}dx=\frac{1}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

上页　下页　返回

$$=\frac{1}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{1}{4}R^2$$

所以 $VarX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{4}R^2$

19. 一辆机场巴士运送25位乘客，中途经过7个车站，设每位乘客的行动相互独立，且在各车站下车的可能性相同，问平均有多少个车站有人下车，并求有人下车的车站个数的方差。

上页 下页 返回

解 设 $X_i=\begin{cases}0 & \text{第}i\text{站无人下车} \\ 1 & \text{第}i\text{站有人下车}\end{cases}$, $i=1,2,\cdots,7$,

则 $X=X_1+\cdots+X_7$ 为有人下车的车站数

由题意任一个乘客在第 i 站不下车的概率为 $\frac{6}{7}$,

25个乘客在第 i 站不下车的概率为 $(\frac{6}{7})^{25}$

$P(X_i=1)=(\frac{6}{7})^{25}$, $P(X_i=0)=1-(\frac{6}{7})^{25}$,

上页 下页 返回

$$EX = np = 7[1-(\frac{6}{7})^{25}]$$

$$VarX = npq = 7[1-(\frac{6}{7})^{25}](\frac{6}{7})^{25}$$

20. 设非负随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，

证明

$$P(X_{(1)} \geq M) \leq [\frac{EX_1^2 P(X_1 \geq M)}{M^2}]^{\frac{n}{2}}$$

上页 下页 返回

证明　X_1非负，所以由马尔科夫不等式

$$P(X_1 \ge M) = P(|X_1| \ge M) \le \frac{EX_1^2}{M^2}$$

$$P(X_{(1)} \ge M) = P(X_1 \ge M, \cdots, X_n \ge M)$$

$$= [P(X_1 \ge M)]^{\frac{n}{2}} \; [P(X_1 \ge M)]^{\frac{n}{2}}$$

$$\le [P(X_1 \ge M)]^{\frac{n}{2}} \left(\frac{EX_1^2}{M^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{EX_1^2 P(X_1 \ge M)}{M^2}\right]^{\frac{n}{2}}$$

21. 设 X 有概率密度 $f(x)=\dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, x\ge 0,$ 证明

$$P(0<X<2(m+1))\ge\frac{m}{m+1}$$

证明 $$EX=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m+1}}{m!}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(m+2)}{m!}=m+1$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}\frac{x^{m+2}}{m!}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(m+3)}{m!}=(m+2)(m+1)$$

上页 下页 返回

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = m+1$$

所以由切贝雪夫不等式

$$P(0 < X < 2(m+1))$$

$$= P(-(m+1) < X - EX < (m+1))$$

$$= P(|X - EX| < (m+1)) \geq 1 - \frac{VarX}{(m+1)^2}$$

$$= 1 - \frac{m+1}{(m+1)^2} = \frac{m}{m+1}$$

上页 下页 返回

22. 证明常数与任意随机变量不相关。

证明 $Cov(a,X)=E(aX)-Ea\cdot EX=0$

23. 设二维随机向量(X,Y)有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & x,y\in(0,1) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

计算$Cov(X,Y)$

解 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$

上页 下页 返回

$$EXY = \iint\limits_{R^2} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x+y)dy = \frac{1}{3}$$

$$EX = \iint\limits_{R^2} xf(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 x(x+y)dy = \frac{7}{12}$$

同理 $EY = \dfrac{7}{12}$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$$

上页 下页 返回

24. (线性预测问题) 设 X,Y 是方差有限的随机变量，证明

（1）$Q(a,b)=E[Y-(a+bX)]^2$ 的最小点为

$$\hat{b}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}},\hat{a}=EY-\hat{b}EX$$

这时称 $\hat{Y}=\hat{a}+\hat{b}X$ 是 Y 的最佳线性预测。

（2）$Q(a,b)$ 的最小值 $Q(\hat{a},\hat{b})=\sigma_{YY}(1-\rho_{XY}^2)$，并称

上页 下页 返回

此最小值是预测的均方误差。

证明（1）

$$Q(a,b)=E[Y-(a+bX)]^2$$

$$=EY^2-2E[Y(a+bX)]+E(a+bX)^2$$

$$=EY^2-2aEY-2bE(XY)+a^2+2abEX+b^2EX^2$$

所以 $$\frac{\partial Q}{\partial a}=2a+2bEX-2EY=0 \qquad (1)$$

上页 下页 返回

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 2aEX + 2bEX^2 - 2E(XY) = 0 \qquad (2)$$

$(1)\cdot EX - (2)$ 得

$$2b[(EX)^2 - EX^2] - 2[EXEY - E(XY)] = 0$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}}$$ 代人（1）$\hat{a} = EY - \hat{b}EX$

（2）$Q(\hat{a},\hat{b}) = E(Y - \hat{a} - \hat{b}X)^2$

$$= E[Y - (EY - \hat{b}X) - \hat{b}EX]^2$$

$$= E[(Y - EY) - \hat{b}(X - EX]^2$$

$$= E(Y - EY)^2 - 2\hat{b}E\{(Y - EY)(X - EX)] + \hat{b}^2 E(X - EX]^2$$

$$= \sigma_{YY} - 2\hat{b}\sigma_{XY} + \hat{b}^2\sigma_{XX}$$

$$= \sigma_{YY} - 2\frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_{XX}} + \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_{XX}} = \sigma_{YY} - \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_{XX}} = \sigma_{YY}(1 - \rho_{XY}^2)$$

上页 下页 返回

25. 若$\hat{Y}=\hat{a}+\hat{b}X$是Y的最佳线性预测，则

$$EY\hat{} = EY$$

证明 $E\hat{Y}=E(\hat{a}+\hat{b}X)=(EY-\hat{b}EX)+\hat{b}EX=EY$

26. $\hat{Y}=a+bX$是Y的最佳线性预测的充要条件是

$$E\hat{Y}=EY,\quad EY^2=E\hat{Y}^2+E(Y-\hat{Y})^2$$

证明"$\Rightarrow$" 若$\hat{Y}=a+bX$是Y的最佳线性预测，则

$$b=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}}\qquad a=EY-bEX$$

上页 下页 返回

且由上题 $E\hat{Y}=EY$，而

$$E[(Y-\hat{Y})X]=E[(Y-a-bX)X]$$

$$=E(XY)-aEX-bEX^2$$

$$=E(XY)-(EY-bEX)EX-bEX^2$$

$$=E(XY)-EXEY+b(EX)^2-bEX^2$$

$$=\sigma_{XY}-b\sigma_{XX}=\sigma_{XY}-\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}}\sigma_{XX}=0$$

上页 下页 返回

"$\Leftarrow$" $E\hat{Y} = EY$, $EY^2 = E\hat{Y}^2 + E(Y - \hat{Y})^2$ 则

$$E\hat{Y} = E(a + bX) = a + bEX = EY \qquad (1)$$

$$E[(Y - \hat{Y})X] = E[(Y - a - bX)X]$$

$$= E(XY) - aEX - bEX^2 = 0 \qquad (2)$$

由（1）（2）解出 $b = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}}$ $a = EY - bEX$

所以 $\hat{Y} = a + bX$ 是 Y 的最佳线性预测。

上页 下页 返回

27. 若 $\hat{Y}=a+bX$ 是Y 的最佳线性预测，证明

勾股定理：$EY^2=E\hat{Y}^2+E(Y-\hat{Y})^2$

证明 $\hat{Y}=a+bX=(EY-bEX)+bX$

$$=EY+b(X-EX)$$

$$\hat{Y}^2=(EY)^2+b^2(X-EX)^2+2b(X-EX)EY$$

$$E\hat{Y}^2=(EY)^2+b^2E(X-EX)^2=(EY)^2+b^2\sigma_{XX}$$

又 $Y\hat{Y}=Y[EY+b(X-EX)]$

上页 下页 返回

$$= YEY + bY(X - EX)]$$

$$E(Y\hat{Y}) = (EY)^2 + bE(XY) - bEXEY = (EY)^2 + b\sigma_{XY}$$

所以 $E\hat{Y}^2 + E(Y - \hat{Y})^2 = 2E\hat{Y}^2 + EY^2 - 2EY\hat{Y}$

$$= 2(EY)^2 + 2b^2\sigma_{XX} + EY^2 - 2(EY)^2 - 2b\sigma_{XY}$$

$$= 2\frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_{XX}^2}\sigma_{XX} + EY^2 - 2\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{XX}}\sigma_{XY} = EY^2$$

习题五解答

1. 设 X 服从负二项分布

$$P(X=k)=C_{n+k-1}^{k}p^{n}q^{k},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

求 X 的母函数。

解　$$g(s)=ES^{X}=\sum_{k=0}^{\infty}s^{k}C_{n+k-1}^{k}p^{n}q^{k}$$

$$=p^{n}\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{(n+k-1)-k}(sq)^{k}=p^{n}\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+n-1}^{n-1}(sq)^{k}$$

$$=\frac{p^{n}}{(1-sq)^{n}}$$

上页　下页　返回

2. 求下列母函数的分布列（展成幂级数）

（1） $g(s)=\dfrac{(1+s)^2}{4}$ 解 $g(s)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}s+\dfrac{1}{4}s^2$

所以分布列

X	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

（2） $g(s)=\dfrac{1}{a-s}$

解 $g(s)=\dfrac{1}{a-s}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-(\frac{s}{a})}=\dfrac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(\dfrac{s}{a})^k=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{a^{k+1}}s^k$

上页 下页 返回

所以分布列 $P(X=k)=\dfrac{1}{a^{k+1}}$，$k=0,1,2,\cdots$

（3）$g(s)=e^{s-1}$

解 $g(s)=\dfrac{1}{e}\cdot e^{s}=\dfrac{1}{e}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{s^{k}}{k!}$

所以分布列

$$P(X=k)=\frac{e^{-1}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

上页 下页 返回

3. 设取非负整数的随机变量 X 有母函数 $g(s)$，对非负整数 a,b，求 $Y=aX+b$ 的母函数。

解 $g_Y(s)=Es^Y=Es^{aX+b}=s^bE(s^a)^X=s^bg(s^a)$

4. 设取非负整数值的随机变量 X 有母函数 $g(s)$，用 $g(s)$ 表达以下函数。

（1） $h_1(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X\le k)s^k$

解 因为

上页 下页 返回

$$h_1(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X\le k)s^k$$

$$sh_1(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X\le k)s^{k+1}$$

所以两式相减

$$(1-s)h_1(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)s^k=g(s)$$

$$\therefore h_1(s)=\frac{g(s)}{1-s}$$

上页 下页 返回

（2）$h_2(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k)s^k, s\in[0,1]$

解　因为

$$g(\sqrt{s})=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)(\sqrt{s})^k$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}P(X=2m)(\sqrt{s})^{2m}+\sum_{m=1}^{\infty}P(X=2m-1)(\sqrt{s})^{2m-1}$$

$$g(-\sqrt{s})=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)(-\sqrt{s})^k$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}P(X=2m)(\sqrt{s})^{2m}-\sum_{m=1}^{\infty}P(X=2m-1)(\sqrt{s})^{2m-1}$$

上页 下页 返回

两式相加 $g(\sqrt{s})+g(-\sqrt{s})=2h_2(s)$

$$\therefore h_2(s)=\frac{g(\sqrt{s})+g(-\sqrt{s})}{2}$$

5. 掷4个均匀的正12面体，设第j 面的点数是 j

求点数和为15，16，17的概率。

解　设 i颗的点数 X_i：　$i=1,2,3,4,$

则 $Y=X_1+X_2+X_3+X_4$

而 X_1的母函数

上页　下页　返回

$$g_1(s)=Es^{X_1}=\sum_{j=1}^{12}P(X_1=j)s^j$$

$$=\frac{1}{12}(s+\cdots+s^{12})=\frac{1}{12}\cdot\frac{s(1-s^{12})}{1-s}$$

所以Y 的母函数

$$g(s)=[g_1(s)]^4=\frac{1}{12^4}\cdot\frac{s^4(1-s^{12})^4}{(1-s)^4}$$

$$=\frac{s^4}{12^4}(1-4s^{12}+6s^{24}-4s^{36}+s^{48})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+3}^{3}s^k$$

上页 下页 返回

分别求出 s^{15}, s^{16}, s^{17} 的系数得

$$P(Y=15)=\frac{1}{12^4}C_{11+3}^{3}=\frac{C_{14}^{3}}{12^4}$$

$$P(Y=16)=\frac{1}{12^4}[C_{12+3}^{3}-4C_{3}^{3}]=\frac{1}{12^4}[C_{15}^{3}-4]$$

$$P(Y=17)=\frac{1}{12^4}[C_{13+3}^{3}-4C_{4}^{3}]=\frac{1}{12^4}[C_{16}^{3}-4C_{4}^{3}]$$

6. 甲乙两人各掷均匀的硬币 n 次，利用母函数求甲掷得的正面次数大于乙掷得的正面次数 k 次的概率。

解　甲掷硬币并设 $X_i=\begin{cases}0 & 第i次反面\\ 1 & 第i次正面\end{cases}$，

$$i=1,2,\cdots,n$$

则 X_i 的概率母函数

$$g_i(s)=Es^{X_i}=\frac{1}{2}(s^0+s^1)=\frac{1}{2}(1+s)$$

上页　下页　返回

设 X 表示 n 次中甲正面出现的次数，

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

则 X 的概率母函数 $g(s) = [g_1(s)]^n = \frac{1}{2^n}(1+s)^n$

同理设 Y 表示 n 次中乙正面出现的次数，与 X 服从相同分布并有相同母函数,再令

$$Z = X - Y$$

其母函数

上页 下页 返回

$$g_Z(s)=Es^Z=Es^{X-Y}=Es^X\cdot Es^{-Y}$$

$$=Es^X\cdot E(s^{-1})^Y=\frac{1}{2^n}(1+s)^n\cdot\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{s})^n$$

$$=\frac{1}{2^{2n}s^n}(1+s)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}s^n}\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j s^j$$

所以 s^k 的系数为概率

$$P(Z=k)=P(X-Y=k)=\frac{1}{2n}C_{2n}^{n+k}$$

上页 下页 返回

7. 独立重复试验中，用 A_j 表示第 j 次试验成功，用 X表示首次成功后即接失败的试验次数（$X=n$ 表示 $A_{n-1}\overline{A}_n$ 发生，但是对$j<n$ 没有$A_{j-1}\overline{A}_j$ 发生）求 X 的母函数、EX、$VarX$

解 $$P(X=2)=pq$$

$$P(X=3)=ppq+qpq$$

$$P(X=4)=pppq+qppq+qqpq$$

……….

$$\therefore g(s)=\sum_{n=2}^{\infty}p^{n-1}qs^{n}+\sum_{n=3}^{\infty}p^{n-2}q^{2}s^{n}+\sum_{n=4}^{\infty}p^{n-3}q^{3}s^{n}+\cdots$$

$$=\frac{q}{p}\cdot\frac{s^{2}p^{2}}{1-sp}+\frac{q^{2}}{p^{2}}\cdot\frac{s^{3}p^{3}}{1-sp}+\frac{q^{3}}{p^{3}}\cdot\frac{s^{4}p^{4}}{1-sp}+\cdots$$

$$=\frac{pqs^{2}(1+qs+q^{2}s^{2}+\cdots)}{1-sp}$$

$$=\frac{pqs^{2}}{1-sp}\cdot\frac{1}{1-sq}=\frac{pqs^{2}}{1-s+pqs^{2}}$$

上页 下页 返回

$$\therefore EX = g'(1)$$

$$= \frac{2pqs(1-s+pqs^2) - pqs^2(-1+2pqs)}{(1-s+pqs^2)^2}\Big|_{s=1}$$

$$= \frac{2pqs - pqs^2}{(1-s+pqs^2)^2}\Big|_{s=1} = \frac{pq}{p^2q^2} = \frac{1}{pq}$$

$$g''(1) = \frac{2(1-2pq)}{(pq)^2}$$

$$VarX = g''(1) + g'(1) - [g'(1)]^2 = \frac{q}{p^2} + \frac{p}{q^2}$$

上页 下页 返回

8. 验证 $\Gamma(n,\lambda)$ 的特征函数 $\varphi(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-n}$

证明

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=\int_0^{+\infty}e^{itx}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{(it-\lambda)x}dx$$

令 $y=(\lambda-it)x$ $\quad x=\frac{1}{\lambda-it}y$

上页 下页 返回

$$\varphi(t)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}\frac{y^{n-1}}{(\lambda-it)^{n-1}}e^{-y}\cdot\frac{1}{\lambda-it}dy$$

$$=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)(\lambda-it)^n}\Gamma(n)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-n}$$

9. 设$Y\sim g(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$,其特征函数$\varphi_Y(t)=e^{-|t|}$,

又$X\sim f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$,求$X$的特征函数。

上页 下页 返回

解 考察随机变量 $\dfrac{X-\mu}{\lambda}$，不难得到 $\dfrac{X-\mu}{\lambda}$ 与 Y 同分布，所以

$$\varphi_X(t)=Ee^{itX}=E[e^{it(\lambda y+\mu)}]=e^{it\mu}E(e^{it\lambda Y})$$

$$=e^{it\mu}e^{-|\lambda t|}=e^{it\mu-\lambda|t|}$$

上页 下页 返回

10.设 X 服从 $\lambda=1,\mu=0$ 的柯西分布，对$Y=X$，证明 $Z=X+Y$ 的特征函数 $\varphi_Z(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$，$X,Y$独立吗？

解 因为 $Y=X$，显然 X,Y 不独立,不能用性质

但 $Z=2X$，所以

$$\varphi_Z(t)=Ee^{itZ}=Ee^{2itX}=e^{-2|t|}=[e^{-|t|}]^2=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

上页 下页 返回

11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，求

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

的分布。

（1）当 X_1 服从柯西分布

（2）当 X_1 服从$\Gamma(\alpha, \beta)$ 分布

解 （1）当 X_1 服从柯西分布时，由第九题其特征函数$\varphi_1(t) = e^{it\mu - \lambda|t|}$，则 Y的特征函数

上页 下页 返回

$$\varphi(t)=[\varphi_1(t)]^n=e^{int\mu-n\lambda|t|}$$

所以Y服从参数为$(n\mu,n\lambda)$的柯西分布。

（2）当X_1服从$\Gamma(\alpha,\beta)$分布时，由习题5.1其特征函数$\varphi_1(t)=(1-\frac{it}{\beta})^{-\alpha}$，则$Y$的特征函数

$$\varphi(t)=[\varphi_1(t)]^n=(1-\frac{it}{\beta})^{-n\alpha}$$

所以Y服从参数为$\Gamma(n\alpha,\beta)$的柯西分布。

上页 下页 返回

12. 已知如下特征函数，求概率分布

（1）$\varphi(t)=\cos t$

解 $\varphi(t)=Ee^{itx}=E[\cos tX+i\sin tX]=\cos t$

观察 X 的取值为 ± 1, 并设

X	1	-1
P	p	$1-p$

则 $\varphi(t)=E[\cos tX+i\sin tX]$

$$=(\cos t+i\sin t)p+(\cos t-i\sin t)(1-p)$$

上页 下页 返回

$$= \cos t + i(2p-1)\sin t = \cos t \qquad \therefore p = \frac{1}{2}$$

即分布列为

X	1	-1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

（2）$\varphi(t) = \cos^2 t$

解 $\varphi(t) = Ee^{itx} = E[\cos tX + i\sin tX]$

$$= \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$$

上页 下页 返回

观察 X 的取值为 0,±2, 并设

X	-2	2	0
P	p_1	p_2	$1-p_1-p_2$

则 $\varphi(t)=E[\cos tX+i\sin tX]$

$$=(\cos 2t-i\sin 2t)p_1+(\cos 2t+i\sin 2t)p_2+(1-p_1-p_2)$$

$$=(p_1+p_2)\cos 2t+i(-p_1+p_2)\sin 2t+(1-p_1-p_2)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t$$

上页 下页 返回

所以

$$p_1+p_2=\frac{1}{2},\quad -p_1+p_2=0,\quad 1-p_1-p_2=\frac{1}{2}$$

即

$$p_1=p_2=\frac{1}{4},$$

分布列为

$$\begin{array}{c|ccc} X & -2 & 2 & 0 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}$$

上页 下页 返回

13. 设 X_n 服从参数为 λ_n 的泊松分布 $(\lambda_n > 0)$

（1）当 $\lambda_n = n\lambda$ 时，证明

$$\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

（2）定义 $Y_n = \dfrac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ 时，证明对一切实数 x 有

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le x) = \Phi(x)$$

上页 下页 返回

解（1）要证 $\dfrac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ ，只需证

$\dfrac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ 的特征函数 $\varphi_n(t)$ 收敛到 $N(0,1)$

的特征函数 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 即可。

因为 X_n 的特征函数 $\tilde{\varphi}_n(t) = e^{\lambda_n(e^{it}-1)}$

而 $\dfrac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ 的特征函数

$$\varphi_n(t) = Ee^{it\cdot\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}} = e^{-it\sqrt{n\lambda}}\; Ee^{i(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}})X_n}$$

$$= e^{-it\sqrt{n\lambda}}\; \tilde{\varphi}_n(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}) = e^{-it\sqrt{n\lambda}}\; e^{\lambda_n(e^{i\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}}-1)}$$

$$= e^{-it\sqrt{n\lambda}}\; e^{\lambda_n[i\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{(it)^2}{n\lambda}+o(\frac{1}{n})]} \qquad \lambda_n = n\lambda$$

$$= e^{-it\sqrt{n\lambda}}\; e^{it\sqrt{n\lambda}-\frac{1}{2}t^2+o(1)} = e^{-\frac{1}{2}t^2+o(1)} \to e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

（2）与（1）完全类似的证明。

上页 下页 返回

14. 设 $\varphi(t)$ 是特征函数，证明 $|\varphi(t)|^2$ 也是特征函数。

证明 取 X,Y 独立同分布，特征函数为 $\varphi(t)$

令 $Z=X-Y$，则 Z 的特征函数

$$\varphi_Z(t)=Ee^{itZ}=Ee^{it(X-Y)}=Ee^{itX}\cdot Ee^{i(-t)Y}$$

$$=\varphi(t)\varphi(-t)=|\varphi(t)|^2$$

所以 $|\varphi(t)|^2$ 是 Z 的特征函数。

上页 下页 返回

15. 验证 $\chi^2(n)$ 分布的特征函数是 $(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$

证明 设 $Z\sim\chi^2(n)$, 则 $Z=X_1^2+\cdots+X_n^2$, 其中

$X_1,\cdots,X_n\sim N(0,1)$ 且独立

特别的 $X_1^2\sim\chi^2(1)$, 其密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}I_{(x>0)},$$

所以 X_1^2 的特征函数为

上页 下页 返回

$$\varphi_1(t)=\int_0^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(1-2it)x}{2}}dx$$ 令 $y=\frac{1-2it}{2}, dx=\frac{2}{1-2it}dy$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{(1-2it)^{1/2}}\int_0^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{(1-2it)^{1/2}}\Gamma(\frac{1}{2})$$

$=(1-2it)^{-\frac{1}{2}}$ 所以 Z 的特征函数

$$\varphi(t)=[\varphi_1(t)]^n=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$

上页 下页 返回

16．设 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma),\Sigma$ 正定，则

$$(\vec{X}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})\sim\chi^2(n)$$

证明 因为Σ 正定，则存在可逆方阵B,使$\Sigma=BB^T$,

则令 $\vec{X}=\vec{\mu}+B\vec{\varepsilon}$ ，且

$$\vec{\varepsilon}=B^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})\sim N(0,I)$$

$$\therefore(\vec{X}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})$$

$$=(\vec{X}-\vec{\mu})^T(BB^T)^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})$$

上页 下页 返回

$$=[(\vec{X}-\vec{\mu})^T(B^{-1})^T][B^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})]$$

$$=[(\vec{X}-\vec{\mu})^T(B^{-1})^T][B^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})]$$

$$=\vec{\varepsilon}^T\vec{\varepsilon}\sim\chi^2(n)$$

17. 设 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},I)$, A是秩为 r 的对称幂等矩阵，

$A^T=A^2=A$，证明

$$(\vec{X}-\vec{\mu})^T A(\vec{X}-\vec{\mu})\sim\chi^2(r)$$

上页 下页 返回

证明　因为 $A^2 - A = A(A-I) = 0$, 所以 A

的特征根只有0和1，所以存在正交矩阵 P,

$$P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^T$$

$$\therefore (\vec{X} - \vec{\mu})^T A(\vec{X} - \vec{\mu})$$

$$= (\vec{X} - \vec{\mu})^T P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^T (\vec{X} - \vec{\mu})$$

上页　下页　返回

$$=[P^T(\vec{X}-\vec{\mu})]^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[P^T(\vec{X}-\vec{\mu})]=\vec{\eta}^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{\eta}$$

其中 $\vec{\eta}=P^T(\vec{X}-\vec{\mu})$ 的期望和协方差阵分别为

$$E\vec{\eta}=E[P^T(\vec{X}-\vec{\mu})]=0 \qquad \Sigma=P^T IP=I$$

$$\therefore \vec{\eta}\sim N(0,I)$$

$$\therefore \vec{\eta}^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{\eta}\sim\chi^2(r)$$

上页 下页 返回

18. 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 求 $X+Y$ 与 $X-Y$ 独立的充要条件。

解 若 $X+Y$ 与 $X-Y$ 独立，则

$$0=Cov(X+Y,X-Y)=\sigma_{XX}-\sigma_{XY}+\sigma_{XY}-\sigma_{YY}$$

$$\Rightarrow \sigma_{XX}=\sigma_{YY}$$

反之若 $\sigma_{XX}=\sigma_{YY}$，显然 $0=Cov(X+Y,X-Y)$,

又 $X+Y$ 与 $X-Y$均服从正态，所以独立。

上页 下页 返回

即 $X+Y$ 与 $X-Y$ 独立的充要条件是$\sigma_{XX}=\sigma_{YY}$

19. 设$(X,Y.Z)^T \sim N(\vec{\mu},\Sigma)$, 其中

$$\vec{\mu}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix},\Sigma=\begin{pmatrix}8&3&2\\3&4&1\\2&1&2\end{pmatrix},$$

求 $X+Y$ 的概率密度。

解 $X+Y$ 仍服从正态，且

上页 下页 返回

$$E(X+Y)=EX+EY=3+5=8$$

又

$$X+Y=(1,1,0)\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix},\quad (1,1,0)\begin{pmatrix}8&3&2\\3&4&1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\7\\3\end{pmatrix}$$

$$\therefore Var(X+Y)=18$$

$$\therefore X+Y\sim N(8,18)$$

20. 设 $\{X_k\}$ 独立同分布，有共同密度

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

计算几乎处处极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$

解 由强大数定律 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\to\mu,a.s,$

而 $\mu=EX_1=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 6x^2(1-x)dx=\dfrac{1}{2}$

上页 下页 返回

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k \to \frac{1}{2}, a.s,$

21. 设全世界有 n 个家庭，每个家庭有 k 个小孩的概率都是 p_k，设 p_k 满足 $\sum\limits_{k=0}^{c}p_k = 1$,如果各个家庭的小孩数是相互独立的，计算一个小孩来自 k 个小孩家庭的概率。

解　设 $X_i =$ 第 i 个家庭的小孩个数，则

$X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布

再令 $S_n = X_1+\cdots+X_n$（表示全世界的小孩个数），

$Y_i = I(X_i = k), Y_i$ 独立同分布，则

$T_n = Y_1+\cdots+Y_n$（全世界有 k 个小孩的家庭个数）

$kT_n -$ 全世界有 k 个小孩的家庭个小孩总数

上页　下页　返回

所求的概率为 $\dfrac{kT_n}{S_n}$ 的极限, 由强大数定律

当 n 充分大时

$$\frac{kT_n}{S_n}=\frac{kT_n/n}{S_n/n}\to\frac{kEY_1}{EX_1}=\frac{kp_k}{\sum_{k=0}^{c}kp_k}$$

上页 下页 返回

22. 设$\{X_k\}$是独立同分布的随机变量序列，$\mu = EX_1$，

对非负常数 a,b 定义

$$Y_k = aX_k + bX_{k-1} + c \qquad k = 1,2,\cdots$$

写出关于$\{Y_k\}$的弱大数定律和强大数定律。

解 $EY_k = (a+b)\mu + c$, 则

弱大数定律：$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} Y_k$ 依概率收敛到 $(a+b)\mu + c$

强大数定律：$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} Y_k$ 几乎处处收敛到 $(a+b)\mu + c$

上页 下页 返回

23. 一位职工每一天乘公交车上班，如果每天上班的等车时间服从均值为5分钟的指数分布，求他在300个工作日中用于上班的等车时间之和大于24小时的概率。

解　令 X_i =第 i 个工作日的等车时间，则 $X_i \sim \varepsilon(\frac{1}{5})$

$$X = X_1 + \cdots + X_{300},$$

则 $EX = 5 \times 300 = 1500$　$VarX = 25 \times 300 = 7500$

上页　下页　返回

所以 $\dfrac{X-1500}{\sqrt{7500}} \overset{\bullet}{\sim} N(0,1)$

$$P(X>24\times 60)=P\left(\frac{X-1500}{50\sqrt{3}}>\frac{1440-1500}{50\sqrt{3}}\right)$$

$$=1-\Phi(-0.69)$$

$$=\Phi(0.69)=\frac{0.7517+0.7580}{2}=0.755$$

上页 下页 返回

24. 某人在计算机上平均每天上网5小时，标准差是4小时，求此人一年内上网的时间小于1700小时的概率。

解　令 $X_i =$ 第 i 天上网时间， $X = X_1 + \cdots + X_{365}$，

则 $EX = 5\times 365 = 1825$　　$VarX = 16\times 365 = 5840$

所以　$$\frac{X-1825}{\sqrt{5840}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

上页　下页　返回

$$P(X<1700)=P\left(\frac{X-1825}{\sqrt{5840}}<\frac{1700-1825}{\sqrt{5840}}=-1.64\right)$$

$$=\Phi(-1.64)=1-\Phi(1.64)=1-0.9495=0.051$$

25. 某学校学生上课的出勤率为97%，全校5000名学生上课时，求出勤人数少于4880的概率。

解 令 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{名学生出勤}\\ 0 & \text{第}i\text{名学生不出勤}\end{cases}$ $EX_i=p=0.97,$

上页 下页 返回

$X = X_1 + \cdots + X_{5000}$，则

$$EX = np = 5000 \times 0.97 = 4850$$

$$VarX = npq = 500 \times 0.97 \times 0.03 = 145.5$$

所以 $\dfrac{X-4850}{\sqrt{145.5}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$

$$P(X < 4880) = P\left(\frac{X-4850}{\sqrt{145.5}} < \frac{4880-4850}{\sqrt{145.5}} = 2.488\right)$$

$$= \Phi(2.488) = 0.9934$$

上页 下页 返回

26. 设独立同分布的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$和独立同分布的随机变量$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$相互独立，且有

$EX_1 = \mu_1, VarX_1 = \sigma_1^2$， $EY_1 = \mu_2, VarY_1 = \sigma_2^2$,

对充分大的n, m求随机变量

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Y_k$$

的分布。

上页 下页 返回

解 令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j,\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}Y_k$，则

$$E\overline{X}=\mu_1,Var\overline{X}=\frac{\sigma_1^2}{n},\quad E\overline{Y}=\mu_2,Var\overline{Y}=\frac{\sigma_2^2}{m}$$

则 $\overline{X},\overline{Y}$ 独立，且由中心极限定律对充分大的 n,m

$$\overline{X}\overset{\bullet}{\sim}N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n}),\quad \overline{Y}\overset{\bullet}{\sim}N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{m})$$

所以 $\overline{X}-\overline{Y}\overset{\bullet}{\sim}N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m})$

上页 下页 返回