第 9 讲：Cauchy 积分公式，2019.3.24

1. 计算下面积分

$$\int_{|z|=1} \frac{3z-1}{z(z-2)}dz; \quad \int_{|z|=2\pi} \frac{z^3}{(z-\pi)^3}dz.$$

2. (奇异积分) 区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \mathrm{Im} z > 0\}$ 为上半单位圆, f 是闭包 $\overline{\Omega}$ 上的连续函数. 对于边界点 $z \in \partial\Omega$, 给出奇异积分

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz$$

的合理定义. 在你给出的定义下, 计算 $I(1), I(i)$ 以及一般的 $I(z)$, 给出严格证明.

3. 假设 f 在 $\{|z| \le 1\}$ 全纯,

(1). 证明

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \overline{f(0)}, & |z| < 1 \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\overline{z})} & |z| > 1. \end{cases}$$

(2). 当 $|z| < 1$ 时, 计算

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} |d\zeta|.$$

4. 假设 $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{C}$ 互不相同, 模长都小于 R. 记 $p(z) = (z-a_1)\cdots(z-a_d)$. 证明

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{p(z)} = 2\pi i \sum_{1 \le k \le d} \frac{1}{p'(a_k)}.$$

由此证明恒等式：

$$\sum_{1 \le k \le d} \prod_{j \ne k} \frac{1}{a_j - a_k} = 0$$

5. 假设 p 是多项式, $c \in \mathbb{C}$, 证明

$$\int_{|z-c|=r} \overline{p(z)} dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(c)}.$$

6. 假设 f 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上全纯, 通过用两种方式计算积分

$$\int_{|\zeta|=1} \left(2 \pm (\zeta + \zeta^{-1})\right) \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

2

证明

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = f(0) - \frac{1}{2}f'(0).$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = f(0) + \frac{1}{2}f'(0).$$