

## 2018-2019 春夏微分几何

1. 求双曲螺线  $\vec{r}(t) = (a \cosh t, a \sinh t, at)$  ( $a > 0$ ) 的弧长、曲率及挠率。

2.(1) 已知曲线  $C$  的法平面经过一定点，试证明  $C$  落在一个球面上；

(2) 已知  $C$  是半径为  $R$  的球面上的曲线，试证明  $C$  的曲率不小于  $\frac{1}{R}$ 。

3. 已知伪球面  $S$  的方程为

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \ln(\sec v + \tan v) - a \sin v)$$

其中  $a > 0, u \in (0, 2\pi], v \in [0, \frac{\pi}{2})$

(1) 求  $S$  的第一基本形式、第二基本形式及 Gauss 曲率  $K$ ;

(2) 证明  $S$  上纬线的测地曲率  $\kappa_g = \frac{1}{a}$ ，并用 Gauss-Bonnet 公式说明  $S$  的总面积为  $2\pi a^2$ 。

4.(1) 已知曲面  $S$  上任一点处均存在过该点的 3 条互不相同的测地线，且这些测地线均为平面曲线，试证明  $S$  为全脐点曲面；

(2) 已知曲面  $S$  与其在 Gauss 映射下的像共形等价，试证明  $S$  是一个球面或极小曲面。

5. 已知曲面  $S$  上存在两族彼此正交的曲线，且每族曲线的测地曲率均为绝对常数，试证明  $S$  是可展曲面或具有负常 Gauss 曲率的曲面。