吉林大学 2011-2012 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

参考解析

一、（共 30 分）

1、求多项式 $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$ 在有理数域上的标准分解；

解：直接验证知：1,−1 都为 $f(x)$ 的根，故 $x+1$，$x-1$ 为 $f(x)$ 的因式，又其互素，故这两者的乘积 x^2-1 也是 $f(x)$ 的因式.再利用长除法即有：$f(x)=(x+1)(x-1)^3$.

2、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & -a_2 & 2a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & (n-1)a_n \end{vmatrix}$ 的值；

解：
$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & -a_2 & 2a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & (n-1)a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 2a_2 & 2a_3 & \cdots & 2a_n \\ 0 & 0 & 3a_3 & \cdots & 2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & na_n \end{vmatrix}=n!\prod_{i=1}^{n}a_i\cdot$$

3、设 A,X 都为三阶矩阵，且 $AX=A+2X$.已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 X.

解：有：$(A-2I)X=A$，故 $X=(A-2I)^{-1}A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

二、（共 15 分）设 A 是秩为 r 的 n 阶不满秩方阵.证明：存在可逆矩阵 Q 使得矩阵 $Q^{-1}AQ$ 的后 $n-r$ 列全为 0.

证明：由条件，有 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, |P||Q|\neq 0$.则有 $Q^{-1}AQ=Q^{-1}P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

故由矩阵乘法知矩阵 $Q^{-1}AQ$ 的后 $n-r$ 列全为 0.

三、（共 15 分）设 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB=B+I$，证明 $G=\begin{pmatrix} A & B \\ 2A^2-3A+I & I \end{pmatrix}$ 可逆.

证明：此时有 $(A-I)B=I$，故 $(A-I)^{-1}=B$，$|A-I|\neq 0$.而：

$\begin{pmatrix} I & -B \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 2A^2-3A+I & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I-A & O \\ 2A^2-3A+I & I \end{pmatrix}$，同取行列式，有：

$\begin{vmatrix} A & B \\ 2A^2-3A+I & I \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I-A & O \\ 2A^2-3A+I & I \end{vmatrix}=|I-A|\neq 0$.故 G 可逆.

四、（共 15 分）讨论方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=a-3 \\ x_1+ax_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+ax_3=-2 \end{cases}$ 解的情况，并在有解时求出其所有解.

解：对其增广矩阵 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}$ 做初等行变换后得 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 3a-3 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

①若 a=1.方程组等价于 $x_1+x_2+x_3=-2$，通解为 $x=k_1(-1,1,0)^T+k_2(-1,0,1)^T+(-2,0,0)^T$；

②若 a=−2.系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩，方程组无解；

③若 a 不为 1,−2.则方程组有唯一解：$x_1=\dfrac{a-1}{a+2}$，$x_2=x_3=-\dfrac{3}{a+2}$.

五、（共 15 分）设 n 元向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\,(n>1)$ 满足 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$.

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关当且仅当 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_n$ 线性无关.

证明：易知 $(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

而 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0$，故 $(\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_n)$ 和 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 秩等价.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关当且仅当 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\ldots,\beta-\alpha_n$ 线性无关.

六、（共 10 分）设既约分数 $\dfrac{q}{p}$ 是整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 的一个根，求证：对任何整数 k， $pk-q$ 整除 $f(k)$.

证明：由条件，有： $f(x)=(x-\dfrac{q}{p})(b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0)$ ，比较系数，得：

$$b_{n-1}=a_n, b_{n-i}=a_{n-i+1}+\frac{q}{p}b_{n-i+1}=\frac{c_{i-1}}{p^{i-1}},\ i=2,3,\ldots,n.$$

由递推关系，不难知有 $c_{i-1}\in Z$，$i=2,3,\ldots,n$.

故有： $f(x)=(x-\dfrac{q}{p})(a_nx^{n-1}+\dfrac{c_1}{p}x^{n-2}+\ldots+\dfrac{c_{n-2}}{p^{n-2}}x+\dfrac{c_{n-1}}{p^{n-1}})$.

从而有： $p^nf(k)=(pk-q)(a_n(pk)^{n-1}+c_1(pk)^{n-2}+\ldots+c_{n-2}pk+c_{n-1})$.

故 $(pk-q)\mid p^nf(k)$，又 $((pk-q),p^n)$，故 $(pk-q)\mid f(k)$.