第 23 讲 调和函数

1. 求出 $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ 的共轭调和函数.

2. 区域 $\Omega = \mathbb{C} - [0, 1] \cup \{2\}$ 上的调和函数

$$u(z) = \log|z| + c\log|z - 1| + d\log|z - 2| \quad , c, d \in \mathbb{R}$$

当 c, d 取何值时, 有共轭调和函数?

3. 假设 u 是单位圆盘上的调和函数, 满足 $-1 < u < 1$ 并且 $u(0) = 0$. 求 $|u_z(0)|$ 和 $u(1/2)$ 的最大值. 取到最大值时, u 具有什么样的形式?

4. 假设 $f : \Omega \to D$ 全纯, $w = f(z)$, $u \in C^2(D)$. 证明 Laplace 算子满足

$$\Delta_z(u \circ f) = |f'(z)|^2(\Delta_w u) \circ f.$$

(这说明, 如果 u 是 D 上的调和函数, 则 $u \circ f$ 是 Ω 上的调和函数. 注 $\Delta_\zeta = 2\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}$)

5. 假设 u 在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上调和, 对任意 $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, 成立

$$\lim_{r \to 1^-} u(rz_0) = 0,$$

是否可以断言 $u \equiv 0$? 证明或者举反例.

附加题 (不做要求)

请将解答发至 wxg688@163.com. 无截止日期.

问题 2.7. (调和映射的 Schwarz 引理) 假设 $f = u + iv : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是调和映射, 满足 $f(0) = 0$, 证明不等式:

$$|f(z)| \leq \frac{4}{\pi}\arctan|z|, \forall z \in \mathbb{D}.$$