第十六章 多元函数的极限与连续

§1 平面点集与多元函数

1. 判断下列平面点集，哪些是开集、闭集、有界集或区域？并分别指出它们的聚点与界点.

(1) $[a,b)\times[c,d)$；(2) $\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$；(3) $\{(x,y)\mid xy=0\}$；

(4) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；(5) $\{(x,y)\mid x<2, y<2, x+y>2\}$；

(6) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 或 $y=0, 0\leqslant x\leqslant 1\}$；

(7) $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1$，或 $y=0, 1\leqslant x\leqslant 2\}$

(8) $\{(x,y)\mid x,y$ 均为整数$\}$；(9) $\{(x,y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x}, x>0\}$

解 (1) 经判定可知该点集是有界集，也是区域. 但既不是开集又不是闭集. 其聚点为 $[a,b]\times[c,d]$ 中任一点. 界点为矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 的四条边上的任一点.

(2) 该集为开集，不是有界集也不是区域，其聚点为平面上任一点. 其界点为两坐标轴上的点.

(3) 该集为无界闭集，不是开集不是区域，其聚点为坐标轴上的任一点，而界点与聚点相同.

(4) 该集为开集且为区域. 聚点为满足 $y\geqslant x^2$ 上任一点界点为 $y=x^2$ 上的所有点.

(5) 该集为有界开集. 聚点为开集内的任一点和任一界点. 界点为直线 $x=2, y=2$ 和 $x+y=2$ 所围成的三角形三边上的点.

(6) 该集为有界闭集. 聚点为集中任一点，界点与聚点相同.

(7) 该集为有界闭集. 聚点为集合 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1$ 或 $y=0, 1\leqslant x\leqslant 2\}$ 中的所有点. 界点为聚点中除去 $x^2+y^2<1$ 的部分.

(8) 该集为闭集. 没有聚点. 界点为集合 $\{(x,y)\mid x,y$ 均为整数$\}$

中的全体点.

(9) 该集为非开非闭的无界集. 聚点为点$(0,0)$及曲线$y=\sin\frac{1}{x}$上的点. 界点与聚点相同.

2. 试问集合$\{(x,y)\mid 0<|x-a|<\delta, 0<|y-b|<\delta\}$与集合$\{(x,y)\mid |x-a|<\delta, |y-b|<\delta, (x,y)\neq(a,b)\}$是否相同?

解　给出的两个集合是不相同的. 第一个集合挖去了两条线段$x=a(y\in[b-\delta,b+\delta])$及$y=b(x\in[a-\delta,a+\delta])$, 第二个集合只挖去了一个点$(a,b)$.

3. 证明: 当且仅当存在各点互不相同的点列$\{P_n\}\subset E, P_n\neq P_0, \lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$时, P_0是E的聚点.

证　充分性　若存在$\{P_n\}\subset E, P_n\neq P_0, \lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$时, 则对任给的$\varepsilon>0$, 总存在$N$, 使得$n>N$时, 有

$$P_n\in U^\circ(P_0,\varepsilon)$$

当n充分大时, $U^\circ(P_0,\varepsilon)$含有$\{P_n\}$的无穷多个点. 又$\{P_n\}\subset E$, 从而$U^\circ(P_0,\varepsilon)$中含有E中无穷多个点. 这说明P_0是E的聚点.

必要性　若P_0是E的聚点, 则对任给的$\varepsilon>0$, $U^\circ(P_0,\varepsilon)$中必含有E中的点. 取$\varepsilon_1=1$, 则$U^\circ(P_0,\varepsilon_1)$中含有$E$中的点, 取出一个, 记为$P_1$.

取$\varepsilon_2=\min\{\frac{1}{2}, |P_1-P_0|\}$, 则$U^\circ(P_0,\varepsilon_2)$中也含有$E$中的点, 取出一个, 记为$P_2$.

依次类推.

取$\varepsilon_n=\min\left\{\frac{1}{n}, |P_1-P_0|, \cdots, |P_{n-1}-P_0|\right\}$, 则$U^\circ(P_n,\varepsilon_n)$中含有$E$中的点, 取出一个, 记为$P_n$.

这样继续下去, 得到一个各项互异的点列$\{P_n\}$. 易见$P_n\neq P_0$, $\{P_n\}\subset E$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$.

4. 证明: 闭域必是闭集, 举例证明反之不真.

证　设 D 为闭域，则有开域 G 使

$$D = G \cup \partial G \tag{1}$$

其中 ∂G 为 G 的边界. 设 $P_0 \notin D$，则 $P_0 \notin G$ 且 $P_0 \notin \partial G$. 由 $P_0 \notin G$ 知：对任意 $\delta > 0, U(P_0,\delta) \cap CG \neq \varnothing$，其中 CG 为 G 的余集即关于 R^2 的补集. 由于 $P_0 \notin \partial G$，从而存在 $\delta_0 > 0$，使 $U(P_0,\delta_0) \cap G = \varnothing$. 下证

$$U(P_0,\delta_0) \cap \partial G = \varnothing \tag{2}$$

若不然，则存在 $P_1 \in U(P_0,\delta_0) \cap \partial G$. 于是当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，$U(P_1,\varepsilon) \subset U(P_0,\delta_0)$. 由于 $P_1 \in \partial G$，从而 $U(P_1,\varepsilon)$ 中含有 G 的点 Q. 于是 $Q \in U(P_0,\delta) \cap G$. 这与以上结论矛盾. 因此(2)真. 由(1)知

$$U(P_0,\delta_0) \cap D = \varnothing$$

故 P_0 不是 D 的聚点. 这就证明了：若 P_0 为 D 的聚点，则 $P_0 \in D$. 因此 D 为闭集.

注　以上证明中未用到 G 为开域. 由此可知：对任一点集 E，$E \cup \partial E$ 恒为闭集.

5. 证明：点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

证　必要性　设点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0)$，则对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，$\rho(P_n,P_0) < \varepsilon$ 即

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$$

故 $|x_n - x_0| \leqslant \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon (n > N)$

从而　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

同理　$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

充分性　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$，则对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$|x_n - x_0| < \varepsilon/\sqrt{2}, \ |y_n - y_0| < \varepsilon/\sqrt{2}$$

因此　$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - x_0)^2} < \varepsilon (n > N)$

故点列$\{P_n(x_n,y_n)\}$收敛于$P_0(x_0,y_0)$.

6. 求下列各函数的函数值：

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$,求 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求 $f(1,\dfrac{y}{x})$;

(3) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,求 $f(tx,ty)$.

解　(1)
$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left[\frac{\arctan\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}{\arctan\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}\right]^2$$
$$=\left(\frac{\arctan 1}{\arctan\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{9}{16}$$

(2)
$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{2\cdot 1\cdot\left(\frac{y}{x}\right)}{1^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{\frac{2y}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

(3) $f(tx,ty)=t^2x^2+t^2y^2-t^2xy\cdot\tan\dfrac{x}{y}=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}\right)$

7. 设 $F(x,y)=\ln x\ln y$ 证明:若 $u>0,v>0$,则
$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证　因为 $F(x,y)=\ln x\ln y$,且 $u>0,v>0$,所以
$$\begin{aligned}F(xy,uv)&=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)\\&=\ln x\ln u+\ln x\ln v+\ln y\ln u+\ln y\ln v\\&=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).\end{aligned}$$

8. 求下列各函数的定义域，画出定义域的图形，并说明这是何种点集：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;　(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{xy}$;　(4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(5) $f(x,y)=\ln x+\ln y$; (6) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

(7) $f(x,y)=\ln(y-x)$; (8) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$;

(9) $f(x,y)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$;

(10) $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r)$

解　(1) 函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x\neq\pm y\}$,是无界开点集.(图 16－1)

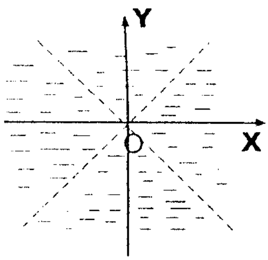

图 16—1

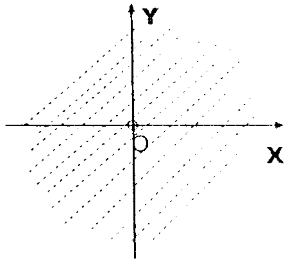

图 16—2

(2) 函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid 2x^2+3y^2\neq 0\}=R^2-\{(0,0)\}$,是无界开点集.(图 16－2)

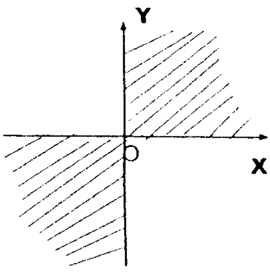

图 16—3

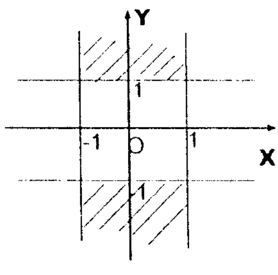

图 16—4

(3) 函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid xy\geqslant 0\}$,是无界闭集.(图 16－3)

(4) 函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid 1-x^2\geqslant 0$ 且

$y^2-1\geqslant 0\} = \{(x,y) \mid |x| \leqslant 1$ 且 $|y| \geqslant 1\}$,是无界闭集.(图 16-4)

(5) 由对数定义知函数的定义域为 $D = \{(x,y) \mid x > 0$ 且 $y > 0\}$,是无界开点集.(图 16-5)

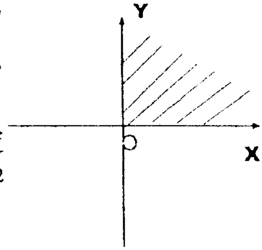

图 16—5

(6) 由开方和三角函数的定义知函数的定义域为 $D = \{(x,y) \mid 2n\pi \leqslant x^2+y^2 \leqslant (2n+1)\pi, n=0,1,2,\cdots\}$,是无界闭集.(图 16-6)

(7) 由对数的定义知函数的定义域为

$D = \{(x,y) \mid y > x\}$,是无界开集.

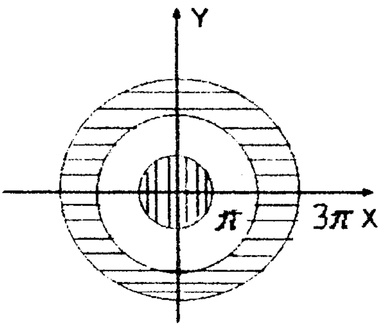

图 16—6

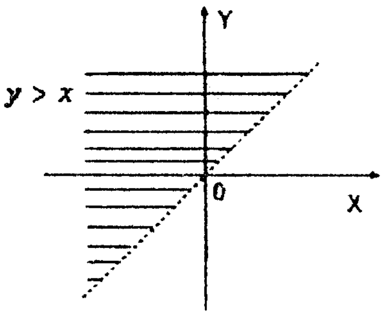

图 16—7

(8) 因为 $e^{x^2+y^2}\neq 0$,所以无论 x,y 取任何实数均不会使 $e^{x^2+y^2}$ 为零.由指数函数定义知函数的定义域为 $D = \{(x,y) \mid (x,y) \in R^2\}$ 整个平面,是无界既开又闭的点集.

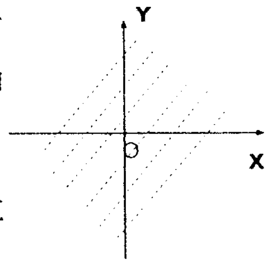

图 16—8

(9) 由所给的函数可知其定义域是整个三维空间,是无界既开又闭的点集.

(10) 函数的定义域为 $D = \{(x,y,z) \mid r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$，是有界既不开又非闭的点集.

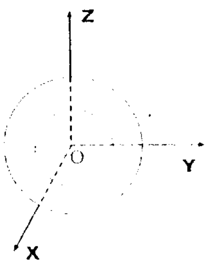

图 16—9

9. 证明：开集与闭集具有对偶性 —— 若 E 为开集，则 CE 为闭集；若 E 为闭集，则 CE 为开集.

证　设 E 为开集，但 CE 不是闭集. 则由闭集定义知，CE 中至少有一个聚点不属于 CE. 设这个聚点为 A，则必有 $A \in E$. 因为 E 为开集，所以存在点 A 的某邻域 $U(A)$，使 $U(A) \subset E$. 因此，$U(A)$ 中不含有 CE 中的点. 这与 A 是 CE 的聚点矛盾. 因此，若 E 为开集，则 CE 为闭集.

设 E 为闭集，但 CE 不是开集. 由开集定义知 CE 中至少有一个点不是 CE 的内点. 设这个点为 B，则根据内点的定义知，对点 B 的任何邻域 $U(B)$ 都有 $U(B)$ 不含于 CE，即 $U(B)$ 中含有 E 中的点. 由于 $B \notin E$，因此，B 为 E 的聚点. 但 $B \notin E$，这与 E 是闭集矛盾. 因而，若 E 为闭集，则 CE 必为开集.

10. 证明：

(1) 若 F_1, F_2 为闭集，则 $F_1 \cup F_2$ 与 $F_1 \cap F_2$ 都为闭集；

(2) 若 E_1, E_2 为开集，则 $E_1 \cup E_2$ 与 $E_1 \cap E_2$ 都为开集；

(3) 若 F 为闭集，E 为开集，则 $F \setminus E$ 为闭集，$E \setminus F$ 为开集.

证　(1) 设 P 为 $F_1 \cup F_2$ 的聚点，由课本上册第七章 §1 定义 2″，存在一个各点互不相同的收敛于 P 的点列 $\{P_n\} \subset F_1 \cup F_2$，因而 F_1 和 F_2 至少有一个集合含有 $\{P_n\}$ 中的无限多项，不妨设 $\{P_{n_k}\} \subset F_1$，于是也有 $P_{n_k} \to P (k \to \infty)$，从而 P 为 F 的聚点，$\because F_1$ 为闭集，$\therefore P \in F_1$. 故 $P \in F_1 \cup F_2$，即 $F_1 \cup F_2$ 为闭集.

同理可证 $F_1 \cap F_2$ 也为闭集.

(2) 设 E_1, E_2 为开集，$\forall A \in E_1 \cup E_2$，有 $A \in E_1$ 或 $A \in E_2$. 不妨设 $A \in E_1$，则存在点 A 的某邻域 $U(A)$，使得 $U(A) \subset E_1$，从而有 $U(A) \subset E_1 \cup E_2$. 因此，$E_1 \cup E_2$ 为开集.

设 $B \in E_1 \cap E_2$,则有 $B \in E_1$ 且 $B \in E_2$.由于 E_1,E_2 为开集,则存在点 B 的某邻域 $U(B;\delta_1)$,使得

$$U(B;\delta_1) \subset E_1$$

也存在点 B 的某邻域 $U(B;\delta_2)$,使得

$$U(B;\delta_2) \subset E_2$$

因此,存在点 B 的邻域 $U(B;\delta)$(其中 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$),使得

$$U(B;\delta) \subset E_1 \cap E_2,$$

所以　$E_1 \cap E_2$ 为开集.

(3) 若 F 为闭集,E 为开集,由 9 题知 CF 为开集,CE 为闭集.又 $F \setminus E = F \cap CE, E \setminus F = E \cap CF$,从而由(1)、(2)知 $F \setminus E$ 为闭集,$E \setminus F$ 为开集.

11. 试把闭区域套定理推广为闭集套定理,并证明之.

证　推广为:设 $\{F_n\}$ 为 R^2 中的闭集列,且满足

(1) $F_n \supset F_{n+1}, n = 1,2,\cdots$;

(2) $d_n = d(F_n), \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$,

则存在唯一的一个点 $P_0 \in F_n, n = 1,2,\cdots$

现证如下:

任取点列 $P_n \in F_n (n = 1,2,\cdots)$.由于 $F_{n+p} \subset F_n$,因此 $P_n, P_{n+p} \in F_n$,从而有 $\rho(P_n,P_{n+p}) \leqslant d_n \to 0 (n \to \infty)$

由定理 16.1 可知:必存在 $P_0 \in R^2$,使得

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

任意取定 n,对任何自然数 p 有

$$P_{n+p} \in F_{n+p} \subset F_n$$

由于 F_n 为闭集,且 $\lim\limits_{p\to\infty} P_{n+p} = P_0$,所以 P_0 作为 F_n 的点或为其聚点,必定属于 F_n,即

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} P_{n+p} \in F_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

下证 P_0 的唯一性:

若还有 $P'_0 \in F_n \quad (n = 1,2,\cdots)$ 则

$$\rho(P_0,P'_0)\leqslant\rho(P_0;P_n)+\rho(P'_0,P_n)\leqslant 2d_n\to 0\quad(n\to\infty),$$

得到 $\rho(P_0,P'_0)=0$,故 $P_0=P'_0$.

12. 证明定理 16.4(有限覆盖定理):

设 $D\subset \boldsymbol{R}^2$ 为一有界闭域,$\{\triangle\alpha\}$ 为一开域族,它覆盖了 D(即 $D\subset\bigcup\limits_{\alpha}\triangle\alpha$),则在 $\{\triangle\alpha\}$ 中必存在有限个开集 $\triangle_1,\triangle_2,\cdots,\triangle_n$,它们同样覆盖了 D(即 $D\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\triangle_i$).

证 设有界闭域 D 含在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 之中,并假设 D 不能被 $\{\triangle\alpha\}$ 中有限个开域所覆盖.用直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$,$y=\dfrac{c+d}{2}$ 把矩形 $a\leqslant x\leqslant b$,$c\leqslant y\leqslant d$ 分成四个相等的闭矩形.那么至少有一个闭矩形它所含的 D 的部分不能被 $\{\triangle\alpha\}$ 中有限个开域所覆盖.把这个矩形(若有几个,则任选其一)再分为四个相等的闭矩形.按照这样分法继续下去,可得一闭矩形套 $\{[a_n,b_n]\times[c_n,d_n]\}$.其中每一个闭矩形所含的 D 的部分都不能为 $\{\triangle\alpha\}$ 中有限个开域所覆盖.于是,每个闭矩形 $[a_n,b_n]\times[c_n,d_n]$ 中都至少含有 D 的一点,任取其中一点为 (x_n,y_n).则 $(x_n,y_n)\in D$,且

$$a_n<x_n<b_n,c_n<y_n<d_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

由闭矩形套定理可知:存在一点 (x_0,y_0),满足对任意的自然数 n 都有:

$$a_n\leqslant x_n\leqslant b_n,c_n\leqslant y_n\leqslant d_n$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}(d_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{d-c}{2^n}=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$,又因 (x_n,y_n) 是有界闭域 D 上的点,所以 $(x_0,y_0)\in D$,按定理条件,在 $\{\triangle\alpha\}$ 中必有一开域包含 (x_0,y_0),不妨设此开域为 Δ_0,则必存在点 $P_0(x_0y_0)$ 的一个邻域 $U(P_0,\delta)$,使得 $U(P_0,\delta)\subset\Delta_0$,由于 $a_n\to x_0,b_n\to x_0;c_n\to y_0$,

$d_n \to y_0$,故 n 充分大时,恒有

$$x_0-\frac{\delta}{2}<a_n\leqslant x_0\leqslant b_n<x_0+\frac{\delta}{2}.$$

$$y_0-\frac{\delta}{2}<c_n\leqslant y_0\leqslant d_n<y_0+\frac{\delta}{2}$$

可见,矩形$[a_n,b_n]\times[c_n,d_n]$包含于邻域$U(P_0,\delta)$中,从而包含于开域Δ_0中,但是,这与每个$[a_n,b_n]\times[c_n,d_n]$中所含的D的部分不能被$\{\Delta\alpha\}$中有限个开域所覆盖矛盾,故$\{\Delta\alpha\}$中必有D的有限开覆盖.

§2　二元函数的极限

1. 试求下列极限(包括非正常极限):

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+y^2+y^2}-1}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1}{x^4+y^4}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{1}{2x-y}$;

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

解　(1) 因为当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|xy|}{2}\to 0\quad((x,y)\to(0,0)).$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[\dfrac{1}{x^2+y^2}+1\right]=+\infty.$

(3) 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}{1+x^2+y^2-1}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{1+x^2+y^2}+1)$

$= (\sqrt{1+0}+1) = 2.$

(4) 由于当 $(x,y)\in U^{\circ}(0,1)$ 时，

$$\frac{xy+1}{x^4+y^4} \geqslant \frac{1-|xy|}{\sqrt{x^4+y^4}} = \frac{1}{\sqrt{x^4+y^4}} - \frac{|xy|}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{|xy|}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

又因此时

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^4+y^4}} \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^4}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}\right) \leqslant 1$$

从而当 $(x,y)\in U^{\circ}(0,1)$ 时，

$$\frac{xy+1}{x^4+y^4} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \to +\infty.$$

$(x,y)\to(0,0)$ 时，原式 $=+\infty$.

(5) 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (2x-y) = 0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{1}{2x-y} = \infty$.

(6) 因为当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant 1$，故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

(7) 原式 $= \lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

2. 讨论下列函数在点 $(0,0)$ 的重极限与累次极限：

(1) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$；

(2) $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$；

(3) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

(4) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$;

(5) $f(x,y)=y\sin\dfrac{1}{x}$;

(6) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$;

(7) $f(x,y)=\dfrac{e^x-e^y}{\sin xy}$.

解　(1) 当动点(x,y)沿着直线 $y=mx$ 趋于定点$(0,0)$时,

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{m^2}{1+m^2}(x\neq 0).$$

这说明动点沿不同斜率的直线趋于原点时,对应的极限值均不同,因此,函数$f(x,y)$当$(x,y)\to(0,0)$时的重极限不存在,但累次极限:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=0;$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=1.$$

(2) 函数的两个累次极限都不存在.

又　$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x|+|y|\to 0(x,y)\to(0,0))$$

故　$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

(3) 函数的累次极限为:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0;$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0.$$

所以,函数 $f(x,y)$ 的两个累次极限存在且相等.

由于　$f(x,x)=1,\ (x\neq 0), f(x,0)=0(0\neq 0)$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x,x)\neq\lim\limits_{x\to 0}(x,0)$,故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

(4) 累次极限为:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{y\to 0}y^2=0$$

因此,函数 $f(x,y)$ 的两个累次极限存在且相等.

现让动点(x,y) 沿着直线 $y=x^2(x^2-1)$ 向$(0,0)$ 点移动.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2(x^2-1)}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2(x^2-1)}}\left[\frac{1}{x}+x^3(x^2-1)^3\right]=\infty$$

故函数 $f(x,y)$ 的重极限不存在.

(5) 累次极限为:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}y\sin\frac{1}{x}\text{ 不存在.}$$

又 $\left|y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|y|\to 0((x,y)\to(0,0))$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y\sin\frac{1}{x}=0.$

可见函数 $f(x,y)$ 的重极限存在且为零.

(6) 累次极限为:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

函数 $f(x,y)$ 的两个累次极限存在且相等.

当(x,y) 沿 $y^3=x^4-x^3$ 趋于$(0,0)$ 时,

$$f(x,y)=\frac{x^2(\sqrt[3]{x^4-x^3})^2}{x^4}=(\sqrt[3]{x-1})^2\to 1$$

当(x,y) 沿 $y=kx$ 趋于$(0,0)$ 时,$f(x,y)=\dfrac{k^2x}{1+k^3}\to 0$

极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

(7) 累次极限为:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{e^x-e^y}{\sin xy} \text{不存在}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^y}{\sin xy} \text{不存在}$$

函数 $f(x,y)$ 的两个累次极限均不存在. 当动点 (x,y) 沿 x 轴正向趋于 $(0,0)$ 时.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^x-e^y}{\sin xy} \text{不存在}$$

故函数 $f(x,y)$ 的重极限也不存在.

3. 证明:若1° $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$ 存在且等于 A;

2° 当 y 在 b 的某邻域内时,存在有 $\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\varphi(y)$,则

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=A$$

证　由条件 1° 知:对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,当 $|x-a|<\delta_1$,$|y-b|<\delta_1$,且 $(x,y)\neq(a,b)$ 时,有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon \tag{1}$$

又由条件 2° 知:当 y 在 b 的某邻域 δ_2 内时,$\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,当 $|y-b|<\delta$ 时,在(1)式中,令 $x\to a$,得

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y)=A$,即 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=A$

4. 试应用 ε—δ 定义证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

证　因为当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\cdot\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant|x|$$

从而对任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$$

所以 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

5. 叙述并证明：二元函数极限存在的唯一性定理，局部有界性定理与局部保号性定理.

(1) 唯一性定理：若极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ 存在，则它只有一个极限.

证　设 A,B 都是二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(a,b)$ 处的极限，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $(x,y)\in U^\circ(P_0,\delta)\cap D$ 时，

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x,y)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|A-B|\leqslant|f(x,y)-A|+|f(x,y)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，故 $A=B$.

(2) 局部有界性定理：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$，则存在点 $P_0(a,b)$ 的某空心邻域 $U^\circ(P_0,\delta)$，使 $f(x,y)$ 在 $U^\circ(P_0,\delta)\cap D$ 上有界.

证　设 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x)=A$，则对 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，对 $(x,y)\in U^\circ(P_0,\delta)\cap D$ 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon=1$$

即 $A-1<f(x,y)<A+1$

这说明函数 $f(x,y)$ 在 $U^\circ(P_0,\delta)\cap D$ 上有界.

(3) 局部保号性定理：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A>0$（或 <0），则对任意正数 $r(0<r<|A|)$，存在 $P_0(a,b)$ 的某空心邻域 $U^\circ(P_0,\delta)$，使得对一切点 $P(x,y)\in U^\circ(P_0,\delta)\cap D$，恒有 $f(x,y)>r>0$（或 $f(x,y)<-r<0$）.

证　设 $A>0$，取 $\varepsilon=A-r$，由函数极限的定义知：存在相应的 $\delta>0$，对一切 $(x,y)\in U^\circ(P_0,\delta)\cap D$

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon=A-r$$

故　当 $(x,y)\in U^\circ(P_0,\delta)\cap D$ 时，

$$f(x,y) > A-(A-r)=r>0.$$

对于 $A<0$ 的情况可类似证明.

注　以上证明中 D 为函数 $f(x,y)$ 的定义域. 根据极限之定义知，在考虑极限问题时，不可不考虑函数的定义域 D.

6. 试写出下列类型极限的精确定义：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=A$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} f(x,y)=A$.

解　(1) 设 $f(x,y)$ 为 D 上的函数，A 是一个确定的数. 若对任给的正数 ε，总存在正数 M，使得当 $(x,y)\in D$ 且 $x>M, y>M$ 时，恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称当 $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$ 时，函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y)=A$.

(2) 设 $f(x,y)$ 为 D 上的函数，A 是一个确定的数，如果对任给的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $(x,y)\in D$ 且 $0<|x|<\delta, y>\dfrac{1}{\delta}$ 时，恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称当 $(x,y)\to(0,+\infty)$ 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} f(x,y)=A$

7. 试求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

解　(1) 当 $x>0, y>0$ 时，因为

$$0\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\leqslant\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

且　$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=0$

故　$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$

(2) 因当 x,y 充分大时，

$$e^x>x^2,e^y>y^2$$

$$0<(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}<\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^y}$$

而　$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^y}\right)=0$

故　$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0.$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x\sin y}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}e^{\frac{\sin y}{y}\cdot\ln(1+\frac{1}{xy})^{xy}}=e^0=1$

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　且

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)}\frac{x}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1.$$

所以

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}$

$=e^{\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,0)}\frac{x}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e$

8. 试作一函数 $f(x,y)$ 使当 $x\to+\infty,y\to+\infty$ 时，

(1) 两个累次极限存在而重极限不存在；

(2) 两个累次极限不存在而重极限存在；

(3) 重极限与累次极限都不存在；

(4) 重极限与一个累次极限存在,另一个累次极限不存在.

解　(1) 函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$　满足

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=0$$

$$\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}f(x,y)=1$$

但是　$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)$ 不存在,因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x,x)=\frac{1}{2},\lim_{x\to+\infty}f(x,2x)=\frac{1}{5}$$

(2) 函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}\sin x\sin y$　满足

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\sin x\quad\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{x+y}{y}\sin y\right)\right]$$

不存在.

同理　$\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)$ 也不存在.

但是　$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\sin x\sin y=0$

(3) 函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 满足当 $(x,y)\to(+\infty,+\infty)$ 时,重极限和两个累次极限都不存在.因为在 $x\to+\infty$ 时,$\sin x$ 的值在 -1 与 1 之间振荡.同理,$\sin y$ 也是一样的.

(4) 函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{y}\sin x$ 满足

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=0$$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{y}\sin x$　不存在

但是　$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}f(x,y)=0$

9. 证明定理 16.5 及其推论 3.

定理 16.5 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$ 的充要条件是:对于 D 的任一子集 E,只要 P_0 是 E 的聚点,就有

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A$$

推论 3　极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 存在的充要条件是：

对于 D 中任一满足条件 $P_n\neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 的点列 $\{P_n\}$，它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛.

证　(1) 定理 16.5 的证明：必要性　设 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$，

$E\subset D$ 以 P_0 为聚点，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $P\in U^\circ(P_0,\delta)\cap D$ 时，有

$$|f(P)-A|<\varepsilon \tag{1}$$

从而当 $P\in U^\circ(P_0,\delta)\cap E$ 时，(1) 式也成立，可见 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=A$

设 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)\neq A$，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意的 n，存在 $P_n\in U^\circ(P_0,\frac{1}{n})\cap D$ 满足

$$|f(P_n)-A|\geqslant\varepsilon_0 \tag{2}$$

令 $E=\{P_n\mid n=1,2,\cdots\}$，则 $E\subset D$ 以 P_0 为聚点，由于当 f 限制在 E 上时，就是数列 $\{f(P_n)\}$. 于是

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}}f(P)=\lim_{n\to\infty}f(P_n)$$

但由 (2) 知上式的右边不是 A，从而左边也不是 A，这就证明了充分性，于是定理 16.5 得证.

(2) 推论 3 的证明：设 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 存在.

$$\{P_n\}\subset D,P_n\neq P_0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty}P_n\equiv P_0,\text{则对}$$

$$E=\{P_n\mid n=1,2,\cdots\}$$

应用定理 16.5 可知 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$　即 $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n)=A$，可见 $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n)$ 存在，必要性得证.

下证充分性，设 $\{P_n\}$ 为 D 中各项不同于 P_0 但收敛于 P_0 的点列.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(P_n)$ 存在. 记为 A，下证，对任一 D 中的点列 $\{Q_n\}$，若 $Q_n\neq P_0(n=1,2,\cdots)$ 且 $Q_n\to P_0(n\to\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(Q_n)=A$，为此作 D 中的点列.

$$C_n=\begin{cases}P_k, & n=2k-1\\ Q_k, & n=2k\end{cases}$$

则 $C_n\neq P_0,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=P_0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(C_n)$ 存在. 因此，

$$\lim_{k\to\infty}f(C_{2k-1})=\lim_{k\to\infty}f(C_{2k})$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(Q_n)=A$. 假若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)\neq A$，则由定理16.5的充分性的证明可知：必存在 D 中的一个点列 $\{Q_n\}$，$Q_n\neq P_0(n=1,2,\cdots)$，$Q_n\to P_0(n\to\infty)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(Q_n)\neq A$. 这与已证事实矛盾，故 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)=A$，可见 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$ 存在.

§3　二元函数的连续性

1. 讨论下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\tan(x^2+y^2)$；(2) $f(x,y)=[x+y]$；

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{xy}{y}, y\neq 0\\ 0, \quad y=0\end{cases}$；

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \quad x^2+y^2=0\end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases}0, x \text{ 为无理数}\\ y, x \text{ 为有理数}\end{cases}$；

(6) $f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln(x^4+y^2), x^2+y^2=0,\\ 0, \quad x^2+y^2=0;\end{cases}$

(7) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$；(8) $f(x,y)=e^{-\frac{x}{y}}$

解　(1) 函数 $f(x,y)$ 在集合:

$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2<\frac{\pi}{2}\cup\{(x,y)\mid \frac{2k-1}{2}\pi<x^2+y^2\right.$ $<\frac{2k+1}{2}\pi,k\in N\}$ 上连续.

事实上,当 $(x_0,y_0)\in D$ 时,由 $\tan u$ 在 $u_0=x_0^2+y_0^2$ 连续知

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\tan(x^2+y^2)=\lim_{u\to u_0}\tan u=\tan u_0=\tan(x_0^2+y_0^2).$$

故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续,可见 f 在 D 上连续. 又 f 在 R^2-D 上无定义,因而在 R^2-D 上处处间断.

(2) 设 $D=\{(x,y)\mid k<x+y<k+1,k\in Z\}$ 且 $P_0(x_0,y_0)\in D$. 则存在 $k\in Z$,使 $k<x_0+y_0<k+1$,于是当 $\delta>0$ 充分小时,对任意的 $(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 就有 $k<x+y<k+1$ 从而 $f(x,y)\equiv k\equiv f(x_0,y_0)$. 可见 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,故 f 在 D 上连续. 在 R^2-D(即 $x+y=k$) 上处处不连续.

(3) 因为

$$\left|\frac{\sin xy}{y}\right|\leqslant|x|$$

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

又在 $y\neq0$ 的点 (x,y) 处,由于 $f(x,y)$ 是初等函数且在这些点处有定义. 故 $f(x,y)$ 连续. 因此,$f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid y\neq0\}\cup\{(0,0)\}$ 上连续. 又在任一的点 $(x_0,0)\neq(0,0)$ 处,由于 $f(x_0,0)=0$,但 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)}f(x,y)\neq0$,从而 f 在 $(x_0,0)$ 间断. 故 f 仅在 D 上连续.

(4) 因为当 $x^2+y^2\neq0$ 时,

$$\left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant|x|.$$

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

连续. 又在 $x_0^2+y_0^2\neq 0$ 的点 (x_0,y_0) 处，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\dfrac{\sin x_0y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=f(x_0,y_0)$. 故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，因此，f 在整个平面 R^2 上连续.

(5) 设 $(x_0,y_0)\in R^2$，则

(ⅰ) 当 x_0 为有理数时，

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|f(x,y)-y_0|$$
$$=\begin{cases}|y-y_0|, & 当 x 为有理数,\\ |y_0|, & 当 x 为无理数\end{cases}$$

(ⅱ) 当 x_0 为无理数时，

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|f(x,y)|$$
$$=\begin{cases}|y|, x 为有理数,\\ 0, \quad x 为无理数\end{cases}$$

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 当且仅当 $y_0=0$ 时成立. 所以，$f(x,y)$ 仅在 $D=\{(x,y)\mid y=0\}$ 上连续.

(6) 在 $x^2+y^2\neq 0$ 的点处，由于 $f(x,y)=y^2\ln(x^2+y^2)$ 是初等函数且有定义. 故 $f(x,y)$. 因为

$$|y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|$$

且 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{u\to 0^+}u\ln u=0$$

故 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}y^2\ln(x^2+y^2)=0=f(0,0)$$

从而函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也连续，因此 f 在 R^2 上连续.

(7) 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$，$(n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 上的点均为函数 $f(x,y)$ 的不连续点. 对于上述两直线以外的任意点 (x_0,y_0)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{1}{\sin x\sin y}$$
$$=\frac{1}{\sin x_0\sin y_0}=f(x_0,y_0)$$

因此 f 仅在

$$\{(x,y) \mid x,y \neq n\pi, n \in N\}$$

上连续.即在直线 $x = m\pi, y = n\pi$ 以外的点,函数 $f(x,y)$ 是连续的.

(8) 因为 $u = -\dfrac{x}{y}$ 在其定义域$D = \{y \mid y \neq 0\}$ 上连续.$f = e^u$ 关于 u 是连续的.由复合函数的连续性知函数 $f(x,y) = e^{-\frac{x}{y}}$ 在其定义域D 上连续.

2. 叙述并证明二元连续函数的局部保号性.

局部保号性:若函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 连续,而且 $f(x_0,y_0) \neq 0$,则函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某一邻域 $U(P_0,\delta)$ 内与 $f(x_0,y_0)$ 同号,并存在某个正数 $r(\mid f(x_0,y_0 \mid > r)$,使得对任意$(x,y) \in U(P_0,\delta)$,$\mid f(x,y) \mid \geqslant r > 0$.

证　设 $f(x_0,y_0) > 0$,则存在 r,使 $f(x_0,y_0) > r > 0$,取 $\varepsilon = f(x_0,y_0) - r$,因为 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 连续,所以存在 $\delta > 0$,使得当$(x,y) \in U_0(P_0,\delta)$ 时.有

$$\mid f(x,y) - f(x_0,y_0) \mid < \varepsilon = f(x_0,y_0) - r$$

从而当$(x,y) \in U(P_0,\delta)$ 时

$$f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) - \varepsilon = r > 0$$

当 $f(x_0,y_0) < 0$ 时,$-f(x_0,y_0) > 0$.任取 $0 < r < -f(x_0,y_0)$ 由上知存在 $U(P_0,\delta)$ 使得在其上 $-f(x_0,y_0) \geqslant r > 0$,即 $f(x,y) \leqslant -r < 0$.可见 f 在$U(P_0,\delta)$ 上与 $f(x_0,y_0)$ 同号且 $\mid f(x,y) \mid \geqslant r > 0$

3. 设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{(x^2+y^2)^p} & x^2+y^2 \neq 0 (p > 0) \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

试讨论它在(0,0) 点的连续性.

解　设 $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$ 则 $r^2 = x^2 + y^2$

所以 $\left| \dfrac{x}{(x^2+y^2)^p} \right| = \left| \dfrac{r\cos\theta}{r^{2p}} \right| \leqslant \dfrac{1}{r^{2p-1}}$

当 $p < \frac{1}{2}$，即 $2p-1<0$ 时.

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{2p-1}} = 0$$

因此　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{(x^2+y^2)^P} = 0$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

当 $p \geqslant \frac{1}{2}$ 时　$2p-1 \geqslant 0$

$$f(x,0) = \frac{x}{x^{2p}} \to \begin{cases} 1, & p = \frac{1}{2} \\ +\infty & p > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x\to 0)$$

因而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0 = f(0,0)$，可见 $p \geqslant \frac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

综上所述，$p < \frac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，而 $p \geqslant \frac{1}{2}$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

4. 设 $f(x,y)$ 定义于闭矩形域 $S = [a,b]\times[c,d]$，若 f 对 y 在 $[c,d]$ 上处处连续. 对 x 在 $[a,b]$ 上(且关于 y)为一致连续，证明 f 在 S 上处处连续.

证　设 $(x_0,y_0)\in S$，对固定的 x_0，f 为 y 的连续函数，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $|y-y_0|<\delta_1$，且 $(x_0,y)\in S$ 时，有

$$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

又由 f 对 x 关于 y 为一致连续. 故对上述 $\varepsilon>0$，也存在 $\delta_2>0$，对满足 $|y-y_0|<\delta_1$ 的任何 y，只要 $|x-x_0|<\delta_2$，且 $(x,y)\in S$，使有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

现取 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$，只要 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且

$(x,y)\in S$ 时,总有

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&|f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

因此,f 在 S 上连续.

5. 证明:若 $D\subset R^2$ 是有界闭域,f 为 D 上连续函数,则 $f(D)$ 不仅有界(定理 16.8) 而且是闭区间.

证　若 f 在 D 上恒为常数,则 $f(D)$ 为单点集,从而有界.

若 f 在 D 上不恒为常数. 由定理 16.8 知:f 在 D 上有界且能取得最大值、最小值. 分别设为 M、m,则 $m<M$ 且 $m\leqslant f(P)\leqslant M\quad(P\in D)$. 即

$$f(D)\subset[m,M]$$

下证 $f(D)\supset[m,M]$.

任给 $\mu\in[m,M]$,由介值定理,必存在 $P_0\in D$ 使 $f(P_0)=\mu$,从而 $\mu\in f(D)$,故 $f(D)\supset[m,M]$,于是 $f(D)=[m,M]$.

6. 设 $f(x,y)$ 在集合 $G\subset\mathbf{R}^2$ 上对 x 连续,对 y 满足利普希茨条件:

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 $(x,y'),(x,y'')\in G$,L 为常数. 试证明 f 在 G 上处处连续.

证　任取 $P_0(x_0,y_0)\in G$,对固定的 y_0,(x,y_0) 在 x_0 连续. 于是对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时,有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又由 f 对 y 满足利普希兹条件,对上述 ε,取 $\delta_2=\frac{\varepsilon}{2L}$,则当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant L|y-y_0|<L\delta_2=\frac{\varepsilon}{2}$$

现取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处连续，由点(x_0,y_0)的任意性知：$f(x,y)$ 在 G 内处处连续.

7. 若一元函数 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续，令

$$f(x,y)=\varphi(x),(x,y)\in D=[a,b]\times(-\infty,+\infty),$$

试讨论 f 在 D 上是否连续？是否一致连续？

解　先讨论 f 在 D 上的连续性.

任取$(x_0,y_0)\in D$，因为 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续，从而 $\varphi(x)$ 对 x_0 连续. 对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $x\in[a,b]$ 且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$$

因此当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 且$(x,y)\in D$时，

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$$

于是 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0)连续，因而 f 在 D 上连续.

下面讨论 f 在 D 上的一致连续性

由于 $\varphi(x)$ 的$[a,b]$上连续，从而一致连续.

于是对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$$

因此，当$(x',y')(x'',y'')\in D$ 且 $|x'-x''|<\delta$，$|y'-y''|<\delta$ 时，有 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$，从而

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|=|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$$

故 f 在 D 上一致连续.

8. 设$(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$，$(x,y)\in D=[0,1)\times[0,1)$. 证明 f 在 D 上连续但不一致连续.

证　显然，f 在 D 上是连续的. 仅证 f 在 D 上不一致连续.

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,无论 $\delta>0$ 取得多么小,当 $P_1=\left(\frac{n}{n+1},\frac{n}{n+1}\right)$,$P_2=\left(\frac{n-1}{n},\frac{n-1}{n}\right)$ 取到某个 n 时,总能使 $|P_1-P_2|<\delta$,

及 $\frac{2n^2-1}{4n^2-1}>\varepsilon_0$,当 $P_1,P_2\in D$.

$$
\begin{aligned}
|f(P_1)-f(P_2)| &= \frac{1}{1-\frac{n^2}{(n+1)^2}}-\frac{1}{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}} \\
&= \frac{(n+1)^2}{2n+1}-\frac{n^2}{2n-1}=\frac{2n^2-1}{4n^2-1} \\
&= \frac{2-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}>\frac{1}{2}>\varepsilon_0.
\end{aligned}
$$

从而 $f(x,y)$ 在 D 上不一致连续.

9. 设 f 在 $\boldsymbol{R}^2$ 上分别对每一自变量 x 和 y 是连续的,并且每当固定 x 时 f 对 y 是单调的,证明 f 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上的二元连续函数.

证　设 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的定义域 $\boldsymbol{R}^2$ 内的任意一点. 由于 $f(x,y)$ 关于 y 连续,从而 $f(x_0,y)$ 在 y_0 连续. 故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,使当 $|y-y_0|<\delta_1$ 时,就有

$$
|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1}
$$

对于点 $(x_0,y_0-\delta_1)$ 及 $(x_0,y_0+\delta_1)$,由于 $f(x,y)$ 关于 x 连续,从而 $f(x,y_0\pm\delta_1)$ 在 x_0 连续. 故对上述的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_2>0$,使 $|x-x_0|<\delta_2$ 时,

$$
|f(x,y_0-\delta_1)-f(x_0,y_0-\delta_1)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}
$$

$$
|f(x,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0+\delta_1)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3}
$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|\triangle x|<\delta$, $|\triangle y|<\delta$ 时,由于 $f(x,y)$ 关于 y 单调,所以有

$|f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)|\leqslant\max\{|f(x_0+\triangle x,y_0+$

$\delta_1) - f(x_0, y_0|$、$|f(x_0 + \triangle x, y_0 - \delta_1) - f(x_0, y_0)|\}$.

但是由(1)、(2)知：

$$|f(x_0 + \triangle x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0)|$$
$$\leqslant |f(x_0 + \triangle x, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0 \pm \delta_1)| + |f(x_0, y_0 \pm \delta_1) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故当 $|\triangle x| < \delta$, $|\triangle y| < \delta$ 时，就有

$$|f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

因此，$f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是连续的. 由点 (x_0, y_0) 的任意性可知，$f(x,y)$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 内的二元连续函数.

总 练 习 题

1. 设 $E \subset \boldsymbol{R}^2$ 是有界闭集，$d(E)$ 为 E 的直径，证明：存在 $P_1, P_2 \in E$，使 $\rho(P_1, P_2) = d(E)$.

证　由 $d(E) = \sup\limits_{P,Q \in E} \rho(P,Q)$ 知，对 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$，则存在 $P_n, Q_n \in E$ 使得 $d(E) < \rho(P_n, Q_n) + \dfrac{1}{n}$. 而 $\{P_n\}$，$\{Q_n\}$ 均为有界闭集 E 中的点列，从而有收敛子列 $\{P_{n_k}\}$，$\{Q_{n_k}\}$，设

$$P_{n_k} \to P_1 \quad Q_{n_k} \to P_2 \quad (k \to \infty)$$

则　$\rho(P_{n_k}, Q_{n_k}) \leqslant d(E) < \rho(P_{n_k}, Q_{n_k}) + \dfrac{1}{n_k}$

令 $k \to \infty$ 得　$\rho(P_1, P_2) \leqslant d(E) < \rho(P_1, P_2)$

即　$d(E) = \rho(P_1, P_2)$　由于 E 为闭集，从而 $P_1, P_2 \in E$.

2. 设 $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，$k > 1$，$D_1 = \{(x,y) \mid \dfrac{1}{k}x \leqslant y \leqslant kx\}$，$D_2 = \{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$，试分别讨论 $i = 1,2$ 时极限 $\lim\limits_{\substack{r \to +\infty \\ (x,y) \in D_i}} f(x,y)$ 是否存在？为什么？

解　(1) 当 $i = 1$ 时，$(x,y) \in D_1$ 且 $r \to +\infty$ 可得 $x \to \infty$，$y \to \infty$，从而

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_1}} f(x,y)=0$$

(2) 当 $i=2$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\in D_2} f(x,y)$ 不存在.

因为,若取 $x_n=n, y_n=\dfrac{1}{n^2}, r_n=\sqrt{n^2+\dfrac{1}{n^4}}$ 则 $n\to\infty$ 时，$r_n\to+\infty$. 但 $f(x_n,y_n)=n\to+\infty,(n\to\infty)$. 又对 $\overline{x}_n=\overline{y}_n=n$，有 $r_n=\sqrt{2}n\to\infty,(n\to\infty)$，但是 $f(\overline{x}_n,\overline{y}_n)=\dfrac{1}{n^2}\to 0,(n\to\infty)$. 故此时

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_2}} f(x,y)\text{ 不存在.}$$

3. 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$，且在 (x_0,y_0) 附近有 $|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x)$，证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

证　因为 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$，从而对任给的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta_1>0$，使当 $|y-y_0|<\delta_1$ 时，有

$$|\varphi(y)-A|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$，从而对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$ 使当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，有

$$|\psi(x)-0|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

由(1),(2)两式，对任给的 $\varepsilon>0$，只须取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $|x-x_1|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，就有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-A|&=|f(x,y)-\varphi(y)+\varphi(y)-A|\\&\leqslant|f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-A|\\&\leqslant|\psi(x)|+|\varphi(y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

4. 设 f 是定义在 $\boldsymbol{R}^2$ 上的连续函数，α 是任一实数，

$$E=\{(x,y)\mid f(x,y)>\alpha,(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\}$$

$$F = \{(x,y) \mid f(x,y) \geqslant \alpha; (x,y) \in \boldsymbol{R}^2\}$$

证明 E 是开集，F 是闭集.

证　对任一点 $(x_0,y_0) \in E$，$f(x_0,y_0) - \alpha > 0$. 因为 f 在 R^2 上连续，从而由连续函数的保号性知，存在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 使当 $(x,y) \in \bigcup(P_0)$ 时

$$f(x,y) - \alpha > 0$$

即 $(x,y) \in E$，$((x,y) \in U(P_0))$. 从而 $U(P_0) \subset E$，故 E 为开集.

下证 F 是闭集.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 F 的任一聚点，则存在 F 的互异点列 $\{P_n\}$ 使 $P_n \to P_0(n \to \infty)$，由

$$f(P_n) = f(x_n,y_n) \geqslant \alpha \quad (n = 1,2,\cdots)$$

且 $f(x,y)$ 在 P_0 连续，从而

$$f(P_0) = \lim_{n\to\infty} f(P_n) \geqslant \alpha$$

可见 $P_0 \in F$，故 F 为闭集.

5. 设 f 在有界开集 E 上一致连续，证明：

(1) 可将 f 连续延拓到 E 的边界.

(2) f 在 E 上有界.

证　记 ∂E 为 E 的边界，$\overline{E} = E \cup \partial E$，分以下几步证明.

(i) 若 $P \in \partial E$，则 $\exists P_n \in E(n = 1,2,\cdots)$ 使 $P_n \to P(n \to \infty)$.

事实上，若 $P \in \partial E$，则对任一的 n，$U\left(P,\dfrac{1}{n}\right) \cap E$ 非空. 任取 $P_n \in U\left(P,\dfrac{1}{n}\right) \cap E$，则 $P_n \to P(n \to \infty)$，且 $P_n \in E(n = 1,2,\cdots)$

(ii) 若 $P_n \in E(n = 1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)$ 也存在.

事实上，由 f 在 E 上一致连续可知：对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $A,B \in E$ 且 $\rho(A,B) < \delta$ 时，

$$|f(A) - f(B)| < \varepsilon \tag{1}$$

于是对上述的 $\delta > 0$，存在 N，当 $m,n > N$ 时 $\rho(P_m,P_n) < \delta$，从

而由(1)知

$$|f(P_m)-f(P_n)|<\varepsilon$$

故$\{f(P_n)\}$收敛.即$\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)$存在.

(ⅲ)若$P_n,Q_n\in E(n=1,2,\cdots)$且

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}Q_n=P \tag{2}$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(Q_n)$

由(2)知:存在N,使当$n>N$时,

$$\rho(P_n,P)<\frac{\delta}{2}\text{ 且 }\rho(Q_n,P)<\frac{\delta}{2}$$

从而当$n>N$时

$$\rho(P_n,Q_n)\leqslant\rho(P_n,P)+\rho(P,Q_n)<\delta.$$

因此由(1)知

$$|f(P_n)-f(Q_n)|<\varepsilon \tag{3}$$

再由(ⅱ)知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty}f(Q_n)$都存在.

故由(3)知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(Q_n)$

由(ⅰ)—(ⅲ)知:对每个$P\in\partial E$,存在唯一的实数$\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)$与之对应(其中$\{P_n\}$为$E$中任一收敛于$P$的点列).定义

$$F(P)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n),P\in\partial E(P_n\in E,P_n\to P)\\ f(P),P\in E\end{cases}$$

则F为定义在$\overline{E}$上的函数.显然F为f到∂E上的一个延拓.

下证F在$\overline{E}$上连续.

设$P_0\in\overline{E}$,则$P_0\in E$或$P_0\in\partial E$.当$P_0\in E$时,由E为开集知:存在$U(P_0)\subset E$.于是当$P\in U(P_0)$时,

$$F(P)=f(P)$$

因为f在P_0连续,从而

$$\lim_{P\to P_0}F(P)=\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)=F(P_0)$$

可见F在P_0连续.当$P_0\in\partial E$时,

$$F(P_0) = \lim_{n\to\infty} f(P_n)$$

其中$\{P_n\}$为E中趋于P_0的点列. 对E中任一趋于P_0的点列$\{Q_n\}$,由(ⅲ)知

$$\lim_{n\to\infty} F(Q_n) = \lim_{n\to\infty} f(Q_n) = \lim_{n\to\infty} f(P_n) = F(P_0)$$

故由归结原则(定理16.5的推论3)知:

$\lim\limits_{P\to P_0} F(P)$存在且等于$F(P_0)$. 故$F$在$P_0$连续.

由此可见:F是f的一个连续延拓,即f可以连续地延拓到E的边界上. 由于$\overline{E}$是有界闭集且F在$\overline{E}$上连续,从而F在$\overline{E}$上有界. 因此F在E上有界. 但在E上$F = f$,故f在E上有界.

6. 设$u = \varphi(x,y)$与$v = \psi(x,y)$,在xy平面中的点集E上一致连续;φ与ψ把点集E映射为uv平面中的点集D,$f(u,v)$在D上一致连续,证明:复合函数$f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在$E$上一致连续.

证　设点$P(u_1,v_1)$,$Q(u_2,v_2)$为D上任意两个点. 由于$f(u,v)$在D上一致连续,从而对任给的$\varepsilon > 0$.存在$\delta > 0$,使对一切$P,Q \in D$,只要$|u_1 - u_2| < \delta$,$|v_1 - v_2| < \delta$,就有

$$|f(u_1,v_1) - f(u_2,v_2)| < \varepsilon$$

又$u = \varphi(x,y)$,$v = \psi(x,y)$,在E上一致连续,因此,对上述的$\delta > 0$,存在$\eta > 0$,使当(x_1,y_1),$(x_2,y_2) \in E$.且$|x_1 - x_2| < \eta$,$|y_1 - y_2| < \eta$时,有

$$|u_1 - u_2| < \delta,\ |v_1 - v_2| < \delta$$

其中$u_k = \varphi(x_k,y_k)$,$v_k = \psi(x_k,y_k)(k = 1,2)$因此

$$|f[\varphi(x_1,y_1),\psi(x_1,y_1)] - f[\varphi(x_2,y_2),\psi(x_2,y_2)]|$$
$$= |f(u_1,v_1) - f(u_2,v_2)| < \varepsilon$$

故复合函数$f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在$E$上一致连续.

7. 设$f(t)$在区间(a,b)内连续可导,函数$F(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}(x \neq y)$,$F(x,x) = f'(x)$,定义在区域$D = (a,b) \times (a,b)$内,证明:对任何$c \in (a,b)$有$\lim\limits_{(x,y)\to(c,c)} f(x,y) = f'(c)$.

证　因为$f(t)$在(a,b)内连续可导，所以当$(x,y)\in D$且$x\neq y$时，在$[x,y]$或$[y,x]$上，应用拉格朗日定理知：存在$\xi\in(x,y)$（或$\xi\in(y,x)$），使得

$$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\xi)$$

又$F(x,x)=f'(x)$，可见对任意的$(x,y)\in D$，总存在ξ介于x与y之间，使得

$$F(x,y)=f'(\xi)$$

由于当$(x,y)\to(c,c)$时，$\xi\to c$且$f'(t)$在c处连续，从而

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c)$$