吉林大学 2015-2016 学年第一学期“数学分析 I”期中考试试题

参考解析

一、（共 10 分）叙述并证明 $Heine$ 定理.

解：略

二、（共 15 分）用 $\varepsilon - N$ 或 $\varepsilon - \delta$ 语言证明下列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+1}{2n^2-n-10}=\dfrac{1}{2}$；

证明：证明：因 $\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\{12,[\dfrac{1}{4\varepsilon}]+1\}\in N_+$，使得 $\forall n>N$，有：

$$|\frac{n^2-n+1}{2n^2-n-10}-\frac{1}{2}|=|\frac{-n+12}{2(2n^2-n-10)}|<|\frac{n-12}{4n(n-12)}|=\frac{1}{4n}<\varepsilon.$$

故由定义知：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+1}{2n^2-n-10}=\dfrac{1}{2}$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+1}{2x^2+3}=\dfrac{5}{2}$.

证明：因 $\forall\varepsilon>0,\exists X=\max\{\dfrac{13}{8},\dfrac{2}{\varepsilon}\}>0$，使得 $\forall x:|x|>X$ 时，有：

$|\dfrac{5x^2+4x+1}{2x^2+3}-\dfrac{5}{2}|=|\dfrac{8x-13}{2(2x^2+3)}|<|\dfrac{8x}{4x^2}|=|\dfrac{2}{x}|<\varepsilon.$ 故由定义知：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x+1}{2x^2+3}=\dfrac{5}{2}$.

三、（共 25 分）计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x^2-1}$；

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2-2x-1}{(x^2-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n+5^n+9^n\right)^{\frac{1}{2n+1}}$；

解：对任意正整数 n，有：$9^{\frac{n}{2n+1}}<(2^n+5^n+9^n)^{\frac{1}{2n+1}}<9^{\frac{n}{2n+1}}\times3^{\frac{1}{2n+1}}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}9^{\frac{n}{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}9^{\frac{n}{2n+1}}\times3^{\frac{1}{2n+1}}=3$，故由夹挤定理知：$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+5^n+9^n)^{\frac{1}{2n+1}}=3$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+2}-2\sin\sqrt{n+1}+\sin\sqrt{n}\right)$；

解：
$$\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+2}-2\sin\sqrt{n+1}+\sin\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{2}\cos\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{2}$$
$$-\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}=\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}\cos\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{2}$$
$$-\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}=0-0=0.$$

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\dfrac{2x+3}{2x}}{\sin\dfrac{1}{x}}$；

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\dfrac{2x+3}{2x}}{\sin\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\dfrac{3}{2x})}{\sin\dfrac{1}{x}}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{3}{2x}}\cdot\dfrac{\dfrac{3}{2x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3}{2x}}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{3}{2}$.

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{2n+1}$，其中 x 为一个常数.

解：$x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+x}{n-1})^{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}1^{2n+1}=1$. $x\neq-1$ 时，有：

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+x}{n-1})^{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{x+1}{n-1})^{2n+1}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\ln(1+\frac{x+1}{n-1})}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\times\frac{x+1}{n-1}}=\mathrm{e}^{2(x+1)}$.

注意到 $x=-1$ 时 $\mathrm{e}^{2(1+x)}=1$，故总有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+x}{n-1})^{2n+1}=\mathrm{e}^{2(x+1)}$.

四、（共 24 分）简答题.

（1）求数列 $x_n=(-1)^n\dfrac{n}{2n+7}$ 的上下数列和上下极限.

解：$\overline{x_n}=\begin{cases}x_{n+1},n=2k-1\\x_n,n=2k\end{cases}(k\in N_+)=\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{2}x_{n+1}+\dfrac{(-1)^n+1}{2}x_n=$

$\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{2}\cdot(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{2n+9}+\dfrac{(-1)^n+1}{2}\cdot(-1)^n\dfrac{n}{2n+7}=\dfrac{7\times(-1)^{n+1}+4n+16}{8n^2+63n+126}$；

$\underline{x_n}=\begin{cases}x_n,n=2k-1\\x_{n+1},n=2k\end{cases}(k\in N_+)=\dfrac{(-1)^n+1}{2}x_{n+1}+\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{2}x_n=$

$\dfrac{(-1)^n+1}{2}\cdot(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{2n+9}+\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{2}\cdot(-1)^n\dfrac{n}{2n+7}=\dfrac{7\times(-1)^{n+1}-4n-16}{8n^2+63n+126}$.

故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x_n}=\dfrac{1}{2},\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{x_n}=-\dfrac{1}{2}$.

（2）设数列 x_n 满足递推关系 $x_{n+1}=\sin x_n,(n=1,2,...)$，$x_1\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，并求出极限值.

证明：由条件，易知 $\forall n\in N_+,x_n\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}),x_{n+1}=\sin x_n<x_n$.（可以用归纳法证明）

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，设为 A，则由 $\sin A=A$ 知 $A=0$.

（3）设 w,v 为两个常数，讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x+w},x<-2\\\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n},|x|\leq2\\\ln x+v,x>2\end{cases}$ 在点 $x=-2$ 和 $x=2$ 处的性质.若连续，给出 w,v 满足的条件，若间断，给出条件并说明间断点类型.

解：$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\mathrm{e}^{x+w}=\mathrm{e}^{w-2}$，$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\ln x+v=\ln 2+v$，

$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}=\lim\limits_{x\to-2^+}x=-2$，$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}=\lim\limits_{x\to2^+}x=2$.

由此可见，无论 w 等于多少，$f(x)$ 在 $x=-2$ 处都不可能连续，且总为第一类间断点.

而 $v=2-\ln 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续；

$v\neq 2-\ln 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续，为第一类间断点.

五、（共 26 分）证明题.

（1）证明方程 $2\mathrm{e}^{x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=4$ 在 $[-1,1]$ 中至少有两个根；

证明：设函数 $f(x)=2\mathrm{e}^{x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}-4,x\in[-1,1]$,则 $f(-1)=2\mathrm{e}-\dfrac{7}{2}>0$，

$f(0)=-2<0$，$f(1)=2\mathrm{e}-\dfrac{9}{2}>0$，故由零点存在性定理，$f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上各存在一个零点，故原方程在 $[-1,1]$ 中至少有两个根.

（2）证明数列 $x_n=\dfrac{\sin 1^2}{1\cdot 2}+\dfrac{\sin 2^2}{2\cdot 3}+...+\dfrac{\sin n^2}{n(n+1)}$ 收敛；

证明：因 $\forall\varepsilon>0,\exists N=[\dfrac{1}{\varepsilon}],$ 使得 $\forall n>N$，$p\in N_+$ 时，有：

$$|x_{n+p}-x_n|=|\frac{\sin(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{\sin(n+2)^2}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{\sin(n+p)^2}{(n+p)(n+p+1)}|$$

$$\leq\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}=(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})$$

$$+\ldots+(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1})=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

故由柯西收敛准则知数列 $x_n=\dfrac{\sin 1^2}{1\cdot 2}+\dfrac{\sin 2^2}{2\cdot 3}+...+\dfrac{\sin n^2}{n(n+1)}$ 收敛.

（3）证明函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(2,+\infty)$ 上一致连续.

证明：往证 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上一致连续.因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，故 $\forall\varepsilon>0,\exists X>2$，

使得 $\forall x>X,|x\sin\dfrac{1}{x}-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.取 $0<\delta<1$，则 $\forall(x_1,x_2):|x_1-x_2|<\delta,x_1\in[2,+\infty),x_2\in[2,+\infty)$，

只会有 x_1,x_2 都大于 X 与 x_1,x_2 都在区间 $[2,X+1]$ 上这两种情况.

由 Cantor 定理知连续函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在闭区间 $[2,X+1]$ 上一致连续.

而 x_1,x_2 都大于 X 时，有 $|x_1\sin\dfrac{1}{x_1}-x_2\sin\dfrac{1}{x_2}|=|x_1\sin\dfrac{1}{x_1}-1+1-x_2\sin\dfrac{1}{x_2}|\leq|x_1\sin\dfrac{1}{x_1}-1|$

$+|x_2\sin\dfrac{1}{x_2}-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.故连续函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[X+1,+\infty)$ 上也一致连续.

综上所述，函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在闭区间 $[2,+\infty)$ 上一致连续.