第 14 讲：对数函数与多值函数 2019.4.9

1. 假设 Ω 是平面单连通区域, f 是 Ω 上的全纯函数, 不取零值. 证明存在 Ω 上的全纯函数 g, 满足函数方程

$$e^{g(z)} = f(z).$$

这样的 g 唯一吗? (此题说明 $\mathrm{Log} f(z)$ 可以取到单值全纯分支, 通常记为 $\log_\Omega f(z)$.)

2. 平面中两条曲线定义为

$$C_1 = \{\theta e^{i\theta}; \theta \geq 0\},\ C_2 = \{e^{\theta + i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}.$$

定义区域 $\Omega_1 = \mathbb{C} - C_1$, $\Omega_2 = \mathbb{C} - C_2$. 记 Ω_1 中满足 $\psi_1(1) = 2\pi$ 的连续辐角函数为 ψ_1, 记 Ω_2 中满足 $\psi_2(1/2) = 2\pi$ 的连续辐角函数为 ψ_2. 求 ψ_1, ψ_2 的值域.

3 (附加题，不做要求). 求出所有整函数 f, g 满足方程

$$f^2 + g^2 = 1.$$