常微分方程 2010 年春夏

任课教师： 韩丹夫　李克峰

Jerry Shen 按记忆整理　2010 年 7 月 6 日(10:30-12:30)

一、（20 分）解下列常微分方程。

1. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$
2. $y'' + y = \cos t$

参考答案：

1． 两边除以 y，左边凑微分换元 $u = \ln xy$，分离变量。$y = 2/(2cx - x(\ln x)^2)$

2． 常数变易法。

二、（20 分）考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y & \frac{dy}{dt} = tx \\ x(0) = 1 & y(0) = 0 \end{cases}$$

1． 求 $Picard$ 迭代序列前三项。

2． 问解是否可以表示成$\mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{A}(\tau)\mathrm{d}\tau} X_0$的形式，为什么？其中$X_0 = (1,0)^T$。

参考答案：

1. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$　$X_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{6}t^3 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$　$X_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{6}t^3 \\ \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{30}t^5 \end{pmatrix}$

2. 不能。设$D(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau$，可得$D(t)A(t) \neq A(t)D(t)$，所以不能。

三、（15 分）证明：初值问题

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}=t^2+x^2, y(1)=y_0$$

的解的存在区间对任意的y_0都有限。

参考答案：

对y_0讨论，利用解的存在定理。（可能还要用延拓定理）

四、（15 分）解微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y\\ x(0)=1 \quad\ y(0)=2\end{cases}$$

参考答案：

先求特征值、特征向量，用复数表达，再化成实值形式得通解，最后求特解。

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cos\sqrt{2}t+e^t\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\sin\sqrt{2}t$$

五、（20 分）1．用解的存在性定理确定 $\mathrm{y}'=y^2$，$y|_{x=0}=2$ 的解的最大存在区间。

2．试证明 $\mathrm{y}'=\mathrm{y}$ 对解有连续依赖性，但不是稳定的。

参考答案：

1．利用解的存在定理

2．利用局部 *Lipschitz* 条件和李雅普诺夫第二方法。

六、（10 分）设 A 是常数矩阵，A 的所有特征值的实部都为负值。试证明系统 $\mathrm{X}'=\mathrm{AX}$ 的零解具有渐进稳定性。

参考答案：

即《常微分方程》（方道远、薛儒英，浙江大学出版社）课本的定理 5.1.2 的证明。