

第一章 集合论与点集论习题选解

Ex 1. 设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 R^n 上的函数列, 试用点集

$$\{x : f_j(x) \geq \frac{1}{k}\}, (j, k = 1, 2, \dots)$$

表示点集

$$\left\{x : \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f_j(x) > 0\right\}.$$

解:

$$\begin{aligned} & \left\{x : \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f_j(x) > 0\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \geq \frac{1}{k}\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{j \geq n} f_j(x) \geq \frac{1}{k}\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \left\{x : f_j(x) \geq \frac{1}{k}\right\} \end{aligned}$$

Ex 2: 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数列, $E \subset [a, b]$ 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi_{[a, b] \setminus E}(x), x \in [a, b].$$

若令 $E_n = \{x \in [a, b] : f_n(x) \geq \frac{1}{2}\}$, 试求集合 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$.

解: 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi_{[a, b] \setminus E}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \setminus E \\ 0, & x \in E \end{cases}$$

知若 $x \in \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n$, 也即 $\exists N$, 当 $n \geq N$ 时, $x \in E_n$, 即 $f_n(x) \geq 1/2$, 所以 $[a, b] \setminus E \subset \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n$; 若 $x \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n$, 则 $\forall n, \exists k \geq n$, 使得 $f_k(x) \geq 1/2$, 因此 $E \cap \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n = \emptyset$. 结合起来有 $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = [a, b] \setminus E$.

Ex 4: 设 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$, 试问下列等式成立吗?

(i) $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$;

(ii) $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$.

解: (i) 此式成立.

(ii) 一般不一定成立, 例如考虑 $f(x) = x^2, X = [-1, 1], Y = [0, 1], A = [0, 1]$.

Ex 5: 试作开圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 与闭圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 之间的一一对应.

解: 将开圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ 理解为 $\bigcup_{r \in [0, 1)} \{(x, y) : x^2 + y^2 = r\}$,

将闭圆 $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 理解为 $\bigcup_{r \in [0, 1]} \{(x, y) : x^2 + y^2 = r\}$,

再考虑 $[0, 1)$ 与 $[0, 1]$ 之间不难建立一一对应.

Ex 7: 设 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的实值函数, 且存在常数 M , 使得对于 $[0, 1]$ 中任意有限个数: x_1, x_2, \dots, x_n , 均有

$$|f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)| \leq M,$$

试证明集合 $E = \{x \in [0, 1] : f(x) \neq 0\}$ 是可数集.

证明: 考虑

$$E = \{x \in [0, 1] : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) > \frac{1}{k}\} \bigcup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) < -\frac{1}{k}\}$$

由已知条件易知对任意 k , 点集 $\{x : f(x) > \frac{1}{k}\}$ 与 $\{x : f(x) < -\frac{1}{k}\}$ 均是有限集.

Ex 9: 设 E 是 R^3 中的点集, 且 E 中的任意两点的距离都是有理数, 试证明 E 是可数集.

证明: 任取 $x_0 \in E$, 则 $E \subset \bigcup_{r \in Q^+} S(x_0, r)$, 其中 Q^+ 表示非负有理数集, $S(x_0, r)$ 表示以 x_0 为中心 r 为半径的球面, 注意到此处为可列并, 因此仅需证对固定的 $r, S(x_0, r) \cap E$ 是可数集, 而 $S(x_0, r) \cap E \subset \bigcup_{r' \in Q^+} C(x_1, r')$, 其中 $C(x_1, r')$ 表示以 x_1 为中心 r' 为半径的圆, $x_1 \in S(x_0, r) \cap E$, 进一步 $C(x_1, r') \cap E \subset \bigcup_{r'' \in Q^+} C(x_1, r') \cap C(x_2, r'')$, $x_2 \in C(x_1, r') \cap E$, 而 $C(x_1, r') \cap C(x_2, r'')$ 至多有 E 的两个点.

Ex 12: 设 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 若 $\overline{E} = c$, 试证明存在 n_0 , 使得 $\overline{A_{n_0}} = c$.

证明: 考虑具有连续基数的点集 $[0, 1]^\infty = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_n \in [0, 1]\}$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]^\infty.$$

不妨设 A_n 互不相交, 否则先将 E 表示为等价的不交并. 设

$$f : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow [0, 1]^\infty$$

是一一映射, 设 $f(A_n) = D_n \subset [0, 1]^\infty$, 则 $A_n \sim D_n$.

考虑 $[0, 1]^\infty$ 中的点集 $X_n = \{(0, 0, \dots, 0, x_n, 0, \dots) : x_n \in [0, 1]\}$ 以及映射

$$P_n : D_n \rightarrow X_n, P_n((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)) = (0, 0, \dots, 0, x_n, 0, \dots)$$

由于 X_n 的基数为 c , 因此如果 $\overline{D_n} < c$, 则 $\overline{P_n(D_n)} \leq \overline{D_n} < c$, 因此 $\forall n, \exists x_n^*$, 使得 $(0, 0, \dots, 0, x_n^*, 0, \dots) \notin P_n(D_n)$, 从而 $(x_1, x_2, \dots, x_n^*, \dots) \notin D_n$, 故 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = [0, 1]^\infty$, 矛盾, 因此存在 n_0 , 使得 $\overline{D_{n_0}} = c$, 从而 $\overline{A_{n_0}} = c$.

Ex 13: 设 $f(x)$ 是定义在 R^1 上的单调上升函数, 试证明点集

$$E = \{x : \text{对于任意的 } \varepsilon > 0 \text{ 有 } f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) > 0\}$$

是 R^1 中的闭集.

证明: 考虑 E 的余集 E^c , 易知

$$E^c = \{x : \text{存在 } \varepsilon > 0 \text{ 有 } f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) \leq 0\}$$

结合函数的单调上升性 $f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) \geq 0$, 因此

$$E^c = \{x : \text{存在 } \varepsilon > 0 \text{ 有 } f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) = 0\}$$

对任意的 $x_0 \in E^c$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0 - \varepsilon) = 0$, (实际上这说明函数 f 在邻域 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 中是常值函数) 因此 $\forall y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 可以取 $\delta = \min\{y - (x_0 - \varepsilon), (x_0 + \varepsilon) - y\}$, 有 $f(y + \delta) - f(y - \delta) = 0$, 因此 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset E^c$, 从而 x_0 是 E^c 的内点, 故 E^c 为开集, 也即 E 是闭集.

Ex 14: 设 $F \subset R^n$ 是有界闭集, E 是 F 的一个无限子集, 试证明 $E' \cap F \neq \emptyset$. 反之, 若 $F \subset R^n$ 且对于 F 的任一无限子集 E , 有 $E' \cap F \neq \emptyset$, 试证明 F 是有界闭集.

证明: 设 $F \subset R^n$ 是有界闭集, E 是 F 的一个无限子集, 因此 E 是有界无限集, 由 Bolzano-Weierstrass 定理知 $E' \neq \emptyset$, 因此 $E' \subset F' \subset F$, 从而 $E' \cap F = E' \neq \emptyset$.

反之. 若 $F \subset R^n$ 且对于 F 的任一无限子集 E , 有 $E' \cap F \neq \emptyset$, 若 F 无界, 则我们可以选取一个无穷点列使它没有极限点, 首先任取 $x_1 \in F$, 则 $O(x_1, 1)$ 外必有 F 的点, 取 $x_2 \in O(x_1, 1)^c \cap F$, 再考虑 $O(x_1, \max\{2, d(x_1, x_2)\})$, 这个邻域外仍有 F 的点, 依此选取一个不收敛的无穷点列 x_1, x_2, \dots , 取 $E = \{x_1, x_2, \dots\}$, 则有 $E' = \emptyset$, 从而 $E' \cap F = \emptyset$, 与条件矛盾, 因此 F 是有界集.

另一方面对任意 $x_0 \in F'$, 则存在 F 中的无穷点列 x_n 使得 $x_n \rightarrow x_0$, 取 $E = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$, 由条件 $E' \cap F \neq \emptyset$ 即得 $x_0 \in F$, 从而 F 也是闭集.

Ex 15: 设 $F \subset R^n$ 是闭集, $r > 0$, 试证明点集

$$E = \{t \in R^n : \text{存在 } x \in F, d(t, x) = r\}$$

是闭集.

证明: 设 $t_0 \in E'$, 则存在 E 中的互异点列 t_n , 使得 $t_n \rightarrow t_0$, 由 $t_n \in E$ 知存在 $x_n \in F$ 使得 $d(t_n, x_n) = r$. 若 x_n 仅含有限个不同的点, 则从某个 N 开始, x_n 是常驻点列, 不妨记为 x_{k_0} , 则由 $d(t_n, x_{k_0}) = r, (n \geq N)$ 立即知 $d(t_0, x_{k_0}) = r$, 所以 $t_0 \in E$.

否则 x_n 含无限个不同的点, 由 $d(x_n, t_0) \leq d(x_n, t_n) + d(t_n, t_0) = r + d(t_n, t_0)$, 结合 $t_n \rightarrow t_0$, 知 x_n 是有界无穷序列, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在收敛的子列, 不妨就令 x_n 本身收敛, 设 $x_n \rightarrow x_0$, 则由 F 是闭集知 $x_0 \in F$, 且 $d(t_0, x_0) = r$. (考虑关于距离的三角不等式有) $d(x_0, t_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, t_n) + d(t_n, t_0)$ 以及 $d(x_0, t_0) \geq d(x_n, t_n) - d(x_0, x_n) - d(t_n, t_0)$.

注: 本题等价于若 $F \subset R^n$ 是闭集, $r > 0$, 则 $\bigcup_{x \in F} S(x, r)$ 是闭集, 其中 $S(x, r)$ 是以 x 为中心 r 为半径的球面.

Ex 18: 设 $f \in C(R^1), \{F_k\}$ 是 R^1 中的递减紧集列, 试证明

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k).$$

证明: 由映像集的一般性质 $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$ 显然成立.

另一方面, 对 $y_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 则对任意 k , 存在 $x_k \in F_k$ 使得 $f(x_k) = y_0$. 若 x_k 只含有有限个互不相同的点, 则存在 k_0 , 当 $k \geq k_0$ 时 $x_k = x_{k_0}$, 从而 $y_0 = f(x_{k_0}) \in f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right)$. 若 x_k

含有无限个互不相同的点, 由紧性 (有界闭), 点集 $\{x_k\}$ 至少有一个聚点 x_0 , 显然 $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, 再由 f 的连续性知 $f(x_0) = y_0$, 从而 $y_0 \in f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right)$. 所以 $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$. 综合起来即得

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k).$$

Ex 21: 设 $E \subset R^n$. 若 $E \neq \emptyset$, 且 $E \neq R^n$, 试证明 $\partial E \neq \emptyset$.

证明: (本题等价于证明 R^n 中既开又闭的集合只能是 \emptyset 或 R^n) 若 $\partial E = \emptyset$, 则 $R^n = E^\circ \cup (E^c)^\circ$ 从而 E 既开又闭.

设 $E \subset R^n, E \neq \emptyset$, 且 E 既开又闭, 下证 $E = R^n$. 若 $E^c \neq \emptyset$, 则存在 $x_0 \in E^c$, 因为 E 既开又闭, 所以 E^c 也既开又闭, 从而 x_0 是 E^c 的内点, 则存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $O(x_0, \delta_0) \subset E^c$, 令

$$\delta^* = \sup_{O(x_0, \delta) \subset E^c} \delta$$

若 $\delta^* = +\infty$, 则 $E^c = R^n, E = \emptyset$ 与 $E \neq \emptyset$ 矛盾, 因此 $\delta^* < +\infty$, 又由于 E^c 是闭集, 因此闭球 $\overline{O}(x_0, \delta^*) \subset E^c$ 考虑球面 $S(x_0, \delta^*)$ 上的点 $x \in E^c$, 由 E^c 是开集, x 是内点, 故存在 $\delta_x > 0$, 使得 $O(x, \delta_x) \subset E^c$, 而

$$S(x_0, \delta^*) \subset \bigcup_{x \in S(x_0, \delta^*)} O(x, \delta_x)$$

以及 $S(x_0, \delta^*)$ 是有界闭集, 由 Heine-Borel 有限子覆盖定理, 存在有限个 x_i 使得

$$S(x_0, \delta^*) \subset \bigcup_{i=1}^m O(x_i, \delta_{x_i}) \subset E^c$$

令 $\delta' = \min\{\delta_{x_i}, i = 1, 2, \dots, m\}$ 则 $O(x_0, \delta^* + \delta') \subset E^c$, 这与 δ^* 的定义矛盾, 说明 $E^c = \emptyset$, 即 $E = R^n$.

Ex 22: 设 G_1, G_2 是 R^n 中互不相交的开集, 试证明:

$$G_1 \cap \overline{G_2} = \emptyset.$$

证明: (方法一直接法)

对任意 $x_0 \in G_1$, 由于 G_1 是开集, 因此存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $O(x_0, \delta_0) \subset G_1$, 又由于 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 因此 $O(x_0, \delta_0) \cap G_2 = \emptyset$, 也即 $x \notin \overline{G_2}$, 所以 $G_1 \cap \overline{G_2} = \emptyset$.

(方法二反证法)

若 $G_1 \cap \overline{G_2} \neq \emptyset$, 取 $x_0 \in G_1 \cap \overline{G_2}$, 由于 G_1 是开集, 因此存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $O(x_0, \delta_1) \subset G_1$, 又由 $x_0 \in \overline{G_2}$, 因此对任意 $\delta > 0$, 有 $O(x_0, \delta) \cap G_2 \neq \emptyset$, 特别地考虑 $\delta = \delta_1$, 有

$O(x_0, \delta) \subset G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. 这与已知条件相矛盾, 因此 $G_1 \cap \overline{G_2} = \emptyset$.

本题要点提示: $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \forall \delta > 0, O(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$.

Ex 23: 设 $G \subset R^n$. 若对任意的 $E \subset R^n$, 有 $G \cap \overline{E} \subset \overline{G \cap E}$, 试证明 G 是开集.

证明: (方法一: 直接法)

取 $E = G^c$, 由条件 $G \cap \overline{E} \subset \overline{G \cap E}$ 知 $G \cap \overline{G^c} \subset \overline{G \cap G^c} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ 因此

$$\overline{G^c} \subset G^c$$

从而 G^c 是闭集, 也即 G 是开集.

(方法二: 反证法)

若 G 不是开集, 则存在 $x_0 \in G, x_0$ 不是 G 的内点, 即对任意 $\delta > 0, O(x_0, \delta) \cap G^c \neq \emptyset$. 考虑 $\delta_1 = 1$, 取 $x_1 \in O(x_0, \delta_1) \cap G^c$, 考虑 $\delta_2 = \min\{1/2, d(x_1, x_0)\}$, 取 $x_2 \in O(x_0, \delta_2) \cap G^c$, 依此类推, 可以得到点列 x_n , 有 $x_n \rightarrow x_0, x_n \in G^c$, 取 $E = \{x_1, x_2, \dots\}$, 则 $\overline{G \cap E} = \emptyset$, 但 $G \cap \overline{E}$ 至少含有点 x_0 , 这与条件矛盾, 说明 G 是开集.

注: 事实上有: 设 $G \subset R^n$, 则 G 是开集的充分必要条件是对任意的 $E \subset R^n$, 有 $G \cap \overline{E} \subset \overline{G \cap E}$.

证: 设 $G \subset R^n$ 是开集, 对任意的 $E \subset R^n$, 设 $x_0 \in G \cap \overline{E}$, 则 $x_0 \in G, x_0 \in \overline{E}$, 由 $x_0 \in \overline{E}$ 知存在 E 的点列 x_n 使得 $x_n \rightarrow x_0$, 而 $x_0 \in G$, 因此存在 $\delta > 0$, 使得 $O(x_0, \delta) \subset G$, 因此 n 充分大后 $x_n \in E \cap O(x_0, \delta)$, 所以 $x_0 \in \overline{G \cap E}$, 故 $G \cap \overline{E} \subset \overline{G \cap E}$.

Ex 24: 设 a, b, c, d 是实数, 且

$$P(x, y) = ax^2y^2 + bxy^2 + cxy + dy.$$

试问点集 $\{(x, y) : P(x, y) = 0\}$ 有内点吗?

解: 若 $\{(x, y) : P(x, y) = 0\}$ 存在内点, 设 (x_0, y_0) 是其内点, 则对固定的 y 值 $y_0, P(x, y_0) = ax^2y_0^2 + bxy_0^2 + cxy_0 + dy_0$ 作为关于 x 的二次函数, 必须在 (x_0, y_0) 的某个 $\delta > 0$ 邻域中恒为零, 因此有 $ay_0^2 = 0, by_0^2 + cy_0 = 0, dy_0 = 0$, 在 (x_0, y_0) 的 $\delta > 0$ 邻域中再任取一点 $(x_0, y_1), y_1 \neq y_0$, 同样有 $P(x, y_1) = ax^2y_1^2 + bxy_1^2 + cxy_1 + dy_1$ 作为关于 x 的二次函数在一个 x 的邻域恒为零, 因此有 $ay_1^2 = 0, by_1^2 + cy_1 = 0, dy_1 = 0$, 综合起来必须 $a = b = c = d = 0$, 显然这时所给出的点集是 R^2 , 除了这种特殊情形所给的点集不可能有内点.

Ex 25: 设 $f : R^1 \rightarrow R^1$, 令

$$G_1 = \{(x, y) : y < f(x)\}, \quad G_2 = \{(x, y) : y > f(x)\}.$$

试证明 $f \in C(R^1)$ 当且仅当 G_1 与 G_2 是开集.

证明: 设 $f \in C(R^1)$, 我们仅证明 G_1 开, G_2 可类似证明. 任取 $(x_0, y_0) \in G_1$, 则由 G_1 的定义知 $y_0 < f(x_0)$, 设 $\varepsilon = \frac{f(x_0) - y_0}{2}$, 由 f 在 x_0 的连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in O(x_0, \delta)$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 从而函数 $f(x)$ 在邻域 $O(x_0, \delta)$ 的函数图象落在以 $(x_0, f(x_0))$ 为中心, x 方向边长为 $2\delta, y$ 方向边长为 2ε 的矩形之中. 令 $\delta_0 = \min\{\varepsilon, \delta\}$, 则 $O((x_0, y_0), \delta_0) \subset G_1$, 因此 (x_0, y_0) 是 G_1 的内点, 故 G_1 是开集.

另一方面若 G_1, G_2 都是开集, 对任意 $x_0 \in R^1$, 任意 $\varepsilon > 0$, 考虑 $(x_0, f(x_0) + \varepsilon) \in G_2$, 则存在 δ_1 , 使得以 $(x_0, f(x_0) + \varepsilon)$ 为中心 $2\delta_1$ 为边长的小正方形整个含在 G_2 中; 考虑 $(x_0, f(x_0) - \varepsilon) \in G_1$, 则存在 δ_2 , 使得以 $(x_0, f(x_0) - \varepsilon)$ 为中心 $2\delta_2$ 为边长的小正方形整个含在 G_1 中, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $x \in O(x_0, \delta)$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 因此 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 由 $x_0 \in R^1$ 的任意性知 $f(x) \in C(R^1)$.

注记: 用集合的性质反映函数的连续性的类似问题还有

1: 设 $f(x)$ 定义在 R^n 上, 则 $f \in C(R^n)$ 的充分必要条件是: 对任意的 $t \in R^1$, 点集

$$E_1 = \{x \in R^n : f(x) \geq t\}, \quad E_2 = \{x \in R^n : f(x) \leq t\}$$

都是闭集. (教材 P36 例 2)

2: 设 $f(x)$ 定义在 R^n 上, 则 $f \in C(R^n)$ 的充分必要条件是: 对任意的开集 $G \subset R^1$, 原像集 $f^{-1}(G)$ 是 R^n 中的开集.

3. 设 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a, b]$ 上, 若点集

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

是 R^2 中的紧集, 则 $f \in C_{[a, b]}$.

Ex 26: 试问由 R^1 中的一切开集构成的集族的基数是什么?

解: 设 $E_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in R^1, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n\}$, 易证 E_n 的基数为 c , 记 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 故 E 的基数也为 c . 设 $F = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) : a_1, a_2, \dots \in R^1, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots\}$, F 的基数也为 c . 对 R^1 的任意开集 G , 由开集的结构定理, G 是可数个互不相交的开区间的并, 按各个开区间端点构成的一个从小到大的排列将是 E 或 F 中的一个点, 因此 R^1 中的一切开集构成的集族的基数不超过 c . 另一方面任意实数 $x \in R^1, (x, x+1)$ 是一个开集, 这样就立即得到集族的基数不小于 c . 综合起来就有 R^1 中的一切开集构成的集族的基数为 c .

注: 事实上由开集类生成的 σ -代数 Borel 集类的基数为 c , 因此 R^1 的一切开集族本身基数不超过 c .

Ex 27: 设 F_α 是 R^n 中的一族有界闭集, 若任取其中有限个: $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_m}$, 都有

$$\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} \neq \emptyset,$$

试证明 $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \neq \emptyset$.

证明: 若 $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} = \emptyset$, 则 $\bigcup_{\alpha} F_{\alpha}^c = R^n$, 任取一个 F_{α_0} , 显然 $F_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha} F_{\alpha}^c$, 也即 $F_{\alpha_0}^c$ 是对有界闭集 F_{α_0} 的一个开覆盖, 由 Heine-Borel 有限子覆盖定理, 存在有限个 $F_{\alpha_i}^c, i = 1, 2, \dots, l$, 有

$$F_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^l F_{\alpha_i}^c$$

因此 $F_{\alpha_0} \cap \left(\bigcap_{i=1}^l F_{\alpha_i} \right) = \emptyset$, 这与已知条件相矛盾, 故 $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \neq \emptyset$.

Ex 28: 设 $\{F_{\alpha}\}$ 是 R^n 中的有界闭集族, G 是开集且有

$$\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset G,$$

试证明 $\{F_{\alpha}\}$ 中存在有限个 $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_m}$, 使得

$$\bigcap_{i=1}^m F_{\alpha_i} \subset G.$$

证明: 由 $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset G$, 知 $G^c \subset \bigcup_{\alpha} F_{\alpha}^c$, 任取一个 F_{α_0} , 显然 $F_{\alpha_0} \cap G^c \subset \bigcup_{\alpha} F_{\alpha}^c$, 这时 $F_{\alpha_0} \cap G^c$ 为有界闭集, $F_{\alpha_0}^c$ 是对它的一个开覆盖, 由 Heine-Borel 有限子覆盖定理, 存在有限个 $F_{\alpha_i}^c, i = 1, 2, \dots, l$, 有

$$F_{\alpha_0} \cap G^c \subset \bigcup_{i=1}^l F_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^l F_{\alpha_i} \right)^c$$

因此

$$\bigcap_{i=1}^l F_{\alpha_i} \subset G \cup F_{\alpha_0}^c$$

从而

$$\bigcap_{i=0}^l F_{\alpha_i} \subset G \cap F_{\alpha_0} \subset G.$$

Ex 29: 设 $K \subset R^n$ 是有界闭集, $\{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖, 试证明存在 $\varepsilon > 0$, 使 K 的任一点为中心, ε 为半径的球必含于 $\{B_k\}$ 中的一个.

证明: $K \subset R^n$ 是有界闭集, $\{B_k\}$ 是 K 的开球覆盖, 由 Heine-Borel 有限覆盖定理知, 存在有限个开球 $\{B_k\}, (k = 1, 2, \dots, m)$, 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^m B_k.$$

因此 $\forall x \in K$, 存在某个开球 B_{k_0} , 使得 $x \in B_{k_0}$, 由于 B_{k_0} 是开球, 因此存在 $\delta_x > 0$, 使得 $O(x, \delta_x) \subset B_{k_0}$.

考虑到

$$K \subset \bigcup_{x \in K} O(x, \delta_x/2)$$

再次利用 Heine-Borel 有限覆盖定理, 存在有限个 $x_i (i = 1, 2, \dots, l)$ 使得

$$K \subset \bigcup_{i=1}^l O(x_i, \delta_{x_i}/2) \quad (1)$$

取 $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq l} \frac{\delta_{x_i}}{2}$, 则此 $\varepsilon > 0$ 满足题中的要求. 对任意 $x \in K$, 考虑以 x 为中心, ε 为半径的球 $B(x, \varepsilon)$, 首先由 (1) 知存在某个 i_0 , 使得 $x \in O(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}/2)$, 其次这时对任意 $y \in B(x, \varepsilon)$, 有

$$d(y, x_{i_0}) \leq d(y, x) + d(x, x_{i_0}) \leq \varepsilon + \delta_{x_{i_0}}/2 < \delta_{x_{i_0}},$$

也即

$$B(x, \varepsilon) \subset O(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}).$$

而 $O(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}})$ 根据选取是整个含在某个开球 B_k 中.

Ex 32. 试证明 R^1 中的可数稠密集不是 G_δ 集.

证明: (本题的证明类似于 R^1 中的有理点集不是 G_δ 集)

设 $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 是 R^1 中的可数稠密集, 若 E 是 G_δ 集, 则存在可列个开集 $G_i, i = 1, 2, \dots$, 使得 $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, 因此有

$$R^1 = E^c \cup E = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^c \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{a_i\} \right)$$

由于 $E \subset G_i$ 因此 G_i 稠密, 故 G_i^c 是无内点的闭集, 而单点集是无内点的闭集, 因此 R^1 被表示为可列个无内点的闭集的并, 由 Baire 定理知 R^1 无内点, 这一矛盾说明 E 不是 G_δ 集.

Ex 34. 试证明在 $[0, 1]$ 上不能定义如下函数 $f(x)$: 在有理点上连续, 在无理点不连续.

只需注意到 $[0, 1]$ 上定义的函数 $f(x)$ 的连续点集构成 G_δ 集, 而同样可以证明 $[0, 1]$ 中的有理数集也不是 G_δ 集.

Ex 36. 设 $E \subset R^1$ 是非空可数集. 若 E 无孤立点, 试证明 $\overline{E} \setminus E$ 在 \overline{E} 中稠密.

证明: $E \subset R^1$ 是非空可数集, 由于 E 无孤立点, 因此 E 必是可列集, 而且 $\overline{E} = E' \cup E = E'$, (没有孤立点说明所有点都是聚点), 而且不可能 $E' = E$, 否则 E 是完全集 (完备集), 而非空完备集的基数为 c , 因此 $\overline{E} \setminus E = E' \setminus E \neq \emptyset$. 需证 $\overline{E} \setminus E \supset \overline{E}$. $\forall x_0 \notin \overline{E} \setminus E, \exists \delta_0 > 0$, 使得 $O(x_0, \delta_0) \cap (\overline{E} \setminus E) = \emptyset$, 由于 $E \subset \overline{E}$, 因此, $O(x_0, \delta_0) \cap \overline{E} = \emptyset$, 或 $O(x_0, \delta_0) \subset E$, 而后者是不可能的 (因 E 可数), 故 $O(x_0, \delta_0) \cap \overline{E} = \emptyset$, 因此 $x_0 \in \overline{E}^c$.

Ex 37. 试证明在 R^n 中的任一闭集皆为 G_δ 集, 任一开集皆为 F_σ 集.

证明: 由于开集的补集是闭集, G_δ 集的补集是 F_σ 集, 因此我们仅需证明前半部分. 设 F 是 R^n 中的闭集, 考虑距离函数 $f(x) = d(x, F)$, 以及

$$F = \{x : d(x, F) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : d(x, F) < \frac{1}{k}\}$$

由距离函数的连续性知 $\{x : d(x, F) < \frac{1}{k}\}$ 均为开集, 因此 F 是 G_δ 集.

Ex 38. 设 $f(x) : [0, 1] \mapsto [0, 1]$, 若点集

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$$

是 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中的闭集, 则 $f \in C([0, 1])$.

证明: 从条件知 $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$ 是有界闭集 (紧集), 对任意 $x_0 \in [0, 1]$ 以及数列 $x_n \rightarrow x_0, (x_n, f(x_n)) \in G_f$, 因此 $f(x_n)$ 是有界数列, 从而存在收敛子列 $f(x_{n_j})$, 设 $f(x_{n_j}) \rightarrow y_0$, 则 $(x_{n_j}, f(x_{n_j})) \rightarrow (x_0, y_0)$, 由于 G_f 是闭的, 因此 $(x_0, y_0) \in G_f$, 因此 $y_0 = f(x_0)$, 所以对任意数列 $x_n \rightarrow x_0$ 存在子列 $f(x_{n_j}) \rightarrow f(x_0)$, 从而 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ (归结原则). 故 f 在 x_0 连续, 从而 $f \in C([0, 1])$.

Ex 41. 设 F_1, F_2, F_3 是 R^n 中三个互不相交的闭集, 试作 $f \in C(R^n)$, 使得

(i) $0 \leq f(x) \leq 1$;

(ii) $f(x) = 0 (x \in F_1); f(x) = 1/2 (x \in F_2); f(x) = 1 (x \in F_3)$.

解: 作

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2 \cup F_3)} + \frac{d(x, F_1 \cup F_2)}{d(x, F_1 \cup F_2) + d(x, F_3)} \right].$$

(作者: 何国龙 浙江师范大学数学系 Email: glhe@zjnu.cn, 最后修正 2007.4.9)

第二章 Lebesgue 测度习题选解

Ex 1: 设 $E \subset R^1$, 且存在 $q \in (0, 1)$, 使得对任一区间 (a, b) , 都有开区间列 $\{I_n\}$:

$$E \cap (a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q.$$

试证明 $m(E) = 0$.

证明: 由条件知 $m^*(E \cap (a, b)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q$, 也就是对任意开区间 I , 有

$$m^*(E \cap I) \leq q * |I|$$

因此对 E 的任意 L -覆盖 $\{I_n\}$ 有, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, 结合外测度的次可列可加性有, $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap I_n) \leq q * \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$, 因此有

$$m^*(E) \leq q m^*(E)$$

因此 $m^*E = 0$, 故 $mE = 0$.

Ex 2: 设 $A_1, A_2 \subset R^n, A_1 \subset A_2, A_1$ 是可测集且有 $m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$, 试证明 A_2 是可测集.

证明: 由于 A_1 是可测集, 在 Caratheodory 条件中取 $T = A_2$, 有

$$m^*(A_2) = m^*(A_2 \cap A_1) + m^*(A_2 \cap A_1^c) = m(A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1)$$

由于 $m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$, 因此 $m^*(A_2 \setminus A_1) = 0$.

对任意 $T \subset R^n$, 再次利用 A_1 的可测性, 并在 Caratheodory 条件中取 $T \cap A_2$ 作为试验集, 有

$$m^*(T \cap A_2) = m^*(T \cap A_2 \cap A_1) + m^*(T \cap A_2 \cap A_1^c) = m^*(T \cap A_1) + m^*(T \cap (A_2 \setminus A_1)) = m^*(T \cap A_1).$$

所以

$$\begin{aligned} m^*T &= m^*(T \cap A_1) + m^*(T \cap A_1^c) = m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_1^c) \\ &\geq m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_2^c) \end{aligned}$$

结合自然的关系式

$$m^*T \leq m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_2^c)$$

知

$$m^*T = m^*(T \cap A_2) + m^*(T \cap A_2^c)$$

从而 A_2 是可测集.

注意: 上面的解法是直接用 Caratheodory 条件, 如果考虑直接用可测集的性质. 由 $m^*(A_2 \setminus A_1) = 0$, 因此 $A_2 \setminus A_1$ 是零测集, 结合 A_1 可测即可得到 A_2 的可测性.

Ex 3: 设 $A, B \subset R^n$ 都是可测集, 试证明

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

证明: 若 $m(A), m(B)$ 中有一个为 ∞ , 则所待证等式显然成立. 因此假设 $m(A) < \infty, m(B) < \infty$.

利用 A, B 的可测性及 Caratheodory 条件, 有

$$m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap A) + m((A \cup B) \cap A^c) = m(A) + m(B \setminus A),$$

$$m(B) = m(B \cap A) + m(B \setminus A),$$

将上述两式相减并移项 (注意到 $m(A) < \infty, m(B) < \infty$) 即得

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Ex 4: 试问是否存在闭集 $F, F \subset [a, b]$ 且 $F \neq [a, b]$, 而

$$m(F) = b - a?$$

解: 若 F 是闭集, $F \subset [a, b]$ 且 $F \neq [a, b]$, 则 $(a, b) \setminus F \neq \emptyset$, 即 $(a, b) \setminus F$ 为一个非空开集, 必有 $m((a, b) \setminus F) > 0$, 又由于

$$m([a, b]) = m(F) + m([a, b] \setminus F)$$

因此 $m(F) = m([a, b]) - m([a, b] \setminus F) \leq m([a, b]) - m((a, b) \setminus F) < b - a$. 故满足题中要求的闭集 F 不存在.

Ex 8: 设 $\{E_k\}$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集列, $m(E_k) = 1$ ($k = 1, 2, \dots$), 试证明

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

证明: 由 $m(E_k) = 1$, 则 $m(E_k^c) = 0$ (这里余集关于 $[0, 1]$ 取), 因此 $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k^c) = 0$, 从而 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$.

Ex 9: 设 E_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 是 $[0, 1]$ 中的可测集, 且有 $\sum_{i=1}^k m(E_i) > k - 1$, 试证明

$$m\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) > 0.$$

证明: 由 $\sum_{i=1}^k m(E_i) > k - 1$ 知 $k - \sum_{i=1}^k m(E_i) < 1$, 也即 $\sum_{i=1}^k (1 - m(E_i)) < 1$, 即 $\sum_{i=1}^k m(E_i^c) < 1$, 则 $m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^k m(E_i^c) < 1$, 因此 $m\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) > 0$. (这里余集关于 $[0, 1]$ 取).

Ex 14: 试证明点集 E 可测的充分必要条件是: 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2 :

$$G_1 \supseteq E, G_2 \supseteq E^c,$$

使得 $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$.

证明: 条件的必要性

若 E 可测, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 G_1 是开集, $E \subset G_1$, 且 $m(G_1 \setminus E) < \varepsilon/2$; 又存在 F 是闭集, $F \subset E$, 且 $m(E \setminus F) < \varepsilon/2$, 取 $G_2 = F^c$, 则 G_2 是开集且 $G_2 \supseteq E^c$, 且 $m(G_1 \cap G_2) = m(G_1 \setminus F) \leq m(G_1 \setminus E) + m(E \setminus F) < \varepsilon$.

条件的充分性, 这时条件相当于对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 G 是开集, 且 $E \subset G, F$ 是闭集, 且 $F \subset E$, 而且 $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

考虑 $\varepsilon_k = 1/k$, 则存在开区间序列 G_k 及闭区间序列 F_k 使得, $F_k \subset E \subset G_k, m(G_k \setminus F_k) < 1/k$,

令 $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $m(G \setminus F) \leq 1/k$ 对任意 k 都成立, 故 $m(G \setminus F) = 0$, 考虑到 $F \subset E \subset G$, 知 E 可测.

Ex II(6): 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n, A \cup B$ 是可测集, 且 $m(A \cup B) < \infty$, 若

$$m(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B),$$

试证明 A, B 皆可测.

证明: 作 B 的等测包 H , 即 $H \supseteq B, H$ 可测, 由于 $A \cup B$ 可测, 因此不妨设 $H \subset A \cup B$, 否则取 $H \cap (A \cup B)$ 作为 B 的等测包.

利用 H 的可测性, 以及 Caratheodory 条件有

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= m^*((A \cup B) \cap H) + m^*((A \cup B) \cap H^c) \\ &= m^*(A \setminus H) + m(H) = m^*(A \setminus H) + m^*B \end{aligned}$$

注意到 $m(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ 以及 $m(A \cup B) < \infty$ 因此 $m^*(A \setminus H) = m^*(A)$ 利用 H 的可测性, 以及 Caratheodory 条件又有

$$m^*(A) = m^*(A \setminus H) + m^*(A \cap H)$$

所以 $m^*(A \cap H) = 0$, 从而 $A \cap H$ 是可测集,

由于 $A = ((A \cup B) \setminus H) \cup (A \cap H)$ 知 A 可测. B 的可测性仅需注意到 A, B 地位的对成性即可.

(作者: 何国龙 浙江师范大学数学系 Email: glhe@zjnu.cn, 最后修正 2007.4.25)

第三章 可测函数习题选解或提示

Ex 1: 设有指标集 $I, \{f_\alpha(x) : \alpha \in I\}$ 是 R^n 上的可测函数族, 试问函数 $S(x) = \sup\{f_\alpha(x) : \alpha \in I\}$ 在 R^n 上是可测的吗?

解: 当指标集 I 是可数集时, $S(x)$ 是可测函数. 否则 $S(x)$ 不一定可测. 考虑一个不可测集 I , 对 $\forall \alpha \in I$ 作函数

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x = \alpha \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这时 $S(x) = \sup\{f_\alpha(x) : \alpha \in I\} = \chi_I(x)$ 不是可测函数.

Ex 3: 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a, b)$ 上的可测函数.

提示: 考虑右导函数

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x+1/n) - f(x)]$$

Ex 6: 设 $f_k(x)$ 是 $E \subset R^n$ 上的实值可测函数列, $m(E) < \infty$, 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0, \quad a.e. x \in E$$

的充分必要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m(\{x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

证明: 条件的必要性.
对任意 $\varepsilon > 0$, 由于

$$E(\sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \varepsilon) \subseteq \bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq \varepsilon/2)$$

由 Lebesgue 引理知当 $m(E) < \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0, \quad a.e. x \in E$ 时,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq \varepsilon/2)) = 0.$$

条件的充分性. 由于

$$E(f_k(x) \text{ 不收敛于 } 0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq 1/i)$$

若

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m(\{x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

则 $\forall i \in N$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq 1/i)) = 0.$$

而 $m(E) < \infty$, 由测度的极限性质有

$$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq 1/i)\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} E(|f_k(x)| \geq 1/i)\right) = 0.$$

再由测度的次可加性有

$$m(E(f_k(x) \text{ 不收敛于 } 0)) = 0.$$

Ex 7: 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 $[a, b]$ 上的几乎处处有限的可测函数, 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0, \quad a.e. x \in [a, b],$$

试证明存在 $E_n \subset [a, b]$ ($n = 1, 2, \dots$), 使得

$$m\left([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$$

而 $\{f_k(x)\}$ 在每个 E_n 上一致收敛于 $f(x)$.

提示: 考虑 $\delta = 1/n$, 利用 Egoroff 定理.

Ex 8: 设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $g(x)$, 试证明 $\{f_k(x) + g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x) + g(x)$.

提示: 考虑

$$\{x \in E : |f_k(x) + g_k(x) - (f(x) + g(x))| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{x \in E : |g_k(x) - g(x)| \geq \varepsilon/2\}$$

Ex 9: 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < \infty$. 若在 $\{f_k(x)\}$ 的任一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中均存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$, 试证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

注: 本题相当于 Riesz 定理的一种等价形式: 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E) < \infty$. 则 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是: 在 $\{f_k(x)\}$ 的任一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中均存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$.

证明: 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上不是依测度收敛于 $f(x)$. 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(E(|f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0)) \neq 0.$$

则存在 $\delta_0 > 0, \forall k \in N, \exists n_k$ 递增, 使得

$$m(E(|f_{n_k} - f(x)| \geq \varepsilon_0)) > \delta_0. \quad (*)$$

这时 f_{n_k} 不可能有几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列, 否则若存在子列 $f_{n_{k_i}}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 则由 Lebesgue 引理 $f_{n_{k_i}}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(E(|f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0)) = 0.$$

这与 (*) 相矛盾.

Ex 13: 设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0, 试证明 $\{f_k(x) \cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 0.

提示: 考虑

$$f_k(x) \cdot g_k(x) = \frac{[f_k(x) + g_k(x)]^2 - [f_k(x) - g_k(x)]^2}{4}$$

因此仅需证明当 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0, 有 $\{f_k(x) \pm g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0, 且若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0, 则 $\{f_k^2(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于 0.

Ex 15: 设有定义在可测集 $E \subset R^n$ 上的函数 $f(x)$, 且对任给的 $\delta > 0$, 存在 E 中的闭集 $F, m(E \setminus F) < \delta$, 使得 $f(x)$ 在 F 上连续, 试证明 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

注: 本题的结论即是 Lusin 定理的逆定理.

提示: 考虑 $\delta = 1/n$, 则存在 $F_n \subset E, m(E \setminus F_n) < 1/n, f(x)$ 在 F_n 上连续.

Ex 17: 设 $f(x), f_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ 是 $E \subset R^1$ 上实值可测函数. 若对任给 $\varepsilon > 0$, 必有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \{x : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} \right) = 0.$$

试证明 $f_k(x)$ 在 E 上近一致收敛于 $f(x)$.

提示: 完全依照 Egoroff 定理的证明.

(作者: 何国龙 浙江师范大学数学系 Email: glhe@zjnu.cn, 最后修正 2007.5.16 22:13)

第四章 Lebesgue 积分习题选解或提示

Ex 1: 设 $f(x)$ 是 $E \subset R^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足 $\int_E f(x)dx = 0$, 试证明 $m(E) = 0$.

证明: 设 $E_1 = E[f > 0], E_2 = E \setminus E_1$, 则 $m(E_2) = 0$, 因此 $\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx = 0$. 故 $m(E_1) = 0$, 从而 $m(E) = m(E_1) + m(E_2) = 0$.

Ex 3: 设 $f(x)$ 是 $E \subset R^n$ 上非负可测函数. 若存在 $E_k \subset E, m(E \setminus E_k) < 1/k (k = 1, 2, \dots)$, 使得极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x)dx$$

存在, 试证明 $f(x)$ 在 E 上可积.

证明: 作 $\tilde{E}_1 = E_1, \tilde{E}_k = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j (k = 2, 3, \dots)$, 则有 $\tilde{E}_i \cap \tilde{E}_j = \emptyset (i \neq j), \bigcup_{j=1}^k \tilde{E}_j = E_k, (k = 1, 2, \dots)$. 记 $\tilde{E} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{E}_j$, 则有 $m(E \setminus \tilde{E}) \leq m(E \setminus \bigcup_{j=1}^k \tilde{E}_j) = m(E \setminus E_k) < 1/k (k = 1, 2, \dots)$, 所以 $m(E \setminus \tilde{E}) = 0$. 因此利用非负可测函数关于积分区域的可加性有.

$$\int_E f(x)dx = \int_{\tilde{E}} f(x)dx = \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{E}_j} f(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\tilde{E}_j} f(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_{\tilde{E}_j} f(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

由极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x)dx$ 的存在即知 $f(x)$ 在 E 上可积.

Ex 5: 设 $f_k(x) (k = 1, 2, \dots)$ 是 R^n 上的非负可积函数列, 若对任一可测集 $E \subset R^n$, 都有

$$\int_E f_k(x)dx \leq \int_E f_{k+1}(x)dx,$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)dx.$$

提示: 由已知条件, $E_k = \{x : f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$ 是零测度集, 因此在去掉 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ (零测度集) 剩下的点集上, $f_k(x)$ 是非负渐升函数列, 再利用 Levi 单调收敛定理.

Ex 7: 假设有定义在 R^n 上的函数 $f(x)$, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $g, h \in L(R^n)$, 满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x) (x \in R^n)$, 并且使得

$$\int_{R^n} [h(x) - g(x)]dx < \varepsilon,$$

试证明 $f \in L(R^n)$.

提示: 首先在给定的条件下 $f(x)$ 是可测函数. 其次容易证明对非负函数 $f(x)$ 结论成立, 再利用当 $g \leq f \leq h$ 时, 有 $g^+ \leq f^+ \leq h^+, h^- \leq f^- \leq g^-$ 证得对一般可测函数结论仍成立.

Ex 9: 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递增函数, 试证明对 $E \subset [0, 1], m(E) = t$, 有 $\int_{[0,t]} f(x)dx \leq \int_E f(x)dx$.

证明: 若 $m([0, t] \cap E) = t$, 则由于 $m(E) = t = m([0, t])$, 所以此时 $\int_{[0,t]} f(x)dx = \int_E f(x)dx$.
否则 $m([t, 1] \cap E) > 0$,

$$\int_{[0,t]} f(x)dx = \int_{[0,t] \cap E} f(x)dx + \int_{[0,t] \setminus E} f(x)dx \leq \int_{[0,t] \cap E} f(x)dx + \int_{[t,1] \cap E} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Ex 11.1: 试证明等式

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \quad (\alpha > 1).$$

注: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. 证明: 考虑到

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$

利用非负可测函数的逐项积分定理得

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,\infty)} x^{\alpha-1} e^{-nx} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,\infty)} n^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}.$$

Ex 13: 设 $f(x) \in L(R^1), p > 0$, 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} f(nx) = 0, \quad a.e. x \in R^1.$$

证明: 设 $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-p} f(nx)|$, 利用非负可测函数的逐项积分定理有.

$$\begin{aligned} \int_{R^1} F(x)dx &= \int_{R^1} \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-p} f(nx)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^1} |n^{-p} f(nx)|dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_{R^1} |f(nx)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-p} \int_{R^1} |f(x)|dx < +\infty \end{aligned}$$

从而 $F(x)$ 在 R^1 上几乎处处有限, 从而它的通项

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} f(nx) = 0, \quad a.e. x \in R^1.$$

Ex 16: 设 $f \in L([0, 1])$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = 0.$$

证明: 考虑函数 $f(x) = \ln(1 + x^2) - x, f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{-(x-1)^2}{1+x^2} < 0, x \geq 0$, 因此 $\ln(1 + x^2) \leq x (x \geq 0)$

$$n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) < |f(x)|$$

由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = \int_{[0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx.$$

考虑函数 $g(x) = \ln(1+x^2) - x^2, g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 2x = 2x(\frac{1}{1+x^2} - 1) < 0 (x \geq 0)$, 因此 $\ln(1+x^2) \leq x^2$

$$n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) < |f(x)|^2/n \rightarrow 0 \quad a.e. x \in [0, 1]$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = 0.$$

Ex 17: 设 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots, E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, f \in L(E_k) \ (k = 1, 2, \cdots)$, 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

证明: 由积分关于区域的可数可加性我们可以证明以下结论成立.

若 F_k 是单调递增可测集列, 且 $f(x)$ 在 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 上可积, 则

$$\int_F f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_k} f(x) dx.$$

因为

$$\begin{aligned} \int_F f(x) dx &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} f(x) dx = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \setminus F_{k-1})} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k \setminus F_{k-1}} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_{F_j \setminus F_{j-1}} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_k} f(x) dx. \end{aligned}$$

其中 $F_0 = \emptyset$.

对于 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots, E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, f \in L(E_k) \ (k = 1, 2, \cdots)$, 我们考虑单调递增集列 $E_1 \setminus E_k$, 则有

$$\int_{E_1 \setminus E} f(x) dx = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k)} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_1 \setminus E_k} f(x) dx$$

因此 (由 $f(x)$ 在 E_k 上的可积性)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Ex 18: 设 $f \in L(E)$, 且 $f(x) > 0 \ (x \in E)$ 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [f(x)]^{1/k} dx = m(E).$$

证明: 设 $E_0 = E[f = +\infty]$, $E_1 = E[1 \leq f < +\infty]$, $E_2 = E[f < 1]$, 因此, $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, 由于 $f \in L(E)$, 因此 f 在 E 上几乎处处有限, 也即 $m(E_0) = 0$, 因此

$$\int_E [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_1} [f(x)]^{1/k} dx + \int_{E_2} [f(x)]^{1/k} dx,$$

在 E_1 上, 由于 $[f(x)]^{1/k} \leq f(x)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_1} [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_1} \lim_{k \rightarrow \infty} [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_1} 1 dx = m(E_1).$$

在 E_2 上, 由于 $0 < f(x) < 1$, 因此 $[f(x)]^{1/k}$ 单调递增收敛于 1, 由 Levi 单调收敛定理得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_2} [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_2} \lim_{k \rightarrow \infty} [f(x)]^{1/k} dx = \int_{E_2} 1 dx = m(E_2).$$

综合起来得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E [f(x)]^{1/k} dx = m(E).$$

Ex 21: 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列, $g(x)$ 是 E 上的正值可积函数, 若 $f_k(x) \geq -g(x)$ ($x \in E, k = 1, 2, \dots$), 试证明

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x).$$

提示: 应用 Fatou 引理.

Ex 23: 设 $f \in L(R^n)$, $f_k \in L(R^n)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且对于任一可测集 $E \subset R^n$, 有

$$\int_E f_k(x) dx \leq \int_E f_{k+1}(x) dx, (k = 1, 2, \dots),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \text{ a.e. } x \in R^n.$$

提示: 由条件可知 $f_k(x)$ 在除去一个零测度集后单调渐升, 并且由积分的极限条件知 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 从而存在子列几乎处处收敛于 $f(x)$, 结合单调性即得所需结论.

Ex 24: 设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset R^n$ 上的两个可测函数列, 且有 $|f_k(x)| \leq g_k(x), x \in E$. 若

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx < \infty,$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

证明: 由 $|f_k(x)| \leq g_k(x)$, 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x)$ 知 $|f(x)| \leq g(x)$. 考虑 $|f_k(x) - f(x)| \leq g_k(x) + g(x)$, 即 $g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)| \geq 0$, 利用 Fatou 引理有

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} [g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)|] dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E [g_k(x) + g(x) - |f_k(x) - f(x)|] dx$$

可得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| dx = 0,$$

从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

注: 本题可看作是 Lebesgues 控制收敛定理的推广形式.

Ex 25: 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 D . 若 D 只有可列个极限点, 试证明 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

证明: 由于函数的不连续点集必为 F_σ 型集, 因此可设 $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 其中 F_k 是 $[a, b]$ 中的闭集, 因此我们仅需证明对任意 $k, m(F_k) = 0$. 若对某个 $k, m(F_k) > 0$, 那么 F_k 必不是可列集, 而且由于它是闭集, 因此它的每个点都是其极限点, 这立即导致与已知条件 D 只有可列个极限点矛盾. 因此 $m(D) = 0$. 从而根据有界函数 Riemann 可积的充分必要条件知 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

(作者: 何国龙 浙江师范大学数学系 Email: glhe@zjnu.cn, 最后修正 2007.6.11 18:30)