练习 1. 假设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集. 证明：

(i) 如果 A, B 中有一个是开集，则 $A + B$ 是开集.

(ii) 如果 A, B 都是闭集，则 $A + B$ 是可测集.

(iii) 如果 A, B 都是闭集，那么 $A + B$ 一定是闭集吗？

练习 2. 假设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，$E_1 \subset E_2$，$m(E_1) < m(E_2)$. 证明：对任何 $m(E_1) < \lambda < m(E_2)$，存在紧集 E，满足 $E_1 \subset E \subset E_2$ 并且 $m(E) = \lambda$.

练习 3. 回忆类 Cantor 集的构造 (第 2 周第一次作业). 给定 $\xi, \theta \in (0, 1/3]$，取 $\ell_k = \xi^k$ 得到类 Cantor 集 $\hat{\mathcal{C}}_1$；取 $\ell_k = \theta^k$ 得到类 Cantor 集 $\hat{\mathcal{C}}_2$. 按下列步骤构造函数 $F : [0, 1] \to [0, 1]$：

记 $I_{n,i} = [a_n^i, b_n^i]$ 与 $J_{n,i} = [c_n^i, d_n^i]$ $(i = 1, \ldots, 2^n)$ 分别为构造 $\hat{\mathcal{C}}_1$ 和 $\hat{\mathcal{C}}_2$ 的第 n 步时得到的互不相交的闭区间. 定义 $F_n : [0, 1] \to [0, 1]$ 为这样的函数，

- $F_n(a_n^i) = c_n^i$，$F_n(b_n^i) = d_n^i$，$i = 1, \ldots, 2^n$；
- 如果 $x \notin P_n := \{a_n^i, b_n^i\}_{i=1}^{2^n}$,则令 $F_n(x)$ 为 x 左右相邻的两个端点 $p_1, p_2 \in P_n$ 处 F 取值 $F_n(p_1), F_n(p_2)$ 的线性插值.

给定任何 $x \in [0, 1]$，令 $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$.

证明：F_n 一致收敛到 F，并且 F 满足下列性质:

(i) F 是连续的双射;

(ii) F 是单调递增函数；

(iii) F 将 $\hat{\mathcal{C}}_1$ 映满 $\hat{\mathcal{C}}_2$.

练习 4. 举例说明：存在可测函数 f 与连续函数 ϕ，其复合函数 $f \circ \phi$ 是不可测的. (利用练习 3.)

练习 5 举例说明. 存在 $[0, 1]$ 上定义的可测函数 f，满足如下两个条件：(i) f 在 $[0, 1]$ 上处处不连续；(ii) 对任何 $[0, 1]$ 上的可测函数 g, 如果 $g(x) = f(x)$ a.e. $x \in [0, 1]$，则 g 也在 $[0, 1]$ 上处处不连续. (可考虑利用教材第 2 章习题 43.)