# 华南理工大学 2011-2012 学年第一学期“解析几何”期末考试 A

## 参考解析

一、简答题（共 32 分）

（1）若直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$ 与平面 $kx+3y-5z+1=0$ 平行, 求 $k$ 的值.

解：有 $4k+9-5=0$，$k=-1$.

（2）求二次曲线 $y^2-4x-4y=0$ 过点(3,−2)的切线方程.

解：(3,−2)在此曲线上，且曲线无奇点，故切线方程为：
$-2y-2(y-2)-2(x+3)=0$，即：$x+2y+1=0$.

（3）求母线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转所得旋转曲面的方程.

解：为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$.

（4）求二次曲线 $x^2-2xy+y^2-4x=0$ 的主方向为和对称轴.

解：设 $u=(m,n)$ 为其主方向，则有 $u\parallel\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}u^T$，得：$m(m+n)=n(n+m)$.

解之得：$u_1=(1,1)$ 与 $u_2=(1,-1)$.而由 $I_2=0$，$I_3=-4\neq0$ 知原曲线为抛物线.

考虑其开口朝向：由于 $I_1(a_{12}b_1-a_{11}b_2)=4>0$，故 $u_1=(1,1)$ 为其渐进方向.
故对称轴方程为：$x-y-1=0$.

（5）设仿射坐标 $I$ 到 $II$ 的点的坐标变换公式为 $\begin{cases}x=-y'+3\\ y=x'-2\end{cases}$，求直线 $l_1:2x-y+1=0$ 在坐标系 $II$ 中的方程和直线 $l_2:3x'+2y'-5=0$ 在坐标系 $I$ 中的方程.

解：直接代入可知所求为 $x'+2y'-9=0$，$2x-3y-7=0$.

（6）设 $\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{y}$ 且 $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{a}\times\vec{y}$， 其中 $\vec{a}\neq\vec{0}$， 求 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的关系.

解：$\vec{x}=\vec{y}$.（模长相等方向相同）

（7）求二次曲线$2x^2+5xy+2y^2-6x-3y+5=0$的对称中心和渐近方向.

解：对称中心$(-1,2)$，渐近方向$(-1,2)$与$(-2,1)$.

（8）平面上, 设$x'$轴和$y'$轴在原坐标系中的方程为$3x-4y+1=0$和 $4x+3y-7=0$,且新, 旧坐标系都是右手直角坐标系, 求$I$到$II$的点的坐标变换公式.

解：为$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

二、(共 10 分）用向量方法证明三角形的正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

解：在△ABC 中，设$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，有 $\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，

从而有$\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$，所以$|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{c}\times\vec{a}|=|\vec{a}\times\vec{b}|$,

则有：$bc\sin A=ac\sin B=ab\sin C$，于是$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

三、(共 10 分）求经过点$p(4,-2,1)$和$x$轴的平面方程.

解：为$y+2z=0$

四、(共 14 分）证明直线族$\begin{cases} 3\lambda x-2\lambda y-6z=0 \\ 3x+2y-6\lambda=0 \end{cases}$构成的曲面是双曲抛物面，并求该曲面上平行于平面$3x+4y-4z=0$的直母线方程.

证明：消去参数$\lambda$，可得：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$，为双曲抛物面.

其两族直母线方程为：$\begin{cases} 3\lambda x-2\lambda y-6z=0 \\ 3x+2y-6\lambda=0 \end{cases}$和$\begin{cases} 3\mu x+2\mu y-6z=0 \\ 3x-2y-6\mu=0 \end{cases}$.

方向向量分别为：$u_1=(2,-3,2\lambda)$，$u_2=(2,3,2\mu)$，

由题设条件可得：$\lambda=-\frac{3}{4}$，　$\mu=\frac{9}{4}$.

故所求的直母线方程为：

$\begin{cases} 3x-2y+8z=0 \\ 6x+4y+9=0 \end{cases}$和$\begin{cases} 9x+6y-8z=0 \\ 6x-4y-27=0 \end{cases}$.

五、(共 10 分)在直角坐标系中，利用转轴和移轴的方法把方程 $x^2-2xy+y^2-4x-4y+8=0$ 化成标准型，并说明原方程表示什么曲线.

解：考虑矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 的特征方程 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)=0$.

得特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$，从而得两个特征向量 $(1,1)^T,(1,-1)^T$.

故可取正交变换：$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{cases}$，得到 $y'^2-2\sqrt{2}x'+4=0$.

再做移轴变换：$\begin{cases}x'=x''+\sqrt{2}\\ y'=y''\end{cases}$，得 $y''^2=2\sqrt{2}x''$，为抛物线.

六、（共 14 分）求到定点与定直线(定点不在定直线上)距离之比等于常数 $k$>0 的点的轨迹，并根据 $k$ 的取值范围，说明轨迹的形状.
解：设定点不在定直线上，建立坐标系，使定直线为 $x$ 轴，定点为 $C(0,0,c),(c\neq 0)$.
设动点为 $P(x,y,z)$，则由条件：$\lambda(P,C)=\lambda d(P,x\text{轴})$，

即：$\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}=\lambda\sqrt{y^2+z^2}$.平方，得：$x^2+(1-\lambda^2)y^2+(1-\lambda^2)z^2-2cz+c^2=0$.

①当 $\lambda=1$ 时，得 $x^2-2cz+c^2=0$，即 $x^2=2c(z-\frac{c}{2})$，为抛物柱面.

②当 $\lambda\neq 1$ 时，得 $x^2+(1-\lambda^2)y^2+(1-\lambda^2)(z-\frac{c}{1-\lambda^2})^2=\frac{c^2\lambda^2}{1-\lambda^2}$；
则当 $\lambda>1$ 时，此为单叶双曲面；当 $0<\lambda<1$ 时，此为椭球面.

七、（共 10 分）求经过点 $p(1,0,-1)$，并且与直线 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 和 $l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线的方程.
解：过 $p(1,0,-1)$ 与直线 $l_1$ 的平面方程为：

$\begin{vmatrix}x-0 & y-0 & z-0\\ 1-0 & 0-0 & -1-0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$，即 $x-2y+z=0$.

过 $p(1,0,-1)$ 与直线 $l_2$ 的平面方程为：

$\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ 1-1 & 0-2 & -1-3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0$，即 $x+2y+z-2=0$.

故所求直线方程为 $\begin{cases}x-2y+z=0\\ x+2y+z-2=0\end{cases}$.