每日一题（2）

2019.03.21

计算积分:

$$(1) I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

$$(2) I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x.$$

解：(1) 令 $x=\tan t$, 则$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$, 于是

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$$

而

$$\ln[1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)]=\ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})=\ln 2-\ln(1+\tan t),$$

故 $\ln(1+\tan t)-\frac{1}{2}\ln 2$ 是关于区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 的中点的奇函数，在该区间上的积分为 0, 因此

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(1+\tan t)-\frac{1}{2}\ln 2]\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\ln 2\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(2) 利用分部积分法，

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\mathrm{d}(-\cos x)\\
&=-\sin^{n-1}x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}(\sin^{n-1}x)\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x\\
&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_{n-1}
\end{aligned}$$

得到递推公式：

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}(n\geq 2)$$

又 $I_0=\frac{\pi}{2},I_1=1$, 于是

$$I_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$