一、(14分)

(1) 假设$(\Omega,\mathcal{A},P)$ 为概率空间，A,B为两个独立事件。如果

$$P(A\cup B)=\frac{3}{4},\qquad P(AB)=\frac{1}{4}.$$

求$P(A)$和$P(B)$?

(2) 假设$(\Omega,\mathcal{A},P)$ 为概率空间，A,B为两个事件，$P(A)>0$，$P(B)>0$。如果

$$P(B|A)>P(B)$$

证明：

$$P(\bar{B}|A)<P(\bar{B})$$

其中$\bar{B}$表示B的对立事件。

二、(14分)

如果一枚硬币出现正面的概率为$0<p<1$，则称该硬币为p-硬币。某学生独立重复地抛掷一枚p-硬币直到出现正面为止，记X为其所需要抛掷的次数。假设p是随机变量，具有下列分布：

$$P\Big(p=1-\frac{1}{2^n}\Big)=\frac{1}{2^n},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

求

$$P(X=k)=?,\qquad k\geq 1$$

三、(14分)

(1) 假设θ 是一个随机变量，分布为

$$\theta\sim\left(\begin{array}{ccccc} -\frac{\pi}{3} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{array}\right)$$

求$X=\sin\theta$和$Y=\cos\theta$的分布？

(2) 假设ξ 是一个标准正态随机变量，定义$Z=e^{|\xi|}$。求Z的密度函数？

四、(15分)

假设$(X,Y)\sim N(0,1;0,1;\rho)$，即联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)},\qquad -\infty<x,y<\infty$$

令$Z=\frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$。证明：

(1) $Z\sim N(0,1)$；

(2) X 和Z是相互独立随机变量；

(3)

$$P(X>0,Y>0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin\rho.$$

五、(15分)

假设$U_1,U_2,\cdots,U_n$是n个独立同分布随机变量，服从$(0,1)$上的均匀分布。求

(1)

$$Cov\Big(\prod_{i=1}^n U_i,\quad \prod_{i=1}^n(1-U_i)\Big)=?$$

(2)

$$Cov\Big(\sum_{i=1}^n U_i,\quad \sum_{i=1}^n(1-U_i)\Big)=?$$