

15-16 学期实变函数考题回忆

1.证明：对任何实数 a ， $f(x)$ 在 R 上连续的充分必要条件为集合 $\{x \mid f(x) > a\}$ 和 $\{x \mid f(x) < a\}$ 是开集

2.试写出几乎处处收敛，依测度收敛，一致收敛的定义以及三者之间的关系

3.试写出绝对连续函数和有界变差函数的定义以及两者之间的关系，并证明 $f(x) = \sqrt{x}$ 是 $[0,1]$ 上的绝对连续函数

4.(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上非负函数，并且 $(L) \int_0^1 f(x) dx = 0$ ，证明： $f(x)$ 几乎处处等于 0

(2) 将勒贝格控制收敛定理中的条件弱化为 $f_n(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$ ，且 $m(D) < \infty$ ，求证：

$$\int_D |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

5.证明：

(1) 单调函数 $f(x)$ 的间断点是至多可数的

(2) R 上的单调函数全体具有连续统势

6.写出勒贝格测度和外侧度的定义，并且证明 E 是 $[0,1]$ 上的可测集的充分必要条件为 $m(E) + m([0,1] \setminus E) = 1$