初等几何研究

1.

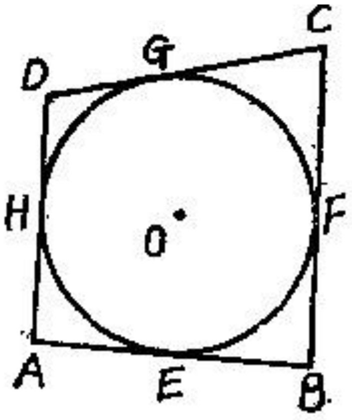


图 1.7

5． **证明**：圆外切四边形一双对边之和等于另一双对边之和．叙述并证明逆定理．

证：设四边形$ABCD$外切于圆O（图1.7）．切点为E、F、G、H．则

$$
\begin{aligned}
AB+CD &= AE+EB+CG+GD \\
&= AH+BF+FC+HD \\
&= (AH+HD)+(BF+FC) \\
&= AD+BC.
\end{aligned}
$$

逆定理：若四边形一双对边之和等于另一双对边之和，则此四边形必有内切圆．

证：设在四边形$ABCD$中（图1.8），$AB+CD=BC+AD$．

我们总可以作圆O切四边形$ABCD$的三边AB、AD、DC于E、H、G，若圆O与BC边不相切，过C作圆O的切线CF（F为切点）交AB于B'．在四边形$AB'CD$中，

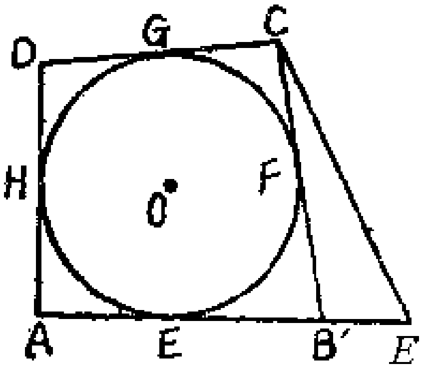


图 1.8

由原定理有$AB'+CD=B'C+AD$．由已知$AB+CD=BC+AD$，两式相减得$AB-AB'=BC-B'C$．因为，A、B'、B在同一直线上，所以有$B'B=BC-B'C$．这与$\triangle BB'C$中$B'B>BC-B'C$矛盾．因而B'与B必重合．即BC切圆O于F．逆定理得证．

2.

13． 四边形有一双对角互补，则必为圆内接四边形。

已知：在四边形$ABCD$中，$\angle A+\angle C=2d$。

求证：四边形$ABCD$内接于圆。

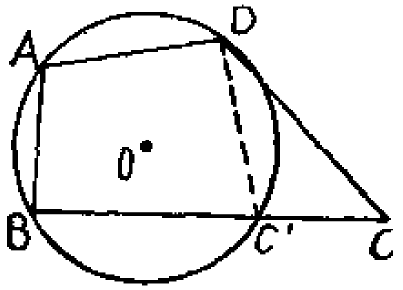


图 1.15

证明：过A、B、D三点作一圆O，则直线BC必与圆相交于另一点C'。假设点C'在B与C之间，连DC'，则$\angle A+\angle BC'D=2d$。而$\angle BC'D>\angle C$，$\therefore$ $\angle A+\angle C<2d$与假设矛盾。仿此，若点C'在BC边的延长线上，也同样得出矛盾。所以C与C'必重合。因而四边形$ABCD$内接于圆。

3.

14． **证明**：等腰三角形底边延长线上任一点到两腰距离之差为常量。

假设：P为等腰$\triangle ABC$底边BC延长线上任一点，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$。

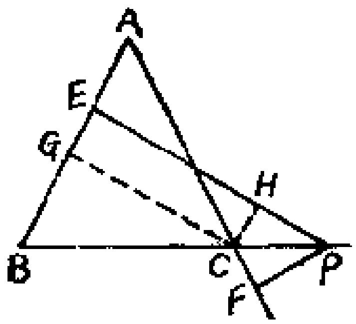


图 1.16

求证：$PE-PF=$常量。

证：过C作$CG\perp AB$，$CH\perp PE$，则$CHEG$为矩形，$\therefore CG=HE$。

在$\mathrm{rt}\triangle PHC$与$\mathrm{rt}\triangle PFC$中，PC公用，$\angle PCF=\angle ACB=\angle B=\angle PCH$，$\mathrm{rt}\triangle PHC\cong\mathrm{rt}\triangle PFC$，$PF=PH$。

$$PE-PF=PE-PH=HE=CG。$$

即 $PE-PF=CG$为常量。

4.

25. **证明**：从圆上一点到其内接四边形一双对边距离之积，等于从该点到两条对角线的距离之积。

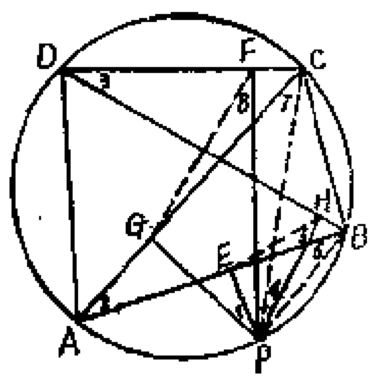


图1.31

已知：P为圆上一点。P到圆内接四边形$ABCD$一双对边AB、CD的距离为PE、PF，到两条对角线AC、BD的距离为PG、PH。

求证：$PE\cdot PF=PG\cdot PH$。

证：如图1.31所示，$\angle1=\angle2$（A、G、E、P共圆）；$\angle2=\angle3$（A、B、C、D共圆），$\angle3=\angle4$（D、F、H、P共圆），

$$\therefore \angle1=\angle4$$

$\angle5=\angle6$（P、E、H、B共圆），$\angle6=\angle7$（A、P、B、C共圆），$\angle7=\angle8$（P、G、F、C共圆），$\therefore$ $\angle5=\angle8$。

在$\triangle PFG$与$\triangle PHE$中，$\angle5=\angle8$，

$\angle GPF=\angle1+\angle EPF=\angle4+\angle EPF=\angle EPH$，

$\therefore \triangle PFG\backsim\triangle PHE$，

$PF:PH=PG:PE$，即$PE\cdot PF=PG\cdot PH$。

5.

39. 在$\triangle ABC$中，分别以AB和AC为一边向外作等边三角形ABD和ACE，求证$CD=BE$。

证：在$\triangle ACD$与$\triangle AEB$中（图1.50），$AD=AB$，AC

$=AE$，$\angle DAC=60°+\angle BAC$
$=\angle BAE$，

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle AEB$，

即 $CD=BE$。

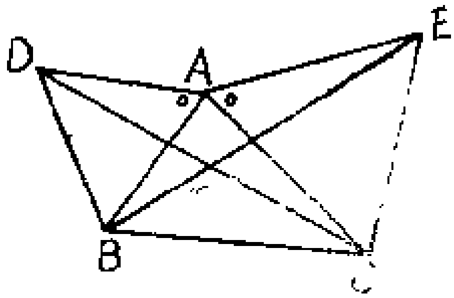


图 1.50

6.

40．在$\triangle ABC$中，证明BC边的中垂线和角A的平分线相交在外接圆周上，它们的交点距B、C两点，距内切圆心，距角A内的旁切圆心都等远。

对于角A的外角平分线证明类似的定理。

从此推证：三个旁切圆半径之和等于内切圆半径加4倍外接圆半径。

证：设$\angle A$、$\angle B$的平分线交于O点（图1.51），$\angle A$的平分线与$\angle ACB$的外角平分线交于O_a。因为$\angle 1=\angle 2$，所以$\angle A$的平分线必过$\overset{\frown}{BC}$的中点M，BC边的中垂线也过M，即$\angle A$的平分线与BC边的中垂线相交在外接圆周M点上。

$\therefore\ MB=MC$。 (1)

而 $\angle BOM=\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$
$=\angle MBC+\angle 4=\angle MBO$，

$\therefore\ MO=MB$。 (2)

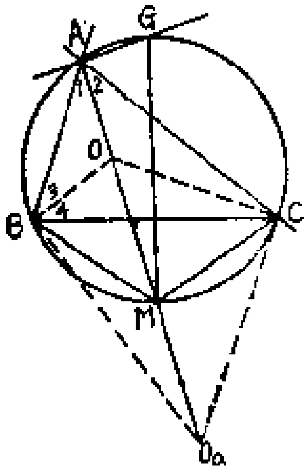


图 1.51

又$\triangle OBO_a$和$\triangle OCO_a$都是直角三角形，直角三角形斜边的点M满足(2)，故M为OO_a的中点。从而得结论。

M是$\angle A$的平分线与BC边中垂线的交点，以MG表$\triangle ABC$外接圆的直径（图1.51）。连AG，则$\angle MAG=d$（直径MG上的弓形角），而MA平分角A，所以AG平分角A

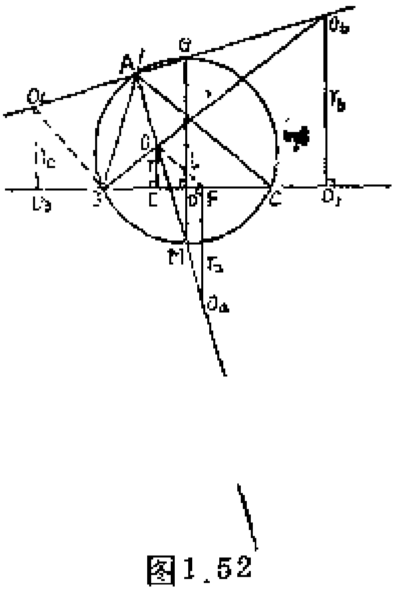


图1.52

的外角，即BC边的中垂线与角A外角的平分线相交在外接圆周点G上。

如图1.52所示。设$\triangle ABC$的内心为O，旁心为O_a、O_b、O_c，内切圆半径为r，三个旁切圆半径为r_a、r_b、r_c，外接圆半径为R。

由37题知$BD_3=CD_2$，又$BD=DC$，$\therefore$ $D_3D=DD_2$。因而D是D_2D_3的中点，从梯形$D_2O_bO_cD_3$知，G是O_bO_c的中点。

由于$BO_b\perp BO_c$，G是直角$\triangle BO_bO_c$斜边上的中点，故有$GC=GB=GO_b=GO_c$。

并且 $$GD=\frac{1}{2}(r_b+r_c).$$

又 $$\begin{aligned}GD&=GM-DM\\&=2R-(LM-LD)\\&=2R-\left(\frac{1}{2}r_a-\frac{1}{2}r\right).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(r_b+r_c)=2R-\left(\frac{1}{2}r_a-\frac{1}{2}r\right),$$

$$r_b+r_c=4R-r_a+r$$

$$\therefore\quad r_a+r_b+r_c=4R+r.$$

7.

42、 设四边形有一双对边相等，证明这两边（所在直线）跟另两边中点的连线的交角相等。

证：设四边形$ABCD$中（图1.54），$AB=CD$，E、F为BC、AD之中点。连EF与AB相交于H与CD相交于N。现在证明$\angle AHF=\angle FND$。

连AC，取AC的中点为G，连EG、FG，则

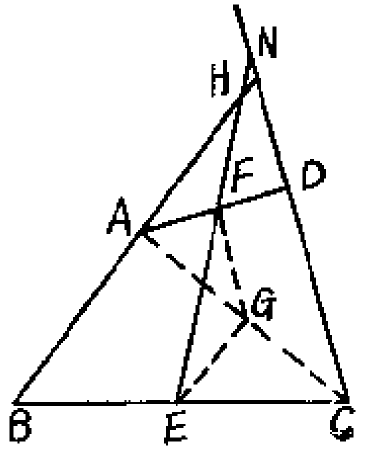


图 1.54

$$EG \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}AB, \quad FG \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}CD.$$

而 $\quad AB=CD$, $\therefore$ $EG=FG$.

即 $\quad \triangle GEF$为等腰三角形。所以

$$\angle AHF=\angle FEG=\angle EFG=\angle ENC$$
$$=\angle FND.$$

8.

43、 四边形$ABCD$中，设 $AD=BC$，且M、N是对角线AC、BD的中点，证明直线 AD、BC与MN成等角。

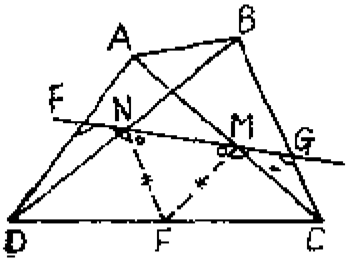


图 1.55

证：取CD之中点为E(图1.55)，连NE、ME，则

$ME \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}AD$, $NE \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BC$,

∵ $AD=BC$, ∴ $ME=NE$.

$$\underset{\text{(同位角)}}{\angle DFN = \angle EMG} = \underset{\text{(同位角)}}{\angle ENF = \angle CGM}.$$

∴ 直线AD、BC与MN成等角。

9.

58. 若I为$\triangle ABC$的内心，I_1为$\angle A$内的旁心，则

$\angle BIC = d + \frac{1}{2}\angle A$, $\angle BI_1C = d - \frac{1}{2}\angle A$.

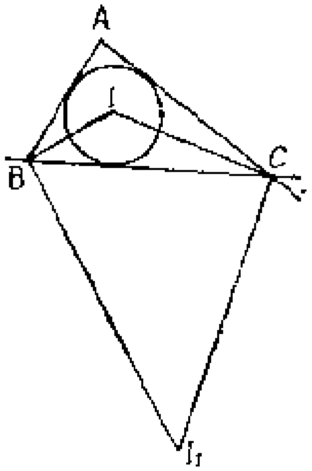


图 1.75

证：I为$\triangle ABC$的内心，I_1为$\angle A$内的旁心，∴ $BI\perp BI_1, CI\perp CI_1$。

$$\angle BIC=2d-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$
$$=2d-\frac{1}{2}(2d-\angle A)$$
$$=d+\frac{1}{2}\angle A.$$
$$\angle BI_1C=2d-\angle BIC$$
$$=2d-\left(d+\frac{1}{2}\angle A\right)$$
$$=d-\frac{1}{2}\angle A.$$

10.

60. 设G为$\triangle ABC$的重心，从各顶点及G向形外一直线引垂线AA'、BB'、CC'、GG'，则 $AA'+BB'+CC'=3GG'$。

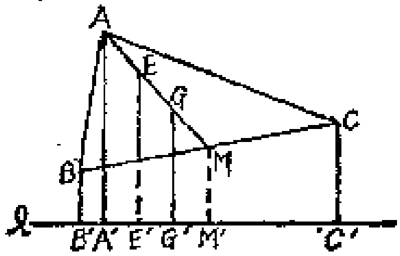


图 1.77

证：设M为BC中点，取AG中点为E（图 1.77），作EE'、$MM'\perp l$，由梯形中位线定理得

$$GG'=\frac{1}{2}(EE'+MM')$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(AA'+GG')+\frac{1}{2}(BB'+CC')\right]$$
$$=\frac{1}{4}(AA'+GG'+BB'+CC').$$
$$\therefore\ 3GG'=AA'+BB'+CC'.$$

11.

64. 设三角形的外心、重心，垂心分别为O、G、H，证明这三点共线，且$GH=2OG$.

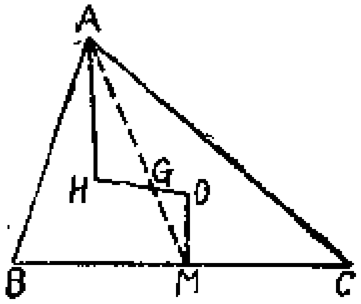


图 1.82

证：设$\triangle ABC$之BC边的中点为M，连AM与HO交于G'，$\because AH$、$OM\perp BC$，

$\therefore\quad \triangle AHG'\backsim\triangle MOG'$.

$$\frac{HG'}{OG'}=\frac{AG'}{MG'}=\frac{AH}{MO}=\frac{2}{1}$$（利用了§1.10例2）.

$\therefore$ G'与G重合，即H、G、O三点共线，并且$GH=2OG$.

12.

91. 设BE、CF是$\triangle ABC$的高，在射线BE上截$BP=AC$，在射线CF上截$CQ=AB$，证明AP与AQ相等且垂直.

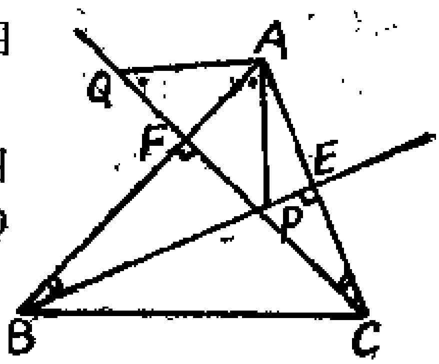


图 1.110

证：在$\triangle AQC$与$\triangle PAB$中（图1.110），$QC=AB$，$AC=PB$，$\angle ACQ=\angle ECF=\angle EBF=\angle PBA$，

$\therefore\quad \triangle AQC\cong\triangle PAB$，因而$AQ=PA$，$\angle AQC=\angle PAB$.

$\angle QAP=\angle QAF+\angle FAP=\angle QAF+\angle AQF=d$，

从而$AQ\perp AP$.

13.

93． AD、BE、CF 是$\triangle ABC$的高线，从垂足D引$DM\perp BE$于M，引$DN\perp CF$于N。求证$MN\parallel EF$

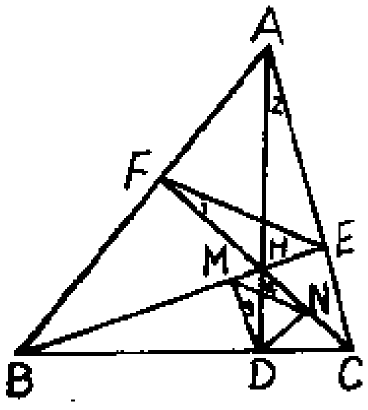


图 1.112

证：设$\triangle ABC$的垂心为H。

$\because$ A、F、H、E共圆，$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$。H、M、D、N共圆，$\angle 3=\angle 4$。而DM、$CE\perp BE$，$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$，从而$\angle 1=\angle 4$，即$MN\parallel FE$。

14.

100． **证明**：三角形的三条外角平分线和对边相交所得三点共线。

证：设$\triangle ABC$的三条外角平分线和对边相交于点X、Y、Z，由角平分线性质有：

$$\frac{XB}{XC}=\frac{AB}{AC},$$

$$\frac{YC}{YA}=\frac{BC}{AB},$$

$$\frac{ZA}{ZB}=\frac{AC}{BC}.$$

以上三式相乘即得

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1.$$

$\therefore$ X、Y、Z三点共线。

15.

101． 设I是$\triangle ABC$的内切圆心，E、F各是AB、AC上的切点；又作$BG\perp CI$于G，$CH\perp BI$于H。求证四点E、F、G、H共线。

证：连GE、EF（图1.121），$\because$ G、B、I、E共圆，$\therefore$ $\angle GEB=\angle GIB$。连IA交EF于N，则

$$\angle AEN=d-\frac{1}{2}\angle A. \qquad (1)$$

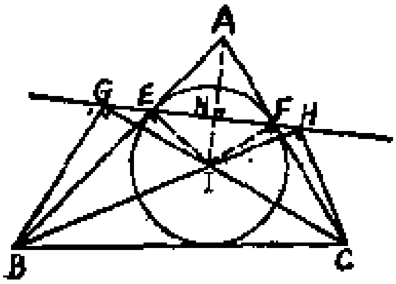


图 1.121

$$\angle BIC=2d-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

$$=2d-\frac{1}{2}(2d-\angle A)$$

$$=d+\frac{1}{2}\angle A.$$

$$\therefore \angle BIG=2d-\angle BIC=2d-\left(d+\frac{1}{2}\angle A\right)$$

$$=d-\frac{1}{2}\angle A. \qquad (2)$$

由(1)、(2)知$\angle AEN=\angle BIG$，而$\angle BIG=\angle BEG$，$\therefore$ $\angle AEN=\angle BEG$。又A、E、B共线，$\therefore$ G、E、F三点亦共线。

同理可证E、F、H也共线。

从而四点E、F、G、H共线。

16.

121. 在$\triangle ABC$各边上向外作三个等边三角形$A'BC$、$B'CA$、$C'AB$。

（1） 证明这三个三角形的外接圆共点；

（2） 证明三直线AA'、BB'、CC'共点；

（3） 证明$AA'=BB'=CC'$。

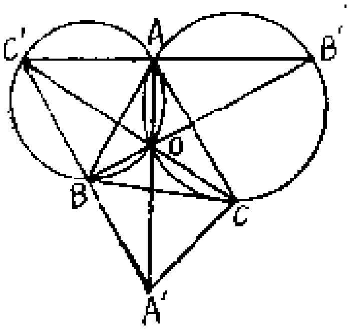


图 1.147

证：(1)设$\triangle B'CA$与$\triangle C'AB$的外接圆除A以外的另一交点为O（图1.147），连OA、OB、OC。

$\because A$、O、C、B'四点共圆，

而$\angle AB'C=60°$，$\therefore \angle AOC=120°$。

同理$\angle AOB=120°$，因而$\angle BOC=120°$。又$\angle BA'C=60°$，所以B、O、C、A'四点共圆。即$\triangle A'BC$、$\triangle B'CA$、$\triangle C'AB$的外接圆共点。

（2） 连OA'，$\because \angle AOB=120°$，$\angle BOA'=\angle BCA'=60°$，$\therefore \angle AOB+\angle BOA'=120°+60°=180°$。即$A$、$O$、$A'$三点共线。

同理可证B、O、B'；C、O、C'也分别共线。

$\therefore$三直线AA'、BB'、CC'共点。

（3） 在$\triangle ABB'$与$\triangle AC'C$中，$AB=AC'$，$AB'=AC'$

$\angle BAB'=\angle BAC+\angle CAB'=\angle BAC+60°=\angle BAC+\angle BAC'=\angle C'AC$，

$\therefore \triangle ABB'\cong\triangle AC'C$，由此得$BB'=CC'$。（或者说，$\triangle ABB'$和$\triangle AC'C$可以用$A$为旋转中心，旋转60°，就互相重合。）

同理可证$AA'=BB'$。

$\therefore AA'=BB'=CC'$。

17.

126． 证明：外离两圆的两条内公切线在外公切线上所截取的线段等于内公切线，而内公切线介于两条外公切线间

的线段等于外公切线。

已知：外离两圆 O 和 O'（图1.152），两条外公切线为 AA'、BB'，两条内公切线为 EE'、FF'，切点分别为 A、B、E、F 和 A'、B'、E'、F'. 两条内公切线与外公切线相交于四点 C、D'、C'、D.

求证：(i) $C'D=EE'$；(ii) $AA'=DD'$.

证(i)：如图1.152所示

$$AA'=AD+DA'=AD+DE'$$
$$=AD+(DE+EE')$$
$$=2AD+EE',$$

$\therefore EE'=AA'-2AD$. (1)

同理 $EE'=AA'-2C'A'$. (2)

(1)+(2) $2EE'=2(AA'-AD-C'A')=2DC'$,

$\therefore C'D=EE'$.

(ii)：
$$2AA'=AA'+BB'$$
$$=(AD+DA')+(BD'+D'B')$$
$$=DE+DE'+ED'+E'D'$$
$$=DD'+DD'=2DD',$$

$\therefore AA'=DD'$.

18.

129. 圆内接四边形中 $BC=CD$，求证

$$AB\cdot AD+BC^2=AC^2$$

证：连 AC、BD，设 AC、BD 相交于 P，则 $\angle ADB=\angle ACB$，$\angle BAC=\angle BDC=\angle CBD=\angle CAD$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle APD$,

$$AB:AP=AC:AD,$$
$$AB\cdot AD=AC\cdot AP. \quad (1)$$

又 $\triangle ABC\backsim\triangle BPC$,

$\therefore AC:BC=BC:PC$

$$BC^2=AC\cdot PC \quad (2)$$

(1)+(2)　$AB\cdot AD+BC^2=AC(AP+PC)=AC^2$.

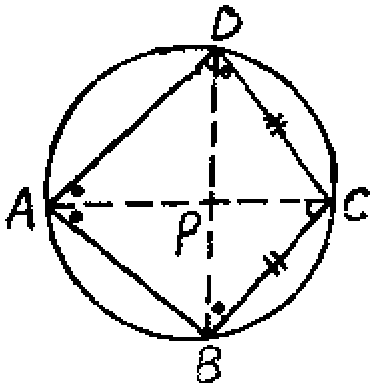


图 1.154

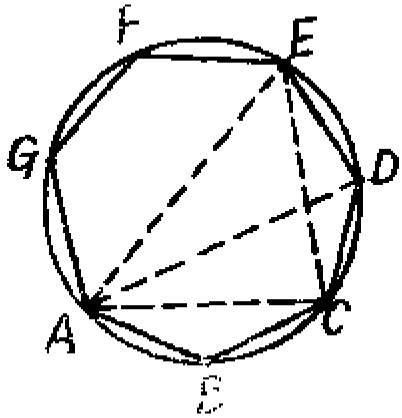


图 1.155

19.

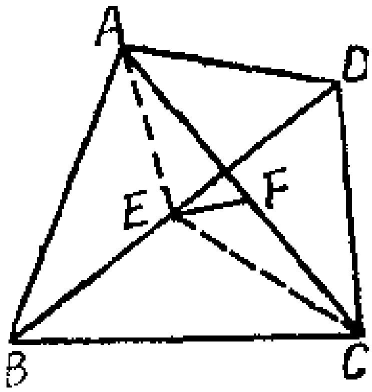


图 1.160

135. **证明：在任意四边形中，各边的平方和等于两对角线的平方和加上 4 倍对角线中点连线段的平方。**

证：设 E、F 分别是四边形 $ABCD$ 对角线 BD、AC 的中点（图 1.160），连 AE、EC，利用三角形的中线公式：

在$\triangle ABD$中，$AE^2=\frac{1}{2}(AB^2+DA^2)-\frac{1}{4}BD^2$.　(1)

在$\triangle BCD$中，$CE^2=\frac{1}{2}(BC^2+CD^2)-\frac{1}{4}BD^2$.　(2)

在$\triangle AEC$中，$EF^2=\frac{1}{2}(AE^2+CE^2)-\frac{1}{4}AC^2$,

即
$$2AE^2+2CE^2-AC^2=4EF^2 \qquad (3)$$

把(1)、(2)代入(3)整理得

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$.

20.

4． 给定两点A、B，l为通过A的动直线，则点B关于直线l的对称点的轨迹是一个圆，即以A为中心以AB为半径的圆。

证明：因B点关于过A、B之直线的对称点就是B点自身，故点B在轨迹上。

1°设l为过A的任一直线，B'是B关于l的对称点（图2.4）。则$AB'=AB$，即B'在$\odot A(AB)$上。

2°设B'为$\odot A(AB)$上任一点，则$AB'=AB$，故A在BB'的中垂线l上，所以B'是B关于这条因B'而变但总是通过A的直线l的对称点，即点B'合于条件。

由1°、2°可以断定，所求轨迹是$\odot A(AB)$。

21.

6． $\triangle ABC$中底边BC固定，顶角A等于定角α，求证$\triangle ABC$的内心的轨迹是对称于BC的两个圆弧，以BC为弦且其内接角等于$d+\dfrac{\alpha}{2}$。

证明：设I为$\triangle ABC$的内心（图2.6），连BI，CI，则

$$\angle BIC=2d-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$$
$$=2d-(2d-\angle BAC)$$
$$=d+\frac{\alpha}{2}。$$

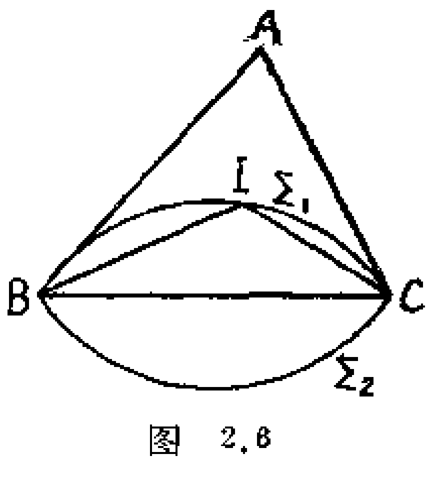


图 2.6

由于$\triangle ABC$的顶点A可能在固定边BC所在直线的两侧，故内心I就必须在对称于BC，且以BC为弦，内接角为$d+\dfrac{\alpha}{2}$的两个圆弧Σ_1与Σ_2之一上，即合于条

件的点I在圆弧Σ_1或圆弧 Σ_2上。

反之，不失一般性，设 I 为圆弧 Σ_1 上任一点，连BI，CI，作BC关于BI的对称线BA，再作 BC 关于CI 的对称线CA，两线必须交于一点A（这是因为$\angle IBC+\angle ICB=2d-\left(d+\frac{\alpha}{2}\right)=d-\frac{\alpha}{2}$，而$2\left(d-\frac{\alpha}{2}\right)=2d-\alpha<2d$），显见$I$为所作$\triangle ABC$的内心。

又在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=2d-(\angle ABC+\angle ACB)$

$$=2d-2\left(\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB\right)$$

$$=2d-2\left[2d-\left(d+\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\alpha$$

因而在圆弧Σ_1或Σ_2上的点I合于所设条件。

由以上证明，我们断定所求轨迹是圆弧 Σ_1 和圆弧 Σ_2的并集。

22.

7．▱$ABCD$的底边BC固定，且一边 AB为定长a，则其对角线交点的轨迹为一圆，圆心是 BC 的中点，半径是$\frac{a}{2}$。

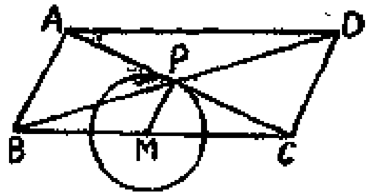


图 2.7

证明：设M为 BC 的中点，P为▱$ABCD$两对角线 AC，BD之交点（图2.7），连 PM，则 PM为$\triangle ABC$之中位线，于是

$$PM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a\text{（定长）。}$$

由于BC固定，从而它的中点M亦固定，又因$\square ABCD$的AD边可位于固定边BC所在直线的两侧，因此，P点在以M为心，$\frac{1}{2}a$为半径的圆周上，即合于条件的点P在$\odot M\left(\frac{a}{2}\right)$上。

反之，设P为$\odot M\left(\frac{a}{2}\right)$上任一点，连$BP$延长至$D$，使$PD=BP$，连$CP$延长至$A$，使$PA=CP$，连$BA$，$AD$，$DC$，易证$ABCD$为平行四边形，其底边$BC$固定，且$P$为对角线之交点，连$PM$，在$\triangle ABC$中，$PM \perp \frac{1}{2}AB$，从而$AB=2\cdot PM=2\cdot\frac{a}{2}=a$（定长），于是我们证明了$\odot M\left(\frac{a}{2}\right)$上的点$P$合于所设条件。

23.

8．$\triangle ABC$底边BC固定，顶角A等于α，则$\triangle ABC$重心的轨迹是两个圆弧，以BC的两个三等分点的连线段为弦，且内接角等于α。

证明：设G为$\triangle ABC$的重心，M和N为固定边BC上的两个三等分点（图2.8）。连AG交固定边BC于D，则D为BC之中点。由于M为线段BD上靠近点D的一个三等分点，N为线段DC上靠近点D的一个三等分点，连GM，GN，在$\triangle DAB$中，$DM:DB=DG:DA=1:3$，故而$GM \parallel AB$，同

理可证，$GN \parallel AC$，于是

$$\angle MGN=\angle BAC=\alpha。$$

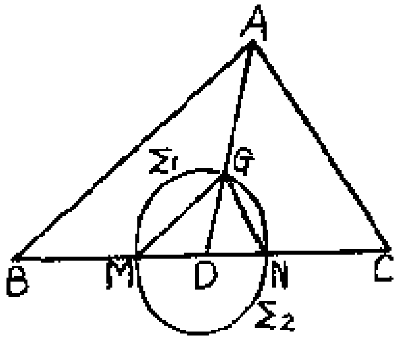


图2.8

因为$\triangle ABC$的顶点A可能在固定边BC所在直线的两侧，所以重心G就必须在对称于BC，且以MN为弦，内接角为α的两个圆弧Σ_1与Σ_2之一上，即合于条件的点G在圆弧Σ_1或圆弧Σ_2上。

反之，不失一般性，设G为圆弧Σ_1上任一点，连DG延长至A，使$DA=3\cdot DG$，连AB，AC，则G为$\triangle ABC$之重心。

对$\triangle DAB$而言，因为$DA=3\cdot DG$，$DB=3\cdot DM$，故有$GM \parallel AB$。同理可得$GN \parallel AC$，从而$\angle BAC=\angle MGN=\alpha$。

所以圆弧Σ_1（或圆弧Σ_2）上的点G合于所设条件。

到此我们断定所求轨迹是圆弧Σ_1和圆弧Σ_2的并集。

24.

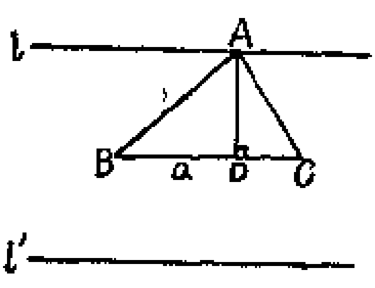
12. 同底等积的各三角形顶点所成轨迹，是平行于公共底边的两直线。

这个命题与下面的命题等效：

设$\triangle ABC$的底边BC固定，且其面积等于常量S，则顶点A的轨迹是平行于BC的两条直线l和l'。

我们通过探求来确定l，l'距直线BC之距离。

探求： 若点A合于条件，则$S_{\triangle ABC}=S$，且BC有固定的位置和长度a(图2.12)，过A作$AD\perp$直线BC于D，则



$\frac{1}{2}AD\cdot BC=S$，故有

$$AD=\frac{2}{BC}S=\frac{2S}{a}\quad（定长）$$

因为合于条件的点A可以在直线BC的两侧，所以点A在平行于直线

图 2.12　　BC的两条直线l或l'上，l与l'各在直线BC的一侧，且距BC的距离等于定长$\frac{2S}{a}$。

证明： 1°完备性的证明见探求部分，合于条件的点A在直线l或l'上。

2° 证纯粹性。在直线l（或l'）上任取一点A，连AB，AC，过A作$AD\perp$直线BC于D，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AD\cdot BC=\frac{1}{2}\left(\frac{2S}{a}\right)\cdot a=S\text{（常量）}$$

即l或l'上的任一点A合于所设条件。

所以点A的轨迹是直线l和l'的并集。

25.

13．定圆内定长的弦的中点的轨迹是定圆的一个同心圆。

设定圆$O(r)$内，长度为定长$2a$的弦AB之中点为M，已知M点的轨迹是$\odot O(r)$的一个同心圆，下面来确定这个同心圆的半径。

探求： 若点M合于条件，连OA，OM（图 2.13），则$OM\perp AB$，在$Rt\triangle OMA$中，

$$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{r^2-a^2}=k\text{（定长）}$$

从而点M在$\odot O(k)$上。

证明： 1°完备性的证明见探求部分。

2° 证纯粹性．在$\odot O(k)$上任取一点M，由于$r>\sqrt{r^2-a^2}=k$，则M点在$\odot O(r)$内部，过M作$\odot O(k)$之切线交$\odot O(r)$于A、B两点，连OA，OM，有$OM\perp AB$。于是M是AB中点。且$AB=2AM=2\sqrt{AO^2-OM^2}=2\sqrt{r^2-k^2}=2a=$定长。即在$\odot O(k)$上的任一点$M$合于所设条件。

所以点M的轨迹是$\odot O(k)$。

26.

14． 定圆内一组平行弦中点的轨迹是一条直径。

解： 设以AB代表定圆O内有固定方向l的一组平行弦中的任一条弦，M是AB的中点，下面来确定点M所在直径的位置。

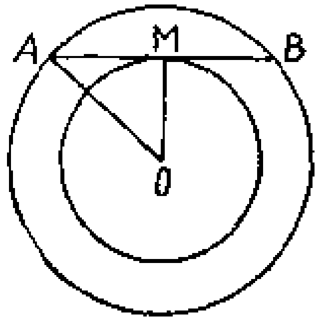


图 2.13

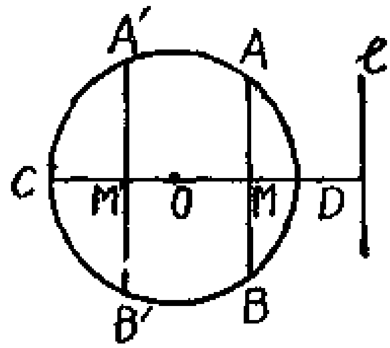


图 2.14

弦AB的中点M与圆心O的连线$OM\perp AB$，即$OM\perp l$。所以这组平行弦的中点只能落在与l垂直的定直径CD上(图2.14)。

反之，设M'为直径CD上任一点，过M'引弦$A'B'\parallel AB\parallel l$，则$OM'\perp A'B'$，$M'$是$A'B'$的中点。

到此我们断定，所求的轨迹是圆O的一条定直径CD。

27.

16． 设一点至两已知相交线距离之比为常数，则该点的轨迹是两条直线。

设AB，CD是两已知相交直线，O为交点，$\frac{n}{m}$为常数。

探求： 若P为$\angle BOD$(或$\angle BOD$对顶角)区内合于条件

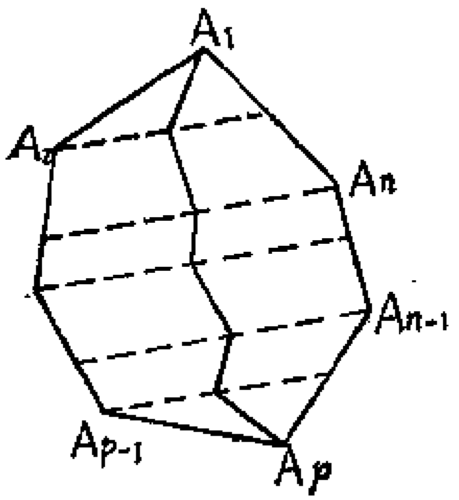


图 2.15

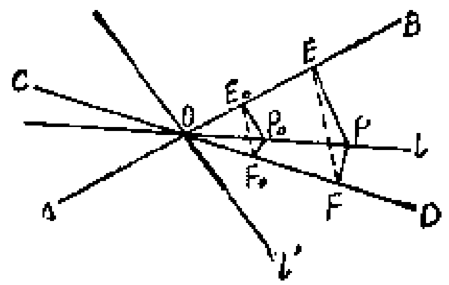


图 2.16

的任一点，即P到AB的距离PE与它到CD的距离PF之比$\frac{PE}{PF}=\frac{n}{m}$（图 2.16），为了确定$P$点的轨迹，我们在$\angle BOD$角区内作出一定点$P_0$，使得$P_0$到$AB$之距离$P_0E_0$与它到$CD$之距离$P_0F_0$之比$\frac{P_0E_0}{P_0F_0}=\frac{n}{m}$，不难证明，$P$，$P_0$之连线通过$O$点，即点$P$在线段$OP_0$所在定直线$l$上。为此，连$EF$，$E_0F_0$，因为$\frac{PE}{PF}=\frac{n}{m}=\frac{P_0E_0}{P_0F_0}$ 或$PE:P_0E_0=PF:P_0F_0$，则

$\triangle PEF\backsim\triangle P_0E_0F_0$（$\angle EPF$和$\angle E_0P_0F_0$同与$\angle BOD$相等或（或互补）。

由此得 $EF\parallel E_0F_0$，从而$\triangle OEF\backsim\triangle OE_0F_0$

则有 $OE:OE_0=PE:P_0E_0$，连OP，OP_0，则因$\angle OEP=\angle OE_0P_0=d$，又推得$\triangle OEP\backsim\triangle OE_0P_0$，故而$\angle EOP=\angle E_0OP_0$，即$OP$与$OP_0$相重合，于是$P$点在$O$、$P_0$的连线$l$上。

如果一点Q在与$\angle BOD$互补的角区内合于条件，同样可证得Q点在过O的一条定直线l'上。

证明：完备性的证明见探求。

反之，不失一般性，设在 l 上任取一点P，过P作 $PE\perp AB$于E，$PF\perp CD$于F，显见

$$\triangle OPE\backsim\triangle OP_0E_0,$$

$$\triangle OPF\backsim\triangle OP_0F_0$$

所以 $PE:P_0E_0=OP:OP_0=PF:P_0F_0$

从而 $PE:PF=P_0E_0:P_0F_0=n:m$

即P点合于所设条件。

所以所求的轨迹是两直线 l 和l'的并集。

"注" 在解题过程中我们早就注意到O点至两已知相交直线的距离同时为零，$\frac{0}{0}$可以等于任何数，当合于条件的点P无限接近O点时，命题的结论成立。在此，我们把点 O 视为轨迹上的一个极限点。可注意当 $m=n$ 时，就得出我们最熟悉的情况。

28.

17．设一点至两已知相交线距离之和为常数，则该点的轨迹是一个矩形的周界。

设 a，b 是两已知相交直线，O为交点，k 为常数。

探求：首先我们看出a，b直线上各有两点 B，D 与 A，C 合于条件，即a上的两点 B，D 到b的距离与 b 上的两点A，C到a的距离都等于常数 k (图2.17)，于是A，B，C，D是轨迹上的四个特殊点。

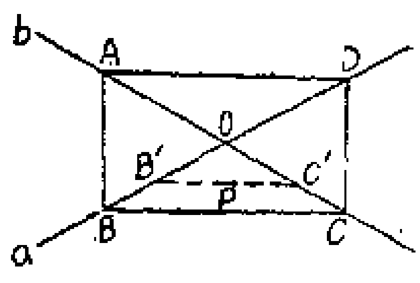


图 2.17

其次，连 AB，BC，CD，DA，因 A，C 到直线 a 的距离相等，利用合同三角形的性质，容易证得$OA=OC$，同理可证$OB=OD$，故$ABCD$为平行四边形。再因点 A 到直线 a

的距离等于点 B 到直线 b 的距离，利用合同三角形的性质，又可证得$OA=OB$，从而有$BD=AC$。因此，$ABCD$ 是一个矩形，下面证明这个矩形就是所求的轨迹。

证明：设在矩形$ABCD$的周界BC上任取一点P，于是对等腰$\triangle OBC$而言，P 点到两腰距离之和等于常数 k（第一章1.6 节例2），即P点合于所设条件。

反之，设P是不在矩形$ABCD$ 周界上的任一点，比方说P在$\triangle OBC$内部。过B作$B'C' \parallel BC$交 a 于B'交 b 于C'，对于$\triangle OB'C'$而言，显见P点到两腰距离之和小于常数k。仿此，P在$\angle BOC$角区内且位于$\triangle OBC$外部时，P到 a、b 距离之和大于常数k。这就是说，不在矩形$ABCD$周界上的任一点 P，不合于所设条件。

由以上证明我们断定，所求轨迹是矩形 $ABCD$ 的周界。

29.

18． 设定圆中互相垂直的两弦的平方和是常数，则此两弦所在直线交点的轨迹是一圆。

设AB、CD是定圆$O(r)$ 中互相垂直的两弦（图 2:18），$AB^2+CD^2=4k^2$（常数）。

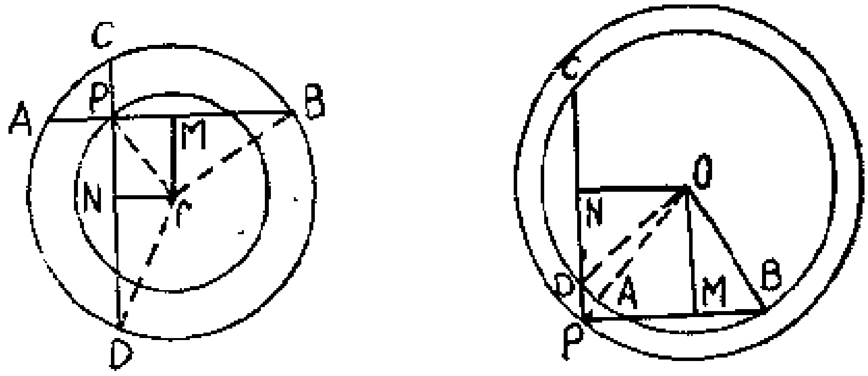


图 2.18

探求：若点P合于条件，P为两弦AB，CD之交点。作$OM\perp AB$于M，$ON\perp CD$于N，则M，N分别为弦AB，CD之中点。连OP，OB，OD，因$\triangle OBM$和$\triangle ODN$都是直角三角形，故

$$OM^2=OB^2-MB^2 \qquad ON^2=OD^2-ND^2$$

$$=r^2-\frac{1}{4}AB^2 \qquad\qquad =r^2-\frac{1}{4}CD^2$$

于是 $$OP^2=OM^2+ON^2=\left(r^2-\frac{1}{4}AB^2\right)$$

$$+\left(r^2-\frac{1}{4}CD^2\right)=2r^2-\frac{1}{4}(AB^2+CD^2)=2r^2-k^2$$

即合于条件的点P在一个定圆$O(\sqrt{2r^2-k^2})$上。

证明：1° 完备性的证明已在探求中完成。

2° 证纯粹性，在$\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$上任取一点P，过P作互垂两直线分别交$\odot O(r)$于A，B及C，D，则AB，CD为$\odot O(r)$内互垂两弦，作$OM\perp$弦AB于M，$ON\perp$弦CD于N，则M，N为两弦之中点。连OP，OB，OD，因$\triangle OBM$和$\triangle ODN$都是直角三角形，故

$$OM^2=r^2-\frac{1}{4}AB^2,\quad ON^2=r^2-\frac{1}{4}CD^2$$

于是有 $$2r^2-k^2=OP^2=OM^2+MP^2=OM^2+ON^2$$

$$=r^2-\frac{1}{4}AB^2+r^2-\frac{1}{4}CD^2=2r^2$$

$$=\frac{1}{4}(AB^2+CD^2)$$

所以 $AB^2+CD^2=4k^2$，即P点合于所设条件.

由 1°，2° 断定所求的轨迹是 $\odot O(r)$ 的一个同心圆 $\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$.

讨论：（一）当$r>\frac{|k|}{\sqrt{2}}$时，轨迹为 $\odot O(r)$ 的一个同心圆 $\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$，这里，又分两种情况：

（1） 当$\sqrt{2r^2-k^2}>r$，即$r>|k|$时，$\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$在$\odot O(r)$的外部；

（2） 当$\sqrt{2r^2-k^2}<r$，即$r<|k|$时，$\odot O(\sqrt{2r^2-k^2})$在$\odot O(r)$的内部.

（二） 当$r=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$时，轨迹是一个孤立点 O.

（三） 当$r<\frac{|k|}{\sqrt{2}}$时，轨迹不存在.

“注” 对本题纯粹性的证明，读者可能会提出下面的疑问：当$O<|k|<r$ 时，$\sqrt{2r^2-k^2}>r$，此时点 P 在$\odot O(r)$的外部，在这种情况下，过P 点所作互垂两线是否一定都与$\odot O(r)$相交？倘若过 P 点所作$\odot O(r)$ 的两切线间的夹角为锐角（或为直角），那末，过 P 点而又互垂的两直线要都与$\odot O(r)$相交，是不可能的．因此，必须确认两切线间的夹角为钝角．但这个问题的答案是完全肯定的，请读者自己想想看.

21． 设一圆与两定圆相交，交点各为定圆直径的端点，求此圆中心的轨迹。

探求：若点P合于条件，即$\odot P$交两定圆$\odot O(r)$与$\odot O'(r')$于A，B和A'，B'，AB与$A'B'$分别为$\odot O(r)$与$\odot O'(r')$之直径，故$PO\perp AB$，$PO'\perp A'B'$，过P作连心线OO'之垂线l，以D表垂足（图2.21）。则$\triangle OPD$，$\triangle O'PD$，$\triangle OPA$，$\triangle O'PA'$都是直角三角形。

故
$$PO^2-OD^2=PD^2=PO'^2-O'D^2$$
$$PA^2-r^2-OD^2=PA'^2-r'^2-O'D^2$$

由此得
$$\begin{aligned}r'^2-r^2&=OD^2-O'D^2\\&=OD^2-(OO'-OD)^2\\&=2\cdot OO'\cdot OD-OO'^2\end{aligned}$$

所以
$$OD=\frac{OO'^2+r'^2-r^2}{2\cdot OO'}\quad（常数）$$

这表明点D是连心线OO'上的一个定点，因此合于条件的点P在通过OO'上之定点D且垂直于OO'之直线l上。

证明：完备性的证明见探求。

反之，在l上任取一点P，连OP，过O作OP的垂线交$\odot O(r)$于A，B两点，显见AB为$\odot O(r)$的一条直径，且有$PA=PB$，仿此，作$\odot O'(r')$内的一条直径$A'B'$，亦有$PA'=PB'$.

由 $OD=\dfrac{OO'^2+r'^2-r^2}{2\cdot OO'}$ 推得$OD^2-O'D^2=r'^2-r^2$

于是
$$\begin{aligned}PA^2=PO^2+OA^2&=OD^2+PD^2+r^2\\&=OD^2+PO'^2-O'D^2+r^2\end{aligned}$$

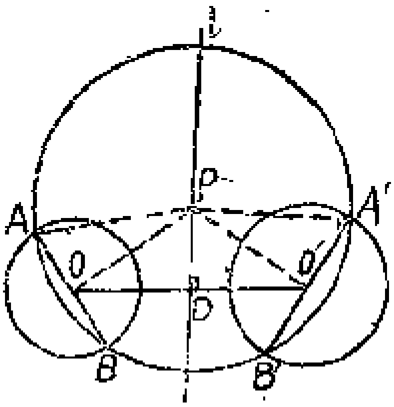


图 2.21

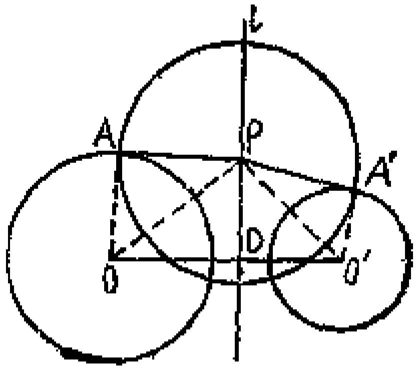


图 2.22

$$=r'^2+PO'^2=PA'^2$$

故得$PA=PA'$，从而$PB=PA=PA'=PB'$，这表明A，B，A'，B'四点在以P为中心的圆周上．即点P合于条件．

所以轨迹是垂直于连心线OO'的一条直线l．

31.

3． 给定直线l上一点A及l外一点B，求l上一点P使PA与PB之和或差等于定长．

解：在直线l上取一点C，使$AC=k$（定长）．如果一点P在l上满足条件

$PA+PB=k$或$PA\sim PB=k$，那末

P点一方面在直线l上，另一方面又在线段BC的中垂线m上，即P是l与m之交点．由是可分为以下五种情况：

1°若C在A、P之间（图3.2），则

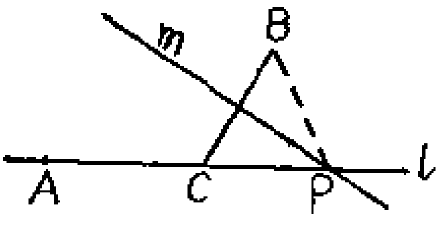


图 3.2

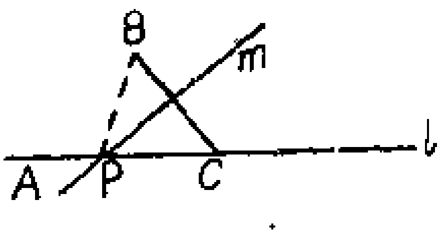


图 3.3

$$PA-PB=PA-PC=AC=k.$$

2°若P在A、C之间（图3.3），则

$$PA+PB=PA+PC=AC=k.$$

3° 若A在P、C之间（图3.4），则

$$PB-PA=PC-PA=AC=k.$$

4° 若P与A相重合（图3.5），则 $PB+PA=AC+0=k$

或 $$PB-PA=AC-0=k.$$

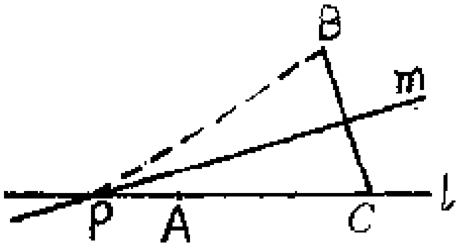


图 3.4

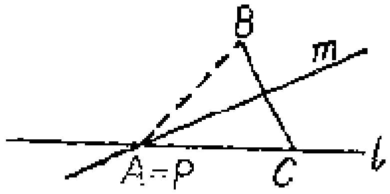


图 3.5

5° 若m平行于l（图3.6），因C在A的两旁各有一个，设C'在l上关于点C在A的异侧，且有$AC'=AC=k$，这时，$C'B$之中垂线m'必与l相交于一点P'，而P'与A、C的位置关系属于上面四种情况之一。

由于有两个C点，故本题总会有一解。

32.

4． 在定△ABC的边BC上求一点，使距余二边距离之和为定长。

分析：设问题已解（图3.7），P点在△ABC的边BC上，

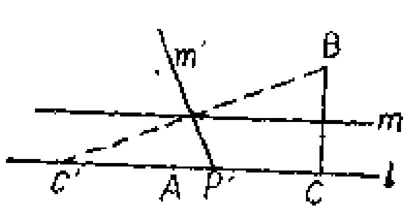


图 3.6

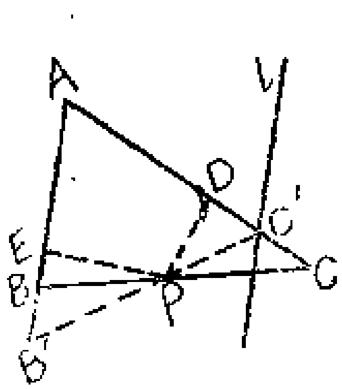


图 3.7

$PD\perp AC$于D，$PE\perp AB$于E，且$PD+PE=$定长k。由第二章第17题知，P点的轨迹是以$\angle A$为顶角，一腰上的高为定长k的等腰三角形的底边。

作法：在AB边的一侧作平行于AB且有定距离k的直线l，交AC于C'，在射线AB上取点B'，使$AB'=AC'$，连$B'C'$与BC边之交点P即为所求。

证明：由作法知$\triangle AB'C'$为等腰三角形，且腰上的高等于定长k，P为$B'C'$与BC之交点，故点P距AC，AB距离之和为k(第一章1.6节例2)，所以P点合于所设条件。

讨论：当$B'C'$与BC边相交时，有一解。否则无解；

当$B'C'$与BC边重合时，有无数多个解。

33.

5．在定$\triangle ABC$的边BC上求一点，从这点引余二边的平行线，使与余二边交成的平行四边形的周长为定长。

分析：设问题已解(图3.8)，P为BC边上合于条件的一点，$PE\parallel AC$交AB于E，$PF\parallel AB$交AC于F，且$\square AEPF$之周长为$2p$(定长)，由第二章第29题得知P点的轨迹是以$\angle A$为顶角，腰长为p的一个等腰三角形的底边．由此得

作法：在射线AB和AC上，分别取B'和C'，使$AB'=AC'=p$，连$B'C'$与BC边交于所求点P。

证明：作平行四边形$AEPF$(E、F分别在AB和AC上)，因$\angle EB'P=\angle AC'B'=\angle EPB'$，可见$\triangle EB'P$等腰，$EB'=EP$，仿此，有$FP=FC'$。所以

$$\begin{aligned}\square AEPF\text{之周长}&=AE+EP+PF+FA\\&=AE+EB'+C'F+FA\\&=AB'+AC'=p+p=2p。\end{aligned}$$

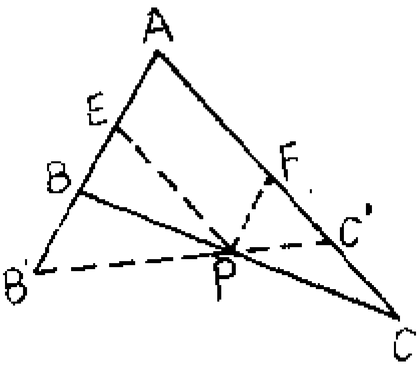


图 3.8

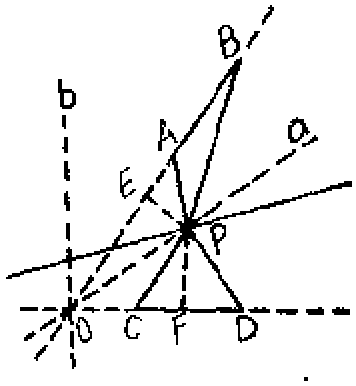


图 3.9

讨论：与上题完全一样.

34.

6. 给定两线段AB，CD及一直线l，在l上求一点P，使$\triangle PAB$与$\triangle PCD$等积.

分析：在一般情况下，在此，不妨假设两给定线段AB' CD所在直线相交于O。若一点P在l上合于条件：

$$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$$

作$PE\perp$直线AB于E，$PF\perp$直线CD于F(图3.9)

则有 $\frac{1}{2}PE\cdot AB=S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}PF\cdot CD$

即 $PE:PF=CD:AB$（定比）

根据第二章第16题，P点的轨迹是通过点O的两条直线.

作法：作距直线AB与CD距离之比为$CD:AB$的点的轨迹——过点O的两条直线a和b。如果直线a与l相交于P，则P就是所求作的点.

证明：作$PE\perp$直线AB于E，$PF\perp$直线CD于F，因P在l上，亦在a上，故$PE:PF=CD:AB$，得

$$PE=\frac{PF\cdot CD}{AB}$$

于是 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}PE\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{PF\cdot CD}{AB}\cdot AB=\frac{1}{2}PF\cdot CD$

$=S_{\triangle PCD}$。

所以点P合于所设的条件。

讨论：(一)直线AB与直线CD相交于O

1°l不通过点O，而a与b都和l相交时，两解；a与b中有一条与l相交时，一解。

2°l通过点O，且不与a，b中的任一条相重合，这时可将点O视为点P，两三角形的面积同时为零，一解；l与a，b中的任一条相重合时，无数多个解。

(二) 若$AB\parallel CD$，此时，P点的轨迹是与AB，CD都平行的一条直线l'，当l'与l相交时，一解；l'与l平行时，无解；l'与l重合时，无数多个解；l与AB，CD之一重合时，无解。

(三) 若AB与CD共线，且与l重合时，无数多个解。

(四) 若AB与CD共线（$AB\neq CD$），且与l相交时，一解。

(五) 若AB与CD共线（$AB\neq CD$），且与l平行时，无解。

(六) 若AB与CD共线，且$AB=CD$时，无数多个解。

35.

7．在定圆中求内接三角形，使其一边有定长，余二边各通过圆内一定点。

已知：k为定长，E，F为定圆O内二定点。

求作：圆O的内接$\triangle ABC$，使AB，AC分别通过二定点E，F，且$BC=k$。

分析：设图已作成(图3.10)，因弦$BC=k$，故而$\angle BAC$=定角α，即点A视定线段EF之视角为α。

作法：连EF，作以EF为弦，内接角为定角α的圆弧Σ，设Σ与圆O交于A点，连AE，AF分别交圆O于B，C，则$\triangle ABC$为所求。

证明：由作图知$\triangle ABC$内接于圆O，且AB，AC两边分别通过定点E，F，因$\angle BAC=\angle EAF=\alpha$，从而$BC=k$。所以$\triangle ABC$合于所设条件。

讨论：有解的条件为$EF<k<$圆O的直径，在此前提下，有解无解和解的个数，决定于Σ与圆O有无公共点以及有多少个公共点，因圆弧Σ可以画在EF的两侧，所以解答数是0到4。

36.

8．求作已知扇形的内切圆。

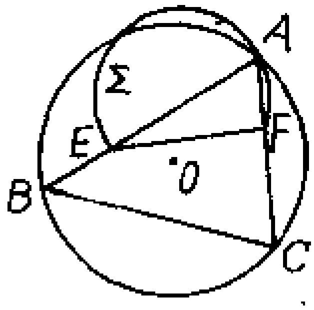


图 3.10

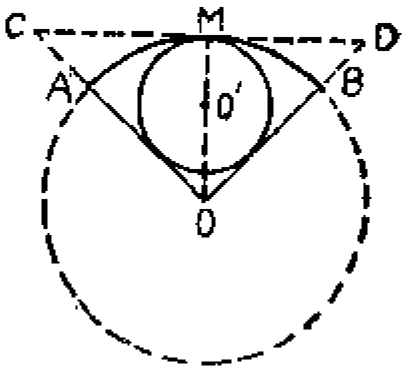


图 3.11

已知：圆O内的扇形OAB。

求作：扇形OAB的内切圆。

分析：假设图已作出（图3.11），扇形OAB的内切圆O'与扇形弧切于点M，则M应在$\angle AOB$的平分线上，因而是$\overset{\frown}{AB}$的中点，且O，O'，M在同一直线上．过M作圆O'之切线（也与$\overset{\frown}{AB}$相切）交OA，OB于C，D，这样一来，圆O'又成了$\triangle OCD$的内切圆．于是得到

作法：作$\angle AOB$之平分线OM交$\overset{\frown}{AB}$于M，过M作$\overset{\frown}{AB}$之切线交OA，OB于C,D，再作$\triangle OCD$之内切圆O，即为所求。

证明：由作法，圆O'显然是扇形OAB的内切圆。

讨论：当$\angle AOB\leqslant 2d$时，恒有一解。

37.

9．定直线上有按A、B、C、D顺序排列的四点，求一点P使$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD$。

分析：设P点已作出（图3.12），由$\angle APB=\angle BPC$得$PA:PC=AB:BC$（定比），故P点的轨迹为一阿氏圆w（第二章2.5节例1）。同理，由$\angle BPC=\angle CPD$得$PB:PD=BC:CD$（定比），故P点又在另一阿氏圆w'上，于是P为w与w'的交点。

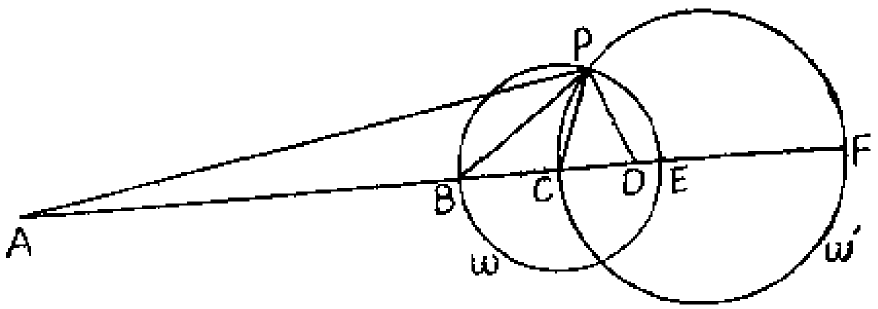


图 3.12

作法：作线段AC的外分点E，使$EA:EC=AB:BC$，以BE为直径作圆w。作线段BD的外分点F，使$FB:FD=BC:CD$，以CF为直径作圆w'。w与w'的交点即为所求。

证明：因P在w上，所以$PA:PC=AB:BC$，故$\angle APB=\angle BPC$。但P又在w'上，所以$PB:PD=BC:CD$，故$\angle BPC=\angle CPD$。从而$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD$。

即P合于所设条件。

讨论：定直线上六点的位置按下列顺序：$ABCDEF$，$ABCEDF$，$EFABCD$，$EAFBCD$排列时，有二解，否则无解。

总之，本题的解数为2或0。

38.

16．求作$\triangle ABC$，已知a，$\angle B$，$b-c$。

分析：设$\triangle ABC$已作成（图3.19），$BC=a$，$\angle B=\beta$，$AC-AB=b-c$。延长AB至D，使$BD=b-c$，连DC，因知道$\triangle BDC$的两边及夹角，故可取为奠基三角形。

作法：作$\triangle BDC$，使$BD=b-c$，$BC=a$，$\angle DBC=2d-\beta$，作DC边之中垂线交射线DB于A，则$\triangle ABC$为所求作者。

证明：由作法知$\triangle ABC$中，$BC=a$，$\angle ABC=2d-\angle DBC=2d-(2d-\beta)=\beta$，$AC-AB=AD-AB=AD-(AD-BD)=BD=b-c$。

所以$\triangle ABC$合于所设条件。

讨论：本题有解的条件为$a>b-c>0$，$\beta<2d$，解数为

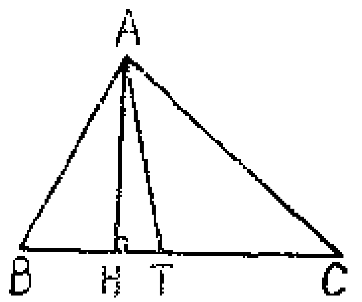


图 3.18

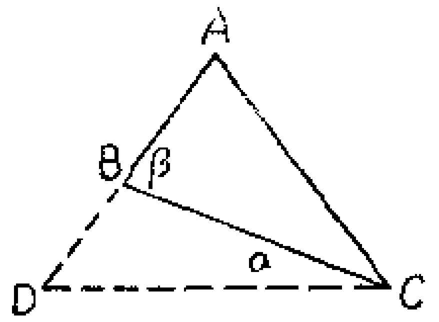


图 3.19

0或1。

39.

18．求作一菱形，已知其一角及两对角线之和。

已知：定角α及定长$2m$。

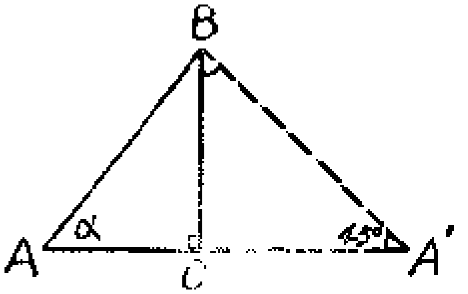


图 3.20

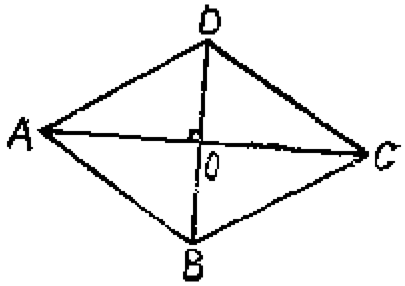


图 3.21

求作：菱形 $ABCD$，使有 $\angle DAB=\alpha$，$AC+BD=2m$。

分析：设菱形 $ABCD$ 已作成（图3.21），根据菱形的性质：两对角线AC，BD互相垂直平分于 0，且 AC，BD平分菱形的两组对角。因而$AO+OD=\frac{1}{2}(AC+BD)=\frac{1}{2}\cdot 2m=m$，$\angle DAO=\frac{\alpha}{2}$。故 $Rt\triangle AOD$ 可作为奠基三角形。于是本题解法化归于上题。

40.

19．求作$\triangle ABC$，已知$\angle A$，h_a、m_a。

分析：设$\triangle ABC$已作成(图3.22)，$\angle BAC=\alpha$(定角)，BC边上的高$AH=h_a$，中线$AE=m_a$，则 $Rt\triangle AHE$ 可首先作出。这样便确定了一个顶点 A，而 B，C 两顶点只须确定其中的一个即可。为此，延长 AE 至 F，使 $EF=AE$，连FC，故有$\angle ACF=2d-\alpha$，由此得

作法：作$Rt\triangle AHE$，使$\angle AHE=d$，$AH=h_a$，$AE=m_a$，延长AE至F，使 $EF=AE$，作以 AF 为弦，内接角为$2d-\alpha$的圆弧交直线HE于点C，延长CE至B，使$EB=CE$，则$\triangle ABC$为所求。

证明：由作法知$ABFC$为平行四边形，因此，$\angle BAC=2d-\angle ACF=2d-(2d-\alpha)=\alpha$，而$BC$边上的高 $AH=h_a$，中线$AE=m_a$。

所以$\triangle ABC$合于条件。

讨论： 当$m_a \geqslant h_a$时，一解。$m_a < h_a$时，无解。

41.

29．给定直线XY及其异侧二点A、B，于XY上求一点C，使$\angle ACX = \angle BCX$。

分析： 设点C已作出（图3.32），$\angle ACX = \angle BCX$，则A关于直线XY的对称点A'必在BC上，故C是B，A'的连线与XY的交点。

作法： 作A关于XY的对称点A'，连BA'交XY于所求点C。

证明： 点C合于条件是明显的事实。

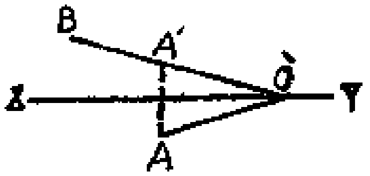


图 3.32

讨论： 1°若A，B的连线不与XY垂直

1） A，B到XY的距离不相等时，一解；

2） A，B到XY的距离相等时，无解。

2° 若A，B的连线垂直于XY且A，B到XY的距离不相等时，一解。即AB与XY的交点。

3° 若A，B关于XY对称，此时，XY上的每一点都合于条件，故解数是无穷的。

42.

30．给定直线XY及其同侧二点A、B，于XY上求一点M使$\angle AMX = 2\angle BMY$。

分析：设M点已作出（图3.33），$\angle AMX = 2\angle BMY$，则点B关于XY的对称点B'必在$\angle AMX$对顶角的平分线上，

连BB'交XY于E，那末，过A所作$\odot B'(B'E)$之切线与XY之交点，就是所求的点M。

作法： 作B关于XY的对称点B'，设BB'交XY于E，过A作$\odot B'(B'E)$之切线（取其中的一条AD）交XY于M，则点M为所求。

证明：由作法知$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，于是

$\angle AMX=\angle 2+\angle 3=\angle 2+\angle 1=2\angle 1=2\angle BMY$

所以点M合于所设条件。

讨论：本题恒有一解。

请读者考虑，当A，X位于直线BB'之异侧时，仍有一解。

43.

33． 给定直线$x\parallel y$，$z\parallel t$，过定点O作直线使其介于两组平行线间的部分等长。

在一般情况下，两组分别平行的四直线x，y，z，t交成一个平行四边形$ABCD$(图3.36)，这时，无论定点O在平面上什么位置，过O所作两对角线AC，BD之平行线，必与四直线都相交，显然，介于两组平行线间的部分是等长的。

由此可见，若$x\nparallel z$，此时有二解。若$x\parallel z$，当两组平行线间的距离不相等时，无解；而当两组平行线间的距离相等时，有无数多个解。