几 何 学

2018-2019秋学期第一周作业 (P_8: 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 16)

4. 解: 取ΔABC的AB边的中点, 记为D, AC边的中点记为E. 则

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

从而DE与BC平行, 且DE长度为BC的一半, 其他情况同理可证.

5. 解:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}\\&+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PD}\\&=4\overrightarrow{OP}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})\end{aligned}$$

利用P是平行四边形的中心,

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0},$$

即得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OP}.$$

6. 解: 令

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}.$$

由已知,

$$\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{i+2}}=\lambda\overrightarrow{OA_{i+1}}.$$

其中$1\le i\le n$, 并记$A_{n+1}=A_1,\ A_{n+2}=A_2$. 从而

$$\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_{i+2}})=\sum_{i=1}^{n}\lambda\overrightarrow{OA_{i+1}}.$$

即

$$2\vec{a}=\lambda\vec{a}.$$

由于

$$|\overrightarrow{OA_i}| = |\overrightarrow{OA_j}|, \forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

且$\overrightarrow{OA_i}$与$\overrightarrow{OA_{i+1}}$不共线, 从而$\lambda < 2$,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

.

7. 解:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} \\
&= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_1}) + \cdots + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_n}) \\
&= n\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}).
\end{aligned}$$

由第6题结论知$\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$,从而

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \cdots + \overrightarrow{PA_n} = n\overrightarrow{PO}.$$

8. 解:记过O的那条对角线为OD, 即

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}.$$

则

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \\
&= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}
\end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} =& \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}) \\
&= \frac{1}{3}(\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM})
\end{aligned}$$

由于$\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OD}$共线, 则由上式 $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$也与$\overrightarrow{OD}$共线, 从而有

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0},$$

即得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}).$$

10. 解: 设要求的向量为 $\vec{v}$. 据平行四边形法则, $\frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}+\frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}$ 与 $\vec{v}$ 同向且共线, 所以

$$\vec{v}=\frac{\frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}+\frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}}{\left|\frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}+\frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}\right|}=\frac{|\vec{e}_2|\,\vec{e}_1+|\vec{e}_1|\,\vec{e}_2}{||\vec{e}_2|\,\vec{e}_1+|\vec{e}_1|\,\vec{e}_2|}.$$

11. 解: 因为

$$\begin{cases}\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}\\ \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\\ \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\end{cases},$$

所以

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}.$$

因为 P 是$\triangle ABC$的重心, 由下面的习题12(1)知

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}.$$

所以有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

12. (1)证明: 延长 PA,PB,PC 分别交三角形各边于 F,D,E.

充分性: 由例 1.1.5, 我们知

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}\right).$$

再由例1.1.3 知 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. 所以有

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}.$$

必要性: 我们举两例.

方法一: 设 $\vec{e}_1=\overrightarrow{PB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{PC}$. 因为

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0},$$

所以

$$\overrightarrow{AP}=\vec{e}_1+\vec{e}_2.$$

又可设 $\overrightarrow{BF}=\mu\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{AP}$, 其中 μ,λ 为常数, 那么有

$$\lambda\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_2=\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BF}=\vec{e}_1+\mu\left(\vec{e}_2-\vec{e}_1\right)=\left(1-\mu\right)\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2.$$

所以有

$$\begin{cases}\lambda=(1-\mu)\\ \lambda=\mu\end{cases}.$$

因此 $\mu=\frac{1}{2}$, 所以 F 为 BC 边中点.

同理可得 D,E 为 AC,AB 边中点. 所以 P 是 $\triangle ABC$ 的重心.

方法二: 设 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

那么

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OP} &= \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)-\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right) \\ &= \vec{0}-\vec{0}=\vec{0}. \end{aligned}$$

所以 O 与 P 点重合. 因此 P 是重心.

(2) 证明: 设 BD,CE 分别为 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的角平分线, BD,CE 交于O点, BC,CA,AB 的长度分别为a,b,c.则有

$$\overrightarrow{BD}=\frac{c}{a+c}\overrightarrow{BC}+\frac{a}{a+c}\overrightarrow{BA},\quad \overrightarrow{CE}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$$

不妨设

$$\overrightarrow{BO}=\lambda\overrightarrow{BD},\quad \overrightarrow{CO}=\mu\overrightarrow{CE}$$

利用

$$\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BC}$$

得

$$\frac{c\lambda}{a+c}\overrightarrow{BC}+\frac{a\lambda}{a+c}\overrightarrow{BA}-\frac{a\mu}{a+b}\overrightarrow{CA}-\frac{b\mu}{a+b}\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

即

$$\frac{c\lambda}{a+c}\overrightarrow{BC}+\frac{a\lambda}{a+c}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})-\frac{a\mu}{a+b}\overrightarrow{CA}-\frac{b\mu}{a+b}\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$

利用$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$线性无关, 整理系数即得

$$\frac{a\lambda}{a+c}=\frac{a\mu}{a+b},\quad \lambda+\frac{b\mu}{a+b}=1$$

解得$\lambda=\frac{a+c}{a+b+c}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO} \\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{a+c}{a+b+c}\left(\frac{c}{a+c}\overrightarrow{BC}+\frac{a}{a+c}\overrightarrow{BA}\right) \\ &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right) \end{aligned}$$

可知AO 为角BAC的角平分线, 命题成立.

(3) 证明: 参见例 1.1.1 的图1-7, 且采用与图中相同的记号. 我们只需要证明

$$A_1C \cap AC_1 \cap BD_1 \cap B_1D \neq \varnothing.$$

设

$$O = A_1C \cap AC_1,$$

那么只需要证明 $\overrightarrow{OD_1} = -\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB_1}$ 即可. 由例1.1.1 知

$$\begin{cases} \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \\ \overrightarrow{AD_1} = \vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{AB} = \vec{a} \end{cases}.$$

所以有

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ -\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{cases}.$$

因此 $\overrightarrow{OD_1} = -\overrightarrow{OB}$.

类似可得 $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB_1}$. 证毕.

15. 证明: 直接计算可知

$$(a\overrightarrow{e_1} - b\overrightarrow{e_2}) + (b\overrightarrow{e_2} - c\overrightarrow{e_3}) + (c\overrightarrow{e_3} - a\overrightarrow{e_1}) = \vec{0}.$$

即存在不全为零的数使得三向量的线性组合为零向量,所以它们线性相关.

16. 证明: 因为

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \overrightarrow{P_2P_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \\ \overrightarrow{P_3P_4} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3 \end{cases}.$$

所以 P_1, P_2, P_3, P_4 共面当且仅当向量 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}$ 线性相关, 即存在 $\vec{0} \neq (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ 使得

$$\mu_1\overrightarrow{P_1P_2} + \mu_2\overrightarrow{P_2P_3} + \mu_3\overrightarrow{P_3P_4} = \vec{0}.$$

这等价于

$$\mu_1\vec{r}_1 + (\mu_2 - \mu_1)\,\vec{r}_2 + (\mu_3 - \mu_2)\,\vec{r}_3 - \mu_3\vec{r}_4 = 0.$$

令 $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2 - \mu_1$, $\lambda_3 = \mu_3 - \mu_2$ 和 $\lambda_4 = -\mu_3$. 注意到 $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 0$, 且 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \neq \vec{0}$, 等价于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq \vec{0}$, 所以命题成立.