第一章　第一章答案

§1.1　主要内容

- 理解什么是随机试验, 并且在给定一个随机试验时, 会求随机试验的样本空间,样本点. 习题1,2.

  注意样本空间是试验所有可能结果的集合, 样本点是样本空间中的元素,也即一个可能的结果.

- 随机事件(简称为事件)是样本空间的子集. 理解必然事件(整个样本空间),不可能事件(ϕ,即不含任一样本点),基本事件(单点集).

- 事件的关系:

  1. 包含($A \subset B$): If A, then B.
  2. 相等($A = B$): If $A \subset B$ and $B \subset A$.
  3. 对立事件($B = \overline{A}$): If $B =$ not A.
  4. 不相容(A, B不相容): If A, then $\overline{B}$.

- 事件的运算(多个事件同理):

  1. 并($A \cup B$): If A or B.
  2. 交(AB): If A and B.
  3. 差($A - B = A\overline{B}$):If A and $\overline{B}$.

- 运算法则:

  1. 交换律:$A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$.
  2. 结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$, $(AB)C = A(BC) = ABC$.
  3. 分配律: $A(B \cup C) = AB \cup AC$.
  4. 对立事件运算: $\overline{\overline{A}} = A$.
  5. 对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}$,$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$, $\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

掌握利用文氏图来理解事件的关系运算及运算法则.

对应习题3,4,5,6.

- 理解频率与概率的意义,并掌握概率的性质:

1. 非负性: $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. 规范性: $P(\Omega) = 1$, $P(\phi) = 0$.
3. 可列可加性: $P(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$.
4. If$A \subset B$, then $P(A) \leq P(B)$.

- 掌握概率的两个计算模型: 古典概率模型与几何概率模型.分别掌握这两个模型的描述以及对应的概率公式.

1 . 古典概型:(i). 有限样本空间$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$.

(ii).$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n)$.

事件A 的概率: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{所含的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点数}}$.

2 . 几何概型: 向一区域Ω内随机投点,则点M落入Ω的某一部分A的概率:$P(A) = \frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}$.

- 基本计数原理:

1 . 加法原理:分多种情况.

2 . 乘法原理:分多个步骤.

- 基本排列与组合: 排列与组合的区别是排列有顺序(或者编号),组合不考虑顺序.

1 .可重复排列: $1, 2, 3, \cdots, n$, 这n 个数字中取出k个数字排成一列,数字可以重复取, 总共有n^k种取法.

2 .不可重复排列:$1, 2, 3, \cdots, n$, 这n 个数字中取k个不相同数字排成一列,总共有$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$种取法.

3 .组合:$1, 2, 3, \cdots, n$, 这n 个数字中取出k个数字,不考虑其先后顺序, 总共有C_n^k种取法.

- 排列数和组合数:

  1 . 记排列数$A_n^n = n!$ 称为n的全排列. 规定$0! = 1$.

  2 . 组合数$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$.

  例如: $C_{10}^3 = \frac{10*9*8}{3!}$.

  3 .$C_n^k = C_n^{n-k}$.

  例如: $C_{10}^7 = C_{10}^3$.

§1.2 答案

解1.2.1. (1)用1记掷到1点,其它类推,则样本空间为$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2)用$1, 2, 3$记取出编号为$1, 2, 3$的三个球,其它类推,则样本空间为

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}.$$

(3)直到3只次品全部取出,所以最少取3次,最多取10次,于是样本空间

$$\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

(4)用1 代表正品, 0 代表次品; (1,0)代表第一件正品第二件次品,依此类推.样本空间为$\left\{ \begin{matrix} (0,0),(0,1,0),(0,1,1,0),(0,1,1,1),(1,0,0),(1,0,1,0), \\ (1,0,1,1),(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1) \end{matrix} \right\}$.

解1.2.2. 用1 代表正品, 0 代表次品.则样本空间为$\{\omega_1 = (0, 0, 0, 0), \omega_2 = (0, 0, 0, 1), \omega_3 = (0, 0, 1, 1), \omega_4 = (0, 1, 1, 1), \omega_5 = (0, 1, 0, 0), \omega_6 = (0, 0, 1, 0), \omega_7 = (0, 1, 0, 1), \omega_8 = (0, 1, 1, 0), \omega_9 = (1, 0, 0, 0), \omega_{10} = (1, 0, 0, 1), \omega_{11} = (1, 0, 1, 1), \omega_{12} = (1, 1, 1, 1), \omega_{13} = (1, 1, 0, 0), \omega_{14} = (1, 0, 1, 0), \omega_{15} = (1, 1, 0, 1), \omega_{16} = (1, 1, 1, 0)\}$.

事件$A =$"正常出厂"$=\{\omega_{12}\}$.

事件$B =$"再做检查"$=\{\omega_4, \omega_{11}, \omega_{15}, \omega_{16}\}$.

事件$C =$"降级出厂"$=\{\omega_3, \omega_7, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{13}, \omega_{14}\}$.

事件$D =$"不予出厂"$=\{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6, \omega_9\}$.

解1.2.3. 答案不唯一. (1) $AB\overline{C}$, (2)A, (3) ABC, (4) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$, (5)$A \cup B \cup C$, (6)$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} \cup A\overline{B}\ \overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\ \overline{B}C$, (7)$AB \cup BC \cup CA$, (8) $\overline{ABC}$, (9) $A\overline{B}\ \overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\ \overline{B}C$, (10)$AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$.

解1.2.4. (1)$\overline{A}=\{4,5,6\}$, 于是$\overline{A}B=\{4\}$.

(2)$\overline{A}\cup B=\{2,3,4,5,6\}$.

(3)$B-A=B\overline{A}=\{4\}$, 从而$\overline{B-A}=\{1,2,3,5,6\}$.

(4) $BC=\{4\}$, $\overline{BC}=\{1,2,3,5,6\}$,$A\overline{BC}=\{1,2,3\}$, 因此$\overline{A\overline{BC}}=\{4,5,6\}$.

(5) $B\cup C=\{2,3,4,5,6\}$, $A(B\cup C)=\{2,3\}$, 所以$\overline{A(B\cup C)}=\{1,4,5,6\}$.

解1.2.5. (1)

$$(A\cup B)(B\cup C)=(A\cup B)B\cup(A\cup B)C \qquad (\text{利用课本第8页的分配律})$$

$$=B\cup(A\cup B)C \qquad (\text{利用事件并和交的定义})$$

$$=B\cup(AC\cup BC) \qquad (\text{利用课本第8页的分配律})$$

$$=B\cup BC\cup AC \qquad (\text{利用课本第8页的结合律和交换律})$$

$$=B\cup AC \qquad (\text{利用事件交和并的定义})$$

(2)$A\cup B\cup C=A+B\overline{A}+C\overline{A}\,\overline{B}$ 或者$A\cup B\cup C=A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A}+ABC$等等.

(3)

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$$

$$=(A-B\overline{B})(\overline{A}-B\overline{B}) \qquad (\text{利用(1)})$$

$$=A\overline{A}=\phi$$

(4)$AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{AB}-\overline{AB}=B+\overline{B}-\overline{AB}=-\overline{AB}=AB.$

解1.2.6. 利用文氏图或者举反例.

解1.2.7. 第一个结果正确, 样本空间Ω_1对应的不是古典概型.

解1.2.8. 我们可以把出现偶数和(例如(1,1))看成出现2次,这样样本空间就成为

$$(1,1),(1,1),(1,2),(1,3),(1,3),(1,4),(1,5),(1,5),(1,6)$$

$$(2,1),(2,2),(2,2),(2,3),(2,4),(2,4),(2,5),(2,6),(2,6)$$

$$(3,1),(3,1),(3,2),(3,3),(3,3),(3,4),(3,5),(3,5),(3,6)$$

$$(4,1),(4,2),(4,2),(4,3),(4,4),(4,4),(4,5),(4,6),(4,6)$$

$$(5,1),(5,1),(5,2),(5,3),(5,3),(5,4),(5,5),(5,5),(5,6)$$

$$(6,1),(6,2),(6,2),(6,3),(6,4),(6,4),(6,5),(6,6),(6,6)$$

一共$36+18=54$个元素.

(1) 点数和小于6, 一共有14个元素:

$$(1,1),(1,1),(1,2),(1,3),(1,3),(1,4)$$

$$(2,1),(2,2),(2,2),(2,3)$$

$$(3,1),(3,1),(3,2)$$

$$(4,1)$$

对应的概率为$\frac{14}{54}$.

(2)点数和等于8, 一共有10个元素:

$$(2,6),(2,6),(3,5),(3,5),(4,4),(4,4),(5,3),(5,3),(6,2),(6,2).$$

对应的概率为$\frac{10}{54}$.

(3)点数和是偶数, 一共有36个元素:

$$(1,1),(1,1),(1,3),(1,3),(1,5),(1,5)$$

$$(2,2),(2,2),(2,4),(2,4),(2,6),(2,6)$$

$$(3,1),(3,1),(3,3),(3,3),(3,5),(3,5)$$

$$(4,2),(4,2),(4,4),(4,4),(4,6),(4,6)$$

$$(5,1),(5,1),(5,3),(5,3),(5,5),(5,5)$$

$$(6,2),(6,2),(6,4),(6,4),(6,6),(6,6)$$

对应的概率为$\frac{36}{54}$.

解1.2.9. 随意拨最后一位数字的样本空间为$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,拨号不超过3次能拨通的概率是$\frac{3}{10}$.

随意拨最后一位数字是奇数的样本空间为$\{1,3,5,7,9\}$,拨号不超过3次能拨通的概率是$\frac{3}{5}$.

解1.2.10. 4个人,每个人生日月份有12种可能,所以4个人生日组合有12^4种可能(即为可重复排列).现在问没有2人生日在同一个月,即12个月里选4 个月出来分别作为4个人的生日月份,当然这里4个人的生日月份是有顺序的(即甲是1月份乙是2月份生日和甲是2月份乙是1月份生日不是同一种情况),所以没有2人生日在同一个月份有A_{12}^4种可能, 于是对应的概率为$\frac{A_{12}^4}{12^4}$.

解1.2.11. 五个数字中有放回地接连抽取3个数字,即为可重复排列,总共有5^3种可能(因为每次抽取数字都有5种可能).

(1) 取三个数字全不相同, 总共有A_5^3 种可能(因为在样本空间5^3 个元素中我们考虑了数字的顺序,所以这里也应该考虑顺序). 对应的概率为$P(A) = \frac{A_5^3}{5^3}$.

(2) 三个数字不含1和5, 也就是说明三个数字是在$2, 3, 4$中取得,所以有3^3种可能(可以重复抽取数字). 对应的概率为$P(B) = \frac{3^3}{5^3}$.

(3) 三个数字中5出现了两次,则这三个数可以是$(5, 5, a), (5, a, 5), (a, 5, 5)$这三种可能,其中$a$ 可以取$1, 2, 3, 4$.所以总共有$3 * 4 = 12$ 种可能.对应的概率为$P(C) = \frac{12}{5^3}$.

解1.2.12. 十本书总共排列顺序有$A_{10}^{10} = 10!$ 种可能. 由于指定某三本书放在一起,这三本书排列顺序有$A_3^3 = 3!$ 种可能;把这三本书捆绑在一起作为一本新书和剩下来七本书总共排列顺序有$A_8^8 = 8!$ 种可能, 于是这样排列对应的概率为$\frac{3!8!}{10!}$.

解1.2.13. 将3个球放到4个盒子里,即为可重复排列.每个球总共有4种放法,所以3个球就是4^3种放法.

(1)没有1个盒子里有2个球,即为不可重复排列,有A_4^3种放法,对应的概率为$\frac{A_4^3}{4^3}$.

(2)3个球在一个盒子内总共有4种可能,对应的概率为$\frac{4}{4^3}$.

解1.2.14. 10个编号,任选3个,是组合问题(不考虑顺序),总共有C_{10}^3 种可能.

(1) 最小号码是5,说明另外2个号码要从$6, 7, 8, 9, 10$中选取,共有C_5^2 中可能, 对应的概率为$\frac{C_5^2}{C_{10}^3}$.

(2) 最大号码是5,说明另外2个号码要从$1, 2, 3, 4$中选取,共有C_4^2 中可能, 对应的概率为$\frac{C_4^2}{C_{10}^3}$.

解1.2.15. 6个灯泡,有放回的取两次,即有重复排列,共有6^2种可能.

(1) 两次都是次品, 即2只次品中有重复的取2次的排列,共有2^2种可能,对应的概率为$\frac{2^2}{6^2}$.

(2) 事件B 有两种情况, 第一次是正品第二次是次品,共有$2*4$种可能, 还有一种情况是第一次是次品第二次是正品,同样有$2*4$种可能, 所以事件B共有$2*4*2$种可能,对应的概率为$\frac{2*4*2}{6^2}$.

解1.2.16. 6个灯泡,无放回的取两次,即无重复排列,共有A_6^2种可能.

(1) 两次都是次品, 即2只次品中无重复的取2次的排列,共有A_2^2种可能,对应的概率为$\frac{A_2^2}{A_6^2}$.

(2) 事件B 有两种情况, 第一次是正品第二次是次品,共有$2*4$种可能, 还有一种情况是第一次是次品第二次是正品,同样有$2*4$种可能, 所以事件B共有$2*4*2$种可能,对应的概率为$\frac{2*4*2}{A_6^2}$.

解1.2.17. 100 套产品取2套总共有C_{100}^2 种可能.

(1) 1套优质品1套次品共有$(100-4-12)*4 = 84*4$ 种可能, 对应的概率为$\frac{84*4}{C_{100}^2}$.

(2) 1套等级品1套次品共有$12*4$ 种可能, 对应的概率为$\frac{12*4}{C_{100}^2}$.

(3) 退货有3种可能: (i)2套次品, 共有C_4^2种可能,(ii)1套次品, 另外1套是等级品或者优等品, 此时共有$4*(12+84)$种可能, (iii)2套都是等级品, 共有C_{12}^2 种可能. 所以退货的概率为: $\frac{C_4^2+4*96+C_{12}^2}{C_{100}^2}$.

(4)该批货被接受和退货互为对立事件,于是被退货的概率为:$1-\frac{C_4^2+4*96+C_{12}^2}{C_{100}^2}$.

(5) 样品中有1套优质品有$84*(4+12)$ 种可能, 对应的概率为: $\frac{84*16}{C_{100}^2}$.

解1.2.18. 52张牌, 北家取13张有C_{52}^{13}种可能.

(1)因为黑桃,红心,方块,草花各为13张, 所以恰有5张黑桃,4张红心,3张方块,1张草花共有$C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1$ 种可能,对应的概率为: $\frac{C_{13}^5C_{13}^4C_{13}^3C_{13}^1}{C_{52}^{13}}$.

(2)因为A, K, Q, J分别各为4张,剩下来36张小牌. 所以恰有大牌A, K, Q, J各一张而其余都是小牌共有$C_4^1C_4^1C_4^1C_4^1C_{36}^9$ 种可能,对应的概率为: $\frac{C_4^1C_4^1C_4^1C_4^1C_{36}^9}{C_{52}^{13}}$.

解1.2.19. 类似于课本第20页例14,图略.

两人会面的概率为$\frac{60*60-40*40}{60*60} = \frac{5}{9}$.

第二章　第二章答案

§2.1　主要内容

- 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

- 对立事件的概率公式: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

- 理解缩减样本空间,条件概率$P(B|A)$的意义:已知A发生的条件下,B发生的概率.

  条件概率的定义及其性质公式:

  1. 定义: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.
  2. 非负性: $0 \le P(B|A) \le 1$
  3. 规范性: If $A \subset B$, then $P(B|A) = 1$.(即在A发生的条件下B一定发生).

     If $AB = \phi$ or $A \subset \overline{B}$, then $P(B|A) = 0$.(即在A发生的条件下B一定不发生).
  4. 可列可加性: $P(B_1 + B_2 + B_3 + \cdots |A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) + P(B_3|A) + \cdots$.
  5. 加法公式: $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$.
  6. 对立事件的概率公式: $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$.

- 乘法公式: $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$.

- 独立事件:$P(AB) = P(A)P(B)$ or $P(A|B) = P(A)$ or $P(B|A) = P(B)$.

- A与B, $\overline{A}$与B,A与$\overline{B}$,$\overline{A}$与$\overline{B}$ 具有相同的相互独立性.

- 三个事件A, B, C 两两独立和相互独立的定义及区别.

  1. 两两独立: $P(AB) = P(A)P(B)$ and $P(AC) = P(A)P(C)$ and $P(BC) = P(B)P(C)$.
  2. 相互独立: 两两独立and $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

- 全概率公式: If $\sum_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega$(即$B_k$ 把整个样本空间分成互不相容的部分, 具体情况就是分几种情况全面讨论), then $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) + \cdots$.

- 贝叶斯公式: $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}$.

§2.2 答案

解2.2.1. 若$B \subset A$, 则$A - B$ 与B 互不相容并且$(A - B) + B = A$, 于是根据概率的可加性有:

$$P(A) = P((A - B) + A) = P(A - B) + P(A),$$

即$P(A - B) = P(A) - P(B)$.

一般情况下, 我们有$AB \subset A$, 于是由上面的公式可知

$$P(A - AB) = P(A) - P(AB).$$

又因为$A - B = A - AB$, 因此

$$P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB).$$

解2.2.2. 根据加法公式$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 条件概率定义$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 以及对立事件的概率公式$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, 可得:

- $P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.1 = 0.8$.

- $P(A|B) = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$.

- $P(B|A) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$.

- $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$,

由于AB 与$A\overline{B}$ 互不相容, 并且$AB + A\overline{B} = A$, 利用概率可加性可知:

$$P(A) = P(AB + A\overline{B}) = P(AB) + P(A\overline{B}),$$

于是$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.5 - 0.1 = 0.4$, $P(\overline{B}) = 1 - 0.4 = 0.6$. 因此, $P(A|\overline{B}) = \frac{2}{3}$.

解2.2.3. 根据独立事件的定义: $P(A|B) = P(A), P(AB) = P(A)P(B)$, 以及四组事件(1)$A, B$, (2)$\overline{A}, B$,(3)$A, \overline{B}$,(4)$\overline{A}, \overline{B}$ 有相同的独立性.

- $P(A|B) = P(A) = 0.3$.
- $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) = P(A)+P(B)-P(A)P(B) = 0.3+0.6-0.3*0.6 = 0.72$.
- $P(\overline{B}|A) = P(\overline{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$.
- $P(\overline{A}|B) = P(\overline{A}) = 1 - 0.3 = 0.7$.

解2.2.4. 根据$AB \subset A \subset A \cup B$ 可知:

$$P(AB) \le P(A) \le P(A \cup B),$$

第一个不等号当$AB = A$, 即$A \subset B$ 时取到等号. 第二个不等号当$A = A\cup B$, 即$B \subset A$ 时取到等号.

又根据加法公式以及概率的非负性可知:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \le P(A) + P(B),$$

并且当$AB = \phi$ 时取到等号.

解2.2.5. 根据题意可知: $\begin{cases} P(\overline{A}\,\overline{B}) = \frac{1}{9} \\ P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B) \end{cases}$ 由事件A, B 的独立性: $\begin{cases} P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{9} \\ P(A)P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(B) \end{cases}$

利用对立事件的概率, 第二个等式可以转化成$P(A)(1-P(B)) = (1-P(A))P(B)$, 即$P(A) - P(A)P(B) = P(B) - P(A)P(B)$, 从而得到$P(A) = P(B)$, 代入到第一个式子可得: $(1 - P(A))(1 - P(A)) = \frac{1}{9}$, 因此$P(A) = \frac{2}{3}$ 或者$P(A) = \frac{4}{3}$(舍去).

解2.2.6. (1)利用加法公式以及A, B, C 三事件两两独立(注意与三事件独立的区别), 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{9}{16} &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) \\ &= 3P(A) - 3P(A)^2 \end{aligned}$$

于是$P(A) = \frac{1}{4}$ 或者$\frac{3}{4}(> \frac{1}{2})$ (舍去).

(2)由于$A \cup B \subset A \cup B \cup C$, 可得

$$P(A \cup B) \le P(A \cup B \cup C),$$

即$P(A) + P(B) - P(AB) \le 3P(A) - 3P(A)^2$, $2P(A) - P(A)^2 \le 3P(A) - 3P(A)^2$, 化简可得$P(A) \le \frac{1}{2}$.

解2.2.7. 要证明$A \cup B, AB, A - B = A\overline{B}$ 与C 独立, 根据两个事件独立的定义, 即需要证明:

- $P((A \cup B)C) = P(A \cup B)P(C)$?
- $P((AB)C) = P(AB)P(C)$?
- $P((A\overline{B})C) = P(A\overline{B})P(C)$?

(1)

$$\begin{aligned}
P((A \cup B)C) &= P(AC \cup BC) \qquad \text{(利用课本上第8页的分配律)} \\
&= P(AC) + P(BC) - P(ABC) \qquad \text{(利用加法公式以及}ACBC = ABC\text{)} \\
&= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \qquad \text{(利用A,B,C相互独立)} \\
&= (P(A) + P(B) - P(AB))P(C) \qquad \text{(利用A,B,C相互独立)} \\
&= (P(A \cup B))P(C)\text{(利用加法公式以及)}
\end{aligned}$$

(2)

$$P((AB)C) = P(A)P(B)P(C) = P(AB)P(C)$$

(2)

$$P((A\overline{B})C) = P(A)P(\overline{B})P(C) = P(A\overline{B})P(C)$$

解2.2.8. 设相距100米处击中目标这个事件为A, 设相距150米处击中目标这个事件为B, 设相距200米处击中目标这个事件为C.

于是$P(A) = 0.6$, 又根据击中目标的概率与距离成反比, 即$100P(A) = 150P(B) = 200P(C)$, 从而可得$P(B) = 0.4$, $P(C) = 0.3$.

射手击中目标可以分成三种情况

- 第一次在100 米处击中, 即事件A, 对应概率为$P(A) = 0.6$.

- 第一次在100 米处未击中, 即事件$\overline{A}$; 并且第二次在200 米处击中, 即事件B; 所以这一事件是$\overline{A}B$, 对应概率为$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = 0.4 * 0.4 = 0.16$.

- 第一次在100 米处未击中, 即事件$\overline{A}$; 第二次在150 米处仍未击中, 即事件$\overline{B}$;并且第三次在200 米处击中, 即事件C; 所以这一事件是$\overline{A}\,\overline{B}C$, 对应概率为$P(\overline{A}\,\overline{B}C) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) = 0.4 * 0.6 * 0.3 = 0.072$.

(注意这三次射击之间是相互独立的). 因此, 击中目标的概率应该为$P(A)+P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B}C) = 0.6 + 0.16 + 0.084 = 0.832$.

解2.2.9. 利用课本第26 页第7 题, 掷两颗均匀骰子的样本空间Ω 总共有36 个元素:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$$

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$$

(1)若已知点数和为偶数, 现在的缩减样本空间$\Omega_{偶}$ 总共有18 个元素:

$$(1, 1), (1, 3), (1, 5)$$

$$(2, 2), (2, 4), (2, 6)$$

$$(3, 1), (3, 3), (3, 5)$$

$$(4, 2), (4, 4), (4, 6)$$

$$(5, 1), (5, 3), (5, 5)$$

$$(6, 2), (6, 4), (6, 6)$$

点数和等于8 总共有5 种可能:

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

于是点数和等于8的概率为$\frac{5}{18}$.

(2)若已知点数和为奇数, 现在的缩减样本空间$\Omega_{\text{奇}}$ 总共有18 个元素:

$$(1, 2), (1, 4), (1, 6)$$

$$(2, 1), (2, 3), (2, 5)$$

$$(3, 2), (3, 4), (3, 6)$$

$$(4, 1), (4, 3), (4, 5)$$

$$(5, 2), (5, 4), (5, 6)$$

$$(6, 1), (6, 3), (6, 5)$$

点数和大于6 总共有12 种可能:

$$(1, 6)$$

$$(2, 5)$$

$$(3, 4), (3, 6)$$

$$(4, 3), (4, 5)$$

$$(5, 2), (5, 4), (5, 6)$$

$$(6, 1), (6, 3), (6, 5)$$

于是点数和大于6的概率为$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

(3)若已知点数和大于6, 现在的缩减样本空间$\Omega_{>6}$ 总共有21 个元素:

$$(1, 6)$$

$$(2, 5), (2, 6)$$

$$(3, 4), (3, 5), (3, 6)$$

$$(4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)$$

$$(5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$$

点数和为奇数总共有12 种可能:

$$(1, 6)$$

$$(2,5)$$

$$(3,4)(3,6)$$

$$(4,3),(4,5)$$

$$(5,2),(5,4),(5,6)$$

$$(6,1),(6,3),(6,5)$$

于是点数和为奇数的概率为$\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$.

解2.2.10. 设三个人能译出密码的事件分别为A,B,C, 根据条件有: $P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{1}{3}, P(C)=\frac{1}{4}$. 密码能被破译的事件是$A\cup B\cup C$, 对应的概率为$P(A\cup B\cup C)$, 利用概率的加法公式以及事件的独立性:

$$\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\
&= P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)\\
&= \frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}*\frac{1}{3}-\frac{1}{5}*\frac{1}{4}-\frac{1}{3}*\frac{1}{4}+\frac{1}{5}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}\\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

或者根据对立事件的概率公式. 因为$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, 于是:

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-\frac{4}{5}*\frac{2}{3}*\frac{3}{4}=\frac{3}{5}.$$

解2.2.11. (1) $P(B|A)$? 即在A发生的条件下求B 发生的概率.

事件A 发生说明第一张卡片编号为4, 此时第二张卡片的编号可能为$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$.

而事件B 是说两张卡片编号和为7, 在事件A 发生的条件下, 即第二张卡片需要是4 才能保证事件B 发生. 所以$P(B|A)=\frac{1}{10}$.

(2) $P(A|B)$? 即在B发生的条件下求A 发生的概率.

事件B 发生说明两张卡片编号和为7, 此时第一张卡片的编号可能为$1,2,3,4,5,6$(因为如果第一张编号大于6,则两张卡片编号和就不可能为6, 也就是说事件B 不可能发生, 与条件矛盾).

而事件A 是说第一张卡片编号为4, 所以$P(A|B)=\frac{1}{4}$.

解2.2.12. 第一次取5 个球全部是黄球(记为事件A)的概率为: $P(A) = \frac{C_{20}^5}{C_{30}^5}$; 取走5 个黄球以后(即在事件$A$ 发生的条件下), 剩下来10 个白球, 15个黄球, 其中取5个白球5个黄球(记为事件B)的概率为: $P(B|A) = \frac{C_{10}^5 C_{15}^5}{C_{25}^{10}}$.

因此, 第一次取出的全是黄球第二次取出黄球白球各半(事件AB)的概率为(乘法公式):

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{C_{20}^5}{C_{30}^5}\frac{C_{10}^5 C_{15}^5}{C_{25}^{10}}.$$

解2.2.13. 第一次取得黄球(记为事件A)的概率为(古典概型): $P(A) = \frac{b}{a+b}$.

在第一次取得黄球后(即事件A发生的条件下), 变成a 个白球, $b+c$个黄球, 第二次取得黄球(记为事件B)的概率为(古典概型):$P(B|A) = \frac{b+c}{a+b+c}$.

在前两次取得黄球后(即事件A和事件B 发生的条件下), 变成a 个白球, $b+2c$个黄球, 第三次取得白球(记为事件C)的概率为(古典概型):$P(C|AB) = \frac{a}{a+b+2c}$.

因此, 前两次取得黄球第三次取得白球(事件ABC)的概率为(乘法公式):

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{b}{a+b}\frac{b+c}{a+b+c}\frac{a}{a+b+2c}.$$

解2.2.14. 记抽出的第一台是次品这一事件为A, 记抽出的第二台是次品这一事件为B.

(1)这批货获得通过说明抽出的2台都不是次品, 即事件$\overline{A}\ \overline{B}$.

第一台抽出来不是次品(即事件$\overline{A}$)的概率为: $P(A) = \frac{67}{70}$. 在第一台不是次品的条件下(剩下69台设备,其中3台次品), 第二台抽出来不是次品(即事件$\overline{B}$)的概率为:$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{66}{69}$.

因此, 这批货获得通过的概率为(乘法公式): $P(\overline{A}\ \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{67}{70} * \frac{66}{69}$.

(2)恰有一台次品分两种情况:

- 第一台是次品(事件A), 第二台是正品(事件$\overline{B}$).第一台是次品的概率为: $P(A) = \frac{3}{70}$, 在第一台是次品的条件下(剩下69 台设备,其中2台次品), 第二台是正品的概率为: $P(\overline{B}|A) = \frac{67}{69}$.于是第一台是次品并且第二台是正品(事件$A\overline{B}$)的概率为(乘法公式): $P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}|A) = \frac{3}{70}\frac{67}{69}$.

- 第一台是正品(事件$\overline{A}$), 第二台是次品(事件B). 第一台是正品的概率为: $P(\overline{A}) = \frac{67}{70}$, 在第一台是正品的条件下(剩下69 台设备,其中3台次品), 第二台是次品的概率为: $P(B|\overline{A}) = \frac{3}{69}$.于是第一台是正品并且第二台是次品(事件$\overline{A}B$)的概率为(乘法公式): $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{67}{70}\frac{3}{69}$.

因此, 恰有一台次品的概率为$\frac{3}{70}\frac{67}{69}+\frac{67}{70}\frac{3}{69}=\frac{2*3*67}{69*70}$.

(3) 被退货和获得通过是对立事件,所以被退货的概率为: $1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-\frac{67}{70}*\frac{66}{69}$.

(被退货用事件表示即为至少一件次品$A\cup B$;或者被退货可以看成是恰好一件次品$A\overline{B}+\overline{A}B$ 以及两件次品AB.)

解2.2.15. 我们仍用B_1记为B_1 厂生产的, 用B_2记为B_2 厂生产的. 则$P(B_1)=\frac{1800}{3000}=0.6$, $P(B_2)=\frac{1200}{3000}=0.4$. 选出产品是次品这一事件记为$A$, 根据条件可知:

$$P(A|B_1)=0.01, P(A|B_2)=0.02.$$

(1) 选出的产品是次品(事件A), 分为两种情况, 可能是B_1 厂生产, 也可能是B_2 厂生产的,于是利用全概率公式:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.6*0.01+0.4*0.02=0.014.$$

(2)已知选出的产品是次品(即事件A), 求它是由B_1厂生产的概率. 这是一个条件概率, 等于$P(B_1|A)$. 利用贝叶斯公式:

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.01*0.6}{0.014}=\frac{6}{14}.$$

(2)已知选出的产品是正品(即事件$\overline{A}$), 求它是由B_1厂生产的概率. 这是一个条件概率, 等于$P(B_1|\overline{A})$. 利用贝叶斯公式:

$$P(B_1|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}|B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})}=\frac{(1-0.01)*0.6}{1-0.014}.$$

解2.2.16. 设事件A 为产品是次品, 事件B 为经检验为次品, 则根据题中条件, 我们有:

$$P(B|A)=0.9, P(\overline{B}|\overline{A})=0.99, P(A)=0.05.$$

(1)经检验为次品(事件B)有两种情况: 原来是次品或者原来是正品. 于是我们用全概率公式:

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.05*0.9+(1-0.05)*(1-0.99)=0.0545.$$

(2)即需要求概率$P(\overline{A}|B)$, 于是我们利用贝叶斯公式:

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(B|\overline{A})P(\overline{A})}{P(B)}=\frac{(1-0.99)(1-0.05)}{0.0545}=0.1743.$$

解2.2.17. 设事件A 为学生是男生, 事件B 为选修会计学. 根据条件有:

$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B|A) = 0.1, P(B|\overline{A}) = 0.06.$$

(1) 这位学生是选修会计学的女生, 即事件$\overline{A}B$, 对应的概率(利用乘法公式):

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = (1 - \frac{2}{5}) * 0.06 = 0.036.$$

(2) 这位学生是未选修会计学的男生, 即事件$A\overline{B}$, 对应的概率(利用乘法公式):

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}|A) = \frac{2}{5} * (1 - 0.1) = 0.36.$$

(3) 这位学生是选修会计学的学生(事件B), 分两种情况, 即是男生(事件A)的情况或女生(事件$\overline{A}$)的情况. 利用全概率公式:

$$P(B) = P(\overline{A})P(B|\overline{A}) + P(A)P(B|A) = (1 - \frac{2}{5}) * 0.06 + \frac{2}{5} * 0.1 = 0.076.$$

解2.2.18. 设事件A 为肺癌患者, 事件B 为通过检验被确诊. 根据条件有:

$$P(A) = 0.03, P(B|A) = 0.98, P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.99.$$

(1) 此人被诊断为肺癌患者(事件B), 确患此病(事件A) 的概率为P(A—B), 根据条件, 我们利用贝叶斯公式:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.98 * 0.03}{0.98 * 0.03 + 0.01 * 0.97} = 0.7519.$$

(2)此人被诊断成未患肺癌(事件$\overline{B}$), 实患此病(事件A) 的概率为$P(A|\overline{B})$, 根据条件, 我们利用贝叶斯公式:

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}|A)P(A)}{P(\overline{B}|A)P(A) + P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.02 * 0.03}{0.02 * 0.03 + 0.99 * 0.97} = \frac{6}{9609}.$$

解2.2.19. 设事件A 为编码为0, 事件B 为收到信息0. 根据条件有:

$$P(A) = 0.7, P(\overline{B}|A) = 0.02, P(B|\overline{A}) = 0.01.$$

收到信息为0(事件B), 原发信息也为0(事件A)的概率为P(A—B), 根据条件, 我们利用贝叶斯公式:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.98 * 0.7}{0.98 * 0.7 + 0.01 * 0.3} = \frac{686}{689}.$$

解2.2.20. 设事件A_1 为该产品是畅销品, 事件A_2为该产品的销路一般, 事件A_3为该产品的销路不佳, 事件B 为卖出200 台以上. 根据条件可知:

$$P(A_1) = 0.5, P(A_2) = 0.3, P(A_3) = 0.2; P(B|A_1) = 0.9, P(B|A_2) = 0.5, P(B|A_3) = 0.1.$$

利用贝叶斯公式可求得(1)-(3):

(1) $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{0.9*0.5}{0.9*0.5+0.5*0.3+0.1*0.2} = \frac{45}{62}$.

(2) $P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{0.5*0.3}{0.9*0.5+0.5*0.3+0.1*0.2} = \frac{15}{62}$.

(3) $P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{0.1*0.2}{0.9*0.5+0.5*0.3+0.1*0.2} = \frac{2}{62}$.

(4) 畅销或销路还可以(事件$A_1 + A_2$) 的概率为:$P((A_1 + A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) = \frac{45}{62} + \frac{15}{62} = \frac{60}{62}$.

解2.2.21. 设取到5 个硬币中第i 的事件记为$A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$. 记事件B 为抛掷后出现字面. 根据题意:

$$P(A_i) = \frac{1}{5}, i = 1, 2, 3, 4, 5; P(B|A_1) = 0, P(B|A_2) = \frac{1}{4}, P(B|A_3) = \frac{1}{2}, P(B|A_4) = \frac{3}{4}, P(B|A_5) = 1.$$

(1) 出现字面(事件B),总共有5种情况(事件$A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$), 利用全概率公式:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{5} * 0 + \frac{1}{5} * \frac{1}{4} + \frac{1}{5} * \frac{2}{4} + \frac{1}{5} * \frac{3}{4} + \frac{1}{5} * 1 = \frac{1}{2}.$$

(2)利用贝叶斯公式:

- $P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{0*\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = 0.$
- $P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}*\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = 0.1.$
- $P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = 0.2.$
- $P(A_4|B) = \frac{P(B|A_4)P(A_4)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{4}*\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = 0.3.$
- $P(A_5|B) = \frac{P(B|A_5)P(A_5)}{P(B)} = \frac{1*\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = 0.4.$

(3) 若将(2) 中这个硬币再抛掷一次, 也即这个硬币有0 的概率是第一个硬币(事件A_1), 有0.1 的概率是第二个硬币(事件A_2), 有0.2 的概率是第三个硬币(事

件A_3), 有0.3 的概率是第四个硬币(事件A_4), 有0.4 的概率是第五个硬币(事件A_5). 要求出现字面(事件B) 的概率,分5种情况讨论, 即利用全概率公式:

$$\begin{aligned}&0 * P(B|A_1) + 0.1 * P(B|A_2) + 0.2 * P(B|A_3) + 0.3 * P(B|A_4) + 0.4 * P(B|A_5)\\ =&0 * 0 + 0.1 * \frac{1}{4} + 0.2 * \frac{1}{2} + 0.3 * \frac{3}{4} + 0.4 * 1 = 0.75.\end{aligned}$$

解2.2.22. 把甲乙丙击中飞机的事件分别记为A, B, C, 飞机击落的事件记为N. 由条件可知:$P(A) = 0.4, P(B) = 0.5, P(C) = 0.7$.

飞机被击落分成三种情况:

- 一人击中的事件(记为事件M_1)可表示成$M_1 = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$, 对应的概率为(在这里$A, B, C$ 三个事件是独立的):

$$\begin{aligned}P(M_1) &= P(A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C)\\ &= P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)\\ &= 0.4 * 0.5 * 0.3 + 0.6 * 0.5 * 0.3 + 0.6 * 0.5 * 0.7\\ &= 0.36\end{aligned}$$

  此时飞机被击落(事件N)的概率是0.2, 即$P(N|M_1) = 0.2$.

- 两人击中的事件(记为事件M_2)可表示成$M_2 = AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$, 对应的概率为:

$$\begin{aligned}P(M_2) &= P(AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C)\\ &= P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C)\\ &= 0.4 * 0.5 * 0.3 + 0.6 * 0.5 * 0.7 + 0.4 * 0.5 * 0.7\\ &= 0.41\end{aligned}$$

  此时飞机被击落(事件N)的概率是0.6, 即$P(N|M_2) = 0.6$.

- 三人全部击中的事件(记为事件M_3)可表示成$M_3 = ABC$, 对应的概率为:

$$P(M_3) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.4 * 0.5 * 0.7 = 0.14$$

  此时飞机被击落(事件N)的概率是1, 即$P(N|M_3) = 1$.

然后我们利用全概率公式:

$$P(N) = P(M_1)P(N|M_1)+P(M_2)P(N|M_2)+P(M_3)P(N|M_3) = 0.36*0.2+0.41*0.6+0.14*1 = 0.458.$$

解2.2.23. 设事件A 为元件是正品, 事件B 为元件经检验定为正品,能出厂的事件记为M. 根据条件: $P(B|A) = 0.99, P(B|\overline{A}) = 0.05$.

无放回的抽取三件,总共有4种可能:

(1) 3件都是次品(记为事件C_1), 概率为$P(C_1) = \frac{C_4^3}{C_{100}^3}$.

(2) 2件次品1件正品(记为事件C_2),概率为$P(C_2) = \frac{C_4^2 C_{96}^1}{C_{100}^3}$.

(3) 1件次品2件正品(记为事件C_3),概率为$P(C_3) = \frac{C_4^1 C_{96}^2}{C_{100}^3}$.

(4) 3件正品(记为事件C_4),概率为$P(C_4) = \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}$.

下面我们分别求在这4 种情况下元件能出厂的概率,根据每1件都是独立的进行检验:

- 3件次品都需要被检验为正品才能出厂, 对应的概率为$P(M|C_1) = 0.05^3$.
- 2件次品需要被检验为正品以及1件正品需要被检验为正品才能出厂, 对应的概率为$P(M|C_2) = 0.05^2 * 0.99$.
- 1件次品需要被检验为正品以及2件正品需要被检验为正品才能出厂, 对应的概率为$P(M|C_3) = 0.05 * 0.99^2$.
- 3件正品都需要被检验为正品才能出厂, 对应的概率为$P(M|C_4) = 0.99^3$.

然后我们利用全概率公式:

$$P(M) = \sum_{i=1}^{4} P(C_i)P(M|C_i) = 0.05^3 \frac{C_4^3}{C_{100}^3} + 0.05^2 * 0.99 \frac{C_4^2 C_{96}^1}{C_{100}^3} + 0.05 * 0.99^2 \frac{C_4^1 C_{96}^2}{C_{100}^3} + 0.99^3 \frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}.$$

解2.2.24. 记打开三个箱子的事件分别为B_1, B_2, B_3, 产品为合格品记为事件A, 经检验为合格品记为事件C. 根据题中条件, 首先我们求$P(A)$, 为了求$P(A)$, 总共有3种情况(B_1, B_2, B_3),于是我们利用全概率公式:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = \frac{1}{3} * \frac{20}{20+5} + \frac{1}{3} * \frac{12}{12+4} + \frac{1}{3} * \frac{17}{17+5} = 0.774.$$

又根据条件我们有:

$$P(\overline{C}|A) = 0.04, P(C|\overline{A}) = 0.06.$$

(1) 经检验为合格品有两种情况:原来是合格品或原来是不合格品. 于是我们利用全概率公式:

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(\overline{A})P(C|\overline{A}) = 0.774 * (1 - 0.04) + (1 - 0.774) * 0.06 = 0.757.$$

(2) 利用贝叶斯公式:

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{(1 - 0.04)0.774}{0.757} = 0.982.$$

解2.2.25. 设事件A是取甲袋, 事件B 是取得第一份表格是男生的报名表,事件C 是取得第二份表格是男生的报名表.根据题意:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}, P(B|\overline{A}) = \frac{2}{2+6} = \frac{1}{4}.$$

(1)利用全概率公式:

$$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}|A) + P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

(2)条件是后取出的是男生的表(即事件C), 后取出的是男生的表总共有4种情况:

(1) 在甲袋里(事件A), 第一次取得男生的表格(即事件B),剩下3份表格,其中1份男生的表格,第二次取得男生的表格(即事件C), 对应的概率为$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

(2) 在甲袋里(事件A), 第一次取得女生的表格(即事件$\overline{B}$),剩下3份表格,其中2份男生的表格,第二次取得男生的表格(即事件C),对应的概率为$P(A\overline{B}C) = P(A)P(\overline{B}|A)P(C|A\overline{B}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

(3) 在乙袋里(事件$\overline{A}$), 第一次取得男生的表格(即事件B),剩下7份表格,其中1份男生的表格,第二次取得男生的表格(即事件C),对应的概率为$P(\overline{A}BC) = P(\overline{A})P(B|\overline{A})P(C|\overline{A}B) = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{7} = \frac{1}{56}$.

(4) 在乙袋里(事件$\overline{A}$), 第一次取得女生的表格(即事件$\overline{B}$),剩下7份表格,其中2份男生的表格,第二次取得男生的表格(即事件C),对应的概率为$P(\overline{A}\,\overline{B}C) = P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})P(C|\overline{AB}) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{2}{7} = \frac{3}{28}$.

而这里面先取出是女生的表格的情况是第(2)和第(4)种,于是这个条件概率为:

$$P(\overline{B}|C) = \frac{P(C|\overline{B})P(\overline{B})}{P(C|B)P(B) + P(C|\overline{B})P(\overline{B})} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{3}{28}}{\frac{1}{6} + \frac{3}{28} + \frac{1}{12} + \frac{1}{56}} = \frac{46}{63}.$$

(其中$P(C|\overline{B})P(\overline{B}) = P(C|A\overline{B})P(\overline{B}|A)P(A) + P(C|\overline{A}\ \overline{B})P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})$, 第二种情况和第四种情况之和;$P(C|B)P(B) = P(C|AB)P(B|A)P(A) + P(C|\overline{A}B)P(B|\overline{A})P(\overline{A})$, 第一种情况和第三种情况之和. 这里用到了两份表格是在同一个袋中取出来的条件).

第三章　第三章答案

§3.1　主要内容

- 随机变量: 设随机试验的样本空间为Ω, 如果对于每一个样本点$\omega \in \Omega$, 均有唯一的实数$X(\omega)$ 与之对应, 称$X = X(\omega)$ 为样本空间Ω 上的随机变量.

- 若X是随机试验E的一个随机变量，$S \subset R$，那么$X \in S$可表示E 中的事件.

  利用随机变量来表示事件: $\{X = 1\}, \{X \leq 3\}, \{X \geq 2\}, \{0 \leq X < 5\}$ 等等.

- 随机变量主要可分为离散型和连续型两大类.

- 离散型随机变量: 随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个, 叫做离散型随机变量.

- 设离散型随机变量所有可能取值为:$x_1, x_2, x_3, \cdots$; 并且取这些值的概率为$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, ...$ 称此式为离散型随机变量X的分布律,或概率分布. 也可以用表格形式给出离散型随机变量X 的分布律:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \end{pmatrix}$$

- 离散型随机变量的分布律具有下列性质:

  1．$p_i \geq 0, i = 1, 2, ...,$

  2．$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.(离散型随机变量所有可能取值为有限个时这里就是有限和)

- 伯努利试验: 设随机试验E只有两种可能的结果:A及$\overline{A}$, 且$P(A) = p$, 在相同的条件下将E 重复进行n 次独立试验, 则称这一串试验为n 重伯努利试验.

- 常见的几种分布:

  1．单点分布: 若随机变量X 只取一个常数值C, 即$P(X = C) = 1$, 则称X 服从单点分布.（也叫退化分布.）

  2．0-1分布: 若随机变量X只能取两个数值0或1, 其分布为$\begin{pmatrix} X & 0 & 1 \\ P & p & q \end{pmatrix}$ $0 < p < 1, q = 1 - p$, 或记为$P(X = 0) = p, P(X = 1) = q$. 则称$X$ 服从参数为p 的两点分布或参数为p的0-1分布.

3. 二项分布: 在n重伯努利试验中，事件A发生(事件A发生的概率为p)的次数X是一个离散型随机变量，其分布律为$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$.称$X$为服从参数$n,p$的二项分布.记为$X\sim B(n,p)$.

定理3.1.1. 设$X\sim B(n,p)$, 则当$k=[(n+1)p]$ 时, $P(X=k)$ 的值最大; 如果$k=(n+1)p$ 是整数, 则$P(X=k)=P(X=k-1)$ 同为最大值.

4. 泊松分布: 若离散型随机变量X的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$$

其中常数$\lambda>0$, 则称X服从参数为λ 的泊松分布,记为$X\sim P(\lambda)$.

定理3.1.2 (泊松定理)**.** 设随机变量X 服从二项分布$B(n,p_n)$,如果$\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k)=\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots.$$

此定理在具体问题时:当n较大,p较小时, 即可用泊松分布近似替换二项分布.

5. 超几何分布:设一批同类型的产品共有N件, 其中次品有M件. 今从中任取n(假定$n\le M$)件, 则这n件中所含的次品数X是一个离散型随机变量, 其分布律为

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=0,1,\cdots,r, r=min(M,n)$$

则称X服从超几何分布.

6. 几何分布: 可以看成"首次成功试验"(成功的概率为p), 其分布律为

$$P(X=k)=q^{k-1}p, k=1,2,\cdots$$

则称X服从参数为p的几何分布。

- 数学期望EX: 设离散型随机变量的概率分布为$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,3,\cdots$. 则$EX=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots$. 随机变量函数$g(X)$的数学期望为$Eg(X)=p_1g(x_1)+p_2g(x_2)+p_3g(x_3)+\cdots$.

  注意: 期望EX是个常数.

1. 0-1 分布的数学期望为p,
2. 二项分布的数学期望为np,
3. 泊松分布的数学期望为λ.

- 数学期望的性质:

1. $EC = C$.
2. $ECX = CEX$.
3. $E[f(X) + g(X)] = Ef(X) + Eg(X)$.

- 方差DX: 随机变量函数$(X - EX)^2$ 的期望.
- 方差的计算:

1. 根据定义: $DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + (x_3 - EX)^2 p_3 + \cdots$.
2. 根据公式$DX = EX^2 - (EX)^2$.

- 方差的性质:

1. $DC = 0$.
2. $DCX = C^2 DX$.
3. $D[X + C] = DX$.

1. 0-1 分布的方差为$p(1 - p)$,
2. 二项分布的方差为$np(1 - p)$,
3. 泊松分布的方差为λ.

§3.2 答案

解3.2.1. 由于这三次试验每一次结果都可以是中或者不中,并且三次射击之间没有关系,所以总共有8 种可能; 我们用1 表示击中目标, 用0 表示没有击中目标; 于

是一个三元组$(1,1,0)$ 就表示前面两次击中目标而第三次没有击中目标,根据这个记号,我们可以知道样本空间Ω 等于

$$\left\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8 \middle| \begin{array}{l}\omega_1=(1,1,1),\omega_2=(1,1,0),\omega_3=(1,0,1),\omega_4=(1,0,0),\\ \omega_5=(0,1,1),\omega_6=(0,1,0),\omega_7=(0,0,1),\omega_8=(0,0,0)\end{array}\right\}.$$

设X 是命中目标的次数, 则X 是一个随机变量,可能取值是$0,1,2,3$. 并且这个试验可以看成是3重独立伯努利试验, 于是随机变量X 服从参数为$n=3,p=0.7$ 的二项分布, 即$X\sim B(3,0.7)$, 分布律是

$$P(X=k)=C_3^k0.7^k0.3^{3-k},k=0,1,2,3.$$

解3.2.2. 设X 是取得合格品之前已经取出来的废品数, 则X 是一个随机变量, 可能取值是$0,1,2,3$, 根据题意, 求出各个取值对应的概率后可得X 的概率分布

$$P(X=0)=\frac{9}{12},P(X=1)=\frac{3}{12}\frac{9}{11},P(X=2)=\frac{3}{12}\frac{2}{11}\frac{9}{10},P(X=3)=\frac{3}{12}\frac{2}{11}\frac{1}{10}\frac{9}{9}.$$

解3.2.3. 设X 是取得的废品数, 则X 是一个随机变量

(1)由于取后不放回, 于是X 可能取值是$0,1,2$, 并且服从超几何分布, 即X 的概率分布为

$$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3},P(X=1)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3},P(X=2)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}.$$

(2)由于取后放回, 于是X 可能取值是$0,1,2,3$, 每次取到次品的概率是$\frac{2}{10}=0.2$, 并且互相之间是相互独立的, 所以我们可以看成是一个3重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n=3,p=0.2$ 的二项分布, 即$X\sim B(3,0.2)$, 即X 的概率分布为

$$P(X=k)=C_3^k0.2^k0.8^{3-k},k=0,1,2,3.$$

解3.2.4. 设X 是两次调整之间生产的合格品数,于是从需要调整开始, 到下一次需要调整为止, 可以看成是"接下去首次需要调整"试验,也就是几何分布, 于是X 的可能取值是$0,1,2,3,\cdots$, 分布律是

$$P(X=k)=(1-p)^kp,k=0,1,2,3,\cdots.$$

解3.2.5. 设X 是击中目标次数, 则X 是一个随机变量, 所有可能取值是$0,1,2$. 又记A 为甲击中目标这一事件, B 为乙击中目标这一事件, 于是

$$\{X=0\}=\overline{A}\,\overline{B},\{X=1\}=\overline{A}B+A\overline{B},\{X=2\}=AB.$$

从而X 的概率分布为

$$P(X=0)=(1-p_1)(1-p_2), P(X=1)=(1-p_1)p_2+p_1(1-p_2), P(X=2)=p_1p_2.$$

解3.2.6. 分析: 该题主要是利用概率分布必需满足的条件之一:即一个随机变量所有可能取值对应的概率和应该为1.

(1)

$$1=\sum_{k=1}^{N}P(\xi=k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{a}{N}=a.$$

(2)

$$\begin{aligned}1&=\sum_{k=1}^{\infty}P(\eta=k)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}c(\frac{2}{3})^k\\&=c\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\\&=2c\end{aligned}$$

于是$c=\frac{1}{2}$.

解3.2.7. 这是一个"首次成功"试验,服从几何分布,即ξ 的分布律是:

$$P(\xi=k)=(\frac{1}{4})^{k-1}\frac{3}{4}, k=1,2,3,\cdots.$$

为了求ξ 为偶数的概率, 我们设$m=2r, r=1,2,3,\cdots$. 于是ξ 为偶数的这个事件即ξ 取$m=2r, r=1,2,3,\cdots$ 的这个事件, 于是对应的概率为

$$\sum_{m\text{为偶数}}P(\xi=m)=\sum_{r=1}^{\infty}P(\xi=2r)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{4}^{(2r-1)}\frac{3}{4}=\frac{1}{5}$$

解3.2.8. 设在这一页上的错别字数为X, 则X 是一个随机变量. 由于每个错别字等可能的出现在任何一页上, 于是每个错别字出现在考察页上的概率是$\frac{1}{500}$, 又由于一个错别字出现在哪一页上和其它错别字出现在哪里无关,从而我们可以看成是100 重的伯努利试验, 于是X 服从参数为$n=100, p=\frac{1}{500}$ 的二项分布, 即$X\sim B(100,0.002)$, 分布律是

$$P(X=k)=C_{100}^{k}0.002^{k}0.998^{100-k}, k=0,1,2,3,\cdots,100.$$

解3.2.9. 设X 是10 人中带AB 型的人数, 则X 是一个随机变量. 每个人是AB 型的概率是0.25, 不是AB 型的概率为0.75, 并且他们是什么血型相互之间都是无关的, 所以我们可以看成是10 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 10, p = 0.25$ 的二项分布, 即$X \sim B(10, 0.25)$, 分布律是

$$P(X = k) = C_{10}^{k} 0.25^{k} 0.75^{10-k}, k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 10.$$

解3.2.10. 设X 是同一时刻使用的设备数, 根据题意, 我们可以考虑在任一时刻每台设备是否被使用,其可能出现的结果是两个,"使用"或"不被使用". 并且各个设备是否被使用相互独立, 因此这一问题可以看成是$p = 0.2$ 的5 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 5, p = 0.2$ 的二项分布,即$X \sim B(5, 0.2)$, 其分布律为:

$$P(X = k) = C_{5}^{k} 0.2^{k} 0.8^{5-k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

(1)恰有2 个设备在使用,用随机变量来表示即$\{X = 2\}$ 这一事件, 于是

$$P(X = 2) = C_{5}^{2} 0.2^{2} 0.8^{5-2} = 0.2048.$$

(2)最多有2 个设备在使用,用随机变量来表示即$\{X \le 2\}$ 这一事件, 于是

$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= C_{5}^{0} 0.2^{0} 0.8^{5-0} + C_{5}^{1} 0.2^{1} 0.8^{5-1} + C_{5}^{2} 0.2^{2} 0.8^{5-2} \\ &= 0.94208. \end{aligned}$$

(3)至少有2 个设备在使用,用随机变量来表示即$\{X \ge 2\}$ 这一事件, 于是

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - C_{5}^{0} 0.2^{0} 0.8^{5-0} - C_{5}^{1} 0.2^{1} 0.8^{5-1} = 0.26272.$$

(2)有多数设备在使用,用随机变量来表示即$\{X \ge 3\}$ 这一事件, 它与(2)中最多2 个设备在使用是对立时间, 于是

$$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 0.05792.$$

解3.2.11. 设随机变量X 是事件A 发生的次数, 则A 发生3 次或更多次这一事件可以表示为$\{X \ge 3\}$

(1) 该试验可以看成是3 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 3, p = 0.3$ 的二项分布, 即$X \sim B(3, 0.3)$, 分布律是

$$P(X = k) = C_3^k 0.3^k 0.7^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3.$$

于是$P(X \geq 3) = P(X = 3) = C_3^3 0.3^3 0.7^{3-3} = 0.027$.

(2) 该试验可以看成是5 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 5, p = 0.3$ 的二项分布, 即$X \sim B(5, 0.3)$, 分布律是

$$P(X = k) = C_5^k 0.3^k 0.7^{5-k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

于是$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = C_5^3 0.3^3 0.7^{5-3} + C_5^4 0.3^4 0.7^{5-4} + C_5^5 0.3^5 0.7^{5-5} = 0.16308$.

解3.2.12. 首先, 对每位售货员来说, 每小时用秤的概率是$\frac{15}{60} = 0.25$. 我们可以考虑在同一小时每名售货员是否用秤,其可能出现的结果是两个,"用秤"或"不用秤". 并且各人何时用秤相互独立, 因此这一问题可以看成是$p = 0.25$ 的4 重伯努利试验, 设随机变量X 是每小时同时用秤数, 服从参数为$n = 4, p = 0.25$ 的二项分布,即$X \sim B(4, 0.25)$, 其分布律为:

$$P(X = k) = C_4^k 0.25^k 0.75^{4-k}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

即$P(X = 0) = 0.3164, P(X = 1) = 0.4219, P(X = 2) = 0.2109, p(X = 3) = 0.0469, P(X = 4) = 0.0039$. 从而$P(X \leq 2) = 0.9492$. 因此, 同时使用秤的人数不超过2 个的概率为0.9492, 故可配备2台秤, 这样既不会使秤过度闲置,也不会因为秤不够而影响业务.

(2) 按(1) 的结果配秤, 即配备2 台秤, 于是每个小时不够用秤的概率为$1 - 0.9492 = 0.0508$, 即每小时不够用秤时间为$0.0508 * 1 = 0.0508$(小时), 8 个小时不够用秤时间就是$0.0508 * 8 = 0.4064$(小时).

解3.2.13. 设随机变量X 是次品数, 这一问题可以看成是$p = 0.1$ 的10 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 10, p = 0.1$ 的二项分布, 即$X \sim B(10, 0.1)$, 其分布律为:

$$P(X = k) = C_{10}^k 0.1^k 0.9^{10-k}, k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 10.$$

于是恰好有一件次品的概率应该等于: $P(X = 1) = C_{10}^1 0.1^1 0.9^{10-1} = 0.3874$.

至少有一件次品的概率应该等于$P(X \geq 1) = 1-P(X = 0) = 1-C_{10}^{0}0.1^{0}0.9^{10-0} = 0.6513$.

所以不是必有一件次品.

解3.2.14. 设随机变量X 是击中目标数, 这一问题可以看成是$p = 0.3$ 的8 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 8, p = 0.3$ 的二项分布, 即$X \sim B(8, 0.3)$, 其分布律为:

$$P(X = k) = C_8^k 0.3^k 0.7^{8-k}, k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 8.$$

(1) 利用课本上第63 页定理2:

由于$(n + 1)p = (8 + 1) * 0.3 = 2.7$ 不是整数, 于是$\{X = [2.7] = 2\}$ 时对应的概率最大, 并且$P(X = 2) = C_8^2 0.3^2 0.7^{8-2} = 0.2865$.

(2) 至少击中目标2 次这一事件用随机变量X 来表示即为$\{X \geq 2\}$, 对应的概率为:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - C_8^0 0.3^0 0.7^{8-0} - C_8^1 0.3^1 0.7^{8-1} = 0.7447.$$

解3.2.15. 设随机变量X 是次品数, 这一问题可以看成是$p = 0.005$ 的1000 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 1000, p = 0.005$ 的二项分布, 即$X \sim B(1000, 0.005)$, 由于$n = 1000$ 较大, $p = 0.005$ 较小, 于是我们可以用参数为$\lambda = np = 5$ 的泊松分布去近似二项分布, 其分布律为:

$$P(X = k) = \frac{5^k}{k!} e^{-5}.$$

(1) 只有一件次品用随机变量表示即为$\{X = 1\}$, 对应的概率为:

$$P(X = 1) = \frac{5^1}{1!} e^{-5} = 5e^{-5} = 0.0337.$$

(或者可以查课本上第249 页的表格).

(2) 至少有一件次品用随机变量表示即为$\{X \geq 1\}$, 对应的概率为:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{5^0}{0!} e^{-5} = 1 - e^{-5} = 0.9933.$$

(或者可以查课本上第249 页的表格).

(3)要求几件次品的时候概率最大, 我们回到二向分布, 即$X \sim B(1000, 0.005)$, 利用课本上第63 页定理2: 由于$(n + 1)p = (1000 + 1) * 0.005 = 5.005$ 不是整数, 于是$\{X = [5.005] = 5\}$ 时对应的概率最大. 要求$X = 5$ 对应的概率,我们再次利用泊松分布来近似, $P(X = 5) = \frac{5^5}{5!} e^{-5} = 0.1755$. (或者可以查课本上第249 页的表格).

解3.2.16. 设随机变量X 是发生故障的设备数

(1) 这一问题可以看成是$p = 0.01$ 的20 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 20, p = 0.01$ 的二项分布, 即$X \sim B(20, 0.01)$, 由于$n = 20$ 较大, $p = 0.01$ 较小, 于是我们可以用参数为$\lambda = np = 0.2$ 的泊松分布去近似二项分布, 其分布律为:

$$P(X = k) = \frac{0.2^k}{k!} e^{-0.2}.$$

只有1人维修, 所以当2台以上设备发生故障时就得不到及时维修, 用随机变量表示即为$\{X \geq 2\}$, 对应的概率是:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.8187 - 0.1638 = 0.0175.$$

(查课本上第249 页的表格).

(2) 这一问题可以看成是$p = 0.01$ 的100 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 100, p = 0.01$ 的二项分布, 即$X \sim B(100, 0.01)$, 由于$n = 100$ 较大, $p = 0.01$ 较小, 于是我们可以用参数为$\lambda = np = 1$ 的泊松分布去近似二项分布, 其分布律为:

$$P(X = k) = \frac{1^k}{k!} e^{-1}.$$

设需要t 个人维修, 则只有当$t + 1$ 台以上设备发生故障时才会有设备得不到及时维修, 用随机变量表示即为$\{X \geq t + 1\}$, 对应的概率是:

$$P(X \geq t + 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - \cdots - P(X = t) \leq 0.01.$$

(查课本上第249 页的表格),可知: $P(X = 0) = 0.3679, P(X = 1) = 0.3679, P(X = 2) = 0.1839, P(X = 3) = 0.0613, P(X = 4) = .0.513$.

计算可得: $P(X \geq 4) = 1 - 0.981 = 0.019 > 0.01$, 而$P(X \geq 5) = 1 - 0.9963 = 0.0037 < 0.01$. 所以$t = 4$, 即至少配备4 名维修人员, 才能使得设备发生故障时得不到及时维修的概率不超过0.01.

解3.2.17. 设随机变量X 是误差过大的次数, 这一问题可以看成是$p = 0.05$ 的100 重伯努利试验, 于是X 服从参数为$n = 100, p = 0.05$ 的二项分布, 即$X \sim B(100, 0.05)$, 由于$n = 100$ 较大, $p = 0.05$ 较小, 于是我们可以用参数为$\lambda = np = 5$ 的泊松分布去近似二项分布, 其分布律为:

$$P(X = k) = \frac{5^k}{k!} e^{-5}.$$

误差过大的次数不小于3 这一事件用随机变量表示即为$\{X \geq 3\}$, 对应的概率为(查课本上第249 页的表格): $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(x = 2) = 1 - 0.0067 - 0.0337 - 0.0842 = 0.8754$.

解3.2.18. 首先类似于第63 页定理2 考虑二项分布时的方法, 我们考虑:

$$\frac{P(\xi = m)}{P(\xi = m-1)} = \frac{\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{m}.$$

于是当$m < \lambda$ 时, $P(\xi = m) > P(\xi = m-1)$; 而当$m > \lambda$ 时, $P(\xi = m) < P(\xi = m-1)$; 当$m = \lambda$ 时, $P(\xi = m) = P(\xi = m-1)$.

因此, 我们分λ 是否为整数两种情况讨论:

(1)λ 不是整数, 记$\lambda_0 = [\lambda]$. 则由上述讨论可知¶$(\xi = \lambda_0)$ 为泊松分布的概率最大值. (由于此时$\frac{P(\xi=\lambda_0)}{P(\xi=\lambda_0-1)} = \frac{\lambda}{\lambda_0} > 1$,并且$\frac{P(\xi=\lambda_0+1)}{P(\xi=\lambda_0)} = \frac{\lambda}{\lambda_0+1} < 1$.)

(2)λ 是整数, 则此时$P(\xi = \lambda) = P(\xi = \lambda - 1)$ 同时为泊松分布概率的最大值.

解3.2.19. 总共抽检4 次, 随机变量ξ 表示这4 次中要调整设备的次数, 也就是这4 次抽检中, 次品多于1 件的次数. 我们可以把这个问题看成是一个4 重的伯努利试验, 因为每次抽检可能产生的结果只有两个: ”要调整设备”,”不需要调整设备”, 并且4次抽检之间是相互独立的. 但是我们不知道”要调整设备”这一事件的概率,于是我们还需要求这一概率,也就是要求每次抽检发现次品多于1件的概率.

我们设随机变量η 是一次抽检中发现的次品数, 这一问题可以看成是$p = 0.1$ 的10 重伯努利试验, 于是η 服从参数为$n = 10, p = 0.1$ 的二项分布, 即$\eta \sim B(10, 0.1)$, 其分布律为:

$$P(\eta = k) = C_{10}^k 0.1^k 0.9^{10-k}, k = 0, 1, 2, 3, \cdots, 10.$$

次品多于1件这一事件用随机变量表示即为$\{\eta > 1\}$, 对应的概率为:

$$P(\eta > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - C_{10}^0 0.1^0 0.9^{10-0} - C_{10}^1 0.1^1 0.9^{10-1} = 0.2639.$$

(这一问题也可以用参数为$\lambda = np = 1$ 的泊松分布来近似,查表可求得$P(\eta > 1) = 0.2642$.)

于是随机变量ξ 服从参数为$n = 4, p = 0.2639$ 的二项分布, 即$\xi \sim B(4, 0.2639)$. 根据二项分布的期望可知:$E\xi = np = 4 * 0.2639 = 1.0556$.

解3.2.20. 问终点站有2个乘客下车的概率, 这一问题需要分三步考虑:

(1)始发时车上乘客数

因为最后下车的人数和始发时乘客数肯定是有关系的,当然要保证终点站有2个乘客,始发时至少需要有2个乘客. 所以我们假设始发时有$t+2$ 个乘客, 其中$t=0,1,2,\cdots$. 又根据题意, 始发时车上乘客人数是参数为λ 的泊松分布随机变量ξ, 于是始发时有$t+2$ 个乘客的概率为$P(\xi=t+2)=\frac{\lambda^{t+2}}{(t+2)!}e^{-\lambda}$.

(2)当始发时车上有$t+2$ 个乘客时, 由于每个乘客在这k 个站中的哪一站下车都是等可能的, 于是每个乘客在最后一站下车的概率应该为$\frac{1}{k}$, 当然, 不在最后一站下车的概率就是$q=1-\frac{1}{k}$.

我们对这$t=2$ 个乘客分别考虑, 每个乘客是否在最后一站下车只有两种结果:"是"或者"否"(当然这里不下车说明已经在前面下车了). 并且乘客之间是否在终点站下车都是互相独立的.所以可以看成是$p=\frac{1}{k}$ 的$t+2$ 重伯努利试验. 设随机变量η 是终点站下车人数, 则η 服从参数为$n=t+2, p=\frac{1}{k}$ 的二项分布,即$\eta\sim B(t+2,\frac{1}{k})$, 其分布律为:

$$P(\eta=r|\xi=t+2)=C_{t+2}^{r}\frac{1}{k}^{r}q^{t+2-r}, r=0,1,2,3,\cdots,t+2.$$

(3)结合上面两步, 我们考虑有2 个乘客在终点站下车(这一事件用随机变量表示即为$\{\eta=2\}$)的概率

由于始发时车上人数可以是$2,3,4,\cdots,t+2,\cdots$, 于是我们利用全概率公式(分情况讨论):

$$\begin{aligned}
P(\eta=2) &= \sum_{t=0}^{\infty}P(\xi=t+2)P(\eta=2|\xi=t+2)\\
&= \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^{t+2}}{(t+2)!}e^{-\lambda}*C_{t+2}^{2}\frac{1}{k}^{2}q^{t+2-2}\\
&= \sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^{t}\lambda^{2}}{(t+2)!}e^{-\lambda}\frac{(t+2)!}{t!2!}\frac{1}{k^2}q^{t}\\
&= \frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!k^2}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q\lambda)^t}{t!}\\
&= \frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!k^2}e^{q\lambda}=\frac{\lambda^2e^{-\lambda}}{2!k^2}e^{(1-\frac{1}{k})\lambda}=\frac{\lambda^2}{2k!}e^{\frac{\lambda}{k}}
\end{aligned}$$

解3.2.21. 设ξ 是生产流水线一天出次品件数, 它与新工艺是否有效有关. 设事件A 是新工艺有效, 则它的概率$P(A)=0.75$, 此时ξ 服从$\lambda=3$ 的泊松分布, 即$P(\xi=$

$k|A) = \frac{3^k}{k!}e^{-3}$; $\overline{A}$ 就是新工艺无效,也就是旧工艺有效, 它的概率$P(\overline{A}) = 0.25$, 此时ξ服从$\lambda = 5$ 的泊松分布, 即$P(\xi = k|\overline{A}) = \frac{5^k}{k!}e^{-5}$.

现在已经出了2 件次品, 求新工艺有效的概率$P(A|\xi = 2)$, 根据条件我们利用贝叶斯公式:

$$\begin{aligned} P(A|\xi = 2) &= \frac{P(\xi = 2|A)P(A)}{P(\xi = 2|A)P(A) + P(\xi = 2|\overline{A})P(\overline{A})} \\ &= \frac{\frac{3^2}{2!}e^{-3} * 0.75}{\frac{3^2}{2!}e^{-3} * 0.75 + \frac{5^2}{2!}e^{-5} * 0.25} \\ &= \frac{0.168}{0.168 + 0.02105} = 0.89 \end{aligned}$$

解3.2.22. 设随机变量τ 是一天发生的故障次数, 根据题意, 它服从泊松分布, 我们假设τ 服从参数为λ 的泊松分布, 即分布律为:

$$P(\tau = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

又根据一天内发生1次故障与发生2次故障的概率相同, 即: $P(\tau = 1) = P(\tau = 2)$, 从而可得:

$$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}.$$

得到$\lambda^2 = 2\lambda$, 根据泊松分布的要求$\lambda > 0$ 可知$\lambda = 2$. 因此$P(\tau = k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2}$.

每天故障不超过1 次这一事件用随机变量τ 来表示即为$\{\tau \le 1\}$, 对应的概率为:

$$P(\tau \le 1) = P(\tau = 0) + P(\tau = 1) = e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2}.$$

解3.2.23. (1)利用概率分布必需满足的条件之一:即一个随机变量所有可能取值对应的概率和应该为1.

由$3a + \frac{1}{6} + 3a + a + \frac{11}{30} = 1$, 可得$a = \frac{1}{15}$.

(2) 根据离散型随机变量期望的定义, 可知:

$$E\xi = -2 * 3 * \frac{1}{15} + (-1) * \frac{1}{6} + 0 * 3 * \frac{1}{15} + 1 * \frac{1}{15} + 3 * \frac{11}{30} = \frac{3}{5}.$$

(3) $\begin{pmatrix} \xi & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \eta = \xi^2 - 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 8 \\ p & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{11}{30} \end{pmatrix}$

所以$\eta = \xi^2 - 1$ 的分布列是:

$$\begin{pmatrix} \eta & -1 & 0 & 3 & 8 \\ p & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}+\frac{1}{15}=\frac{7}{30} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30} \end{pmatrix}$$

(4) 根据期望的定义:

$E\eta = -1*\frac{1}{5}+0*\frac{7}{30}+3*\frac{1}{5}+8*\frac{11}{30}=\frac{10}{3}.$

解3.2.24. 根据期望和方差的定义及性质:

$$E\xi = -2*0.4+0*0.3+2*0.3 = -0.2.$$

$$E\xi^2 = (-2)^2*0.4+0^2*0.3+2^2*0.3 = 2.8.$$

$$E(3\xi^2+5) = 3E\xi^2+5 = 3*2.8+5 = 13.4.$$

$$D\xi = E\xi^2-(E\xi)^2 = 2.8-(-0.2)^2 = 2.76.$$

解3.2.25. 根据方差的定义及性质:

$$D\xi = E\xi^2-(E\xi)^2 = 1^2*p-(1*p)^2 = p-p^2.$$

所以当$p=\frac{1}{2}$时取到最大值.

解3.2.26. 第三次从袋中取2个球,取得的白球数ξ是一个随机变量, 所有可能取值为0, 1, 2.

由于在第3次从袋中取球时, 已经从袋中取走4个球, 这4个球一共可能有3种情况, 即

(1)4个都是黑球,记为事件A; $P(A)=\frac{C_6^4}{C_8^4}=\frac{3}{14}$. 剩下2个黑球,2个白球.

第三次取两个球中白球数为0个的概率为(即0个白球2个黑球): $P(\xi=0|A)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$;

第三次取两个球中白球数为1个的概率为(即1个白球1个黑球): $P(\xi=1|A)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{3}$;

第三次取两个球中白球数为2个的概率为(即2个白球1个黑球): $P(\xi=2|A)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$;

(2)3个黑球,1个白球,记为事件B; $P(B)=\frac{C_6^3C_2^1}{C_8^4}=\frac{4}{7}$. 剩下3个黑球,1个白球.

第三次取两个球中白球数为0个的概率为(即0个白球2个黑球): $P(\xi=0|B)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$;

第三次取两个球中白球数为1个的概率为(即1个白球1个黑球): $P(\xi=1|B)=\frac{C_3^1C_1^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$;

(3)2个黑球,2个白球,记为事件C. $P(C) = \frac{C_6^2 C_2^2}{C_8^4} = \frac{3}{14}$. 剩下4个黑球.

第三次取两个球中白球数为0个的概率为(即0个白球2个黑球): $P(\xi = 0|C) = \frac{C_4^2}{C_4^2} = 1$.

然后根据全概率公式(即分情况讨论):

$$P(\xi = 0) = P(A)P(\xi = 0|A)+P(B)P(\xi = 0|B)+P(C)P(\xi = 0|C) = \frac{3}{14}*\frac{1}{6}+\frac{4}{7}*\frac{1}{2}+\frac{3}{14}*1.$$

$$P(\xi = 1) = P(A)P(\xi = 1|A) + P(B)P(\xi = 1|B) = \frac{3}{14} * \frac{2}{3} + \frac{4}{7} * \frac{1}{2} = \frac{3}{7}.$$

$$P(\xi = 2) = P(A)P(\xi = 2|A) = \frac{3}{14} * \frac{1}{6} = \frac{1}{28}.$$

所以$E\xi = 0 * P(\xi = 0) + 1 * P(\xi = 1) + 2 * P(\xi = 2) = \frac{3}{7} + 2 * \frac{1}{28} = \frac{1}{2}$.

解3.2.27. 发生故障元件总数ξ 是一个随机变量, 所有可能取值为$0, 1, 2, 3$. 假设三个元件发生故障分别记为事件A,B,C. 根据题意: $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(C) = 0.4$. 结合事件A,B,C 相互独立, 我们有:

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) \\ &= (1 - 0.2)(1 - 0.3)(1 - 0.4) = 0.336. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\xi = 1) &= P(A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C) \\ &= P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C) \\ &= 0.2 * 0.7 * 0.6 + 0.8 * 0.3 * 0.6 + 0.8 * 0.7 * 0.4 = 0.452. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\xi = 2) &= P(AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C) \\ &= P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) \\ &= 0.2 * 0.3 * 0.6 + 0.8 * 0.3 * 0.4 + 0.2 * 0.7 * 0.4 = 0.188. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\xi = 3) &= P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.2 * 0.3 * 0.4 = 0.024. \end{aligned}$$

于是$E\xi = 0 * 0.336 + 1 * 0.452 + 2 * 0.188 + 3 * 0.024 = 0.9$.

$E\xi^2 = 0^2 * 0.336 + 1^2 * 0.452 + 2^2 * 0.188 + 3^2 * 0024 = 1.42$.

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1.42 - 0.9^2 = 0.61$.

解3.2.28. 设X 是一周5个工作日中发生故障的天数, 服从参数为$n = 5, p = 0.2$ 的二项分布, 即$X \sim B(5, 0.2)$, 概率分布为:

$$P(X = k) = C_5^k 0.2^k 0.8^{5-k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

于是一周产生利润的期望值应该等于:

$$\begin{aligned}
&P(X = 0) * 10 + P(X = 1) * 5 + P(X = 2) * 0 + (P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)) * (-2) \\
&= 10C_5^0 0.2^0 0.8^{5-0} + 5C_5^1 0.2^1 0.8^{5-1} - 2(C_5^3 0.2^3 0.8^{5-3} + C_5^4 0.2^4 0.8^{5-4} + C_5^5 0.2^5 0.8^{5-5}) \\
&= 3.2768 + 2.048 - 2(0.0512 + 0.0064 + 0.00032) = 5.20896
\end{aligned}$$

(思考: 为什么这里的期望值不是$EX = P(X = 0) * 0 + P(X = 1) * 1 + P(X = 2) * 2 + P(X = 3) * 3 + P(X = 4) * 4 + P(X = 5) * 5$.)

第四章　第四章答案

§4.1　答案

解4.1.1. ξ 的分布律为: $P(\xi=0)=0.027$,$P(\xi=1)=0.189$,$P(\xi=2)=0.441$,$P(\xi=3)=0.343$. 于是ξ 的分布函数为:

- $$F(x)=P(\xi\le x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.027, & 0\le x<1,\\ 0.027+0.189=0.216, & 1\le x<2,\\ 0.027+0.189+0.441=0.657, & 2\le x<3,\\ 1, & 3\le x,\end{cases}$$

解4.1.2. ξ 的所有可能取值为$0, 1/2, 1$; 对应的概率: $P(\xi=0)=\frac{1}{10}-0=\frac{1}{10}$, $P(\xi=1/2)=\frac{5}{10}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$, $P(\xi=1)=1-\frac{5}{10}=\frac{5}{10}$.

解4.1.3. ξ的概率分布为$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1/3-0=1/3 & 1/2-1/3=1/6 & 2/3-1/2=1/6 & 1-2/3=1/3\end{pmatrix}$

于是ξ^2 的分布列为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/3+1/6=1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$所以$\xi^2$ 的分布函数为

- $$F(x)=P(\xi\le x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1/6, & 0\le x<1, \\ 1/6+1/2=2/3, & 1\le x<4, \\ 1, & 4\le x, \end{cases}$$

解4.1.4. 根据ξ 的分布函数, 可以得到ξ 的分布列为:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ r & s-r & 1/2-s & t-1/2 & u-t \end{pmatrix}$$
与条件中的分布列比较可知:

- ξ取-1 和1.5 时对应的概率应该为0, 所以$r=b=0$.
- $P(\xi=0)=1/3=s-r$, 所以$s=1/3$.
- $P(\xi=1)=a=1/2-s$, 所以$a=1/6$.
- $P(\xi=2)=1/6=t-1/2$, 所以$t=2/3$.
- $P(\xi=3)=c=u-2/3$, 所以$c=u-2/3$.

又$c=1-1/3-a-b-1/6=1-1/3-1/6-0-1/6=1/3$,所以$u=a+2/3=1$.

1.2 不是离散型随机变量ξ 的取值,所以对应概率$P(\xi=1.2)=0$.

$P(\xi>0.5)=1-P(\xi<0.5)=1-P(\xi=0)=1-1/3=2/3$.

解4.1.5.

- 根据$F(+\infty)=1$ 可知: $A+0=1$, 得到$A=1$.
- 根据连续型随机变量的分布函数必定是连续函数,于是$F(x)$ 在$x=0$ 处连续, 于是$0=A+B$, 得到$B=-1$.

解4.1.6. (1)根据$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$1 = \int_{-1}^{1} \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = A\arcsin x|_{-1}^{1} = A(\pi/2 - (-\pi/2)) = A\pi$.

所以$A = 1/\pi$.

(2)事件的概率就是密度函数在区域上的积分.

$P(|\xi| < 1/2) = P(-1/2 < \xi < 1/2) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1/\pi}{\sqrt{(1-x^2)}}dx = 1/\pi \arcsin x|_{-1/2}^{1/2} = 1/3$.

(3)利用密度函数和分布函数的关系:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- 当$x < -1$ 时, $f(x) = 0$, 所以$F(x) = 0$.
- 当$-1 \le x \le 1$ 时, $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1/\pi}{\sqrt{(1-t^2)}}dt = 1/\pi \arcsin t|_{-1}^{x} = 1/\pi \arcsin x + 1/2$.
- 当$x > 1$ 时, $F(x) = 1$.

所以ξ 的分布函数为:

- $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1/\pi \arcsin x + 1/2, & -1 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

解4.1.7.

- $$f(x) = Ae^{-|x|} = \begin{cases} Ae^{x}, & x < 0, \\ Ae^{-x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

于是方法同上一题.

(1)

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} Ae^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}dx \\
&= Ae^{x}|_{-infty}^{0} - Ae^{-x}|_{0}^{+infty} \\
&= 2A
\end{aligned}$$

于是$A = 1/2$.

(2)$P(0 < \xi < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1/2e^{-x}dx = -1/2e^{-x}|_0^1 = 1 - 1/2e^{-1}$.

(3)当$x < 0$ 时

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 1/2e^{t}dt = 1/2e^{t}|_{-\infty}^{x} = 1/2e^{x}.$$

当$x \geq 0$ 时

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 1/2e^{t}dt + \int_{0}^{x} 1/2e^{-t}dt \\
&= 1/2e^{t}|_{-\infty}^{0} + (-1/2e^{-t})|_{0}^{x} \\
&= 1/2 + (-1/2e^{-x} + 1/2) = 1 - 1/2e^{-x}.
\end{aligned}$$

所以ξ 的分布函数为:

- $$F(x) = \begin{cases} 1/2e^{x}, & x < 0, \\ 1 - 1/2e^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

解4.1.8. (1) 当$x < 0$ 时, 由于$f(x) = 0$, 所以$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$.

当$x \geq 0$ 时

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{0}^{x} 1/2t^{3}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\int_{0}^{x} 1/2t^{2}e^{-\frac{t^2}{2}}d(-\frac{t^2}{2}) \\
&= -\int_{0}^{x} 1/2t^{2}de^{-\frac{t^2}{2}} = -\frac{t^2}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}|_{0}^{x} + \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}d\frac{t^2}{2} \\
&= -\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}}|_{0}^{x} = -\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} + 1
\end{aligned}$$

所以ξ 的分布函数为:

- $$F(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{t^2}{2}}+1, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

(2)$F_\eta(y)=P(\eta\le y)=P(\xi^2+1\le y)=P(\xi^2\le y-1)$.

- 当$y<1$ 时, $\xi^2\le y-1$ 是空集, 对应概率为0, 即$F_\eta(y)=0$.
- 当$y\ge 1$ 时, $F_\eta(y)=P(\xi^2\le y-1)=P(-\sqrt{y-1}\le\xi\le\sqrt{y-1})=F(\sqrt{y-1})-F(-\sqrt{y-1})=1-e^{\frac{1-y}{2}}-\frac{1-y}{2}e^{\frac{1-y}{2}}$.

所以η 的分布函数为:

- $$F_\eta(y)=\begin{cases}1-e^{\frac{1-y}{2}}-\frac{1-y}{2}e^{\frac{1-y}{2}}, & y\ge 1,\\ 0, & y<1,\end{cases}$$

对应的密度函数为:

- $$f_\eta(y)=F_\eta(y)'=\begin{cases}\frac{y-1}{4}e^{\frac{1-y}{2}}, & y\ge 1,\\ 0, & y<1,\end{cases}$$

解4.1.9. (1)

$$\begin{aligned}
E\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int_0^{+\infty} (-x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) = \int_0^{+\infty} (-x) de^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\
&= -xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= 0 + \sqrt{2\pi}\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
E\xi^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int_0^{+\infty} (-x^2) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) = \int_0^{+\infty} (-x^2) de^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\
&= -x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx^2 \\
&= 0 - 2\sigma^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \\
&= -2\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|_0^{+\infty} = 2\sigma^2.
\end{aligned}$$

于是$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 2\sigma^2 - \pi/2\sigma^2 = (2 - \pi/2)\sigma^2$.

(3)

$$\begin{aligned}
P(\xi > E\xi) = P(\xi > \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma) &= \int_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma}^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= -\int_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d\frac{-x^2}{2\sigma^2} = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma}^{+\infty} = e^{-\pi/4}
\end{aligned}$$

解4.1.10. ξ服从二项分布$B(1000, 0.5)$, $E\xi = 1000 * 0.5 = 500$, $D\xi = 1000 * 0.5 * (1 - 0.5) = 250$. 事件A发生450到550次之间说明我们需要$\xi$满足$|\xi - E\xi| < 50$; 于是利用切比雪夫不等式:

$$P(|\xi - 500| < 50) \ge 1 - \frac{D\xi}{50^2} = 1 - \frac{250}{1500} = 0.9.$$

解4.1.11. ξ服从二项分布$B(10000, 0.7)$, $E\xi = 10000 * 0.7 = 7000$, $D\xi = 10000 * 0.7 * (1 - 0.7) = 2100$. ξ在6800到7200之间说明我们需要ξ满足$|\xi - E\xi| < 200$; 于是利用切比雪夫不等式:

$$P(|\xi - 7000| < 200) \ge 1 - \frac{D\xi}{200^2} = 1 - \frac{2100}{40000} = 0.9475.$$

解4.1.12. 设需要生产n 件产品. 则ξ服从二项分布$B(n, 0.8)$, $E\xi = n * 0.8 = 0.8n$, $D\xi = n * 0.8 * (1 - 0.2) = 0.16n$. ξ在$0.76n$到$0.84n$之间说明我们需要ξ满足$|\xi - E\xi| < 0.04n$; 于是利用切比雪夫不等式:

$$P(|\xi - 0.8n| < 0.04n) \geq 1 - \frac{D\xi}{(0.04n)^2} = 1 - \frac{0.16n}{(0.04n)^2} \geq 0.9.$$

所以$n \geq 1000$.

解4.1.13. 首先,显然有$0 < a < 1$. $P(\xi > a) = \frac{1-a}{1} = 1 - a$.

设η 是任取4 次ξ 中, 大于a 的次数, 于是η服从二项分布$B(4, 1 - a)$. 至少有一个大于a 的概率为0.9, 即

$$0.9 = P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - a^4.$$

所以$a = \sqrt[4]{0.1}$.

解4.1.14. 方程$x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的充要条件是$\xi^2 - 4 \geq 0$, 即$\xi \geq 2$ 或者$\xi \leq -2$; 结合ξ 是$(1, 6)$ 上的均匀分布可知, $2 \leq \xi \leq 6$ 上方程有实根, 对应概率为:$P(2 \leq \xi \leq 6) = \frac{6-2}{6-1} = 4/5$.

解4.1.15. $P(\xi > 60) = \frac{90-60}{90-50} = 0.75$.

设η 是4 个考生中, 分数ξ 大于60 分的人数, 于是η服从二项分布$B(4, 0.75)$. 至少有3人的分数大于60 的概率, 即

$$P(\eta \geq 3) = P(\eta = 3) + P(\eta = 4) = C_4^3 0.75^3 (1 - 0.75) + C_4^4 0.75^4 = 0.7383.$$

解4.1.16. (1)

- 根据$F(-\infty) = 0$可得, $a = 0$;
- 根据$F(+\infty) = 1$可得, $c = 1$;
- 根据连续型随机变量的分布函数是连续函数可得:
  - 在$x = 1$ 处连续, $1 * \ln 1 - b * 1 + d = a = 0$,
  - 在$x = e$ 处连续, $e * \ln e - b * e + d = c = 1$,

  得到$b = d = 1$.

(2)

$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \le 2) = 1 - F(2) = 1 - (2\ln 2 - 2 + 1) = 2 - 2\ln 2.$$

(3)

- $$f(x) = F(x)' = \begin{cases} \ln x, & 1 \le x \le e, \\ 0, & x < 1\text{或者}x > e, \end{cases}$$

解4.1.17. 设ξ 为乘客到站时间8点ξ分, 于是ξ 是$(0, 60)$ 上的均匀分布, 密度函数为:

- $$f(x) = \begin{cases} 1/60, & 0 \le \xi \le 60, \\ 0, & x < 0\text{或者}x > 60, \end{cases}$$

设η 是该名乘客需要等车的时间,则η 是乘客到站时间ξ 的函数:

- $$\eta = g(\xi) = \begin{cases} 5 - \xi, & 0 \le \xi \le 5, \\ 25 - \xi, & 5 < \xi \le 25, \\ 55 - \xi, & 25 < \xi \le 55, \\ 60 - \xi + 5, & 55 < \xi \le 60, \end{cases}$$

要求候车时间的数学期望,即求随机变量函数$\eta = g(\xi)$ 的数学期望:

$$\begin{aligned} E(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \\ &= \int_0^5 (5 - x) * 1/60dx + \int_5^{25} (25 - x) * 1/60dx + \int_{25}^{55} (55 - x) * 1/60dx + \int_{55}^{60} (65 - x) * 1/60dx \\ &= 11.67 \end{aligned}$$

解4.1.18. 记ξ的密度函数是$f(x)$, 分布函数是$F(x)$. 设组织x_0 吨货源, 收益为η,则η是需求量ξ 的函数:

- $$\eta = g(\xi) = \begin{cases} 3x_0, & \xi \geq x_0, \\ \\ 3\xi - (x_0 - \xi) = 4\xi - x_0, & \xi < x_0 \end{cases}$$

于是收益的期望为:

$$\begin{aligned} E\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{+\infty} 3x_0 f(x)dx + \int_{-\infty}^{x_0} (4x - x_0)f(x)dx \\ &= 3x_0 \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{x_0} 4xf(x)dx - x_0 \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx \end{aligned}$$

要使收益最大,即使$E\eta$ 最大, 也就是关于x_0 的导数等于0的点.

$$\begin{aligned} 0 &= -3x_0 f(x_0) + 3\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx + 4x_0 f(x_0) - \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx - x_0 f(x_0) \\ &= 3(1 - \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx) - \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx \\ &= 3 - 4\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = 3 - 4F(x_0) \end{aligned}$$

所以$F(x_0) = 3/4$, 根据ξ是均匀分布可知: $x_0 = 3500$.

解4.1.19. 参考教材后面答案.

解4.1.20. $\mu = 1, \sigma = 2$.

- $P(\xi \leq 2.2) = \Phi(\frac{2.2-1}{2}) = \Phi(0.6) = 0.7257$;
- $P(-1.6 < \xi \leq 5.8) = \Phi(\frac{5.8-1}{2}) - \Phi(\frac{-1.6-1}{2}) = \Phi(2.4) - \Phi(-1.3) = \Phi(2.4) - 1 + \Phi(1.3) = 0.8950$;
- $P(|\xi| \leq 3.5) = P(-3.5 < \xi \leq 3.5) = \Phi(\frac{3.5-1}{2}) - \Phi(\frac{-3.5-1}{2}) = \Phi(1.25) - \Phi(-2.25) = \Phi(1.25) - 1 + \Phi(2.25) = 0.8822$;

- $P(|\xi| > 4.56) = 1 - P(-4.56 < \xi \leq 4.56) = 1 - \Phi(\frac{4.56-1}{2}) + \Phi(\frac{-4.56-1}{2}) = 1 - \Phi(1.78) + \Phi(-2.78) = 1 - \Phi(1.78) + 1 - \Phi(2.78) = 0.0402.$

解4.1.21. 根据题意可知: $F(x_1) : (F(x_2) - F(x_1)) : (F(x_3) - F(x_2)) : (F(x_4) - F(x_3)) : (F(x_4) = 7 : 24 : 38 : 24 : 7$. 于是$F(x_1) = 0.07$,$F(x_2) = 0.31$,$F(x_3) = 0.69$,$F(x_4) = 0.93$. 根据$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$,以及$\mu = 60$, $\sigma = 3$, 有:

- $0.07 = F(x_1) = \Phi(\frac{x_1-60}{3})$, 于是$\Phi(\frac{60-x_1}{3}) = 1 - 0.07 = 0.93$, 查表可得: $\frac{60-x_1}{3} = 1.474$, 即$x_1 = 55.578$.

- $0.31 = F(x_2) = \Phi(\frac{x_2-60}{3})$, 于是$\Phi(\frac{60-x_2}{3}) = 1 - 0.31 = 0.69$, 查表可得: $\frac{60-x_2}{3} = 0.496$, 即$x_2 = 58.512$.

- $0.69 = F(x_3) = \Phi(\frac{x_3-60}{3})$, 查表可得: $\frac{x_3-60}{3} = 0.496$, 即$x_3 = 61.488$.

- $0.93 = F(x_4) = \Phi(\frac{x_4-60}{3})$, 查表可得: $\frac{x_4-60}{3} = 1.474$, 即$x_4 = 64.422$.

解4.1.22. $\mu = 2$, $P(-1 \leq \xi \leq 2 + \sigma) = \Phi(\frac{2+\sigma-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{-1-\mu}{\sigma}) = \Phi(1) - \Phi(\frac{-3}{\sigma})$. 于是$\Phi(\frac{-3}{\sigma}) = \Phi(1) - 0.6826 = 0.8413 - 0.6826 = 0.1587$. 因此: $\Phi(3/\sigma) = 0.8413$. 即$3/\sigma = 1$, $\sigma = 3$.

解4.1.23. 从ξ 的密度函数可以看出, ξ 服从正态分布$N(20, 40^2)$. 误差的绝对值不超过30米,即$|\xi| \leq 30$, 对应的概率为:

$$P(|\xi| \leq 30) = P(-30 \leq \xi \leq 30) = \Phi(\frac{30-20}{40}) - \Phi(\frac{-30-20}{40}) = \Phi(0.25) + \Phi(1.25) - 1 = 0.4931.$$

设η 是3次独立的测量中, 误差的绝对值不超过30的次数, 于是η 服从二项分布$B(3, 0.4931)$; 至少有一次的概率应该是$P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - (1 - 0.4931)^3 = 0.8698$.

解4.1.24. ξ服从$\lambda = 0.1$的指数分布,于是对应的密度函数为:

- $$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

根据指数分布的无记忆性, 尚能使用5 年以上的概率等于:

$$P(\xi \geq 5) = \int_5^{+\infty} 0.1e^{-0.1x}dx = (-e^{-0.1x})|_5^{+\infty} = e^{-0.5}.$$

一般情况下,即:

$$P(\xi \geq s+5|\xi \geq s) = \frac{P(\xi \geq s+5, \xi \geq s)}{P(\xi \geq s)} = \frac{P(\xi \geq s+5)}{P(\xi \geq s)} = \frac{1-F(s+5)}{1-F(s)}.$$

解4.1.25. 该题是19题的特殊情况, 设ξ的分布函数是$F(x)$, 则$\eta = 1 - e^{-2\xi} = F(\xi)$. 假设$\eta$ 的分布函数为$F_\eta(y)$,

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(F(\xi) \leq y).$$

由于分布函数的值域在[0, 1] 中.

- 当$y < 0$ 时, $F(\xi) \leq y$ 是空集,对应概率为0, 即此时$F_\eta(y) = 0$;
- 当$y > 1$ 时, $F(\xi) \leq y$ 是必然事件,对应概率为1, 即此时$F_\eta(y) = 1$;
- 当$0 \leq y \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= P(F(\xi) \leq y) = P(1 - e^{-2\xi} \leq y) \\ &= P(\xi \leq -\frac{\ln(1-y)}{2}) = \int_0^{-\frac{\ln(1-y)}{2}} 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}|_0^{-\frac{\ln(1-y)}{2}} \\ &= 1 - e^{2\frac{\ln(1-y)}{2}} = y \end{aligned}$$

所以η的分布函数是:

- $$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

即为区间(0, 1)上的均匀分布的分布函数.

解4.1.26. 设η是售出一件产品的获利, 则η是一个离散型随机变量, 所有可能取值是$100, -300$;对应的概率分别为$P(T \geq 1)$, $P(T < 1)$. 于是η的期望等于:

$$\begin{aligned} E\eta &= 100 * P(T \geq 1) + (-300)P(T < 1) \\ &= 100\int_1^{+\infty} 1/5e^{-1/5t}dt - 300\int_0^1 1/5e^{-1/5t}dt \\ &= -100e^{-1/5t}|_1^{+\infty} + 300e^{-1/5t}|_0^1 = 400e^{-1/5} - 300 = 27.48 \end{aligned}$$

解4.1.27. $1/4 = P(\xi = 1) = F(1) - F(1-0) = 1-(a+b)$, 得到$a+b = 3/4$. 又根据分布函数是右连续的,所以在$x = -1$这点右连续,即$1/8 = F(-1) = F(-1+0) = -a+b$.解得$a = \frac{5}{16}, b = \frac{7}{16}$.

解4.1.28. 设卫星的寿命长度是T, 服从参数为a的指数分布; 由于$ET = 1/a = 2$可得, $a = 1/2$.三年后卫星仍在轨道上运行即寿命大于3年, 所以对应概率为:$P(T > 3) = \int_3^{+\infty} 1/2e^{-1/2t}dt = -e^{-1/2t}|_3^{+\infty} = e^{-1.5} = 0.2231$.

设3颗卫星中,三年后仍在轨道上运行的有η颗, 则η服从二项分布$B(3, 0.2231)$. 至少有一颗三年后还在轨道上运行的概率: $P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - (1 - 0.2231)^3 = 0.5311$.

第五章　第五章答案

§5.1　答案

解5.1.1. 设ξ 是甲击中目标的次数, 所有可能取值是0,1,2,服从二项分布$B(2, 0.8)$; η 是乙击中目标的次数,所有可能取值是$0, 1, 2$,服从二项分布$B(2, 0b.6)$. 于是(ξ, η) 的所有可能取值是$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$. 对应的概率为:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = 0.2^2 * 0.4^2 = 0.0064,$$

$$P(\xi = 0, \eta = 1) = 0.2^2 * C_2^1 0.4 * 0.6 = 0.0192,$$

$$P(\xi = 0, \eta = 2) = 0.2^2 * 0.6^2 = 0.0144,$$

$$P(\xi = 1, \eta = 0) = C_2^1 0.8 * 0.2 * 0.4^2 = 0.0512,$$

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = C_2^1 0.8 * 0.2 * C_2^1 0.4 * 0.6 = 0.1536,$$

$$P(\xi = 1, \eta = 2) = C_2^1 0.8 * 0.2 * 0.6^2 = 0.1152,$$

$$P(\xi = 2, \eta = 0) = 0.8^2 * 0.4^2 = 0.1024,$$

$$P(\xi = 2, \eta = 1) = 0.8^2 * C_2^1 0.4 * 0.6 = 0.3072,$$

$$P(\xi = 2, \eta = 2) = 0.8^2 * 0.6^2 = 0.2304.$$

解5.1.2. (ξ_1, ξ_2) 所有可能取值是$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$.对应的概率为:

$$P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) = 0.1; \text{抽到三等品};$$

$$P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = 0.1; \text{抽到二等品};$$

$$P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = 0.8; \text{抽到一等品};$$

$$P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = 0; \text{不可能同时抽到一等品和二等品}.$$

解5.1.3. 根据$P(\xi_1\xi_2 = 0) = 1$ 可知:

$$P(\xi_1 = 0, \xi_2 = -1) + P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) + P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 0) P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = 1.$$

利用离散型随机变量所有概率非负并且和为1, 得到:

$P(\xi_1=-1,\xi_2=-1)=P(\xi_1=-1,\xi_2=1)=P(\xi_1=1,\xi_2=-1)=P(\xi_1=1,\xi_2=1)=0.$

又利用ξ_1,ξ_2的边缘分布可知:

$$P(\xi_1=-1,\xi_2=0)=P(\xi_1=-1)=1/4, P(\xi_1=1,\xi_2=0)=P(\xi_1=1)=1/4;$$

$$P(\xi_1=0,\xi_2=-1)=P(\xi_2=-1)=1/4, P(\xi_1=0,\xi_2=1)=P(\xi_1=1)=1/4;$$

$$P(\xi_1=0,\xi_2=0)+P(\xi_1=-1,\xi_2=0)+P(\xi_1=1,\xi_2=0)=P(\xi_2=0)=1/2,$$

所以$P(\xi_1=0,\xi_2=0)=0.$

$$P(\xi_1=\xi_2)=P(\xi_1=-1,\xi_2=-1)+P(\xi_1=0,\xi_2=0)+P(\xi_1=1,\xi_2=1)=0.$$

解5.1.4. $k=1,2$, $P(\xi_k\le 1)=\int_{-\infty}^{1}\frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})}dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{e^{2x}+1}de^x=\frac{2}{\pi}\int_0^e\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{2}{\pi}\arctan t|_0^e=\frac{2}{\pi}\arctan e$; $P(\xi_k>1)=1-\frac{2}{\pi}\arctan e.$

(η_1,η_2) 所有可能取值是$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.对应的概率为:

$$P(\eta_1=0,\eta_2=0)=P(\xi_1>1,\xi_2>1)=P(\xi_1>1)P(\xi_2>1)=(1-\frac{2}{\pi}\arctan e)^2;$$

$$P(\eta_1=0,\eta_2=1)=P(\xi_1>1,\xi_2\le 1)=P(\xi_1>1)P(\xi_2\le 1)=(1-\frac{2}{\pi}\arctan e)\frac{2}{\pi}\arctan e;$$

$$P(\eta_1=1,\eta_2=0)=P(\xi_1\le 1,\xi_2>1)=P(\xi_1\le 1)P(\xi_2>1)=\frac{2}{\pi}\arctan e(1-\frac{2}{\pi}\arctan e);$$

$$P(\eta_1=1,\eta_2=1)=P(\xi_1\le 1,\xi_2\le 1)=P(\xi_1\le 1)P(\xi_2\le 1)=(\frac{2}{\pi}\arctan e)^2;$$

解5.1.5. (1)

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}Ae^{-(3x+4y)}dxdy\\&=A\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx\int_0^{+\infty}e^{-4y}dy=A\frac{1}{12}e^{-3x}|_0^{+\infty}e^{-4y}|_0^{+\infty}\\&=\frac{A}{12}\end{aligned}$$

所以$A=12.$

(2)当$x\le 0$ 或者$y\le 0$ 时, 密度函数$f(x,y)=0$, 于是对应的分布函数$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=0.$

当$x>0$ 并且$y>0$ 时$f(x,y)=12e^{-(3x+4y)}$. 于是对应的分布函数:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}12e^{-(3u+4v)}dudv$$
$$=e^{-3u}|_0^x * e^{-4v}|_0^y=(e^{-3x}-1)(e^{-4y}-1)$$

所以:

- $F(x,y)=\begin{cases}(e^{-3x}-1)(e^{-4y}-1), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(3)$P(0<\xi\leq 3,0<\eta\leq 4)=F(3,4)-F(0,4)-F(3,0)+F(0,0)=F(3,4)=(e^{-9}-1)(e^{-16}-1)$.

解5.1.6. (ξ,η) 对应的密度函数是:

- $f(x,y)=\begin{cases}1/2, & -1\leq x+y\leq 1,-1\leq x-y\leq 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

- 当$x<-1$ 或者$x>1$ 时, $f(x,y)=0$, 于是对应的边缘分布$f_\xi(x)=0$;
- 当$-1\leq x\leq 0$ 时, $-1-x\leq y\leq x+1$, 对应的密度函数是$f(x,y)=1/2$, 于是边缘分布$f_\xi(x)=\int_{-1-x}^{1+x}1/2dy=1+x$.
- 当$0\leq x\leq 1$ 时, $-1+x\leq y\leq -x+1$, 对应的密度函数是$f(x,y)=1/2$, 于是边缘分布$f_\xi(x)=\int_{-1+x}^{1-x}1/2dy=1-x$.

因此:

- $$f_\xi(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x \le 0, \\ 1-x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

解5.1.7. (1)根据离散型随机变量所有概率和等于1. $a+2*1/8+3*1/12+4*1/16 = 1$, 得到$a = 1/4$.

(2)ξ 的边缘分布为: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

η 的边缘分布为: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 25/48 & 13/48 & 7/48 & 1/16 \end{pmatrix}$

(3)$P(\xi = \eta) = P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 2, \eta = 2) + P(\xi = 3, \eta = 3) + P(\xi = 4, \eta = 4) = 1/4 + 1/8 + 1/12 + 1/16 = 25/48$.

解5.1.8. (1)根据对任意的x, y 有:

- $1 = F(+\infty, +\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2})$;
- $0 = F(-\infty, y) = A(B - \frac{\pi}{2})(C + \arctan y/3)$;
- $0 = F(x, -\infty) = A(B + \arctan \frac{x}{2})(C - \frac{\pi}{2})$.

得到$B = C = \frac{\pi}{2}, A = \frac{1}{\pi^2}$.

(2)$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1/2}{1+(x/2)^2} \frac{1/3}{1+(y/3)^2} = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{4+x^2} \frac{1}{9+y^2}$.

(3)边缘分布函数$F_\xi(x) = F(x, +\infty) = \frac{1}{\pi^2}(\pi/2 + \arctan x/2)(\pi/2 + \pi/2) = \frac{1}{\pi}(\pi/2 + \arctan x/2)$, 所以对应的边缘密度: $f_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{1/2}{1+(x/2)^2} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{4+x^2}$.

边缘分布函数$F_\eta(y) = F(+\infty, y) = \frac{1}{\pi^2}(\pi/2 + \pi/2)(\pi/2 + \arctan y/3) = \frac{1}{\pi}(\pi/2 + \arctan y/3)$, 所以对应的边缘密度: $f_\eta(y) = \frac{dF_\eta(y)}{dy} = \frac{1}{\pi} \frac{1/3}{1+(y/3)^2} = \frac{3}{\pi} \frac{1}{9+y^2}$.

解5.1.9.

$$\begin{aligned}P(\eta<\xi^2)&=\int_0^1(\int_0^{x^2}1/2e^{-y/2}dy)dx=\int_0^1(-e^{-y/2}|_0^{x^2})dx\\&=\int_0^1(1-e^{-x^2/2})dx=1-\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1e^{-x^2/2}dx\\&=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(0))=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)=0.1445\end{aligned}$$

解5.1.10. (1)

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^2(x^2+cxy)dxdy\\&=\int_0^1(\int_0^2(x^2+cxy)dy)dx=\int_0^1(x^2y+c/2xy^2)|_0^2dx=\int_0^1(2x^2+2cx)dx\\&=(2/3x^3+cx^2)|_0^1=2/3+c\end{aligned}$$

所以$c=1/3$.

(2)

- 当$x<0$ 或$y<0$ 时, 密度函数$f(x,y)=0$, 对应的分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=0;$$

- 当$x\geq 1$ 并且$y\geq 2$ 时, $F(x,y)=1$;
- 当$0\leq x\leq 1$并且$0\leq y\leq 2$ 时,

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=\int_0^x(\int_0^y(u^2+1/3uv)dv)du\\&=\int_0^x(u^2v+1/6uv^2)|_0^ydu=\int_0^x(u^2y+1/6uy^2)du\\&=(1/3u^3y+1/12u^2y^2)|_0^x=1/3x^3y+1/12x^2y^2;\end{aligned}$$

- 当$0\leq x\leq 1$并且$y>2$ 时,

$$F(x,y)=\int_0^x(\int_0^2(u^2+1/3uv)dv)du=2/3x^3+1/3x^2;$$

- 当$x>1$并且$0\leq y\leq 2$ 时,

$$F(x,y)=\int_0^1(\int_0^y(u^2+1/3uv)dv)du=1/3y+1/12y^2.$$

所以, 分布函数是:

- $$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或者}y<0,\\ 1, & x\geq 1, y\geq 2\\ 1/3x^3y+1/12x^2y^2, & 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2\\ 2/3x^3+1/3x^2, & 0\leq x\leq 1, y>2\\ 1/3y+1/12y^2, & x>1, 0\leq y\leq 2\end{cases}$$

(3)ξ的边缘密度:

- $$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, & x<0\text{或者}x>1,\\ \int_0^2(x^2+1/3xy)dy=2x^2+2/3x, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

η的边缘密度:

- $$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0, & y<0\text{或者}y>2,\\ \int_0^1(x^2+1/3xy)dx=1/3+1/6y, & 0\leq y\leq 2\end{cases}$$

(4) 当$y>2$ 或者$y<0$ 时, $f_\eta(y)=0$, 所以$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$ 没有定义;

当$0 \le y \le 2$ 时, $f_\eta(y) = 1/3 + 1/6y$, 所以

- $$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \begin{cases} 0, & x < 0\text{或者}x > 1, \\ \frac{x^2+1/3xy}{1/3+1/6y} = \frac{6x^2+2xy}{2+y}, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

当$x > 1$ 或者$x < 0$ 时, $f_\xi(x) = 0$, 所以$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}$ 没有定义;
当$0 \le x \le 1$ 时, $f_\xi(x) = 2x^2 + 2/3x$, 所以

- $$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \begin{cases} 0, & y < 0\text{或者}y > 2, \\ \frac{x^2+1/3xy}{2x^2+2/3x} = \frac{3x+y}{2+6x}, & 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

解5.1.11. (1) ξ的边缘密度:

- $$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^{+\infty}(2e^{-(2x+y)})dy = 2e^{-2x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

当$x < 0$ 时, $f_\xi(x) = 0$, 所以$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)}$ 没有定义;
当$x \ge 0$ 时, $f_\xi(x) = 2e^{-2x}$, 所以

- $$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{2e^{-(2x+y)}}{2e^{-2x}} = e^{-y}, & y \ge 0 \end{cases}$$

η的边缘密度:

- $$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_0^{+\infty}(2e^{-(2x+y)})dx = e^{-y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

当$y < 0$ 时, $f_\eta(y) = 0$, 所以$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$ 没有定义;
当$y \geq 0$ 时, $f_\eta(y) = e^{-y}$, 所以

- $$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2e^{-(2x+y)}}{e^{-y}} = 2e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(2)

$$P(\xi \leq 2|\eta \leq 1) = \frac{P(\xi \leq 2, \eta \leq 1)}{P(\eta \leq 1)} = \frac{\int_0^2(\int_0^1(2e^{-(2x+y)})dy)dx}{\int_0^1 e^{-y}dy} = 1 - e^{-4}$$

解5.1.12. 根据题意可得:

- $$f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

- $$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(1)

- $$f(x,y) = f_\xi(x) f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

(2)η的边缘密度:

- $$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 0, & y \le 0或者y \ge 1 \\ \int_0^y (\frac{1}{1-x})dx = -\ln(1-x)|_0^y = -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \end{cases}$$

(3)

$$P(\xi + \eta > 1) = \int_0^{1/2} (\int_{1-x}^1 \frac{1}{1-x} dy)dx + \int_{1/2}^1 (\int_x^1 \frac{1}{1-x} dy)dx = \ln 2.$$

解5.1.13. 由所有概率和等于1可得: $A + B = 1/3$. 又根据独立性可得: $1/9 = (1/6 + 1/9 + 1/18)(1/9 + A)$.所以$A = 2/9, B = 1/9$.

解5.1.14. 设$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}$,$i = 1, 2; j = 1, 2, 3$. 于是根据边缘分布及随机变量的独立性:

$$p_{11} = 1/6 - 1/8 = 1/24; \quad p_{1\bullet} = \frac{p_{11}}{p_{\bullet 1}} = \frac{1/24}{1/6} = 1/4,$$

$$p_{13} = p_{1\bullet} - p_{11} - p_{12} = 1/4 - 1/24 - 1/8 = 1/12; \quad p_{2\bullet} = \frac{p_{21}}{p_{\bullet 1}} = \frac{1/8}{1/6} = 3/4,$$

$$p_{\bullet 2} = \frac{p_{12}}{p_{1\bullet}} = \frac{1/8}{1/4} = 1/2; \quad p_{22} = p_{\bullet 2} - p_{12} = 1/2 - 1/8 = 3/8,$$

$$p_{\bullet 3} = 1 - p_{\bullet 1} - p_{\bullet 2} = 1 - 1/6 - 1/2 = 1/3; \quad p_{23} = p_{\bullet 3} - p_{13} = 1/3 - 1/12 = 1/4.$$

解5.1.15. (ξ, η) 所有可能取值是$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$; 设对应的概率分别为:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = a, P(\xi = 0, \eta = 1) = b,$$

$$P(\xi = 1, \eta = 0) = c, P(\xi = 1, \eta = 1) = d.$$

根据题中条件可知:$P(\xi = 1) = 3/4, P(\xi = 0) = 1/4; P(\eta = 1) = 1/2, P(\eta = 0) = 1/2$. 即: $a + b = 1/4, c + d = 3/4, a + c = 1/2, b + d = 1/2$.

根据题意可知: $E\xi = 3/4, D\xi = 3/16; E\eta = 1/2, D\eta = 1/4$. 于是$E(\xi\eta) = E\xi E\eta + Cov(\xi,\eta) = E\xi E\eta + r_{\xi\eta}\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta} = 3/4 * 1/2 + \sqrt{3}/3 * \sqrt{3}/4 * 1/2 = 1/2$.

又根据(ξ, η)的联合分布律可知: $P(\xi\eta = 0) = a+b+c, P(\xi\eta = 1) = d$. 即$E(\xi\eta) = d$. 于是$d = 1/2$, 结合前面的方程可知: $a = 1/4, b = 0, c = 1/4$.

解5.1.16. (1)

- $$F_\xi(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

- $$F_\eta(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

(2)

- $$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}0.25e^{-0.5(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

- $$f_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}=\begin{cases}0.5e^{-0.5x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

- $$f_\eta(y)=\frac{dF_\eta(y)}{dy}=\begin{cases}0.5e^{-0.5y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

(3)由于$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$, 所以ξ 和η 相互独立.

(4)两部件寿命均超过100小时(即0.1千小时)的概率等于:

$$P(\xi\ge 0.1,\eta\ge 0.1)=\int_{0.1}^{+\infty}\int_{0.1}^{+\infty}0.25e^{-0.5(x+y)}dxdy=e^{-0.5x}|_{0.1}^{+\infty}e^{-0.5y}|_{0.1}^{+\infty}=e^{-0.1}.$$

解5.1.17. (1)

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1(\int_0^x c(x+y)dy)dx\\ &=c\int_0^1(xy+y^2/2)|_0^x dx=c\int_0^1(3x^2/2)dx=\frac{1}{2}cx^3|_0^1=\frac{1}{2}c\end{aligned}$$

所以$c=2$.

(2)当$x < 0$ 或$x > 1$ 时, 密度函数$f(x, y) = 0$, 所以$f_\xi(x) = 0$.
当$0 \le x \le 1$ 时,

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \int_0^x 2(x + y)dy = (2xy + y^2)|_0^x = 3x^2.$$

所以

- $$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0\text{或}x > 1, \\ 3x^2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

当$y < 0$ 或$y > 1$ 时, 密度函数$f(x, y) = 0$, 所以$f_\eta(y) = 0$.
当$0 \le y \le 1$ 时,

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_y^1 2(x + y)dx = (x^2 + 2xy)|_y^1 = 1 + 2y - 3y^2.$$

所以

- $$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y < 0\text{或}y > 1, \\ 1 + 2y - 3y^2, & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

(3)$f(x, y) \ne f_\xi(x)f_\eta(y)$, 所以$\xi$ 和η 不独立.
(4)

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta \le 1) &= \int_0^{1/2} (\int_y^{1-y} 2(x + y)dx)dy \\ &= \int_0^{1/2} (x^2 + 2xy)|_y^{1-y} dy = \int_0^{1/2} (1 - 4y^2)dy \\ &= (y - 4\frac{1}{3}y^3)|_0^{1/2} = 1/3 \end{aligned}$$

解5.1.18. (1)

- $$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2)

$$P(\xi\le 1|\eta>0)=\frac{P(\xi\le 1,\eta>0)}{P(\eta>0)}=\frac{\int_0^1(\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy)dx}{\int_0^{+\infty}e^{-y}dy}=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}.$$

解5.1.19. 第2题的联合概率分布列是:

$P(\xi_1=0,\xi_2=0)=0.1, P(\xi_1=0,\xi_2=1)=0.1, P(\xi_1=1,\xi_2=0)=0.8, P(\xi_1=1,\xi_2=1)=0.$

ξ_1 的边缘分布为$P(\xi_1=0)=0.2, P(\xi_1=1)=0.8;\xi_2$ 的边缘分布为$P(\xi_2=0)=0.9, P(\xi_2=1)=0.1$. $\xi_1\xi_2$ 的边缘分布为$P(\xi_1\xi_2=0)=1, P(\xi_1\xi_2=1)=0$. 于是

$$E\xi_1=0.8, E\xi_2=0.1; D\xi_1=0.8*0.2=0.16, D\xi_2=0.9*0.1=0.09.$$

$Cov(\xi_1,\xi_2)=E\xi_1\xi_2-E\xi_1E\xi_2=0-0.8*0.1=-0.08; r=\dfrac{Cov(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}}=\dfrac{-0.08}{0.4*0.3}=-\dfrac{2}{3}.$

解5.1.20.

- $$f(x)=\begin{cases} 1/2e^{x}, & x\le 0, \\ 1/2e^{-x}, & x>0 \end{cases}$$

(1)

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{2}e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xde^{x}-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}xde^{-x} \\ &= \frac{1}{2}xe^{x}|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx-\frac{1}{2}xe^{-x}|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{x}|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}e^{-x}|_{0}^{+\infty}=-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=0 \end{aligned}$$

(或者直接根据$xf(x)$是奇函数, 在对称区间上积分等于0.)

$$\begin{aligned}
E\xi^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x^2 de^x - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 de^{-x} \\
&= \frac{1}{2} x^2 e^x|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} 2xe^x dx - \frac{1}{2} x^2 e^{-x}|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} 2xe^{-x} dx \\
&= 1 - (-1) = 2
\end{aligned}$$

于是$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 2$.

(2) 由于$x|x|f(x)$ 是奇函数, 所以在对称区间上积分为0, 即$E(\xi|\xi|) = 0$.因此:

$$Cov(\xi, |\xi|) = E(\xi|\xi|) - E\xi E(|\xi|) = 0 - 0 * E(|\xi|) = 0.$$

(3) ξ 和$|\xi|$ 不相关. 但是也不独立, 因为对任何使$0 < F_\xi(a) < 1$ 的正常数a,

$$P(\xi \le a, |\xi| \le a) = P(|\xi| \le a) > P(\xi \le a)P(|\xi| \le a).$$

(因为$P(\xi \le a) = F_\xi(a) < 1$).

解5.1.21. (1)

$$\begin{aligned}
E\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy \int_0^1\int_0^1 x(2-x-y)dxdy \\
&= \int_0^1 (x(2y - xy - \frac{1}{2}y^2)|_0^1)dx = \int_0^1 (\frac{3}{2}x - x^2)dx \\
&= (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2)|_0^1 = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

根据x, y的对称性可知$E\eta = \frac{5}{12}$.

$$\begin{aligned}
E\xi^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy \int_0^1\int_0^1 x^2(2-x-y)dxdy \\
&= \int_0^1 (x^2(2y - xy - \frac{1}{2}y^2)|_0^1)dx = \int_0^1 (\frac{3}{2}x^2 - x^3)dx \\
&= (-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3)|_0^1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

于是方差

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{4} - \frac{25}{144} = \frac{11}{144}.$$

根据x, y的对称性可知$D\eta = \frac{11}{144}$.

$$
\begin{aligned}
E\xi\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy \int_0^1\int_0^1 x(2y-xy-y^2)dxdy \\
&= \int_0^1 (x(y^2-\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{3}y^3)|_0^1)dx = \int_0^1(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x^2)dx \\
&= (-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2)|_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

所以$Cov(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = \frac{1}{6} - \frac{25}{144} = -\frac{1}{144}$.

$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2Cov(\xi,\eta) = \frac{11}{144} + \frac{11}{144} + 2\frac{-1}{144} = \frac{5}{36}$.

(2)$r = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{\eta}} = \frac{\frac{-1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11} \neq 0$. 所以$\xi$ 和η 相关不独立.

解5.1.22. 当$x<0$ 或$x>1$ 时, 密度函数$f(x,y)=0$, 所以$f_\xi(x)=0$.

当$0\le x\le 1$ 时,

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_5^{+\infty} 2xe^{-(y-5)}dy = -2xe^{-(y-5)}|_5^{+\infty} = 2x.$$

所以

- $$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x<0\text{或}x>1, \\ 2x, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

当$y\le 5$ 时, 密度函数$f(x,y)=0$, 所以$f_\eta(y)=0$.

当$y>5$ 时,

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 2xe^{-(y-5)}dx = x^2e^{-(y-5)}|_0^1 = e^{-(y-5)}.$$

所以

- $$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y\le 5, \\ e^{-(y-5)}, & y>5 \end{cases}$$

由于$f(x,y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$, 所以$\xi$和$\eta$ 相互独立.

$E(\xi\eta) = E\xi E\eta = (\int_0^1 x*2xdx)*(\int_5^{+\infty} e^{-(y-5)}dy) = \frac{2}{3}*6 = 4.$