第十五章　傅里叶级数

§1　傅里叶级数

1. 在指定区间内把下列函数展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=x$　(ⅰ) $-\pi<x<\pi$, (ⅱ) $0<x<2\pi$;

(2) $f(x)=x^2$　(ⅰ) $-\pi<x<\pi$, (ⅱ) $0<x<2\pi$;

(3) $f(x)=\begin{cases} ax, & -\pi<x\leqslant 0 \\ bx, & 0<x<\pi \end{cases}$　$(a\neq b, a\neq 0, b\neq 0)$

解　(1)(ⅰ) 函数 f 及其周期延拓后的图像如图 15－1 所示. 显然 f 是按段光滑，故由收敛定理知它可以展开成傅里叶级数.

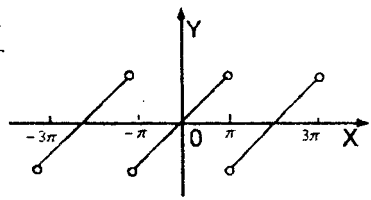

图 15—1

由于 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=0$$

当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{x^2\pi}\cos nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{n}, \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ \dfrac{2}{n}, \quad \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

所以在区间$(-\pi,\pi)$上

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

（ⅱ）函数f及其周期延拓后的图像如图 15－2 所示，显然f是按段光滑的，故由收敛定理知它可以展开成傅里叶级数.

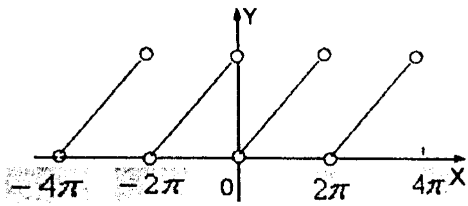

图 15—2

由于$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x dx = 2\pi$

当$n \geqslant 1$时

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx = -\frac{2}{n}$$

所以在区间$(0,2\pi)$上

$$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

(2)（ⅰ）函数f及其周期延拓后的图像如图 15－3 所示，显然f是按段光滑的，故由收敛定理知它可以展开成傅里叶级数.

由于$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$

当 $n \geqslant 1$ 时,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx = \frac{\sin nx}{n\pi}x^2 \mid_{-x}^{x} - \frac{2}{n\pi}\int_{-x}^{x} x\sin nx dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ -\dfrac{4}{n^2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}x^2\cos nx \mid_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0$$

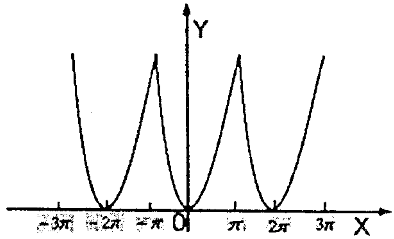

图 15—3

所以在区间$(-\pi,\pi)$上,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

(ii) 函数 f 及其周期延拓后的图像如图 15 - 4 所示.显然 f 是按段光滑的,故由收敛定理,它可以展开成傅里叶级数.

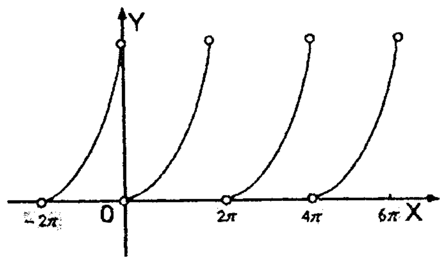

图 15—4

由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx dx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx dx = -\frac{4\pi}{n}(n = 1,2,\cdots)$$

所以以区间$(0,2\pi)$上

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n}).$$

(3) 函数 f 及其延拓后的函数是按段光滑的,因而可以展开成傅里

叶级数.由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}axdx+\int_{0}^{\pi}bxdx]=\frac{b-a}{2}\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}ax\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}bx\sin nxdx]=\frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}ax\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}bx\sin nxdx]$$

$$=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$$

所以在区间$(-\pi,\pi)$上

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2(a-b)}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(a+b)\sin nx]$$

2. 设 f 是以 2π 为周期的可积函数,证明对任何实 c,有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,n=0,1,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,n=1,\cdots$$

证　由定积分性质知

$$\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{c}^{-\pi}f(x)\cos nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx+\int_{\pi}^{c+2\pi}f(x)\cos nxdx]$$

对于积分$\int_{c}^{\pi}f(x)\cos nxdx$作变量代换:$t=x+2\pi$,由于 f 以 2π 为周期,所以

$$\int_{c}^{-\pi}f(x)\cos nxdx=\int_{c+2\pi}^{\pi}f(t-2\pi)\cos n(t-2\pi)dt$$

$$=-\int_{\pi}^{c+2\pi}f(t)\cos ntdt$$

将此结果代入上式,得

$$\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=a_n\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

同理可证得第二个等式.

3. 把函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4},-\pi<x<0\\ \dfrac{\pi}{4},0\leqslant x<\pi\end{cases}$

展开成傅里叶级数,并由它推出

(1) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}\cdots$;

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots$.

解　函数 f 及其延拓后的图像如图 15－5 所示,显然是按段光滑的,因而它可以展开成傅里叶级数.

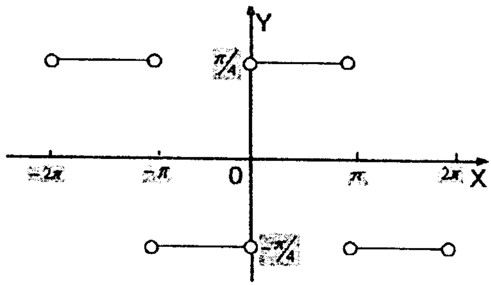

图 15—5

由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\frac{\pi}{4})dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\frac{\pi}{4})\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos nxdx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\frac{\pi}{4})\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nxdx$$
$$=\frac{1}{4n}\cos nx\mid_{-\pi}^{0}-\frac{1}{4n}\cos nx\mid_{0}^{\pi}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, 当\ n\ 为奇数时,\\ 0, 当\ n\ 为偶数时\end{cases}$$

所以当 $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 时,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

当 $x = 0$ 时,上式右端收敛于 0;

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,由于 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$,所以

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\\ &= (1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots)\\ &\quad + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \cdots)\\ &= (1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots)\\ &\quad + (-\frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots)\\ &= (1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots) - \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

所以 $\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \cdots$

当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时,由于 $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{4}$,所以

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots)$$

因此 $$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots$$

4. 设函数 $f(x)$ 满足条件:$f(x+\pi) = -f(x)$,问此函数在 $(-\pi, \pi)$ 内的傅里叶级数具有什么特性?

解 由于

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}[-\int_{-\pi}^{0} f(\pi + x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx]$$
$$(n = 0,1,2,\cdots)$$

在上式右端第一个积分中令 $x + \pi = y$,则得

$$a_n = \frac{1}{\pi}[-\int_{0}^{\pi} f(y)\cos n(y - \pi)dy + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx]$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[(-1)^{n+1} + 1]f(x)\cos nx dx$$

于是,得 $a_{2n} = 0(n = 0,1,2,\cdots)$. 同理,可得 $b_{2n} = 0(n = 1,2,\cdots)$. 因此,函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n} = b_{2n} = 0,(n = 1,2,\cdots)$$

5. 设函数 $f(x)$ 满足条件:$f(x + \pi) = f(x)$. 问此函数在 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数具有什么特性?

解　与上题类似,我们可求得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[(-1)^n + 1]f(x)\cos nx dx (n = 0,1,2,\cdots)$$

因此有 $a_{2n-1} = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$

同理,可求得　$b_{2n-1} = 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$

即函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0(n = 1,2,\cdots)$$

6. 试证函数系 $\cos nx, n = 0,1,2,\cdots$ 和 $\sin nx, n = 1,2,\cdots$ 都是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系,但它们合起来的(5)式不是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系.

证　对于函数 $\cos nx(n = 0,1,2,\cdots)$ 因为

$$\int_{0}^{\pi}\cos nx dx = 0$$

$$\int_{0}^{\pi}\cos mx\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\cos(m + n)x + \cos(m - n)x]dx = 0$$

其中 $m \neq n$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos 2nx + 1)dx = \frac{\pi}{2} \quad (n \neq 0)$$

所以，在三角函数系 $\cos nx(n = 0,1,2,\cdots)$ 中，任何两个不相同的函数的乘积在 $[0,\pi]$ 上的积分都等于零. 而任何一个函数的平方在 $[0,\pi]$ 上的积分都不等于零. 因此，函数系 $\cos x,(n = 0,1,2,\cdots)$ 是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系；同理，函数系 $\sin nx(n = 1,2,\cdots)$ 也是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系.

对于函数系 $1.\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cos nx,\sin nx,\cdots$

由于

$$\int_0^{\pi}\cos 2x\sin xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sin 3x - \sin x]dx$$

$$= \frac{1}{2}[-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x]\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3} \neq 0$$

所以，这个函数系不是 $[0,\pi]$ 上的正交函数系.

7. 求下列函数系的傅里叶级数展开式：

(1) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2},0 < x < 2\pi$；

(2) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$；

(3) $f(x) = ax^2 + bx + c$,(ⅰ) $0 < x < 2\pi$,(ⅱ) $-\pi < x < \pi$；

(4) $f(x) = \mathrm{ch}x, -\pi < x < \pi$；

(5) $f(x) = \mathrm{sh}x, -\pi < x < \pi$.

解　(1) 由 $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}(0 < x < 2\pi)$ 知

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}dx = \frac{1}{2\pi}(\pi x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nxdx$$

$$= \frac{\pi - x}{2n\pi}\sin nx\ \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nxdx$$

$$= -\frac{\pi - x}{2n\pi}\cos nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos x dx = \frac{1}{n}$$

$(n = 1,2,\cdots)$

所以在区间$(0,2\pi)$上，$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

(2)$f(x) = \sqrt{1-\cos x}(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$

因为在区间$[-\pi,\pi]$上

$$f(x) = \sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}} = \begin{cases} -\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}, -\pi \leqslant x < 0 \\ \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

所以

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}(-\sin\frac{x}{2})dx + \int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx] = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

$$a_n]] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos ndx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}[-\int_{-\pi}^{0}\sin\frac{x}{2}\cos nxdx + \int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos nxdx]$$

在上式右端第一个积分中，令 $x = -y$，则

$$a_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}[\int_{\pi}^{0}\sin(-\frac{y}{2})\cos(-ny)dy + \int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos ndx]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos nxdx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin(\frac{1}{2} - n)x]d$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{\pi(4n^2-1)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}[-\int_{-\pi}^{0}\sin\frac{x}{2}\sin nxdx + \int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin nxdx]$$

在上式右端第一个积分中，令 $x = -y$，则

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0}\sin\left(-\frac{y}{2}\right)\sin(-ny)dy + \int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin nx dx\right] = 0$$

因此,在区间$(-\pi,\pi)$上

$$\sqrt{1-\cos x} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{4n^2-1}$$

当$x=\pm\pi$时,上式右端收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = f(\pm\pi)$$

所以,在区间$[-\pi,\pi]$上

$$\sqrt{1-\cos x} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{4n^2-1}$$

(3) $f(x) = ax^2 + bx + c$

(ⅰ) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)dx$

$$= \frac{8a\pi^2}{3} + 2b\pi + 2c$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)\cos nx dx$$

$$= \frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx dx + \frac{b}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx dx + \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx$$

$$= \frac{4a}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)\sin nx dx = -\frac{4\pi a}{n} - \frac{2\pi}{n}$$

因此,在区间$(0,2\pi)$上

$$ax^2+bx+c$$

$$= \frac{4a}{3}\pi^2 + b\pi + c + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4a}{n^2}\cos nx - \frac{4a\pi+2b}{n}\sin nx\right)$$

(ⅱ) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(ax^2+bx+c)dx = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{bx^2}{2}+cx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$$= \frac{2a\pi^2}{3} + 2c$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ax^2+bx+c)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx+\frac{b}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4a}{n^2},\text{当 } n \text{ 为偶数时},\\[2ex] -\dfrac{4a}{n^2},\text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ax^2+bx+c)\sin nx\,dx$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{2b}{n},\text{当 } n \text{ 为偶数时},\\[2ex] \dfrac{2b}{n},\text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

因此,在区间$(-\pi,\pi)$上

$$ax^2-bx+c$$

$$=(\frac{a}{3}\pi^2+c)+\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{4a}{n^2}\cos nx-(-1)^n\frac{2b}{n}\sin nx]$$

(4)$f(x)=\mathrm{ch}x$,由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}x\,dx=\frac{1}{\pi}\mathrm{sh}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{sh}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}x\cdot(-1)^n+\frac{n}{\pi}\mathrm{ch}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$-\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}x\cos nx\,dx$$

$$=(-1)^n\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\pi-n^2a_n$$

所以　$a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}\cdot\dfrac{2}{\pi}\mathrm{sh}\pi$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{sh}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}x\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{n}{\pi}\operatorname{ch}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{n^3}{\pi}b_n$$

所以有 $b_n=0$,因此,在区间$(-\pi,\pi)$上

$$\operatorname{ch}x=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}\cos nx\right]$$

(5) 由 $f(x)=\operatorname{sh}x$ 为$(-\pi,\pi)$上的奇函数知

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}x\,dx=0,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}x\cos nx\,dx=0$$

又因为 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}x\sin nx\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{ch}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}x\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{n}{\pi}\operatorname{sh}x\cos nx\Big|_{\pi}^{\pi}-\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2n}{\pi}\operatorname{sh}\pi(-1)^{n+1}-n^2b_n$$

所以有 $b_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi$,因此,在区间$(-\pi,\pi)$上

$$\operatorname{sh}x=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\sin nx.$$

8. 求函数 $f(x)=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2),0<x<2\pi$ 的傅里叶级数展开式,并应用它推出$\frac{\pi^2}{6}=\sum\frac{1}{n^2}$

解　利用第 7 题中第(3)小题的结论:在间$(0,2\pi)$上

$$ax^2+bx+c=\frac{4a}{3}\pi^2+b\pi+c$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4a}{n^2}\cos nx-\frac{4a\pi+2b}{n}\sin nx\right)$$

将 $a=\frac{1}{4},b=-\frac{\pi}{2},c=\frac{\pi^2}{6}$ 代入,即得

$$\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}(0<x<2\pi)$$

当 $x=0$ 时,上式右端收敛于

$$\frac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2}=\frac{\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{6}}{2}=\frac{\pi^2}{6}$$

所以有

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

9. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上的光滑函数,且 $f(-\pi)=f(\pi)$, a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数, a_n',b_n' 为 f 的导函数 f' 的傅里叶系数.证明:

$a_0'=0,a_n'=nb_n,b_n'=-na_n\quad(n=1,2,\cdots)$

证　因为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上光滑,所以 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上有连续的导函数.

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)dx=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0$$

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\ |_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=nb_n$$

$$b_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\ |_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=-na_n$$

即　$a_0'=0,a_n'=nb_n,b_n'=-na_n\quad(n=1,2,\cdots)$

10. 证明:若三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

中的系数 a_n, b_n 满足关系 $\sup\limits_n\{|n^3a_n|, |n^3b_n|\} \leqslant M$，
M 为常数，则上述三角级数收敛，且其和函数具有连续的导函数.

证 由 $\sup\limits_n\{n^3|a_n|, n^3|b_n|\} \leqslant M$ 知

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{n^3}, \ |b_n| \leqslant \frac{M}{n^3} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

因为

$$\begin{aligned} |a_n\cos nx + b_n\sin nx| &\leqslant |a_n\cos nx| + |b_n\sin nx| \\ &\leqslant |a_n| + |b_n| \leqslant \frac{2M}{n^3} \end{aligned}$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^3}$ 收敛，所以级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

收敛，并且绝对收敛，一致收敛.

记 $$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

则 $$\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$$

由于

$$\begin{aligned} |nb_n\cos nx - na_n\sin nx| &\leqslant |nb_n\cos nx| + |na_n\sin nx| \\ &\leqslant |nb_n| + |na_n| \leqslant \frac{2M}{n^2} \end{aligned}$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2M}{n^2}$ 收敛，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$$

一致收敛. 根据定理 13.12(连续性定理)，此级数的和函数连续.

根据定理 13.14(逐项求导定理)有：

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d}{dx}u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$$

因此，级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$的和函数具有连续的导函数.

§2　以 $2L$ 为周期的函数的展开式

1. 求下列周期函数的傅里叶级数展开式：

(1)$f(x)=|\cos x|$(周期 π)；(2)$f(x)=x-[x]$(周期 1)；

(3)$f(x)=\sin^4 x$(周期 π)；(4)$f(x)=\mathrm{sgn}(\cos x)$(周期 2π)

解　(1)f 是$[-\pi,\pi]$上的偶函数，f 及其延拓后的图形如图 15－6 所示. 由于 f 是按段光滑的，因此，要以展开成傅里叶级数，而且这个级数为余弦级数.

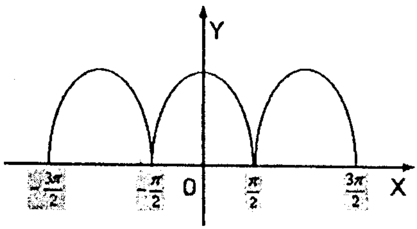

图 15—6

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx$$
$$=\frac{4}{\pi}$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|\cos xdx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 xdx\right]=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos x|\cos nxdx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos nxdx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\cos nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]dx$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]dx$$

$$=\begin{cases}0, n=2k+1\text{ 时}, \\ (-1)^{k+1}\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}, n=2k\text{ 时}\end{cases}\quad \text{其中 } k=1,2,\cdots$$

因此,根据收敛定理,有

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx,\ -\infty<x<+\infty$$

由于 $f(x)=|\cos x|=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|$

所以 $|\cos x|=\dfrac{2}{\pi}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4k^2-1)}\cos 2k(x+\frac{\pi}{2})$

即 $|\cos x|=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx\ (-\infty<x<+\infty)$

(2) f 是以 1 为周期的周期函数,f 的图形如图 15－7 所示. 由于 f 是按段光滑的,因此,可以展开成傅里叶级数.

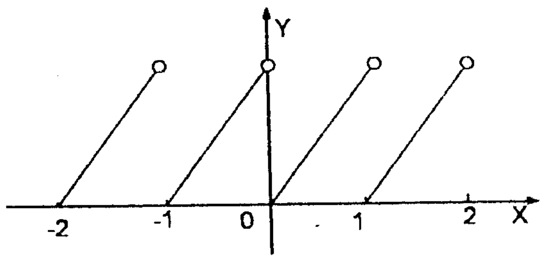

图 15—7

$$a_0=\int_{1}^{1}\{x-[x]\}dx=\int_{1}^{0}\{x-[x]\}dx+\int_{0}^{1}\{x-[x]\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}[x-(-1)]dx+\int_{0}^{1}xdx=1$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}\{x-[x]\}\cos n\pi xdx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x+1)\cos n\pi xdx+\int_{0}^{1}x\cos n\pi xdx=0$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}\{x-[x]\}\sin n\pi xdx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x+1)\sin n\pi x dx + \int_{0}^{1} x\sin n\pi x dx$$

$$= \begin{cases} 0, 当\ n\ 为奇数时, \\ -\dfrac{2}{n\pi}, 当\ n\ 为偶数时 \end{cases}$$

因此,由收敛定理,当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时

$$x - [x] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

当 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时,上式右端收敛于 $\frac{1}{2}$

(3) 首先在 $[-\pi, \pi]$ 上将函数 $f(x) = \sin^4 x$ 展开成傅里叶级数

由于　$\sin^4 = (\frac{1-\cos 2x}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

故有　$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^5 x dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x)dx = \frac{3}{4}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x)\cos nx dx$$

$$= \begin{cases} 0, n \neq 2, n \neq 4, \\ -\dfrac{1}{2}, n = 2, \\ \dfrac{1}{8}, n = 4 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x \sin nx dx = 0, n = 1, 2, \cdots$$

因为函数 $f(x)$ 光滑,根据收敛定理

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x(-\infty < x < +\infty)$$

(4) $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,并且是偶函数,分段光滑,因此可以展开成傅里叶级数,并且这个级数是余弦级数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sgn}(\cos x)dx = \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)dx] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sgn}(\cos x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ (-1)^k \dfrac{4}{(2k+1)\pi}, \text{当 } n = 2k+1(k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

根据收敛定理,$x \neq 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ 时

$$\text{sgn}(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\{(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\}.$$

而当 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ 时,上式右端收敛于 0. 因此,上述展式对一切 $-\infty < x + \infty$ 都成立.

2. 求函数

$$f(x) = \begin{cases} x; 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1; 1 < x < 2 \\ 3 - x; 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

的傅里叶级数,并讨论其收敛性.

解　将 f 延拓,如图 15－8 所示. 易见 f 为偶函数,且按段光滑,因而可在[－3,3]上作傅里叶展开

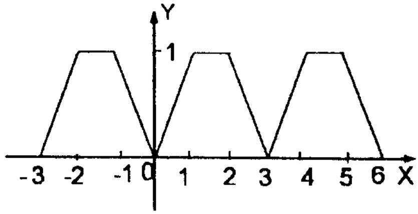

图 15—8

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 xdx + \int_1^2 dx + \int_2^3(3-x)dx = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$$

$$= \frac{2}{3}[\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{3}dx$$

$$+ \int_1^2 \cos\frac{n\pi x}{3}dx + \int_2^3 (3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx]$$

$$= \frac{2}{3}\{[\frac{3}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{3} + (\frac{3}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi x}{3}]\Big|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_1^2$$

$$+ [\frac{9}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} - \frac{3}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{3} - (\frac{3}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi x}{3}]_2^3\}$$

$$= 6[-\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3}) - \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}]$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2}[-1 + 2\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{6} - (-1)^n]$$

$$= \begin{cases} 0, \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时}, \\ \frac{3}{k^2\pi^2}[-1 + (-1)^k\cos\frac{k\pi}{3}], \text{当 } n = 2k \text{ 时} \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0$$

根据收敛定理知

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{k^2} + \frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi}{3}]\cos\frac{2k\pi x}{3}$$

因为 f 延拓后连续，故上述级数对任意的 x，$-\infty < x < +\infty$，都收敛于 $f(x)$.

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}]\cos\frac{4\pi x}{3}$$

$$= (-1-\frac{1}{2})\cos\frac{2\pi x}{3} + (-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{4\pi x}{3}$$

$$+ (-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2})\cos 2\pi x + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{8\pi x}{3}$$

$$+ (-\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{10\pi x}{3} + (-\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2})\cos 4\pi x + \cdots$$

$$= -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x,$$

故 $f(x)$ 的余弦展开式可写为

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x$$

3. 将函数 $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数.

解　为民把 f 展开为余弦级数,对 f 作偶式周期延拓,如图 15－9 所示.

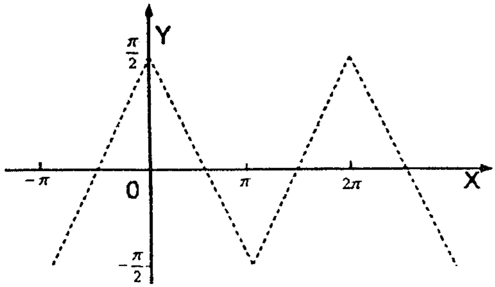

图 15—9

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0, \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ \dfrac{4}{n^2\pi}, \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

由收敛定理及 f 延拓后连续知:

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\quad (x\in[0,\pi])$$

4. 将函数 $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开正弦级数.

解　为了把 f 展开成正弦级数,对 f 作奇式周期延拓,如图 15－10 所示.

$a_0 = 0, a_n = 0, n = 1,2,\cdots$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\sin nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}[\sin(n+\frac{1}{2})x$$
$$+ \sin(n-\frac{1}{2})x]dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{2n+1}$$
$$[-\cos(n+\frac{1}{2})x]\Big|_0^\pi$$
$$+ \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n-1}[-\cos(n-\frac{1}{2})x]\Big|_0^\pi$$
$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{n}{4n^2-1}$$

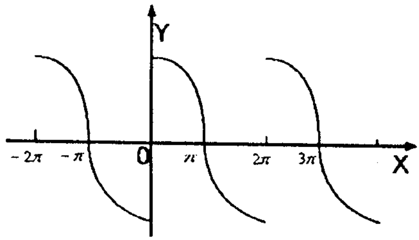

图 15—10

因此,由收敛定理,在区间$(0,\pi)$上:

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx$$

但当 $x=0,\pi$ 时,右端级数收敛于 0.

5. 把函数

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, 0 < x \leqslant 2 \\ x-3, 2 < x < 4 \end{cases}$$

在$(0,4)$上展开成余弦级数.

解　为把 f 展开成余弦级数,对 f 作偶式周期延拓,如图 15 - 11 所示.

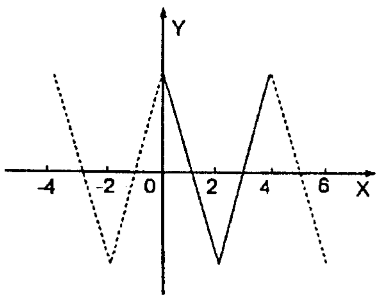

图 15—11

$$a_0=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}[\int_0^2(1-x)dx+\int_2^4(x-3)dx]=0$$

$$a_n=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx$$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx+\int_2^4(x-3)\cos\frac{n\pi x}{4}dx]$$

$$=\frac{1}{2}[(1-x)\cdot\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}-(\frac{4}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi x}{4}]\Big|_0^2$$

$$+\frac{1}{2}[(x-3)\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}+\frac{4}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi x}{4}]\Big|_2^4$$

$$=(\frac{4}{n\pi})^2\{-\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2}[1+(-1)^n]\}$$

$$=\begin{cases}0,\text{当 } n=2k-1\text{ 时},\\ \frac{4}{k^2\pi^2}[-(-1)^k+1],\text{当 } n=2k\text{ 时},\end{cases}\quad k=1,2,\cdots$$

$$=\begin{cases}0,\text{当 } n=2k-1\text{ 时},\\ 0,\text{当 } n=2k\text{ 且 } k=2m\text{ 时},\\ \frac{8}{(2m-1)^2\pi^2},\text{当 } n=2k\text{ 且 } k=2m-1\text{ 时}\end{cases}\quad\text{其中 } m=1,2,\cdots$$

根据收敛定理,在区间(0.4)上,

$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2}$$

6. 把函数 $f(x)=(x-1)^2$ 在(0,1)上展开成余弦级数,并推出 $x^2=6(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots)$

解　为把 f 展开成余弦级数,对 f 作偶式周期延拓,如图 15-12 所示.

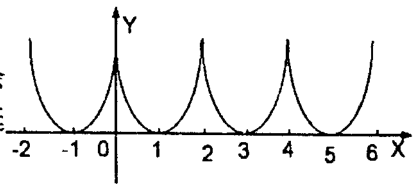

图 15—12

$$a_0=2\int_0^1(x-1)^2dx$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 (x-1)^2 \cos n\pi x dx$$

$$= 2[\frac{1}{n\pi}(x-1)^2 \sin n\pi x \mid_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (x-1)\sin n\pi x dx]$$

$$= \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{1}{n\pi}[(x-1)\cos n\pi x \mid_0^1 - \int_0^1 \cos n\pi x dx] = \frac{4}{n^2\pi^2}$$

根据收敛定理,在区间$(0,1)$上

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}$$

当 $x=0$ 时,由 f 延拓后连续,可得　$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

即　$\pi^2 = 6(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots)$

7. 求下列函数的傅里叶有数展开式:

(1)$f(x) = \arcsin(\sin x)$;(2)$f(x) = \arcsin(\cos x)$.

解　(1)$f(x)$是以 2π 为周期的连续周期的连续周期函数,又 $f(x)$为$(-\pi,\pi)$内奇函数,从而 $a_0 = a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)\sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$+ \frac{2}{\pi}(\frac{x}{n}\cos nx - \frac{1}{n^2}\sin nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{当 } n = 2k \text{ 时} \\ (-1)^k \dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}, \text{当 } n = 2k+1 \text{ 时} \end{cases}$$

$(k = 0,1,2,\cdots)$

根据收敛定理

$$\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^2}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x, (-\infty < x < +\infty)$$

(2) $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数，又 $f(x)$ 为偶函数，从而 $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \arcsin(\cos x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \arcsin[\sin(\frac{\pi}{2} - x)]dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\frac{\pi}{2} - x)dx = 0$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \arcsin(\cos x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\frac{\pi}{2} - x)\cos nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}[\frac{1}{n}(\frac{\pi}{2} - x)\sin nx \mid_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx]$$
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}(-\cos nx)\mid_0^\pi$$
$$= \begin{cases} 0, \text{当 } n - 2k \text{ 时}, \\ \dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时} \end{cases} \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理

$$\arcsin(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

8. 试问如何把定义在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的可积函数 f 延拓到区间 $(-\pi, \pi)$ 内，使它们的傅里叶级数为如下的形式：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

解 (1) 为了使 f 的傅里叶系数 $b_n = 0 (n = 1, 2, \cdots)$，我们可对 f 作遇延拓；又为了使 $a_{2n} = 0 (n = 0,1,2,\cdots)$，根据本章 §1 习题 4 结论，可让延拓后的 f 满足 $f(x+\pi) = -f(x)$.

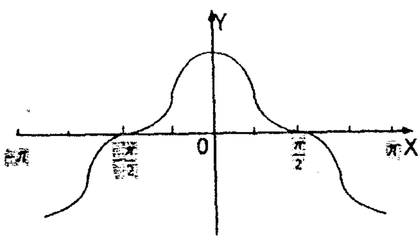

图 15—13

综合上述分析，可先把 f 从 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内到 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

内作偶式延拓,然后再根据 $f(x+\pi)=-f(x)$ 延拓到 $[-\frac{\pi}{2},\pi)$ 上,再偶延拓到 $(-\pi,\pi)$ 上,如图 15 - 13 所示.

这样得到的函数 $f(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 上的偶函数,且满足 $f(x+\pi)=-f(x)$,因此其傅里叶系数 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$, $a_{2n}=0(n=0,1,2,\cdots)$,既它的傅里叶级数的形式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x \quad x\in(-\pi,\pi)$$

(2) 先把 f 从 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内到 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 内作奇延拓,然后再根据 $f(x+\pi)=-f(x)$ 延拓到 $[-\frac{\pi}{2},\pi)$ 上,再奇延拓到 $(-\pi,\pi)$ 内.如图 15 - 14 所示.

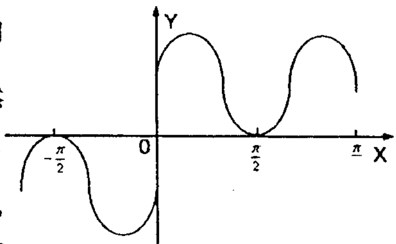

图 15—14

这样得到的函数 $f(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 上奇函数,且满足 $f(x+\pi)=-f(x)$,因此,其傅里叶系数 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$, $b_{2n}=0(n=1,2,\cdots)$,即它的傅里叶级数的形式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x \quad x\in(-\pi,\pi)$$

§3　收敛定理的证明

1. 设 f 为上以 2π 为周期且具有二阶连续的导函数的,证明 f 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上,一致收敛于 f

证　由题设知, $f(x)$ 可以展开成傅里叶级数,如果我们能证得级数

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$$

收敛,则由定理15.1可推得$f(x)$的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛于f.

由于f在$(-\infty,+\infty)$上光滑,所以f'在$[-\pi,\pi]$上可积,且f'的傅里叶系数为:(本章§1习题9结论)

$$a'_0=0,a'_n=nb_n,b'_n=-na_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

因此

$$|a_n|+|b_n|=\frac{|a'_n|}{n}+\frac{|b'_n|}{n}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(a'^2_n+\frac{1}{n^2})+\frac{1}{2}(b'^2_n+\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}(a'^2_n+b'^2_n)+\frac{1}{n^2}$$

由贝塞耳不等式知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a'^2_n+b'^2_n)$收敛,又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,应用正项级数的比较原则,即可推得级数$\frac{|a_n|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$收敛.故$f$的傅里叶级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于$f$.

2. 设f为$[-\pi,\pi]$上可积函数.证明:若f的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于f,则成立帕塞瓦尔(Parseval)等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

这里a_n,b_n为f的傅里叶级数

证　因为f的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于f,所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad x\in(-\pi,\pi)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)]dx$$
$$=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx$$
$$=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx]dx$$

由于 f 在$[-\pi,\pi]$上可积,所以 f 在$[-\pi,\pi]$上有界.由于级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在$[-\pi,\pi]$上一致收敛,故由第十三章§1习题4知级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx]$,在$[-\pi,\pi]$上一致收敛.因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx]dx\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[a_nf(x)\cos nx+b_nf(x)\sin nx]dx\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx]\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2\pi+b_n^2\pi)\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)
\end{aligned}$$

3. 由于帕塞瓦尔等式对于在$[-\pi,\pi]$上满足收敛定理条件的函数也成立〈证略〉.请应用这个结果证明下列各式:

(1) $\dfrac{\pi^2}{8}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$,(提示:应用§1习题3的展开式导出);

(2) $\dfrac{\pi^2}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$,(提示:应用§1习题1(1)(ⅰ)的展开式导出);

(3) $\dfrac{\pi^4}{90}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$,(提示:应用§1习题(2)(ⅰ)的展开式导出)

证　(1) 由§1习题3的结论知:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4},-\pi<x<0\\[2mm]\dfrac{\pi}{4},0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

根据帕塞瓦尔等式有 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi^2}{16}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1})^2$

即$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

(2) 由 §1 习题(1)(ⅰ)的结论

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$

根据帕塞瓦尔等式有：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot 2]^2$$

即　$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

(3) 由 §1 习题 1(2)(ⅰ)的结论知：

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}\quad(-\pi<x<\pi)$$

根据帕塞瓦尔等式有：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=2(\frac{\pi^2}{3})^2+\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{2}{n^2}]^2$$

即　$\frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

4. 证明：若 f,g 均为$[-\pi,\pi]$上可积函数，且它们的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上分别一致收敛于 f 和 g，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$$

其中 a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数，α_n,β_n 为 g 的傅里叶系数.

证　由于 f 的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于 f，所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),x\in[-\pi,\pi].$$

$$f(x)g(x)=\frac{a_0}{2}g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx]$$

由第十三章 §1 习题 4 知级数

$\sum_{n=1}^{\infty}[a_n g(x)\cos nx + b_n g(x)\sin nx]$,在$[-\pi,\pi]$上一致收敛.

由于 f,g 均为$[-\pi,\pi]$上可积函数,故 $f(x)g(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可积,所以

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\{\frac{a_0}{2}g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n g(x)\cos nx + b_n g(x)\sin nx]\}dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n g(x)\cos nx + b_n g(x)\sin nx]dx$$
$$=\frac{1}{2}a_0\alpha_0+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[a_n g(x)\cos nx + b_n g(x)\sin nx]dx$$
$$=\frac{1}{2}a_0\alpha_0$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx dx + b_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx dx]$$
$$=\frac{1}{2}a_0\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$$

注:上面的推导过程中利用了定理 13.10(可积性)的推广.即

若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 f,且 $f,f_n(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上均可积,则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

(证明与定理 13.10 的证明类似)

将此结论用于函数项级数,即可得到定理 13.12(逐项求积)的推广.即:

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a,b]$上一致由敛于 $s(x)$,且每一项 $u_n(x)$ 及 $s(x)$ 均在$[a,b]$上可积,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx$$

5. 证明:若 f 及其导函数 f' 均在$[-\pi,\pi]$上可积,$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$,$f(-\pi)=f(\pi)$ 且成立帕塞瓦尔等式,则

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

证明　设 a_0,a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数 a_0',a_n',b_n' 为 f' 的傅里叶系数则:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\quad n=1,2,3,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\quad n=1,2,3,\cdots$$

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)dx=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0$$

$$\begin{aligned}a_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx\\&=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\,|_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\\&=n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=n\cdot b_n\quad n=1,2,3,\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx\\&=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\\&=-n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=-n\cdot a_n\quad n=1,2,3,\cdots\end{aligned}$$

故由帕塞瓦尔等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2dx=\frac{a_0'^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2+b_n'^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n^2b_n^2 + n^2a_n^2)$$

显然有：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n^2 + n^2b_n^2)$

即 $\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$

总练习题

1. 试求三角多项式

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)$$

的傅里叶级数展开式.

解　$T_n(x)$是以为2π周期的光滑函数，从而在$(-\infty,\infty)$上可展开成傅里叶级数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)]dx = A_0$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos mxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)]\cos mxdx$$

$$= \begin{cases} A_m, \text{当 } m \leqslant n \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } m > n \text{ 时} \end{cases}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\sin mxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)]\sin mxdx$$

$$= \begin{cases} B_m, \text{当 } m \leqslant n \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } m > n \text{ 时} \end{cases}$$

因此，在$(-\infty, +\infty)$上有

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$
$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx).$$

即 $T_n(x)$ 的傅里叶级数展开式是其本身.

2. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数, $a_0,a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为 f 的傅里叶系数. 试证明: 当 $A_0=a_0,A_k=a_k,B_k=b_k(k=1,2,\cdots,n)$, 时, 积分 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$ 取得小值, 且最小值为

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)].$$

上述 $T_n(x)$ 是第1题中的三角多项式, A_0,A_k,B_k 为它的傅里叶系数.

证 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)-[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx]\}^2dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\{-2f(x)[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)]\}dx$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)]^2dx$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]^2dx$$
$$=-2\pi(\frac{A_0}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}A_ka_k+\sum_{k=1}^{n}B_kb_k)+\pi(\frac{1}{2}A_0^2+\sum_{k=1}^{n}A_k^2+\sum_{k=1}^{n}B_k^2)$$
$$+2\pi(\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2)-\pi(\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2)$$
$$=\pi[\frac{1}{2}(A_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{n}(A_k-a_k)^2+\sum_{k=1}^{n}(B_k-b_k)^2]\geqslant 0$$

因此, 当 $A_0=a_0,A_k=a_k,B_k=b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 时, 积分

$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$ 取得最小值. 下面求这个最小值:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)-[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]\}^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-2(\frac{a_0^2}{2}\pi+\pi\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\pi\sum_{k=1}^{n}b_k^2)$$

$$+[\frac{a_0^2}{4}\cdot 2\pi+\sum_{k=1}^{n}(\pi a_k^2+\pi b_k^2)]$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)]$$

所以积分 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$ 的最小值为

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)]$$

3. 设 f 以 2π 为周期，且具有二阶连续可微的函数.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nxdx$$

若级数 $\sum b_n''$ 绝对收敛，则 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{|b_k|}\leqslant\frac{1}{2}(2+\sum_{k=1}^{n}|b_k''|)$

证　$b_n''=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nxdx$

$$=\frac{1}{\pi}f'(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx$$

$$=-\frac{n}{\pi}[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx]$$

$$= -\frac{n}{\pi}[f(\pi)\cos n\pi - f(-\pi)\cos(-n\pi)] - n^2 b_n$$
$$= -n^2 b_n$$

由 §3 习题 3(2) 知 $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 故

$$\frac{1}{2}(2 + \sum_{k=1}^{\infty} | b_k'' |) \geqslant \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} | b_k'' |)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^2} + | b_k'' | = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k^2} + k^2(\sqrt{| b_k |})^2]$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{k} \cdot k \cdot \sqrt{| b_k |} = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{| b_k |} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{| b_k |}$$

即 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{| b_k |} \leqslant \frac{1}{2}(2 + \sum_{k=1}^{\infty} | b_k'' |)$

4. 设周期为 2π 的可积函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 满足以下关系式:

(1) $\varphi(-x) = \psi(x)$; (2) $\varphi(-x) = -\psi(x)$, 试问 φ 的傅里叶系数 a_n, b_n 和 ψ 傅里叶系数 α_n, β_n 有什么关系.

解 (1) 令 $x = -t$ 得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-t)\cos nt dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\cos nt dt = \alpha_n \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-t)\sin nt dt$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t)\sin nt dt = -\beta_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

(2) 仿(1) 可知:此时

$$a_n = -\alpha_n \quad (n = 0,1,2,\cdots); b_n = \beta_n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

5. 设定义在 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{\varphi_n\}$ 满足关系

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ 1, n = m \end{cases}$$

对于在 $[a,b]$ 上的可积函数 f, 定义

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, n = 1,2,\cdots$$

证明：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 收敛，且有不等式 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_n^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2dx$

证　作级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x)$，令 $s_m(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x)$

考察积分

$$\int_a^b[f(x)-s_m(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b f^2(x)dx-2\int_a^b f(x)s_m(x)dx+\int_a^b s_m^2(x)dx$$

由于

$$\int_a^b f(x)s_m(x)dx=\int_a^b f(x)\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x)dx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$$

同理$\int_a^b s_m^2(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$. 于是

$$0\leqslant\int_a^b[f(x)-s_m(x)]^2dx=\int_a^b f^2(x)dx-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$$

因此　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx$

此式对任何自然数 m 都成立，而$\int_a^b f^2(x)dx$ 为有限值，所以正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 的部分和数列有界因而它收敛，且有不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\leqslant\int_a^b[f(x)]^2dx$$