第二章 数列极限

§1 数列极限概念

1. 设 $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}, n = 1,2,\cdots, a = 0$

(1) 对下列 ε 分别求出极限定义中相应的 N:

$\varepsilon_1 = 0.1, \varepsilon_2 = 0.01, \varepsilon_3 = 0.001$;

(2) 对 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 可找到相应的 N,这是否证明了 a_n 趋于 0? 应该怎样做才对?

(3) 对给定的 ε 是否只能找到一个 N?

解 (1) 当 $\varepsilon_1 = 0.1$ 时,要使 $|a_n - 0| = \dfrac{1+(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{2}{n} < 0.1$

只要取 $N_1 = 20$

同理,当 $\varepsilon_2 = 0.01, \varepsilon_3 = 0.001$ 时,只要取 $N_2 = 200, N_3 = 2000$ 即可.

(2) 没有证明 $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$ 趋于 0,正确的做法应该是:

对 $\forall \varepsilon > 0$,都能找到相应的 N 才行.即由 $|a_n - 0| \leqslant \dfrac{2}{n} < \varepsilon$ 求得 $N = [\dfrac{2}{\varepsilon}] + 1$,这时才能下结论:$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{n} = 0$.

(3) 对给定的 ε 若能找到一个合适的 N_0,那么一切大于 N_0 的正整数都可以作为定义中的 N,所以有无穷多个 N.

2. 按 $\varepsilon - N$ 定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n}{2n^2-1} = \dfrac{3}{2}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{n} = 0$ (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0 (a > 1)$

证 (1) 因为 $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$,所以对于任意的 $\varepsilon > 0$,

取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$,则当 $n>N$ 时,$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

(2) 因为 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{2n+3}{2(2n^2-1)}<\frac{2n+2n}{2(2n^2-1)}<\frac{2n+2n}{2(2n^2-2)}<\frac{1}{n-1}(n>2)$. 所以,任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\max\left\{2,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\right\}$,

当 $n>N$ 时有 $\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$.

(3) 因为 $\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\leqslant\frac{1}{n},n=1,2,\cdots$,

从而对任给的 $\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$,则当 $n>N$ 时,

有 $\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

(4) 因为 $\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|<\frac{\pi}{n}<\frac{4}{n}$,所以,任给 $\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{4}{\varepsilon}]+1$,

当 $n>N$ 时有 $\left|\sin\frac{\pi}{n}-0\right|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$.

(5) 因为 $a>1$,令 $a=1+\lambda,(\lambda>0)$,则 $a^n=(1+\lambda)^n$

$$=1+n\lambda+\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2$$

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|<\frac{2n}{n(n-1)\lambda^2}=\frac{2}{(n-1)\lambda^2}.$$

对任给的 $\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{2}{\varepsilon\lambda^2}+1]$,当 $n>N$ 时,

有 $\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)\lambda^2}<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$.

3. 根据例2,例4,例5的结果求出下列极限,并指出哪些是无穷小数列.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}$　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}$　(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

解　根据例2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0(\alpha>0)$,知:(1),(3) 为 0;

根据例4 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n}=0(|q|<1)$ 知:(4),(5) 为 0;

根据例5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$ 知:(2),(6),(7) 为 1;

其中(1),(3),(4),(5) 是无穷小数列.

4. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则对任一正整数 k,有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

证明　若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则由定义知:任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,$|a_n-a|<\varepsilon$.于是当 $n>N$ 时,$n+k>n>N$.
所以 $|a_{n+k}-a|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a$.

5. 试用定义 1′ 证明:

(1) 数列 $\{\dfrac{1}{n}\}$ 不以 1 为极限;(2) 数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 发散.

解　设 $\{a_n\}$ 是一数列,a 是确定的数,若 $\exists\,\varepsilon_0>0$,对 $\forall N>0$,总 $\exists\,n_0>N$,使得 $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$,则 a 不是 $\{a_n\}$ 极限.

(1) 对于常数1,$\exists\,\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0$,$\forall$ 自然数 N,总 $\exists\,n_0=N+1>N$,使得 $\left|\dfrac{1}{n_0}-1\right|=\dfrac{N}{N+1}\geqslant\dfrac{1}{2}$,所以数列 $\{\dfrac{1}{n}\}$ 的极限不是 1.

(2) 当 $n=2k$ 时　$a_n=2k$　$\therefore\lim\limits_{k\to\infty}a_n=+\infty$

当 $n=2k-1$ 时　$a_n=\dfrac{1}{2k-1}$　$\therefore\lim\limits_{k\to\infty}a_n=0$

$\therefore$ 极限不存在,发散.

6. 证明定理 2.1,并应用它证明数列 $\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 的极限是 1.

证　充分性　因为 $\{a_n-a\}$ 是无穷小数列,于是由定义知:对任意的正数 ε,一定存在自然数 N,当 $n>N$ 时,$|(a_n-a)-0|=|a_n-a|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

必要性　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,由极限定义知,对 $\forall\,\varepsilon>0$,$\exists$ 自然数 N,当 $n>N$ 时,$|a_n-a|=|(a_n-a)-0|<\varepsilon$.

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$,即$\{a_n - a\}$是无穷小数列.

因为$\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{n}$且$\{\frac{1}{n}\}$是无穷小数列,

从而$\{1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\}$是无穷小数列.

故由定理2.1知,1是数列$\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\}$的极限.

7. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$,当且仅当$a$为何值时反之也成立.

证　任给$\varepsilon > 0$,由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$知:存在$N$,当$n > N$时,$|a_n - a| < \varepsilon$,故当$n > N$时$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$.

当且仅当,当$a = 0$时,反之成立.

8. 按$\varepsilon - N$定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^3} = 0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$,其中

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}, & n\text{ 为偶数} \\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$$

证　(1)因为$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$,所以任给$\varepsilon > 0$,可取$N = [\frac{1}{4\varepsilon^2}] + 1$,则当$n > N$时,$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$.故$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

(2)因为$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right| = \frac{n(n+1)}{2n^3} \leqslant \frac{n+n}{2n^2} = \frac{1}{n}$,所以任给$\varepsilon > 0$,可取$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$,当$n > N$时,$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right|=0$

(3) 任给 $\varepsilon>0$,当 n 为奇数时,$|a_n-1|=|\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1|=\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\dfrac{1}{n}$;当 n 为偶数时,$|a_n-1|=|\dfrac{n-1}{n}-1|=\dfrac{1}{n}$,取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$,则当 $n>N$ 时,有$|a_n-1|<\varepsilon$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

§2 收敛数列的性质

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n}{n^2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{10})$　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{4+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{1}{4}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n})=0$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-\dfrac{2}{3})^n+1}{(-2)\cdot(-\dfrac{2}{3})^n+3}=\dfrac{1}{3}$

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(5) 原式 $= 1 + 1 + \cdots + 1 = 10$

(6) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}} = 2$

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 且 $a < b$. 证明:

存在正数 N,使得当 $n > N$ 时有 $a_n < b_n$.

证明　取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(b - a) > 0$, 根据两个已知条件分别存在 N_1, N_2, 当 $n > N_1$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon_0$,从而 $a_n < a + \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(a + b)$;

当 $n > N_2$ 时, $|b_n - b| < \varepsilon_0$,从而 $b_n > b - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(a + b)$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,当 $n > N$ 时,必有 $a_n < \frac{1}{2}(a + b) < b_n$

因此,当 $n > N$ 时有 $a_n < b_n$.

3. 设 $\{a_n\}$ 为无穷小数列, $\{b_n\}$ 为有界数列. 证明: $\{a_nb_n\}$ 为无穷小数列.

证明:由 $\{b_n\}$ 有界知,必存在 $M > 0$,使 $|b_n| \leqslant M, n = 1,2,\cdots$

由 $\{a_n\}$ 为无穷小数列知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 必 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$,因此当 $n > N$ 时, $|a_nb_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = 0$,即 $\{a_nb_n\}$ 为无穷小数列.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}}$　　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

(2) $\because \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$

而 $1<2^{\frac{1}{2^n}}<2^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{2}\to 1(n\to\infty)$ $\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}=2$

(3) 令 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$

则 $a_n=(3-\frac{5}{2})+(\frac{5}{2}-\frac{7}{2^2})+\cdots+(\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n})$

$=3-\frac{2n+3}{2^n}$ $\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{2n+3}{2^n})=3$

(4) 当 $n>2$ 时，$\frac{1}{2}<1-\frac{1}{n}<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$

由迫敛性定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}=1$

(5) 由于 $0<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$=\frac{n+1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\to 0(n\to\infty)$ 由迫敛性定理知，原式 $=0$

(6) 由于 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ 由迫敛性定理知，原式 $=1$

5. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中一个是收敛数列，另一个是发散数列.

证明 $\{a_n\pm b_n\}$ 是发散数列. 又问 $\{a_nb_n\}$ 和 $\{\frac{a_n}{b_n}\}(b_n\neq 0)$ 是否必为发散数列？

证明　不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\{b_n\}$发散．假设$\{a_n+b_n\}$收敛于$b$．则由极限性质知$b_n=\{a_n+b_n\}-a_n$收敛于$b-a$，即$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b-a$．这与$\{b_n\}$发散相矛盾，故$\{a_n+b_n\}$发散．同理可得$\{a_n-b_n\}$发散．$\{a_nb_n\}$与$\{\frac{a_n}{b_n}\}(b_n\neq 0)$不一定发散．

例如若取$\{a_n\}=\{\frac{1}{n}\}$，$\{b_n\}=\{n\}$，则$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，但$\{a_nb_n\}$，$\{\frac{a_n}{b_n}\}$都收敛．

6．证明以下数列发散

(1)$\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\}$　　(2)$\{n^{(-1)^n}\}$　　(3)$\{\cos\frac{n\pi}{4}\}$

证　(1) 令$a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$　则$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=-1$

由定理 2.8 知，$\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\}$发散．

(2) 因为$\{n^{(-1)^n}\}$为无界数列，由定理 2.3 知，$\{n^{(-1)^n}\}$发散．

(3) 令$a_n=\cos\frac{n\pi}{4}$

则$\lim\limits_{k\to+\infty}a_{8k}=\lim\limits_{k\to\infty}\cos 2k\pi=1$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{8k+4}=\lim\limits_{k\to\infty}\cos(2k+1)\pi=-1$

由定理 2.8 知$\{\cos\frac{n\pi}{4}\}$发散．

7．判断下列结论是否成立．（若成立，说明理由；若不成立，举出反例）

(1) 若$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$都收敛，则$\{a_n\}$收敛．

(2) 若$\{a_{3k-2}\}$，$\{a_{3k-1}\}$，$\{a_{3k}\}$都收敛，且有相同极限，则$\{a_n\}$收敛．

解　(1) 不成立．例如：$(-1)^n$

(2) 由于$\{a_{3k}\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}a_{3k}=a$，而$\{a_{3k}\}$中含有$\{a_{3k-1}\}$的子列．所以$\{a_{3k-1}\}$中有一个子列收敛于$a$．而$\{a_{3k-1}\}$收敛，由定理2.8知$\{a_{3k-1}\}$收敛于$a$．同理由于$\{a_{3k}\}$中含有$\{a_{3k-2}\}$的子列，$\{a_{3k-2}\}$也收

敛于 a,所以$\{a_n\}$收敛于 a.

8. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=1}^{n}P!$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}],(0<\alpha<1)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n}),\ |\alpha|<1$

解 (1) 因为 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3\cdot 5}}\cdots$
$\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to 0(n\to\infty)$

由迫敛性定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}=0$

(2) 因为当 $n>2$ 时,$n!<\sum\limits_{p=1}^{n}P!=1!+2!+\cdots+(n-2)!+(n-1)!+n!<(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!<2(n-1)!+n!$所以当 $n>2$ 时 $1<\frac{1}{n!}\sum\limits_{p=1}^{n}P!<\frac{2(n-1)!}{n!}+1=\frac{2}{n}+1\to 1\ (n\to\infty)$ 由迫敛性定理知,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sum\limits_{P=1}^{n}P!=1$

(3) 因为 $-1<\alpha-1<0$,所以$(1+n)^{\alpha-1}<n^{\alpha-1}$

即 $(1+n)^{\alpha}<n^{\alpha-1}(n+1)=n^{\alpha-1}+n^{\alpha}$

因此有 $0<(1+n)^{\alpha}-n^{\alpha}<n^{\alpha-1}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha-1}=0$

由迫敛性定理知,原式 $=0$

(4) 因为$(1-\alpha)(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})=1-\alpha^{4^n}$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^{4^n}}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$

9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数,证明:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

证 设 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=a_j,1\leqslant j\leqslant m$

则 $a_j = \sqrt[n]{a_j^n} < \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant a_j \sqrt[n]{m} \to a_j (n \to \infty)$

由迫敛性定理知

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a_j = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$

10. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[na_n]}{n} = a$　　(2) 若 $a > 0, a_n > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

证　(1) 因为 $na_n - 1 < [na_n] \leqslant na_n$，

所以 $a_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{na_n - 1}{n} < \dfrac{[na_n]}{n} \leqslant a_n$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - \dfrac{1}{n}) = a$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[na_n]}{n} = a$.

(2) 由 §1 例 5 知，对 $\forall$ 的实数 $a > 0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$，则存在两正数 h, k，当 n 充分大时，使 $h < a_n < k$，所以 $\sqrt[n]{h} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{k}$. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{h} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

§3　数列极限存在的条件

1. 利用 $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n = e$，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \dfrac{1}{n})^n$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^{n+1}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n+1})^n$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{2n})^n$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n^2})^n$

解　(1) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n-1}{n})^n$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} \cdot (1 + \frac{1}{n-1})]}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} [(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} \cdot (1 + \frac{1}{n-1})]} = \frac{1}{e}$$

(2) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n (1 + \dfrac{1}{n}) = e$

(3) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n+1})^{-1} = e$

(4) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n}} = \sqrt{e}$

(5) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} = 1$

注　以上的(4)与(5)用到事实 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$

2. 试问下面的解题方法是否正确：

求 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n$

解　设 $a_n = 2^n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，由于 $a_n = 2a_{n-1}$，两边取极限 $(n\to\infty)$ 得 $a = 2a$，所以 $a = 0$.

答　不正确.

因为只有证明了 $\{a_n\}$ 的极限存在以后才能设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$. 而 $\{2^n\}$ 是递增且无上界的数列，它的极限不存在. 所以以上解法不正确.

3. 证明下列数列极限存在并求其值：

(1) 设 $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, n = 1,2,\cdots$

(2) 设 $a_1 = \sqrt{c}\,(c > 0), a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, n = 1,2,\cdots$

(3) $a_n = \frac{c^n}{n!}\,(c > 0), n = 1,2,\cdots$

证明　(1) $a_1 = \sqrt{2} < 2$，设 $a_n < 2$，则 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < 2$，

所以 $\{a_n\}$ 有上界 2，而 $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2a_n} - a_n = \frac{a_n(2-a_n)}{\sqrt{2a_n}+a_n} > 0$

因之 $\{a_n\}$ 是递增且有上界的数列. 由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 极限存在，设其为 a，对等式 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ 令 $n\to\infty$ 取极限，有 $a^2 = 2a$，解之得 $a_1 = 0$(舍去)，$a_2 = 2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 2$

(2) 由 $a_1 = \sqrt{c} > 0$ 知 $a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{a_1 + c} = a_2$，设 $a_k < a_{k+1}$，即 $a_k < \sqrt{a_k + c}$，则 $a_k + c < \sqrt{a_k + c} + c = a_{k+1} + c$，

从而 $\sqrt{a_k + c} < \sqrt{a_{k+1} + c}$，即 $a_{k+1} < a_{k+2}$.

由数学归纳法知,对 $\forall$ 的自然数 n,有 $a_n < a_{n+1}$,即 $\{a_n\}$ 递增;又当 $c > 0$ 时,$a_1 = \sqrt{c} < 1 + \sqrt{c}$,设 $a_n < 1 + \sqrt{c}$,则 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{1 + \sqrt{c} + c} < \sqrt{1 + 2\sqrt{c} + c} = 1 + \sqrt{c}$,$\{a_n\}$ 有上界 $1 + \sqrt{c}$ 故由单调有界定理知:$\{a_n\}$ 极限存在,设其为 a,对 $a_{n+1}^2 = a_n + c$ 两端令 $n \to \infty$ 取极限,得 $a^2 = a + c$,解得 $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$,由于 $a_n > 0$,所以 $a > 0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$.

(3) 易见

$$a_{n+1} - a_n = \frac{C^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{C^n}{n!} = \frac{C^n}{n!}(\frac{C}{n+1} - 1)$$

取自然数 N,使 $C < N$,从而当 $n > N$ 时,$a_{n+1} - a_n = \dfrac{C^n}{n!}(\dfrac{C}{n+1} - 1) < 0$,故 $\{a_n\}$(不计前 N 项) 为递减数列;又 $a_1 = c > 0$,$a_n = \dfrac{c^n}{n!} > 0$,可见 $\{a_n\}$ 有下界.

由单调有界定理知,$\{a_n\}$ 极限存在,设其为 a,对 $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{C}{n+1}$ 两边令 $n \to \infty$ 取极限,$a = a \cdot 0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. 利用 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 为递增数列的结论,证明 $\{(1 + \frac{1}{n+1})^n\}$ 为递增数列.

证　$\because (1 + \dfrac{1}{n+1})^n = (1 + \dfrac{1}{n+1})^{n+1} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n+1}}$

$= (1 + \dfrac{1}{n+1})^{n+1}(1 - \dfrac{1}{n+2})$

又 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 为递增数列,所以 $\left\{(1 + \dfrac{1}{n+1})^{n+1}\right\}$ 递增,而 $\{1 - \dfrac{1}{n+2}\}$ 递增.所以 $\{(1 + \dfrac{1}{n+1})^n\}$ 为递增数列.

5. 应用柯西收敛准则,证明以下数列 $\{a_n\}$ 收敛:

(1) $a_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$

(2) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$

证明 (1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$,于是对任给 $\varepsilon > 0$,必存在 N,当 $n > N$ 时,$\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$,所以当 $n > N$ 时,对任意的自然数 P,有

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

由柯西收敛准则知$\{a_n\}$收敛.

(2) 对任给的 $\varepsilon > 0$,取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,当 $m > n > N$ 时,有

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由柯西收敛准则知$\{a_n\}$收敛.

6. 证明:若单调数列$\{a_n\}$含有一个收敛子列,则$\{a_n\}$收敛.

证明 不妨设$\{a_n\}$递增且$\{a_{i_k}\}$收敛,$\lim\limits_{k\to\infty} a_{i_k} = a$.而$\{a_{i_k}\}$仍为递增数列,所以 $a_{i_k} \leqslant a \ (k = 1,2,\cdots)$.对任一 n,取 k 使 $i_k > n$.从而 $a_n \leqslant a_{i_k} \leqslant a$,由此知对任意的自然数 n,有 $a_n \leqslant a$,从而$\{a_n\}$是递增且有上界的数列,由单调有界定理知$\{a_n\}$一定是收敛数列.

7. 证明:若 $a_n > 0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = L > 1$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = L > 1$,所以存在 P,使 $L > P > 1$.

由极限定义知,对于 $\varepsilon_0 = L - P$,存在 N,当 $n > N$ 时,$-(L-P)$

$< \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - L < (L-P)$，由此有 $a_{n+1} < \dfrac{1}{P}a_n (n > N)$. 所以当 $n > N$ 时，$0 < a_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot a_{N+1} < \dfrac{1}{P^{n-N-1}} \cdot a_{N+1} \to 0 (n \to \infty)$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

8. 证明：若 $\{a_n\}$ 为递增(递减)有界数列，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n\}(inf\{a_n\}).$$

又问逆命题成立否？

证　因为 $\{a_n\}$ 有界，由确界原理知 $\{a_n\}$ 存在上确界，设 $\sup\{a_n\} = \eta$. 由确界定义知，对任意的 $\varepsilon > 0$，一定存在 n_0，使 $\eta - \varepsilon < a_{n_0} < \eta + \varepsilon$. 当 $\{a_n\}$ 递增时，只要 $n > n_0$，就有 $\eta - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n < \eta + \varepsilon$. 故 $|a_n - \eta| < \varepsilon, (n > n_0)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \eta = \sup\{a_n\}$. 当 $\{a_n\}$ 为递减有界数列，同理可证：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$. 逆命题不成立.

9. 利用不等式 $b^{n+1} - a^{n+1} > (n+1)a^n(b-a), b > a > 0$

证明：$\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$ 为递减数列，并由此推出 $\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ 为有界数列.

证　由题设不等式可得 $b^{n+1} > a^n[(n+1)b - na]$.

令 $a = 1 + \dfrac{1}{n+1}, b = 1 + \dfrac{1}{n}$，代入以上不等式得.

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n+1})^n[(n+1)(1+\frac{1}{n}) - n(1+\frac{1}{n+1})]$$

$$= (1+\frac{1}{n+1})^n[1 + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{n+1}]$$

$$> (1+\frac{1}{n+1})^n(1+\frac{1}{n+1})^2 = (1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$$

所以 $\{(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}\}$ 是递减数列.

而 $(1+\dfrac{1}{n})^n < (1+\dfrac{1}{n})^{n+1} < (1+1)^2 = 4$

所以 $\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ 为有界数列.

10. 证明：$|e-(1+\frac{1}{n})^n|<\frac{3}{n}$

提示：利用上题可知 $e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$，又易证 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}<\frac{2}{n}+(1+\frac{1}{n})^n$

证：(1) 先证 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 单调递减.（上题已证）

(2) 因 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$.

$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，从而

$(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$\therefore 0<e-(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n})^{n+1}-(1+\frac{1}{n})^n$

$=(1+\frac{1}{n})^n[(1+\frac{1}{n})-1]=(1+\frac{1}{n})^n\times\frac{1}{n}<\frac{3}{n}$

11. 给定两正数 a_1 与 $b_1(a_1>b_1)$，作出其等差中项，$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$，一般地令　$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，$n=1,2,\cdots$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

证　由题设有 $a_n>0,b_n>0,n=1,2,\cdots$，所以

$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\geqslant\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1}$.

$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geqslant\sqrt{b_nb_n}=b_n$；$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\leqslant\frac{a_n+a_n}{2}=a_n$，

$b_n\leqslant a_n\leqslant a_2=\frac{a_1+b_1}{2}<a_1$，$a_n\geqslant b_n\geqslant b_2=\sqrt{a_1b_1}>b_1$.

所以 $\{a_n\}\{b_n\}$ 都是单调有界数列，它们的极限都存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，对 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ 两端令 $n\to\infty$ 取极限，$a=\frac{a+b}{2}$，所以 $a=b$.

12. 设$\{a_n\}$为有界数列,记

$$\overline{a_n} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \underline{a_n} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$$

证明:(1) 对任何正整数 n, $\overline{a_n} \geqslant \underline{a_n}$

(2) $\{\overline{a_n}\}$为递减有界数列,$\{\underline{a_n}\}$为递增有界数列,且对任何正整数 n, m 有$\overline{a_n} \geqslant \underline{a_m}$.

(3) 设$\overline{a}$与$\underline{a}$分别为$\{\overline{a_n}\}$和$\{\underline{a_n}\}$的极限,则$\overline{a} \geqslant \underline{a}$.

(4) $\{a_n\}$收敛的充要条件是$\overline{a} = \underline{a}$.

证明:(1) 由于$\overline{a_n}$和$\underline{a_n}$是同一数集的上下确界,所以$\overline{a_n} \geqslant \underline{a_n}(n = 1,2,\cdots)$

(2) 由于$\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \cdots \{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}$,故$\overline{a_n} \geqslant \overline{a_{n+1}}$,即

$\{\overline{a_n}\}$递减,同理可证$\{\underline{a_n}\}$递增. $\because \{a_n\}$有界,故$\{\overline{a_n}\}$有界. 由$\{\overline{a_n}\}$递减,$\{\underline{a_n}\}$递增知,对任意的自然数 m, n,当 $m < n$ 时,$\overline{a_n} \geqslant \underline{a_n} \geqslant \underline{a_m}$,当 $m \geqslant n$ 时,由$\overline{a_n}, \underline{a_m}$的定义仍有$\overline{a_n} \geqslant \underline{a_m}$.

(3) 因为对任意的自然数 m, n, $\overline{a_n} \geqslant \underline{a_m}$,从而$\{\overline{a_n}\}$有下界,$\{\underline{a_n}\}$有上界,由单调有界定理知$\{\overline{a_n}\}$,$\{\underline{a_n}\}$的极限存在,且

$$\overline{a} = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} \geqslant \lim_{n\to\infty} \underline{a_n} = \underline{a}, \text{即} \overline{a} \geqslant \underline{a}$$

(4) 必要性　设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则对 $\forall \varepsilon > 0$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,即 $a - \dfrac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \dfrac{\varepsilon}{2}$,从而当 $n > N$ 时,

$$\overline{a_n} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \leqslant a + \frac{\varepsilon}{2}, \underline{a_n} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \geqslant a - \frac{\varepsilon}{2},$$

所以 $0 \leqslant \overline{a} - \underline{a} \leqslant (a + \dfrac{\varepsilon}{2}) - (a - \dfrac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$,

由 ε 的任意性知$\overline{a} = \underline{a}$

充分性:设$\overline{a} = \underline{a} = a$, $\varepsilon > 0$,则对充分大的自然数 n,有 $a - \varepsilon < \underline{a} \leqslant a_n \leqslant \overline{a} < a + \varepsilon$　从而 $|a_n - a| < \varepsilon$

故$\{a_n\}$的极限存在(且等于 a).

总练习题

1. 求下列数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

解 (1) 当 $n>3$ 时，$n^3<3^n$，所以

$3=\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{n^3+3^n}<3\cdot\sqrt[n]{2}\to 3(n\to\infty)$.

由迫敛性定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}=3$.

(2) 设 $a_n=\frac{n^5}{e^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}\cdot\frac{e^{n+1}}{(n+1)^5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e\cdot(\frac{n}{n+1})^5=e>1$，由 §3 习题 7 结论知

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}]=0$

2. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0(|q|<1)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n^\alpha}=0(\alpha\geqslant 1)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

证 (1) 当 $q=0$ 时，$n^2q^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0$，

当 $|q|\neq 0$ 时，令 $|q|=\frac{1}{p}$，则 $p>1$.

设 $p=1+h$，$h>0$. 由 $(1+h)^n>\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)h^3\ (n>2)$

得 $0<|n^2q^n|=\frac{n^2}{(1+h)^n}<\frac{6}{h^3}\cdot\frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$

$$= \frac{6}{h^3} \cdot \frac{1}{n(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} \to 0(n \to \infty)$$

由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 q^n = 0$

(2) 任给 $\varepsilon > 0, 10^\varepsilon > 1$，而 $\sqrt[n]{n} \to 1(n \to \infty)$，故存在 N，当 $n > N$ 时，$1 < \sqrt[n]{n} < 10^\varepsilon$，取对数后得 $0 < \frac{\lg n}{n} < \varepsilon(n > N)$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = 0$. 从而当 $\alpha \geqslant 1$ 时，由 $0 < \frac{\lg n}{n^\alpha} \leqslant \frac{\lg n}{n} \to 0(n \to \infty)$

及迫敛性定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n^\alpha} = 0$

(3) 对任给的 $\varepsilon > 0$，令 $M = \frac{1}{\varepsilon}$，由 §1 习题2(3) 知，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$.

故对 $\varepsilon_0 = 1$，存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，$\frac{M^n}{n!} < 1$，即 $\frac{1}{n!} < \varepsilon^n$. 所以当 $n > N$ 时，有 $0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$（又问由此等式能否反过来推出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$）

(2) 若 $a_n > 0, (n = 1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$

证　(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，故对任意的 $\varepsilon > 0$，必存在 N_1，当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \varepsilon$，于是当 $n > N_1$ 时

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{a_1 - a + a_2 - a + \cdots + a_n - a}{n}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}(|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1+1} - a| + |a_{N_1+2} - a| + \cdots + |a_n - a|)$$

$$< \frac{N_1 m}{n} + \frac{(n - N_1)}{n}\varepsilon < \frac{N_1 m}{n} + \varepsilon$$

其中 $m = \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \cdots, |a_{N_1} - a|\}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_1m}{n}=0$.于是对已给的$\varepsilon>0$,存在$N_2$,当$n>N_2$时,$\dfrac{N_1m}{n}<\varepsilon$.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,则当$n>N$时$\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$其逆不真.例如$a_n=(-1)^n$不收敛,

但$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$

(2) 因为对任意的自然数n,$a_n>0$,所以当$a\neq0$时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}.$$

又$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

由(1)知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\dfrac{1}{a}}=a$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

当$a=0$时,对$\forall\varepsilon>0$,存在N_1,使得当$n>N_1$时,$0<a_n<\varepsilon$,于是当$n>N_1$时,

$$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}}\cdot\sqrt[n]{a_{N_1+1}a_{N_1+2}\cdots a_n}$$

$$<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}}\varepsilon^{\frac{n-N_1}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\cdot\varepsilon^{-N_1}}\cdot\varepsilon$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\cdot\varepsilon^{-N_1}}=1$,从而存在$N_2$,使得当$n>N_2$时.

$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{N_1}\varepsilon^{-N_1}}<2$,故当$n>N=\max\{N_1,N_2\}$时,必有

$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<2\varepsilon$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$

4. 应用上题的结论证明下列各题:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{n}=0$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$

(7) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a(b_n>0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$

(8) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$.

证　(1) 由 3(1) 知　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

(2) 令 $a_1=a, a_n=1(n=2,3,\cdots)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，由 3(2) 知　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

(3) 由于 $n=1\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{n}{n-1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$，由 3(2) 知

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(4) 令 $a_n=\dfrac{1}{n}$　$n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，由 3(2) 知，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$

(5) 令 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$　$n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n-1})^{n-1}$ 而

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n-1})^{n-1}=e$　由 3(2) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

(6) 由 3(1) 及 4(3) 知　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$

(7) 因为 $\sqrt[n]{b_n}=\sqrt[n]{\dfrac{b_1}{b_0}\cdot\dfrac{b_2}{b_1}\cdots\dfrac{b_n}{b_{n-1}}}(b_0=1)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a$，由

3(2) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=a$

(8) $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n}+\dfrac{a_1}{n}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$. 由 3(1) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$.

5. 证明:若$\{a_n\}$为递增数列,$\{b_n\}$为递减数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在且相等.

证　由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,从而$\{a_n-b_n\}$有界.

不妨设$A\leqslant a_n-b_n\leqslant B$,其中$A,B$为常数. 再由$\{a_n\}$递增,$\{b_n\}$递减知 $a_n\leqslant B+b_n\leqslant B+b_1, b_n\geqslant a_n-B\geqslant a_1-B$. 从而$\{a_n\}\{b_n\}$都是单调有界数列,它们极限存在. 而

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

6. 设数列$\{a_n\}$满足:存在正数 M,对一切 n 有

$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\leqslant M$$

证明:$\{a_n\}$与$\{A_n\}$都收敛.

证　由 $A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|$ 知

$A_{n+1}-A_n=|a_{n+1}-a_n|\geqslant 0$,且 $A_n\leqslant M$,所以$\{A_n\}$为递增有上界的数列,故$\{A_n\}$收敛.

由于$\{A_n\}$收敛,由柯西收敛准则,对任给的$\varepsilon>0$,存在N,当$m>n>M$时,$|A_m-A_n|<\varepsilon$. 故当 $m>n>M$ 时,

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|&=|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+\cdots+a_{n+1}-a_n|\\&\leqslant|a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&=|A_m-A_n|<\varepsilon\end{aligned}$$

可见,$\{a_n\}$满足柯西收敛准则条件,所以$\{a_n\}$收敛.

7. 设 $a>0,\sigma>0,a_1=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{\sigma}{a}\right),a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{\sigma}{a_n}\right)$ $n=1,2,\cdots$

证明:数列$\{a_n\}$收敛,且其极限为$\sqrt{\sigma}$.

证　对任何 $t>0, t+\frac{1}{t}\geqslant 2$,令 $t=\frac{a_n}{\sqrt{\sigma}}>0$,则有

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})=\frac{\sqrt{\sigma}}{2}[\frac{a_n}{\sqrt{\sigma}}+\frac{\sqrt{\sigma}}{a_n}]$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\cdot 2=\sqrt{\sigma}, n=1,2,\cdots$$

故$\{a_n\}$有下界,又因为

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})=\frac{a_n}{2}(1+\frac{\sigma}{a_n^2})\leqslant\frac{a_n}{2}(1+\frac{\sigma}{\sigma})=a_n, n=1,2,\cdots$$

可见$\{a_n\}$递减.所以$\{a_n\}$存在极限,即$\{a_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,由 $a_n>0$ 知 $A\geqslant 0$,由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{\sigma}{a_n})$ 知 $2a_{n+1}a_n=a_n^2+\sigma$,两边令 $n\to\infty$ 取极限得 $2A^2=A^2+\sigma$,解之得

$A_1=-\sqrt{\sigma}$(舍去),$A_2=\sqrt{\sigma}$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{\sigma}$.

8. 设 $a_1>b_1>0$,记 $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$ $n=2,3,\cdots$

证明:数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的极限都存在且等于$\sqrt{a_1b_1}$.

证　(1) $b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}\leqslant\frac{2a_1b_1}{2\sqrt{a_1b_1}}=\sqrt{a_1b_1}<\frac{a_1+b_1}{2}=a_2$

设 $a_{n-1}>b_{n-1}$则 $4a_{n-1}b_{n-1}<(a_{n-1}+b_{n-1})^2$,且

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\cdot\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2a_{n-1}b_{n-1}}=\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})^2}{4a_{n-1}b_{n-1}}>1$$

所以对一切的自然数 n,有 $a_n>b_n$

(2) 由于 $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}<0$

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}-b_n=\frac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n}>0$$

所以$\{a_n\}$递减,$\{b_n\}$递增.

(3) 结合(1)(2)知;$\{a_n\}$ 递减有下界 b_1,$\{b_n\}$ 递增有上界 a_1,从而 $\{a_n\}\{b_n\}$ 极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n = b$. 由 $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ 知 $a = b$,又由

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = a_nb_n = a_{n-1}b_{n-1} = \cdots = a_1b_1$$

知 $a^2 = a_1b_1$ 所以 $a = b = \sqrt{a_1b_1}$.

9. 按柯西收敛准则叙述数列 $\{a_n\}$ 发散的条件,并用它证明下列数列 $\{a_n\}$ 是发散的:

(1) $a_n = (-1)^n n$ (2) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$ (3) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$

解 数列 $\{a_n\}$ 发散的充要条件:存在 $\varepsilon_0 > 0$,对 $\forall$ 的自然数 N,都存在 $n_0 > m_0 > N$,使 $|a_{n_0} - a_{m_0}| \geqslant \varepsilon_0$

(1) 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$,对任意的自然数 N,取 $n_0 = N+3, m_0 = N+1$,则

$$\begin{aligned}|a_{n_0} - a_{m_0}| &= |(-1)^{N+3}(N+2) - (-1)^{N+1}(N+1)| \\ &= |(-1)^{N+1}||(-1)^2(N+2) - (N+1)| = 1 > \varepsilon_0\end{aligned}$$

所以 $\{(-1)^n n\}$ 发散.

(2) 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$,对 $\forall$ 的 $N > 0$,取 $n_0 = 2N+1, m_0 = 2N$,则

$$\begin{aligned}|a_{n_0} - a_{m_0}| &= \left|\sin\frac{(2N+1)\pi}{2} - \sin\frac{2N\pi}{2}\right| \\ &= |(-1)^N - 0| = 1 > \varepsilon_0\end{aligned}$$

所以 $\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\}$ 发散.

(3) 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$,对 $\forall N > 0$,取 $m_0 > N, n_0 = 2m_0$,则

$$\begin{aligned}|a_{n_0} - a_{m_0}| &= \frac{1}{m_0+1} + \frac{1}{m_0+2} + \cdots + \frac{1}{2m_0} > m_0 \cdot \frac{1}{2m_0} \\ &= \frac{1}{2} = \varepsilon_0\end{aligned}$$ 所以 $\{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\}$ 发散.

10. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = b$.记

$$S_n = \max\{a_n, b_n\}, T_n = \min\{a_n, b_n\}, n = 1,2,\cdots$$

证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = \max\{a,b\}$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}T_n = \min\{a,b\}$

提示:参考第一章总练习题1.

证　(1) 若 $a = b$,则 $\max\{a,b\} = \min\{a,b\} = a$,

令　$C_n = \begin{cases} a_n & 当\ n = 2k-1\ 时 \\ b_n & 当\ n = 2k\ 时 \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots$

则$\lim\limits_{n\to\infty}C_n = a$,而$\{S_n\}$,$\{T_n\}$都是$C_n$的一个子列,由定理2.8知,

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}T_n = a.$$

(2) 若 $a \neq b$,不妨设 $a > b$.由保号性定理知,存在自然数 N,当 $n > N$ 时 $a_n > b_n$,于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}a_n = a = \max\{a,b\}$$

$$\lim_{n\to\infty}T_n = \lim_{n\to\infty}b_n = b = \min\{a,b\}$$