解 析 几 何

October 23, 2019

第39页习题

1:(4).解：依题意，所求直线的方向矢量为 $\vec{v} = (2,1,1) \times (1,-1,0) = (1,1,-3)$. 又过定点 $P_0(1,0,1)$, 所以易知直线的向量式参数方程为:

$$\mathbf{r}(t) = (t+1, t, 1-3t),$$

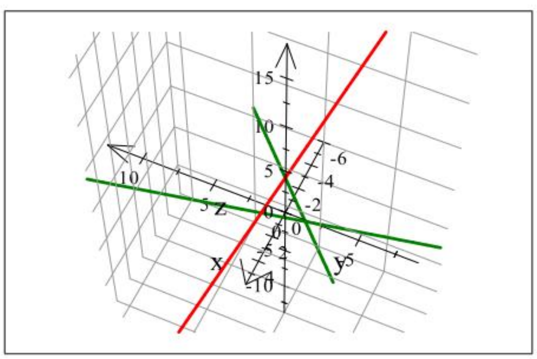
坐标式参数方程为:

$$\begin{cases} x = t+1, \\ y = t, \\ z = -3t+1, \end{cases}$$

标准方程为:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-3}.$$

(以上三种方程，任何一种均可)



(5).解：依题所求直线的方向矢量为

$$(\cos 60°, \cos 45°, \cos 120°) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}),$$

可取做 $(1,\sqrt{2},-1)$. 又直线过 $P_0(1,1,1)$ 点，所以所求直线的标准方程为：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{z-1}{-1}.$$

2:(1).解：由

$$\begin{cases} 2x-3y+4z-12=0 \\ x+y+z=0 \end{cases},$$

可得直线上一点的坐标为$(-6,0,6)$.
该直线的方向向量

$$v=\left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

经计算得

$$v=(-7,2,5)$$

从而直线的对称化方程为

$$\frac{x+6}{-7}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{5}.$$

3:(2). 解：首先由题知，所求平面过点 $(1,-1,0)$, 和两直线的方向矢量 $(1,-5,-1)$，$(2,-1,1)\times(1,2,-1)=(-1,3,5)$.

(据课本第33页可有以下三种做法)

方法一：由平面的点位式方程知，所求平面上的点(x,y,z)满足

$$((x-1,y+1,z),(1,-5,-1)(-1,3,5))=0,$$

即

$$11x+2y+z=9. \tag{*}$$

方法二：由前面的计算知 $(-1,3,5)\times(1,-5,-1)=(22,4,2)$ 为平面的法矢量. 所以由平面的点法式方程得

$$(x-1,y+1,z)\cdot(22,4,2)=0.$$

化简即得 (*)式.

方法三：设 (x,y,z) 为平面上的点，那么知平面的向量式参数方程为：

$$(x,y,z)=(1,-1,0)+\lambda(1,-5,-1)+\mu(-1,3,5)\ \ (\lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

即

$$\begin{cases} x=1+\lambda-\mu \\ y=-1-5\lambda+3\mu \\ z=-\lambda+5\mu \end{cases},$$

消去上面的参数 λ, μ 即得(*).

(3). 解：此题就是求通过直线且分别与三个坐标面垂直的平面. 回忆第22页习题5，实质上就是求此直线对三坐标面的射影柱面，因为是直线, 所以此时的射影柱面均是平面. 因此由习题5知，我们只需消去方程中相应的坐标即可. 得：

对yOz面的射影柱面为：$7y+z-3=0$;

对xOz面的射影柱面为：$7x+11z-5=0$;

对xOy面的射影柱面为：$x-11y+4=0$.

(3). 解：此题就是求通过直线且分别与三个坐标面垂直的平面. 回忆第22页习题5，实质上就是求此直线对三坐标面的射影柱面，因为是直线, 所以此时的射影柱面均是平面. 因此由习题5知，我们只需消去方程中相应的坐标即可. 得：

对yOz面的射影柱面为：$7y+z-3=0$;

对xOz面的射影柱面为：$7x+11z-5=0$;

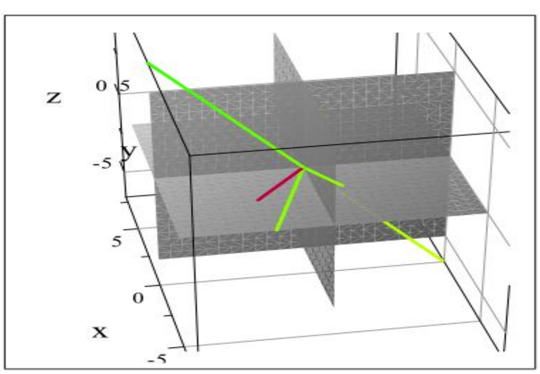
对xOy面的射影柱面为：$x-11y+4=0$.

4. 解：因为 l 在 yOz面上的射影直线为$\begin{cases} 4y-3z=0 \\ x=0 \end{cases}$, 所以$l$一定在平面 $4y-3z=0$ 内. 同理知l也在平面 $x+2z=0$ 内. 那么l就为两平面的交线，所以其方程为

$$\begin{cases} 4y-3z=0, \\ x+2z=0. \end{cases}$$

用上题的方法易知其在xOy面上的投影直线方程为

$$\begin{cases} 3x+8y=0, \\ z=0. \end{cases}$$



5:(2)解： 易知直线过点(0,0,1),直线的方向向量为

$$\vec{n}=(1,-1,-1)\times(1,1,1)=(0,-2,2)$$

取直线上一点 $A=(0,-2t,1+2t)$, 使得 $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ 解得 $t=-\frac{1}{2}, A=(0,1,0)$ 设P的对称点为Q,则有 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{QA}$, 即得$Q=(-1,2,1)$.

6:(1) 直线的方向向量为

$$\vec{v}=(1,1,-1)\times(2,1,-3)=(-2,1,-1)$$

易知直线过点$(0,-1,0)$,则点$(1,1,1)$到直线的距离为

$$d=\frac{|(1,2,1)\times(-2,1,-1)|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}$$

第44页习题：

1. 解：(方法1): 设所求直线 l 的方向矢量为 $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, 则其对称式方程为

$$\frac{x-1}{v_1}=\frac{y-1}{v_2}=\frac{z-1}{v_3}.$$

因为l与l_1,l_2 均相交，那么由定理2.4.3知

$$\begin{cases}\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}=0\\ \det\begin{pmatrix}0&1&2\\2&1&4\\v_1&v_2&v_3\end{pmatrix}=0\end{cases}.$$

由此得

$$v_1=0,\ v_2=\frac{1}{2}v_3.$$

则所求直线的方程为

$$l:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

(方法2)首先判断两条直线的关系可得 l_1,l_2 共面, 显然 l_1,l_2 不平行, 从而两条直线相交, 记交点为Q, 联立直线方程可得$Q=(1,2,3)$. 记直线 l_1,l_2 所在的平面为 π, 则π的法向向量为

$$\vec{n}=(1,2,3)\times(2,1,4)=(5,2,-3)$$

可得π的方程为

$$5(x-1)+2(y-2)-3(z-3)=5x+2y-3z=0$$

显然点P不在平面π上, 设所求直线为 l, 由于 l 与 l_1, l_2 都相交, 则l必过Q点, 即得 l 的方向向量为$\vec{v}=(0,1,2)$, l 的方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

5. 证明：二直线的标准方程为

$$l_1:\frac{x}{0}=\frac{y-\frac{b}{2}}{-\frac{1}{c}}=\frac{z-\frac{c}{2}}{\frac{1}{b}},\quad l_2:\frac{x-2a}{\frac{1}{c}}=\frac{y}{0}=\frac{z-c}{\frac{1}{a}}.$$

依题它们之间的距离为$2d$,即

$$\begin{aligned}(2d)^2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2a & -\frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ 0 & -\frac{1}{c} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & 0 & \frac{1}{a}\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{c} & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{a}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{c}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & 0\end{vmatrix}^2} \\ &= \frac{4}{c^2\left(\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^4}\right)},\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

8. 证明：不失一般性，设

$$\vec{r}(t)=\vec{v}t,$$

其中$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 是一单位向量. 那么有

$$\begin{cases} |v_1|=|\vec{v}\cdot(1,0,0)|=\sin\alpha \\ |v_2|=|\vec{v}\cdot(0,1,0)|=\sin\beta \\ |v_3|=|\vec{v}\cdot(0,0,1)|=\sin\gamma \end{cases}.$$

所以

$$\begin{aligned} 1 &= |\vec{v}|^2=|v_1|^2+|v_2|^2+|v_3|^2 \\ &= \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma \\ &= 3-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma. \end{aligned}$$

因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2.$$