浙江大学 2006-2007 学年春夏学期《常微分方程》期末考试

命题：方道元

Moqi@88 整理于 2007-07-03，仅供参考

一、(30 分) 求下述方程的通解

1. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2x\ln x}{1+t}-\dfrac{x}{(1+t)^2}$

2. $y''-2y'+2y=e^x\cos x+2x$

二、(24 分)

1. 考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0\\ y(0)=1\quad y'(0)=\omega\end{cases}$$

写出毕卡叠代序列的前三项，其中 $\omega>0$ 为常数。

2. 设 $f(t,x)$ 以及 $f'_x(t,x)$ 在区域 $R:|t-t_0|\le a, |x-x_0|\le b$ 上连续，依据毕卡存在性定理写出初始问题

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\quad x(t_0)=x_0$$

解的存在区间，并证明其解在此区间上是唯一的。

三、(15 分) 验证 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 是方程 $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ 的解，并求方程的全部解。

四、(15 分) 求解线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=y+z\\ \dfrac{dz}{dt}=z+x\end{cases}$$

五、（10 分）讨论方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y + \omega\cos\omega t \end{cases}$$

的已知解 $x = \alpha\cos(\omega t + \beta)\quad y = -\alpha\omega\sin(\omega t + \beta)$ 的稳定性，其中

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega - \frac{1}{\omega})^2}}\quad \beta = \arg\frac{1}{i\omega + 1 - \omega^2}$$

六、（6 分）试证对于二阶线性方程

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

存在变换 $x = u(t)y$，把它化为方程 $y'' + I(t)y = 0$，其中 $a_1'(t), a_2(t)$ 连续。