2020 春夏 · 实变函数 · 期中测试

共 6 个问题，满分 60 分，时间 100 分钟.

问题 1. (10 分). 假设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列可测集，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

令 $E = \{x \in \mathbb{R}^n :$ 存在无穷多个 k, 使得 $x \in E_k\}$. 证明：E 是可测集，并且 $m(E) = 0$.

问题 2. (10 分). 假设 $E \subset \mathbb{R}^n$，$m_*(E) < \infty$. 证明：E 可测当且仅当存在 E 的可测子集列 $\{E_k\}_{k\geq 1}$ 满足 $m(E_k) \to m_*(E)$.

问题 3. (10 分). 完成下面两个小题.

(i) 假设 $\chi_{[0,1]}$ 是区间 $[0,1]$ 的特征函数. 证明：若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}$，则 f 在 $\mathbb{R}$ 上不连续.

(ii) 考虑函数列 $f_k(x) = k^{n/2} e^{-k|x|^2}$，$x \in \mathbb{R}^n$. 请回答问题并说明理由：$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是否是 $\mathbb{R}^n$ 上的测度基本列 (测度 Cauchy 列)?

问题 4. (10 分). 假设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，$f : E \to \mathbb{R}$ 是可测函数. 求证：存在一列连续函数 $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ a.e. $x \in E$.

问题 5. (10 分). 假设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，$f_1, \cdots, f_d$ 是 E 上的实值可测函数. 考虑 $\mathbb{R}^{n+d}$ 中的集合 $G = \{(x, f_1(x), \cdots, f_d(x)) \in \mathbb{R}^{n+d} : x \in E\}$. 请回答问题并说明理由：$G$ 是否是 $\mathbb{R}^{n+d}$ 中的可测集?

问题 6. (10 分). 假设 E 是 $(0, \infty)$ 中的可测集，f 是 E 上的实值可测函数. 考虑如下映照

$$T : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty),\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

记 $E^T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) \in E\}$.

(i) 求证：E^T 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测集，$f \circ T$ 是 E^T 上的可测函数.

(ii) 假设 $E \subset (1, 10)$，f_k 是 E 上的可测函数列，并且 f_k 在 E 上依测度收敛到 f. 求证：$f_k \circ T$ 在 E^T 上依测度收敛到 $f \circ T$.