每日一题（1）

2019.03.20

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次连续可微且 $f(\frac{a+b}{2})=0$, 求证:

$$|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \leq \frac{1}{24}M(b-a)^3,$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

证：在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处对 $f(x)$ 用带有Lagrange余项的Talor展开：

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 \\
&= f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 \\
&\leq f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + \frac{M}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2
\end{aligned}$$

两边同时对 x 积分，有:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\leq f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x + \frac{M}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{24}M(b-a)^3.
\end{aligned}$$