复旦大学技术科学类

2018-2019 学年第一学期 《数学分析 B》

一元微分学阶段性考试试卷 一般教学班级

专业________________学号_____________姓名_____________成绩___________

题号	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	2-4	3-1	3-2
得分									
题号	3-3	3-4	3-5	3-6	3-7	3-8	3-9	3-10	4-1
得分									
题号	4-2	4-3	5-1	5-2	5-3				总分
得分									

一、严格表述题（每题 3 分，共 3 题 ，共 9 分）注：需给出具体内容，但无需证明

1. 叙述：函数极限的集聚刻画、序列刻画、振幅刻画。

2. 叙述：反函数的存在性（连续性）定理与可导性定理

3. 叙述：有界数列上、下极限的定义

（装订线内不要答题）

二、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果正确的，请回答“是”，并给予证明；如果错误的，请回答“否”，并举反例。（每题 3 分，共 4 题，共 12 分）

1. ① 函数在一点单侧连续，则其在该点单侧可导。

   ② 函数在一点可单侧导，则其在该点单侧连续。

2. ① 设函数 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 上一致连续，则有 $\left(f\cdot g\right)\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 上一致连续；

   ② 设函数 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 在 $\left(a,+\infty\right)$ 上一致连续，则有 $\left(f\cdot g\right)\left(x\right)$ 在 $\left(a,+\infty\right)$ 上一致连续。

（装订线内不要答题）

3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调下降，如有 $f([a,b])=[f(b),f(a)]$，则有 $f(x)\in C[a,b]$。

4. 考虑 $E\subset\mathbb{R}$（可以有界或者无界）上任意的二个序列 $\{\tilde{x}_n\}$，$\{\hat{x}_n\}$，当 $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}|\tilde{x}_n-\hat{x}_n|=0$ 时，有 $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}|f(\tilde{x}_n)-f(\hat{x}_n)|=0$，则有 $f(x)$ 在 E 上一致连续。

三 计算题及证明题（每题 6 分，共 10 题，共 60 分）

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

2. 在 $x=0$ 处（相应的邻域），展开 $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 至 $o\left(x^3\right)$

（装订线内不要答题）

3. 计算 $\lim n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$， $a>0$

4. 计算函数 $y=\left[\dfrac{\arcsin\left(\sin^2 x\right)}{\arccos\left(\cos^2 x\right)}\right]^{\arctan^2 x}$ 的一阶导数

5. 计算 $f\left(x\right)=\begin{cases} x\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ①在零点的导数；②说明：零点的任意领域都有不可导点

6. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{a^{n+1}}\left(a+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{3}+\cdots+\dfrac{a^n}{n}\right)$ $\left(a>1\right)$

（装订线内不要答题）

7. ① 证明：当 $x\ge 0$ 时有 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta\left(x\right)}}$，式中 $\theta\left(x\right)\in\left(0,1\right)$，

② 证明：$\exists\lim\limits_{x\to 0+0}\theta\left(x\right)=\dfrac{1}{4}$，$\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\theta\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$

8. 设 $\left|x_1\right|\le 2$， $x_{n+1}=\sqrt{4-x_n}\left(n\in\mathbb{N}\right)$，求：$\lim x_n$

9. 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$， $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，

① 证明：存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，s. t. $f(\xi)=\xi$

② 证明：对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$，$\exists\eta\in(0,\xi)$, s. t. $f'(\eta)-\lambda\left[f(\eta)-\eta\right]=1$

10. ① 设 $\varphi(x)\in C[0,+\infty)$， $\varphi(0)=0$， $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, 研究 $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\sin x$ 的存在性

② 研究：$\cos\left(\varphi(x)\sin x\right)$ 在 $\mathbb{R}^{+}$ 上的一致连续性

（装订线内不要答题）

四（10 分）数列的上下极限

① 设$\{x_n\}$有界，则有结论：存在子列分别集聚至上、下极限。证明：集聚至下极限的结论

② 证明：对于所有的收敛之列

③ 设$\exists\lim\left(x_{n+1}+\lambda x_n\right)=l\in\mathbb{R}$，$0<\lambda<1$，分析$\exists\lim x_n$的存在性，如果极限存在则求出极限值

五（9 分）Stolz 定理与 Bernoulli-L’Hospital 法则的通识性结构

① 阐述 Stolz 定理与 Rolle 定理的一般形式

② 设定数列差比的极限、函数导数之比的形式为有限值，给出 Stolz 定理与 Bernoulli-L’Hospital 法则分析中所建立的关系式

③ 就 $\frac{0}{0}$-型与 $\frac{*}{\infty}$-型，获得最终的结论

（装订线内不要答题）