§2

1. 求以下曲面的第二基本形式:

(1) 椭圆面　$\mathbf{r}=(a\cos\varphi\cos\theta, b\cos\varphi\sin\theta, c\sin\varphi)$

(2) 单叶双曲面　$\mathbf{r}=(a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)$

(3) 双叶双曲面　$\mathbf{r}=(a\cosh u, b\sinh u\cos v, c\sinh u\sin v)$

(4) 椭圆抛物面　$\mathbf{r}=(u, v, \frac{1}{2}(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}))$

(5) 双曲抛物面　$\mathbf{r}=(a(u+v), b(u-v), 2uv)$

2. 写出曲面$z=f(x,y)$的第一, 第二基本形式.

3. 应用行列式乘法法则, 证明:

$$(\mathbf{r}_{11},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_{22},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\begin{vmatrix} \mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_{22} & E & F \\ \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_{22} & F & G \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{r}_{12},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)^2=\begin{vmatrix} \mathbf{r}_{12}^2 & \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_1 & E & F \\ \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_2 & F & G \end{vmatrix}$$

4. 证明: $LN-M^2=\frac{1}{g}[(\mathbf{r}_{11},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_{22},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)-(\mathbf{r}_{12},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)^2]$

5. 证明:

$\mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_1=\frac{E_1}{2}$,　$\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_1=\frac{E_2}{2}$

$\mathbf{r}_{22}\cdot\mathbf{r}_2=\frac{G_2}{2}$,　$\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{r}_2=\frac{G_1}{2}$

$\mathbf{r}_{11}\cdot\mathbf{r}_2=F_1-\frac{E_2}{2}$,　$\mathbf{r}_{22}\cdot\mathbf{r}_1=F_2-\frac{G_1}{2}$

§3

1. 证明:

(1) $g^{ij}g_{ji}=2$

(2) $\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^l}=\Gamma_{1l}^1+\Gamma_{2l}^2$

2. 证明: 当曲面的参数u,v变为$\bar{u},\bar{v}$时, 第二基本形式的判别式

$$\bar{L}\bar{N}-\bar{M}^2=\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}\right]^2(LN-M^2)$$

3. 平面上取极坐标时, 线素为$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$, 计算Γ_{ij}^k.

4. 用E,F,G及其偏导数表出联络系数Γ_{ij}^k, 并算出ω_i^j.

5. 计算曲面$z=f(x,y)$的联络系数.

6. 用第一, 第二基本形式的系数表示下列混合积:

$$(\mathbf{n},\mathbf{n}_1,\mathbf{r}_1),\ (\mathbf{n},\mathbf{n}_1,\mathbf{r}_2),\ (\mathbf{n},\mathbf{n}_2,\mathbf{r}_1),\ (\mathbf{n},\mathbf{n}_2,\mathbf{r}_2)$$

7. 证明: 平移曲面$\mathbf{r}=\mathbf{a}(u)+\mathbf{b}(v)$的参数曲线构成共轭网.

8. 证明: 椭圆抛物面$\mathbf{r}=(u,v,\frac{1}{2}(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}))$是平移曲面, 它可由抛物线$z=\frac{x^2}{2a^2}, y=0$沿着$z=\frac{y^2}{2b^2}, x=0$平行移动而得.

9. 证明: 曲面$\mathbf{r}=(\cos u,\sin u+\sin v,\cos v)$的参数曲线都是圆, 并且构成共轭网.
10. 证明: 正螺面的渐近曲线就是它上面的直母线与螺线.
11. 求悬链面$\mathbf{r}=(a\cosh\frac{t}{a}\cos\theta,a\cosh\frac{t}{a}\sin\theta,t)$上的渐近曲线.
12. 证明:
(1) 曲面上的直线是曲面上的渐近曲线;
(2) 可展曲面上的渐近曲线(除脊线外)就是它的直母线;
(3) 若曲面上每一点均有落在曲面上的三条不同直线相交, 则此曲面必为平面.
13. 证明: 每一条曲线在它的主法线曲面上是渐近曲线.
14. 求双曲抛物面$\mathbf{r}=(a(u+v),b(u-v),2uv)$的渐近曲线.
15. 求旋转曲面$\mathbf{r}=(f(t)\cos\theta,f(t)\sin\theta,t)$的渐近曲线.
16. 求曲面$F(x,y,z)=0$的渐近曲线应满足的方程.
17. 若曲面的参数曲线所构成的四边形对边长相等, 则称为Chebyshev网. 证明:
(1) 参数曲线构成Chebyshev网的充要条件是$E_2=G_1=0$.
(2) 当参数曲线取Chebyshev网时, 线素可取如下形式:

$$ds^2=du^2+2\cos\omega dudv+dv^2$$

其中ω为参数曲线的交角.
(3) 证明平移曲面$\mathbf{r}=\mathbf{a}(u)+\mathbf{b}(v)$的参数曲线构成Chebyshev网.

§4
1. 设在曲面上, 曲线C的主法线与曲面法线交角为θ. 证明:

$$k_n=k\cos\theta$$

并在半径为R的球面上验证上述公式.
2. 证明: 曲线C为曲面的渐近曲线的充要条件是: C为直线, 或者C的密切平面与曲面的切平面重合.
3. 设曲面S_1,S_2的交线C的曲率为k, 曲线C在S_i上的法曲率为$k_i(i=1,2)$. S_1,S_2的法线交角为θ. 证明:

$$k^2\sin^2\theta=k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\theta$$

4. 证明: 任何两个正交方向的法曲率之和为常数.
5. 证明: 平面上的点均为平点; 球面上的点均为圆点.
6. 求椭圆面的圆点, 并证明: 过原点而与圆点处切平面平行的平面截椭圆面于一圆.
7. 求曲面$xyz=a^3$的脐点.
8. 对于曲面$z=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)+\cdots(a,b,c$为常数), 其中省略部分是$x,y$的三次以上项. 证明: 原点处的渐近方向由下式确定:

$$adx^2+2bdxdy+cdy^2=0$$

9. 设曲面方程的展开式为:

$$z=\frac{1}{2}(a_1x^2+a_2y^2)+\frac{1}{3!}(b_1x^3+2b_2x^2y+3b_3xy^2+b_4y^3)+\cdots$$

证明: 在原点有

$$a_1=k_1,\ a_2=k_2,\ b_1=\frac{\partial}{\partial x}k_1,\ b_2=\frac{\partial}{\partial y}k_1,\ b_3=\frac{\partial}{\partial x}k_2,\ b_4=\frac{\partial}{\partial y}k_2$$

10. 证明: 可展曲面上的直母线既是渐近线又是曲率线, 它所对应的法曲率为零. 另一族曲率线为母线的正交轨线.
11. 设一曲率线(非渐近曲线)的密切平面与曲面的切平面交于定角, 则该曲率线必为平面曲线.
12. 证明: 曲面S'(无脐点)上两族曲率线的法线曲面与S的平行曲面(由S的每一点法线上截取定长而得的曲面)构成三重正交系.
13. 求二阶直纹面上的曲率线.
14. 求旋转曲面$\mathbf{r}=(f(t)\cos\theta,f(t)\sin\theta,t)$的曲率线.
15. 设曲面沿着曲率线$C:\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}(s)$的法曲率$k_n\neq 0$. 证明:
  (1) C的法线曲面S_1不是柱面;
  (2) 若S_1为某曲线C_1的切线曲面, 则$C_1:\mathbf{r}_1=\boldsymbol{\rho}(s)+\frac{\mathbf{n}(s)}{k_n}$;
  (3) 若S_1为锥面, 则$\mathbf{r}_1=$常向量(即锥面顶点).
16. 求曲面$F(x,y,z)=0$的曲率线.
17. 证明: 在曲面上的一点, 若$K>0$, 则不存在实的渐近方向; 若$K<0$, 则存在两个渐近方向, 且主方向平分两渐近方向所张成的角.
18. 证明: 直纹面的总曲率不可能为正.
19. 证明球面(半径为a)的总曲率与平均曲率都是常数:

$$K=\frac{1}{a^2},\ H=\frac{1}{a}$$

20. 求螺面$\mathbf{r}=(u\cos v,u\sin v,u+v)$的总曲率与平均曲率.
21. 证明: $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=K\sqrt{g}\mathbf{n}$
22. 设曲面上曲线的切向量与一个主方向夹角为θ. 证明:

$$H=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_n d\theta$$

23. 设过曲面上一点有m条切线, 相邻两条之间交角为$\frac{2\pi}{m}$. 设$\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m$分别为曲面法线与这些切线所定平面截线的曲率半径. 证明: 当$m>2$时

$$H=\frac{1}{m}\Big(\frac{1}{\rho_1}+\cdots+\frac{1}{\rho_m}\Big)$$

24. 求双曲抛物面$\mathbf{r}=(a(u+v),b(u-v),2uv)$的主曲率.
25. 比较切线曲面上曲率线的曲率与曲面的主曲率.

26. 设三个函数$x(u,v),y(u,v),z(u,v)$为微分方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=A(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial u}+B(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

的独立解, 且$x^2+y^2+z^2$亦为方程的解. 证明: 曲面$\mathbf{r}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$的参数曲线为曲率线.

27. 证明: 三族相互正交的曲面交线必为所在曲面的曲率线(Dupin定理).

28. 求二次曲面$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$的曲率线.

29. 曲面上的椭圆点, 双曲点, 抛物点, 脐点是否等距不变的?

30. 证明:

(1) 椭圆面, 双叶双曲面, 椭圆抛物面上的点均为椭圆点;

(2) 单叶双曲面, 双曲抛物面上的点均为双曲点;

(3) 锥面, 柱面上的点均为抛物点.

31. 求曲面$\mathbf{r}=(u^3,v^3,u+v)$的抛物点轨迹.

32. 设旋转曲面的经线有水平切线. 证明这些切线上的切点都是抛物点.

33. 设曲面$S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$上没有抛物点, 并设$S$的一个平行曲面为$\bar{S}:\bar{\mathbf{r}}=\mathbf{r}+\lambda\mathbf{n}$($\lambda$为常数). 证明: 可选取$\bar{S}$ 的法向量$\bar{\mathbf{n}}$, 使$\bar{S}$的总曲率与平均曲率分别为

$$\bar{K}=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K},\quad \bar{H}=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}$$

34. 设曲面的第三基本形式$\mathrm{III}=\mathrm{e'du^2+2f'dudv+g'dv^2}$. 证明:

(1) $|K|=\sqrt{\frac{e'g'-f'^2}{EG-F^2}}$

(2) $(LN-M^2)^2=(EG-F^2)(e'g'-f'^2)$

35. 证明: 在曲面的渐近曲线(曲率不为零)上, $|\tau|=\sqrt{-K}$, 这里K是曲面的总曲率.

36. 证明: 曲面为球面或平面的充要条件是$H^2=K$.

37. 证明: 若曲面的所有曲线均为曲率线, 则它为全脐点的曲面.

38. 证明: 若曲面与其Gauss映照的像成共形对应, 则曲面必为球面或极小曲面.

39. 求总曲率为零的旋转曲面.

40. 证明: 若平移曲面$\mathbf{r}=\mathbf{a}(u)+\mathbf{b}(v)$的参数曲线构成正交网, 则必为柱面.

41. 证明: 若曲面在某一参数表示下, E,F,G,L,M,N均为常数, 则曲面为柱面.

42. 证明: 正螺面$\mathbf{r}=(u\cos v,u\sin v,bv)$为极小曲面, 并证明除平面外, 直纹极小曲面都是正螺面.

43. 证明: 若劈锥曲面$\mathbf{r}=(u\cos v,u\sin v,\varphi(v))$是极小曲面, 则它必是正螺面.

44. 证明: $z=c\arctan\frac{y}{x}$是极小曲面.

45. 若$z=f(x)+g(y)$是极小曲面. 证明: 除相差一个常数外, 它可写成

$$az=\ln\frac{\cos ay}{\cos ax}\quad \text{(Scherk曲面)}$$

46. 证明: 曲面$\mathbf{r}=(3u(1+v^2)-u^3,3v(1+u^2)-v^3,3(u^2-v^2))$是极小曲面(Enneper曲面), 并证明它的曲率线是平面曲线, 求出曲率线所在的平面.

47. 证明: 曲面为极小曲面的充要条件是: 曲面上存在两族正交的渐近曲线.