解 析 几 何

December 7, 2018

91页作业

1. (1). 解：因为 $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz$. 令

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\-3&1&-1\\1&-1&5\end{pmatrix},$$

其对应的特征多项式为

$$0=|A-\lambda I|=\lambda^3-7\lambda^2+36,$$

则 A 的特征根为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$. 他们对应的特征向量分别为

$$\vec{X}_1=(1,1,0)^T,\quad \vec{X}_2=(-1,1,1)^T,\quad \vec{X}_3=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^T,$$

取 $\vec{e}_1^*=\frac{\vec{X}_1}{|\vec{X}_1|}$, $\vec{e}_2^*=\frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_2|}$, $\vec{e}_3^*=\frac{\vec{X}_3}{|\vec{X}_3|}$, 那么有 $(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\,C$, 其中过渡矩阵 C 为

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

所以从坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系$\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix},\tag{1-1}$$

转置得

$$(x,y,z)=(x^*,y^*,z^*)\,C^T=(x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\tag{1-2}$$

将(1-1),(1-2)代入曲面方程得它在 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的方程为

$$\begin{aligned}
0 &= (x,y,z)\,A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+(-4,8,-12)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+14\\
&= (x^*,y^*,z^*)\,C^TAC\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}+(-4,8,-12)\,C\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}+14\\
&= (x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}+\left(2\sqrt{2},0,-6\sqrt{6}\right)\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}+14\\
&= -2\left(x^*-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3(y^*)^2+6\left(z^*-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+6
\end{aligned}$$

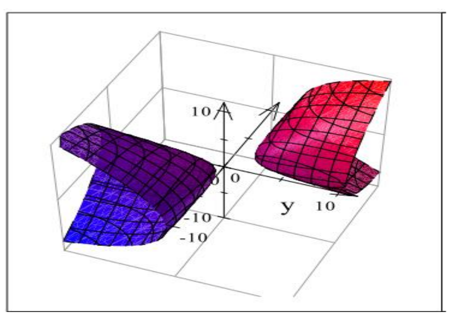
现在将原点平移到$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$点，也即引入新的坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$，使得从 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 到 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}. \tag{1-3}$$

于是原方程在坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 中的方程为

$$-2x'^2+3y'^2+6z'^2+6=0.$$

它表示的是双叶双曲面.



另外，由(1-1) 和（1-3）知，从 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

或等价的为

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{3}y'+\frac{\sqrt{6}}{6}z'+1 \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{3}y'-\frac{\sqrt{6}}{6}z' \\ z=\frac{\sqrt{3}}{3}y'+\frac{\sqrt{6}}{3}z'+1 \end{array}\right. .$$

(5). 解：因为 $\Phi(x,y,z)=2y^2-2xy-2yz+2xz$. 令

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

其对应的特征多项式

$$0=|A-\lambda I|=-\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda=-(\lambda-3)(\lambda+1)\lambda,$$

则 A 的特征根为 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=0$, 他们对应的特征向量分别为

$$\vec{X}_1=(1,-2,1)^T, \quad \vec{X}_2=(1,0,-1)^T, \quad \vec{X}_3=(1,1,1)^T,$$

取 $\vec{e}_1^*=\frac{\vec{X}_1}{|\vec{X}_1|}$, $\vec{e}_2^*=\frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_2|}$, $\vec{e}_3^*=\frac{\vec{X}_3}{|\vec{X}_3|}$, 那么有 $(\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*)=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)C$, 其中过渡矩阵 C 为

$$C=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

所以从坐标系 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系$\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}, \tag{1-4}$$

转置得

$$(x,y,z)=(x^*,y^*,z^*)C^T=(x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \tag{1-5}$$

将(3-1),(3-2)代入曲面方程得它在 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的方程为

$$
\begin{aligned}
0 &= (x,y,z)\,A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+(2,1,-3)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}-5\\
&= (x^*,y^*,z^*)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}+(2,1,-3)\,C\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}-5\\
&= 3\left(x^*-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2-\left(y^*-\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2-2
\end{aligned}
$$

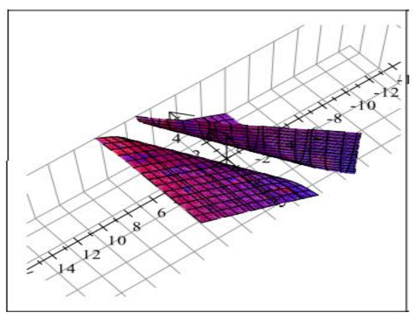
引入新的坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$，使得从 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 到 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的坐标变换公式为

$$
\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^*\\ y^*\\ z^*\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{12}\\ \frac{5\sqrt{2}}{4}\\ 0\end{pmatrix}. \tag{1-6}
$$

于是原方程在坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 中的方程为

$$3x'^2-y'^2-2=0.$$

它表示的是双曲柱面.



另外，由(1-4) 和（1-6）知，从 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到坐标系 $\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ 的点坐标变换公式为

$$
\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{pmatrix},
$$

或等价的为

$$
\left\{\begin{array}{l}
x=\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'+\frac{4}{3}\\
y=-\frac{2}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'-\frac{1}{6}\\
z=\frac{1}{\sqrt{6}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{3}}z'-\frac{7}{6}
\end{array}\right. .
$$

2.(1). 解：由题

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$$

所以由3.5.3节的表格知它是第I类曲面. 又原曲面的二次型部分的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

直接计算它的特征值得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$, 且

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -20,$$

所以曲面的标准方程为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \frac{I_4}{I_3} = -x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2 + 2 = 0.$$

它是个双叶双曲面.

(3). 解：由题

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

所以由3.5.3节的表格知它是第I类曲面. 又原曲面的二次型部分的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

直接计算它的特征值得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 2$, 且显然 $I_4 = 0$, 所以曲面的标准方程为

$$x'^2 + y'^2 + 4z'^2 = 0.$$

它退化为一点. **4.** 解：令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\lambda, \mu$ 为它的特征值. 注意到在平面Oxy上，我们总可以通过旋转和平移 x, y 轴得到新的坐标面 $O'x'y'$, 使得在$O'x'y'$上曲线具有下面的标准形式

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 = c^*,$$

且当 $c^* > 0$, 曲线为椭圆时$\lambda, \mu > 0$, 双曲线时λ, μ异号，抛物线时λ, μ中有一个为0. 在空间中，用上面相同方式改变x, y 轴, 保持 z 轴的方向不变，且取$z' = z + c^*$，得到新的坐标系$O'x'y'z'$, 在这个坐标系里曲线的方程为

$$\begin{cases} \lambda x'^2 + \mu y'^2 = c^* \\ z' = c^* \end{cases}.$$

相应的，曲面 $\Sigma' : z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ 的新方程为

$$z' = \lambda x'^2 + \mu y'^2.$$

那么对照3.5.3节中的表格 知:

曲线为椭圆时, $\lambda, \mu > 0$, Σ'为椭圆抛物面；

曲线为双曲线时, λ, μ异号，Σ'为双曲抛物面；

曲线为抛物线时, λ, μ中有 一个为0, Σ'为抛物 柱面.

详细的计算方式的证明如下：

已知Oxy平面上的曲线在$Oxyz$中的方程为

$$\Gamma : \begin{cases} \Sigma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

令 $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\lambda_1, \lambda_2$ 为它的特征值，$\vec{X}_1' = (\alpha_1, \beta_1)^T, \vec{X}_2' = (\alpha_2, \beta_2)^T$ 为分别对应于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 为表述简单，不妨设 $\left|\vec{X}_1\right| = \left|\vec{X}_2\right| = 1$. 那么曲面 Σ 的二次型部分的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值为 λ_1, λ_2 和 $\lambda_3 = 0$, 且相应的特征向量分别为 $\vec{X}_1 = (\alpha_1, \beta_1, 0)^T, \vec{X}_2 = (\alpha_2, \beta_2, 0)^T$ 和 $\vec{X}_3 = (0, 0, 1)^T$.

取 $\vec{e}_1^* = \frac{\vec{X}_1}{|\vec{X}_1|}$, $\vec{e}_2^* = \frac{\vec{X}_2}{|\vec{X}_2|}$, $\vec{e}_3^* = \frac{\vec{X}_3}{|\vec{X}_3|} = (0, 0, 1)^T$, 那么有 $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, C$, 其中过渡矩阵$C$为

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以从 $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 到 $\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$ 的点坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = \alpha_1 x^* + \alpha_2 y^* \\ y = \beta_1 x^* + \beta_2 y^* \\ z = z^* \end{cases}.$$

由此Σ在$\{O;\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*,\vec{e}_3^*\}$中的方程为

$$\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + 2a^* x^* + 2b^* y^* = 0, \tag{4-1}$$

其中 $a^* = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2$, $b^* = a_{13}\beta_1 + a_{23}\beta_2$.

(1).λ_1,λ_2都不为0时，配方(4-1)式，

$$\lambda_1\left(x^* + \frac{a^*}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y^* + \frac{b^*}{\lambda_2}\right)^2 = c^*,$$

其中 $c^* = \frac{a^{*2}}{\lambda_1} + \frac{b^{*2}}{\lambda_2}$. 再取坐标系 $\left\{O';\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}'\right\}$, 使得

$$x' = x^* + \frac{a^*}{\lambda_1},\ y' = y^* + \frac{b^*}{\lambda_2},\ z' = z^* + c^*.$$

那么曲线C的新方程为

$$\begin{cases} \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = c^* \\ z' = c^* \end{cases},$$

曲面Σ'的新方程为

$$z' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

那么显然Γ为椭圆时，λ_1,λ_2 同号， 则Σ'是椭圆抛物面；Γ为双曲线时，λ_1,λ_2异号，Σ'为双曲抛物面.

(2).λ_1,λ_2 中有一个为0时，用同样的讨论知，此时Γ为抛物线, Σ'为抛物柱面.

5. 证明： 适当选取新的坐标系$\{O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$, 使得曲面的方程为

$$\Sigma : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 0,$$

其中 λ_k, $k = 1,2,3$, 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 的特征值. 因为是二次锥面，由其标准方程，不妨设 $\lambda_1,\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$.

在坐标系 $\{O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$中, 首先注意到$\Sigma$的顶点是原点，且点 $P_1 = \left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}},0,1\right) \in \Sigma$. 考虑与 $\overrightarrow{OP_1}$垂直的向量 $\overrightarrow{OP_2} = \left(-\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}},\mu,1\right)$，其中 $\mu \neq 0$. 因为

$$\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2} = \left(-\mu, -\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} + \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}\right), \mu\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\right) = -\mu\left(1, \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\mu\sqrt{-\lambda_1\lambda_3}}, -\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\right),$$

取 $\overrightarrow{OP_3} = \left(1, \frac{\lambda_3-\lambda_1}{\mu\sqrt{-\lambda_1\lambda_3}}, -\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\right)$, 则 $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$ 和 $\overrightarrow{OP_3}$ 两两正交.

若存在适当的 μ 使得$P_2, P_3 \in \Sigma$，那么有

$$\begin{cases} \lambda_1\left(-\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}\right)^2 + \lambda_2\mu^2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2\left(\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\mu\sqrt{-\lambda_1\lambda_3}}\right)^2 + \lambda_3\left(-\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_3\mu^2 = \lambda_1^2 - \lambda_3^2 \\ \left(\lambda_1^2 - \lambda_3^2\right)\lambda_3\mu^2 = \lambda_2\left(\lambda_1 - \lambda_3\right)^2 \end{cases}. \tag{5-1}$$

因为$\lambda_1 \neq \lambda_3$, 由（5-1）的两式相除得

$$(\lambda_1 + \lambda_3)^2 = \lambda_2^2, \quad \text{i.e.} \quad (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2) = 0. \tag{5-2}$$

因为$\lambda_3 < 0$, 注意到（5-1）中的二式的右边为正，所以$\lambda_1^2 - \lambda_3^2 < 0$, i.e. $(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3) < 0$. 而$\lambda_1 > 0$, 所以只能是 $\lambda_1 + \lambda_3 < 0$. 因此

$$\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2 < 0. \tag{5-3}$$

因为矩阵的迹是坐标变换不变量，所以由（5-2）和（5-3）得，

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0.$$

因为上述证明可逆，所以题目得证.

("$\Rightarrow$"的证明比较简单,方法比较多, 关键是"$\Leftarrow$"的证明.)

1. (1). 解：这是二次锥面$x^2 + y^2 - z^2 = 0$和抛物柱面$z^2 = 2x + 1$的交线.

由曲线方程消去z, 得到曲线对xOy面的射影柱面方程为

$$x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0, \quad 即 \quad (x-1)^2 + y^2 = 2.$$

因此它是个母线平行于z轴的圆柱面,在xOy面上的截线为以$(1, 0)$为心, 半径为$\sqrt{2}$的圆.

注意到曲线方程的第二个方程中不含坐标y, 所以此抛物柱面本身就是曲线对xOy面的射影柱面.

由曲线方程消去x, 得到曲线对yOz面的射影柱面方程为

$$(1 - z^2)^2 + 4(y^2 - z^2) = 0.$$

(2).这是单叶双曲面$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ 和平面$x = 2$的交线.

由曲线方程消去x, 得到曲线对xOy面的射影柱面方程为

$$4y \pm 3z = 0.$$

注意到第二个方程中不含坐标y, z, 所以曲线对xOy面和对yOz面的射影柱面方程均为

$$x = 2.$$

(3).这是单叶双曲面$x^2 + 4y^2 - z^2 = 16$和椭圆抛物面$4x^2 + y^2 + z^2 = 4$的交线. 联立方程, 可得

$$x^2 + 4y^2 - z^2 + 4x^2 + y^2 + z^2 = 5(x^2 + y^2) = 20.$$

即得

$$x^2 + y^2 = 4.$$

将上面方程代入椭圆抛物面方程得$3x^2 + z^2 = 0$, 即得$x = z = 0, y = \pm 2$. 即交线为两个点$(0, 2, 0), (0, -2, 0)$. 即得 对xOz面的射影柱面方程为

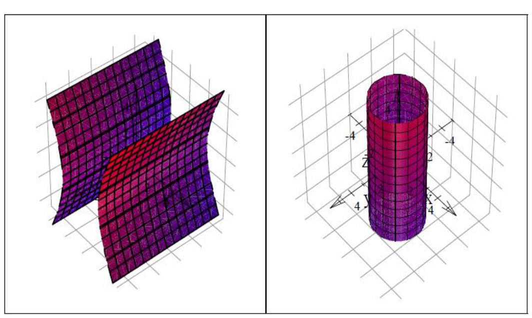
$$x = z = 0, \quad \text{即}y\text{轴}.$$

曲线对xOy面的射影柱面方程为

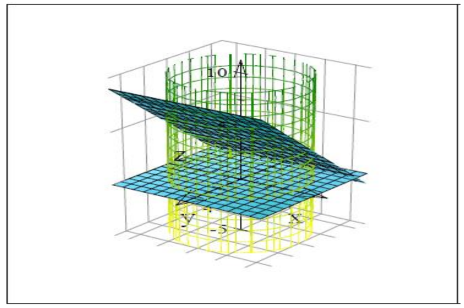
$$\begin{cases} y = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

曲线对yOz面的射影柱面方程为

$$\begin{cases} y = \pm 2 \\ z = 0 \end{cases}$$



2.解:



(1). 空间区域为

$$\begin{cases} -4 \le x \le 4 \\ -\sqrt{16-x^2} \le y \le \sqrt{16-x^2} \\ 0 \le z \le x+4 \end{cases}.$$

(2). 球面与椭圆抛物面相交.令

$$x^2 + 4x = 4.$$

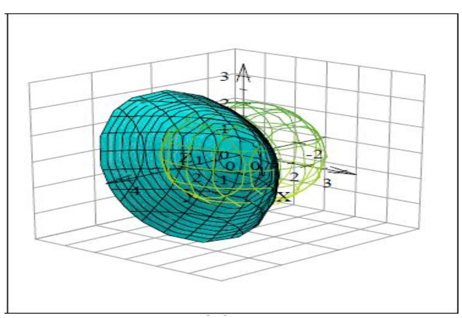
解得$x = 2\sqrt{2} - 2$ 或$x = -2\sqrt{2} - 2$(舍).

空间区域分为两块, 一块为

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2\sqrt{2} - 2 \\ -\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x} \\ -\sqrt{4x - y^2} \le z \le \sqrt{4x - y^2} \end{cases}.$$

另一块区域为

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} - 2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \\ -\sqrt{4-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}.$$



3. (1).