

实变函数与泛函分析

定理·方法·问题

胡适耕 刘金山 编著



高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析/ 胡适耕 刘金山 编著. — 北京: 高等教育出版社, 2003.6

ISBN 7-04-_____

I. 实... II. ①胡... ②刘... III. ①实变函数—高等学校—教材 ②泛函分析—高等学校—教材 IV.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第_____号

责任编辑: 徐 可 封面设计: 王凌波
版式设计: 杨 明 责任印制: 陈伟光

实变函数与泛函分析 定理·方法·问题
胡适耕 刘金山 编著

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 北京民族印刷厂

开 本	880×1230 1/32	版 次	2003 年 6 月第 1 版
印 张	8.375	印 次	2003 年 6 月第 1 次印刷
字 数	240 000	定 价	15.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究

前 言

对于现今数学系的大学生来说,实变函数与泛函分析似乎是这样的课程:你要么特别喜爱它,要么十分惧怕它,甚至厌弃它.如果你在经过一番努力之后,终于尝到了这一门(两门?)课程的滋味,为其中异常丰富且引人入胜的数学思想所打动,那么你将不可能不喜爱它,很可能将它视为大学期间最美妙的课程之一.如果你在绞尽脑汁之后依然不得要领,只是感到囫囵吞下的一大堆定义与定理抽象费解,而面对问题则束手无策,那么,你心中自然只留下恐惧与厌倦,很可能视其为大学期间最伤脑筋的课程.对于实变函数与泛函分析课程的教师来说,如果能使喜爱这门课程的人更多一点,而惧怕它的人更少一点,那么就算成功了.这似乎并不容易.本书作者与许多同行交换过看法,发现情况并不乐观.

就其令人赞赏的逻辑力量与高度富有启发性的数学思想而言,实变函数与泛函分析无疑是最有价值的大学数学课程之一,它对于数学系大学生的基础理论训练所起的独特作用是无可替代的.在这一点上,数学教育界并无歧见.问题在于,你如何使刚开始学习这一课程的大学生达到同样的认识?实际情况常常是,远在学生开始意识到实变函数与泛函分析有其重要性之前,他们的学习兴趣已被这门课程晦涩艰深的外观驱除殆尽了.

这就需要给学生以帮助.首要的问题是,你得竭尽全力降低课程难度,至少为一部分学生解除惧怕心理.要做到这一点,教师的高明指点与教材的有效引导,无疑是最重要的,但往往还不够.经验表明,无论是喜爱或惧怕实变函数与泛函分析的学生,都花不少时间到教材以外的书籍中去搜索,以期获得一些帮助,甚至是在苦恼之中得到一点安慰.然而,在这方面真正可读的书籍似乎并不多,几乎难得一见.

本书作者之一所撰的《实变函数》与《泛函分析》两书,已分别于

1999 年与 2001 年面世(高等教育出版社 — 施普林格出版社), 并陆续被国内许多高等学校用作教材. 自然, 这些教材的读者中, 既会有实变函数与泛函分析的喜爱者, 也会有惧怕者. 他们传递给作者的一个共同信息是, 对于理解内容与解决问题(这两本教材所列问题数量都颇可观), 尚无更进一步的引导, 确有难以克服的困难. 这一情势, 也是促使我们撰写本书的因素之一.

本书熔思想、方法与问题于一炉, 从不同于教材的另一个角度为初学者提供引导, 其重点则在于通过具体问题阐释典型方法, 务使一些通常被学生认为难于掌握的方法呈现出自然与简洁的面貌. 在某些方面, 教材必因其自身的特点而不免言不尽意, 而一本不必受通行风格约束的书, 则不妨在必要之处“喋喋不休”, 直到使某些要义被阐发得淋漓尽致而后已. 本书所汇集的整整 600 个问题, 无论从教与学两方面考虑, 都提供了一个思考与演练的较大的空间.

我们要特别感谢高等教育出版社对于撰写本书的支持, 正是出版社及时转达了读者的建议而促成本书的写作. 对于为我们提供了一些问题与建议的同行, 在此亦致诚挚的谢意.

作者

2003 年 4 月于武汉

目 录

记号与约定	(V)
几点说明	(VII)
第一章 集论与测度.....	(1)
§ 1.1 集论	(1)
§ 1.2 测度.....	(17)
§ 1.3 可测函数.....	(32)
第二章 积分	(44)
§ 2.1 Lebesgue 积分.....	(44)
§ 2.2 微分与不定积分.....	(70)
§ 2.3 Stieltjes 积分	(84)
第三章 Banach 空间	(98)
§ 3.1 函数空间.....	(98)
§ 3.2 点集与映射	(123)
§ 3.3 Hilbert 空间	(143)
第四章 线性算子与线性泛函.....	(159)
§ 4.1 有界线性算子	(159)
§ 4.2 有界线性泛函	(178)
§ 4.3 弱收敛与对偶算子	(193)
第五章 谱与紧线性算子.....	(209)
§ 5.1 谱与算子函数	(209)
§ 5.2 紧线性算子	(225)

§ 5.3 Hilbert 空间中的线性算子	(239)
参考书目	(257)

记号与约定

A^c : 集 A 的补.

A° : 集 A 的内部.

\bar{A} : 集 A 的闭包.

A^\perp : 集 A 的正交补或零化子.

AC : 绝对连续函数类.

$B_r(a)$: 以 a 为心以 r 为半径的开球.

$\bar{B}_r(a)$: 以 a 为心以 r 为半径的闭球.

BV : 有界变差函数类.

\mathcal{B}^n : n 维 Borel 集族, 通常令 $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1$.

\mathbb{C} : 复数域.

$\mathcal{C}(A, B)$: 从 A 到 B 的连续映射之全体.

$\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ 或 $\mathcal{C}(A, \mathbb{C})$.

$C^r(A)$: A 上的 r 次连续可微函数之全体.

$\mathcal{CL}(X, Y)$: 从 X 到 Y 的紧线性算子之全体.

$\mathcal{CL}(X) = \mathcal{CL}(X, X)$.

χ_A : 集 A 的特征函数.

$D(F)$: 映射 F 的定义域.

$d(A, B)$: 集 A 与 B 之间的距离 ; $d(x, B) = d(\{x\}, B)$.

$\dim X$: 空间 X 的维数.

$\{e_i\}$: 通常记 \mathbb{R}^n 或 $l^p (1 \leq p < \infty)$ 的标准基.

$\mathcal{GL}(X)$: 空间 X 上的拓扑自同构之全体.

$\text{Gr} F$: 映射 F 的图形.

H : 通常记 Hilbert 空间.

I : 单位算子, 单位矩阵.

J : 通常记某个闭区间 $[a, b]$.

$\mathbf{K} = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} .

$L^p(\Omega)$: Ω 上的 p 次可积函数之全体, $1 \leq p < \infty$.

$L^\infty(\Omega)$: Ω 上的本性有界函数之全体.

$L(X, Y)$: 从 X 到 Y 的有界线性算子之全体.

$L(X) = L(X, X)$.

\mathcal{L}^n : n 维 Lebesgue 可测集之全体; $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1$.

$l^p = L^p(\mathbf{N})$ ($1 \leq p \leq \infty$).

$M(\Omega)$: Ω 上的可测函数之全体.

$M^+(\Omega)$: Ω 上的非负可测函数之全体.

m : Lebesgue 测度.

\mathbf{N} : 自然数集.

$N(T)$: 算子 T 的零空间.

\mathbf{Q} : 有理数集.

\mathbf{R} : 实数域; $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm \infty\}$.

$\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, $\bar{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$.

$R(T)$: 算子 T 的值域.

$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$.

$r_\sigma(T)$: 算子 T 的谱半径.

$\rho(T)$: 算子 T 的正则值集.

$S(\Omega)$: Ω 上的简单函数之全体.

$S^+(\Omega)$: Ω 上的非负简单函数之全体.

$\text{span } A$: 集 A 生成的向量空间.

$\sigma(\mathcal{A})$: 集族 \mathcal{A} 生成的 σ -代数.

$\sigma(T)$: 算子 T 的谱.

T : 通常记线性算子.

T^* : 算子 T 的对偶算子或相伴算子.

$V_a^b(f)$: 函数 f 在 $[a, b]$ 上的全变差.

X, Y, Z : 通常记赋范空间.

X^* : 空间 X 的对偶.

\mathbf{Z} : 整数集; $\mathbf{Z}_+ = \{n \in \mathbf{Z} : n \geq 0\}$.

2^X : 集 X 的子集之全体.

\triangleq : 定义为.

\square : 一题解毕.

几点说明

1. 引证 § 1.1(1)表 § 1.1 节中式(1); 1.1 表第一章题 1 [1, p. 1] 参考文献 1 中第 1 页. 余类推.

2. 指标用法 不致误解时, 出现于 \sum, \prod, \cup, \cap 下的指标予以省略. 未注明时, 下标 n 总表自然数. $\sum a_n$ 依情况可写成:

$$\sum_n a_n, \sum_1^\infty a_n, \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ 或 } \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

$\prod a_n, \cup A_n$ 等仿此. $\cup A_n$ 总可看作无限可数并(必要时增加一些空集项); $\cap A_n$ 仿此.

3. 极限符号 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 简写作 $\lim_n x_n$; $\lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{mn}$ 简写作 $\lim_{m, n} x_{mn}$; $f(x^\pm) = \lim_{h \downarrow 0} f(x \pm h)$, 其中 $h \downarrow 0$ 表示 $0 < h \rightarrow 0$. 未说明时, 极限值包括 $\pm \infty$; ∞ 总是指 $+\infty$. \Rightarrow 记一致收敛; $\xrightarrow{\text{a. e.}}$ 或 $\rightarrow_{\text{a. e.}}$ 记几乎处处收敛; $\xrightarrow{\text{a. u.}}$ 或 $\rightarrow_{\text{a. u.}}$ 记几乎一致收敛; $\xrightarrow{\mu}$ 记依测度 μ 收敛; $\xrightarrow{L^p}$ 记 L^p 收敛; \rightharpoonup 记弱收敛, $\overset{*}{\rightharpoonup}$ 记弱*收敛; $f_n \uparrow f$ 表 $f_n \rightarrow f$ 且 f_n 对 n 单调增. 对于序列极限, 通常省去 " $n \rightarrow \infty$ ".

4. 集记号 $\{x \in X : x \text{ 满足 } P\}$ 表示 X 中满足条件 P 的元之全体, 通常简写作 $X(P)$ 或 $\{P\}$. 例如 $\{x \in X : f(x) \geq 0\}$ 简写作 $X(f \geq 0)$ 或 $\{f \geq 0\}$. 集 $\{f \geq 0\}$ 的定义与 f 是否为非负函数无关. 即使处处有 $f(x) < 0$, $\{f \geq 0\}$ 仍然是一个合理的集, 它就是 $\{f \geq 0\} = \emptyset$! 若 A, B 是某向量空间的子集, 则约定 $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $-A = \{-a : a \in A\}$.

5. 范数记号 不致混淆时, 空间 $X, Y, X^*, L(X, Y)$ 等中的范数用同一记号 $\|\cdot\|, \|\cdot\|_p$ 记 L^p 范数; $\|\cdot\|_0$ 记 \sup 范数; $|\cdot|$ 记 \mathbb{K}^n 中的 Euclid 范数.

6. 最大与最小 约定 $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$;
 $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f)^+$ (分别称为 f 的正部与负部).

7. **const** 的用法 当 **const** 出现在式子中时, 它表示某个有限常数; 其具体数值难以或不必要明确写出.

8. 问题 题号依章编排. 所有问题都表述得尽可能简略. 证明题仅写出要证的结论, 而省去“求证”之类的词. 一部分问题给出了详细解答, 其余的题则仅给出提示或答案.

第一章 集论与测度

现在,你已开始实变函数课程的学习.无论你选择了哪本教材,大概首先得面对集论与测度.在学习的这一阶段,你未必十分清楚,集论与测度在现代数学中占有何等位置.实际上,二者是全部数学的公认的基础,而不像流行教材似乎要人们相信的,它们不过是实变函数的一个首章而已.不妨这样来看:正因为如此辉煌的数学理论被纳入实变函数课程内容的范围之内,实变函数所提供的数学训练才如此重要且无可替代.不过,在一个短短的课程中,你还来不及接触集论与测度论的深入内容.而且,对于函数的研究,集论与测度都不过是工具而已.对于实变函数论的学习,重要的是,你应能像在微积分学中运用实数理论一样,熟练地运用集论与测度的基本概念、用语、结论与方法.本章正是要帮助你做到这一点.

§ 1.1 集 论

一、定理与定义

你大概在中学时代就开始接触集论概念了.因此不妨假定,关于集及其运算的概念、记号与规则,已是众所周知的公共知识.

对于一个集列 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ (简写作 $\{A_n\}$) 约定

$$\begin{cases} \overline{\lim}_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ \underline{\lim}_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \end{cases} \quad (1)$$

二者分别称为 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限.由(1)直接看出, $x \in \overline{\lim}_n A_n \Leftrightarrow$ 有任意大的 n 使 A_n 含有 x , $x \in \underline{\lim}_n A_n \Leftrightarrow$ 当 n 充分大时必 $x \in A_n$. 这

一直观理解对上、下极限集的运用是重要的. 若 $\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n = A$, 则称 A 为 $\{A_n\}$ 的极限, 并记作 $\lim_n A_n$. 若 $\{A_n\}$ 是升列 (即 $A_1 \subset A_2 \subset \dots$) 则 $\lim_n A_n = A = \bigcup_n A_n$, 缩写作 $A_n \uparrow A$; 若 $\{A_n\}$ 是降列 (即 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$) 则 $\lim_n A_n = A = \bigcap_n A_n$, 缩写作 $A_n \downarrow A$.

若 $A \subset X$, 则以 A^c 记 A 在 X 中的补集, 即 $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$. 注意 A 与 A^c 互为补集, 这种互补性是许多对偶关系的基础. 基本的对偶律是:

$$\begin{cases} (\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c, \\ (\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c. \end{cases} \quad (2)$$

公式 (2) 常用来实现并与交的互相转化. 结合 (1) (2) 得出

$$\begin{cases} (\overline{\lim}_n A_n)^c = \underline{\lim}_n A_n^c, \\ (\underline{\lim}_n A_n)^c = \overline{\lim}_n A_n^c. \end{cases} \quad (3)$$

公式 (3) 可用来实现上极限与下极限的互相转化.

利用补与交 (或补与并), 可表出其他集运算. 例如

$$A \setminus B = A \cap B^c \quad (\text{差}); \quad (4)$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (\text{对称差}). \quad (5)$$

任给 $A \subset X$, A 的特征函数 χ_A 定义为

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in A^c. \end{cases} \quad (6)$$

A 与 χ_A 唯一地互相决定. 特征函数用来实现集关系与数量关系的互相转化. 基本的对应规则是:

$$A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B, A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B;$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B, \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B;$$

$$\chi_{A \Delta B} = |\chi_A - \chi_B|.$$

任给集合 X_1, \dots, X_n , 称

$$\prod_{i=1}^n X_i = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i (1 \leq i \leq n) \} \quad (7)$$

为 X_1, \dots, X_n 的积集, 也记作 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. 当 $X_1 = \dots = X_n = X$ 时, 将 $\prod_{i=1}^n X_i$ 写作 X^n , 称其为 X 的 n 重积. $\mathbf{R}^n, \mathbf{Q}^n, \mathbf{Z}^n$ 是最常见的 n 重积集的例子, 其中 $\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ 分别为实数集, 有理数集与整数集.

给定非空集 X, Y . 若对每个 $x \in X$, 依规则 F 有唯一确定的元 $y = Fx \in Y$ 与之对应, 则称 F 为从 X 到 Y 的映射, 记作 $F: X \rightarrow Y$. 这里本质的东西是 x 与 Fx 之间的确定对应关系; 至于这一对应关系的表示方法及相应的名称与记号, 都是非本质的. 你可以改称映射为函数、变换、算子等等. 为便于理解, 最好将映射看作微积分学中所熟知的函数概念的自然推广. 关于函数的熟知术语自然地移用于一般的映射 $F: X \rightarrow Y$. 例如, 称 Fx 为 F 在 x 的函数值, 称 X 为 F 的定义域, 记作 $D(F)$; 称 $R(F) \triangleq \{Fx: x \in X\}$ 为 F 的值域, 称 $\text{Gr}F \triangleq \{(x, Fx): x \in X\}$ 为 F 的图形. 若 $R(F) = Y$, 则称 F 为满射; 若当 $x \neq z$ 时 $Fx \neq Fz$, 则称 F 为单射; 若 F 既是单射又是满射, 则称 F 为一一映射. 若 $F: X \rightarrow Y$ 是一一映射, 则每个 y 对应唯一的 $x \in X$, 使得 $Fx = y$, 此时称对应

$$F^{-1}: Y \rightarrow X, Fx \rightarrow x$$

为 F 的逆映射或反函数.

给定映射 $F: X \rightarrow Y$ 与 $G: Y \rightarrow Z$, 可构成复合映射

$$G \circ F: X \rightarrow Z, x \rightarrow G(Fx).$$

F 是一一映射的充要条件是: 存在 $G: Y \rightarrow X$, 使得

$$G \circ F = 1_X, F \circ G = 1_Y, \quad (8)$$

其中 $1_X: X \rightarrow X, x \rightarrow x$ 是单位映射, 1_Y 仿此. 式(8)中的 G 必为 F 的逆映射.

给定映射 $F: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$, 令

$$FA = \{Fx: x \in A\}, F^{-1}B = \{x: Fx \in B\}.$$

称 FA 为 A 在 F 下的像^①, 称 $F^{-1}B$ 为 B 关于 F 的原像. 对于 $A, A_i \subset X, B, B_i \subset Y (i \in I), C \subset Z, G: Y \rightarrow Z$, 有以下常用的关系:

① 在胡适耕编的《实变函数》《泛函分析》中用的是“象”, 本书改用“像”.

$$A \subset F^{-1}FA, \quad FF^{-1}B \subset B; \quad (9)$$

$$F(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i FA_i, \quad F(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i FA_i; \quad (10)$$

$$\begin{cases} F^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i F^{-1}B_i, & F^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i F^{-1}B_i; \\ F^{-1}B^c = (F^{-1}B)^c; \end{cases} \quad (11)$$

$$(G \circ F)^{-1}C = F^{-1}(G^{-1}C). \quad (12)$$

通常实变函数教材中多少包含某些关于基数的内容,对于如何处理这些内容,学者们看法不尽一致.基数理论美妙而深奥,对于数学家有持久的吸引力.在这一点上,人们并无争议.但在一个带入门性质的实变函数与泛函分析课程中,并无必要涉及基数概念,仅有关于可数集的概念就够了.

若 A 是一个集,存在单射 $F: A \rightarrow \mathbf{N}$, 则称 A 为可数集.更直观的描述是:若 A 的全体元素可排列成一个有限或无限序列: $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, 则称 A 为可数集.在这一定义下,可数集包括了所有有限集.对于一无限可数集,除了少数例外,要将其全体元素实际写成一个序列是很困难的.因此,通常依据其他一些条件来间接地判定可数性,下面两个定理即为此而设.

定理 1.1.1 设 $F: A \rightarrow B$ 是一映射.若 F 是单射, B 可数, 则 A 可数;若 F 是满射, A 可数, 则 B 可数.

定理 1.1.2 可数集的子集是可数集;可数个可数集的并是可数集;有限个可数集的积集是可数集.若 $\{I_n\}$ 是一列可数集, 则形如

$$\{x_{i_1, \dots, i_n} : i_k \in I_k, k = 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots\}$$

的集是可数集.

最常用的可数集是:有理数集 \mathbf{Q} , n 维有理点集 \mathbf{Q}^n , 有理系数多项式之集, 等等.记住这些基本的可数集,然后再借助于定理 1.1.1 与定理 1.1.2, 解决本课程中可能遇到的可数集判定问题, 已无任何困难.

习惯上, Euclid 空间 \mathbf{R}^n 的子集称为点集.“点集”这一称呼并无实质意义.本质的东西是:可以用距离来刻画 \mathbf{R}^n 中两点间的接近程度.这一事实可以在更一般的空间(例如 Banach 空间与度量空间)中确立.

因此,我们将在第三章中更系统地考虑点集问题,现在只提出最初步的定义与某些简单结论.

任给 $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbf{R}^n$, 称

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

为 x 的模长或 Euclid 范数. 任给 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 称 $|x - y|$ 为 x 与 y 之间的距离. 任给 $a \in \mathbf{R}^n, r > 0$, 称

$$B_r(a) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - a| < r\}$$

为以 a 为心以 r 为半径的球或开球. 若 $A \subset \mathbf{R}^n$, 则分别以 A°, \bar{A} 与 A' 记 A 的内部、闭包与导集, 其中

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0, \text{使 } B_r(x) \subset A\};$$

$$\bar{A} = \{x \in \mathbf{R}^n : \forall r > 0, \text{有 } A \cap B_r(x) \neq \emptyset\};$$

$$A' = \{x \in \mathbf{R}^n : \forall r > 0, \text{有 } (A \setminus \{x\}) \cap B_r(x) \neq \emptyset\}.$$

若 $A = A^\circ$, 则称 A 为开集. 若 $A = \bar{A}$, 则称 A 为闭集. 若 $B \subset \bar{A}$, 则说 A 在 B 中稠密. 若 $(\bar{A})^\circ = \emptyset$, 则称 A 为疏集. 若存在 $r > 0$, 使得 $A \cap B_r(x) = \{x\}$, 则称 x 为 A 的孤立点. 无孤立点的闭集称为完备集. 可数个开集的交称为 G_δ 型集, 可数个闭集的并称为 F_σ 型集.

定理 1.1.3 一集为开集当且仅当其补为闭集; 任意个开集的并及有限个开集的交是开集; 任意个闭集的交及有限个闭集的并是闭集; 空集与全空间既是开集又是闭集.

定理 1.1.4 \mathbf{R} 中任何非空开集是可数个互不相交的开区间之并 (这样的开区间称为构成区间); \mathbf{R}^n 中任何非空开集可表为可数个 (未必互不相交) 开球之并.

若 $F \subset \mathbf{R}$ 是闭集且 $F \neq \mathbf{R}$, 则 F^c 是非空开集. 于是由定理 1.1.4 推出, F 是从 \mathbf{R} 上挖去可数个互不相交的开区间后所得之集, 被挖去的区间称为 F 的余区间; 当余区间相互没有公共端点时 F 是完备集. 完备集可以是疏集, 其典型例子就是著名的 Cantor 集.

任给非空集 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 与函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. 设 $a \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \Omega \cap B_\delta(a)$, 有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, 则说 f 在点 a 连续. 若

f 在 Ω 上每点连续, 则说 f 在 Ω 上连续. 以 $\mathcal{C}(\Omega)$ 记 Ω 上的连续实值函数之全体.

定理 1.1.5 对于函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 以下条件互相等价:

(i) $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \{f > \alpha\}$ 与 $\{f < \alpha\}$ 为开集;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \{f \geq \alpha\}$ 与 $\{f \leq \alpha\}$ 是闭集.

若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是开集, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, 则定理 1.1.5 中的条件 (ii) 是 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ 的充要条件. 若 Ω 是闭集, 则条件 (iii) 是 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ 的充要条件.

二、问题与方法

A. 证明集等式

方法 I (直接法) 可设要证的等式为 $A = B$, 于是只要证 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 这相当于证 $x \in A \Rightarrow x \in B, x \in B \Rightarrow x \in A$.

方法 II 为证 $A = B$, 运用集运算规则恒等地变换 A (或 B), 直至最终将它变换为 B (或 A) 或者同时变换 A, B , 直至将它们变为同一个集 C .

方法 II 似乎更具有吸引力: 它将证明过程归结为一系列形式演算, 如同在代数学中证明代数恒等式一样. 我们已经注意到, 集运算中的并与交, 有点类似于代数运算中的和与积. 对于并与交, 也有交换律、结合律与分配律. 应用这些运算规则变换或化简一个用集运算构成的式子, 将是一件很引人的事. 下面就是例子.

$$1.1 \quad (A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

证法 I 设 $x \in$ 左端, 则 $x \in A \setminus B$ 且 $x \in C \setminus D$, 于是 $x \in A, x \in C$ 且 $x \notin B, x \notin D$, 这推出 $x \in A \cap C$ 且 $x \notin B \cup D$, 故 $x \in$ 右端. 反之, 设 $x \in$ 右端, 则 $x \in A \cap C$ 且 $x \notin B \cup D$, 于是 $x \in A, x \in C$ 且 $x \notin B, x \notin D$, 这推出 $x \in A \setminus B$ 且 $x \in C \setminus D$, 因而 $x \in$ 左端. 因此所要证等式成立.

证法 II 证明由如下的一串演算完成:

$$\text{左边} = (A \cap B^c) \cap (C \cap D^c) \quad (\text{用(4)})$$

$$=(A \cap C) \cap (B^c \cap D^c) \quad (\text{交换律与结合律})$$

$$=(A \cap C) \cap (B \cup D)^c \quad (\text{用(2)})$$

$$=(A \cap C) \setminus (B \cup D) = \text{右边}. \quad (\text{用(4)}) \quad \square$$

上面的证法 II 让你看到,代数学的演算程序,居然也适用于像集这样抽象的对象!如果你为此而深受鼓舞,那么不妨从解以下几题中获得乐趣.

$$1.2 \quad A \setminus B = A \Delta (A \cap B).$$

$$1.3 \quad A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B).$$

$$1.4 \quad (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C.$$

$$1.5 \quad B = [(A \Delta B) \setminus A] \cup (A \cap B).$$

但你得小心,不可随便对一集等式用“消去法”:从 $A \cup C = B \cup C$ 或 $A \cap C = B \cap C$ 都未必推出 $A = B$. 不过,还是有以下结论:

$$1.6 \quad \text{若 } A \Delta C = B \Delta C, \text{ 则 } A = B.$$

证 注意运算 Δ 满足交换律、结合律,且 $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta \emptyset = A$. 于是

$$\begin{aligned} A &= A \Delta \emptyset = A \Delta (C \Delta C) \\ &= (A \Delta C) \Delta C = (B \Delta C) \Delta C = B. \end{aligned} \quad \square$$

以上论证是完全形式化的,除了用到 $A \Delta \emptyset = A$, $C \Delta C = \emptyset$ 这些依据于对称差定义的等式外,证明中并不涉及对称差的具体含义.如果用直接法,证明过程就没那么干净利落:只要证 $A \subset B$ (何故?). 若结论不真,则存在 $x \in A \setminus B$. 若 $x \in C$, 则

$$x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \Delta C;$$

$$x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = B \Delta C,$$

这与 $A \Delta C = B \Delta C$ 矛盾. 同理,当 $x \in C$ 时亦将得出矛盾.

在集论的应用中,集运算的作用通常在于:可通过集运算将一给定的集表为(通常是可数个)较简单的、或具有给定性质的集的分解式. 在实变函数与泛函数分析中,得出这种集分解式的技巧,具有基本的意义. 你可从下面这类问题的练习中掌握这种技巧.

B. 求集分解式

我们通过一个典型例子来解释方法. 以下的题 1.7~1.13 中, 都设 $f_n: X \rightarrow \mathbf{R}$ ($n = 1, 2, \dots$).

1.7 用集 $A_{nk} \triangleq \{f_n \geq k \mid n, k \in \mathbf{N}\}$ 表出集 $A \triangleq \{f_n \rightarrow \infty\}$.

解 由 $f_n(x) \rightarrow \infty$ 的意义, 有

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \forall b > 0, \exists m \in \mathbf{N}, \forall n \geq m: f_n(x) \geq b \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, \forall n \geq m: f_n(x) \geq k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, \forall n \geq m: x \in A_{nk} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_{nk}, \end{aligned}$$

这意味着 $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \varliminf_n A_{nk}$. □

一般的模式是: 为求得集 A 的分解式, 首先应将“事件” $x \in A$ 分解成某些更简单事件(如 $f_n(x) \geq k$)的逻辑组合, 从而得出一个包含符号 \forall, \exists 的逻辑式; 然后将逻辑式转化为与之等价的集运算式, 注意符号 \forall, \exists 分别对应交与并运算. 现在你可以尝试一下了.

1.8 用集 $\{|f_n| \geq k \mid n, k \in \mathbf{N}\}$ 表示集 $A \triangleq \{x \in X: \{f_n(x)\} \text{ 无界}\}$ ($A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcap_n \{|f_n| \geq k\}}$)

1.9 对 $A \triangleq \{x \in X: \{f_n(x)\} \text{ 有界}\}$ 解类似于题 1.8 的问题. ($A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{|f_n| \leq k\}$)

1.10 用可数个形如 $\{f_n \geq \beta\}$ 的集表出集 $A \triangleq \{\sup_n f_n \geq \alpha\}$. ($A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq \alpha - 1/k\}$)

1.11 用可数个形如 $\{f_n \leq a\}$ 的集表出集 $A \triangleq \{x \in X: \lim_n f_n(x) \text{ 不存在}\}$.

解 $\lim_n f_n(x)$ 不存在意味着, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $f_n(x)$ 在 $\varliminf_n f_n(x)$ 与 $\overline{\varliminf_n f_n(x)}$ 之煎振荡. 写成逻辑式这就是:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbf{Q}, \forall n \in \mathbf{N}, \exists k, l \geq n:$$

$$f_k(x) \leq a < b < f_l(x).$$

依据前面已总结出的一般规则,从以上逻辑式立得

$$A = \bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k, l \geq n} (\{f_k \leq a\} \setminus \{f_l \leq b\}). \quad \square$$

应注意“极限不存在”与“发散”并不完全相同:当 $\lim_n f_n(x) = \infty$ (或 $-\infty$) 时应算作发桑. 因此,下题的解法略有不同.

1.12 用可数个形如 $\{|f_k - f_l| \geq \alpha\}$ 的集表出集 $A \triangleq \{x \in X : \{f_n(x)\} \text{ 发散}\}$. ($A = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k, l \geq n} \{|f_k - f_l| \geq 1/m\}$)

1.13 用可数个形如 $\{|f_n| \geq \alpha\}$ 的集表出集 $A \triangleq \{x \in X : \{f_n(x)\} \text{ 中至多有限多项为零}\}$. ($A = \lim_n \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f_n| \geq 1/k\}$)

C. 判定可数性

解此类问题,你当然得应用定理 1.1.1 与定理 1.1.2 来判定某集 A 可数. 可以考虑应用

方法 I 求得一可数集 B , 使得每个 $x \in A$ 对应唯一的 $b_x \in B$, 且 $x \neq y$ 时 $b_x \neq b_y$ (这相当于 $A \rightarrow B, x \rightarrow b_x$ 是一单射). 通常取 B 为 \mathbb{Q} 或 \mathbb{Q}^n . 若 $A \subset B$, 则证明更直接.

方法 II 分解 A 为可数个可数集之并或有限个可数集之积集. 如同解问题 B 一样, 此时分解集的技术是最重要的.

1.14 平面上以有理点为心、有理数为半径的圆仅有可数多个.

证 以 A 记所述的圆之集, 则每个 $\delta \in A$ 完全决定于其中心 (a, b) 与半径 r . 令 $q_\delta = (a, b, r) \in \mathbb{Q}^3$, 则得到单射 $A \rightarrow \mathbb{Q}^3, \delta \rightarrow q_\delta$. 于是由 \mathbb{Q}^3 可数推出 A 可数. □

仿此, 你大概能轻而易举地解决如下一系列问题.

1.15 平面上以有理点为顶点的矩形仅可数多个.

1.16 以有理点为端点的开区间仅可数多个.

1.17 \mathbb{R}^n 中以有理点为端点的线段仅可数多条.

1.18 一增函数 $f(x)$ 的间断点集 D 可数.

证 首先应注意到: 增函数的间断点 x 以其跳跃 $f(x^+)$

$-f(x^-) > 0$ 为特征. 于是每个 $x \in D$ 唯一对应一个开区间 $\delta_x = (f(x^-), f(x^+))$, 且当 $x, y \in D, x < y$ 时, 必有 $f(x^+) \leq f(y^-)$, 因而 $\delta_x \cap \delta_y = \emptyset$. 取定 $r_x \in \delta_x \cap \mathbf{Q}$, 则 $D \rightarrow \mathbf{Q}, x \rightarrow r_x$ 是一单射, 因此 D 可数. \square

1.19 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ 在每点 $x \in (a, b)$ 取局部极小值, 则 f 的值域 A 是可数集.

证 从解题 1.18 的经验看来, 应建立从 A 到一区间集的单射. 任给 $x \in (a, b)$, 必有含 x 的开区间 $\delta_x = (\alpha_x, \beta_x)$, 使得 $\forall y \in (\alpha_x, \beta_x)$, 有 $f(y) \geq f(x)$; 不妨设 $\alpha_x, \beta_x \in \mathbf{Q}$. 若 $x, y \in (a, b), \delta_x = \delta_y$, 则必有 $f(y) \geq f(x)$ 且 $f(x) \geq f(y)$, 因而 $f(x) = f(y)$. 于是 $A \rightarrow B, f(x) \rightarrow \delta_x$ 是一单射, 此处 B 记有理端点开区间之全体. 于是由 B 可数推出 A 可数. \square

1.20 设 $A \subset \mathbf{R}$. 若 $\forall x \in \mathbf{R}, \exists r_x > 0$, 使 $A \cap (x - r_x, x + r_x)$ 可数, 则 A 可数.

证 简单地说, 题设条件意味着 A 局部地可数, 而整体是诸局部之并, 因此关键在于指明 A 可表为可数个“局部”之并. 以上只是粗略的设想, 准确的做法是: $\forall x \in \mathbf{R}$, 取有理端点的开区间 δ_x , 使得 $x \in \delta_x \subset (x - r_x, x + r_x)$. 则 $A \cap \delta_x$ 必可数, 且

$$A = \bigcup_{x \in \mathbf{R}} (A \cap \delta_x).$$

因如上的 δ_x 仅有可数多个, 故 A 的上述分解式实际上是一可数并, 因而 A 是可数集. \square

鉴于上题, 你已不难进一步解决:

1.21 设 $A \subset \mathbf{R}$. 若 $\forall x \in \mathbf{R}^n, \exists r > 0$, 使 $A \cap B_r(x)$ 可数, 则 A 是可数集.

1.22 设 $A \subset \mathbf{R}$ 的每一点是孤立点, 则 A 是可数集.

1.23 设 $A \subset \mathbf{R}, A'$ 是可数集, 则 A 是可数集.

提示 注意 $A \subset (A \setminus A') \cup A'$ 并用题 1.22.

1.24 设 A 是可数集, 则 A 仅有可数多个有限子集.

证 不妨设 A 是无限集. 以 \mathcal{A} 记 A 的有限子集之全体, 则

$\mathcal{A} = \bigcup_0^\infty \mathcal{A}_n$, \mathcal{A}_n 是由 A 中 n 个元组成的子集之全体. 于是只要证明 \mathcal{A}_n 可数. 对每个 $B = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathcal{A}_n$, 指定 $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ 与之对应, 这就得到一个单射 $\mathcal{A}_n \rightarrow A^n$. 于是从 A^n 可数推出 \mathcal{A}_n 可数. \square

1.25 顶点为有理点的平面多边形仅有可数多个.

1.26 设 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, $\sup\{\sum |f(x_i)|: \{x_i\} \subset X \text{ 为有限集}\} < \infty$, 则 $\{f \neq 0\}$ 为可数集.

D. 与可数性有关的存在性证明

\mathbf{Q}^n 可数而 \mathbf{R}^n 不可数, 这一事实的直观含义是: \mathbf{Q}^n 只包括 \mathbf{R}^n 中微不足道的一小部分元素. 因此, 常常可以在 \mathbf{R}^n 中构成各种图形而完全避开有理点. 这就形成颇有趣味的如下问题:

证明存在不含有理点的 \mathcal{C} 类图形.

解法 用反证法: 设每个 $A \in \mathcal{C}$ 必含有理点 x_A . 对于某个 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, 当 $A, B \in \mathcal{A}, A \neq B$ 时 $x_A \neq x_B$, 于是得到单射 $\mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Q}^n, A \rightarrow x_A$, 从而由 \mathbf{Q}^n 可数推出 \mathcal{A} 可数. 如果能说明 \mathcal{A} 不可数, 则得出所要的矛盾.

1.27 平面上存在不含有理点的圆周.

证 若任何圆周都含有理点, 则圆周

$$S_r = \{x \in \mathbf{R}^2: |x| = r\} \quad (r > 0)$$

上可取出有理点 x_r ; 当 $0 < r < s < \infty$ 时必 $x_r \neq x_s$. 因 $\mathcal{A} = \{S_r: r > 0\}$ 与区间 $(0, \infty)$ 之间可建立一一对应关系, 而 $(0, \infty)$ 不可数, 因而 \mathcal{A} 亦不可数, 这就得出矛盾. \square

1.28 平面上存在边界不含有理点的矩形.

1.29 设 $a, b \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2, a \neq b$. 则存在连结 a, b 且不含有理点的折线.

证 作线段 ab 的中垂线 L ; $\forall x \in L$, 由线段 ax 与 xb 组成一折线 Γ_x . 只要证: 必有某个 Γ_x 不含有理点. 若每个 $\Gamma_x (x \in L)$ 含有理点 r_x , 显然当 $x, y \in L, x \neq y$ 时 $r_x \neq r_y$, 则得到单射 $L \rightarrow \mathbf{Q}^2, x \rightarrow r_x$. 但这与直线 L 不可数相矛盾. \square

直观上, 上题的结论意味着: 无限小的质点总可以在有理点之间沿折线穿行, 并不会撞着有理点. 如果你想到有理点集是何等稠密, 对于

以上结论就不会不感到惊讶了. 实际上, 你也可以选择圆弧路径而同样避开有理点.

1.30 设 a, b 如题 1.29, 则存在连结 a, b 且不含有理点的圆弧.

1.31 设 $A \subset \mathbf{R}^n$ 可数, 则存在 $x \in \mathbf{R}^n$ 使得 $A \cap (A + x) = \emptyset$.

提示: 用反证法. 若 $\mathbf{R}^n \subset A - A$, 则由 A 可数推出 \mathbf{R}^n 可数!

1.32 设 $E \subset \mathbf{R}^2$ 可数, 则存在分解 $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, 使得每条水平直线与 A 交于有限个点, 每条垂直直线与 B 交于有限个点.

提示: 不妨设 $E = \{(x_i, y_j) : i, j \in \mathbf{N}\}$, 令 $A = \{(x_i, y_j) : i \leq j\}$.

至此, 我们已获得处理集运算与可数性问题的经验, 这对于后面的学习大体上也就够了. 如果你感到力有余裕, 那么不妨尝试去解决一些涉及映射与点集的问题.

E. 映射问题

1.33 $F : X \rightarrow Y$ 是满射 $\Leftrightarrow \forall B \subset Y : FF^{-1}B = B$.

提示: 实际上, F 是满射 $\Leftrightarrow \forall y \in Y : FF^{-1}\{y\} = \{y\} \Leftrightarrow \forall y \in Y : F^{-1}\{y\} \neq \emptyset$.

1.34 $F : X \rightarrow Y$ 是一一映射 $\Leftrightarrow FX = Y$ 且 $\forall A, B \subset X$, 有 $F(A \cap B) = (FA) \cap (FB)$.

提示: $F(A \cap B) = (FA) \cap (FB)$ 恒成立 $\Rightarrow F$ 是单射.

1.35 设 $F : 2^X \rightarrow 2^X$ 满足: $A \subset B \subset X \Rightarrow FA \subset FB$, 则存在 $A \subset X$, 使得 $FA = A$.

提示: 考虑 $A = \bigcap \{B \subset X : FB \subset B\}$.

1.36 设 X 是无限集, $F : X \rightarrow X$. 则存在非空真子集 $A \subset X$, 使得 $FA \subset A$,

证 若 $x \in X$, 存在最小的 $n \geq 1$, 使 $F^n x = x$, 则称 x 为 n -周期点. 若 x 是一个 n -周期点, 令 $A = \{x, Fx, \dots, F^{n-1}x\}$, 则 A 是 X 的非空真子集, 且 $FA \subset A$. 若不存在周期点, 任取 $x_0 \in X$, 令 $x_n = F^n x_0$ ($n \geq 1$), 则 $\{x_n : n \geq 0\}$ 必互不相同. 令 $A = \{x_n : n \geq 1\}$, 则

A 是 X 的非空真子集, $FA = \{x_n : n \geq 2\} \subset A$. □

1.37 作一一映射 $f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$.

解 从 $[0, 1]$ 与 $(0, 1)$ 中分别取出两个可数集 $A = \{0, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ 与 $B = \{1/2, \dots, 1/n, \dots\}$. 则 A 与 B 之间可定义如下映射:

$$f(0) = 1/2, f(1/n) = 1/(n+2) \quad (n \geq 1).$$

然后定义

$$f: [0, 1] \setminus A \rightarrow (0, 1) \setminus B, x \rightarrow x,$$

则 $f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ 即是一个一一映射. □

上面的解法可推广到其他情况, 今将其归纳一下. 设 X, Y 是两个不可数集, 要作一一映射 $f: X \rightarrow Y$. 通常可分别从 X, Y 中取出无限可数集 A, B , 使得在 $X \setminus A$ 与 $Y \setminus B$ 之间容易建立一一对应关系, 最好是使 $X \setminus A = Y \setminus B$. 至于 A 与 B 之间的一一对应, 一般是不成问题的. 应用如上方法, 你立即可以解决:

1.38 作一一映射 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

提示: 令 $A = \mathbf{Q} \cup B, B = \sqrt{2} + \mathbf{Q}$, 分别从 \mathbf{R} 与 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 中分离出 A 与 B .

1.39 作一一映射 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$.

解 基本思想如同上题. 首先注意, $\cot \pi x$ 是 $(0, 1)$ 与 \mathbf{R} 之间的一一映射. 从 $[0, 1]$ 中取出 $A = \{0, 1/2, 1/3, \dots\}$, 从 \mathbf{R} 中取出 $B = \{\cot(\pi/n) : n \geq 2\}$, 于是 $f(x) = \cot \pi x$ 是 $[0, 1] \setminus A$ 与 $\mathbf{R} \setminus B$ 之间的一一映射, 然后定义 $f(0) = \cot(\pi/2), f(1/n) = \cot(\pi/(n+2))$, 即得所需的 f . □

以上一一映射除了说明 $[0, 1]$ 与 \mathbf{R} 基数相等之外, 并无其他作用. 这类映射在本课程中尤其再无深究之必要. 即使对于基数问题, 构造某些特殊一一映射的技巧也未必有普遍价值. 涉及基数的问題大多借助于各种间接途径解决, 只在很少情况下才具体构造一些特殊的一一映射. 因此, 题 1.37~1.39 只是起某种说明的作用.

F. 点集问题

如我们已指出的,点集论在实变函数课程中仅有辅助意义,对于它的要求以够用为准.在§3.2中,我们将在更一般的框架下系统地讨论点集,那时你已积累了较多的抽象思考经验,比目前会感觉更好.不过,现在就走出一小步还是有好处,这样,你就可能用初步接触的点集概念去思考一些问题,这就为今后的深入学习奠定了基础.况且, \mathbf{R}^n 中的点集比较直观,容易形成直接的形象.

1.40 设 A 是 Cantor 集 P 在 $[0, 1]$ 中的余区间的中点之全体,求 A' .

解 首先注意到, P 的每个余区间仅含 A 中一点,因此余区间中的点不可能是 A 的极限点,这就推出 $A' \subset P$. 直观上,容易猜测 $A' = P$. 要证明这一点,就要说明,每点 $x \in P$ 都是 A 的极限点.因 x 不是 P 的孤立点,故必有序列 $\{x_n\} \subset P$, 使得 $x \neq x_n \rightarrow x$. 因 P 是疏集, P 中任何两点之间必夹有 P 的余区间,从而亦夹有 A 中的点,因此必有 $\{y_n\} \subset A$, $y_n \rightarrow x$, 故 $x \in A'$, 如所要证. \square

1.41 设 $A \subset \mathbf{R}$ 是一完备疏集, B 是 A^c 的构成区间的端点之全体,求 B' .

提示:类似于上题, $B' = A$.

1.42 设 $G \subset H \subset \mathbf{R}$, G 与 H 是开集,则 G 的每个构成区间必含于 H 的某个构成区间.

提示:注意,若 Δ 是 H 的构成区间, $x \in \Delta$, 则 Δ 是含于 H 且包含 x 的最大开区间.

1.43 \mathbf{R}^n 中的开集与闭集同时是 F_σ 型集与 G_δ 型集.

证 首先注意, A 是开集 $\Leftrightarrow A^c$ 是闭集, A 是 G_δ 型集 $\Leftrightarrow A^c$ 是 F_σ 型集,故不妨只考虑闭集.设 $A \subset \mathbf{R}^n$ 是一闭集,则它当然也是 F_σ 型集(何故?). 余下只要证 A 是 G_δ 型集. $\forall k \in \mathbf{N}$, 令

$$G_k = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, A) < 1/k\},$$

则 G_k 是开集(这意味着,当 $d(x, A) < 1/k$, $|x - y|$ 充分小时亦必 $d(y, A) < 1/k$). 因 A 是闭集,故 $x \in A \Leftrightarrow d(x, A) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{N}$,

有 $x \in G_k$, 故 $A = \bigcap G_k$, 可见 A 是 G_δ 型集, 如所要证. \square

1.44 设 $\{f_k\} \subset C(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则 $\{\overline{\lim}_k f_k < \alpha\}$ 是 F_σ 型集, $\{\overline{\lim}_k f_k \geq \alpha\}$ 是 G_δ 型集.

证 只要证第一个结论(何故?)这依赖于定理 1.1.5 与前面已多次强调的集分解技术. 令

$$f = \overline{\lim}_k f_k, \quad A = \{f < \alpha\},$$

则

$$\begin{aligned} x \in A &\Leftrightarrow \text{当 } k \text{ 充分大时 } f_k(x) < \alpha \\ &\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N}, \text{ 当 } k \text{ 充分大时 } f_k(x) \leq \alpha - l^{-1} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{l=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \{f_k \leq \alpha - l^{-1}\}, \end{aligned}$$

这得出

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{l=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \{f_k \leq \alpha - l^{-1}\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i \geq k} \{f_i \leq \alpha - l^{-1}\}. \end{aligned}$$

由定理 1.1.5, $\{f_i \leq \alpha - l^{-1}\}$ 是闭集, 因而

$$\bigcap_{i \geq k} \{f_i \leq \alpha - l^{-1}\}$$

亦为闭集(定理 1.1.3), 于是 A 是 F_σ 型集. \square

1.45 设 $\{f_k\} \subset C(\mathbb{R}^n)$, 则 $\{\lim_k f_k = -\infty\}$ 是 G_δ 型集.

提示: 仿上题证法, 亦可直接用上题结论, 这都要用到适当集分解.

1.46 $A \subset \mathbb{R}^n$ 同时为 F_σ 型集与 G_δ 型集的充要条件是: 存在序列 $\{f_k\} \subset C(\mathbb{R}^n)$, 使得 $f_k \rightarrow \chi_A$.

证 若 $\{f_k\} \subset C(\mathbb{R}^n)$, $f_k \rightarrow \chi_A$, 则由题 1.44 知 $A = \{\chi_A \geq 1\}$ 是 G_δ 型集, 又 $A = \{-\chi_A < 0\}$ 是 F_σ 型集.

反之, 若 A 是 F_σ 型集与 G_δ 型集, 则有闭集 F_k 与开集 G_k ($k = 1, 2, \dots$), 使得 $A = \bigcup F_k = \bigcap G_k$. 可设 $F_k \uparrow A$, $G_k \downarrow A$. 因 $F_k \subset G_k$, 必有 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得 $f_k|_{F_k} = 1$, $f_k|_{G_k^c} = 0$ (这一事实不难直接证明, 可参看题 3.63). 现在证明 $f_k \rightarrow \chi_A$. 若 $x \in A$, 则当 k 充分大时 $x \in F_k$,

从而 $f_k(x) = 1 = \chi_A(x)$. 若 $x \in A^c$, 则当 k 充分大时 $x \notin G_k$, 于是 $f_k(x) = 0 = \chi_A(x)$, 即得所要证. \square

上题的有趣之处在于: 它将一个纯粹的点集性质与一定的连续函数序列联系起来了.

Cantor 集是每个学习点集的人都会有深刻印象的, 它可以说是人们进入抽象数学后接触到的第一个“怪异集”. 其实, 一旦你在数学领域阅历较广之后, 根本不会再认为 Cantor 集有什么怪异之处, 倒是觉得它的构造还挺规则的. Cantor 集不仅在实变函数中有其意义, 而且在其他一些研究领域也发挥着独特的作用. 因此, 对于 Cantor 集有足够的熟悉是值得的. 现在就让你来构造一个“Cantor 集型”的集.

1.47 $[0, 1]$ 中的数用十进位小数表示时用不着 7 的一切数构成一集 A , 则 A 是完备疏集. A 在 $[0, 1]$ 中的余区间是哪些?

提示: 注意 0.7 可写成 0.699..., 因此 $(0.7, 0.8)$ 必为余区间之一; 依此类推.

1.48 设 P 是 Cantor 集, 则 $P + P = [0, 2]$, 此处

$$P + P = \{x + y : x, y \in P\}.$$

证 $\forall x, y \in P$, 有 $0 \leq x + y \leq 2$, 因此 $P + P \subset [0, 2]$ 平凡地成立. 余下证 $[0, 2] \subset P + P$. 先证 $P + P$ 是闭集. 若 $x_n, y_n \in P$, $x_n + y_n \rightarrow z$, 因 $\{x_n, y_n\}$ 有界, 必有收敛子列, 不妨设就是 $x_n \rightarrow x \in P$, 因而 $y_n \rightarrow y \in P$, 于是 $z = x + y \in P + P$, $P + P$ 是闭集得证. 这样, 证 $P + P$ 在 $[0, 2]$ 中稠密即可. 一个直接但细致的分析可以说明: 若 $\{x_n\}$ 是 P 的余区间的端点之全体, 则 $\{x_m + x_n : m, n \in \mathbb{N}\}$ 在 $[0, 2]$ 中稠密, 这就如所要证. \square

所证的等式 $P + P = [0, 2]$ 看来不足为奇, 但有很多有趣的推论, 足以说明 P 不同寻常的性质. P 给人的突出印象是“疏”, 它本来就是一个疏集(下节中将说明其测度为零). 但 $P + P$ 则充满了一个区间, 这表明 P 中实际上含有足够多的点! 利用 $P + P = [0, 2]$ 可以证明, P 与一区间(从而与整个 \mathbb{R})等基数. 不过, 我们只要求你完成一个较容易的证明.

1.49 Cantor 集 P 不可数.

提示 利用上题之结论.

1.50 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 可微, $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \{f' = \alpha\}$ 是闭集, 则 f' 处处连续.

证 由定理 1.1.5, 只需证 $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \{f' \leq \alpha\}$ 是闭集 (注意以 $-f$ 代 f , 即可得 $\{f' \geq \alpha\}$ 是闭集). 设 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}, f'(x_n) \leq \alpha, x_n \rightarrow x \in \mathbf{R}$, 今要证 $f'(x) \leq \alpha$. 若有无限多个 x_n 使得 $f'(x_n) = \alpha$, 则由 $\{f' = \alpha\}$ 为闭集得出 $f'(x) = \alpha$. 因此不妨设 $f'(x_n) < \alpha (\forall n \in \mathbf{N})$, 亦不妨设 $x_n \uparrow x$. 若 $f'(x) > \alpha$, 则利用导函数的介值性质, 必有 $y_n \in (x_n, x)$, 使得 $f'(y_n) = \alpha$ (注意这并不要求 f' 连续, 这是要点!). 但这又推出 $f'(x) = \alpha$, 得出矛盾. 因此得所要证. \square

这一结果可能使你很兴奋, 原来可微函数的导数处处连续很容易得出. 且慢! $\{f' = \alpha\}$ 恒为闭集这一条件并不像表面上看来那么弱. 实际上, 它与 f' 处处连续是等价的!

§ 1.2 测 度

一、定理与定义

在实变函数课程中, 通常是从 Lebesgue 测度开始学习测度论的. 你在一开始就不得不面对双重的困难: 既要理解 Lebesgue 可测集, 又要了解可测集的测度如何定义, 而二者都是一个冗长构造过程的结果, 远不是初学者所容易把握的. 无论我们如何去改进与简化某些细节, 都不太可能根本改变我们所面临的困境. 这就形成了一个令人烦恼的局面: 在刚开始学习函数论的大学生中, 测度论难以受到欢迎, 而这与它在现代数学中的辉煌成功, 形成鲜明的对照.

那么, 我们不禁要问: 大学生必定一开始就要完全了解 Lebesgue 测度的构造细节吗? 不妨联系到一个类似的问题: 学过微积分的大学生, 对于实数理论果真能完全了然于胸吗? 实际上, 妨碍大学生迅速地跨过一道门槛的, 并不是他们的学习能力, 而是一种习以为常却未必适

当的要求.

如果从大处着眼,事情本来比一个复杂的构造过程所展示的要简单得多.测度原不过是熟悉的长度、面积与体积等概念的一个自然推广,它不仅适用于由旧的度量方法所处理的规则图形,而且也适用于某些更复杂的集合,而一般可测集的测度可用较简单集合的测度来逼近,就如同通常用多边形面积逼近一般平面区域的面积一样.在测度的应用中,可测集及测度的构造性定义并不起多大作用.真正重要的东西,实际上是测度的几条性质,这些性质为数不多,而且从直观上看来是如此自然,初学者无论如何是乐于接受的.而一旦立足于这些基本性质的基础之上,就可以有效地运用测度去解决问题.当然,就 Lebesgue 测度而言,如果没有一个适当的构造性定义,就不能严格地证明它的基本性质.但我们完全可以将这一实现逻辑严格化的工作适当推迟,让大学生首先看到,如果认可关于测度的一些基本结论,能够推演出哪些令人感兴趣的东西来.而要做到这一点,用一般测度或抽象测度,而不是像 Lebesgue 测度这样构造精微的特殊测度,实际上更加简单、方便.

定义 1.2.1 给定非空集 Ω 与非空集族 $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$. 若 \mathcal{A} 满足条件:

$$(P_1) \emptyset \in \mathcal{A};$$

$$(P_2) \text{ 若 } A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots), \text{ 则 } \bigcup A_n \in \mathcal{A};$$

$$(P_3) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A},$$

则称 \mathcal{A} 为 Ω 上的一个 σ -代数, 称 (Ω, \mathcal{A}) 为一个可测空间, 称每个 $A \in \mathcal{A}$ 为 \mathcal{A} -可测集. 若 \mathcal{A} 是一个 σ -代数, 函数 $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+ = [0, \infty]$ 满足以下条件:

$$(Q_1) \mu \emptyset = 0;$$

$$(Q_2) \text{ 完全可加性: 若 } A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots) \text{ 互不相交, 则}$$

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu A_n,$$

则称 μ 为 (Ω, \mathcal{A}) 上的一个测度, 称 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为一个测度空间. 若进而假定 μ 还满足条件:

$$(Q_3) B \subset A \in \mathcal{A}, \mu A = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{A},$$

则称 μ 为完备测度, 或说 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个完备测度空间. 若存在集列

$\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, 使得 $\Omega = \bigcup A_n$, $\mu A_n < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$), 则称 μ 为 σ -有限测度. 若 $\mu\Omega < \infty$, 则称 μ 为有限测度. 若 $\mu\Omega = 1$, 则称 μ 为概率测度.

若 $\mu A = 0$, 则称 A 为零测集. 若 $\{x: x \text{ 不满足 } P\}$ 是零测集, 则说条件(或命题) P 几乎处处成立或 a. e. 成立. 若要强调 a. e. 是相对于测度 μ 而言的, 就写作 μ -a. e.. 例如, f 为 μ -a. e. 非负函数意味着 $\mu\{f < 0\} = 0$.

让我们考察一下公理 $(P_1) \sim (P_3)$ 与 $(Q_1) \sim (Q_3)$ 的作用. $(P_1) \sim (P_3)$ 完全是集论性质的, 它与 (Ω, \mathcal{A}) 上是否定义有测度无关. 由 $(P_1) \sim (P_3)$ 直接推出: $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{A}$; 若 $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则

$$\bigcap A_n = \left(\bigcup A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

这就可将 $(P_1) \sim (P_3)$ 合并成一个条件: \mathcal{A} 中任何可数个集经并、交与差等集运算而得之集仍属于 \mathcal{A} . 明确了这一点, 对于条件 $(P_1) \sim (P_3)$ 已无需更多考虑了. 再看公理 $(Q_1) \sim (Q_3)$. (Q_1) 是很平凡的: 若 $\mu\emptyset > 0$, 则不难用 (Q_2) 推出 $\mu A \equiv \infty$ ($\forall A \in \mathcal{A}$), 这样的 μ 显然不会使人感兴趣. (Q_3) 并非处处需要. 而且, 任何测度 μ 经微小修正后, 总可改造为一个完备测度 $\bar{\mu}$ (称为 μ 的完备化). 因此 (Q_3) 并不构成对测度的本质限制. 这样, 在测度定义中, 真正重要的核心条件是完全可加性 (Q_2) ; 关于测度的所有重要结论都是由此推出来的. 为便于应用, 将关于测度的主要性质综合在以下定理中.

定理 1.2.1 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个测度空间, 则以下结论成立:

(i) 单调性: 若 $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, 则 $\mu A \leq \mu B$; 当 $\mu A < \infty$ 时

$$\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A. \quad (\text{可减性})$$

(ii) 次可加性: 若 $A_n \in \mathcal{A}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu A_n;$$

当 $\{A_n\}$ 互不相交时上式中的等号成立(这就将 (Q_2) 包括进来了).

(iii) 连续性: 若 $A_n \uparrow A$, 或 $A_n \downarrow A$ 且 $\mu A_1 < \infty$, 则

$$\mu A = \lim_n \mu A_n.$$

为界定某个测度 μ , 首先得适当地确定 σ -代数 \mathcal{A} . \mathcal{A} 越大, 定义在 \mathcal{A} 上的测度适用范围就越广. 因此, 自然倾向于取尽可能大的 \mathcal{A} , 最好是每个 $A \subset \Omega$ 均可测, 这意味着取 $\mathcal{A} = 2^\Omega$. 在定义 Ω 上的计数测度时就是如此, 计数测度 μ 定义为:

$$\mu A = \begin{cases} A \text{ 所含元素之个数,} & A \text{ 是有限集;} \\ \infty, & A \text{ 是无限集.} \end{cases}$$

不过, 计数测度毕竟是一种特别简单的测度. 对于像 Lebesgue 测度这样构成较复杂的测度, 测度的定义通常依赖于一个由特殊到一般的逼近程序, 这就不能将 \mathcal{A} 取得过大, 否则会使所用的逼近程序变得很困难, 甚至不可能施行. 通常的做法是, 取定某个由较简单的集组成的集族 $\mathcal{C} \subset 2^\Omega$, 首先在 \mathcal{C} 上定义 μ , 然后将 μ 扩张到一个包含 \mathcal{C} 的最小 σ -代数 \mathcal{A} 上. 这样的 \mathcal{A} 就称为由 \mathcal{C} 生成的 σ -代数, 记作 $\sigma(\mathcal{C})$. 若取 $\Omega = \mathbf{R}^n$, \mathcal{C} 为 \mathbf{R}^n 中的开集之全体, 则称 σ -代数 $\sigma(\mathcal{C})$ 为 \mathbf{R}^n 上的 Borel 集族, 记作 \mathcal{B}^n . Borel 集包括了所有开集、闭集、 G_δ 型集、 F_σ 型集等, 但还包含许多更一般的集. 利用 Borel 集概念, 现在已可描述最重要的测度: Lebesgue 测度.

定理 1.2.2 存在唯一确定的完备测度空间 $(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$, 使得以下条件满足:

- (i) $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{L}^n$;
- (ii) 测度单位: $m[0, 1]^n = 1$ $[0, 1]^n$ 表 n 维单位方体;
- (iii) 平移不变性: $\forall A \in \mathcal{L}^n, x \in \mathbf{R}^n$, 有 $m(A + x) = mA$;
- (iv) 逼近性质: $\forall A \in \mathcal{L}^n, \varepsilon > 0$, 存在闭集 F 与开集 G , 使得 $F \subset A \subset G$, 且 $m(G \setminus F) < \varepsilon$.

上述的 m 称为 n 维 Lebesgue 测度, 而 \mathcal{L}^n 中的集称为 n 维 Lebesgue 可测集. 在不明显提到维数时, 可将以上术语中的“ n 维”省去. 在 \mathbf{R}^n 中通常使用 Lebesgue 测度, 因而常省去“Lebesgue”一词. 在定理 1.2.2 中尽管未明确提到 m 的定义, 但综合定理 1.2.1 与定理 1.2.2 已可获得关于 m 的相当清晰的印象. 以 $n = 1$ 的情况为例. 首先由 $m[0, 1] = 1$ 可推出对任何 $a < b$ 有 $m(a, b) = b - a$; 若

$A \subset \mathbf{R}$ 可数, 则 $mA = 0$; 若 $G = \bigcup_i \delta_i$, δ_i 是开集 G 的构成区间, 则由完全可加性有 $mG = \sum m\delta_i$. 约定 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1$, 任给 $A \in \mathcal{L}$, 由定理 1.2.2 的 (iv) 可推出:

$$mA = \inf\{mG : G \supset A \text{ 且 } G \text{ 是开集}\}.$$

定理 1.2.2 也完全确定了 \mathcal{L} 的构造:

$$\mathcal{L} = \{A \subset \mathbf{R} : \text{存在 } B, C \in \mathcal{B}, \text{ 使 } B \subset A \subset C, m(C \setminus B) = 0\}.$$

(1)

据此你可以想象, \mathcal{L} 是一个足够大的 σ -代数. 尽管如此, \mathcal{L} 并不包括 \mathbf{R} 的所有子集, 因有以下定理:

定理 1.2.3 设 $A \subset \mathbf{R}$, $mA > 0$, 则 A 必有 Lebesgue 不可测子集.

不过, 如上所述的不可测集都出自某种矫揉造作的构造, 它们并不构成对 Lebesgue 测度现实应用的威胁.

以上所述, 是你在初学测度论时所必须掌握的最基本的内容. 与流行的教材比较, 你会感到少了一点. 例如, 尚未提及不无用处的外测度 m^* 与内测度 m_* . 但应当说, 对于顺利学习实变函数与泛函分析课程的大部分内容, 本节已提及的测度论知识已经够用. 限制在这个较小的范围内, 你较易获得一个清晰简洁的印象, 而这对于初学者无疑是头等重要的. 但若希望深入地了解测度的构成, 那么就得稍稍扩大已得的知识. 至少, 你应熟悉外测度的概念.

定义 1.2.2 设 (Ω, \mathcal{A}) 是一可测空间. 若函数 $\mu^* : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$ 满足以下条件:

$$(i) \mu^* \emptyset = 0;$$

$$(ii) \text{单调性: } \forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B \Rightarrow \mu^* A \leq \mu^* B;$$

$$(iii) \text{次可加性: 对任何 } A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots), \text{ 有}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu^* A_n,$$

则称 μ^* 为 \mathcal{A} 上的外测度; 当 $\mathcal{A} = 2^\Omega$ 时称 μ^* 为 Ω 上的外测度.

外测度的价值表现于如下定理.

定理 1.2.4 设 μ^* 是 Ω 上的外测度, \mathcal{A} 是满足条件

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \quad (\forall A \subset \Omega) \quad (2)$$

的集 $B \subset \Omega$ 之全体, 则 μ^* 在 \mathcal{A} 上的限制是一完备测度.

条件(2)就是著名的 Caratheodory 条件. 当 B 满足条件(2)时说 B 是 μ^* -可测的.

对于任给 $A \subset \mathbf{R}^n$, 约定

$$\begin{cases} m^* A = \inf\{mG : G \text{ 是开集且 } G \supset A\}; \\ m_* A = \sup\{mF : F \text{ 是闭集且 } F \subset A\}, \end{cases} \quad (3)$$

二者分别称为 A 的外测度与内测度. 可以验证, m^* 确是定义 1.2.2 意义上的外测度, 而 Lebesgue 可测集恰好是 m^* -可测集.

现在考虑一些关于测度的问题. 在看了关于测度的一些抽象命题之后, 你必定急于要了解一些测度的具体例子, 那么首先让我们解决如下问题:

二、问题与方法

A. 测度的例子

对于给定的集函数 $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$, 在大多数情况下, \mathcal{A} 为 σ -代数, μ 非负及 $\mu \emptyset = 0$ 都是明显的, 因而唯一实质性的验证工作是完全可加性的验证.

1.51 设 (Ω, \mathcal{A}) 是任一可测空间, $\{x_i\} \subset \Omega$ 是一可数集, $\{p_i\} \subset \mathbf{R}_+$,

$$\mu A = \sum_i p_i \chi_A(x_i) \quad (A \in \mathcal{A}),$$

则 μ 是一个测度; 当 $\sum p_i = 1$ 时 μ 是概率测度. 特别, 对任何 $x_0 \in \Omega$, $\mu A = \chi_A(x_0)$ 定义一概率测度.

证 只需验证完全可加性. 设 $A = \bigcup A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$ ($n = 1, 2, \dots$) 互不相交, 则 $\chi_A = \sum_n \chi_{A_n}$, 于是

$$\begin{aligned} \mu A &= \sum_i p_i \sum_n \chi_{A_n}(x_i) \\ &= \sum_n \sum_i p_i \chi_{A_n}(x_i) = \sum_n \mu A_n. \end{aligned} \quad \square$$

上题中的 μ 可看作以强度 p_i 离散地分布于点 x_i 的某种载荷或量.

这种形式的测度突破了通常视测度为几何度量的直观意义.

1.52 设 Ω 是任一不可数集, $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ 或 } A^c \text{ 可数}\}$, 定义

$$\mu A = \begin{cases} 0, & A \text{ 可数}; \\ 1, & A^c \text{ 可数}. \end{cases}$$

则 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是一完备概率测度空间.

证 显然 $\emptyset \in \mathcal{A}; A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$. 若 $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots)$, $A = \bigcup A_n$, 则当 A_n 均可数时 A 可数; 当某个 A_n^c 可数时 A^c 可数, 因此总有 $A \in \mathcal{A}$, 故 \mathcal{A} 为 σ -代数. 因 Ω 不可数, 故 A 与 A^c 不可能同时可数, 因此 μ 的定义合理. 若 $A_n \in \mathcal{A} (n = 1, 2, \dots)$ 互不相交, 则当 A_n 均可数时 $\mu A = \sum \mu A_n = 0$; 当某个 A_n^c 可数时 $A_k (k \neq n)$ 必可数, 因此 $1 = \mu A = \mu A_n = \sum_k \mu A_k$. 于是 μ 是概率测度, 它显然为完备测度. □

1.53 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是一测度空间, $\mu\Omega > 0$, $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{F} : \mu A = 0 \text{ 或 } \mu A^c = 0\}$, 定义

$$\nu A = \begin{cases} 0, & \mu A = 0; \\ 1, & \mu A^c = 0, \end{cases}$$

则 $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ 是一概率测度空间; 当 μ 完备时, ν 亦完备.

1.54 设 Ω 是任一非空集, $\mathcal{C} \subset 2^\Omega$ 有以下性质: (i) $A \subset B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{C}$; (ii) $A_n \in \mathcal{C} (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{C}$; (iii) $\Omega \in \mathcal{C}$. 令 $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{C} \text{ 或 } A^c \in \mathcal{C}\}$, 定义

$$\mu A = \begin{cases} 0, & A \in \mathcal{C}; \\ 1, & A^c \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

则 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个完备概率测度空间.

注意题 1.54 统一了题 1.52 与 1.53 这两种情况. 你还可以举出属于题 1.54 这种模式的进一步的例子. 如上形式的测度既简单又奇特, 似乎与 Lebesgue 测度及计数测度都相差甚远, 但同样不失为很有意义的测度. 简单说来, 题 1.54 中的测度 μ 在极端上量度了集合: $\mu A = 0$ 与 $\mu A = 1$ 分别表示“ A 是小集”与“ A 是大集”, 这又分别对应稀有与一般, 或微不足道与几乎所有. 这些都是人们极希望给出严格描述, 却

又深感为难的基本概念. 上述的测度论刻画虽未必是很精细的, 但应算是完全严格而又可操作的, 它涵盖了多种具体的概念, 在现代数学中有很重要的意义.

题 1.53 是从已知测度构成新测度的例子. 更常见的情况是通过已知测度的运算构成新测度.

1.55 设 μ_n ($n = 1, 2, \dots$) 是可测空间 (Ω, \mathcal{A}) 上的测度, $\{\alpha_n\} \subset \mathbf{R}_+$, 则 $\mu \triangleq \sum \alpha_n \mu_n$ 是 (Ω, \mathcal{A}) 上的测度.

证 只要验证完全可加性. 设 $A_k \in \mathcal{A}$ ($k = 1, 2, \dots$) 互不相交, 则

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_k A_k\right) &= \sum_n \alpha_n \mu_n\left(\bigcup_k A_k\right) \\ &= \sum_n \sum_k \alpha_n \mu_n A_k \\ &= \sum_k \sum_n \alpha_n \mu_n A_k = \sum_k \mu A_k. \end{aligned} \quad \square$$

1.56 设 $\{\mu_n\}$ 是 (Ω, \mathcal{A}) 上的一列测度, $\mu_n A \leq \mu_{n+1} A$ ($A \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \dots$), $\mu A = \lim_n \mu_n A$ ($A \in \mathcal{A}$), 则 μ 是 (Ω, \mathcal{A}) 上的测度. 研究例子: $\mu_n A = m(A \cap [-n, m])$ ($A \in \mathcal{L}$).

1.57 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个测度空间, (E, \mathcal{C}) 是一个可测空间, 映射 $F: \Omega \rightarrow E$ 满足条件 $F^{-1}\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, 这意味着 $\forall C \in \mathcal{C}$, 有 $F^{-1}C \in \mathcal{A}$ (这样的 F 称为可测映射). 定义

$$\mu_F C = \mu(F^{-1}C) \quad (C \in \mathcal{C}),$$

则 μ_F 是 (E, \mathcal{C}) 上的测度 (称为由 F 导出的测度).

证 只需验证完全可加性: 设 $C_n \in \mathcal{C}$ ($n = 1, 2, \dots$) 互不相交, 则

$$\begin{aligned} \mu_F\left(\bigcup_n C_n\right) &= \mu[F^{-1}\left(\bigcup_n C_n\right)] \\ &= \mu\left(\bigcup_n F^{-1}C_n\right) \quad (\text{用 §1.1(11)}) \\ &= \sum_n \mu(F^{-1}C_n) = \sum_n \mu_F C_n. \end{aligned} \quad \square$$

1.58 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个测度空间, $F: \Omega \rightarrow E$ 是一一映射, 则 F 在 $F\mathcal{A} \triangleq \{FA: A \in \mathcal{A}\}$ 上导出一测度.

题 1.51~1.58 大概已使你有一初步印象: 构成测度的方式是多种

多样的. 更进一步, 不妨告诉你: 实际上的测度可能有无限多个, 只是更多的构成测度的方法比前面的例子要复杂, 你只能在今后的学习中逐步接触. 但无论你将遇到什么新的测度, 像定理 1.2.1 这样的基本结论总是普遍适用的. 现在就利用定理 1.2.1 来解决一些问题.

B. 测度的一般性质

以下设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是给定的测度空间. 反复应用测度的完全可加性 (等式) 单调性与次可加性 (不等式) 连续性 (极限式), 可推出有关测度的各种结论.

1.59 对任何集列 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, 有 $\mu(\lim_n A_n) \leq \lim_n \mu A_n$.

证 令 $A = \lim_n A_n$, 则 $\bigcap_{k \geq n} A_k \uparrow A$ (这是一个经常用到的基本事实), 于是

$$\mu A = \lim_n \mu \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) \quad (\text{连续性})$$

$$\leq \lim_n \mu A_n. \quad (\text{单调性}) \quad \square$$

1.60 设集列 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ 满足条件 $\mu(\bigcup_n A_n) < \infty$, 则 $\mu(\overline{\lim}_n A_n) \geq \overline{\lim}_n \mu A_n$ (与题 1.59 对照, 附加的条件用在何处?)

1.61 设 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $\mu(\bigcup_n A_n) < \infty$, $A = \lim_n A_n$, 则

$$\mu A = \lim_n \mu A_n.$$

提示 综合前两题的结论.

1.62 设 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $\sum_n \mu A_n < \infty$, 则 $\mu(\overline{\lim}_n A_n) = 0$.

证 关键在于利用条件 $\sum_{k \geq n} \mu A_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$):

$$\mu(\overline{\lim}_n A_n) \leq \mu(\bigcup_{k \geq n} A_k) \quad (\text{单调性})$$

$$\leq \sum_{k \geq n} \mu A_k \rightarrow 0. \quad (\text{次可加性}) \quad \square$$

对于概率测度 μ , 题 1.62 的结论意味着: 若当 n 充分大时 μA_n 足够小, 则几乎不可能有任意大的 n 使事件 A_n 发生. 这一结论在概率论中广为应用. 如果你看重测度论在概率论中的应用, 必定会对以下几题

感兴趣. 在题 1.63~1.65 中假定 μ 是概率测度.

1.63 设 $\sum_1^n \mu A_i > n - 1$, 则 $\mu(\bigcap_1^n A_i) > 0$.

证 注意 $\mu A > 0 \Leftrightarrow \mu A^c < 1$ (这是概率测度所独有的性质!), 于是由

$$\begin{aligned} \mu(\bigcap_i A_i)^c &= \mu(\bigcup_i A_i^c) && (\text{对偶律}) \\ &\leq \sum_i \mu A_i^c && (\text{次可加性}) \\ &= \sum_i (1 - \mu A_i) && (\text{可减性}) \\ &= n - \sum_i \mu A_i < 1 \end{aligned}$$

得出所要证. □

1.64 设 $\mu A_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 则有子列 $\{A_{n_i}\}$ 使得 $\mu(\bigcap_i A_{n_i}) > 0$.

提示 取子列 $\{A_{n_i}\}$ 使得 $\sum \mu A_{n_i}^c < 1$.

1.65 设 $\mu A_n = 1 (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\mu(\bigcap A_n) = 1$.

提示 指明 $\mu(\bigcup A_n^c) = 0$.

在利用定理 1.2.1 解题 1.59~1.65 时, 你根本用不着集 A_n 的特殊性质; 你无需了解 A_n 由哪些元素组成, 当然也没有假定 A_n 是否为熟知的 \mathbf{R}^n 中的点集. 舍去集合的具体特征后, 就能在一种很纯粹的形式下进行推理, 这样反而能实现问题的简化. 不过, 若要解决一些更细致的问题, 你就得考虑某些具体的测度, 而不能仅仅依赖于定理 1.2.1. 当然, 我们的主要兴趣在 Lebesgue 测度, 尤其是 1 维 Lebesgue 测度, 它能提供更丰富的结论. 现在就来考虑.

C. Lebesgue 测度

为解关于 Lebesgue 测度的问题, 当然你可应用定理 1.2.1, 但通常已经不够了(除非所证结论可推广于任何测度), 因此得考虑应用定理 1.2.2 与 1.2.3, 以及它们的某些推论. 最常用到的事实是: 1 维开集的测度是其构成区间长度之和; 可数集恒为零测集; $m\mathbf{Q} = 0$; 零测度的开集必为空集, 等等.

1.66 存在完备疏集 $A \subset [0, 1]$, 使得 $mA = 1/2$.

证 只要作一个在 $(0, 1)$ 内稠密的开集 G , 使得 $mG = 1/2$, G 有无限多个没有公共端点的构成区间. 因若 G 满足以上要求, 则 $A = [0, 1] \setminus G$ 是完备集, $mA = 1/2$, 由 G 在 $(0, 1)$ 内稠密推出 $A^\circ = \emptyset$, 因而 A 是疏集. G 的构成类似于 Cantor 集在 $[0, 1]$ 内的余集: 取长为 $1/4$ 的开区间 δ_{11} , 使其中心在 $1/2$; 取两个长为 $1/16$ 的开区间 δ_{21}, δ_{22} , 使其中心分别为 δ_{11} 在 $[0, 1]$ 中两个余区间的中心, ... 如此相继取出开区间 δ_{nk} ($k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}, n = 1, 2, \dots$), 使 $m\delta_{nk} = 1/4^n$, 则 $G = \bigcup_{k,n} \delta_{nk}$ 即合于所求. \square

1.67 任给 $\alpha \in (0, 1)$, 存在完备疏集 $A \subset [0, 1]$, 使得 $mA = \alpha$.

提示: 仿上题作法, 只要适当改变余区间长度.

1.68 存在闭集 $F \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, 使得 $mF > 0$.

提示: 只要作开集 $G \supset \mathbf{Q}$, 使 $mG < \infty$.

直观上很有趣的是, 尽管如上的开集 G 覆盖了全部有理点, 却远未能覆盖实轴! 如果不用测度论, 依靠平常的思考恐怕难以达到这一结论. 下题提供了更有趣的事实.

1.69 设 $\mathbf{Q} = \{r_n : n \in \mathbf{N}\}$, $G = \bigcup_n (r_n - n^{-2}, r_n + n^{-2})$, 则对任何闭集 $F \subset \mathbf{R}$ 有 $m(G \Delta F) > 0$.

证 因 $m(G \Delta F) = m(G \setminus F) + m(F \setminus G)$, 故只要证: 若 $m(G \setminus F) = 0$, 则必 $m(F \setminus G) > 0$. 因 $G \setminus F$ 是开集, 故从 $m(G \setminus F) = 0$ 推出 $G \setminus F = \emptyset$ (这是要点!), 从而 $G \subset F$. 于是

$$\mathbf{R} = \overline{\mathbf{Q}} \subset \overline{G} \subset \overline{F} = F,$$

故 $F = \mathbf{R}$, 因此 $m(F \setminus G) = \infty > 0$, 如所要证. \square

Lebesgue 测度的逼近性质 (定理 1.2.2(iv)) 是体现其特殊构造的关键性质, 它使得涉及 Lebesgue 测度的问题可能转化为开集测度的问题, 而后者较容易处理. 因此, 在解有关 Lebesgue 测度的问题时, 应特别关注逼近性质的应用. 试看两个简单的问题.

1.70 设 $A \subset \mathbf{R}$, $mA < \infty$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在有限个开区间 δ_i , 使得 $m(A \Delta (\bigcup \delta_i)) < \varepsilon$.

证 这明显地是一个逼近问题. 直观上, 应取一个充分接近 A 的开集 G , 然后取 G 的充分多的构成区间. 准确的论证如下. 取定 $\varepsilon > 0$. 由定理 1.2.2(iv) 有开集 $G = \bigcup \delta_i$, 使得 $m(G \setminus A) < \varepsilon/2$, δ_i 是 G 的构成区间. 因 $mA < \infty$, 必

$$\sum_i m\delta_i = mG \leq mA + m(G \setminus A) < \infty,$$

故存在 $n \in \mathbf{N}$, 使得 $\sum_{i>n} m\delta_i < \varepsilon/2$. 令 $B = \bigcup_{i=1}^n \delta_i$, 则

$$\begin{aligned} m(A \Delta B) &= m(A \setminus B) + m(B \setminus A) \quad (\text{可加性}) \\ &\leq m(G \setminus B) + m(G \setminus A) \quad (\text{单调性}) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

即得所要证. □

1.71 设 $A \subset \mathbf{R}$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 G 与闭集 F , 使得 $F \subset A \subset G \subset \mathbf{R}$, $m(G \setminus F) < \varepsilon$, 则 A 必 Lebesgue 可测.

提示: 由(1), 只要作 $B, C \in \mathcal{B}$, 使得 $B \subset A \subset C$, $m(C \setminus B) = 0$.

已知可数集恒为 (Lebesgue) 零测集. 因此, 当 $mA > 0$ ($A \subset \mathbf{R}$) 时, A 必非可数集. 另一方面, 题 1.66 表明正测度集可以是疏集, 因而可能不充满任何区间. 正测度集究竟有哪些特性? 这看来还不是一个简单的问题. 下面的一组题给出了一系列有趣的结论.

1.72 设 $A \subset \mathbf{R}$, $mA > 0$, 则存在 $x, y \in A$, 使得 $0 \neq x - y \in \mathbf{Q}$. 直观上, 这意味着 A 中必有两点间的距离为有理数.

证 不妨设 A 有界 (否则以 $A \cap [-n, n]$ 代 A , n 充分大). 令 $\mathbf{Q} \cap [0, 1] = \{r_n : n \in \mathbf{N}\}$, $A_n = A + r_n$. 若所要求的 x, y 不存在, 则 A_n ($n = 1, 2, \dots$) 必互不相交 (若 $m \neq n$, $A_m \cap A_n \neq \emptyset$, 则必有 $x, y \in A$, 使 $x + r_m = y + r_n$. 从而 $0 \neq x - y = r_n - r_m \in \mathbf{Q}!$), 但这推出矛盾:

$$\infty > m\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n mA_n = \infty!$$

其中用到 $mA_n = mA > 0$. □

形式上类似, 而实际上更简单的问题是:

1.73 设 $A \subset \mathbf{R}$, $mA > 0$, 则存在 $x, y \in A$, 使得 $x - y \in$

$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

提示:若 $A - A \subset \mathbf{Q}$, 则 A 是可数集.

1.74 设 $A \subset \mathbf{R}$, $mA > 0$, $0 < \beta < 1$, 则存在开区间 Δ , 使得 $\beta m\Delta < m(A \cap \Delta)$.

证 如同对于题 1.72 不妨设 $mA < \infty$. 直观上, $\beta m\Delta < m(A \cap \Delta)$ 意味着 A 中的点充分地充满了区间 Δ . 这就启发我们选取依测度充分逼近 A 的开集 G , 然后取 G 的某个构成区间作为所求的 Δ . 取开集 $G \supset A$, 使得 $mG < \beta^{-1}mA$ ($mA > 0$ 用于此!). 设 $\{\Delta_i\}$ 是 G 的构成区间之全体, 则

$$\sum_i \beta m\Delta_i = \beta mG < mA = \sum_i m(A \cap \Delta_i),$$

这推出必有某个 i , 使得 $\beta m\Delta_i < m(A \cap \Delta_i)$. □

正测度集必“充分地填满某个区间”这一事实, 可用来推出一系列深刻结论. 这些结论都是直观上虽然可信、但非测度论的论证难以确切说明的. 以下几题将使你较充分地感受到测度论方法的力量.

1.75 设 $A \subset \mathbf{R}$, $mA > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in (-\delta, \delta)$, 有 $m(A \cap (A + x)) > 0$.

证 取开区间 Δ , 使 $m\Delta < 2m(A \cap \Delta)$; 可设 $A \subset \Delta$ (否则以 $A \cap \Delta$ 取代 A). 取 $0 < \delta < 2mA - m\Delta$. 若 $x \in (-\delta, \delta)$, 令 $B = A \cap (A + x)$, 则

$$\begin{aligned} m\Delta + \delta &\geq m[A \cup (A + x)] \\ &= m(A \setminus B) + m((A + x) \setminus B) + mB \\ &= 2mA - mB, \end{aligned}$$

这就推出 $mB \geq 2mA - m\Delta - \delta > 0$. □

1.76 设 $A \subset \mathbf{R}$, $mA > 0$, $A + A = \{x + y : x, y \in A\}$. 则 $(A + A)^\circ \neq \emptyset$.

证 取开区间 Δ , 使 $(2/3)m\Delta < m(A \cap \Delta)$. 不妨设 $A \subset \Delta = (-a, a)$, $a > 0$ (否则同时对 A, Δ 作一平移). 今证当 $\delta > 0$ 充分小时 $(-\delta, \delta) \subset A + A$, 因而 $(A + A)^\circ \neq \emptyset$. 若此结论不真, 则有 $x_n \in A + A$, $x_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$). 于是 $A \cap (x_n - A) = \emptyset$,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}m\Delta &< 2mA = mA + m(x_n - A) \\
&= m[A \cup (x_n - A)] \\
&\leq m\Delta + |x_n|.
\end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得 $4m\Delta \leq 3m\Delta$, 得出矛盾. \square

1.77 设 $(0, \infty) = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A + A \subset A$, $B + B \subset B$, 则 A, B 均不可测.

证 若 A 可测, B 亦必可测. 不妨设 $mA > 0$, 于是由题 1.76 有 $(A + A)^\circ \neq \emptyset$, 从而 $A^\circ \neq \emptyset$, 于是有开区间 $\Delta \subset A$. 必有 $0 < r < m\Delta$, 使 $r \in A$ (否则 $(0, m\Delta) \subset B$, 这与 $B + B \subset B$ 一起推出 $B = (0, \infty)$!), 于是从 $\Delta + nr \subset A$ ($n = 1, 2, \dots$) 推出 A 包含某个区间 (a, ∞) , 从而 B 有界. 但这将推出 $B = \emptyset$! \square

你可能有点惊喜: 题 1.77 不是轻易地论证了 Lebesgue 不可测集的存在性吗? 其实并非如此. 你能肯定满足上题中条件的集 A, B 存在吗?

1.78 设 $A \subset (-a, a)$, $mA > a > 0$, 则存在 $B \subset A$, 使得 $mB > 0$ 且 $B = -B$ (即 B 为对称集).

提示: 令 $B = A \cap (-A)$ (参照题 1.75).

1.79 设 $A \subset \mathbf{R}$ 可测, $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, $\forall x \in (-\delta, \delta)$, $a + x$ 与 $a - x$ 至少一个属于 A , 则 $mA \geq \delta$.

提示: 指明 $(-\delta, \delta) \subset (A - a) \cup (a - A)$.

从题 1.20 你看到“局部可数” \Rightarrow 可数. 那时用的方法现在可用来解决类似的如下问题.

1.80 设 $A \subset \mathbf{R}$ 可测. 若 $\forall x \in \mathbf{R}, \exists r_x > 0$, 使得 $m[A \cap (x - r_x, x + r_x)] = 0$, 则 $mA = 0$.

1.81 陈述并证明题 1.80 的 n 维推广.

1.82 设 $A, G \subset \mathbf{R}^n$, $mA = 0$, G 是开集, 则 $\bar{G} = \overline{G \setminus A}$.

证 只要证 $G \subset \overline{G \setminus A}$. 若 $x \in (G \setminus A)^\circ$, 则有 $r > 0$, 使 $(G \setminus A) \cap B_r(x) = \emptyset$, 从而 $G \cap B_r(x) \subset A$. 这推出 $m(G \cap B_r(x)) = 0$, 因此 $G \cap B_r(x) = \emptyset$, $x \notin G$, 如所要证. \square

D. 外测度问题

与测度比较, 外测度缺少一个关键的性质: 完全可加性, 因此, 要得出关于外测度的等式很不容易. 但如同测度一样, 外测度也是单调的、次可加的, 故对于不等式问题, 外测度与测度并无明显差别.

以下设 μ^* 是集 Ω 上的给定外测度.

1.83 设 $\mu^* A, \mu^* B$ 有限, 则 $|\mu^* A - \mu^* B| \leq \mu^*(A \Delta B)$.

提示: 注意 $A \subset B \cup (A \Delta B), B \subset A \cup (A \Delta B)$.

1.84 $\mu^*(A \Delta C) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B \Delta C)$.

提示: 指明 $A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$.

1.85 设 $\mu^* A < \infty, B$ 为 μ^* -可测, 则

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^* A + \mu^* B - \mu^*(A \cap B).$$

证 分别以 $A \cup B, A$ 为式(2)中的 A , 得到

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^* B + \mu^*(A \setminus B);$$

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B).$$

从以上两式消去 $\mu^*(A \setminus B)$, 即得要证等式. □

1.86 设 $B_i (1 \leq i \leq n)$ 是互不相交的 μ^* -可测集, $A_i \subset B_i$, 则 $\mu^*(\bigcup A_i) = \sum \mu^* A_i$.

证 因可对 n 用归纳法, 不妨设 $n = 2$. 令 $A = A_1 \cup A_2$, 则

$$\mu^* A = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \setminus B_1) \quad (\text{用(2)})$$

$$= \mu^* A_1 + \mu^* A_2. \quad \square$$

注意题 1.85 与 1.86 中都用到 μ^* -可测条件, 因而有(2)这一等式可用. 否则, 不可能得到一个表为等式的结论.

对于 m^* , 因有明显的定义式, 故可得出某些更强的结论.

1.87 设 $A \subset \mathbf{R}$, 则有 G_δ 型集 $B \supset A$, 使得 $m^* A = mB$.

证 不妨设 $m^* A < \infty$. 取开集 $G_n \supset A$, 使 $mG_n \rightarrow m^* A$. 令 $B = \bigcap G_n$, 则 $B \supset A$,

$$m^* A \leq m^* B = mB \quad (\text{单调性})$$

$$= \lim_n m\left(\bigcap_{k=1}^n G_k\right) \quad (\text{连续性})$$

$$\leq \lim_n mG_n = m^* A,$$

这得出 $m^* A = mB$. □

1.88 设 $A_n \uparrow A \subset \mathbf{R}$, 则 $m^* A = \lim_n m^* A_n$.

证 取 $B_n \supset A_n$, 使得 $mB_n = m^* A_n$ (用上题) 则

$$m^* A \leq m(\lim_n B_n) \quad (\text{单调性})$$

$$\leq \lim_n mB_n \quad (\text{用题 1.59})$$

$$= \lim_n m^* A_n \leq m^* A,$$

由此得出 $m^* A = \lim_n m^* A_n$. □

1.89 设 $A \subset \mathbf{R}$ $0 \leq \alpha \leq m^* A$, 则有 $B \subset A$, 使 $m^* B = \alpha$; 当 A 可测时可要求 $mB = \alpha$.

提示: 证明 $\varphi(x) \triangleq m^*[A \cap (-x, x)]$ 连续.

§ 1.3 可测函数

一、定理与定义

在初步熟悉了测度论的基本知识之后, 现在令人关心的首要问题是如何将测度论方法用于研究函数. 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是给定的测度空间, $f(x)$ 是一个定义于 Ω 上的实函数. 要能对 $f(x)$ 应用测度论方法, 一个自然的要求是, 所有从 $f(x)$ 合理地构成的集 $A \subset \Omega$ 都应是可测集. 人们发现, 所谓可测函数正好能满足上述要求. 因此, 如同可测集一样, 可测函数成为测度论的最重要的基本概念之一.

定义 1.3.1 若一个函数 $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm \infty\}$ 满足条件:

$$\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad (\forall \alpha \in \mathbf{R}),$$

则称 f 为 \mathcal{A} -可测函数或 μ -可测函数, 简称为可测函数.

约定以 $M(\Omega)$ 记 Ω 上的可测函数之全体, 而以 $M^+(\Omega)$ 记 Ω 上的非负可测函数之全体. 若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, 则在未加特别说明时, 通常总认

定在 Ω 上使用 Lebesgue 测度, 此时相应地称 $f \in M(\Omega)$ 为 Lebesgue 可测函数, 也简称为可测函数.

对于一个函数 $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$, 以下看来互有差异的条件互相等价:

(i) $f \in M(\Omega)$;

(ii) $\forall \alpha \in \mathbf{R} : \{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$;

(iii) $\forall \alpha \in \mathbf{R} : \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$;

(iv) $\forall \alpha \in \mathbf{R} : \{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$;

(v) $\forall B \in \mathcal{A} \text{ (Borel 集族)} : f^{-1}B \in \mathcal{A} ; \{f = \infty\} \in \mathcal{A}$.

最后一个条件在形式上是最强的. 如果认定 Borel 集 $B \subset \mathbf{R}$ 都是性质足够清楚的合理的集, 那么不能不认为 $f^{-1}B = \{x : f(x) \in B\}$ 是一个合理地构成的集, 对这样的集可求其测度, 正是可测函数所应满足的条件.

只有对某些特别基本或很简单情况, 才利用上述的条件 (i)~(v) 之一来判定函数的可测性. 在大多数情况下, 可测性结论源于间接的推断, 而下面的定理则为此提供了主要的依据.

定理 1.3.1 设 $f, g, f_n \in M(\Omega) (n = 1, 2, \dots)$. 则 $fg, f \vee g, f \wedge g, f^+, f^-, |f|, \sup f_n, \inf f_n, \overline{\lim}_n f_n$ 与 $\underline{\lim}_n f_n$ 均为 Ω 上的可测函数, 而 $f \pm g, f/g$ 与 $\lim_n f_n$ 是使其有定义的集合上的可测函数.

更简单地说就是: 可测函数经代数运算(和差积商)、格运算(取最大、最小)及极限运算仍得可测函数. 这就表明, 可测函数具有很强的“运算不变性”, 正如可测集具有很强的“集运算不变性”一样. 这是可测函数的主要优点之一.

与在微积分学中熟知的连续函数、可微函数比较, 你可能感到可测函数的最大缺点是其结构不明晰. 虽然不很严格, 但直观上完全清楚的是, 连续函数就是其图形为连续曲线的函数(对于单变量函数而言). 然而现在我们却不能对可测函数作类似的描述. 不过, 倘能指出可测函数能用某种结构简单的函数逼近, 那么, 就可以说在渐近的意义上阐明了可测函数的结构. 这就需要简单函数概念. 形如

$$\varphi = \sum_i \alpha_i \chi_{e_i} \quad (1)$$

的函数称为简单函数, 其中 $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $e_i \subset \Omega$ ($1 \leq i \leq n$) 是可测集. 若 $e_i \subset \mathbf{R}$ 是区间, 则 (1) 就是很熟悉的阶梯函数. 不妨将简单函数初步想象成接近于阶梯函数的函数. 但这种比拟是很粗略的, 简单函数远比阶梯函数更一般. 下面分别以 $\mathcal{S}(\Omega)$ 与 $\mathcal{S}^+(\Omega)$ 记 Ω 上的简单函数之全体与非负简单函数之全体. 不失一般性, 在使用简单函数的表达式 (1) 时, 可设诸 e_i 互不相交.

定理 1.3.2 设 $f \in M(\Omega)$. 则存在序列 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\Omega)$, 使得在 Ω 上处处有 $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ 且 $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$; 当 $f \geq 0$ 时可要求 $0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \rightarrow f(x)$, 或缩写作 $0 \leq \varphi_n \uparrow f$.

结合定理 1.3.1 与 1.3.2 现在可以说, $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ 为可测函数的充要条件是, 它是简单函数的极限函数. 如果说, 像简单函数这样结构分明的函数绝对列入我们的研究对象之内, 那么, 仅仅从极限运算可以施行这一点考虑, 可测函数也是不可缺少的. 由此看来, 可测函数概念已不像初看起来那么宽泛而难以捉摸了.

关于可测函数的最重要的结果是各种收敛定理. 设 $f, f_n \in M(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$), 考虑以下几种收敛性:

(i) 依测度 μ 收敛: $f_n \xrightarrow{\mu} f \Leftrightarrow f_n, f$ 在 Ω 上 a. e. 有限, $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(ii) 几乎处处收敛或 a. e. 收敛: $f_n \rightarrow f$ a. e. $\Leftrightarrow \mu\{f_n \not\rightarrow f\} = 0$.

(iii) 几乎一致收敛: $f_n \rightarrow f$ a. u. $\Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists A_\delta \subset \Omega$, 使得 $\mu A_\delta^c < \delta$, 在 A_δ 上 $f_n \Rightarrow f$, \Rightarrow 记一致收敛.

三种收敛的关系由以下定理刻画.

定理 1.3.3 设 $f, f_n \in M(\Omega)$ a. e. 有限. 若 $f_n \rightarrow f$ a. u., 则 $f_n \rightarrow f$ a. e. 且 $f_n \xrightarrow{\mu} f$; 当 $\mu\Omega < \infty$ 时 $f_n \rightarrow f$ a. u. $\Leftrightarrow f_n \rightarrow f$ a. e.. 若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则存在子列 $\{f_{n_i}\}$, 使得 $f_{n_i} \rightarrow f$ a. u..

与微积分学中比较单纯地使用“处处收敛”及“一致收敛”不同, 现在你一下子就面对许多种不同的收敛性, 而且后面章节中还要用到更多的收敛性 (如 L^p 收敛、弱收敛等). 初学者可能深感困惑: 用得着这

许多收敛性吗?从中选择某种最好的收敛不更好吗?你可能认为强的收敛(例如一致收敛)是好的收敛.如果收敛性出现在命题的结论中,自然是愈强愈好.但若收敛性是用作命题的条件,那就恰好相反,应当是愈弱愈好.由此可见,至少我们不能从收敛性的强弱来区分其优劣.从定理 1.3.3 看来, a. u. 收敛最强,而依测度收敛则较弱,但它们各有其用.逐步习惯于灵活运用各种收敛性,对于实变函数与泛函分析的学习是至关重要的.

前面的定理 1.3.2 已从一个方面解决了可测函数的结构问题:可测函数是简单函数列的极限函数.对于一般测度空间上的可测函数,关于其结构的知识就仅限于此了.但对于 Lebesgue 可测函数,我们希望知道得更多一些.特别,必须建立可测函数与连续函数的关系.著名的 Luzin 定理解决了这一问题.这就是如下的

定理 1.3.4 设 $f(x)$ 是 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上 a. e. 有限的 Lebesgue 可测函数,则有以下结论成立:

(i) $\forall \epsilon > 0, \exists g \in C(\mathbf{R}^n)$, 使得

$$\sup_{\mathbf{R}^n} |g(x)| \leq \sup_{\Omega} |f(x)|, \quad m\{f \neq g\} < \epsilon.$$

(ii) 存在序列 $\{g_k\} \subset C(\mathbf{R}^n)$, 在 Ω 上 $g_k \rightarrow f$ a. e. ($k \rightarrow \infty$).

Luzin 定理表明,如果希望研究对象包括所有连续函数,且要求极限运算总能施行,那么可测函数是不可缺少的.这就从另一角度阐明了可测函数的意义.

现在考虑关于可测函数的一些问题.首先要解决的问题是:

二、问题与方法

A. 判定函数的可测性

根据 $f(x)$ 给出的形式可选择以下两种方法之一:

方法 I (直接法) 验证定义 1.3.1 之条件(或与它等价的任何一个条件)满足.在这样做时,适当的集分解技术是重要的.

方法 II 将 $f(x)$ 表为某些已知可测函数的“组合”,然后应用定理 1.3.1.

通常,你应尽可能采用方法 II.

1.90 设 $f(x)$ 在每个区间 $[-n, n]$ ($n \in \mathbf{N}$) 上可测, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可测.

证 用直接法, 注意 $\{f \leq \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([-n, n] \cap \{f \leq \alpha\})$. \square

更一般的问题是:

1.91 设 $\Omega = \bigcup A_n$, $A_n \in \mathcal{A}$, $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ 在每个 A_n 上可测, 则 $f \in M(\Omega)$.

1.92 设 $f(x)$ 在每个区间 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ 上可测, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测.

1.93 设 $f \in M(\Omega)$ a. e. 有限, $g \in C(\mathbf{R})$, 则 $\varphi \triangleq g \circ f \in M(\Omega)$.

证 I 首先注意, 因 $f(x)$ a. e. 有限, 故 $g(f(x))$ a. e. 有定义, 在使 $g(f(x))$ 无定义的零测集上随意规定 $g(f(x))$, 这并不影响 $g \circ f$ 的可测性. 因此不妨一开始就设 $f(x)$ 处处有限. 用直接法: $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $B \triangleq \{g \leq \alpha\}$ 是闭集 (定理 1.1.5), 因而是 Borel 集. 于是由 f 的可测性得出

$$\begin{aligned} \{\varphi \leq \alpha\} &= \varphi^{-1}(-\infty, \alpha] = f^{-1}g^{-1}(-\infty, \alpha] \\ &= f^{-1}B \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

可见 $\varphi \in M(\Omega)$.

证 II 取简单函数列 $\{\varphi_n\}$, 使得 $\varphi_n \rightarrow f$ (依定理 1.3.2), 则 $g \circ \varphi_n \rightarrow g \circ f$ (用 g 连续!). 显然 $g \circ \varphi_n$ 亦为简单函数, 故 $\varphi \in M(\Omega)$. \square

上题表明, 连续函数与可测函数的复合函数是可测函数. 由此立即得出: 若 $f \in M(\Omega)$, 则 $|f|^p$ ($p > 0$), $\ln(1 + |f|)$, $(1 + |f|)^{-1}$ 等均为可测函数.

现在你试去解决更一般的问题.

1.94 设 $f_i \in M(\Omega)$ ($1 \leq i \leq n$) a. e. 有限, $g \in C(\mathbf{R}^n)$, 则 $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$ 是可测函数.

这样, 利用以上结论, 从 $f_i \in M(\Omega)$ ($1 \leq i \leq n$) 直接推出 $\sum f_i$,

$\prod_i f_i, \sup_i f_i$ 等函数皆可测.

1.95 设 f^2 与 $\{f > 0\}$ 可测, 则 f 可测.

提示: 若 $\alpha \geq 0$, 则 $\{f > \alpha\} = \{f^2 > \alpha^2\} \cap \{f > 0\}$; 若 $\alpha < 0$, 则 $\{f > \alpha\} = \{f > 0\} \cup (\{f^2 < \alpha^2\} \cap \{f \leq 0\})$.

1.96 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测.

提示: 利用 $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x + n^{-1}) - f(x)]$ ($a \leq x < b$).

1.97 设 $f(x, y): \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 对 x 与 y 分别为可测函数与连续函数, 则 $\varphi(x) \triangleq \max_{a \leq y \leq b} f(x, y)$ 是 Ω 上的可测函数.

证 $\varphi(x)$ 亦可写成 $\varphi(x) = \sup_{a \leq y \leq b} f(x, y)$. 当 y 在 $[a, b]$ 上变动时, 得到不可数多个可测函数 $f(\cdot, y)$. 为能应用定理 1.3.1, 关键在于将 $\varphi(x)$ 表为可数多个形如 $f(\cdot, y)$ 的函数的上确界函数. 为此利用 $f(x, y)$ 对 y 的连续性, 任取 $[a, b]$ 的可数稠密子集 $\{y_n\}$ (例如有理点集), 验证 $\varphi(x) = \sup_n f(x, y_n)$, 于是由定理 1.3.1 立得所要结论. □

1.98 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是闭集, $F \subset \mathcal{C}(\Omega)$, $\varphi(x) = \sup_{f \in F} f(x)$, 则 $\varphi(x)$ 在 Ω 上可测.

提示: 注意 $\{\varphi \leq \alpha\} = \bigcap_{f \in F} \{f \leq \alpha\}$, 并用定理 1.1.5.

1.99 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 可测, $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, \forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset \Omega$, 使 $f|_F$ 连续且 $m(\Omega \setminus F) < \varepsilon$, 则 f 可测.

提示: $\forall k \in \mathbf{N}$, 取闭集 $F_k \subset \Omega$, 使 $f|_{F_k}$ 连续且 $m(\Omega \setminus F_k) < k^{-2}$, 指明 $f\chi_{F_k} \rightarrow f, a.e.$

在上节中曾提到, 若 (Ω, \mathcal{A}) (E, \mathcal{C}) 是两个可测空间, 映射 $F: \Omega \rightarrow E$ 满足条件 $F^{-1}\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, 则称 F 为从可测空间 (Ω, \mathcal{A}) 到可测空间 (E, \mathcal{C}) 的可测映射. 若 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个 Lebesgue 可测函数, 则依定义 1.3.1 之后的条件 (v) 得出, f 无非是从可测空间 (Ω, \mathcal{A}) 到可测空间 $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 的可测映射. 初看起来令人不解的是, 条件 $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 为什么不代之以似乎更自然的 $f^{-1}\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ 呢? Lebesgue 可测函数不应和

Lebesgue 可测集族 \mathcal{L} 联系在一起吗? 问题在于, 条件 $f^{-1}\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ 可能实质上强于条件 $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, 这样的替换会缩小可测函数的范围. 下题表明这种情况确会发生.

1.100 存在可测函数 f 与 $B \in \mathcal{L}$, 使得 $f^{-1}B$ 未必可测.

解 设 $A \subset [0, 1]$ 依题 1.66 定义一严格增函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 如下: 对 A 的每个余区间 δ_{nk} ($k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$), 定义 f 在 δ_{nk} 的左(右)端点处取值恰为 Cantor 集的相应余区间的左(右)端点, f 在 δ_{nk} 内为线性函数, 在 A 上 $f(x) = \sup_{\substack{y \in [0, 1] \setminus A \\ y < x}} f(y)$, $f(0) = 0$. f 显然为严格增函数, 因而是可测函数, 且 $f(A) = P = \text{Cantor 集}$. 由定理 1.2.3 存在不可测集 $C \subset A$. 另一方面, 由 $B \triangleq f(C) \subset P$ 及 $mP = 0$ 推出 $mB = 0$, 从而 $B \in \mathcal{L}$, 但 $C = f^{-1}B$ 不可测. \square

1.101 对于一函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 以下两条件互相等价 (i) $f^{-1}\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$; (ii) 任给 Lebesgue 可测函数 $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 有 $g \circ f \in M(\Omega)$ (对照题 1.93).

结合题 1.100 与 1.101 你就可得出似乎出人意外的结论: Lebesgue 可测函数的复合函数未必是 Lebesgue 可测函数!

证 (i) \Rightarrow (ii) 若 $f^{-1}\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$, g 是 Lebesgue 可测函数, 则

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}g^{-1}B \subset f^{-1}\mathcal{L} \subset \mathcal{A},$$

这表明 $g \circ f \in M(\Omega)$.

(ii) \Rightarrow (i) 设条件 (ii) 满足. 任给 $B \in \mathcal{L}$, 则 $g = \chi_B$ 是 Lebesgue 可测函数, 因此 $g \circ f \in M(\Omega)$, 从而

$$f^{-1}B = f^{-1}g^{-1}(1) = (g \circ f)^{-1}(1) \in \mathcal{A}.$$

这就证得 $f^{-1}\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$. \square

关于可测函数还需某些说明. 若在 Ω 上同时考虑几个不同的 σ -代数 $\mathcal{A}, \mathcal{F}, \dots$, 则函数 $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ 相对于 \mathcal{A}, \mathcal{F} 等的可测性一般是不同的, 需要依具体情况分别确定. 若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 且仅考虑 Lebesgue 可测性, 则正如 Lebesgue 不可测集并不出现于“常规地”提出的数学问题中一样, Lebesgue 不可测函数亦不会出现于“常规地”构成的具体函数中. 因此, 在实际问题中, Lebesgue 可测性的要求几乎不构成任何真正

的限制. 自然, 在这个意义上的可测性判定问题也就失去了真正的重要性.

与可测性判定相比较, 收敛性问题无疑更为重要. 首先考虑依测度收敛, 它对于你可能是全新的概念, 在微积分学中, 并无类似的收敛性.

B. 依测度收敛问题

按定义来判定依测度收敛是可能的选择之一, 但数学中的一般经验是, 过分依赖于定义必定行之不远! 不过, 对于依测度收敛似乎可供利用的结论还很少; 对于普通收敛的熟知结论, 例如, $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g \Rightarrow f_n g_n \rightarrow fg$, 又 $f_n \rightarrow f, g$ 连续 $\Rightarrow g \circ f_n \rightarrow g \circ f$, 等等, 尚未证实亦适用于依测度收敛. 因此, 首要的问题是, 对依测度收敛建立一系列类似于普通收敛的性质. 为做到这一点, 不是依靠依测度收敛的定义, 而是依赖于定理 1.3.3 所断言的“依测度收敛序列包含 a. e. 收敛子列”这一事实.

下面涉及的函数假定都是 Ω 上的可测函数, 除非另有说明.

1.102 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f, g_n \xrightarrow{\mu} g, f_n \leq g_n, \text{a.e.}$ 则 $f \leq g, \text{a.e.}$. 简言之, 不等式两边可同时取依测度收敛的极限.

证 由定理 1.3.3, 存在子列 $\{f_{n_i}\}$, 使得 $f_{n_i} \rightarrow f, \text{a.e.}$. 显然亦有 $g_{n_i} \xrightarrow{\mu} g$; 再将定理 1.3.3 用到序列 $\{g_{n_i}\}$, 又得出 $\{g_{n_i}\}$ 的 a. e. 收敛子列, 为记号简单起见, 不妨设就有 $g_{n_i} \rightarrow g, \text{a.e.}$. 因 $f_{n_i} \leq g_{n_i}, \text{a.e.}$, 两边取极限 (这是普通极限!) 就得到 $f \leq g, \text{a.e.}$. 如所要证. \square

分析一下上题中的论证是很有意思的. 在已知 $f_n \leq g_n, \text{a.e.}$ 的条件下, 若 $f_n \rightarrow f, \text{a.e.}, g_n \rightarrow g, \text{a.e.}$ 推出 $f \leq g, \text{a.e.}$ 当然不成问题, 但所用的信息“ $f_n \rightarrow f, \text{a.e.}$ 与 $g_n \rightarrow g, \text{a.e.}$ ”已经太强, 远远超出需要了. 实际上, 只需对某一子列 $\{n_i\}$, 有 $f_{n_i} \rightarrow f, \text{a.e.}$ 与 $g_{n_i} \rightarrow g, \text{a.e.}$ 就足够了. 而“ $f_{n_i} \rightarrow f, \text{a.e.}$ 与 $g_{n_i} \rightarrow g, \text{a.e.}$ ”这一弱得多的信息却已包含在较弱的条件“ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 与 $g_n \xrightarrow{\mu} g$ ”之中. 这样, 定理 1.3.3 中的结论“依测度收敛序列包含 a. e 收敛子列”看来很弱, 似乎不足为用, 但对于完成某些论证却已足够. 这一点是值得你细加体会的.

1.103 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f, f_n \xrightarrow{\mu} g$, 则 $f = g, a.e.$

1.104 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f, a \leq f_n \leq b, a.e.$ 则 $a \leq f \leq b, a.e.$

以上两题的结论都可从题 1.102 推出. 但你最好是作直接证明, 以便熟悉所用的方法.

1.105 设 $\mu\Omega < \infty, f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则 $|f_n|^p \xrightarrow{\mu} |f|^p (p > 0)$.

证 若结论不真, 则对某个 $\varepsilon > 0$ 有

$$\mu\{|f_n|^p - |f|^p| \geq \varepsilon\} \not\rightarrow 0;$$

而这又推出: 存在 $\delta > 0$ 及 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得

$$\mu\{|f_{n_k}|^p - |f|^p| \geq \varepsilon\} \geq \delta \quad (\forall k \in \mathbf{N}). \quad (*)$$

将定理 1.3.3 用到序列 $\{f_{n_k}\}$ 得出其 a.e. 收敛子列, 不妨设就是 $f_{n_k} \rightarrow f, a.e.$ 从而 $|f_{n_k}|^p \rightarrow |f|^p, a.e.$ 但由定理 1.3.3 这又推出 $|f_{n_k}|^p \xrightarrow{\mu} |f|^p (\mu\Omega < \infty \text{ 用于此!})$, 而这显然与式 (*) 矛盾. \square

作为对比, 考虑一下直接证法. 为验证 $\{|f_n|^p\}$ 满足依测度收敛定义的条件, 就需估计测度

$$\mu\{|f_n|^p - |f|^p| \geq \varepsilon\},$$

这并不那么简单. 而应用定理 1.3.3 则将这件事避开了. 如此所带来的简化对于下题更为明显.

1.106 设 $\mu\Omega < \infty, f_n \xrightarrow{\mu} f, g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, 则 $g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f$.

注意: 题 1.105 只不过是 1.106 的特殊情况. 实际上, 用同样的方法可以证明更一般的:

1.107 设 $\mu\Omega < \infty, f_n \xrightarrow{\mu} f, g_n \xrightarrow{\mu} g, \varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$, 则 $\varphi(f_n, g_n) \xrightarrow{\mu} \varphi(f, g)$.

由此特别推出, 当 $\mu\Omega < \infty$ 时, 关于和的极限与积的极限的通常规则亦适用于依测度收敛. 不过, 对于和的情况直接证明也很简单, 且无需 $\mu\Omega < \infty$ 这一限制.

1.108 设 $\mu\Omega < \infty, f_n \in M(\Omega) \text{ a.e. 有限}$. 则 $\{f_n\}$ 有依测度收敛

子列 $\Leftrightarrow \{f_n\}$ 有 a. e. 收敛子列. 可以说, 在有子列收敛的意义上, 依测度收敛与 a. e. 收敛已无差别!

提示: 应用定理 1.3.3.

1.109 设 $\mu\Omega < \infty$, $f, f_n \in M(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) a. e. 有限, 则

$$f_n \rightarrow f \text{ a. e. } \Leftrightarrow \sup_{k \geq n} |f_k - f| \xrightarrow{\mu} 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

证 不妨设 $f = 0$. 若 $f_n \rightarrow 0$ a. e. 则 $|f_n| \rightarrow 0$ a. e. 从而

$$\overline{\lim}_n |f_n| = \lim_n \sup_{k \geq n} |f_k| = 0 \text{ a. e. }$$

令 $g_n = \sup_{k \geq n} |f_k|$, 则上式表明 $g_n \rightarrow 0$ a. e. 从而 $g_n \xrightarrow{\mu} 0$ ($\mu\Omega < \infty$

用于此!). 反之, 若 $g_n \xrightarrow{\mu} 0$, 则有子列 $g_{n_i} \rightarrow 0$ a. e. 进而从不等式 $|f_n| \leq g_{n_i}$ ($\forall n \geq n_i$) 推出 $f_n \rightarrow 0$ a. e. \square

1.110 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \leq f_{n+1}$ a. e. ($\forall n \in \mathbb{N}$) 则 $f_n \rightarrow f$ a. e.

提示: 可设 $f_n \rightarrow g$ a. e. 然后证 $f = g$ a. e. 用定理 1.3.3.

1.111 设 $\mu\Omega < \infty$, $f_n \in M(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) a. e. 有限, 则 $\{f_n\}$

依测度收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{m, n} \mu\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\} = 0$.

证 若 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} & \mu\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\} \\ & \leq \mu\{|f_m - f| \geq \varepsilon/2\} + \mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon/2\} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

反之, 设 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{m, n} \mu\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\} = 0$, 则可依次取出

$n_1 < n_2 < \dots$, 使得

$$\mu\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq 2^{-k}\} < 2^{-k} \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

令 $A_k = \{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq 2^{-k}\}$, 则 $\mu(\overline{\lim}_k A_k) = 0$ (参考题 1.62). 令

$A = \varliminf_k A_k^c$, 则 $\mu A^c = 0$;

$$x \in A \Leftrightarrow \text{当 } k \text{ 充分大时 } |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < 2^{-k}.$$

可见无穷级数 $\sum (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ 在 A 上绝对收敛, 因而在 Ω 上 $f_{n_k} \rightarrow$

f a. e., f 是某个 a. e. 有限的可测函数. 于是 $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ ($\mu\Omega < \infty$ 用于

此!) ,因而当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$f_n = (f_n - f_{n_k}) + f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f. \quad \square$$

主要涉及依测度收敛并直接应用定理 1.3.3 的问题就到此为止. 让我们简单总结一下. 这类问题的解法主要依赖于依测度收敛与 a. e. 收敛的互相转换以及通常收敛性的熟知性质, 并不用到任何精细的测度论论证, 因而其解法往往十分简捷. 正因为如此, 上述方法不足以解决那些需要精细的测度论证的问题. 当然, 你在学习的这一阶段, 并无必要深入到那些复杂的问题. 但如你确有这方面的兴趣, 那么下面的一组问题会为你提供一试身手的机会.

C. 关于收敛性的杂题

在解这些问题时, 你依然要准备随时应用定理 1.3.3, 但现在不能指望仅仅依赖于它. 你必须心怀已学到的全部测度论知识, 依据问题的需要作适当的测度分析.

1.112 设 $\mu\Omega < \infty$, $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $f_n \rightarrow \infty$ a. e., 则 $\forall \delta > 0$, $\exists A_\delta \subset \Omega$ 使得 $\mu A_\delta^c < \delta$, 在 A_δ 上 $f_n \rightarrow \infty$.

证 问题相当于证“ $f_n \rightarrow \infty$ a. e. $\Rightarrow f_n \rightarrow \infty$ a. u.”. 这并不能从定理 1.3.3 中的类似结论推出, 但可借鉴定理 1.3.3 的证法. 令 $A_{nk} = \{f_n \geq k\}$, 则 $\{f_n \rightarrow \infty\} = \bigcap_k \lim_n A_{nk}$, 于是

$$0 = \mu\{f_n \not\rightarrow \infty\} = \mu\left(\bigcup_k \overline{\lim_n A_{nk}^c}\right),$$

这推出对任给 $k \in \mathbf{N}$, 有

$$0 = \mu(\overline{\lim_n A_{nk}^c}) = \lim_m \mu\left(\bigcup_{n \geq m} A_{nk}^c\right).$$

由此, 可顺次取出 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得 $\mu\left(\bigcup_{n \geq n_k} A_{nk}^c\right) < k^{-2}$. 给定 $\delta > 0$,

取 $k_0 \in \mathbf{N}$, 使 $\sum_{k \geq k_0} k^{-2} < \delta$; 令 $A_\delta = \bigcap_{k \geq k_0} \bigcap_{n \geq n_k} A_{nk}$. 则

$$\mu A_\delta^c = \mu\left(\bigcup_{k \geq k_0} \bigcup_{n \geq n_k} A_{nk}^c\right) \leq \sum_{k \geq k_0} \mu\left(\bigcup_{n \geq n_k} A_{nk}^c\right)$$

$$< \sum_{k \geq k_0} k^{-2} < \delta;$$

在 A_δ 上, 当 $k \geq k_0, m \geq n_k$ 时 $f_n \geq k$, 这意味着在 A_δ 上 $f_n \Rightarrow \infty$. □

1.113 设 $\mu\Omega < \infty, \{f_n\} \subset M(\Omega), f_n \rightarrow 0, a.e.$ 则存在实数列 $\{\alpha_n\}$, 使得 $\sum |\alpha_n| = \infty$, 而 $\sum |\alpha_n f_n| < \infty, a.e.$

证 所求的 $\{\alpha_n\}$ 当然不是唯一的. 一种较简单而又自然的方案是适当选择指标 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得 $|f_{n_k}|$ 下降甚快, 致使

$$\sum_k |f_{n_k}| < \infty, a.e.,$$

于是 $\alpha_{n_k} = 1 (\forall k \in \mathbb{N}), \alpha_n = 0 (n \neq n_1, n_2, \dots)$ 能满足题设要求. 具体作法是: 由 $f_n \rightarrow 0, a.e.$ 及 $\mu\Omega < \infty$ 推出 $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, 于是顺次取出

$n_1 < n_2 < \dots$, 使得

$$\mu\{|f_{n_k}| \geq k^{-2}\} < k^{-2} \quad (\forall k \in \mathbb{N}). \quad (**)$$

令 $A_k = \{|f_{n_k}| < k^{-2}\}, A = \varliminf_k A_k$. 则

$$\mu A^c = \mu(\overline{\varliminf_k A_k}^c) = 0; \quad (\text{用 } (**) \text{ 与题 1.62})$$

而 $x \in A \Leftrightarrow$ 当 k 充分大时 $|f_{n_k}(x)| < k^{-2}$, 因此 $\sum_k |f_{n_k}| < \infty, a.e.$

这就可如前面的设想完成证明. □

1.114 设 $\mu\Omega < \infty, f_n \in M(\Omega) (n = 1, 2, \dots), a.e.$ 有限, 则存在实数列 $\{\alpha_n\}$, 使得 $\alpha_n f_n \rightarrow 0, a.e.$

提示: 取 $k_1 < k_2 < \dots < k_n \rightarrow \infty$, 使得 $\mu\{|f_n| \geq k_n\} < n^{-2}$, 令 $\alpha_n = k_n^{-2}$.

1.115 设 $\mu\Omega > 0, \{f_n\} \subset M(\Omega), a.e.$ 收敛, 则 $\{f_n\}$ 在某个正测度集 A 上一致有界, 即 $\mu A > 0, \sup_{x \in A, n \geq 1} |f_n(x)| < \infty$.

提示: 令 $A_k = \bigcap_n \{|f_n| \leq k\}$, 指明某个 $\mu A_k > 0$.

第二章 积 分

在有了关于集论与测度方面的准备之后,现在你就要进入实变函数课程的中心内容——积分的学习了.从数学分析课程中所学到的积分学——通常称为 Riemann 积分,无论如何应列入人类思维的杰出创造之内;它在科学的几乎所有领域的辉煌成功,或许此刻还让你激动不已.然而现在有人正要告诉你:Riemann 积分大体上仅适用于连续函数,已过于狭窄而不敷需要了.对此,你也许并不很以为然;尽管我们刚刚学习了十分一般的可测函数,但你的学习经历整个说来并没有大大超出与连续函数打交道的范围之外.但如果人们进而告诉你:Riemann 积分固然极其实用,只是其性质无法令人满意,突出的缺点是没有在积分号下取极限的简便易行的规则,那么,你大概难以反对.数学分析中处理参变积分的一章整个来说是不成功的,它让你在关于一致收敛的旋涡中弄得晕头转向,最终仍然不得要领.现在有人告诉你:如果改用一种新的积分,这一切均将为之改观,那么你必定乐得一见分晓.现在就开始学习的 Lebesgue 积分,确实能让你如愿以偿.

§ 2.1 Lebesgue 积分

一、定理与定义

让人已有许多期盼的新积分,大概登场亦不容易,我们得一开始面对一大堆复杂的定义与公式吗?让我们回忆一下, Riemann 积分(如果包括定积分、二重积分、三重积分及所有这些积分的反常积分)的定义及其公式推导确实不易.然而令人难以置信的是,新的积分理论的建立仅包含几个较简短的步骤.实际上,真正的难点已在建立测度的过程中被克服了.而且,新的积分并非针对某个单一的特殊情况(例如区间上的函数)而设立,它一开始就建立在已高度一般化的测度概念的基础

上.因而,在 Riemann 积分理论中随维数增加而逐步处理的线积分、面积积分与体积分,现在融为一体了.

以下设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是给定的测度空间,保持上章的记号.

定义 2.1.1 (i) 设 $f \in S^+(\Omega)$ 表如 § 1.3(1) 其中 $\alpha_i \geq 0, e_i$ 互不相交,则定义

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_i \alpha_i \mu e_i. \quad (1)$$

注意当 $\alpha_i = 0$ 时,无论是否 $\mu e_i = \infty$,都约定 $\alpha_i \mu e_i = 0$,因此,仅当某个 $\mu e_i = \infty$ 且 $\alpha_i > 0$ 时式(1)定义的积分取值 ∞ .

(ii) 若 $f \in M^+(\Omega)$,则定义

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup_{f \geq \varphi \in S^+(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi d\mu. \quad (2)$$

(iii) 若 $f \in M(\Omega)$, $\int_{\Omega} f^+ d\mu$ 与 $\int_{\Omega} f^- d\mu$ 至少一个有限,则定义

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu \quad (3)$$

为 f 在 Ω 上对测度 μ 的积分;当 $\int_{\Omega} f d\mu$ 有限 $(\Leftrightarrow \int_{\Omega} f^+ d\mu$ 与 $\int_{\Omega} f^- d\mu$ 均有限)时,说 f 在 Ω 上可积.

(iv) 若 $f = u + iv$, u, v 在 Ω 上可积,则定义

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} u d\mu + i \int_{\Omega} v d\mu, \quad (4)$$

且说 f 在 Ω 上可积.

(v) 任给 $A \in \mathcal{A}$,定义

$$\int_A f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_A d\mu, \quad (5)$$

只要上式右端之积分存在.

约定以 $L^1(\Omega)$ 记 Ω 上可积的函数之全体,必要时也记作 $L^1(\Omega, \mu)$ 或 L^1 . 若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 而 $\mu = m$ 是 Lebesgue 测度,则依定义 2.1.1 定义的积分 $\int_{\Omega} f dm$ 称为 Lebesgue 积分,关于 m 可积称为 Lebesgue 可积.与之对照,关于一般测度 μ 的积分也称为抽象 Lebesgue 积分.当必要指

出积分变量时, 将 $\int_{\Omega} f(x) d\mu$ 写作 $\int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$; 而 $\int_{\Omega} f(x) dm$ 通常就写作 $\int_{\Omega} f(x) dx$.

你已注意到, 积分定义并不涉及函数 $f(x)$ 是否有界; 即使 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, 亦不涉及 Ω 是否有界及空间 \mathbf{R}^n 的维数. 可见, 对于定义 2.1.1 意义下的积分, 并无常义积分与反常积分之别, 亦无定积分与重积分的划分. 这种高度的统一与简洁, 远非 Riemann 积分所能比拟.

定义式 (1)~(5) 在积分的应用中固然不无用处, 但其直接应用的价值十分有限, 像 (2) 这样的公式尤其不便. 从应用的角度考虑, 真正重要的东西是从 (1)~(5) 推出的各种积分性质. 为应用方便, 我们将积分的基本性质综合在以下定理中.

定理 2.1.1 积分有如下性质:

(i) 线性性: 设 $f, g \in L^1(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 或 $f, g \in M^+(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$, 则

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \beta \int_{\Omega} g d\mu.$$

(ii) 完全可加性: 若 $A_n \in \mathcal{A}$ ($n = 1, 2, \dots$) 互不相交, $A = \bigcup A_n$, $\int_A f d\mu$ 存在, 则

$$\int_A f d\mu = \sum_n \int_{A_n} f d\mu.$$

(iii) 单调性: 若 $f \leq g$, a. e., 则 $\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$, 只要其中两积分均存在. 由此推出:

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu; \quad (f \in L^1) \quad (6)$$

$$\mu\{|f| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-r} \int_{\Omega} |f|^r d\mu. \quad (\varepsilon, r > 0) \quad (7)$$

后者称为 Chebyshev 不等式.

(iv) 绝对连续性: 若 $\mu A = 0$, 则 $\int_A f d\mu = 0$; 若 $f \in L^1(\Omega)$, 则

$$\lim_{\mu A \rightarrow 0} \int_A f d\mu = 0, \quad (8)$$

这意味着: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu A < \delta \Rightarrow \left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon$.

(v) 关于集的连续性: 设 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}, A_n \uparrow A, f \in L^1(\Omega)$ 或 $f \in M^+(\Omega)$ (或 $A_n \downarrow A, f \in L^1(\Omega)$) , 则成立

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_{A_n} f d\mu.$$

(vi) 可积条件: $f \in L^1(\Omega) \Leftrightarrow |f| \in L^1(\Omega); f \in L^1 \Rightarrow f$ 必 a. e. 有限; $|f| \leq g \in L^1 \Rightarrow f \in L^1$; 若 $\mu\Omega < \infty$, 则 Ω 上的有界可测函数必可积.

(vii) 积分为零的条件: $\int_{\Omega} |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a. e. .

现在让我们将以上性质与 Riemann 积分的性质对照一下. 线性性与单调性是比较平凡的, 与 Riemann 积分并无重大差别. 至于其他性质, 则 Riemann 积分难以与之比拟. 例如 Riemann 积分的可加性 $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ ($a < c < b$) 并不与此处的完全可加性相当. 如同测度的完全可加性 (参看定义 1.2.1) 一样, Lebesgue 积分的完全可加性是最本质的性质, 所有其他重要性质, 如绝对连续性, 关于集的连续性以及积分收敛定理等等, 都以完全可加性为基础, 这是你学习 Lebesgue 积分时首先应注意到的. 此外, 还可注意到, Lebesgue 积分的可积条件与 Riemann 积分是根本不同的, 至少与定积分相比是如此. 对于 Lebesgue 积分, 根本就没有“绝对可积”这一概念, 因为对于它可积就是绝对可积! Riemann 积分显然并非如此. 此外, 从定理 2.1.1 容易推出, 在任何零测集上随意改变被积函数, 对于积分毫无影响. 从 Riemann 积分的眼光看来, 这简直是骇人听闻的事. 例如, 对于函数 $f(x) \equiv 0$, 将其在所有有理点的值改成 1 之后, 所得的 Dirichlet 函数处处不连续, 在任何区间上都无 Riemann 积分可言了. 而这样的改动对于 Lebesgue 积分却无影响.

如果说, 定理 2.1.1 还只是表达了 Lebesgue 积分的一些基本性

质,那么在定理 2.1.1 基础上建立起来的积分收敛定理与 Fubini 定理,则是积分理论真正深刻的成果,它们突出地表现了 Lebesgue 积分的巨大优势.现将这些主要定理集中表述如下.

定理 2.1.2 (收敛定理) 设 $f, f_n, u_n \in M(\Omega) (n = 1, 2, \dots)$.

(i) **Levi 定理** 若 $0 \leq f_n \uparrow f$, 则

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu. \quad (9)$$

级数形式的 Levi 定理 若 $u_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则

$$\int_{\Omega} \left(\sum_n u_n \right) d\mu = \sum_n \int_{\Omega} u_n d\mu. \quad (10)$$

(ii) **Fatou 定理** 若 $f_n \geq 0$, 则

$$\int_{\Omega} \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_{\Omega} f_n d\mu. \quad (11)$$

(iii) **Lebesgue 控制收敛定理** 若 $|f_n| \leq g \in L^1(\Omega), f_n \rightarrow f$ a.e.

或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则极限式(9)成立, 且进一步有

$$\lim_n \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0. \quad (12)$$

级数形式的控制收敛定理 若 $\sum_n \int_{\Omega} |u_n| d\mu < \infty$, 则等式(10)成立.

有界收敛定理 若 $\mu\Omega < \infty, |f_n| \leq K = \text{const}$ a.e., $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则式(9)与(12)成立.

定理 2.1.3 (Fubini 定理) 设 (X, \mathcal{A}, μ) 与 (Y, \mathcal{B}, ν) 是两个 σ -有限测度空间, $\mathcal{R} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}, Z = X \times Y, \mathcal{C} = \sigma(\mathcal{R})$. 则在 \mathcal{C} 上存在唯一的 σ -有限测度 λ , 使得

$$\lambda(A \times B) = \mu A \cdot \nu B. \quad (A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B})$$

设 $f(x, y)$ 是 (Z, \mathcal{C}) 上的可测函数. 若 $f \geq 0$ 或 f 关于 λ 可积, 则成立

$$\begin{aligned} \int_Z f d\lambda &= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y) d\nu(y) \\ &= \int_Y d\nu(y) \int_X f(x, y) d\mu(x). \end{aligned} \quad (13)$$

以上定理中的 λ 称为积测度, 记作 $\lambda = \mu \times \nu$ (Z, \mathcal{C}, λ) 上的可测函数称为 $\mu \times \nu$ -可测函数.

若以 m_k 记 k 维 Lebesgue 测度, 则 $m_k \times m_l$ 的完备化正好与 m_{k+l} 一致. 这就可将 Fubini 定理用于处理 $k+l$ 维积分

$$\iint_{X \times Y} f(x, y) dx dy,$$

此处 $X \subset \mathbf{R}^k$ 与 $Y \subset \mathbf{R}^l$ 是 Lebesgue 可测集. 特别, 取 $D = [a, b] \times [c, d]$ ($[a, b]$ 与 $[c, d]$ 是有限或无限区间) 得到: 设 $f(x, y)$ 是 D 上的 Lebesgue 可测函数, 若 $f \geq 0$ 或 $f \in L^1(D)$, 则成立

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \end{aligned} \quad (14)$$

其中所有积分都是 Lebesgue 积分.

定理 2.1.2 与定理 2.1.3 一起解决了积分与极限交换及积分与积分互相交换的问题. 如在前面已提到的, 正是在这些问题上 Riemann 积分不能令人满意, 而 Lebesgue 积分则是令人高度满意的. 公式 (9)~(14) 都在通常不难验证的条件下满足; 尤可指出的是, 对于非负可测函数, 式 (10) (11) (13) (14) 已无需任何其他条件. 在 Riemann 积分理论中, 根本没有任何类似的结果可与之比拟. 你在看了后面的问题之后, 将更切实地体会到新积分的优势.

要更好地将 Lebesgue 积分与 Riemann 积分进行对比, 需要建立二者的直接联系. 以下是基本的结果.

定理 2.1.4 设 $f(x)$ 是 (a, b) 内的有限实函数.

(i) 设区间 $[a, b]$ 有限而 $f(x)$ 有界. 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 a. e. 连续; 当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积时亦必 Lebesgue 可积, 且两种积分值相等 (自然都记作 $\int_a^b f(x) dx$).

(ii) 设 $-\infty \leq a < b \leq \infty$. 若 $f(x)$ 在任何区间 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$

上有界且 a. e. 连续, 则

$$\int_a^b |f| dm = \int_a^b |f(x)| dx ;$$

$f \in L^1[a, b] \Rightarrow$ 反常积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 有限 ; 当 $f \in L^1[a, b]$ 时成立

$$\int_a^b f dm = \int_a^b f(x) dx ,$$

上式右端是 Riemann 积分(可能是反常积分)。

以上结论自然地推广到多维的情况。

值得注意的是, 反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛尚不足以保证 Lebesgue

积分 $\int_a^b f dm$ 存在. 例如, 尽管有

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} ,$$

但因 $\int_0^\infty x^{-1} |\sin x| dx = \infty$ (你从数学分析应当知此结论), 由定理

2.1.4 得出 $x^{-1} \sin x$ 在 $(0, \infty)$ 上非 Lebesgue 可积. 可以说, 这是 Lebesgue 积分唯一不尽如人意的地方. 这种情况对于多维积分不会再发生. 因此可以说, 除了某些例外, Lebesgue 积分涵盖了 Riemann 积分. 实际上, 在现代数学中, 当用到形如

$$\int_a^b f(x) dx , \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

的积分时, 通常总不加说明地理解为 Lebesgue 积分, 因而不必担心两种积分撞车的局面。

本章开头提到, 旧的参变积分理论不很成功. 现在可以指出, 应用定理 2.1.2 与 2.1.3, 这一问题能得到满意的解决. 设 $f: \Omega \times Y \rightarrow \mathbf{R}$, $\forall y \in Y$, 积分

$$\varphi(y) = \int_{\Omega} f(x, y) d\mu(x) \quad (15)$$

有定义. 今考虑函数 $\varphi(y)$ 的分析性质, 即其连续性、可微性与可积性. 显然, 这实质上是一个积分号下取极限的问题. 为简单起见, 仅考虑

$Y \subset \mathbf{R}$ 是一区间这种特殊情况,更一般的情况并无实质性的差别.

定理 2.1.5 对于由(15)定义的函数 $\varphi(y)$ 有以下结论:

(i) 连续性 若存在 $g \in L^1(\Omega)$, 使得对所有 $x \in \Omega$ 及邻近 $y_0 \in Y$ 的 y 有 $|f(x, y)| \leq g(x)$, 且 $f(x, y)$ 对 y 在 y_0 连续, 则 $\varphi(y)$ 在 y_0 连续.

(ii) 可微性 若偏导数 $f_y(x, y)$ 存在, 且存在 $g \in L^1(\Omega)$, 使得对所有 $x \in \Omega$ 及邻近 y_0 的 y 有 $|f_y(x, y)| \leq g(x)$, 则

$$\varphi'(y_0) = \int_{\Omega} f_y(x, y_0) d\mu(x).$$

(iii) 可积性 设 μ 是 σ -有限测度, $f(x, y)$ 在 $\Omega \times Y$ 上关于 $\mu \times m$ 可测 (m 是 Lebesgue 测度), 则当 $f(x, y) \geq 0$ 或 f 关于 $\mu \times m$ 可积时成立

$$\begin{aligned} \int_Y \varphi(y) dy &= \iint_{\Omega \times Y} f(x, y) d(\mu \times m) \\ &= \int_{\Omega} d\mu(x) \int_Y f(x, y) dy. \end{aligned}$$

现在可解决一些问题了. 你将看到大量内容实际、结论深刻的有趣问题. 在经受了抽象测度论这番艰难的体验之后, 相信你会因终于有了实际收获而深感振奋.

二、问题与方法

A. 可积性问题

要判定一可测函数 f 可积, 只需验证以下条件之一:

(i) 可求得 $g \in L^1$, 使得 $|f| \leq g$;

(ii) (对于 $\mu\Omega < \infty$ 的情况) f 有界;

(iii) 可求得有限和分解式 $f = \sum f_i$, 使得 $f_i \in L^1$;

(iv) 可求得级数分解式 $f = \sum_n u_n$, 使得 $\sum_n \int_{\Omega} |u_n| d\mu < \infty$;

(v) (对于 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 且 $\mu = m$) Riemann 积分 $\int_{\Omega} |f| dx < \infty$;

(vi) $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$.

通常优先考虑 (i)~(v), 只有在不得已的情况下, 才直接估计积分

$\int_{\Omega} |f| d\mu$. 即使在这种情况下, 亦不必求出 $\int_{\Omega} |f| d\mu$ (你多半做不到这一点!), 而只要求出某个适当放大的值. 关键的技巧是如何适当放大, 通常是取 Ω 的某个分割 $\Omega = \bigcup A_n$, 然后利用完全可加性.

2.1 设 $f, g, f - g \in L^1(\Omega)$, $f \leq g$, $\varphi \in M(\Omega)$, 则 $\varphi \in L^1(\Omega)$.

提示: 利用分解 $\varphi = f + (\varphi - f)$, 并注意 $0 \leq \varphi - f \leq g - f$.

2.2 设 $f \in L^1(\mathbf{R})$, $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 可微, 则 $x^{-1}f(x) \in L^1(\mathbf{R})$.

证 $x^{-1}f(x)$ 显然在 \mathbf{R} 上可测 (定理 1.3.1). 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可微推出, 当 $\delta > 0$ 充分小时, 在 $[-\delta, \delta]$ 上 $x^{-1}f(x)$ 有界, 因而 Lebesgue 可积. 当 $|x| > \delta$ 时, $|x^{-1}f(x)| \leq \delta^{-1}|f(x)| \in L^1$, 故 $x^{-1}f(x)$ 在 $\mathbf{R} \setminus [-\delta, \delta]$ 上 Lebesgue 可积, 因而 $x^{-1}f(x) \in L^1(\mathbf{R})$.

2.3 设 $f \in M(\Omega)$. 若 $f \in L^1(\Omega)$, 则 $\sum_1^{\infty} \mu\{|f| \geq n\} < \infty$; 当 $\mu\Omega < \infty$ 时反之亦然.

证 令 $A_n = \{|f| \geq n\}$, $B_n = A_{n-1} \setminus A_n$ ($n \geq 1$), 则 B_n 互不相交, 且 $A_n^c = \bigcup_{i=1}^n B_i$. 若 $f \in L^1$, 则 $\mu A_n \leq n^{-1} \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$ (依 (7));

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \mu A_i &= \sum_{i=1}^n i \mu A_i - \sum_{i=1}^n (i-1) \mu A_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} (i-1) \mu A_{i-1} - \sum_{i=1}^n (i-1) \mu A_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (i-1) \mu B_i + n \mu A_n \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f| d\mu + \int_{A_n} |f| d\mu \\
 &= \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty, \quad (\text{可加性})
 \end{aligned}$$

这推出 $\sum_1^\infty \mu A_i < \infty$. 反之, 设 $\sum_1^\infty \mu A_i < \infty$, 且 $\mu\Omega < \infty$, 则

$$\begin{aligned} \int_{A_n^c} |f| d\mu &= \sum_{i=1}^n \int_{B_i} |f| d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^n i \mu B_i = \sum_{i=1}^n i (\mu A_{i-1} - \mu A_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \mu A_i - \sum_{i=1}^n i \mu A_i \\ &\leq \mu\Omega + \sum_{i=1}^{n-1} \mu A_i, \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 推出 $\int_\Omega |f| d\mu \leq \mu\Omega + \sum_1^\infty \mu A_i < \infty$, 即 $f \in L^1$. \square

2.4 设 $\mu\Omega < \infty$, $f \in M(\Omega)$, 则

$$f \in L^1(\Omega) \Leftrightarrow \sum_1^\infty 2^n \mu\{|f| \geq 2^n\} < \infty.$$

提示: 用题 2.3 的证法.

2.5 设 $f \in L^1(\Omega)$, 则 $\mu\{|f| \geq n\} \rightarrow 0$.

提示: 用题 2.3 或直接用不等式 $\mu\{|f| \geq n\} \leq n^{-1} \int_\Omega |f| d\mu$.

2.6 设 $f \in L^1(\Omega)$, 则 $n\mu\{|f| \geq n\} \rightarrow 0$.

证 显然 $\mu\{|f| \geq n\}$ 随 n 单调减. 由 $f \in L^1(\Omega)$ 与题 2.3 有

$\sum_1^\infty \mu\{|f| \geq n\} < \infty$. 设 $\frac{n}{2} \leq m < \frac{n}{2} + 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n \mu\{|f| \geq i\} &\geq (n-m+1) \mu\{|f| \geq n\} \\ &\geq \frac{n}{2} \mu\{|f| \geq n\}, \end{aligned}$$

于是由级数收敛的 Cauchy 条件推出 $n\mu\{|f| \geq n\} \rightarrow 0$. \square

注意题 2.6 蕴涵了题 2.5. 题 2.6 表明, 若 $f \in L^1(\Omega)$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\mu\{|f| \geq n\} = o(1/n)$, 可见 $\mu\{|f| \geq n\}$ 下降得充分快, 非此不足以使 f 可积.

2.7 设 $\mu\Omega < \infty$, $f \in M(\Omega)$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\mu\{|f| \geq \varepsilon\} \leq$

$K\epsilon^{-r}/K$, r 为正常数, 则 $f \in L^1(\Omega)$.

提示: 用题 2.3.

2.8 设 $f(x) = x^{-1/2}$ ($0 < x < 1$), 对其他 $x \in \mathbf{R}$ 令 $f(x) = 0$; $\mathbf{Q} = \{r_n : n \in \mathbf{N}\}$, $g(x) = \sum 2^{-n} f(x - r_n)$. 则 $g \in L^1(\mathbf{R})$; g 在任何区间上无界, g^2 在任何区间上不可积.

证 $f(x)$ 显然是 \mathbf{R} 上的非负可测函数, 且

$$\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} g(x) dx &= \sum_n 2^{-n} \int_{\mathbf{R}} f(x - r_n) dx \quad (\text{用(10)}) \\ &= \sum_n 2^{-n} \int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 2, \end{aligned} \quad (16)$$

可见 $g \in L^1(\mathbf{R})$. 任给开区间 $\Delta \subset \mathbf{R}$, 取定 $r_n \in \Delta$, 则

$$g(r_n^+) \geq 2^{-n} f(0^+) = \infty,$$

可见 g 在 Δ 上无界. 设 $[r_n, r_n + \delta] \subset \Delta$, $0 < \delta < 1$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} g^2(x) dx &\geq 4^{-n} \int_{r_n}^{r_n + \delta} f^2(x - r_n) dx \\ &= 4^{-n} \int_0^{\delta} \frac{dx}{x} = \infty, \end{aligned}$$

可见 g^2 在 Δ 上不可积. □

上题中的函数 $g(x)$ 的表达式并不十分复杂, 但这个例子颇能说明问题: 可积函数 $g(x)$ 竟“处处无界”, 因此必定处处不连续. 这样,

$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx$ 只能看作 Lebesgue 积分, 而不能视为 Riemann 积分. 另一

方面式 (16) 右端的积分 $\int_{\mathbf{R}} f(x - r_n) dx$ 则可看作 Riemann 积分(参考定理 2.1.4), 实际上证明中我们正是对它用了 Riemann 积分的变量代换公式.

2.9 设 $f \in L^1(\mathbf{R})$, $\alpha > 0$, 则 $n^{-\alpha} f(nx) \rightarrow 0$ a. e. ($n \rightarrow \infty$).

提示: 证 $\int_{\mathbf{R}} \sum_n n^{-\alpha} |f(nx)| dx < \infty$.

B. 可积函数的 a. e. 性质

首先考虑一个典型问题.

2.10 设 $f, g \in L^1(\Omega)$, $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ ($\forall A \in \mathcal{A}$), 则 $f = g$,

a. e. .

证 不妨设 $g \equiv 0$ (否则分别以 $f - g$ 与 0 代替 f 与 g). 于是已知

$\int_A f d\mu = 0$ ($\forall A \in \mathcal{A}$), 要证 $f = 0$ a. e. . 为此只要证 $\mu\{f > 0\} = 0$

(同理亦将有 $\mu\{f < 0\} = 0$, 因而 $\mu\{f \neq 0\} = 0$, 即 $f = 0$ a. e.). 令

$A = \{f > 0\}$, 则由 f 可测有 $A \in \mathcal{A}$, 于是由题设条件有

$$0 = \int_A f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_A d\mu, \quad (\text{用(5)})$$

这推出 $f \chi_A = 0$ a. e. (用定理 2.1.1(vii), 注意 $f \chi_A \geq 0$). 但 $f|_A > 0$, 故只能 $\mu A = 0$, 如所要证. \square

让我们初步归纳一下. 设已知 $\forall A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu$ 有某性质 Q , 要证 f 几乎处处有性质 P , 则可令 $A = \{x : f(x) \text{ 不具性质 } P\}$, 由 f 可测推出 $A \in \mathcal{A}$; 由 $\int_A f d\mu$ 有性质 Q 推出 $\mu A = 0$, 从而得所要证.

现在让你自己来尝试一下.

2.11 设 $f, g \in L^1(\Omega)$, $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ ($\forall A \in \mathcal{A}$), 则 $f \leq g$,

a. e. .

提示 证 $\mu\{f > g\} = 0$.

2.12 设 $f \in L^1(\Omega)$, 对任何有界的 $g \in M(\Omega)$ 有 $\int_{\Omega} f g d\mu = 0$,

则 $f = 0$ a. e. .

提示 取 $g = \chi_A$ ($A \in \mathcal{A}$) 并用题 2.10.

2.13 设 $f, g \in L^1(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}$, 在 A 上 $f < g$, 而 $\int_A f d\mu =$

$\int_A g d\mu$, 则 $\mu A = 0$.

提示 对函数 $(g - f) \chi_A$ 应用定理 2.1.1(vii).

2.14 设 $f \in L^1(\Omega)$, 当 $0 < \mu A < \infty$ 时 $-b\mu A \leq \int_A f d\mu \leq b\mu A$, $b > 0$, 则 $|f| \leq b$ a.e..

提示: 证 $\mu\{f > b\} = 0$ 时取 $b < \alpha < \beta < \infty$, 令 $A = \{\alpha < f < \beta\}$, 从 $0 < \mu A < \infty$ 得出矛盾.

题 2.10 2.11 与 2.14 是如下一般问题的特殊情况.

2.15 设 $f \in L^1(\Omega)$, $F \subset \mathbf{R}$ 是闭集, $0 \in F$. 若当 $0 < \mu A < \infty$ 时 $\frac{1}{\mu A} \int_A f d\mu \in F$, 则 $f(x) \in F$ a.e., 即 $\mu(f^{-1}F^c) = 0$.

证 由不等式 (7) 有 $\mu\{|f| \geq 1/n\} \leq n \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$, 而

$$f^{-1}F^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(f^{-1}F^c) \cap \{|f| \geq 1/n\}],$$

故不妨设 $\mu(f^{-1}F^c) < \infty$. 令 $F^c = \bigcup_i \Delta_i$, Δ_i 是 F^c 的构成区间, 则 $f^{-1}F^c = \bigcup_i f^{-1}\Delta_i$. 只要证 $\mu(f^{-1}\Delta_i) = 0$. 令 $A = f^{-1}\Delta_i$, 则 $A \in \mathcal{A}$. 若 $\mu A \neq 0$, 则 $0 < \mu A < \infty$, 从而 $\frac{1}{\mu A} \int_A f d\mu \in F$. 令 $\Delta_i = (a-r, a+r)$, 则在 A 上 $|f-a| < r$, 于是

$$\begin{aligned} r &\leq \left| \frac{1}{\mu A} \int_A f d\mu - a \right| = \left| \frac{1}{\mu A} \int_A (f-a) d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{\mu A} \int_A |f-a| d\mu \leq r, \end{aligned}$$

这推出

$$\int_A |f-a| d\mu = r\mu A = \int_A r d\mu,$$

因而 $\mu A = 0$ (参考题 2.12), 得出矛盾. 因此 $\mu(f^{-1}\Delta_i) = 0$, 如所要证. \square

2.16 设 $f \in M^+(\Omega)$, $\int_{\Omega} f^n d\mu = c (\forall n \in \mathbf{N})$, 则存在 $A \in \mathcal{A}$, 使 $f = \chi_A$ a.e..

证 令 $A = \{f = 1\}$, $B = \{f > 1\}$, $C = \{0 < f < 1\}$, 只要证 $\mu B = 0 = \mu C$. $\forall \alpha \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{c\alpha}{1-\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} c\alpha^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} (\alpha f)^n d\mu \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\alpha f \geq 1\}} (\alpha f)^n d\mu \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{\alpha f \geq 1\}.
\end{aligned}$$

这推出 $\mu\{f \geq \alpha^{-1}\} = \alpha \ (\forall \alpha \in (0, 1))$, 于是 $\mu\{f \geq \beta\} = \alpha \ (\forall \beta > 1)$, 从而 $\mu B = \lim_{\beta \uparrow 1} \mu\{f \geq \beta\} = 0$. 因此

$$c = \int_{\Omega} f^n d\mu = \mu A + \int_C f^n d\mu.$$

因在 C 上 f^n 对 n 严格下降, 故必 $\mu C = 0$ (参考题 2.13). □

C. Levi 定理与 Fatou 定理的应用

Levi 定理与 Fatou 定理的用法比较简单, 而其效果又十分明显, 人们自然乐于使用. 首先, 请你将 Levi 定理稍作推广.

2.17 设 $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$, $g \leq f_n \uparrow f$, 则 $\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$.

提示: 对 $f_n - g$ 用 Levi 定理即得.

2.18 设 $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $0 \leq f_n \uparrow f$, $A_n \uparrow A$, 则 $\int_{A_n} f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$.

提示: 对 $f_n \chi_{A_n}$ 用 Levi 定理.

2.19 求 $\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln \frac{1}{x} dx \ (p > -1)$.

解 展开被积函数后逐项积分:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= - \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+p} \ln x dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{n+p} \ln x dx \quad (\text{用 Levi 定理})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+p}}{n+p+1} dx \quad (\text{分部积分}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

你必然感到,上题的计算似乎全然在微积分学的范围内进行.但其关键性的一步——求和与积分交换,倘不用 Levi 定理,不知如何说明其理由?

$$2.20 \quad \text{求} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx. \quad (= \sum_1^{\infty} 2n^{-3})$$

$$2.21 \quad \text{设 } f, f_n \in L^1(\Omega) \text{ 且 } n \in \mathbf{N}, \int_A f_n d\mu \leq \int_A f_{n+1} d\mu \quad (\forall A \in \mathcal{A}, n \in \mathbf{N}), \int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu \quad (\forall A \in \mathcal{A}), \text{ 则 } f_n \rightarrow f \text{ a.e.}$$

证 首先由题设条件推出 $f_n \leq f_{n+1}$ a.e. ($\forall n \in \mathbf{N}$, 参考题 2.11). 由单调性, 有 $f_n \uparrow g$ a.e., $g \in M(\Omega)$. 由 Levi 定理(参看题 1.17), $\forall A \in \mathcal{A}$, 有 $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A g d\mu$, 因而 $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$. 于是 $f = g$ a.e. (用题 2.10) 故 $f_n \rightarrow f$ a.e. \square

现在转向 Fatou 定理的应用. 首先对它稍作推广.

$$2.22 \quad \text{设 } \{f_n\} \subset M^+(\Omega), f_n \xrightarrow{\mu} f, \text{ 则 } \int_{\Omega} f d\mu \leq \liminf_n \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

证 若结论不真, 则有序列 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得

$$\int_{\Omega} f d\mu > \lim \int_{\Omega} f_{n_i} d\mu.$$

由定理 1.3.3, 不妨设 $f_{n_i} \rightarrow f$ a.e.. 将 Fatou 定理用到 $\{f_{n_i}\}$, 得出矛盾. \square

2.23 设 $\{f_n\} \subset M(\Omega), g \in L^1(\Omega), f_n \geq g$, 则 Fatou 定理的结论成立.

提示 对 $f_n - g$ 用 Fatou 定理(对照题 2.17).

在三个积分收敛定理中, Fatou 定理所需条件最少. 但相应地, 其结论似乎也最弱, 初看起来几乎没有什么利用价值. 其实并非如此. Fatou 定理完全可用来完成一些深刻的论证, 问题在于你如何最大限度

地利用它所提供的信息.

2.24 设 $\{f_n\} \subset L^1(\Omega)$, $\sup_n \int_{\Omega} |f_n| d\mu < \infty$, $f_n \rightarrow f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则 $f \in L^1(\Omega)$.

提示: 对 $|f_n|$ 应用 Fatou 定理即得.

通常认为用 Fatou 定理得不出等式结论. 看了下题以后你应当会另有看法.

2.25 设 $\{f_n\} \subset M^+(\Omega)$, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \in L^1(\Omega)$, $\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$, 则 $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$ ($\forall A \in \mathcal{A}$).

证 取定 $A \in \mathcal{A}$, 由 Fatou 定理有:

$$\begin{aligned} \liminf_n \int_A f_n d\mu &\geq \int_A f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu - \int_{A^c} f d\mu \\ &= \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu - \int_{A^c} f d\mu \\ &\geq \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu - \liminf_n \int_{A^c} f_n d\mu \\ &= \overline{\lim}_n \left(\int_{\Omega} f_n d\mu - \int_{A^c} f_n d\mu \right) \\ &= \overline{\lim}_n \int_A f_n d\mu, \end{aligned}$$

由此得出所要证. □

下面你还会看到应用 Fatou 定理的出色例子(如见题 2.39 与 2.40).

若在 \mathbb{N} 上采用计数测度 μ , 则关于 μ 的积分实际上就是级数和

$$\int_{\mathbb{N}} f(n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

当 $f(n) \geq 0$ 或 $\sum |f(n)| < \infty$ 时, 积分 $\int_{\mathbb{N}} f(n) d\mu$ 有意义. 自然, 对这样的积分同样可用 Levi 定理与 Fatou 定理.

2.26 设 $a_n \geq 0$, $R > 0$, 则 $\lim_{x \uparrow R} \sum_n a_n x^n = \sum_n a_n R^n$.

提示: 设 $x_k \uparrow R$, 对 $f_k(n) = a_n x_k^n$ 用 Levi 定理.

2.27 设 $a_{nk} \geq 0 (n, k = 1, 2, \dots)$, $a_n = \lim_k a_{nk}$, 则

$$\sum_n a_n \leq \lim_k \sum_n a_{nk}$$

提示: 用 Fatou 定理.

D. 控制收敛定理的应用

与其他两个收敛定理比较, 控制收敛定理显得复杂些, 其应用价值也更大. 甚至可以说, 控制收敛定理在一定程度上代表了实变函数论方法的力量. 如果你能成功运用控制收敛定理来解决一些问题, 即使对于实变函数的其他内容不甚了了, 这门课程的学习就不算完全失败. 话说到这里, 对于下面的问题, 你大概不会浑然而过了.

2.28 求 $\lim_n \int_0^\infty \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \sin^5 x \, dx$.

解 以 $f_n(x)$ 记被积函数, 易见 $f_n(x) \rightarrow 0 (x \geq 0, n \rightarrow \infty)$, 于是形式上立得

$$\lim_n \int_0^\infty f_n(x) \, dx = \int_0^\infty \lim_n f_n(x) \, dx = 0. \quad (*)$$

但是, 以上演算的关键步骤——积分与极限交换, 却不能从微积分学中找到简单的依据; 否则, 实变函数论就派不上用场了. 现在来用控制收敛定理. 若 $0 < x \leq 1$, 则

$$|f_n(x)| \leq \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \leq \frac{n\sqrt{x}}{nx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

若 $x > 1$, 则

$$|f_n(x)| \leq \frac{n\sqrt{x}}{n^2x^2} \leq \frac{1}{x^{3/2}}.$$

若令

$$g(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & 0 \leq x \leq 1; \\ x^{-3/2}, & 1 < x < \infty, \end{cases}$$

则在 $[0, \infty)$ 上 $|f_n(x)| \leq g(x)$. 由 $\int_0^1 g(x) \, dx < \infty$ 与 $\int_1^\infty g(x) \, dx < \infty$

∞ 知 $g \in L^1(\mathbf{R}_+)$. 于是, 由控制收敛定理保证式 (*) 为真. □

如上的 g 称为控制函数. 对于控制收敛定理的成功应用, 找到适当控制函数是关键的. 你可通过作如下一组问题练习求控制函数的技巧.

2.29 求 $\lim_n \int_0^\infty \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx$.

解 如同上题一样, 关键在于求得控制函数 $g(x)$. 依上题的经验, 分段考虑. 以 $f_n(x)$ 记被积函数, 则

$$f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{1 + nx^2 + \dots} \leq 1.$$

若 $x > 1$, $n \geq 2$ (注意, 设定 $n \geq 2$ 亦无妨!) 则

$$\begin{aligned} f_n(x) &\leq \frac{n + nx^2}{(1 + x^2)^n} = \frac{n}{(1 + x^2)^{n-1}} \\ &\leq \frac{n}{(n-1)x^2} \leq \frac{4}{x^2}, \end{aligned}$$

这就得到控制函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 4x^{-2}, & x > 1. \end{cases}$$

显然 $g \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 故如同上题一样有

$$\text{原式} = \int_0^\infty \lim_n f_n(x) dx = 0. \quad \square$$

2.30 求 $\lim_n \int_0^\infty \frac{\sin(x/n)}{[1 + (x/n)]^n} dx$. ($= 0$)

提示 控制函数同上题.

2.31 求 $\lim_n \int_0^\infty \left(nx + \frac{1}{x} \right)^{-n} dx$. ($= 0$)

提示 控制函数: $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1; \\ x^{-2}, & x > 1. \end{cases}$

2.32 求 $\lim_n \int_0^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} dx$. ($= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

提示 控制函数同上题.

2.33 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx$. ($= 1$)

提示 控制函数: $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$

2.34 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - a} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n^2 + 1} \quad (|a| \leq 1)$.

证 首先设 $|a| < 1$. 形式的计算给出:

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-(n+1)x} \sin x dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-nx} \sin x dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n^2 + 1} = \text{右端}. \end{aligned}$$

逐项积分的理由基于级数形式的控制收敛定理及以下事实:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |a^{n-1} e^{-nx} \sin x| dx &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a|^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^{n-1}}{n} < \infty. \end{aligned}$$

现在设 $|a| = 1$, 例如设 $a = 1$ ($a = -1$ 时仿此), 则只要证明

$$\begin{aligned} \lim_{a \uparrow 1} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - a} dx &= \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx; \\ \lim_{a \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n^2 + 1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}. \end{aligned}$$

这两个极限式均可用控制收敛定理证明(你试证之!). 因此, 所要证等式对 $|a| \leq 1$ 成立. □

2.35 设 $0 < \alpha < \beta$, $x^\alpha f(x), x^\beta f(x) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 则 $\varphi(s) \triangleq \int_0^{\infty} x^s f(x) dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续.

提示 用定理 2.1.5, 注意 $|x^s f(x)| \leq (x^\alpha + x^\beta) |f(x)|$ ($\alpha \leq s \leq \beta, x \geq 0$).

2.36 求 $I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ ($\alpha \geq 1$).

解 形式地求导得出:

$$I'(\alpha) = - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx = \frac{-1}{1 + \alpha^2}.$$

而用控制收敛定理可得

$$I(\infty) = \int_0^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \, dx = 0,$$

故

$$I(\alpha) = I(\infty) + \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1/\alpha).$$

余下要说明积分号下求导的合理性,为此用定理 2.1.5(ii),注意

$$|e^{-\alpha x} \sin x| \leq e^{-x} \in L^1(\mathbf{R}_+).$$

□

$$2.37 \quad \text{求 } I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x \, dx \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

提示: 求出 $I'(\alpha) = -\alpha I(\alpha)$ 及 $I(\alpha) = \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2/4}$.

下面考虑控制收敛定理的若干推广.

2.38 设 $A_n, A \in \mathcal{A}$, $\mu(A \Delta A_n) \rightarrow 0$, f_n, f 满足控制收敛定理的条件, 则 $\int_{A_n} f_n \, d\mu \rightarrow \int_A f \, d\mu$.

提示: 利用 $\left| \int_{A_n} f_n \, d\mu - \int_A f \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu + \int_{A \Delta A_n} |f| \, d\mu$.

2.39 设 $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $g_n, g \in L^1(\Omega)$ ($\forall n \in \mathbf{N}$), $f_n \rightarrow f$ a.e., $|f_n| \leq g_n \rightarrow g$ a.e., $\int_{\Omega} g_n \, d\mu \rightarrow \int_{\Omega} g \, d\mu$, 则式(12)成立.

证 类似于控制收敛定理之证(参考[16])用 Fatou 定理: 由

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g_n + g \quad \text{a.e.}$$

得 $g_n + g - |f_n - f| \geq 0$ a.e., 于是

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} g \, d\mu &= \int_{\Omega} \lim_n (g_n + g - |f_n - f|) \, d\mu \\ &\leq \liminf_n \int_{\Omega} (g_n + g - |f_n - f|) \, d\mu \\ &= 2 \int_{\Omega} g \, d\mu - \lim_n \int_{\Omega} |f_n - f| \, d\mu, \end{aligned}$$

这推出 $\overline{\lim}_n \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$, 即 (12) 成立. \square

2.40 设 $f, f_n \in L^1(\Omega)$ 且 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \rightarrow f$ a.e., $\int_{\Omega} |f_n| d\mu \rightarrow \int_{\Omega} |f| d\mu$, 则式 (12) 成立.

提示 直接用 Fatou 定理证明 或用题 2.39 取 $g_n = |f_n|$ $g = |f|$.

E. Fubini 定理之应用

Fubini 定理的作用很简单: 用来交换积分顺序. 为使公式 (13) 或 (14) 可行, 你必须首先考虑绝对值函数的积分

$$\int_X d\mu(x) \int_Y |f(x, y)| d\nu(y)$$

或

$$\int_Y d\nu(y) \int_X |f(x, y)| d\mu(x),$$

验证两者之一有限(两者必定相等, 但计算或估计的难度则可能有别). 若 $f(x, y) \geq 0$, 则应用公式 (13) 时已畅通无阻.

2.41 设 X, Y 如定理 2.1.3, $f \in L^1(X)$, $g \in L^1(Y)$, 则

$$\int_{X \times Y} f(x)g(y) d(\mu \times \nu) = \int_X f d\mu \int_Y g d\nu.$$

提示: 只要指明 $|f(x)g(y)| \in L^1(X \times Y)$.

2.42 设 $\mu\Omega < \infty$, $f, g \in M(\Omega)$, 则 $f(x) + g(y) \in L^1(\Omega \times \Omega) \Rightarrow f, g \in L^1(\Omega)$.

提示: 类似于题 2.41.

2.43 求 $\int_0^\infty (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \frac{\cos \gamma x}{x} dx \quad (\alpha, \beta > 0)$.

解 形式地演算得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^\infty \frac{\cos \gamma x}{x} dx \int_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial y} e^{-xy} dy \\ &= \int_0^\infty \cos \gamma x dx \int_\alpha^\beta e^{-xy} dy \\ &= \int_\alpha^\beta dy \int_0^\infty e^{-xy} \cos \gamma x dx \quad (\text{用 Fubini 定理}) \end{aligned}$$

$$= \int_a^\beta \frac{y}{y^2 + \gamma^2} dy = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + \gamma^2}{a^2 + \gamma^2}.$$

余下要验证应用 Fubini 定理的合理性,为此估计

$$\begin{aligned} \int_a^\beta \int_0^\infty |e^{-xy} \cos \gamma x| dx dy &\leq \int_a^\beta dy \int_0^\infty e^{-xy} dx \\ &= \int_a^\beta \frac{dy}{y} < \infty, \end{aligned}$$

可见 Fubini 定理的条件满足. □

2.44 求 $\int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx}) \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b).$

提示:用 Fubini 定理; $\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}.$

2.45 设 $f \in L[0, a]$, 则 $\int_0^a dx \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^a f(x) dx.$

证 用 Fubini 定理化简左端:

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \int_0^a dx \int_x^a \chi_{[x, a]}(t) \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_0^a \frac{f(t)}{t} dt \int_0^a \chi_{[x, a]}(t) dx \\ &= \int_0^a \frac{f(t)}{t} dt \int_0^t dx = \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

验证应用 Fubini 定理的合理性: $g(x, t) \triangleq \frac{f(t)}{t} \chi_{[x, a]}(t)$ 是 $[0, a] \times [0, a]$ 上的可测函数, 且

$$\begin{aligned} &\int_0^a \int_0^a |g(x, t)| dx dt \\ &= \int_0^a \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt \int_0^a \chi_{[x, a]}(t) dx \\ &= \int_0^a |f(t)| dt < \infty. \end{aligned} \quad \square$$

以上方法可用来证明一系列积分公式, 这些公式在微积分学中较强的条件下使用(通常假定被积函数连续). 仿照题 2.45 的证法, 你不难证明:

2.46 设 $f \in L^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^x f(y) dy = \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

2.47 设 $f \in L^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b dx \int_a^b dy \int_x^y f(t) dt = 2 \int_a^b (t-a)(b-t) f(t) dt.$$

2.48 设 $f, g \in L^1[a, b]$, 则

$$\begin{aligned} & \int_a^b g(x) dx \int_a^x f(y) dy \\ &= 2 \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(y) dy - \int_a^b f(x) dx \int_a^x g(y) dy. \end{aligned}$$

2.49 设 $f \in L^1[a, b]$, $\varphi(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$ ($h > 0$), 在 $[a, b]$ 外置 $f = 0$, 则 $\int_a^b |\varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Fubini 定理还可用来证明一些表面上似乎与二重积分无涉的积分公式.

2.50 设 μ 是 σ -有限测度, $f \in M^+(\Omega)$, $\varphi(y) = \mu\{f > y\}$, 则

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_0^{\infty} \varphi(y) dy.$$

证 关键在于将 $\varphi(y)$ 表为积分: $\varphi(y) = \int_{\{f > y\}} d\mu$. 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi(y) dy &= \int_0^{\infty} dy \int_{\{f > y\}} d\mu \\ &= \int_0^{\infty} dy \int_{\Omega} \chi_{\{f > y\}}(x) d\mu(x) \\ &= \int_{\Omega} d\mu(x) \int_0^{\infty} \chi_{\{f > y\}}(x) dy \\ &= \int_{\Omega} d\mu(x) \int_0^{f(x)} dy = \int_{\Omega} f d\mu. \end{aligned}$$

对于应用 Fubini 定理, 唯一要说明的是函数

$$g(x, y) \triangleq \chi_{\{f > y\}}(x)$$

关于 $\mu \times m$ 可测, m 是 Lebesgue 测度. 而这又相当于

$$A \triangleq \{(x, y) \in \Omega \times \mathbf{R} : f(x) < y\}$$

关于 $\mu \times m$ 可测. 利用定理 1.3.2 这是容易说明的. □

仿此, 你试解决类似的问题:

2.51 设 $f, g \in M^+(\Omega)$, $\varphi(y) = \int_{\{g \geq y\}} f d\mu$, μ 是 σ -有限测度, 则 $\int_{\Omega} fg d\mu = \int_0^{\infty} \varphi(y) dy$.

2.52 设 μ 是 σ -有限测度. 用 Fubini 定理推出级数形式的 Levi 定理 (参看定理 2.1.2(i)).

解 设 $\{u_n\} \subset M^+(\Omega)$. 以 ν 记 \mathbf{N} 上的计数测度, 令

$$f(x, n) = u_n(x), \quad ((x, n) \in \Omega \times \mathbf{N})$$

$\forall \alpha \in \mathbf{R}$, 有

$$\begin{aligned} \{f \leq \alpha\} &= \{(x, n) : u_n(x) \leq \alpha\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{u_n \leq \alpha\} \times \{n\}), \end{aligned}$$

可见 $\{f \leq \alpha\}$ 关于 $\mu \times \nu$ 可测, 因而 $f \in M^+(\Omega \times \mathbf{N})$. 于是由 Fubini 定理有

$$\int_{\Omega} d\mu(x) \int_{\mathbf{N}} f(x, n) d\nu(n) = \int_{\mathbf{N}} d\nu(n) \int_{\Omega} f(x, n) d\mu(x),$$

这就是等式 (10). □

类似地, 你能够证明:

2.53 设 μ 是 σ -有限测度, 则可从 Fubini 定理推出级数形式的控制收敛定理.

这样, 积分学中最主要的定理——关于积分与求和互换及积分与积分互换的定理, 就在 Fubini 定理的形式下统一起来了. 这种建立在测度论基础上的高度的统一性, 是 Riemann 积分所无法比拟的.

F. 其他问题

2.54 设 $\mu\Omega < \infty$, $f \in M^+(\Omega)$ a.e. 有限, $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n \rightarrow \infty$, $\delta = \max \Delta y_n$, $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$, 则

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum y_n \mu \{y_{n-1} \leq f < y_n\}.$$

提示: 令 $e_n = \{y_{n-1} \leq f < y_n\}$, 指明

$$\sum_n y_n \mu e_n - \delta \mu \Omega \leq \int_{\Omega} f d\mu \leq \sum_n y_n \mu e_n.$$

2.55 设 $\mu\Omega < \infty$, $A_i \in \mathcal{A}$ ($1 \leq i \leq n$), 每个 $x \in \Omega$ 至少属于 q 个 A_i , 则有某个 $\mu A_i \geq (q/n)\mu\Omega$.

证 关键是将所给条件表成 $\sum \chi_{A_i} \geq q$, 从而有

$$\begin{aligned} q\mu\Omega &\leq \int_{\Omega} \sum_i \chi_{A_i} d\mu \\ &= \sum_i \int_{\Omega} \chi_{A_i} d\mu = \sum_i \mu A_i, \end{aligned}$$

由此推出要证结论. □

2.56 设 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $\sum \mu A_n < \infty$, 则几乎每个 $x \in \Omega$ 至多属于有限个 A_n .

提示: $\sum \int_{\Omega} \chi_{A_n} d\mu < \infty \Rightarrow \sum \chi_{A_n} < \infty$ a. e. .

2.57 设 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, $B = \{x \in \Omega : x \text{ 至少属于 } k \text{ 个 } A_n\}$, 则 $\mu B \leq k^{-1} \sum \mu A_n$.

提示: 利用 $\sum \chi_{A_n}|_B \geq k$, 参照题 2.55.

2.58 设 μ 是 Ω 上的计数测度, $f \in L^1(\Omega)$, 则存在可数集 $\{x_n\} \subset \Omega$, 使得 $\int_{\Omega} f d\mu = \sum f(x_n)$.

证 令 $A_k = \{|f| \geq 1/k\}$, 则 $\mu A_k \leq k \int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$ (用(7)), 因而 A_k 是有限集, 这推出 $A = \bigcup A_k = \{f \neq 0\}$ 是可数集. 令 $A = \{x_n\}$, 则

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_A f d\mu = \sum_n f(x_n). \quad \square$$

2.59 设 f, g 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 在 $[a, b]$ 的某稠密子集上 $f = g$, 则 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

提示:由 f, g 几乎处处连续及题设条件推出 $f = g$ a.e., 然后用定理 2.1.4.

2.60 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有限实函数, 其间断点集 D 只有可数个极限点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

提示:用定理 2.1.4, 注意 D 是可数集(用题 1.23).

2.61 设 $f_n (n = 1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 上(常义) Riemann 可积, $f_n \Rightarrow f$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.

证 设 D_n 是 f_n 的间断点集, $D = \bigcup D_n$, 则 $mD = 0$. $\forall x \in [a, b] \setminus D$, 由

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

看出 f 在 x 连续, 故 f 在 $[a, b]$ 上 a.e. 连续且有界, 因此 Riemann 可积. \square

2.62 设 $0 < f \in L^1(\Omega)$, $0 < q \leq \mu\Omega < \infty$, 则

$$\inf_{\mu A \geq q} \int_A f d\mu > 0.$$

证 用反证法. 若 $\inf_{\mu A \geq q} \int_A f d\mu = 0$, 则有 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, 使得 $\mu A_n \geq q$,

$\int_{A_n} f d\mu < 2^{-n}$. 令 $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$, $\mu A = \bigcap_n \mu B_n$, 则 $B_n \downarrow A$, 于是

$$\mu A = \lim_n \mu B_n \geq \liminf_n \mu A_n \geq q;$$

$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_{B_n} f d\mu \leq \overline{\lim}_n \sum_{k \geq n} \int_{A_k} f d\mu \leq \lim_n \sum_{k \geq n} 2^{-k} = 0$$

(其中用了定理 1.2.1(iii)与定理 2.1.1(v)), 注意 $\mu\Omega < \infty$ 与 $f \in L^1(\Omega)$. 因此 $\int_A f d\mu = 0$, 而这推出 $\mu A = 0$ (用题 2.13 与 $f > 0$), 得出矛盾. \square

2.63 设 $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $f_n \rightarrow f$ a.e., $|f_n| \leq g \in L^1(\Omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, 则 $f_n \rightarrow f$ a.u..

证 令 $A_{nk} = \{|f_n - f| \geq 1/k\}$, 则

$$\{f_n \not\rightarrow f\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\lim_n A_{nk}},$$

于是由 $\mu\{f_n \not\rightarrow f\} = 0$ 推出 $\mu(\overline{\lim_n A_{nk}}) = 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). 因

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq N} A_{nk}\right) &\leq \mu\{2g \geq 1/k\} \quad (\text{用 } |f_n - f| \leq 2g \text{ a. e.}) \\ &\leq 2k \int_{\Omega} g d\mu < \infty \quad (\text{用 (7)}) \end{aligned}$$

故

$$0 = \mu(\overline{\lim_n A_{nk}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq N} A_{nk}\right). \quad (\text{定理 1.2.1(iii)})$$

取定 $\delta > 0$, 依次取 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq N} A_{nk}\right) < \delta 2^{-k}. \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

令 $A_{\delta} = \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq n_k} A_{nk}^c$, 则

$$\mu A_{\delta}^c = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq n_k} A_{nk}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

当 $x \in A_{\delta}$, $n \geq n_k$ 时 $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$), 可见在 A_{δ} 上 $f_n \rightarrow f$. 因此 $f_n \rightarrow f$ a. u. □

§ 2.2 微分与不定积分

一、定理与定义

本节包含互相联系的两个内容: 微分与不定积分. 关于微分, 尤其是一元函数的微分, 似乎微积分学中已作了彻底研究, 没什么好说的了. 其实远非如此. 除了熟知的初等函数外, 我们甚至说不上哪几类函数的可微性已经研究清楚. 正是在实变函数中, 借助于集论与测度论方法, 彻底解决了一些常用函数类——单调函数、有界变差函数与绝对连续函数——的可微性问题. 这曾被认为是测度论方法的辉煌成果之一. 至于不定积分, 更值得多说几句. 在上节中, 我们以不多的篇幅概括了积分学的主要结果. 就一般测度空间上的积分而言, 除了某些方面还需适当展开之外, 你所需要的知识, 大体上就是这些了. 如果限于考虑

Euclid 空间上的积分,尤其是区间上的积分,那么,你会明显地感到已学到的东西还远远不够.熟知的定积分公式——Newton-Leibniz 公式、变量代换公式与分部积分公式,对于 Lebesgue 积分都还没有提到,缺少这些内容的积分理论当然是不完全的.我们希望,这些积分公式不仅可用于 Lebesgue 积分,而且其适用条件能得到更准确的刻画.在本节中对 Newton-Leibniz 公式的处理完全满足了这一要求.如同在微积分学中一样,对于 Lebesgue 积分,Newton-Leibniz 公式也是和不定积分联系在一起的.

以下设 $J = [a, b]$ 是给定的有限区间,当提到函数 f, g, f_n 等而未特别说明时,都假定它们是 J 上的有限实函数,且自动地认定 $f(x) = f(a) \text{ (} x < a \text{)}, f(y) = f(b) \text{ (} y > b \text{)}$. 当说 $\{x_i\}$ 是区间 J 的一个分割时,意味着

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b. \quad (1)$$

对应于分割 (1) 约定

$$\begin{cases} \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, & \Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \\ \Delta f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1}) \quad (1 \leq i \leq n). \end{cases} \quad (2)$$

定义 2.2.1 (i) 对 J 上的任何有限实函数 $f(x)$, 令

$$V_a^b(f) = \sup \sum_i |\Delta f(x_i)|, \quad (3)$$

其中上确界是对 J 的所有可能的分割 $\{x_i\}$ 而取的. 称 $V_a^b(f)$ 为 f 在 J 上的全变差. 若 $V_a^b(f) < \infty$, 则称 $f(x)$ 为 J 上的有界变差函数.

(ii) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 (a_k, b_k) 是 J 中有限个互不相交的区间且 $\sum (b_k - a_k) < \delta$ 时, 恒有

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon,$$

则说 $f(x)$ 在 J 上绝对连续.

(iii) 若存在正常数 k , 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y| \quad (\forall x, y \in J),$$

则称 $f(x)$ 为 J 上的 Lipschitz 函数.

为方便起见, 分别以 BV, AC, Lip 与 C^1 记有界变差函数类、绝对

连续函数类、Lipschitz 函数类与连续可微函数类. 各类函数之间的相互关系如下:

$$C^1 \subset \text{Lip} \subset \underset{C}{\text{AC}} \subset \underset{M}{\text{BV}} \subset B$$

其中 B, C, M 分别记有界函数类、连续函数类与单调函数类(这一规定仅在此处使用).

以下定理汇集了 BV 类函数与 AC 类函数的基本性质.

定理 2.2.1 (i) 运算性质: $f \in \text{BV} \Leftrightarrow f$ 是两增函数之差; $f, g \in \text{BV} \Rightarrow f + g, fg \in \text{BV}$; $f, g \in \text{AC} \Rightarrow f + g, fg \in \text{AC}$; $f \in \text{AC}$ 且 $|f| > 0 \Rightarrow 1/f \in \text{AC}$.

(ii) 连续性: 若 $f \in \text{BV}$, 则 f 至多有可数多个间断点, 且只能有第一类间断点.

(iii) 可微性: 若 $f \in \text{BV}$, 则 f 几乎处处可微, 且 $f' \in L^1$; 若 $f(x)$ 是增函数, 则 $\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$.

对于以上定理的理解, 可作如下说明. 首先, 若 $f(x)$ 是增函数, 则显然 $f(x)$ 描述了一种相对稳定的变化. 它可能出现突变, 那就是在间断点 x 处突然跳跃了高度 $f(x^+) - f(x^-)$. 但这种跳跃受到总的限制:

$$\sum_{a \leq x \leq b} [f(x^+) - f(x^-)] \leq f(b) - f(a),$$

因而跳跃不可能太多, 且不能太剧烈. 可见, $f(x)$ 至多有可数多个间断点是理所当然的. 至于可微性, 从增函数的变化相对稳定的特征来看, 其较好的可微性似乎是必然的. 然而, 像“几乎处处可微且导数可积”这样深刻的结论, 则远远不是通常的直观想象所可断言的, 而是精细的测度论分析的结果. 这些结果的获得, 正是测度论方法远远优于传统方法的辉煌例证. 这就决定了我们对定理 2.2.1 的深刻性给予充分的评价. 但从另一角度来看, 我们对定理 2.2.1 的评价就很有保留了. 问题在于, 既然有界变差函数与绝对连续函数都可以表为增函数之差, 因而二者自然继承了增函数的连续性与微分性质. 除此之外, 定理

2.2.1 并没有指明,在微分性质方面,绝对连续函数有什么可区别于单调函数或有界变差函数的特征.就此而言,定理 2.2.1 基本上还局限在增函数的理论范围内.关键的突破是由下面的定理完成的.

定理 2.2.2 若 $g \in L^1(J)$, 则不定积分

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt$$

是 J 上的绝对连续函数,且 $f' = g$ a. e. .

定理 2.2.3 对于 J 上的有限实函数 $f(x)$, 以下条件互相等价:

(i) $f \in AC$;

(ii) 存在 $g \in L^1(J)$, 使得 $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$;

(iii) $f(x)$ 在 J 上 a. e. 可微, $f' \in L^1$, 且成立如下的 Newton-Leibniz 公式:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad (4)$$

或

$$\int_a^x f'(t) dt = f(t) \Big|_a^x \quad (a \leq x \leq b).$$

让我们将以上结果与微积分学中的类似结论对照一下. 若 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则在微积分学中仅可断言, $f(x) = \int_a^x g(t) dt$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且在 $g(x)$ 的连续点 x 处成立 $f'(x) = g(x)$. 至于 Newton-Leibniz 公式 (4) 成立的条件, 在微积分学中是这样的: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微 (至多除去有限个例外点), 且 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. 通常, 以上条件由 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 (这意味着 $f \in C^1$) 来保证, 这就大大强于定理 2.2.3 中的条件. 由此可见, 定理 2.2.2 与 2.2.3 显著地改进了微积分学中的结果. 而且, 对于公式 (4) 成立给出充要条件意味着, 在 Lebesgue 积分论的框架内, Newton-Leibniz 公式在什么条件下成立的问题被彻底解决了.

你大概已注意到, 定理 2.2.2 留下了一个明显缺陷: 它不能回答

$f(x) = \int_a^x g(t) dt$ 在什么点可微的问题。“ $f(x)$ 在 $g(x)$ 的连续点 x 可微”这一结论即使成立(下面将指明它确实成立),也远远不够,因可积函数 g 可以处处不连续!通过引进 Lebesgue 点概念,上述问题在一定程度上获得了解决.

定义 2.2.2 设 $g \in L^1(J)$. 若 $x \in J$ 满足

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |g(t) - g(x)| dt = 0,$$

则称 x 为 g 的 Lebesgue 点,或简称 L -点.

定理 2.2.4 设 $g \in L^1(J)$, 则有以下结论成立:

- (i) 几乎所有 $x \in J$ 是 g 的 L -点;
- (ii) g 的连续点必是 L -点;
- (iii) 若 x 是 g 的 L -点, 则成立

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x).$$

涉及本节内容的问题可分为两类. 其一是利用定理 2.2.1~2.2.4 的结论来解决的问题, 它们可能不需要太多的技巧, 但因其体现了你所学到的理论的价值, 仍应是关注的重点. 另一类问题则直接基于本节概念的定义, 或者基于得出定理 2.2.1~2.2.4 的那些方法, 对于这些方法的理解与掌握, 解决一些与之相关的问题必定是有益的.

二、问题与方法

A. 增函数问题

增函数似乎很简单, 但它是微分理论的出发点, 有些结论有出人意料的深刻性, 因此并不乏难题. 首先让我们综合一下增函数的性质. 若 $f(x)$ 是 J 上的有限增函数, 则

- (i) $f(x)$ 在 J 上至多有可数多个间断点且只有第一类间断点; 当 $a < x < y < z \leq b$ 时有

$$f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+) \leq f(y) \leq f(z^-). \quad (5)$$

- (ii) $f(x)$ 在 J 上 a. e. 可微, $0 \leq f' \in L^1(J)$, 且

$$f(x) \geq f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad (x \in J). \quad (6)$$

2.64 设增函数 f, g 在某个稠密集 $A \subset J$ 上相等, 则 f 与 g 有相同的连续点与可微点, 且 $f' = g'$ a.e..

证 直接看出 $f(x^\pm) = g(x^\pm) \quad (\forall x \in J)$, 因此 f 与 g 有相同的连续点, 且在连续点 x 必有 $f(x) = g(x)$. 其次证 $f'(x)$ 存在 $\Rightarrow g'(x) = f'(x)$; 为此又只要证:

$$f'_+(a) \text{ 存在} \Rightarrow g'_+(a) = f'_+(a);$$

$$f'_-(b) \text{ 存在} \Rightarrow g'_-(b) = f'_-(b).$$

不妨只证前者. 设 $f'_+(a)$ 存在, 今证

$$\overline{\lim}_{x \downarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq f'_+(a) \leq \underline{\lim}_{x \downarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

(上式显然推出 $g'_+(a) = f'_+(a)$). 不妨只证其中的第一个不等式. 为此, 又只要对任给 $\beta > 1$, 证

$$\overline{\lim}_{x \downarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \beta f'_+(a).$$

$\forall x \in (a, b)$, 取 $\xi_x \in A \cap (x, b)$, 使得 $\xi_x - a < \beta(x - a)$, 则

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \overline{\lim}_{x \downarrow a} \beta \frac{f(\xi_x) - f(a)}{\xi_x - a} = \beta f'_+(a),$$

即如所要证. □

值得注意的是, 以上证明中, 只有最后一步是实质性的, 前面一大段不过是反复地将所要证结论归化到愈来愈特殊的情况而已. 这种归化最大限度地简化了问题, 你务必细加体会. 此处及今后我们都尽可能将在 $x \in [a, b]$ 处的论证归化到端点去. 端点看似特殊, 但 x 不正是区间 $[a, x]$ 与 $[x, b]$ 的端点吗?

2.65 设 $Q = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}, \alpha_n > 0, \sum \alpha_n < \infty, f(x) = \sum_{r_n \leq x} \alpha_n$,

则 $f(x)$ 是严格增函数, 且恰以 Q 为其间断点集.

提示 注意 $f(y) - f(x) = \sum_{x < r_n \leq y} \alpha_n \quad (x < y)$.

式(6)相当于将(4)中的等号换成了不等号, 这正是增函数与绝对

连续函数的差别所在. 不等式 (6) 所含的信息自然远弱于 (4), 似乎价值不大. 但下面的问题表明 (6) 仍可能推出一些很强的结论, 关键在于你如何适当地运用它. 首要的建议是: 对于涉及增函数的问题, 你不应忽略了不等式 (6)!

2.66 设 $f(x)$ 是增函数, $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$, 则 $f \in AC$.

证 显然要做的是从所给等式与 (6) 推出 (4):

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\geq \int_a^x f'(t) dt && (\text{用 (6)}) \\ &= \int_a^b f'(t) dt - \int_x^b f'(t) dt \\ &\geq f(b) - f(a) - [f(b) - f(x)] && (\text{用 (6)}) \\ &= f(x) - f(a) \quad (a \leq x \leq b), \end{aligned}$$

这正好得出 (4), 如所要证. □

2.67 设 $f(x)$ 是增函数, 则 $f = g + h$, g, h 是增函数, $g \in AC$, $h' = 0$ a.e..

提示: 令 $g(x) = \int_a^x f'(t) dt$, 用定理 2.2.2 与 (6).

2.68 设 $f_n (n \in \mathbf{N})$ 是增函数, $f(x) = \sum f_n(x)$ 处处有限, 则 $f' = \sum f'_n$ a.e..

证 令 $F_n = \sum_1^n f_i$, $f = F_n + \varphi_n$, 则 F_n, φ_n 都是有限增函数, $f' = F'_n + \varphi'_n$ a.e., $F'_n = \sum_1^n f'_i$, 故只要证 $\varphi'_n \rightarrow 0$ a.e.. 因 F'_n 对 n 递增, 故 φ'_n 对 n 递减, 因此只要对适当的 $n_1 < n_2 < \dots$ 证 $\varphi'_{n_k} \rightarrow 0$ a.e., 为此只要有 $\sum_k \varphi'_{n_k} < \infty$ a.e.. 注意

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_k \varphi'_{n_k} dx &= \sum_k \int_a^b \varphi'_{n_k} dx && (\text{用 Levi 定理}) \\ &\leq \sum_k [\varphi_{n_k}(b) - \varphi_{n_k}(a)], && (\text{用 (6)}) \end{aligned}$$

故只要选择 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得 $|\varphi_{n_k}(b)| < k^{-2}$, $|\varphi_{n_k}(a)| < k^{-2}$ 即可. 因 $\varphi_n(x) \rightarrow 0 \ (\forall x \in J)$, 这显然是可行的. □

2.69 设 $f(x)$ 是增函数, $f(x) = \varphi(x) + s(x)$, $s(x)$ 是跳跃函数:

$$s(x) = \sum_{\xi < x} [f(\xi^+) - f(\xi^-)] + f(x) - f(x^-),$$

则 $f' = \varphi' \text{ a.e.}$.

证 只要证 $s' = 0 \text{ a.e.}$. 分解 s 为 $g + h$,

$$g = \sum_{\xi} [f(\xi^+) - f(\xi^-)] \chi_{(\xi, \infty)}, h(x) = f(x) - f(x^-).$$

则由题 2.68 得 $g' = 0 \text{ a.e.}$. 因 $f(x^-)$ 显然亦为增函数, 且 $f(x) = f(x^-) \text{ a.e.}$, 故由题 2.64 有 $h' = 0 \text{ a.e.}$. 因此 $s' = 0 \text{ a.e.}$. \square

下面的问题推广了定理 2.2.1(ii).

2.70 设 f 是有限实函数, 则 f 至多有可数多个第一类间断点.

证 令 $D_n = \{x : |f(x^+) - f(x^-)| > 1/n\}$, 则 $\bigcup D_n$ 是 f 的第一类间断点集. 只要证每个 D_n 可数. 固定 $n \in \mathbb{N}$, 若 D_n 不可数, 则必有一个 $x \in D_n$ 不是孤立点 (用题 1.22). 取 $\{x_k\} \subset D_n$, 使 $x \neq x_k \rightarrow x$, 不妨设 $x_k \uparrow x$. 取 $y_k \leq x_k \leq z_k < x$, 使得

$$|y_k - z_k| < 1/k, |f(y_k) - f(z_k)| > 1/n.$$

显然 $y_k, z_k \rightarrow x$. 因 $f(x^-)$ 存在, 故必 $f(y_k) - f(z_k) \rightarrow 0$, 这就得出矛盾. 因此 D_n 可数, 如所要证. \square

B. 有界变差函数问题

首先是判定有界变差函数的问题. 若能找到常数 β , 使得对 J 的任何分割 $\{x_i\}$, 都有 $\sum |\Delta f(x_i)| \leq \beta$, 则有 $f \in \text{BV}$. 所涉及的 $\sum |\Delta f(x_i)|$ 是一个有限和式, 对其进行估计通常是不困难的.

2.71 设 $\beta \triangleq \sup_{a < c < b} V_c^b(f) < \infty$, 则 $f \in \text{BV}$.

证 $\forall x \in (a, b)$, 有

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(b)| + |f(x) - f(b)| \\ &\leq |f(b)| + V_x^b(f) \leq |f(b)| + \beta. \end{aligned}$$

任给形如 (1) 的分割 $\{x_i\}$, 有 (记号依 (2), 下同)

$$\sum_{i=1}^n |\Delta f(x_i)| \leq |\Delta f(x_1)| + \sum_{i=2}^n |\Delta f(x_i)|$$

$$\leq |f(a)| + |f(b)| + \beta + V_{x_1}^b(f)$$

$$\leq |f(a)| + |f(b)| + 2\beta,$$

这表明 $f \in BV$. □

2.72 设 $\sup_{a < c < b} V_a^c(f) < \infty$, 则 $f \in BV$. 若我们把条件改成

$\sup_{a < c < d < b} V_c^d(f) < \infty$, 结论将如何?

提示: 用 2.71 的证法, 条件减弱后结论仍保持.

2.73 设 $\beta \triangleq \sup_n V_a^b(f_n) < \infty$, $f_n(x) \rightarrow f(x) (\forall x \in J)$, $f(x)$

是有限函数, 则 $f \in BV$.

证 任取一个分割 $\{x_i\}$, 有

$$\sum_i |\Delta f_k(x_i)| \leq V_a^b(f_k) \leq \beta. \quad (\forall k \in \mathbf{N})$$

固定 $\{x_i\}$ (这是要点!), 令 $k \rightarrow \infty$, 得

$$\sum_i |\Delta f(x_i)| \leq \beta.$$

回复到 $\{x_i\}$ 的任意性, 得 $f \in BV$. □

2.74 设 f 连续, 则 $f \in BV \Leftrightarrow |f| \in BV$.

证 令 $g = |f|$, 实际上可证 $V_a^b(f) = V_a^b(g)$. 显然 $V_a^b(f) \geq V_a^b(g)$. 其次, 任给分割 $\{x_i\}$, 当 $f(x_{i-1})f(x_i) \geq 0$ 时有 $|\Delta f(x_i)| = |\Delta g(x_i)|$; 若 $f(x_{i-1})f(x_i) < 0$, 则有 $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 于是

$$|\Delta f(x_i)| = |g(\xi) - g(x_{i-1})| + |g(x_i) - g(\xi)|.$$

将这样的 ξ 加入分点之后, 得 $\sum |\Delta f(x_i)| \leq V_a^b(g)$, 从而 $V_a^b(f) \leq V_a^b(g)$. □

2.75 设 $f \in BV$, $g \in \text{Lip}$, 则 $g \circ f \in BV$.

提示: 设 $\varphi = g \circ f$, 则 $|\Delta \varphi(x_i)| \leq \text{const} |\Delta f(x_i)|$.

2.76 设 $f \in BV$, 则 $f(x)$ 与 $\pi(x) \triangleq V_a^x(f)$ 有同样的连续点.

证 $\pi(x)$ 显然是增函数, 且

$$|f(x) - f(y)| \leq |\pi(x) - \pi(y)| \quad (x, y \in J). \quad (7)$$

令 $y \downarrow x$ 或 $y \uparrow x$, 从上式得 $|f(x) - f(x^\pm)| \leq |\pi(x) - \pi(x^\pm)|$.

因此, 当 π 在点 x 连续时 f 亦必在 x 连续.

为证逆命题, 不妨只证以下两件事(参考题 2.64):

$$\begin{aligned} f(a) = f(a^+) &\Rightarrow \pi(a^+) = 0; \\ f(b) = f(b^-) &\Rightarrow \pi(b) = \pi(b^-). \end{aligned} \quad (*)$$

两者的证明是类似的, 不妨只证 (*). $\forall \varepsilon > 0$, 取 J 的分割 $\{x_i\}$, 使得 $\sum |\Delta f(x_i)| > V_a^b(f) - \varepsilon$. 由 $f(a) = f(a^+)$, $\exists c > a$, $\forall x \in (a, c)$, 有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. 取定 $x \in (a, c)$, 不妨设 $x < x_1$, 有

$$\begin{aligned} \pi(x) &= V_a^b(f) - V_x^b(f) \\ &< \sum_{i=1}^n |\Delta f(x_i)| + \varepsilon - [|f(x_1) - f(x)| + \sum_{i=2}^n |\Delta f(x_i)|] \\ &= |\Delta f(x_1)| + \varepsilon - |f(x_1) - f(x)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

这得出 $\pi(a^+) = 0$, 即如所要证. □

2.77 设 $f \in BV$, 则 $\int_a^b |f'(x)| dx \leq V_a^b(f)$.

提示: 用 (7) 推出 $|f'| \leq \pi'$ a.e., 然后用 (6).

C. 绝对连续函数问题

绝对连续函数与有界变差函数固然差别甚大, 但其定义亦有一定程度的类似: 二者都涉及函数在一组区间上的增量绝对值之和. 因此, 可提出一些类似的问题.

2.78 设 $f \in AC$, $g \in Lip$, 则 $g \circ f \in AC$.

提示: 参照题 2.75.

2.79 设 $f \in AC$, 则 $|f|^p \in AC$ ($p \geq 1$).

提示: $g(x) = |x|^p$ 在有限区间上为 Lipschitz 函数.

2.80 设 $g, f \in AC$, f 严格单调增, 则 $g \circ f \in AC$.

提示: 利用绝对连续的定义.

绝对连续性的定义逻辑上并不复杂, 但其表述有点繁琐, 而且直接验证其条件也不总是容易的. 因此, 应尽可能利用不直接依靠定义的其他方法, 而定理 2.2.2 与 2.2.3 正为此提供了依据. 下面我们把重点放

在这些定理的应用.

2.81 设 $f(x)$ 在任何区间 $[a, c] \subset [a, b]$ 上绝对连续, 且在点 b 左连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续.

证 由题设条件及定理 2.2.3 得出

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt. \quad (a \leq x < b)$$

令 $x \rightarrow b$ 得 $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$. 这就表明, 式(4)在 $[a, b]$ 上成立, 因而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为绝对连续函数. \square

上题亦可利用绝对连续的定义来证明 (你不妨一试!), 但未必能如此简捷.

2.82 设 $f \in C[a, b]$ 在 (a, b) 内可微, 至多有限个点例外; $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则 $f \in AC$.

提示: 依 Riemann 积分, 式(4)在 $[a, b]$ 上成立.

2.83 设 $f(x) = x^\alpha \sin x^{-\beta}$ ($0 < x \leq 1$), $\alpha, \beta > 0$, $f(0) = 0$. 讨论 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的绝对连续性.

解 $f(x)$ 显然在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1]$ 上连续可微, 且

$$f'(x) = x^{\alpha-\beta-1}(\alpha x^\beta \sin x^{-\beta} - \beta \cos x^{-\beta}).$$

若 $\alpha - \beta - 1 > -1$, 即 $\alpha > \beta$, 则 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上可积. 利用通常的 Newton-Leibniz 公式有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt. \quad (0 < a \leq x \leq 1)$$

令 $a \rightarrow 0$, 注意 f 连续及 $f' \in L^1[0, 1]$, 得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt. \quad (0 \leq x \leq 1)$$

可见 $f \in AC$. 若 $\alpha \leq \beta$, 则

$$|f'(x)| \geq \beta x^{\alpha-\beta-1} |\cos x^{-\beta}| - \alpha x^{\alpha-1}.$$

故 $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx < \infty$, 而

$$\beta \int_0^1 x^{\alpha-\beta-1} |\cos x^{-\beta}| dx$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{|\cos t|}{t^{a/\beta}} dt \quad (t = x^{-\beta})$$

$$\geq \int_1^{\infty} \frac{\cos^2 t}{t} dt = \infty,$$

故 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上不可积, 从而 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非有界变差函数, 因此不是绝对连续函数. \square

2.84 作 $g, f \in AC$, 使 $g \circ f \in AC$.

提示: 如令 $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x^3 \cos^3(\pi/x)$, $f(0) = 0$, 则在 $[-1, 1]$ 上 $g \in AC$, 在 $[0, 1]$ 上 $f \in AC$, 而 $g \circ f \in AC$. 参照题 2.83.

2.85 设 $f \in L^1(J)$, $\int_a^c f(x) dx = 0 \quad (\forall c \in J)$, 则 $f = 0$ a.e..

证 直接应用定理 2.2.2 立得

$$0 = \frac{d}{dt} \int_a^x f(t) dt = f(x) \text{ a.e.} \quad \square$$

上题是不定积分理论导向最简单解法的一个典型例证. 如果停留在先前所习惯的思路, 你可能会试图去证明 $\int_A f dm = 0 \quad (A \subset J \text{ 可测})$, 然后用题 2.10. 这固然能够成功, 但需要一个颇繁的测度论证. 这里如同在其他情况下一样, 基本的经验是: 若要证一个结论, 你永远要最优先考虑利用最接近该结论的已知定理. 尤其是那些深刻的基本定理 (定理 2.2.2 与 2.2.3 应在其列), 它们往往吸收了解决许多具体问题所遇到的困难, 若弃而不用, 那你就只有直接面对那些困难了.

鉴于上述考虑, 你会特别惦记着应用定理 2.2.2 与 2.2.3 了.

2.86 设 $f_n \in AC$, $\sum \int_a^b |f'_n(x)| dx < \infty$, $\sum f_n(x)$ 在某点 $c \in J$ 收敛, 则 $f = \sum f_n \in AC$ 且 $f' = \sum f'_n$ a.e..

证 应用 Newton-Leibniz 公式 (4) 得

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t) dt. \quad (x \in J, n \in \mathbf{N})$$

形式上两边对 n 求和得:

$$f(x) = f(c) + \int_c^x \sum_n f'_n(t) dt. \quad (x \in J)$$

然后应用定理 2.2.3 与 2.2.2 立得 $f \in AC$ 且 $f' = \sum_n f'_n$ a. e. . 余下的问题是确证 $\sum f_n$ 与 $\sum f'_n$ 收敛. 首先, 由 $\sum_n \int_a^b |f'_n(x)| dx < \infty$ 推出 $\sum_n |f'_n| < \infty$ a. e. (参考定理 2.1.2 iii)) 且

$$\int_c^x \sum_n f'_n(t) dt = \sum_n \int_c^x f'_n(t) dt.$$

其次, 由上式右端级数收敛与 $\sum f'_n(c)$ 收敛推出 $\sum_n f'_n(x)$ ($x \in J$) 必收敛. □

对于上题, 若要避开 Newton-Leibniz 公式而试图去直接证明 $\sum f_n$ 与 $\sum f'_n$ 收敛, 你就多半会陷入困境.

2.87 设 $f_n \in AC$, $|f'_n| \leq g \in L^1(J)$ ($n = 1, 2, \dots$), $f_n \rightarrow f$, $f'_n \rightarrow \varphi$ a. e., 则 $f \in AC$ 且 $f' = \varphi$ a. e. .

提示: 类似于上题, 利用 Newton-Leibniz 公式与控制收敛定理.

2.88 设 $f \in AC$, $f' \geq 0$ a. e., 则 f 单调增.

提示: 用 Newton-Leibniz 公式.

2.89 设 $f_n \in AC$ ($n = 1, 2, \dots$) 单调增, $f(x) = \sum f_n(x)$ 是有限函数, 则 $f \in AC$ 且 $f' = \sum f'_n$ a. e. .

证 由 f_n 单调增有 $f'_n \geq 0$ a. e. ($\forall n \in \mathbb{N}$). 于是对 $x \in J$ 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n f_n(x) \\ &= \sum_n f_n(a) + \sum_n \int_a^x f'_n(t) dt \quad (\text{用(4)}) \\ &= f(a) + \int_a^x \sum_n f'_n(t) dt. \quad (\text{用 Levi 定理}) \end{aligned}$$

因 $f(x)$ 有限, 故必 $\sum f'_n \in L^1(J)$, 于是由上式及定理 2.2.3 与 2.2.2 立得 $f \in AC$ 与 $f' = \sum f'_n$ a. e. . □

2.90 设 $f \in AC$, 则 $V_a^x(f) = \int_a^x |f'(t)| dt$ ($a \leq x \leq b$).

证 显然只需对 $x = b$ 证明. 设 $\{x_i\}$ 与 Δ_i 分别依 (1) 与 (2) 则

$$\begin{aligned}\sum |\Delta f(x_i)| &= \sum \left| \int_{\Delta_i} f'(t) dt \right| \quad (\text{用(4)}) \\ &\leq \sum \int_{\Delta_i} |f'(t)| dt = \int_a^b |f'(t)| dt,\end{aligned}$$

由此得 $V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(x)| dx$. 为证相反的不等式, 取阶梯函数序列 $\{\varphi_n\}$, 使得 $\varphi_n \rightarrow \operatorname{sgn} f'$ a. e., 且 $|\varphi_n| \leq 1$ (存在之理由在看了 § 3.1 之后更明显). 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b |f'(x)| dx &= \int_a^b \lim_n \varphi_n f' dm \\ &= \lim_n \int_a^b \varphi_n f' dm \quad (\text{用控制收敛定理}) \\ &\leq V_a^b(f).\end{aligned}$$

最后一步的理由如下: 设 $\varphi = \sum \alpha_i I_{\Delta_i}$ 是阶梯函数, 其中 $|\alpha_i| \leq 1$, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)$, $\{x_i\}$ 是形如 (1) 的分割, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi f' dm &= \sum_i \alpha_i \int_{\Delta_i} f' dm \\ &= \sum_i \alpha_i \Delta f(x_i) \quad (\text{用(4)}) \\ &\leq \sum_i |\Delta f(x_i)| \leq V_a^b(f).\end{aligned}$$

□

2.91 设 $\pi(x) = V_a^x(f)$, 则 $f \in AC \Leftrightarrow \pi \in AC$.

提示: 显然 $\pi \in AC \Rightarrow f \in AC$ (用(7)); 由上题知 $f \in AC \Rightarrow \pi \in AC$.

就完全解决 Newton-Leibniz 公式适用条件这一点而言, 绝对连续性是一个很好的概念. 但从直观理解与实际判别来说, Lipschitz 函数可能更方便些. 顺便指出, Lipschitz 函数在数学的各个领域应用之广泛, 大概更甚于绝对连续函数. 你通过研究以下几题, 可加深对 Lipschitz 函数的理解.

2.92 $f \in \operatorname{Lip} \Leftrightarrow$ 存在有界可测函数 g , 使得

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt. \quad (x \in J)$$

提示: $f \in \text{Lip} \Rightarrow f'$ 是有界可测函数.

2.93 若 $\forall x \in J$, 存在开区间 $J_x: x \in J_x$, f 在 J_x 上为 Lipschitz 函数, 则 f 在 J 上是 Lipschitz 函数.

提示: 用有限覆盖定理.

$$\mathbf{2.94} \quad f \in \text{Lip} \Leftrightarrow \sup_{x \in J} \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| < \infty.$$

提示: 类似于题 2.93, 用有限覆盖定理.

有趣的是, 不定积分可用来解决某些测度论问题. 以下就是一个很说明问题的例子.

2.95 设 $A \subset J$, $mA < b - a$, $\varepsilon > 0$, 则存在开区间 $\Delta \subset J$, 使得 $m(A \cap \Delta) < \varepsilon m\Delta$.

证 令 $f(x) = \int_a^x \chi_A dm$ ($x \in J$), 则由定理 2.2.2 有 $f' = \chi_A$ a.e.. 这推出 $m\{f' = 0\} = m(J \setminus A) > 0$, 因此有 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f'(x_0) = 0$. 取 $\beta > x_0$ 充分邻近 x_0 , 使得

$$\frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} < \varepsilon.$$

令 $\Delta = (x_0, \beta)$, 则

$$\begin{aligned} m(A \cap \Delta) &= \int_{x_0}^{\beta} \chi_A dm = f(\beta) - f(x_0) \\ &< \varepsilon(\beta - x_0) = \varepsilon m\Delta. \end{aligned}$$

□

类似地, 你可以证:

2.96 设 $A \subset \mathbf{R}$, $mA > 0$, $\beta < 1$, 则存在开区间 Δ , 使得 $m(A \cap \Delta) > \beta m\Delta$. (此即题 1.74)

§ 2.3 Stieltjes 积分

一、定理与定义

有了上节的补充之后, 看来 Lebesgue 积分理论已经比较完备了.

不过,你会立即提出,熟知的分部积分公式

$$\int_a^b f dg = fg \Big|_a^b - \int_a^b g df \quad (1)$$

在 Lebesgue 积分论中如何解释,还没有一个说法. 在 Riemann 积分理论中,公式(1)的条件是 f 与 g 在 $[a, b]$ 上连续可微. 如果继续保持这么强的条件,就不必用到 Lebesgue 积分概念了. 在新的积分理论中,自然应尽可能降低对 f, g 的可微性(甚至连续性)要求. 这一问题的解决,是循完全不同的另一条思路实现的:引进一种形如 $\int_a^b f dg$ 的积分,即下面就要考虑的 Stieltjes 积分. 这种积分有很大的实用价值,倒不仅仅用于推广分部积分公式而已.

如同积分 $\int_a^b f(x) dx$ 经历了从 Riemann 积分到 Lebesgue 积分这两个发展阶段一样,Stieltjes 积分也相应地分为 Riemann-Stieltjes 积分与 Lebesgue-Stieltjes 积分,二者分别简称为 RS 积分与 LS 积分. LS 积分当然具有更大的一般性,在现代数学中已成为 Stieltjes 积分的标准形式,且完全融入了对测度积分的一般理论之内. 不过,LS 积分的构造基于测度论,需要更多的准备,在一个初级的实变函数课程中不可能得到非常完全的处理. 至于 RS 积分,则可以说它是 Riemann 积分的一个直接推广,它的展开思路与理论形式,都会是你十分熟悉的. 只需用很短的一段文字,就能给出 RS 积分的一个相当完整的概括.

以下仍以 J 记有限区间 $[a, b]$, 保持 § 2.2(1)(2) 的记号.

定义 2.3.1 设 f, g 是 J 上的有限实函数. f 关于 g 的 RS 积分定义为如下极限(假定该极限存在且有限):

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta g(x_i), \quad (2)$$

其中 $\{x_i\}$ 是区间 J 的分割(依 § 2.2(1)), $\delta = \max_i \Delta x_i$, $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ 是任取的, $\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1})$.

式(2)左端的积分也简写作 $\int_a^b f dg$. 若取 $g(x) \equiv x$, 则(2)就是通常的 Riemann 积分.

有了 RS 积分,分部积分公式(1)是否成立的问题解决得出人意外地简单.若 $\int_a^b f dg$ 与 $\int_a^b g df$ 两者之一(作为 RS 积分)存在,则另一个亦必存在,且等式(1)成立.这就表明,就积分存在性而言,在积分 $\int_a^b f dg$ 中 f 与 g 的作用是对称的.以下定理明确地体现了这一点.

定理 2.3.1 若 $f \in \mathcal{C}(J)$, $g \in BV$, 或 $g \in \mathcal{C}(J)$, $f \in BV$, 则 RS 积分 $\int_a^b f dg$ 与 $\int_a^b g df$ 均存在.

下面的定理概括了 RS 积分的主要性质.

定理 2.3.2 RS 积分有以下性质.

(i) 双线性性 积分 $\int_a^b f dg$ 分别对 f 与 g 是线性的:

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f + \beta \varphi) dg &= \alpha \int_a^b f dg + \beta \int_a^b \varphi dg; \\ \int_a^b f d(\alpha g + \beta h) &= \alpha \int_a^b f dg + \beta \int_a^b f dh,\end{aligned}$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 假定等式右端的积分均存在.

(ii) 可加性 设 $\int_a^b f dg$ 存在, $a < c < b$, 则

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

(iii) 若 $\int_a^b f dg$ 存在, 则

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \|f\|_0 V_a^b(g), \quad (3)$$

其中 $\|f\|_0 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ (这是一个通用记号).

(iv) 积分收敛定理 若 $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(J)$, $f_n \Rightarrow f$, $g \in BV$, 则

$$\lim_n \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg. \quad (4)$$

(v) 若 $f \in \mathcal{C}(J)$ (或 $f \in BV$), $g \in AC$, 则

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x) g'(x) dx, \quad (5)$$

其中右端是 Lebesgue 积分.

在 RS 积分的应用中,通常限定 $g \in BV$. 这样的 g 总可表为两增函数之差(参考定理 2.2.1),因此不失一般性,可进而限制 g 为增函数.由定理 2.3.1,当 g 是有限增函数时,对任何 $f \in C(J)$,RS 积分 $\int_a^b f dg$ 存在.要求 f 连续,必然是一个带来很多不便的限制.能否如同 Lebesgue 积分一样,仅仅要求 f 可测?这就需要整个地改造 RS 积分,使之成为一种对测度的积分.这一改造的关键在于定义由函数 g 导出的 LS 测度.

以下设 g 是 \mathbf{R} 上的右连续增函数.假定右连续完全不失一般性,且又能适应一些主要应用(如在概率论中的应用)的需要.在 \mathbf{R} 上考虑更加方便,且也不失去一般性:区间 $[a, b]$ 上的增函数 $g(x)$ 总可以自然地扩张为 \mathbf{R} 上的增函数,使得 $g(-\infty) = g(a)$, $g(b) = g(\infty)$, 此处 $g(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$.

定义 2.3.2 设 g 是 \mathbf{R} 上的右连续增函数.

(i) 对任何开区间 $\Delta = (a, b) \subset \mathbf{R}$, 定义 $\mu_g \Delta = g(b^-) - g(a)$. 当 $b = \infty$ 时当然规定 $g(b^-) = g(\infty)$.

(ii) 对任何开集 $G = \bigcup \delta_i \subset \mathbf{R}$, δ_i 是 G 的构成区间, 定义 $\mu_g G = \sum \mu_g \delta_i$.

(iii) 任给 $A \subset \mathbf{R}$, 定义

$$\mu_g^* A = \inf \{ \mu_g G : G \supset A \text{ 且 } G \text{ 为开集} \},$$

则可验证 μ_g^* 是 \mathbf{R} 上的一个外测度(参考定义 1.2.2).

(iv) 设 \mathcal{A}_g 是所有 μ_g^* -可测集构成的 σ -代数(依定理 1.2.4), 即 $B \in \mathcal{A}_g \Leftrightarrow$ 每个 $A \subset \mathbf{R}$ 满足 Caratheodory 条件(参看 § 1.2(2)):

$$\mu_g^* A = \mu_g^*(A \cap B) + \mu_g^*(A \setminus B),$$

则 μ_g^* 在 \mathcal{A}_g 上的限制是一个完备测度, 称它为由函数 g 导出的 LS 测度(即 Lebesgue-Stieltjes 测度)就记作 μ_g . 若 $A \in \mathcal{A}_g$, 则称 A 为关于 g 的 LS-可测集.

可以证明, \mathcal{A}_g 包括了所有开集(参看题 2.108) 因此 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_g$ (\mathcal{B} 是 Borel

集族). 若 $g(x) \equiv x$, 显然 μ_g 就是 Lebesgue 测度 m , 因而 $\mathcal{A}_g = \mathcal{L}$. 在一般情况下, μ_g 与 m 有某些差异. 首先, 因不必 $g(b^-) - g(a) = b - a$ 所引起的长度畸变破坏了平移不变性. 更严重的是, 对任何 $a \in \mathbf{R}$,

$$\mu_g\{a\} = \lim_n \mu_g(a - n^{-1}, a + n^{-1}) = g(a) - g(a^-)$$

是 g 在 a 处的跃度, 它可能是一个正值. 这样, LS 测度 μ_g 是 \mathbf{R} 上一个通常平移可变且包含集中负载 (即某些 $\mu_g\{a\} > 0$) 的测度, 它也可能是有限的 (只要 $g(\pm\infty)$ 有限!). 当 $g(-\infty) = 0$, $g(\infty) = 1$ 时, μ_g 是一个概率测度, 此时称 g 为分布函数, 它必为某个随机变量的概率分布函数.

定义 2.3.3 设 g 是 \mathbf{R} 上的右连续增函数, μ_g 是 g 所导出的 LS 测度, 以 $L^1(\mu_g)$ 记 \mathbf{R} 上关于 μ_g 可积的函数之全体. 任给 $f \in L^1(\mu_g)$, 约定

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dg = \int_{\mathbf{R}} f d\mu_g, \quad (6)$$

称 $\int_{-\infty}^{\infty} f dg$ 为 f 关于 g 的 LS 积分 (即 Lebesgue-Stieltjes 积分). 一般地, 对任何 $A \in \mathcal{A}_g$, 定义

$$\int_A f dg = \int_A f d\mu_g \quad (7)$$

为 f 关于 g 在 A 上的 LS 积分, 只要上式右端积分存在.

在 (7) 中分别取 $A = [a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ 得

$$\int_a^b f dg = \int_{\mathbf{R}} f \chi_{[a, b]} d\mu_g;$$

$$\int_a^{b^-} f dg = \int_{\mathbf{R}} f \chi_{[a, b)} d\mu_g;$$

$$\int_{a^+}^b f dg = \int_{\mathbf{R}} f \chi_{(a, b]} d\mu_g.$$

注意 $\int_a^b f dg$ 与 $\int_a^{b^-} f dg$ 可能不同, 二者的差是

$$f(b) \mu\{b\} = f(b) [g(b) - g(b^-)];$$

仅当 $f(b) = 0$ 或 g 在 $x = b$ 连续时这个差才为零.

$f \in L^1(\mu_g)$ 的前提是 f 必须 \mathcal{A}_g -可测. 为省去验证 \mathcal{A}_g -可测的麻烦, 通常假定 f 是 Borel 可测函数, 即 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足 $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$. 因 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_g$, Borel 可测函数必定是 \mathcal{A}_g -可测函数. 至于 Borel 可测, 则并不是一个很强的限制: 任何连续函数与 BV 类函数都是 Borel 可测函数; Borel 可测函数经定理 1.3.1 所列的那些运算仍得 Borel 可测函数; Borel 可测函数的复合函数是 Borel 可测函数, 等等. 这些事实表明 Borel 可测函数有足够的广泛性.

现在, 你应毫不含糊地认定: LS 积分就是关于 LS 测度的积分! 如果不去细究 LS 测度 μ_g 如何具体构成, 那么关于 μ_g 的积分就不是什么新东西: 你在 § 2.1 中早已熟悉它了. 现在, 你可以将 § 2.1 中的每一条积分定理照搬过来, 在适当的形式下用于 LS 积分, 而不必费心去重建一个新的系统. 为获得更具体的印象, 只要举少数例子就够了. 取定右连续增函数 $g(x)$, 则以下结论成立:

(i) 线性性: 设 $f, \varphi \in L^1(\mu_g)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 则

$$\int_a^b (\alpha f + \beta \varphi) dg = \alpha \int_a^b f dg + \beta \int_a^b \varphi dg.$$

(ii) 可加性: 设 $f \in L^1(\mu_g)$, $a < c < b$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg &= \int_a^c f dg + \int_c^b f dg \\ &= \int_a^c f dg + \int_{c^+}^b f dg \\ &= \int_a^c f dg + \int_c^b f dg; \quad (\text{若 } g \text{ 在 } c \text{ 连续}) \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty f dg = \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^{n^-} f dg.$$

(iii) 单调性: 设 $f, \varphi \in L^1(\mu_g)$, $f \leq \varphi$, μ_g -a. e., 则

$$\int_a^b f dg \leq \int_a^b \varphi dg.$$

(iv) 控制收敛定理: 若 $f_n \in L^1(\mu_g)$, $|f_n| \leq \varphi \in L^1(\mu_g)$, $f_n \rightarrow f$, μ_g -a. e., 则

$$\lim_n \int_a^b |f_n - f| dg = 0;$$

$$\lim_n \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg.$$

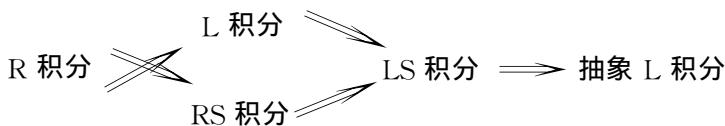
与定理 2.1.4 相对应的结果是：

定理 2.3.3 设 f 是 $[a, b]$ 上的有界实函数, $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的右连续增函数, 则 RS 积分 $\int_a^b f dg$ 存在当且仅当 f 在 $[a, b]$ 上 μ_{g^-} a. e. 连续. 若 RS 积分 $\int_a^b f dg$ 存在, 则它与相应的 LS 积分相等.

但须注意, μ_{g^-} a. e. 连续与定理 2.1.4 中的 a. e. 连续差别甚大. 若 $g(x) \equiv \text{const}$, 则对任给 $A \subset \mathbf{R}$ 有 $\mu_g A = 0$, 因而即使像 Dirichlet 函数这样的处处不连续函数也是 μ_{g^-} a. e. 连续的. 另一方面, 若 x_0 是 $g(x)$ 的间断点, 则只要 $f(x)$ 有 x_0 这一个间断点, 就不能是 μ_{g^-} a. e. 连续了. 这就由定理 2.3.3 解释了如下初看起来不可思议的现象: 像

$f = g = \chi_{(0,1]}$ 这样简单的函数, 都使 RS 积分 $\int_0^1 f dg$ 不存在!

现在, 我们已可将实变函数课程中涉及的积分总结一下了. 按照逻辑上的从属关系, 可给出一个如下的系统图:



其中 R 积分与 L 积分分别表示 Riemann 积分与 Lebesgue 积分. 由此可见, 抽象 Lebesgue 积分(即关于一般测度的积分), 涵盖了所有上面提到的积分, 也涵盖了许多你暂时接触不到, 但在数学中有其重要性的积分. 这样一种包容宏富的积分, 已足以让你惊叹了. 如果考虑到, §2.1 中关于这个积分的理论并无惊人的复杂之处, 那么, 你对于数学家的这一奇妙创造, 就更会拍手称奇了. 当然, 积分学并没有走到尽头; 今天, 仍不断有新思想充实进去. 然而, 100 年前由 Lebesgue 所发起的积分学革命, 其主要成果今天仍是数学家的基本工具. 这一点是你在学

习实变函数时不可不知的.

二、问题与方法

A. RS 积分问题

2.97 直接证明:若 $f = g = \chi_{(0,1]}$, 则 RS 积分 $\int_0^1 f dg$ 不存在.

证 设 $\{x_i\}$ 是 $[0,1]$ 的任一分割, 则

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta g(x_i) = \begin{cases} 0, & \xi_1 = 0; \\ 1, & 0 < \xi_1 \leq x_1. \end{cases}$$

由此可见, 定义式 (2) 中的极限不可能存在. □

2.98 设 f, g 在 $c \in (a, b)$ 同时间断, 且 c 是 g 的不可去间断点, 则 RS 积分 $\int_a^b f dg$ 不存在.

提示: 考虑 $[a, b]$ 的分割 $\{x_i\}$, 使 c 是某子区间的内点.

你一定注意到, 对于 RS 积分没有 “ $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f dg \geq 0$ ” 这样的结论. 这通常是运用 RS 积分时要倍加小心的地方. 但若 g 是增函数, 那么与 Riemann 积分就更加接近.

2.99 设 g 是增函数, 则 $\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg$, 只要两边的积分均存在.

证 对任何分割 $\{x_i\}$ 与 $\xi_i \in \Delta_i$, 有

$$\left| \sum_i f(\xi_i) \Delta g(x_i) \right| \leq \sum_i |f(\xi_i)| \Delta g(x_i).$$

两边取极限, 即得所要不等式. □

2.100 设 $f \in C[a, b]$, g 是增函数, 则存在 $c \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f dg = f(c)[g(b) - g(a)]$.

提示: 对照 Riemann 积分的中值定理.

2.101 设 $f \in C[a, b]$, $g \in BV$, $F(x) = \int_a^x f(t) dg(t)$ ($a \leq x \leq b$), 则 $F \in BV$; F 在 g 的连续点连续.

证 任给 $[a, b]$ 的分割 $\{x_i\}$, 有

$$\begin{aligned} \sum_i |\Delta F(x_i)| &= \sum_i \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f dg \right| \\ &\leq \sum_i \|f\|_0 V_{x_{i-1}}^{x_i}(g) \quad (\text{用(3)}) \\ &= \|f\|_0 V_a^b(g), \end{aligned}$$

可见 $F \in BV$. 令 $\pi(x) = V_a^x(g)$. $\forall x, y \in [a, b]$, 由(3)得出

$$|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_0 |\pi(x) - \pi(y)|.$$

这结合题 2.76 得出, F 在 g 的连续点(因而是 π 的连续点)连续. \square

2.102 设 $g \in AC$, $F(x) = \int_a^x f dg$ ($a \leq x \leq b$) 有定义, 则 $F \in AC$.

提示: 参照上题及题 2.91.

2.103 设 $f, g \in AC$, 则 $\int_a^b f g' dm = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g dm$.

提示: 用分部积分公式与定理 2.3.2(v).

2.104 设 $f \in C[a, b]$, $g_n \rightarrow g$, $|g| < \infty$, $\beta \triangleq \sup_n V_a^b(g_n) < \infty$,

$$\text{则 } \lim_n \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg.$$

证 由题 2.73 有 $g \in BV$, 故积分 $\int_a^b f dg$ 存在. 给定分割 $\{x_i : 1 \leq i \leq m\}$, 估计

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b f dg_n - \sum_i f(x_i) \Delta g(x_i) \right| \\ &\leq \sum_i \left| \int_{\Delta_i} f dg_n - \int_{\Delta_i} f(x_i) dg \right| \quad (\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]) \\ &\leq \sum_i \left| \int_{\Delta_i} f dg_n - \int_{\Delta_i} f(x_i) dg_n \right| \\ &\quad + \sum_i \left| \int_{\Delta_i} f(x_i) dg_n - \int_{\Delta_i} f(x_i) dg \right| \\ &\leq \max_{\substack{x \in \Delta_i \\ 1 \leq i \leq m}} |f(x) - f(x_i)| V_a^b(g_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_i |f(x_i)| |\Delta g_n(x_i) - \Delta g(x_i)| \\
& \leq \beta \max_{\substack{x \in \Delta_i \\ 1 \leq i \leq m}} |f(x) - f(x_i)| \\
& + \|f\|_0 \sum_i |\Delta g_n(x_i) - \Delta g(x_i)|,
\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned}
& \lim_n \left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right| \\
& \leq \left| \int_a^b f dg - \sum_i f(x_i) \Delta g(x_i) \right| + \beta \max_{\substack{x \in \Delta_i \\ 1 \leq i \leq m}} |f(x) - f(x_i)|.
\end{aligned}$$

因上式右端可任意小, 故得所要证. □

2.105 设 $f_n \in [a, b]$, $f_n \Rightarrow f$, $g \in BV$, 则 $\int_a^b f_n dg \rightarrow \int_a^b f dg$.

提示: 利用不等式(3).

B. LS 测度问题

以下设 $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是右连续增函数, μ_g 是 g 导出的 LS 测度.

2.106 设 $g = \chi_{[0, \infty)}$, 求 μ_g .

解 $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \alpha < \beta$, 有

$$\mu_g(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1, & \alpha < 0 < \beta; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

即 $\mu_g(\alpha, \beta) = \chi_{(\alpha, \beta)}(0)$. 这又推出, 对任何开集 $G \subset \mathbf{R}$, 有 $\mu_g G = \chi_G(0)$. 任给 $A \subset \mathbf{R}$. 若 $0 \in A$, 则对任何开集 $G \supset A$, 有 $0 \in G$, $\mu_g G = 1$. 于是由定义 2.3.2(iii) 有 $\mu_g^* A = 1$. 若 $0 \notin A$, 则 $A \subset G \triangleq \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\mu_g G = 0$, 于是 $\mu_g^* A = 0$. 综上所述, 得 $\mu_g^* A = \chi_A(0)$. 显然 μ_g^* 是 $2^{\mathbf{R}}$ 上的完备测度(参考题 1.51), 因此 $\mathcal{A}_g = 2^{\mathbf{R}}$, $\mu_g A = \chi_A(0)$. □

上题中的 g 通常称为单位分布函数, 对应的 LS 测度 μ_g 就是著名的 Dirac 测度.

2.107 设 $0 < p = 1 - q < 1$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ q, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

求 μ_g .

提示: 参照题 2.106. $\mu_g A = q \chi_A(0) + p \chi_A(1)$, $\mathcal{A}_g = 2^{\mathbf{R}}$.

上题中的 g 通常称为 0-1 分布.

2.108 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_g$, \mathcal{B} 是 Borel 集族.

证 因 \mathcal{B} 与 \mathcal{A}_g 都是 σ -代数, 故只要证 \mathcal{A}_g 包含所有开区间. 而 g 几乎处处连续, 故只要考虑这样的开区间 $\Delta = (\alpha, \beta)$: g 在 α, β 连续. 取定一个这样的 Δ , 任取 $A \subset \mathbf{R}$, 今证

$$\mu_g^* A \geq \mu_g^*(A \cap \Delta) + \mu_g^*(A \setminus \Delta).$$

为此, 又只要对任给开集 $G \supset A$, 证

$$\mu_g G \geq \mu_g^*(A \cap \Delta) + \mu_g^*(A \setminus \Delta).$$

固定 G . 由 $A \cap \Delta \subset G \cap \Delta$ 及 $G \cap \Delta$ 为开集推出 $\mu_g^*(A \cap \Delta) \leq \mu_g(G \cap \Delta)$. 因 g 在 α, β 连续, $\forall \varepsilon > 0$, 可取分别包含 α, β 的开区间 Δ_α 与 Δ_β , 使 $\mu_g \Delta_\alpha + \mu_g \Delta_\beta < \varepsilon$. 由 $A \setminus \Delta \subset (G \setminus [\alpha, \beta]) \cup \Delta_\alpha \cup \Delta_\beta$ 得

$$\mu_g^*(A \setminus \Delta) \leq \mu_g(G \setminus [\alpha, \beta]) + \varepsilon.$$

故

$$\begin{aligned} & \mu_g^*(A \cap \Delta) + \mu_g^*(A \setminus \Delta) \\ & \leq \mu_g(G \cap \Delta) + \mu_g(G \setminus [\alpha, \beta]) + \varepsilon \\ & = \mu_g(G \cap \Delta) \cup (G \setminus [\alpha, \beta]) + \varepsilon \\ & \leq \mu_g G + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得所要证. □

2.109 存在某个含内点的 μ_{g^-} 零测集的充要条件是: g 在某个区间上为常数.

提示: g 在开区间 Δ 上为常数 $\Leftrightarrow \mu_g \Delta = 0$.

2.110 设 g, h 是 \mathbf{R} 上的右连续增函数, $\varphi = g + h$, 则 $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_g \cap \mathcal{A}_h$; $\forall A \in \mathcal{A}_\varphi$, 有 $\mu_\varphi A = \mu_g A + \mu_h A$.

提示:依次对于开区间、开集及任意 $A \subset \mathbf{R}$ 指明 $\mu_\varphi^* A = \mu_g^* A + \mu_h^* A$; $\mu_\varphi^* A = \mu_\varphi^*(A \cap B) + \mu_\varphi^*(A \setminus B)$ 等价于同时成立:

$$\mu_g^* A = \mu_g^*(A \cap B) + \mu_g^*(A \setminus B)$$

与

$$\mu_h^* A = \mu_h^*(A \cap B) + \mu_h^*(A \setminus B).$$

2.111 设 g, h 在 \mathbf{R} 上可微, $0 \leq g' \leq h'$, $\mu_h A = 0$, 则 $\mu_g A = 0$.

提示: $\varphi \triangleq h - g$ 是增函数, $\mu_h = \mu_g + \mu_\varphi$, 用上题.

2.112 设 $\mu_g(A + x) = \mu_g A$ ($A \in \mathcal{B}$, $x \in \mathbf{R}$), 则 $g(x) = cx + g(0)$, $c \geq 0$; 因而 $\mu_g = cm$, m 是 Lebesgue 测度.

证 题设条件推出:

$$\mu_g\{x\} = g(x) - g(x^-) = g(y) - g(y^-) = \mu_g\{y\}.$$

但 g 几乎处处连续, 故必处处连续. 令 $h(x) = g(x) - g(0)$, 则

$$\begin{aligned} h(\alpha + \beta) &= g(\alpha + \beta) - g(0) \\ &= [g(\alpha + \beta) - g(\alpha)] + [g(\alpha) - g(0)] \\ &= h(\alpha) + h(\beta). \end{aligned}$$

由标准的分析结论: 连续可加函数必是线性函数, 故存在 $c \geq 0$, 使 $h(x) = cx$, 如所要证. \square

C. LS 积分问题

以下仍设 g 是 \mathbf{R} 上的右连续增函数, $\int_a^b f dg$ 表 LS 积分.

2.113 设 $f = g = \chi_{[0, \infty)}$, 求 $\int_{-1}^1 f dg$.

解 由题 106, μ_g 是 Dirac 测度, 于是

$$\int_{-1}^1 f dg = \int_{-1}^1 f d\mu_g = f(0) = 1. \quad \square$$

值得注意的是, RS 积分 $\int_{-1}^1 f dg$ 却不存在(参看题 2.98).

2.114 设 $\int_a^b |f| dg = 0$, g 在 $c \in (a, b)$ 间断, 则 $f(c) = 0$.

提示: 用定理 2.1.1(vii).

2.115 设 $f \in L^1(\mu_g)$, 则

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^b f dg = 0, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^b f dg = \int_{-\infty}^{\infty} f dg.$$

提示: 用定理 2.1.1(v).

2.116 设 $f \in L^1(\mu_g)$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f dg$. 若 g 在 x_0 连续, 或 f 在 x_0 连续且 $f(x_0) = 0$, 则 $F(x)$ 在 x_0 连续.

证 设 $y > x_0$, 则

$$|F(y) - F(x_0)| \leq \int_{x_0}^y |f| dg.$$

若 g 在 x_0 连续, 则 $\mu_g(x_0, y] = g(y) - g(x_0) \rightarrow 0$ ($y \downarrow x_0$), 从而由积分 $\int_A |f| d\mu_g$ 的绝对连续性 (定理 2.1.1(iv)) 有 $\int_{x_0}^y |f| dg \rightarrow 0$. 若 f 在 x_0 连续且 $f(x_0) = 0$, 则

$$\int_{x_0}^y |f| dg \leq \sup_{x \in (x_0, y]} |f(x)| \mu_g(x_0, y] \rightarrow 0 \quad (y \downarrow x_0).$$

总之, 在以上两种情况下都有 $F(x_0^+) = F(x_0)$. 同理可证 $F(x_0^-) = F(x_0)$, 故 $F(x)$ 在 x_0 连续. \square

2.117 设 $F(x)$ 如题 2.116, 则

$$V_a^b(F) \leq \|f\| [g(b) - g(a)].$$

提示: 利用 $|F(y) - F(x)| \leq \sup_{x \leq z \leq y} |f(z)| |g(y) - g(x)|$.

2.118 设 $f \in L^1(\mu_g)$, g 在有限区间上绝对连续, 则

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dm.$$

证 首先, 对任何区间 $\Delta = (\alpha, \beta)$, 有

$$\int_{\Delta} dg = \mu_g \Delta = g(\beta) - g(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} g' dm.$$

由此可推出对任何 $A \in \mathcal{L}$ (注意 $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}_g$) 有 $\int_A dg = \int_A g' dm$. 进而对简单函数 φ 有 $\int_a^b \varphi dg = \int_a^b \varphi g' dm$. 若 $f \geq 0$, 则取简单函数列 $\{\varphi_n\}$, 使得

$0 \leq \varphi_n \uparrow f$, 于是由 Levi 定理有

$$\begin{aligned}\int_a^b f dg &= \lim_n \int_a^b \varphi_n dg \\ &= \lim_n \int_a^b \varphi_n g' dm = \int_a^b f g' dm.\end{aligned}$$

最后, 在一般情况下有

$$\begin{aligned}\int_a^b f dg &= \int_a^b f^+ dg - \int_a^b f^- dg \\ &= \int_a^b f^+ g' dm - \int_a^b f^- g' dm \\ &= \int_a^b (f^+ - f^-) g' dm = \int_a^b f g' dm.\end{aligned}\quad \square$$

2.119 设 g 在有限区间上绝对连续, f 在有限区间上有界, $F(x)$ 依题 2.116, 则 $F(x)$ 在有限区间上绝对连续.

提示: 利用上题或直接证明.

2.120 设 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$, $\{\alpha_n\} \subset (0, \infty)$, $\sum \alpha_n < \infty$, $g(x) = \sum_{x_n \leq x} \alpha_n$.

在什么条件下 $f \in L^1(\mu_g)$? 求 $\int_{\mathbf{R}} f dg$.

解 $g(x)$ 是右连续增函数, 恰以 $D = \{x_n\}$ 为间断点集 (参考题 2.65). 因 $\mu_g\{x_n\} = g(x_n) - g(x_n^-) = \alpha_n$, 故

$$\mu_g D^c = \mu_g \mathbf{R} - \mu_g D = \sum \alpha_n - \sum \alpha_n = 0.$$

任给 \mathcal{A}_{g^-} 可测函数 f , 有

$$\int_{\mathbf{R}} |f| dg = \sum_n \int_{\{x_n\}} |f| d\mu_g = \sum_n \alpha_n |f(x_n)|.$$

可见 $f \in L^1(\mu_g) \Leftrightarrow \sum_n \alpha_n |f(x_n)| < \infty$; 当 $f \in L^1(\mu_g)$ 时,

$$\int_{\mathbf{R}} f dg = \sum_n \int_{\{x_n\}} f d\mu_g = \sum_n \alpha_n f(x_n).\quad \square$$

第三章 Banach 空间

你刚刚结束实变函数课程的学习,这真是一番奇妙无比的经历,那样多精美绝伦的数学思想或许依然萦绕在你的脑际.现在,一门新的课程的非凡图景又在吸引你的注意力了.可能已有人告诉你:泛函分析将是你大学期间最有趣的课程,这必定会使你兴奋不已.但也可能有人告诉你:泛函分析是高度抽象、难以理解的课程.这个,你亦姑妄听之.无论如何,你都会毫不迟疑地将昨天还踩在 Euclid 空间古老土地上的那只脚,踏入到新奇无比的无限维空间中来.不幸得很!这些空间确实就叫抽象空间.抽象的外观会让你知难而退吗?幸而有两种方法可用来对付抽象的威胁.其一就是你在高度一般化的理论之前,不妨在不那么抽象的函数空间中漫游一番,切实地体会到抽象空间植根于其中的现实土壤;其二就是最大可能地借用有限维空间中的概念、术语与思考模式,用以形成对无限维空间的清晰可见的几何直观.以上两者,都是本章要全力帮助你做到的.

§ 3.1 函数空间

一、定理与定义

函数空间,无疑是介于 Euclid 空间与完全公理化的抽象空间之间的一大片生机勃勃的富饶地带.这里孕育着各种有趣的数学思想.无论从历史发展顺序或从认知规律来看,函数空间都是在深入抽象空间之前让你热身的最佳场所.尽管如此,我们还是首先给出抽象空间的一般概念,唯有这种已高度标准化的用语,才使往下的叙述达到最大的简洁清晰.

定义 3.1.1 设 X 是数域 $K (= \mathbf{R} \text{ 或 } \mathbf{C}, \text{下文皆如此})$ 上的向量空间.若对每个 $x \in X$,指定了一个实数 $\|x\|$,称为 x 的范数,它满足

以下范数公理：

(N_1) 齐次性： $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ；

(N_2) 三角不等式： $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ；

(N_3) 正定性： $\|x\| \geq 0$ ； $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(以上 $x, y \in X, \alpha \in \mathbf{K}$) 则称 X 为赋范空间. 若 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (或 \mathbf{C}) 则称 X 为实 (或复) 赋范空间, 也记作 $(X, \|\cdot\|)$. 若 $x_n, x \in X (n = 1, 2, \dots)$, 则当 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ 时说序列 $\{x_n\}$ (依范数) 收敛于 x , 记作 $x_n \rightarrow x$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$; 当 $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$ 时称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列. 若 X 中所有 Cauchy 列皆收敛, 则称 X 为完备赋范空间或 Banach 空间.

范数公理 (N_1)~(N_3) 正是 \mathbf{R}^n 中向量模长 (又称 Euclid 范数) 熟知性质的一种概括, 它是无限维空间中建立极限论并最终建立某种分析学的基础. 就逻辑形式而言, 公理 (N_1)~(N_3) 已经简单得近于贫乏, 而它们却有足够的力量承载起一座理论大厦, 几乎难以置信, 然而却是事实. 这正是现代公理化数学的伟大力量之所在. 现在你就可以立即初步体验一下: 仅仅利用公理 (N_1)~(N_3), 能推出关于极限运算的一系列性质. 例如, 从 $x_n \rightarrow x, \alpha_n \rightarrow \alpha (\alpha_n, \alpha \in \mathbf{K})$ 推出 $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha x$; 从 $x_n \rightarrow x$ 推出 $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, 等等. 你会感到, 运用范数 $\|\cdot\|$, 就如同运用实数或复数的绝对值一样. 这种比拟在很多情况下是适当的, 而且十分有益, 只要你不走得太远, 不致不经意地用起 $\|xy\| = \|x\| \|y\|$ 这样的式子来!

经常要涉及不同赋范空间之间的关系, 那么, 常需要以下概念.

定义 3.1.2 设 X, Y 是 \mathbf{K} 上的赋范空间. 若 A 是 X 的向量子空间, 则 A 依 X 中的范数是一个赋范空间, 就称为 X 的子空间. 若 A 中收敛序列的极限皆属于 A , 则称 A 为闭子空间. 若每个 $x \in X$ 是 A 中某序列的极限, 则称 A 为 X 的稠密子空间. 若存在线性同构 $T: X \rightarrow Y$, 使得

$$\alpha \|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta \|x\| \quad (\forall x \in X), \quad (1)$$

α, β 是正常数, 则说 X 与 Y 拓扑同构, 并称 T 为从 X 到 Y 的一个拓扑同构. 若式 (1) 代之以 $\|Tx\| = \|x\| (\forall x \in X)$, 则称 T 为等距同

构(或保范同构).若 X 等距同构于 Y 的某个子空间 Y_0 , 则说 X 可等距嵌入 Y ; 若进而假定 Y 完备且 Y_0 是 Y 的稠密子空间, 则称 Y 是 X 的完备化. 若 $\|\cdot\|'$ 是 X 上的另一个范数, 它满足

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\| \quad (\forall x \in X), \quad (2)$$

α, β 是正常数, 则说 $\|\cdot\|'$ 是 X 上与 $\|\cdot\|$ 等价的范数.

对照 (1) 与 (2) 看出, $\|x\|$ 与 $\|x\|'$ 为等价范数的充要条件是, 单位算子(即单位映射, 参看 § 1.1)

$$I: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|')$$

是拓扑同构.

以下定理概括了一系列十分基本而又常用的结论.

定理 3.1.1 赋范空间的完备子空间必为闭子空间; Banach 空间的子空间是 Banach 空间当且仅当它是闭子空间. K 上同维数的有限维赋范空间之间的线性同构都是拓扑同构; 同一有限维空间上的任何范数必互相等价; 有限维赋范空间必完备; 赋范空间的有限维子空间必是闭子空间.

设 X 是给定的赋范空间. 当要在 X 中建立某个命题时, 常常感到最大困难是 X 过大, 它包含太多的元素, 面对一堆过分庞杂的对象, 你很难解决问题. 对付这一困难的最有效的方法是逼近方法——分析中最具普遍意义的方法之一, 在较初等的形式下, 你应当早已使用过了. 简单地说, 我们要在 X 中求出某个子集 A , 它满足如下条件:

(i) A 包含尽可能少的元素, 且所含元素尽可能是“标准的”、“熟知的”、已被充分研究过的, 因而局限在 A 内容易建立人们感兴趣的某些命题.

(ii) 利用 A 中元素的线性组合, 能逼近 X 中任何元素; 于是借助于这种逼近, 可将在 A 中建立的某些命题推广到全空间上.

显然, 上述两种条件有点互相冲突, 难以兼顾, 因而要找到满足这些条件的 A 必不容易. 为使这件事做得更加规范, 引进如下的概念与术语.

定义 3.1.3 设 $A \subset X$, $\text{span } A$ 记 X 中包含 A 的最小子空间, 称为 A 生成的子空间. 若 $\text{span } A$ 是 X 的稠密子空间, 则称 A 为 X 的基

本集. 若 X 有可数的基本集, 则称 X 为可分空间. 若序列 $\{e_n\} \subset X$ 有性质: 每个 $x \in X$ 可唯一地表成 $\{e_n\}$ 的无限线性组合:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \lim_n \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

则称 $\{e_n\}$ 为 X 的 Schauder 基.

显然, Schauder 基必为基本集, 且是最小的基本集: 从 Schauder 基 $\{e_n\}$ 除去一个元素 (例如 e_1), 就不再是基本集了. 如果能找到 Schauder 基, 用来作基本集自然不错. 不过, 基本集未必是 Schauder 基, 甚至不必是可数集. 选择什么形式的基本集, 完全应依空间与问题的具体性质而定.

在作了上述准备之后, 现在开始考虑本节的主要对象: 函数空间. 在最一般的意义上, 函数空间就是由某个 (或某些) 性质界定的函数类. 我们刚刚学习过函数类 $L^p(\Omega)$, BV , AC , Lip 等. 你注意到, 这些函数类都对线性运算 (加法与数乘) 封闭, 因而都是线性代数意义下的向量空间. 这样, 谈到函数空间时, 首先应要求它依自然的线性运算是向量空间. 这一要求是很基本的, 且很容易被满足. 不过, 这样一来就排除了单调函数类这种重要特例. 余下的最重要问题是如何在函数空间中定义极限. 对于可测函数列有多种收敛性, 这件令人印象深刻的事会提醒你: 在函数空间中选定收敛性将颇费思量. 基本的原则是:

(i) 需要决定选择. 你永远应将需要放在第一位, 只有合乎需要的收敛性才是值得考虑的. 但须注意, 需要未必是单一的; 在同一函数类中可能需要不同的收敛性; 相应地, 可能在同一函数类上界定出不同的函数空间.

(ii) 可赋范性. 这意味着所选择的收敛能够转化为范数收敛, 因而在赋范空间理论的框架内进行处理. 函数空间中的收敛是否为范数收敛, 是至关重要的, 但又是不可苛求的. 例如, 依测度收敛就不是范数收敛, 但它依然很重要. 在不可赋范的情况下, 已有一系列类似于赋范的方法来描述收敛性, 但它们已超出赋范空间理论的范围之外.

以上原则, 可通过 L^p 空间与 C^m 空间这两类典型的函数空间来作出说明, 二者可分别看作“坏函数”空间与“好函数”空间的代表.

设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是给定的完备测度空间. 对于 Ω 上的可测函数, 已经考虑过的依测度收敛与 a. e. 收敛(参看 § 1.3)都有其用. 但在很多场合似乎偏弱, 因而不敷需要; 而且, 又都不能归结为某种范数收敛(这一点还不易说明). 因此, 必要选择新的收敛性. 如果 $\{f_n\} \subset M(\Omega)$ 满足

$$\int_{\Omega} |f_n| d\mu \rightarrow 0,$$

直观上很明显, 当 n 充分大时, f_n 在 Ω 上平均地充分接近于零. 这就引出所谓平均收敛性. 将上述想法适当推广, 就得到以下概念.

定义 3.1.4 设 $1 \leq p \leq \infty$. 对任给 $f \in M(\Omega)$, 定义其 L^p 范数为:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty; \\ \inf_{\substack{A \subset \Omega \\ \mu A = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus A} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases} \quad (3)$$

令

$$L^p(\Omega) = \{f \in M(\Omega) : \|f\|_p < \infty\}.$$

若 $p < \infty$, 则称 $f \in L^p(\Omega)$ 为 p 次可积函数, 而称 $f \in L^\infty(\Omega)$ 为本性有界函数. 若 $f, f_n \in L^p(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$), $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 则说序列 $\{f_n\}$ 在 Ω 上 L^p 收敛于 f , 记作 $f_n \xrightarrow{L^p} f$. 当 $p < \infty$ 时, L^p 收敛也称为 p 次平均收敛; $p = 1$ 时就简称为平均收敛, $p = 2$ 时称为均方收敛.

关于空间 $L^p(\Omega)$ 及 L^p 范数、 L^p 收敛的性质可综合于下:

定理 3.1.2 若认定 Ω 上两个 a. e. 相等的函数为同一元素, 则 $L^p(\Omega)$ 依 L^p 范数 $\|\cdot\|_p$ 是一 Banach 空间. 若 $1 \leq p = q/(q-1) \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, 则成立如下的 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (4)$$

若 $1 \leq p < \infty$, 在 $L^p(\Omega)$ 中 $f_n \xrightarrow{L^p} f$, 则必 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 且存在子列 $\{f_{n_i}\}$, 使得 $f_{n_i} \rightarrow f$ a. e.. 若 $\mu\Omega < \infty$, $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, 则 $f_n \Rightarrow f \Rightarrow f_n$

$$\xrightarrow{L^\infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

空间 $L^p(\Omega)$ 也记作 $L^p(\Omega, \mu)$ 或 L^p . 适当地选择 Ω, μ 就得到 L^p 空间的许多特例, 最常见的是以下两种特殊情况:

(i) 若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, 则在未特别说明时, 记号 $L^p(\Omega)$ 总是指空间 $L^p(\Omega, m)$, 其中 m 是 n 维 Lebesgue 测度. 当 Ω 是区间 $(a, b), [a, b], (a, b]$ 与 $[a, b]$ 的任何一种时, 将 $L^p(\Omega)$ 写作 $L^p(a, b)$ 或 $L^p[a, b]$ (这与是否考虑端点无关).

(ii) 若 $\Omega = \mathbf{N}$, 而 μ 是 \mathbf{N} 上的计数测度, 则记 $L^p(\Omega)$ 为 l^p . 对于这种特殊情况, 式 (3) (4) 可以表达得更具体:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_i |x_i|, & p = \infty; \end{cases} \quad (5)$$

$$\sum_i |x_i y_i| \leq \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_i |y_i|^q \right)^{1/q}, \quad (6)$$

其中 $x = (x_i) \in l^p, y = (y_i) \in l^q$, 在 (6) 中 $1 < p = \frac{q}{q-1} < \infty$.

关于 L^p 空间的基本集有以下结论:

定理 3.1.3 设 $1 \leq p < \infty$.

(i) $\{\chi_A : \mu A < \infty\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 的基本集; p 次可积简单函数之全体构成 $L^p(\Omega)$ 的稠密子空间.

(ii) $\{\chi_{[a, x]} : a \leq x \leq b\}$ 与 $\{x^n : n \in \mathbf{Z}\}$ 都是 $L^p[a, b]$ 的基本集; $[a, b]$ 上阶梯函数之全体、多项式之全体及 $C[a, b]$, 都是 $L^p[a, b]$ 的稠密子空间; $L^p[a, b]$ 是可分的.

(iii) $C_c(\mathbf{R}^n)$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 的稠密子空间, 此处

$$C_c(\mathbf{R}^n) = \{f \in C(\mathbf{R}^n) : \text{supp } f \text{ 有界}\};$$

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

(iv) 令 $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots)$, 其中 1 在第 i 项, 则向量序列 $\{e_i : i \in \mathbf{N}\}$ 是空间 l^p 的 Schauder 基, 因而是基本集 (今后称这样的 $\{e_i\}$ 为 l^p 的标准基); l^p 是可分的.

其次设 Ω 是 \mathbf{R}^n 中一有界闭区域, $m \in \mathbf{Z}_+$, 以 $C^m(\Omega)$ 记 Ω 上 m 次连续可微函数之全体, 约定 $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. $\forall f \in C^m(\Omega)$, 定义

$$\begin{cases} \|f\|_m = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_0, \\ \partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n, |\alpha| = \sum \alpha_i, \\ \|f\|_0 = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|. \end{cases} \quad (7)$$

当 $\Omega = [a, b] \subset \mathbf{R}$ 时 (7) 简化为:

$$\|f\|_m = \max_{0 \leq k \leq m} \|f^{(k)}\|_0, \|f\|_0 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \quad (8)$$

依以上定义, $C^m(\Omega)$ 依范数 $\|\cdot\|_m$ 是一 Banach 空间, 其中范数收敛意味着直到 m 阶导数的一致收敛, 准确地说就是:

$$f_k \rightarrow f \Leftrightarrow \partial^\alpha f_k(x) \Rightarrow \partial^\alpha f(x) \quad (k \rightarrow \infty, |\alpha| \leq m, x \in \Omega).$$

当 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是有界闭区域时, 在 Ω 上可同时考虑空间 $C^m(\Omega)$ 与 $L^p(\Omega)$. 随着指标 m 与 p 的变化, 形成一个 Banach 空间的无穷阶梯, 它们的相互关系是:

$$\begin{aligned} & \dots \subset C^m(\Omega) \subset C^{m-1}(\Omega) \subset \dots \subset C(\Omega) \\ & \subset L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^r(\Omega) \subset L^1(\Omega), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $1 < r < p < \infty$.

下面转入研究问题. 我们从关于一般赋范空间的某些问题开始.

二、问题与方法

A. 范数与收敛性问题

以下设 X 是给定的赋范空间.

3.1 若 X 完备, $\{x_n\} \subset X$, 则 $\sum \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum x_n$ 收敛, 即绝对收敛级数必收敛.

证 令 $s_n = \sum_1^n x_i$, 则级数 $\sum x_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{s_n\}$ 收敛. 因 X 完备, 要 $\{s_n\}$ 收敛, 只需它是 Cauchy 列, 即

$$\lim_{m > n \rightarrow \infty} \|s_m - s_n\| = \lim_{m > n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=n+1}^m x_i \right\| = 0.$$

于是所要结论从以下不等式及数学分析中级数收敛的条件得出:

$$\left\| \sum_{i=n+1}^m x_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^m \|x_i\| \rightarrow 0 \quad (m > n \rightarrow \infty). \quad \square$$

一般的结论是:在 Banach 空间中,可以使用熟知的 Cauchy 收敛判别法.如果某个数学分析命题的证明要用到 Cauchy 收敛条件,那么,它的无限维推广仅适用于完备空间.这一事实说明了完备性的意义.

3.2 若 X 中任何绝对收敛级数皆收敛,则 X 必完备.

证 设 $\{x_n\} \subset X$ 是 Cauchy 列,今要证 $\{x_n\}$ 收敛.由 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列推出,存在 n_1 ,使得 $\forall n \geq n_1$,有 $\|x_n - x_{n_1}\| < 1$;又可取 $n_2 > n_1$,使得 $\forall n \geq n_2$,有 $\|x_n - x_{n_2}\| < 2^{-2}$, ..., 一般地,有 $n_k > n_{k-1}$,使得 $\forall n \geq n_k$,有 $\|x_n - x_{n_k}\| < k^{-2}$, $k = 1, 2, \dots$. 这就得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,使得 $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < k^{-2}$ ($\forall k \in \mathbf{N}$),因而 $\sum \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum k^{-2} < \infty$. 这表明级数 $\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ 绝对收敛,从而其本身亦收敛.设 $x_{n_k} \rightarrow x$,则从

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\|$$

看出 $x_n \rightarrow x$, 如所要证. □

3.3 设 $\{x_n\} \subset X$. 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 Cauchy 列 $\{y_n\} \subset X$, 使 $\|x_n - y_n\| < \varepsilon$ ($\forall n \in \mathbf{N}$), 则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

提示: $\forall k \in \mathbf{N}$, 取 Cauchy 列 $\{y_{nk} : n \in \mathbf{N}\}$, 使 $\|x_n - y_{nk}\| < 1/k$.

3.4 设 X 完备, $\{x_n : n \geq 0\} \subset X$ 满足 $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r \|x_n - x_{n-1}\|$ ($n \geq 1$) $0 < r < 1$. 则 $\{x_n\}$ 收敛.

提示: 对 $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ 用正项级数收敛判别法.

3.5 设 $\{x_i : 1 \leq i \leq n\} \subset X$ 线性无关, 则存在 $\alpha, \beta > 0$, 使对任给 $\{\lambda_i\} \subset \mathbf{K}$ 有 $\alpha \sum |\lambda_i| \leq \|\sum \lambda_i x_i\| \leq \beta \sum |\lambda_i|$.

证 令 $A = \text{span}\{x_i\}$, 则 A 是 X 的 n 维子空间.

$$T: \mathbf{K}^n \rightarrow A \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \mapsto \sum \lambda_i x_i$$

显然是一个线性同构, 因而必为拓扑同构(定理 3.1.1). 因在 \mathbf{K}^n 中可采用范数 $\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T\| = \sum |\lambda_i|$, 故要证结论由不等式(1)得

出.

□

3.6 $\forall n \in \mathbf{N}$, 存在 $\alpha_n, \beta_n > 0$, 使得对任给 $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbf{R}$ 有

$$\alpha_n \sum_i |\lambda_i| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \sum_i \lambda_i x^i \right| \leq \beta_n \sum_i |\lambda_i|.$$

提示: 用上题证法, 或直接用其结论.

3.7 设在 $[0, 1]$ 上 $f_n \Rightarrow f$, f_n 是次数 \leq 定数的多项式, 则 f 是多项式.

证 取 m 充分大, 以 P 记 $[0, 1]$ 上次数 $\leq m$ 的多项式之全体, 则 P 是 $C[0, 1]$ 的一个 $m+1$ 维子空间, 因而是闭子空间 (定理 3.1.1). 可设 $\{f_n\} \subset P$, 而 $f_n \Rightarrow f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_0 \rightarrow 0$, 故必 $f \in P$, 因而 f 是多项式. □

上题的一个直接推论是: 若 $f \in C[0, 1]$ 不是多项式, 要构成在 $[0, 1]$ 上一致逼近 f 的多项式序列 $\{f_n\}$, 又要求 f_n 的次数不充分大, 是办不到的. 这一结论并不使人感到意外, 但若不用赋范空间概念, 恐怕不容易讲清楚.

B. L^p 范数与 L^p 收敛

首先考虑与 L^p 范数有关的 Hölder 不等式. Hölder 不等式也许是用得最多的分析不等式, 你在许多领域都会有机会遇到它, 在本课程中就多次用到它. Hölder 不等式的详细写法

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q} \quad (4)$$

也许更直观, 但用起来未必更方便. 注意到 $\|f\|_p = \| |f| \|_p$, 在用 (4) 时总不妨设 $f \geq 0$. 也注意到, 即使 $\|f\|_p = \infty$ (或 $\|g\|_q = \infty$), (4) 也是成立的. Hölder 不等式的应用关键在于使用适当的分解 $1 = p^{-1} + q^{-1}$, 选择分解的技巧依赖于经验的积累. 下面的一组问题将有助于你掌握这一技巧.

3.8 设 $f, g \in M^+(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, 则

$$\left(\int_{\Omega} fg d\mu \right)^p \leq \|g\|_1^{p-1} \int_{\Omega} f^p g d\mu.$$

证 令 $q = p/(p-1)$. 注意到 $\int_{\Omega} f^p g d\mu = \|fg^{1/p}\|_p^p$, 故用以下论证:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} fg d\mu \right)^p &= \|g^{1/q}(fg^{1/p})\|_1^p \\ &\leq \|g^{1/q}\|_q^p \|fg^{1/p}\|_p^p \quad (\text{用(4)}) \\ &= \|g\|_1^{p-1} \int_{\Omega} f^p g d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

3.9 设 $f \in L^r \cap L^s$, $1 \leq r, s < \infty$, $0 < \lambda < 1$, $p^{-1} = r^{-1}\lambda + s^{-1}(1-\lambda)$, 则 $\|f\|_p \leq \|f\|_r^{\lambda} \|f\|_s^{1-\lambda}$.

证 不妨设 $f \geq 0$. 注意 $p = p\lambda + p(1-\lambda)$, $p\lambda/r + p(1-\lambda)/s = 1$, 于是

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \|f^{p\lambda} \cdot f^{p(1-\lambda)}\|_1^{1/p} \\ &\leq \|f^{p\lambda}\|_{r/p\lambda}^{1/p\lambda} \|f^{p(1-\lambda)}\|_{s/p(1-\lambda)}^{1/p(1-\lambda)} \quad (\text{用(4)}) \\ &= \|f\|_r^{\lambda} \|f\|_s^{1-\lambda}. \quad \square \end{aligned}$$

注意以上演算中完全不直接使用积分, 因而形式上很简洁. 只是你在初次运用时, 可能会觉得直观性稍欠. 这就需要通过练习逐步适应, 尤其应注意熟练运用 $\|f^p\|_r = \|f^{pr}\|_1^{1/r}$ 这类式子.

3.10 设 $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, $h \in L^r$, 则

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

证 仍不妨设 $f, g, h \geq 0$. 令 $p^{-1} + q^{-1} = s^{-1}$, 则首先得出 $\|fgh\|_1 \leq \|fg\|_s \|h\|_r$, 余下只要证 $\|fg\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_q$. 为此, 注意 $1 = s/p + s/q$, 于是

$$\|fg\|_s = \|f^s g^s\|_1^{1/s} \leq \|f^s\|_{p/s}^{1/s} \|g^s\|_{q/s}^{1/s} = \|f\|_p \|g\|_q. \quad \square$$

看了以上三题之后, 你大概已有了一些初步感觉, 可以独立解决一些类似的问题了.

3.11 设 $f, g \in M^+(0, 1)$, $f(x)g(x) \geq x^{-1}$ a.e., 则 $\|f\|_1 \|g\|_1 \geq 4$.

提示 利用 $\|f\|_1 = \|f^{1/2}\|_2^2$.

3.12 设 $2 \leq p < \infty$, $f, g \in M^+(\Omega)$, 则

$$\int_{\Omega} f^{p-2} g^2 d\mu \leq \|f\|_p^{p-2} \|g\|_p^2.$$

提示 利用 $(p-2)/p + 2/p = 1$.

3.13 设 $\mu\Omega < \infty$, $1 \leq p < r$, 则 $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, 且 L^r 收敛蕴涵 L^p 收敛.

证 只要证 $\|f\|_p \leq \text{const} \|f\|_r$ ($\forall f \in L^r(\Omega)$). 不妨设 $f \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \|1 \cdot f^p\|_1^{1/p} \\ &\leq \|1\|_{r/p}^{1/p} \|f^p\|_{r/p}^{1/p} \quad (\text{用(4)}) \\ &= (\mu\Omega)^{r-p/p} \|f\|_r. \end{aligned}$$

□

3.14 设 $f \in L^p[a, b]$, $1 < p < \infty$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_p |x - y|^{(p-1)/p}$ ($x, y \in [a, b]$).

提示 用上题的证法.

3.15 设 $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 < p < \infty$,

$$F(x) = \int_0^\infty y^{-1} f(y) \sin xy dy,$$

则当 $h \downarrow 0$ 时 $F(x+h) - F(x) = O(h^{1/p})$.

提示 类似于上题.

3.16 设 $1 \leq p < r$, 则 $l^p \subset l^r$, 且 l^p 中的收敛蕴涵 l^r 中的收敛 (对照题 3.13!).

提示 利用 $|x| < 1 \Rightarrow |x|^r \leq |x|^p$.

3.17 设 $0 < \mu\Omega < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$, 则 $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

证 只要证 $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \triangleq \beta \leq \underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$. 易见

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \beta \lim_{p \rightarrow \infty} (\mu\Omega)^{1/p} = \beta.$$

其次设 $\beta > \alpha$ ($\beta = 0$ 时已无可证者.) 只要对任给 $\alpha \in (0, \beta)$ 证 $\underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \alpha$. 必 $\mu\{|f| \geq \alpha\} > 0$ (否则 $|f| < \alpha$ a.e., 这将推出 $\|f\|_\infty \leq \alpha$!). 由 Chebyshev 不等式 (§2.1(7)), 有

$$\mu\{|f| \geq \alpha\} \leq \alpha^{-p} \|f\|_p^p \quad (p > 1).$$

于是

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(\mu\{|f| \geq \alpha\})^{1/p} = \alpha. \quad \square$$

3.18 设 $0 < \mu\Omega < \infty$, $0 < \|f\|_\infty < \infty$, 则

$$\lim_n \|f\|_{\frac{n+1}{n}} / \|f\|_n = \|f\|_\infty.$$

证 令 $\beta_n = \|f\|_{\frac{n+1}{n}} / \|f\|_n$. 类似于上题, 只要证

$$\overline{\lim}_n \beta_n \leq \|f\|_\infty \leq \underline{\lim}_n \beta_n.$$

为此, 需要建立关于 β_n 的两个方向相反的不等式. 首先, 由

$$\|f\|_{\frac{n+1}{n}} = \|f \cdot f^n\|_1 \leq \|f\|_\infty \|f^n\|_1 = \|f\|_\infty \|f\|_n^n$$

得 $\beta_n \leq \|f\|_\infty$, 因此 $\overline{\lim}_n \beta_n \leq \|f\|_\infty$. 容易想到, 另一个不等式应从

“放大” $\|f\|_n^n$ 得到:

$$\begin{aligned} \|f\|_n^n &= \|1 \cdot f^n\|_1 \leq \|1\|_{n+1} \|f^n\|_{(n+1)'} \\ &= (\mu\Omega)^{1/(n+1)} \|f\|_{\frac{n+1}{n}}^{n+1} \quad (\text{用 Hölder 不等式}), \end{aligned}$$

因此 $\beta_n \geq \|f\|_{\frac{n+1}{n}} (\mu\Omega)^{-1/(n+1)}$. 于是用上题结论得

$$\underline{\lim}_n \beta_n \geq \lim_n \|f\|_{\frac{n+1}{n}} (\mu\Omega)^{-1/(n+1)} = \|f\|_\infty. \quad \square$$

3.19 设 $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $A \subset \Omega$ 可测, 则

$$\|f\|_p \leq \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_{A^c} |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

提示: 对 $\|f\chi_A + f\chi_{A^c}\|_p$ 用三角不等式.

3.20 设 $f, g \in M^+(\Omega)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $\beta > 1$, 则

$$\lambda^\beta \|f\|_p + (1-\lambda)^\beta \|g\|_p \leq \|f + g\|_p.$$

提示: $\varphi(\lambda) = \lambda^\beta \|f\|_p + (1-\lambda)^\beta \|g\|_p$ 是凸函数, 故 $\varphi(\lambda) \leq \varphi(0) \vee \varphi(1)$.

3.21 设 $\mu\Omega < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $f \in M(\Omega)$, 则

$$f \in L^p \Leftrightarrow \sum_1^\infty n^{p-1} \mu\{|f| \geq n\} < \infty.$$

提示: 用题 2.3 的证法.

C, L^p 收敛问题.

为解此类问题, 你应时刻记得以下结论:

(i) 若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$, 则 $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 且有子列 $f_{n_i} \rightarrow f$ a.e..

(ii) 若 $\mu\Omega < \infty$, $1 \leq p < r$, 则 $f_n \xrightarrow{L^r} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f$; 特别 $f_n \xrightarrow{L^\infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^p} f$.

3.22 设 $f_n \xrightarrow{L^p} f$, $f_n \rightarrow g$ a.e., 则 $f_n \rightarrow f$ a.e..

提示: 有子列 $f_{n_i} \rightarrow f$ a.e..

3.23 设 $f_n \xrightarrow{L^p} f$, $g_n \xrightarrow{L^q} g$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, 则 $f_n g_n \xrightarrow{L^1} fg$.

证 用三角不等式与 Hölder 不等式:

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_1 &\leq \|f_n g_n - f g_n\|_1 + \|f g_n - fg\|_1 \\ &\leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q \rightarrow 0, \end{aligned}$$

其中用到 $\{\|g_n\|_q\}$ 有界. \square

除了应用 Hölder 不等式这一点之外, 以上论证与通常的极限论证明并无差别.

3.24 设 $\{f_n\} \subset L^1[a, b]$, $f_n \xrightarrow{L^1} f$, 则

$$\int_a^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

提示: 注意 $\left| \int_a^x [f_n(t) - f(t)] dt \right| \leq \|f_n - f\|_1$ 并用题 3.13.

3.25 设 $f, f_n \in L^p(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$), $1 \leq p < \infty$, $f_n \rightarrow f$ a.e.,

则 $f_n \xrightarrow{L^p} f \Leftrightarrow \|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ (参照题 2.40).

证 设 $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$. 类似于题 2.39 之证, 对非负函数列

$$2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$$

用 Fatou 定理:

$$\begin{aligned} 2^{p+1} \|f\|_p^p &= \int_\Omega \lim_n [2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p] d\mu \\ &\leq \liminf_n \int_\Omega [2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p] d\mu \end{aligned}$$

$$= 2^{p+1} \|f\|_p^p - \overline{\lim}_n \|f_n - f\|_p^p,$$

由此立得 $f_n \xrightarrow{L^p} f$. 逆命题不必证. \square

上题如同题 2.39 与 2.40 一样,都基于巧用 Fatou 定理.仔细体会了这几题之后,你就不难证明题 2.39 的以下类似.

3.26 设 $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $f_n \rightarrow f$ a.e., $|f_n| \leq g_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), $g_n \xrightarrow{L^p} g$, $1 \leq p < \infty$, 则 $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

3.27 设 $1 \leq p < \infty$, $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $f_n \rightarrow f$ a.e., $|f_n| \leq g \in L^p$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), 则 $f_n \xrightarrow{L^p} f$. (L^p 控制收敛定理.)

提示:用上题或直接用 Fatou 定理证明.

3.28 设 $1 \leq p < \infty$, $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p < \infty$, $f_n \rightarrow f$ a.e., 则对任何可测集 $A \subset \Omega$ 有 $\int_A |f_n|^p d\mu \rightarrow \int_A |f|^p d\mu$.

提示:用题 2.25 或直接用 Fatou 定理证明.

设 $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. 若 $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$, 则说 $\{f_n\}$ L^p 有界. 若

$$\lim_{\mu A \rightarrow 0} \sup_n \int_A |f_n| d\mu = 0, \quad (10)$$

则说 $\{f_n\}$ 有一致连续积分. 若

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\{|f_n| \geq a\}} |f_n| d\mu = 0, \quad (11)$$

则说 $\{f_n\}$ 一致可积. 这些概念在积分论及其应用中被广泛使用. 下面的材料虽然不是本课程所要求的,但力有余裕的读者必定会很感兴趣.

3.29 若 $\{f_n\} \subset L^1(\Omega)$ 有一致连续积分且 L^1 有界, 则 $\{f_n\}$ 一致可积. 当 $\mu\Omega < \infty$ 时其逆亦真.

证 设 $\beta \triangleq \sup_n \|f_n\|_1 < \infty$. $\forall a > 0$, 有 $\mu\{|f_n| \geq a\} \leq a^{-1} \|f_n\|_1 \leq \beta/a$ (用 § 2.1(7)). 于是, 当 $\{f_n\}$ 有一致连续积分时, 由 $\mu\{|f_n| \geq a\} \rightarrow 0$ ($a \rightarrow \infty$) 推出 (11) 成立. 反之, 设 (11) 成立, $A \subset \Omega$ 可测, 则

$$\int_A |f_n| d\mu \leq \int_{A \cap \{|f_n| \leq a\}} + \int_{\{|f_n| > a\}},$$

上式右端第一项 $\leq a\mu A$, 第二项当 $a \rightarrow \infty$ 时对 n 一致收敛于零. 因此 (10) 必成立. 若再设 $\mu\Omega < \infty$, 则 $\forall a > 0$ 有

$$\|f_n\|_p^p \leq a\mu\Omega + \int_{\{|f_n| \geq a\}} |f_n| d\mu,$$

这结合 (11) 得出 $\{f_n\}$ 的 L^1 有界性. □

3.30 若 $\{f_n\} \subset M(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $f_n \rightarrow f$ a.e.. 若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$, 则 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积; 当 $\mu\Omega < \infty$ 时其逆亦真.

证 由 $f_n \xrightarrow{L^p} f$ 显然推出 $\sup_n \|f\|_p < \infty$,

$$\int_A |f_n|^p d\mu \rightarrow \int_A |f|^p d\mu \quad (\forall A \in \mathcal{A}),$$

于是由

$$\int_A |f_n|^p d\mu \leq \int_A |f|^p d\mu + \left| \int_A |f_n|^p d\mu - \int_A |f|^p d\mu \right|$$

推出 $\{|f_n|^p\}$ 有一致连续积分, 因此 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积(用上题).

反之, 设 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积且 $\mu\Omega < \infty$, 则

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p^p &= \int_{\{|f_n| \leq a\}} |f_n - f|^p d\mu + \int_{\{|f_n| > a\}} |f_n - f|^p d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} \chi_{\{|f_n| \leq a\}} |f_n - f|^p d\mu \\ &\quad + 2^p \int_{\{|f_n| > a\}} (|f_n|^p + |f|^p) d\mu, \end{aligned}$$

对其右端两项分别用有界收敛定理(定理 2.1.2(iii))与一致可积条件, 得出 $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. □

3.31 设 $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ 为 L^p 有界, $1 < p < \infty$, $f_n \rightarrow f$ a.e., $\mu A < \infty$, 则 $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$.

证 不妨设 $A = \Omega$ 且 $\mu\Omega < \infty$ (否则以 $f_n \chi_A$ 代 f_n) 亦可设 $f =$

0 (否则以 $f_n - f$ 代 f_n), 于是有 $f_n \xrightarrow{\mu} 0, \forall \varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_n| d\mu &= \int_{\{|f_n| < \varepsilon\}} |f_n| d\mu + \int_{\{|f_n| \geq \varepsilon\}} |f_n| d\mu \\ &\leq \varepsilon \mu\Omega + \|f_n\|_p (\mu\{|f_n| \geq \varepsilon\})^{1/q}, \end{aligned}$$

其中 $q = p/(p-1)$. 固定 ε , 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $\lim_n \|f_n\|_1 \leq \varepsilon \mu\Omega$; 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得 $\lim_n \|f_n\|_1 = 0$, 即得所要证. \square

3.32 设 $\mu\Omega < \infty, 1 \leq r < p < \infty, \{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ 为 L^p 有界, $f_n \rightarrow f$ a.e., 则 $f_n \xrightarrow{L^r} f$.

提示: 沿用上题证法, 并参照题 3.13.

D. 逼近问题

前面已经提到, 用简单的元素逼近一般的元素, 是处理赋范空间问题的普遍方法. 这种方法对于 L^p 空间尤其见效, 因 L^p 空间中的函数一般是“很坏的”, 如果不挑选一些特别好的函数去逼近, 就可能有难以克服的困难. 下面主要考虑 L^p 逼近问题, 通过这类问题, 你将看到函数空间方法具有何等力量.

3.33 设 $f \in L^1[a, b]$, 则 $\lim_n \int_a^b f(x) e^{inx} dx = 0$.

证 证明典型地由如下三个递进的步骤完成:

(i) 设 $f = \chi_{(\alpha, \beta)} (\alpha, \beta) \subset [a, b]$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{inx} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} e^{inx} dx \\ &= (e^{in\beta} - e^{in\alpha}) / in \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(ii) 设 f 是阶梯函数, 则 f 可看作形如 $\chi_{(\alpha, \beta)}$ 的函数的线性组合, 于是由第一段所证亦得 $\int_a^b f(x) e^{inx} dx \rightarrow 0$.

(iii) 一般情况. $\forall \varepsilon > 0$, 取阶梯函数 $g(x)$, 使 $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ (依定理 3.1.3). 由已证的(i)知 $\int_a^b g(x) e^{inx} dx \rightarrow 0$, 故有 $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$, 有 $\left| \int_a^b g(x) e^{inx} dx \right| < \varepsilon$. 于是当 $n \geq n_0$ 时有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{inx} dx \right| &\leq \left| \int_a^b f(x) e^{inx} dx - \int_a^b g(x) e^{inx} dx \right| \\ &\quad + \left| \int_a^b g(x) e^{inx} dx \right| \\ &\leq \|f - g\|_1 + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

由此得出所要证. □

以上论证中的第(ii)步,通常十分明显,因而一般可以省略.至于其它两步,或难或易依赖于问题的具体性质.总的说来,这种形式的逼近方法所带来的简化是明显的.例如对于上题,若不用逼近方法该如何证明?你不妨去尝试一下.亦宜注意,解法的难易取决于基本集的选择.在解题 3.33 时,我们选择了 $\{\chi_{(\alpha, \beta)} : a \leq \alpha < \beta \leq b\}$ 作为空间 $L^1[a, b]$ 的基本集.若用基本集 $\{x^k : k \in \mathbb{Z}_+\}$,虽然亦可,但第(i)步需用分部积分,要多一些计算.

3.34 设 $f \in L^1[a, b]$, 则

$$\lim_n \int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx.$$

提示:用题 3.33 的证法,关键性的一步是说明

$$\int_a^\beta |\sin nx| dx = \frac{1}{n} \int_{n\alpha}^{n\beta} |\sin x| dx \rightarrow \frac{2(\beta - \alpha)}{\pi}.$$

3.35 设 $f \in L^1[a, b]$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 有界可测且以 T 为周期, 则

$$\lim_n \int_a^b f(x) g(nx) dx = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) dx \int_0^T g(x) dx.$$

这显然是题 3.34 的一般化,自然用同样的证法.

3.36 设 $f \in L^1[a, b]$, $\sup_n \|g_n\|_\infty < \infty$, $\lim_n \int_a^x g_n(t) dt = 0$

($a \leq x \leq b$), 则 $\lim_n \int_a^b f(x) g_n(x) dx = 0$.

这是题 3.34 的另一种形式的推广,其证明是类似的.

3.37 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 以 T 为周期且在 $[0, T]$ 上可积, 则

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

证 (i) 设 $f|_{[0, T)} = \chi_{[0, \beta)}$, $0 < \beta < T$, $mT \leq b < (n+1)T$,

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx &= \frac{n}{b} \int_0^T \chi_{[0, \theta]}(x) dx + \frac{1}{b} \int_{nT}^b f(x) dx \\ &= \frac{n\beta}{b} + \frac{(b - nT)\theta}{b} \quad (0 \leq \theta \leq 1) \\ &\rightarrow \frac{\beta}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \quad (b \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, 必有 $[0, T]$ 上的阶梯函数 $g(x)$, 使得

$$\int_0^T |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

将 $g(x)$ 自然地扩张为周期为 T 的函数. 由已证结论推出

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_0^b g(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx.$$

因此有 $b_0 > 0, \forall b \geq b_0$:

$$\left| \frac{1}{b} \int_0^b g(x) dx - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \right| < \varepsilon.$$

于是当 $b \geq b_0, nT \leq b < (n+1)T$ 时,

$$\begin{aligned}& \left| \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx - \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{b} \int_0^b [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \frac{1}{T} \int_0^T [g(x) - f(x)] dx \right| + \varepsilon \\ & \leq \left(\frac{n+1}{b} + \frac{1}{T} \right) \varepsilon \leq \frac{3\varepsilon}{T},\end{aligned}$$

这得出要证结论. □

3.38 设 $f \in L^p[a, b], 1 \leq p < \infty$, 在 $[a, b]$ 之外认定 $f = 0$, 则

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_a^b |f(x + \tau) - f(x)|^p dx = 0.$$

证 (i) 设 $f \in C[a, b] \forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta \in (0, \varepsilon)$, 使当 $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ 时 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 则当 $|\tau| < \delta$ 时

$$\int_a^b |f(x + \tau) - f(x)|^p dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{a+\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \int_{b-\varepsilon}^b \\
&\leq 2\varepsilon \cdot 2^p \|f\|_0^p + (b-a-2\delta)\varepsilon,
\end{aligned}$$

这表明要证的极限式成立.

(ii) 一般情况下, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $g \in C[a, b]$, 使 $\|f - g\|_p^p < \varepsilon$. 取 $\delta > 0$, 使当 $|\tau| < \delta$ 时 $\int_a^b |g(x+\tau) - g(x)|^p dx < \varepsilon$. 于是, 当 $|\tau| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f(x+\tau) - f(x)|^p dx \\
&\leq 3^{p-1} \left[\int_a^b |f(x+\tau) - g(x+\tau)|^p dx \right. \\
&\quad + \int_a^b |g(x+\tau) - g(x)|^p dx \\
&\quad \left. + \int_a^b |g(x) - f(x)|^p dx \right] \\
&< 3^{p-1}(\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon) = 3^p \varepsilon,
\end{aligned}$$

由此得出所要证. □

上面证明的最后一步用到一个常用的初等不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^n x_i^p \quad (x_i \geq 0, p \geq 1), \quad (12)$$

它是 Hölder 不等式 (6) 的推论 (你试证之!).

上题中的结论有极大应用价值. 下面就是一个简单例子:

3.39 设 $f \in L[-\pi, \pi]$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ ($k \in \mathbf{Z}$), 则

$$\hat{f}(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0.$$

证 利用 $-1 = e^{i\pi}$:

$$\begin{aligned}
2|\hat{f}(k)| &= |\hat{f}(k) - e^{i\pi} \hat{f}(k)| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ik(x-\pi/k)} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x + \pi/k)| dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad \square
\end{aligned}$$

现在由你来证明题 3.38 与 3.39 的以下推广,其证法是类似的.

3.40 设 $f \in L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p < \infty$, 则

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x + \tau) - f(x)|^p dx = 0.$$

3.41 设 $f \in L^1(\mathbf{R})$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$, 则 $\hat{f}(\pm\infty) = 0$.

3.42 设 $f \in L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p < \infty$, 则

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} |f(x + y) + f(x)|^p dx = 2 \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx.$$

证 (i) 设 $f \in C_c(\mathbf{R})$, $\text{supp } f \subset [-a, a]$, $a > 0$. 令 $f_y(x) = f(x + y)$, 则当 $|y| > 2a$ 时 $\text{supp } f \cap \text{supp } f_y = \emptyset$, 于是

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} |f(x + y) + f(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} |f_y + f|^p dx = \int_{\text{supp } f} |f|^p dx + \int_{\text{supp } f_y} |f_y|^p dx \\ &= 2 \int_{\mathbf{R}} |f|^p dx. \end{aligned}$$

(ii) 一般情况. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $g \in C_c(\mathbf{R})$, 使 $\|f - g\|_p < \varepsilon$. 注意要证极限式相当于 $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \|f_y + f\|_p = 2^{1/p} \|f\|_p$. 由已证结论, 有 $a > 0$, 使当 $|y| > a$ 时

$$\| \|g_y + g\|_p - 2^{1/p} \|g\|_p \| < \varepsilon.$$

于是, 当 $|y| > a$ 时有

$$\begin{aligned} & \left| \|f_y + f\|_p - 2^{1/p} \|f\|_p \right| \\ & \leq \left| \|f_y + f\|_p - \|g_y + g\|_p \right| + \varepsilon \\ & \quad + \left| 2^{1/p} \|g\|_p - 2^{1/p} \|f\|_p \right| \\ & \leq \|f_y + f - g_y - g\|_p + \varepsilon + 2^{1/p} \|g - f\|_p \\ & \leq \|f_y - g_y\|_p + \|f - g\|_p + \varepsilon + 2^{1/p} \varepsilon \\ & < (3 + 2^{1/p}) \varepsilon, \end{aligned}$$

这得出所要证. □

在上题证明中, 将所证结论改写成 $\|f_y + f\|_p \rightarrow 2^{1/p} \|f\|_p$, 看

起来似乎只是一种形式变化,但实际上起了关键作用.唯其如此,才便于应用关于 L^p 范数的三角不等式.在积分形式下使用三角不等式是极不方便的,也是不自然的.

3.43 设 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, 则

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+y) + f(x)|^p dx = 2 \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p dx.$$

提示:用上题的证法.

3.44 设 $A \subset \mathbf{R}^n$, $mA < \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} m(A \Delta (A+x)) = 0$.

提示:用题 3.40 的一个 n 维推广.

以上的逼近问题仅用到 Lebesgue 积分.涉及抽象 Lebesgue 积分的情况亦可用逼近方法,只是选择余地要小些.下面举一个例子来说明.

3.45 设 $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ 为 L^p 有界, $1 < p = q/(q-1) < \infty$, $f_n \rightarrow f$ a.e., 则对每个 $g \in L^q(\Omega)$ 有 $\int_{\Omega} f_n g d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f g d\mu$.

证 (i) 设 $g = \chi_A$, $0 < \mu A < \infty$, 则由题 3.31 有

$$\int_{\Omega} f_n g d\mu = \int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu = \int_{\Omega} f g d\mu.$$

(ii) 取定 $g \in L^q(\Omega)$. $\forall \varepsilon > 0$, 取简单函数 φ , 使 $\|\varphi - g\|_q < \varepsilon$ (依定理 3.1.3). 由已证的(i)可推出 $\int_{\Omega} f_n \varphi d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi d\mu$. 于是存在 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使得 $\forall n \geq n_0$, 有

$$\left| \int_{\Omega} f_n \varphi d\mu - \int_{\Omega} f \varphi d\mu \right| < \varepsilon.$$

于是, 当 $n \geq n_0$ 时有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} f_n g d\mu - \int_{\Omega} f g d\mu \right| \\ & \leq \|f_n g - f_n \varphi\|_1 + \varepsilon + \|f \varphi - f g\|_1 \\ & \leq \|f_n\|_p \|g - \varphi\|_q + \varepsilon + \|f\|_p \|\varphi - g\|_q \\ & < \varepsilon (\|f_n\|_p + 1 + \|f\|_p), \end{aligned}$$

由此得所要证. □

E. 其他函数空间

本节以主要的篇幅研究了 L^p 空间,这当然与 L^p 空间的广泛应用相适应.但这并不意味着其他的函数空间就不重要.应该给你机会来熟悉一些别的例子,它们多少说明了函数空间的多样性.

3.46 $C_0(\mathbf{R}) \triangleq \{f \in C(\mathbf{R}) : f(\pm\infty) = 0\}$ 依 \sup 范数 $\|\cdot\|_0$ 是可分 Banach 空间.

证 让我们依次验证题中所述结论.

(i) $C_0(\mathbf{R})$ 显然是一个向量空间.

(ii) \sup 范数 $\|\cdot\|_0$ 满足范数公理 $(N_1) \sim (N_3)$ 验证是平凡的.

(iii) 完备性. 设 $\{f_n\} \subset C_0(\mathbf{R})$ 是 Cauchy 列, 即 $\|f_m - f_n\|_0 \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$), 则 $\forall x \in \mathbf{R}$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 一致地满足 Cauchy 收敛条件, 因而 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ($\forall x \in \mathbf{R}$), $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的连续函数. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使得 $\|f_m - f_n\|_0 < \varepsilon$ ($\forall m, n \geq n_0$), 这推出

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (m, n \geq n_0, x \in \mathbf{R}).$$

令 $m \rightarrow \infty$ 得出

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0, x \in \mathbf{R}). \quad (*)$$

这推出

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0, x \in \mathbf{R}),$$

于是 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| \leq \varepsilon$; 由 ε 的任意性得 $f(\pm\infty) = 0$, 因此 $f \in C_0(\mathbf{R})$. 条件 (*) 意味着 $\|f - f_n\|_0 \leq \varepsilon$ ($\forall n \geq n_0$), 这表明 $\|f_n - f\|_0 \rightarrow 0$. 完备性得证.

(iv) 可分性. 以 A 记 $C_0(\mathbf{R})$ 的如下子集: $f \in A \Leftrightarrow f$ 是连续的分段线性函数, 它仅有有限多个不可微点且皆为有理点, 在这些点 f 取有理数值, $\text{supp } f$ 是有界集. 则 A 是可数集 (用定理 1.1.2). 今证 A 在 $C_0(\mathbf{R})$ 中稠密. 取定 $f \in C_0(\mathbf{R})$ 与 $\varepsilon > 0$. 取 $a > 0$ 充分大, 使得当 $|x| \geq a$ 时 $|f(x)| < \varepsilon$. 由 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上一致连续, 不难造出连续的分段线性函数 $g(x)$, 使得 $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ ($|x| \leq a$), 且 $g(\pm a) < \varepsilon$. 将 $g(x)$ 连续地且分段线性地扩张到 \mathbf{R} 上, 使得 $|x| > a + 1$ 时 $g(x) = 0$, 这样, $\|f - g\|_0 \leq 2\varepsilon$. 然后对 $g(x)$ 作微小修

正, 得到函数 $\varphi \in A$, 且 $\|\varphi - g\|_0 < \varepsilon$, 则 $\|\varphi - f\|_0 < 3\varepsilon$. 因此 $C_0(\mathbf{R})$ 是可分的. \square

3.47 区间 $[a, b]$ 上的有界变差函数类 BV 依如下范数 $\|f\| = |f(a)| + V_a^b(f)$ 是不可分的 Banach 空间.

证 你不难验证 BV 是赋范空间.

完备性: 设 $\|f_m - f_n\| \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$. 令 $\varphi_{mn} = f_m - f_n$, 则 $\varphi_{mn}(x) \leq |\varphi_{mn}(a)| + |\varphi_{mn}(x) - \varphi_{mn}(a)|$
 $\leq |\varphi_{mn}(a)| + V_a^b(\varphi_{mn}) = \|f_m - f_n\| (a \leq x \leq b)$,
 这推出 $f_n(x) \rightarrow f(x) (a \leq x \leq b)$. 因 $\sup_n V_a^b(f_n) \leq \sup_n \|f_n\| < \infty$,
 故 $f \in BV$ (用题 2.73). $\forall \varepsilon > 0$, 取 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使得 $\forall m, n \geq n_0$, 有
 $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$. 任取 $[a, b]$ 的分割 $\{x_i\}$, 有

$$|\varphi_{mn}(a)| + \sum_i |\Delta \varphi_{mn}(x_i)| < \varepsilon \quad (m, n \geq n_0).$$

令 $m \rightarrow \infty$, 得

$$|f_n(a) - f(a)| + \sum_i |\Delta f_n(x_i) - \Delta f(x_i)| \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0).$$

由 $\{x_i\}$ 的任意性, 得

$$|f_n(a) - f(a)| + V_a^b(f_n - f) \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0),$$

即 $\|f_n - f\| \leq \varepsilon (\forall n \geq n_0)$. 这表明 $\|f_n - f\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

不可分性: 令 $f_x = \chi_{[a, x]}, A = \{f_x : x \in [a, b]\}$, 则 $A \subset BV$ 是不可数集. 若 BV 可分, 则有可数集 Φ 在 BV 中稠密. 特别, $\forall x \in [a, b]$, 有 $\varphi_x \in \Phi$, 使得 $\|f_x - \varphi_x\| < 1/2$. 若 $x, y \in [a, b], x \neq y$, 则

$$\begin{aligned} \|\varphi_x - \varphi_y\| &\geq \|f_x - f_y\| - \|\varphi_x - f_x\| - \|\varphi_y - f_y\| \\ &> 2 - 1/2 - 1/2 = 0, \end{aligned}$$

可见 $\varphi_x \neq \varphi_y$. 这表明 $A \rightarrow \Phi, f_x \rightarrow \varphi_x$ 是一单射, 但这与 A 不可数相矛盾 (参考定理 1.1.1). \square

3.48 区间 $[a, b]$ 上的绝对连续函数类 AC 依如下范数 $\|f\| = |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx$ 是可分 Banach 空间.

提示: 完备性的验证类似于题 3.47: 若 $\{f_n\}$ 为 Cauchy 列, 则必

$f_n \Rightarrow f, f'_n \xrightarrow{L^1} g$ 且 $g = f'$ a.e.. 可分性: 每个 $f \in AC$ 可用多项式逼近.

3.49 设 $0 < \alpha \leq 1$,

$$\|f\|_\alpha = |f(a)| + \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in [a, b]}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

则 $H^\alpha \triangleq \{f : \|f\|_\alpha < \infty\}$ 依范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 是一 Banach 空间.

提示: 验证完备性时利用 $|f(x)| \leq |f(a)| + \|f\|_\alpha |x - a|^\alpha$; $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列 $\Rightarrow f_n \Rightarrow f$.

前面我们曾提到, 在函数空间中选择收敛性时, 需要是第一位的, 而可赋范性固然重要, 但亦不可苛求. 有些应用上重要的收敛性确非范数收敛. 在这种情况下, 常常使用某种拟范数来描述收敛性. 设 X 是 \mathbf{K} 上的向量空间, 若存在函数 $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}$, 它满足范数公理 ($N_2 \times N_3$) 及条件 $\| -x \| = \|x\|, \alpha_n \rightarrow 0, \|x_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|\alpha_n x\| \rightarrow 0, \|\alpha x_n\| \rightarrow 0$, 则称之为拟范数. 设 X 中已定义一个拟范数 $\|\cdot\|$, 仍然称 $\|x - y\|$ 为 x, y 之间的距离, 并记作 $d(x, y)$, 则可验证距离 d 有以下性质:

(i) 对称性: $d(x, y) = d(y, x)$;

(ii) 三角不等式: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;

(iii) 正定性: $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

因而 X 依距离 d 成为一个距离空间. 若在 X 中 $d(x_n, x) \rightarrow 0$, 即 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, 则说 $\{x_n\}$ 收敛于 x . 形式上完全与赋范空间中一样, 当 $\{x_n\} \subset X$ 满足 $\lim_{m, n} \|x_m - x_n\| = 0$ 时称它为 Cauchy 列. 若 X 中的所有 Cauchy 列皆收敛, 则说 X 是完备的.

通常依如下方式引进拟范数: 在 X 中定义一系列所谓半范 $\{\|\cdot\|_n\}$, 其中每个 $\|\cdot\|_n$ 满足范数公理 ($N_1 \times N_2$), 且 $x = 0 \Leftrightarrow \|x\|_n = 0 (\forall n \in \mathbf{N})$, 然后令

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1 + \|x\|_n},$$

则可验证 $\|\cdot\|$ 是一个拟范数, 且对于序列 $\{x_k\} \subset X, \|x_k\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_k\|_n \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty, \forall n \in \mathbf{N})$. 当 X 依一个如此的拟范数完备时

称为 Frechét 空间. 下面由你来研究三个应用上重要的 Frechét 空间的例子.

3.50 设 $C^\infty[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上无限次可微函数之全体. 则 $C^\infty[a, b]$ 依半范族 $\{\|f\|_n = \|f^{(n)}\|_0 : n \geq 0\}$ 是一个 Frechét 空间.

证 $\|f\|_n$ 显然满足范数公理 $(N_1)(N_2)$; $f \equiv 0 \Leftrightarrow \forall n \geq 0, \text{有 } \|f^{(n)}\|_0 = 0$. 只要证完备性. 设 $\{f_k\} \subset C^\infty[a, b]$ 是一个 Cauchy 列, 则

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f_k^{(n)} - f_l^{(n)}\|_0}{1 + \|f_k^{(n)} - f_l^{(n)}\|_0} = 0.$$

这推出

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|f_k^{(n)} - f_l^{(n)}\|_0 = 0 \quad (\forall n \geq 0).$$

由熟知的数学分析定理, 知存在 $g_n \in C[a, b]$, 使得 $f_k^{(n)} \Rightarrow g_n (k \rightarrow \infty, n \geq 0)$. 这就可归纳地推出 $g_{n+1} = g'_n (n \geq 0)$, 从而 $f = g_0 \in C^\infty[a, b]$, $g_n = f^{(n)}$,

$$\|f_k^{(n)} - f^{(n)}\|_0 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty, n \geq 0).$$

由

$$\|f_k - f\| \leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \frac{\|f_k^{(i)} - f^{(i)}\|_0}{1 + \|f_k^{(i)} - f^{(i)}\|_0} + \frac{1}{2^n}$$

看出 $\|f_k - f\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 完备性得证. □

仿此, 你可以证明:

3.51 $C(\mathbf{R})$ 依半范族 $\{\|f\|_n = \sup_{|x| \leq n} |f(x)| : n \in \mathbf{N}\}$ 是一个 Frechét 空间.

注意, 在如上定义的 Frechét 空间 $C(\mathbf{R})$ 中, $f_k \rightarrow f$ 意味着在任何有限区间 $[a, b]$ 上 $f_k \Rightarrow f$, 这种收敛通常称为局部一致收敛或紧一致收敛, 是最常用的收敛性之一, 尽管它不是范数收敛.

3.52 $C(0, 1)$ 依半范族

$$\{\|f\|_n = \sup_{1/n \leq x \leq 1-1/n} |f(x)| : n \geq 3\}$$

是一个 Frechét 空间, 其中的收敛就是在 $(0, 1)$ 内每个闭区间上一致收

敛.

上述的“内闭一致收敛”实质上与题 3.51 中的收敛属同一类型,在分析中亦被普遍使用.

§ 3.2 点集与映射

一、定理与定义

在 § 1.1 中已简略地提到 Euclid 空间中的点集,并且指出那里的许多概念在任何界定了距离的空间中都可以定义.赋范空间正是这样一种能定义距离的空间,因而其中可系统地建立点集理论.如我们在上节已说及的,处理抽象空间问题应尽可能利用几何类比形成直观形象.点集理论将突出地体现这一思路.

以下设 X 是一给定的赋范空间.任何 $x \in X$ 称为点或向量, $\|x\|$ 就看作向量 x 的长度.任给 $x, y \in X$, 称 $\|x - y\|$ 为点 x 与 y 之间的距离,也记作 $d(x, y)$.更一般地,任给 $A, B \subset X$, 定义 A, B 之间的距离为

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|;$$

约定 $d(x, B) = d(\{x\}, B)$. 定义集 A 的直径为

$$\text{diam} A = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|;$$

当 $\text{diam} A < \infty$ 时称 A 为有界集.给定 $a \in X, r > 0$, 令

$$B_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| < r\};$$

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\},$$

二者分别称为 X 中以 a 为心以 r 为半径的开球与闭球,开球就简称为球.球是极形象的概念,利用它可描述点集的多种特性.如下定义使得我们直观中极熟悉的一些几何名词在赋范空间中获得了严格意义.

定义 3.2.1 设 $A \subset X$.

(i) 集 A 的内部 A° 、闭包 \bar{A} 与导集 A' 分别界定如下:

$$A^\circ = \{x \in A : \exists r > 0, \text{使 } B_r(x) \subset A\};$$

$$\bar{A} = \{x \in X : \forall r > 0, \text{有 } A \cap B_r(x) \neq \emptyset\};$$

$$A' = \{x \in X : \forall r > 0, \text{有 } (A \setminus \{x\}) \cap B_r(x) \neq \emptyset\}.$$

称 $\partial A \triangleq \bar{A} \setminus A^\circ$ 为 A 的边界. 集 A°, \bar{A}, A' 与 ∂A 中的点分别称为 A 的内点、触点、极限点与边界点.

(ii) 若 $A = A^\circ$, 则称 A 为开集; 若 $A = \bar{A}$, 则称 A 为闭集; 若 $\bar{A} = X$, 则称 A 为 X 中的稠集; 若 $B \subset \bar{A}$, 则说 A 在 B 中稠密.

直观上, x 是 A 的内点意味着, x 本身连同它邻近的点都属于 A ; x 是 A 的边界点意味着, 在 x 的任意邻近处既有 A 中的点又有 A 以外的点. 对于其他概念亦可作类似的直观解释. 这样, 点集概念的直观含义与我们对内部、边界等名词的日常理解恰好一致. 这一点是学习点集论时首先要明确的, 你将调动自己的全部直观经验去想象与理解抽象地给定的点集概念. 然而, 得立即告诉你, 仅仅这样做是远远不够的! 赋范空间中的点集论毕竟是建立在范数公理基础上的逻辑系统, 它的所有结论都来自严格论证. 人类的直观经验则来自我们对生活于其中的三维物理空间的日常体验, 它固然有益, 但往往是肤浅的, 盲目的运用可能引致误导, 这是学习泛函分析时不可不注意的.

为能熟练地运用内部、闭包、开集、闭集等基本点集概念, 必须了解诸概念之间的种种相互关系, 这涉及一系列数量可观的简单命题, 这些对你并无特别的吸引力, 但从今后的应用来看又不可避免. 那些最不可缺少的结论就汇集在以下的定理中.

定理 3.2.1 设 $A, B \subset X$, 则以下结论成立:

(i) 闭包的刻画: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ 存在序列 $\{x_n\} \subset A$, 使得 $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A \cup A' \Leftrightarrow x \in A \cup \partial A$.

(ii) 极限点的刻画: $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \Leftrightarrow$ 存在序列 $\{x_n\} \subset A$, 使得 $x \neq x_n \rightarrow x$.

(iii) 内部与闭包的性质: $A^\circ = (\bar{A}^c)^c$, $\bar{A} = A^{coc}$ (对偶性); $A^\circ \subset A$, $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$, $A^\circ = A^{\circ\circ}$, $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$; $A \subset \bar{A}$, $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$, $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\bar{A} = A \cup A' = A \cup \partial A = A^\circ \cup \partial A$; $A^\circ = \bar{A} \setminus \partial A = A \setminus \partial A$.

(iv) 开集的刻画: A 是开集 $\Leftrightarrow A \subset A^\circ \Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset \Leftrightarrow A$ 是开球的并 $\Leftrightarrow A^c$ 是闭集.

(v) 闭集的刻画: A 是闭集 $\Leftrightarrow \bar{A} \subset A \Leftrightarrow A' \subset A \Leftrightarrow \partial A \subset A \Leftrightarrow A^c$ 是开集 $\Leftrightarrow A$ 对极限运算封闭, 即 A 中收敛序列的极限皆属于 A .

(vi) 开集与闭集的运算性质: X 中任意个开集的并与有限个开集的交是开集, 任意个闭集的交与有限个闭集的并是闭集. 若 A 是开集, B 是闭集, 则 $A \setminus B$ 是开集, $B \setminus A$ 是闭集.

(vii) X 与 \emptyset 既是开集又是闭集, 它们是有这种性质的仅有的集.

你不必担心如何记得住这许多琐碎的结论, 那些经常运用的结论会自然地融入你的脑海, 并逐渐成为常识的一部分. 因此, 熟悉在于运用! 至于在目前, 获得理解的最好的办法是动手去证明! 定理 3.2.1 中所有结论的证明都是简单的, 你至少应将推导出其中一部分作为自己的练习.

在 § 1.1 中已初步考虑了映射概念, 现在考虑赋范空间之间的映射. 以下设 X, Y 是 K 上的赋范空间. 写出记号

$$F: D \subset X \rightarrow Y,$$

就意味着 $F: D \rightarrow Y$ 是一个映射, 其中 D 是 X 的非空子集.

定义 3.2.2 给定映射 $F: D \subset X \rightarrow Y$ 与点 $x_0 \in D$. 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in D$, $\|x - x_0\| < \delta$ 时恒有 $\|Fx - Fx_0\| < \epsilon$, 则说 F 在点 x_0 连续. 若 F 在 D 上每点连续, 则说 F 在 D 上连续.

约定以 $\mathcal{C}(D, Y)$ 记从 D 到 Y 的连续映射之全体, 而令 $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(D, K)$, $K = \mathbf{R}$ 或 \mathbf{C} . 通常称 $f \in \mathcal{C}(D)$ 为连续函数或连续泛函. 不过, 记号与术语的选择并不是本质的, 它们只不过是约定俗成而已.

$F: D \subset X \rightarrow Y$ 在 x_0 连续意味着,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: F(D \cap B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(Fx_0);$$

而这又等价于: 若在 D 中 $x_n \rightarrow x_0$, 则 $Fx_n \rightarrow Fx_0$ ($n \rightarrow \infty$). 由此可见, 此处所说的连续性, 与你从数学分析中所学到的连续性, 实质上并无差别. 这就不难理解, 关于连续函数的一些熟知性质, 例如连续函数的和是连续函数, 连续函数的复合函数是连续函数, 等等, 皆可自然地推广于赋范空间上的连续映射.

定理 3.2.2 设 $F: D \subset X \rightarrow Y, f: D \subset X \rightarrow \mathbf{R}$.

(i) 若 D 是开集, 则 $F \in \mathcal{C}(D, Y) \Leftrightarrow$ 任给开集 $V \subset Y, F^{-1}V$ 是 X 中的开集; $f \in \mathcal{C}(D) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}, \{f > \alpha\}$ 与 $\{f < \alpha\}$ 是开集.

(ii) 若 D 是闭集, 则 $F \in \mathcal{C}(D, Y) \Leftrightarrow$ 任给闭集 $V \subset Y, F^{-1}V$ 是 X 中的闭集; $f \in \mathcal{C}(D) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}, \{f \geq \alpha\}$ 与 $\{f \leq \alpha\}$ 是闭集.

定理中的 $\{f < \alpha\} = \{x \in D: f(x) < \alpha\}$, 亦可写作 $D(f < \alpha)$.

定理 3.2.2 除了用于判定连续性之外, 一个重要应用是提供了一个构成开集与闭集的普遍方法. 一般的模式是: 若一个集 $A \subset X$ 由有限个不等式界定, 出现于不等式中的函数皆连续, 则当所有不等式是严格(不严格)不等式时, A 是开集(闭集). 例如,

$$\{x \in X: \|x\| < r, \|x - a\| > 1\}$$

与

$$\{x \in X: \|x\| \leq r, \|x - a\| \geq 1\}$$

分别为开集与闭集, 但对集

$$\{x \in X: \|x\| < r, \|x - a\| \geq 1\}$$

却不能作结论.

在数学分析中, 关于闭区间上的连续函数有一系列定理, 它们在分析中有基本意义. 那么, 它们能推广于赋范空间上的连续映射吗? 问题在于, 我们应以什么样的点集来取代闭区间? 代以闭集并不合适, 须知全空间就是闭集! 回想一下, 关于连续函数的定理(如有界性定理)是应用有限覆盖定理或类似的定理证明的. 因此, 使有限覆盖定理得以成立的点集, 应当正好是我们所寻求的闭区间的替代, 它就是点集论中非常重要的紧集, 下面是准确定义.

定义 3.2.3 设 $A \subset X$. 若 \mathcal{U} 是 X 的一族子集且其中诸集之并包含 A , 则说 \mathcal{U} 覆盖 A , 或称 \mathcal{U} 为 A 的一个覆盖. 若 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ 且 \mathcal{V} 亦覆盖 A , 则称 \mathcal{V} 为 \mathcal{U} 的子覆盖. 由开集组成的覆盖称为开覆盖. 若 A 的任何开覆盖有有限子覆盖(即由有限个集组成的子覆盖), 则称 A 为紧集. 若 \bar{A} 为紧集, 则称 A 为相对紧集. 若 $\forall r > 0, A$ 可用有限个半径为 r 的球覆盖, 则称 A 为全有界集.

简单地说, 紧集就是使有限覆盖定理成立的点集; 在直线上, 闭区

间与有界闭集就是这样的点集.但在一般的赋范空间中,紧集的具体形象并不明确,下面从几个不同方面予以刻画.

定理 3.2.3 (i) 紧集与闭集的关系:紧集必为闭集;紧集的闭子集是紧集;相对紧集的任何子集是相对紧集.

(ii) 紧集的条件:若 X 完备, $A \subset X$, 则 A 是紧集 $\Leftrightarrow A$ 中任何序列有收敛子列且其极限属于 $A \Leftrightarrow A$ 是全有界的闭集(完备性仅用于最后一个条件对于 A 为紧集的充分性).

(iii) 相对紧集的条件:若 X 完备, $A \subset X$, 则 A 是相对紧集 $\Leftrightarrow A$ 中任何序列有收敛子列 $\Leftrightarrow A$ 是全有界集(完备性作用同(ii)).

(iv) 有限维空间中的紧集:若 $\dim X < \infty$, $A \subset X$, 则 A 是紧集 $\Leftrightarrow A$ 是有界闭集; A 是相对紧集 $\Leftrightarrow A$ 是有界集.

(v) 闭球的紧性:若 $\dim X < \infty$, 则 X 中任何闭球是紧集;若 $\dim X = \infty$, 则 X 中任何有正半径的闭球是非紧的.

如果将闭球看作闭区间的最直接的推广,那么上面的结论表明,这种推广并非无条件地保持紧性.

利用紧集概念,可将数学分析中关于连续函数的主要定理推广于下.

定理 3.2.4 设 $D \subset X$ 是紧集, $F \in \mathcal{C}(D, Y)$, $f \in \mathcal{C}(D)$, 则有以下结论:

(i) F 在 D 上一致连续, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x, y \in D$, $\|x - y\| < \delta$ 时 $\|Fx - Fy\| < \epsilon$.

(ii) f 在 D 上达到最大值与最小值.

鉴于紧集在分析论证中的重要性,提出某些适于用作判别的紧集条件,就特别有意义.定理 3.2.3(ii) 所给那些条件过于一般化,用于特定的赋范空间并不很有效.对于像 $C[a, b]$ 与 $L^p[a, b]$ 这样的函数空间,已有判定紧性的适当条件可用.其中最常用的是如下著名的 Arzela-Ascoli 定理:

定理 3.2.5 $A \subset C[a, b]$ 为相对紧集的充要条件是:

(i) A 一致有界, 即 $\sup_{f \in A} \|f\|_0 < \infty$;

(ii) A 等度连续, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x, y \in [a, b]$,

当 $|x - y| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

后面有一些问题的解决要依赖于上述定理.

除了定理 3.2.4 这一类的结论之外,利用紧集还可以证明其他许多重要结果,你将从后面的问题看到足够多的例证.不过问题在于,在无限维空间中,连闭球这样足够规范的集都不是紧集,紧集无疑并不具有普遍性,因而其应用受到严重局限.因此,必要利用紧集以外的其它类型的点集. Baire 的第二纲集概念就是很可用的.

定义 3.2.4 设 $A \subset X$. 若 $(\bar{A})^\circ = \emptyset$, 则称 A 为疏集. 可数个疏集之并称为第一纲集; 非第一纲集称为第二纲集; 第一纲集的补集称为剩余集.

定理 3.2.6 (Baire 定理) 设 X 完备, $A \subset X$ 是第一纲集, 则 $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A^c} = X$; A^c 是第二纲集.

直观上, 可以认为疏集是“很小”的集. Baire 定理表明, 若 X 是 Banach 空间, 则从 X 中任意除去可数多个第一纲集(亦相当于除去可数多个疏集)之后, 剩余部分仍然大到足以超过任何第一纲集, 且在 X 中稠密. 因此可以说, X 中的第一纲集是微不足道的、可忽略的点集, 在一定意义上可类比于零测集, 而剩余集则几乎可等同于全空间. 这就为在赋范空间中刻画“稀有”与“一般”开辟了道路. 基于 Baire 定理而建立的一些泛函数分析定理, 都具有异乎寻常的深刻性, 这是不足为怪的.

设 $F: D \subset X \rightarrow Y$ 是一映射. 若存在常数 $r \in (0, 1)$, 使得

$$\|Fx - Fy\| \leq r \|x - y\| \quad (\forall x, y \in D),$$

则称 F 为压缩映射. 若 $x \in D$ 满足 $Fx = x$, 则称 x 为 F 的不动点. 关于压缩映射有以下著名定理(称为 Banach 不动点定理或压缩映射原理):

定理 3.2.7 设 D 是 Banach 空间 X 的非空闭子集, $F: D \rightarrow D$ 是一压缩映射, 则 F 在 D 上有唯一不动点 x^* . 任给 $x_0 \in D$, 令

$$x_n = Fx_{n-1} = F^n x_0,$$

则 $x_n \rightarrow x^*$.

定理中的 $\{x_n\}$ 称为迭代序列.

要对本节的众多概念与定理形成较具体的印象,唯有通过适当的练习.下面你有机会研究一般赋范空间、函数空间、及至 Euclid 空间中的各种点集.

二、问题与方法

A. 关于点集的一般问题

以下设 X, Y 是给定的赋范空间.

3.53 设 $A \subset X$, 则 $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\| (x, y \in X)$

证 取定 $x, y \in X, \forall a \in A$, 有

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

右端对 $a \in A$ 取下确界得 $d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A)$, 因此

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|.$$

同理

$$d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\|.$$

综合两者即得所要证. □

3.54 设 $A \subset X$, 则 A° 是开集, $\bar{A} \cap A'$ 是闭集.

证 由 $A^{\circ\circ} = A^\circ$ (定理 3.2.1(iii)) 知 A° 为开集. 要证 A' 是闭集, 只要证 $A'' \subset A'$ (定理 3.2.1(v)). 设 $x \in A''$, 则有 $\{x_n\} \subset A' : x \neq x_n \rightarrow x$. 取 $y_n \in A$, 使 $\|x_n - y_n\| < \|x_n - x\| (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $x \neq y_n \rightarrow x$, 故 $x \in A'$. 这表明 $A'' \subset A'$. 关于 \bar{A} 与 ∂A 的证明由你自己完成. □

3.55 设 $A, B \subset X$, 则 $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

提示 利用 $x \in A' \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ 与 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

注意上题实际上可归入 § 1.1 中的问题 A: 证明集等式, 因而同样可考虑那里所述的方法 I 与方法 II. 若用方法 II, 则应充分利用定理 3.2.1(iii) 中的已知等式. 例如, 等式 $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ 的证明如下:

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap A^{\circ c} = \bar{A} \cap A^{\text{ccoc}} = \bar{A} \cap \bar{A^c}.$$

这种证法的好处是证明完全归于形式演算, 但对于一些特别精细的集关系式的证明未必总行得通.

3.56 设 $A, B \subset X$, 则 $A^\circ \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

证 设 $x \in A^\circ \cap \bar{B}$, 则 $\exists r > 0$, 使 $B_r(x) \subset A$. $\forall s > 0$, 必存在 $y \in B \cap B_{s \wedge r}(x)$, 于是 $y \in (A \cap B) \cap B_s(x)$, 从而 $x \in \overline{A \cap B}$. \square

3.57 设 $A, B \subset X$, 则 $(A \cup B)^\circ \subset \bar{A} \cup B^\circ$.

提示: 利用上题或直接证明.

3.58 $A \subset X$ 是开集 $\Leftrightarrow \forall B \subset X$, 有 $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

证 若 A 是开集, 则由题 3.56 有 $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B} (\forall B \subset X)$. 反之, 若 A 非开集, 则有 $x \in A \setminus A^\circ$, 必 $x \in \partial A$. 令 $B = A^c$, 则 $x \in A \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B} = \emptyset$. \square

3.59 $A \subset X$ 是闭集 $\Leftrightarrow \forall B \subset X$, 有 $(A \cup B)^\circ \subset A \cup B^\circ$.

提示: 仿上题之证.

3.60 设 $A \subset X$, 则 A° 是含于 A 的最大开集; \bar{A} 是包含 A 的最小闭集.

证 已知 A° 是开集 (见题 3.54), 且 $A^\circ \subset A$. 若 $G \subset A$ 且 G 是开集, 则 $G = G^\circ \subset A^\circ$ (用定理 3.2.1(iii)), 可见 A° 是含于 A 的最大开集. 后半部分的证明留给读者. \square

3.61 设 $A \subset X$ 是子空间, $0 < \beta < 1$, $d(x, A) \leq \beta \|x\| (\forall x \in X)$, 则 $\bar{A} = X$.

证 只要证 $d(x, A) = 0 (\forall x \in X)$ (看定理 3.2.1(i)). 固定 $x \in X$. $\forall a \in A$, 有

$$\begin{aligned} \beta \|x - a\| &\geq d(x - a, A) = d(x - a, A - a) \quad (A - a = A) \\ &= d(x, A), \quad (\text{平移不变性}) \end{aligned}$$

这推出 $\beta d(x, A) \geq d(x, A)$, 故必 $d(x, A) = 0$. \square

3.62 设 $A, B \subset X$ 是互不相交的闭集, 则存在开集 U, V , 使得 $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$.

证 令 $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}, V = \{x \in X : d(x, B) < d(x, A)\}$. 由 $d(x, A)$ 对 x 连续 (用题 3.53) 及定理 3.2.2 推出 U 与 V 是开集. 显然 $U \cap V = \emptyset$. $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0 < d(x, B)$, 故 $A \subset U$; 同理 $B \subset V$. 因此 U, V 合于所求. \square

3.63 设 $A, B \subset X$ 是互不相交的闭集, 则存在 $f \in C(X)$, 使得

$f(A) = 0, f(B) = 1$.

提示: 取 $f(x) = d(x, A) / [d(x, A) + d(x, B)]$.

3.64 X, \emptyset 是 X 中仅有的既开又闭的集.

证 若 $A \subset X$ 是既开又闭集的集, $A \neq \emptyset, X$, 则存在 $a \in A, b \in A^c$. 令 $f = \chi_A$, 利用定理 3.2.2(ii) 不难验证 $f \in C(X)$. 令 $\varphi(t) = f(ta + (1-t)b)$ ($0 \leq t \leq 1$), 则 $\varphi \in C[0, 1], \varphi(0) = f(b) = 0, \varphi(1) = f(a) = 1$, 而 $\varphi(t) \in \{0, 1\}$, 这与介值定理相矛盾. \square

3.65 设 X 完备, $B_n \subset X$ 是非空闭集, $B_1 \supset B_2 \supset \dots, \text{diam} B_n \rightarrow 0$, 则 $\bigcap B_n$ 恰含一点.

提示: 任取 $x_n \in B_n$, 则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

B. 连续性问题

首先注意到, 连续函数的定义与熟知的概念并无区别, 因此以下结论是很自然的.

3.66 设 $D \subset X, f, g \in C(D)$, 则 $f \pm g, fg, f/g$ ($g(x) \neq 0, \forall x \in D$), $f \vee g, f \wedge g, f^+, f^-, |f|$ 均为 D 上的连续函数.

这些结论均可用数学分析中的方法来证明. 不过, 现在还是有了一些新的方法, 主要是用定理 3.2.2. 例如, 若 D 是开集, 则从 $f, g \in C(D)$,

$$\{f \vee g < \alpha\} = \{f < \alpha\} \cap \{g < \alpha\}$$

与

$$\{f \vee g > \alpha\} = \{f > \alpha\} \cup \{g > \alpha\}$$

推出 $f \vee g \in C(D)$, 这似乎比“数学分析式”的论证要简单. 有趣的是, 以上证法颇类似于可测性论证. 实际上, 若以 \mathcal{T}_X 记 X 中的开集族, 则当 D 为开集时, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 连续 $\Leftrightarrow f^{-1}\mathcal{T}_{\mathbf{R}} \subset \mathcal{T}_X$, 这与可测函数的条件 $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ (参看定义 1.3.1 后面的条件(v))显然属于同一类型. 由此可见, 可测函数与连续函数这两个看来相去甚远的概念, 原来有很强的共性, 这是很具启发性的.

定理 3.2.2 中要求 D 是开集或闭集, 这一限制是应用上的障碍. 更一般的结论是:

3.67 设 $F: D \subset X \rightarrow Y$. 则 F 连续 \Leftrightarrow 任给开集 $V \subset Y$, 存在开集 $U \subset X$, 使 $F^{-1}V = D \cap U$

证 设 F 连续, $V \subset Y$ 是开集. $\forall x \in F^{-1}V$, Fx 是 V 的内点, 故有 $\varepsilon_x > 0$, 使 $B_{\varepsilon_x}(Fx) \subset V$. 由 F 在 x 的连续性, 有 $\delta_x > 0$, 使 $F(D \cap B_{\delta_x}(x)) \subset B_{\varepsilon_x}(Fx) \subset V$, 从而 $D \cap B_{\delta_x}(x) \subset F^{-1}V$. 令 $U = \bigcup B_{\delta_x}(x)$, 则 U 是开集, $F^{-1}V = D \cap U$.

其次, 设任给开集 $V \subset Y$, 有开集 $U \subset X$, 使 $F^{-1}V = D \cap U$. 任给 $x \in D$, $\varepsilon > 0$, $V = B_{\varepsilon}(Fx) \subset Y$ 是开集. 取开集 $U \subset X$, 使 $F^{-1}V = D \cap U$. 因 $x \in D \cap U$, 故有 $\delta > 0$, 使 $B_{\delta}(x) \subset U$, 从而 $D \cap B_{\delta}(x) \subset D \cap U = F^{-1}V$, 于是 $F(D \cap B_{\delta}(x)) \subset B_{\varepsilon}(Fx)$, 这正表明 F 在 x 连续. \square

3.68 对于闭集叙述并证明与题 3.67 相当的结果.

提示: 利用对偶性: A 是闭集 $\Leftrightarrow A^c$ 是开集.

3.69 设 $f: D \subset X \rightarrow \mathbf{R}$, 则 f 连续 $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}$, 存在开集 $U, V \subset X$, 使得 $\{f > \alpha\} = D \cap U, \{f < \alpha\} = D \cap V$.

提示: 任给开集 $G = \bigcup (\alpha_i, \beta_i) \subset \mathbf{R}$, 有 $f^{-1}G = \bigcup \{\alpha_i < f < \beta_i\}$. 参照明题 3.67.

现在可简单地解决 § 1.3 中的如下遗留问题.

3.70 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 可测, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, 则 f 是可测函数.

证 $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, 有 $\{f > \alpha\} = \Omega \cap U, U \subset \mathbf{R}^n$ 是开集, 从而是可测集, 于是 $\Omega \cap U$ 是可测集. 这表明 f 可测. \square

3.71 设 $F: D \subset X \rightarrow Y$ 与 $G: E \subset Y \rightarrow Z$ 连续, $FD \subset E$, 则复合映射 $G \circ F: D \subset X \rightarrow Z$ 连续.

提示: 利用题 3.67.

3.72 $F: X \rightarrow Y$ 连续 $\Leftrightarrow \forall A \subset X$, 有 $F\bar{A} \subset \overline{FA}$.

证 设 F 连续, $A \subset X$, 则 $F^{-1}\overline{FA}$ 是闭集 (定理 3.2.2), 于是

$$\bar{A} \subset \overline{F^{-1}\overline{FA}} \subset \overline{F^{-1}\overline{FA}} = F^{-1}\overline{FA},$$

这推出 $F\bar{A} \subset \overline{FA}$. 反之, 设 $F\bar{A} \subset \overline{FA} (\forall A \subset X)$. 若 $B \subset Y$ 是闭集, 则

$$F\overline{F^{-1}B} \subset \overline{FF^{-1}B} \subset \overline{B} = B,$$

这推出 $\overline{F^{-1}B} \subset F^{-1}B$, 从而 $F^{-1}B$ 是闭集. 可见 F 连续 (用定理 3.2.2).

□

3.73 $F: X \rightarrow Y$ 连续 $\Leftrightarrow \forall B \subset Y$, 有 $F^{-1}\overline{B} \supset \overline{F^{-1}B}$.

提示: 参照上题.

3.74 设 $F_n: D \subset X \rightarrow Y$ 连续, $F_n \Rightarrow F$, 则 $F \in \mathcal{C}(D, Y)$.

证 任取 $x \in D$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $n \in \mathbb{N}$ 充分大, 使得 $\|F_{ny} - Fy\| < \varepsilon$ ($\forall y \in D$). 取 $\delta > 0$, 使当 $y \in D, \|y - x\| < \delta$ 时 $\|F_{ny} - F_{nx}\| < \varepsilon$. 于是当 $y \in D, \|y - x\| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} \|Fy - Fx\| &\leq \|Fy - F_{ny}\| + \|F_{ny} - F_{nx}\| + \|F_{nx} - Fx\| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

可见 F 在 x 连续.

□

C. 紧性问题

在紧集的多种刻画中, “任何序列有收敛子列”这一刻画用起来最方便, 因在很多情况下, 收敛子列的极限恰好是问题所需要的. 这样, 紧性条件常用在要得出某种点存在的证明中, 而且这种论证往往十分简洁, 几乎是一种模式化的简单操作, 因而是人们乐于使用的.

3.75 设 $A, B \subset X$ 是紧集, 则存在 $a \in A, b \in B$, 使得

$$\|a - b\| = d(A, B).$$

证 由 $d(A, B)$ 的定义, 必有 $\{a_n\} \subset A$ 与 $\{b_n\} \subset B$, 使得 $\|a_n - b_n\| \rightarrow d(A, B)$. 因 A 是紧集, 故 $\{a_n\}$ 有子列 $a_{n_i} \rightarrow a \in A$; 又由 B 是紧集, $\{b_{n_i}\}$ 有收敛子列, 为记号简单, 不妨就设 $b_{n_i} \rightarrow b \in B$. 于是

$$\|a - b\| = \lim_i \|a_{n_i} - b_{n_i}\| = d(A, B).$$

□

以上论证已经够简单了. 而实际上常常表述得更简单: 由 A, B 为紧集, 不妨设 $a_n \rightarrow a \in A, b_n \rightarrow b \in B$, 因而 $\|a - b\| = d(A, B)$. 这样, 取子列的步骤也省去了. 这种省略对于证明的严格性并无任何损害, 这一点是你学习紧性论证时特别值得仔细领悟的. 下面几道题, 正好供你一试.

3.76 设 $A \subset X$ 为紧集, $B \subset X$ 为闭集, $d(A, B) = 0$, 则 $A \cap B \neq \emptyset$.

3.77 设 $A \subset X$ 为紧集, $B \subset X$ 为闭集, 则 $A + B$ 是闭集.

3.78 设 A, B 如上题, $\dim X < \infty$, 则存在 $a \in A, b \in B$, 使得 $\|a - b\| = d(A, B)$.

证 仍如题 3.75 之证, 取 $\{a_n\} \subset A, \{b_n\} \subset B$, 使得 $\|a_n - b_n\| \rightarrow d(A, B)$. 因 A 为紧集, 故不妨设 $a_n \rightarrow a$. 因

$$\|b_n\| \leq \|a_n\| + \|a_n - b_n\|,$$

故 $\{b_n\}$ 有界, 因而它必有收敛子列 ($\dim X < \infty$ 用于此!), 不妨假设 $b_n \rightarrow b$, 于是 $\|b - a\| = d(A, B)$. \square

3.79 设 $F: D \subset X \rightarrow Y$ 连续, D 是紧集, 则 FD 是紧集.

提示: 任给 $\{x_n\} \subset D, \{Fx_n\}$ 必有收敛子列.

在“有限覆盖定理”的形式下利用紧性条件, 一般要复杂一些, 但亦是重要的, 且并不难掌握. 下面是一些简单例子.

3.80 设 $A \subset X$ 是紧集, $\epsilon > 0$, 则存在有限集 $B \subset A$, 使得 $d(x, B) < \epsilon (\forall x \in A)$.

提示: 考虑 A 的开覆盖 $\{B_\epsilon(x): x \in A\}$.

3.81 设 $A \subset X$ 是紧集, $B_n \subset X$ 是开集, $B_n \uparrow B, A \subset B$, 则 A 含于某个 B_n .

证 因 $\{B_n\}$ 是 A 的覆盖, 故必有有限子覆盖, 设为 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, 则显然 $A \subset B_n$. \square

3.82 设 $A_n \subset X$ 是紧集, $A_n \downarrow A, G \subset X$ 是开集, $A \subset G$, 则某个 A_n 含于 G .

提示: 考虑 $A_1 \setminus G$ 的开覆盖 $\{A_n^c\}$, 或用上题结论.

以下两题都可以用一个“收敛子列论证”解决, 你不妨一试.

3.83 设 $D \subset X$ 是紧集, $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 下半连续, 即 $\{x_n\} \subset D, x_n \rightarrow x \in D \Rightarrow f(x) \leq \liminf_n f(x_n)$, 则 $f(x)$ 在 D 上达到最小值.

证 令 $\alpha = \inf_{x \in D} f(x)$. 取 $\{x_n\} \subset D$, 使得 $f(x_n) \rightarrow \alpha$. 因 D 是紧集, 不妨设 $x_n \rightarrow x \in D$, 于是由下半连续性, 有

$$\alpha \leq f(x) \leq \liminf_n f(x_n) = \alpha,$$

从而 $f(x) = \alpha$ 正是 f 在 D 上的最小值. \square

以上结果表明, 要 $f(x)$ 在紧集 D 上达到最小值, 连续性不是必要的, 可代之以以往弱得多的下半连续性. 这一事实在极值理论的应用中意义甚大.

有限维空间中有界闭集(有界集)是紧集(相对紧集), 这一事实常用来达到在无限维空间中难以实现的结论, 你已从对照题 3.75 与 3.78 初步看到了这一点.

3.84 设 A 是 X 的有限维子空间, $x \in X$, 则存在 $a \in A$, 使得 $\|x - a\| = d(x, A)$.

证 取 $\{a_n\} \subset A$, 使得 $\|x - a_n\| \rightarrow d(x, A)$. 由

$$\|a_n\| \leq \|x - a_n\| + \|x\|$$

知 $\{a_n\}$ 有界, 因而为相对紧集, 故不妨设 $a_n \rightarrow a \in A$, 于是 $\|x - a\| = d(x, A)$. \square

你注意到, 以上证明中并未用到 A 是子空间这一条件. 实际上, 只要 A 是一个闭集, 且含于 X 的某个有限维子空间, 上题的结论就成立. 上题也可以作为题 3.78 的特殊情况推出. 这些, 你都应能作出准确说明.

3.85 若 $f \in C[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, 则存在最佳一致逼近 f 的次数 $\leq n$ 的多项式. 如果是 L^p 逼近 ($1 \leq p < \infty$) 呢?

提示: 用上题, 结论与范数的选择无关.

3.86 设 A 是 X 的有限维真子空间, 则存在 $x \in X$, 使得 $\|x\| = 1$, $d(x, A) = 1$.

证 取 $y \in X \setminus A$. 因 A 是闭子空间(定理 3.1.1), 故 $d(y, A) > 0$ (定理 3.2.1(i)). 取 $\{a_n\} \subset A$, 使 $\|y - a_n\| \rightarrow d(y, A)$. 令 $x_n = (y - a_n) / \|y - a_n\|$, 则 $\|x_n\| = 1$, $x_n \in \text{span}(A \cup \{y\}) \triangleq B$, B 是 X 的有限维子空间. 不妨设 $x_n \rightarrow x$, 则 $\|x\| = 1$, $d(x, A) \leq \|x\| = 1$. 另一方面,

$$d(x, A) \geq d(x_n, A) - \|x - x_n\| \quad (\text{用题 3.53})$$

$$\begin{aligned}
&= d\left(\frac{y - a_n}{\|y - a_n\|}, A\right) - \|x - x_n\| \\
&= \frac{d(y, a_n + \|y - a_n\|A)}{\|y - a_n\|} - \|x - x_n\| \\
&= \|y - a_n\|^{-1} d(y, A) - \|x - x_n\|,
\end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得 $d(x, A) \geq 1$, 因此 $d(x, A) = 1$. □

上面论证中及本书他处, 用到关于距离 $d(x, A)$ 的几个等式(其中 $A \subset X$ 是子空间, $x \in X$):

$$d(\alpha x, A) = |\alpha| d(x, A) \quad (\alpha \in \mathbf{K});$$

$$d(x + a, A) = d(x, A) \quad (a \in A).$$

这些式子的证明是简单的, 例如

$$\begin{aligned}
d(\alpha x, A) &= \inf_{y \in A} \|\alpha x - y\| \\
&= |\alpha| \inf_{y \in A} \|x - \alpha^{-1}y\| \\
&= |\alpha| \inf_{y \in A} \|x - y\| \quad (A \text{ 是子空间!}) \\
&= |\alpha| d(x, A).
\end{aligned}$$

你可能不习惯运用这一类的等式. 但不妨试用几次, 一旦体会到其简便性之后, 你会乐于使用的.

现在我们来看一下去掉 A 的有限维性对结论的影响. 对于题 3.84, 若 $\dim A = \infty$, 则 $d(x, A)$ 只能接近, 未必达到. 例如 $X = C[0, 1]$, A 是 $[0, 1]$ 上的多项式之全体, $x(t) \in C[0, 1]$ 不是多项式, 则当然不可能有 $a \in A$ 使 $\|x - a\|_0 = 0 = d(x, A)$. 对于题 3.86, 若 A 改为真闭子空间, 则由 Riesz 引理, 只能求得 $x \in X$, 使 $\|x\| = 1$, $d(x, A)$ 充分接近于 1 而未必达到 1.

3.87 设 A, B 是 X 的闭子空间, $\dim A < \infty$, 则 $A + B$ 是 X 的闭子空间.

证 不妨设 $A \cap B = \{0\}$ (否则 $A = A_1 \oplus (A \cap B)$, 以 A_1 取代 A). 设 $\{a_n\} \subset A$, $\{b_n\} \subset B$, $a_n + b_n \rightarrow x$, 今要证 $x \in A + B$. $\{a_n\}$ 必有界, 否则可设 $\|a_n\| \rightarrow \infty$, 令 $a'_n = a_n / \|a_n\|$, $b'_n = b_n / \|a_n\|$, 则 $a'_n + b'_n \rightarrow 0$, $\|a'_n\| = 1$; 不妨设 $a'_n \rightarrow a \in A$, 则

$b'_n \rightarrow -a$, 于是 $a \in A \cap B$. $\|a\| = 1$, 这与 $A \cap B = \{0\}$ 矛盾. 由 $\{a_n\}$ 有界及 $\dim A < \infty$, 不妨设 $a_n \rightarrow a \in A$, 从而 $b_n \rightarrow b = x - a \in B$, 于是 $x = a + b \in A + B$, 如所要证. \square

定理 3.2.4 将成立于闭区间上的连续函数定理推广到了紧集. 这使我们记起了另一条成立于闭区间上的数学分析定理——Dini 定理, 它也能适用于紧集上的连续函数吗?

3.88 设 $D \subset X$ 是紧集, $f, f_n \in C(D)$, f_n 对 n 单调增且在 D 上处处收敛于 f , 则 $f_n \Rightarrow f$.

证 若结论不真, 则有 $\varepsilon > 0$, $m_1 < n_2 < \dots$ 及 $\{x_k\} \subset D$, 使得 $f_{n_k}(x_k) < f(x_k) - \varepsilon$ ($\forall k \in \mathbb{N}$), 于是

$$f_n(x_k) \leq f_{n_k}(x_k) < f(x_k) - \varepsilon \quad (n \leq n_k).$$

不妨设 $x_k \rightarrow x \in D$, 于是令 $k \rightarrow \infty$ 得 $f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), 这与 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 相矛盾. \square

如同上题一样, 涉及紧性的论证经常采用反证法, 此时, 适当地写出要证命题的反命题是关键.

3.89 设 $D \subset X$ 是紧集, $\{F_n\} \subset C(D, Y)$, $F_n \Rightarrow F$, 则

$$FD = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k D}.$$

证 直接看出 $FD \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k D}$ (这无需紧性与一致收敛性). 难点在于证相反的包含. 任取 $y \in$ 右端, $\forall n \in \mathbb{N}$, 必有 $k_n \geq n$, $x_n \in D$, 使得 $\|F_{k_n} x_n - y\| < 1/n$. 不妨设 $x_n \rightarrow x \in D$, 则

$$\begin{aligned} \|y - Fx\| &\leq \|y - F_{k_n} x_n\| + \|F_{k_n} x_n - Fx_n\| \\ &\quad + \|Fx_n - Fx\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

可见 $y = Fx \in FD$. \square

形式上, 全有界性颇接近于紧性. 定理 3.2.3 指明了, 在完备空间中全有界性与相对紧性相当. 下面更准确地说明, 对于以上论断完备性是不可缺少的前提.

3.90 空间 X 完备 $\Leftrightarrow X$ 中任何全有界集皆为相对紧集.

证 只要证充分性. 设 X 中任何全有界集是相对紧集, 今证 X 完备. 设 $\{x_n\} \subset X$ 是 Cauchy 列. 若 $\{x_n\}$ 全有界, 则它相对紧, 因此有收敛子列, 设 $x_{n_i} \rightarrow x$, 则从

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_i}\| + \|x_{n_i} - x\|$$

易见 $x_n \rightarrow x$. 因此只需证 $\{x_n\}$ 全有界. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$\forall m, n \geq n_0$, 有 $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, 于是 $\{x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} B_\varepsilon(x_i)$, 这表明

$\{x_n\}$ 是全有界的. \square

现在考虑定理 3.2.5 的某些应用.

3.91 设 $J = [a, b]$, $A \subset C(J)$ 一致有界, $\tilde{f}(x) = \int_a^x f(y) dy$

($f \in A$), 则 $B = \{\tilde{f} : f \in A\}$ 是 $C(J)$ 中的相对紧集.

证 只需验证 B 满足定理 3.2.5 中的条件 (i) 及 (ii).

(i) 有界性. 由

$$|\tilde{f}(x)| \leq \int_a^b |f(y)| dy \leq \|f\|_0 (b-a)$$

推出 $\|\tilde{f}\|_0 \leq \|f\|_0 (b-a)$, 故从 A 一致有界推出 B 一致有界.

(ii) 等度连续性. 设 $a \leq x < y \leq b$, 则 $\forall f \in A$, 有

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq \|f\|_0 |x - y|.$$

于是由 A 一致有界推出 B 等度连续.

综上, 知 B 相对紧. \square

3.92 设 $J = [a, b]$, $A \subset C^1(J)$ 依范数 $\|f\|_1 = \|f\|_0 \vee \|f'\|_0$ 有界, 则 A 在 $C(J)$ 中相对紧.

提示: 如同证上题一样验证 A 一致有界与等度连续. 验证等度连续时用中值定理.

3.93 设 $A \subset C^1(J)$. 则 A 在 $C^1(J)$ 中相对紧的充要条件是:

(i) A 有界, 即 $\sup_{f \in A} \|f\|_1 < \infty$, 此处 $\|f\|_1 = \|f\|_0 \vee \|f'\|_0$;

(ii) $A' \triangleq \{f' : f \in A\}$ 等度连续.

这可看作是關於 $C^1(J)$ 的 Arzela-Ascoli 定理.

证 注意 $\{f_n\} \subset C^1(J)$ 的范数收敛等价于 $\{f_n\}$ 与 $\{f'_n\}$ 同时一致收敛 (参看 § 3.1). 因此, 若 A 在 $C^1(J)$ 中相对紧, 则 A 与 A' 都在 $C(J)$ 中相对紧, 于是由定理 3.2.5 推出, A 与 A' 一致有界 (从而 A 在 $C^1(J)$ 中有界), 且 A' 等度连续.

反之, 设 A 满足题设条件 (i) & (ii), 则由定理 3.2.5 推出 A' 在 $C(J)$ 中相对紧. 其次, 由 A' 一致有界又推出 A 在 $C(J)$ 中相对紧 (参考题 3.92). 任给序列 $\{f_n\} \subset A$, 由 A 在 $C(J)$ 中相对紧得出它有一致收敛子列 $\{f_{n_k}\}$. 另一方面, 由 A' 在 $C(J)$ 中相对紧得出 $\{f'_{n_k}\}$ 有一致收敛子列, 不妨设就是 $\{f'_{n_k}\}$ 一致收敛, 则 $\{f_{n_k}\}$ 在 $C^1(J)$ 中收敛, 可见 A 在 $C^1(J)$ 中相对紧. \square

D. 第二纲集问题

这类问题似乎已经远离直观, 缺少与较初等的分析问题的直接联系. 与紧集概念不同, 我们无法从你熟知的数学分析知识中找到纲定理的某个原型. 这无疑是你理解纲问题的首要困难. 从根本上说, 问题在于你所掌握的经验材料远不足以形成对第一纲集或第二纲集清晰印象. 因此, 你首先得接触较多的第一纲集或第二纲集的具体例子. 下面的一组问题正要起这一作用.

3.94 $L^p[0, 1] (1 \leq p < \infty)$ 中的非负函数构成疏集.

证 令 $A = \{f \in L^p[0, 1] : f \geq 0 \text{ a.e.}\}$. 若 $\{f_n\} \subset A$, $f_n \xrightarrow{L^p} f$, 则因有某个子列 $f_{n_i} \rightarrow f$ a.e. (定理 3.1.2) 故必 $f \geq 0$ a.e., 可见 A 是闭集. 为证 $A^\circ = \emptyset$, 只要指明每个 $f \in A$ 都可以用 A 外的元素 L^p 逼近. 直观上这是很显然的, 只要取

$$f_n = f\chi_{(1/n, 1]} - \chi_{[0, 1/n]},$$

就有 $\|f_n - f\|_p^p = 1/n \rightarrow 0$, 而显然 $f_n \notin A$. 因此 A 是疏集. \square

让我们在头脑中树立这样的直观印象: 设 X 完备, $A \subset X$. 若 A 是第一纲集, 则认为 A 中的元素在 X 中出现得“稀少”; 若 A 是第二纲集, 则认为 A 的元素在 X 中出现得“不稀少”; 若 A 是剩余集, 则 A 中的元素在 X 中“普遍存在”. 据此, 可以说在 $L^p[0, 1]$ 中非负函数是稀

少的. 其他函数空间中的非负函数却未必如此.

3.95 $C[a, b]$ 中的非负函数之集是第二纲集.

提示: 只要指出其内部非空, 例如 $f \equiv 1$ 即为一内点.

据此, 可以认为 $C[a, b]$ 中的非负函数并不稀少. 偶函数则并非如此.

3.96 $C[-1, 1]$ 中的偶函数之集是疏集.

提示: 参照题 3.94. 直观上, 偶函数是经受不起扰动的.

3.97 设 $A \subset X$ 是真子空间, 则 $A^\circ = \emptyset$, 因此当 A 是闭子空间时必为疏集.

证 取 $x \in X \setminus A, \forall a \in A$, 令 $x_t = tx + (1-t)a (0 < t < 1)$, 则 $x_t \in A$ (否则 $x = t^{-1}x_t + (1-t^{-1})a \in A$!), 当 $t \rightarrow 0$ 时 $x_t \rightarrow a$, 可见 $a \in A^\circ$. 因此 $A^\circ = \emptyset$. \square

注意题 3.97 蕴涵了题 3.96.

3.98 设可数集 $\{a_n\} \subset X$ 线性无关, 则 $A = \text{span}\{a_n\}$ 是第一纲集.

证 令 $A_n = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$, 则 $A = \bigcup A_n$, A_n 是 X 的 n 维子空间, 因而是真子空间, 由题 3.97 必为疏集, 故 A 是第一纲集. \square

3.99 $C[a, b]$ 中的多项式之全体是第一纲集.

提示: 用上题.

据此, 可以说, 在连续函数空间中, 多项式是稀少的.

3.100 设 X 完备, $G_n \subset X$ 是稠密开集, 则 $G = \bigcap G_n$ 是稠密集与第二纲集.

证 由 Baire 定理, 只要指明 G 是剩余集, 即 G^c 是第一纲集. 因 $G^c = \bigcup G_n^c$, G_n^c 是闭集, 故只要说明 $G_n^{co} = \emptyset$, 这由 $\overline{G_n} = X$ 得出:

$$G_n^{co} = G_n^{coco} = (\overline{G_n})^c = X^c = \emptyset. \quad \square$$

Baire 定理当然有许多深刻的应用. 不过, 在学习的这一阶段, 你遇到的应用实例不会太多, 这无疑会妨碍你对这一重要定理的深切理解. 因此, 应尽可能考虑一些应用的例子. 首先让我们一般地讨论一下, Baire 定理可能推出哪些结论. 设 $A \subset X$, X 是 Banach 空间.

(i) 若已知 A 是第一纲集, 则 A^c 是稠密的第二纲集, 因而可以认

为 A^c 包含了 X 中几乎所有元素,这通常肯定了你感兴趣的某种对象存在,且具有极大的普遍性.

(ii) 若已知 A 是第一纲集,则 $A = X$ 是不可能的.

(iii) 若已知 A 是第一纲集, $A = X$, 则 X 必不完备.

后面两条结论可以说是在否定形式下应用 Baire 定理,这类应用比较简单,但仍能得出一些非常识所易推断的深刻结论.

3.101 无限维 Banach 空间 X 不能分解为可数个紧集之并.

证 设 $A_n \subset X$ 是紧集,只要说明 $\bigcup A_n$ 是第一纲集;为此,又只要说明 $A_n^\circ = \emptyset$. 若 $A_n^\circ \neq \emptyset$, 则 A_n 必包含某个非空开球 B , 但 \bar{B} 不是紧集(定理 3.2.3(v)), 这就得出矛盾. \square

注意,有限维空间显然可分解为可数个紧集之并(试说明之!)

3.102 若 X 完备,则不可能存在线性无关的可数集 $\{a_n\}$, 使得 $X = \text{span}\{a_n\}$.

提示:参考题 3.98.

3.103 设 X 完备, $A \subset X$ 是稠密的可数集,则 A 不是 G_δ 型集 (G_δ 型集即可数个开集之交)

提示:参考题 3.100.

3.104 不存在函数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 它恰以无理点集为其间断点集.

证 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 以 A 记其连续点之集, 则只要证 A 为 G_δ 型集 (从而由题 3.103 有 $A \neq \mathbf{Q}$). 令

$$\omega(x) = \overline{\lim_{y \rightarrow x}} f(y) - \underline{\lim_{y \rightarrow x}} f(y),$$

$G_n = \{x \in \mathbf{R} : \omega(x) < 1/n\}$, 则显然 $A = \bigcap G_n$, 故只要证 G_n 是开

集. 为此, 只要对任给 $\alpha > 0$, 证 $B \triangleq \{x : \omega(x) \geq \alpha\}$ 是闭集. 设 $\{x_n\} \subset B$, $x_n \rightarrow x$. 取 y_n, z_n , 使得 $|y_n - x_n| + |z_n - x_n| < 1/n$, $f(y_n) - f(z_n) > \alpha - 1/n$. 则 $y_n \rightarrow x, z_n \rightarrow x$,

$$\omega(x) \geq \overline{\lim_n} [f(y_n) - f(z_n)] \geq \alpha,$$

故 $x \in B$, 即得所要证. \square

E. 不动点问题

与不动点定理(定理 3.2.7)有关的问题极多,此处难以深入,只选择了少数简单问题作为初步练习之用.以下设 X 完备.

3.105 设 $F: \overline{B_\beta}(x_0) \subset X \rightarrow X$ 满足 $\|Fx - Fy\| \leq r\|x - y\|$, $r < 1$, $\|x_0 - Fx_0\| \leq \beta(1 - r)$, 则 $F^n x_0 \rightarrow x^* = Fx^*$.

证 只需验证迭代序列 $\{x_n = F^n x_0\} \subset \overline{B_\beta}(x_0)$. 设 $x_n \in \overline{B_\beta}(x_0)$, $n \geq 0$, 则

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_0\| &\leq \|Fx_n - Fx_0\| + \|Fx_0 - x_0\| \\ &\leq r\|x_n - x_0\| + \beta(1 - r) \\ &\leq r\beta + \beta(1 - r) = \beta,\end{aligned}$$

即 $x_{n+1} \in \overline{B_\beta}(x_0)$. 这就归纳地证得 $\{x_n\} \subset \overline{B_\beta}(x_0)$. □

3.106 设 $D \subset X$ 是闭集, $F: D \rightarrow D$,

$$\|F^n x - F^n y\| \leq r_n \|x - y\| \quad (\forall x, y \in D),$$

$r_n > 0$, $\sum r_n < \infty$, $x_0 \in D$, 则 $F^n x_0 \rightarrow x^* = Fx^*$.

证 首先证 $\{F^n x_0\}$ 是 Cauchy 列. 设 $m > n$, 则

$$\begin{aligned}\|F^m x_0 - F^n x_0\| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|F^{k+1} x_0 - F^k x_0\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} r_k \|F x_0 - x_0\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

因此, $F^n x_0 \rightarrow x^* \in D$ ($n \rightarrow \infty$);

$$x^* = \lim_n F^{n+1} x_0 = F(\lim_n F^n x_0) = Fx^*.$$

□

3.107 设 F 如上题, 估计 $\|F^n x_0 - x^*\|$.

提示: 利用上题证明中所得不等式. 结果为:

$$\|F^n x_0 - x^*\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} r_k \|F x_0 - x_0\|.$$

3.108 设 $D \subset X$ 是闭集, $F_n: D \rightarrow D$, $\|F_n x - F_n y\| \leq r\|x - y\|$ ($\forall x, y \in D$), $r < 1$, $F_n x \rightarrow Fx$ ($n \rightarrow \infty$, $x \in D$), $x_n = F_n x_n \in D$, 则 $x_n \rightarrow x^* = Fx^*$.

提示: 首先推出 F 是压缩映射, 因而存在唯一不动点 x^* , 然后估

计 $\|x_n - x^*\|$.

3.109 设 $D \subset X$ 是紧集, $F: D \rightarrow D$ 满足 $\|Fx - Fy\| < \|x - y\|$ ($x \neq y$), 则 F 有唯一不动点.

提示 连续函数 $f(x) \triangleq \|x - Fx\|$ 必在某点 $\bar{x} \in D$ 达到最小值. 若 $f(\bar{x}) \neq 0$, 则必 $f(F\bar{x}) < f(\bar{x})$!

3.110 设 $D \subset X$ 是有界闭凸集, $F: D \rightarrow D$ 满足 $\|Fx - Fy\| \leq \|x - y\|$ ($\forall x, y \in D$), 则 $\exists x_n \in D$, 使得 $x_n - Fx_n \rightarrow 0$.

证 关键在于将 F 改造成一个压缩映射. 取定 $x_0 \in D$, 令

$$F_n x = (1 - n^{-1})Fx + n^{-1}x_0, \quad (x \in D)$$

则 $F_n: D \rightarrow D$ (D 凸用于此!)

$$\|F_n x - F_n y\| \leq (1 - n^{-1})\|x - y\| \quad (\forall x, y \in D).$$

于是依定理 3.2.7 有 $x_n \in D$, 使得 $F_n x_n = x_n$, 即

$$x_n = (1 - n^{-1})Fx_n + n^{-1}x_0,$$

从而 $x_n - Fx_n = n^{-1}(x_0 - Fx_n) \rightarrow 0$ (D 有界用于此!). □

§ 3.3 Hilbert 空间

一、定理与定义

我们曾强调, 与 Euclid 空间进行类比, 是克服赋范空间抽象性的重要方法之一. 但你大概已经发现, 在这样做时, 结合通常的几何概念进行直观想象的余地并不大. 实际上, 你所能借用的几何概念, 仅距离而已, 而大量空间关系, 非仅用距离所能说明. 在赋范空间中, 你根本无法说及直角三角形、垂直线这一类的对象, 这就使得初等几何中的大部分内容对于研究赋范空间毫无借鉴作用. 这表明, 作为平常空间的推广, 赋范空间过于一般化了. 要能与 Euclid 空间建立更密切的联系, 必须寻找一类介于 Euclid 空间与赋范空间之间的空间, 它就是 Hilbert 空间. 形式上, Hilbert 空间与 Banach 空间的唯一区别, 是对于前者可定义垂直概念, 而这是通过引入内积来实现的.

定义 3.3.1 设 H 是 \mathbf{K} 上的向量空间. 若对任一对元 $x, y \in H$, 指定了一个数 $(x, y) \in \mathbf{K}$, 称为 x 与 y 的内积, 它满足以下内积公理:

(I_1) (x, y) 对 x 是线性的: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$;

(I_2) 共轭对称性: $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

(I_3) 正定性: $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(以上 $x, y, z \in H, \alpha, \beta \in \mathbf{K}$) 则称 H 为内积空间. 若 H 是内积空间, 则可验证 $\|x\| \triangleq \sqrt{(x, x)}$ 是 H 上的一个范数. 当 H 依此范数完备时称它为 Hilbert 空间. 对应 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 与 \mathbf{C} 这两种情况, 分别称 H 为实 Hilbert 空间与复 Hilbert 空间.

为确定起见, 以下设 H 是给定的 Hilbert 空间. 如所预期的, 这样的空间可与通常的空间建立全面的对应关系. 下面是一些基本的事实.

(i) 内积运算. 设 $\sum_i \alpha_i x_i$ 与 $\sum_j \beta_j y_j$ 是 H 中的元的两个有限线性组合, 则依公理 (I_1) & (I_2) 可得出如下“乘法”规则:

$$\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j y_j = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j (x_i, y_j).$$

在 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 的情况下, 这与通常 \mathbf{R}^3 中向量点乘的规则一致.

(ii) Schwarz 不等式: $\forall x, y \in H$, 成立

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1)$$

这正好与 \mathbf{R}^3 中的以下熟知结果相当:

$$|\cos \theta| = \left| \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right| \leq 1.$$

(iii) 平行四边形公式: $\forall x, y \in H$, 成立

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (2)$$

这意味着, 以 $0, x, y, x + y$ 为顶点的平行四边形的两对角线平方和等于其四边平方和. 这一事实在初等几何中是熟知的.

(iv) 若 $x, y \in H, (x, y) = 0$, 则说 x 与 y 正交, 记作 $x \perp y$. 若一组向量 $\{x_i\} \subset H$ 两两正交, 则称它为正交系. 若加上条件 $\|x_i\| = 1 (\forall i)$, 则称 $\{x_i\}$ 为标准正交系. 若 $A, B \subset H, \forall a \in A, \forall b \in B$, 有 $a \perp b$, 则说 A 与 B 正交, 记作 $A \perp B$. 以上概念与通常的垂直概念相当.

(v) 勾股定理 若 $\{x_i\} \subset H$ 是一个有限正交系, 则

$$\left\| \sum_i x_i \right\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2. \quad (3)$$

特别, 当 $x, y \in H$ 且 $x \perp y$ 时成立

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

这对应于通常的勾股定理: 直角三角形(顶点在 $0, x, y$) 的两直角边平方和等于斜边平方.

Hilbert 空间的典型实例是 L^2 空间. 任给测度空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, 在空间 $L^2(\Omega)$ 中定义内积

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu \quad (f, g \in L^2(\Omega)),$$

此时 $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ 恰为 f 的 L^2 范数 $\|f\|_2$. 对 $L^2(\Omega)$ 的特例 l^2 , 内积公式为

$$(x, y) = \sum_i x_i \bar{y}_i,$$

其中 $x = (x_i) \in l^2, y = (y_i) \in l^2$. 在以上两种情况下, Schwarz 不等式分别具体化为

$$\left| \int_{\Omega} f g d\mu \right|^2 \leq \int_{\Omega} |f|^2 d\mu \int_{\Omega} |g|^2 d\mu \quad (f, g \in L^2(\Omega))$$

与

$$\left| \sum_i x_i y_i \right|^2 \leq \sum_i |x_i|^2 \sum_i |y_i|^2 \quad (x, y \in l^2).$$

关于 Hilbert 空间的最重要的基本结果是:

定理 3.3.1 设 $\{e_i; i \in \mathbf{N}\}$ 是 H 的标准正交系, 则以下条件互相等价(参照定义 3.1.3):

(i) $\{e_i\}$ 是 H 的 Schauder 基, 即每个 $x \in H$ 有以下无穷级数表示:

$$x = \sum_i (x, e_i) e_i, \quad (4)$$

(ii) $\{e_i\}$ 是 H 的基本集;

(iii) $\{e_i\}$ 是极大正交系, 即 $x \perp e_i (\forall i \in \mathbf{N}) \Rightarrow x = 0$;

(iv) Parseval 等式成立:

$$\|x\|^2 = \sum_i |x \cdot e_i|^2 \quad (\forall x \in H). \quad (5)$$

(v) 内积公式成立：

$$x \cdot y = \sum_i x \cdot e_i \overline{y \cdot e_i} \quad (x, y \in H). \quad (6)$$

当定理 3.3.1 中条件(i)~(v)之一满足时,称 $\{e_i\}$ 为 H 的标准正交基,称 $x \cdot e_i$ 为 x 关于基 $\{e_i\}$ 的坐标,或就称正交坐标.这些恰与通常的直角坐标系及直角坐标相对应.若如上的标准正交系 $\{e_i\}$ 存在,则

$$T: H \rightarrow l^2, x \rightarrow (x \cdot e_i)$$

是一个等距同构,这一同构保持内积对应：

$$Tx \cdot Ty = \sum_i x \cdot e_i \overline{y \cdot e_i} = x \cdot y, \quad (\text{用(6)})$$

因而 H 与 l^2 作为 Hilbert 空间并无实质差别.

任何无限维可分 Hilbert 空间 H 都存在标准正交基 $\{e_i: i \in \mathbb{N}\}$,其构成方法如下:取 H 的线性无关且可数的基本集 $\{x_i: i \in \mathbb{N}\}$,然后依 Schmidt 正交化方法将其标准正交化.令

$$\begin{cases} e_1 = x_1 / \|x_1\|_1; \\ y_i = x_i - \sum_{j < i} x_i \cdot e_j \cdot e_j, e_i = y_i / \|y_i\|, i = 2, 3, \dots \end{cases}$$

这一方法与线性代数中的作法并无不同,只是现在正交化程序需在无穷多步完成.以上方法特别用到空间 $L[a, b]$ ($a < b$).若取多项式系 $\{x^n: n \geq 0\}$ 作为 $L[a, b]$ 的基本集,则经标准正交化后仍得一多项式系 $\{\varphi_n(x): n \geq 0\}$,其中 $\varphi_n(x)$ 是 n 次多项式,其表达式与区间 $[a, b]$ 有关.若取 $[a, b] = [-1, 1]$,则得 Legendre 多项式 $\{L_n: n \geq 0\}$,其通式是

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

例如,

$$L_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, L_1 = x \sqrt{\frac{3}{2}}, L_2 = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1), \dots \quad (7')$$

定理 3.3.2 (正交分解定理) 设 $A \subset H$ 是闭子空间, 则有直和分解

$$H = A \oplus A^\perp, \quad (8)$$

其中 $A^\perp = \{x \in H : x \perp A\}$ 称为 A 的正交补.

正交分解式 (8) 意味着: 每个 $x \in H$ 可唯一地表成 $x = a + b$, 其中 $a \in A, b \in A^\perp$, 因而 $a \perp b$. 这可与平面上每一向量可沿互相垂直的两坐标轴分解类比.

定理 3.3.3 (最佳逼近) 设 $A \subset H$ 是闭子空间, $x \in H$. 则存在唯一的 $a \in A$, 使得 $\|x - a\| = d(x, A)$; a 就是 x 在 A 上的正投影, 即 $x = a + b, b \in A^\perp$. 若 $A = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{e_i\}$ 是标准正交系, 则

$$a = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i. \quad (9)$$

定理 3.3.3 中的 a 就称为 x 在 A 中的最佳逼近. 直观上, 它正是由 x 引向子空间 A 的“垂线”的“垂足”. 当 $\dim A < \infty$ 时, 最佳逼近可依公式 (9) 来计算.

二、问题与方法

A. 内积与正交性

原则上, Hilbert 空间中的问题都可以通过内积的计算来解决, 这如同解析几何中几何问题已代数化了一样. 有些问题, 实际上已在一定形式下出现于线性代数中. 可以说, 考虑 Hilbert 空间的问题, 你最能感受到代数、几何与分析三者的综合.

以下仍以 H 记给定的 Hilbert 空间.

3.111 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset H$ 线性无关 \Leftrightarrow 矩阵 $G \triangleq [(x_i, x_j)]_{n \times n}$ 可逆.

证 若 $\{x_i\}$ 线性相关, 则存在不全为零的 $\alpha_i \in \mathbf{K}$, 使得 $\sum \alpha_i x_i = 0$, 于是

$$0 = \sum_i \alpha_i x_i, x_j = \sum_i \alpha_i (x_i, x_j) \quad (1 \leq j \leq n), \quad (*)$$

这表明 G 的各行线性相关, 从而 G 不可逆. 反之, 若 G 不可逆, 则其各行必线性相关, 于是有不全为零的 $\alpha_i \in \mathbf{K}$ 使式 (*) 成立, 因而

$$\left\| \sum_i \alpha_i x_i \right\|^2 = \sum_j \bar{\alpha}_j \sum_i \alpha_i x_i x_j = 0,$$

这推出 $\sum \alpha_i x_i = 0$, 因此 $\{x_i\}$ 线性相关. □

如果你觉得, 上题完全是一个线性代数问题, 那么下题也如此.

3.112 不含零向量的正交系 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 必线性无关.

提示: 注意 $\sum \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \sum |\alpha_i|^2 \|x_i\|^2 = 0$ (用式(3)).

3.113 设 $x, y \in H$, 则 $x \perp y \Leftrightarrow \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ ($\forall \alpha \in \mathbf{K}$).

证 利用 $\|x\|^2 = x, x$ 得

$$\begin{aligned} \|x + \alpha y\|^2 &= x + \alpha y, x + \alpha y \\ &= \|x\|^2 + \alpha y, x + \bar{\alpha} x, y + |\alpha|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

因此, $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ 的充要条件是

$$\alpha y, x + \bar{\alpha} x, y = 0.$$

若 $x \perp y = 0$, 则上式显然满足. 反之, 若取 $\alpha = x, y$ 代入上式, 则得出 $2|x, y|^2 = 0$, 从而 $x, y = 0$, 即 $x \perp y$. □

注意, $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ 正好意味着过点 $0, x$ 的直线是线段 $[-\alpha y, \alpha y]$ 的中垂线. 不过, 这一几何观察对于我们所用的解析证明并没有什么帮助.

3.114 设 $x, y \in H$, 则 $x \perp y \Leftrightarrow \|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ ($\forall \alpha \in \mathbf{K}$).

提示: 展开 $\|x + \alpha y\|^2 \geq \|x\|^2$, 取 $\alpha = -x, y \|y\|^{-2}$.

平行四边形公式(2)可用来排除某些赋范空间中定义内积的可能性.

3.115 l^p ($p \neq 2$) 不是内积空间.

证 若 l^p 是内积空间, 则 \mathbf{R}^2 依范数 $\|\cdot\|_p$ 应满足公式(2). 只要取一对 $x, y \in \mathbf{R}^2$ 使(2)不满足即可. 这样的 x, y 几乎可随意选取, 但选择较简单的 x, y 更便于验证. 例如取 $x = (1, 1), y = (1, -1)$, 则

$$2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = 4\|x\|_p^2 = 4 \cdot 4^{1/p};$$

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2\|x + y\|_p^2 = 8.$$

当 $p \neq 2$ 时,二者显然不相等. □

3.116 $[0, 1]$ 不是内积空间.

提示: 如取 $f(x) = x, g(x) = 1 - x$ 检验式(2).

3.117 设 $f \in L^2[0, \pi]$, 则不等式 $\int_0^\pi |f(x) - \sin x|^2 dx \leq 4/9$

与不等式 $\int_0^\pi |f(x) - \cos x|^2 dx \leq 1/9$ 不能并立.

证 将所给不等式写成范数形式更清楚些:

$$\|f - \sin x\|_2 \leq 2/3, \|f - \cos x\|_2 \leq 1/3.$$

若以上两不等式同时成立, 则

$$\begin{aligned} 1 &\geq \|f - \sin x\|_2 + \|f - \cos x\|_2 \\ &\geq \|\sin x - \cos x\|_2 \quad (\text{用三角不等式}) \\ &= \left(\int_0^\pi (\sin x - \cos x)^2 dx \right)^{1/2} = \pi^{1/2}, \end{aligned}$$

得出矛盾. □

你不妨设想一下, 若完全立足于数学分析知识来解上题, 是否容易成功?

3.118 内积是连续的, 即若在 H 内 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, 则 $x_n, y_n \rightarrow x, y$.

提示: 用 Schwarz 不等式, 参照题 3.23.

3.119 设 $\{a_i\} \subset H, \|a_i\| = 1 (\forall i \in \mathbf{N})$,

$$\beta^2 = \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} |a_i, a_j|^2 < \infty,$$

$\beta > 0, \lambda = (\lambda_i) \in l^2$, 则

$$(1 - \beta) \|\lambda\|_2^2 \leq \left\| \sum \lambda_i a_i \right\|^2 \leq (1 + \beta) \|\lambda\|_2^2.$$

证 要证者是以下不等式:

$$\begin{aligned} &\left| \left\| \sum_i \lambda_i a_i \right\|^2 - \|\lambda\|_2^2 \right| \\ &= \left| \sum_{i \neq j} \lambda_i \bar{\lambda}_j (a_i, a_j) - \sum_i |\lambda_i|^2 \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i \neq j} \lambda_i \bar{\lambda}_j a_i a_j \right| \\
&\leq \beta \left(\sum_{i \neq j} |\lambda_i \bar{\lambda}_j|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \beta \left(\sum_{i, j} |\lambda_i|^2 |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} = \beta \| \lambda \|_2^2. \quad \square
\end{aligned}$$

B. 标准正交系

3.120 设 $\{e_i\} \subset H$ 是标准正交系, $x, y \in H$, 则

$$\left| \sum x e_i \overline{y e_i} \right| \leq \|x\| \|y\|.$$

证 任何标准正交系都可以成为标准正交基的一部分, 因此由(5)推出

$$\sum_i |x e_i|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{Bessel 不等式})$$

恒成立. 于是依空间 l^2 中的 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_i x e_i \overline{y e_i} \right| \\
&\leq \left(\sum_i |x e_i|^2 \sum_i |y e_i|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq (\|x\|^2 \|y\|^2)^{1/2} = \|x\| \|y\|. \quad \square
\end{aligned}$$

3.121 设 H 可分, $A \subset H$ 是一正交系, 则 A 是可数集.

提示: 可设 A 是标准正交系, 于是 $\|a - b\| = \sqrt{2} (a, b \in A, a \neq b)$. 若 A 不可数, 则 H 中的任何稠密集必不可数.

求正交化多项式这种工作当然没什么吸引力, 在眼前有现成结果的情况下尤其如此. 不过, 你至少得作一点点计算, 例如完成下面的

3.122 用 Schmidt 正交化方法求 Legendre 多项式 $L_n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

多项式系 $\{x^n : n \geq 0\}$ 并不构成空间 $L^2(\mathbf{R})$ 或 $L^2(\mathbf{R}_+)$ 的基本集, 因而不能用作构成这些空间的标准正交基的材料. 在无限区间上, 要使用 e^{-x^2} 或 e^{-x} 一类的“收敛因子”.

3.123 $\left\{ \frac{1}{n!} e^{x/2} (x^n e^{-x})^n : n \geq 0 \right\}$ 是 $L^2(\mathbf{R}_+)$ 的标准正交基.

证 令 $\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} e^{x/2} (x^n e^{-x})^n$, 则直接计算得出

$$\varphi_n(x) = e^{-x/2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-x)^k / k!.$$

一个直接计算可验证 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2(\mathbf{R}_+)$ 中的标准正交系. 余下只要验证 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2(\mathbf{R}_+)$ 的基本集. 为此, 只要验证, $\forall n \in \mathbf{N}, \forall f \in L^2[0, \infty)$, f 可用形如 $e^{-x/2} P(x)$ 的函数在 $[0, \infty)$ 上 L^2 逼近, 其中 $P(x)$ 是多项式. 事实上, 因 $f e^{x/2} \in L^2[0, \infty)$, 故 $\forall \varepsilon > 0$, 有多项式 $P(x)$, 使得 $\|P - f e^{x/2}\|_2 < \varepsilon$, 于是

$$\|e^{-x/2} P - f\|_2 \leq \|P - f e^{x/2}\|_2 < \varepsilon,$$

由此得出要证结论. \square

3.124 设 $\{e_n\}$ 与 $\{a_i\}$ 分别为 H 的标准正交基与标准正交系. 若 $\sum_i |e_n, a_i|^2 = 1 (\forall n \in \mathbf{N})$, 则 $\{a_i\}$ 亦是标准正交基.

证 所给条件表明, 对每个 e_n , 关于标准正交系 $\{a_i\}$ 成立 Parseval 等式; 而 Parseval 等式与分解式

$$e_n = \sum_i e_n, a_i a_i$$

可互相推出(这是要点!). 这就表明 $e_n \in \overline{\text{span}\{a_i\}}$, 从而

$$H = \overline{\text{span}\{e_n\}} \subset \overline{\text{span}\{a_i\}},$$

可见 $\{a_i\}$ 是 H 的基本集, 因此是标准正交基(定理 3.3.1). \square

凡涉及标准正交基问题, 你总应记得应用定理 3.3.1!

3.125 设 $\{e_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 分别为 H 中的标准正交基与标准正交系, $\sum \|e_n - a_n\|^2 < 1$, 则 $\{a_n\}$ 亦为标准正交基.

证 依据上题的经验, 我们的目标是验证 $\{a_n\}$ 满足定理 3.3.1 中五条条件之一. 这次考虑“极大正交系”条件. 设 $x \perp a_n (\forall n \in \mathbf{N})$, 今证 $x = 0$. 因

$$\|x\|^2 = \sum_n |x, e_n|^2 \quad (\text{用 (5)})$$

$$= \sum_n |x, e_n - a_n|^2 \quad (\text{用 } x \perp a_n)$$

$$\leq \sum_n \|x\|^2 \|e_n - a_n\|^2, \quad (\text{用 Schwarz 不等式})$$

故结合条件 $\sum \|e_n - a_n\|^2 < 1$ 得出 $\|x\| = 0$, 即 $x = 0$. \square

3.126 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基, $f \in L^2(\Omega)$, $A \subset \Omega$, $\mu A < \infty$, 则 $\int_A f d\mu = \sum f, \varphi_n \int_A \varphi_n d\mu$.

提示: 利用公式 $f, \chi_A = \sum f, \varphi_n \overline{\chi_A, \varphi_n}$.

3.127 写出 $f \in L^2[0, 2\pi]$ 关于三角函数系的 Parseval 等式.

答案: $\|f\|_2^2 = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$, a_n, b_n 是 f 的 Fourier 系数.

3.128 设 $A \subset H$ 是一无限标准正交系(不必可数), $A^\perp = \{0\}$, 则对每个 $x \in H$, 存在序列 $\{a_n\} \subset A$, 使得 $x = \sum x, a_n a_n$.

证 取定 $x \in H$. 任给有限集 $\{a_i\} \subset A$, 由直接计算可建立公式:

$$\sum_i |x, a_i|^2 = \|x\|^2 - \|x - \sum_i x, a_i a_i\|^2 \leq \|x\|^2.$$

由此推出: $\forall \alpha > 0, \{a \in A : |x, a| \geq \alpha\}$ 是有限集, 因而 $\{a \in A : x, a \neq 0\}$ 是可数集, 设为 $\{a_n\}$, 不妨设它是一无穷序列. 令 $s_n = \sum_1^n x, a_i a_i$, 则当 $m > n$ 时,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^m |x, a_i|^2 \rightarrow 0 \quad (m > n \rightarrow \infty),$$

其中用到 $\sum_n |x, a_n|^2 \leq \|x\|^2$ 收敛. 可见 $\{s_n\}$ 是 Cauchy 列, 设 $s_n \rightarrow y \in H$. 今证 $y = x$ (从而所要结论成立), 为此只要证 $y - x \in A^\perp$. 首先, $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$y, a_n = \lim_m s_m, a_n = x, a_n,$$

故 $y - x, a_n = 0$. 其次, 若 $a_n \neq a \in A (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $x, a = 0$,

$$y, a = \lim_n s_n, a = 0,$$

故同样得 $y - x, a = 0$, 因此 $y - x \in A^\perp$, 如所要证. \square

3.129 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基, $0 < \mu A < \infty$, 则

$$\sum \int_A |\varphi_n|^2 d\mu \geq 1.$$

证 令 $f = \chi_A$, 则 $f \in L^2(\Omega)$, 于是

$$\begin{aligned} \mu A &= \|f\|_2^2 = \sum_n |f, \varphi_n|^2 \quad (\text{用(5)}) \\ &= \sum_n \left| \int_A \bar{\varphi}_n d\mu \right|^2 \\ &\leq \sum_n \mu A \int_A |\varphi_n|^2 d\mu, \quad (\text{用 Schwarz 不等式}) \end{aligned}$$

这推出所要证. □

3.130 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $m\Omega > 0$, $\{\varphi_n\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基, 则当 $A \subset \Omega$, $mA > 0$ 时 $\sum \int_A |\varphi_n|^2 dm = \infty$; $\sum |\varphi_n|^2 = \infty$ a.e..

提示: 利用上题结论, 并注意当 $mA > 0$ 时 A 有分解 $A = \bigcup A_i$, $mA_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots$).

C. 正交分解与最佳逼近

3.131 任给非空集 $A \subset H$, A^\perp 是 H 的闭子空间.

证明是直接的.

3.132 任给非空集 $A, B \subset H$, 有 $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$ ($A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ ($A \cap B)^\perp \supset A^\perp + B^\perp$).

提示: $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$ 是明显的, 证明后两个结论时充分利用第一个结论.

3.133 任给非空集 $A \subset H$, 有 $A^\perp = \overline{\text{span} A}^\perp$, $A^{\perp\perp} = \overline{\text{span} A}$.

证 显然 $A^\perp \supset \overline{\text{span} A}^\perp$; 若 $x \in A^\perp$, 则 $x \perp A$, 这推出 $x \perp \text{span} A$. 若 $x \perp a_n$, $a_n \rightarrow a$, 则 $x \perp a = \lim_n x \perp a_n = 0$, 因此 $x \perp a$. 这表明 $A^\perp \subset (\text{span} A)^\perp \subset \overline{\text{span} A}^\perp$, 于是 $A^\perp = \overline{\text{span} A}^\perp$.

由 $A \perp A^\perp$ 推出 $A \subset A^{\perp\perp}$; 同理

$$\overline{\text{span} A} \subset \overline{\text{span} A}^{\perp\perp} = A^{\perp\perp}.$$

因 $\overline{\text{span} A}$ 与 A^\perp 都是 H 的闭子空间, 故由定理 3.3.2 有

$$H = \overline{\text{span} A} \oplus \overline{\text{span} A}^\perp = \overline{\text{span} A} \oplus A^\perp;$$

$$H = A^{\perp\perp} \oplus A^{\perp\perp\perp}.$$

以上两个分解式与 $\overline{\text{span} A} \subset A^{\perp\perp}$ 相结合, 推出 $A^{\perp\perp} = \overline{\text{span} A}$. □

3.134 $B \subset H$ 是基本集 $\Leftrightarrow B^\perp = \{0\}$.

提示: 利用上题及 $H^\perp = \{0\}$.

3.135 设 $A = \{f \in L^1[-1, 1]: f \text{ 是偶函数}\}$ 求 A^\perp .

解 令 $B = \{f \in L^1[-1, 1]: f \text{ 是奇函数}\}$ 则显然 $B \subset A^\perp$. 设 $f \in L^1[-1, 1] \setminus B$, $E = \{x \in [-1, 1]: f(-x) \neq -f(x)\}$, 则 $mE > 0$. 不妨设 $e = \{x \in [0, 1]: f(x) > -f(-x)\}$, $m_e > 0$. 令 $g = \chi_e + \chi_{-e}$, 则 $g \in A$, 而

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_e f(x) dx + \int_{-e} f(x) dx \\ &= \int_e [f(x) + f(-x)] dx > 0, \end{aligned}$$

可见 $f \notin A^\perp$. 这表明 $B \supset A^\perp$, 故得 $A^\perp = B$. □

此外, 仅用初等的方法就可说明: 每个实函数 $f(x)$ 总可唯一地分解为一个偶函数与一个奇函数之和, 这意味着 $H = A \oplus B$. 你试循这个思路解出上题.

我们有几处考虑和 $A + B$ 是否为闭集的问题. 一个常令人为难的现象是, 闭集的和(不要与并混淆!)未必为闭集! 即使在有限维空间中亦可举出这种病态例子. 问题在于, 当 $\{a_n\} \subset A$, $\{b_n\} \subset B$, $a_n + b_n \rightarrow x$ 时, 如果没有附加条件, 我们不知道是否有某个 $a_{n_i} \rightarrow a \in A$, 从而 $b_{n_i} \rightarrow b = x - a \in B$, 于是 $x = a + b \in A + B$. 在题 3.77 与 3.87 中, 用某种紧性论证解决了这一问题. 现在, 正交性或类似的条件提供了另外的解决方案.

3.136 设 A, B 是 H 的闭子空间, $A \perp B$, 则 $A + B$ 是闭子空间.

证 仍设 $\{a_n\} \subset A$, $\{b_n\} \subset B$, $a_n + b_n \rightarrow x$. 由勾股定理有

$$\|a_m + b_m - a_n - b_n\|^2 = \|a_m - a_n\|^2 + \|b_m - b_n\|^2.$$

这就从 $\{a_n + b_n\}$ 为 Cauchy 列推出 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 同时为 Cauchy 列. 于是有 $a_n \rightarrow a \in A$, $b_n \rightarrow b \in B$, 因此 $x = a + b \in A + B$, $A + B$ 是闭子空间. □

你看到, 正交性条件使这个初看起来似乎不容易的问题变得很简

单. 这种现象, 在处理 Hilbert 空间问题时, 在他处也经常发生, 是很值得注意的. 现在我们要再将题 3.136 推广一下: 不必要求 $A \perp B$, 而只要求 A 与 B 的“夹角”不太小, 即它们接近于“互相垂直”, 是否依然能保持题 3.136 的结论? 这一几何考虑导致以下问题:

3.137 设 A, B 是 H 的闭子空间, $0 < \epsilon < 1$, $|\langle a, b \rangle| \leq \epsilon \|a\| \|b\| (\forall a \in A, \forall b \in B)$, 则 $A + B$ 是 H 的闭子空间.

提示: 首先建立 $\|a + b\|^2 \geq (1 - \epsilon) (\|a\|^2 + \|b\|^2)$, 然后同样用题 1.336 的证法.

考察一下题 3.137 中条件的几何意义是很有趣的. 若以 θ 记向量 a, b 的夹角, 则 $|\cos \theta| = |\langle a, b \rangle| / \|a\| \|b\| \leq \epsilon$, 从而 $|\theta| \geq \arccos \epsilon$. 又由余弦定理有

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\cos\theta \|a\| \|b\| \\ &\geq \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\epsilon \|a\| \|b\|. \end{aligned}$$

在 Hilbert 空间中, 我们并不正式地使用角度概念, 但以上几何思考无疑是有启发性的.

以上问题的启示是: 利用 Hilbert 空间的特殊几何性质, 可解决通常依赖于紧性条件的问题. 为加深你的印象, 再考虑题 3.84 的以下变形.

3.138 设 $A \subset H$ 是闭凸集, $x \in H$, 则存在唯一的 $a \in A$, 使 $\|x - a\| = d(x, A)$. A 是凸集意味着

$$tA + (1 - t)A \subset A \quad (\forall t \in (0, 1)).$$

证 证明的开头与题 3.84 并无不同: 取 $\{a_n\} \subset A$, 使 $\|x - a_n\| \rightarrow d(x, A)$. 但往下得出 $\{a_n\}$ 收敛的理由则不同于题 3.84. 现用平行四边形公式:

$$\begin{aligned} \|a_m - a_n\|^2 &= 2(\|x - a_m\|^2 + \|x - a_n\|^2) \\ &\quad - \|(x - a_m) + (x - a_n)\|^2 \\ &= 2(\|x - a_m\|^2 + \|x - a_n\|^2) \\ &\quad - 4\left\|x - \frac{a_m + a_n}{2}\right\|^2 \end{aligned}$$

$$\leq 2(\|x - a_m\|^2 + \|x - a_n\|^2) - 4d^2,$$

其中 $d = d(x, A)$. 这就得到 $\|a_m - a_n\|^2 \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$, 即 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列. 设 $a_n \rightarrow a \in A$, 则 $\|x - a\| = d(x, A)$. 若还有 $b \in A$, 使 $\|x - b\| = d$, 则再用平行四边形公式得

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= 2(\|x - a\|^2 + \|x - b\|^2) \\ &\quad - 4\left\|x - \frac{a + b}{2}\right\|^2 \\ &\leq 4d^2 - 4d^2 = 0, \end{aligned}$$

从而 $\|a - b\|^2 = 0, a = b$. □

题 3.136 与题 1.38 分别用到的“勾股定理”与平行四边形公式, 正是刻画 Hilbert 空间特殊几何性质的主要工具. 形式地说, 它们适用于“Hilbert 空间几何”, 而不适用于“Banach 空间几何”, 这一差别是本质的, 不可消除的, 值得你细加体会.

题 3.138 与定理 3.3.3 一样, 为最佳逼近问题提供了理论依据. 若 $A \subset H$ 是闭凸集(闭子空间是其特例), 则对任给 $x \in H$, 在 A 中总有唯一对 x 的最佳逼近. 不过, 仅当 A 是闭子空间(尤其是有限维子空间)时, 才有计算最佳逼近的实际方法. 设

$$A = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\},$$

其中 $\{e_i\}$ 与 $\{a_i\}$ 分别为 A 的标准正交基与普通基, 以 a 记 A 中对 x 的最佳逼近, 则有如下两种计算 a 的方法:

方法 I 用公式(9). 式(9)极为简单, 这是优点, 但求标准正交基 $\{e_i\}$ 则可能要付出代价, 除非有现成结果可用(如 Legendre 多项式之类).

方法 II 设 $a = \sum \lambda_i a_i$. 则从 $x - a \in A^\perp$ 得出

$$(x, a_i) = (a, a_i) = \sum_j \lambda_j (a_j, a_i) \quad (1 \leq i \leq n),$$

从这个关于 λ_j 的线性方程组可解出待定系数 λ_j . 解方程组可能不易; 但无需从 $\{a_i\}$ 标准正交化得出 $\{e_i\}$, 则是方法 II 的优点.

3.139 在 $[0, 1]$ 上求最佳均方逼近函数 $f(x) = e^x$ 的 2 次多项式.

解法 I 用 Legendre 多项式, 为此, 要将问题转化到区间 $[-1, 1]$ 上. 令 $x = (t + 1)/2 (|t| \leq 1)$, 以 $\varphi(t) = e^{(t+1)/2}$ 取代 $f(x)$. 以

$P(t)$ 记 $[-1, 1]$ 上 $\varphi(t)$ 的最佳均方逼近 2 次多项式, 则

$$P(t) = \varphi, L_0 L_0(t) + \varphi, L_1 L_1(t) + \varphi, L_2 L_2(t),$$

其中 L_0, L_1, L_2 依式 (7) 算出

$$\varphi, L_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 e^{t+1} y_2 dt = \sqrt{2}(e-1);$$

$$\varphi, L_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t e^{t+1} y_2 dt = \sqrt{6}(3-e);$$

$$\begin{aligned} \varphi, L_2 &= \sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^1 (3t^2 - 1) e^{t+1} y_2 dt \\ &= \sqrt{10}(7e - 19). \end{aligned}$$

代入 $P(t)$ 的表达式后得

$$\begin{aligned} P(t) &= e - 1 + (9 - 3e)t + \frac{5}{2}(7e - 19)(3t^2 - 1) \\ &= 3(7e - 19)x^2 + (588 - 216e)x + 39e - 105. \\ &\approx 0.8392x^2 + 0.8511x + 1.0130. \end{aligned}$$

解法 II 用待定系数法: 设所求多项式为 $\varphi(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$, 则

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} f, 1 \\ f, x \\ f, x^2 \end{bmatrix},$$

其中 $G = [x^i x^j]_{0 \leq i, j \leq 2}$. 依次算出:

$$f, 1 = \int_0^1 e^x dx = e - 1;$$

$$f, x = \int_0^1 x e^x dx = 1;$$

$$f, x^2 = \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2;$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

然后用线性代数方法解出

$$\lambda_0 = 39e - 105 \quad \lambda_1 = 588 - 216e \quad \lambda_2 = 30(7e - 19),$$

所得结果与解法 I 一致. □

现在你可以来试一下了.

3.140 在 $[0, \pi]$ 上求 $f(x) = \sin x$ 的最佳均方逼近 2 次多项式.

答案: $-0.4177x^2 + 1.3123x - 0.0505$.

第四章 线性算子与线性泛函

你总算在 Banach 空间中浏览一遍了. 其中奇花异草, 并不少见, 虽然赏心悦目, 但毕竟奇论迭出, 令人应接不暇, 似乎该缓一口气了. 然而, 你马上会被告知: 泛函分析的核心内容还没有开始呢! 你不无艰难地啃过的 Banach 空间理论, 只不过是让你获得一个立足之地罢了. 正如你在学习数学分析时, 需要通过一个“分析引论”打好实数理论的基础一样. 简单地说, 泛函分析可以说是无限维空间——首先是 Banach 空间上的分析学, 因而是你已熟悉的数学分析的高层次拓广. 这一拓广颇不容易, 迄今仍然只对某些较特殊的课题建立了系统的理论. 人们的注意力首先集中在线性算子, 或如线性代数中所习惯称呼的线性变换, 它不仅相对较简单, 而且在应用上是最常见的. 自然地, 对于线性算子的研究成了泛函分析的中心课题, 在泛函分析发展早期尤其如此. 泛函分析的这一部分——通常叫做线性泛函分析——也就是今天泛函分析课程的主要内容. 当然, 在一个短短的课程中, 你仅可能接触到这一高度发展的理论的初等部分. 你会注意到, 这一部分的线性代数背景非常明显. 这一点将给你带来许多启示. 至于将泛函分析看作“无限维空间上的线性代数学”这种说法, 则只能极有保留地使用.

§ 4.1 有界线性算子

一、定理与定义

设 X, Y 是 K 上给定的赋范空间. 若映射 $T: X \rightarrow Y$ 满足

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (\alpha, \beta \in K, x, y \in X)$$

则称 T 为从 X 到 Y 的线性算子或线性变换. 完全不用 X, Y 中的范数, 亦可纯代数地展开关于线性算子的理论. 但这样做只要线性代数就够了. 对于有限维空间, 线性代数不失为一个强有力的理论; 但对于无

有限维空间, 线性代数只能提供少数肤浅的结论. 关于线性算子的深入的内容, 必定与范数概念有关. 首要的问题是: $\|Tx\|$ 与 $\|x\|$ 有何关系? 这导致以下定义.

定义 4.1.1 设 $T: X \rightarrow Y$ 是一个线性算子. 若存在 $k \geq 0$, 使得

$$\|Tx\| \leq k\|x\|, \quad (\forall x \in X)$$

则称 T 为有界线性算子. 称使以上不等式成立的最小的系数 k 为 T 的算子范数, 记作 $\|T\|$, 即

$$\|T\| = \min\{k : \|Tx\| \leq k\|x\| (\forall x \in X)\}.$$

若 $T: X \rightarrow Y$ 不是有界线性算子, 则称之为无界算子.

约定以 $L(X, Y)$ 记从 X 到 Y 的有界线性算子之全体, 令 $L(X) = L(X, X); X^* = L(X, \mathbb{K})$.

关于有界线性算子的一些基本结论汇集在以下定理中:

定理 4.1.1 设 $T: X \rightarrow Y$ 是一个线性算子.

(i) 有界性的等价刻画: $T \in L(X, Y) \Leftrightarrow T$ 连续 $\Leftrightarrow T$ 将 X 中的有界集映成 Y 中的有界集 $\Leftrightarrow T$ 将 X 中某个球映成有界集.

(ii) 算子范数的表达式: 设 $T \in L(X, Y)$, 则

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \\ &= \sup_{\|x\| \neq 0} \|Tx\| / \|x\| \\ &= \min\{k \geq 0 : \|Tx\| \leq k\|x\| (\forall x \in X)\}. \end{aligned} \quad (1)$$

(iii) 基本不等式: $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| (\forall x \in X)$.

(iv) 有限维情况: 若 $\dim X < \infty$, 则 T 必定连续.

(v) 核与值域: 若 $T \in L(X, Y)$, 则 $N(T) \triangleq T^{-1}(0)$ 是 X 的闭子空间, 称为 T 的核或零空间; T 的值域 $R(T)$ 是 Y 的子空间, 但未必为闭子空间.

(vi) 运算性质. 有界线性算子的线性组合与复合仍为有界线性算子; $L(X, Y)$ 依算子范数是一个赋范空间, 当 Y 完备时 $L(X, Y)$ 亦完备. 特别, X^* 是一个 Banach 空间. 若 $T \in L(X, Y), S \in L(Y, Z)$, 则 $ST \in L(X, Z), \|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

将以上结论与定义 3.1.2 对照看出 线性同构 $T: X \rightarrow Y$ 是拓扑同构 $\Leftrightarrow T$ 与 T^{-1} 都是有界线性算子; X 与 Y 拓扑同构 \Leftrightarrow 存在 $T \in L(X, Y)$ 与 $S \in L(Y, X)$, 使得 $TS = I, ST = I, I$ 是单位算子.

从线性代数中得知, 有限维向量空间之间的线性变换完全可用矩阵来描述, 因此, 线性代数的内容(不包括多重线性代数), 可在矩阵理论的形式下得到完全的表述. 对于无限维空间, 则并非如此. 这也是不能太看重“无限维空间中的线性代数学”这种说法的原因. 不过, 矩阵概念还是为线性算子理论提供了一批较具直观性的例子. 设 $A = [a_{ij}]$ 是一个无穷矩阵, 对任何无穷列向量 $x = (x_1, x_2, \dots)^T$, 形式地定义

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2)$$

如同通常的矩阵乘法一样, 上式意味着 $Ax = (y_1, y_2, \dots)^T$, 其中

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2')$$

问题在于, 仅当 a_{ij} 与 x_j 满足一定条件时, 以上级数才可能收敛. 按照 § 2.1 中的精神, 离散和 (2') 自然只是更一般的如下积分的特例:

$$(Tf)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) d\mu(y) \quad (x \in \Omega). \quad (3)$$

同样, 仅当对 $K(x, y)$ 与 $f(y)$ 作了一定限制之后, 才能保证 (3) 中的积分存在. (2) 与 (3) 提供了第一批重要的有界线性算子的例子, 有关的结论对照地叙述如下.

定理 4.1.2 设算子 A 依式 (2) 定义.

(i) 若 $\beta \triangleq \sup_j \sum_i |a_{ij}| < \infty$, 则 $A \in L(l^1)$ 且 $\|A\| = \beta$.

(ii) 若 $\beta \triangleq \sup_i \sum_j |a_{ij}| < \infty$, 则 $A \in L(l^\infty)$ 且 $\|A\| = \beta$.

(iii) 若 $\beta \triangleq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} < \infty$, 则 $A \in L(l^2)$ 且 $\|A\| \leq \beta$.

以上三种情况下的 $\|A\|$ 分别记作 $\|A\|_1, \|A\|_\infty$ 与 $\|A\|_2$, 于是有

$$\begin{cases} \|A\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{ij}| = \|A^T\|_\infty, \\ \|A\|_2 \leq \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (4)$$

这些结果与矩阵论中的有限维结果一致.

定理 4.1.3 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ -有限测度空间, 算子 T 依式 (3) 定义, $K(x, y)$ 是 $\Omega \times \Omega$ 上的 $\mu \times \mu$ -可测函数.

(i) 若 $\beta \triangleq \left\| \int_\Omega |K(x, \cdot)| d\mu(x) \right\|_\infty < \infty$, 则 $T \in L(L^1(\Omega))$ 且 $\|T\| = \beta$.

(ii) 若 $\beta \triangleq \left\| \int_\Omega |K(\cdot, y)| d\mu(y) \right\|_\infty < \infty$, 则 $T \in L(L^\infty(\Omega))$ 且 $\|T\| = \beta$.

(iii) 若 $\beta \triangleq \left(\int_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|^2 d(\mu \times \mu) \right)^{1/2} < \infty$, 则 $T \in L(L^2(\Omega))$ 且 $\|T\| \leq \beta$.

(iv) 若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是有界闭区域, $K(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega)$, 则 $T \in L(\mathcal{C}(\Omega))$, 且

$$\|T\| = \max_{x \in \Omega} \int_\Omega |K(x, y)| dy.$$

现在, 你就要接触泛函分析中第一批核心定理了. 泛函分析中深刻而又艰难的大定理确实很多, 远非数学分析所能比拟. 不过, 真正具有基本意义且影响深远的, 还是习惯上称为“泛函分析基本定理”的那几个核心定理. 这些定理条件与结论都不复杂, 但其深刻性却难以凭常识所能领悟, 因而常成为泛函分析课程中的难点.

定理 4.1.4 设 X 与 Y 是 Banach 空间, $T \in L(X, Y)$.

(i) 开映射定理: 若 T 是满射, 则 T 是开映射, 即它映 X 中的开集为 Y 中的开集.

(ii) 逆算子定理: 若 T 是一一映射, 则 $T^{-1} \in L(Y, X)$.

注意, 若 $T: X \rightarrow Y$ 是一一映射且为开映射, 则任何开集 $U \subset X$ 关于 T^{-1} 的原象 (即 TU) 为开集. 因此由定理 3.2.2 推出 T^{-1} 连续. 由此可见, 逻辑上, 逆算子定理已包含在开映射定理中. 不过, 逆算子定理或许

用得更多,影响也更大,将它独立表述出来是更方便的.

在 $X \times Y$ 中可按许多不同的方式引进范数,使得对任何 $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times Y$ 有

$$\|(x_n, y_n)\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_n\| \rightarrow 0 \text{ 且 } \|y_n\| \rightarrow 0.$$

$X \times Y$ 中凡满足以上条件的范数称为积范数.常用的积范数是

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad (x \in X, y \in Y)$$

$$\text{或} \quad \|(x, y)\| = \|x\| \vee \|y\|.$$

在用到积空间 $X \times Y$ 时,总假定其中已指定某个积范数,至于具体是哪一个,则通常是无关紧要的.若 X, Y 完备,则 $X \times Y$ 依积范数总是完备的(参看题 4.32).

定理 4.1.5 (闭图象定理) 设 X, Y 是 Banach 空间, $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子.若 $\text{Gr} T = \{(x, Tx): x \in X\}$ 是积空间 $X \times Y$ 中的闭集,则 $T \in L(X, Y)$.

闭图象定理也是应用广泛的泛函分析定理.不过,从逻辑上说,它不过是逆算子定理的简单推论,因而不象逆算子定理那样占据独立地位.

与逆算子定理一样重要、实际上用得更多的是如下一致有界原理(或称共鸣定理):

定理 4.1.6 设 $\{T_\alpha: \alpha \in I\} \subset L(X, Y)$, I 是任意无限集(不必可数).

(i) 若 $A \triangleq \{x \in X: \sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty\}$ 是第二纲集,则 $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$; 或等价地,若 $\sup_\alpha \|T_\alpha\| = \infty$, 则 A 是第一纲集.

(ii) 设 X 完备.若 $\sup_\alpha \|T_\alpha\| = \infty$, 则 A^c 是稠密的第二纲集; 若 $A = X$, 则必 $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$.

定理 4.1.6 的最常用的推论是:

定理 4.1.7 (i) 设 $A \subset X$. 若 $\forall f \in X^*, f|_A$ 有界, 则 A 有界, 即 $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$.

(ii) 设 X 完备, $F \subset X^*$. 若 $\forall x \in X, \{f(x): f \in F\}$ 有界, 则

F 在 X^* 中有界, 即 $\sup_{f \in F} \|f\| < \infty$.

如果停留在抽象的层面上, 关于一般有界线性算子的最主要的的结果, 就是这些. 即使你熟读了上面的每个定理, 几乎可以肯定地说, 对于有界线性算子的认识, 依然会是若明若暗. 问题在于, 你还没有着手研究具体材料, 象泛函分析这样高度综合性的数学理论, 不通过研究具体问题, 根本不可能达到真正的理解. 现在就来考虑一些具体问题.

二、问题与方法

A. 有界性刻画与算子范数

以下设 X, Y 是给定的赋范空间.

4.1 设 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 则 T 有界 $\Leftrightarrow T$ 映某个内部非空的集为有界集.

证 设 $A \subset X, A^\circ \neq \emptyset, TA$ 有界. 取球 $\bar{B}_r(a) \subset A, r > 0$. 令 $\beta = \sup_{x \in A} \|Tx\| < \infty, \forall x \in X, x \neq 0$, 有 $a + r\|x\|^{-1}x \in \bar{B}_r(a)$, 因此 $\|T(a + r\|x\|^{-1}x)\| \leq \beta$. 这推出

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|T(a + r\|x\|^{-1}x) - Ta\|r^{-1}\|x\| \\ &\leq 2\beta r^{-1}\|x\|,\end{aligned}$$

因此 T 有界. 逆命题是自明的. □

看看下面的几何考察将是有益的. 式(1)表明 T 有界 $\Leftrightarrow \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty \Leftrightarrow T$ 在球 $\bar{B}_1(0)$ 上有界. 若 T 在球 $\bar{B}_r(a)$ 上有界. 则因 $\bar{B}_r(a) = a + \bar{B}_r(0)$, T 必在 $\bar{B}_r(0)$ 上有界; 又因 T 是线性的, T 必在 $\bar{B}_1(0)$ 上有界. 与上述几何推理相适应, 我们可将题 4.1 的证明写成:

$$\begin{aligned}T\bar{B}_1(0) &= T[r^{-1}(\bar{B}_r(a) - a)] \\ &= r^{-1}[T\bar{B}_r(a) - Ta] \\ &\subset r^{-1}(TA - Ta),\end{aligned}$$

于是由 TA 有界推出, $T\bar{B}_1(0)$ 有界. 如上的推演格式并不是你非用不可的, 但其中所体现的几何思维方式, 在泛函分析中确具有重要意义.

4.2 设线性算子 $T: X \rightarrow Y$ 在某点 $x_0 \in X$ 邻近有界, 则 $T \in$

$L(X, Y)$.

提示:用上题或直接证明.

4.3 设 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 则 $\|T\| \leq r \Leftrightarrow TB_1(0) \subset \bar{B}_r(0)$.

证 若 $\|T\| \leq r$, 则 $\forall x \in B_1(0) \subset X$, 有 $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \leq r$, 从而 $Tx \in \bar{B}_r(0)$, 这意味着 $TB_1(0) \subset \bar{B}_r(0)$. 反之, 设 $TB_1(0) \subset \bar{B}_r(0)$, 则 $\forall \beta > r$ 有 $\beta \neq x \in X$, 有 $rx/\beta \|x\| \in B_1(0)$, 于是

$$\|Tx\| = \frac{\beta \|x\|}{r} \left\| T\left(\frac{rx}{\beta \|x\|}\right) \right\| \leq \frac{\beta \|x\|}{r} \cdot r = \beta \|x\|,$$

这推出 $\|T\| \leq \beta$. 令 $\beta \rightarrow r$ 得 $\|T\| \leq r$. \square

4.4 设 $T \in L(X, Y)$, $TB_r(a) \subset B_s(b)$, $r, s > 0$, 则 $\|T\| \leq 2s/r$.

提示: $B_r(a) = r[B_1(0) + a]$, 参照上题.

4.5 设 $T \in L(X, Y)$, 则 $\forall r > 1, \exists x \in B_r(0)$, 使得 $\|Tx\| = \|T\|$.

证 如果 $T = 0$, 则取 $x = 0$ 好了. 因此可设 $\|T\| > 0$. 因 $r^{-1}\|T\| < \|T\|$, 故由 $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$, 总可取出 $y \in X$, 使得 $\|y\| = 1, \|Ty\| > r^{-1}\|T\|$. 令 $x = y\|T\|/\|Ty\|$, 则 $\|Tx\| = \|T\|$,

$$\|x\| = \|T\|/\|Ty\| < r. \quad \square$$

应注意的是, 上题中的 r 可任意接近于 1, 但取 $r = 1$, 则结论不再成立. 一般地, 上确界 $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ 未必在单位球上达到.

4.6 设 $T \in L(A, Y)$, A 是 X 的稠密子空间, Y 完备, 则存在唯一的 $\bar{T} \in L(X, Y)$, 使得 $\bar{T}|_A = T, \|\bar{T}\| = \|T\|$.

证 $\forall x \in X$, 取 $\{x_n\} \subset A$, 使 $x_n \rightarrow x$. 因

$$\|Tx_m - Tx_n\| \leq \|T\| \|x_m - x_n\|,$$

故 $\{Tx_n\}$ 是 Cauchy 列; 由 Y 完备, 必存在 $\lim_n Tx_n$, 记为 $\bar{T}x$. 它与 $\{x_n\}$ 的选择无关(何故?). 这就定义出一个算子 $\bar{T}: X \rightarrow Y$. \bar{T} 显然是

线性的, 且 $\bar{T}|_A = T$. 由

$$\|\bar{T}x\| = \lim_n \|Tx_n\| \leq \lim_n \|T\| \|x_n\| = \|T\| \|x\|$$

得出 $\|\bar{T}\| \leq \|T\|$, 故 $\bar{T} \in L(X, Y)$. 因

$$\|Tx\| = \|\bar{T}x\| \leq \|\bar{T}\| \|x\| \quad (\forall x \in A),$$

故 $\|T\| \leq \|\bar{T}\|$, 因此 $\|\bar{T}\| = \|T\|$.

若某个 $S \in L(X, Y)$ 亦满足 $S|_A = T$, 则 $\forall x \in X$, 取 $\{x_n\} \subset A$, 使 $x_n \rightarrow x$, 则 $Sx = \lim_n Sx_n = \lim_n Tx_n = \bar{T}x$, 因此 $S = \bar{T}$. \square

上题结论的意义在于, 若 Y 完备, T 已定义为从 X 的某稠密子空间 A 到 Y 的有界线性算子, 则可自动地认为 T 已扩张到 X 上. 为行文方便, 通常将上述扩张称为 $T: A \rightarrow Y$ 在 X 上的线性扩张.

4.7 对于每个 $f \in L[a, b]$, 只有唯一的方法定义积分

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ 使得}$$

(i) 积分具线性性;

$$(ii) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f| dm;$$

(iii) 当 $f \in C[a, b]$ 时, $\int_a^b f(x) dx$ 就是 Riemann 积分.

提示: 用上题.

4.8 若 $\dim X = \infty, Y \neq \{0\}$, 则存在无界线性算子 $T: X \rightarrow Y$.

证 取线性无关的可数集 $A = \{x_n\} \subset X$, 可设 $\|x_n\| = 1$; 取 $0 \neq y \in Y$, 定义 $Tx_n = ny$, 则 T 自然地扩张为 $\text{span}A$ 上的一个线性算子. X 必可表为直和 $X = \text{span}A \oplus B$. $\forall x \in B$, 定义 $Tx = 0$, 则 $T: X \rightarrow Y$ 是一个线性算子. 因

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \sup_n \|Tx_n\| = \infty,$$

故 T 是无界算子. \square

这就表明, 在无限维空间上, 出现无界线性算子是一种普遍现象. 另一方面, 有限维空间上的线性算子必定有界(定理 4.1.1(iv)). 可见, 在处理有界线性算子问题时, 有限维空间与无限维空间有着本质差别. 这就不能指望, 有界线性算子理论是线性代数中线性变换理论的简单

重复.

4.9 设 $X \neq \{0\}$, 则 $L(X, Y)$ 完备 $\Leftrightarrow Y$ 完备.

证 若 Y 完备, 则 $L(X, Y)$ 必完备(定理 4.1.1(vi)). 反之, 设 $L(X, Y)$ 完备, $\{y_n\} \subset Y$ 是一 Cauchy 列. 今证 $\{y_n\}$ 收敛. 取 $x_0 \in X$, 使 $\|x_0\| = 1$. 定义 $T_n(\alpha x_0) = \alpha y_n$ ($\alpha \in K$), 分解 X 为 $X = Kx_0 \oplus A$, 在 A 上定义 $T_n x = 0$, 则得到 $T_n \in L(X, Y)$. 因 $\|T_m - T_n\| = \|y_n - y_m\|$, 故 $\{T_n\}$ 是 $L(X, Y)$ 中的 Cauchy 列. 设在 $L(X, Y)$ 中 $T_n \rightarrow T$, 则

$$\|y_n - Tx_0\| = \|T_n x_0 - Tx_0\| \leq \|T_n - T\| \rightarrow 0,$$

可见 $y_n \rightarrow Tx_0$. 这表明 Y 完备. □

上题表达了 Y 完备对于 $L(X, Y)$ 完备的重要性, 它可与题 3.90 对照.

B. 有界线性算子的例子

在研究一个具体给定的算子 $T: X \rightarrow Y$ 时, 通常要依次做以下三件事:

(i) 指明 T 是线性的. 在很多情况下, 这是平凡的.

(ii) 估计 $\|Tx\|$, 得到某个不等式 $\|Tx\| \leq k\|x\|$ ($\forall x \in X$), 从而断定 $T \in L(X, Y)$ 且 $\|T\| \leq k$. 得出不等式 $\|Tx\| \leq k\|x\|$ 的难易及所用的技巧, 决定于算子 T 的具体特性.

(iii) 在已知 $\|T\| \leq k$ 的基础上推断 $\|T\| = k$, 为此应指出 $\|T\| \geq k$, 这只在较特殊的情况下才能做到. 首先, 你在第(ii)步所得到的 k 未必正好就是 $\|T\|$, 即所得的估计 $\|Tx\| \leq k\|x\|$ 未必是最佳的. 在放大 $\|Tx\|$ 以便得出估计 $\|Tx\| \leq k\|x\|$ 时, 也许你已做得过头了. 在预计有可能 $\|T\| = k$ 的情况下, 可试探着找出 $x \in X$, 使 $\|x\| = a > 0$, $\|Tx\| \geq ak$, 这样就有

$$ak \leq \|Tx\| \leq \|T\| \|x\| = a \|T\|,$$

从而 $\|T\| \geq k$. 但如上的 x 未必存在(注意 $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$ 未必是最大值!). 在这种情况下, 还可试探以下方法: $\forall r \in (0, k)$, 找到 $x \in X$, 使 $\|x\| = 1$, $\|Tx\| \geq r$, 因而得出 $\|T\| \geq r$; 令 $r \rightarrow k$

即得 $\|T\| \geq k$.

对一些较复杂的算子,我们常常只能满足于做到上述的第(i) & (ii) 两步.在有界线性算子的实际应用中,算子范数的准确值并非总是需要的.如果所考虑的算子属于定理 4.1.2 或 4.1.3 中所述的标准类型,那么只需套用已知结论就行了.

4.10 设 $(Tf)(x) = xf(x)$ $(Sf)(x) = x \int_0^1 f(y) dy$, $f \in C[0, 1]$, 求 $\|T\|$, $\|S\|$, $\|TS\|$ 和 $\|ST\|$.

解 直接看出 T, S 都是从 $C[0, 1]$ 到自身的线性算子.

(i) 求 $\|T\|$. 首先,由 $\|Tf\|_0 \leq \|f\|_0$ ($\forall f \in C[0, 1]$) 得 $\|T\| \leq 1$. 其次,取 $f \equiv 1$, 则有 $\|f\|_0 = 1$, $\|Tf\|_0 = 1 \leq \|T\| \|f\|_0 = \|T\|$, 因此 $\|T\| = 1$.

(ii) 求 $\|S\|$. 令 $K(x, y) = x$, 用定理 4.1.3 (iv) 有

$$\|S\| = \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x, y)| dy = 1.$$

(iii) 求 $\|TS\|$. 首先写出 $(TSf)(x) = x^2 \int_0^1 f(y) dy$, 然后如同求 $\|S\|$ 一样可得出 $\|TS\| = 1$.

(iv) 求 $\|ST\|$. 注意 $(STf)(x) = x \int_0^1 yf(y) dy$, 于是

$$\|ST\| = \max_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 xy dy = 1/2. \quad \square$$

上题提供了两个可注意的事实.首先,可以 $TS \neq ST$; 其次,可以 $\|ST\| < \|S\| \|T\|$ (参看定理 4.1.1 (vi)).

为简单起见,下面写 $(Tf)(x)$ 为 $Tf(x)$.

4.11 设 $Tf(x) = \int_0^1 \sin \pi(x-y)f(y) dy$, 则 $T \in L(C[0, 1])$, 求 $\|T\|$.

提示:用定理 4.1.3 (iv), $\|T\| = 2/\pi$.

4.12 设 $Tf(x) = \int_a^x f(t) dt$, $J = [a, b]$, 则 $T \in L(L^1(J))$, $C(J)$ 且 $T \in L(L^1(J))$, 分别求 $\|T\|$.

解 (i) T 看作从 $L^1(J)$ 到 $C(J)$ 的线性算子. 由

$$\|Tf\|_0 = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt = \|f\|_1$$

得 $\|T\| \leq 1$. 若取 $f \equiv 1$, 则 $\|f\|_1 = b - a$, $Tf(x) = x - a$, 于是

$$b - a = \|Tf\|_0 \leq \|T\| \|f\|_1 = \|T\| (b - a),$$

这得出 $\|T\| \geq 1$, 因此 $\|T\| = 1$.

(ii) T 看作从 $L^1(J)$ 到 $L^1(J)$ 的算子. 令 $K(x, y) = \chi_{[a, x]}(y)$, 则

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy.$$

因

$$\int_a^b |K(x, y)| dx = \int_y^b dx = b - y,$$

故由定理 4.1.3(i) 得 $\|T\| = b - a$. □

上题使你注意到, 同一个 T 看作关于不同空间上的线性算子, 范数可以不同.

4.13 设 $J = [a, b]$, $K(x, y) \in L^q(J \times J)$, $1 < q = p/(p-1) < \infty$, T 依 (3) 则 $T \in L(L^p(J), L^q(J))$.

解 任给 $f \in L^p(J)$, 用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q^q &= \int_a^b \left| \int_a^b K(x, y) f(y) dy \right|^q dx \\ &\leq \int_a^b \left[\int_a^b |K(x, y)|^q dy \left(\int_a^b |f(y)|^p dy \right)^{q/p} \right] dx \\ &= \|f\|_p^q \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^q dx dy = \|K\|_q^q \|f\|_p^q, \end{aligned}$$

即得 $\|Tf\|_q \leq \|K\|_q \|f\|_p$, 可见 $T \in L(L^p(J), L^q(J))$, 且 $\|T\| \leq \|K\|_q$. □

上题得出了 $\|T\| \leq \|K\|_q$, 但 $\|T\|$ 准确地是多少, 则不得而知.

处理 L^p 空间上的积分算子, 常要用到 Hölder 不等式, 题 4.13 就

是如此. 你试解决类似的问题:

4.14 设 $J = [a, b]$, $K(x, y)$ 在 $J \times J$ 上可测,

$$\int_a^b |K(x, y)| dx \leq M, \quad \int_a^b |K(x, y)| dy \leq M,$$

T 依式(3), $1 < p < \infty$, 则 $T \in L(L^p(J))$ 且 $\|T\| \leq M$.

提示: 利用以下不等式:

$$\begin{aligned} \int_a^b |K(x, y)f(y)| dy &\leq \left[\int_a^b |K(x, y)| dy \right]^{1/q} \\ &\quad \cdot \left[\int_a^b |K(x, y)| |f(y)|^p dy \right]^{1/p}, \quad q = p/(p-1). \end{aligned}$$

4.15 设 $Tf(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{ixy} f(y) dy$, 则 $T \in L(L^1(\mathbf{R}), C_0(\mathbf{R}))$,

$$\|T\| = 1.$$

证 $T: L^1(\mathbf{R}) \rightarrow C_0(\mathbf{R})$ 是一个线性算子(参考题 3.41, 3.46).

由

$$|Tf(x)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(y)| dy = \|f\|_1$$

得出 $\|Tf\|_0 \leq \|f\|_1$, 因此 $\|T\| \leq 1$. 其次, 取 $f = \chi_{(-1, 1)}$, 则 $\|f\|_1 = 2$,

$$Tf(x) = \int_{-1}^1 e^{ixy} dy = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix} = \frac{2\sin x}{x}.$$

故 $\|Tf\|_0 = 2 \leq \|T\| \|f\|_1 = 2 \|T\|$, 这得 $\|T\| \geq 1$. 因此 $\|T\| = 1$. \square

上题之证的最后一步选择 $f = \chi_{(-1, 1)}$ 带有试探性. 在类似情况下, 成功与否及难易程度与选择的关系极大. 选择 $f = \chi_{(-1, 1)}$ 当然是很理想的, 但也可以选择稍次的 $f = e^{-x} \chi_{(0, \infty)}$, 此时有 $\|f\|_1 = 1$, 而

$$Tf(x) = \int_0^\infty e^{-y+ixy} dy = \frac{1}{1-ix},$$

于是 $\|Tf\|_0 = \sup_{x \in \mathbf{R}} (1+x^2)^{-1/2} = 1$, 这同样得出 $\|T\| \geq 1$.

4.16 设 $T_n x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$, $x = (x_n) \in l^2$, 则 $T_n \in$

$L(l^2)$, 求 $\|T_n\|$.

解 可依定理 4.1.2(iii) 断定 $T_n \in L(l^2)$, 但那里的结论无助于求出 $\|T_n\|$. 直接看出 $\|T_n x\|_2 \leq \|x\|_2$, 因此 $\|T_n\| \leq 1$. 其次, 设 $\{e_i\}$ 是 l^2 的标准基, 则 $\|e_i\|_2 = 1$, $T_n e_n = e_n$, 故

$$1 = \|T_n e_n\|_2 \leq \|T_n\| \|e_n\|_2 = \|T_n\|,$$

这得 $\|T_n\| \geq 1$, 因此 $\|T_n\| = 1$. □

4.17 给定 $a = (a_1, a_2, \dots)$, $Tx = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots)$, $x = (x_n) \in l^2$, 则 $T \in L(l^2) \Leftrightarrow a \in l^\infty$; 当 $a \in l^\infty$ 时求 $\|T\|$.

提示: 参照上题, 注意 $T e_n = a_n e_n$; $\|T\| = \|a\|_\infty$.

4.18 设 $Ax = (2x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}, \dots)$, 则 $A \in L(l^1)$ 且 $A \in L(l^\infty)$, 分别求其范数.

提示: 用定理 4.1.2, $\|A\|_1 = 3$, $\|A\|_\infty = 2$.

4.19 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{K}^{n \times n}$, 当 $i > n$ 或 $j > n$ 时补充定义 $a_{ij} = 0$, 将 A 扩充为无穷矩阵 \tilde{A} , 以 $\|\tilde{A}\|_p$ 表示将 \tilde{A} 看作从 l^p 到 l^p 的线性算子的范数, 则 $\|A\|_p = \|\tilde{A}\|_p$.

证 以 $P_n: l^p \rightarrow \mathbf{K}^n (x_1, \dots, x_n, \dots) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ 记自然投影, 则 $\tilde{A}x = AP_n x (\forall x \in l^p)$, 于是

$$\|\tilde{A}x\|_p = \|AP_n x\|_p \leq \|A\|_p \|P_n x\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p,$$

这得出 $\|\tilde{A}\|_p \leq \|A\|_p$. 其次, 取 $x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$, 使得

$$\|x\|_p = \|P_n x\|_p = 1, \|AP_n x\|_p = \|A\|_p, \text{ 则}$$

$$\|A\|_p = \|AP_n x\|_p = \|\tilde{A}x\|_p \leq \|\tilde{A}\|_p,$$

因此 $\|\tilde{A}\|_p = \|A\|_p$. □

4.20 设 $A = [a_{ij}]$, 则可能 $\|A\|_2^2 < \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.

证 由题 4.19, 可取某个 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 说明. $n = 1$ 时不可能出现题中的情况, 最简单的反例应在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中找. 取 $A = I =$ 单位矩阵, 则显然有

$$\|A\|_2^2 = 1 < 2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2. \quad \square$$

以上结论表明,不等式 $\|A\|_2 \leq (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2}$ 所提供的,可能是关于 $\|A\|_2$ 的一个很粗的估计.

4.21 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_2^2 < 6$.

提示: $\|A\|_2^2 = A^T A$ 的最大特征值 $= 3 + 2\sqrt{2}$.

4.22 对 $f \in L^2(J)$, $J = [0, 1]$, 定义

$$Tf(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 1/2; \\ 0 & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

则 $T \in L(L^2(J))$, 求 $\|T\|$.

解 最好将 Tf 改写成 $f \chi_{[0, 1/2]}$, 由此立即看出 $\|Tf\|_2 \leq \|f\|_2$, 因此 $T \in L(L^2(J))$ 且 $\|T\| \leq 1$. 若取 $f = \chi_{[0, 1/2]}$, 则

$$\|Tf\|_2 = \|f\|_2 \leq \|T\| \|f\|_2,$$

这得出 $\|T\| \geq 1$, 因此 $\|T\| = 1$. □

注意解上题时并无必要求出 $\|f\|_2$.

4.23 设 $\mu\Omega < \infty$, $\varphi \in L^\infty(\Omega)$, $Tf = \varphi f$ ($f \in L^2(\Omega)$), 则 $T \in L(L^2(\Omega))$, 求 $\|T\|$.

解 首先, 对任给 $f \in L^2(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2^2 &= \int_{\Omega} |\varphi f|^2 d\mu \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \int_{\Omega} |f|^2 d\mu = \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

这得出 $T \in L(L^2(\Omega))$ 且 $\|T\| \leq \|\varphi\|_\infty$. 不妨设 $\|\varphi\|_\infty > 0$. $\forall r \in (0, \|\varphi\|_\infty)$, 令 $A = \{|\varphi| > r\}$, 则必 $\mu A > 0$ (参看题 3.17 之证). 令 $f = \chi_A$, 则 $f \in L^2(\Omega)$, $\|f\|_2 > 0$; 而

$$\|T\| \|f\|_2 \geq \|Tf\|_2 = \|\varphi \chi_A\|_2 \geq r \|f\|_2,$$

这推出 $\|T\| \geq r$. 令 $r \rightarrow \|\varphi\|_\infty$ 得 $\|T\| \geq \|\varphi\|_\infty$, 因此 $\|T\| = \|\varphi\|_\infty$. □

注意题 4.23 包含了题 4.22, 也可参照题 4.17. 实际上, $\mu\Omega < \infty$ 可代以一个较宽的条件. 你能将 4.23 改造一下, 使之可用于 Ω 是

Lebesgue 可测集或 $\Omega = \mathbb{N}$ (μ 是计数测度) 这种情况吗?

4.24 设 $J = [0, 1]$, $Tf = f'$, 则 $T \in L(C^1(J), C(J))$, 求 $\|T\|$, 在 $C^m(J)$ 中采用范数 $\|\cdot\|_m$ (依 § 3.1(8)), $m = 0, 1$. 若在 $C^1(J)$ 中亦使用范数 $\|\cdot\|_0$, T 还是有界线性算子吗?

提示: $\|T\| = 1$, 在证 $\|T\| \geq 1$ 时取 $f(x) = x$.

4.25 设 $Tf(x) = \sum_0^m f^{(k)}(a)x^k/k!$, 则 $T \in L(C^m(J))$ $J = [a, b]$.

提示: 说明 $\|(Tf)^{(k)}\|_0 \leq \text{const} \|f\|_m$ ($0 \leq k \leq m$).

以上看到的线性算子多少具有自然的、或常见的构造. 但也有一些线性算子初看起来显得有点怪异, 不过, 一旦细看之后, 你会发现处理方法并没有什么不同, 因而平常看待就是.

4.26 给定 $a \in X$, 令 $\varphi(T) = Ta$ ($T \in L(X)$), 则 $\varphi \in L(L(X), X)$, 求 $\|\varphi\|$.

解 此题中, a 是固定的, T 反而成了“自变量”. 其实, 这并没有什么不正常的. 同样可按标准的程序验证:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha T + \beta S) &= (\alpha T + \beta S)a = \alpha Ta + \beta Sa \\ &= \alpha \varphi(T) + \beta \varphi(S) \quad (T, S \in L(X)),\end{aligned}$$

可见 $\varphi: L(X) \rightarrow X$ 是线性算子. 由 $\|Tx\| \leq \|T\| \|a\|$ ($\forall T \in L(X)$) 得 $\|\varphi\| \leq \|a\|$; 取 $T = I$ (单位算子) 得 $\|a\| = \|Ta\| = \|\varphi(T)\| \leq \|\varphi\|$, 故得 $\|\varphi\| = \|a\|$. \square

4.27 设 $\varphi \in C[0, 1]$ 满足 $0 \leq \varphi \leq 1$, $Tf = f \circ \varphi$, 则 $T \in L(C(J))$ ($J = [0, 1]$), 求 $\|T\|$.

提示: 类似于上题. $\|T\| = 1$.

C. 逆算子定理及其应用

若要问开映射定理、逆算子定理与闭图象定理有何用处, 那么可以这样说: 如果你沿泛函分析这条路一直往前走, 那么你将不断地用到它们, 尤其在遭遇险阻之际, 往往要依靠这些基本定理开山劈路. 但你未必会为这番响亮的预告而有所激动, 你需要的是眼前的例证! 可惜, 能立即着手考虑的例子不多. 大多数应用都依赖于一定的预备知识. 这一

局面常常是学习泛函分析的难处所在！你很可能依然保持着学习数学分析时的习惯：定理不明白吗？赶快举例说明！然而在泛函分析中浅显的例子不多，真能说明问题的例子并不总是可随手拈来的。不过，下面的问题还是可供你初试基本定理的锋芒。

4.28 设范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 都使 X 为 Banach 空间，存在 $\beta > 0$ ，使得 $\|x\|' \leq \beta \|x\|$ ($\forall x \in X$)，则两范数等价。这意味着，在已知完备性的前提下，在验证 §3.1 中条件(2)时，只需验证一半就够了。

提示：对 $I: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|')$ 用逆算子定理。

4.29 设 X, Y 是 Banach 空间， $T \in L(X, Y)$ 是一个单射，存在 $\{x_n\} \subset X$ ，使得 $\|Tx_n\| < n^{-1} \|x_n\|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)，则 $R(T)$ 在 Y 中不是闭的。

证 反证之：若 $R(T)$ 是闭的，则它作为 Y 的闭子空间是一个 Banach 空间(定理 3.1.1)，于是 $T: X \rightarrow R(T)$ 是一拓扑同构(用逆算子定理)，因此 $T^{-1} \in L(R(T), X)$ ，但这矛盾于以下事实：

$$\|T^{-1}Tx_n\| = \|x_n\| > n \|Tx_n\| ! \quad \square$$

4.30 设 X, Y 是 Banach 空间， $T \in L(X, Y)$ 是一个单射， $R(T)$ 在 Y 中是闭的，则 $\exists \alpha > 0$ ，使得 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ ($\forall x \in X$)。

提示：参考上题。

4.31 设 X, Y 是 Banach 空间， $T \in L(X, Y)$ ， $R(T)$ 是闭集， $S \in L(X, Z)$ ， $N(T) \subset N(S)$ 。定义 $A: R(T) \rightarrow Z$ ， $Tx \rightarrow Sx$ ，则 $A \in L(R(T), Z)$ 。

证 若 $x, y \in X$ 使得 $Tx = Ty$ ，则 $x - y \in N(T) \subset N(S)$ ，因而 $Sx = Sy$ 。这表明 $A(Tx) = Sx$ 仅决定于 Tx ，因此 $A: R(T) \rightarrow Z$ 是一个合理的算子。直接看出 A 是线性的。为证 A 连续，只要说明：任给开集 $V \subset Z$ ， $A^{-1}V$ 是 $R(T)$ 中的开集(定理 3.2.2)。由 $AT = S$ 得 $A^{-1}V = TS^{-1}V$ 。因 $S^{-1}V$ 是 X 中的开集，由开映射定理即得 $A^{-1}V$ 是 $R(T)$ 中的开集。 \square

4.32 设 X, Y 是 Banach 空间，则 $X \times Y$ 依积范数是 Banach 空间。

提示 若 $\{(x_n, y_n)\}$ 是 $X \times Y$ 中的 Cauchy 列, 则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 分别为 X 与 Y 中的 Cauchy 列.

4.33 设 X 是 Banach 空间, $A, B \subset X$ 是闭子空间, $X = A \oplus B$, P_A, P_B 是投影映射, 即 $\forall a \in A, b \in B, x = a + b, P_A x = a, P_B x = b$, 则 $P_A, P_B \in L(X)$.

证 仅由 $A \oplus B$ 为直和就得出 P_A 与 P_B 是线性算子. 余下只要证 $a_n + b_n \rightarrow a + b$ ($a_n, a \in A, b_n, b \in B$) $\Rightarrow a_n \rightarrow a$ 且 $b_n \rightarrow b$. 因反命题“ $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + b$ ”显然为真, 自然想到用逆算子定理, 为此定义

$$T: A \times B \rightarrow A \oplus B, (a, b) \mapsto a + b.$$

由直和的结构知 T 为线性同构. 因 A, B 作为 X 的闭子空间是 Banach 空间, 故 $A \times B$ 亦是 Banach 空间 (题 4.32). 于是由逆算子定理知 T^{-1} 连续, 即

$$\begin{aligned} a_n + b_n \rightarrow a + b & \quad (a_n, a \in A, b_n, b \in B) \\ \Rightarrow (a_n, b_n) & \rightarrow (a, b) \\ \Rightarrow a_n \rightarrow a, & \quad b_n \rightarrow b, \end{aligned}$$

故得所要证. □

在考虑闭图象定理的应用之前, 先分析一下它的逻辑结构. 设 $T: X \rightarrow Y$, $\text{Gr} T$ 是闭的意味着: $x_n \rightarrow x, Tx_n \rightarrow y \Rightarrow y = Tx$, 这一条件弱于连续性. 闭图象定理在于说明: 若 X, Y 完备, 则只要验证这个形式上较弱的条件, 就能推出看来较强的连续性, 这就简化了问题.

4.34 设 $J = [a, b], T \in L(L^2(J)), T\alpha(J) \subset \alpha(J)$, 则 $T: \alpha(J) \rightarrow \alpha(J)$ 是连续的.

证 只要指明在 J 上 $f_n \Rightarrow f, Tf_n \Rightarrow g \Rightarrow g = Tf$. 由 $f_n \Rightarrow f$ 与 $Tf_n \Rightarrow g$ 推出 $f_n \xrightarrow{L^2} f, Tf_n \xrightarrow{m} g$ 与 $Tf_n \xrightarrow{L^2} Tf$; 后者又推出 $Tf_n \xrightarrow{m} Tf$, 于是 $g = Tf$ a.e., 而由连续性即得 $g = Tf$. □

4.35 设 X, Y 是 Banach 空间, $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 赋范空间 Z 有性质: $\bigcap \{N(S): S \in L(Y, Z)\} = \{0\}$. 若 $\forall S \in L(Y, Z)$,

有 $S \circ T \in L(X, Z)$, 则 $T \in L(X, Y)$.

证 设在 X 中 $x_n \rightarrow x$, 而在 Y 中 $Tx_n \rightarrow y$, 今证 $y = Tx$. $\forall S \in L(Y, Z)$, 有 $STx_n \rightarrow STx$ 与 $STx_n \rightarrow Sy$, 因此 $y - Tx \in N(S)$, 这推出 $y - Tx = 0$, 即得所要证. \square

4.36 设 $\{x_k\} \subset X, \forall f \in X^*: \sum |f(x_k)| < \infty$, 则

$$\sum |f(x_k)| \leq \text{const} \|f\|.$$

证 定义 $T: X^* \rightarrow l^1, f \rightarrow (f(x_k))$. 若在 X^* 中 $f_n \rightarrow f$, 在 l^1 中 $Tf_n \rightarrow a = (a_k)$, 则必 $f_n(x_k) \rightarrow f(x_k) = a_k (n \rightarrow \infty, \forall k \in \mathbb{N})$, 因此 $Tf = a$. 于是由闭图象定理有 $T \in L(X^*, l^1)$, 即得所要证. \square

4.37 设 X 完备, $\{f_k\} \subset X^*, \forall x \in X: \sum |f_k(x)| < \infty$, 则 $\sum |f_k(x)| \leq \text{const} \|x\|$.

提示 对 $T: X \rightarrow l^1, x \rightarrow (f_k(x))$ 用闭图象定理.

4.38 设 $J = [a, b], \varphi: J \rightarrow X$ 满足 $f \circ \varphi \in L^1(J) (\forall f \in X^*)$, 则 $\int_a^b |f(\varphi(t))| dt \leq \text{const} \|f\| (\forall f \in X^*)$.

证 对 $T: X^* \rightarrow L^1(J), f \rightarrow f \circ \varphi$ 用闭图象定理. 设在 X^* 中 $f_n \rightarrow f$, 而 $f_n \circ \varphi \xrightarrow{L^1} g$, 则必 $f_n \circ \varphi \rightarrow f \circ \varphi$, 有某个子列 $f_{n_i} \circ \varphi \rightarrow g$ a.e., 因此 $g = f \circ \varphi = Tf$, 即得所要证. \square

4.39 设 X 完备, $J = [a, b], \varphi: J \rightarrow X^*, t \rightarrow \varphi_t$ 满足

$$\int_a^b |\varphi_t(x)| dt < \infty \quad (\forall x \in X),$$

则 $\int_a^b |\varphi_t(x)| dt \leq \text{const} \|x\| (\forall x \in X)$.

提示 对 $T: X \rightarrow L^1(J), x \rightarrow \varphi_t(x)$ 用闭图象定理.

D. 一致有界原理的应用

通过定理 4.1.7 这一类的标准结论间接地应用一致有界原理, 无疑有重大意义, 但这已经成为泛函分析的常识, 其中并无创意与技巧可言. 另一方面, 一致有界原理还可能以各种形式应用在众多问题中, 这

些应用没有明显的规律可循,因而对你的灵活运用能力是一种真正的挑战.

一致有界原理的应用可分为两种形式:

(i) 有限性(或有界性)证明:将要判定其为有限的量与 $\sup_{\alpha} \|T_{\alpha}\|$ 联系起来,并用一致有界原理推断 $\sup_{\alpha} \|T_{\alpha}\| < \infty$.

(ii) 存在性证明:将要判明其存在的对象与集 $\{x: \sup_{\alpha} \|T_{\alpha}x\| = \infty\}$ 联系起来,并从 $\sup_{\alpha} \|T_{\alpha}\| = \infty$ 推出该集是第二纲稠集.

对于以上两种情况,关键的步骤是作出适当的算子族 $\{T_{\alpha}\}$;在很多情况下是作一个序列 $\{T_n\}$.

4.40 设 $\{T_n\} \subset L(X, Y)$, X 完备, $\sup_n |g(T_n x)| < \infty$ ($x \in X, g \in Y^*$), 则 $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

证 任给 $x \in X$, 由 $\sup_n |g(T_n x)| < \infty$ ($\forall g \in Y^*$) 与定理 4.1.7(i), 得出 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$; 然后再对 $\{T_n\}$ 应用一致有界原理, 得出 $\sup_n \|T_n\| < \infty$. \square

4.41 设 X, Y, Z 是 Banach 空间, $T(x, y): X \times Y \rightarrow Z$ 分别对 x 与 y 为有界线性算子, 则 $\|T(x, y)\| \leq \text{const} \|x\| \|y\|$ ($\forall x \in X, y \in Y$).

证 这是一个有界性证明. 令 $T_x = T(x, \cdot), T^y = T(\cdot, y)$, 则 $\{T_x: \|x\| \leq 1\} \subset L(Y, Z), \forall y \in Y: \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_x(y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^y(x)\| < \infty$, 于是由一致有界原理有 $\beta \triangleq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_x\| < \infty$, 从而

$$\sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} \|T(x, y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \|T_x y\| = \beta < \infty,$$
 这推出 $\|T(x, y)\| \leq \beta \|x\| \|y\|$ ($\forall x \in X, y \in Y$). \square

4.42 设 X, Y, Z 是 Banach 空间, $T(x, y): X \times Y \rightarrow Z$ 分别对 x 与 y 是线性算子, $\forall f \in Z^*, f(T(x, y))$ 分别对 x, y 连续, 则上题之结论成立.

提示: 用定理 4.1.7 与上题.

4.43 设 $1 < p = q/(q-1) < \infty$, $\mu(\Omega) < \infty$, $g \in M(\Omega)$. 若 $\forall f \in L^p(\Omega)$, 有 $fg \in L^1(\Omega)$, 则 $g \in L^q(\Omega)$.

证 令 $g_n = g\chi_{\{|g| \leq n\}}$, $T_n f = \int_{\Omega} fg_n d\mu$ ($f \in L^p(\Omega)$), 则 $T_n \in L^p(\Omega)^*$, 且 $\|T_n\| = \|g_n\|_q$ (参考定理 4.2.2(i)). 因

$$\int_{\Omega} |fg_n| d\mu \leq \int_{\Omega} |fg| d\mu < \infty,$$

故 $\sup_n |T_n f| < \infty$. 于是

$$\sup_n \|T_n\| = \sup_n \|g_n\|_q < \infty.$$

因 $|g_n| \uparrow |g|$, 由 Levi 定理有

$$\|g\|_q = \lim_n \|g_n\|_q < \infty. \quad \square$$

4.44 设 $1 < p = q/(q-1) < \infty$, 序列 $y = (y_n)$ 有性质: $\forall x = (x_n) \in l^p$ 有 $\sum |x_n y_n| < \infty$, 则 $y \in l^q$.

提示: 类似于上题.

§ 4.2 有界线性泛函

一、定理与定义

给定 \mathbf{K} 上的赋范空间 X , 则 $X^* = L(X, \mathbf{K})$ 是 \mathbf{K} 上的 Banach 空间 (定理 4.1.1(vi)) 称它为 X 的对偶空间. 称每个 $f \in X^*$ 为 X 上的有界线性泛函. 作为有界线性算子特例的有界线性泛函, 自然承袭了一般有界线性算子的所有性质; 为应用方便, 我们将已知的结论汇集于下:

定理 4.2.1 设 $f: X \rightarrow \mathbf{K}$ 是一个线性泛函.

(i) 有界性的等价刻画: f 有界 $\Leftrightarrow f$ 连续 $\Leftrightarrow f$ 在 X 的任何有界集上有界 $\Leftrightarrow f$ 在某个球上有界.

(ii) 范数的表达式: 设 $f \in X^*$, 则

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \\
 &= \sup_{\|x\| \neq 0} |f(x)| / \|x\| \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$= \min\{k \geq 0 : |f(x)| \leq k \|x\| (\forall x \in X)\}.$$

(iii) 基本不等式: $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| (\forall x \in X)$.

(iv) 有限维情况: 若 $\dim X < \infty$, 则 f 必连续.

(v) 核与值域: $f \in X^* \Leftrightarrow N(f) = f^{-1}(0)$ 是 X 的闭子空间;
 $f(X) = K \Leftrightarrow f \neq 0$.

其中最后一个性质已与一般情况有所不同了. 毫无疑问, 有界线性泛函应当比一般的有界线性算子简单得多, 我们对它的了解当然不应停留在套用上节结果的水平上. 对于有界线性泛函, 我们希望能给出更确切的刻画. 一个首要的问题是: 能给出 X 上全部有界线性泛函的一般表达式 (或称通式) 吗? 这一问题至少对一些常用的空间已获解决, 其结果被称为表示定理. 几个著名的表示定理汇集于下 (它们大多属于 Riesz, 因而称为 Riesz 表示定理).

定理 4.2.2 (i) 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ -有限测度空间, $1 \leq p = q/(q-1) < \infty$, 则 $F \in L^p(\Omega)^*$ 有通式

$$F(f) = \int_{\Omega} fg d\mu \quad (f \in L^q(\Omega)), \quad (2)$$

其中 $g \in L^q(\Omega)$ 由 F 唯一决定, 且 $\|g\|_q = \|F\|$. 因此, 在等距同构的定义上, 可以认为

$$L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega).$$

(ii) 设 $1 \leq p = q/(q-1) < \infty$, 则 $f \in (l^p)^*$ 有通式

$$f(x) = \sum_i x_i y_i \quad (x = (x_i) \in l^p), \quad (3)$$

其中 $y = (y_i) \in l^q$ 由 f 唯一决定, 且 $\|y\|_q = \|f\|$. 因此, 在等距同构的意义上, 可以认为

$$(l^p)^* = l^q.$$

(iii) 设 H 是一个 Hilbert 空间, 则 $f \in H^*$ 有通式

$$f(x) = (x, a) \quad (x \in H),$$

其中 $a \in H$ 由 f 唯一决定, 且 $\|a\| = \|f\|$. 因此, 在等距共轭同构

的意义上, 可以认为 $H^* = H$, 即 H 是自对偶的.

(iv) 设 $J = [a, b]$, 则 $F \in C(J)^*$ 有通式

$$F(f) = \int_a^b f dg \quad (f \in C(J)),$$

其中 g 是由 F 唯一决定的右连续有界变差函数且 $g(a) = 0, V_a^b(g) = \|F\|$. 若以 BV_0 表所有这样的函数 g 之集, 其中以 $\|g\| = V_a^b(g)$ 作为范数, 则在等距同构的意义上可以认为 $C(J)^* = BV_0$.

对于已建立表示定理的空间(如上面提到的 $L^p, \mathcal{L}^p, C(J)$ 等), 就有了标准的方法去解决有界线性泛函的表达与范数计算等问题, 而无需各别地考虑. 这无论在理论上或实际计算上都是一个重大的突破.

不过, 并非对任何赋范空间都容易建立某种表示定理. 这就出现一个问题, 对于一般的赋范空间 X , 我们对 X^* 能说些什么呢? 首先, X^* 有“足够多”的元素吗? 幸而, 有一个很一般的定理来回答这类问题, 它就是有界线性泛函理论中最重要的 Hahn-Banach 定理, 它与逆算子定理、一致有界原理一起, 通常被称为泛函分析的三大基本定理.

定理 4.2.3 设 X 是一赋范空间.

(i) 设 A 是 X 的子空间, f 是 A 上的有界线性泛函, 则 f 可延拓为 X 上的有界线性泛函 g , 使得

$$\|g\| = \|f\|_A \triangleq \sup_{x \in A, \|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

上述的 g 称为 f 在 X 的保范延拓.

(ii) 设 A 是 X 的闭子空间, $x_0 \in X \setminus A$. 则存在 $f \in X^*$, 使得 $f|_A = 0, \|f\| = 1, f(x_0) = d(x_0, A)$. 特别取 $A = \{0\}$ 得出: 当 $0 \neq x_0 \in X$ 时必存在 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$ 且 $f(x_0) = \|x_0\|$.

(iii) 设 $x, y \in X$, 则 $x = y \Leftrightarrow \forall f \in X^*: f(x) = f(y)$.

从逻辑上说, 定理 4.2.3 中三个结论的关系是 (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii); 从实际应用来看, 结论 (ii) \wedge (iii) 用得更多. 尤其是结论 (iii), 它为在无限维空间中判定两向量相等提供了一个普遍方法, 有极普遍的应用.

Hahn-Banach 定理的第一个重要推论是:

定理 4.2.4 (互对偶性) $X \subset X^{**}$, 这意味着, X 可等距地嵌入

到 X^{**} 中,因而成为 X^* 的对偶空间的一部分.

X 到 X^{**} 中的嵌入通过以下正则嵌入实现:

$$\begin{cases} X \rightarrow X^{**}, x \rightarrow \tilde{x} \\ \tilde{x}(f) = f(x) \quad (x \in X, f \in X^*). \end{cases} \quad (4)$$

这样,每个 $x \in X$ 同时扮演两种角色:一方面, x 是 X 中的向量;同时, x 又可看作 X^* 上的有界线性泛函(在后一种情况下记作 \tilde{x}). 这种双重性初看起来似乎滋生混乱,但实际上是泛函分析中最富有成效的对偶理论的基础. 简单地说,既然向量 $x \in X$ 也是有界线性泛函,那么,对于有界线性泛函所建立的结论也适用于向量;反之亦然. 这样,就可将对 X 与 X^* 建立的命题实现互相转化,从而大大扩大它们的适用价值. 最浅显而又特别说明问题的例子是,范数公式(1)亦可用于向量范数,因此得到

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)|. \quad (5)$$

此外,定理 4.1.7 中的结论(i) & (ii)也可看作同一命题在 X 与 X^* 之间互相转化的结果. 这一类的转化在泛函分析中造成了一种有趣的奇观:许多命题在 X 与 X^* 中成对地出现. 这种对偶性在许多优美数学思想的源泉.

但可惜的是,空间 X 与 X^* 之间的对偶关系是不完满的. 问题在于, X 一般不是 X^* 的对偶空间,而只是其对偶空间的一部分,因而在 X 与 X^* 的相互关系上存在基本的不对称性. 仅当嵌入(4)是一同构,因而可认为 $X = X^{**}$ 时,这种不对称性才得以消除,此时称 X 为自反空间. 对于自反空间 X , X 与 X^* 之间展示出完美的相互对偶关系. 有限维空间、Hilbert 空间及 L^p 空间($1 < p < \infty$)是最常用的自反空间,而 C^m 空间(参看 § 3.1)则不是. 这也是 L^p 空间通常较诸 C^m 空间更有价值的原因之一.

在泛函分析中, Hahn-Banach 定理的另一组推论以分离定理的形式出现. 这是一类几何色彩很强的命题,其背景可追溯到 Euclid 空间中一些直观上明显的几何事实. 熟知,在 Euclid 空间中,平面方程的一般形式是 $\sum \alpha_i x_i = r$, 其中 α_i 不全为零. 空间由平面分为两半:

$\sum \alpha_i x_i \leq r$ 与 $\sum \alpha_i x_i \geq r$. 类似地, 若 $0 \neq f \in X^*$, 则称集 $\{f = r\}$ 为 X 中的超平面, 而称 $\{f \geq r\}$ 与 $\{f \leq r\}$ (或 $\{f > r\}, \{f < r\}$) 为半空间. 当 $A, B \subset X, f(A) \leq r \leq f(B) (\Leftrightarrow f(a) \leq r \leq f(b), \forall a \in A, \forall b \in B)$ 时, 说超平面 $\{f = r\}$ 分离集 A 与 B ; 若 $f(A) < r < f(B)$, 则说 $\{f = r\}$ 严格分离 A 与 B . 简单地说, 分离定理断言, 在一定条件下, 互不相交的凸集可用超平面分离. 准确地说是:

定理 4.2.5 设 X 是实赋范空间, $A, B \subset X$ 是非空凸集.

(i) 若 $A^\circ \neq \emptyset, A^\circ \cap B = \emptyset$, 则存在 $f \in X^*, r \in \mathbf{R}$, 使得

$$f(A^\circ) < r \leq f(B), f(A) \leq f(B). \quad (6)$$

(ii) 若 A 是紧集, B 是闭集, $A \cap B = \emptyset$, 则存在 $f \in X^*, r \in \mathbf{R}$, 使得

$$f(A) < r < f(B). \quad (7)$$

(iii) 若 $\dim X < \infty, A \cap B = \emptyset$, 则存在 $0 \neq f \in X^*$, 使得

$$f(A) \leq f(B).$$

在这个短短的课程中, 我们已无力在分离定理这一题目上深入了. 只是指出, 现代数学中一些最富有成果的数学理论, 例如最优化理论、凸分析理论等, 正是通过分离定理而与泛函分析沟通起来的. 对这些应用领域感兴趣的读者, 将会有大量使用分离定理的机会.

为表达与对偶空间有关的命题, 通常采用某些现已通行的记号. $\forall f \in X^*, x \in X$, 记 $f(x)$ 为 f, x , 这一记号一方面体现了它类似于内积的特征, 同时使 f, x 处于对等的地位. 当 $f, x = 0$ 时说 f 与 x 正交, 记作 $f \perp x$. 任给 $A \subset X, F \subset X^*$, 约定

$$\begin{cases} A^\perp = \{f \in X^* : f \perp a (\forall a \in A)\}; \\ {}^\perp F = \{x \in X : f \perp x (\forall f \in F)\}, \end{cases} \quad (8)$$

二者分别称为 A 与 F 的零化子. A^\perp 非常类似于 Hilbert 空间中的正交补; 当 X 是 Hilbert 空间时, A^\perp 恰好就是 A 的正交补. 利用零化子记号往往可将一些命题表成最简短的式子. 例如, 定理 4.2.3 中的结论 (iii) 无非是说, $x - y = 0 \Leftrightarrow (x - y) \perp f (\forall f \in X^*)$, 而这又可简单地写作 ${}^\perp X^* = \{0\}$. 其次, 对任给非空集 $A \subset X$, 易建立(参照

题 3.133)

$$A^\perp = \overline{\text{span} A}^\perp, \quad {}^\perp(A^\perp) = \overline{\text{span} A}. \quad (9)$$

利用(9),可将“ A 是 X 的基本集”这件事简单地表成 $A^\perp = \{0\}$. 这就将定理 3.3.1 中(ii)⇔(iii)这一事实推广到了 Banach 空间.

二、问题与方法

A. 有界线性泛函的一般问题

要直观地理解一个线性泛函 $f: X \rightarrow \mathbf{K}$, 首要的问题是注意到它的简单几何结构: 若 $f \neq 0$ (称这样的 f 为非零线性泛函, 写作 $f \neq 0$), 则 $N(f) = f^{-1}(0)$ 是 X 中的超平面, X 有直和分解: $X = N(f) \oplus \mathbf{K}x_0$ ($f(x_0) \neq 0$). 平移 $N(f)$, 得到 X 中平行于 $N(f)$ 的一族超平面, f 在每个超平面上取常值, 这些超平面填满空间 X .

4.45 设 $f: X \rightarrow \mathbf{K}$ 是一非零线性泛函, 则 f 有界 $\Leftrightarrow N(f)$ 是闭子空间; f 无界 $\Leftrightarrow \overline{N(f)} = X$.

证 若 f 有界, 则 f 连续, 因而 $N(f) = f^{-1}(0)$ 是闭的(用定理 3.2.2). 反之, 若 f 无界, 则必存在 $\{x_n\} \subset X$, 使得 $|f(x_n)| > n \|x_n\|$. 今证 $\overline{N(f)} = X$ (这将推出 $N(f)$ 非闭, 因而问题结论获证). 任给 $x \in X$, 有

$$y_n \triangleq x - \frac{f(x)x_n}{f(x_n)} \in N(f);$$

$$\|y_n - x\| = \frac{|f(x)| \|x_n\|}{|f(x_n)|} \leq \frac{|f(x)|}{n} \rightarrow 0,$$

这表明 $x \in \overline{N(f)}$, 故得所要证. □

一般地, 若 $f: X \rightarrow \mathbf{K}$ 是线性泛函, $f(x_0) \neq 0$, 则

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \right) + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \quad (x \in X)$$

正是直和 $X = N(f) \oplus \mathbf{K}x_0$ 所要求的分解. 你容易看到, 在题 4.45 之证中, 实际上隐蔽地用了分解 $X = N(f) \oplus \mathbf{K}x_n$. 在处理有界线性泛函问题时, 经常要用到这一类的分解, 这是不可不注意的.

4.46 设线性泛函 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 无界, 则 $\forall x_0 \in X, \forall r > 0$, 有

$f(B_r(x_0)) = \mathbf{R}$. (这意味着, f 在任何球内所取的值充满了整个直线; 因而, 所有超平面 $\{f = c\} \mid c \in \mathbf{R}$ 都经过球 $B_r(x_0)$ 内. 这种现象, 当然不可能在有限维空间中发生!)

证 f 无界推出 f 在球 $B_r(x_0)$ 内必无界(用定理 4.2.1(i)), 因此存在 $\{x_n\} \subset B_r(x_0)$, 使得 $|f(x_n)| > n \ (\forall n \in \mathbf{N})$. 令 $y_n = 2x_0 - x_n$, 则 $[x_n, y_n] \triangleq \{(1-t)x_n + ty_n : 0 \leq t \leq 1\}$ 是 $B_r(x_0)$ 内以 x_0 为中点、以 x_n, y_n 为端点的线段,

$$\begin{aligned} f([x_n, y_n]) &= \{(1-t)f(x_n) + tf(y_n) : 0 \leq t \leq 1\} \\ &= [f(x_n), f(y_n)] \text{ 或 } [f(y_n), f(x_n)]. \end{aligned}$$

因 $f(y_n) = 2f(x_0) - f(x_n)$, 故

$$f(x_n)f(y_n) = 2f(x_0)f(x_n) - |f(x_n)|^2 \rightarrow -\infty,$$

这就表明 $f(B_r(x_0)) \supset \bigcup_n f([x_n, y_n]) = \mathbf{R}$. □

将以上证明稍作修改, 也能证明:

4.47 设 X 是复赋范空间, 线性泛函 $f: X \rightarrow \mathbf{C}$ 无界, 则 $\forall x_0 \in X, \forall r > 0$, 有 $f(B_r(x_0)) = \mathbf{C}$.

4.48 设线性泛函 $f: X \rightarrow \mathbf{K}$ 无界, $r \in \mathbf{K}$, 则超平面 $\{f = r\}$ 在 X 中稠密, 因而穿过 X 中任何一个球.

提示: 用题 4.45 或直接证明.

以上几题足以显示出无界线性泛函的病态性质. 一个自然的问题是: 无界线性泛函的出现是否有普遍性? 试看下题.

4.49 若 $\dim X = \infty$, 则 X 上必存在无界线性泛函.

提示: 参照题 4.8.

4.50 若 $\dim X = \infty$, 则存在直和分解 $X = A \oplus \mathbf{K}x_0$, $0 \neq x_0 \in X$, 使得 $\bar{A} = X$.

提示: 利用上题与题 4.45.

4.51 设 $0 \neq f \in X^*$, $A = \{f = 1\}$, 则

$$|f(x)| = \|f\| d(x, N(f)) = d(x, N(f)) \vee d(0, A).$$

证 取定 $x \in X$. 为证第一个等式, 可设 $x \in N(f)$, 于是, 利用直和分解 $X = N(f) \oplus \mathbf{K}x$ 与 (1), 有

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{\substack{a \in N(f) \\ \lambda \in \mathbf{K}}} \frac{|f(\lambda x - a)|}{\|\lambda x - a\|} = \sup_{a \in N(f)} \frac{|f(x)|}{\|x - a\|} \\ &= \frac{|f(x)|}{d(x, N(f))},\end{aligned}$$

这得出 $|f(x)| = \|f\| d(x, N(f))$. 取 $x_0 \in A$, 则 $A = x_0 + N(f)$, 于是

$$\begin{aligned}d(0, A) &= d(0, x_0 + N(f)) = d(x_0, N(f)) \\ &= \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \frac{1}{\|f\|}.\end{aligned}$$

□

4.52 设 $0 \neq f \in X^*$, $A = \{f = \|f\|\}$, 则 $d(0, A) = 1$.

提示: 用上题或直接证明.

4.53 设 $0 \neq f \in X^*$, $f(x_0) = \|f\|$, 则 $d(x_0, N(f)) = 1$.

提示: 用题 4.51 或直接证明.

4.54 设 $0 \neq f \in X^*$, 则不存在球 $B_r(a)$, 使 $f(a)$ 是 f 在 $B_r(a)$ 上的最大值或最小值 (设 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$).

证 设 $f(a)$ 是 $f|_{B_r(a)}$ 的最小值, 则从

$$f(B_r(a)) = f(a) + f(B_r(0)) \geq f(a)$$

推出 $f(B_r(0)) \geq 0$. 但这推出 $f(B_r(0)) = 0$ (注意 $f(x) > 0 \Rightarrow f(-x) < 0$!), 因而 $f(X) = \bigcup_n f(nB_r(0)) = \{0\}$, 这矛盾于 $f \neq 0$.

□

4.55 设 X 是实赋范空间, $0 \neq f \in X^*$, $G \subset X$ 为开集, 则 $f(G)$ 是 \mathbf{R} 上的开集.

提示: $\forall x_0 \in G$, 取 $B_r(x_0) \subset G$, 则必有 $y, z \in B_r(x_0)$, 使得 $f(y) < f(x_0) < f(z)$, 然后可推出 $[f(y), f(z)] \subset f(G)$.

B. 函数空间上的有界线性泛函

鉴于已有定理 4.2.2 可用, 在处理 L^p , l^p 及 $C(J)$ 等空间上的线性泛函时, 应优先套用表示定理. 只有在定理 4.2.2 行不通的情况下, 才考虑其他方法.

4.56 设 $F(f) = \int_0^1 f(x^\alpha) dx$, $f \in L[0, 1]$, $0 < \alpha < 2$, 则 $F \in$

$L^2[0, 1]^*$, 求 $\|F\|$.

解 $F(f)$ 并不直接具备 (2) 的形状, 但可作如下变换:

$$F(f) = \int_0^1 f(t) \cdot \frac{1}{\alpha} t^{(1-\alpha)\gamma_\alpha} dt \quad (x^\alpha = t).$$

因 $g(t) \triangleq \frac{1}{\alpha} t^{(1-\alpha)\gamma_\alpha} \in L^2[0, 1]$, 故 $F \in L^2[0, 1]^*$, 且

$$\begin{aligned} \|F\| &= \|g\|_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^1 t^{2(1-\alpha)\gamma_\alpha} dt \right)^{1/2} \\ &= [\alpha(2-\alpha)]^{1/2}. \end{aligned} \quad \square$$

4.57 设 $F(f) = \int_0^1 f(x^2) dx$, $f \in L^2[0, 1]$, 则 $F \in L^2[0, 1]^*$, 求 $\|F\|$. ($=1$)

4.58 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_{2n}$, $x = (x_n) \in l^2$, 则 $f \in (l^2)^*$, 求 $\|f\|$.

解 将 $f(x)$ 表成 $x \cdot a$, 其中 $a = (a_n) \in l^2$, $a_{2n} = 1/n$, $a_{2n-1} = 0$ ($n \geq 1$), 则 $f \in (l^2)^*$, 且

$$\|f\| = \|a\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}. \quad \square$$

4.59 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_{2n}}{2n-1}$, $x = (x_n) \in l^2$, 则 $f \in (l^2)^*$, 求 $\|f\|$. ($=\pi/\sqrt{8}$)

4.60 设 $F(f) = \alpha f(1/3) + \beta f(2/3)$, $f \in C[0, 1]$, 则 $F \in C[0, 1]^*$, 求 $\|F\|$.

解 I $F(f)$ 可表成 RS 积分 $\int_0^1 f dg$, 其中

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/3; \\ \alpha, & 1/3 \leq x < 2/3; \\ \alpha + \beta, & 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

于是依定理 4.2.2(iv) 有 $F \in C[0, 1]^*$,

$$\|F\| = V_0(g) = |\alpha| + |\beta|.$$

解 II (直接法) 直接看出 F 是 $C[0, 1]$ 上的线性泛函. 由

$$|F(f)| \leq (|\alpha| + |\beta|) \|f\|_0 \quad (\forall f \in C[0, 1])$$

得 $\|F\| \leq |\alpha| + |\beta|$. 另一方面, 作 $f \in C[0, 1]$, 使得 $f(1/3) = \operatorname{sgn} \alpha$, $f(2/3) = \operatorname{sgn} \beta$, $f(0) = f(1) = 0$, 在区间 $(0, 1/3)$ 与 $(1/3, 2/3)$ 与 $(2/3, 1)$ 内线性连接, 则 $\|f\|_0 = 1$,

$$F(f) = |\alpha| + |\beta| \leq \|F\| \|f\|_0 = \|F\|,$$

因此 $\|F\| = |\alpha| + |\beta|$. □

上题中的 F 结构简单, 因此用直接法也是可取的.

4.61 设 $J = [a, b]$, $g \in L^1(J)$, $F(f) = \int_a^b fg \, dm$ ($f \in C(J)$),

则 $F \in C(J)^*$, 且 $\|F\| = \|g\|_1 = \int_a^b |g| \, dm$.

证 令 $\varphi(x) = \int_a^x g(t) \, dt$, 则 $\varphi \in AC$, $\varphi(a) = 0$, $\varphi' = g$ a.e.,

$$F(f) = \int_a^b f \, d\varphi \quad (f \in C(J))$$

(参考定理 2.2.2, 定理 2.3.3(v)). 于是由定理 4.2.2(iv) 知 $F \in C(J)^*$, 且

$$\|F\| = V_a^b(\varphi) = \int_a^b |\varphi'| \, dm = \|g\|_1. \quad (\text{用题 2.90}) \quad \square$$

尽管上题中的 $F(f) = \int_a^b fg \, dm$ ($f \in C(J)$) 并不是 $C(J)$ 上有界线性泛函的通式, 但 $C(J)$ 上一些常见的有界线性泛函确可表成上述形式, 因而应用题 4.61 的结论是很方便的.

4.62 设 $F(f) = \int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx$, $f \in C[0, 1]$, 则 $F \in C[0, 1]^*$, 求 $\|F\|$. ($= 2/\pi$)

4.63 设 $F(f) = \int_0^1 f(x) \ln x \, dx$, $f \in C[0, 1]$, 则 $F \in C[0, 1]^*$, 求 $\|F\|$. ($= 1$)

4.64 设 $J = [a, b]$, F 是 $C(J, \mathbb{R})$ 上的线性泛函, $f \geq 0 \Rightarrow F(f) \geq 0$, 则 $F \in C(J)^*$.

证 令 $e(x) \equiv 1$, 则 $F(e) \geq 0$. 假设 $f \in C(J)$, $\|f\|_0 \leq 1$, 则

$-e \leq f \leq e$, 这推出 $F(e \pm f) \geq 0$, 从而 $F(e) \pm F(f) \geq 0$, 于是有 $|F(f)| \leq F(e)$, 可见 $F \in C(J)^*$. \square

4.65 设 $F(f) = \int_0^{1/2} fg \, dm + \beta f(3/4)$, $f \in C[0, 1]$, $g \in L^1[0, 1/2]$, 则 $F \in C[0, 1]^*$, 求 $\|F\|$.

解 将 $F(f)$ 改写成 $\int_0^1 f \, d\varphi$, 其中

$$\varphi(x) = \begin{cases} \int_0^x g(t) \, dt, & 0 \leq x < 1/2; \\ \int_0^{1/2} g(t) \, dt, & 1/2 \leq x < 3/4; \\ \int_0^{1/2} g(t) \, dt + \beta, & 3/4 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

则依定理 4.2.2(iv) 有 $F \in C[0, 1]^*$, 且

$$\begin{aligned} \|F\| &= V_0(\varphi) = V_0^{1/2}(\varphi) + V_{1/2}^1(\varphi) \\ &= \int_0^{1/2} |g| \, dm + |\beta|. \end{aligned} \quad \square$$

4.66 设 $c_0 = \{x = (x_n) \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, 则 $c_0^* = l^1$.

证 所要证的是, 存在等距同构 $l^1 \rightarrow c_0^*$.

(i) 任给 $y = (y_n) \in l^1$, 定义

$$f_y(x) = \sum x_n y_n \quad (x = (x_n) \in c_0),$$

则 $|f_y(x)| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$. $f_y(\cdot)$ 显然是线性的, 因此 $f_y \in c_0^*$, 且 $\|f_y\| \leq \|y\|_1$. 这就得到一个算子 $T: l^1 \rightarrow c_0^*$, $y \rightarrow f_y$, T 显然是线性的, 且 $\|Ty\| \leq \|y\|_1$.

(ii) 任给 $f \in c_0^*$, 令 $y_n = f(e_n)$, $y = (y_n)$, $e_n = (0 \dots, 1, 0 \dots)$, 1 在第 n 项. $\forall x = (x_n) \in c_0$, 有

$$\|x - \sum_{i=1}^n x_i e_i\|_\infty = \sup_{i > n} |x_i| \rightarrow 0,$$

故

$$f(x) = \lim_n f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_n x_n y_n.$$

由

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |y_i| &= \sum_{i=1}^n (\operatorname{sgn} y_i) f(e_i) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n (\operatorname{sgn} y_i) e_i\right) \\ &\leq \|f\| \left\| \sum_{i=1}^n (\operatorname{sgn} y_i) e_i \right\|_{\infty} = \|f\|\end{aligned}$$

得 $\|y\|_1 \leq \|f\|$, 于是 $y \in l^1, f = f_y = T_y, \|T_y\| \geq \|y\|_1$, 从而 $\|T_y\| = \|y\|_1$. 这表明 $T: l^1 \rightarrow c_0^*$ 是一等距同构. \square

C. Hahn-Banach 定理的应用

Hahn-Banach 定理也许要算应用最广泛的泛函分析定理. 你能学到这么一个有用的定理, 实在该深自庆幸. 然而, 现在你却深感烦恼: 什么情况下可用 Hahn-Banach 定理呢? 确实, Hahn-Banach 定理的应用常常在一些意想不到的情况下出现, 要想理出一个头绪来, 大概是没什么希望的. 如果你在自己感兴趣的领域中将较多地运用泛函分析方法, 那么你根本不要耽心没有积累经验的机会. 至于目前, 需要你对付的那些问题还不会到难以捉摸的地步. 现在所要做的, 充其量是获得一点初步感觉罢了.

4.67 设 $A \subset X$ 是闭子空间, $x \in X$, 则

$$d(x, A) = \sup\{|f(x)| / \|f\| : 0 \neq f \in A^{\perp}\}.$$

证 以 β 记所要证等式的右端. $\forall a \in A$, 当 $0 \neq f \in A^{\perp}$ 时有

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} = \frac{|f(x-a)|}{\|f\|} \leq \|x-a\|.$$

左端对 f 取上确界, 右端对 a 取下确界, 得 $\beta \leq d(x, A)$. 证明的这一步确与 Hahn-Banach 定理无关, 且无需 A 是闭子空间. 关键是后一步. 现在用定理 4.2.3(ii), 可设 $x \notin A$ (否则等式两端为零), 于是有 $f \in X^*, f \in A^{\perp}, \|f\| = 1, f(x) = d(x, A)$, 因而 $d(x, A) \leq \beta$, 故得所要证. \square

观察了上面的证明之后, 你会感到应用 Hahn-Banach 定理势在必然吗? 也许你宁愿相信, 就这么试探着用, 说不定什么时候就中了. 数

学家的直觉,也不是处处能说清楚的.

4.68 $\forall x \in X$, 有 $\|x\| = \sup\{|f(x)|/\|f\| : 0 \neq f \in X^*\}$.

提示:仿上题证明.

注意 题 4.68 既含于题 4.67,也含于式(5),这些你暂时都不必利用,否则就没有什么值得做的了.

4.69 设 A 是 Hilbert 空间 H 的子空间, f 是 A 上的有界线性泛函,则 f 在 H 上有唯一保范延拓.

证 不妨设 A 是闭子空间(否则 f 在 \bar{A} 上有唯一保范延拓,参考题 4.6),于是由定理 4.2.2(iii)有唯一的 $a \in A$,使得 $f(x) = (x, a) (\forall x \in A)$, $\|f\| = \|a\|$. 设 g 是 f 在 H 上的保范延拓,则 $g(x) = (x, b) (\forall x \in H)$, $\|g\| = \|b\| = \|a\|$. 由 $g|_A = f$ 得出 $a - b \in A^\perp$,于是由勾股定理有

$$\|b\|^2 = \|b - a\|^2 + \|a\|^2,$$

这与 $\|b\| = \|a\|$ 一起推出 $\|b - a\| = 0$,即 $b = a$,可见 g 是唯一的. \square

4.70 任给非空集 $A \subset X$,有 $\overline{\text{span}A} = {}^\perp(A^\perp)$ (这是 Hilbert 空间中的等式 $\overline{\text{span}A} = A^{\perp\perp}$ 的推广,参看题 3.133).

证 如同在 Hilbert 空间中一样,由 $A \perp A^\perp$ 平凡地推出 $\overline{\text{span}A} \perp A^\perp$,因而 $\overline{\text{span}A} \subset {}^\perp(A^\perp)$. 若 $x \in X \setminus \overline{\text{span}A}$,则由定理 4.2.3(ii)有 $f \in X^*$,使得 $\|f\| = 1, f(x) = d(x, \overline{\text{span}A}) > 0, f|_{\overline{\text{span}A}} = 0$. 后者意味着 $f \in \overline{\text{span}A}^\perp \subset A^\perp$;而 $f(x) \neq 0$ 推出 $x \notin {}^\perp(A^\perp)$. 因此 $\overline{\text{span}A} \supset {}^\perp(A^\perp)$,如所要证. \square

4.71 设 $\alpha_i \in \mathbf{K}, x_i \in X (i \in \mathbf{N})$. 则存在 $f \in X^*$,使得 $f(x_i) = \alpha_i (i \in \mathbf{N})$ 的充要条件是:对任给 $\sum \beta_i x_i \in \text{span}\{x_i\}$ 有

$$\left| \sum \alpha_i \beta_i \right| \leq \text{const} \left\| \sum \beta_i x_i \right\|.$$

证 本题倒是有明显需要 Hahn-Banach 定理的迹象:它涉及一定有界线性泛函的存在性.若所述的 $f \in X^*$ 存在,则直接有

$$\left| \sum_i \alpha_i \beta_i \right| = \left| \sum_i \beta_i f(x_i) \right| = \left| f\left(\sum_i \beta_i x_i\right) \right|$$

$$\leq \|f\| \left\| \sum_i \beta_i x_i \right\| \quad \left(\sum \beta_i x_i \in \text{span}\{x_i\} \right).$$

证明的这一步是平凡的. 反之, 若题中的不等式满足, 对任何 $\sum \beta_i x_i \in \text{span}\{x_i\}$, 定义

$$f\left(\sum_i \beta_i x_i\right) = \sum_i \alpha_i \beta_i.$$

若 $\sum \beta_i x_i = \sum \beta'_i x_i$, 则 $\sum (\beta_i - \beta'_i) x_i = 0$, 从而

$$\left| \sum_i \alpha_i (\beta_i - \beta'_i) \right| \leq \text{const} \left\| \sum_i (\beta_i - \beta'_i) x_i \right\| = 0,$$

可见 f 的定义合理. 这就得到 $\text{span}\{x_i\}$ 上的一个有界线性泛函 f , 显然 $f(x_i) = \alpha_i$. 由定理 4.2.3(i), 不妨设 $f \in X^*$, 故得所要证. \square

有趣的是, 题 4.71 实际上是给出了关于“未知量” $f \in X^*$ 的无穷方程组

$$f(x_i) = \alpha_i \quad (i \in \mathbb{N})$$

有解的充要条件.

4.72 设 $J = [a, b]$, 函数 $x(t): J \rightarrow X$ 与 $\alpha(t): J \rightarrow \mathbb{K}$ 按通常的意义有连续导数 $x'(t)$ 与 $\alpha'(t)$, X 完备, 则成立分部积分公式:

$$\int_a^b \alpha(t) x'(t) dt = \alpha(t) x(t) \Big|_a^b - \int_a^b \alpha'(t) x(t) dt,$$

其中积分是依通常方式定义的 Riemann 积分.

证 $\forall f \in X^*$, 有

$$\begin{aligned} & f\left(\int_a^b \alpha'(t) x(t) dt\right) \\ &= \int_a^b f(\alpha'(t) x(t)) dt \quad (\text{用 } f \text{ 的连续性与线性}) \\ &= \int_a^b \alpha'(t) f(x(t)) dt \quad (\text{用 } f \text{ 的线性}) \\ &= \alpha(t) f(x(t)) \Big|_a^b - \int_a^b \alpha(t) [f(x(t))] dt \quad (\text{用分部积分公式}) \\ &= f\left(\alpha(t) x(t) \Big|_a^b\right) - \int_a^b \alpha(t) f(x'(t)) dt \end{aligned}$$

$$= f\left(\alpha(t)x(t)\right)\Big|_a^b - \int_a^b \alpha(t)x'(t)dt, \\$$

于是由定理 4.2.3(iii) 得所要证. \square

你注意到, 如上证明中除了完成一些几乎是例行的交换手续之外, 并无任何实质性的难点需要克服. 这样一来, 数学分析中一些并不平凡的结论, 毫不费力就转移到了无限维空间中的向量值函数. 如此简捷的方法当然依赖于 Hahn-Banach 定理. 仅就这一点而言, 亦可说 Hahn-Banach 定理妙不可言了. 但从方法的角度看, 题 4.72 的那种解法已经完全成为一种套路, 毫无创意可言, 因此不再有什么吸引力了. 不过, 你至少得体验一番.

4.73 设 X 是 Banach 空间, $J = [0, 1]$, $x(t): J \rightarrow X$ 具有 2 阶连续导数, 则

$$x(1) - x(0) = x'(0) + \int_0^1 (1-t)x''(t)dt.$$

提示: 假定通常的带积分余项的 Taylor 公式是已知的.

D. 分离定理的应用

分离定理与锥概念结合起来, 能找到许多有趣且不乏实际意义的应用. 可惜目前的泛函分析课程难以分出多少时间来讲锥理论. 这样, 一个本来极简单自然而又应用广泛的概念, 反而成了一种陌生的东西. 由于受到不少学科的日益强劲的推动, 这种局面也许会逐渐改变. 实际上, 只要不多的几句话, 即可将锥讲清楚. 设 X 是实赋范空间. 若 $K \subset X$, $\forall t > 0$, 有 $tK \subset K$, 则称 K 为锥. 称

$$K^* = \{f \in X^* : f(K) \geq 0\}$$

为 K 的对偶锥. 若 K 是闭锥, 则必 $0 \in K$. 利用以上简单定义与记号, 就可以着手解决一些问题了.

4.74 设 $K \subset X$ 是闭凸锥且 $K^\circ \neq \emptyset$, 则 $x \in K^\circ \Leftrightarrow$ 当 $0 \neq f \in K^*$ 时 $f(x) > 0$.

证 设 $x \in K^\circ$, $0 \neq f \in K^*$, 则由 K^* 的定义有 $f(x) \geq 0$. 但不能有 $f(x) = 0$, 否则, 有某个球 $B_r(x) \subset K$, $f(x)$ 是 $f|_{B_r(x)}$ 的最小值, 矛盾于题 4.54. 因此 $f(x) > 0$. 反之, 设 $x \in K^\circ$, 则对凸集 K

与 $\{x\}$ 应用定理 4.2.5(i) 得出 $0 \neq f \in X^*$, 使得 $f(K) \geq f(x)$ (这与 (6) 中的不等式相反, 这没什么问题, 用 $-f$ 代 f 好了!). 因 $0 \in K$, 故 $f(x) \leq f(0) = 0$. 另一方面, 必 $f(K) \geq 0$. 否则有 $y \in K$, 使 $f(y) < 0$, 这推出 $f(ty) \rightarrow -\infty (t \rightarrow \infty)$, 而 $ty \in K (\forall t > 0)$, 这与 $f(K) \geq f(x)$ 矛盾. 因此 $f \in K^*$, $f(x) \leq 0$, 即得所要证. \square

4.75 设 $A \subset X$ 是闭凸集且 $A \neq X$, 则 A 是闭半空间的交.

提示: 令 $B = \bigcap \{H : H \supset A \text{ 且 } H \text{ 是闭半空间}\}$, 则显然 $A \subset B$. 若 $x \in X \setminus A$, 则用定理 4.2.5(ii) 可得一个包含 A 但不含 x 的闭半空间.

4.76 设 X 是实自反空间, $K \subset X$ 是闭凸锥, 则 $K = K^{**}$.

证 $\forall x \in K, f \in K^*$, 有 $f(x) \geq 0$, 因此 $x \in K^{**}$, 故 $K \subset K^{**}$ 平凡地成立. 关键是证 $K^{**} \subset K$, 为此要用分离定理. 设 $x \in X \setminus K$, 对 $\{x\}, K$ 应用定理 4.2.5(ii) 得出 $f \in X^*$ 与 $r \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x) < r < f(K)$. 因 $0 \in K, f(0) = 0$, 故必 $r < 0$, 因而 $f(x) < 0$. 另一方面, 如同题 4.74 之证, 必 $f(K) \geq 0$, 因此 $f \in K^*$. 综合以上事实得出 $x \notin K^{**}$, 因此 $K^{**} \subset K$, 如所要证. \square

§ 4.3 弱收敛与对偶算子

一、定理与定义

设 X 是给定的赋范空间. 对于一个序列 $\{f_n\} \subset X^*$ 与 $f \in X^*$, 依范数收敛 $f_n \rightarrow f$ 意味着 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, 这相当于在任何有界集 $A \subset X$ 上 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, 这当然是一种很强的收敛. 如我们在前几章处理收敛性问题时多次体会到的, 一种较强的收敛作为命题的结论也许不错, 但作为条件则必定会降低命题的价值. 就上述的序列 $\{f_n\} \subset X^*$ 而言, 我们为什么不能考虑不必在有界集上一致的收敛 $f_n(x) \rightarrow f(x) (\forall x \in X)$ 呢? 如果这种收敛是有价值的, 那么依据对偶性, 对于 X 中的序列 $\{x_n\}$, 就应考虑类似的收敛性 $f(x_n) \rightarrow f(x) (\forall f \in$

X^*). 这就是所谓弱收敛, 它们在泛函分析中起重要作用. 下面我们以互相对照的方式同时给出 X 与 X^* 中的成对的一组概念.

定义 4.3.1 设 $\{x_n\} \subset X$ 与 $\{f_n\} \subset X^*$ 是两个序列.

(i) 若存在 $x \in X$, 使得 $f(x_n) \rightarrow f(x) \ (\forall f \in X^*)$, 则说 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x , 记作 $x_n \rightarrow x$.

(ii) 若存在 $f \in X^*$, 使得 $f_n(x) \rightarrow f(x) \ (\forall x \in X)$, 则说 $\{f_n\}$ 弱*收敛于 f , 记作 $f_n \xrightarrow{*} f$.

显然 $\|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow x, \|f_n - f\| \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{*} f$, 因此通常称 X 与 X^* 中的范数收敛为强收敛. 若 $\dim X < \infty$, 则强收敛与弱收敛一致; 若 X 是自反空间, 则弱收敛与弱*收敛一致. 在 X 非自反的情况下, 在 X^* 中 $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow F(f_n) \rightarrow F(f) \ (\forall F \in X^{**})$, 它强于弱*收敛, 下面不予考虑.

尽管 $x_n \rightarrow x$ 弱于 $x_n \rightarrow x$, 但要对所有 $f \in X^*$ 判定 $f(x_n) \rightarrow f(x)$, 看来也不容易. 下面的定理就是要将做这件事的难度降到最低程度.

定理 4.3.1 设 B 与 F 分别为 X 与 X^* 的基本集, $\{x_n\} \subset X$ 与 $\{f_n\} \subset X^*$ 是两个序列, 则以下结论成立:

(i) $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \{x_n\}$ 有界且 $f(x_n) \rightarrow f(x) \ (\forall f \in F)$.

(ii) 设 $f \in X^*$. 若 $\sup_n \|f_n\| < \infty$ 且 $f_n(x) \rightarrow f(x) \ (\forall x \in B)$, 则 $f_n \xrightarrow{*} f$; 当 X 完备时其逆亦真.

为了最大限度地发挥以上定理的作用, 自然要选择尽可能简单的基本集 B 与 F . 例如, 就 $x_n \rightarrow x$ 而言, 我们希望选择的 F 满足如下要求:

(i) F 含有尽可能少的元素, 例如是一可数集;

(ii) 对于 $f \in F$, 验证 $f(x_n) \rightarrow f(x)$ 是不困难的;

(iii) 条件“ $f(x_n) \rightarrow f(x) \ (\forall f \in F)$ ”具有熟悉的或规范的形式, 例如与某种熟知的收敛性等价.

对于那些已建立适当表示定理的空间(参考定理 4.2.2), 利用定理 4.3.1 已推导出弱收敛或弱*收敛的标准刻画, 有关结论综合于下.

定理 4.3.2 (i) 设 $1 < p < \infty$, 则在 l^p 中 $x^{(n)} \rightarrow x \Leftrightarrow \sup_n \|x^{(n)}\|_p < \infty$ 且 $x_i^{(n)} \rightarrow x_i (n \rightarrow \infty, \forall i \in \mathbb{N})$. 换言之, 对于 l^p 中的有界序列, 弱收敛即按坐标收敛.

(ii) 设 $1 < p < \infty$, 则在 $L^p(\Omega)$ 中 $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \sup_n \|f_n\|_p < \infty$ 且 $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu (\forall A \in \mathcal{A}, \mu A < \infty)$; 在 $L^1[a, b]$ 中 $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \sup_n \|f_n\|_1 < \infty$ 且 $\int_a^x f_n(t) dt \rightarrow \int_a^x f(t) dt (\forall x \in [a, b])$.

(iii) 设 $\{e_i\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交基, 则在 H 中 $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \sup_n \|x_n\| < \infty$ 且 $x_n, e_i \rightarrow x, e_i (n \rightarrow \infty, \forall i \in \mathbb{N})$. 换言之, 对于 Hilbert 空间中的有界序列, 弱收敛即依正交坐标收敛.

(iv) 在 $C[a, b]^*$ 中 $F_n \xrightarrow{*} F \Leftrightarrow \sup_n \|F_n\| < \infty$ 且 $F_n(x^k) \rightarrow F(x^k) (n \rightarrow \infty, k \geq 0)$, x_k 是 $[a, b]$ 上的 k 次幂函数.

在无限维空间中, 弱收敛与强收敛的深刻差别在以下定理中得到特别明显的体现.

定理 4.3.3 自反 Banach 空间中任何有界序列包含弱收敛子列.

另一方面, 从定理 3.2.3(v) 推出, 赋范空间 X 中任何有界序列含收敛子列的充要条件是 $\dim X < \infty$. 而对于自反空间中的序列弱收敛, 却并无有限维性的要求. 正是定理 4.3.3, 使得在自反空间中采用弱收敛有时比强收敛更方便.

将弱收敛思想用到算子序列 $\{T_n\} \subset L(X, Y)$, 得出以下概念: 设 $T \in L(X, Y)$. 若 $T_n x \rightarrow Tx (\forall x \in X)$, 则说 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T ; 若 $T_n x \rightarrow Tx (\forall x \in X)$, 则说 $\{T_n\}$ 强收敛于 T ; 若 $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, 则说 $\{T_n\}$ 一致收敛或依算子范数收敛于 T . 一个类似于定理 4.3.1 的结果是:

定理 4.3.4 设 X, Y 是 Banach 空间, $\{T_n\} \subset L(X, Y)$, 则 $\{T_n\}$ 强收敛 $\Leftrightarrow \sup_n \|T_n\| < \infty$ 且 $\{T_n x\}$ 收敛 $(\forall x \in B)$, B 是 X 的某个基本集.

注意定理 4.3.4 中并未明显提到极限算子 T , 这一点对于应用是

方便的.

在上节中强调了空间 X 与 X^* 的对偶关系,这种对偶诱导出有界线性算子与其对偶算子之间的对偶关系.

定义 4.3.2 设 $T \in L(X, Y)$, 称算子

$$T^* : Y^* \rightarrow X^*, g \mapsto g \circ T$$

为 T 的对偶算子.

必定 $T^* \in L(Y^*, X^*)$; T^* 与 T 的关系完全决定于恒等式

$$T^* g(x) = g(Tx). \quad (x \in X, g \in Y^*) \quad (1)$$

若 $A \in L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$ 决定于矩阵 $[a_{ij}] \in \mathbf{K}^{m \times n}$ (矩阵亦记为 A) 则对偶算子 A^* 正好与转置矩阵 A^T 相当. 由此可见, 对偶算子原来是转置矩阵概念在无限维空间中的推广. 将这一印象存于心中, 你对于对偶算子的以下性质就觉得很自然了.

定理 4.3.5 设 $T, S \in L(X, Y), A \in L(Y, Z), \alpha, \beta \in \mathbf{K}$, 则成立以下等式:

$$(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^* ;$$

$$(AT)^* = T^* A^* ;$$

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} ; \quad (\text{若 } T \text{ 可逆})$$

$$T^{**} \big|_X = T ;$$

$$\|T^*\| = \|T\| .$$

若 X 是自反空间, 则 $T^{**} = T$. 这样, 在定理 4.3.5 中将 $*$ 换成 T 之后, 所有等式就全都是你在线性代数中所熟知的结论了.

以上这些结论虽然很基本, 但完全是平凡且直观的. 关于对偶算子, 具有一定深刻性且充分体现出 T^* 与 T 的对偶特性的, 是涉及核与值域的如下一组结果, 它们可不那么直观了.

定理 4.3.6 设 $T \in L(X, Y)$, 则以下结论成立:

$$(i) N(T) = {}^\perp R(T^*), N(T^*) = R(T)^\perp, {}^\perp N(T^*) = \overline{R(T)}.$$

(ii) 满射定理: 若 X, Y 完备, 则 $R(T) = Y \Leftrightarrow T^*$ 有有界逆, $R(T^*) = X^* \Leftrightarrow T$ 有有界逆.

(iii) 设 X, Y 完备, 则 T 是拓扑同构 $\Leftrightarrow T^*$ 是拓扑同构 $\Leftrightarrow T$ 与

T^* 皆有有界逆 $\Leftrightarrow T$ 与 T^* 皆为满射.

观察以上结果,你看出 T 与 T^* 在许多方面对等地互相决定.但有一点显得不和谐的是,似乎还缺少一个与等式 ${}^\perp N(T^*) = \overline{R(T)}$ 相对的等式 $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$. 确实,如果将 $\overline{R(T^*)}$ 理解为某种“弱闭包”,后者果然是对的.在自反空间中,这种差别就不存在了.若限制在有限维空间中,则得到线性代数中的一些已知结果.

二、问题与方法

A. 关于弱收敛的一般问题

现在我们通过一些问题进一步探讨弱收敛的各种性质.一个总的问题是:那些对于强收敛成立的结论,换成弱收敛之后将会如何呢?我们当然希望总得到肯定的结论.不过在每种情况下都得小心从事,严格地依靠论证,切忌主观臆断.幸好,在许多方面结果都还令人满意.在一定程度上,正因为如此,弱收敛才成为一个便于应用的概念.

4.77 弱收敛的极限是唯一的.

证 设在 X 中 $x_n \rightharpoonup x$, $x_n \rightharpoonup y$, 则 $\forall f \in X^*$, 有

$$f(x) = \lim_n f(x_n) = f(y),$$

于是由定理 4.2.3(iii) 立得 $x = y$. □

以上证明固然简短,但毕竟用了 Hahn-Banach 定理这一关键结果.由此可以说,如果没有 Hahn-Banach 定理,弱收敛理论是无从立足的.另一方面,你容易看出,弱*收敛极限的唯一性倒是平凡的,与 Hahn-Banach 定理无关.

4.78 设 $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$, 则 $\alpha_n x_n \rightharpoonup \alpha x$, $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$.

提示:直接用定义 4.3.1 验证.

4.79 设 $\{x_n\} \subset X$, $\{f_n\} \subset X^*$. 若 $x_n \rightharpoonup x$, $f_n \rightarrow f$, 或 $x_n \rightarrow x$, $f_n \xrightarrow{*} f$ 且 X 完备, 则 $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

证 要证结论可理解为二元函数 $f \times x$ 对 (f, x) 的某种连续性. 注意到 $f \times x$ 有乘积特性, 估计 $|f_n(x_n) - f(x)|$ 时用熟知的分解:

$$|f_n(x_n) - f(x)|$$

$$\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|.$$

若 $x_n \rightarrow x, f_n \rightarrow f$, 则上式右端第二项显然趋于零; 由 $\{x_n\}$ 有界(用定理 4.3.1(i))推出 $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\| \|x_n\| \rightarrow 0$, 因此 $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. 亦可用另一种估计方式:

$$\begin{aligned} & |f_n(x_n) - f(x)| \\ & \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ & \leq \|f_n\| \|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

这样, 从 $x_n \rightarrow x, f_n \rightharpoonup f$ 及 $\sup_n \|f_n\| < \infty$ 推出 $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. 与前面不同的是, 要“ $f_n \rightharpoonup f \Rightarrow \sup_n \|f_n\| < \infty$ ”必须有“ X 完备”这一条件(参看定理 4.3.1(ii)). \square

4.80 设 $T \in L(X, Y), x_n \rightarrow x$, 则 $Tx_n \rightarrow Tx$, 即 T 依弱收敛也是连续的.

提示: 直接依弱收敛定义验证.

4.81 设 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, $x_n \rightarrow x \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$, 则 T 有界.

证 若 T 无界, 则可取出 $\{x_n\} \subset X$, 使得 $\|x_n\| = 1, \|Tx_n\| > n^2 (\forall n \in \mathbb{N})$. 令 $y_n = x_n/n$, 则 $y_n \rightarrow 0$, 但 $\|Ty_n\| > n$, 这就不可能 $Ty_n \rightarrow 0$. \square

上题从一个很弱的条件推出了 T 有界, 其实这并不奇怪: 要 T 有界, 只需 T 在某一点邻近有界就够了(参看题 4.2). 上题中的条件“ $x_n \rightarrow x \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$ ”不仅已足够, 实际上只要“ $x_n \rightarrow x \Rightarrow \{Tx_n\}$ 有界”就够了.

4.82 设 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx_0 (x_0 \in X \text{ 固定})$, 则 T 有界.

提示: 转化为题 4.81 的情况, 或直接用反证法.

4.83 闭子空间对序列弱收敛封闭.

证 设 A 是 X 的闭子空间, $\{x_n\} \subset A, x_n \rightharpoonup x$. 若 $x \notin A$, 则由定理 4.2.3(ii) 有 $f \in A^\perp$, 使得 $f(x) = d(x, A) > 0$. 但由 $x_n \rightharpoonup x$ 推出

$$0 = \lim_n f(x_n) = f(x) > 0, \quad (\text{用 } f \in A^\perp)$$

得出矛盾. 因此 $x \in A$. □

4.84 X 中的闭凸集对序列弱收敛封闭.

提示: 仿上题之证, 但以分离定理代替 Hahn-Banach 定理.

$$\mathbf{4.85} \quad x_n \rightarrow x \Rightarrow \|x\| \leq \varliminf_n \|x_n\|.$$

证 设 $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, 则

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \lim_n |f(x_n)| \leq \varliminf_n \|x_n\| \|f\| \\ &= \varliminf_n \|x_n\|, \end{aligned}$$

故

$$\|x\| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| \leq \varliminf_n \|x_n\|. \quad \square$$

以上结果固然不及“ $x_n \rightarrow x \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\|$ ”那样肯定, 但用于估计 $\|x\|$ 有时也是很有效的. 对偶地, 关于弱*收敛有:

$$\mathbf{4.86} \quad f_n \xrightarrow{*} f \Rightarrow \|f\| \leq \varliminf_n \|f_n\|.$$

提示: 仿上题之证.

定理 4.3.3 表明, 自反空间中的有界集依序列弱收敛是相对紧的; 若再结合题 4.84, 则进而得出自反空间中的有界闭凸集依序列弱收敛是紧的, 准确地说就是: 若 X 是自反空间, $A \subset X$ 是有界集 (或有界闭凸集), 则 A 中任何序列必有弱收敛子列 (且其极限属于 A). 这样, 在 § 3.2 中所作的紧性论证可自然地转化为使用弱收敛的论证, 只要涉及的空间是自反空间, 而紧集 (相对紧集) 则改为有界闭凸集 (有界集). 试看一些例子.

4.87 设 X 是自反空间, $A \subset X$ 是闭凸集, $x \in X$, 则存在 $a \in A$, 使得 $\|x - a\| = d(x, A)$ (参照题 3.84 与 3.138).

证 取 $\{a_n\} \subset A$, 使得 $\|x - a_n\| \rightarrow d(x, A)$. $\{a_n\}$ 必定有界, 因此不妨设 $a_n \rightarrow a$. 因 A 是闭凸集, 故 $a \in A$ (用题 4.84), 于是 $\|x - a\| \geq d(x, A)$. 另一方面, 由 $x - a_n \rightarrow x - a$ 及题 4.85 有

$$\|x - a\| \leq \varliminf_n \|x - a_n\| = d(x, A),$$

因此 $\|x - a\| = d(x, A)$, 如所要证. □

4.88 设 X 是自反空间, $A, B \subset X$ 是闭凸集, 其中至少一个有界, 则存在 $a \in A, b \in B$, 使得 $\|a - b\| = d(A, B)$.

提示: 参照上题与题 3.78.

4.89 设 X 是自反空间, $A \subset X$ 是闭凸集, 则存在 $a \in A$, 使得 $\|a\| = \inf_{x \in A} \|x\|$.

提示: 用题 4.87 或直接证明.

4.90 设 X 是实自反空间, $A \subset X$ 是有界闭凸集, $f \in X^*$, 则 f 在 A 上达到最大值与最小值.

证 不妨只考虑最小值. 令 $\beta = \inf_{x \in A} f(x)$, 取 $\{a_n\} \subset A$, 使得 $f(a_n) \rightarrow \beta$. 因 $\{a_n\}$ 有界且 A 是闭凸集, 不妨设 $a_n \rightarrow a \in A$, 于是

$$\beta \leq f(a) = \lim_n f(a_n) = \beta,$$

这推出 $f(a) = \beta$, 可见 $f(a)$ 就是 $f(x)$ 在 A 上的最小值. \square

现在再探讨一下弱收敛的条件. 定理 4.3.2 所给的条件似乎已够宽松了, 但在应用时要预知极限 (x 或 f) 这一点常常构成障碍. 那么, 能否去掉这一要求呢? 这正是下面的问题要解决的.

4.91 设 $\{f_n\} \subset X^*$, $\beta \triangleq \sup_n \|f_n\| < \infty$, B 是 X 的基本集, $\forall x \in B, \{f_n(x)\}$ 收敛, 则 $\{f_n\}$ 弱*收敛.

证 首先指明 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上处处收敛. 取定 $x \in X$. $\forall \varepsilon > 0$, 取 $b \in \text{span} B$, 使 $\|x - b\| < \varepsilon$. 由题设条件可推出 $\{f_n(b)\}$ 收敛, 于是存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \geq n_0$, 有 $|f_m(b) - f_n(b)| < \varepsilon$. 于是, 当 $m, n \geq n_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_m(b)| + |f_m(b) - f_n(b)| \\ &\quad + |f_n(b) - f_n(x)| \\ &\leq \|f_m\| \|x - b\| + \varepsilon + \|f_n\| \|b - x\| \\ &< \varepsilon(2\beta + 1), \end{aligned}$$

可见 $\{f_n(x)\}$ 满足 Cauchy 条件, 从而收敛.

记 $f(x) = \lim_n f_n(x) \ (\forall x \in X)$, 则 $f(x)$ 是 X 上的一个泛函. 直接由 f_n 的线性性推出 f 的线性性. 由

$$|f(x)| = \lim_n |f_n(x)| \leq \lim_n \|f_n\| \|x\| \leq \beta \|x\|$$

推出 f 有界, 即 $f \in X^*$. 因此 $f_n \xrightarrow{*} f$. □

4.92 设 X 是自反空间, $\{x_n\} \subset X$ 有界, F 是 X^* 的基本集, $\forall f \in F, \{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 弱收敛.

提示: 仿题 4.91 之证或用题 4.91 的结论.

题 4.91 与 4.92 中的有界性条件, 一般是不能去掉的. 但在题 4.91 中, 若 X 完备, $\{f_n(x)\}$ 处处收敛, 则由一致有界原理可推出 $\{f_n\}$ 有界. 同理, 在题 4.92 中, 若 $\forall f \in X^*, \{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必有界. 这些事实在应用时是有用的.

B. 函数空间中的弱收敛

在看过以上的问题之后, 你可能仍然对弱收敛没有多少清晰印象. 这并不奇怪, 因为你头脑中有关弱收敛的具体例证太少了. 现在是研究具体材料的时候了. 我们从最看重的 L^p 空间开始.

4.93 设 $1 < p < \infty, \{f_n\} \subset L^p(\Omega), \sup_n \|f_n\|_p < \infty, f_n \rightarrow f$, a. e., 则 $f_n \rightharpoonup f$.

提示: 利用题 3.45 或用题 3.31 与定理 4.3.2(ii).

上题的结论应能使你感到满意. 从 § 1.3 起, 可测函数列的 a. e. 收敛性就是我们关注的重点之一. 然而在 L^p 空间中却几乎没有其地位. 现在终于以弱收敛的形式进入 L^p 空间理论, 因而增加了一个发挥 a. e. 收敛作用的机会.

4.94 在 Hilbert 空间中, $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x, \|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

提示: 展开 $\|x_n - x\|^2$ 即直接看出要证结论.

以上结论准确地说明了 Hilbert 空间中强收敛与弱收敛的差别究竟有多大. 补充上 $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ 之后, $x_n \rightharpoonup x$ 就与 $x_n \rightarrow x$ 相当了. 因此, 如果 $x_n \rightharpoonup x$ 而 $x_n \not\rightarrow x$, 则必定是因 $\|x_n\| \not\rightarrow \|x\|$ 所致. 这也说明了, 在无限维空间中, 即使 $x_n \rightharpoonup x$ 而并不 $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ 的情况是存在的. 最简单的例子就是无限维 Hilbert 空间 H 的标准正交基 $\{e_n\}$, 显然有 $e_n \rightarrow 0$ (因 $\forall i \in \mathbb{N}$, 有 $e_n, e_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$), 但却有 $\|e_n\| \equiv 1$!

特别,将题 4.94 用到空间 $L^2(\Omega)$ 得出: 对于 $\{f_n\} \subset L^2(\Omega)$ 有:

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \Leftrightarrow \|f_n\|_2 \rightarrow \|f\|_2 \text{ 且 } \int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu (\mu A < \infty).$$

有趣的是,以上结论可以推广于 L^p 空间 ($1 < p < \infty$).

4.95 设 $1 < p < \infty$, $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, 则 $f_n \xrightarrow{L^p} f \Leftrightarrow f_n \rightharpoonup f$ 且 $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

证 设 $f_n \rightharpoonup f$, $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, 今证 $f_n \xrightarrow{L^p} f$ (逆命题不需证). 不妨设 $\|f\|_p > 0$ (何故?) 进而又可设 $\|f_n\|_p = \|f\|_p = 1$. 否则, 令 $g_n = f_n / \|f_n\|_p$, $g = f / \|f\|_p$, 则 $\|g_n\|_p = \|g\|_p = 1$, $g_n \rightharpoonup g$; 若能证 $g_n \xrightarrow{L^p} g$, 则 $f_n = \|f_n\|_p g_n \xrightarrow{L^p} \|f\|_p g = f$, 因此可用 g_n, g 代 f_n, f .

若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$ 不成立, 则不妨设存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\|f_n - f\|_p \geq \varepsilon$ (不然可用 $\{f_n\}$ 的某个子列替代 $\{f_n\}$). 现在要用到 L^p 空间的一个关键性质: 一致凸性, 即从 $\|f_n - f\|_p \geq \varepsilon$ 推出存在 $\delta > 0$, 使得 $\|f_n + f\|_p \leq 2(1 - \delta)$. 因 $f_n + f \rightharpoonup 2f$, 故用题 4.85 得

$$2 = 2\|f\|_p \leq \liminf_n \|f_n + f\|_p \leq 2(1 - \delta),$$

得出矛盾. 因此必 $f_n \xrightarrow{L^p} f$, 如所要证. □

这样, 结合题 4.95 与定理 4.3.3(ii) 得出, 对于 $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$) 有:

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \Leftrightarrow \|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p \text{ 且 } \int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu (\mu A < \infty).$$

4.96 设 $1 < p < \infty$, $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, $f_n \rightharpoonup f$, $\|f\|_p = \lim_n \|f_n\|_p$, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}$: $f_{n_k} \xrightarrow{L^p} f$ 且 $f_{n_k} \rightarrow f$ a.e..

提示: 利用题 4.95 并参考定理 3.1.2.

4.97 设 $1 < p < \infty$, $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则 $f_n \rightharpoonup f$.

提示:用反证法,利用题 4.93 及 $\{f_n\}$ 有 a.e. 收敛子列.

现在可以将题 4.93 与 4.97 合并.若 $1 < p < \infty$, $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$,

$\sup_n \|f_n\|_p < \infty$, 则要 $f_n \rightharpoonup f$, 只要 $f_n \rightarrow f$ a.e. 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 就够了.

这样,在 § 1.3 中依测度收敛与 a.e. 收敛这两种一直被看重的收敛性,

就都与弱收敛联系起来了.不过应注意,无论 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 或 $f_n \rightarrow f$ a.e.,

对于 $f_n \rightharpoonup f$ 都不是必要的.例如,在 $L^1[0, 1]$ 中,显然 $f_n = \sin nx \rightarrow 0$,

但并非 $f_n \xrightarrow{m} 0$, 更不可能 $f_n \rightarrow 0$ a.e..

4.98 设 $F_n(f) = \int_a^b f(x) \sin nx dx$, $f \in L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, 则 $F_n \xrightarrow{*} 0$.

证 因可能 $p = 1$, 不能用定理 4.3.2, 但可直接用定理 4.3.1 (ii). 首先, 由定理 4.2.2(i) 有

$$\sup_n \|F_n\| = \sup_n \|\sin nx\|_q < \infty.$$

因 $\{\chi_{[a, x]}: x \in [a, b]\}$ 是 $L^p[a, b]$ 的基本集(定理 3.1.3(ii)), 而

$$\lim_n \int_a^x \sin nt dt = \lim_n \frac{\cos na - \cos nx}{n} = 0,$$

故得 $F_n \xrightarrow{*} 0$. □.

空间 l^p ($1 < p < \infty$) 中的弱收敛性已完全由定理 4.3.2(i) 解决了, 不再有什么好说的. 至于空间 l^1 , 则有以下结论.

4.99 空间 l^1 中强收敛等价于弱收敛.

提示: 设在 l^1 中 $x^{(n)} \rightarrow 0$, 证 $\|x^{(n)}\|_1 \rightarrow 0$.

4.100 l^1 不是自反空间.

提示: 利用上题及定理 4.3.3.

至此为止, 还未涉及空间 $C[a, b]$ 中的弱收敛. 利用定理 4.2.2 (iv), $C[a, b]$ 中的弱收敛问题解决得很简单.

4.101 设 $\{f_n\} \subset C[a, b]$, $f \in C[a, b]$, 则 $f_n \rightharpoonup f \Leftrightarrow \sup_n \|f_n\|_0 < \infty$ 且 $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in [a, b]$.

证 若 $f_n \rightharpoonup f$, 则必 $\sup_n \|f_n\|_0 < \infty$ (定理 4.3.1(i)). 取定

$x \in [a, b]$. 则 $F(\varphi) = \varphi(x) (\forall \varphi \in [a, b])$ 是 $C[a, b]$ 上的有界线性泛函. (参考题 4.60) 因而从 $f_n \rightarrow f$ 推出

$$f(x) = F(f) = \lim_n F(f_n) = f_n(x).$$

反之, 设 $\sup_n \|f_n\|_0 < \infty$, $f_n(x) \rightarrow f(x) (\forall x \in [a, b])$, 则对任给 $g \in BV_0$ (记号依定理 4.2.2(iv)), 用有界收敛定理 (参看定理 2.1.2 (iii)) 有

$$\lim_n \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg,$$

这表明 $f_n \rightarrow f$. □

注 因 g 可分解为两增函数之差, 因而 $\int_a^b f dg$ 可表为两个关于 LS 测度的积分, 用有界收敛定理是不成问题的.

题 4.101 表明, 对于连续函数空间中的有界序列, 弱收敛原来就是按点处处收敛! 这就将连续函数列的处处收敛纳入了弱收敛的范畴之内. 实际上, 在处处收敛的日常使用中, 它一直是被人们看作一种“弱”收敛的. 现在只是赋予“弱”以特定的严格含义罢了.

C. 算子的收敛性

4.102 设 $\{T_n\} \subset L(X, Y)$, $\{S_n\} \subset L(Y, Z)$, $\{T_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 分别强收敛于 T 与 S , Y 完备, 则 $\{S_n T_n\}$ 强收敛于 ST .

证 由 Y 完备及 $\{S_n\}$ 强收敛得出 $\beta \triangleq \sup_n \|S_n\| < \infty$. $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} & \|S_n T_n x - STx\| \\ & \leq \|S_n T_n x - S_n T x\| + \|S_n T x - STx\| \\ & \leq \beta \|T_n x - T x\| + \|S_n T x - STx\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

可见 $S_n T_n x \rightarrow STx$, 如所要证. □

4.103 设 X 完备, $\{T_n\} \subset L(X, Y)$ 强收敛于 T , 在 X 中 $x_n \rightarrow x$, 则 $T_n x_n \rightarrow Tx$.

提示: 参照上题之证, 注意 $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

4.104 设 X 完备, $\{T_n\} \subset L(X, Y)$ 弱收敛于 T , 在 X 中 $x_n \rightarrow x$, 则 $T_n x_n \rightarrow Tx$.

提示: 类似于上题, 注意 $\sup_n \|g \circ T_n\| < \infty (\forall g \in Y^*)$.

4.105 设 $\{T_n\} \subset L(X, Y)$ 一致收敛于 T , 在 X 中 $x_n \rightarrow x$, 则 $T_n x_n \rightarrow Tx$.

提示: 类似于上题, 注意 $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

4.106 设 X, Y 完备, 在 X 中 $x_n \rightarrow x$, $\{T_n\} \subset L(X, Y)$ 强收敛于 T , $\{g_n\} \subset Y^*$, $g_n \xrightarrow{*} g$, 则 $g_n(T_n x_n) \rightarrow g(Tx)$.

证 由 X 完备与 $\{T_n\}$ 强收敛推出 $\alpha \triangleq \sup_n \|T_n\| < \infty$; 由 Y 完备与 $g_n \xrightarrow{*} g$ 推出 $\beta \triangleq \sup_n \|g_n\| < \infty$. 于是

$$\begin{aligned} & |g_n(T_n x_n) - g(Tx)| \\ & \leq |g_n(T_n x_n) - g_n(T_n x)| + |g_n(T_n x) - g_n(Tx)| \\ & \quad + |g_n(Tx) - g(Tx)| \triangleq I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

其中 $I_1 \leq \beta \alpha \|x_n - x\| \rightarrow 0$, $I_2 \leq \beta \|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$, $I_3 \rightarrow 0$, 因此 $g_n(T_n x_n) \rightarrow g(Tx)$. \square

算子强收敛常出现在逼近理论中. 一种简单的模式是, 为了对每个 $x \in X$, 能用一个标准的方式构成逼近序列 $x_n \rightarrow x$, 可寻求这样的 $T_n \in L(X)$, 使得 $\{T_n\}$ 强收敛于 I (单位算子), 则以 $x_n = T_n x$ 定义逼近序列可得 $x_n \rightarrow x$. 如果 $R(T_n)$ 是 X 中的由有特定性质元素组成的子空间, 我们就得到满足特定要求的逼近序列. 例如取 $X = C[a, b]$, $R(T_n)$ 是 $[a, b]$ 上的多项式组成的子空间, 则 $\forall f \in C[a, b]$, $\{T_n f\}$ 是在 $[a, b]$ 上一致逼近 f 的多项式序列. 一般地, 难以要求 $\{T_n\}$ 一致收敛于 I . 试看如下的例子.

4.107 设 $B_n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$, 则 $\{B_n\} \subset L(C[0, 1])$ 且强收敛于 I , 但 $\|B_n - I\| \geq 1$.

证 显然 B_n 是 $C[0, 1]$ 上的线性算子,

$$|B_n f(x)| \leq \|f\|_0 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \|f\|_0,$$

故 B_n 有界且 $\|B_n\| \leq 1$. 由 Bernstein 定理, 知 $\{B_n\}$ 强收敛于 I . 对

每个固定的 $n \in \mathbf{N}$, 总可作 $f_n \in C[0, 1]$, 使得 $\|f_n\|_0 = 1$, 而 $f(k/n) = 0 (0 \leq k \leq n)$, 因而 $B_n f_n = 0$, 于是

$$\|B_n - I\| \geq \|B_n f_n - f_n\|_0 = \|f_n\|_0 = 1. \quad \square$$

这就意味着, 尽管对每个 $f \in C[0, 1]$ 有 $B_n f \Rightarrow f$, 但收敛的速度并非对满足 $\|f\|_0 \leq 1$ 的任何 f 一致. 后面这种一致性在逼近问题中一般是不必要的.

4.108 设 $T_n f(x) = n \int_x^{x+1/n} f(t) dt$, $f \in L^1[0, 1]$, 在区间 $[0, 1]$ 之外认定 $f = 0$, 则 $\{T_n\} \subset L(L^1[0, 1])$ 强收敛于单位算子 I , $R(T_n) \subset C[0, 1]$; $\{T_n\}$ 不一致收敛于 I .

提示 指明 $\|T_n f\|_1 \leq \|f\|_1$, 因而 $\|T_n\| \leq 1$ (参照题 2.49);

取 $L^1[0, 1]$ 的基本集 $\{\chi_{[0, b]} : b \in [0, 1]\}$ 证 $T_n \chi_{[0, b]} \xrightarrow{L^1} \chi_{[0, b]}$.

上题中的逼近算子是一系列深入研究的初阶. $T_n f$ 是连续函数, 因而 T_n 给出了用连续函数逼近可积函数的一个一般方法.

4.109 设 $T_n f(x) = f(x^{1/n})$, $f \in C[0, 1]$, 则 $\{T_n\} \subset L(C[0, 1])$ 强收敛但非一致收敛于单位算子 I .

证 (i) 证 $\{T_n\}$ 强收敛于 I , 即 $\forall f \in C[0, 1]$, 有 $f(x^{1/n}) \Rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty, 0 \leq x \leq 1)$. 因 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致连续, 故只要证 $x^{1/n} \Rightarrow x (0 \leq x \leq 1)$. 令

$$\varphi_n(x) = x - x^{1/n} = x - x^{1+1/n},$$

则用微分法易知

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \varphi_n(x) = \varphi_n\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

这得出 $\varphi_n(x) \Rightarrow 0$, 即 $x^{1/n} \Rightarrow x (0 \leq x \leq 1)$.

(ii) 证 $\{T_n\}$ 不一致收敛于 I . 为此, 只要作出 $\{f_n\} \subset C[0, 1]$, 使得 $\|f_n\|_0 = 1$, $\|T_n f_n - f_n\|_0 = 1$. 设 $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$, α_n, β_n 是待定的. 定义 $f_n \in C[0, 1]$ 为: 在 $[0, \alpha_n]$ 上 $f_n(x) = 0$, 在 $[\beta_n, 1]$ 上 $f_n(x) = 1$, 在 (α_n, β_n) 内为线性连接. 则 $\|f_n\|_0 = 1$. 若 $\alpha_n = \beta_n^{1+1/n}$, 则

$$\|T_n f_n - f_n\|_0 = |f_n(\beta_n) - f_n(\alpha_n)| = 1.$$

满足上述条件的 α_n, β_n 是容易作出的,例如可取

$$\alpha_n = (1 - n^{-1})^{1/n}, \beta_n = (1 - n^{-1})^{1/(n+1)}.$$

于是所要结论得证. □

D. 对偶算子

4.110 设 $\{T_n\} \subset L(X, Y)$, $\{T_n\}$ 弱收敛于 T , 则 $\{T_n^*\}$ 弱*收敛于 T^* , 这意味着 $\forall g \in Y^*$, 有 $T_n^* g \xrightarrow{*} T^* g$.

证 取定 $g \in Y^*$, 为证 $T_n^* g \xrightarrow{*} T^* g$, 只要证 $\forall x \in X$, 有

$$g(T_n x) = (T_n^* g)(x) \rightarrow (T^* g)(x) = g(Tx),$$

这由 $T_n x \rightarrow Tx$ 推出, 而后者又由 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T 推出. □

4.111 设 $\{T_n\} \subset L(X, Y)$, $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, 则 $\|T_n^* - T^*\| \rightarrow 0$.

提示 利用 $\|T^*\| = \|T\|$.

4.112 设 $Tf(x) = f(x+a)$, $f \in L^2(\mathbf{R})$, $a \in \mathbf{R}$ 是常数, 求 T^* .

解 设 $T^*f(x) = \varphi(x)$, 则 $\forall f, g \in L^2(\mathbf{R})$, 有

$$T^*f, g = f, Tg$$

即

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) \overline{g(x)} dx &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{g(x+a)} dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x-a) \overline{g(x)} dx, \end{aligned}$$

这推出 $\varphi(x) = f(x-a)$ a. e., 因此 $T^*f(x) = f(x-a)$. □

4.113 设 $Tf(x) = f(\alpha x)$, $f \in L^2(\mathbf{R})$, $0 \neq \alpha \in \mathbf{R}$, 求 T^* .

提示 参照上题, $T^*f(x) = |\alpha|^{-1} f(x/\alpha)$.

4.114 设 $T \in L(X, Y)$, 则 T^* 是单射 $\Leftrightarrow \overline{R(T)} = Y$; 当 X 自反时 T 是单射 $\Leftrightarrow \overline{R(T^*)} = X^*$.

证 首先注意, 任何线性算子为单射的充要条件是其核为 $\{0\}$. 于是,

$$T^* \text{ 是单射 } \Leftrightarrow N(T^*) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow R(T)^\perp = \{0\} \quad (\text{用定理 4.3.6(i)})$$

$$\Leftrightarrow {}^\perp(R(T)^\perp) = \overline{R(T)} = Y. \quad (\text{用题 4.70})$$

若 X 自反, 则 X^* 亦是自反空间, 于是

$$T \text{ 是单射} \Leftrightarrow N(T) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow {}^\perp R(T^*) = \{0\} \quad (\text{用定理 4.3.6(i)})$$

$$\Leftrightarrow \overline{R(T^*)} = X^*.$$

□

4.115 设 X, Y 完备, $T \in L(X, Y)$. 若 $R(T) = Y$, 则 $R(T^*) = N(T)^\perp$; 若 $R(T^*) = X^*$, 则 $R(T) = {}^\perp N(T^*)$.

证 设 $R(T) = Y$. $R(T^*) \subset N(T)^\perp$ 是平凡的. 任给 $f \in N(T)^\perp$, 今证 $f \in R(T^*)$, 即要作出 $g \in Y^*$, 使得 $f = g \circ T$. 因 $R(T) = Y$, 对每个 $y \in Y$, 有 $x \in X$, 使 $y = Tx$, 就定义 $g(y) = f(x)$. 但要说明 $g(y)$ 与 x 的选择无关. 设 $y = Tx = Tz$, 则 $x - z \in N(T)$, 于是由 $f \in N(T)^\perp$ 有 $f(x - z) = 0$, 因而 $f(x) = f(z)$. 这样, g 在 Y 上合理定义, 它显然是一个线性泛函; $f = g \circ T$ 自动满足. 余下只要证 g 连续. 任给开集 $V \subset \mathbb{K}$, $f^{-1}V$ 是 X 中的开集. 由开映射定理, $Tf^{-1}V$ 是 Y 中的开集, 而 $g^{-1}V = Tf^{-1}V$, 因此 g 连续(定理 3.2.2) 如所要证.

其次设 $R(T^*) = X^*$. 由定理 4.3.6(i), $R(T) \subset {}^\perp N(T^*)$ 平凡地成立. 再用定理 4.3.6 得 $T: X \rightarrow R(T)$ 为拓扑同构, 因而 $R(T)$ 是 Y 的闭子空间. 若 $y \in Y \setminus R(T)$, 则由 Hahn-Banach 定理有 $g \in R(T)^\perp$, 使得 $g(y) \neq 0$. 但 $R(T)^\perp = N(T^*)$, 这就可得出 $y \in {}^\perp N(T^*)$. 于是证得 ${}^\perp N(T^*) \subset R(T)$, 因此 $R(T) = {}^\perp N(T^*)$. □

第五章 谱与紧线性算子

在上章中初步接触到的线性算子理论,虽然已显露出明显的线性代数背景,但真正能联系上的线性代数知识并不多.你特别注意到,线性代数中最为精微且最有价值的部分——特征值概念及与之相关的矩阵标准形理论,还完全没有涉及到.如果能将这一切拓展到无限维 Banach 空间中,那将是泛函分析的一个巨大成功.你从线性代数所得到的印象大概是,有关特征值、特征向量、标准形、对角化等的概念与命题,都是通过矩阵来表述的.在抽象的无限维空间中,在没有矩阵可用的情况下,展开上述种种概念是可行的吗?而事实是——你在本章中马上就要看到——这一辉煌设想几乎实现了.在无限维 Banach 空间中,建立了与特征值理论相当的谱理论.它既具有高度的一般性,又在特定条件下深入到高度专门的课题.这一切怎么得以实现呢?这是够激发你的好奇心的.

从线性代数知道,涉及特征值问题是不能回避复数的.同样,此处也需要考虑复的 Banach 空间.以下设 X 是给定的复 Banach 空间.

§ 5.1 谱与算子函数

一、定理与定义

我们知道 $L(X)$ 是一个复 Banach 空间(定理 4.1.1).但现在这一理解已不够了,需添加的一个关键概念是算子乘法:任给 $T, S \in L(X)$, 有 $TS \in L(X)$. 算子乘法满足如矩阵乘法一般的代数规则,如结合律、对加法的分配律等.若 $TS = ST = I$ (单位算子),则称 T 为可逆算子,其中 S 就是 T 的逆,记作 T^{-1} ;当这样的 T^{-1} 不存在时,称 T 为不可逆算子.约定以 $GL(X)$ 记 $L(X)$ 中可逆算子之全体;

$GL(C^n)$ 就是 n 阶可逆矩阵之全体. 总之, 就代数性质而言, $L(X)$ 与 n 阶矩阵的集合 $C^{n \times n}$ 几乎完全一样, 因而你可以毫无障碍地将矩阵代数 $L(C^n)$ 中的概念搬到 $L(X)$ 中来. 例如, 可以定义算子多项式

$$P(T) = \sum_{k=0}^n \alpha_k T^k \quad (T \in L(X)),$$

其中 $\alpha_k \in C$, 约定 $T^0 = I$. 上述多项式正好与矩阵多项式相对应. 这样, $L(X)$ 就成为一个类似于 $L(C^n)$ 的代数系统, 称之为算子代数.

现在, 我们并不满足于使用算子多项式, 而要更进一步: 考虑算子幂级数

$$f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k T^k \quad (T \in L(X)), \quad (1)$$

但这就得考虑收敛性问题. 不过, 这一问题解决得比预想的要简单: 设与 (1) 对应的数值幂级数

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

有收敛半径 $R > 0$, 则当 $T \in L(X)$, $\|T\| < R$ 时, 级数 (1) 必定绝对收敛. 事实上, 由定理 4.1.1(vi) 我们已知不等式 $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ ($S, T \in L(X)$), 因而 $\|T^k\| \leq \|T\|^k$, 于是当 $\|T\| < R$ 时

$$\sum_k \|\alpha_k T^k\| \leq \sum_k |\alpha_k| \|T\|^k < \infty.$$

考虑到绝对收敛级数必收敛(参考题 3.1), 故当 $\|T\| < R$ 时, 级数 (1) 收敛. 首先将这一结果用到

$$(1 - \lambda)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \quad (|\lambda| < 1),$$

得出: 当 $T \in L(X)$, $\|T\| < 1$ 时, 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ 收敛, 它的和就是算子 $(I - T)^{-1}$. 于是, 我们得到基本的展开式

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad (\|T\| < 1). \quad (2)$$

算子 $(I - T)^{-1}$ 的价值是要用来解线性方程 $x = Tx + y$, 即

$$(I - T)x = y,$$

它的解就是

$$x = (I - T)^{-1}y = \sum_{k=0}^{\infty} T^k y.$$

这是个颇令人鼓舞的结果:在无限维空间中居然也能解方程,而且其解法就如同 T 是一个矩阵一样!如果想稍稍扩大所得的结果,就考虑含参数 λ 的线性方程 $\lambda x = Tx + y$,即

$$(\lambda I - T)x = y.$$

自然,我们希望以公式 $x = (\lambda I - T)^{-1}y$ 来解.那么,在什么情况下 $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在呢?人们发现这一看来并不起眼的问题,竟然对整个算子理论都有根本意义,它导致以下概念:

定义 5.1.1 设 $T \in L(X)$.

(i) 谱.算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 定义为如下复数集

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \text{GL}(X)\}. \quad (3)$$

称每个 $\lambda \in \sigma(T)$ 为 T 的谱值,称

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

为 T 的谱半径.

(ii) 预解式.令 $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$,称 $\lambda \in \rho(T)$ 为正则值,称

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} \quad (\lambda \in \rho(T)) \quad (4)$$

为预解式.

(iii) 特征值.若 $\lambda \in \mathbb{C}$,存在 $x \neq 0$,使得 $Tx = \lambda x$ ($\Leftrightarrow x \in N(\lambda I - T)$),则称 λ 为 T 的特征值,称 x 为 T 关于特征值 λ 的特征向量,称 $N(\lambda I - T)$ 为 T 关于特征值 λ 的特征子空间.以 $\sigma_p(T)$ 记 T 的特征值之全体,称它为 T 的点谱,它就是

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}.$$

因 $N(\lambda I - T) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda I - T$ 非单射 $\Rightarrow \lambda I - T$ 不可逆 $\Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$,故 $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.当 $\dim X < \infty$ 时必定 $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.但当 $\dim X = \infty$ 时,有可能 $\sigma_p(T) \neq \sigma(T)$,这是不同于线性代数的新的情况.因此,谱理论不会是特征值理论的简单重复.

我们知道,对于 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\sigma(A)$ 至多含 n 个点,而且原则上可通

过解一个 n 次代数方程求出全部特征值. 与这种情况不同, 对于 $T \in L(X)$, 不仅没有求出 $\sigma(T)$ 的一般方法, 而且对于集 $\sigma(T)$ 的特征 (如有限或无限, 可数或不可数, 连续或离散, 等等) 几乎说不出什么一般结论. 具体例子表明, $\sigma(T)$ 可能有高度的任意性. 尽管如此, 它还是服从一条普遍规则:

定理 5.1.1 设 $T \in L(X)$, 则 $\sigma(T)$ 是非空紧集, 且成立谱半径公式

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}. \quad (5)$$

特别, 由 (5) 直接推出 $r_\sigma(T) \leq \|T\|$.

谱半径公式 (5) 是一个足以令人惊异的优美结果. 你很难想象, 对于缺少具体结构的抽象线性算子, 居然能导出如此简单而又准确的公式! 试想一下, 即使将 T 换成某个 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 能从线性代数中找到一个导致公式 (5) 的简单思路吗?

谱半径公式有着广泛而深刻的应用, 是理所当然的. 一个很直接的应用就是: 基于公式 (5), 几乎彻底解决了算子幂级数的收敛性问题.

定理 5.1.2 设幂级数 $\sum \alpha_n \lambda^n$ 的收敛半径为 R , $T \in L(X)$.

(i) 若 $r_\sigma(T) < R$, 则级数 $\sum \alpha_n T^n$ 绝对收敛.

(ii) 若 $r_\sigma(T) > R$, 则级数 $\sum \alpha_n T^n$ 发散.

于是, 只剩下 $r_\sigma(T) = R$ 的情况不能作出判断. 特别, 将以上结果用到幂级数 $\sum T^n$ 得出: 当 $r_\sigma(T) < 1$ 时 $\sum T^n$ 绝对收敛, 且它的和就是 $(I - T)^{-1}$; 若 $r_\sigma(T) > 1$, 则级数 $\sum T^n$ 发散. 这一结果比前面由 $\|T\| < 1$ 来得出收敛性的结论要精细得多.

定理 5.1.2 的一个影响更深远的推论是: 若 $f(\lambda)$ 是圆

$$D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < R\}$$

内的解析函数,

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} (\lambda - \lambda_0)^n, \quad (6)$$

则如下的算子解析函数

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} (T - \lambda_0 I)^n \quad (7)$$

有意义,只要 $T \in L(X)$ 满足 $\sigma(T) \subset D$ (这相当于 $r_\sigma(T - \lambda_0 I) < R$). 顺着这一思路再进一步,你自然会设想,对于任意开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的解析函数 $f(\lambda)$ (即 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 且 f 在每点 $\lambda \in \Omega$ 可微) 都能定义相应的算子解析函数 $f(T)$,只要 $T \in L(X)$ 满足 $\sigma(T) \subset \Omega$. 这件事具体实施起来还不太简单,但最终结论却非常令人满意,这就是:

定理 5.1.3 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一非空开集. 则存在唯一确定的对应关系 $f(\lambda) \rightarrow f(T)$: 每个 Ω 上的解析函数 $f(\lambda)$ 对应一个算子函数

$$f(T): D_\Omega \triangleq \{T \in L(X): \sigma(T) \subset \Omega\} \rightarrow L(X),$$

使得 $f(T)$ 有如下性质:

(i) 若 $f(\lambda)$ 表如 (6) 则 $f(T)$ 可表如 (7); 特别,当 $f(\lambda) \equiv \alpha$ 时 $f(T) = \alpha I$, 当 $f(\lambda) = \lambda$ 时 $f(T) = T$.

(ii) $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$, 即若 $h(\lambda) = g(\lambda) + f(\lambda)$, 则 $h(T) = g(T) + f(T)$.

(iii) $(fg)(T) = f(T)g(T)$, 即若 $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, 则 $h(T) = f(T)g(T)$.

(iv) $(\varphi \circ f)(T) = \varphi(f(T))$, 即若 $h(\lambda) = \varphi(f(\lambda))$, 则 $h(T) = \varphi(f(T))$.

(v) $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$, 即

$$\sigma(f(T)) = \{f(\lambda): \lambda \in \sigma(T)\}. \quad (8)$$

以上结果的证明要用到 $f(T)$ 的一构造性定义,即 $f(T)$ 的某个积分表示,还不太简单.但若绕过基于复分析的推导——初学者多半宁愿这样——仅仅考虑定理结论的应用,那么事情并不复杂.实际上结果好到让你感到意外.简单地说来是:若

$$\varphi(\lambda) = F(f(\lambda), g(\lambda), \dots, h(\lambda))$$

是一个解析函数的恒等式,其中右端由 $f(\lambda), g(\lambda)$ 等经加法、乘法及函数复合手续构成,则成立相应的算子函数恒等式

$$\varphi(T) = F(f(T), g(T), \dots, h(T)),$$

只要 $f(T), g(T)$ 等有定义.这等于说,解析函数之间涉及代数运算与复合的种种关系,可以原封不动地转移到算子函数,而无需对算子函数去从新建立一套规则.这样,我们不仅可以写出

$$e^T, \sin T, \ln(I+T)$$

这样的算子函数,而且可毫无疑问地运用熟知的公式:

$$e^T e^{-T} = I, e^{\ln(I+T)} = I+T;$$

$$\sin 2T = 2\sin T \cos T.$$

你也不必去考虑如何求 $\sigma(e^T)$ 的问题,因由式(8),简单地有

$$\sigma(e^T) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

总之,一切都是如此和谐、顺畅,几乎希望什么就得到了什么.事情好到这种地步,你无法指望得更多了.

尽管如此,你依然会心存疑虑:这些结果能有用吗?那么,至少下面的谱分解定理可作为定理 5.1.3 应用价值的例证.

定理 5.1.4 设 $T \in L(X)$, $\sigma(T) = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i$, $n \geq 2$, σ_i 是互不相交的非空闭集,则存在直和分解

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n \quad (9)$$

与

$$Tx = \sum_{i=1}^n T_i x_i \quad (x_i \in X_i, x = \sum x_i), \quad (10)$$

其中 X_i 是 X 的闭子空间, $T_i \in L(X_i)$, $\sigma(T_i) = \sigma_i$, $1 \leq i \leq n$.

例如,设 $\dim X = n$, $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, λ_i 互不相同,令 $\Omega_i = \{\lambda_i\}$, 则分解式(9)中的 X_i 必为 X 的 1 维子空间. 取 $0 \neq e_i \in X_i$, 则 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 X 的一组基, e_i 必为 T_i 的特征向量(何故?), 因而由(10)有 $Te_i = T_i e_i = \lambda_i e_i$ ($1 \leq i \leq n$), 于是 T 关于基 $\{e_i\}$ 的矩阵为

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

这样,线性代数中关于矩阵对角化的一个基本结果,在此处只不过是定理 5.1.4 的一条很特殊的推论而已.

二、问题与方法

A. 算子代数与逆算子

如果一算子问题只涉及加法与乘法运算,那么,它与矩阵代数中的问题几乎没有什么不同.若同时涉及算子范数与收敛性,则要记住基本

的不等式 $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ ($S, T \in L(X)$). 由这个不等式推出

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n, \|T^{-1}\| \geq \|T\|^{-1}.$$

5.1 设 $T \in L(X)$, 有唯一的 $S \in L(X)$ 使 $TS = I$, 则 $S = T^{-1}$.

证 只要证 $ST = I$, 这相当于证 $S = I + S - ST$, 这由以下演算得出:

$$T(I + S - ST) = T + TS - TST = TS = I. \quad \square$$

注意以上论证仅用到代数演算, 完全不涉及算子作为映射的性质, 例如, T 的单射性、满射性等, 都不在考虑之列. 实际上, 所证的结论适用于任何代数, 当然不必用到算子代数的特殊性质. 在这种场合, 牵扯到算子的特殊性质(如单射性), 于问题的解决无补, 唯有增加复杂性.

5.2 设 $T \in L(X)$, 有唯一的 $S \in L(X)$ 使 $ST = I$, 则 $S = T^{-1}$.

提示: 类似于上题.

5.3 设 $T, S \in L(X)$, $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, 则

$$\|(T + S)^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \|S\|}{1 - \|T^{-1}\| \|S\|}.$$

证 已知条件当然隐含了 T^{-1} 存在. 由 $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ 推出 $\|ST^{-1}\| < 1$, 因而 $I + ST^{-1}$ 可逆, 于是 $T + S = (I + ST^{-1})T$ 可逆, 且

$$\begin{aligned} (T + S)^{-1} &= [(I + ST^{-1})T]^{-1} \\ &= T^{-1}(I + ST^{-1})^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \|(T + S)^{-1} - T^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n \right\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{-1} (ST^{-1})^n\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{-1}\|^{n+1} \|S\|^n \\ &= \frac{\|T^{-1}\|^2 \|S\|}{1 - \|T^{-1}\| \|S\|}. \end{aligned}$$

□

以上论证的关键在于展开 $(T+S)^{-1}$, 这一点可做得更简捷些: 只要已知 T 可逆, $\|S\|$ 充分小, 就可由 (2) 直接写出:

$$\begin{aligned} (T+S)^{-1} &= T^{-1}(I+ST^{-1})^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T^{-1}(-1)^n (ST^{-1})^n, \quad (\text{用 } \|ST^{-1}\| < 1) \end{aligned}$$

而不必单独验证 $T+S$ 的可逆性.

5.4 设 $T, S \in L(X)$, $\|S-T\| < \|R(\lambda, T)\|^{-1}$, $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$, 则

$$\|R(\lambda, S) - R(\lambda, T)\| \leq \frac{\|R(\lambda, T)\|^2 \|S-T\|}{1 - \|R(\lambda, T)\| \|S-T\|}.$$

提示: 用上题方法.

5.5 设 $T \in L(X)$, $\lambda, \mu \in \rho(T)$, $|\lambda - \mu| < \|R(\lambda, T)\|^{-1}$, 则

$$\|R(\lambda, S) - R(\mu, T)\| \leq \frac{|\lambda - \mu| \|R(\mu, T)\|^2}{1 - |\lambda - \mu| \|R(\mu, T)\|}.$$

提示: 类似于上题.

5.6 设 $T \in L(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|T\|$, 则

$$\left\| R(\lambda, T) - \sum_{i=0}^n \frac{T^i}{\lambda^{i+1}} \right\| \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{(|\lambda| - \|T\|)|\lambda|^{n+1}}.$$

证 关键在于展开 $R(\lambda, T)$:

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) &= (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}T)^n \quad (\|\lambda^{-1}T\| < 1). \end{aligned}$$

于是

$$\left\| R(\lambda, T) - \sum_{i=0}^n \frac{T^i}{\lambda^{i+1}} \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{T^i}{\lambda^{i+1}} \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\|T\|^i}{|\lambda|^{i+1}} \\
&= \frac{\|T\|^{n+1} / |\lambda|^{n+2}}{1 - (\|T\| / |\lambda|)} \\
&= \frac{\|T\|^{n+1}}{(|\lambda| - \|T\|) |\lambda|^{n+1}}. \quad \square
\end{aligned}$$

你一定注意到了,上面几题其实只用到关键的展开式(2),其余都是它的变形而已.

5.7 设 $A, B \in L(X)$, 则 $AB - BA \neq I$.

证 用反证法: 设 $AB - BA = I$, 于是用归纳法可证 $AB^n - B^nA = nB^{n-1}$, 从而

$$n \|B^{n-1}\| \leq 2 \|A\| \|B\| \|B^{n-1}\|,$$

这推出 n 充分大时 $B^n = 0$. 另一方面, 取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使 $|\lambda|$ 适当大, $B - \lambda I$ 可逆. 因

$$A(B - \lambda I) - (B - \lambda I)A = AB - BA = I,$$

以 $B - \lambda I$ 代 B 得出: 当 n 充分大时有 $(B - \lambda I)^n = 0$, 但这与 $B - \lambda I$ 可逆矛盾. \square

当 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 时, $AB - BA \neq I$ 是线性代数中一个熟知结果, 证明也很简单: $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0 \neq n = \text{tr}I$. 但这一证明却不能推广到无限维空间中. 经常有这样的情况: 关于矩阵的某个结论可推广于 $L(X)$ 中, 但需要使用新的论证.

B. 谱问题

首先考虑谱半径公式的应用.

5.8 设 $T, S \in L(X)$, 则 $r_\sigma(TS) = r_\sigma(ST)$.

证 由 $(TS)^n = T(ST)^{n-1}S$ 得

$$\|(TS)\|^n \leq \|T\| \|(ST)^{n-1}\| \|S\|,$$

这推出 $r_\sigma(TS) \leq r_\sigma(ST)$. 由对等性, 必有 $r_\sigma(ST) \leq r_\sigma(TS)$, 故得所要证. \square

5.9 若 $TS = ST$, 则 $r_\sigma(TS) \leq r_\sigma(T)r_\sigma(S)$.

提示: 用 $\|(TS)^n\| = \|T^n S^n\| \leq \|T^n\| \|S^n\|$.

5.10 设 $T \in L(X)$, 则 $\alpha(T) = \{0\} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}$, 有 $\|\lambda^n T^n\| \rightarrow 0$.

证 若 $\alpha(T) = \{0\} \lambda \in \mathbb{C}$, 则级数 $\sum \lambda^n T^n$ 必收敛(用定理 5.1.2) 因此 $\lambda^n T^n \rightarrow 0$. 反之, 若 $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \lambda^n T^n \rightarrow 0$, 则

$$r_\alpha(T) = \lim_n \sqrt[n]{\|\lambda^n T^n\|} / |\lambda| \leq \text{const} / |\lambda| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}),$$

这推出 $r_\alpha(T) = 0$, 从而 $\alpha(T) = \{0\}$. □

5.11 设 $T \in L(X)$, $\epsilon > 0$, 则 X 上存在一个等价范数, 不妨记作 $|x|$, 使得相应的算子范数 $|T| \leq r_\alpha(T) + \epsilon$.

证 令 $\rho = r_\alpha(T) + \epsilon$. 定义

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} \|T^n x\| \quad (x \in X).$$

因当 n 充分大时有 $\|T^n\|^{1/n} < r_\alpha(T) + \epsilon/2 \triangleq r$, 故

$$\rho^{-n} \|T^n\| \leq (r/\rho)^n \quad (n \text{ 充分大}),$$

这推出 $\sum \rho^{-n} \|T^n\| < \infty$, 可见 $|x|$ 是有限的. 验证 $|x|$ 满足范数公理 $(N_1) \sim (N_3)$ 定义 3.1.1 是平凡的. 因

$$\|x\| \leq |x| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} \|T^n\| \|x\|,$$

故 $|x|$ 与 $\|x\|$ 等价(参考 § 3.1(2)). 由

$$\begin{aligned} |Tx| &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} \|T^{n+1}x\| \\ &= \rho \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{-n} \|T^n x\| \leq \rho |x| \end{aligned}$$

得出 $|T| \leq \rho$, 如所要证. □

上题的结论意味着, 在范数的适当选择下, 可使 $r_\alpha(T)$ 与 $\|T\|$ 任意接近. 注意 $r_\alpha(T)$ 是与范数选择无关的, 用 $r_\alpha(T)$ 所刻画结论(例如定理 5.1.2)真正依赖于算子 T 的本质属性. 例如, 用 $r_\alpha(T) < 1$ 判定级数 $\sum T^n$ 收敛, 这一条件已无法再作改进了; 而用 $\|T\| < 1$ 判定级数 $\sum T^n$ 收敛, 则有些粗疏. 理论上, 可以通过调整范数来尽可能消除这种“粗疏”. 不过, 在实际上, 很少有变更范数的必要.

5.12 设 $T \in L(X)$, 则 $\alpha(T) = \alpha(T^*)$.

证 $\forall \lambda \in \mathbb{C} \lambda I - T$ 可逆 $\Leftrightarrow \lambda I - T^*$ 可逆 (定理 4.3.6 (iii)) ,因此 $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T^*)$, 如所要证. \square

5.13 设 $\lambda \in \sigma_p(T)$, 求 $T|_{N(\lambda I - T)}$ 的谱.

提示 : 令 $A = N(\lambda I - T)$, 则 $T: A \rightarrow A$, 当 $\tau \neq \lambda$ 时 , $\tau I - T: A \rightarrow A$ 是一一映射 , $\forall x \in A$ 有 $(\tau I - T)\frac{x}{\tau - \lambda} = x$. $\sigma(T|_A) = \{\lambda\}$.

5.14 设 $T \in L(X)$, $\varepsilon > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $S \in L(X)$, $\|S - T\| < \delta$ 时 $\forall \lambda \in \sigma(S)$, 有 $d(\lambda, \sigma(T)) < \varepsilon$.

证 用反证法 , 关键是适当地写出反命题 : 设结论不成立 , 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists T_n \in L(X) \lambda_n \in \sigma(T_n)$, 使得 $\|T_n - T\| < 1/n$, $d(\lambda_n, \sigma(T)) \geq \varepsilon$. 因 $T_n \rightarrow T$, $\{\lambda_n\}$ 必有界 , 故不妨设 $\lambda_n \rightarrow \lambda$. 从而 $d(\lambda, \sigma(T)) \geq \varepsilon$. 但这推出 $\lambda \notin \sigma(T)$, 从而 $\lambda I - T$ 可逆 , 于是当 n 充分大时 $\lambda_n I - T_n$ 可逆 , 得出矛盾. \square

上面证明的最后一步实际上用了如下结论 : 若 T 可逆 , 则充分邻近 T 的算子亦可逆 , 即 $GL(X)$ 在 $L(X)$ 中为开集 . 你试证之 .

5.15 设 $T, S \in L(X) \rho \neq \lambda \in \mathbb{C}$, 则 $\lambda \in \sigma(TS) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(ST)$.

证 不妨设 $\lambda = 1$ (否则以 $\lambda^{-1}T$ 代 T) . 只要证 $I - TS$ 可逆 $\Rightarrow I - ST$ 可逆 , 这可通过一纯代数的论证完成 , 关键是构成算子

$$A = I + S(I - TS)^{-1}T ,$$

则可验证 $A(I - ST) = (I - ST)A = I$. \square

我们已经提到 , 对于任意的 $T \in L(X)$, 并无求 $\sigma(T)$ 的一般方法 . 只有对那些有明显构造的 T , 才可能求出 $\sigma(T)$, 或者至少确定它的某些特性 . 下面就来考虑一些具体例子 .

5.16 设 $Tf(x) = \int_a^x f(t) dt$, $f \in C[a, b]$, 求 $\sigma(T)$.

解 首先求谱半径 . $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} |T^n f(x)| &\leq \|f\|_0 \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \|f\|_0 (x-a)^n / n! , \end{aligned}$$

这得出 $\|T^n\| \leq (b-a)^n/n!$, 因而由谱半径公式有 $r_\sigma(T) = 0$, 这表明 $\sigma(T) = \{0\}$. \square

在上题中, 0 是否确为 T 的谱值, 无需再实际考虑了. 因若 $0 \in \sigma(T)$, 则必 $\sigma(T) = \emptyset$, 而这是与定理 5.1.1 相矛盾的.

5.17 设 $Tf(x) = xf(x)$, $f \in C[0, 1]$, 求 $\sigma(T)$ 与 $\sigma_p(T)$.

解 我们已在题 4.10 中求出 $\|T\| = 1$, 故 $r_\sigma(T) \leq 1$. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in C[0, 1]$, 则方程

$$(\lambda I - T)f(x) = (\lambda - x)f(x) = g(x) \quad (*)$$

在 $\lambda \in [0, 1]$ 时有唯一解 $f(x) = (\lambda - x)^{-1}g(x) \triangleq Ag(x)$, 且显然 $A \in L(C[0, 1])$, $(\lambda I - T)A = A(\lambda I - T) = I$, 故 $A = (\lambda I - T)^{-1}$, $\lambda \in \rho(T)$. 另一方面, 若 $\lambda \in [0, 1]$, 则对于 $g(x) \equiv 1$, 没有 $f \in C[0, 1]$ 能使 $(*)$ 满足, 因此 $\lambda \in \sigma(T)$, 故 $\sigma(T) = [0, 1]$. 若取 $g(x) \equiv 0$, 则仅当 $f(x) \equiv 0$ 时 $(*)$ 满足, 故 $\lambda \notin \sigma_p(T)$, 因此 $\sigma_p(T) = \emptyset$. \square

现在初步总结一下. 为求 $T \in L(X)$ 的谱 $\sigma(T)$, 可循以下步骤:

(i) 若容易确定 $r_\sigma(T) = 0$, 则 $\sigma(T) = \{0\}$, 问题解毕.

(ii) 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in X$, 研究方程

$$\lambda x - Tx = y$$

的可解性. 若以上方程有唯一解 x_λ , 且 x_λ 可表为 $x_\lambda = A_\lambda y$, $A_\lambda \in L(X)$, 则 $\lambda \in \rho(T)$, 因而 $\lambda \in \sigma(T)$.

(iii) 若对某个 $y \in X$ 方程 $\lambda x - Tx = y$ 无解, 则必 $\lambda \in \sigma(T)$.

(iv) 若方程 $\lambda x = Tx$ 有非零解 x , 则 $\lambda \in \sigma_p(T)$.

根据具体情况, 也可以首先考虑方程 $\lambda x = Tx$, 然后再考虑对应的非齐次方程.

5.18 设 $\varphi \in C[a, b]$, $Tf = \varphi f$ ($f \in C[a, b]$), 则 $T \in L(C[a, b])$, 求 $\sigma(T)$.

提示: 类似于题 5.17, $\sigma(T) = \varphi([a, b])$.

5.19 设 $Tx = (x_2, x_3, \dots)$, $x = (x_i) \in l^p$ ($1 \leq p < \infty$), 则 $T \in L(l^p)$, 求 $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$.

解 因 $\|Tx\|_p \leq \|x\|_p (\forall x \in l^p)$, 故 $T \in L(l^p)$ 且 $\|T\| \leq 1$. 首先考虑方程 $\lambda x = Tx$, 即

$$\lambda x_n = x_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

归纳地推出 $x_n = \lambda^{n-1} x_1$, 于是

$$\|x\|_p^p = |x_1|^p \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{np} < \infty \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ 或 } |\lambda| < 1.$$

由此可见, 若 $|\lambda| < 1$, 则取 $x_1 = 1$ 得到 $\lambda x = Tx$ 的非零解 $x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, 因此 $\lambda \in \sigma_p(T)$. 同样易见, 当 $|\lambda| \geq 1$ 时必 $\lambda \notin \sigma_p(T)$, 故 $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. 因 $|\lambda| > 1$ 时必 $\lambda \in \rho(T)$, 而 $\rho(T)$ 是闭集, 故

$$\rho(T) = \overline{\sigma_p(T)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}. \quad \square$$

5.20 设 $Tx = (0, x_1, x_2, \dots)$, $x = (x_n) \in l^p (1 \leq p < \infty)$, 则 $T \in L(l^p)$, 求 $\rho(T)$, $\sigma_p(T)$.

提示: 由 $\|T^n x\|_p = \|x\|_p (\forall x \in l^p)$ 推出 $\|T^n\| = 1$, 因而 $r_\sigma(T) = 1$. 取 $e_1 = (1, 0, \dots)$, 验证 $\lambda x - Tx = e_1$ 无解 ($|\lambda| \leq 1$), 因而 $\rho(T) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$; $\sigma_p(T) = \emptyset$.

5.21 对任给非空紧集 $\sigma \subset \mathbb{C}$, 存在 $T \in L(l^1)$, 使得 $\rho(T) = \sigma$.

证 取 σ 的可数稠密子集 $\{\alpha_i\}$, 定义 $Tx = (\alpha_i x_i)$, $x = (x_i) \in l^1$, 则 $\|Tx\|_1 \leq \sup_i |\alpha_i| \|x\|_1$, 因此 $T \in L(l^1)$. 只要证明 $\{\alpha_i\} \subset \rho(T)$, 因 $\rho(T)$ 是闭集, 就必有 $\rho(T) = \overline{\{\alpha_i\}} = \sigma$. 设 $\{e_i\}$ 是 l^1 的标准基, 则显然 $Te_i = \alpha_i e_i$, 可见 $\alpha_i \in \sigma_p(T) \subset \rho(T)$, 如所要证. \square

上题结论表明, 有界线性算子的谱可以是平面上任何非空紧集, 对于它的可数性、离散性等, 都不能随意加任何限制. 当然这并不意味着, 某些特殊类型的有界线性算子的谱是不受任何约束的. 例如, 下节中将讨论的紧算子的谱就有很特殊的结构.

下面考虑一个应用谱于方程问题的例子.

5.22 已知 $g \in C[0, 1]$, 则方程 $f(x) = \int_0^x f(y) dy + g(x)$ 有唯一解 $f \in C[0, 1]$, 求 f 的表达式.

解 令 $Tf(x) = \int_0^x f(y) dy$, 则 $T \in L([0, 1])$, $\rho(T) = \{0\}$ (见题 5.16), 因此 $1 \in \rho(T)$, 故方程 $f = Tf + g$ 有唯一解

$$f = (I - T)^{-1}g.$$

现在求出 f 的更具体的表达式. 由定理 5.1.2 有

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

而

$$\begin{aligned} T^n g(x) &= \int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} g(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x g(y) (x-y)^{n-1} dy \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T^n g(x) \\ &= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x g(y) (x-y)^{n-1} dy \\ &= g(x) + \int_0^x g(y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-y)^n}{n!} dy \\ &= g(x) + \int_0^x g(y) e^{x-y} dy. \end{aligned}$$

□

5.23 给定 $\lambda \in \mathbb{C}$, $g \in C[a, b]$, 方程 $f(x) = \lambda \int_a^x f(y) dy + g(x)$ 有唯一解 $f \in C[a, b]$, 求其表达式.

提示: 类似于上题, $f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x g(y) e^{\lambda(x-y)} dy$.

C. 算子函数

涉及算子函数连续性与可微性的简单问题可通过直接验证解决.

5.24 给定 $\lambda \in \mathbb{C}$, $R(\lambda, T)$ 对 T 在集 $\{T \in L(X): \lambda \in \rho(T)\}$ 内连续.

提示: 参照题 5.4.

5.25 设 $T \in L(X)$, $R(\lambda) = R(\lambda, T)$, 则 $R'(\lambda) = -R(\lambda)^2 (\lambda \in \rho(T))$.

证 取定 $\lambda \in \rho(T)$, 设 $\tau \in \mathbb{C}$, $|\tau|$ 充分小, 则

$$\begin{aligned} R(\lambda + \tau) &= (\lambda I + \tau I - T)^{-1} \\ &= R(\lambda [I + \tau R(\lambda)])^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\tau)^n R(\lambda)^{n+1}, \quad (\text{用(2)}) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{R(\lambda + \tau) - R(\lambda)}{\tau} + R(\lambda)^2 \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-\tau)^n R(\lambda)^{n+1} \right\| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |\tau|^n \|R(\lambda)\|^{n+1} \\ &= \frac{|\tau|^2 \|R(\lambda)\|^3}{1 - |\tau| \|R(\lambda)\|} = o(|\tau|), \end{aligned}$$

故

$$R'(\lambda) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{R(\lambda + \tau) - R(\lambda)}{\tau} = -R(\lambda)^2. \quad \square$$

关于算子函数最有趣的问题无疑是定理 5.1.3 的应用.

5.26 给定 $\lambda \in \rho(T)$, 设 $f(\tau) = (\lambda - \tau)^{-1}$, 则 $f(T) = R(\lambda, T)$.

提示: 验证 $f(T)(\lambda I - T) = (\lambda I - T)f(T) = I$, 用定理 5.1.3 (iii).

5.27 设 $T \in L(X)$, 则 $TR(\lambda, T) = R(\lambda, T)T$ ($\lambda \in \rho(T)$).

提示: 用上题.

5.28 $R(\lambda, T)R(\mu, T) = R(\mu, T)R(\lambda, T)$ ($\lambda, \mu \in \rho(T)$).

提示: 考虑函数 $f(\tau) = (\lambda - \tau)^{-1}(\mu - \tau)^{-1}$.

5.29 设 $\mu \in \rho(R(\lambda, T))$, 则

$$R(\mu, R(\lambda, T)) = \mu^{-1}I + \mu^{-2}R(\lambda - \mu^{-1}, T).$$

证 要证的算子等式看起来似乎无明显线索, 但相信它是由某个

解析函数的恒等式转化而来,大抵是不会错的.于是作

$$f(\tau) = [\mu - (\lambda - \tau)^{-1}]^{-1};$$

$$g(\tau) = \mu^{-1} + \mu^{-2}(\lambda - \mu^{-1} - \tau)^{-1},$$

则要证的等式可写成 $f(T) = g(T)$, 因此只要验证 $f(\tau) \equiv g(\tau)$, 而这是一件平凡的事. \square

5.30 设 $T \in L(X)$, $f(\lambda)$ 是某个解析函数, $f(T) = 0$, 则 $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) = 0\}$.

提示: 用定理 5.1.3(v).

5.31 设 $T \in L(X)$, 则 $\sigma(R(\lambda, T)) = \{(\lambda - \tau)^{-1} : \tau \in \sigma(T)\}$.

提示: 用题 5.26 与定理 5.1.3(v).

5.32 设 $T \in L(X)$, $f(\lambda)$ 是某个解析函数, $f(T)$ 有定义. 则方程 $f(T)x = y$ 对每个 $y \in X$ 有唯一解的充要条件是在 $\sigma(T)$ 上 $f(\lambda) \neq 0$.

证 方程 $f(T)x = y$ 对每个 $y \in X$ 有唯一解 $\Leftrightarrow f(T)$ 是可逆算子 $\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) \Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(T)$, 有 $f(\lambda) \neq 0$ (用定理 5.1.3(v)) 如所要证. \square

5.33 设 $T \in L(X)$ $(-\infty, 0] \cap \sigma(T) = \emptyset$, 则存在 T 的平方根 $A = \sqrt{T}$, 即 $A \in L(X)$, $A^2 = T$.

证 仍然借助于算子函数. 设所要的 $A = f(T)$, $f(\lambda)$ 是某个解析函数, 则关系式 $A^2 = f(T)f(T) = T$ 应当来自解析函数恒等式 $f(\lambda)f(\lambda) = \lambda$, 这就自然应令 $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$. 问题是 $\sqrt{\lambda}$ 通常是一个多值函数, 因此, 应在区域 $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = x + iy, y = 0 \Rightarrow x > 0\}$ 内取定 $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ 的一个单值分支, 这样 $f(\lambda)$ 是 Ω 内的解析函数, $\sigma(T) \subset \Omega$. 因此 $f(T)$ 有意义, $A = f(T)$ 必合于所求. \square

这样, 通过运用算子函数, 我们轻而易举地作出了一个算子的平方根, 其间根本不涉及对算子的任何直接构造. 一般地, 解决满足一定条件的算子的存在性问题, 通常要用到算子函数. 这样, 我们就拥有一个构造算子的通用工具, 它运用之简便与强有力, 是其他方法难以比拟的, 你试进一步从下题获得体验.

5.34 设 $T \in L(X)$ ($-\infty, 0] \cap \sigma(T) = \emptyset$), 则存在 T 的对数 $A = \ln T$, 即 $A \in L(X)$ $e^A = T$.

提示: 类似于题 5.33 利用 $\ln \lambda$ 的某个单值分支.

5.35 设 $T \in L(X)$, $\forall f \in X^*$, $\forall x \in X$, 有

$$\sup\{|f(R(\lambda, T)x)| : 0 < |\lambda - \lambda_0| < r\} < \infty,$$

则 $\lambda_0 \in \rho(T)$.

证 相继应用定理 4.1.7 与 4.1.6 得出

$$\sup\{\|R(\lambda, T)\| : 0 < |\lambda - \lambda_0| < r\} < \infty.$$

若 $\lambda_0 \in \sigma(T)$, 则当 $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$ 时 $(\lambda - \lambda_0)^{-1} \in \sigma(R(\lambda, T))$ (用题 5.31), 于是 $|\lambda - \lambda_0|^{-1} \leq \|R(\lambda, T)\| \leq \text{const.}$ 但 $\lambda \rightarrow \lambda_0$ 得出矛盾. \square

§ 5.2 紧线性算子

一、定理与定义

在本章开头, 我们曾预期在无限维空间中展开一个“特征值理论”. 现在让我们回顾一下, 这一目标究竟已在多大的程度上得到实现. 在上节中, 我们确实看到了一批深刻的结果, 像谱半径公式、关于算子函数的定理, 即使限制在有限维空间中使用, 也已超出了传统线性代数知识的范围. 这些结果的深刻性与普遍有效性无论如何是值得高度肯定的. 不过, 它们似乎不是很富有代数风味的. 恰好是那些地道的线性代数结果, 例如特征子空间的结构, 矩阵标准形, 等等, 在无限维空间中还远未得到相应的展开. 尽管已建立了一个谱分解定理(定理 5.1.4), 而且它确实涵盖了线性代数中矩阵对角化的一种重要特殊情况, 但总的来说, 所得的结果过于笼统, 很难与线性代数中那些高度精细的结论进行对比. 如此看来, 尽管我们已选择了一个有前景的方向, 但还走得实在不远. 这似乎是很自然的: 在如此一般化的理论框架下, 能够利用的工具、结构都太少了. 现在情况很清楚: 要么停留在少数高度一般但深度不够

的结论上, 要么放弃一些一般性, 考虑一些最重要的特殊情况. 显然, 后一种选择是更明智的. 往下的内容自然地朝两个特殊方向展开. 其一是考虑更特殊类型的算子, 主要是本节所考虑的紧线性算子; 其二是考虑更特殊的空间, 即 Hilbert 空间上的线性算子. 沿这两个方向都大大深化了前面的一般性结论, 在某些方面已进展到与线性代数的相关内容高度类似的地步. 所有这些内容都是异常优美诱人的, 但同时也是深奥难读的. 你大概已没有太多的时间在这一门不很轻松的课程中逗留, 往下两节的许多内容, 只能凭你的喜好来取舍了.

引进紧算子的一个基本考虑之一, 是希望所考虑的算子更加接近于有限维空间上的线性算子. 设 X, Y 是两个赋范空间, $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子. 只要 $\dim X = \infty$, 即使 T 是有界的, 当 $\{x_n\} \subset X$ 有界时, $\{Tx_n\}$ 也未必有收敛子列. 这种与有限维情形的差别常常是无限维问题困难的根源. 一个自然的补救办法是, 不妨限定上述的 $\{Tx_n\}$ 必含收敛子列. 这就是紧算子概念.

定义 5.2.1 设 $T: X \rightarrow Y$ 是一线性算子. 若对任何有界序列 $\{x_n\} \subset X$, $\{Tx_n\}$ 恒有收敛子列, 则称 T 为紧线性算子.

约定以 $\text{Cl}(X, Y)$ 记从 X 到 Y 的紧线性算子之全体, 令 $\text{Cl}(X) = \text{Cl}(X, X)$. 显然 $\text{Cl}(X, Y) \subset L(X, Y)$, 当 $\dim X < \infty$ 或 $\dim Y < \infty$ 时 $\text{Cl}(X, Y) = L(X, Y)$.

以下定理汇集了紧线性算子的一些基本性质.

定理 5.2.1 (i) 紧性刻画: 设 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 则 T 是紧算子 $\Leftrightarrow T$ 映 X 中的有界集为 Y 中的相对紧集 \Rightarrow 当 $x_n \rightarrow x$ 时 $Tx_n \rightarrow Tx$; 若 X 是自反空间, 则最后一个条件对于 T 为紧算子也是充分的.

(ii) 运算性质: 紧线性算子的线性组合仍为紧线性算子, 因此 $\text{Cl}(X, Y)$ 是 $L(X, Y)$ 的子空间; 紧线性算子与有界线性算子的积 (即复合, 无论次序如何) 是紧线性算子.

(iii) 极限性质: 若 Y 完备, 则当 $\{T_n\} \subset \text{Cl}(X, Y)$, $\{T_n\}$ 一致收敛于 T 时必 $T \in \text{Cl}(X, Y)$, 即 $\text{Cl}(X, Y)$ 是 $L(X, Y)$ 的闭子空间.

(iv) 若 $T \in \text{Cl}(X, Y)$, 则 $T^* \in \text{Cl}(Y^*, X^*)$.

从逻辑上说, 在无限维空间中, 紧线性算子只是有界线性算子中极

不寻常的特例,正如紧集并非常见一样.幸而,从应用上看情况还不至如此.一些常见的线性算子,例如许多积分算子恰好是紧线性算子.这一事实也是紧线性算子特别受到重视的原因之一.

关于紧线性算子谱的 Riesz-Schauder 理论集中体现了紧线性算子与有限维空间中线性算子的高度类似.这个理论是泛函分析中最优美的结果之一,其主要内容概述如下.

定理 5.2.2 设 X 是一个复 Banach 空间, $0 \neq T \in \text{Cl}(X)$, $T_\lambda = \lambda I - T$, $T_\lambda^* = \lambda I - T^*$ (后一个 I 是 X^* 上的单位算子).

(i) 谱的结构. $\sigma(T)$ 是可数集,它至多以 0 为极限点;任何非零谱值都是特征值;当 $\dim X = \infty$ 时 $0 \in \sigma(T)$.

(ii) 特征子空间的维数.若 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$, 则

$$\dim N(T_\lambda) = \dim N(T_\lambda^*) < \infty.$$

(iii) 根子空间.若 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$, 则存在 $r \geq 1$, 使得

$$N(T_\lambda) \subset N(T_\lambda^2) \subset \dots \subset N(T_\lambda^r);$$

$$R(T_\lambda) \supset R(T_\lambda^2) \supset \dots \supset R(T_\lambda^r);$$

$$X = N(T_\lambda^r) \oplus R(T_\lambda^r).$$

上述两个空间序列的包含都是真包含; $\forall k \geq r$, 有 $N(T_\lambda^k) = N(T_\lambda^r)$, $R(T_\lambda^k) = R(T_\lambda^r)$; $\dim N(T_\lambda^r) < \infty$, $R(T_\lambda^r)$ 是 X 的闭子空间. $N(T_\lambda^r)$ 称为 T 的根子空间; $\dim N(T_\lambda)$ 与 $\dim N(T_\lambda^r)$ 分别相当于线性代数中特征值的几何重数与代数重数.

(iv) 择一性质: 设 $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, 关于方程

$$\lambda x - Tx = y, \quad (1)$$

$$\lambda x - Tx = 0, \quad (2)$$

$$\lambda f - T^* f = g, \quad (3)$$

$$\lambda f - T^* f = 0 \quad (4)$$

有以下结论: 方程 (1) 有解 $x \in X \Leftrightarrow$ 对方程 (4) 的任何解 $f \in X^*$ 有 $f(y) = 0$; 方程 (3) 有解 $f \in X^* \Leftrightarrow$ 对方程 (2) 的任何解 $x \in X$ 有 $g(x) = 0$; 对任何 $y \in X$ 方程 (1) 恒有解 \Leftrightarrow 方程 (2) 仅有零解; 此时 $x = T_\lambda^{-1}y$ 是 (1) 的唯一解, 对任何 $g \in X^*$ 方程 (3) 恒有解 \Leftrightarrow 方程 (4)

仅有零解,此时 $f = (T_\lambda^*)^{-1}g$ 是 (3) 的唯一解.

最后一个性质显得颇为琐碎而又神秘. 但将它们转译成如下缩写式

$$R(T_\lambda) = {}^\perp N(T_\lambda^*), R(T_\lambda^*) = N(T_\lambda)^\perp, \quad (5)$$

$$R(T_\lambda) = X \Leftrightarrow N(T_\lambda) = \{0\}, \quad (6)$$

$$R(T_\lambda^*) = X^* \Leftrightarrow N(T_\lambda^*) = \{0\} \quad (7)$$

之后,就变得一目了然了. 回忆一定理 4.3.6(i) 已有 ${}^\perp N(T^*) = \overline{R(T)}$; 而 (5) 则加强了这一公式并补充了一个对偶的等式 $R(T_\lambda^*) = N(T_\lambda)^\perp$. (6) 意味着: T_λ 是满射 $\Leftrightarrow T_\lambda$ 是单射. (7) 有类似的意义. 所有这些性质必然为有限维空间中的任何线性算子所具有.

二、问题与方法

A. 紧线性算子的一般性质

以下设 X, Y 是赋范空间.

5.36 设 X, Y 完备, $\dim Y = \infty, T \in \text{Cl}(X, Y)$, 则存在 $y \in Y$, 使得方程 $Tx = y$ 无解.

证 用反证法. 若结论不真, 则 T 是满射, 因而是开映射(用开映射定理). 但由定理 5.2.1(i), $TB_1(0)$ 是 Y 中的相对紧集, 而在无限维空间中相对紧集必无内点(用定理 3.2.3(v)), 故 $TB_1(0)$ 不能是开集. 这与 T 为开映射相矛盾. \square

上题有助于我们获得对紧线性算子的一种直观印象. 若 $T \in L(X, Y)$, $\dim Y < \infty$, 则 T 必为紧线性算子. 若 $\dim Y = \infty$, 但 $\dim R(T) < \infty$ (这样的 T 称为有限秩算子), 则 T 可看作从 X 到 $R(T)$ 的算子, 因而仍是紧算子. 当然, 紧线性算子未必都是有限秩算子, 但可想象, 它不至于与有限秩算子离得太远. 粗略地说, 这意味着 $R(T)$ 在 Y 中收得较紧, 这就自然排除掉 $R(T) = Y$ 这种情况.

5.37 设 X, Y 完备, $T \in L(X, Y)$. 若 $R(T)$ 是 Y 的无限维闭子空间, 则 T 必非紧算子.

提示: 参考上题.

5.38 设 X 完备, $T \in L(X)$. 若存在常数 $\alpha > 0$, 使得 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ ($\forall x \in X$), 则 $T \in CL(X) \Leftrightarrow \dim X < \infty$.

证 条件 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ ($\forall x \in X$) 推出 T 为单射 ($Tx = 0 \Rightarrow x = 0$), 回忆 T 为单射 $\Leftrightarrow N(T) = \{0\}$, 因此 $T: X \rightarrow R(T)$ 是一个线性同构, 且

$$\|T^{-1}(Tx)\| = \|x\| \leq \alpha^{-1} \|Tx\|, \quad (\forall x \in X)$$

这表明 $\|T^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$, 因而 $T: X \rightarrow R(T)$ 是一拓扑同构, 故 $R(T)$ 必完备. 若 $\dim X = \infty$, 则亦必 $\dim R(T) = \infty$, 因而 T 必非紧算子 (参考上题). 当 $\dim X < \infty$ 时显然 $T \in CL(X)$. \square

5.39 若 X 是无限维 Banach 空间, 则几乎每个 $T \in L(X)$ 非紧线性算子.

证 首先注意, 涉及某个对象一般性的问题总是在 Baire 第二纲集的意义理解. 因 $L(X)$ 是 Banach 空间, 只要说明 $CL(X)$ 是 $L(X)$ 中的第一纲集 (从而非紧线性算子构成 $L(X)$ 中的第二纲稠密集, 按照熟知的理解, 它几乎包含了 $L(X)$ 中的所有元素) 因 $\dim X = \infty$, 必定 $I \notin CL(X)$ (用题 5.37), 因此 $CL(X)$ 是 $L(X)$ 的真闭子空间 (用定理 5.2.1(iii)), 因而是 $L(X)$ 中的疏集 (参考题 3.97), 故得所要证. \square

上题的结论对紧线性算子的“稀有性”赋予了严格的意义. 但如我们已经强调的, 以上结论不应成为不必看重紧线性算子的理由. 如所熟知, 有理数在实数中是稀有的, 若因此而低估有理数的现实价值, 那就荒唐了. 人们会告诉你: 有理数更有用! 因为人类在实际的日常活动中只用有理数. 在这个问题上, 我们似乎陷入了一个悖论: 逻辑上认为可忽略的东西, 实际上正是应予重视的! 其实这是一种误解. 如果一个问题是全球性的, 它的解答平等地依赖于 $L(X)$ 中的所有元素, 当然, 在 $\dim X = \infty$ 的情况下, 可以认为紧线性算子起的作用相对地较小. 但如果一个问题本身就是特殊的、局部的, 它也许恰好只用到紧线性算子 (这种情况往往正是常见的), 那么, 紧线性算子不仅不可忽略, 而且恰好应放在更重要的位置.

5.40 设 Y 完备, A 是 X 的稠密子空间, $T \in CL(A, Y)$, 则 T 在 X 上的线性扩张是紧线性算子.

证 依题 4.6, T 在 X 上有唯一的线性扩张, 仍记作 T . 设 $\{x_n\} \subset X$ 是一有界序列. $\forall n \in \mathbb{N}$, 取 $a_n \in A$, 使得 $\|a_n - x_n\| < 1/n$. $\{a_n\}$ 显然亦为有界序列, 因此 $\{Ta_n\}$ 有收敛子列, 设 $Ta_{n_i} \rightarrow y \in Y$, 则

$$\begin{aligned} \|Tx_{n_i} - y\| &\leq \|Tx_{n_i} - Ta_{n_i}\| + \|Ta_{n_i} - y\| \\ &\leq \|T\| n_i^{-1} + \|Ta_{n_i} - y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

可见 $Tx_{n_i} \rightarrow y$. 这表明 $T: X \rightarrow Y$ 是紧线性算子. \square

上题结论的实际意义在于: 要验证 $T \in L(X, Y)$ 为紧线性算子, 只要验证 T 在 X 的某个稠密子空间上是紧算子就行了.

5.41 设 $T: X \rightarrow Y$ 是一线性算子, 则 T 是紧线性算子 $\Leftrightarrow TB_1(0)$ 是 Y 中的相对紧集.

证 设 $TB_1(0)$ 是相对紧集. 任给有界序列 $\{x_n\} \subset X$, 取 $\beta > 0$, 使 $\|x_n\| < \beta (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $\{\beta^{-1}x_n\} \subset B_1(0)$, 因而 $\{T(\beta^{-1}x_n)\}$ 有收敛子列, 这显然推出 $\{Tx_n\}$ 有收敛子列, 故 T 是紧线性算子. 逆命题是显然的. \square

5.42 设 $T: X \rightarrow Y$ 是线性算子, 则 T 是紧线性算子 \Leftrightarrow 存在某个球 $B_r(a) \subset X (r > 0)$, 使得 $TB_r(a)$ 是 Y 中的相对紧集.

提示: 参照上题.

5.43 设 A 是 X 的向量子空间, $\dim A = \infty$, A 依另一个范数 $\|\cdot\|'$ 是一 Banach 空间, 且使得包含映射

$$i: (A, \|\cdot\|') \rightarrow (X, \|\cdot\|), x \mapsto x$$

为紧线性算子, 此时称 i 为紧嵌入, 则存在 $\beta > 0$, 使得 $\|x\| \leq \beta \|x\|' (\forall x \in A)$; 但在 A 上范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 并不等价.

证 令 β 为题中所述算子 i 的范数, 则显然 $\|x\| \leq \beta \|x\|' (\forall x \in A)$. 若在 A 上范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 等价, 则存在 $\alpha > 0$, 使得 $\|x\| \geq \alpha \|x\|' (\forall x \in A)$. 但因 $\dim A = \infty$, 这将得出 i 非紧线性算子 (参考题 5.38), 与题设矛盾. 故得所要证. \square

设 $J = [a, b], X = C(J), A = C^1(J)$, 则 $\dim A = \infty$, 包含映射

$$i: (A, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_0), f \mapsto f$$

是紧线性算子, 其中 $\|f\|_1 = \|f\|_1 \vee \|f'\|_0$ (参考 § 3.1(8)). 事实上, 若 $\{f_n\} \subset C^1(J)$ 依范数 $\|\cdot\|_1$ 有界, 设 $\beta = \sup_n \|f_n\|_1$, 则 $\|f_n\|_0 \leq \beta, |f_n(x) - f_n(y)| \leq \beta|x - y|$ ($\forall n \in \mathbf{N}, \forall x, y \in J$), 可见 $\{f_n\}$ 在 J 上一致有界且等度连续, 故依定理 3.2.5 必有一致收敛子列, 这正表明 i 是紧算子. 于是由题 5.43 推出, 在 $C^1(J)$ 上范数 $\|\cdot\|_0$ 与 $\|\cdot\|_1$ 不能等价, 即不存在 $\alpha > 0$, 使得 $\|f'\|_0 \leq \alpha \|f\|_0$ ($\forall f \in C^1(J)$). 这与熟知的实际情况一致.

5.44 任给 $m \in \mathbf{N}$, 空间 $C^m[a, b]$ 上的范数 (依据 § 3.1(8)) $\|\cdot\|_m$ 与 $\|\cdot\|_{m-1}$ 不等价.

提示: 参照题 5.43

5.45 设 $A \subset X$, A 依范数 $\|\cdot\|'$ 为自反空间, 则

$$i: (A, \|\cdot\|') \rightarrow (X, \|\cdot\|), x \rightarrow x$$

为紧嵌入的充要条件是: 若在 A 中依 $\|\cdot\|'$ 有 $x_n \rightarrow 0$, 则必 $\|x_n\| \rightarrow 0$.

提示: 利用定理 5.2.1(i).

上题为在赋范空间中判定收敛性提供了一种一般方法, 其要领是: 若要判定在 X 中有 $x_n \rightarrow x$, 则只要指明 x_n 属 X 的某个子空间 A , 而 A 可另赋范数 $\|\cdot\|'$, 使之成为自反空间, 且依新范数有 $x_n \rightarrow x$. 这样, 就将强收敛的判定问题变成了弱收敛的判定问题, 而后者通常要简单些. 以上方法实际上已被广泛使用.

对于 Hilbert 空间上的紧线性算子, 可以提出某些特殊的问题. 以下设 H 是给定的 Hilbert 空间. 由定理 5.2.1(i), 对于一个线性算子 $T: H \rightarrow Y, T \in \text{Cl}(H, Y) \Leftrightarrow$ 从 $x_n \rightarrow x$ 恒推出 $Tx_n \rightarrow Tx$. 这一事实对于研究 Hilbert 空间上的紧线性算子是重要的.

5.46 设 $T \in \text{Cl}(H)$, 在 H 中 $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, 则 $x_n, Ty_n \rightarrow x, Ty$.

证 本题不难从题 4.79 推出, 下面给出直接证明. 首先, 从 $y_n \rightarrow y$ 及 $T \in \text{Cl}(H)$ 推出 $Ty_n \rightarrow Ty$, 于是

$$\begin{aligned} & \|x_n, Ty_n - x, Ty\| \\ & \leq \|x_n, Ty_n - x_n, Ty\| + \|x_n, Ty - x, Ty\| \end{aligned}$$

$$\leq \|x_n\| \|T y_n - T y\| + \|x_n - x, T y\| \rightarrow 0,$$

其中用到 $\{x_n\}$ 有界 (定理 4.3.1(i)) 与 $x_n \rightarrow x$. □

上题结论意义颇大. 注意上题无非是说, 若 $T \in \text{CL}(H)$, 则双线性函数 $f(x, y) = (x, T y)$ 关于变量 x, y 的弱收敛是连续的; 特别, “二次型” $f(x) = (x, T x)$ 关于 x 的弱收敛连续. 这就可用题 4.90 的方法证明: $f(x)$ 在任何有界闭凸集 $A \subset H$ 上取得最大最小值 (假定 $f(x)$ 是实值的). 这一事实在极值理论中有重大意义.

5.47 设 H 是实 Hilbert 空间, $T \in \text{CL}(H)$, $A \subset H$ 是有界闭凸集, 则 $f(x) = (x, T x)$ 在 A 上达到最大值与最小值.

5.48 设 $T \in \text{CL}(H)$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 H 的标准正交系, 则 $T e_n, e_n \rightarrow 0$.

提示: 注意 $e_n \rightarrow 0$, 用题 5.46.

5.49 设 $T \in L(H)$ 是有限秩算子, 则存在 $\{e_i, a_i : 1 \leq i \leq n\} \subset H$, 使得 $T x = \sum_{i=1}^n (x, a_i) e_i \quad (\forall x \in H)$.

证 因 $\dim R(T) < \infty$, 故存在 $R(T)$ 的标准正交基 $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$, 于是

$$\begin{aligned} T x &= \sum_i (T x, e_i) e_i \\ &= \sum_i (x, T^* e_i) e_i \quad (\text{用 §4.3(1)}) \\ &= \sum_i (x, a_i) e_i. \quad (a_i = T^* e_i) \end{aligned}$$
□

B. 函数空间上的紧线性算子

定义于空间 L^p, L^p 及 $C(J)$ 上的许多常见的线性算子是紧线性算子. 研究这一类例子有助于获得对紧线性算子的直观印象.

5.50 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是 σ -有限测度空间, $K(x, y)$ 是 $\Omega \times \Omega$ 上的 $\mu \times \mu$ -可测函数, 它满足条件

$$\beta \triangleq \left\{ \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} |K(x, y)|^q dy \right]^{p/q} dx \right\}^{1/p} < \infty,$$

其中 $1 < p = q/(q-1) < \infty$, dx, dy 分别为 $d\mu(x)$ 与 $d\mu(y)$ 的缩

写. 积分算子 T 定义如 § 4.1(3) 则 $T \in \text{CL}(L^p(\Omega))$.

证 设 $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, $f_n \rightarrow f$, 今要证明 $Tf_n \xrightarrow{L^p} Tf$ (依定理 5.2.1(i)). 为此, 又只要证 $Tf_n \rightarrow Tf$ 且 $\|Tf_n\|_p \rightarrow \|Tf\|_p$ (依题 4.95).

(i) 证 $Tf_n \rightarrow Tf$. 只要说明 T 有界即可 (依题 4.80), 这由一个标准的 Hölder 不等式论证完成, 这件事留给读者. 实际上, 你能推出 $\|T\| \leq \beta$ (参考定理 4.1.3(iii)).

(ii) 证 $\|Tf_n\|_p \rightarrow \|Tf\|_p$. 由题设条件, 对几乎所有 $x \in \Omega$, 有

$$\int_{\Omega} |K(x, y)|^q dy < \infty.$$

以上不等式意味着 $K(x, \cdot) \in L^q(\Omega) = L^p(\Omega)^*$, 因此由 $f_n \rightarrow f$ 有

$$\lim_n \int_{\Omega} K(x, y) f_n(y) dy = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy,$$

这就得到 $Tf_n \rightarrow Tf$ a.e.. 因

$$\begin{aligned} |Tf_n(x)|^p &\leq \left[\int_{\Omega} |K(x, y)| |f_n(y)| dy \right]^p \\ &\leq \left[\int_{\Omega} |K(x, y)|^q dy \right]^{p/q} \|f_n\|_p^p \\ &\leq \text{const} \left[\int_{\Omega} |K(x, y)|^q dy \right]^{p/q}, \quad (\text{用 } \|f_n\|_p \text{ 有界}) \end{aligned}$$

而 $\left[\int_{\Omega} |K(x, y)|^q dy \right]^{p/q}$ 对 x 在 Ω 上可积, 故由控制收敛定理有

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= \int_{\Omega} |Tf(x)|^p dx \\ &= \lim_n \int_{\Omega} |Tf_n(x)|^p dx \\ &= \lim_n \|Tf_n\|_p^p, \end{aligned}$$

即如所要证. □

以上证明虽然稍长一点, 但其中用到你从本课程学过的多方面的知识, 值得你一读.

5.51 设 $1 < p = q/(q-1) < \infty$, 无穷矩阵 $A = [a_{ij}]$ 满足

$$\sum_i \left(\sum_j |a_{ij}|^q \right)^{p/q} < \infty,$$

则 $A \in \text{CL}(l^p)$.

以上结论当然已包含在很一般的题 5.50 中. 不过, 用如下的直接证明可能更富有启发性. 将 A 的第 n 行之后的行改为零, 得到一个新的无穷矩阵 A_n , 显然 $A_n \in L(l^p)$ 且 $\dim R(A_n) = n$, 因而 $A_n \in \text{CL}(l^p)$, 只要证 $\|A_n - A\|_p \rightarrow 0$ (用定理 5.2.1(iii)). $\forall x = (x_i) \in l^p$, 有

$$\begin{aligned} \|A_n x - Ax\|_p^p &= \sum_{i>n} \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|^p \\ &\leq \sum_{i>n} \left(\sum_j |a_{ij}|^q \right) \|x\|_p^p, \end{aligned}$$

故

$$\|A_n - A\|_p^p \leq \sum_{i>n} \left(\sum_j |a_{ij}|^q \right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

5.52 设 $1 \leq p \leq \infty$, 则 $T: l^p \rightarrow l^p \ (x_i) \rightarrow (x_i/i)$ 是紧线性算子.

提示: 令 $T_n x = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, 0, \dots)$, 则 $\|T_n - T\| \leq 1/n$.

注意: 当 $1 < p < \infty$ 时题 5.52 已包含在题 5.51 中.

5.53 $L(l^p, l^1) = \text{CL}(l^p, l^1) \ (1 < p < \infty)$.

提示: 用定理 5.2.1(i) 与题 4.80 A.99.

5.54 设 $J = [a, b], \varphi \in C(J), Tf = \varphi f$, 则 $T \in \text{CL}(C(J)) \Leftrightarrow \varphi \equiv 0$.

证 只要证明: 当某个 $\varphi(x_0) \neq 0 (x_0 \in J)$ 时 T 必非紧算子. 不妨设 $x_0 > a$. 定义 $f_n \in C(J)$ 如下: 在 $[a, x_0 - 1/n]$ 上 $f_n(x) = 0$, 在 $[x_0, b]$ 上 $f_n(x) = 1$, 而在 $(x_0 - 1/n, x_0)$ 内 $f_n(x)$ 是线性函数, 则 $A \triangleq \{f_n: n \geq 1\}$ 是 $C(J)$ 中的有界集. 今证 TA 在 $C(J)$ 中不相对紧, 为此只要指明 TA 不等度连续即可 (用定理 3.2.5). 令 $g_n = \varphi f_n$, $x_n = x_0 - 1/n$, 则 $|x_n - x_0| \rightarrow 0$, 而

$$|g_n(x_n) - g_n(x_0)| \geq |\varphi(x_n)| |f_n(x_n) - f_n(x_0)|$$

$$\begin{aligned}
& - |\varphi(x_n)f_n(x_0) - \varphi(x_0)f_n(x_0)| \\
& = |\varphi(x_n)| - |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| \\
& \rightarrow |\varphi(x_0)| > 0,
\end{aligned}$$

□

这表明 TA 不等度连续.

5.55 设 $a = (a_i) \in l^\infty$, $Tx = (a_i x_i)$, $x = (x_i) \in l^1$, 则 $T \in \text{CL}(l^1) \Leftrightarrow a \in c_0$, 即 $a_i \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$.

证 “ $a \in c_0 \Rightarrow T \in \text{CL}(l^1)$ ” 的证明参照题 5.52, 这留给读者练习. 今设 $a \notin c_0$, 证 $T \notin \text{CL}(l^1)$. 取 $\varepsilon > 0$ 与子列 $n_1 < n_2 < \dots$, 使得 $|a_{n_i}| \geq \varepsilon$. 设 $\{e_i\}$ 是 l^1 的标准基, 则 $A = \{e_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ 是 l^1 中的有界集, $Te_{n_i} = a_{n_i} e_{n_i}$, 因此当 $i \neq j$ 时

$$\|Te_{n_i} - Te_{n_j}\|_1 = |a_{n_i}| + |a_{n_j}| \geq 2\varepsilon.$$

这表明 $\{Te_{n_i}\}$ 的任何子列都不可能是 Cauchy 列, 因此 TA 在 l^1 中不是相对紧集, 故 $T \notin \text{CL}(l^1)$, 如所要证. □

5.56 设 $a = (a_i) \in l^\infty$, $Tx = (a_i x_i)$, $x = (x_i) \in l^p (1 \leq p < \infty)$, 则 $T \in \text{CL}(l^p) \Leftrightarrow a \in c_0$.

提示: 类似于上题.

5.57 $\text{CL}(X, Y)$ 对算子序列强收敛未必封闭.

证 我们可以证得更多一点. 设 $1 \leq p < \infty$, $T \in L(l^p)$, 记 Tx 为 \tilde{x} ; 设 $T_n x = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, 0, \dots)$ ($x \in l^p$). 则 $T_n \in \text{CL}(l^p)$,

$$\|T_n x - Tx\|_p^p = \sum_{i>n} |\tilde{x}_i|^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

可见 $\{T_n\}$ 强收敛于 T . 这就表明, 依算子序列强收敛, $\text{CL}(l^p)$ 在 $L(l^p)$ 中稠密, 因而 $\text{CL}(l^p)$ 依算子序列强收敛必不封闭. □

5.58 设 $J = [0, 1]$, $Tf(x) = \int_0^x f(y) dy$, $f \in \mathcal{C}(J)$, 则 $T \in \text{CL}(\mathcal{C}(J))$.

提示: 任给有界集 $A \subset \mathcal{C}(J)$, TA 有界且等度连续.

5.59 设 $J = [a, b]$, $K(x, y)$ 是 $J \times J$ 上的可测函数且有以下性质:

$$(i) \forall f \in \mathcal{C}(J), Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy \in \mathcal{C}(J);$$

$$(ii) \sup_{x \in J} \int_a^b |K(x, y)| dy < \infty;$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow z} \int_a^b |K(x, y) - K(z, y)| dy = 0,$$

则 $T \in \mathcal{CL}(\mathcal{C}(J))$. 特别, 当 $K(x, y) \in \mathcal{C}(J \times J)$ 时以上结论成立.

证 任给有界集 $A \subset \mathcal{C}(J)$, 由条件 (i) 有 $TA \subset \mathcal{C}(J)$, 今证 TA 有界且等度连续. 令 $\beta = \sup_{f \in A} \|f\|_0$, 则 $\forall f \in A$ 有

$$\begin{aligned} \|Tf\|_0 &= \sup_{x \in J} \left| \int_a^b K(x, y)f(y)dy \right| \\ &\leq \beta \cdot \sup_{x \in J} \int_a^b |K(x, y)| dy, \end{aligned}$$

于是由条件 (ii) 推出 TA 有界. 其次, $\forall x, z \in J, f \in A$, 有

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(z)| &\leq \int_a^b |K(x, y) - K(z, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \beta \int_a^b |K(x, y) - K(z, y)| dy, \end{aligned}$$

于是由条件 (iii) 推出 TA 等度连续. □

上题中的条件并不简炼, 近于拼凑, 未必值得作为标准使用. 但这一类的问题所传递的信息却值得重视. 应强调的一点是, 紧算子早已不是停留在教科书上的抽象概念, 而是许多研究领域的专家手中的日常工具. 决定各种类型的积分算子的紧性, 无疑是分析学者所应具备的标准数学训练之一. 你现在所接触到的, 当然只是最简单的情况.

5.60 设 $J = [a, b]$, $K(x, y)$ 及其偏导数 $K_x(x, y)$ 都在 $J \times J$ 上连续. 积分算子 T 定义如 §4.1(3), 则 $T \in \mathcal{CL}(C^1(J))$, $C^1(J)$ 中使用范数 $\|f\|_1 = \|f_0\| \vee \|f'\|_0$.

提示: 任给有界集 $A \subset C^1(J)$, 指明 TA 与 $\{Tf\} : f \in A$ 都在 $\mathcal{C}(J)$ 中有界且等度连续.

5.61 设 $K(x, y)$ 满足题 5.59 中的条件 (iii), 且在 $J \times J$ 上有界, $Tf(x) = \int_a^x K(x, y)f(y)dy (\forall f \in \mathcal{C}(J))$, $Tf \in \mathcal{C}(J)$, 则 $T \in$

$\text{CL}(\alpha(J))$

提示:仿照题 5.59 的证法.

C. 紧线性算子的谱

以下设 X 是复 Banach 空间. 若 $T \in \text{CL}(X)$, 则 $\sigma(T)$ 中的点皆为孤立点(唯有 $\lambda = 0$ 可能例外)及非零谱值为特征值这两点, 都是非常特殊的, 常常成为区别紧线性算子与其他有界线性算子的重要依据.

5.62 设 $T \in \text{CL}(X)$, $\sigma(T)$ 是无限集, 则 $0 \in \sigma(T)$.

证 I $\sigma(T)$ 是无限集推出 $\dim X = \infty$. 若 $0 \notin \sigma(T)$, 则 T 是可逆算子, 这矛盾于题 5.36(或 5.37 或 5.38). 因此 $0 \in \sigma(T)$.

证 II $\sigma(T)$ 是有界无限集, 必至少有一极限点, 这个极限点只能是 0. 但 $\sigma(T)$ 是闭集, 故 $0 \in \sigma(T)$. \square

5.63 设 $T \in \text{CL}(X)$, $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, 则 $R(T)$ 必非闭子空间.

提示:参考题 5.37.

5.64 设 $Tx = (x_i/i)$, $x = (x_i) \in l^2$ (参看题 5.52), 求 $\sigma(T)$.

解 方程 $\lambda x = Tx$ 相当于无限方程组

$$\lambda x_i = x_i/i, \quad i = 1, 2, \dots$$

它有非零解 $x = (x_i) \in l^2$ 的充要条件是 $\lambda = 1/i$ ($i \in \mathbb{N}$), 因此 $\{i^{-1} : i \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T)$. 由题 5.62, 必有 $0 \in \sigma(T)$. 因此得到 $\sigma_p(T) = \{i^{-1} : i \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$. \square

5.65 对上题中的 T , 求 T 关于其特征值的特征子空间与根子空间.

解 固定 $i \in \mathbb{N}$, 令 $T_i = i^{-1}I - T$, 则

$$x \in N(T_i) \Leftrightarrow i^{-1}x_i - j^{-1}x_i = 0 \quad (\forall j \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow x_j = 0 \quad (\forall j \neq i)$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha e_i \quad (\alpha \in \mathbb{C}),$$

故 $N(T_i) = \mathbb{C}e_i$, 它就是 T 关于特征值 $\lambda = i^{-1}$ 的特征子空间. 其次, 注意 $T_i^2 = i^{-2}I - 2i^{-1}T + T^2$, 于是

$$x \in N(T_i^2) \Leftrightarrow i^{-2}x_j - 2i^{-1}j^{-1}x_j + j^{-2}x_j = 0$$

$$= (i^{-1} - j^{-1})x_j = 0, \quad (\forall j \in \mathbb{N})$$

这同样得出 $N(T_i^2) = \mathbb{C}e_i$. 因此 $\mathbb{C}e_i$ 就是 T 关于 i^{-1} 的根子空间(依定理 5.2.2(iii)). \square

5.66 设 $Tx = (x_{i+1}/i)$, $x = (x_i) \in l^2$, 则有 $T \in \text{CL}(l^2)$; 求 $\mathcal{A}(T)$.

提示: 由题 5.51 得 $T \in \text{CL}(l^2)$; $Tx = \lambda x \Rightarrow x_{i+1} = i \lambda x_i (i \geq 1)$, $\mathcal{A}(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$.

5.67 设 $Tx = (\alpha_i x_i)$, $x = (x_i) \in l^2$, $\{\alpha_i\} = [0, 1]$, 则 $T \in L(l^2) \setminus \text{CL}(l^2)$.

提示: $\mathcal{A}(T) = [0, 1]$.

5.68 给定 $x_0 \in X$, $f \in X^*$, $f(x_0) = 1$, 定义 $Tx = f(x)x_0 (x \in X)$, 则 $T \in \text{CL}(X)$, $1 \in \mathcal{A}(T)$, 求 $N(T_1^k)$, $T_1 = I - T$.

解 因 $R(T) = \mathbb{C}x_0$, 故 $T \in \text{CL}(X)$. 由 $Tx_0 = f(x_0)x_0 = x_0$ 得出 $1 \in \mathcal{A}(T)$. 由

$$x \in N(T_1) \Leftrightarrow f(x)x_0 = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{C}x_0$$

得 $N(T_1) = \mathbb{C}x_0$. $\forall x \in X$, 有

$$\begin{aligned} T_1^2 x &= T_1(T_1 x) = T_1(x - f(x)x_0) \\ &= T_1 x - f(x)T_1 x_0 = T_1 x, \end{aligned}$$

因此 $N(T_1^2) = N(T_1)$. 然后用定理 5.2.2(iii) 推出 $N(T_1^k) = N(T_1) = \mathbb{C}x_0 (\forall k \geq 1)$. \square

5.69 设 $T \in \text{CL}(X)$, $f(\lambda)$ 在某个圆 $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ 内解析, $f(0) = 0$, $\mathcal{A}(T) \subset D$, 则 $f(T) \in \text{CL}(X)$.

证 由 $f(0) = 0$ 知 $f(\lambda) = \lambda g(\lambda)$, $g(\lambda)$ 在 D 内解析, 因此 $f(T), g(T) \in L(X)$ 有意义. 由 $f(T) = Tg(T)$ 及定理 5.2.1(ii) 知 $f(T) \in \text{CL}(X)$. \square

5.70 研究积分方程 $f(x) = \lambda \int_0^1 e^{x-y} f(y) dy + g(x)$, 其中 $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ 与 $g \in C(J)$ 是给定的, $J = [0, 1]$.

解 令 $Tf(x) = \int_0^1 e^{x-y} f(y) dy (f \in C(J))$, 则 $T \in \text{CL}(C(J))$

(参看题 5.59).

(i) 求 $\mathcal{A}(T)$. 解齐次方程

$$\tau f(x) = \int_0^1 e^{x-y} f(y) dy \quad (f \in \mathcal{A}(J)). \quad (*)$$

因方程右端 $= e^x \int_0^1 e^{-y} f(y) dy$, 故方程的解 $f(x)$ 必有形状: $f(x) = \alpha e^x$. α 是待定系数. 以这个形式代入方程(*), 得到 $\tau \alpha e^x = \alpha e^x$. 因此, 仅当 $\tau = 1$ 时方程有非零解. 故 $\mathcal{A}(T) = \{0, 1\}$.

(ii) 若 $\lambda \neq 1$, 则 $\lambda^{-1} \in \mathcal{A}(T)$, 因此原方程有唯一连续解, 且其解为

$$f(x) = (I - \lambda T)^{-1} g(x).$$

若 $\lambda = 1$, 则原方程可化为

$$f(x) = \alpha e^x + g(x), \alpha = \int_0^1 e^{-y} f(y) dy.$$

以 $f(x)$ 的表达式代入上行的积分, 消去 α 得

$$\int_0^1 e^{-y} g(y) dy = 0.$$

因此, 当 $g \in \mathcal{A}(J)$ 满足以上条件时, 对任何 α , $f(x) = \alpha e^x + g(x)$ 是原方程的解. \square

一般地, 可用上面的方法研究积分方程

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + g(x),$$

其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 与 $g \in \mathcal{A}(J)$ 是给定的, $J = [a, b]$, $K \in \mathcal{A}(J \times J)$. 设 T 定义如 § 4.1(3), 则当 $\lambda^{-1} \notin \mathcal{A}(T)$ 时方程有唯一解

$$f = (I - \lambda T)^{-1} g.$$

§ 5.3 Hilbert 空间中线性算子

一、定理与定义

在上节中我们指出, 考虑特殊的算子与特殊的空间, 是深化谱理论

的两条重要途径. 实际上, 加强对空间的假设效果更加明显. 你想必还记得, 线性代数中关于对称矩阵、二次型、正交变换的那部分内容, 具有特别深刻的结论, 它们区别于线性代数其他部分的关键, 在于 Euclid 空间结构的应用. 这种空间结构的无限维推广, 正是泛函分析中的 Hilbert 空间. 那么, 在 Hilbert 空间中能否建立起无限维的二次型、正交变换等理论呢? 你很快就要看到, 所有这一切竟然在很大的程度上得到了实现. 这可能是你从泛函分析所看到的最精彩的结果.

设 H 是给定的复 Hilbert 空间. 如已知道的, $L(H)$ 是一个算子代数. 前两节的所有内容, 当然适用于更特殊的算子代数 $L(H)$. 现在我们关心的是空间结构的加强给 $L(H)$ 带来了哪些新东西? 我们将看到, 新增加的内容惊人地庞大. 但从源头上说, 一切都是从一种简单的新运算加入引起的, 这种运算就是取相伴的运算, 它与“复共轭”及矩阵的“共轭转置”是十分相似的.

定义 5.3.1 任给 $T \in L(H)$, 由恒等式

$$Tx, y = x, T^*y \quad (x, y \in H) \quad (1)$$

唯一地决定一个 $T^* \in L(H)$, 称它为 T 的相伴算子.

对于理解相伴算子, 以下两个事实是最值得注意的:

(i) 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则 A 看作从 \mathbb{C}^n 到 \mathbb{C}^n 的线性算子(仍记作 A)时, 其相伴算子就是 \bar{A}^T , 即 A 的共轭转置矩阵. 因此可以说, 相伴算子是共轭转置矩阵概念的无限维推广. 若取 $n = 1$, 则 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 退化为一个复数, 而 \bar{A}^T 就是共轭复数 \bar{A} . 因此, 又可以说相伴概念的最初原型就是共轭复数概念. 我们将看到, 无论是共轭转置或共轭复数, 其主要特征都将被相伴算子所继承.

(ii) 定义相伴算子的恒等式(1)与刻画对偶算子的恒等式 § 4.3 (1) 是高度类似的. 实际上, 在一定的解释下, 相伴算子可以看作 T 的对偶算子. 这就毫不足怪, 相伴算子也将继承对偶算子的某些性质, 这一点很快就可以看出来.

从运算的角度考虑, 可以将“ $*$ ”看作从 $L(H)$ 到其自身的一个映射:

$$*: L(H) \rightarrow L(H), T \rightarrow T^*. \quad (2)$$

Hilbert 空间中的线性算子理论的特殊面貌,可以说完全决定于映射 (2) 的特殊性质,这些性质综合在以下定理中(参照定理 4.3.5).

定理 5.3.1 设 $T, S \in L(H)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 则成立以下等式:

$$\begin{aligned} (\alpha T + \beta S)^* &= \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*; \\ (TS)^* &= S^* T^*; (T^n)^* = (T^*)^n; \\ (T^{-1})^* &= (T^*)^{-1}; \text{ (若 } T \text{ 可逆)} \\ T^{**} &= T; \\ \|T^*\| &= \|T\|; \\ \|T\|^2 &= \|TT^*\| = \|T^*T\|. \end{aligned} \quad (3)$$

相伴算子概念的基本性,首先体现在以下定义中:几类常用的算子都是通过相伴算子来界定的.

定义 5.3.2 设 $T \in L(H)$. 若 $TT^* = T^*T$, 则称 T 为正规算子;若 $T = T^*$, 则称 T 为自伴算子;若 $T^* = T^{-1}$, 则称 T 为 U 算子;若 $T = T^* = T^2$, 则称 T 为正投影算子.

要获得对这些概念的直观印象,你首先可注意到:对于 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, A 是正规算子、自伴算子与 U 算子,分别对应它是线性代数中的正规矩阵、Hermite 对称矩阵与 U 矩阵(实的 Hermite 对称矩阵就是对称矩阵,实的 U 矩阵就是正交矩阵).再特殊到 $n = 1$ 得到:自伴算子与 U 算子的最初原型是实数与么模复数($\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$).这些背景都是很有启发性的.

仅从定义 5.3.2 几乎看不出上述几类算子在变换空间时的几何特征,这一问题由以下定理解决.

定理 5.3.2 设 $T \in L(H)$, 则以下结论成立

- (i) T 是正规算子 $\Leftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|$ ($\forall x \in H$).
- (ii) T 是自伴算子 $\Leftrightarrow Tx, x \in \mathbb{R}$ ($\forall x \in H$).
- (iii) T 是 U 算子 $\Leftrightarrow T: H \rightarrow H$ 是等距同构.

(iv) T 是正投影算子 \Leftrightarrow 存在正交分解 $H = A \oplus A^\perp$, A 是 H 的闭子空间, T 是从 H 到 A 的投影算子(这意味着 $\forall x \in H, Tx$ 是 A 中点对 x 的最佳逼近),通常记这样的 T 为 P_A .

以上四类算子的谱都有明显的特征,这由以下定理给出.

定理 5.3.3 设 $T \in L(H)$.

(i) 若 T 是正规算子, 则 $r_\sigma(T) = \|T\|$.

(ii) 若 T 是自伴算子, 则 $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$.

(iii) 若 T 是 U 算子, 则 $\forall \lambda \in \sigma(T)$, 有 $|\lambda| = 1$.

(iv) 若 T 是正投影算子, 则 $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$; $\sigma(T) = \{0\} \Leftrightarrow T = 0$; $\sigma(T) = \{1\} \Leftrightarrow T = I$; $T \neq 0, I \Leftrightarrow \sigma(T) = \{0, 1\}$.

你注意到, 上述定理中不少结论在线性代数中是熟知的. 例如, 对称矩阵的特征值为实数, 正交矩阵的特征值有绝对值 1, 这些都已包含在定理 5.3.3 中. 能够在一个完全不依赖于矩阵的抽象空间中重现矩阵理论的结果, 这件事已很不平凡了.

不过, 你所期望的还远远不只这些. 线性代数的真正骄人成就是完全给出了对称矩阵、正交矩阵等的标准形. 在 Hilbert 空间中能解决类似的问题吗? 下面以自伴算子为例, 解释一下目前面临的问题与解决问题的思路. 我们知道, 一个对称矩阵总可以化为对角标准形. 这就意味着, 有限维空间中的自伴算子相对于一组特殊的标准正交基的矩阵为实对角形, 设为 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. 若以 P_i 记 $\text{diag}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, 1 是第 i 个元, 则 $P_i = P_i^2 = P_i^T$, 可见 P_i 恰好相当于正投影算子, 而

$$A = \sum_i \lambda_i P_i. \quad (4)$$

换成算子的说法就是: 有限维空间中的自伴算子是正投影算子的线性组合, 其系数正是该算子的谱值. 这样的分解式称为谱分解. 这就提出一个问题: 在一般情况下, 自伴算子 $T \in L(H)$ 是否亦有一个谱分解, 即能否表为正投影算子的线性组合(可能是无限和)? 如果 T 的谱不是离散的, 能否用某个积分来代替形如(4)的和式? 这就明确了目标: 建立关于自伴算子的谱分解定理. 这一问题终于获得了解决, 但解决过程包含了一系列数量可观的概念与结果, 下面给出一个最简略的概括.

以下设 $T \in L(H)$ 是给定的自伴算子. 如在线性代数中一样, 结合 T 考虑它所决定的“二次型” Tx, x (通常称为二次泛函), 它是 H

上的实泛函(依定理 5.3.2(ii)). 首先指出, Tx, x 与 $\alpha(T)$ 密切相关.

定理 5.3.4 设 $T \in L(H)$ 是自伴算子,

$$m = \inf_{\|x\|=1} Tx, x, \quad M = \sup_{\|x\|=1} Tx, x, \quad (5)$$

则 $[m, M]$ 是包含 $\alpha(T)$ 的最小区间, 且

$$\|T\| = |m| \vee |M| = \sup_{\|x\|=1} |Tx, x|. \quad (6)$$

式(5)中的 m, M 正相当于对称矩阵的最小与最大特征值. 如果 $m \geq 0$, 则 T 就与正半定的对称矩阵相当, 因此规定以下概念: 对于自伴算子 $T \in L(H)$, 若 $Tx, x \geq 0 (\forall x \in H)$, 即 $m \geq 0$, 则称 T 为正算子, 记作 $T \geq 0$. 若 $T, S \in L(H)$ 是自伴算子, $T - S \geq 0$, 则约定 $T \geq S$ 或 $S \leq T$. 这样, 就在自伴算子之集(它构成 $L(H)$ 的一个实闭子空间, 可类比于 \mathbb{C} 中的实轴)中引入了一个序 \leq , 这个序十分类似于实数的大小顺序, 今将有关的性质汇集于下.

定理 5.3.5 设 $T, T_n, S, S_n \in L(H) (n \in \mathbb{N})$ 是自伴算子. 则以下结论成立:

(i) \leq 是一个线性的半序, 即 $T \leq T; T \leq T_1 \leq T_2 \Rightarrow T \leq T_2; T \leq S \leq T \Rightarrow T = S; T \leq S \Rightarrow \alpha T \leq \alpha S (\forall \alpha \geq 0); T_i \leq S_i (i = 1, 2) \Rightarrow T_1 + T_2 \leq S_1 + S_2$.

(ii) 若 $T_n \leq S_n (\forall n \in \mathbb{N})$, $\{T_n\}$ 与 $\{S_n\}$ 分别强收敛于 T 与 S , 则 $T \leq S$.

(iii) 若 $T_1 \leq T_2, S \geq 0, S$ 与 T_1, T_2 可换, 则 $T_1 S \leq T_2 S$.

(iv) 若 $T_n \leq T_{n+1} \leq S (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $\{T_n\}$ 强收敛于某个自伴算子 T , 且 $T \leq S$; 若 $T_n \geq T_{n+1} \geq S (\forall n \in \mathbb{N})$, 则 $\{T_n\}$ 强收敛于某个自伴算子 T , 且 $T \geq S$.

(v) 若 $\alpha > 0$, 则 $-\alpha I \leq T \leq \alpha I \Leftrightarrow \alpha(T) \subset [-\alpha, \alpha] \Rightarrow \|T\| \leq \alpha; T \leq T_n \leq S \Rightarrow \sup_n \|T_n\| < \infty$ (即序有界 \Rightarrow 范数有界).

(vi) 若 $T \geq 0$, 则 $|Tx, y|^2 \leq Tx, x \cdot Ty, y (x, y \in H)$.

(vii) 正平方根: 若 $T \geq 0$, 则存在唯一正算子 $A \in L(H)$, 使得 $A^2 = T$; 如上的 A 记作 $T^{1/2}$. 若 $B \in L(H), TB = BT$, 则 $T^{1/2}B =$

$BT^{1/2}$.

以上这组性质似乎很庞杂,令人应接不暇.但你稍加审察之后就会有一个总的印象:其中大多数结论无非是关于实数系的那些熟知结论的推广.明确了这一点,你就不会觉得它们有什么难以理解与把握,甚至无需花太多功夫去逐条记忆.

以上的概念与结论特别适用于正投影算子(下面简称为投影算子或投影,注意投影算子是自伴算子).下面综述有关投影算子的主要结论,这将是建立谱分解定理的主要依据.

定理 5.3.6 设 $P, P_1, P_2 \in L(H)$ 是投影算子, $A_i = R(P_i) (i = 1, 2)$, 则以下结论成立:

(i) $0 \leq P \leq I$.

(ii) $P_1 P_2$ 是投影 $\Leftrightarrow P_1 P_2 = P_2 P_1 \Rightarrow R(P_1 P_2) = A_1 \cap A_2$.

(iii) $P_1 + P_2$ 是投影 $\Leftrightarrow P_1 P_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 \perp A_2 \Rightarrow R(P_1 + P_2) = A_1 \oplus A_2$; 当 $P_1 P_2 = 0$ 时说 P_1 与 P_2 正交.

(iv) $P_2 - P_1$ 是投影 $\Leftrightarrow P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1 \Leftrightarrow A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow N(P_1) \supset N(P_2) \Leftrightarrow P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow \|P_1 x\| \leq \|P_2 x\| (\forall x \in H) \Rightarrow R(P_2 - P_1) = A_2 \cap A_1^\perp$.

以上定理给人的突出印象是,投影 P 与闭子空间 $R(P)$ 之间有一种很强的对应关系,通过这一对应,投影之间的一定关系,可转化为它们对应的子空间之间的相应关系.

任给自伴算子 $T \in L(H)$, 约定 $|T| = (T^2)^{1/2}$,

$$T^+ = \frac{1}{2}(|T| + T), \quad T^- = \frac{1}{2}(|T| - T).$$

$|T|, T^+, T^-$ 显然分别相当于通常的绝对值、正部与负部,这一比拟有助于理解下述定理.

定理 5.3.7 对于自伴算子 $T \in L(H)$, 以下结论成立:

(i) $T = T^+ - T^-$, $|T| = T^+ + T^- = |-T|$, $T^- = (-T)^+$.

(ii) $|T| \geq 0, T^+ \geq 0, T^- \geq 0, -T^- \leq T \leq T^+$.

(iii) 若 $T \geq 0$, 则 $T = |T| = T^+, T^- = 0$; 若 $T \leq 0$, 则有 $T = -|T| = -T^-, T^+ = 0$.

(iv) $T^+ T^- = T^- T^+ = 0$.

(v) 若 T 与 $A \in L(H)$ 可换, 则 $|T|, T^+, T^-$ 皆为 A 可换.

(vi) 设 P^+ 与 P^- 分别为 X 到 $N(T^+)$ 与 $N(T^-)$ 的正投影, 则

$$T^+ P^+ = P^+ T^+ = T^- P^- = P^- T^- = 0;$$

$$T^- P^+ = P^+ T^- = T^-, T^+ P^- = P^- T^+ = T^+;$$

$$TP^+ = P^+ T = -T^-, TP^- = P^- T = T^+.$$

若 T 与自伴算子 $S \in L(H)$ 可换, 则 P^+, P^- 皆与 S 可换.

若将 T 换成通常的实函数 f , 则上面的大多数结论是熟知的.

在交待了上面这一连串数量大得惊人的结论之后, 终于就要接近我们的主要目标了. 与你已学过的大多数泛函分析定理不同, 下面这个中心定理有一个较长的表述.

定理 5.3.8 (自伴算子的谱分解定理) 设 $T \in L(H)$ 是自伴算子, $T_\lambda = \lambda I - T$, E_λ 是 H 到 $N(T_\lambda^-)$ 上的正投影, m, M 依式 (5), 则 $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbf{R}\}$ 是 $[m, M]$ 上的一个谱族, 这意味着它有以下性质:

(i) 单调性: $\lambda \leq \mu \Rightarrow E_\lambda \leq E_\mu$;

(ii) 右连续性: 若 $\mu \downarrow \lambda$, 则 $E_\mu x \rightarrow E_\lambda x (\forall x \in H)$;

(iii) $\lambda < m \Rightarrow E_\lambda = 0, \lambda \geq M \Rightarrow E_\lambda = I$.

利用谱族 $\{E_\lambda\}$, 得到 T 的积分表示 (即谱分解公式) 如下:

$$T = \int_m^M \lambda dE(\lambda) \quad (E(\lambda) = E_\lambda); \quad (7)$$

$$Tx, y = \int_m^M \lambda d \langle E_\lambda x, y \rangle \quad (x, y \in H), \quad (8)$$

其中积分是区间 $[a, M]$ ($a < m$ 是任取的) 上的通常意义的 RS 积分 (参考 § 2.3) (7) 中的积分依算子范数收敛.

这样, 如我们所预期的, 自伴算子表成了投影算子的 (无限) 线性组合. 无论积分 (7) 是积累了多少前期工作的最终结果, 本质上, 它仍然是极简单的有限维结果 (4) 的推广. 如果说, 积分表示有不够直观的缺点的话, 那么, 可以指望在特殊情况下用级数来取代积分. 下面的定理表明, 对于紧自伴算子就是如此.

定理 5.3.9 设 $T \in L(H)$ 是紧自伴算子, $\{\lambda_n\}$ 是其非零谱值,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

P_n 是从 X 到 $N(\lambda_n I - T)$ 上的正投影, 则

$$T = \sum_n \lambda_n P_n; \quad (9)$$

$$Tx \cdot x = \sum_n \lambda_n \|x_n\|^2, \quad x_n = P_n x. \quad (10)$$

至此, 你好象经历了一番长途跋涉, 终于到达了一处目的地. 无论前面还有多少胜景奇观, 你都该缓一口气了. 现今对于大学生的泛函分析课程, 至多也就走到这一步, 甚至在远离这一步的某个地方, 就收兵回营了. 这并没有什么不妥. 你在大学几年中所积累的数学知识还不算多. 象泛函分析这样具有高度综合性的理论课程, 若只在纯粹的逻辑构架中往前推进, 而没有与之相当的实际应用领域与之结合, 是难以产生明显效果的. 在你还没有感到十分厌倦的时候结束本课程的学习, 看来是最妥当的. 随着你进入这门课程的终点, 一直在为你的学习提供帮助与建议的本书, 也就理所当然地接近尾声了. 不过, 在结束之前, 我们不免还得考察一些问题. 与本节内容相关的问题很多, 有趣的问题也不少, 我们仅挑选那些较简易的问题以供练习.

首先, 我们分别考虑正规算子、自伴算子、 U 算子及投影算子的问题.

二、问题与方法

A. 正规算子

在本节考虑的几类算子中, 正规算子最为一般, 它包括了自伴算子、 U 算子与正投影算子. 正因为它过于一般, 关于它的结论也就最少, 大概你现在还很难说清楚正规算子到底是什么样子. 你能举一个自伴算子、 U 算子以外的正规算子的例子吗? 无论如何, 我们还是可以列举出正规算子 $T \in L(H)$ 的一连串性质:

$$(i) TT^* = T^* T;$$

$$(ii) \|Tx\| = \|T^*x\|, \quad Tx, Ty = T^*x, T^*y \quad (x, y \in H);$$

$$(iii) r_\sigma(T) = \|T\|, \quad \mathcal{K}(T) = \{0\} \Leftrightarrow T = 0.$$

利用这些性质, 就可以解决一些问题了.

5.71 设 $S \in L(H)$ 是正规算子, $TS^* = S^*T, T^*S = ST^*$, 则 $T + S$ 与 TS 都是正规算子; 当 T 可逆时 T^{-1} 亦是正规算子.

5.72 设 $T \in L(X), \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = |\beta| = 1$, 则 $\alpha T + \beta T^*$ 是正规算子.

是否为正规算子的问题, 当然要依定义检验, 而这是平凡的.

5.73 设 $A, B, T \in L(X), A, B$ 是 U 算子, A, B, T 三者互相可换, 则 $S = AT + BT^*$ 是正规算子.

证 只要证 $SS^* = S^*S$, 这又相当于证等式:

$$\begin{aligned} & ATT^*A^* + B(T^*)^2A^* + AT^2B^* + BT^*TB^* \\ &= TT^* + T^*A^*BT^* + TB^*AT + T^*T. \end{aligned}$$

为此只要等式两端各项依次相等, 而这要用到以下交换性:

$$AT = TA, T^*A^* = A^*T^*, BT^* = T^*B, A^*B = BA^*.$$

而这些都可以从 A, B, T 的互换性及 $A^* = A^{-1}, B^* = B^{-1}$ 推出. 例如, $BT^* = T^*B$ 之证明如下:

$$\begin{aligned} BT^* &= B^{**}T^* = (TB^*)^* \\ &= (TB^{-1})^* = (B^{-1}T)^* = T^*B, \end{aligned}$$

其中用到 $BT = TB \Rightarrow TB^{-1} = B^{-1}T$. □

5.74 若 $T \in L(H)$ 是正规算子, 则 $\|T^n\| = \|T\|^n$.

证 关键是用式(3):

$$\begin{aligned} \|T\|^4 &= \|T\|^2 \|T^*\|^2 = \|T^*T\| \|TT^*\| \\ &= \|T^*T\|^2 = \|(T^*T)(T^*T)\| \\ &= \|T^2(T^*)^2\| = \|T^2\|^2, \end{aligned}$$

这得出 $\|T^2\| = \|T\|^2$. 归纳地有 $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$, 设 $n \leq 2^k$, 则

$$\begin{aligned} \|T\|^n &= \|T\|^{n-2^k} \|T^{2^k}\| \\ &\leq \|T\|^{n-2^k} \|T^{2^k}\| \\ &= \|T^{2^k}\| \leq \|T\|^n, \end{aligned}$$

这得出所要证. □

5.75 设 $T \in L(H)$ 是正规算子, 则 $r_\sigma(T) = \|T\|$.

提示:用上题与谱半径公式.

5.76 设 $T \in L(H)$ 是正规算子, $\exists \beta > 0, \forall x \in H$, 有 $\|Tx\| \geq \beta \|x\|$, 则 T 可逆.

证 所给条件推出: $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$, 因而 $N(T) = \{0\}$; 再用定理 5.3.2(i) 得 $N(T^*) = \{0\}$. 若 $Tx_n \rightarrow y \in H$, 则由 $\|x_m - x_n\| \leq \beta^{-1} \|Tx_m - Tx_n\|$ 知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 设 $x_n \rightarrow x$, 则必 $y = Tx \in R(T)$, 可见 $R(T)$ 是闭的. 于是 $R(T) = N(T^*)^\perp = \{0\}^\perp = H$ (用定理 4.3.6(i), 为什么可用?) 故 T 可逆. \square

5.77 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, 则 A 是正规矩阵 $\Leftrightarrow A = A^T$ 或 $a = d, b = -c$.

提示: 讨论 $AA^T = A^TA$ 成立之条件.

B. 自伴算子

自伴算子是本节关注的重点, 对于它, 你的感觉可能远胜于难以捉摸的正规算子. 首先, 你头脑中大概已有一个牢固的印象, 即自伴算子是类似于对称矩阵的东西. 这一印象确实不坏, 尽管在无限维 Hilbert 空间中, 自伴算子可能与对称矩阵在形式上很少有什么相近之处. 现在将自伴算子 $T \in L(H)$ 的性质汇集如下:

(i) $T = T^*$, 即 $Tx, y = x, Ty$ ($\forall x, y \in H$).

(ii) $Tx, x \in \mathbf{R}$, 即二次型 Tx, x 是实泛函.

(iii) $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$, 且 (依 (5))

$$\min_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda = \inf_{\|x\|=1} Tx, x, \max_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda = \sup_{\|x\|=1} Tx, x.$$

(iv) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |Tx, x|$ (依 (6)).

灵活地运用上述性质, 就能推出许多进一步的结论.

5.78 设 \mathcal{S} 与 \mathcal{A} 分别为 $L(H)$ 中自伴算子与反自伴算子 (即满足 $T^* = -T$ 的算子) 之全体, 则二者皆为 $L(H)$ 的实的闭子空间, 且 $L(H) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

证 验证 \mathcal{S} 与 \mathcal{A} 是 $L(H)$ 的实子空间是平凡的. 任给 $T \in L(H)$. 若有分解 $T = A + B$, 使得 $A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{A}$, 则联立

$$A + B = T \quad \text{与} \quad A - B = T^*$$

唯一地解出

$$A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2}.$$

反之,若依上式定义 A, B , 则必 $A^* = A, B^* = -B, T = A + B$. 这就表明每个 $T \in L(H)$ 有唯一分解 $T = A + B, A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{A}$. 因此 $L(H) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. 余下只要说明 \mathcal{S} (类似地 \mathcal{A}) 在 $L(H)$ 中依算子范数收敛是闭的. 设 $\{T_n\} \subset \mathcal{S}, T \in L(H), \|T_n - T\| \rightarrow 0$, 则

$$\|T_n - T^*\| = \|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

可见 $T = T^* \in \mathcal{S}$, 即 \mathcal{S} 是闭的. □

必须强调 \mathcal{S} 仅是 $L(H)$ 的实子空间, 因对一般的 $\alpha \in \mathbb{C}, T \in \mathcal{S}$, 有 $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^* = \bar{\alpha} T$, 它不一定等于 αT , 因而未必 $\alpha T \in \mathcal{S}$.

5.79 每个 $T \in L(H)$ 有唯一分解 $T = A + iB, A, B$ 是自伴算子.

提示: 参考上题.

注意分解 $T = A + iB$ 突出地显示了自伴算子在 $L(H)$ 中的地位, 恰如实数在 \mathbb{C} 中的地位. 这一类比初看起来似有过份简单化之嫌, 但并不乏启发性, 即使在一些很深层次的问题上都有借鉴作用.

5.80 任给 $T \in L(H), T^* T$ 与 TT^* 是自伴算子.

5.81 若 $T, S \in L(H)$ 是自伴算子且可换, 则 TS 是自伴算子.

5.82 若 $T \in L(H)$ 是可逆的自伴算子, 则 T^{-1} 是自伴算子.

以上结论的验证都是平凡的.

5.83 设 $T = A + iB \in L(H), A, B$ 是自伴算子. 则 TT^* 是正规算子 $\Leftrightarrow AB = BA$; T 是自伴算子 $\Leftrightarrow B = 0$; T 是 U 算子 $\Leftrightarrow AB = BA$ 且 $A^2 + B^2 = I$.

提示: 直接用定义 5.3.2 验证.

对于复数 $\lambda = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$, 显然 $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0; \bar{\lambda} = \lambda^{-1} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$. 题 5.83 不过是在算子层次上重建了这些结论.

5.84 设 $A \in L(H)$ 是自伴算子, 则 $T = e^{iA}$ 是 U 算子.

证 利用算子指数函数的级数表示(参考 § 5.1):

$$\begin{aligned}
T^* &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iA)^n}{n!} \right]^* \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(iA)^*]^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iA)^n}{n!} = e^{-iA} = T^{-1},
\end{aligned}$$

可见 T 是 U 算子. □

以上证明中用到公式: $(\sum T_n)^* = \sum T_n^*$; 而这又相当于

$$(\lim_n S_n)^* = \lim_n S_n^*,$$

只要依算子范数收敛 $\lim_n S_n$ 存在; 后者由以下等式推出(参考(3)):

$$\|S_n^* - S^*\| = \|S_n - S\|.$$

5.85 设 $T \in L(H)$ 是自伴算子, $S \in L(H)$, $TS = I$, 则 T 可逆.

提示: 注意 $S^*T = I$.

5.86 设 $T \in L(H)$ 是自伴算子, 则 $I + iT$ 可逆.

证 只要说明 $0 \notin \sigma(I + iT)$. 由定理 § 5.1(8)有

$$\sigma(I + iT) = \{1 + ib : b \in \sigma(T)\},$$

而 $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$ (定理 5.3.3(ii)), 绝不可能有 $1 + ib = 0$ ($b \in \sigma(T)$), 故得所要证. □

对于题 5.86 中的 T , 能用展开式

$$(I + iT)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-iT)^n$$

吗(参考 § 5.1(2))?

5.87 设 $f(\lambda)$ 是 \mathbf{C} 上的解析函数, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$; $T \in L(H)$ 是自伴算子, $0 \neq \alpha \in \mathbf{R}$, 则 $\alpha iI + f(T)$ 可逆.

提示: 参照上题.

5.88 设 $T \in L(H)$ 是自伴算子, 则 $N(T) = R(T)^\perp$.

证 关键在于充分利用恒等式

$$Tx, y = x, Ty \quad (x, y \in H)$$

所包含的信息. 令 $Tx = 0$ 得 $x \perp T_y (\forall y \in H)$, 可见 $N(T) \subset R(T)^\perp$; 令 $x, Ty = 0$ 得 $Tx, y = 0$, 即 $x \in R(T)^\perp \Rightarrow Tx \perp y (\forall y \in H)$, 从而 $Tx = 0$, 这得 $R(T)^\perp \subset N(T)$. \square

以上所给为直接证明. 也可以利用定理 4.3.6(i), 对任给 $T \in L(H)$ (不必是自伴算子), 有

$$\begin{aligned} N(T) &= R(T^*)^\perp, N(T^*) = R(T)^\perp; \\ N(T^*)^\perp &= \overline{R(T)}, N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}, \end{aligned}$$

其中用到自对偶性: $H = H^*$, 因而不必区分 A^\perp 与 ${}^\perp A$. 在其中令 $T = T^*$, 立得 $N(T) = R(T)^\perp$.

5.89 设 $T \in L(H)$ 是自伴算子, 则 $N(T)^\perp = \overline{R(T)}$.

提示: $\overline{R(T)} \subset N(T)^\perp$ 是明显的; 为证 $N(T)^\perp \subset \overline{R(T)}$, 可用正交分解定理: $H = \overline{R(T)} \oplus N(T) = N(T)^\perp \oplus N(T)$. 当然所证结论已包含在定理 4.3.6(i) 中, 但最好直接证明.

5.90 设 $T \in L(H)$ 是自伴算子, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im} \lambda \neq 0$, 则 $\|T_\lambda^{-1}\| \leq 1/|\text{Im} \lambda|$.

证 设 $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. 因

$$\mathcal{A}(T_\lambda) = a + ib - \mathcal{A}(T)$$

必不含零, 故 T_λ 可逆. 因 T_λ 与 T_λ^{-1} 都为正规算子, 故

$$\begin{aligned} \|T_\lambda^{-1}\| &= r_\sigma(T_\lambda^{-1}) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}(T_\lambda)} |\mu|^{-1} \\ &= \sup\{ |a + ib - \tau|^{-1} : \tau \in \mathcal{A}(T) \} \\ &\leq |b|^{-1} = |\text{Im} \lambda|^{-1}. \end{aligned} \quad \square$$

此外, 亦可利用 $\|T_\lambda x\|^2 = \|T_\alpha x\|^2 + b^2 \|x\|^2 \geq b^2 \|x\|^2$, 你试证之. 不过, 用正规算子的公式 $r_\sigma(T) = \|T\|$ 更好, 这是一个无需技巧的普遍方法, 应尽可能使用.

5.91 设 T 如题 5.86, 求 $\|(I + iT)^{-1}\|$.

提示: 参照上题, $\|(I + iT)^{-1}\| = (1 + \inf_{\lambda \in \mathcal{A}(T)} \lambda^2)^{1/2}$.

5.92 设 $T \in L(H)$, 则 $T^* = -T \Leftrightarrow \text{Re } Tx, x = 0 (\forall x \in H)$.

提示: $T^* = -T \Leftrightarrow (iT)^* = iT$, 用定理 5.3.2(ii).

5.93 设 $T^* = -T \in L(H)$, 则 $\sigma(T) \subset i\mathbb{R}$.

提示: 参照上题.

5.94 设 $T \in L(H)$ 是自伴算子, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu$, 则 $N(T_\lambda) \perp N(T_\mu)$.

证 要证结论意味着: 自伴算子关于不同特征值的特征子空间互相正交. 在线性代数中已有类似的结论, 实际上可沿用线性代数中的证法: 任取 $x \in N(T_\lambda), y \in N(T_\mu)$, 则

$$Tx = \lambda x, \quad Ty = \mu y,$$

于是

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) x, y &= \lambda x, y - x, \mu y \\ &= Tx, y - x, Ty = 0, \end{aligned}$$

因而 $x, y = 0$, 即如所要证. □

上题中假定 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 是不必要的. 如果 λ 不是实数, 则必 $\lambda \in \sigma(T)$, 因而 $N(T_\lambda) = \{0\}$, 此时 $N(T_\lambda) \perp N(T_\mu)$ 自动成立.

5.95 设 $T \in L(H)$ 是紧自伴算子, $H \neq \{0\}$, 则 $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

提示: $\sigma_p(T) = \emptyset \Rightarrow T = 0$.

5.96 设 $T \in L(H)$ 是紧自伴算子, A 是 H 的非零闭子空间, $TA \subset A$, 则 T 有特征向量 $x \in A$.

证 将 T 限制在 A 上, 仍是一个紧自伴算子. 于是由上题有 $\lambda \in \mathbb{R}, 0 \neq x \in A$, 使得 $Tx = \lambda x$, x 就是 T 在 A 中的特征向量.

5.97 设 $Tx = (\alpha_i x_i), \{\alpha_i\} \subset \mathbb{R}$ 有界, $x = (x_i) \in l^2$, 则 $T = T^* \in L(l^2), \{\alpha_i\} \subset \sigma_p(T)$.

证 已知 $T \in L(l^2)$ (参看题 4.17). 设 $\{e_i\}$ 是 l^2 的标准基, 则 $Te_i = \alpha_i e_i$, 故 $\{\alpha_i\} \subset \sigma_p(T)$. 余下说明 T 的自伴性. $\forall x = (x_i) \in l^2, y = (y_i) \in l^2$, 等式 $Tx, y = x, Ty$ 相当于

$$\sum (\alpha_i x_i) \bar{y}_i = \sum x_i \overline{(\alpha_i y_i)},$$

因 $\{\alpha_i\} \subset \mathbb{R}$, 故以上等式必成立. □

5.98 任给区间 $[m, M] \subset \mathbb{R}$, 必有自伴算子 T , 使得 $\sigma(T) = [m, M]$.

提示 参考上题.

5.99 设 $Tf(x) = xf(x)$, $f \in L^2(J)$, $J = [0, 1]$, 则 $T = T^* \in L(L^2(J))$, 求 $\sigma(T)$ 与 $\sigma_p(T)$.

解 已知 $T \in L(L^2(J))$ (参看题 4.23); 自伴性的验证类似于题 5.97. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f \in L^2(J)$, 有

$$(\lambda - x)f(x) = 0 \text{ a.e.} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ a.e.},$$

可见 $\lambda \notin \sigma_p(T)$, 故 $\sigma_p(T) = \emptyset$. 为求 $\sigma(T)$, 如在 § 5.1 中所作的, 考虑方程

$$(\lambda I - T)f(x) = (\lambda - x)f(x) = g(x) \quad (*)$$

的可解性, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 与 $g \in L^2(J)$ 是给定的. 若 $\lambda \in [0, 1]$, 则

$$f(x) = \frac{1}{\lambda - x}g(x) \triangleq Ag(x)$$

是方程 (*) 的唯一解, 且显然 $A \in L(L^2(J))$, 因而 $A = (\lambda I - T)^{-1}$, 于是 $\lambda \notin \sigma(T)$. 另一方面, 若 $\lambda \in [0, 1]$, 则取 $g(x) \equiv 1$ 时由 (*) 解出的 $f(x) = (\lambda - x)^{-1} \notin L^2(J)$, 因而 $(\lambda I - T)f = 1$ 在 $L^2(J)$ 中无解, 这表明 $\lambda \in \sigma(T)$. 因此 $\sigma(T) = [0, 1]$. \square

C. 投影算子

投影算子 (此处指正投影算子, 下同) 是自伴算子, 因此具有自伴算子的所有性质. 但投影算子比一般自伴算子要特殊得多, 其特殊性都源于等式 $T^2 = T$ (幂等性). 即使在任意 Banach 空间 X 中, 只要 $T \in L(X)$ 满足 $T^2 = T$, T 就是从 X 到某个闭子空间 $A \subset X$ 的投影. 但只有在 Hilbert 空间中才有正投影概念. 若 $P \in L(H)$ 是投影算子, 则可以认为 Px 是从 x 向子空间 $A = R(P)$ 所引垂线的垂足. 保持这种直观理解, 对于投影算子就有一定的印象了.

5.100 $P \in L(H)$ 是正投影 $\Leftrightarrow Px, x = \|Px\|^2 (\forall x \in H)$.

证 若 P 是正投影, 则 $\forall x \in H$, 有

$$Px, x = P^2x, x = Px, Px = \|Px\|^2.$$

反之, 设 $Px, x = \|Px\|^2 (\forall x \in H)$, 则

$$Px, x = P^*Px, x,$$

这推出 $P = P^*P$, 于是 $P^* = (P^*P)^* = P^*P = P$; $P = P^*P =$

P^2 , 因此 P 是正投影. □

以上证明中用了—个结论: 若 $T \in L(H)$, 则

$$Tx \perp x \iff (\forall x \in H) \rightarrow T = 0,$$

这是一个普遍有效的命题.

5.101 $P \in L(H)$ 是正投影, $x \in H$, 则 $Px = x \iff \|Px\| = \|x\|$.

提示: 注意 $Px \perp (x - Px)$, 用勾股定理.

5.102 $P \in L(H)$ 是正投影, $T \in L(H)$, $A = R(P)$, 则 $PT = TP \iff TA \subset A$ 且 $TA^\perp \subset A^\perp$.

证 若 $TP = PT$, 则

$$TA = TPH = PTH \subset A;$$

$$TA^\perp = T(I - P)H = (I - P)TH \subset A^\perp,$$

其中用了 $A^\perp = R(I - P)$, 这由 $H = A \oplus A^\perp$ 推出. 反之, 若 $TA \subset A$, $TA^\perp \subset A^\perp$, $\forall x \in H$, 设 $x = a + b$, $a \in A$, $b \in A^\perp$, 则

$$PTx = PTa + PTb = PTa = Ta = TPx,$$

可见 $PT = TP$. □

5.103 $P \in L(H)$ 是正投影 $\iff P^2 = P$ 且 P 是正规算子.

证 设 $P^2 = P$ 且 $PP^* = P^*P$, 今证 $P = P^*$ (从而 P 为正投影). 为此只要证 $A = P - P^* = 0$. 因 A 是正规算子, 故只要证 $\sigma(A) = \{0\}$. 由 $A^* = -A$ 得 $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$ (依题 5.93). 实际计算得出

$$A^{2n} = (P - P^*)^{2n} = P + P^* - 2PP^* = A^2.$$

若 $\lambda = i\alpha \in \sigma(A)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), 则从 $\lambda^{2n} = \lambda^2$ 推出

$$(-1)^{n-1} \alpha^{2n} = \alpha^2,$$

这推出 $\alpha = 0$, 因此 $\sigma(A) = \{0\}$, 如所要证. □

5.104 设 $P_i \in L(H)$ ($i \in \mathbb{N}$) 是互相正交的正投影, $Q_n = \sum_1^n P_i$, 则 Q_n 是正投影, 且强收敛于某个正投影 Q .

提示: 用定理 5.3.6 (iii) 与 5.3.5 (iv).

D. 其他问题

5.105 设 $T \in L(H)$, 则 $N(I + T^*T) = \{0\}$.

证 若 $(I + T^* T)x = 0$, 则

$$0 = \langle x + T^* Tx, x \rangle = \|x\|^2 + \|Tx\|^2,$$

这得出 $x = 0$, 即得所要证. \square

实际上 $I + T^* T$ 是自伴算子, $T^* T \geq 0$, 你可循此思路给出另外一个证明.

5.106 设 $T \in L(H)$, $\|T\| \leq 1$, 则 $N(I - T) = N(I - T^*)$.

证 只要证 $N(I - T) \subset N(I - T^*)$ (何故?). 设 $x \in N(I - T)$, 则

$$\begin{aligned} \|x - T^* x\|^2 &= \|x\|^2 - \langle x, T^* x \rangle - \langle T^* x, x \rangle + \|T^* x\|^2 \\ &= \|T^* x\|^2 - \|x\|^2 \quad (\text{用 } Tx = x) \\ &\leq \|T\|^2 \|x\|^2 - \|x\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

这得 $\|x - T^* x\| = 0$, 即 $x = T^* x$. \square

5.107 设 $T \in L(H)$, $\|Tx\| \geq \alpha \|x\| \quad (\forall x \in H)$, $\alpha > 0$, 则 T 可逆.

证 要证 T 是单射与满射.

(i) T 单射. $\forall x \in H$, 若 $Tx = 0$, 则由 $\alpha \|x\| \leq \|Tx\|$ 推出 $x = 0$.

(ii) T 是满射, 即 $R(T) = H$. 由 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ 可推出 $\|Tx\| \geq \alpha \|x\| \quad (\forall x \in H)$. 若 $\{Tx_n\}$ 是 Cauchy 列, 则 $\{x_n\}$ 亦为 Cauchy 列, 因此 $x_n \rightarrow x$, $Tx_n \rightarrow Tx \in R(T)$, 可见 $R(T)$ 是闭的. 若 $R(T) \neq H$, 则有 $0 \neq y \in R(T)^\perp$, 这推出

$$0 = \langle Ty, y \rangle \geq \alpha \|y\|^2 > 0,$$

得出矛盾. \square

5.108 设线性算子 $T: H \rightarrow H$ 满足 $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$, 则 $T \in L(H)$ 是自伴算子.

证 只要证 T 有界, 为此用闭图象定理. 设 $x_n \rightarrow x$, $Tx_n \rightarrow y$, 则 $\forall z \in H$, 有

$$\begin{aligned} \langle Tx, z \rangle &= \langle x, Tz \rangle = \lim_n \langle x_n, Tz \rangle \\ &= \lim_n \langle Tx_n, z \rangle = \langle y, z \rangle, \end{aligned}$$

这得出 $Tx = y$, 因此 $T \in L(H)$. \square

5.109 设 $T = T^* \in L(H)$, $\mathcal{A}(T) \subset (0, \infty)$, 则 $(x, y)_1 \triangleq (Tx, y)$ 是 H 上的内积, $A \in L(H)$ 关于内积 $(x, y)_1$ 是自伴算子 $\Leftrightarrow TA = A^* T$.

证 $(x, y)_1$ 显然满足内积公理(I_1)(I_2) (参看定义 3.3.1). 若 $(x, x)_1 = (Tx, x) = 0$, 则必 $x = 0$, 否则可设 $\|x\| = 1$, 这将得出

$$\min_{\lambda \in \mathcal{A}(T)} \lambda = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x) \leq 0, \quad (\text{用(5)})$$

这与 $\mathcal{A}(T) \subset (0, \infty)$ 相矛盾. 因此 $(\cdot, \cdot)_1$ 是内积. 由题 5.108, A 依内积 $(\cdot, \cdot)_1$ 是自伴算子相当于

$$(Ax, y)_1 = (x, Ay)_1 \quad (\forall x, y \in H),$$

即

$$(TAx, y) = (Tx, Ay) = (A^*Tx, y) \quad (\forall x, y \in H),$$

这等价于 $TA = A^* T$, 如所要证. □

5.110 设 $0 \leq T \in L(H)$, 则

$$|(Tx, y)|^2 \leq (Tx, x)(Ty, y) \quad (\forall x, y \in H).$$

证 取定 $x, y \in H, \forall \alpha \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq T(x - \alpha y, x - \alpha y) \\ &= (Tx, x) - \alpha (Ty, x) - \bar{\alpha} (Tx, y) + |\alpha|^2 (Ty, y) \\ &= (Tx, x) - \alpha \overline{(Tx, y)} - \bar{\alpha} (Tx, y) + |\alpha|^2 (Ty, y). \end{aligned}$$

取 $\alpha = (Tx, y) / (Ty, y)$ 代入即得所要证. 若 $(Ty, y) = 0$, 但 $(Tx, x) > 0$, 则交换 x, y 的地位, 依同样的方法可得所要证. 若 $(Tx, x) = (Ty, y) = 0$, 则有

$$\alpha \overline{(Tx, y)} + \bar{\alpha} (Tx, y) \leq 0,$$

令 $\alpha = (Tx, y)$ 得 $2|(Tx, y)| \leq 0$, 可见要证不等式亦成立. □

参考书目

- [1] Halmos P R. 测度论. 王建华译. 北京 : 科学出版社 ,1958
- [2] Hатаиcон H H. 实变函数论. 徐瑞云译. 北京 : 高等教育出版社 , 1958
- [3] Rudin W. Real and Complex Analysis. New York : McGraw-Hill ,1974
- [4] 安托涅维奇等. 泛函分析习题集. 赵根榕译. 北京 : 人民教育出版社 , 1981
- [5] 郑强. 实变函数论的定理与习题集. 李荣冻等译. 北京 : 高等教育出版社 ,1981
- [6] Gelbaum B. Problems in Analysis. Berlin : Springer-Verlag ,1982
- [7] Kirillov A A , Gvishiani A D. Theorems and Problems in Functional Analysis. New York : Springer-Verlag ,1982
- [8] 捷利亚柯夫斯基. 实变函数论习题集. 周晓中等译. 长春 : 吉林人民出版社 ,1982
- [9] Folland G B. Real Analysis , Modern Techniques and their Applications. New York : John Wiley & Sons ,1984
- [10] 周民强. 实变函数. 北京 : 北京大学出版社 ,1985
- [11] Kreyszig E. 泛函分析引论及应用. 张石生等译. 重庆 : 重庆出版社 , 1986
- [12] 夏道行等. 实变函数论与泛函分析. 第 2 版. 北京 : 高等教育出版社 ,1987
- [13] 张恭庆 , 林源渠. 泛函分析讲义 上册. 北京 : 北京大学出版社 ,1987
- [14] 郑维行 , 王声望. 实变函数与泛函分析概要. 第 2 版. 北京 : 高等教育出版社 ,1989
- [15] Hewitt E , Stromberg K R. 实分析与抽象分析. 孙广润译. 天津 : 天津大学出版社 ,1994
- [16] 胡适耕. 实变函数. 北京 : 高等教育出版社 , 施普林格出版社 ,1999
- [17] 胡适耕. 泛函分析. 北京 : 高等教育出版社 , 施普林格出版社 ,2001