华南理工大学 2008-2009 学年第一学期“解析几何”期末考试 A

参考解析

一、简答题（共 32 分）

（1）求直线 $l:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 与平面 $\pi:2x+y-z-3=0$ 的交点坐标.

解：直线的坐标式参数方程为： $\begin{cases}x=-t\\y=1+t\\z=1+2t\end{cases}$ 。设交点处对应的参数为 t_0，则有：

$2(-t_0)+(1+t_0)-(1+2t_0)-3=0$，解得 $t_0=-1$，故所求为 $(1,0,-1)$.

（2）求二次曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 的平行于 x 轴的切线方程.

解：设切点坐标为 (x_0,y_0)，则在此处的切线方程为： $x_0x+\dfrac{y_0}{2}x+\dfrac{x_0}{2}y+y_0y-3=0$.由条件，

这条切线的方向向量 $u=(1,0)$，则有方程组： $\begin{cases}x_0+\dfrac{1}{2}y_0=0\\x_0^2+x_0y_0+y_0^2=3\end{cases}$ ，解得： $\begin{cases}x_0=1\\y_0=-2\end{cases},\begin{cases}x_0=-1\\y_0=2\end{cases}$.

从而得所求切线方程为： $y=\pm2.$

（3）求母线 $\Gamma:\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转产生的旋转曲面方程.

解：设 $M(x,y,z)$ 为旋转面上一点， $M_0(0,y_0,z_0),2z_0=y_0^2$ 为母线上一点，则有：

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=y_0^2+z_0^2\\z=z_0=\dfrac{y_0^2}{2}\end{cases}$ ，得： $x^2+y^2=2z$.

（4）求二次曲线 $x^2-2xy+y^2-1=0$ 的渐近方向与其类型.

解：由二次部分 $\Phi(m,n)=0$ 解得渐进方向为 $(-1,1)$，为抛物型曲线.

（5）设平面仿射坐标系 I 到 II 的点的坐标变换公式为 $\begin{cases}x=-y'+1\\y=x'-3\end{cases}$， 求直线

$l_1:2x-3y+5=0$ 在坐标系 II 中的方程与直线 $l_2:x'+3y'-1=0$ 在坐标系 I 中的方程.

解：直接代入得所求为 $3x'+2y'-16=0$ 和 $3x-y-5=0$.

（6）在右手直角坐标系中,设向量α，β的坐标分别为(5,−2,1), (4,0,6),求$\alpha\times\beta$的坐标.

解：$\alpha\times\beta=(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 5\\ 6 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix})=(-12,-26,8)$.

（7）假设直线$\begin{cases}x=1+kt\\ y=k+t\end{cases}$与二次曲线$x^2+3y^2-4xy-y=0$交于一点，求$k$的值.

解：令二次部分$\Phi(k,1)=k^2-4k+3=0$，得$k=1$或$k=3$.

$k=1$时,$F_1(x_0,y_0)k+F_2(x_0,y_0)=-1+\dfrac{1}{2}\neq 0$；

$k=3$时,$F_1(x_0,y_0)k+F_2(x_0,y_0)=-15+\dfrac{13}{2}\neq 0$.

故k=1,3 满足条件.

（8）求通过平面$4x-y+3z-1=0$和$x+5y-z+2=0$的交线且经过原点的平面方程.

解：由条件知，可设所求的平面为：$4x-y+3z-1+k(x+5y-z+2)=0$.

由其过原点知：$-1+2k=0$，$k=\dfrac{1}{2}$.

故有$2(4x-y+3z-1)+x+5y-z+2=0$，即为$9x+3y+5z=0$.

二、（共 10 分）用向量法证明三角形的余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

证明：设为α,β,γ三边对应的向量，则$\alpha=\beta-\gamma$，故有：

$\alpha^2=(\beta-\gamma)^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\cdot\gamma=\beta^2+\gamma^2-2|\beta||\gamma|\cos A$

此即$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

三、（共 10 分）给定两异面直线：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$与$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{1}$，求它们的公垂线方程.

解：由于$(2,1,0)\times(1,0,1)=(1,-2,-1)$，故公垂线方程为：$\begin{cases}\begin{vmatrix}x-3 & y & z-1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}x+1 & y-2 & z\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=0\end{cases}$.

即为：$\begin{cases}x-2y+5z-8=0\\ x+y-z-1=0\end{cases}$.

四、（共 14 分）证明双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z(a\neq b)$ 上的任意两条直母线正交时，其交点必在一双曲线上.

证明：由于双曲抛物面上同族的直母线不能相交，故可设两相交的直母线方程为：

$\begin{cases} t(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})=z \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2t \end{cases}$ 与 $\begin{cases} s(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=z \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2s \end{cases}$，方向向量分别为 $u=(a,-b,2t), v=(a,b,2s)$.

因两直线正交，所以：$a^2-b^2+4st=0,即st=\frac{b^2-a^2}{4}$

而两直母线的交点坐标为：$\begin{cases} x=a(t+s) \\ y=b(t-s) \\ z=2st \end{cases}$，故有：$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=b^2-a^2 \\ z=\frac{b^2-a^2}{2} \end{cases}$ 为双曲线.

五、（共 10 分） 用转轴和移轴的方法把二次曲线 $32x^2+52xy-7y^2-40x+80y-280=0$ 的方程化简成最简形式.

解：先用移轴变换 $\begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'+2 \end{cases}$，可得原方程化为：$32x'^2+52x'y'-7y'^2-180=0$；

再用转轴变换 $\begin{cases} x'=\frac{2}{\sqrt{5}}x''-\frac{1}{\sqrt{5}}y'' \\ y'=\frac{1}{\sqrt{5}}x''+\frac{2}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$，可得原方程化为：$\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{9}=1$（双曲线）.

六、（共 10 分）设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是 l 与 m 的公垂线的中点，A,B 两点分别在直线 l，m 上滑动，且 $\angle ACB=90°$，试证直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

证明：以 l，m 的公垂线作为 z 轴，C 作为坐标原点，再令 x 轴与 l，m 的夹角均为 α，公垂线的长为 $2c$，若设 $k=\tan\alpha\neq 1$，知可写出 A，B 的坐标分别为：

$A(a,-ka,c), B(b,kb,-c)$，由 $AC\perp CB$ 知 $ab-k^2ab-c^2=0$.

又设 $M(x,y,z)$ 为 AB 上任一点，则有：$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y+kb}{k(b+a)}=\frac{z-c}{-2c}$.

消去 a 和 b，有：$k^2(1-k^2)x^2-(1-k^2)y^2+k^2z^2=k^2c^2(k\neq 1)$.

即 $\frac{x^2}{\frac{c^2}{1-k^2}}-\frac{y^2}{\frac{k^2c^2}{1-k^2}}+\frac{z^2}{c^2}=1$，为单叶双曲面.

七、（共 14 分）求与两直线$\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$与$\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-21}$都相交，且与平面$2x+3y-5=0$平行的直线的轨迹.

解：设动直线与已知直线分别交于$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$，

则有：$\frac{x_1-6}{3}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1-1}{1}$ 和 $\frac{x_2}{3}=\frac{y_2-8}{2}=\frac{z_2+4}{-21}$.

又动直线与平面$2x+3y-5=0$平行，所以，$2(x_1-x_2)+3(y_1-y_2)=0$.

对动直线上任一点(x, y, z)，有：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

由上面几式消去$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$，便得到：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=4z$。