浙江大学 2006-2007 学年 秋 季学期

《常微分方程》课程期末考试试卷参考答案

一、求下述一阶方程的通解或特解（写出求解过程， 40 分）

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2-1}{2}, y(0)=0;$

解：方程的通积分为

$$\int \frac{2\mathrm{d}y}{y^2-1}=\int \mathrm{d}x,$$

即

$$\ln|\frac{y-1}{y+1}|=x+C_1,$$

因此

$$\frac{y-1}{y+1}=Ce^x, (C\neq 0).$$

解出通解为

$$y=\frac{1+Ce^x}{1-Ce^x}.$$

由于 $y(0)=0$, 代入即得 $C=-1$. 因此定解问题有解为 $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=2xe^{-x}+x^2;$

解：通解为 $y=Ce^{-x}+x^2e^{-x}+x^2-2x+2.$

3. $(y\ln x-2)y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0;$

解：方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{\ln x}{x}y^2$; (伯努利方程)

可令 $z=\frac{1}{y}, (y\neq 0)$, 则有

$$z'-\frac{2}{x}z=-\frac{\ln x}{x}.$$

通积分为

$$\frac{z}{x^2}=-\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}$$

从而可得原方程的通积分为

$$\frac{1}{y} = Cx^2 + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}, \text{以及} y = 0.$$

4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{-y}x^3 + \dfrac{2}{x}$;

解：令 $z = e^y$, 所以有 $z' = e^y y'$. 因此原方程变形为

$$z' - \frac{2}{x}z = x^3.$$

方程等价于

$$(\frac{z}{x^2})' = x.$$

上述方程的通解为

$$z = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4$$

从而得到原方程的通积分为 $e^y = Cx^2 + \dfrac{1}{2}x^4$.

5. $\mathrm{d}x = (2xy - x^4y^2)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$.

解：方程变形为

$$(1 + x^4y^2)\mathrm{d}x = 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2y).$$

即得

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1 + x^4y^2}\mathrm{d}(x^2y).$$

方程的通积分为

$$\arctan(x^2y) = x + C.$$

二、求下述方程的通解或特解（写出求解过程， 40 分）

1. $2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 0$;

解：特征方程为 $2\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$. 特征根为 $\lambda = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}i$.

因此方程的通解为

$$y = C_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{5}}{2}x) + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{5}}{2}x)$$

2. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=\sin^2(x+\dfrac{1}{2});$

解：令 $t=x+\frac{1}{2}$, 则原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=\sin^2 t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t.$$

齐次方程的通解为

$$Y(t)=C_1\cos t+C_2\sin t.$$

非齐次方程的特解为 $y_0(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cos 2t$. 因此原方程的通解为

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cos(2x+1).$$

3. $y\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2,\quad y(0)=y'(0)=1.$

解：令 $z=y^2$, 则原定解问题变形为

$$z''-z'-2z=0,\quad z(0)=1,z'(0)=2y(0)y'(0)=2.$$

该方程的通解为 $z=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$. 根据定解条件可以确定 $C_1=1,C_2=0$. 因此原问题的解为 $y=e^x$.

4. $(x^2-1)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=(x^2-1)^2.$

解：齐次方程有两个线性无关的解 $y_1(x)=x,y_2(x)=x^2+1$. 因此设非齐次方程的特解为 $y_0(x)=u_1(x)x+u_2(x)(x^2+1)$, 则

$$\begin{cases} u_1'(x)x & + & u_2'(x)(x^2+1) & =0 \\ u_1'(x) & + & u_2'(x)(2x) & =x^2-1 \end{cases}$$

推出 $u_1'(x)=-(x^2+1)$, $u_2'(x)=x$. 因此有特解 $y_0(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^2$. 从而可得通解为

$$y(x)=C_1x+C_2(x^2+1)+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^2.$$

三、 1. 求一阶微分方程组的通解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & -4x-2y+\dfrac{2}{e^t-1} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & 6x+3y-\dfrac{3}{e^t-1} \end{cases}$$

解：（１）×３+（２）×２，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3x+2y)=0.$$

得到

$$3x+2y=C_1. \tag{1}$$

（１）×２+（２），得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2x+y)=-2x-y+\frac{1}{e^t-1}.$$

得到

$$2x+y=C_2e^{-t}+e^{-t}\ln(e^t-1). \tag{2}$$

联立 (1)(2), 即得

$$\begin{aligned} x &= -C_1+2C_2e^{-t}+2e^{-t}\ln(e^t-1) \\ y &= 2C_1-3C_2e^{-t}-3e^{-t}\ln(e^t-1). \end{aligned}$$

2. 求微分方程组的通解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x+\dfrac{2}{3}y-\dfrac{2}{3}z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3}z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{3}y+\dfrac{4}{3}z \end{cases}$$

解：特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^3=0$$

所以 $\lambda=1$ 为三重特征根。又

$$(A-E)^3=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此推出三个线性无关的向量：

$$V_0^{(1)} = (1,0,0)^T, V_0^{(2)} = (0,1,0)^T, V_0^{(3)} = (0,0,1)^T$$

根据 $(A-E)V_0 = V_1, (A-E)V_1 = V_2$, 得到

$$V_1^{(1)} = (0,0,0)^T, V_1^{(2)} = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})^T, V_1^{(3)} = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$$

$$V_2^{(1)} = (0,0,0)^T, V_2^{(2)} = (0,0,0)^T, V_2^{(3)} = (0,0,0)^T$$

再根据 $X(t) = e^t(V_0 + \frac{t}{1!}V_1 + \frac{t^2}{2!}V_2)$, 即得

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^t(1,0,0)^T, \\
X_2(t) &= e^t(V_0^{(2)} + tV_1^2) = e^t(\frac{2}{3}t, 1-\frac{1}{3}t, -\frac{1}{3}t)^T \\
X_3(t) &= e^t(V_0^{(3)} + tV_1^3) = e^t(-\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t, 1+\frac{1}{3}t)^T
\end{aligned}$$

由此原方程组的通解为

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + C_3X_3(t)$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^t \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ 1-\frac{1}{3}t \\ -\frac{1}{3}t \end{pmatrix} + C_3e^t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3}t \\ 1+\frac{1}{3}t \end{pmatrix}$$

也即

$$\begin{cases}
x &= e^t(C_1 + 2tC_2 - 2tC_3) = e^t[C_1 - 2C_4t] \\
y &= e^t(C_2(3-t) + C_3t) = e^t[C_5 + C_4t] \\
z &= e^t(C_2(-t) + C_3(3+t)) = e^t[C_5 + C_4(3+t)]
\end{cases}$$