每日一题（5）

2019.03.24

1. 在区间 $(0,\pi)$ 上定义函数 $D_n(x)=\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 计算积分 $\displaystyle\int_0^\pi D_n(x)\mathrm{d}x$. (提示: 有恒等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^n\cos kx=\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}$)

2. 证明：对任意的实数 a 成立恒等式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}\equiv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^a x}\equiv\frac{\pi}{4}$$

1. 解: 函数 $D_n(x)$ 在 $x=0$ 处无定义, 但是容易证明在 $x=0$ 处 $D_n(x)$ 的极限为 $\dfrac{2n+1}{2}$, 故在 $[0,\pi]$ 上 $D_n(x)$ 可积, 于是:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi D_n(x)\mathrm{d}x&=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^n\int_0^\pi\cos kx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. 证明: 作代换 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$, 于是

$$\frac{1}{1+\tan^a\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)}=\frac{1}{1+\cot^a t}=\frac{\tan^a t}{1+\tan^a t}=1-\frac{1}{1+\tan^a t}.$$

可见函数 $\dfrac{1}{1+\tan^a x}-\dfrac{1}{2}$ 关于区间中点 $\dfrac{\pi}{4}$ 是奇函数, 故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\tan^a x}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$