第三章　函数极限

§1　函数极限概念

1. 按定义证明下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6$　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-6x+10)=2$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1$　　(4) $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$

证　(1) 当 $x>0$ 时，$\left|\dfrac{6x+5}{x}-6\right|=\dfrac{5}{x}$ 于是对任给正数 ε，只要取 $M=\dfrac{5}{\varepsilon}$，当 $x>M$ 时，有 $\left|\dfrac{6x+5}{x}-6\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6$

(2) 当 $0<|x-2|<1$ 时，有 $|(x^2-6x+10)-2|$

$=|x-2|\cdot|x-4|\leqslant|x-2|(|x-2|+2)<3|x-2|$，

对任给正数 ε，只要取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{3}\}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有 $|(x^2-6x+10)-2|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-6x+10)=2$

(3) 当 $x>2$ 时，$\left|\dfrac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|=\dfrac{4}{|x-1||x+1|}<\dfrac{4}{x}$ 对任给正数 ε，只要取 $M=\max\{2,\dfrac{4}{\varepsilon}\}$，当 $x>M$ 时，便有 $\left|\dfrac{x^2-5}{x^2-1}-1\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5}{x^2-1}=1$.

(4) 由 $|\sqrt{4-x^2}|=\sqrt{(2+x)(2-x)}$　$x\in[-2,2]$

$\leqslant 2\sqrt{|x-2|}<\varepsilon$　得 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon^2}{4}$

对任意 $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta=\frac{\varepsilon^2}{4}$　只要 $|x-2|<\frac{\varepsilon^2}{4}$ 就有

$|\sqrt{4-x^2}|<\varepsilon$　所以 $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0$

(5) 因为 $|\cos x-\cos x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|$ 从而对任给正数 ε,只要取 $\delta=\varepsilon$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时就有

$|\cos x-\cos x_0|<\varepsilon$.

2. 根据定义 2 叙述 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$

解　设函数 f 在 x_0 的某空心领域 $U^\circ(x_0,\delta')$ 内有定义,A 是一个确定的常数,若存在某个正数 ε,使得对任意的正数 δ,总存在 x',满足 $0<|x'-x_0|<\delta$,且 $|f(x')-A|\geqslant\varepsilon$,则称当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 不以 A 为极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,证明 $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=A$

证:$\because$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

$\therefore$ 则对任给正数 ε,存在正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

从而当 $0<|h|<\delta$ 时有 $0<|(x_0+h)-x_0|<\delta$,于是 $|f(x_0+h)-A|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=A$

反之,设 $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=A$,则任给正数 ε,存在正数 δ,当 $0<|h|<\delta$ 时,有 $|f(x_0+h)-A|<\varepsilon$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$h=x-x_0$ 满足 $0<|h|<\delta$,从而 $|f(x)-A|=|f(x_0+h)-A|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

4. 证明:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$,其逆命题成立吗?当且仅当 A 为何值时反之也成立?

证:由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则对任给正数 ε,存在正数 δ,

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有:$|f(x)-A|<\varepsilon$

因此,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$||f(x)|-|A||\leqslant|f(x)-A|<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$

但逆命题不真.如对 $f(x)=\begin{cases}-1,x>0\\0,x=0,\\1,x<0\end{cases}$,有 $|f(x)|=\begin{cases}1 & x\neq0\\0 & x=0\end{cases}$ 且

$\lim\limits_{x\to0}|f(x)|=1$,但 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.事实上

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-1\qquad\lim_{x\to0^-}f(x)=1$$

可见 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

当且仅当,$A=0$ 时,反之成立.

5. 证明定理 3.1

定理 3.1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

证:必要性 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 则对任给正数 ε,存在正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.因此,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

充分性 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,则对任给正数 ε,分别存在正数 δ_1 和 δ_2,使的当 $0<x-x_0<\delta_1$ 或 $0<x_0-x<\delta_2$ 时,都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon\tag{1}$$

现取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$0<x-x_0\leqslant|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_1$$

或 $\quad 0<x_0-x\leqslant|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2$

因而由(1)知 $|f(x)-A|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

6. 讨论下列函数在 $x\to0$ 时的极限或左、右极限.

(1) $f(x)=\frac{|x|}{x}$;(2) $f(x)=[x]$

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x & x>0\\ 0 & x=0\\ 1+x^2 & x<0\end{cases}$

解　(1) 当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{|x|}{x}=1$ 故 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$

当 $x<0$ 时,$f(x)=\frac{|x|}{x}=-1$ 故 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$

因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

(2) 当 $1>x>0$ 时,$f(x)=[x]=0$ 故 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

当 $-1<x<0$ 时,$f(x)=[x]=-1$ 故 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$,

因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在 .

(3) 当 $x>0$ 时 $f(x)=2^x$故 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2^x=1$

当 $x<0$ 时,$f(x)=1+x^2$故 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+x^2)=1$

因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

7. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,证明 $\lim\limits_{x\to0^+}f(\frac{1}{x})=A$

证明:设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(\frac{1}{x})=B$,下证 $A=B$,对任给正数 ε,存在 $M>0,\delta>0$,使 $x>M$ 时有 $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$　　(1)

当 $0<x<\delta$ 时,就有 $|f(\frac{1}{x})-B|<\frac{\varepsilon}{2}$　　(2)

令 $\eta=\min\{\delta,\frac{1}{M}\}$,则当 $0<x<\eta$ 时,$\frac{1}{x}>M$,

从而由(1)知 $|f(\frac{1}{x})-A|<\frac{\varepsilon}{2}$　　(3)

于是当 $0<x<\eta$ 时,由(2)和(3)知

$$|A-B|\leqslant|A-f(\frac{1}{x})|+|f(\frac{1}{x})-B|<\varepsilon$$

可见 $|A-B| \leqslant \varepsilon$，由于 ε 的任意性可知

$$\lim_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = A = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

8. 证明：对黎曼函数 $R(x)$ 有 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0, x_0 \in [0,1]$（当 $x_0 = 0$ 或 1 时，考虑单侧极限）

证：$[0,1]$ 上的黎曼函数定义如下

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{当 } x = \dfrac{p}{q} \text{ 时}\left(p, q \in N_+, \dfrac{p}{q} \text{ 为既约真分数}\right) \\ 0 & \text{当 } x = 0, 1 \text{ 或}(0,1) \text{ 内的无理数} \end{cases}$$

任取 $x_0 \in [0,1]$，对任意给定的正数 ε，满足不等式 $n \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ 的自然数 n 至多有有限个，于是在 $[0,1]$ 中至多有有限个既约分数 $\dfrac{p}{q}$，使得 $R\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{q} \geqslant \varepsilon$，因而我们可取 $\delta > 0$，使得 x_0 的空心邻域 $U^\circ(x_0, \delta)$ 内不含这样的既约分数，于是只要 $0 < |x - x_0| < \delta$（对 $x_0 = 0$，只要 $0 < x < \delta$，对 $x_0 = 1$，只要 $0 < 1 - x < \delta$），不论 x 是否为无理数，有 $|R(x)| < \varepsilon$，故　$\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0, x_0 \in [0,1]$

§2　函数极限的性质

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 2(\sin x - \cos x - x^2)$　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

(3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$　　(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x-1)^3 + (1-3x)}{x^2 + 2x^3}$

(5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$（$n, m$ 为正整数）　　(6) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{a^2 + x} - a}{x}$（$a > 0$）　　(8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$

解　(1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 2(\sin x - \cos x - x^2) = 2\left(1 - \dfrac{\pi^2}{4}\right)$

(2) 原式 $= \lim_{x\to0}\frac{0-1}{0-0-1} = 1$

(3) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{(x-1)^3+(1-3x)}{x^2+2x^3} = \lim_{x\to0}\frac{x-3}{1+2x} = -3$

(5) $\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1} = \frac{n}{m}$

(6) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}$

(7) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{a^2+x}+a} = \frac{1}{2a}$

(8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(3+\frac{6}{x})^{70}(8-\frac{5}{x})^{20}}{(5-\frac{1}{x})^{90}} = \frac{3^{70}\cdot8^{20}}{5^{90}}$$

2. 利用迫敛性求极限

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\cos x}{x}$　　(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-4}$

解　(1) $\because -1\leqslant\cos x\leqslant1$　　$\therefore x-1\leqslant x-\cos x\leqslant x+1$

$\therefore 1+\frac{1}{x}\leqslant\frac{x-\cos x}{x}\leqslant1-\frac{1}{x}$

$\because \lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x}) = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x}) = 1$

由迫敛性定理，$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\cos x}{x} = 1$

(2) $\because -1\leqslant\sin x\leqslant1$　　$\therefore -x\leqslant x\sin x\leqslant x$

$\because x\to+\infty$　　故 $x^2-4>0$

$\therefore -\frac{x}{x^2-4}\leqslant\frac{x\sin x}{x^2-4}\leqslant\frac{x}{x^2-4}$

$\because \lim_{x\to+\infty}(-\frac{x}{x^2-4}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4} = 0$

由迫敛性　$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-4}=0$

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$　证明：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot f(x)]=A\cdot B$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$(当 $B\neq 0$ 时)

证明：对任给正数 ε，分别存在正数 δ_1 和 δ_2，使

当 $0<|x-x_0|<\delta_1$，有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$　①

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$，有 $|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$　②

(1) 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时①②同时成立，于是有

$$|(f(x)\pm g(x))-(A\pm B)|\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ 知，存在正数 δ_3，使 $g(x)$ 在 $U^\circ(x_0,\delta_3)$ 上有界，即存在正数 M，对任给 $x\in U^\circ(x_0,\delta_3)$，有 $|g(x)|\leqslant M$　③

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，①、②、③同时成立，

因而 $|f(x)g(x)-AB|=|g(x)(f(x)-A)+A(g(x)-B)|$

$\leqslant|g(x)|\cdot|f(x)-A|+|A|\cdot|g(x)-B|<\dfrac{M+|A|}{2}\varepsilon$

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$

(3) 由题知 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$ 于是 $\lim\limits_{x\to x_0}Bg(x)=B^2>0$ 由局部保号性有，存在 $\delta_4>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_4$ 时，有 $Bg(x)>\dfrac{B^2}{2}$　④

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_4\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时①②④同时成立，

于是有 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right|=\left|\dfrac{Bf(x)-Ag(x)}{Bg(x)}\right|$

$$\leqslant \frac{|B|\cdot|f(x)-A|+|A||g(x)-B|}{Bg(x)} \leqslant \frac{|A|+|B|}{B^2}\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

4. 设 $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$，$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，$m\leqslant n$，试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

解　$\because$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{a_0+a_1x^{-1}+\cdots+a_{m-1}x^{1-m}+a_mx^{-m}}{b_0x^{n-m}+b_1x^{n-m-1}+\cdots+b_{n-1}x^{1-m}+b_nx^{-m}}$

所以，当 $m=n$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{a_0}{b_0}$；当 $m<n$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

于是　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n,\\ 0, & \text{当 } m<n,\end{cases}$

5. 设 $f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$ 其中 $n\geqslant 2$ 为正整数.

证明：$\because$ $f(x)>0$，故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\geqslant 0$

(ⅰ) 当 $A=0$ 时，由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 知，对任给正数 ε，存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)<\varepsilon^n$ 即 $\sqrt[n]{f(x)}<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=0$

(ⅱ) 当 $A>0$ 时，由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 知，对任给正数 ε，存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，便有

$|f(x)-A|<\sqrt[n]{A^{n-1}}\varepsilon$ 从而此时 $|\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{A}|$

$$=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt[n]{f^{n-1}(x)}+\sqrt[n]{Af^{n-2}(x)}+\cdots+\sqrt[n]{A^{n-2}f(x)}+\sqrt[n]{A^{n-1}}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{A^{n-1}}}|f(x)-A|<\varepsilon$$

故$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$

6. 证明$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1(0<a<1)$

证明：$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$ $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,有$0<1-a^{\frac{1}{N}}<\varepsilon$,
由 a^x 是递减的,$\therefore$ 当$0<x<\dfrac{1}{N}$时,有 $a^x>a^{\frac{1}{N}}$

$\therefore 0<1-a^x<1-a^{\frac{1}{N}}<\varepsilon$ 取 $\delta=\dfrac{1}{N}$ 当$0<x<\delta$时就有
$0<|a^x-1|<1-a^x<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to 0^+}a^x=1$

另一方面$\lim\limits_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=1$ 由上述方法,得$\lim\limits_{x\to 0^-}a^x=1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}a^x=1$

7. 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$

(1) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)<g(x)$,问是否必有 $A<B$?为什么?

(2) 证明:若 $A>B$,则在 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$

解 (1) 不一定,如 $g(x)=x^2,f(x)=0$,在 $x_0=0$ 的任一$U^\circ(0,\delta)$ 内,有 $f(x)<g(x)$,但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

(2) $\because\ A>B$ $\therefore\varepsilon_0=\dfrac{A-B}{2}>0$ 又$\because\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,

$\therefore$ 存在正数 δ_1,当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时

有 $|f(x)-A|<\dfrac{A-B}{2}$ $\therefore f(x)>\dfrac{A+B}{2}$ (1)

又$\because\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ 知:对上述 $\varepsilon_0>0$,存在正数 δ_2,
当$0<|x-x_0|<\delta_2$时,有 $|g(x)-B|<\dfrac{A-B}{2}$,

$\therefore\ g(x)<\dfrac{A+B}{2}$ (2)

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,(1)与(2)同时成立,

即有 $f(x) > \frac{A+B}{2} > g(x)$，$\therefore$ 当 $x \in U^0(x_0,\delta)$ 时，$f(x) > g(x)$

8. 求下列极限(其中 n 皆为正整数)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\cdot\frac{1}{1+x^n}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\cdot\frac{1}{1+x^n}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$(提示:参照例 1)

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\cdot\frac{1}{1+x^n} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+x^n} = -1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\cdot\frac{1}{1+x^n} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x^n} = 1$

(3) 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}[x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-2)x^2+(n-1)x+n]$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1} = \frac{1}{n}$$

(5) $\because$ 对任意实数 x，有 $x-1<[x]\leqslant x$，从而当 $x>0$ 时，有 $1-\frac{1}{x}<\frac{1}{x}[x]\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[x]=1$，当 $x<0$ 时，有 $1-\frac{1}{x}>\frac{1}{x}[x]\geqslant 1$，故 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{[x]}{x}=1$，$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$.

9. (1) 证明:若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$ 存在，试问是否成立 $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$?

证:(1) $\because \lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$ 存在，假设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3) = A$

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得当 $0<|x|<\delta^{\frac{1}{3}}<\delta$ 时有 $|f(x^3)-A|<\varepsilon$，令 $t=x^3$ 则 $|t|=|x|^3<\delta$

$\therefore |f(t)-A|<\varepsilon$　$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x) = A = \lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$

(2) 若$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=A$ 成立,但不一定有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$

例如:$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$　$\operatorname{sgn}x^2=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

对 $\operatorname{sgn}x^2$　$\because$ $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x^2=1$　而$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ 不存在,

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不一定等于$\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$

§3　函数极限存在的条件

1. 叙述函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的归结原则,并应用它证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 类型的函数极限的归结原则为:设 $f(x)$ 在某 $U(+\infty)$ 有定义,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的充要条件是:对任何以 $+\infty$ 为极限的且含于 $U(+\infty)$ 的数列$\{x_n\}$,极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x_n)$ 都存在且相等.

设 $x'_n=2n\pi,x''_n=n\pi+\dfrac{\pi}{2},x'_n\to+\infty,x''_n\to+\infty(n\to\infty)$,而 $\cos x'_n=1,\cos x''_n=0(n\to\infty)$,又$\because$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x'_n\neq\lim\limits_{x\to+\infty}x''_n$,$\therefore$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

2. 设 f 为定义在$[a,+\infty)$上的递增(减)函数,证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在的充要条件是 f 在$[a,+\infty)$ 上有上(下)界.

证:必要性　由题设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,记为 A 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,由局部有界性定理可得,存在 $U(+\infty)=(b,+\infty)$ 使 $f(x)$ 在 $U(+\infty)$ 上有界,即存在 M 与 m,对任给 $x\in U(+\infty)$,都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M\qquad(1)$$

又由 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上递增知:对任给 $x\in[a,b]$,有

$$f(x)\leqslant f(b+1)\leqslant M\qquad(2)$$

由(1)(2) 可得,对任一 $x\in[a,+\infty)$,有 $f(x)\leqslant M$,故 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上有上界.

充分性:设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上有上界,则由确界原理可知 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上有上确界,设 $A=\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}f(x)$,则对任给正数 ε,存在 $x_0\in[a,+\infty)$ 又因 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 上递增,从而当 $x>x_0$ 时,有 $A-\varepsilon<f(x_0)\leqslant f(x)<A+\varepsilon$

因此,当 $x>x_0$ 时,$|f(x)-A|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

3.(1) 叙述极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 的柯西准则;

(2) 根据柯西准则叙述 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 不存在的充要条件,并应用它证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在 .

解　(1) 设函数 $f(x)$ 在 $U(-\infty)$ 内有定义,则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是:对任给的正数 ε,总存在某一正数 M,使对任何

$x'<-M,x''<-M$,都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

(2) 设 f 为定义在$(-\infty,a]$上的函数,若存在正数 ε_0,对任给正数 M,总存在 x_1,x_2,尽管 $x_1<-M,x_2<-M$,而 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$. 则称 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 不存在.

以下用此定义证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$,对任给自然数 n,取 $x_1=-n\pi,x_2=-n\pi-\dfrac{\pi}{2}$,于是,

$x_1<-n,x_2<-n$ 而 $|\sin x_1-\sin x_2|=1>\dfrac{1}{2}$,故 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$ 不存在.

4. 设 f 在 $U^\circ(x_0)$ 内有定义. 证明:若对任何数列$\{x_n\}\subset U^\circ(x_0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在,则所有这些极限都相等.

(提示:参见定理 3.11 充分性的证明)

证明:对任何的数列$\{x_n\}\subset U^\circ(x_0,\delta')$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,按假设对任给的 $\varepsilon>0$,总存在正数 $\delta(<\delta')$,使对任何 $x',x''\in U^\circ(x_0,\delta)$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,对上述 $\delta>0$,总存在 $N>0$,当 $n,m>N$ 时有 $x_n,x_m\in U^\circ(x_0,\delta)$ 从而有 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$,于是按数列的柯西收敛准则,数列$\{f(x_n)\}$ 极限存在,记为 A,即

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

设另一数列 $\{y_n\}\in U^\circ(x_0,\delta')$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，则如上面所证 $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$ 存在设为 B. 又证 $B=A$. 为此考虑数列 $\{Z_n\}$: $x_1,y_1,x_2y_2\cdots x_ny_n\cdots$ 易见 $\{Zn\}\subset U^\circ(x_0,\delta')$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=x_0$（见第二章 §1 例 7）故如上面所证，$\{f(Zn)\}$ 也收敛，于是作为 $\{f(Zn)\}$ 的两个子列 $\{f(x_n)\}$ 与 $\{f(y_n)\}$ 必有相同的极限.

5. 设 f 为 $U^\circ(x_0)$ 上的递增函数，证明 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在，且 $f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U^\circ_-(x_0)}f(x)$，$f(x_0+0)=\inf\limits_{x\in U^\circ_+(x_0)}f(x)$.

证明：仅证 $f(x_0-0)$ 的存在性及有关等式.

$\because f$ 为 $U^0(x_0)$ 上的递增函数，则对 $x^*\in U^\circ_+(x_0)$，及任给 $x\in U^\circ_-(x_0)$，有 $f(x)<f(x^*)$，由此可见 f 在 $U^0_-(x_0)$ 上有上确界，记 $A=\sup\limits_{x\in U^0_-(x_0)}f(x)$，于是对任给正数 ε，都存在 $x_1\in U^0_-(x_0)$ 使 $f(x_1)>A-\varepsilon$ 记 $\delta=x_0-x_1>0$，当 $x\in U^0_-(x_0,\delta)$ 时，就有 $x>x_1$，从而由 f 在 $U^0_-(x_0)$ 上递增知

$$A+\varepsilon>f(x)\geqslant f(x_1)>A-\varepsilon$$

可见当 $x\in U^\circ_-(x_0,\delta)$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且 $f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U^\circ_-(x_0)}f(x)$，同理可证 $f(x_0+0)$ 也存在且 $f(x_0+0)=\inf\limits_{x\in U^\circ_+(x_0)}f(x)$

6. 设 $D(x)$ 为狄利克雷函数，$x_0\in R$. 证明：$\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

证　由第一章 §3 知　$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对任何 $\delta>0$，由有理数与实数的稠密性知，在 $U^\circ(x_0,\delta)$ 中必有有理数 x' 和无理数 x''，即 $x'\in U^\circ(x_0,\delta)$，$x''\in U^\circ(x_0,\delta)$，使得 $D(x')=1,D(x'')=0$，于是

$|D(x')-D(x'')|=1>\varepsilon_0$,从而由柯西准则知 $\lim\limits_{x\to x_0}D(x)$ 不存在.

7. 证明:若 f 为周期函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 则 $f(x)\equiv 0$

证明:假设 $f(x)\not\equiv 0$,则存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,使 $f(x_0)\neq 0$

又 $\because f(x)$ 为周期函数,不妨设周期为 $L>0$,记 $a_n=x_0+nL$ 则 $a_n\to+\infty,(n\to+\infty)$ 由作法可知, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(x_0)\neq 0$　　(1)

又 $\because \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,由归结原则知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(a_n)=0$　　(2)

(1)(2) 矛盾,故 $f(x)\equiv 0$

8. 证明定理 3.9

定理 3.9,设函数 f 在点 x_0 的某右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 有定义,则极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 的充要条件是:对任何以 x_0 为极限且含于 $U_+^\circ(x_0)$ 的递减数列 $\{x_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

证:必要性　设 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,则对任给正数 ε,存在正数 δ,当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 设 $\{x_n\}$ 含于 $U^\circ(x_0)$ 且递减趋于 x_0,则对上述正数 δ,存在 N,当 $n>N$ 时,便有 $0<x_n-x_0<\delta$,于是,当 $n>N$ 时,便有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

充分性(反证)　假设 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq A$,则存在某一个正数 ε_0,不论正数 δ 多小,总存在一点 x,尽管 $0<x-x_0<\delta$,但有

$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$,设 $U_+^\circ(x_0)=(x_0,x_0+\delta)$,则对 $\delta_1=\dfrac{\delta}{2}$,存在一点 x_1,使 $0<x_1-x_0<\delta_1$,且 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$

对 $\delta_2=\min\{\dfrac{\delta}{2^2},x_1-x_0\}$,存在 x_2 使 $0<x_2-x_0<\delta_2$

且 $|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0,x_2<x_1$

一般地,对取 $\delta_n=\min\{\dfrac{\delta}{2^n},x_{n-1}-x_0\}$,存在 x_n,使得

$0<x_n-x_0<\delta_n$ 且

$$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0,x_n<x_{n-1}<\cdots<x_2<x_1$$

这样的数列$\{x_n\}$满足

(1) $x_n \in U^{\circ}_{+}(x_0,\delta_n)$，且$x_{n+1} < x_n, n = 1,2,\cdots$

(2) $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0, n = 1,2,\cdots$

由于$x_n \in U_{+}^{\circ}(x_0,\delta_n)$，故有

$$0 < x_n - x_0 < \delta_n \leqslant \frac{\delta}{2^n} \to 0(n \to \infty)$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$可见$x_n$是以$x_0$为极限的递减数列，且含于$U^{\circ}_{+}(x_0)$，但由(2)知$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$，矛盾.

§4　两个重要极限

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{(\sin x)^2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$　　(8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x-a}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{(\sin x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot\frac{x^2}{(\sin x)^2}\cdot x = 0$

(3) 设$x = t + \frac{\pi}{2}$则$x \to \frac{\pi}{2}$时相当于$t \to 0$，于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t} = -1$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\sin\frac{x}{2})^2}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

(6) 令 $\arctan x=y$,则 $x=\tan y$,且 $x\to 0$ 相当于 $y\to 0$,于是

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\tan y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}}=1$

(7) 令 $y=\dfrac{1}{x}$,于是当 $x\to+\infty$ 相当于 $y\to 0^+$,从而

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}=1$$

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2x-\sin^2a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}(\sin x+\sin a)$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\dfrac{x+a}{2}\cdot(\sin x+\sin a)=2\sin a\cos a=\sin 2a$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}(\sqrt{x+1}+1)=8$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\dfrac{(\frac{x}{2})^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot 2=\sqrt{2}$

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{-x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$($a$ 为给定实数)

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{3x+2}{3x-1})^{2x-1}$ (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{\alpha}{x})^{\beta x}$($\alpha,\beta$ 为给定实数)

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}]^{\alpha}=e^{\alpha}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}=e$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}}=e^{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{3x+2}{3x-1})^{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}[(1+\dfrac{3}{3x-1})^{\frac{3x-1}{3}}]^{2}\cdot(\dfrac{3x-1}{3x+2})^{(-\frac{1}{3})}=e^{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{\alpha}{x})^{\beta x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[(1+\dfrac{\alpha}{x})^{\frac{x}{\alpha}}]^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$

3. 证明:$\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{n\to\infty}[\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^{2}}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n}}]\}=1$

证:因为 $\sin2x=2\sin x\cos x=2^{2}\cos x\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}$

$=\cdots=2^{n+1}\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^{2}}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n}}\sin\dfrac{x}{2^{n}}$

故当 $x\neq0$ 时,

$\lim\limits_{n\to\infty}[\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^{2}}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n}}]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin2x}{\sin\dfrac{x}{2^{n}}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x}{2^{n}}}{\sin\dfrac{x}{2^{n}}}\cdot\frac{\sin2x}{2x}=\frac{\sin2x}{2x}$$

因此$\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{n\to\infty}[\cos x\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^{2}}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n}}]\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}=1$

当 $x=0$ 时,结论显然成立.

4. 利用归结原则计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^{2}})^{n}$

解　(1)∵ $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{x}}=0$

∴ 由归结原则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n}=0$

(2) 令 $g(x)=(1+\frac{x+1}{x^2})^{\frac{x^2}{x+1}}(x>0)$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=e$，于是，由保号性知：存在 $m>1$ 使 $x<m$ 时，$1<\frac{e}{2}<g(x)<2e$，从而当 $x>m$ 时有

$$g(x)(\frac{e}{2})^{\frac{1}{[x]+1}}<g(x)^{1+\frac{1}{x}}=g(x)g(x)^{\frac{1}{x}}<g(x)(2e)^{\frac{1}{[x]}},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$ 知：上式两端当 $x\to+\infty$ 时均以 e 为极限，于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)^{1+\frac{1}{x}}=e$

又 ∵$(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n<g(n)^{1+\frac{1}{n}}(n=1,2,\cdots)$ 故由归结原则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n=e$

§5　无穷小量与无穷大量

1. 证明下列各式

(1)$2x-x^2=O(x)(x\to0)$

(2)$x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}})(x\to0^+)$

(3) $\sqrt{1+x}-1=o(1)(x\to0)$

(4)$(1+x)^n=1+nx+o(x)(x\to0)$(n 为正整数)

(5)$2x^3+x^2=O(x^3)(x\to\infty)$

(6)$o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x))(x\to x_0)$

(7)$o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)g_2(x))(x\to x_0)$

证：(1)∵ $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-x^2}{x}=2$　∴$2x-x^2=O(x),(x\to0)$

(2) $\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1, \therefore x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}}),(x\to 0^+)$

(3) $\because \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)=0, \therefore \sqrt{1+x}-1=o(1),(x\to 0)$

(4) $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(1+nx)}{x}=0, \therefore (1+x)^n=1+nx+o(x),(x\to 0)$

(5) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x^2}{x^3}=2, \therefore 2x^3+2x^2=O(x^3),(x\to\infty)$

(6) $\because \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g(x)\pm o(g(x))}{g(x)},=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g(x))}{g(x)}\pm\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g(x))}{g(x)},=0$

$\therefore o(g(x))\pm o(g(x))=o(g(x)),(x\to x_0)$

(7) $\because \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))}{g_1(x)g_2(x)},=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g_1(x))}{g_1(x)}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(g_2(x))}{g_2(x)}=0$

$\therefore o(g_1(x))\cdot o(g_2(x))=o(g_1(x)\cdot g_2(x)),(x\to x_0)$

2. 运用定理 3.12 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$

解 (1) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1 \quad \therefore \arctan\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}(x\to\infty)$

由定理 3.12 知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x-\cos x}=0$

(2) $\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\dfrac{1}{2}x^2}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}=1$

$\therefore \sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to 0), 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to 0)$(由定理 3.12 知) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=1$

3. 证明定理 3.13.

定理 3.13　(ⅰ) 设 f 在 $U^{\circ}(x_0)$ 内有定义且不等于 0，若 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量，则$\frac{1}{f}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量.

(ⅱ) 若 g 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量，则$\frac{1}{g}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

证明：(ⅰ) ∵ f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量　∴ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

从而对任给正数 M，必存在正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| < \frac{1}{M}$　又 ∵ $f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0)$ 内不为 0，

∴ $x \in U^{\circ}(x_0, \delta)$ 时，有 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$，∴ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$

(ⅱ) ∵ $g(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量

∴ 任给正数 ε，必存在正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|g(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$ 故 $\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \varepsilon$，∴ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$

4. 求下列函数所表示曲线的渐近线

(1) $y = \frac{1}{x}$　　(2) $y = \arctan x$　　(3) $y = \frac{3x^3 + 4}{x^2 - 2x}$

解　(1) 令 $f(x) = \frac{1}{x}$ 则 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$　∴ $k = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$　∴ $b = 0$　∴ $y = \frac{1}{x}$ 表示的曲线的渐近线 $y = 0$.

∵ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$　$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$，故垂直渐近线为 $x = 0$(y 轴)

(2) 令 $f(x) = \arctan x$

则 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$　∴ $k = 0$

又 ∵ $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$，∴ $b = \frac{\pi}{2}$

所以 $y = \arctan x$ 的渐近线为 $y = \frac{\pi}{2}$

同理可得当 $x \to -\infty$ 时，$y = \arctan x$ 的渐近线为 $y = -\frac{\pi}{2}$，因而 $y = \arctan$ 的渐近线为 $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

(3) $\because \frac{3x^3+4}{x^2-2x} = \frac{3x^3+4}{x(x-2)}$

故有垂直渐近线 $x = 0$（y 轴）和 $x = 2$，

$\because \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \therefore k = 3$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4+6x^2}{x^2-2x} = 6 \quad \therefore b = 6$

$\therefore$ 渐近线为 $y = 3x + 6$

5. 试确定 α 的值，使下列函数与 x^α 当 $x \to 0$ 时为同阶无穷小量：

(1) $\sin 2x - 2\sin x$　　(2) $\frac{1}{1+x} - (1-x)$

(3) $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}$　(4) $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$

解　(1) 由于当 $x \to 0$ 时

$$\sin 2x - 2\sin x = -4\sin x\sin^2\frac{x}{2} \sim -4x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -x^3$$

从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x - 2\sin x}{x^\alpha} = -\lim\limits_{x\to0} x^{3-\alpha}$，由此可见当 $\alpha = 3$ 时，该极限为 -1，因而当 $\alpha = 3$ 时，$\sin 2x - 2\sin x$ 与 x^α 当 $x \to 0$ 时为同阶无穷小量.

(2) 由于当 $x \to 0$ 时　$\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x} \sim x^2$

从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-(1-x)}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to0} x^{2-\alpha}$，由此可见当 $\alpha = 2$ 时，该极限为 1，因此当 $\alpha = 2$ 时，$\frac{1}{1+x} - (1-x)$ 与 x^α 当 $x \to 0$ 时为同阶无穷小量.

(3) $\because$ 当 $x \to 0$ 时

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\frac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}\sim x$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}x^{1-\alpha}$,

$\therefore$ 当 $\alpha=1$ 时，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 与 x^α 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量.

(4) $\because$ 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[5]{3x^2-4x^3}=x^{\frac{2}{5}}\sqrt{3-4x}\sim\sqrt{3}x^{\frac{2}{5}}$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3}x^{\frac{2}{5}-\alpha}$

$\therefore$ 当 $\alpha=\dfrac{2}{5}$，$\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$ 与 x^α 当 $x\to 0$ 时为同阶无穷小量.

6. 试确定 α 的值，使下列函数与 x^α 当 $x\to\infty$ 时是同阶无穷大量.

(1) $\sqrt{x^2+x^5}$　　(2) $x+x^2(2+\sin x)$

(3) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$

解　(1) $\because$ 当 $x\to\infty$ 时 $\sqrt{x^2+x^5}=x^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+x^{-3}}\sim x^{\frac{5}{2}}$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x^5}}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{5}{2}-\alpha}$，$\therefore$ 当 $\alpha=\dfrac{5}{2}$ 时　$\sqrt{x^2+x^5}$ 与 x^α 当 $x\to\infty$ 时为同阶无穷大量.

(2) $\because$ $x\to\infty$ 时 $x+x^2(2+\sin x)=x^2(x^{-1}+2+\sin x)$ 从而

$$\left|\frac{x+x^2(2+\sin x)}{x^\alpha}\right|=|x^{-1}+2+\sin x||x^{2-\alpha}|$$

$\therefore$ 当 $|x|>1$ 时 $\left|\dfrac{x+x^2(2+\sin x)}{x^\alpha}\right|\leqslant 4x^{2-\alpha}$

$\therefore$ 当 $\alpha=2$ 且 $|x|>1$ 时 $\left|\dfrac{x+x^2(2+\sin x)}{x^2}\right|\leqslant 4$

$\therefore$ 当 $\alpha=2$ 时，$x+x^2(2+\sin x)$ 与 x^α 当 $x\to\infty$ 时是同阶无穷大量.

(3) 当 $x\to\infty$ 时，$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$

$$=x^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\sim x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}{x^a}=\lim_{n\to\infty}x^{\frac{n(n+1)}{2}-a}$$

$\therefore$ 当 $\alpha=\frac{1}{2}n(n+1)$ 时,$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$ 与 x^a 当 $x\to\infty$ 时是同阶无穷大量.

7. 证明:若 S 为无上界数集,则存在一递增数列 $\{x_n\}\subset S$,使得 $x_n\to+\infty(n\to\infty)$

证明:$\because$ S 为无上界数集,故必存在无上界数列 $\{x_n\}$,又证明之. 对 $\{x_n\}$ 必存在某项 x_{k_1} 满足 $x_{k_1}>1$,由于数列 $\{x_n\}(n=k_1+1,k_2+2+\cdots)$ 也无界. 故又存在某一项 $x_{k_2}(k_2>k_1)$ 使 $x_{k_2}>2$,又由于数列 $\{x_n\}$ $(n=k_1+1,k_2+2\cdots)$ 无上界. 故又存在某项 $x_{k_3}(k_3>k_2)$ 使 $x_{k_3}>3$,于是得 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $x_{n_k}>k$. 记 n_k 为 n,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

8. 证明:若 f 为 $x\to r$ 时的无穷大量,而函数 g 在某 $U^\circ(r)$ 上满足 $g(x)\geqslant k>0$,则 fg 为 $x\to r$ 时的无穷大量.

证明:由题设 f 为 $x\to r$ 时的无穷大量,而在 $U^\circ(r)$ 上 $g(x)\geqslant k>0$,因而对任给正数 G,存在正数 δ,使 $U^\circ(r,\delta)\subset U^\circ(r)$,当 $0<|x-r|<\delta$ 时有 $|f(x)|>\frac{G}{K}$. 于是,当 $0<|x-r|<\delta$ 时,便有 $|f(x)g(x)|>\frac{G}{K}\cdot K=G$

$\therefore$ fg 为 $x\to r$ 时的无穷大量.

9. 设 $f(x)\sim g(x),(x\to x_0)$ 证明:

$$f(x)-g(x)=o(f(x))\text{ 或 }f(x)-g(x)=o(g(x))$$

证:$\because$ $f(x)\sim g(x),(x\to x_0)$,从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}(1-\frac{g(x)}{f(x)})=0$$

$\therefore$ $f(x)-g(x)=o(f(x))$ 同理 $f(x)-g(x)=o(g(x))$

总 练 习 题

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-[x])$　　(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}([x]+1)^{-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)})$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$　　(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n})$, m,n 为正整数.

解　(1) 当 $2\leqslant x<3$ 时, $[x]=2$　于是

$$\lim_{x\to 3^-}(x-[x])=\lim_{x\to 3^-}(x-2)=1$$

(2) 当 $1\leqslant x<2$ 时, $[x]=1$, 于是

$$\lim_{x\to 1^+}([x]+1)^{-1}=\lim_{x\to 1^+}(1+1)^{-1}=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(b-x)}\}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(a+b)x}{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(b-x)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(a+b)}{\sqrt{(1+\frac{a}{x}(1+\frac{b}{x})}+\sqrt{(\frac{a}{x}-1)(\frac{b}{x}-1)}}$$

$=a+b$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{a}{x})^2}}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1-a^2x^{-2}}}=-1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}$$

(7) 当 $m = n$ 时, $\lim\limits_{x\to1}(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n})=0$ 当 $m\neq n$ 时,不妨设 $m<n$,且 $m+L=n$,此时

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}$$

$$=\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=\frac{-L-Lx-\cdots-Lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+L-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=-\frac{mx^{m+L-2}+2mx^{m+L-3}+\cdots+mLx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$\frac{-L(m-1)x^{m-2}+L(m-2)x^{m-3}+\cdots+L}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})},\text{于是}$$

$$\lim_{x\to1}(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n})$$

$$=-\frac{m[1+2+\cdots+L]+L[(m-1)+(m-2)+\cdots+1]}{nm}$$

$$=-\frac{mL(m+L)}{mn}=\frac{m-n}{2}$$

故不论 m,n 为任何自然数,都有

$$\lim_{x\to1}(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n})=\frac{m-n}{2}$$

2. 分别求出满足下述条件的常数 a 与 b:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x-1+\frac{2}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{2}{x+1}+(1-a)x-(b+1)]$$

$\therefore$ 只有当 $a=1$ 且 $b=-1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$

(2) 因$\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=\dfrac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$=\dfrac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\dfrac{(1-a^2)x-(1+2ab)+(1-b^2)x^{-1}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+bx^{-1}}$

(注意到 $x\to-\infty$,故可设 $x<0$)

所以只有当 $1-a^2=0,1+2ab=0,a-1\neq0$,即 $a=-1$,
$b=\dfrac{1}{2}$ 时有 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

(3) 类似于(2)可知,只有当 $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$ 才有

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$

3. 试分别举出符合下列要求的函数 f:

(1) $\lim\limits_{x\to2}f(x)\neq f(2)$　　(2) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ 不存在

解　(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x,x\neq2\\0,x=2\end{cases}$

则$\lim\limits_{x\to2}f(x)=2,f(2)=0$,于是$\lim\limits_{x\to2}f(x)\neq f(2)$

(2) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$,此时$\lim\limits_{x\to2}f(x)$ 不存在.

4. 试给出函数 f 的例子,使 $f(x)>0$ 恒成立,而在某一点 x_0 处有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,这同极限的局部保号性有矛盾吗?

解　例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq0\\1, & x=0\end{cases}$$

在整个实数轴上有 $f(x)>0$ 恒成立,但在 $x_0=0$ 处$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$,这与局部保号性不矛盾,在局部保号性定理中要求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$A\neq0$ 时,而不是 $A=0$.

5. 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to A}g(x)=B$,能否推出

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=B$$

解　不一定.例如对于函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & 当 x=\frac{p}{q}(p,q 互质)时\\ 0, & 当 x 为无理数时\end{cases}$$

及

$$g(x)=\begin{cases}1, & 当 x\neq 0 时\\ 0, & 当 x=0 时\end{cases}$$

有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$ 但$\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))$不存在.事实上，$g(f(x))=D(x)$为狄利克雷函数，由§3习题6可知，$\lim\limits_{x\to 0}D(x)$不存在.

6. 设 $f(x)=x\cos x$ 试作数列

(1) $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to\infty(n\to\infty)$，$f(x_n)\to 0(n\to\infty)$

(2) $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to\infty(n\to\infty)$，$f(y_n)\to+\infty(n\to\infty)$

(3) $\{z_n\}$ 使得 $z_n\to\infty(n\to\infty)$，$f(z_n)\to-\infty(n\to\infty)$

解　(1) 令 $x_n=\frac{n\pi}{2}$，此时 $f(x_n)=0$，于是当 $n\to\infty$ 时，便有 $x_n\to\infty$，且 $f(x_n)\to 0$

(2) 令 $y_n=2n\pi$，此时 $f(y_n)=2n\pi$，于是当 $n\to\infty$ 时，便有 $y_n\to\infty$，且$f(y_n)\to+\infty$

(3) 令 $z_n=(2n+1)\pi$，此时 $f(z_n)=-(2n+1)\pi$，于是当 $n\to\infty$ 时，便有 $z_n\to\infty$，且$f(z_n)\to-\infty$

7. 证明：若数列$\{a_n\}$满足下列条件之一，则$\{a_n\}$是无穷大数列.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=S>1(a_n\neq 0,n=1,2,\cdots)$

证：(1) 由题设$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$，于是存在 r_0，使 $r>r_0>1$，由保号性知存在 N_1，当 $n>N_1$，有$\sqrt[n]{|a_n|}>r_0$，即 $|a_n|>r_0^n$，由于 $r_0>1$，故$\lim\limits_{n\to\infty}r_0^n=+\infty$，即对任给正数 G，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时有

$r_0^n > G$. 现取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 当 $n > N$ 时，有 $|a_n| > G$. 故 $\{a_n\}$ 是无穷大数列

(2) 由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = S > 1$，于是存在 $S_0 > 1$. 使 $S > S_0 > 1$

由保号性可知存在 N_1，当 $n \geqslant N_1$ 时，便有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > S_0$，从而当 $n \geqslant N_1$

时，便有 $\quad |a_n| = |a_{N_1}| \cdot \left|\dfrac{a_{N_1+1}}{a_{N_1}}\right| \cdots \left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| > |a_{N_1}| \cdot S_0^{n-N_1}$

而当 $n \to \infty$ 时，$|a_{N_1}| \cdot S_0^{n-N_1}$ 是无穷大数列. 于是对任给正数 G，存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，有 $|a_{N_1}| \cdot S_0^{n-N_1} > G$. 现取 $N = \max\{N_1, N_2\}$. 当 $n > N$ 时有 $|a_n| > G$，故 $\{a_n\}$ 是无穷大数列.

8. 利用上题(1) 的结论求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n})^{n^2}$　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \dfrac{1}{n})^{n^2}$

解　(1) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1 + \dfrac{1}{n})^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n})^n = e > 1$　故

$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n})^{n^2} = +\infty$

(2) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{[(1 + (-\dfrac{1}{n}))^{-n}]^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{[(1 + (-\dfrac{1}{n}))^{-n}]^n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{[1 + (-\dfrac{1}{n})]^{-n}} = \dfrac{1}{e} < 1 \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \dfrac{1}{n})^{n^2} = 0$

9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$，证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = +\infty$

(2) 若 $a_n > 0(n = 1,2,\cdots)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = +\infty$

证：(1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$，对任给正数 G，存在 N_1，当 $n > N_1$ 时，便有 $a_n > 2G$ 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，当 $n > N_1$ 时

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_{N_1}}{n} + \frac{S_n - S_{N_1}}{n - N_1}(1 - \frac{N_1}{n}) > 2G(1 - \frac{N_1}{n}) \qquad (1)$$

由于 $1-\frac{N_1}{n}\to 1(n\to\infty)$,从而由保号性可知:存在 N_2,当 $n>N_2$ 时,有 $|1-\frac{N_1}{n}|>\frac{1}{2}$(2) 于是取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时(1),(2) 同时成立.于是$\frac{S_n}{n}>G$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty$

(2) 由于 $a_n>0,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=+\infty$. 由 (1) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=+\infty$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 可见 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=+\infty$

10. 利用上题结果求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n}$

解　(1) $\because \sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$,这里 $a_n=n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,由上题 ② 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

(2) $\because \ln n!=\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n$　又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$

$\therefore$ 由上题 ① 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)=+\infty$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(n!)=+\infty$

11. 设 f 为 $U^\circ_-(x_0)$ 内的递增函数,证明:若存在数列 $\{x_n\}\subset U^\circ_-(x_0)$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$,则有

$f(x_0-0)=\sup\limits_{x\in U^\circ_-(x_0)}f(x)=A$

证:(1) 先证 $\sup\limits_{x\in U_-(x_0)}f(x)=A$. 假设存在 $x'\in U_-(x_0,\delta)$,使 $f(x')>A$,记 $\varepsilon=\frac{x_0-x'}{2}>0$,由于 $x_n\to x_0,(n\to\infty)$. 故存在 N,当 $n>N$ 时. 有 $|x_n-x_0|<\frac{x_0-x'}{2}$,于是 $x_n>\frac{x_0+x'}{2}$ 又 f 在

$U_-(x_0,\delta)$ 内递增，故 $f(x_n)\geqslant f(\frac{x_0+x'}{2})$，而 $f(\frac{x_0+x'}{2})\geqslant f(x')$ $>A$ 于是 $f(x_n)-A>f(x')-A>0(n=1,2,\cdots)$ 这与 $f(x_n)\to A\quad(n\to\infty)$ 矛盾.

(2) 下证 $f(x_0-0)=A$. 由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 知：对任给正数 ε，存在 N，当 $n>N$ 时有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$ 而 $N+1>N$，故

$|f(x_{n+1})-A|<\varepsilon$

记 $\delta=x_0-x_{N+1}>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $x>x_{N+1}$，从而 $f(x)\geqslant f(x_{N+1})$，对于任何 $x\in U_-(x_0,\delta)$ 都有 $f(x)\leqslant A$，于是

$A-\varepsilon<f(x_{N+1})\leqslant f(x)<A+\varepsilon$　故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

12. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(2x)=f(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：$f(x)\equiv A(x\in(0,+\infty))$

证：(反证法) 假设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不恒为 A. 则必存在一点 $x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x_0)=B\neq A$　又 $\because f(x)$ 满足方程 $f(2x)=f(x)$，于是

$$f(x_0)=f(2x_0)=f(2^2x_0)=\cdots=f(2^nx_0)=\cdots$$

得到数列 $\{x_0,2x_0,2^2x_0,\cdots,2^nx_0,\cdots\}$ 故

$$\lim_{n\to\infty}f(2^nx_0)=f(x_0)=B \qquad (1)$$

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 及 $2^nx_0\to+\infty(n\to+\infty)$，从而由归结原则就有

$$\lim_{n\to\infty}f(2^nx_0)=A \qquad (2)$$

由(1)(2)可得 $B=A$　这与 $B\neq A$ 矛盾. 故 $f(x)\equiv A,x\in(0,+\infty)$

13. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(x^2)=f(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$　证明：$f(x)\equiv f(1)\ x\in(0,+\infty)$

证：(反证法) 假设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不恒为 $f(1)$，则必存在 $x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x_0)\neq f(1)$，由方程 $f(x^2)=f(x)$ 可得

$$f(x_0)=f(x_0^2)=f(x_0^{2^2})=\cdots=f(x_0^{2^n})=\cdots$$

得到数列$\{x_0^2, x_0^{2^2}, \cdots, x_0^{2^n}, \cdots\}$

(ⅰ) 若 $x_0 \in (0,1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_0^{2^n} = 0$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0^{2^n}) = f(x_0)\cdots(1)$

又因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$　故由归结原则可得

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0^{2^n}) = f(1)\cdots(2)$

由(1)(2) 可得 $f(x_0) = f(1)$

(ⅱ) 若 $x_0 \in (1, +\infty)$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_0^{2^n} = +\infty$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0^{2^n}) = f(x_0)$　　$(1')$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(1)$,故由归结原则可得

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_0^{2^n}) = f(1)$　　$(2')$

由$(1')(2')$ 可得 $f(x_0) = f(1)$

由(ⅰ)(ⅱ) 结论可得不论 $x_0 \in (0,1)$ 还是 $x_0 \in (1, +\infty)$ 都有 $f(x_0) = f(1)$,这与 $f(x_0) \neq f(1)$ 相矛盾.

故 $f(x) \equiv f(1), x \in (0, +\infty)$

14. 设函数f定义在$(a, +\infty)$上,f在每一个有限区间(a, b)内有界,并满足

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = A$. 证明　$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = A$

证:由题设$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)] = A$. 对任给正数$\varepsilon$,必存在正数 $x_0 > a$,使当 $x \geqslant x_0$ 时,有 $|f(x+1) - f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

现设 $x > x_0 + 1$,于是存在正整数 n(依赖于 x),满足 $n \leqslant x - x_0 < n + 1$ 令 $L = x - x_0 - n$,则 $0 \leqslant L < 1$,且 $x = x_0 + n + L$. 于是有

$$\left|\frac{f(x)}{x} - A\right| = \left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x) - f(x_0+L)}{n} - A\right] + \frac{f(x_0+L)}{x} - \frac{x_0+L}{x}A\right|$$

显然 $\left|\dfrac{n}{x}\left[\dfrac{f(x) - f(x_0+L)}{n} - A\right]\right| \leqslant \left|\dfrac{f(x) - f(x_0+L)}{n} - A\right|$

$$= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(x_0+L+k)-f(x_0+L+k-1)-A]\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(x_0+L+k)-f(x_0+L+k-1)-A| < \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{3}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$$

由题设知 $f(x)$ 在 $x_0 \leqslant x < x_0+1$ 上有界，故存在正数 x_1，使当 $x > x_1$ 时，便有 $\left|\frac{f(x_0+L)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{3}(0 \leqslant L < 1)$

又显然存在正数 x_2，使当 $x > x_2$ 时，有 $\left|\frac{x_0+L}{x}A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

令 $X = \max\{x_0+1, x_1, x_2\}$ 于是当 $x > X$ 时，便有

$$\left|\frac{f(x)}{x} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = A$.