

习 题

1. (**Jacobi 定理**) 设 $C: x = x(s)$ 是一条曲率非零的正则空间闭曲线, 它的弧长参数为 s ; 又设 C 的主法线像 $N(s)$ 是单位球面 S^2 上的简单闭曲线, 它的弧长参数为 \bar{s} , 试证:

(I) $\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = 1/(k^2 + \tau^2)$, 其中 k 和 τ 是曲线 C 的曲率和挠率;

(II) 曲线 $N(s)$ 的测地曲率 $\bar{k}_g = \frac{d}{d\bar{s}} \arctan\left(\frac{\tau}{k}\right) \frac{ds}{d\bar{s}}$;

(II) 曲线 $N(s)$ 把 S^2 分成面积相等的两部分.

2. 设 M 是 \mathbf{E}^3 中亏格为零的闭曲面, $C \subset M$ 是 M 上的简单闭测地线, 设 A 和 B 是 M 上以 C 为公共边界的区域, $N: M \rightarrow S^2$ 是 M 的 Gauss 映射. 试证: $N(A)$ 和 $N(B)$ 面积相等.

4. 证明 \mathbf{E}^3 中 Gauss 曲率非负的紧致闭曲面必同胚于球面.

5. 设 M 是 \mathbf{E}^3 中亏格非零的紧致曲面, 试证: M 上必存在点使它的 Gauss 曲率分别为正、负和零.