第十章　定积分的应用

§1　平面图形的面积

1. 求由抛物线 $y = x^2$ 与 $y = 2 - x^2$ 所围图形的面积.

解　两曲线的交点是 $(-1,1)$, $(1,1)$, 所以所围的平面图形的面积为

$$S = \int_{-1}^{1}[(2 - x^2) - x^2]dx = \frac{8}{3}$$

2. 求由 $y = |\ln x|$ 与直线 $x = \frac{1}{10}$, $x = 10$, 和 x 轴所围图形的面积.

解　$$S = \int_{\frac{1}{10}}^{10} |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{10}}^{1} -\ln x dx + \int_{1}^{10} \ln x dx$$

$$= -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{10}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{10} = \frac{99}{10}\ln 10 - \frac{81}{10}$$

3. 抛物线 $y^2 = 2x$ 把圆 $x^2 + y^2 = 8$ 分成两部分, 求这两部分面积之比.

解　抛物线 $y^2 = 2x$ 与圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的交点 $P(2,2)$, $Q(2,-2)$, 抛物线 $y^2 = 2x$ 把圆分成两部分, 记它们的面积分别为 A_1、A_2, 则

$$A_1 = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2}\right)dy = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + 2\pi$$

$$A_2 = 8\pi - A_1 = 8\pi - \frac{4}{3} - 2\pi = 6\pi - \frac{4}{3}$$

故　$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi + \frac{4}{3}}{6\pi - \frac{4}{3}} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

4．求内摆线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t (a > 0)$ 所围图形的面积.

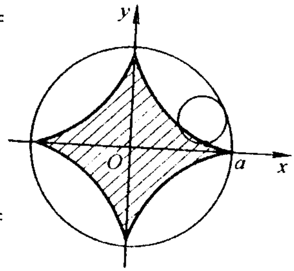

图 10－1－4

解　$S = 4 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t (a\cos^3 t)' dt \right|$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2 \sin^4 t\cos^2 t dt = \frac{3}{8}\pi a^2$

5．求心形线 $r = a(1+\cos\theta)(a > 0)$ 所围图形的面积.

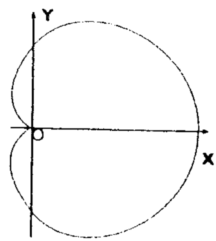

图 10－1－5

解　$r = a(1+\cos a)(a > 0)$ 是心脏线，其参数方程为：

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

则

$$S = \left| \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta [a(1+\cos\theta)\cos\theta]' d\theta \right|$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^3$$

6．求三叶形曲线 $r = a\sin 3\theta (a > 0)$ 所围图形的面积.

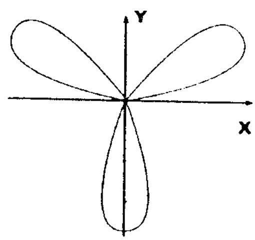

图 10－1－6

解　所求的面积为

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^3 3\theta d\theta = \frac{\pi}{4} a^2$$

7．求由 $\sqrt{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}} = 1 (a, b > 0)$ 与坐标轴所围图形的面积.

解　曲线与 x 轴交点为 $(a, 0)$，与 y 轴交点为 $(0, b)$，$y = [\sqrt{b} -$

$\sqrt{\frac{b}{a}}x]^2$，所以所求面积为

$$S=\int_0^a(\sqrt{b}-\sqrt{\frac{b}{a}}x)^2dx=\int_0^a b(1-\sqrt{\frac{x}{a}})^2dx$$

$$=2ab\int_0^1(1-t)^2tdt=\frac{ab}{6}$$

8. 求由曲线 $x=t-t^2, y=1-t^4$ 所围图形的面积.

解　当 $t=-1,1$ 时，$x=0, y=0$. 故当 t 由 -1 变到 1 时，曲线从原点出发到原点，构成了一个封闭曲线围成的平面图形，故

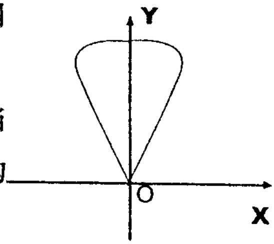

图 10－1－8

$$S=\int_{-1}^1|y(t)|x'(t)dt=\int_1^{-1}(1-t^4)(1-3t^2)dt$$

$$=\int_{-1}^1(1-t^4-3t^2+3t^6)dt=\frac{16}{35}$$

9. 求二曲线 $r=\sin\theta$ 与 $r=\sqrt{3}\cos\theta$ 所围公共部分的面积.

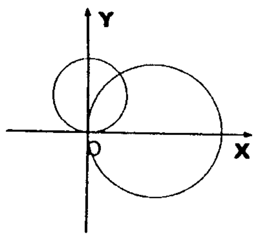

图 10－1－9

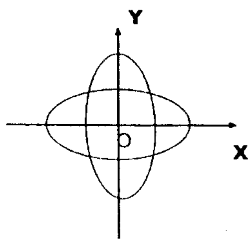

图 10－1－10

10. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$ 所围公共部分的面积(图 10—7).

解　图形关于两坐标轴对称，故只须求第一象限的图形面积. 在第一象限内，解得交点为$(ab/\sqrt{a^2+b^2}, ab/\sqrt{a^2+b^2})$，又根据对称性，所求面积 $S=8S_1$，其中

$$S_1=\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-x\right)dx$$

$$=ab\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos^2 t\,dt-\frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

所以，$S=4ab\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

§2　由平行截面面积求立体体积

1. 如图 10—13 所示，直椭圆柱体被通过底面短轴的斜平面所截，试求截得楔形体的体积.

解　如图所示建立直角坐标系，则椭圆柱面的方程为$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{16}=1$，斜面的方程为 $Z=\dfrac{x}{2}$. 用平面 $x=t$ 截这个立体，得一长方形，其边长是

$$8\sqrt{1-\frac{t^2}{100}},\frac{t}{2},$$

所以 $A(x)=4x\sqrt{1-\dfrac{x^2}{100}}$，从而

$$V=\int_0^{10}4x\sqrt{1-\frac{x^2}{100}}dx=\frac{400}{3}$$

2. 求下列平面曲线绕轴旋转所围成立体的体积：

(1)$y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$，绕 x 轴；

(2)$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，绕 x 轴；

(3) $r = a(1+\cos\theta)(a>0)$，绕极轴；

(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴.

解　(1) $V = \pi\int_0^x \sin^2 x dx$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}[x-\frac{1}{2}\sin 2x]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

(2) $V = \pi\int_0^{2x} a^2(1-\cos)^2 d[a(t-\sin t)]$

$$= a^2\pi\int_0^{2x}(1-\cos t)^3 dt$$

$$= a^3\pi\int_0^{2x}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

(3) $r = a(1+\cos\theta)(a>0)$ 是心脏线，而

$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases} \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$

是心脏线极轴之上部分的参数方程，

$$V = \left|\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\pi y^2 dx\right| - \left|\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\pi y^2 dx\right|$$

$$= \pi a^3\int_0^\pi(\sin^3\theta+2\sin^3\theta\cos\theta+\sin^3\theta\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\pi a^3$$

(4) 原方程可写成 $y = b\sqrt{1-x^2/a^2}$，所以

$$V = \int_{-a}^{a}\pi y^2 dx = 2\int_0^a \pi b^2(1-\frac{b^2}{a^2})dx = \frac{4}{3}ab^2\pi$$

3. 已知球半径为 r，验证高为 h 的球缺体积 $V = \pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)(h \leqslant r)$.

解　球冠体积可看作是曲线 $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $R-h\leqslant x\leqslant R$ 绕 x 轴旋转而得到的,所以体积为

$$V=\pi\int_{R-h}^{R}y^2dx=\pi\int_{R-h}^{R}(R^2-x^2)dx$$

$$=\pi[R^2x-\frac{1}{3}x^3]_{R-h}^{R}=\pi h^2(R-\frac{h}{3})$$

4. 求曲线 $x=R\cos^3t, y=R\sin^3$ 连上绕 x 轴旋转所得立体体积(这里 R 为正实数).

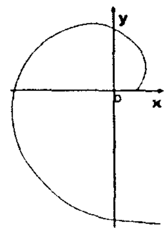

图 10－2－4

解　$$V=\pi\int_{-R}^{R}y^2dx=\pi\int_{\pi}^{0}R^2\sin^6tdR\cos^3t$$

$$=3\pi R^3\int_{\pi}^{0}\sin^7t\cos^2tdt=\frac{16}{105}\pi R^3$$

5. 导出曲边梯形 $0\leqslant y\leqslant f(x), a\leqslant x\leqslant b$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积公式为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

证　如曲线梯形,绕 y 轴旋转一周后,其在 x 处的截面图形面积(为一圆柱的侧面积)为

$$A(x)=2\pi x\cdot f(x)\quad a\leqslant x\leqslant b$$

则仿照课本思想,所围立体体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx\quad 证毕.$$

6. 求 $0\leqslant y\leqslant\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 所示平面图形绕 y 轴旋转所得立体的体积.

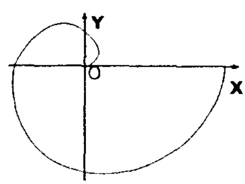

图 10－2－6

解　曲线 $y=\sin x$ 可分成两部分

$$x=\arcsin y, 0\leqslant y\leqslant 1$$

$$x=\pi-\arcsin y, 0\leqslant y\leqslant 1$$

用 $y=t$ 截这个立体,其截面面积为

$$A(t)=\pi[(\pi-\arcsin t)^2-(\arcsin t)^2]$$

$$=\pi^3-2\pi^2\arcsin t.$$

即面积函数为 $A(y)=\pi^2-2\pi^2\arcsin y$，故

$$V=\int_0^1(\pi^3-2\pi^2\arcsin y)dy=2\pi$$

§3　平面曲线的弧长与曲率

1．求下列曲线的弧长：

(1) $y=x^{3/2},0\leqslant x\leqslant 4$；　　(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$；

(3) $x=a\cos^3 t,y=a\sin^3 t(a>0),0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(4) $x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)(a>0),0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(5) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}(a>0),0\leqslant\theta\leqslant 3\pi$；

(6) $r=a\theta(a>0),0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

解　(1) 由于 $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$，故

$$S=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{8}{27}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4$$
$$=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

(2) 由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 得 $y=(1-\sqrt{x})^2,0\leqslant x\leqslant 1$，从而，$y'=-(1-\sqrt{x})/\sqrt{x}$，所以，

$$S=\int_0^1\sqrt{1+\frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2}}dx=2\int_0^1\sqrt{2x-2\sqrt{x}+1}d\sqrt{x}$$
$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

(3) 由于 $x'=-3a\cos^2 t\sin t,y'=3a\sin^2 t\cos t$，所以

$$S=\int_0^{2\pi}3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt$$
$$=\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt=6a$$

(4) 因为 $x'=at\cos t,y'=at\sin t$，所以

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \int_0^{2\pi} atdt = 2\pi^2 a$$

$$(5) S = \int_0^{3\pi} \sqrt{(a\sin^3\frac{\theta}{3})^2 + [(a\sin^3\frac{\theta}{3})']^2} d\theta$$

$$= \int_0^{3\pi} a\sin^2\frac{\theta}{3} d\theta = \int_0^{3\pi} a \frac{(1-\cos\frac{2\theta}{3})}{2} d\theta = \frac{3\pi a}{2}$$

$$(6) S = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1+\theta^2} d\theta$$

$$= a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$$

2. 求下列各曲线在指定点处的曲率：

(1) $xy = 4$，在点$(2,2)$；　　(2) $y = \ln x$，在点$(1,0)$；

(3) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(a > 0)$，在 $t = \frac{\pi}{2}$ 的点；

(4) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t(a > 0)$，在 $t = \frac{\pi}{2}$ 的点.

解　(1) $y = \frac{4}{x}, y' = -\frac{4}{x^2}, y'' = \frac{8}{x^3}$，从而

$$y'|_{x=2} = -1, y''|_{x=2} = 1,$$

所以，曲线在点(2,2)处的曲率为

$$k = \frac{1}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(2) 由于 $y'|_{x=1} = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1, y''|_{x=1} = -\frac{1}{x^2}|_{x=1} = -1$，

所以

$$k = \frac{|-1|}{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(3) 由于 $x'|_{t=\frac{\pi}{2}} = a(1-\cos t)|t = \frac{\pi}{2} = a$，

$$x''|_{t=\frac{\pi}{2}} = a\sin t|_{t=\frac{\pi}{2}} = a,$$

$$y'|_{t=\frac{\pi}{2}} = a\sin t|_{t=\frac{\pi}{2}} = a,$$

$$y''|_{t=\frac{\pi}{2}} = a\cos t|_{t=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

所以，$k = \dfrac{|-a^2|}{(a^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4a}$.

(4) $x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t, x''(t) = -3a\cos t(\cos^2 + 2\sin^2 t)$,

$y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t, y''(t) = 3a\sin t(\cos^2 t - \sin^2 t)$

所以，$x'(\frac{\pi}{4}) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a, x''(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}a, y'(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$, $y''(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$，故

$$K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|(\frac{3\sqrt{2}}{4}a)^2 - (\frac{3\sqrt{2}}{4}a)^2|}{[(\frac{3\sqrt{2}}{4})^2 + (\frac{3\sqrt{2}}{4}a)^2)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}a$$

3. 求 a,b 的值，使椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$ 的周长等于正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 上一段的长.

解　椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t$ 的圆长为：

$$S_{椭} = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$$

正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 上一段的长为：

$$S_{正弦} = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2 x + \sin^2 x}dx$$

由 $\sin x, \cos x$ 地位的对等性，知

$$a = \sqrt{2}, b = 1 \text{ 或 } a = 1, b = \sqrt{2}$$

4. 设曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出，且二阶可导，证明它在点 (r,θ) 处的曲率为

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

证　当方程由极坐标系转换成直角坐标系时，曲线以 θ 为参数的方程为 $x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$，从而

$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$

$$x''(\theta)=f''(\theta)\cos\theta-f'(\theta)\sin\theta-f'(\theta)\sin\theta-f(\theta)\cos\theta$$
$$=[f''(\theta)-f(\theta)]\cos\theta-2f'(\theta)\sin\theta$$
$$y'(\theta)=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta,$$
$$y''(\theta)=[f''(\theta)-f(\theta)]\sin\theta+2f'(\theta)\cos\theta$$

故
$$x'y''-x''y'=r^2+2r'^2-rr''$$
$$x'^2+y'^2=r'^2+r^2$$

所以

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

5. 用上题公式，求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 在 $\theta=0$ 处的曲率、曲率半径和曲率圆.

解　对于心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$，由 $r(0)=2a$，

$$r'|_{\theta=0}=-a\sin\theta|_{\theta=0}=0,$$
$$r''|_{\theta=0}=-a\cos\theta|_{\theta=0}=-a$$

故它在 $\theta=0$ 处的曲率为

$$K=\frac{|(2a)^2-2a(-a)|}{[(2a)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{4a}$$

曲率半径为 $R=\frac{1}{k}=\frac{4}{3}a$，曲率圆的圆心在 x 轴上，半径为 $\frac{4}{3}a$，方程为

$$(x-\frac{2a}{3})^2+y^2=\frac{16}{9}a^2$$

6. 证明抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在顶点处的曲率为最大.

证　在点 (x,y) 处抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的曲率半径为

$$R(x)=\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{(4a^2x^2+4abx+b^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2|a|}$$

令　$f(x)=4a^2x^2+4abx+b^2+1$，则

$$f'(x)=8a^2x+4ab,f''(x)=8a^2$$

所以当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$f'(-\frac{b}{2a})=0,f''(-\frac{b}{2a})=8a^2>0$，

这时 $f(x)$ 取得极小值，所以 $R(x)$ 也最小，而点 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 正是抛物线顶点，在此点曲率最大.

7. 求曲线 $y=e^x$ 上曲率最大的点.

解　由于 $y'=y''=e^x$，故曲率 $k=\dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

又 $\dfrac{dk}{dx}=\dfrac{e^x(1-2e^{2x})(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{(1+e^{2x})^3}$，所以 $x=-\dfrac{\ln2}{2}$ 是稳定点，且当 $x<-\ln\sqrt{2}$ 时，$k(x)>0$，当 $x>-\ln\sqrt{2}$ 时，$k'(x)<0$，故 $k(x)$ 在 $x=-\ln\sqrt{2}$ 取极大值，从而曲线 $y=e^x$ 在点 $\left(-\ln2,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处曲率最大.

§4　旋转曲面的面积

1. 求下列平面曲线绕指定轴旋转所得旋转曲面的面积：

(1) $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$，绕 x 轴；

(2) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(a>0), 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，绕 x 轴；

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴；

(4) $x^2+(y-a)^2=r^2(r<a)$，绕 x 轴.

解　(1) 根据旋转体积侧面积公式

$$S=2\pi\int_0^x\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$$
$$=2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$$

$$(2)S=2\pi\int_0^{2\pi}y\sqrt{x'^2+y'^2}dt$$
$$=2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt$$
$$=2\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{2}a^2(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt$$

$$= \frac{64}{3}\pi a^2$$

(3) 由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,可得 $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $-a<x<a$.
由公式可得

$$S = 2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\,dx$$

故当 $a>b$ 时,

$$S = 2\pi\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$$

当 $a<b$ 时,

$$S = 2\pi\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}+b}{a}\right)$$

当 $a=b$ 时,$S=4\pi a^2$.

(4) 解　此旋转体的表面可看作是由两个半圆:

$$y = R+(r^2-x^2),\ -r\leqslant x\leqslant r$$
$$y = R-(r^2-x^2),\ -r\leqslant x\leqslant r$$

绕 x 轴旋转而得到,所以

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_{-r}^{r}(R+\sqrt{x^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\ &\quad + 2\pi\int_{-r}^{v}(R-\sqrt{r^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\ &= 4\pi R\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \\ &= 4\pi rR\left[\arcsin\frac{x}{y}\right]_{-r}^{r} = 4\pi^2 rR \end{aligned}$$

2. 设平面光滑曲线由极坐标方程

$$r=r(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta([\alpha,\beta]\subset[0,\pi],r(\theta)\geqslant 0)$$

给出,试求它绕极轴旋转所得旋转曲面的面积计算公式.

解　转化为参数方程：$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$

则　$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)\sin\sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)}$

3. 试求下列极坐标曲线绕极轴旋转所得旋转曲面的面积：

(1) 心形线 $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$；

(2) 双纽线 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta(a > 0)$.

解　(1) 把所给曲线化成以 θ 为参量的参量方程，

$$x = a(1 + \cos\theta)\cos\theta$$
$$y = a(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

据对称性和参量方程曲线旋转体表面积公式，

$$S = 2\pi\int_0^x y(\theta)\sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}d\theta$$
$$= 2\pi\int_0^x a(1 + \cos\theta)\sin\theta \cdot 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2$$

(2) 解　曲线的参数方程为：

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2a^2\cos 2\theta}\cos\theta, \\ y &= \sqrt{2a^2\cos 2\theta}\sin\theta, \end{aligned} \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

由曲线的对称性

$$S = 2[2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2a^2\cos 2\theta}\sin\theta \cdot \frac{2a^2}{\sqrt{2a^2\cos 2\theta}}d\theta]$$
$$= 8\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta = 8(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\pi a^2$$

§ 5　定积分在物理中的某些应用

1. 有一等腰梯形闸门，它的上、上两条底边各长为 10 米和 6 米，高为 20 米. 计算当水面与上底边相齐时闸门一侧所受的静压力.

解　设水的比重为 V，则此闸门在 $[x, x + 0x]$ 段所受的静压力约为：

$$\triangle p \approx dp = (6 + 0.2x)v(20 - x)dx$$

则　$p=\int_0^{20} v(6+0.2x)(20-x)dx=\frac{4400}{3}v$

2. 边长为 a 和 b 的矩形薄板，与液面成 $\alpha(0<\alpha<90^\circ)$ 角斜沉于液体中. 设 $a>b$，长边平行于液面，上沿位于深 h 处，液体的比重为 v. 试求薄板每侧所受的静压力.

解　以下设为 y 轴，竖直方向为 x 轴建立坐标系，则在 x 轴上方 x 到 $x+0x$ 处薄板所受压力为

$$\triangle p \approx dp=\frac{dx}{\sin\alpha}\cdot a\cdot v\cdot(h+b\sin\alpha-x)$$

则总压力为：

$$p=\int_0^{b\sin\alpha}\frac{a\cdot v}{\sin\alpha}(h+b\sin\alpha-x)dx$$

$$=\frac{abvh+avb^2\sin\alpha}{2}$$

3. 直径为 6 米的一球浸入水中，其球心在水平面下 10 米处，求球面上所受静压力.

解　取 x 轴和 y 轴如图所示，当 $\triangle x$ 很小时，球面从 x 到 $x+\triangle x$ 的一层 $\triangle F$ 上各点的压强等于水的比重 1(吨 / 米^2) 乘以深度，而

$$\triangle F \text{ 上各点压强} \approx x(\text{吨} / \text{米}^2)$$

$$\triangle F \text{ 的面积} \approx 2\pi\sqrt{3^2-(x-10)^2}\triangle x(\text{米}^2).$$

所以在 $\triangle F$ 上所受的压力

$$\triangle p \approx x\cdot 2\pi\sqrt{3^2-(x-10)^2}\triangle x(\text{吨})$$

从而　$dp=2\pi x\sqrt{3^2-(x-10)^2}dx$，于是

$$p=2\pi\int_7^{13} x\sqrt{3^2-(x-10)^2}dx=90\pi^2(\text{吨})$$

即球面上所受的压力为 $90\pi^2$ 吨.

4. 设在坐标轴的原点有一质量为 m 的质点，在区间 $[a,a+l](a>0)$ 上有一质量为 M 的均匀细杆. 试求质点与细杆之间的万有引力.

解　dx 很小时，可把 $[x,x+dx]$ 这一段杆看成质点，其质量为

$dM = \frac{M}{l} \cdot dx$

则质点 b 与这一段细杆间的引力为：

$$dF = \frac{km}{x^2}dM = \frac{kmM}{lx^2}dx$$

从而质点 b 与细杆间的万有引力为：

$$F = \int_a^{a+l}\frac{kmM}{lx^2}dx = \frac{kMm}{l} = \frac{kMm}{a(a+l)}$$

5. 设有两条各长为 l 的均匀细杆在同一直线上，中间离开距离 c，每根细杆的质量为 M. 试求它们之间的万有引力.

解　在上题基础上再作一次积分即可.

§ 6　定积分的近似计算

1. 分别用梯形法和抛物线法近似计算 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$（将积分区间十等分）.

解　① 梯形法：

$$\int_0^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{10}(\frac{3}{4} + \frac{10}{11} + \frac{10}{12} + \cdots + \frac{10}{19})$$

$$\approx 0.1 \times 0.75 + 0.909 + 0.833 + 0.769 + 0.714 + 0.667 + 0.625 + 0.538 + 0.556 + 0.526$$

$$= 0.1 \times (0.75 + 6.187) = 0.6937$$

(2) 抛物线法：

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{60}[1 + \frac{1}{2} + 4(\frac{20}{21} + \frac{20}{23} + \cdots + \frac{20}{39}) + 2(\frac{20}{22} + \frac{20}{24} + \cdots + \frac{20}{38})]$$

$$\approx \frac{1}{60}[1.5 + 4 \times 6.929 + 2 \times 6.187] \approx 0.6931$$

2. 用抛物线法近似计算 $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$（分别将积分区间二等分、四等分、六等分）.

解　$n = 2$ 时，

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{\pi}{12}[1 + 4(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}) + 2 \cdot \frac{2}{\pi}] \approx 1.8524$$

$n=4$ 时,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{\pi}{24}[1+4(\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{8}+\frac{8}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{8}+\frac{8}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{8}+\frac{8}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{8})$$

$$+2(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{2\sqrt{2}}{3\pi})]\approx 1.8520$$

$n=6$ 时,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\approx\frac{\pi}{36}[1+4(\frac{12}{\pi}\sin\frac{\pi}{12}+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}+\frac{12}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{12}+\frac{12}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{12}$$

$$+\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{12}{11\pi}\sin\frac{11\pi}{12})+2(\frac{3}{\pi}+\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}+\frac{3}{5\pi})]$$

$$\approx 1.8517$$

3. 图10—27所示为河道某一截面图. 试由测得数据用抛物线法求截面面积.

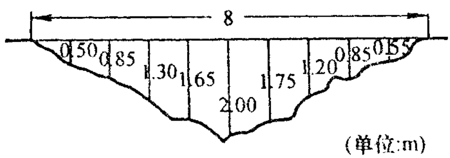

图 10 - 2 - 7

解 设河道的截面积为 S. 在这里 $n=5, y_0=0, y_1=0.5, y_2=0.85, y_3=1.30, y_4=1.65, y_5=2.00, y_6=1.75, y_7=1.20, y_8=0.85, y_9=0.55, y_{10}=0$

设 $a=0, b=8$,则

$$S\approx\frac{8}{6.5}[0+0+4(y_1+y_3+\cdots+y_9)+2(y_2+\cdots+y_8)]$$

$$=8.64(米^2)$$

4. 下表所列为夏季某一天每隔两小时测得的气温:

时间(t_i)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
温度(C_i)	25.8	23.0	24.1	25.6	27.3	30.2	33.4	35.0	33.8	31.1	28.2	27.0	25.0

(1) 按积分平均$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ 求这一天的平均气温，其中定积分值由在种近似法分别计算：

(2) 若按算术平均$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} C_{i-1}$ 或$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} C_i$ 求得平均气温，那么它们与矩形法积分平均和梯形法积分平均各有什么联系？简述理由.

解　设平均气温为 $\overline{T}$　$n=12, a=0, b=24$

1° 梯形法，则 $\overline{T} \approx (\frac{y_0}{2}+y_1+\cdots+\frac{y_n}{2})=28.68$

2° 矩形法，则 $\overline{T} \approx \frac{1}{12}(y_0+y_1+\cdots+y_n) \approx 28.71$

或 $\overline{T} \approx \frac{1}{12}(y_1+y_2+\cdots+y_12) \approx 28.66$

3° 抛物线法，则 $\overline{T} \approx \frac{1}{36}[y_0+y_12+4(y_1+y_3+\cdots+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{10})] \approx 28.67$