

习 题

1. 利用 Liouville 公式证明: (1) 平面上的测地线为直线. (2) 圆柱面上的测地线为直母线和圆柱螺线.

2. 求旋转曲面 $x(u^1, u^2) = (f(u^1) \cos u^2, f(u^1) \sin u^2, u^1)$ 的测地线, 设 θ 为测地线与经线的交角, f 为交点到旋转轴的距离. 证明: (1) $f \sin \theta = \text{常数}$. (2) 若 θ 为定角, 则该旋转曲面是圆柱面.

3. 证明: 存在两族交成定角的测地线的曲面必是可展曲面.

4. 证明: 在球面 $x(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v < 2\pi\right)$ 上, 任何曲线的测地曲率可写成

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \sin u \frac{dv}{ds},$$

其中 θ 表示曲线与经线的交角. 由此证明: 一切经线和大圆纬线是测地线.