第十九章　含参量积分

§1　含参量正常积分

1. 设 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$(这个函数在 $x=y$ 时不连续),试证由含参量积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$$

所确定的函数在 $(-\infty,\infty)$ 上连续,并作函数 $F(y)$ 的图象.

解　由于 $x\in[0,1]$,因此当 $y<0$ 时,$f(x,y)=1$,$y>1$ 时,$f(x,y)=-1$.当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^y f(x,y)dx+\int_y^1 f(x,y)dx$$
$$=\int_0^y(-1)dx+\int_y^1 1dx=1-2y$$

所以

$$F|y|=\begin{cases}1 & y<0\\ 1-2y & 0\leqslant y\leqslant 1\\ -1 & y>0\end{cases}$$

它在 $(-\infty,\infty)$ 上连续.

$F(y)$ 的图象见图 19－1.

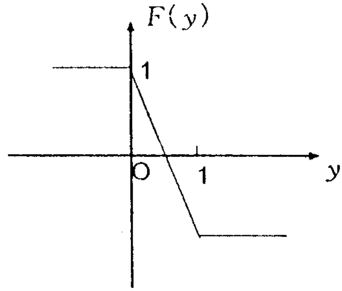

图 19—1

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$;

(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$

解　(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+a^2}$ 在区域 $-1\leqslant x\leqslant 1.\ -1\leqslant\alpha\leqslant 1$ 上连续.因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx=\int_{-1}^{1}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}|x|dx=1$$

(2) $f(x,y)=x^2\cos\alpha$，在区域 $0\leqslant x\leqslant 2,\ -1\leqslant\alpha\leqslant 1$ 上连续，因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{1}x^2\cos\alpha x dx=\int_{0}^{2}\lim_{\alpha\to 0}x^2\cos\alpha x dx=\int_{0}^{2}x^2dx=\frac{8}{3}$$

设 $F(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}dy$ 计算 $F'(x)$.

解　$F'(x)=\int_{x}^{x^2}-y^2e^{-xy^2}dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3}$

4. 应用对参量的微分法，求下列积分：

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$；$(a^2+b^2\neq 0)$

(2) $\int_{0}^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$

解　(1) 若 $|a|=0,|b|>0$，所以 $b^2=|b^2|$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(b^2\cos^2x)dx=\pi\ln|b|+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$$

$$=\pi\ln|b|-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{|b|}{2}$$

同理 $|b|=0,|a|>0$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x)dx=\pi\ln\frac{|a|}{2}$$

若 $|a|>0,|b|>0$，设

$$I(b)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln|a|^2\sin^2x+|b|^2\cos^2x)dx,$$

则　$I'(b)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2|b|\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx$

$$= \frac{2}{|b|}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(|\frac{a}{b}|\tan x)^2}dx$$

记 $\alpha = |\frac{a}{b}|, t = \alpha\tan x$，得

$$I'(b) = \frac{2}{|b|}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}dt$$

$$= \frac{2\alpha}{b^2(\alpha^2-1)}\int_0^{\infty}(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{\alpha^2+t^2})dt$$

$$= \frac{\pi}{|a|+|b|}$$

又　$\mathrm{I}(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(a^2\sin^2 x)dx = \pi\ln\frac{|a|}{2}$

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^x \frac{\pi}{|a|+t}dt + \pi\ln\frac{|a|}{2}$$

$$= \pi\ln(|a|+x) - \pi\ln 2$$

因而 $\int_0^2 \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx = \pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$

(2) 设 $\mathrm{I}(a) = \int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x + a^2)dx$，

当 $|a|<1$ 时，$1-2a\cos x + a^2 \geqslant 1-2|a|+a^2 = (1-|a|^2) > 0$，因而 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 为连续函数，且具有连续导数，所以

$$\mathrm{I}'(a) = \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x + 2a}{1-2a\cos x + a^2}dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\pi}(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x + a^2})dx$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+(\frac{-2a}{1+a^2})\cos x}$$

$$= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a}\arctan(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2})\Big|_0^{\pi} = 0$$

故当 $|a|<1$ 时，$\mathrm{I}(a) = c$（常数），但是 $\mathrm{I}(0) = 0$，从而 $\mathrm{I}(a) = 0$.

当 $|a|>1$ 时，令 $b=\frac{1}{a}$ 则 $|b|<1$，有 $\mathrm{I}(b)=0$. 于是 $\mathrm{I}(a)$

$$=\int_0^{\pi}\ln(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2})dx$$

$$=\mathrm{I}(b)-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|.$$

当 $|a|=1$ 时，$\mathrm{I}(1)=\int_0^{\pi}\ln 2(1-\cos x)dx$

$$=\int_0^{\pi}(\ln 4+2\ln\sin\frac{x}{2})dx=0$$

同理可得 $\mathrm{I}(-1)=0$，综上所述得

$$\mathrm{I}(a)=\begin{cases}0 & |a|\leqslant 1\\ 2\pi\ln|a| & |a|>1\end{cases}$$

注　第(1)题也可由第(2)题推出. 即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{a^2-b^2}{2}\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\cos\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1-2\frac{|a|-|b|}{|a|+|b|}\cos\varphi$$

$$+(\frac{|a|-|b|}{|a|+|b|})^2)d\varphi+\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$$

$$=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$$

5. 应用积分号下的积分法，求下列积分：

(1) $\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(b>a>0)$

(2) $\int_0^1\cos(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(b>a>0)$

解　(1) 记 $g(x)=\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=0$，故令

$g(0)=0$ 时，$g(x)$ 在$[0,1]$上连续，于是有

$$\mathrm{I}=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1[\sin(\ln\frac{1}{x})\int_a^b x^y dy]dx$$

$$=\int_0^1[\int_a^b \sin(\ln\frac{1}{x})x^y dy]dx$$

记 $f(x,y)=\sin(\ln\frac{1}{x})x^y(x>0),f(0,y)=0$，则 $f(x,y)$ 在$[0,1;a,b]$上连续，所以

$$\int_0^1[\int_a^b \sin(\ln\frac{1}{x})x^y dy]dx=\int_a^b[\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx]dy,$$

作代换 $x=e^{-t}$ 后得到

$$\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx=\int_0^{\infty}e^{-(y+1)t}\sin t dt=\frac{1}{1+(1+y)^2}$$

$$\mathrm{I}=\int_a^b\frac{dy}{1+(1+y)^2}=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$$

(2) 类似于(1)题

$$\int_0^1\cos(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b[\int_0^1\cos(\ln\frac{1}{x})x^y dx]dy$$

$$=\int_a^b\frac{1+y}{1+(1+y)^2}dy=\frac{1}{2}\ln(\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2})$$

6. 试求累次积分

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \text{ 与 } \int_0^1 dy\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

并指出它们为什么与定理的结果不符.

解　由于 $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})$

$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2})$. 故有

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy=\int_0^1[\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_0^1]dx$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2+y^2}\Big|_0^1\right]dy$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{y^2+1}dy = -\frac{\pi}{4}$$

因为$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$在点$(0,0)$不连续，所以与定理的结果不符.

7. 研究函数 $F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性，其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上是正的连续函数.

解　由于 $f(x)$ 在$[0,1]$上是正的连续函数，故存在正数 m，使得 $f(x)\geqslant m>0\quad x\in[0,1]$

当 $y>0$ 时，$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx \geqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx$

$$= m\arctan\frac{1}{y}$$

当 $y<0$ 时，$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2ty^2}dx \leqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx$

$$= m\arctan\frac{1}{y}$$

因此 $\lim\limits_{y\to0^+} F(y) \geqslant \lim\limits_{y\to0^+} m\arctan\frac{1}{y} = -\frac{m\pi}{2} > 0$

$$\lim_{y\to0^-} F(y) \leqslant \lim_{y\to0^-} m\arctan\frac{1}{y} = -\frac{m\pi}{2} < 0$$

所以 $F(y)$ 在 $y=0$ 处不连续，当 $0\overline{\in}[c,d]$ 时 $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ 在$[0,1;c,d]$上连续. 所以当 $y\neq 0$ 时，函数 $F(y)$ 连续.

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,A]$上连续，证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = f(x)-f(a)(a<x<A)$$

证　因为$\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt$

$$= \int_{a+h}^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_{a+h}^{x+h} f(t)dt - \int_{a}^{a+h} f(t)dt - \int_{a+h}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{x}^{x+h} f(t)dt - \int_{a}^{a+h} f(t)dt$$

$$= f(\xi_1) \cdot h - f(\xi_2) \cdot h, x \leqslant \xi_1 \leqslant x + h, a \leqslant \xi_2 \leqslant a + h$$

当 $h \to 0, \xi_1 \to x, \xi_2 \to a$，所以

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f(\xi_1)k - f(\xi_2)k]$$

$$= f(x) - f(a)$$

9. 设 $F(x,y) = \int_{x/y}^{xy} (x - yz) f(z) dz$，其中 $f(z)$ 为可微函数，求 $F_{xy}(x,y)$.

解 $F_x(x,y) = \int_{x/y}^{xy} f(z)dz + (x - xy^2)f(xy)y$

$$- (x - y \cdot \frac{x}{y}) f(\frac{x}{y}) \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \int_{x/y}^{xy} f(z)dz + xy(1 - y^2)f(xy)$$

$$F_{xy}(x,y) = f(xy) \cdot x + f(\frac{x}{y}) \cdot \frac{x}{y^2} + x(1 - y^2)f(xy)$$

$$- 2xy^2 f(xy) + x^2 y(1 - y^2) f'(xy)$$

$$= (2x - 3y^2) f(xy) + \frac{x}{y^2} f(\frac{x}{y}) + x^2 y(1 - y^2) f'(xy).$$

10. 设 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$,

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

其中 $0 < k < 1$(这两个积分称为完全椭圆积分).

(1) 试求 $E(k)$ 与 $F(k)$ 的导数，并以 $E(k)$ 与 $F(k)$ 表示它们；

(2) 证明 $E(k)$ 满足方程

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0$$

解　(1) $E'(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$

$=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$

$=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$

$=\frac{1}{k}[E(k)-F(k)]\quad(a)$

$F'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi$

$=\frac{1}{k}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}d\varphi]$

易证 $(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2)^{\frac{1}{2}}$

$-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}]$

故有　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi$

$=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi$

即　$F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\qquad(b)$

(2) 对(1)中(a)式求 k 的导数后,再将(a)式代入得

$E''(k)=\frac{1}{k}[E'(k)-F'(k)-\frac{1}{k}E(k)+\frac{1}{k}F(k)]$

$=-\frac{1}{k}F'(k)$

由(a),(b)有 $F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}$

$=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}+E'(k)-\frac{1}{k}E(k)=E'(k)+\frac{k}{1-k^2}$

代入上式后得　$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0$

§2　含参量反常积分

1. 讨论下列含参量非正常积分在所指定的区域上一致收敛性

(1)$\int_1^{\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$　在 $-\infty<y<\infty$ 上

(2)$\int_1^{\infty}e^{-x^2y}dy$ 在任何区间$[a,b](a>0)$上

(3)$\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{\sin\alpha t}{t}dt$　在 $0<\alpha<\infty$ 上

(4)$\int_0^{\infty}xe^{-xy}dy$

(ⅰ)在 $0<a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛

(ⅱ)在 $0\leqslant x\leqslant b$ 上不一致收敛

(5)$\int_0^1\ln(xy)dy$　在$\frac{1}{b}\leqslant x\leqslant b(b>1)$上；

(6)$\int_0^1\frac{dx}{x^p}$

(ⅰ)在$(-\infty,b](b<1)$一致收敛

(ⅱ)在$(-\infty,1)$内不一致收敛

(7)$\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 在 $0<p_0\leqslant p<\infty,0<q_0\leqslant q<\infty$ 上

解　(1)因为 $\left|\frac{y^2-x^2}{(x^2+y)^2}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$

而$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$收敛，所以

$\int_1^{\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$ 在 $-\infty<y<\infty$ 上一致收敛.

(2)因为 $|e^{-x^2y}|=\frac{1}{e^{x^2y}}\leqslant\frac{1}{e^{a^2y}}$ 而且

$\int_0^{\infty} e^{-a^2 y} dy$ 收敛,所以

$\int_0^{\infty} e^{-x^2 y} dy$ 在$[a,b](a>0)$上一致收敛.

(3) 任何 $N>0$,由于

$$|\int_0^N e^{-t}\sin\alpha t dt| \leqslant \int_0^N |e^{-t}\sin\alpha t| dt$$

$$\leqslant \int_0^N e^{-t} dt \leqslant 1$$

因而$\int_0^N e^{-t}\sin xt dt$一致有界. 又$\frac{1}{t}$关于$t$单调,而且对任何$\alpha>0$,当$t$趋于$\infty$时$\frac{1}{t}$一致趋于0. 由狄利克雷判别法知

$\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{\sin\alpha t}{t} dt$ 在$0<\alpha<\infty$上一致收敛.

(4)(ⅰ) $|xe^{xy}| \leqslant be^{-ay}$,又$\int_0^{\infty} be^{-ay}$ 收敛

所以$\int_0^{\infty} xe^{-xy}dy$ 在$0<a\leqslant x\leqslant b$上一致收敛.

(ⅱ) 取$\varepsilon_0=\frac{1}{e^2}<0$,对任何$M>0$,令$A_1=M, A_2=2M, x_0=\frac{1}{M}$

$$|\int_{A_1}^{A_2} x_0 e^{-x_0 y} dy| = e^{x_0 y}|_M^{2M}$$

$$= \frac{e-1}{e^2} > \frac{1}{e^2} = \varepsilon_0.$$

所以$\int_0^{\infty} xe^{-xy}dy$ 在$0\leqslant x\leqslant b$上不一致收敛.

注　另一种证法

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} xe^{-xy}dy = \begin{cases} 0, x=0 \\ 1, 0<x\leqslant b \end{cases}$$

然而 xe^{-xy} 在 $0\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y<\infty$ 内连续,由连续性定理知 $\int_0^{\infty} xe^{-xy}dy$ 在$0\leqslant x\leqslant b$上不一致收敛.

(5) $|\ln xy|=|\ln x+\ln y|\leqslant|\ln x|+|\ln y|$

$\leqslant \ln b-\ln y$

而且$\int_0^1(\ln b-\ln y)dy$ 收敛，所以

$\int_0^1 \ln xy dy$ 在$\frac{1}{b}\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛.

(6)(ⅰ) $|\frac{1}{x^p}|\leqslant\frac{1}{x^b}$，又 $b<1$，$\int_0^1\frac{1}{x^b}dx$ 收敛，所以$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ 在$(-\infty,b]$$(b<1)$ 上一致收敛.

(ⅱ) 当 $p=1$ 时，$\int_0^1\frac{1}{x}dx$ 发散，由课本例题知，对任何 $A<1$，在$[A,1)$ 内不一致收敛，所以在$(-\infty,1)$ 内不一致收敛.

(7)$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2$

对 I_1 在$[0,\frac{1}{2}]$ 上，由于 $|x^{p-1}(1-x)^{q-1}|$

$\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$ 和$\int_0^{\frac{1}{2}}x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}dx$ 收敛，因而 I_1 在$[0,\frac{1}{2}]$上一致收敛. 同理可证 I_2 也一致收敛，从而$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 在$0<p_0\leqslant p<\infty$，$0<q_0\leqslant q<\infty$ 上一致收敛.

2. 从等式$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$ 出发，计算积分

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx(b>a>0).$$

解　$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^\infty[\int_a^b e^{-xy}dy]dx.$

因为 e^{-xy} 在$0\leqslant x<\infty$，$a\leqslant y\leqslant b$ 内连续，而且由 M 判别法知

$\int_0^{\infty} e^{-xy} dx$ 在$[a,b]$内一致收敛,所以

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \left[\int_0^{\infty} e^{-xy} dx\right] dy$$

$$= \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln \frac{b}{a}$$

3. 证明函数

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x-y)^2} dx$$

在$(-\infty,\infty)$上连续.(提示:证明中可利用公式$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

证　令 $x-y=u$,因此 $x=u+y$

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x-y)^2} dx = \int_y^{\infty} e^{-u^2} du,$$

据$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,所以

$$F(y) = \int_y^{\infty} e^{-u^2} du = \int_y^0 e^{-u^2} du + \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \int_y^0 e^{-u^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\int_y^0 e^{-u^2} du$ 为积分下限函数是 y 的连续函数,所以 $F(y)$ 在$(-\infty,\infty)$上连续.

4. 求下列积分:

(1)$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2} dx$ 提示:可利用公式$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(2)$\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{\sin xt}{t} dt$;

(3)$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1-\cos xy}{x^2} dx$.

解　(1)$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \left[\int_a^b 2y e^{-x^2y^2} dy\right] dx$

由 M 判别法知 $\int_0^{\infty} 2ye^{-x^2y^2}dy$ 在 $[a,b]$ 内一致收敛.
所以

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx = \int_a^b [\int_0^{\infty} 2ye^{-x^2y^2}dx]dy$$

$$= \int_a^b [2\int_0^{\infty} e^{-(xy)^2}d(xy)]dy = \int_a^b \sqrt{\pi}dy = \sqrt{\pi}(b-a).$$

(2) 由课本例题,$P=1, a=0, b=x$ 得

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\frac{\sin xt}{t}dt = \arctan x.$$

(3) $$\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}dx = \int_0^{\infty}[\int_0^{y} e^{-x}\frac{\sin tx}{x}dt]dx$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x}\frac{\sin tx}{x} = t$,所以 $x=0$ 不是函数 $e^{-x}\frac{\sin tx}{x}$ 的瑕点,因为含参量非正常积分 $\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\sin tx}{x}dx$ 在 $t\in[0,M]$ 上一致收敛,故由(3)的结论有

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{1-\cos xy}{x^2}dx = \int_0^{y}[\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\sin tx}{x}dx]dt$$

$$= \int_0^{y} \mathrm{arctantdt} = \mathrm{yarctany} - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$$

5.(1) 对极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^{\infty} 2xye^{-xy^2}dy$ 能否施行极限与积分顺序的交换来求解.

解　因为

$$F(x) = \int_0^{\infty} 2xye^{-xy^2}dy = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

因而 $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 1$,但是 $\int_0^{\infty} \lim\limits_{x\to 0^+} 2xye^{-xy^2}dy = 0$

即交换运算后不相等,这是由于

$$\int_0^{\infty} 2xye^{-xy^2}dy = \int_0^{\infty} xe^{-xu}du$$

在$[0,b]$上不一致收敛,从而不符合定理条件.

(2) 对$\int_0^1 dy\int_0^\infty (2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx$ 能否使用积分次序交换求解.

解　因为$\int_0^1 dy\int_0^\infty (2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx$

$$=\int_0^1 2xye^{-xy^2}\Big|_0^\infty dy=\int_0^1 0dy=0$$

然而　$\int_0^\infty dx\int_0^1 (2y-2xy^3)e^{-xy^2}dy$

$$=\int_0^\infty y^2e^{-xy^2}\Big|_0^1 dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=1,$$

即积分次序不能交换.由于$\int_0^\infty (2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx=0$

且$\int_M^\infty (2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx=-2Mye^{-My^2}$.对$\varepsilon_0=1$,不论$M$多大,总有

$y_0=\dfrac{1}{M}\in[0,1]$,使得

$$\left|\int_M^\infty (2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx\right|=2e^{-1/M}>1$$

因而$\int_0^\infty (2y-2xy^3)e^{-xy^2}dx$ 在$[0,1]$上不一致收敛,所以不能交换积分次序.

(3) 对 $F(x)=\int_0^\infty x^3e^{-x^2y}dy$ 能否使用积分与求导运算顺利交换来求解

解　因为 $F(x)=\int_0^\infty x^3e^{-x^2y}dy=x,x\in(-\infty,\infty)$. 因此 $F'(x)\equiv 1$, 但是$\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3e^{-x^2y})=(3x^2-2x^4y)e^{-x^2y}$, 而$\int_0^\infty (3x^3-2x^4y)e^{-x^2y}dy$ 在$x=0$处积分值等于零.所以积分与求导运算不能交换.由于

$$\int_0^\infty (3x^2-2x^4y)e^{-x^2y}dy=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

所以 $\int_0^{\infty}(3x^2-2x^4y)e^{-x^2y}dy$ 在$[0,1]$上不一致收敛.不符合定理的条件,所以不能使用定理.

6. 应用$\int_0^{\infty}e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}(a>0)$ 证明:

(1)$\int_0^{\infty}t^2e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}$

(2)$\int_0^{\infty}t^{2n}e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1.3\cdots(2n-1)}{2^n}a^{-(n+\frac{1}{2})}$

证 (1) 由于$\int_0^{\infty}t^2e^{-at^2}dt$ 在任何$[c,d]$上$(c>0)$一致收敛,所以

$$\frac{d}{da}\int_0^{\infty}e^{-at^2}dt=\int_0^{\infty}\frac{d}{da}e^{-at^2}dt=-\int_0^{\infty}t^2e^{-at^2}dt$$

另外 $\frac{d}{da}\int_0^{\infty}e^{-at^2}dt=\frac{d}{da}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}})=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}$.

所以 $\int_0^{\infty}t^2e^{-at^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-\frac{3}{2}}$

注 另一种方法:

$$\int_0^{\infty}t^2e^{-at^2}dt=\frac{-1}{2a}\int_0^{\infty}tde^{-at^2}$$

$$=\frac{-1}{2a}[te^{-at^2}|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-at^2}dt]$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{\infty}e^{-at^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{4}}a^{-\frac{3}{2}}$$

(2) 由于$\int_0^{\infty}t^{2n}e^{-at^2}dt$ 在任何$[c,d]$上$(c>0)$一致收敛,所以

$$\frac{d^n}{da^n}\int_0^{\infty}e^{-at^2}dt=\int_0^{\infty}\frac{d^n}{da^n}e^{-at^2}dt$$

$$=(-1)^n\int_0^{\infty}t^{2n}e^{-at^2}dt$$

另外 $\frac{d^n}{da^n}\int_0^{\infty}e^{-at^2}dt=\frac{d^n}{da^n}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}})$

$$= (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} a^{-n-\frac{1}{2}}$$

所以$\int_0^\infty t^{2n} e^{-at^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} a^{-(n+\frac{3}{2})}$

7. 应用$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2|a|}$，求$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

解　设$A = a^2$，$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+A)^n}$在任何$[c,d]$，$(c>0)$内一致收敛.

$$\frac{d^n}{dA^n}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+A} = \int_0^\infty \frac{d^n}{dA^n}\left(\frac{1}{(x^2+A)}\right)dx$$

$$= (-1)^n n!\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+A)^{n+1}}$$

$$\frac{d^n}{dA^n}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+A} = \frac{d^n}{dA^n}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2A}}\right)$$

$$= (-1)^n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2} A^{-n-\frac{1}{2}}$$

所以$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+A)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots 2n} A^{-n-\frac{1}{2}}$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} a^{-2n-1}$$

8. 设$f(x,y)$在$[a,b;c,\infty)$上连续，且保持同一符号，$\int_c^\infty f(x,y)dy$在$[a,b]$上连续. 证明：

$\int_c^\infty f(x,y)dy$在$[a,b]$上一致收敛.

证　任取一个趋于∞的递增数列$\{A\}$（其中$A_1 = c$），考察级数

$$\sum_{n=1}^\infty \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy = \sum_{n=1}^\infty u_n(x) \quad (a)$$

由假设，不妨设在$(a,b;c,\infty)$上$f(x,y) \geqslant 0$且连续. 从而$u_n(x) \geqslant 0$，且在$[a,b]$上连续，由狄尼定理得级数$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$在$[a,b]$上一致

收敛.由(a)及课本本章定理推得$\int_0^{\infty}f(x,y)dy$在$[a,b]$上一致收敛.

9. 设在$[a,\infty;c,d]$内成立不等式$|f(x,y)|\leqslant F(x,y)$.若$\int_a^{\infty}F(x,y)dx$在$y\in[c,d]$上一致收敛,证明$\int_a^{\infty}f(x,y)dx$在$y\in[c,d]$上一致收敛且绝对收敛.

证 因为$\int_a^{\infty}F(x,y)dx$关于$y\in[c,d]$一致收敛所以任给$\varepsilon>0$,存在$M>0$,对任何$A_2>A_1>M$和一切$y\in[c,d]$,都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}F(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

因为 $|f(x,y)|\leqslant F(x,y)$,所以

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,y)dx\right|\leqslant\int_{A_1}^{A_2}|f(x,y)|dx$$

$$\leqslant\int_{A_1}^{A_2}F(x,y)dx<\varepsilon,$$

即$\int_a^{\infty}f(x,y)dx$关于$y\in[c,d]$一致收敛,且绝对收敛.

§3 欧拉积分

1. 计算$\Gamma(\frac{5}{2}),\Gamma(-\frac{5}{2}),\Gamma(\frac{1}{2}+n),\Gamma(\frac{1}{2}-n)$

解 $\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+n)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

$\Gamma(-\frac{5}{2})=\Gamma(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})$

$=-\frac{2}{5}\cdot\Gamma(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$

$\Gamma(\frac{1}{2}+n)=\frac{2n-1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+(n-1))$

$=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

$$\Gamma(\frac{1}{2}-n)=-\frac{2}{2n-1}\Gamma(\frac{1}{2}-(n-1))$$

$$=(-\frac{2}{2n-1})(-\frac{2}{2n-3})\cdots(-\frac{2}{1})\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(-1)^n2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$$

2．计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}udu,\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}udu$.

解　由 $B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi$

令 $p=\frac{1}{2},q=n+\frac{1}{2}$ 推得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}udu=\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

令 $P=\frac{1}{2},q=n+1$ 则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}udu=\frac{1}{2}B(\frac{1}{2},n+1)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

3．证明下列各式

(1)$\Gamma(a)=\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{d-1}dx,d>0$

(2)$\int_0^{\infty}\frac{x^{d-1}}{1+x}dx=\Gamma(d)\Gamma(1-d)\quad 0<d<1$

(3)$\int_0^1x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}dx=\frac{1}{r}B(\frac{p}{r},q),p>0,q>0,r>0$

(4)$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

证 (1) 令 $\ln\frac{1}{x}=t$,则 $x=e^{-t},dx=-e^{-t}dt$,因此

$$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{\alpha-1}dx=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\Gamma(\alpha)$$

(2)$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+1-\alpha}}dx$

$=\beta(\alpha,1-\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$

(3) 令 $x^r=t$,则 $x=t^{1/r},dx=\frac{1}{r}t^{1/r-1}$,因此

$\int_0^1x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}dx=\frac{1}{r}\int_0^1t^{p/r-1}(1-t)^{q-1}dt$

$=\frac{1}{r}\beta(\frac{p}{r},q)$

(4) 令 $x^4=t$,则 $x=t^{\frac{1}{4}},dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$,因此

$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{4}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{4}\beta(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

$=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

注 $\int\frac{dx}{1+x^4}=[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$

$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(x\sqrt{2}-1)]+c$

所以 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

4. 证明公式

$\beta(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\beta(p-1,q)(p>1,q>0)$

及 $\beta(p,q)=B(p+1,q)+\beta(p,q+1)$

证　$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$=\frac{-x^{p-1}(1-x)^{p}}{q}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{p-1}{q}x^{p-2}(1-x)^{q}dx$

$=\frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{q-2}(1-x)^{p-1}(1-x)dx$

$=\frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}dx-\frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

$=\frac{p-1}{q}\beta(p-1,q)-\frac{p-1}{q}\beta(p,q)$

所以　$\beta(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\beta(p-1,q)$

由　$\beta(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\beta(p,q)$

$\beta(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\beta(p,q)$

得　$\beta(p+1,q)+\beta(p,q+1)=\frac{p+q}{p+q}\beta(p,q)=\beta(p,q)$

5. 已知 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ 试证

$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

证：$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}x^2e^{-x^2}dx+\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx$

$=2\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\int_0^{\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt(t=x^2)$

$=\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

6. 试将下列积分用欧拉积分表示，并指出参量的取值范围：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x dx$

(2) $\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^p dx$

解　(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} B(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2})$

由 $\frac{m+1}{2} > 0$ 和 $\frac{n+1}{2} > 0$，得 $m > -1$ 和 $n > -1$.

(2) $\int_0^1 (\ln \frac{1}{x})^p dx = \Gamma(p+1)$，由 $p+1>0$ 得 $p>-1$.

总练习题

1. 在区间 $1 \leqslant x \leqslant 3$ 内用线性函数 $a+bx$ 近似代替 $f(x)=x^2$，试求 a,b 使得积分 $\int_1^3 (a+bx-x^2)^2 dx$ 取最小值.

解　设 $f(a,b) = \int_1^3 (a+bx-x)^2 dx$，由

$$f_a(a,b) = \int_1^3 2(a+bx-x^2)dx = 4a+8b-\frac{46}{3} = 0$$

$$f_b(a,b) = \int_1^3 2x(a+bx-x^2)dx = 8a+\frac{52}{3}b-40 = 0$$

得驻点　$a = -\frac{11}{3}, b = 4$

据　$f_{aa} = \int_1^3 2dx = 4, f_{bb} = \int_1^3 2x^2 dx = \frac{52}{3}$

$f_{ab} = \int_1^3 2xdx = 8, f_{aa} \cdot f_{bb} - (f_{ab})^2 = \frac{16}{3} > 0$

知 $a = -\frac{11}{3}, b = 4$ 是唯一的极小点. 因此当 $a = -\frac{11}{3}, b = 4$ 时，使 $\int_1^3 (a+bx-x)^2 dx$ 取最小值.

2. 设 $u(x) = \int_0^1 k(x,y)v(y)dy$，其中

$$k(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & x \leqslant y \\ y(1-x) & x > y \end{cases}$$

与 $v(y)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，证明在 $[0,1]$ 上

$$u''(x) = -v(x)$$

证　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$u(x)=\int_0^1 k(x,y)v(y)dy=\int_0^x k(x,y)v(y)dy+\int_x^1 k(x,y)v(y)dy$$
$$=\int_0^x y(1-x)v(y)dy+\int_x^1 x(1-y)v(y)dy$$

由各项被积函数及其对 x 偏导函数都连续，所以

$$u'(x)=\int_0^x -yv(y)dy+x(1-x)v(x)$$
$$+\int_x^1(1-y)v(y)dy-x(1-x)v(x)$$
$$=-\int_0^x yv(y)dy+\int_x^1(1-y)v(y)dy,$$
$$u''(x)=-xv(x)-(1-x)v(x)=-v(x)$$

3. 求函数 $F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}dx$ 的不连续点，并作函数 $F(\alpha)$ 的图象.

解　由课本例题知

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\alpha$$

因此

$$F(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(1-\alpha^2)$$

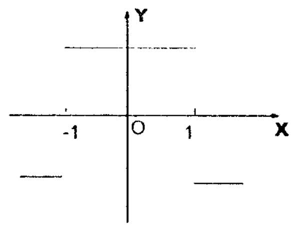

图 19—2

它在 $\alpha=\pm 1$ 处不连续. 见图 19 - 2.

4. 证明：若 $\int_0^\infty f(x,t)dt$ 在 $x>a$ 时一致收敛于 $F(x)$. 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x,t)=\varphi(t)$ 对任何 $t\in[a,b]\subset[0,\infty)$ 一致地成立，则

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\int_0^\infty\varphi(t)dt$$

证　先证 $\int_0^\infty\varphi(t)dt$ 收敛. 由于 $\int_0^\infty f(x,t)dt$ 在 $x>a$ 时一致收敛，因此任给 $\varepsilon>0$，存在 N，对一切 $A',A''>N$ 和一切 $x>a$，都有 |

$\int_{A'}^{A''} f(x,t)dt \mid < \varepsilon$，又由于 $f(x,t)$ 对任何 $t \in [a,b]$ 一致收敛于 $\varphi(t)$，因此对 $\dfrac{\varepsilon}{\mid A' - A'' \mid} > 0$，存在 X，对一切 $x > X$ 和 $t \in [a,b]$，都有

$$\mid f(x,t) - \varphi(t) \mid < \frac{\varepsilon}{\mid A' - A'' \mid}$$

从而 $$\left| \int_{A'}^{A''} \varphi(t)dt \right| \leqslant \left| \int_{A'}^{A''} (\varphi(t) - f(x,t))dt \right| + \left| \int_{A'}^{A''} f(x,t)dt \right| < 2\varepsilon$$

再证 $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \int_0^{\infty} \varphi(t)dt$，考虑

$$\left| F(x) - \int_0^{\infty} \varphi(t)dt \right| = \left| F(x) - \int_0^A f(x,t)dt + \int_0^A f(x,t)dt - \int_0^A \varphi(t)dt + \int_0^A \varphi(t)dt - \int_0^{\infty} \varphi(t)dt \right|$$

$$\leqslant \left| F(x) - \int_0^A f(x,t)dt \right| + \left| \int_0^A (f(x,t) - \varphi(t))dt \right| + \left| \int_0^A \varphi(t)dt - \int_0^{\infty} \varphi(t)dt \right|$$

由 $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ 一致收敛于 $F(x)$ 知，任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1，对一切 $A > N_1$ 和一切 $x \geqslant a$，有

$$\left| F(x) - \int_0^A f(x,t)dt \right| < \varepsilon$$

由 $\int_0^{\infty} \varphi(t)dt$ 收敛，对上述 $\varepsilon > 0$，存在 N_2，对一切 $A > N_2$，有

$$\left| \int_A^{\infty} \varphi(t)dt \right| < \varepsilon$$

由 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x,t) = \varphi(t)$，对 $\dfrac{\varepsilon}{A} > 0$，存在 X，对一切 $x > X$ 和 t，有 $\mid f(x,t) - \varphi(t) \mid < \dfrac{\varepsilon}{A}$，从而有

$$\left|\int_0^A (f(x,t)-\varphi(t))dt\right| < \varepsilon$$

综合上述，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 X，对一切 $x > X$，有

$$\left|F(x)-\int_0^{\infty}\varphi(t)dt\right| < \varepsilon$$

5. 设 $f(x)$ 为两次可微函数，$F(x)$ 为可微函数，证明函数

$u(x,t)=\dfrac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz$ 满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初始条件 $u(x,0)=f(x)$，$u(x,0)=F(x)$

证　$u_t=\dfrac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]$

$+\dfrac{1}{2a}[aF(x+at)+aF(x-at)]$

$u_{tt}=\dfrac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]$

$+\dfrac{a}{2}[F'(x+at)-F'(x-at)]$

$u_x=\dfrac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]$

$+\dfrac{1}{2a}[F(x+at)-F(x-at)]$

$u_{xx}=\dfrac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]$

$+\dfrac{1}{2a}[F'(x+at)-F'(x-at)]$

所以　$u=a^2u_{xx}$

$u(x,0)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(x)]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_x^x F(z)dz=f(x)$

$u(x,0)=\dfrac{1}{2}[-af'(x)+af'(x)]+\dfrac{1}{2a}[aF(x)+aF(x)]=$

$F(x)$

6. 证明:(1)$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = -\frac{\pi^2}{6}$

(2)$\int_0^u \frac{\ln(1-t)}{t}dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n^2} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$

证 (1) 由 $\ln x = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n}$

$$\int_0^1 \frac{lnx}{1-x}dx = -\int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n})dx$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

(2)$\int_0^u \frac{\ln(1-t)}{t}dt = \int_0^u (-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n})dt$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n^2} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$$