2001 级

1、设 $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$，求 $f(x)$ 在复数域 C 中的所有根.

解：直接验证知，−1 和 4 为 $f(x)$的根，故 x+1 和 x−4 为 $f(x)$的因式，由短除法知：

$$f(x)=(x+1)(x-4)(x^3+3x^2+3x+1)=(x+1)^4(x-4),$$

故 $f(x)$ 在复数域 C 中的所有根为−1（4 重）和 4.

2、设 $A=\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & \cdots & x_1 \\ x_2 & 0 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x_{n-1} \\ x_n & \cdots & \cdots & x_n & 0 \end{pmatrix}$ 是一个 n 阶矩阵.

（1）求 A 可逆的一个充要条件；

（2）当 A 可逆时，求 A 的逆.

解：（1）此时 $|A|\neq 0$，即为 $\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & \cdots & x_1 \\ x_2 & 0 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x_{n-1} \\ x_n & \cdots & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}\neq 0$.

而

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & \cdots & x_1 \\ x_2 & 0 & x_2 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x_{n-1} \\ x_n & \cdots & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x_1 & \cdots & \cdots & x_1 \\ 0 & x_2 & 0 & x_2 & \cdots & x_2 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & x_{n-1} \\ 0 & x_n & \cdots & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x_1 & -x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & -x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -x_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -x_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x_n \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x_1 & -x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & -x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -x_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -x_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -x_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x_n \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}(n-1)x_1x_2\ldots x_n$$

故所求为 $x_1x_2\ldots x_n\neq 0$

（2）我们有：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1&0&\cdots&0\\0&x_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&x_n\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}2-n&1&\cdots&1\\1&2-n&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&2-n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{-1}&0&\cdots&0\\0&x_2^{-1}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&x_n^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}(2-n)x_1^{-1}&x_2^{-1}&\cdots&x_n^{-1}\\x_1^{-1}&(2-n)x_2^{-1}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&x_n^{-1}\\x_1^{-1}&x_2^{-1}&\cdots&(2-n)x_n^{-1}\end{pmatrix}.$$

3、设 A_1，⋯，A_s 是一组线性无关的 n 元列向量，$B_1=aA_1+bA_2$，$B_2=aA_2+bA_3$，⋯⋯，$B_2=aA_2+bA_3$，其中 a,b 为实常数.试问 a,b 满足什么关系时，B_1，⋯，B_s 也线性无关.

解：（方法一）设是一组数使得 $x_1,x_2,\ldots,x_s$ 是一组数使得 $x_1B_1+x_2B_2+\ldots+x_sB_s=0$，

则有 $(ax_1+bx_s)A_1+(ax_2+bx_1)A_2+\ldots+(ax_s+bx_{s-1})A_s=0$.

因为 A_1，⋯，A_s 线性无关，故有 $\begin{cases}ax_1+bx_s=0\\ax_2+bx_1=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\ax_s+bx_{s-1}=0\end{cases}$，则 B_1，⋯，B_s 也线性无关当且仅当：

$$\begin{vmatrix}a&0&\cdots&b\\b&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&b&a\end{vmatrix}=a^s+(-1)^{s+1}b^s\neq 0.$$

（方法二）注意到 $(B_1,\ldots,B_s)=(A_1,\ldots,A_s)\begin{pmatrix}a&0&\cdots&b\\b&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&b&a\end{pmatrix}$.因为 A_1，⋯，A_s 线性无关，故

B_1，⋯，B_s 线性无关当且仅当：$\begin{vmatrix}a&0&\cdots&b\\b&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&b&a\end{vmatrix}=a^s+(-1)^{s+1}b^s\neq 0$.

2002 级

1、设 $A=\begin{pmatrix} u \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} v \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$均为三阶方阵，$|B|=2|A|=2$，求$|2A-B|$.其中$u,v,\alpha,\beta$均为三元行.

解：$2A-B=\begin{pmatrix} 2u-v \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$，$|2A-B|=\begin{vmatrix} 2u-v \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2u \\ 2\alpha \\ 2\beta \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} v \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix}=0$.

2、设$f(x)$与$g(x)$均为多项式，且二者无公共根，A为n阶方阵.证明：若$f(A)=0$，$g(A)$必非奇异.
证明：由条件及 *Bezout* 定理，知有$m(x)f(x)+n(x)g(x)=1$，其中$m(x),n(x)$为多项式.
进而$m(A)f(A)+n(A)g(A)=I$，又$f(A)=0$，故$n(A)g(A)=I$，故$g(A)$非奇异.

3、求证：$\sqrt{2}$为无理数.

证明：考虑多项式x^2-2，由于质数整除−2，而2^2不能整除−2，故由 Eisenstein 判别法可知：

x^2-2是有理数域上的不可约多项式，因此它在有理数域上无根，又$\sqrt{2}$为其一个根，故$\sqrt{2}$为无理数.

4、设m阶矩阵AB非奇异，证明A必为行满秩矩阵，B必为列满秩矩阵，这里A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵.
证明：因矩阵AB非奇异，故$r(AB)=m$，又由$m\le r(AB)\le r(A)\le A$的行数$=m$可知$r(A)=A$的行数，故A为行满秩矩阵，同理B也为列满秩矩阵.

5、设A为$m\times n$矩阵，T为所有使得$A\,a=0$的n元列向量a构成的集合，证明：$r(A)+r(T)\le n$.
证明：设$r(A)=r$，$r(T)=s$，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$是$T$的一个极大无关组，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$.
则有$AB=0$，再由 *Sylverster* 不等式可得$0=r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$，故$r(A)+r(T)\le n$.

2003 级

1、设$A=(a_{ij})$为n阶矩阵，A_{ij}表示A中a_{ij}元素的代数余子式，又$a_{1j}=p$，求A_{nj}之和.
解：若$p=0$，所求显然为 0；

若$p\neq 0$，则$A_{n1}+A_{n2}+\ldots+A_{nn}=p^{-1}(pA_{n1}+pA_{n2}+\ldots+pA_{nn})=0$.

综上所述，求A_{nj}之和总为 0.

2、设A为三阶实对称矩阵，且：

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-2x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3=(x_1,x_2,x_3)A(x_1,x_2,x_3)^T$，求$A$.

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

3、已知向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-2,2,0),\alpha_5=(2,1,5,10)$.
求其一个极大无关组，并把其他向量表成求得的一个极大无关组的线性组合.

解：对矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5\\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10\end{pmatrix}$ 做初等行变换，有：

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，由这两个矩阵的列向量组的线性关系一致知：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为原向量组的一个极大无关组，而 $\alpha_5=-\alpha_1+\alpha_3$.

4、设 A，B 为 n 阶矩阵，且 $A+B+AB=0$，证明：$I+A$ 为可逆矩阵.
证明：由条件 $I=I+A+B+AB=(I+A)(I+B)$，又 A，B 为 n 阶矩阵，故 $I+A$ 可逆.

5、设 $A=(a_{ij})$ 为三阶实方阵，且 $a_{11}\neq 0$，$a_{ij}=A_{ij}$，这里 A_{ij} 表示 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，求$|A|$.

解：由题设 $\widetilde{A}=A^T$，故 $AA^T=A\widetilde{A}=|A|I$，从而 $|A|^2=|A|^3$，又 $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq 0$，故 $|A|\neq 0$，故 $|A|=1$.

2005 级

1、求证：若 n 阶非零方阵 A 满足 $\widetilde{A}=A^T$，则矩阵 A 可逆.

证明：由方阵 A 非零，知存在一个元素 $a_{ij}\neq 0$.

则对$|A|$根据第 i 行展开，有：$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\ldots+a_{in}^2\neq 0$

故矩阵 A 可逆.

2、求$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$的值.

解：$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 27 \\ 1014 & 100 & 143 \\ -342 & 100 & 321 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 27 \\ 1014 & 100 & 143 \\ -342 & 100 & 321 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 246 & 100 & 27 \\ 768 & 0 & 116 \\ -1356 & 0 & 178 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46 & 100 & 27 \\ 768 & 0 & 116 \\ -1356 & 0 & 178 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46 & 100 & 27 \\ 768 & 0 & 116 \\ 180 & 0 & 410 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46 & 100 & 27 \\ 768 & 0 & 116 \\ 180 & 0 & 410 \end{vmatrix} = -29400000.$

3、求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$的一个基础解系.

解：将方程的系数矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$化为约化行阶梯形：

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，简单分析可知$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$是一个基础解系.

4、已知矩阵 A，B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，求证：$|I_m - AB| = |I_n - BA|$.

证明：由$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m - AB \end{bmatrix}$,

知$|I_m - AB| = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m - AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{vmatrix}$；

又由$\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - BA & B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$,

知$|I_n - BA| = \begin{vmatrix} I_n - BA & B \\ 0 & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{vmatrix}$.

故$|I_m - AB| = |I_n - BA|$得证.

2006 级

1、设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$X$ 为一个三阶矩阵.

（1）求 A^{20}；

（2）若 $2\widetilde{A}X=A^{-1}+3X$，求 X.

解：（1）$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=I+B$

而 $IB=BI$ 是易知的，故有：

$$A^{20}=(I+B)^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}B^{k}=I+20B+190B^2+O(易验证B^k=O，k\geq 3)$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&40&0\\0&0&40\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&760\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&40&760\\0&1&40\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

（2）注意$|A|$=1，故 $\widetilde{A}=A^{-1}$，故有：$2A^{-1}X=A^{-1}+3X$.同时左乘 A，有：

$2X=I+3AX$，有：$(2I-3A)X=I$，故：

$$X=(2I-3A)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&6&0\\0&-1&6\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

2、设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵，其中 $AC=CA,|A|\neq 0,|AD-CB|=0$.设 $G=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$，求证：$n\leq r(G)<2n.$

证明：由于$|A|\neq 0$，故 $n\leq r(G)$，等号在 $B=C=D=O$ 时可取得.下面只需证明$|G|=0$.

注意$\begin{pmatrix}-C&A\\I&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AC-CA&AD-CB\\A&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&AD-CB\\A&B\end{pmatrix}$.

两边同取行列式知有$|A||G|=|A||AD-CB|=0$，又$|A|\neq 0$，故$|G|=0$.

从而 $r(G)<2n.$

3、设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为多项式，满足 $g(0)=0$，且两者的最大公因式为 $x-1$，A 为 n 阶方阵.证明若 $f(A)=0$，A 必非奇异.

证明：由题设，知可设 $f(x)=(x-1)m(x)$， $g(x)=(x-1)n(x)$.其中(m,n)=1.
由条件 $f(A)=(A-I)m(A)=O$，若 $A=I$，命题显然成立；若 $m(A)=O$，则 $n(A)\neq O$，否则由 *Bezout* 定理， $O=u(A)m(A)+v(A)n(A)=I$，引发矛盾！
同取行列式（需要想清楚）知 $n(|A|)\neq 0$，又 $g(0)=0$，故 $n(0)=0$，故 $|A|\neq 0$.

4、设 $A=(a_{ij})$ 为三阶实方阵，求证：A 是正交矩阵当且仅当且 $|A|=\pm 1$， $a_{ij}=|A|A_{ij}$，这里 A_{ij} 表示 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

证明：若 A 是正交矩阵，则 $AA^T=I$，故 $|A^2|=1$，又 $|A|=\pm 1$.

又 $A^{-1}=A^T$，故由 $\widetilde{A}A=|A|I$，知 $\widetilde{A}=|A|A^T$，故 $a_{ij}=|A|A_{ij}$.

若 $a_{ij}=|A|A_{ij}$，则 $\widetilde{A}=|A|A^T$，又 $|A|=\pm 1$，故有 $\widetilde{A}=|A|A^{-1}$.

故有 $A^T=A^{-1}$，从而 A 是正交矩阵.

5、设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，证明下列结论：
（1）A 的列可由 B 的列线性表示当且仅当存在非零 $p\times n$ 矩阵 D，使得 $A=BD$；
（2）若 $A=BD$，且 B 列满秩矩阵，则 A 的列向量组与 D 的列向量组的线性关系一致.
证明：（1）若存在非零 $p\times n$ 矩阵 D，使得 $A=BD$，

考虑分块乘法 $(A_1,A_2,\ldots,A_n)=(B_1,B_2,\ldots,B_p)(D_1,D_2,\ldots,D_n)$.

则知 A 的列可由 B 的列线性表示.

若 A 的列可由 B 的列线性表示，则有： $A_i=(B_1,B_2,\ldots,B_p)D_i, D_i$为$1\times p$列矩阵.

则令 $D=(D_1,D_2,\ldots,D_n)$ 知存在非零 $p\times n$ 矩阵 D，使得 $A=BD$.

（2）对任意一组 $c_1,c_2,\ldots,c_n$ 使得 $c_1A_1+c_2A_2+\ldots+c_nA_n=0$，设 $C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)^T$.

则有：AC=0，故有 $AC=BDC=0$.因 B 为列满秩矩阵，故关于 n 元列向量的齐次线性方程组 Bx=0 只有零解，故 DC=0.故由定义知 A 的列向量组与 D 的列向量组的线性关系一致.

2007 级

1、设 A 为 n 阶矩阵，B,C,D 分别为 $n\times m$，$m\times n$ 与 $m\times m$ 矩阵，若 A 与 $D-CA^{-1}B$ 都可逆，求矩阵 $G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的逆矩阵.

解：为 $G^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CAB)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$.

2、设 A 是一个 n 阶矩阵，且 $r(A)=r$，求证存在一个 n 阶可逆矩阵 P 使 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全为 0.

证明：由于 $r(A)=r$，故存在可逆矩阵 X，Y 使得 $XAY=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

则 $Y^{-1}AY=Y^{-1}X^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，设可逆矩阵 $Y^{-1}X^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，则有：

$Y^{-1}AY=Y^{-1}X^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$.故取 $P=Y^{-1}$ 即可.

3、已知 $r(r\geq 2)$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 线性相关，求证：一定存在 r 个不全为 0 的数 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r$ 使对任何向量 β，向量组 $\alpha_1+\xi_1\beta,\alpha_2+\xi_2\beta,\ldots,\alpha_r+\xi_r\beta$ 恒线性相关.

证明：由条件，存在 r 元非零列向量 α，使得 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\alpha=0$.

$\beta=0$ 时命题显然成立；$\beta\neq 0$ 时，只需 $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r)\alpha=0$，故任取矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$ 的一个非零行即可.

4、讨论方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+kx_3=3 \\ x_1+kx_2+3x_3=2 \end{cases}$ 解的情况，并在有解时求出其通解.

解：方程组的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$，增广矩阵为 $X=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right)$.

简单计算可知：$r(A)=\begin{cases} 2, & k=-2,3 \\ 3, & k\neq -2,3 \end{cases}$，而 $r(X)=3$，故 $k=-2,3$ 时，方程组无解，

$k\neq -2,3$ 时，方程组有解.

此时把 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right)$ 化为约化行阶梯形矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k+3 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

知原方程组的一个同解方程组为：$\begin{cases} x_1-(k+3)x_3=0 \\ x_2+(k+2)x_3=1 \\ x_3=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=0 \end{cases}$.

5、设 c 是一个非零复数，证明 c 是某个非零的有理系数多项式的根当且仅当存在一个有理系数多项式 $f(x)$ 使得 $f(c)=\frac{1}{c}$.

证明：若 c 是某个非零的有理系数多项式 $g(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k x^k$ 的根，则 $g(c)=\sum_{k=1}^{n}a_k c^k=0$.

由 $g(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k x^k$ 非零，知必有从后往前的第一个不为 0 的系数 $a_i(1\le i\le n)$.

此时 $g(c)=\sum_{k=i}^{n}a_k c^k=0$，即有 $\sum_{k=0}^{n-i}a_{k+i}c^k=0$，则有：$-\sum_{k=1}^{n-i}a_{k+i}c^k=a_i$，故有：

$-\frac{\sum_{k=1}^{n-i}a_{k+i}c^k}{a_i}=1$，有：$-\frac{\sum_{k=0}^{n-i-1}a_{k+i+1}c^k}{a_i}=\frac{1}{c}$，故取 $f(x)=-\frac{\sum_{k=0}^{n-i-1}a_{k+i+1}x^k}{a_i}$ 为一个非零有理系数多项式（由有理数域），满足 $f(c)=\frac{1}{c}$.

若存在一个有理系数多项式 $f(x)$ 使得 $f(c)=\frac{1}{c}$，则令 $g(x)=xf(x)-1\in Q[x]$，有

$g(c)=cf(c)-1=c[f(c)-\frac{1}{c}]=0$.

6、此题为《三个初等的矩阵问题》里的题目，此处略去.