练习 1. 我们对任何集合定义了其外测度: 假设 $E \subset \mathbb{R}^n$，定义

$$m_*(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k| : \ Q_k \text{ 是一列闭的正方体，且 } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\Big\},$$

其中 $|Q_k|$ 表示 Q_k 的体积。我们也可以用 (开的) 长方体覆盖来定义外测度: 令

$$m^*(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|R_k| : \ R_k \text{ 是一列开的长方体，且 } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\Big\}.$$

证明：对任何 $E \subset \mathbb{R}^n$，均有 $m_*(E) = m^*(E)$. (这表明我们对外测度的定义和教材的定义 (见教材第 42 页) 是等价的，它们将给出完全相同的理论.)

练习 2. 实数集 $\mathbb{R}$ 上外 Jordan 测度 J_* 定义如下：对任何 $E \subset \mathbb{R}$，

$$J_*(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{N}|I_k| : \ \ I_k \text{ 是一列区间，且 } E \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k\Big\}.$$

证明:

(i) 对任何 $E \subset \mathbb{R}$，均有 $J_*(E) = J_*(\overline{E})$.

(ii) 存在区间 $[0,1]$ 的子集 E，其满足 $m_*(E) = 0$ 且 $J_*(E) = 1$. (这表明在外侧度的定义中，可列覆盖改为有限覆盖会发展出不同的理论.)

(iii) 一般地，(i) 的结论对 m_* 不成立. 即存在 $E \subset \mathbb{R}$ 使得 $m_*(E) < m_*(\overline{E})$.

练习 3. 假设 $E \subset \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n$. 证明：$m_*(E_h) = m_*(E)$，其中 $E_h = \{x+h : x \in E\}$.

练习 4. 假设 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$，其中 δ_i 均为正数. 对于 $E \subset \mathbb{R}^n$，定义 $\delta E = \{(\delta_1 x_1, \dots, \delta_n x_n) : \ (x_1, \dots, x_n) \in E\}$. 证明：$m_*(\delta E) = \delta_1 \cdots \delta_n m_*(E)$.