高等学校试用教材

初等几何研究

朱德祥 编

高等教育出版社

本书是编者以历年使用的自编讲义为基础改编的。改编时,参照了师专初等数学研究课程大纲(几何部分),并充分考虑了师范本科初等几何选课的需要。

全书分四章。前三章是平面几何,第四章是立体几何。本书开头,系统讲述证题通法,把证题术渗透到具体实例中。本书注重联系中学数学教学实际,对中学几何课教材的薄弱环节,或讲的不深透,或学生较生疏处,加以分析研究、补充提高。

本书可作师院数学系,师专数学科,教育学院学生的试用教材及中学数学教师的自修用书。

图书在版编目(CIP)数据

初等几何研究 朱德祥编. —北京:高等教育出版社,2003 重印
ISBN 7-04-001225-1

Ⅰ.初… Ⅱ.朱… Ⅲ.初等几何-研究 Ⅳ.D123.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 20519 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	1985 年 2 月第 1 版
印　　张	8.75	印　　次	2003 年　月第　次印刷
字　　数	209 000	定　　价	8.70 元

前　　言

本书是以昆明师院数学系《初等几何复习及研究》讲义为基础编写的.1982 年接受任务,对原讲义加以增、删、改,作为师院和师专初等几何研究的试用教材.1983 年九月在昆明开审稿会,北京师大丁尔升、钟善基同志,华东师大余元希、田万海同志,陕西师大朱恩宽同志,芜湖师专吴雪庐同志,南通师专高笃生同志,泰安师专周诚询同志,昆明师专李世泽同志,昆明师院徐绍珍、李忠映同志等提了许多宝贵意见,又进行了改写.兼顾师院和师专,但愿不致顾此失彼.

在编写过程中,无意系统地复习中学教材,但进行本课程教学时,无疑要有一点复习回忆的工作,教学才能顺利进行.希望本书在培养对几何问题的观察、分析、综合、推究的能力,通用方法的掌握,熟练技巧的养成等方面,能作出贡献.几何课在中学数学教学中的地位与作用,是不容低估的.使用本教材的经验表明,读者对它是有兴趣的,积极主动的.能独立思考,便能学得生动活泼,有助于智力开发.

审稿会上,大家认为,高师的数学课程中,初等数学课程直接关系到中学数学教学质量,应该受到足够的重视.

师专的《初等数学研究与教学法大纲》,规定有小平板测量、解三角形和制图基本知识的内容.解三角形,指正弦定律和余弦定律的应用,这里割爱了.制图和测量是实践性很强的课程,如果不是走过场,得要多占一点时间.审稿会上,多数人倾向由各校写点小册子,重在指导实践.

本书分四章.前三章讲平面几何,第四章讲立体几何.书的开头部分,系统讲述证题通法,把证题术渗透到各具体实例中,将中学几何课讲得不深透或学生较生疏之处加以分析研究,补充提高.

轨迹和作图是中学数学教材的薄弱环节,但轨迹和作图最能加强

学生分析和全面观察问题的能力,并加深对几何各部分的理解,因之有必要系统讲述,而且所占篇幅并不多.结合解作图题常用的方法,本书还适当介绍了位似及图形的变换.

本书着重联系实际,着重作为一个中学数学教师所必须具备的基础理论和基本训练及技巧.讲正面题材的同时,注意提防发生错误、片面性和一些容易疏忽之处.

我国地广人众,历史遗留的不平衡一时难以消灭,各地区各学校间差别还是相当大的.一刀切的思想是行不通的.编者热忱希望任课教师实事求是地对教材作适当的增删和变动.

使用过原讲义的许多学校和教师给我们提供了不少宝贵的意见和帮助,对他们以及关心本书出版的同志,一并致谢.限于本人水平,疏漏错误之处必多,敬希读者见教,以便更正提高.

朱德祥

1984.2.昆明师院.

目　　录

第一章　证题法·初等几何变换·度量与计算

Ⅰ．证题法与证题术

§1.1　引　　言

数学是研究空间形式和数量关系的学科.在初等几何课程里,这两方面的内容特别明显.

初等数学研究,在师专数学科是必修课,在高师数学系是选修课.高师要不要设初等数学课程,意见从来就不统一.1954年中华人民共和国教育部颁布的高师数学系教学计划,是中国有史以来的第一个国家规定的计划,其中对初等数学的要求是"熟练精通"四个字,值得深思.

初等几何研究的对象是多方面的.如中学缺陷的补充,教材内容的融会贯通,独立工作能力的养成,克服学习中困难的刚毅精神的培养等等.通过这课程的学习,对初等几何,要有概括而连贯的知识,获得观察、分析、综合、推究的能力,掌握通用方法,具备足够的熟练技巧,并能愉快胜任中学几何教学,从中发现问题、解决问题,便从中得到锻炼、提高.

对于最后一点,这里举例说明.例如,把圆的切线定义为与圆只有一个交点的直线就不恰当,因这样定义不利于推广到一般二次曲线.圆是二次曲线,抛物线也是.与抛物线主轴平行的任一直线,总是与抛物线交于一点,难道这些都是切线吗?一条也不是!圆的切线是与圆相交于两个相重合的点的直线.

再举一例　现行中学数学教科书,利用与欧几里得第五公设

等价的平行公理，证明了"三角形的内角和是 180°"，然后推出外角定理："三角形的每个外角大于跟它不相邻的内角".

凡必须利用平行公理证明的命题，称为欧氏几何命题.不需利用这公理证的，称为绝对几何命题.例如，三角形两边之和大于第三边，等腰三角形两底角相等，都是绝对几何命题.

这样，可能认为三角形外角定理是欧氏几何命题.其实不然.例如，要证$\triangle ABC$的外角$\angle CBX > \angle C$（图 1.1），可将中线 AD 延长一倍至 E，连 BE，则 BE 在$\angle CBX$内部，从而$\angle CBE < \angle CBX$.由于$\triangle ACD$与$\triangle EBD$有两边及其夹角对应相等，所以

图　1.1

$$\triangle ACD \cong \triangle EBD,$$

从而有

$$\angle C = \angle DBE = \angle CBE < \angle CBX .$$

仿此可证$\angle A < \angle CBX$.

可见外角定理是绝对几何命题.它不仅在欧氏几何正确，在罗巴切夫斯基几何也正确①.

这一类涉及几何学本质的问题，在几何基础这个科目里讨论.各种几何学有各自的公理系统.关于欧氏几何的公理系统，十三院校协编组编的《中学数学教材教法分论》（高等教育出版社出版）中有，在编者写的《高等几何》第九章里也有，这里不重复了.本书的论述以中学几何为基础，在结构上没有两样，有些观点有所不同.

---

① 在罗氏几何，三角形三内角之和小于 180°，外角定理必然成立.参考朱德祥编《高等几何》（高等教育出版社 1983 年版）第九章§9.7.2 定理 4.

§1.2　关于数学证明

数学这门研究现实世界空间形式和数量关系的学科,是古往今来人们认识自然、改造自然、利用大自然的最重要的工具之一.它源出于实际,在实践中丰富,发展,完善,所以能应用于诸多实践.数学证明了的命题,还要在实践中经受检验,加以提炼,深化提高.

历史证明,仅仅有经验的累积,还不能上升为理论,构成系统的科学.古埃及丰富的几何知识的积累,一经与古希腊的形式逻辑相结合,便使几何学光照环宇,成了最早成熟的科学典范.这里起作用的,是严格的逻辑证明.只有经过严格的逻辑证明,才能使我们从观察到的事物的表面的、片段的、偶然的、不相联系的状态中,通过自觉的主观能动作用,抓住客观事物的本质,上升为一般理论,发现事物的内在联系,得出具有规律性、普遍性的结果,从而使数学具有高度的抽象性和广泛的应用性.

直观和推理　实物是最好的教具,其次是模型,再其次是图形.但实物和模型难能要有就有,因此,图形在教学上起重要作用.几何图形的直观能化抽象为具体,往往是启发抽象思维的有力工具.但图形无论画得如何准确,也无法代替逻辑思维.直观不一定可靠,还往往和实际情况不符,甚至相反,并且复杂的问题,直观就无能为力.所以,尽管直观和实验对我们获得感性认识起重要作用,证明命题还主要靠逻辑推理.

关于命题证明　定义,公理,定理,都是命题.命题由两部分组成.第一部分称前提或假设,第二部分称结论.前者表明全部已知条件,后者表明由这些条件必然得出的事实.

前提不能互相矛盾,否则命题毫无意义.

数学上的命题常写成假言命题的形式,即

若 P,则 Q;或简写作 P　Q(P 蕴含 Q).在命题“平行四边形的对角线互相平分”中,平行四边形是已知条件,对角线互相平分是要证明的结论.若将它写成假言推理的形式,就成:“设一四边形是平行四边形,则其两条对角线互相平分”.无论写成这两种形式的哪一种,都算作抽象命题.读者在证明之先,要先将它具体化,写成

“设四边形 $ABCD$ 中,$AB /\!/ DC$, $AD /\!/ BC$, O 是 AC、BD 的交点.

求证 $AO = OC$, $BO = OD$.”

然后再进行证明.

命题不一定是真的,即不一定成立.真命题称为定理.

所谓数学证明,实际上是由假设经过推理以得出结论.推理的每一步都要求言必有据.每次都要言必有据,逐步深入.倘若向回追溯,穷根究底,势必山穷水尽.为了解脱这种困境,古希腊哲学家把最原始的依据称作公设或公理,约定承认其真确,称之为自明之理,绝大多数是经过亿万次实践,其真实性是毋庸置疑的.这办法一直为数学界所沿用.其实,欧几里得的第五公设就不是自明的.在本书里,我们把基础放在中学的几何学,不去研究公理基础的问题.

证命题时,一定要确切理解题意,给了我们什么条件,要我们得出什么结论,并在初学时就要求学会简洁、明白地写出.这样才知道从哪里出发,目标在何方.然后才谈得上如何去证明.

§1.3　命题的四种变化

我们来介绍两个名词,一个叫命题的换位,即把一个命题的前提和结论互换其地位,前提变为结论,结论变为前提.换位以后的命题称为原命题的逆命题.因而,逆命题的逆命题就变回为原命题,二者互为逆命题.

设原命题为“若 P 则 Q”,则逆命题为“若 Q 则 P”.以符号表达,原命题是 $P \to Q$;逆命题是 $Q \to P$.

另一个名词叫做命题的<u>换质</u>,即把命题的两部分同时加以否定,至于地位则保持不变.换质以后的命题称为原命题的<u>否命题</u>.否定的否定就是肯定,因而否命题的否命题就变回为原命题,二者互为否命题.

否定 P、Q(即 P、Q 的反面)记为 $\bar{P}$、$\bar{Q}$.所以,否命题以符号表为 $\bar{P} \to \bar{Q}$.

务必注意,$a > 0$ 的反面并非 $a < 0$,而应该是 $a \leq 0$.否定“点 P 在圆 O 内”得不出“点 P 在圆 O 外”的结论,这时,点 P 可能在圆 O 外,也可能在圆周上,等等.

经过换位、换质这两个措施,由一个命题可得出四个命题,它们的名称和内容是:

(1) 原　命　题: 若 P 则 Q,($P \to Q$);

(2) 逆　命　题: 若 Q 则 P,($Q \to P$);

(3) 否　命　题: 若 $\bar{P}$ 则 $\bar{Q}$,($\bar{P} \to \bar{Q}$);

(4) 逆否命题: 若 $\bar{Q}$ 则 $\bar{P}$,($\bar{Q} \to \bar{P}$).

举例说明如下:

例 1

(1) 原　命　题: 平行四边形的两条对角线互相平分.

(2) 逆　命　题: 若四边形两条对角线互相平分,那末它是平行四边形.

(3) 否　命　题: 若四边形不是平行四边形,那末它的两条对角线不互相平分.

(4) 逆否命题: 若四边形的两条对角线不互相平分,那末它不是平行四边形.

例 2

(1) 原　命　题: 菱形的对角线互(相)垂(直).　(真)

(2) 逆 命 题: 若四边形的对角线互垂,那末它是菱形 .　(假)

(3) 否 命 题: 若四边形不是菱形,那末它的对角线不互垂 .　(假)

(4) 逆否命题: 若四边形的对角线不互垂,那末它不是菱形 .　(真)

可以注意,将一个命题换质以后再跟着换位,或换位以后再跟着换质,都达到既换位又换质 .即是说,否命题的逆命题以及逆命题的否命题,都是原命题的逆否命题 .

上面的例中,(1)和(2)互为逆命题,(1)和(3)互为否命题,(1)和(4)互为逆否命题,(2)和(3)也互为逆否命题 .

四种命题的关系,图示如下:

原命题(1) (P　Q)	← 互逆 →	逆命题(2) (Q　P)
互否	互逆否	互否
否命题(3) (P　Q)	← 互逆 →	逆否命题(4) (Q　P)

§1.3.1　四种命题的真假关系

命题有真有假(真就是命题成立,假就是不成立),试问四种命题的真假之间有没有什么内在联系 ?

例 3

(1) 三角形中若两边相等,则其对角亦等 .　(真)

(2) 三角形中若两角相等,则其对边亦等 .　(真)

(3) 三角形中若两边不等,则其对角亦不等 .　(真)

(4) 三角形中若两角不等,则其对边亦不等.　(真)

例 4

(1) 若两角为对顶角,则此两角相等.　(真)

(2) 若两角相等,则此两角为对顶角.　(假)

(3) 若两角非对顶角,则此两角不等.　(假)

(4) 若两角不等,则此两角非对顶角.　(真)

例 5

(1) 若四边形四边相等,则为正方形.　(假)

(2) 若四边形为正方形,则四边相等.　(真)

(3) 若四边形四边不等,则非正方形.　(真)

(4) 若四边形非正方形,则四边不等.　(假)

由例 2 和例 4,<u>原命题真,它的逆命题和否命题未必真</u>.所以,一个定理的逆命题和否命题,必须通过证明才能判断其成立.

上面五例表明,(1)和(4)真则同真,假则同假.事实上,这可以归纳为一条规律:<u>互为逆否的两命题,真则同真,假则同假</u>.因为,如果肯定了(1)成立,一经肯定 P,就必然要肯定 Q;一经否定了 Q,就必然只能否定 P 而不能肯定 P 了,即否定 P,这就是(4).

所以(1)、(4)可以互推,同理(2)、(3)可以互推.我们说原命题(1)跟逆否命题(4)是<u>等效</u>或<u>等价</u>的.(2)、(3)也互为逆否命题,也是等价的.

所以要证(1)、(2)、(3)、(4)四个命题同真,只要证

(1)和(2),　(1)和(3),　(2)和(4),　(3)和(4)

四组中有一组成立就够了.

初学的人往往在证明命题时,不去证这命题(或跟它等效的逆否命题),而去证逆命题(或否命题),这是原则性错误.

§1.3.2　充分条件,必要条件,充要条件

命题"平行四边形的两条对角线互相平分"和"菱形的对角线互相垂直"可以换个方式陈述为:

四边形两双对边平行　这四边形的对角线互相平分;

四边形的四边相等　这四边形的对角线互垂.

即是说,四边形具有了两双对边平行的性质,足以保证也具有对角线互相平分的性质;四边形具有了四边相等的性质,便保证也具有对角线互垂的性质.

反过来讲,既然四边形一经具有两双对边平行的性质,便必然具有对角线互相平分的性质,那末两条对角线不互相平分的四边形便不可能是平行四边形了.仿此,两条对角线不互垂的四边形,也就必然不是菱形了,因为它不具有一切菱形所共同具有的属性——对角线互垂.

一般而论,在定理

$$P \quad Q$$

中,条件 P 称为性质 Q 的充分条件,有了 P 便保证有 Q; Q 称为 P 的必要条件,没有 Q, P 就不成立.

如象上面的例 1 和例 3,原命题与逆命题同时成立:

$$P \quad Q, \; Q \quad P,$$

P 是 Q 的充分和必要的条件,简称充要条件.Q 也是 P 成立的充要条件.它们互为充要条件.

作为一个教师,如果没有彻底理解什么是必要条件、充分条件、必要而不充分的条件、充分而不必要的条件、充要条件,那就不可能随时随地纠正学生们的错误.

关于必要和充分的意义,可用几个字概括如下:

必要: 无它必不行,有它未必行.

充分: 有它必行,无它未必不行 .

充要: 有它必行,无它必不行 .

举例:

“对角线互垂”是菱形的必要而不充分的条件;

“对角线互相垂直平分”是菱形的充要条件;

“可内接于圆”是四边形成为矩形的必要而不充分的条件;

条件 P: $\sqrt{1+\sin\theta}=a$,

条件 Q: $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$,

条件 P 不是 Q 的充分条件,也不是必要条件 .

§1.3.3　证明命题要谨防出错

本章的目的之一是如何证明一个命题成立,不幸的是,我们往往碰到不成立的命题要我们去证明,教师们都有这方面的经验 .甚至在教科书上,也会发现一些并不成立的“定理”.所以在正面讲证题之先,我们介绍一些例子,表明如何判断一个命题不成立 .

这时我们总是设法找到一个(只要一个就够了)这样的具体例子来破坏(否定)这命题,它满足命题的前提,但并不满足它的结论 .作为一个教师,不仅要会正面证明命题,还要会以反例来否定一个错误的命题 .

例如要否定“若四边形四边相等,则为正方形”,我们只要举菱形为例;要否定“若两多边形的对应边成比例,则必相似”,只要举一个正方形和一个菱形为例;要否定“若两多边形的对应角相等,则必相似”,只要举一个正方形和一个矩形为例 .

下面我们规规矩矩证一个命题,请读者仔细观察有无漏洞 .

命题: 有一双对边相等和一双对角相等的四边形是平行四边形 .

设四边形 $ABCD$ 中, $AD=BC$, $\angle A=\angle C$(图 1.2) .

求证　$ABCD$ 是平行四边形 .

证: 作　$DE \perp AB$ 于 E, 作　$BF \perp CD$ 于 F .于是直角 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFB$ 有斜边及一锐角相等 .所以

$$\triangle AED \equiv \triangle CFB,$$

图　1.2

从而　$AE = CF, \quad ED = BF$.

连 BD 线, 在两直角三角形 BED 和 DFB 中, 有斜边公用, 又证明了一条直角边相等, 因而合同(即全等) .所以

$$EB = FD, \quad \angle EBD = \angle FDB .$$

从此推得

$$AB \parallel DC \quad 且 \quad AB = AE + EB = CF + FD = CD .$$

有一双对边平行且相等, $\therefore ABCD$ 是平行四边形 .证完 .

这个证明, 看上去无懈可击 .这个命题, 却不成立 !

作一个等腰梯形 $BDCH$(图 1.3), $BD \parallel HC$.易知 $\angle BHD = \angle BCD$ 且 $BC = DH$.以 D 为圆心, 以 DH 为半径作弧交直线 BH 于 A .$\triangle DAH$ 是等腰三角形 .四边形 $ABCD$ 中, 有

图　1.3

$$AD = DH = BC,$$

$$\angle A = \angle BHD = \angle BCD,$$

这四边形具有一双对边相等、一双对角相等的条件, 却并非平行四边形 .

如果象图 1.2 一样作辅助线 DE、BF, 垂足 E、F 不再都是在线段 AB、DC 之上了 .上面那些全等三角形照旧, 而结论完全变

了.

下面两例是从书本上摘下的,用来给我们敲敲警钟.

例 6　定理　设两个三角形有两边及外接圆半径成比例,则必相似.(见 Antoine Dalle 所著《2000 Théorèmes et Problèmes de Géométrie avec Solutions》1912 年出版,260 页 182 题.附了两个证法,照译录于下.)

证一:设在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中(图 1.4)有

图　1.4

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{OC}{O'C'}$$

(其中 O、O'表外心),则

$$\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}B'C'}=\frac{OC}{O'C'},\quad 或\quad \frac{MC}{M'C'}=\frac{OC}{O'C'}.$$

所以,两个直角三角形 MOC 与 $M'O'C'$因斜边及一条直角边成比例而相似.因之有

$$\angle A=\angle MOC=\angle M'O'C'=\angle A'.$$

仿此,由直角三角形 NOC 相似于$\triangle N'O'C'$得$\angle B=\angle B'$.

$$\therefore\quad \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'.$$

证二:作外接圆直径 COD 及 $C'O'D'$(图 1.5),则因

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{2R}{2R'}\quad (R、R'表圆半径),$$

图　1.5

可见$\triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$.

因之
$$\angle A = \angle BDC = \angle B'D'C' = \angle A',$$
$$\angle B = \angle ADC = \angle A'D'C' = \angle B'.$$
$$\therefore \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'. \qquad \text{证完}.$$

其实,这两个证法不妨这样修改:既然$\angle C$和$\angle C'$的两个对应部分相等,则其和亦等,即$\angle C = \angle C'$.于是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$有一角相等且夹边成比例,因此相似.

如此以三个方法证明了的“定理”,我说它不成立,请读者指出错误何在?

应该提请注意,倘若这“定理”成立,那末就可推出下面的“定理”:“同圆内两个内接三角形若有两边分别相等,则必合同.”

这是因为:在$\triangle ABC$和$\triangle A'BC$(图1.6)中,若有$AC = A'C$,则根据上述命题,既有两边和外接圆半径成比例:

$$\frac{BC}{BC} = \frac{AC}{A'C} = \frac{R}{R} = 1,$$

就必然相似,而相似比又是1,所以$\triangle ABC$与$\triangle A'BC$就应合同了.但这明显不成立!

图　1.6

例 7　一个三角形的两边和其中一边上的

高,同着另一三角形的两边和其中一边上的高对应相等,则此两三角形全等.

这是五十年代我们用过的一本《初级中学课本平面几何》48页习题十五的第13题.

揣想著者是希望这样证的:设(图1.7) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$,高 $AD = A'D'$,则在两个直角三角形 ABD 和 $A'B'D'$ 中,有斜边和一直角边对应相等,因而全等,于是有

$$\angle B = \angle B'.$$

图 1.7

因而$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$有两边及其夹角分别相等,故全等.

谁要不相信这命题不成立,请看图1.8.

图 1.8

§1.4 逆命题证法

证明逆命题,常用下列三法之一.

(一) 直接证明逆命题,即将原命题的证明过程,反其道而行之,我们举例说明.

定理 线段的中垂线(即垂直平分线)上任一点,距线段两端等远.

证:设 AB 为已知线段(图 1.9),M 是它的中垂线上任一点.则斜线 MA、MB 的足与垂线足 O 有等距离,

图 1.9

$$\therefore \quad MA = MB.$$

逆定理 凡距两点 A、B 等远的点必在线段 AB 的中垂线上.

证:设 M 为满足 $MA = MB$ 的任一点,作 $MO \perp AB$,则由于斜线 MA 与 MB 等长,斜线足应距垂足 O 等远,即 $OA = OB$,所以 M 在 AB 的中垂线上.

(二) 证明与逆命题等效的否命题.仍以上面的定理为例.

否定理 不在中垂线上的任一点,距线段两端不等远.

证:设 M'不是线段 AB 中垂线上的点(图 1.9),比方说,它和 B 在中垂线的同侧.于是从 M'向直线 AB 所引的垂线足 O'也和 B 在中垂线的同侧(否则两垂线将相交,而过此交点将有两直线垂直于 AB 了).所以 $O'A > O'B$,于是按斜线比较长短的定理,$M'A > M'B$.

(三) 利用原命题本身证明逆命题.举一个例:

定理 两直线被一直线所截,若同位角相等,则此两直线平行.

这定理利用外角定理很容易反证.

逆定理 两平行直线被一直线所截,则同位角相等.

证:设两平行线 AB 和 CD(图 1.10)被直线 EFX 所截,要证

同位角∠XEB 和∠XFD 相等.

过点 E 引直线 EB'使

$$\angle XEB' = \angle XFD,$$

则由定理本身, $EB' /\!/ CD$.由于按平行公理, 通过 E 只能有一条直线跟 CD 平行, 可见直线 EB'重合于直线 AB.∴ $\angle XEB = \angle XFD$.

图 1.10

注意: 本例中证法的主要依据是这样一个事实: 通过点 E 作平行 CD 的直线只有唯一的一条(平行公理).

习　题　一

1. §1.3.3 中例 6 和例 7 如何修正,便成正确命题?

2. 写出下列命题的四种变化(写成若…则…的形式).并分别指出其真假:

a. 凡直角皆相等;

b. 三角形两边中点的连线平行于第三边;

c. 两个邻补角的平分线互相垂直.

3. 利用外角定理证明:

a. 三角形中两角之和小于二直角;

b. 两直线被一直线所截,若同位角相等,则此两线平行;

c. 同一直线的两条垂线不可能相交;

d. 从钝角一边上一点向另一边引垂线,则垂足在后一边的反向延长线上.

4. 证明: 设两个直角三角形斜边相等而一锐角不等,则不等角所对的边也不等,大角的对边较大.

叙述并证明逆定理:

5. 写出命题“两直线夹角的平分线上一点距此两线等远”的逆、否、逆否命题,并独立地证明它们.

6. 证明: 圆外切四边形一双对边之和等于另一双对边之和.叙述并证明逆定理.

7．从直线外一点向直线作一些斜线以及它们的射影，证明：

1°射影相等的两斜线也相等；

2°射影大的斜线也较大；

3°并且它们的逆命题成立．

§1.5 直接证法与间接证法

前面讲过，所谓证明一个命题，就是从前提利用定义、公理和已知定理推出结论．

由命题的假设出发，根据定义、公理、定理进行一系列正面的逻辑推理，最后得出命题的结论，这种证明方法称为直接证法．

有的问题，往往不易甚至不能直接证明，这时，不妨证明它的等效命题成立，因而也能间接地达到目的．这种证法称为间接证法．

几何里使用直接证法比较多，然而间接证法有时非使用不可．凡能用直接证法证明，而证法又不过分冗长时，最好避免用间接证法，尤其在初中，儿童对间接推理比较难以接受．

用间接法证明定理时，是证一个等效命题，多半是证定理的逆否命题成立．具体说来，由否定结论的正确性出发，根据假设、定义、公理、定理，进行一系列正确的推理，最后得出一个矛盾的结果(与命题的假设、某个公理或定理矛盾，或自相矛盾)；这就表明结论的反面不能成立，从而可以肯定结论的正确性．这种驳倒反面的证法，叫做反证法．

当结论的反面只有一款时，否定了这一款便完成证明．这种较单纯的反证法，叫做归谬法．

当结论的反面有若干款时，必须驳倒其中每一款，这种较繁的反证法，称为穷举法，即列举一切可能的而又彼此互相排斥的情况，逐一驳倒所有不能成立的，最后剩下的就是所要证的结论．

当欲证某图形具有某种性质而又不易直接证明时，有时可以

作出具有所示性质的图形,然后证明所作的图形跟所给的某图形就是同一个,把它们等同起来.这种证法,叫做同一法.能用同一法证明的命题,实际上是依据这样一桩事实:具有所示性质的图形是唯一的.§1.4中证明逆命题的第三个方法便是同一法.

- 证题方法
  - 直接证法
  - 间接证法
    - 反证法
      - 归谬法
      - 穷举法
    - 同一法

§1.5.1 间接证法举例

例1(归谬法) 圆内不是直径的两弦,不能互相平分.

假设:AB、CD(图1.11)是圆内非直径的两弦.

求证:AB、CD不能互相平分.

证:假设结论的反面成立,即设弦AB与CD的交点P既是AB的又是CD的中点.我们知道,弦的中点跟圆心O的连线是垂直于弦的.那末通过P点就有两条直线AB和CD与OP垂直了,这是不可能的.所以定理得到反证.

图 1.11

注意:当两弦之一,例如AB是直径时,命题显然成立,即AB与CD不能互相平分,因为这时P不可能是圆心O(否则CD也是直径了),即P非AB之中点.

例2(穷举法) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

假设:在$\triangle ABC$(图1.12)中,$\angle ACB = d$①,M是AB的中点.

① d是法文droit(直的意思)的第一个字母,一些国家用以表示直角.

求证: $CM = AM = BM$.

证: CM 与 AM 的大小关系有穷举而互斥的三种:

$$CM > AM,$$
$$CM < AM,$$
$$CM = AM.$$

1°若 $CM > AM$,则 $CM > BM$. 于是,由△ACM 和△BCM 得

$$\angle A > \angle ACM, \quad \angle B > \angle BCM.$$

图　1.12

相加得$\angle A + \angle B > \angle C$,即 $2d - \angle C > \angle C$,或$\angle C < d$,与假设矛盾.

2°若 $CM < AM$,则 $CM < BM$.仿上推得$\angle C > d$,也与假设矛盾.

结论反面的这两款都不成立,所以结论成立:

$$CM = \frac{1}{2} AB.$$

备注:

(1) 这定理很容易直接证明.直角△ACB 是矩形 $ACBD$ 的一半,矩形对角线相等且互相平分,立即得本题.我们这样证,既阐明了穷举法,又从此引出一个更为深刻的定理:

设 CM 为△ABC 的中线,则

1°当 $CM > \frac{1}{2} AB$ 时,$\angle C$ 为锐角;

2°当 $CM < \frac{1}{2} AB$ 时,$\angle C$ 为钝角;

3°当 $CM = \frac{1}{2} AB$ 时,$\angle C$ 为直角.

(2) 方才陈述的定理,前提有三款,既是穷举的,又是彼此不相容的;结论也分三款,也满足既穷举又互斥的条件.容易用反证法证明逆定理成立:

设 CM 为△ABC 的中线,则

1°当∠C 为锐角时, $CM > \frac{1}{2}AB$;

2°当∠C 为钝角时, $CM < \frac{1}{2}AB$;

3°当∠C 为直角时, $CM = \frac{1}{2}AB$.

普遍说来,在一个命题中,如果假设和结论有相同的款数,并且双方都把事物的可能一一道尽,双方各自彼此互斥,那末这样的命题叫做<u>分断式命题</u>.

定理　分断式定理的逆命题一定成立.

例 3(同一法)　以正方形 $ABCD$ 的一边 CD 为底向形内作等腰△ECD,使其两底角为 15°,则△ABE 是等边三角形.

证:以 AB 为边向正方形内作等边△ABE'(图 1.13),我们来证明点 E'跟 E 同为一点.

显然△BCE'应是等腰三角形,它的顶角∠CBE' = 90° - ∠ABE' = 30°,所以它的底角

图　1.13

$$\angle BCE' = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°,$$

从而
$$\angle DCE' = 15°.$$

仿此有∠CDE' = 15°.

∴点 E'与 E 重合,△ABE 是等边三角形.

§1.6　综合法与分析法

证题时不论用直接或间接证法,都需要寻求证明的理路,这是证明的关键和困难所在.由于思维过程的顺逆,就有“综合法”与“分析法”之分.

综合法是由命题的假设入手,由因导果,通过一系列的正确推理,逐步靠近目标,最终证出结论.

分析法则由命题的结论入手,承认它是正确的话,执果索因,寻求在什么情况下结论才是真确的.这样一步一步逆而推之,直到与假设会合.于是就发现由假设通往结论的思维过程.

无论综合法或分析法,都要在实践中经历一个艰苦思索的过程.

综合法由假设推演,支路很多,可以应用的定理也多,往往不知应如何迈步,这是它的缺点.便利在于叙述简明,容易使人理解证题的一条粗线.分析法先认定结论为真,倒推而上,容易启发思考,每一步推理都有较明确的目的,知道推理的依据,使人了解思索过程.在教学过程中,宜乎多用分析法想问题,用综合法写出.

例 1　平行四边形(图 1.14) $ABCD$ 外接于平行四边形 $EFGH$,则其对角线 AC、BD、EG、HF 共点.

图　1.14

我们用综合法证明.

设 AC、BD 的交点为 O,则 O 为 AC 和 BD 的中点.因

$$\angle AHE = \angle CFG,\ \angle AEH = \angle CGF,\ EH = GF,$$

$$\therefore\quad \triangle AHE \equiv \triangle CFG,$$

从而

$$AE = CG,\quad AH = CF.$$

可见 AE 与 GC 平行且相等,即 $AECG$ 是平行四边形.所以,EG 与 AC 互相平分,即 EG 通过 AC 的中点 O.

仿此,HF 也通过点 O.证完.

例 2　证明等腰三角形底边上任一点到两腰的距离之和为常量.

我们使用分析法证明(证一和证二).

证一:设 P 为等腰△ABC(图 1.15)底边 BC 上任一点,$PD\perp AB$,$PE\perp AC$.要证明 $PD+PE$ 为常量,试想将点 P 在底边上移动与其一端(例如 C)重合,容易看出,这常量便应该是一腰上的高 CH.所以,我们要证明

图 1.15

(1) $$PD+PE=CH.$$

在高线 CH 上截取 $FH=PD$(作 $PF\perp CH$,则 $PDHF$ 为矩形,从而 $FH=PD$),那末要证(1)就只须证

(2) $$PE=CF.$$

如果这一步证到了,那末两个直角三角形 PCE 和 CPF 中,斜边公用,还有一条直角边相等,这两三角形便应合同.我们又把目标转移到证明△$PCE\equiv$△CPF.

但这是容易证明的,因为它们除斜边公用外,还有一个锐角相等:

$$\angle PCE=\angle BCA=\angle ABC=\angle CPF.$$

所以写出证明时,先作 $CH\perp AB$,$PF\perp CH$ 证明△$PCE\equiv$△CPF,于是得出(2)式和(1)式.定理就证完了.

证二:设延长 DP 至 G(图 1.16)使 $PG=PE$,那末由上面所说,问题归结到证明 $GD=CH$,那时 $CHDG$ 将有一双对边 CH 和 GD 平行且相等,它将是平行四边形.又因它有一角 CHD 为直角,$CHDG$ 将是矩形.可见问题归结到证明

图 1.16

$$\angle PGC=d.$$

这是没有困难的,因为在△PCE 和△PCG 中,PC 公用,$PE=$

PG, $\angle CPE = d - \angle ACB = d - \angle ABC = \angle BPD = \angle CPG$, 即有 $\triangle PCE \equiv \triangle PCG$. 于是 $\angle PGC$ 确为直角,定理证明了.

证三: 如果连接 AP(图 1.17),那末就面积而言

$$S_{ABP} + S_{APC} = S_{ABC},$$

图 1.17

即
$$\frac{1}{2}AB \cdot PD + \frac{1}{2}AC \cdot PE = \frac{1}{2}AB \cdot CH.$$

因 $AB = AC$, 立即得

$$PD + PE = CH.$$

习 题 二

用间接法证明习题 1—5:

1. 两圆相交,则其交点不能在连心线的同一侧.

2. 若 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 有公共底边 BC,且 $\angle BA'C < \angle BAC$,则点 A' 在 $\triangle ABC$ 的外部.

3. 若 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 有公共底边 BC,且 $A'B + A'C > AB + AC$,则点 A' 在 $\triangle ABC$ 的外部.

4. 设梯形两底之和等于一腰,则此腰两邻角的平分线必通过另一腰的中点.

5. 以正方形一边为底,在正方形所在的一侧作等腰三角形,使其顶角为 $30°$,则将其顶点与正方形另两顶点连线,必构成等边三角形.

6. A 是等腰 $\triangle ABC$ 的顶点,将其腰 AB 延长至 D,使 $BD = AB$. 知 $CD = 10$ 厘米,求 AB 边上中线的长.

7. 四边形有一双对角互补,则必为圆内接四边形.

8. 证明:等腰三角形底边延长线上任一点到两腰距离之差为常量.

9. 证明:等边三角形内任一点到三边距离之和为常量. 若此点取在三角形外,命题如何变化?

10. $\triangle ABC$ 中 $AB = AC$,在 AC 上取 E 点,在 AB 的延长线上取 D 点,使 $BD = EC$,证明 BC 平分 DE.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 是钝角, CD 是 AB 边上的高. 证明 $AB > 2CD$.

12. 在角的两边上各有两点 A、B 和 A'、B'，它们到角顶 O 的距离满足 $OA = OA'$、$OB = OB'$。设 AB' 与 $A'B$ 的交点是 C，求证 OC 是角的平分线。

§1.7　演绎法与归纳法

证题时，由一般规律推导特殊事项的称为<u>演绎法</u>。几何学中的证明过程，大多数用的就是演绎推理。反之，由各个特殊事项加以抽象提高，以得出一般规律的，则称为<u>归纳法</u>。

在发现客观规律的最初阶段，一定要观察大量的个别现象，加以分析研究，猜出指导这各别现象的法则，这便是归纳的过程，抽象的过程。然后用演绎推理加以验证或给以严密证明。所以，归纳法是发现真理的重要方法。

归纳法分普通归纳法和数学归纳法两种。

我们给一个普通归纳法的例。

设在圆 O 内引一直径 PA 和另一弦 PB(图 1.18 左)。由三角形一外角等于不相邻二内角之和这个定理得

图　1.18

$$\angle AOB = 2\angle APB.$$

当 PA(图 1.18 中、右)为任一弦，点 O 在 $\angle APB$ 之内或在其外时，这等式也成立。于是归纳为一个定理：同弧所对的圆心角是圆周角的两倍。

命题总是由观察归纳得来的，观察的对象有遗漏，归纳的结果

就可能错误或带有片面性.凡用普通归纳法证的命题,一定要多加小心.

现在举两个数学归纳法的例.

例 1 设 A_1、A_2、A_3、…、A_n 为同一直线上 n 点,则就有向线段言,恒有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n.$$

证:当 $n=3$ 时,上式即 $A_1A_2+A_2A_3=A_1A_3$,这是两有向线段之和的定义.

现设上式对于 n 成立,证其对于 $n+1$ 也成立:

$$\begin{aligned}&A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_{n+1}\\&=(A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n)+A_nA_{n+1}\\&=A_1A_n+A_nA_{n+1}=A_1A_{n+1}.\end{aligned}$$

由数学归纳法,所以定理成立.

例 2 圆上一点至内接偶数边多边形(不一定要是凸的)相间诸边(所在直线)的距离之积,等于该点至其余诸边(所在直线)的距离之积.

假设:$A_1A_2\cdots A_{2n}$是圆内接 $2n$ 边形,圆上任一点是 P.P 到直线 A_1A_2、A_2A_3、…、$A_{2n}A_1$ 的距离依次记为 p_1、p_2、…、p_{2n}.

求证:$p_1p_3\cdots p_{2n-1}=p_2p_4\cdots p_{2n}$.

证:1°当 $n=2$ 时,便成为证明下面的定理:

从圆周上一点 P 到内接四边形 $ABCD$(图 1.19)各边作垂线 PE、PF、PG、PH,则 $PE\cdot PG=PF\cdot PH$.

如图所示,$\angle EPF=2d-\angle ABF=2d-\angle ADC=\angle HPG$.若命题成立,便应有 $PE∶PH=PF∶PG$,那时将有

(1) $\triangle EPF\sim\triangle HPG$.

所以我们把目标转移到证明这两个三角形相似.它们已有一角相等,只需再证明还有一组对应角相等.我们利用三个圆内接四边形

$PEBF$、$ABCD$、$PHDG$,便有
$\angle PFE = \angle PBE = \angle PBA =$
$\angle PDA = \angle PDH = \angle PGH$.
所以(1)式确成立,即证明了定理对于 $n=2$ 成立.数学归纳法有了起点.

2°设定理对于 n 成立,证明它对于 $n+1$ 也成立,即假设

$$p_1 p_3 \cdots p_{2n-1} = p_2 p_4 \cdots p_{2n},$$

图　1.19

求证

$$p_1 p_3 \cdots p_{2n+1} = p_2 p_4 \cdots p_{2n+2}.$$

连接 $A_1 A_{2n}$(图1.20),将内接 $2n+2$ 边形分为两部分,一为内接 $2n$ 边形 $A_1 A_2 \cdots A_{2n}$,另一为四边形 $A_1 A_{2n} A_{2n+1} A_{2n+2}$.以 p 表圆周上点 P 到直线 $A_1 A_{2n}$ 的距离,那末对第一部分按归纳假设有

$$p_1 p_3 \cdots p_{2n-1} = p_2 p_4 \cdots p_{2n-2} p;$$

对第二部分按已证结果有

$$pp_{2n+1} = p_{2n} p_{2n+2}.$$

相乘,约去因子 p,便得所求证的等式.即归纳法又有步步上升的阶梯.

至此,我们的定理被证明了.

注意:此定理还可不用归纳法,像下面这样证明:首先证明一个很有用的定理“三角形两边之积等于第三边上的高与外接圆直径之积”,然后连接 P 与各顶点 A_1、A_2、…、A_{2n},并以

图　1.20

d 表外接圆直径,那末逐次应用此定理得

$$dp_1 = PA_1 \cdot PA_2, \quad dp_2 = PA_2 \cdot PA_3,$$
$$dp_3 = PA_3 \cdot PA_4, \quad dp_4 = PA_4 \cdot PA_5,$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$dp_{2n-1} = PA_{2n-1} \cdot PA_{2n}, \quad dp_{2n} = PA_{2n} \cdot PA_1 .$$

最后,左右两侧各相乘,便得到证明.

习　题　三

1.证明:三角形两边之积等于第三边上的高与外接圆直径之积.

2.多边形的边数为 n,已知它是从一个顶点所能引的对角线数的 m 倍.

1°写出 n 与 m 的关系式;

2° m 能取哪些值?相应的多边形是几边的?

用普通归纳法证下列命题(3—7):

3.设圆 O 与圆 O 交于 P、Q 两点,过 Q 任作一直线交两圆于 A、B,则 $\angle APB = \angle OPO'$.

4.设 M、N 分别是圆弧 AB、AC(劣弧或优弧)的中点,则三直线 AB、AC、MN 交成一等腰三角形.

5.在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B = 2\angle C$, $AD \perp BC$ 于 D, M 是 BC 的中点,求证 $DM = \frac{1}{2} AB$.

6.设直线 $a /\!/ b$,任一点 M 关于 a、b 的对称点分别是 A、B,则 AB 等于定长.

7.设直线 a、b 交于 O,任一点 M 关于 a、b 的对称点分别是 A、B,则 $\angle AOB$ 等于定角.

用数学归纳法证明 8—9 题:

8.圆内接偶数边凸多边形相间诸角之和等于其余各角之和.

9.从一点 M 作多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边(所在直线)A_1A_2、A_2A_3、…、A_nA_1 的垂线 MH_1、MH_2、…、MH_n,则

$$A_1H_1^2 + A_2H_2^2 + \cdots + A_nH_n^2 = A_2H_1^2 + A_3H_2^2 + \cdots + A_1H_n^2 .$$

10.证明:从圆上一点到其内接四边形一双对边的距离之积,等于从该点到两条对角线的距离之积。

11．设 A、B、C、D 为直线上顺次的四点，证欧拉定理：

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

若使用有向线段，则不论四点顺序如何，此式总成立．

§1.8　等线段的证法

关于证题的一般方法，就介绍到这里．从此刻起介绍一些所谓证题技巧或证题术，无非是将证题的通用方法来处理分门别类的问题．

证明线段相等的方法很多，无法枚举，常用的大体如下：

1°合同三角形的利用；

2°等腰三角形的利用；

3°平行四边形的利用；

4°媒介线的利用；

5°圆内等量的利用，例如距圆心等远的二弦必等，圆心角（或圆周角）相等则所对的弧或弦也相等，从圆外一点向圆所引的两切线相等，等等；

6°定理“一组平行线截某直线成等线段，则截任一直线成等线段”的应用；这命题的特款是三角形或梯形中位线性质的应用；

7°比例相似形的利用；等等．

例 1　在△ABC 的二边 AB 和 AC 上向外作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$，则 BC 边上的高线 AD 平分线段 FH（图 1.21）．

证：设直线 AD 交线段 FH 于 M．由于图上看不出以 FM 和 MH 为对应边的合同三角形，势非借助于补助线不可．我们知道，如果 $FM = MH$，那末从 F、H 向 AD 所作垂线 FP、HQ 应等长，反过来也对．所以我们转移目标，试证

$$FP = HQ.$$

容易发现，两个直角三角形 AFP 和 BAD 中，有

$$AF = AB,$$

$$\angle FAP = \angle ABD$$

(同为$\angle BAD$的余角),因而有

$$\triangle AFP \equiv \triangle BAD, \quad FP = AD.$$

仿此

$$\triangle AHQ \equiv \triangle CAD, \quad HQ = AD.$$

所以取 AD 作媒介,证得 $FP = HQ$.最后由$\triangle FMP \equiv \triangle HMQ$得

$$FM = MH.$$

图　1.21

例 2　C 是弦 AB 的中点,通过 C 引弦 PQ,并在此弦两端作圆的切线 PX 和 QY,它们交直线 AB 于 X 和 Y.证明 $PX = QY$, $AX = BY$(图 1.22).

证:由于$\triangle OPX$和$\triangle OQY$都是直角三角形且 $OP = OQ$,如果再有 $PX = QY$,它们便将合同了,反过来也对.

图　1.22

要证这两直角三角形合同,只须证明它们有一锐角对应相等,我们就从这方面来考察.

P、C 两点在以 OX 为直径的圆上,Q、C 两点在以 OY 为直径的圆上,故有

$$\angle POX = \angle PCX = \angle QCY = \angle QOY.$$

于是确有
$$\triangle OPX \equiv \triangle OQY,$$
从而得
$$PX = QY, \quad OX = OY.$$

OC 成为等腰$\triangle OXY$的高线,$\therefore CX = CY$.又 $CA = CB$,所以 $AX = BY$.证完.

例 3　AB 是圆的直径,从圆上一点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D,圆在 A、C 两点的切线相交于 E.证明 BE 平分 CD(图 1.23).

证:作 B 点的切线交直线 CE 于 F,并以 M 表 BE 与 CD 的交点,得 $\triangle ECM\sim\triangle EFB$.于是

$$\frac{CM}{EC}=\frac{FB}{FE}=\frac{FC}{FE}=\frac{BD}{BA}=\frac{MD}{EA}=\frac{MD}{EC}.$$

图　1.23

$$\therefore\quad CM=MD.$$

可见要证两线段 a 与 b 相等,还有这样一种办法,就是找出一个媒介 c,证 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

例 4　圆的二弦 AB 与 CD 相交于圆外一点 E(图 1.24),由 E 引 AD 的平行线与直线 BC 相交于 F.作切线 FG,G 表切点.证明

$$EF=FG.$$

图　1.24

证:我们有 $FG^2=FB\cdot FC$,所以需要证明 $FE^2=FB\cdot FC$ 或

$$\frac{FE}{FB}=\frac{FC}{FE}.\tag{1}$$

由于$\triangle BFE$ 和$\triangle EFC$ 有一角公用,若(1)式成立,这两三角形就相似,反过来也对.要证这两三角形相似不难,因为此外尚有一角相等:

$$\angle BEF=\angle BAD=\angle BCD=\angle FCE.$$

所以两三角形确相似,(1)式成立,于是

$$FE^2=FB\cdot FC=FG^2,$$

即

$$FE=FG.$$

例 5　大家知道,我们有这样一个定理:等腰三角形两底角的平分线相等.现在我们来证它的逆命题.

定理　设三角形两角的平分线相等,则必为等腰三角形.

用反证法证明.假设$\triangle ABC$中,平分角线$BD = CE$.求证$AB = AC$(图 1.25).

假设AB与AC不等,总有个大的,记作AB,即设$AB > AC$.

于是$\angle ACB > \angle ABC$.取其一半,$\angle BCE > \angle CBD$.那末在$\triangle BCE$和$\triangle CBD$中,BC公用,$CE = BD$,而夹角不等,故得$BE > CD$.

图　1.25

现在以BE、BD为两边作平行四边形$EBDF$,则一方面,

$$EF = BD = CE,\quad \text{推出}$$

(1)
$$\angle ECF = \angle EFC.$$

另一方面,
$$DF = BE > CD,\quad \text{推出}$$

(2)
$$\angle DCF > \angle DFC.$$

由(1)、(2)推出

$$\angle ECD < \angle EFD = \angle EBD,$$

二倍之,
$$\angle ACB < \angle ABC.$$

$$\therefore\quad AB < AC,$$

与$AB > AC$的假设矛盾.所以定理得到反证.

习　题　四

1. AB是圆的直径,引弦AC使$\angle BAC = 30°$,过点C引切线交AB的延长线于D.求证$AC = CD$.

2. 设BC切圆O于B,OC垂直于半径OA而交直线AB于D,求证$BC = CD$.(两种情况.)

3. AB 是圆 O 的弦,通过 A、O 两点任作一圆与 AB 相交于 C 且与圆 O 再交于 D.求证 $BC = CD$.(三种情况.)

4. 过圆上任一点向两条定直径作垂线,证明两垂足间的距离为定长.

5. 两圆 O 与 O'相交于点 P, M 是 OO'的中点,过 P 任作直线交两圆于 A 及 A', Q 是 AA'的中点.证明 $MP = MQ$.

6. 两圆外切,一条外公切线切其中一圆于 A, AB 为此圆直径,证明从 B 向另一圆所作切线之长等于 AB.

7. 设△ABC 的∠A 及其外角的平分线交直线 BC 于 E 及 F,证明过 A 点所作圆 ABC 的切线必平分线段 EF.

8. 证明:平行于三角形的底边而介于其他两边间的线段,必被底边上的中线所平分.

9. 通过梯形对角线交点作平行于底的直线,证明其介于两腰间的线段以对角线交点为中点.

10. 设圆内接四边形的两对角线互垂,则过其交点所作任一边的垂线必平分其对边.

11. 设△ABC 中 BC 边上的高为 AD,直线 AD 交外接圆于 E, H 是垂心,证明 $HD = DE$.

12. 设△ABC 三边长为 a、b、c; p 是半周长; D、E、F 是内切圆的切点; D_1、E_1、F_1, D_2、E_2、F_2, D_3、E_3、F_3 分别是角 A、B、C 内的旁切圆的切点(图 1.26).证明

$$AE = AF = CD_2 = CE_2 = BD_3 = BF_3 = p - a;$$

$$BF = BD = AE_3 = AF_3 = CE_1 = CD_1 = p - b;$$

$$CD = CE = BF_1 = BD_1 = AF_2 = AE_2 = p - c;$$

$$AE_1 = AF_1 = BF_2 = BD_2 = CD_3 = CE_3 = p.$$

13. 从平面上一点 P 向一定圆引两切线,将圆周上任一点 M 到切点 A、B 连线.过点 P 作直线平行于 M 点的切线.求证两直线 MA、MB 在此直线上所截的线段长度与点 M 的位置无关,且此线段被 P 所平分.

14. 在△ABC 中,分别以 AB 和 AC 为一边向外作等边三角形 ABD 和 ACE,求证 $CD = BE$.

15. 在△ABC 中,证明 BC 边的中垂线和角 A 的平分线相交在外接圆周上;它们的交点距 B、C 两点,距内切圆心,距角 A 内的旁切圆心都等远.

对于角 A 的外角平分线证明类似的定理.

从此推证:三个旁切圆半径之和等于内切圆半径加 4 倍外接圆半径.

图　1.26

§1.9　等角的证法

证明两角相等,跟证明两线段相等是紧密联系在一起,相互致用的.上节证两线段相等时,不少就是从证两角相等入手的.证明两角相等,主要有下面的途径:

1°合同三角形的利用;

2° 等腰三角形的利用;

3° 平行线和平行四边形的利用;

4° 媒介角的利用;

5° 应用定理“两三角形若有两角相等,则第三角亦等”,或应用“三角形一角的外角等于另外两内角之和”;

6° 关于圆心角、圆周角、弦切角等的度量的应用;

7° 相似形的应用;等等.

例 1　设 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的高线,则 $\triangle DEF$ 称为 $\triangle ABC$ 的垂足三角形,证明这些高线平分垂足三角形的内角或外角.

证:1° 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形(图 1.27).

以 H 表 $\triangle ABC$ 的垂心,则 H、D、C、E 四点共圆,从而

$$\angle HDE = \angle HCE = \angle FCE.$$

图　1.27

又 B、C、E、F 四点也共圆,故

$$\angle HDE = \angle FCE = \angle FBE = \angle FBH.$$

最后从 B、D、H、F 四点共圆得

$$\angle HDE = \angle FBH = \angle FDH.$$

即 AD 平分 $\angle EDF$.仿此证明另两高线也平分垂足三角形另两角.

2° 设 $\triangle ABC$ 为钝角三角形(图 1.28).

仍以 H 表垂心.这时容易看出,点 A 是锐角三角形 HBC 的垂心,而 $\triangle DEF$ 是 $\triangle HBC$ 的垂足三角形,所以根据方才证明的结果,AD、AE、AF 是 $\triangle DEF$ 的内角平分线,从而 $\triangle ABC$ 的

图　1.28

三高线依次内分、外分、外分垂足$\triangle DEF$的角.

我们为何不考虑直角三角形呢?

例 2　从圆 O 外一点 P 引切线 PC 和 PD,通过弦 CD 的中点 M 任作一弦 AB,求证 PO 平分$\angle APB$.

证:问题在于证明半线(射线)PA 和 PB(图 1.29)关于直线 PO 成对称.若以 E 表 PB 和圆的另一交点,那末就是要证 E、A 两点对称于 PO 线,或$\angle AMP=\angle PME$.

从直角$\triangle OCP$ 看出 $PO\cdot PM=PC^2$,又因 $PC^2=PB\cdot PE$,那末我们有

$$PO\cdot PM=PB\cdot PE,$$

所以四点 M、O、B、E 共圆.于是有

$$\angle AMP=\angle BMO=\angle BEO=\angle EBO=\angle PME.$$

图　1.29　　　　　　图　1.30

最后从三角形 MAP 和 MEP 的合同,知道 PO 平分$\angle APE$.

又证:若能证明四点 P、A、O、B 共圆,那末圆周角 OPA 和 OPB 对等弦即对等弧,因而相等(图 1.30).

一方面,从直角$\triangle OCP$ 得

$$OM\cdot MP=MC^2.$$

另一方面又有

$$MA \cdot MB = DM \cdot MC = MC^2 .$$

∴　有　　$MO \cdot MP = MA \cdot MB$,

可见四点 P、A、O、B 确实共圆,从而命题得证.

例 3　二圆外切于 P,一圆在其上一点 C 的切线交另一圆于 A、B,求证 PC 是∠APB 的外角平分线.

证:作公切线 PD(图 1.31),

则　$\angle BPC = \angle BPD + \angle DPC$.

但　$\angle BPD = \angle PAC$,

$\angle DPC = \angle DCP = \angle ACP$.

图　1.31

∴　$\angle BPC = \angle PAC + \angle ACP = \angle EPC$.

例 4　从圆心 O 向已知直线 l 作垂线 OM(图 1.32 上 l 与圆相交,当 l 与圆相切或不相遇时,命题仍成立),通过垂足 M 任作两直线 AB 及 CD,交圆于 A、B、C、D.求证 AD、BC 交 l 之点 P、Q 距 M 等远.

证:作点 D 关于直径 OM 的对称点 D',DD'和 l 同垂直于 OM 因而平行,于是有

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 .$$

(后一等式应用了对称性)由圆内接四边形 $BCDD'$有$\angle 3 = \angle 4$.故

$$\angle 1 = \angle 4,$$

图　1.32

从而 M、Q、B、D'四点共圆.

于是　$\angle 5 = \angle MD'Q = \angle MBQ = \angle ABC = \angle ADC = \angle 5'$.

又由对称性　　$\angle 1 = \angle 1'$,　$MD' = MD$.

故有$\triangle MD'Q \equiv \triangle MDP$, $MQ = MP$.证完.

本题还可以这样叙述:

设 M 是圆内接四边形 $ACBD$ 的对角线的交点, l 是在 M 与直径 OM 垂直的直线, l 交对边 AD、BC 于 P、Q, 则 OPQ 是等腰三角形 .

习　题　五

1. 两圆相交于两点 A、B,在每一圆中各作一弦 AC、AD 使切于另一圆,求证$\angle ABC=\angle ABD$.

2. 过两圆的一交点 P 任作两直线,交一圆于 A、B,交另一圆于 A'、B'. 求证 AB 和 $A'B'$的交角为常量 .

3. 设四边形有一双对边相等,证明这两边(所在直线)跟另两边中点的连线的交角相等 .

4. 四边形 $ABCD$ 中,设 $AD=BC$,且 M、N 是对角线 AC、BD 的中点,证明直线 AD、BC 与 MN 成等角 .

5. 设一直线与圆内接四边形的一双对边(所在直线)交成相等的同侧内角,则也与另一双对边(所在直线)交成相等的同侧内角 .

6. 两圆相交于 A、B 两点,过 A 引 AB 的垂线,交两圆于 C、D .连 BC、BD 交二圆于 E、F,证明 AB 平分$\angle EAF$ 或其外角 .

§1.10　和差倍分的证法和定值问题

要证线段 $a=b\pm c$,可作一线段 $p=b\pm c$,然后证明 $a=p$;或作一线段 $q=a\mp c$,然后证 $b=q$.关于角,可仿此证明 .要证明甲线段是乙线段的 2 倍,或取甲的一半证其与乙相等;或将乙延长一倍,证它与甲相等 .关于角,可仿此证明 .常用的定理有

(1) 三角形两边中点的连线等于第三边的一半;

(2) 梯形两腰中点的连线等于两底的半和;

(3) 平行四边形的对角线互相平分,菱形的角被对角线平分;

(4) 直角三角形中若有一锐角为 $30°$,则斜边是 $30°$角对边的 2 倍;

(5) 直角三角形斜边中点距三顶点等远;

(6) 三角形一外角等于不相邻二内角的和;等等.

例1　等边三角形外接圆周上任一点到三顶点的连线中,最长的等于其余两线的和.

已知$\triangle ABC$是等边的,P是它外接圆BC上任一点.求证

$$PA = PB + PC.$$

证:延长BP至D(图1.33)使

$$PD = PC,$$

我们来证明　$PA = BD$.

由于$\angle CPD = \angle BAC = 60°$且

$$PD = PC,$$

可见$\triangle PCD$是等边的.于是$PC = DC$,且

图　1.33

$$CB = CA,\quad \angle DCB = 60° + \angle PCB = \angle PCA,\quad \text{推出}$$

$$\triangle DCB \equiv \triangle PCA,\quad PA = BD = PB + PC.$$

读者试用下列三法再证之(图1.34):

1° 延长PB至D使$BD = PC$,证$PA = PD$(左图).

2° 在PA上截$PD = PC$,证$PB = DA$(中图).

3° 在PA上截$AD = PC$,证$PB = PD$(右图).

图　1.34

例2　三角形任一顶点到垂心的距离,二倍于外心到对边的

距离.

假设: H 是 $\triangle ABC$ 的垂心(图 1.35), O 是外心, $OL \perp BC$ 于 L.

求证: $AH = 2OL$.

证一: 以 P、Q 分别表 HA、HB 的中点, M 表 AC 的中点.由于 L 是 BC 的中点,可见

$$LM \quad \frac{1}{2}AB(\text{由}\triangle ABC\text{得出}),$$

$$QP \quad \frac{1}{2}AB(\text{由}\triangle ABH\text{得出}).$$

图　1.35

$$\therefore \quad LM \quad QP, \text{且} OL \parallel PH(\text{同垂直于} BC),$$

$$OM \parallel QH(\text{同垂直于} AC).$$

可见 $\triangle OLM$ 与 $\triangle HPQ$ 三双对应边平行,从而各角对应相等,且 $LM = QP$,所以

$$\triangle OLM \equiv \triangle HPQ, \quad AH = 2PH = 2OL.$$

证二: 设(图 1.36) M、K 各为 CA、CH 的中点,则 $OM \parallel BH$ (同垂直于 AC).但 $BH \parallel LK$ (LK 是 $\triangle CBH$ 两边中点的连线).因此 $OM \parallel LK$.

仿此, $OL \parallel AH \parallel MK$.

于是 $OLKM$ 是平行四边形, $\therefore AH = 2MK = 2OL$.

图　1.36　　　　图　1.37

证三: 以 BOD 表△ABC 外接圆的直径(图 1.37),则

$$DC = 2OL.$$

由于 BD 是直径,可见 AD 和 HC 同为 AB 的垂线.仿此, AH 和 DC 同为 BC 的垂线.所以 $AHCD$ 是平行四边形,因之

$$AH = DC = 2OL.$$

证完.

这里,△ABC 是画成锐角三角形.请大家按§1.7 普通归纳法的原则检查一下,在三角形是钝角三角形时,我们的证明是否照样行得通 这种检验往往提高我们的认识水平和工作能力.

例 3 设 E 为正方形 $ABCD$ 中 CD 边的中点, F 是 CE 的中点,则 $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle BAF$ (图 1.38).

证: 以直线 AGH 平分$\angle BAF$,并设这线交 BC 于 G,交直线 DC 于 H.则

$$\angle FAH = \angle HAB = \angle AHF.$$

图 1.38

问题化为证$\angle HAB = \angle DAE$.

因△FAH 是等腰的,且△ADF 为商高三角形(三边之比为 3∶4∶5),故

$$FH = AF = \frac{5}{4}AD = \frac{5}{4}DC,$$

$$CH = FH - FC = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right)DC = AB.$$

∴ △$HCG \equiv$ △ABG,从而 G 是 BC 的中点.

∴ △$ABG \equiv$ △ADE $\angle DAE = \angle BAG = \frac{1}{2}\angle BAF$.

下面我们转到所谓定值问题.

图形的变化常常是按照一定的规律的,因而自成一个类型.在这个类型中,图形虽变了,它的某些性质或数量却不因图形的变化而变.这里所谓定值问题就属这一类.

关于定值问题,以后还有不少,在此以前已提到一些,只差没提出这个可提可不提的名词.例如§1.6例2,习题二的8和9题,习题三的7题,习题四的4题,习题五的2题,都是定值问题,既不是新问题也不是什么难题.

在这里想指出两点.一是定值问题往往归结到上面讲的和差倍分问题.二是当只谈到某个变量是常数或定值时,如何去处理.

解决某个量是定值,可用两种办法来处理.一种处理办法是:证明合于所言条件的任两变量总是相等的,当然就是一个常数或定值了.另一种处理办法是具体找出这个变量的值,或以一个特殊的例试探出或猜测出这个值再加以严格证明,在§1.6例2就是如此办的.

我们举一个例,用两种办法处理,以资说明.

例4 通过两圆交点 A 和 B 作一圆 Σ,过点 A 任作一割线与两圆周再交于 M 及 M',与 Σ 再交于 P.求证比值 $MP:PM'$为常数,不因此割线而变.

证一: 过点 B 作一补助线,与两圆再交于 N 和 N',与圆 Σ

图 1.39

再交于 Q .我们利用这补助线作媒介进行证明(图 1.39) .

连 AB、PQ、MN、$M'N'$.

由于 $ABNM$、$ABQP$、$ABN'M'$都是圆内接四边形 .

$$\angle AMN = \angle ABN' = \angle APQ,$$

所以
$$MN \parallel PQ .$$

仿此有
$$M'N' \parallel PQ \parallel MN .$$

两直线 MM'和 NN'被这三平行线所截得出成比例的线段:

$$\frac{MP}{PM'} = \frac{NQ}{QN'} .$$

倘若过点 A 再任作一割线 $M_1 P_1 AM_1'$,仿此又得

$$\frac{M_1 P_1}{P_1 M_1'} = \frac{NQ}{QN'} .$$

于是证得
$$\frac{MP}{PM'} = \frac{M_1 P_1}{P_1 M_1'} = \text{常数} .$$证完 .

这种证一变量为常量的证法在数学的各个分支经常使用 .在分析或代数上,若对于独立变量 x 和 y 总有

$$f(x) = \phi(y),$$

便足以判断两函数 $f(x)$和 $\phi(y)$都是常数 .因为固定 y 为 y_0,则对于一切变量 x, $f(x) =$ 定数 $\phi(y_0)$.仿此 $\phi(y)$也是常数 .

证二: 从圆心 O_1、O_2、O_3 向任意割线 MM'作垂线 $O_1 N_1$、$O_2 N_2$、$O_3 N_3$ (图 1.40) .对于有向线段言,有

$$\begin{aligned} MP &= MA - PA \\ &= 2 N_1 A - 2 N_2 A \\ &= 2 N_1 N_2 , \\ PM' &= PA + AM' \\ &= 2 N_2 A + 2 AN_3 \\ &= 2 N_2 N_3 . \end{aligned}$$

图　1.40

所以有

$$MP : PM' = N_1N_2 : N_2N_3 = O_1O_2 : O_2O_3$$
$$= \text{常数} \quad (\text{与 } MM' \text{无关}).$$

§1.11 证几何题方法可灵活机动一些

教中学数学,使代数、几何、三角知识相互联系、相互服务,比各自独立效果好 这里举例说明.

例 1 设 $0 < a < l, 0 < b < l$,求证下面的不等式

$$a^2 + b^2 + \quad (l - a)^2 + b^2 + \quad a^2 + (l - b)^2$$
$$+ \quad (l - a)^2 + (l - b)^2 \geq 2 \quad 2l.$$

这个代数题,用代数法证相当繁,用几何法易如反掌.

证:如图 1.41 所示,作正方形 $ABCD$,其边长为 l,并作两组边的平行线把正方形分为四个矩形.

$$\text{左端} = PA + PB + PD + PC$$
$$= (PA + PC)$$
$$+ (PB + PD),$$

图 1.41

即 左端 $\geq AC + BD = 2 \quad 2l$,

等号只当 P 在正方形中心即 $a = b = \dfrac{l}{2}$ 时成立.

例 2 证明直角三角形中,弦的立方大于勾股的立方和.

设勾股弦分别为 a, b, c,求证 $c^3 > a^3 + b^3$.

证:此题表面上是几何题,实际上要证代数不等式

$$(a^2 + b^2)^{3\ 2} > a^3 + b^3.$$

用代数为工具,不如利用三角.

将不等式写作

$$1 > \left(\frac{a}{c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c}\right)^3,$$

设一锐角为 θ,又可写作

$$1 - \cos^3\theta - \sin^3\theta > 0 .$$

证此式易如反掌:

$$\begin{aligned}1 - \cos^3\theta - \sin^3\theta &= \cos^2\theta - \cos^3\theta + \sin^2\theta - \sin^3\theta \\ &= \cos^2\theta(1 - \cos\theta) + \sin^2\theta(1 - \sin\theta) .\end{aligned}$$

最后的式中两项都大于零,和自然是正的 .

例 3　在$\triangle ABC$的高线 AD 上任取一点 P,设两直线 BP 和 AC 相交于 M,两直线 CP 和 AB 相交于 N,证明 AD 平分$\angle MDN$ 或其外角(图 1.42) .

图　1.42

在证明前先提几点:(1) 题末“或其外角”四字不能去掉;(2) 若 P 为垂心,可用共圆点证明;(3) 在钝角三角形,也可能出现 AD 平分若$\angle MDN$;(4) 若允许点 P 在直线 AD 上,即使在锐角三角形,也可能出现 AD 平分$\angle MDN$ 的外角 .

证一:问题在于证明

$$\triangle MDE \sim \triangle NDF,$$

其中 E、F 分别表点 M、N 在直线 BC 上的正射影, D 表高线足 .

为了同一个证明能概括内分和外分两种情况,在这里我们使用有向线段.对于有向线段,下面的式子成立:

$$BE = BD + DE,\quad FC = FD + DC,\text{等等},$$

$$DE + ED = 0,\quad DF + FD = 0.$$

在图 1.42 中,可这样规定正方向,水平线段向右为正,铅垂线段向上为正.于是有(应用相似三角形)

$$(1)\ \frac{EM}{DP} = \frac{BE}{BD} = \frac{BD + DE}{BD} = 1 + \frac{DE}{BD},$$

$$(2)\ \frac{EM}{DA} = \frac{EC}{DC} = \frac{ED + DC}{DC} = 1 + \frac{ED}{DC},$$

$$(3)\ \frac{FN}{DP} = \frac{FC}{DC} = \frac{FD + DC}{DC} = 1 + \frac{FD}{DC},$$

$$(4)\ \frac{FN}{DA} = \frac{BF}{BD} = \frac{BD + DF}{BD} = 1 + \frac{DF}{BD}.$$

$$(1)-(2):\quad EM\ \ \frac{1}{DP} - \frac{1}{DA}\ \ = DE\ \ \frac{1}{BD} + \frac{1}{DC}\ \ ,$$

$$(3)-(4):\quad FN\ \ \frac{1}{DP} - \frac{1}{DA}\ \ = FD\ \ \frac{1}{DC} + \frac{1}{BD}\ \ .$$

将这两式相除得

$$\frac{EM}{FN} = \frac{DE}{FD}\qquad \triangle MDE \sim \triangle NDF.$$

由相似三角形对应角相等,从图 1.42 立即看出:底边 BC 和高线 AD 平分两直线 DM、DN 的夹角.

*证二:用解析几何解此题最为简捷.这时图 1.42 中代表不同情况的两个图,画一个就够了.因为我们所使用的坐标是可正可负的.

设三角形顶点及动点 P(图 1.43)的坐标为

$$A(0,\alpha),\ B(\beta,0),\ C(\gamma,0),\ P(0,\lambda),$$

λ 表参数.用截距式写出 BP、AC 的方程:

$$BP:\ \frac{x}{\beta} + \frac{y}{\lambda} = 1,\qquad AC:\ \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{\alpha} = 1.$$

联立求解得交点 M 的坐标(x_M, y_M),其比值 y_M x_M 就是直线 DM 的斜率 k_{DM}.可注意,利用两方程右端同为 1 这个特点,可以免除求 x_M、y_M 的表达式的过程.两式相减得

$$x\ \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\ +y\ \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha}\ =0,$$

由此得

$$k_{DM}=\frac{y}{x}=\frac{\lambda\alpha(\beta-\gamma)}{\beta\gamma(\alpha-\lambda)}.$$

图 1.43

仿此,写出直线 CP,和 AB 的方程,求出直线 DN 的斜率 k_{DN}.注意,这个过程又是可以免除的.这是因为互换 β 和 γ,就等于写出了 CP 和 AB 的方程.所以在 k_{DM}的表达式中,将 β 与 γ 互换,立即得

$$k_{DN}=\frac{\lambda\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma\beta(\alpha-\lambda)},\quad \therefore\quad k_{DM}=-k_{DN}.$$

可见直线 DM 跟 DN 对称于 x 和 y 轴.证完.(习题十第 11 题另有证法.)

例 4 设 P 为等边△ABC 外接圆周上任一点,则

$$PA^2+PB^2+PC^2=2AB^2.$$

证:设 P 为BC上一点(图 1.44),令

$$PA=l,\ PB=m,\ PC=n,\ BC=a.$$

首先,由§1.10 例 1,有

$$l=m+n.$$

引 $BD\perp PC$ 于 D,则在直角△BDP 中

$$\angle BPD=\angle BAC=60°,$$

$$\angle DBP=30°,\quad \therefore\quad m=2PD.$$

因

图 1.44

$$a^2 = BC^2 = BD^2 + DC^2 = m^2 - PD^2 + (PD + n)^2$$
$$= m^2 + n^2 + 2PD \cdot n = m^2 + n^2 + mn,$$

所以

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = l^2 + m^2 + n^2 = (m + n)^2 + m^2 + n^2$$
$$= 2(m^2 + n^2 + mn) = 2a^2 .$$

习　题　六

1．D 是等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 延长线上一点,延长边 BA 至 E 使 $AE = BD$,求证 $EC = ED$.

2．设延长 $\triangle ABC$ 的边 BA 至 D 使 $AD = AC$,则 $\angle BCD = d + \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$.

3．从三角形的顶点向对边作高线和平分角线,证其夹角等于两底角的半差.

4．设 M 是线段 AB 的中点,若 C 在此线段上,则 CM 等于 CA、CB 的半差;若 C 在 AB 的延长线上,则 CM 等于 CA、CB 的半和.

5．设 OM 是 $\angle AOB$ 的平分线,若射线 OC 在 $\angle AOB$ 内,则 $\angle COM$ 等于角 COA、COB 的半差;若 OC 在 $\angle AOB$ 的对顶角 $A'OB'$ 内,则 $\angle COM$ 等于前两角的半差的补角.若射线 OC 在两直线所形成的其他两角 BOA' 或 AOB' 的内部,则 $\angle COM$ 等于角 COA、COB 的半和.

6．由任一点向等边三角形的三条高线作垂线,求证这三垂线中最长的一条是其余两条的和.

7．从正六边形外接圆上任一点到六顶点连线,证明其中两长线段之和等于其余四线段之和.

8．设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,证明 $\triangle HBC$ 的外接圆等于 $\triangle ABC$ 的外接圆.

9．P 是 $\angle XAY$ 平分线上一定点,过两点 A、P 任作一圆,若这圆:

(1) 交这角的两边于 B、C,则 $AB + AC$ 为定长;

(2) 交这角的一边于 B,交另一边的反向延长线于 C,则 $|AB - AC|$ 为定长.

10．证明直角三角形两直角边之和等于斜边与内切圆直径之和.

11．从直角三角形 ABC 的直角顶 A 作 $AD \perp BC$ 于 D,以 r、r_1、r_2 分别表 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内切圆半径,证明 $AD = r + r_1 + r_2$.

12. 过△ABC 的 BC 边中点作直线平行于∠A 的平分线而交直线 AB、AC 于 E、F,证明 $BE = CF = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

13. 在上题中,若所作直线垂直于∠A 的平分线,则

$$BE = CF = \frac{1}{2}|AB - AC|.$$

14. 若 I 为△ABC 的内心,I_1 为∠A 内的旁心,则

$$\angle BIC = d + \frac{1}{2}\angle A, \angle BI_1C = d - \frac{1}{2}\angle A.$$

15. 若 I 为△ABC 的内心,I_1 为∠A 内的旁心,直线 AII_1 交圆 ABC 于 M,则 $MI = MI_1 = MB = MC$.

16. 由平行四边形 $ABCD$ 各顶点向形外一直线引垂线 AA'、BB'、CC'、DD',则 $AA' + CC' = BB' + DD'$.

17. 设 G 为△ABC 的重心,从各顶点及 G 向形外一直线引垂线 AA'、BB'、CC'、GG',则 $AA' + BB' + CC' = 3GG'$.

18. 设 O 为△ABC 的外心,∠A 的平分线交外接圆于 M,则∠$OAM = \frac{1}{2}|\angle B - \angle C|$.

19. 设 P 是等边△ABC 外接圆上一点,当 P 在

1° BC 上时,则 $AB^2 = PA^2 - PB \cdot PC$;

2° BAC 上时,则 $AB^2 = PA^2 + PB \cdot PC$.

20. AB 是圆 O 的直径,弦 CD 交半径 OA 于 P,若 $PC = PO$,则 $AC = \frac{1}{3}BD$.

21. 设三角形的外心、重心、垂心分别为 O、G、H,证明这三点共线,且 $GH = 2OG$.

§1.12 关于不等量的证法

初学数学的人对于不等量感到不易掌握,这是数学中的一个困难所在.证明线段或角不相等,多半利用下述定理:

1° 三角形中两边之和大于第三边;

2° 三角形中,大边的对角较大,大角的对边较大;

3° **外角定理**;

4° **垂线与斜线、斜线与斜线的比较定理**:

从直线外一点向直线引垂线及若干斜线,则(1) 垂线小于斜线;(2) 若两斜线相等,则它们在这直线上的射影相等,反之亦然;(3) 若两斜线不等,则斜线大的射影也大,反之亦然;

5° **两个三角形中,若有两组边对应相等而夹角不等,则夹角大的第三边也大;反之,第三边大的夹角也大;**

6° **同圆或等圆中两弦或两弧的比较定理;**

等等.

例 1　**三角形中,大边上的中线较小**.

假设: 在$\triangle ABC$中, $AB > AC$(图 1.45), AL、BM、CN是中线, G 是重心.

求证: $CN < BM$.

证: 在$\triangle ABL$和$\triangle ACL$中,有两组边对应相等,而第三边不等,即

$$AL = AL, BL = CL, AB > AC,$$

$$\therefore\quad \angle ALB > \angle ALC,$$

即
$$\angle GLB > \angle GLC.$$

图　1.45

在$\triangle GLB$和$\triangle GLC$中,于是有两组边对应相等而夹角不等,从此得出 $BG > CG$,即$\frac{2}{3}BM > \frac{2}{3}CN$.

$$\therefore\quad CN < BM.$$

例 2　**三角形中,大边上的高较小**

假设: 在$\triangle ABC$中, $AB > AC$, CF和BE是高(图 1.46(1)).

求证: $CF < BE$.

证: 延长 BE、CF 各一倍到 G、H,只要能证明

$$CH < BG$$

就行了.既假设 $AB > AC$,便有 $\angle ACB > \angle ABC$,从而有

$$\angle HBC = 2\angle ABC$$
$$< 2\angle ACB = \angle BCG.$$

可见在两个等腰 $\triangle HBC$ 和 $\triangle BCG$ 中,腰相等而顶角不等,所以确有 $CH < BG$.证完.

图　1.46(1)

注意: 1° 一般书本上的证明到此止步.事实上,证明到此尚未完成,因为证明的过程中,无形假设了 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

当 $\angle B < \angle C = d$ 时(图 1.46(2)), E 与 C 重合,显然有 $CF < BE$.

当 $\angle C$ 为钝角时(图 1.46(3)),点 E 不在 AC 上而在 AC 的延长线上,但这时仍然可推出 $\angle HBC < \angle BCG$,因为 $\angle FBC = \angle ABC < \angle BCE$(外角定理),二倍之得 $\angle HBC < \angle BCG$,所以我们的定理成立.

图　1.46(2)　　　　图　1.46(3)

2° 如果利用面积概念,则 $AB \cdot CF = AC \cdot BE$,由于 $AB > AC$,所以必然有 $CF < BE$.

例 3　<u>三角形中,大边上的平分角线较小</u>.

假设: 在$\triangle ABC$中,$AC > AB$(图 1.47),BD、CE是平分角线.

求证: $BD < CE$.

证: 因 $AC > AB$,　$\therefore$　$\angle B > \angle C$.

以 I 表 BD 和 CE 的交点,则$\angle IBC > \angle ICB$,从而有 $IC > IB$.

若再有 $IE \geq ID$,立刻推出 $CE > BD$.为了证明定理,我们只需证明,即使 $IE < ID$,仍然有 $CE > BD$.

图　1.47

于是设 $IE < ID$.在 ID 上截取 $IF = IE$(F 介于 I、D 间),在 IC 上截取 $IH = IB$(H 介于 I、C 间),则$\triangle IFH \equiv \triangle IEB$.

作 $HK \parallel BD$ 交 CD 于 K.作 $HG \parallel CD$ 交 ID 于 G,我们先比较 HC 和 HK 的大小.由于

$$\angle HKC = \angle BDC = \angle A + \frac{1}{2}\angle B > \angle A + \frac{1}{2}\angle C > \frac{1}{2}\angle C,$$

即
$$\angle HKC > \angle HCK, \therefore \quad HC > HK.$$

其次比较 $HK(=GD)$和 FD 的大小.比较$\triangle IBE$ 和$\triangle ICD$ 的角,则有$\angle IDC > \angle IEB = \angle IFH$,即$\angle IGH > \angle IFH$.由外角定理可见 G 必在 I 和 F 之间,

$$\therefore \quad HK = GD > FD.$$

由 $IB = IH$,$IF = IE$,$FD < HK < HC$,相加得

$$BD < CE.$$

系　<u>三角形中若有两条平分角线相等,则必为等腰三角形</u>.(参考§1.8 定理.)

例 4　<u>三角形中,大边与其上的高之和不小于小边与其上的高之和</u>.

假设: 在$\triangle ABC$中,$AB > AC$,CF和 BE 是高.

求证: $AB+CF\geq AC+BE$(图 1.48).

图　1.48

证: 在 AB 边上截取 $AC'=AC$, 作 $C'F'\perp AC$ 于 F', 作 $C'G\perp BE$ 于 G, 则

$$AB-AC=BC',\ BE-CF=BE-C'F'=BG.$$

所以问题在于证明

$$BC'\geq BG.$$

若 $\angle A=d$, 则 G 与 C' 重合(左图), 这时 E 和 F 重合于 A, 命题成立, 用等号.

若 A 非直角, 则由直角 $\triangle BC'G$, 显见 $BC'\geq BG$ 成立, 用大于号.

又证: 因 $AB\cdot CF=AC\cdot BE$, 或 $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CF}{AC}$.

于是按比例定律有

$$\frac{BE}{AB}=\frac{BE-CF}{AB-AC}.$$

由假设, 右端分母为正, 故分子亦为正: $BE>CF$(这就是例 2). 由于 $AB\geq BE$, 可见 $AB-AC\geq BE-CF$, 亦即

$$AB+CF\geq AC+BE.$$

系　<u>直角三角形中, 斜边与其上的高之和大于两条直角边之</u>

和.

习　题　七

1. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内部任一点,则 $OA + OB < CA + CB$.

2. 设三角形两边不等,则其间所夹的中线与小边所成的角,大于它和大边所成的角.

3. 设 $\triangle ABC$ 的 B、C 两角为锐角,而 $AB \neq AC$,则从顶点 A 发出的各线的顺序是:

大边,中线,平分角线,高,小边.

4. 从三角形所在平面上一点到三顶点连线,则此三线段之和大于三角形的半周长;若此点取在三角形内,则此和小于三角形的周长.

5. 从凸 n 边形内一点到各顶点连线,证明这些线段的和大于多边形的半周长而小于周长的 $\frac{1}{2}(n-1)$.

6. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内切圆心,证明 $\angle AIB > d$.

7. 在 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的外角平分线上任取 A 以外的一点 D,证明 $\triangle DBC$ 的周长大于 $\triangle ABC$ 的周长.

8. 在 $\triangle ABC$ 中 $AC > BC$, E 是中线 CD 上任一点,证明 $\angle EBD > \angle EAD$.

9. 证明:凸四边形两对角线之和小于周长而大于半周长.

10. 证明:在平面各点中,凸四边形两对角线的交点,到四顶点的距离之和最小.

11. 三角形的一中线小于夹此中线两边的半和,而大于这半和与第三边一半的差.

12. 证明三角形三中线之和大于周长的 $\frac{3}{4}$ 而小于周长.

13. 设一正方形各顶点在锐角三角形的周界上,计算其边长;并比较这样的三个正方形的大小.

14. 设三角形三边为 a、b、c,三条角平分线为 t_a、t_b、t_c,求证 $abc > t_a t_b t_c$. (提示:先证 $bc > t_a^2$.)

§1.13　平行线的证法

证明两直线平行,多半利用:

1° 平行的传递性;

2° 平行四边形;

3° 两直线被一直线所截,若同位角相等,则两线平行;与此相通的命题;

4° 三角形两边中点的连线平行于第三边;

5° 梯形两腰中点的连线平行于两底;

6° 比例关系;

等等.

例 1　AD、BE、CF 是$\triangle ABC$的中线(图 1.49),若直线 $EG \parallel AB$, $FG \parallel BE$,则 $CG \parallel AD$.

证: 由于 $GFBE$ 是平行四边形,故

GE　　FB,因之 GE　　AF.所以 $GAFE$ 是平行四边形.由此推出

$$AG \quad FE \quad DC,$$

于是 $GADC$ 是平行四边形,∴　$GC \parallel AD$.

图　1.49

例 2　由圆外一点 P 作切线 PA(图 1.50),由 PA 的中点 B 作割线 BCD 交圆于 C、D.连 PC、PD 交圆于 E、F.求证 $FE \parallel PA$.

证: 要证 $FE \parallel PA$,只须证

$$\angle BPC = \angle E = \angle D,$$

或

$$\triangle BPC \sim \triangle BDP.$$

由于这两个三角形有一角公用,且

$$BP^2 = BA^2 = BC \cdot BD,$$

即

$$BC : BP = BP : BD,$$

所以确有$\triangle BPC \sim \triangle BDP$,从而证明了命题.

图 1.50

例 3 从三角形一顶点 A 向另两角的平分线作垂线 AE、AF，E、F 表示垂足．求证 $FE \parallel BC$（图 1.51）．

图 1.51

证：设直线 AE、AF 交直线 BC 于 G、H．则由假设 $\triangle BAG$ 和 $\triangle CAH$ 都是等腰的，从而 E、F 各为 AG、AH 的中点，$\therefore FE \parallel GH$，即 $FE \parallel BC$．

又证：设 I 为 BE 和 CF 的交点，则 E、F 在以 AI 为直径的圆周上．从而

$$\angle FEB = \angle FEI = \angle FAI = \angle CAF - \frac{1}{2}\angle A$$

$$= d - \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle B,$$

即
$$\angle FEB = \angle EBC .$$

$\therefore \quad EF \parallel BC$.

例 4　A、B、C 是直线 l 上三点，A'、B'、C' 是直线 l' 上三点，若有 $AB' \parallel A'B$ 及 $AC' \parallel A'C$，则也有 $BC' \parallel B'C$ (图 1.52)．

图　1.52

证：设两直线 l 与 l' 相交于一点 O，则由平行的假设有

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}, \quad \frac{OC}{OA} = \frac{OA'}{OC'}.$$

相乘得

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB'}{OC'}, \quad \therefore \quad BC' \parallel B'C.$$

当 $l \parallel l'$ 时，则利用平行四边形性质便可证明．

§1.14　垂直线的证法

证明两线垂直多半利用：

1° 等腰三角形的性质：等腰三角形顶角的平分线或顶点到底边中点的连线垂直于底边；

2° 半圆的内接角；

3° 勾股定理的逆定理；

4° 合同和相似三角形；

等等．

例 1　在 $\triangle ABC$ 两边 AB 和 AC 上向外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，设 H、K、M 各为 BE、CG、BC 的中点．证明 $MH \perp MK$ (图 1.53)，$MH = MK$．

证：因 H、M 是 BE、BC 的中点，故 $MH \parallel CE$．同理 $MK \parallel BG$．所以问题归结到证明 $CE \perp BG$．

容易看出 $\triangle CAE \equiv \triangle GAB$ (有两边及其夹角对应相等)，于是

$\angle ACE=\angle AGB$;且因 $AC\perp AG$,∴也有 $CE\perp BG$(也可以这样看出:设 BG 交 AC 于 P,交 CE 于 Q,则$\triangle APG$与$\triangle QPC$ 中有两角相等,所以 $\angle CQP=\angle GAP=d$),所以 $MH\perp MK$;且 $MH=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}BG=MK$.

图　1.53

例 2　<u>**延长圆内接四边形两组对边至相交,则其交角的平分线互相垂直**</u>.

假设:　圆内接四边形 $ABCD$ 中 AB 与 CD 相交于 E,AD 与 BC 相交于 F,$\angle BEC$ 和 $\angle CFD$ 的平分线相交于 G(图 1.54).

求证:　$EG\perp FG$.

证:　以 M、N 和 P、Q 表这些平分线和圆的交点.

图　1.54

因$\angle 1=\angle 2$,

故有
$$\frac{1}{2}(AN-BM)=\frac{1}{2}(ND-MC),$$

即
$$AN+MC=BM+ND.$$

仿此有
$$AQ+PC=QB+DP.$$

相加得
$$QAN+PCM=QBM+PDN.$$

$$\therefore\quad \angle QGN = \angle PGN,\quad \text{从而}\quad EG \perp FG.$$

例 3　设四边形 $ABCD$ 同时有外接圆和内切圆,证明两组对边上切点的连线必互相垂直.

证: 设 AB、BC、CD、DA 各边上的切点为 E、F、G、H(图 1.55).要证明 $EG\perp HF$,只要证明

$$\angle PEF + \angle PFE = d$$

就够了.但

$$\angle PEF = \angle CFG = \frac{1}{2}(2d - \angle C),$$

$$\angle PFE = \angle AEH = \frac{1}{2}(2d - \angle A),$$

$$\therefore\quad \angle PEF + \angle PFE = \frac{1}{2}(4d - \angle A - \angle C) = d,$$

从而

$$EG \perp FH.$$

图　1.55　　　　图　1.56

例 4　设 H 是等腰$\triangle ABC$ 的垂心, K 为 AH 的中点, D 是 BC 边中点, BH 交 AC 于 E, $EF\perp BC$ 于 F,并延长 AD 至 G 使 $DG = EF$.求证 $BK\perp BG$(图 1.56).

证: 由$\dfrac{HD}{EF} = \dfrac{BD}{BF}$,　$\dfrac{AD}{EF} = \dfrac{DC}{FC}$,

$$DK = \frac{1}{2}(DH + DA),$$

我们有

$$\begin{aligned}DK \cdot DG &= \frac{1}{2}(DH + DA) \cdot DG = \frac{1}{2}(DH + DA) \cdot EF \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{BD}{BF}EF \cdot EF + \frac{DC}{FC}EF \cdot EF\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{BD}{BF} \cdot BF \cdot FC + \frac{DC}{FC} \cdot BF \cdot FC\right) \\ &= \frac{1}{2}(BD \cdot FC + DC \cdot BF) = \frac{1}{2}BD(BF + FC) \\ &= BD^2 .\end{aligned}$$

从此容易得出 $BK \perp BG$.

习　题　八

1. 证明:梯形两对角线中点的连线平行于底边.

2. 在正方形 $ABCD$ 的 CD 边上取一点 E,在 BC 的延长线上取一点 F 使 $CF = CE$,证明 $BE \perp DF$.

3. 圆内接四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于 E,通过 E 作直线切于圆 ABE,证明这直线平行于 CD.

4. 从平行四边形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点 P 作两组对边的垂线,交直线 AB、BC、CD、DA 于 E、F、G、H.证明 $EF \parallel GH$.

5. 在$\triangle ABC$两边 AB 和 AC 上向外方作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$,并作平行四边形 $AEHG$,设 M 为 BE 的中点,证明线段 MC 和 MH 相等且垂直.

6. 三圆 O_1、O_2、O_3 外切于 P、Q、R,连直线 PQ 和 PR 交圆 O_3 于 X 和 Y,证明 XY 是圆 O_3 的直径且平行于 O_1O_2.

7. 设圆内接四边形有一组对边相等,则另一组对边必平行.

8. 两圆相交于 A、B,过 A 任作一直线依次交这两圆于 C、D,过 B 任作一直线依次交这两圆于 E、F,证明 $CE \parallel DF$.

9. 二圆相切于 P,过 P 任作一直线交二圆于 A 及 B,证明两圆在这两点的切线互相平行.

10. 从$\triangle ABC$的顶点B、C作对边的垂线BE、CF，设M、N分别是BC、EF的中点，证明$MN\perp EF$.

11. 二圆外切于P，AB是一条外公切线（A、B是切点），则$PA\perp PB$.

12. AOB是圆O的直径，作半径$OD\perp AB$，在OA、OD上各取一点E、F使$OE=OF$，证明$BF\perp DE$.

13. 三角形的外心与三顶点的连线，分别垂直于垂足三角形的三边.

14. 设BE、CF是$\triangle ABC$的高，在射线BE上截$BP=AC$，在射线CF上截$CQ=AB$，证明AP与AQ相等且垂直.

15. 从正方形$ABCD$对角线（所在直线）BD上任一点P引$PE\perp BC$于E及$PF\perp CD$于F，证明AP与EF相等且垂直.

16. AD、BE、CF是$\triangle ABC$的高线，从垂足D引$DM\perp BE$于M，引$DN\perp CF$于N.求证$MN\parallel FE$.

17. $\triangle ABC$中BC边的中垂线交直线AB于D，设圆ABC在两点A、C的切线相交于E，求证$DE\parallel BC$.

§1.15　共线点的证法

所谓共线点就是指这些点在同一直线上.要证明三点X、Y、Z共线，通常这样办：

1°适当地选一条通过X的直线PXQ，并连XY与XZ.

当(1)Y、Z两点在PQ的异侧时，则证$\angle PXZ=\angle QXY$或$\angle PXY+\angle PXZ=2d$；

当(2)Y、Z两点在PQ的同侧时，则证$\angle PXY=\angle PXZ$；

2°证明XY和XZ平行于同一直线；

3°证明X、Y、Z同在一定直线上；

4°证明XZ和某定直线的交点就是Y；

等等.

例1　三角形外接圆周上任一点在三边（所在直线）上的射影共线.

证: 为固定思路计,设点 P 在 $\triangle ABC$ 外接圆的 BC 上,如图 1.57,并以 X、Y、Z 分别表它在 BC、CA、AB 上的射影.要证 X、Y、Z 共线,只要能证

$$\angle PXZ + \angle PXY = 2d.$$

图 1.57

由于 $PXBZ$、$PXYC$、$PBAC$ 都是圆内接四边形,连 XY 和 XZ,便有

$$\angle PXZ = \angle PBZ = \angle PCA = \angle PCY = 2d - \angle PXY.$$

所以三点 X、Y、Z 共线.

这直线称为点 P 关于 $\triangle ABC$ 的<u>西孟孙(Simson)线</u>.

例 2　<u>证明:三角形一顶点在其他两角内外平分线上的射影,是共线的四点</u>.

假设: 在 $\triangle ABC$ 中, AD 和 AE 是 $\angle A$ 的内外平分线,其中 D 和 E 表顶点 C 在它们上的射影; BF 和 BG 是 $\angle B$ 的内外平分线,其中 F 和 G 表 C 点在它们上的射影(图 1.58).

求证: 四点 D、E、F、G 共线.

证: 连直线 DE 和 FG、以 L、M 表 BC、CA 的中点,显见 $ADCE$ 为矩形,所以,一方面 DE 通过 AC 的中点 M,另一方面又有

图 1.58

$$\angle MDA = \angle MAD = \angle DAB,$$

从而

$$EMD \parallel AB.$$

可见直线 DE 与 LM 重合.

仿此,直线 FG 也与 LM 重合.因此四点 D、E、F、G 都在直线 LM 上.

例 3　设 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，H 是垂心，若在直线 BC 上取两点 P、Q 使满足 $DP:DQ = DB:DC$（本题所使用的都是有向线段的比），则 P 在 AC、CH 上的射影及 Q 在 AB、BH 上的射影是四个共线的点．

证：图 1.59 上 E、F 是高线足，X、Y、Z、W 表所言射影．

首先有 $PX \parallel BA$（同垂直于 CH），$QW \parallel CA$，$CX \parallel QY$，$PZ \parallel BW$．

由假设有

$$DP:DB = DQ:DC;$$

设 PX 交 DA 于 K，QW 交 DA 于 K'，则

$$DP:DB = DK:DA,$$

$$DQ:DC = DK':DA.$$

由三个等式可断定 K' 与 K 重合，即 PX、DA、QW 共点 K．

图　1.59

$$BF:BY = BC:BQ = BE:BW \quad WY \parallel EF.$$

$$CE:CZ = CB:CP = CF:CX \quad ZX \parallel EF.$$

$$HE:HW = HA:HK = HF:HX \quad WX \parallel EF.$$

从此断定 X、Y、Z、W 四点共线，此线平行于 EF．

§ 1.15.1　梅涅劳（Menelaus）定理

证明共线点还有一个有力的工具，称为梅涅劳定理．在本节所出现的比值都是指有向线段的比．

定理　设 $\triangle ABC$ 的三边（所在直线）BC、CA、AB 被一直线分别截于点 X、Y、Z，则有

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB} = 1,$$

或　$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=-1.$$

证：通过点 C 作直线 CD 与截线平行(图 1.60)，交直线 AB 于 D，则

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{BZ}{ZD}\cdot\frac{DZ}{ZA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=-1.$$

图　1.60

逆定理(梅涅劳定理)　设在△ABC 三边(所在直线) BC、CA、AB 上各取一点 X、Y、Z 满足关系

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=-1,$$

则此三点共线.

证：设直线 XY 与 AB 相交于点 Z'，则由上述定理有

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=-1.$$

与假设比较，得

$$\frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB}.$$

从此可知点 Z'和 Z 或同内分线段 AB，或同外分 AB，且所分比值相等.所以 Z'与 Z 重合，即 X、Y、Z 三点共线.

注意：在证明过程中，我们假设了点 Z'存在.若 Z'不存在，即是说，若 $XY\parallel AB$，有时我们也说，XY 交 AB 于 AB 上的无穷远点 Z'，并且这时我们约定

$$\frac{AZ'}{Z'B}=-1,$$

这样，我们的命题依然成立.

例 4　设四边形 $ABCD$ 两双对边相交于 E、F，则 AC、BD、EF 的中点共线.

证：设 X、Y、Z 分别是 AC、BD、EF 的中点(图 1.61).考察

四边形 ABCD 的三边所成的三角形,例如△ABE,并以 L、M、N 表 BE、EA、AB 的中点.于是可知:

直线 MN 平行于 EB 且通过点 X,

直线 NL 平行于 AE 且通过点 Y,

直线 LM 平行于 BA 且通过点 Z.

就△LMN 观之,欲证三点 X、Y、Z 共线,只须证

图　1.61

$$(1)\quad \frac{MX}{XN}\cdot\frac{NY}{YL}\cdot\frac{LZ}{ZM}=-1.$$

由 $XNM\parallel CBE$,得出 $\dfrac{MX}{XN}=\dfrac{EC}{CB}$;

由 $YNL\parallel DAE$,得出 $\dfrac{NY}{YL}=\dfrac{AD}{DE}$;

由 $ZLM\parallel FBA$,得出 $\dfrac{LZ}{ZM}=\dfrac{BF}{FA}$.

代入(1)式,并注意 F、D、C 是取在△ABE 三边上的共线点,得出

$$\frac{MX}{XN}\cdot\frac{NY}{YL}\cdot\frac{LZ}{ZM}=\frac{EC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AD}{DE}=-1,$$

即(1)式成立,或三点 X、Y、Z 共线.

例 5　设两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 彼此对应,使得对应顶点的连线 AA'、BB'、CC' 共点,那末对应边的交点共线.

证:设 AA'、BB'、CC' 相交于点 O(图 1.62),BC 交 $B'C'$ 于 L,CA 交 $C'A'$ 于 M,AB 交 $A'B'$ 于 N.求证 L、M、N 共线,换言之,求证

$$(1)\quad \frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1.$$

事实上,△OBC 被直线 $LB'C'$ 所截,故有

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}=-1.$$

仿此,△OCA 及△OAB 各被 $MA'C'$及 $NB'A'$所截,又有

$$\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}=-1,$$

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}=-1.$$

将最后三式相乘,并约去因子 $A'A$、$B'B$、$C'C$、OA'、OB'、OC',就得到所求证的关系(1).

图　1.62

这定理称为代沙格(Desargues)定理,在射影几何中占重要地位.

它的逆定理也成立:

系　设两个三角形 ABC 及 $A'B'C'$彼此对应,使得对应边(所在直线)BC 与 $B'C'$的交点 L、CA 与 $C'A'$的交点 M、AB 与 $A'B'$的交点 N 共线,则对应顶点的连线 AA'、BB'、CC'必共点或相平行.

证: 设 O 为 AA'与 CC'的交点(图 1.63),我们证明 BB'也通过 O.

在△LCC'与△NAA'中,由于对应顶点的连线 LN、CA、$C'A'$共点 M,根据定理本身,下列三点即

LC 与 NA 的交点 B、CC'与 AA'的交点 O、LC'与 NA'的交点 B'必共线.即是说,BB'应通过 AA'和 CC'的交点 O.

图　1.63

若 $AA'\parallel CC'$,则 AA'与 BB'必不相交,否则根据方才的证明,CC'应通过它们的交点了,与 $AA'\parallel CC'$的假设矛盾,所以这时 AA'、BB'、CC'互相平行.

习 题 九

1. 梯形两腰中点和两对角线中点共线.

2. 梯形上下底中点,两对角线交点,两腰(所在直线)交点共线.

3. 两圆交于 A、B,AC 和 AD 是两圆的直径,证明 B、C、D 三点共线.

4. AB、AC 是一圆的二弦,以 AB、AC 为直径作两圆,证明这两圆的另一交点与 B、C 共线.

5. 设一直线交△ABC 的三边(所在直线)于三点 X、Y、Z,作其中每一点关于该点所在边的中点的对称点,证明这样得到的三点 X'、Y'、Z'也共线.

若 X、Y、Z 三点是三角形外接圆周上某点在三边上的射影,则三点 X'、Y'、Z'也共线.

6. 证明:三角形的三条外角平分线和对边相交所得三点共线.

7. 设 I 是△ABC 的内切圆心,E、F 各是 AB、AC 上的切点;又作 $BG\perp CI$ 于 G,$CH\perp BI$ 于 H.求证四点 E、F、G、H 共线.

§1.16 共点线的证法

所谓共点线就是指这些直线通过同一点.要证明三直线共点,多半这样办:

1° 化为共线点问题,即先确定其中两直线的交点,然后在第三线上选取两点证其与该交点共线;

2° 先证其中两直线交于某点,然后将此点与第三线上一点相连,并证此连线与第三线重合;

3° 证明两直线的交点必在第三线上,例如证明三角形三边的中垂线共点或三角的平分线共点,即用此法;

4° 利用已知共点线定理,例如证三角形三高线共点,就是化为另一三角形三边中垂线共点而得证的;

5° 证明第二、三两线和第一线的交点是第一线上的一个定点，例如三角形三中线共点就是这样证的;

等等.

例 1　<u>三圆两两相交，则三公弦(所在直线)共点或互相平行</u>.

假设：AB、CD、EF(图 1.64)分别是圆 O_2 和 O_3、O_3 和 O_1、O_1 和 O_2 的公弦.

图　1.64

求证：三直线 AB、CD、EF 不平行便共点.

证：若三圆心 O_1、O_2、O_3 共线，则 AB、CD、EF 垂直于同一直线，因而互相平行.

若三圆心 O_1、O_2、O_3 不共线，则因 $CD \perp O_1O_3$，$EF \perp O_1O_2$，CD 与 EF 必相交于一点 M.连 MA，设此直线再交圆 O_2 于 B_2，再交圆 O_3 于 B_3，则就有向线段的乘积言有

$$MA \cdot MB_2 = ME \cdot MF = MC \cdot MD = MA \cdot MB_3 .$$

于是 $MB_2 = MB_3$，从而 B_2 与 B_3 重合.这重合的点既在圆 O_2 上又在圆 O_3 上，故即 B 点.所以 AB 通过 CD 与 EF 的交点 M，即 AB、CD、EF 共点.

例 2　<u>在△ABC 中以 BC 为直径的圆交 AB、AC 于 F、E，求证圆在 E、F 的切线与高线 AD 共点</u>.

证：以 H 表垂心，M 表 E 点的切线交 AD 之点(图 1.65).

BHE、CHF 也是△ABC 的高线.由弦切角与圆周角的关系得

$$\angle MEH = \angle MEB = \angle C.$$

又因四点 H、D、C、E 共圆,

$$\angle C = \angle MHE.$$

于是在直角△AEH 中有$\angle MEH = \angle MHE$.从此断定 M 是斜边 AH 的中点.

仿此可证 F 点的切线也通过 AH 的中点.证完.

例 3　设三直线在二平行线上截取成比例的线段(并且对应的线段或尽同向,或尽反向).那末这三直线或共点或相平行.

图　1.66

假设:直线 $ABC \parallel A'B'C'$(图 1.66),且

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

求证:直线 AA'、BB'、CC'不平行便共点.

证:倘若对应的线段(AB 和 $A'B'$、BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$)相等且同向,则显然有 $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

除开这一款,直线 AA'和 BB'不可能平行,因之相交于一点 S.

连直线 SC,它必与直线 $A'B'C'$相

图　1.65

交,设交点为 C''.那末由相似三角形得

$$\frac{A'C''}{B'C''}=\frac{AC}{BC}.$$

仿照§1.15.1 梅涅劳定理证明过程中的一般推理,可以断定 C''与 C'重合.所以 AA'、BB'、CC'共点 S.

§1.16.1　锡瓦(Ceva)定理

证明共点线除上述方法外,还有一有力工具,称为锡瓦定理.在本节中出现的比值都是指有向线段的比.

定理　△ABC 的顶点与一点 O 所连的直线依次交对边(所在直线)于点 X、Y、Z(图 1.67),则

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=-1$$

或

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

图　1.67

证:应用梅涅劳定理(§1.15.1)于△AXC 和截线 BOY 得

$$\frac{XB}{BC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AO}{OX}=-1^{①}.$$

仿此,△AXB 被直线 COZ 所截,又得出

① 当点 O 被掷在无穷远,即当直线 AX、BY、CZ 相互平行时,此推理依然有效(图 1.67 右).

$$\frac{XC}{CB}\cdot\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{AO}{OX}=-1.$$

两端相除得(注意 $CB=-BC$)

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

逆定理　设在$\triangle ABC$三边(所在直线)BC、CA、AB上各取一点X、Y、Z使有$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$,则直线$AX$、$BY$、$CZ$平行或共点.

证:首先,若$AX\parallel BY$,则$\frac{CY}{YA}=\frac{CB}{BX}$.代入已知条件得

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{XC}{CB},$$

表明

$$CZ\parallel AX\parallel BY.$$

其次,若AX交BY于一点O,以Z'表示直线CO与AB的交点,则根据定理本身得

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1.$$

和已知条件比照,得

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{AZ'}{Z'B}.$$

由于出现的都是有向线段,可知Z'与Z重合.所以AX、BY、CZ三线共点O.

例4　证明三角形三高线共点.

证:设$\triangle ABC$的三高线是AX、BY、CZ(图1.68),则

图　1.68

$$\triangle BAX\sim\triangle BCZ\qquad\frac{BX}{BZ}=\frac{BA}{BC};$$

$$\triangle CBY\sim\triangle CAX\qquad\frac{CY}{CX}=\frac{CB}{CA};$$

$$\triangle ACZ \sim \triangle ABY \quad \frac{AZ}{AY} = \frac{AC}{AB}.$$

三式两端相乘得

$$\frac{BX}{BZ} \cdot \frac{CY}{CX} \cdot \frac{AZ}{AY} = -1.$$

此式等价于

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

所以三高线 AX、BY、CZ 共点(因三高线显然不能平行,否则它们的垂线即三角形的三边也将平行了).

例 5　证明$\triangle ABC$的各顶点与对边上内切圆切点相连,所得三线共点.

证:考察有向线段之比的积(图 1.69)

图　1.69

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}.$$

首先观察符号,三个比值都是正的,所以乘积是正的.其次就线段的长度论,$BX = ZB$, $CY = XC$, $AZ = YA$.所以有

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

从而 AX、BY、CZ 共点.(因为 AX、BY、CZ 显然不能平行,例如 BY 和 CZ 被 BC 所截,所得同侧内角和

$$\angle YBC + \angle ZCB < \angle ABC + \angle ACB < 180°.)$$

例 6　一圆交$\triangle ABC$的各边(所在直线)于两点(这两点可能重合),设 BC 边上的交点为 X、X', CA 上的交点为 Y、Y', AB 上的为 Z、Z'.若 AX、BY、CZ 共点,则 AX'、BY'、CZ'三线共点或平行(图 1.70).

证:由假设有

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

但
$$AY\cdot AY'=AZ\cdot AZ',$$

即
$$\frac{AZ}{YA}=\frac{Y'A}{AZ'}.$$

仿此有
$$\frac{BX}{ZB}=\frac{Z'B}{BX'},\quad \frac{CY}{XC}=\frac{X'C}{CY'}.$$

将最后三式两端相乘,并适当交换顺序得

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{X'C}{BX'}\cdot\frac{Y'A}{CY'}\cdot\frac{Z'B}{AZ'}.$$

此式左端等于 1,颠倒右端分式的分子分母便得

$$\frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1.$$

所以三线 AX'、BY'、CZ'共点或平行.

读者考虑怎样作图,可以使 $AX'\parallel BY'\parallel CZ'$而 AX、BY、CZ 共点.

习　题　十

1. 两圆有两条内公切线,证明这两线与连心线共点.

2. 两圆有两条外公切线,证明这两线与连心线共点或相平行.

3. 过平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点 P(但非 AC 的中点)作两边的平行线,交边 AB、BC、CD、DA 于 F、G、H、E.证明三直线 FG、AC、EH 共点.

4. 在直角△ABC 的直角边 AB、AC 上向外方作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$.证明 BF 和 CD 相交于直角顶的高线 AH 上.

5. 由圆内接四边形各边中点向对边引垂线,证明这四垂线共点.

图　1.70

6. △ABC 是直角三角形,AD 是

直角 A 的平分线,由 B、C 作 A 角外角平分线的垂线 BE、CF,则 AD、BF、CE 三线共点.

7. 在$\triangle ABC$ 的边 BC 上取点 X,在边 CA 上取点 Y,使 $BX=\frac{1}{3}BC$,$CY=\frac{1}{3}CA$ 以 O 表 AX 和 BY 的交点,Z 表直线 CO 与 AB 的交点,试求$\triangle XYZ$ 的面积(以$\triangle ABC$ 的面积表示).

8. 利用锡瓦定理证明三角形中下列三线共点:

(1) 三中线;(2) 三内角平分线;(3) 两外角平分线及一内角平分线.

9. 由$\triangle ABC$ 的各顶点发出的三条共点线交对边(所在直线)于 X、Y、Z,作这些点关于所在边中点的对称点 X'、Y'、Z',证明三直线 AX'、BY'、CZ' 平行或共点.

10. 通过$\triangle ABC$ 各顶点引直线平行于对边,形成一新$\triangle A'B'C'$.设在直线 BC、CA、AB 上各取一点 X、Y、Z,使 AX、BY、CZ 三线共点.证明三直线 $A'X$、$B'Y$、$C'Z$ 平行或共点.

11. 利用锡瓦定理再证§1.11 例 3 的命题.(提示:通过 A 作 BC 的平行线,它跟直线 DM、DN 分别交于 R、S.则由$\triangle ANS\sim\triangle BND$,$\triangle AMR\sim\triangle CMD$,并在$\triangle ABC$ 应用锡瓦定理以证出 $SA=AR$.)

§1.17　共圆点的证法

在同一圆周上的点称为共圆点.不共线的三点必为共圆点.要证四点 A、B、C、D 共圆,通常用下面的方法:

1°证诸点距一定点等远(例如,有通过一点的三直线 a、b、c,一点 D 关于这三线的对称点为 A、B、C,则 A、B、C、D 是共圆点);

2°证明 $ABCD$ 是圆内接四边形(或证对角互补,或证某两点视另两点连线段的视角相等,当然这两点要在这线段同一侧);

3°若二直线 AB 和 CD 相交于一点 O,就有向线段的乘积言,证明关系 $OA\cdot OB=OC\cdot OD$ 成立;

4°如果发现其中某两点的连线段应为直径,便设法证其余的点对这线段的视角均为直角;

等等 .

例 1 设 A 是 BAC 的中点,过 A 任作二弦 AD 及 AE,并设这两直线交 BC 于 F 和 G,求证 D、E、F、G 共圆(图 1.71) .

图 1.71

证:左图两弦与弦 BC 相交,中图一弦与 BC 相交,另一弦延长后相交,右图两弦都是延长后相交 .证法无大区别,就左图证之 .

$\angle AFG$ 以 $\frac{1}{2}(AC + BD) = \frac{1}{2}(AB + BD) = \frac{1}{2}ABD$ 度之,

所以
$$\angle AFG = \angle DEG .$$
因此 $DEGF$ 是圆内接四边形 .

又证:作 $AM \perp BC$,设直线 AM 交圆于 N .由于 $\angle ADN$ 及 $\angle FMN$ 都是直角,可见四点 D、F、M、N 共圆 .于是
$$AD \cdot AF = AM \cdot AN .$$
仿此
$$AE \cdot AG = AM \cdot AN .$$
因此
$$AD \cdot AF = AE \cdot AG .$$
从而 D、E、F、G 四点共圆 .

例 2 三角形三边中点,三高线足,垂心与三顶点连线段的中点,这九点共圆,称为这三角形的九点圆 .

假设:L、M、N 是 $\triangle ABC$ 三边中点,D、E、F 是高线足,H 是垂心,P、Q、R 是 HA、HB、HC 的中点(图 1.72) .

求证:L、M、N、D、E、F、P、Q、R 九点共圆 .

图　1.72

证: 由于点数较多,选择三点作圆,再证其余各点在这圆周上,所以证法也很多.我们选择一法证之.

由于$\angle PDL = d$,九点圆以 PL 为其一直径,所以只要证明其余各点对 PL 的视角是直角就够了.由各中点的假设,$PN \parallel HB$, $NL \parallel AC$,但 $HB \perp AC$, $\therefore PN \perp NL$,即 N 在所说的圆上.仿此,可证 M、Q、R 也在这圆上.

P 是直角$\triangle EAH$ 斜边中点,L 是直角$\triangle EBC$ 斜边中点,所以 $PE = PH$, $LE = LB$.于是

$$\angle PEL = \angle PEH + \angle BEL = \angle PHE + \angle LBE,$$

即
$$\angle PEL = \angle BHD + \angle HBD = d,$$

从而 E 在以 PL 为直径的圆上.

仿此,F 亦在其上.已证九点共圆,此圆以 PL 为直径.

系　九点圆半径是外接圆半径的一半.

证: 设 O 为外接圆心,我们知道(§1.10 例 2)

$$OL \underline{\parallel} AP, \quad \therefore \quad PL \underline{\parallel} AO,$$

即九点圆的直径 PL 等于外接圆半径 OA.

§1.18　共点圆的证法

许多圆通过同一点,便称诸圆共点.要证诸圆共点,可证其中两圆的某一交点在其他各圆上,或证各圆通过同一定点.

例 1　通过圆内接四边形一顶点和邻接二边中点作圆,证明这四圆共点.

证:设 $ABCD$(图 1.73)为圆内接四边形,圆心为 O.就所说的四圆之一(例如通过 A、AB 的中点 M、AD 的中点 N 的圆)加以分析.由于 $OM\perp AB$, $ON\perp AD$,所以这圆以 OA 为直径,因而通过点 O.仿此,其他三圆也通过点 O.

图　1.73　　　　图　1.74

例 2　四直线相交成四个三角形,证明这四个三角形的外接圆共点.

证:如图 1.74 所示,四直线交成四个三角形 BCE、DCF、ADE、ABF.两圆 BCE 和 DCF 已有一公共点 C,必有另一公共点 O(O 不可能与 C 重合,否则这两圆相切于 C,这时应有 $BE\parallel DF$,与假设矛盾).我们来证明△ADE 的外接圆也通过点 O:

如图所示,有

$$\angle DAE+\angle DOE=\angle FAB+\angle DOC+\angle COE$$

$$
\begin{aligned}
&= \angle FAB + \angle DFC + \angle ABF \\
&= \angle FAB + \angle AFB + \angle ABF \\
&= 2d,
\end{aligned}
$$

所以 O 在圆 ADE 上.仿此, O 也在圆 ABF 上.

习 题 十 一

1. 设梯形的两底角相等,则两腰相等,且四顶点共圆.

2. 由一点向一群同心圆引切线,则各切点共圆.

3. 两圆相交于 A 及 B,过 A 任引一直线交此两圆于 C 及 D,在 C、D 引各该圆的切线交于 E.证明四点 B、C、D、E 共圆.

4. 两圆相交(或相切),由公弦所在直线(或公切线)上任一点 P 作两直线,其中一线交一圆于 A、B,另一线交另一圆于 C、D,证明四点 A、B、C、D 共圆.

5. 四边形四外角的平分线必围成一圆内接四边形.

6. 若圆内接四边形两对角线互相垂直,则由对角线交点向四边所引的四垂线足以及四边中点,这八点共圆.

7. 四圆顺次相外切,求证四切点共圆.

8. 在$\triangle ABC$三边(所在直线) BC、CA、AB 上各取一点 D、E、F,则三圆 AEF、BFD、CDE 共点.

当 D、E、F 是各边中点时,这点与哪一点重合?

当 D、E、F 是各边上的高线足时,这点与哪一点重合?

当 D、E、F 是各边与内切圆的切点时,这点跟哪一点重合?

9. 在$\triangle ABC$各边上向外作三个等边三角形 $A'BC$、$B'CA$、$C'AB$.

(1) 证明这三个三角形的外接圆共点;

(2) 证明三直线 AA'、BB'、CC'共点;

(3) 证明 $AA' = BB' = CC'$.

10. 设$\triangle ABC$不是等边三角形,在各边上向内作三个等边三角形,证明这三个三角形的外接圆仍然共点.

Ⅱ.初等几何变换

§1.19　图形的相等或合同

设想有两个点集合构成的两个图形 F 和 F',它们的点之间能建立这样的一一对应,使 F 中任两点的连线段总等于 F'中两个对应点的连线段,那末 F 和 F'称为<u>相等</u>或<u>合同</u>.

显然,一图形 F 与它自身合同,因为可以把它看作两个相重合的图形 F 和 F',将每一点看作对应于自身.

若 F 等于 F',显然 F'也等于 F.

若 F 等于 F',而 F'又等于图形 F'',则图形 F 等于 F''.

所以有

定理 1　<u>图形的相等具有反射性,对称性和传递性</u>.

定理 2　<u>在相等的图形中</u>.

1°<u>与共线点对应的是共线点,从而直线的相等图形是直线</u>;

2°<u>两相交直线的交角等于两条对应线的交角</u>.

证:设 F 和 F'是相等图形.

1°设 F 的共线点 A、B、C 对应于 F'的点 A'、B'、C',并设 B 介于 A、C 之间.则由图形相等的定义有

$$AB = A'B',\quad BC = B'C',\quad AC = A'C'.$$

所以　$$A'C' = AC = AB + BC = A'B' + B'C'.$$

这表明三点 A'、B'、C'非共线不可(否则 A'、B'、C'构成三角形,就有 $A'B' + B'C' > A'C'$了),并且 B'介于 A'与 C'之间.

可见直线的相等图形仍是直线,而且,如果点 M 在直线 a 上,则 M 的对应点 M'在 a 的对应线 a'上.

2°若 F 中两直线 a 和 b 相交于点 O,则由 1°,a 和 b 对应于 F'中两直线 a'和 b',并且 O 的对应点既在 a'上又在 b'上,即是 a'和 b'的交点 O'.在 a 和 b 上各取一点 A 和 B,它们的对应点 A'、

B'分别在 a'、b'上.由于对应的距离相等,所以,$\triangle OAB$和$\triangle O'A'B'$因三边对应相等而合同,故

$$\angle AOB = \angle A'O'B'.$$

图形的相等有两种情况.

在平面几何中,两个相等图形,若有两对对应点重合,例如 A 和 A'重合,B和B'重合,则任何第三对对应点 C 和 C',或相重合,或对称于重合直线 AB.在前一场合,两图形 F 和 F'称为全(相)等,两图形转向相同.在后一场合,F 和 F'称为镜照相等,两图形转向相反(图 1.75),这时对应的角的转向相反.

图　1.75

两个全相等的平面图形,只要有两对对应点叠合,便完全叠合了.两个镜照相等的平面图形,不将其中一个离开平面,再也无法叠合.

§1.20　运　　动[1]

设有两个相等且转向相同的图形,即两个全等图形,可以利用运动从其中一个得出另一个.即是说,两全等图形可用运动而叠合.[1]

运动这一概念是欧几里得《几何原本》的一个基本概念,但未

① 或称位移,移动,移置.

被列入原本的定义、公理、公设等基本概念之内,这是它的缺点之一.希尔伯特的《几何基础》把合同公理当作基本概念,而把运动的概念当作派生的.

所谓运动就是一个变换,把图形 F 的点变换为图形 F'的点,使任意两点间的距离(从而使角度)总保持不变,转向也保持不变.

将一图形变换为其自身使其每一点都不动的运动称为幺变换或恒同运动,记作 I.

设图形 F 经一运动 R 变换为图形 F',则写作 $R(F)=F'$.将 F'变回为 F 的变换仍然保持距离,保持角度及转向,因而也是一个运动,称为 R 的逆(运动),写作 R^{-1}.每一运动的逆存在,并且 R^{-1}的逆就是 R:$(R^{-1})^{-1}=R$.

设运动 R 将图形 F 变换为与之全等的图形 F',而运动 S 变换 F'为 F'',由于全等图形有传递性,从 F 到 F''的变换也是一个运动 T,称为两运动 R 和 S 按这顺序的乘积.由于

$$R(F)=F',\quad S(F')=F'',\quad T(F)=F'',$$

所以 $$S[R(F)]=S(F')=F''=T(F),$$

我们写作 $$T=S\cdot R \quad 或 \quad T=SR.$$

注意:做运动的先后顺序跟书写乘积的先后顺序相反.

经过一个变换没有变更位置的点和直线,称为这变换的二重点(或不变点或固定点)和二重线.

§1.20.1　平(行)移(动)

设给定一向量$\overline{PQ}$,以 P 为始点,以 Q 为终点.若以图形 F 上任一点 M 为始点作向量$\overline{MM'}=\overline{PQ}$(图 1.76),即 MM'与 PQ 同向平行且相等,则当点 M 在图形 F 上变动时,点 M'所形成的图形 F'称为由 F 经过平移$\overline{PQ}$得来.

一个向量决定一个平移,相等的向量决定相同的平移.长度为

图　1.76

零的向量(零向量)决定的平移是幺变换.

定理 1　平移是运动.

事实上,设 M 跟 M'、N 跟 N'是任意两对对应点,则 $MNN'M'$是平行四边形,所以 $MN=M'N'$.距离保持不变,且图形的转向相同.

定理 2　两平移的乘积是一个平移.

证:无损于普遍性,设两个平移$\overline{PQ}$和$\overline{QR}$公有一端点 Q(图 1.77).图形 F 上一点 M 经过平移$\overline{PQ}$到达图形 F'上点 M',点 M'经过平移$\overline{QR}$到达图形 F''上点 M''.显然有$\triangle MM'M''\equiv\triangle PQR$.所以 M''可以由点 M 直接经过平移$\overline{PR}$得到.

图　1.77

我们同时证明了平移的乘积合于力的平行四边形法则,亦即向量的加法法则.

定理 3　平移的逆是平移.

定理 4　除幺变换外,平移没有二重点,但有无穷多的二重线,即平行于平移方向的一切直线.

注意:这些线上点点都变了,各直线却没有变.

§1.20.2 旋转

将一图形 F 上各点绕一定点 O 转动同一角度 θ(图 1.78),称为旋转,所得图形 F'与 F 有相同转向,对应的距离相等 .所以 F'与 F 全等 .O 称为旋转中心,θ 称为旋转角或转幅 .

旋转由旋转中心和转幅所决定 .

当 $\theta=2d$ 时的旋转称为半周旋转,又叫中心反射或中心对称变换 .对应的图形是由旋转得来的,所以是全等的 .

要平移或旋转一圆,只要先平移或旋转圆心,然后作等圆 .

要将一直线 l 绕一定点 O 旋转 θ 角,作法如下:

图 1.78　　　　图 1.79

作 $OH\perp l$ 于 H,作$\angle HOH'=\theta$,并截 $OH'=OH$.过点 H'作直线 $l'\perp OH'$(图 1.79) .l'就是旋转以后的直线 .

这时两线 l 与 l'的交角即是 θ .

平面上的运动有平移,旋转,以及它们的乘积 .

§1.21 轴反射或轴对称变换

由上所述,两个合同的平面图形如果转向相同,只要有两对对应点 A 与 A'、B 与 B'相重合,便点点叠合了 .即是说,两个全相等的平面图形 F 和 F'至多经过两回运动就叠合了 .例如说,先做一

次平移$\overline{AA'}$使 A 与 A'重合,再以 A'为旋转中心,将 F 上 B 点旋转到与 B'重合就行了.

如果 F 与 F'虽是合同的,但转向相反,当 A 与 A'、B 与 B'重合以后,还须将图 1.75 右图中的 F 或 F'绕重合了的直线 AB 翻转 180°才能相互叠合.

在平面上给了一定直线 l 及一图形 F,作出 F 上每一点关于 l 的对称点以形成 F 的一个对称形 F'的过程,称为轴反射或轴对称变换,l 称为反射轴.经过轴反射,图形的转向改变了.一个是在纸的正面看的形象,一个是在纸的反面看的形象.沿着周界走,看图形所围的面积,一个在左方,一个在右方.

图　1.80

须要提请注意的是,这里的轴反射变换改变图形的转向;而§1.20.2 所说的中心反射变换是半周旋转,它是运动,保持图形的转向.所以不能认为带有反射招牌的就改变图形的转向.当然空间图形的情况又当别论.

定理 1　两个轴反射的乘积是一个运动.

定理 2　设直线 $a_1 /\!/ a_2$,则关于 a_1、a_2 的两个轴反射的乘积是一个平移.

证:设 M 为任一原象点,由 M 作直线垂直于 a_1 和 a_2,交 a_1 于 M_1,交 a_2 于 M_2(图 1.81).以 M'表 M 关于 a_1 的对称点,以 M''表 M'关于 a_2 的对称点.

不论 M 在平面上何处,应用有向线段的加法总有

图　1.81

$$MM'' = MM' + M'M'' = 2(M_1M' + M'M_2) = 2M_1M_2 .$$

(图上 M 画在 a_1 上方,建议读者把 M 画在两线之间或 a_2 下方,加以验证,以加深对有向线段效用的认识.)

所以,关于两平行线 a_1 和 a_2 的两个反射之积等于平移 $2\overline{M_1M_2}$.平移方向是 a_1 和 a_2 的法线方向,平移距离是 a_1 和 a_2 间距离的两倍.

系　每个平移可看作两个轴反射之积,两反射轴互相平行且垂直于平移的方向,并且其中第一条轴可任意选取,第二条轴便随之而定.

定理 3　设直线 a_1 与 a_2 相交于一点 O,则关于 a_1 和 a_2 的两个轴反射之积是一个旋转.

请读者自作证明,并仿照上面构作一个系,并予以证明.

§1.22　合同变换(正交变换)

我们在§1.19 讲了图形合同或相等的两种情况,利用平移、旋转或它们的乘积(所谓运动),可以把全相等的两个图形叠合起来,即占平面上的同一位置;利用轴反射可以改变图形的转向,所以,两个镜照相等的图形,利用轴反射、平移、旋转的乘积,可以使它们叠合.使相等图形叠合的变换就叫合同变换或正交变换,它们是保持距离和角度的.在平面几何,合同变换是由运动跟轴反射组成的.

§1.23　位似和相似变换

给定一点 S 和一数 $k\neq 0$.将任一点 M 与定点 S 连线,在此直线上取一点 M',使有向线段之比

$$\frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}} = k,$$

则称点 M'是 M 的位似点;定点 S 称为位似中心或相似中心;定数 k 称为位似比或相似系数.

若 $k>0$,则 SM'与 SM 同向,S 外分线段 MM'.若 N、N'为另一对位似对应点,则 MN 跟 $M'N'$同向平行,这时位似称正位似(图 1.82 上).

图　1.82

若 $k<0$,则 SM'与 SM 反向,S 内分线段 MM'.若 N、N'为另一对位似对应点,则 MN 跟 $M'N'$反向平行,这时位似称反位似(图 1.82 下).

赘一句,我们也把平移看作一个正位似;这时位似心不存在,

或者说，位似心是一个无穷远点，位似比 $k=1$．

注意：1°位似中心是与自身位似的点，除 $k=1$（幺变换）外，只有位似中心有此性质．

2°中心反射是反位似的一个特例（$k=-1$）．

3°平面上的位似变换保留图形的转向．（在空间，反位似变换改变图形的转向．）

4°设 F'是 F 的位似形，M、N 是 F 上任两点，M'、N'是它们的位似点，则对应线段之比是常数：

$$\frac{M'N'}{MN}=\text{位似系数 } k.$$

这由△SMN 和△$SM'N'$看是明显的．

5°若两多边形成位似，则对应顶点的角相等，对应边成比例．

我们把位似跟运动或轴反射之积称为相似变换．所以，相似变换就是将一图形放大或缩小，再改变它在平面上的位置．

一个图形经过相似变换得到的新图形称为原图形的相似形．

所以，若两多边形相似，则对应的角相等，对应边成比例．

位似是相似的一种特殊情况，特殊在任一对对应点的连线总通过同一定点．

正因为如此，我们说两个位似形是相似而置于位似位置的图形．

定理　图形的位似具有反身性，对称性和传递性．

证：1°任一图形 F 跟它自身位似，因为可取任一点作为位似中心，取 $k=1$ 作为位似比．

2°若 F'是 F 的位似形，则 F 也是 F'的位似形．位似中心不变，而位似比互为倒数．

3°现在证明位似变换具有传递性．设图形 F_1 以定点 S_{12} 为位似中心，以 k_{12} 为位似比变换成图形 F_2；设图形 F_2 以定点 S_{23} 为

位似中心,以 k_{23} 为位似比变换成图形 F_3 .要证明 F_3 是 F_1 的位似形 .

以 M_1 表 F_1 的任一点(图 1.83), M_2 是 F_2 上对应于 M_1 的位似点,即有 S_{12}、M_1、M_2 共线且

$$\frac{S_{12}M_2}{S_{12}M_1}=k_{12};$$

M_3 是 F_3 上对应于 M_2 的位似点,即有 S_{23}、M_2、M_3 共线且

$$\frac{S_{23}M_3}{S_{23}M_2}=k_{23}.$$

以 S_{13} 表直线 M_1M_3 与 $S_{12}S_{23}$ 的交点,我们来证明 S_{13} 是定点,且 $\frac{S_{13}M_3}{S_{13}M_1}$ 是定值 .

图 1.83

由于 $S_{12}S_{23}$ 是定直线,要证 S_{13} 是定点,只须证线段 $S_{12}S_{23}$ 被点 S_{13} 所分的分割比 $\frac{S_{12}S_{13}}{S_{13}S_{23}}$ 有定值 .为此,应用梅涅劳定理于 $\triangle S_{12}S_{23}M_2$ 和截线 $S_{13}M_1M_3$ 得

$$\frac{S_{12}S_{13}}{S_{13}S_{23}}\cdot\frac{S_{23}M_3}{M_3M_2}\cdot\frac{M_2M_1}{M_1S_{12}}=-1,$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{S_{12}S_{13}}{S_{13}S_{23}}&=\frac{M_3M_2}{S_{23}M_3}\cdot\frac{S_{12}M_1}{M_2M_1}\\&=\frac{S_{23}M_2-S_{23}M_3}{S_{23}M_3}\cdot\frac{S_{12}M_1}{S_{12}M_1-S_{12}M_2}\\&=\frac{1-k_{23}}{k_{23}}\cdot\frac{1}{1-k_{12}},\end{aligned}$$

这确是定值,与 F_1 上的动点 M_1 的选取无关.证了 S_{13}是定点.

再应用梅涅劳定理于$\triangle M_1M_2M_3$和截线 $S_{12}S_{13}S_{23}$得

$$\frac{M_3S_{13}}{S_{13}M_1}\cdot\frac{M_1S_{12}}{S_{12}M_2}\cdot\frac{M_2S_{23}}{S_{23}M_3}=-1,$$

即
$$\frac{S_{13}M_3}{S_{13}M_1}=\frac{S_{12}M_2}{S_{12}M_1}\cdot\frac{S_{23}M_3}{S_{23}M_2}=k_{12}k_{23}=\text{定比}.$$

所以,用 S_{13}做位似中心,用 $k_{12}k_{23}$做位似比,图形 F_1 转变为 F_3.

系　若三图形彼此互相位似,则三个位似中心共线.

§1.24　初等几何变换的应用

上面介绍了运动、反射和相似变换,它们在证题,求轨迹,解作图题几方面都有广泛的应用.这一章,我们介绍它们在证题方面的一些应用,在第二章和第三章,再分别介绍一些利用它们求轨迹和解作图题方面的例题和习题.

不应忘记当相似系数变为 1 或 -1 时,相似变换就变成合同变换.欧氏几何既讲合同图形,又讲相似图形.

§1.24.1　利用平移变换证明命题

例 1　以$\triangle ABC$三中线为边构成$\triangle A'B'C'$,又以$\triangle A'B'C'$三中线为边构成$\triangle A''B''C''$.求证

(1) $\triangle ABC$与$\triangle A''B''C''$相似,且相似比是 4∶3;

(2) 面积的比是 $S_{ABC}:S_{A'B'C'}=S_{A'B'C'}:S_{A''B''C''}=4:3$.

证:设 G 为$\triangle ABC$的重心,D 为 BC 边中点(图 1.84).将 GD 延长一倍到 E,或者说将 GB 平移到 CE.那末$\triangle CGE$的三边等于$\triangle ABC$各中线的$\frac{2}{3}$,即$\triangle CGE\sim\triangle A'B'C'$,相似比是 2∶3.由于$\triangle CGE$的中线

$$CD = \frac{1}{2} BC,$$

可见△$A'B'C'$的一条中线等于$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}BC$ $=\frac{3}{4}BC$.即是说,△$A''B''C''$的边长是$\frac{3}{4}$ BC、$\frac{3}{4}CA$、$\frac{3}{4}AB$.所以证明了(1).

又相似三角形面积的比,等于相似比的平方,所以

图　1.84

$$S_{A'B'C'} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 S_{CGE} = \frac{9}{4} S_{GBC} = \frac{3}{4} S_{ABC}.$$

仿此
$$S_{A''B''C''} = \frac{3}{4} S_{A'B'C'}.$$

证完.

例 2　<u>任意四边形中一双对边中点的连线段小于另一双对边的半和</u>.

设 M 是 AB 中点, N 是 CD 中点(图 1.85).

求证: $MN < \frac{1}{2}(AD + BC)$.

证: 将 AD 和 BC 各平移到 MP 和 MQ, 则 $ADPM$ 和 $BCQM$ 是平行四边形,从而

图　1.85

$$DP \underline{\parallel} AM,\ QC \underline{\parallel} MB.$$

由于 M 是 AB 中点,∴　$DP \underline{\parallel} QC$.

从而 $DPCQ$ 是平行四边形,于是 CD 和 PQ 互相平分.即是说, PQ 通过 CD 的中点 N,而且 N 是 PQ 的中点.

MN 是△MPQ 的中线,所以 $MN < \frac{1}{2}(MP + MQ)$(习题七

第 11 题),即

$$MN < \frac{1}{2}(AD + BC).$$

注意:当 $AD \parallel MN \parallel BC$ 即 $ABCD$ 为梯形且 MN 是中位线,或者当 $ABCD$ 是平行四边形时,不等号要改为等号.

又证:连一条对角线,例如 BD,设其中点为 E(图 1.86),则

$$MN < ME + EN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

§1.24.2 利用轴反射变换证明命题

定理 证明锐角三角形的所有内接三角形中,垂足三角形的周界最小.

所谓垂足三角形是指三条高线足所成的三角形.从§1.11 例 3 我们知道,锐角三角形的高线平分垂足三角形的角.下面的证法是施瓦兹(H.A.Schwarz,1843—1921,柏林大学教授)的证明.

证:(甲)施瓦兹利用垂足三角形的等角性,用反射法证明:如图 1.87$\triangle PQR$ 是$\triangle ABC$ 的垂足三角形,则有

$$\angle ARQ = \angle BRP = \angle C,$$

$$\angle QPC = \angle RPB = \angle A,$$

$$\angle PQC = \angle RQA = \angle B.$$

为了证明垂足三角形周界的最小性,设 DEF 为任一内接三角形.依次以$\triangle ABC$ 的边 AC、AB、BC、AC、AB 为轴作对称图形,共得六个合同三角形(图 1.87),每个有其垂足三角形及另一内接三角形.最后一个三角形的 BC 边,和最初的 BC 边平行:因为第一次反射,BC 沿顺钟向旋

图 1.86

图　1.87

转 $2\angle C$,第二次顺钟向转 $2\angle B$,第三次未受影响,第四次逆钟向 $2\angle C$,末次逆钟向 $2\angle B$.所以 BC 转动的角度合计为零.由上面说的等角性,线段 PP' 等于垂足三角形周界的两倍.而由 D 到 D' 的折线长等于 $\triangle DEF$ 周长的两倍.因 $DP \mathrel{\underline{\parallel}} D'P'$,折线不小于 PP'.所以,在一切内接三角形中,垂足三角形有最小周界.

以下的证明说明,不再有其他内接三角形,它的周界等于垂足三角形的周界.

图　1.88

(乙)　又证：设△ABC 的内接△PQR 在所有内接三角形中有最小周界(图 1.88)，则视 P、Q 为定点，R 必为 AB 上一点使 $PR+QR$ 为最小．于是必有$\angle PRB=\angle QRA$．同理有$\angle AQR=\angle CQP$，$\angle CPQ=\angle BPR$．也就是说，△PQR 有施瓦兹证明中的等角性质．我们知道，垂足三角形有此性质，还须证明，只有垂足三角形有此性质．

设$\angle BPR=\angle CPQ=x$，$\angle CQP=\angle AQR=y$，$\angle ARQ=\angle BRP=z$，则有

$$\angle A+y+z=\angle B+z+x=\angle C+x+y=2d,$$

$$(2d-2x)+(2d-2y)+(2d-2z)=2d.$$

解得
$$x=\angle A,\quad y=\angle B,\quad z=\angle C.$$

可见，凡有上述等角性质的内接三角形，它的边必与垂足三角形的边相互平行．由图 1.88 的右图，立刻见到此等三角形除垂足三角形外，必不能内接于△ABC．

要这个证明无懈可击，尚需补充一点．在此证明中默认 P 和 Q 不在 AB 边上，即默认 P、Q、R 无一为△ABC 的顶点．当其中一点与一个顶点重合时，最小周界三角形退化成相应高线的两倍．所以尚需证明，在△ABC 是锐角三角形的假设下，垂足三角形的周界确乎小于任一高线的两倍．

由 B 作 BL、BM、BN 垂直于△PQR 的三边(图 1.89)，则

$$PQ + QR + RP$$
$$= PQ + PN + NR + QR$$
$$= QL + QM < QB + QB,$$

即
$$PQ + QR + RP < 2QB.$$

备注: 这里得到计算垂足三角形周界的方法.因
$$\angle AQR = \angle CQP = \angle B,$$

故
$$\angle BQL = \angle BQM = d - \angle B.$$

所以
$$\text{周界} = PQ + QR + RP = QL + QM = 2QL$$
$$= 2BQ\cos(d - \angle B) = 2BQ\sin B$$
$$= 2d\sin A\sin B = 4R\sin A\sin B\sin C,$$

R 表△ABC 外接圆半径.

下面把定理推广到钝角三角形情形.上述两个证明中,都假设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 为锐角.若 C 为钝角,则 P、Q 都在△ABC 之外.严格说,垂足三角形不再是△ABC 的内接三角形,除非推广内接三角形的意义,把垂足在边的延长线上的也包含在内.但无论如何,垂足三角形不再有最小周界.因(图 1.90)

图　1.90

$$\angle RCP = 2d - \angle BCR = 2d - (d - \angle B) = 90°+ \angle B > \angle A$$

$CP >$即$\angle CPR$, ∴ $PR > CR$.仿此, $QR > CR$.

所以此时
$$PQ + QR + RP > QR + PR > CR + CR = 2CR.$$

由(乙)的证明,已知最小周界倘若不是来自垂足三角形,便是一条高线的两倍.所以得出结论:钝角三角形的"内接三角形"中,其周

图　1.89

界最小的是钝角顶点的高线算作两次.此高线三角形并不成其为三角形,但我们可以找到周界与此最小周界无限接近的内接三角形.

当$\angle C = d$时,垂足三角形的答案跟高线二倍的答案,合而为一.

§1.24.3　利用旋转变换证明命题

某些用合同三角形证明的命题,如果用运动(即正交变换)来处理,更加简单明了.

例如§1.14例1(图1.53),若将$\triangle CAE$绕点A逆钟向旋转$90°$,则A仍为A,C变到G,E变到B.$\triangle CAE$旋转$90°$成为$\triangle GAB$.从此断定:

$$CE = GB, \quad CE \perp GB.$$

从而得出那里的结论.

我们再举几个例.

例3　设$\triangle ABC$是等边的(图1.91),在BC、CA、AB上各取一点A'、B'、C',使$BA' = CB' = AC'$.设AA'、BB'、CC'构成$\triangle A''B''C''$.求证$\triangle A'B'C'$和$\triangle A''B''C''$也都是等边的,并且有相同的重心.

证:如果用证全等三角形的办法,第二问是很难下手的,第一问是有办法,并且不难,但很容易做虚功走迂回曲折的道路.

第一问中证明$\triangle A'B'C'$是等边三角形是明摆着的,三个三角形$AB'C'$、$BC'A'$、$CA'B'$因两边及其夹角对应相等而合同,所以有$B'C' = C'A' = A'B'$.至于要证

图　1.91

$\triangle A''B''C''$是等边三角形,途径很多,而且繁简悬殊.比较方便的证法是先用两边夹角证$\triangle ACC'\equiv\triangle BAA'\equiv\triangle CBB'$;由此推出$\triangle AC'B''$、$\triangle BA'C''$、$\triangle CB'A''$有两角对应相等(但不必证它们合同)从而第三个角也相等:

$$\angle AB''C'=\angle BC''A'=\angle CA''B';$$

最后由对顶角相等的定理知道$\triangle A''B''C''$的角相等,从而是等边的.

即使这比较简单的证法跟我们在这里要介绍的旋转法相比,也繁一些.

我们知道等边$\triangle ABC$有一个垂心外心、内心、重心彼此重合的中心O,三边在O点的视角都是$120°$.如果将$\triangle ABC$绕O点旋转$120°$,那末由于$OA=OB=OC$,三点A、B、C相继换位,从而三线AB、BC、CA也相继换位.BC上的点A'旋转后落在原先线段CA上,并且由于$BA'=CB'$,A'点旋转后就落在原先B'的位置.总之,旋转$120°$的效果是三点A'、B'、C'相继换位,可见$OA'=OB'=OC'$且$A'B'=B'C'=C'A'$.即是说$\triangle A'B'C'$是等边的,O也是它的外心,因而也是它的重心.

旋转$120°$以后,BB'和CC'落在CC'和AA'原先的位置,因此BB'和CC'的公共点A''将落在CC'和AA'的公共点B''的原先位置.一句话,旋转$120°$后,三点A''、B''、C''也相继换位.因此$\triangle A''B''C''$也是等边三角形并且它的重心也是点O.

例 4　<u>在凸四边形的每一边上向外方作正方形,求证两双对边上正方形中心的连线相等且垂直</u>.

证:连四边形$ABCD$的一条对角线,例如BD(图 1.92),以M表其中点.以P、Q、R、S依次表各正方形的中心.

将§1.14 例 1 应用于$\triangle CBD$和$\triangle ABD$,分别有

$$MP\perp MQ,\quad MP=MQ;$$

$MR \perp MS, \quad MR = MS$.

将$\triangle MPR$以M为中心旋转$90°$角，则它转到$\triangle MQS$.因为旋转角是直角，$\therefore QS \perp PR$;因为线段的长度不因旋转而变，$\therefore QS = PR$.

图 1.92

§1.24.4 利用相似变换证明

例 5 如图 1.93，以$\triangle ABC$的三边为底作三个转向相同的相似等腰三角形 $C'AB$, $A'CB$, $B'AC$.求证 $A'CB'C'$是平行四边形.

证：由$\triangle C'AB \sim \triangle A'CB$得

$$\angle ABC' = \angle CBA'.$$

两端同加$\angle C'BC$得

图 1.93

$$\angle ABC = \angle C'BA'.$$

并且由上面两三角形的相似又有

$$AB : BC = C'B : BA'.$$

可见$\triangle ABC$跟$\triangle C'BA'$有一角相等且夹边成比例，所以

$$\triangle ABC \sim \triangle C'BA'.$$

仿此有

$$\triangle ABC \sim \triangle AC'B'.$$

由此推出

$$\triangle C'BA' \sim \triangle AC'B'.$$

最后这一对相似三角形中，按假设还有一对对应边相等：

$$C'B = AC',$$

因之

$$\triangle C'BA' \equiv \triangle AC'B'.$$

所以有

$$C'A' = AB' = B'C.$$

$$C'B' = BA' = A'C.$$

四边形 $A'CB'C'$ 的两组对边各相等，就是平行四边形．

例 6 <u>（托雷密（Ptolemy）定理）</u>　<u>圆内接四边形中两对角线之积等于两双对边乘积之和</u>．

证：从圆内接四边形 $ABCD$ 的一个顶点，例如 A，作射线 AE 交 BD 于 E（图 1.94），使

$$\angle BAE = \angle CAD.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，除上两角相等外，还有

$$\angle ABE = \angle ACD.$$

所以

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD,$$

图　1.94

从而

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD},$$

即

$$(1)\qquad AB \cdot CD = AC \cdot BE.$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中，除 $\angle ACB$ 和 $\angle ADE$ 对同弧外，还有

$$\angle BAC = \angle BAE + \angle EAC = \angle CAD + \angle EAC$$

$$= \angle EAD.$$

于是

$$\triangle ABC \sim \triangle AED$$

从而

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED},$$

即

$$(2)\qquad AD \cdot BC = AC \cdot ED.$$

将（1）和（2）式相加得

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + ED)$$

图　1.33

$$= AC \cdot BD.$$

证完.

倘若我们回到§1.10例1的图1.33,其中△ABC是等边的,P是BC上任一点,应用托雷密定理于圆内接四边形$ABPC$,则有

$$PA \cdot BC = AB \cdot PC + AC \cdot PB,$$

约去等量,立刻得出那里的结果

$$PA = PB + PC.$$

习 题 十 二

1. 弹子碰着台边反射时按光线反射规律.在长方台上打弹子,能不能让弹子顺次撞击四侧边弹回原地?如果可能,弹子的初始点受不受什么限制?它的轨道有什么特点没有?

2. 在上题矩形台上有两个弹子A、B,设计将弹子A依次撞击四侧边最后击中B的通道.

3. 平面上给定相等但不平行的两线段AB和$A'B'$.求一个旋转中心O,使绕它旋转,AB能与$A'B'$重合.

4. C是直角△ABC的直角顶.以AB为边作正方形$ABDE$,以AC为边作正方形$ACFG$,它们都包含△ABC.求证$CE \perp BG$.

5. 四边形中有一双对边相等,证明另一双对边中点的连线与相等的两边成等角.

6. 证明:外离两圆的两条内公切线在外公切线上所截取的线段等于内公切线,而内公切线介于两条外公切线间的线段等于外公切线.

7. 证明:两个正位似或两个反位似之积是正位似,一正一反的两位似之积是反位似.

8. 证明:两圆可用两种方式看作位似图,正位似心是外公切线和连心线的交点,反位似心是内公切线和连心线的交点.位似比是什么?

9. 圆内接四边形中$BC = CD$,求证

$$AB \cdot AD + BC^2 = AC^2.$$

10. 设A、B、C、D是正七边形的连续四个顶点,求证

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

提示: 选择四个合宜的顶点,应用托雷密定理.

Ⅲ.度量与计算

§1.25　线段的度量

我们在第一段介绍了命题的证法,这是初等几何最关键的内容.第二章讲轨迹,第三章讲作图,都需要用到证明.

在第二段引进初等几何变换的概念,同样是为第二章、第三章服务的.

现在转入第三段,涉及各种几何量的计算.内容是不难的,但不应忽视它.

要测量一个几何量(例如线段、角、面积),须取一同类量为单位,即研究此量含单位量的多少倍,这倍数(不限为整数)便称为该几何量对于这个单位的<u>量数</u>(或<u>度量</u>,或<u>值</u>).

以线段为例来说明.设给定线段 a 和 u,我们取 u 为单位来测量线段 a,若 $a=3u$,则 a 的量数为 3 或<u>长度</u>为 $3u$.若截取 u 的 3 倍后剩下比 u 小的一个部分,即

$$3u < a < 4u,$$

我们说,<u>准确到单位</u>, a 的<u>弱近似值</u>(或不足近似值)为 3,<u>强近似值</u>(或过剩近似值)为 4.为了进一步测量 a,将 u 分为 10 等份,取一份来量所余部分,若它恰巧含这一份的 4 倍,则 a 的度量为 3.4 或长度为 $3.4u$;倘若这剩余部分截取一份的 4 倍后还剩下小于一份的一个部分,即

$$3.4u < a < 3.5u,$$

那末我们说,<u>准确到单位的十分之一</u>, a 的弱近似值为 3.4,强近似值为 3.5.为了更进一步测量 a,将 u 分为 100 等份,以其一份来量最后剩余的部分,以下类推.

若量数为有理数(即有尽小数或无尽循环小数),则称 a 与 u

有公度或可公度.例如,设 a 的量数为 3.47,则将 u 分为 100 等份,以一份量 a 和 u,量 347 次和 100 次恰好量尽.若量数是无理数(无尽不循环小数),则 a 与 u 称为无公度或不可公度.这时,没有任何线段能同时量尽 a 和 u.我们知道正方形的对角线和它的一边无公度.

同类二量对于同一单位的量数之比,称为这二量的比.

所以,一个量的量数,便是该量对于单位量的比.

设给定线段 a 和 b,将 b 分为(比方说)5 等份,而线段 a 恰巧含一份的 3 倍,那末 a 和 b 的比是 $\frac{3}{5}$.如果 a 不是含 b 的五分之一的整数倍,比方说多于 3 倍而少于 4 倍,那末 $\frac{3}{5}$ 称为比 $\frac{a}{b}$ 准确到 $\frac{1}{5}$ 的弱近似值,$\frac{4}{5}$ 称为准确到 $\frac{1}{5}$ 的强近似值.

倘若对于任何正整数 n,二同类量 a、b 准确到 $\frac{1}{n}$ 的比值总等于另外两个同类量 a'、b'(不必和前面的同属一类)准确到 $\frac{1}{n}$ 的比值,就说前二量的比等于后二量的比,写作 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$.因为递次取 $n=10,10^2,\cdots,10^n,\cdots$,依据假设,$a$ 与 b 的比值的各次近似值

$$p,\ p\cdot p_1,\ p\cdot p_1p_2,\ \cdots,\ p\cdot p_1p_2\cdots p_n,\ \cdots$$

和 a'与 b'的比值的各次近似值

$$q,\ q\cdot q_1,\ q\cdot q_1q_2,\ \cdots,\ q\cdot q_1q_2\cdots q_n,\ \cdots$$

(其中 p_i 和 q_i 表示 0 到 9 中的一数)总对应相等,所以这两个比值相等.

§1.26　关于成比例的量的证明

下面的一类命题在初等几何里是相当深刻的.

1°　在同圆或等圆内,两中心角之比等于介于角的两边间的两弧之比.

2°　一组平行线截任意二直线成比例线段.

这类命题的证明是相仿的;我们证后一命题.

设两直线 l 和 l'(图 1.95)被一组互相平行的线 AA'、BB'、CC'、DD'所截,则各点 A'、B'、C'、D'的顺序与 A、B、C、D 的顺序相同(否则 AA'、BB'、CC'、DD'中将有两线不平行了).我们来证:

图　1.95

(1)
$$\frac{CD}{AB}=\frac{C'D'}{A'B'}.$$

首先,设 $AB=CD$,要证 $A'B'=C'D'$.

过 B 作 $BE \parallel A'B'$交 AA'于 E,过 D 作 $DF \parallel A'B'$交 CC'于 F.则$\triangle ABE$ 与$\triangle CDF$ 有两角及夹边相等而合同,故

$$A'B'=EB=FD=C'D'.$$

显然(1)式成立.

其次,我们进入一般情况,证明不论 n 为何正整数,比值$\frac{CD}{AB}$和$\frac{C'D'}{A'B'}$,量准到$\frac{1}{n}$的近似值总是相等的.将 AB 分为 n 等份,若 CD

恰巧含这一份的 m 倍,则由上所说,$\frac{CD}{AB}=\frac{m}{n}=\frac{C'D'}{A'B'}$;若 CD 含这一份 m 倍有余,$m+1$ 倍不足,则比值 $\frac{CD}{AB}$ 和 $\frac{C'D'}{A'B'}$ 准确到 $\frac{1}{n}$ 的弱近似值都是 $\frac{m}{n}$.由于 n 的任意性,按§1.25 所说,(1)式也成立.

§1.27　面积的概念

在古代,不论中国、印度、巴比伦、埃及,关于田亩面积、谷仓容积、土木建筑工事的面积和体积的计算,都是推动几何发展的重要因素.

首先我们扼要地复习一下面积的概念.

两个平面多边形公有一边或若干边(或这些边的一部分),但没有任何公共内点,就称为<u>相邻的</u>.设在相邻的两多边形 P、P'中,取消它们的公共边(或公共边的部分),于是形成多边形 P'',称为前两多边形的<u>和</u>.这多边形 P''的内部含有一切属于原先两多边形内部的点以及公共边上的公共点,也只含这些点.

所谓定义平面多边形的<u>面积</u>,是指使每一多边形跟满足下列条件的一个量相对应:

1°<u>两个全等的多边形有相同的面积,不论它们在空间所占的位置为何</u>;

2°<u>两多边形 P、P'之和 P''的面积,等于 P、P'面积的和</u>.

倘若对于每个多边形能以一个满足这两条件的量与之对应,那末跟它们成比例的量也满足这两条件.即是说,这两条件还没有唯一地确定面积.

因此我们约定,<u>取边长等于单位长度的正方形作为面积的单位</u>,度量其他任何面积的数就是这面积与面积单位的比值.

假设<u>如上定义的面积存在[①],并取单位正方形作为面积单位</u>

(跟它对应的数是 1),那末我们在平面几何里证明了一连串的面积公式.[①]

最基本的是矩形的面积等于底乘高,而它的基础是下面的定理.

定理 底相等的两矩形面积之比等于它们的高的比.

证:设矩形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$(图 1.96)中有 $AB = A'B'$.以 S 和 S'表示它们的面积,要证明$\frac{S}{S'} = \frac{AD}{A'D'}$.

首先,如果高 AD 和 $A'D'$有公度,即是说,有一个长度 u 存在使

图 1.96

$$AD = nu,\ A'D' = n'u,\ \frac{AD}{A'D'} = \frac{n}{n'},\quad (n\text{ 和 }n'\text{表正整数}).$$

这时以平行于底边的一组平行线将两个矩形各分为 n 和 n'个合同的小矩形.每个小矩形的面积记为 S_0,那末,按面积定义的两条要求,有

$$\frac{S}{S'} = \frac{nS_0}{n'S_0} = \frac{n}{n'}.$$

所以

$$\frac{S}{S'} = \frac{AD}{A'D'}.$$

其次,如果高 AD 和 $A'D'$无公度,取任一正整数 m,将 $A'D'$分为 m 等份,以每一份量 AD,则 AD 必是介于 p 等份和 $p+1$ 等份之间(p 表某一正整数),因而

$$(1)\qquad \frac{p}{m} < \frac{AD}{A'D'} < \frac{p+1}{m}.$$

① 多边形的面积存在是可以证明的,可参看上海科技出版社 1964 年出版的编者所译阿达玛《初等几何》上册附录 D“关于面积的概念”,或参看商务印书馆 1954 年出版的苏步青译科士青著《几何基础》第七章面积论.

另一方面,按面积定义的第二条要求,<u>若多边形 P 包含在多边形 P' 内部,则 P 的面积小于 P' 的面积</u>.所以,如果由每一分点作底边的平行线,并将每一小矩形面积记为 S_0,则

$$S' = mS_0,\ pS_0 < S < (p+1)S_0.$$

因而

$$(2)\qquad \frac{p}{m} < \frac{S}{S'} < \frac{p+1}{m}.$$

(1)和(2)两式表明:不论 m 为何正整数,两个比值 $\frac{S}{S'}$ 和 $\frac{AD}{A'D'}$ 准确到 $\frac{1}{m}$ 的近似值总是相等的.逐次令 $m = 10^n$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$),则可见高的比值和面积的比值表为十进小数时,逐次的近似值相等,从而这两个比值相等.所以,在这情况下也有

$$\frac{S}{S'} = \frac{AD}{A'D'}.\quad \text{证完}.$$

系　<u>矩形的面积等于底和高二维的乘积</u>.

证　设底和高分别为 x 和 y 的矩形面积记为 $S(x, y)$,则由这定理

$$\frac{S(x, y)}{S(x, y')} = \frac{y}{y'}.$$

由于矩形的每一边都可以当作底,即底和高的地位可以对调,所以也有

$$\frac{S(x, y)}{S(x', y)} = \frac{x}{x'}.$$

按此两式得

$$\frac{S(x, y)}{S(x', y')} = \frac{S(x, y)}{S(x, y')} \cdot \frac{S(x, y')}{S(x', y')} = \frac{y}{y'} \cdot \frac{x}{x'},$$

即

$$\frac{S(x, y)}{S(x', y')} = \frac{xy}{x'y'}.$$

此式对任意正变量 x、y、x'、y' 成立.现在引入面积定义的单位规定,取 $x' = 1 = y'$,则 $S(x', y') = 1$,所以

$$S(x, y) = xy.$$

证完．

这个公式是平面图形面积公式的总根源，由它推出平行四边形、三角形、梯形乃至曲线围成的图形面积的诸多公式．这些不需在此噜囌．

§1.28　三角形中一些线段的计算

我们先约定一些关于三角形的符号．

设△ABC的三边从惯例记为 a、b、c，半周长记为 p，$2p=a+b+c$，三条中线记为 m_a、m_b、m_c，三高记为 h_a、h_b、h_c，平分角线记为 t_a、t_b、t_c，外接圆半径记为 R，内切圆半径记为 r，面积记为 S．

1°　已知三边求中线

我们首先以三边 a、b、c 表中线的长度．

设 AD 为中线(图 1.97)，H 为 A 在 BC 上的射影，不妨设$\angle ADC$为锐角，$\angle ADB$为钝角．我们知道，勾股定理可推广为下述两个定理．

定理　三角形中锐(钝)角对边的平方，等于其他两边的平方和减去(加上)这两边中一边与另一边在它上面的射影之积的两倍．(这两定理合起来相当于余弦定律．)

按这定理

图　1.97

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DH,$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DH.$$

相加得　　$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

这是一个牵涉到三角形中线的常用公式.以

$$AB = c,\ AC = b,\ BD = \frac{a}{2},\ AD = m_a.$$

代入,得　　$$m_a = \frac{1}{2}\quad 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

2°　已知三边求高和面积

由图 1.97,应用勾股定理得

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2a \cdot BH,$$

$$c^2 = h_a^2 + BH^2,$$

消去 BH 得

$$h_a^2 = c^2 - \frac{1}{2a}(c^2 + a^2 - b^2)^2 = \frac{1}{4a^2}[(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2]$$

$$= \frac{1}{4a^2}(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a).$$

$$\therefore \quad h_a = \frac{2}{a}\quad p(p - a)(p - b)(p - c),$$

$$\underline{S = \frac{1}{2}ah_a = \quad p(p - a)(p - b)(p - c).}$$

最后这个计算三角形面积的公式是我国南宋数学家秦九韶三斜求积公式(已知三边求三角形的面积)的变形.记住这个公式,许多几何上的、三角上的公式也很容易跟着就有了.

3°　已知三边求外接圆半径

设 AH 是$\triangle ABC$的高,AM 是外接圆直径(图 1.98),则

$$\triangle AHC \sim \triangle ABM,$$

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AM},$$

所以　　$$2R = AM = \frac{AB \cdot AC}{AH} = \frac{cb}{h_a} = \frac{abc}{2S}.$$

$$\therefore \quad R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4 \quad p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

图 1.98 图 1.99

4° 已知三边求内切圆半径

以 I 表△ABC 的内心(图 1.99),则就面积而言,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} + S_{\triangle IAB}$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = pr.$$

$$\therefore \quad r = \frac{S}{p} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$$

5° 已知三边求角平分线

设 AV 是△ABC 的平分角线,那末

$$\frac{BV}{AB} = \frac{VC}{AC} = \frac{BC}{AB+AC},$$

从此

$$BV = \frac{c}{b+c}a, \quad CV = \frac{b}{b+c}a.$$

设 AV 交外接圆于 P(图 1.100),则

$\triangle ABP \sim \triangle AVC$.

从而 $$\frac{AB}{AV} = \frac{AP}{AC},$$

$$AB \cdot AC = AV \cdot AP = AV(AV + VP)$$

图 1.100

$$= AV^2 + AV \cdot VP = AV^2 + BV \cdot VC .$$

以 BV 和 VC 的表达式代入,并化简得

$$t_a = AV = \frac{2}{b+c} \quad bcp(p-a) .$$

§1.29　斯特瓦尔特(Stewart)定理

定理　已知△ABC 及其底边上 B、C 两点间一点 D,求证

(1)　$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot BD \cdot DC$.

证:　作△ABC 的高线 AH(图 1.101),为固定思路计,设 H 在 D、C 之间.由§1.28 的定理(应用于△ACD 和△ABD)得到

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DH,$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DH .$$

图　1.101

以 BD 和 DC 分别乘此两式,相加得

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC = AD^2(BD + DC) + DC^2 \cdot BD + BD^2 \cdot DC$$

$$= AD^2 \cdot BC + BC \cdot BD \cdot DC .$$　证完.

备注:我们在叙述和证明中,假设了 D 在 B、C 之间.实际上,如果将出现在底边上的三线段解释为有向线段,则不论 D 出现在直线 BC 上何处,斯特瓦尔特公式依然成立.这留给读者自己去做简单的验证.

在公式(1)中,置 $BD = DC = \frac{a}{2}$,则得出求中线 m_a 的公式;置 $BD = \frac{ca}{b+c}$, $DC = \frac{ba}{b+c}$,则得出求内角平分线 t_a 的公式.

要求角 A 的外角平分线 $AD = t_a'$,则因(图 1.102, $c > b$)

$$\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} = \frac{a}{c-b},$$

得出

$$BD = \frac{ca}{c-b}, \quad CD = \frac{ba}{c-b}.$$

在△ABD中应用斯特瓦尔特公式得

$$AB^2 \cdot CD + AD^2 \cdot BC - AC^2 \cdot BD = BD \cdot C$$

图 1.102

用数据代入,求得 $t_a' = AD = \frac{2}{c-b} \quad bc(p-b)(p-c)$.

§1.30 圆内接四边形面积的计算

设圆内接四边形 $ABCD$ 的四边是 $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, DA $= d$ (图 1.103) . 求它的面积 S .

解: 以 $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$表半周长,以 E 表一双对边 AD 和 BC 的交点 .并设

$$x = DE, \quad y = CE .$$

图 1.103

由于△BAE∽△DCE,

我们有

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CDE}} = \frac{a^2}{c^2},$$

$$\frac{x}{c} = \frac{DE}{CD} = \frac{BE}{AB} = \frac{y-b}{a},$$

以及

$$\frac{y}{c} = \frac{CE}{CD} = \frac{AE}{AB} = \frac{x-d}{a}.$$

将这两式首尾两端相加减,并用比例性质得

$$\frac{x+y}{c} = \frac{x+y-b-d}{a} = \frac{b+d}{c-a},$$

$$\frac{x-y}{c}=\frac{y-x-b+d}{a}=\frac{d-b}{c+a}.$$

从此得出
$$x+y+c=\frac{c}{c-a}(b+c+d-a)=\frac{2c(p-a)}{c-a},$$
$$x+y-c=\frac{c}{c-a}(b+d+a-c)=\frac{2c(p-c)}{c-a},$$
$$x-y+c=\frac{2c(p-b)}{c+a},$$
$$y+c-x=\frac{2c(p-d)}{c+a}.$$

按三角形面积公式

$$S_{DCE}=\frac{1}{4}\quad(x+y+c)(x+y-c)(x-y+c)(-x+y+c)$$
$$=\frac{c^2}{c^2-a^2}\quad(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

从而

$$S_{BAE}=\frac{a^2}{c^2}S_{DCE}=\frac{a^2}{c^2-a^2}\quad(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

最后得

$$S_{ABCD}=S_{DCE}-S_{BAE}=\quad(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

§1.31　极大极小问题

在技术和自然科学里,在生产和日常生活里,经常牵涉到求极大极小的问题,企图达到最经济、最节约或有最高的效率.下面举几个几何方面的例.

例 1　如何从半圆形的铅皮板剪下具有最大周长的梯形?

问题是求半圆的内接梯形,使其周长为极大(图 1.104).梯形的大底即直径 $2r$.圆的内接梯形必等腰,设腰和小底是 x 和 $2y$,则梯形 $ABCD$ 的半周长为

$$u=x+y+r,$$

求 u 的极大值.

作 $BE\perp AD$,则

$$x^2 = AB^2 = AD\cdot AE = 2r(r-y) \quad y = \frac{2r^2 - x^2}{2r}$$

图 1.104

所以

$$u = x + y + r = \frac{-x^2 + 2rx + 2r^2}{2r} + r.$$

求 u 的极大值意味着求分子的极大值,而这分子

$$-x^2 + 2rx + 2r^2 = 3r^2 - (x-r)^2 \leq 3r^2.$$

其中等号当也只当 $x = r$ 时成立,这时也有 $2y = r$.

所以,把半圆弧分为三等分,就得到梯形两个顶点 B 和 C,梯形的底角是 60°和 120°.

例 2 有闸门的水道(或隧道)截面如图 1.105,上面是半圆,下面是矩形,已知截面的周长是 $2p$,怎样才得出最大的截面面积?

解: 以 x 表圆半径,h 表矩形的高,S 表截面面积,则

(1) $2p = 2x + 2h + \pi x$,

图 1.105

(2) $S = 2hx + \frac{1}{2}\pi x^2$.

消去 h 得

$$S = 2px - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2$$

$$= \frac{2p^2}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{2}\left(x - \frac{2p}{4+\pi}\right)^2 \leq \frac{2p^2}{4+\pi}.$$

等号当且仅当 $x = \frac{2p}{4+\pi}$ 时成立,这时由(1)式得

$$h = \frac{2p}{4+\pi} = x.$$

§1.31.1 两个常用的定理

定理 1 两个正数之和为常数,则其乘积当两变数相等时为最大.用几何方式叙述即:等周矩形中,以正方形面积最大.

证:以 x 和 y 表这两正变数,设

$$x+y=2a;$$

则 $xy=\frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2]=\frac{1}{4}[4a^2-(x-y)^2]\leq a^2.$

所以 xy 当且仅当 $x=y=a$ 时才达到极大值 a^2.

这个定理的几何证明也十分简明易记,以(图 1.106)线段 $AB=2a$ 为直径作半圆.分 AB 于 C 点使 $AC=x$, $CB=y$,在 C 引 AB 的垂线交半圆弧于 D,则 CD 等于 AC 与 CB 的比例中项,即

图 1.106

$$CD = \quad xy.$$

显然从半圆周上一点到直径的距离 $CD\leq$ 半径 a,所以 $\max(xy)=a^2$,这时 $x=y=a$.

定理 2 两个正数的积为常数,则其和当两变数相等时为最小.以几何方式叙述即:等积矩形中,以正方形周长最小.

证:以 x 和 y 表这两正变数.设

$$xy=a^2,$$

则 $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=(x-y)^2+4a^2\geq 4a^2.$

等号当且仅当 $x=y$ 时成立.所以

$$x+y\geq 2a.$$

$\min(x+y)=2a$,这时 $x=y=a$.

我们且给出一个几何证明如下(图 1.107).

作一线段 $AB=2a$,通过 A、B 任作一圆,和 AB 的中垂线交

于 D 和 E,记 CD = x, $EC = y$.则不论怎样作法,总有

$$xy = CD \cdot EC = AC \cdot CB = 常数\ a^2 .$$

显然 y = 直径 $ED \geq$ 弦 AB,

等号当且仅当 AB 也是直径,即 $x = y = a$ 时成立 .所以,当且仅当 $x = y = a$ 时, $x + y$ 有极小值 .

图 1.107

例 3 在半径为 r 的圆内求有最大周长的内接矩形 (图 1.108) .

解: 以 x、y 表矩形边长,以 $2p$ 表周长,则

$$p = x + y, \quad x^2 + y^2 = 4r^2 .$$

由于一切量都是正的, p 和 $p^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2xy + 4r^2$ 同时达到极大,即 p 和 xy 同时达到极大 .

图 1.108

但 xy 和 x^2y^2 同时达到极大 .而 $x^2 + y^2 = 4r^2$ = 常数,所以按定理 1,当且仅当 $x^2 = y^2$ 时, x^2y^2 达到极大 .

所以,当且仅当 $x = y$ 时, $p = x + y$ 达到极大,即圆内接矩形中,正方形的周长是最大 .

例 4 墙上挂着一张画,高是 AB,问一个观察者应站在离墙多远的地方, AB 所张的视角 θ 最大?

解: 设 E 为这位观察者眼睛所在, EC 是水平线 .以 x 表距离 EC(图 1.109),设 $a = CA$, $b = CB$, $\alpha = \angle CEA$, $\beta = \angle CEB$,则 $\theta = \beta - \alpha$.

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}.$$

最末的分数分子为常数,故当且仅当分母 $x + \frac{ab}{x}$ 达到极小值时, $\operatorname{tg}\theta$ 从而 θ 才达到极大.由于

$$x \cdot \frac{ab}{x} = ab = \text{常数},$$

图 1.109

根据定理 2,当且仅当

$$x = \frac{ab}{x} \quad 即 \quad x = \quad ab$$

时, θ 达到最大.所求距离应为 CA 和 CB 的比例中项.

例 5　圆的外切等腰梯形中,面积最小的要满足什么条件?

解:设 $ABCD$ 是半径为 r 的圆的外切等腰梯形, E、F、G 是切点(图 1.110), O 是圆心.设

图 1.110

$$AB = 2x,\ CD = 2y.$$

则梯形面积为

$$S = \frac{1}{2}(2x + 2y) \cdot 2r = 2r(x + y).$$

要 S 最小就是要 $x + y$ 为最小.但容易证明 $\triangle AOD$ 是直角三角形,从而

$$AG \cdot GD = OG^2 \quad 即 \quad xy = r^2.$$

按定理 2,当且仅当 $x = y$ 时, $x + y$ 达到极小.所以外切等腰梯形变为正方形时,面积最小.

例 6　设一类四边形中两双对边中点所连两线段之和为定长

$2l$,求其中面积达到的最大值以及该时的几何特征.

解:设 PR、TQ(图 1.111)是四边形 $ABCD$ 中两双对边中点的连线,那末 $PQRT$ 是平行四边形,并且容易看出,就面积讲,

图 1.111

$$S_{TRD}=\frac{1}{4}S_{ACD},\ S_{PBQ}=\frac{1}{4}S_{ABC},$$

相加得
$$S_{TRD}+S_{PBQ}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

仿此有
$$S_{APT}+S_{QCR}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

从此知道四边形 $ABCD$ 的面积是平行四边形 $PQRT$ 的两倍:

$$S_{ABCD}=2S_{PQRT}=TQ\cdot PR\sin\varphi\quad(\varphi\text{表 }PR\text{ 与 }TQ\text{ 的夹角})$$
$$\leq TQ\cdot PR,$$

等号当且仅当 $\varphi=90°$时成立.由假设条件,$TQ+PR=$定长 $2l$,所以 $ABCD$ 的面积达到最大值的条件是(按 φ 的条件以及定理 1):

1° $TQ\perp PR$;

2° $TQ=PR=l$,

即是说 $PQRT$ 应为正方形.这时得到 S_{ABCD}的最大值 l^2.

回到四边形 $ABCD$ 来看,达到最大面积 l^2 时的几何特征是

1°对角线 $AC\perp BD$;

2° $AC=BD=2PQ=\sqrt{2}l$.

所以,有最大面积的四边形有无数个,形状可以千差万别,但各个四边形的对角线相等(等于 $\sqrt{2}l$)且互垂.

习 题 十 三

1. 证明:在任意四边形中,各边的平方和等于两对角线的平方和加上 4

倍对角线中点连线段的平方．

2．设 G 是$\triangle ABC$ 的重心，求证：

1°　$BC^2+3\cdot GA^2=CA^2+3\cdot GB^2=AB^2+3\cdot GC^2$；

2°　$GA^2+GB^2+GC^2=\dfrac{1}{3}(BC^2+CA^2+AB^2)$．

3．设$\triangle ABC$ 中三边为 a、b、c，三中线为 m_a、m_b、m_c，求证：

1°　$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$；

2°　$m_a^4+m_b^4+m_c^4=\dfrac{9}{16}(a^4+b^4+c^4)$．

4．设 a、b、c 表三角形三边，p 表半周，S 表面积，r 及 r_a、r_b、r_c 表内切圆及旁切圆半径，求证：

1°　$S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$；

2°　$r_br_c+r_cr_a+r_ar_b=\dfrac{r_ar_br_c}{r}=p^2$；

3°　$S=\sqrt{rr_ar_br_c}$；

4°　$r_a=\sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$．

5．等腰梯形的对角线互相垂直，高为 10 cm，求中位线长．

6．设$\triangle ABC$ 中已知 $m_a=22.5$ cm，$m_b=15$ cm，$c=22$ cm，求 m_c 的长．

7．山脚下一工厂，上面露出烟囱，一人立在山坡上眼睛恰与烟囱顶点在同一水平线上，望见露出厂房的烟囱部分和下面直到地面的厂房部分所张的视角相等．已知厂房高为 18 米，烟囱的可见部分是 10 米，求此人与烟囱顶点的距离．

8．大小二轮以皮带相连，已知两中心相距 14 尺，半径各为 9 尺及 2 尺，求皮带的长．

9．公路宽 20 米，距公路一侧 1 500 米处有敌方的 望台，台高 22 米，问在公路旁设置多高的伪装物就可以使敌方看不见公路？

10．一人欲测塔高 AB，先从塔足 B 在水平地上走到一点 C，回头测得塔顶的仰角是 30°，再依原方向走 30 丈到 D 点，回头测得仰角 15°．求塔高．

11．为了测圆柱或圆球的直径，可使用卡尺，测出截面圆的弦长 $AB=l$，弦高 $CD=h$（图 1.112）．试写出以 l 和 h 表示圆柱直径的公式[①]．

① 我国九章算术里有一个勾股问题，用与本题类似的方法测嵌入壁中的圆木直径，用锯子在露出部分锯一道痕，量出痕长 l 和深度 h，再计算．

12. 为了测量大圆柱的直径,除照上题间接测量外,还可如下间接测量:取半径为已知长 r 的两根标准圆杆,与欲测的圆柱置于一平面上使其相切(图 1.113) .量出图上的长度 $2l$,证明圆柱半径是

$$R = \frac{(l - r)^2}{4r}.$$

13. 图 1.114 是利用三根轧辊筒的转动,把厚度为 b 的钢板轧成半径为 R 的圆筒形的轧床的示意图,下面两轧辊半径为 r_2,上面一个的半径为 r_1,问 OB 的长度该调节成多少?

14. A 是直角内一定点(图 1.115),通过 A 任作一直线,怎样才能使所形成的直角三角形面积最小?

图 1.114

图 1.115

15. 设三角形三边为 a、b、c,计算它的垂足三角形三边的长度 .

16. 设 E、F、G、H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 的中点 .求证:

$$AC^2 + BD^2 = 2(EG^2 + FH^2).$$

17. 一圆的直径 AB 是十进制的一个二位数,若将它的两个数字互换后,恰巧是 AB 的一条垂直弦 CD 的长度 .已知它们的交点到圆心的距离是一个有理数,求 AB 的长度 .

18. 圆半径为 5,弦 $BC = 6$,另一弦 AD 跟 BC 相交,B 点在劣弧 AD 上,并且弦 AD 被 BC 平分,而且 AD 是从点 A 引出能被 BC 平分的唯一弦 .证明小弧 AB 所对的圆心角的正弦必是有理数,并求其值 .

第二章　轨　　迹

§2.1　轨迹的意义

一走进生产车间,无休止地作旋转和平行移动的切削机床,立刻吸引住我们的注意力.由于切削工具和工件的相对运动,前者在后者上面留下了切痕.车床对圆形工件的加工,反应了这样一个事实:动点到定点的距离保持不变,则动点的轨迹为一圆周.刨床或平面磨床的加工中,体现动点与定直线的距离保持不变,且在定直线的一侧,则其轨迹为定直线的一条平行线.

检查沙模或轴承座的内圆是否合格,我们可以用直角三角板或角尺来检查,无非是利用这样的概念:对给定线段的视角等于直角的点,其轨迹为一圆周.

这些事实告诉我们,掌握一定几何轨迹的知识,在生产过程中也是必要的,在教学中更不必说了.

下一章要讲作图题,作为解作图题的基础工具,我们来介绍轨迹的概念.

倘若一个图形的给出,是由于指示了它上面并且也只有它上面的各点所具备的性质,我们便说,这图形是具有所示性质的点的轨迹.而所说的性质则称为该图形的特征性质.

换言之,给定了条件或性质 C,则满足条件 C 的一切点所构成的图形 F,称为由条件 C 所规定的轨迹.

在此,必须特别注意轨迹命题的两面证明的必要性,这是轨迹的定义所规定的:

(1) 任取合于条件 C 的一点,证明它在图形 F 上;

(2) 在图形 F 上任取一点,证明它合于条件 C.

但有必要时(例如为了证明的简化),也可斟酌具体情况分别改证:

(1′) 不在图形 F 上的任一点,必不合于条件 C;

(2′) 不合于条件 C 的任一点,必不在图形 F 上.

由命题的四种变化(§1.3),我们知道(1)与(1′)互为逆否命题,因而是等效的.(2)与(2′)也是等效的.所以证轨迹命题时,可证(1)与(2)或(1)与(2′),或证(1′)与(2)或(1′)与(2′).如果证了(1)与(1′)或(2)与(2′),那就错了,因为只证了一面,丢掉了另一面.

(1)或(1′)保证了没有一个合于条件 C 的点不在图形 F 上,即是说,合于条件的点没有遗漏,这叫轨迹的<u>完备性</u>;(2)或(2′)保证了图形 F 上的点没有一个不满足条件 C,即是没有鱼目混珠或冒充的点,这叫轨迹的<u>纯粹性</u>.这两方面合起来保证了轨迹上的点既无遗漏,又无冒充,即是保证了<u>不漏不滥</u>.以后通过各种例子,会发现忽略这两方面之一所铸成的错误.

从字面上来讲,也有这种说法:“一点按照给定性质或条件移动时所经过的路线,称为该点的轨迹.”这种说法是轨迹定义的浅易表达,直观易明.但以下会指出这种定义有其狭隘的一面.

一个几何图形固然可以看成由点所构成,同时也可以看成由其他几何元素例如直线或圆周等等所构成.比方在车床上车圆柱,实际上是把圆周看作点的轨迹,而把工件夹在万能铣床的分度头上用平铣刀铣成圆柱,实质上乃是把圆看成切线的包络或把圆柱看作切面的包络.在砂轮上磨刀,金光四射,圆由它的切线形成这一事实便可以看清了.尽管如此,在此地我们只考虑点的轨迹.

§2.2 轨迹命题的三种类型

轨迹命题因叙述方式的不同而分为三种类型,这是由浅入深由易到难的顺序.

第一类型轨迹命题,明白说出轨迹的形状和位置,如有大小可言,也一并指出.证明第一类型的命题分为三步.(1) 证完备性,即证明合于条件的点都在指示的图形上,或证其等效命题,即不在所示图形上的点不合于条件;(2) 证纯粹性,即证所示图形上的点合于条件,或证其等效命题,即不合条件的点不在所示图形上;(3) 下结论,即判断命题成立.不待证明完毕,便说“满足条件的点在轨迹上”或“在轨迹上的点满足条件”,是没有意义的.因为这两句话是不待证明便成立的,至于轨迹是什么图形,在没有完成完备性或纯粹性的证明之前充其量是一种预测.

第二类型轨迹命题,明白说出轨迹的形状,至于位置或大小,或叙述而不全,或干脆不说.解决第二类命题也分三步.(1) 探求轨迹,即预测轨迹的位置和大小,使其完全确定;(2) 证明(其中包括证完备性、证纯粹性、下结论);(3) 讨论,即研究给定的条件对轨迹的影响.

第三类型轨迹命题只给出条件,至于轨迹的形状、位置和大小,则一概不提.解这一类型的命题,如解决第二类型一样,只是探求时还麻烦一点而已.

举例:

第一类型:距两定点等远的点的轨迹,是该两点连线段的中垂线.

第二类型:距两定点等远的点的轨迹是一条直线.

第三类型:求距两定点等远的点的轨迹.

§2.3　基本轨迹命题

下列轨迹命题乃读者所熟知,述而不证,以备应用.

1°距两定点等远的点的轨迹,是该两点连线段的中垂线.

2°距两相交直线等远的点的轨迹,是两条互垂的直线,它们平分两定线所成的角.

3°距两平行的定直线等远的点的轨迹,是平行于它们的一条直线,即两平行线的公垂线段的中垂线.

4°至定直线的距离为定长的点的轨迹,是平行于定直线的两条直线,各在定直线的一侧且距离定线等于所设定长.

5°至定点的距离为定长的点的轨迹为一圆周,以定点为其中心而以定长为半径.

6°对定线段的视角为定角 $\alpha(0<\alpha<2d)$的点的轨迹,是对称于定线性(所在直线)的两个圆弧,以定线段为弦而其内接角等于 α.

不但会说出还要会作出这两圆弧.

特别,当 $\alpha=d$ 时,轨迹变为以定线段作直径的圆周.

我国古代数学书《周髀算经》上所载商高的话所谓‘环矩以为圆’就是这个意思.当我们要检查空的半球形铸件是否合乎规格时,就可以将直角三角板的两条直角边贴合于半球的圆截口,用这种方法观察直角顶是否处处跟铸件贴合.

§2.4　第一类型轨迹命题举例

上面已讲过,第一类型轨迹命题中含有条件以及轨迹的形状、位置乃至大小,我们所要做的只是互逆的两面证明,以证实结论.

例 1　设一点到矩形的一双对顶的距离之和等于到另一双对

顶的距离之和,则其轨迹为矩形的两条对称轴 .

假设: $ABCD$ 是矩形(图 2.1), l 和 l'是它的对称轴, P 是适合条件

(1) $PA+PC=PB+PD$

的点 .

求证: P 点的轨迹是直线 l 和 l'.

证: 1°证明满足性质(1)的点必在 l 或 l'上 .

图　2.1

将(1)两端平方得

(2) $PA^2+PC^2+2PA\cdot PC=PB^2+PD^2+2PB\cdot PD$.

以 O 表 AC 和 BD 的交点,则 PO 是$\triangle PAC$ 和$\triangle PBD$ 的中线 .由中线性质(§1.28,1°)有

$$PA^2+PC^2=2(AO^2+PO^2),$$
$$PB^2+PD^2=2(BO^2+PO^2).$$

从而得出

(3) $$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

从(2)和(3)得出

(4) $$2PA\cdot PC=2PB\cdot PD.$$

由(3)减去(4)得

(5) $$(PA-PC)^2=(PB-PD)^2.$$

所以有

$$\begin{cases} PA+PC=PB+PD \\ PA-PC=PB-PD \end{cases} \text{或} \begin{cases} PA+PC=PB+PD \\ PA-PC=PD-PB, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} PA=PB \\ PC=PD \end{cases} \text{或} \begin{cases} PA=PD \\ PC=PB. \end{cases}$$

所以满足条件(1)的点 P 不在 l 上便在 l'上 .

$2°$证明在直线 l 或 l'上的点满足条件(1).

由于图形的对称性,这是显然的.

到此我们断定,所求轨迹是直线 l 和 l'.

注意:1) P 点的轨迹由两直线合成.凡由二或多个图形合成的轨迹,称为合成轨迹,以区别于由单一图形组成的单一轨迹.

2) 直线 l 不是我们的轨迹,l'也不是.因为 l 上的点虽满足条件(1);但满足条件(1)的点却不一定在 l 上.直线 l 和 l'合在一起即二者的并集才构成合于条件的点的轨迹.

例 2　设一点与一定圆的距离[1]等于圆半径,则该点的轨迹为该圆中心和一个半径加倍的同心圆的并.[1]

假设:点 P 与定圆 $O(r)$的距离 $PA=$半径 r(图 2.2).

求证:点 P 的轨迹是点 O 和圆 $O(2r)$.

证:　$1°$ 证完备性.设 P 在圆 $O(r)$内部,则由假设 $OP=OA-PA=0$,即点 P 重合于圆心 O.

若 P 在圆 $O(r)$外部,则

$$OP=OA+AP=r+r=2r,$$

因此 P 在圆 $O(2r)$上.

$2°$证纯粹性.首先,据定义,点 O 到圆 $O(r)$的距离是 r,即点 O 合于条件.

图　2.2

其次,在圆 $O(2r)$上任取一点 P,因 P 在圆 $O(r)$外部,线段 OP 必交圆于一点 A,且 $AP=OP-OA=2r-r=r$,即点 P 合于条件.

$3°$所以合乎条件的点的轨迹是点 O 和圆 $O(2r)$的并集.

---

① 设一点 P 与圆心 O 所连直线交圆于两点 A、B,并以 A 表其中距 P 较近者,以 M 表圆上除 A 以外的任一点,则可证明 $PA<PM$.于是称 PA 是点 P 到圆周的距离.圆心到圆周的距离定义为其半径.

注意：O 是轨迹上的点，这样的点是轨迹的孤立点．当轨迹有孤立点时，把轨迹定义为动点移动的路线，说服力便比较差了，这就显示出我们所下轨迹定义的优越性．

例 3　给定直角 XOY，一条定长（记为 a）的线段 AB 两端在角的两边上滑动，则 AB 中点 P 的轨迹是以 O 做中心以 $\frac{a}{2}$ 做半径的圆被角的两边所截的弧 QR（图 2.3）．

证：1°设 P 为 AB 中点，则 P 为直角△OAB 斜边中点，因而

$$OP=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2},$$

即点 P 确在 QR 上．

2°在 QR 上任取一点 P，以 P 为中心作通过点 O 的圆，交角的两边于 A、B．由于 XOY 是直角，易证 A、P、B 共线，AB 必为该圆直径，从而 $AB=2PO=a$，即 P 确是一条定长线段 AB 的中点．

图　2.3

所以 P 点的轨迹是 QR．Q 和 R 称为轨迹的临界点或起讫点．

习 题 十 四

1．切定直线于其上一定点的圆，其中心的轨迹是定直线在该定点的垂线．

2．切定圆于其上一定点的圆，其中心的轨迹是定圆心与该定点所连的直线．

3．设大小固定的动圆切于一定圆，则动圆心的轨迹是定圆的两个同心圆，其半径分别等于定圆与动圆的半径之和及差．

4．给定两点 A、B，l 为通过 A 的动直线，则点 B 关于直线 l 的对称点的轨迹是一个圆，即以 A 为中心以 AB 为半径的圆．

5．介于定三角形两边之间且平行于第三边的线段，其中点的轨迹是第

三边上的中线 .

6. △ ABC 中底边 BC 固定, 顶角 A 等于定角 α, 求证△ ABC 的内心的轨迹是对称于 BC 的两个圆弧, 以 BC 为弦且其内接角等于 $d+\frac{\alpha}{2}$.

7. 　$ABCD$ 的底边 BC 固定, 且一边 AB 为定长 a, 则其对角线交点的轨迹为一圆, 圆心是 BC 的中点 .半径是$\frac{a}{2}$.

8. △ ABC 底边 BC 固定, 顶角 A 等于定角 α, 则△ ABC 重心的轨迹是两个圆弧, 以 BC 的两个三等分点的连线段为弦, 且内接角都等于 α .

9. 设一点在已知三角形三边(所在直线)上的射影共线, 则该点的轨迹是这三角形的外接圆 .

§2.5　第二类型轨迹命题举例

第二类型轨迹命题有条件, 有轨迹的形状但叙述不完全 .所以, 在证明完备性和纯粹性之前, 首先要下一番探求工夫, 把轨迹完全预测出来 .

例 1　和两定点距离之比等于定比(不等于 1)的点的轨迹是一个圆周, 称为阿氏(Apollonius) 圆 .

设 A、B 点为定点(图 2.4), 求点 M 的轨迹使比

$$\frac{MA}{MB}=\text{定数 } m(\neq 1) .$$

探求: 若一点 M 合于此条件, 显然 M 关于直线 AB 的对称点也合于条件, 即所求轨迹以 AB 为对称轴, 那末就是直径在 AB 上的一个圆了 .设内分线段 AB 于 C, 外分 AB 于 D, 使

图　2.4

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}=m,$$

那末点 C 和 D 合于所设条件,轨迹可能是以 CD 做直径的圆周了.

证:1°设 M 为合于条件 $\frac{MA}{MB}=m$ 而不在直线 AB 上的任一点,由于 $\frac{MA}{MB}=\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$,利用三角形一个角的内外角平分线的性质,容易证明 MC 和 MD 分别内分和外分 $\angle AMB$,于是 $MC\perp MD$,从而 M 在以 CD 为直径的圆 O 上.

2°设 M 是圆 O 上任一点,过 M 作 MB 关于 MC 的对称线 MA',设它与直线 AB 的交点是 A'.既然 MC 和 MD 是 $\angle A'MB$ 的内外平分线,那末应用连比的性质

$$\frac{A'C}{CB}=\frac{MA'}{MB}=\frac{A'D}{BD}=\frac{A'D-A'C}{BD-CB}=\frac{CD}{BD-CB}.$$

但由假设 $\frac{AC}{CB}(=m)=\frac{AD}{BD}=\frac{AD-AC}{BD-CB}=\frac{CD}{BD-CB}$.

从而 $\frac{A'C}{CB}=\frac{AC}{CB}$,$A'C=AC$.由于 A 和 A'在点 C 的同侧,所以 A' 实即点 A.$\therefore \frac{MA}{MB}=\frac{AC}{CB}=m$.

证完了完备性和纯粹性,所以得结论:所求轨迹是以 CD 为直径的圆周.证完备性和纯粹性,宜各画一图.

例 2　到两定点距离的平方和为常量的点的轨迹(倘若存在)为一圆(可能退缩为一点).

设 A、B 为定点(图 2.5),k 为定长,求点 M 的轨迹使满足条件

$$MA^2+MB^2=k^2.$$

探求:若点 M 合于条件,显然 M 关于直线 AB 的对称点以及 M 关于 AB 的中垂线 l 的对称点也都合于条件.可见轨迹以直线 AB 和 l 为对称轴,因而可能是以 AB 的中点做中心

图　2.5

的圆 .

证: 1°设点 M 合于条件, 连 MO, 它是△MAB 的中线, 所以有

$$k^2 = MA^2 + MB^2 = 2(AO^2 + MO^2),$$

于是
$$MO = \frac{1}{2}\quad 2k^2 - AB^2 \equiv r.$$

可见合于条件的点 M 确是在圆 $O(r)$上, 其中 r 由上式给出 .

2°反之, 设 M 为圆 $O(r)$上任一点, 则

$$MA^2 + MB^2 = 2(AO^2 + MO^2) = \frac{1}{2}AB^2 + 2r^2 = k^2,$$

即 M 合于所设条件 .

所以点 M 的轨迹是圆 $O(r)$.

讨论: 当 $k > \frac{AB}{2}$时, 轨迹为圆; 当 $k = \frac{AB}{2}$时, 轨迹是一个孤立点; 当 $k < \frac{AB}{2}$时, 轨迹不存在, 即没有适合条件的点 .

例 3　<u>到两定点距离的平方差为常量的点的轨迹, 是垂直于这两点连线的一条直线</u> .

设 A、B 为定点(图 2.6), k 为常量(正、负或零), 求满足条件

$$MA^2 - MB^2 = k$$

的点 M 的轨迹 .

探求: 若点 M 合于条件, 显然 M 关于直线 AB 的对称点也合于条件 .所以如果轨迹是直线, 就一定对称于 AB, 因而与 AB 垂直 .只要知道这直线 l 和 AB 的交点 N, 轨迹就完全测定了 .由于

图　2.6

$$k = MA^2 - MB^2 = (AN^2 + NM^2) - (NB^2 + NM^2)$$
$$= AN^2 - NB^2 = (AN + NB)(AN - NB)$$
$$= AB(2AN - AB),$$

可见
$$AN = \frac{AB^2 + k}{2AB}.$$

此式确定一点 N 以及通过 N 而垂直于 AB 的直线 l.

证:1°由刚才探求过程,合于条件的点 M 是在通过定点 N 而垂直于 AB 的直线 l 上(将 AN 看作一个有向线段,它的值是唯一确定的).

2°反之,在 l 上任取一点 M,则有

$$MA^2 - MB^2 = AN^2 - NB^2 = k,$$

即点 M 满足条件.

所以轨迹是 AB 的垂线 l.当 $k = 0$ 时,l 是众所周知的 AB 的中垂线.满足条件 $MB^2 - MA^2 = k$ 的点的轨迹是 l 关于 AB 中垂线的对称线.

例 4 圆幂和等幂轴的概念 我们知道,若 P 为圆 $O(r)$外部一点(图 2.7 左),通过 P 任作割线 PAB,则 $PA \cdot PB$ 为一常量 p,这常量由圆 $O(r)$与点 P 而定,不因割线 PAB 的位置而变.要求这个常量,可取 PO 为割线,则

$$p = PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = (PO - r)(PO + r)$$
$$= PO^2 - r^2 = t^2 \quad (t \text{ 表切线 } PT \text{ 的长}).$$

图 2.7

仿此,若 P 为圆 $O(r)$内部一点(图 2.7 右),过 P 作任一弦 APB,则 $PA\cdot PB$ 为常量.要求这常量 p,可取弦的特殊位置使其与 OP 垂直,则

$$p=PA\cdot PB=PA'\cdot PB'=-PA'^2\text{(此地一律用有向线段)}$$

$$=-(r^2-PO^2)=PO^2-r^2.$$

我们把

(1) $$\underline{p=PA\cdot PB=PO^2-r^2}$$

<u>定义为点 P 对于圆 $O(r)$的幂</u>;这是一个代数量,当点 P 在圆外时,p 为正,其值等于由 P 所作切线长的平方;当 P 在圆内时,幂 p 为负;当 P 在圆上时,幂 p 为零.不论点 P 在平面上何处,幂的统一表达式是(1)式.

现在我们证明下述轨迹命题:

<u>对于(不同心的)两定圆有等幂的点的轨迹,是垂直于连心线的一条直线</u>(称为两圆的<u>等幂轴</u>).

设两定圆为 $O(r)$及 $O'(r')$,一点 P 对于两圆的幂各为

$$p=PO^2-r^2\quad\text{及}\quad p'=PO'^2-r'^2.$$

P 对于两圆有等幂的充要条件是 $p=p'$,或

$$PO^2-PO'^2=r^2-r'^2\equiv k.$$

所以我们的命题乃是例 3 的一个推论.

下面我们讲一下两圆的等幂轴的作法.只要知道了等幂轴上一点,由此点作连心线的垂线便是等幂轴.若两圆相交(图 2.8(1)),则两交点对于两圆的幂同等于零,所以等幂轴即两交点的连线.若两圆相切(图 2.8(2))则等幂轴即该切点的公切线.若两圆没有公共点,则可任作一圆交圆 O 于 A、B,交圆 O'于 A'、B',(图 2.8(3)),以 P 表直线 AB 与 $A'B'$的交点,则

图 2.8

P 对于圆 O 的幂 $= PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = P$ 对于圆 O'的幂. 所以,通过 P 作 OO'的垂线即得等幂轴.

习 题 十 五

1. 已知圆上定长切线端点的轨迹,是已知圆的一个同心圆.
2. 已知圆上两切线交成定角,则交点的轨迹是这已知圆的一个同心圆.
3. 同底等积的各三角形顶点所成轨迹,是平行于公共底边的两直线.
4. 定圆内定长的弦的中点的轨迹是定圆的一同心圆.
5. 定圆内一组平行弦中点的轨迹是一条直径.
6. 凸多边形内介于周界间的一组平行线段中点的轨迹是一折线.
7. 设一点至两已知相交线距离之比为常数,则该点的轨迹是两条直线.
8. 设一点至两已知相交线距离之和为常数,则该点的轨迹是一个矩形

的周界.

9. 设定圆中互相垂直的两弦的平方和是常数,则此两弦所在直线交点的轨迹是一圆.

10. 通过一定点且与一定圆正交的圆,其中心的轨迹是一条直线.

11. 设从一点向两定圆各作两切线,若切线交角相等,则该点的轨迹是一圆或一直线.(设两定圆是外离的).

12. 设一圆与两定圆相交,交点各为定圆直径的端点,则此圆中心的轨迹是两定圆连心线的一条垂线.

13. 设一圆与两定圆正交,则其中心的轨迹是一条直线或其一部分.

14. 给定直线 a 及其外一点 A,设 P 是 a 上任一点,在射线 AP 上取一点 Q 使 $AP\cdot AQ$ 为常量,则 Q 点的轨迹为一圆周.

§2.6　第三类型轨迹命题举例,轨迹探求法

第三类型轨迹命题只说出条件,而没有结论,所以是问题的形式,因而探求轨迹是主要关键.然后才谈得上证明和讨论.

初等几何上的轨迹,不外(1) 直线,(2) 射线(半线),(3) 线段,(4) 圆(可缩为孤立点),(5) 圆弧,(6) 以上图形的合成图形.

探求轨迹的有效办法概述如下:

A. 描迹　按照所设条件作出轨迹上若干点,连以平滑曲线,往往可以发现轨迹的形状以及大体上位于何处.这叫做描迹法,是探求轨迹直观而有效的初步方法.

B. 预测轨迹的性质　由对称性或其他情况判断轨迹为直线、射线、线段、圆或圆弧.这里,我们主要观察轨迹的对称性和范围.

若所给图形为对称形,给定的条件 C 又具有对称性,则轨迹 F 亦必为对称图形.上节各例已足以说明注意对称性在探求轨迹方面的效用.如果给定的图形有对称中心 O(对称轴 l),而条件 C 又有对称性,则 F 上任一点 P 关于 O 点(直线 l)的对称点也在 F 上,即 F 也以点 O(直线 l)为对称中心(对称轴).

例如,(1)距两已知相交线等远的点的轨迹是轴对称形;

(2) 定圆中定长的弦中点的轨迹是中心对称形 .

若轨迹上有可以到达任意远处的点,且无端点,轨迹必为直线;若有端点,便是射线 .

若轨迹上的点不能到达任意远处,轨迹必为圆、圆弧或线段 .设又知轨迹循环无端,则必为圆;反之,若轨迹有起讫,必为圆弧或线段 .

欲判断轨迹是弧与线段,可画出轨迹上三数点,观其是否共线 .

C. 确定轨迹上的特殊点 .

D. 研究轨迹上任意点与特殊点间的关系 .

这些步骤中的一步或数步,往往已足以判断轨迹 .然后加以证明,必要时讨论之 .

每一步推理都是沉着,锐敏,有联想 粗枝大叶不行 .

例 1 从已知半圆直径 AB(图 2.9)延长线上任一点 C 作切线 CT 及$\angle ACT$ 的平分线,从圆心 O 作这平分角线的垂线,求垂足 M 的轨迹 .

探求:作半径 $OD\perp AB$,设想 C 点趋近于 B 时,切线 CT 便趋而为 B 点的切线,所言平分角线这时是 BD,这时点 M 即 BD 的中点 G .显然 G 关于 OD 的对称点 H(AD 的中点)也应该是轨

图 2.9

迹上的一点.若令 C 无限远去，则切线 CT 趋而为点 D 的切线，则所言平分角线乃 OD 的中垂线，这时垂足 M 即 OD 的中点 P.

我们既知道轨迹上三个特殊点 G、H、P，且显见这三点共线它们距 AB 同等于已知圆半径的一半，即 $\frac{1}{2}R$，因而预测轨迹是线段 GH.

证：1°设 M 是合于所设条件的一点，我们来证明 M 在线段 GH 上.当点 C 在以 $B(A)$ 为端点的射线上连续移动时，点 M 由 $G(H)$ 连续移动至 P，可见只要证明 M 到 AB 的距离 $ME=\frac{1}{2}R$，便足以断定 M 在线段 GH 上.

设 OM 的延线交射线 CT 于 N，并作 $MF\perp CT$，那末显见 M 是等腰△CON 的底边 ON 的中点，从而

$$ME = MF = \frac{1}{2}OT = \frac{1}{2}R.$$

2°设 M 为线段 GH 上任一点，我们证明 M 合于条件.比方说，取 M 为线段 GP 上一点，作 $MC\perp OM$，由§1.5.1 例 2 备注(1)，容易证明∠OMB 为锐角，从而 MC 与直径 AB 的延长线相交于一点 C.作 AB 关于 MC 的对称线 CT，形成等腰△CON.作 $ME\perp AB$，$MF\perp CT$，$OT\perp CT$，则

$$OT = 2MF = 2ME = 2\cdot\frac{R}{2} = R,$$

可见 CT 实际上是切线，因此 M 确合于条件.

所以所求轨迹是线段 GH.

注意(1)：尽管 C 点在两条不连接的半线上移动，M 点却在线段 GH 上移动.

注意(2)：若着眼函数关系，设 M 为合于条件的任一点，

$\angle OCT = 2\alpha$，则

$$EM = MC\sin\alpha = OC\cos\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}OC\sin 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}OT = \frac{R}{2},$$

$$OE = EM\text{tg}\angle OME = \frac{1}{2}R\text{tg}\,\alpha \leq \frac{1}{2}R \quad (\because 2\alpha \leq 90°).$$

可见点 M 在线段 GH 上.

例 2　定圆 O 内有互垂直径 AA' 和 BB'，直径端点 A' 和圆上任一点 P 的连线交直线 BB' 于点 Q，在 P 作圆的切线 PR，过 Q 作 BB' 的垂线 QR，求交点 R 的轨迹(图 2.10).

探求：给定的图形以及确定点 R 的作法，显然以 AA' 为对称轴，故轨迹对称于 AA'.因此，我们就动弦 $A'PQ$ 在直径 AA' 上方移动时加以考虑。

图　2.10

当点 P 无限趋近于点 A' 时，弦 $A'P$ 趋而成为 A' 点的切线，这时点 Q 趋于无穷远，因而 R 也趋于无穷远.可见轨迹是一条直线并且由于 AA' 是轨迹的对称轴，这直线就必然垂直于直线 AA'.

当点 P 无限趋近 A 时，Q 与圆心 O 重合；切线 PR 与点 A 的切线 l 重合，因此 R 与 A 重合.可见点 A 是轨迹上的一个特殊点.当 P 在 B 时，PR 和 QR 重合，即圆在 B 的切线 n.

那末轨迹该是圆 O 在点 A、B、B' 的切线 l、m、n 了.

证：　1°证明满足条件的点 R 在直线 l 上.由于 QR 和 $A'O$ 同垂直于 BB'，$\therefore QR \parallel A'O$.又四点 O、R、Q、P 共圆(以 OR 为直径)，故

$$\angle AOR = \angle ORQ = \angle OPA' = \angle OA'P,$$

从而 $OR /\!/ A'Q$,而 $A'ORQ$ 是平行四边形,可见

$$QR = A'O = OA,$$

即是说点 R 确在直线 l 上.

2°证明 l 上任一点 R 满足条件.作 $RQ \perp BB'$于 Q,以 P 表示直线 $A'Q$ 和圆 O 的另一交点,问题在于证明 PR 是圆的切线.由于 $QR \mathrel{\underset{=}{/\!/}} A'O$, $A'ORQ$ 是平行四边形.故

$$\angle OPA' = \angle OA'P = \angle ORQ.$$

从此断定四点 O、R、Q、P 共圆.又因 $\angle OQR$ 为直角,所以 $\angle OPR$ 也是直角,即 PR 切于圆 O.

所以所求轨迹是圆 O 在点 A 的切线 l.

例 3 设 BC 是定半圆的直径,从半圆周上动点 A 作 $AD \perp BC$,在半径 OA 上截 $OP = AD$.当点 A 描画半圆周时,点 P 的轨迹为何?(图 2.11)

图 2.11

探求:当动点 A 在 B 处时,显见,$OP = AD = 0$,故 P 重合于 O,即圆心 O 是轨迹上一特殊点.

当点 A 在BC的中点 M 时,AD 重合于 MO,点 P 重合于 M.所以 M 也是轨迹上一点.

给定的半圆以及给定的条件都具有对称性,即以直线 OM 为对称轴.所以轨迹也以 OM 为对称轴.

现在考察普通位置的 P 点和 O、M 之间有何关系.在$\triangle AOD$ 和$\triangle OMP$ 之间,有

$$AD = OP, \quad \angle DAO = \angle POM, \quad AO = OM,$$

$$\therefore \quad \triangle AOD \cong \triangle OMP, \quad \angle OPM = \angle ADO = d.$$

从此可以判断所求轨迹是以 OM 作直径的圆周 .

证: 1°完备性的证明已见探求部分,合于条件的点 P 在以 OM 做直径的圆上 .

2°在这圆上任取一点 P,以 A 表 OP 线与半圆周的交点,作 $AD\perp BC$,则两个直角三角形 AOD 和 OMP 因斜边及一锐角对应相等而合同 .∴ $OP = AD$,即点 P 合于所设条件 .

所以轨迹确是以 OM 做直径的圆周 .

注意:描画定半圆的 A 点虽有起讫点 B 和 C,而所求轨迹却循环无端 .

§2.7　轨迹命题两面证明的回顾

以上我们说明的轨迹命题的两面证明(即一方面证明合于条件 C 的点在图形 F 上,另一方面证明在图形 F 上的点合于条件 C),乃是轨迹定义的必然要求,使得轨迹上的点不漏不滥 .我们所选的例子都是那样典型,恰巧每次都是合于条件 C 的点在图形 F 上,而图形 F 上的点又个个合于条件 C,乃至可能引起这样的误解:认为证明一面已经够了,两面证明徒然麻烦而已 .

现在通过一些具体例子说明事实并非如此 .在处理轨迹问题时,一不小心便犯下错误 .

例 1　<u>给定以 AB 为弦的弓形弧, P 为弧上任一点,过 P 点引切线,并作 AM 和 BN 垂直于此切线 .由 A、B 作射线 AQ、BQ 使满足 $\angle PAQ = \angle PAM$, $\angle PBQ = \angle PBN$,求点 Q 的轨迹</u>(图 2.12) .

对这个轨迹命题可能这样去思考:不论 P 点在弓形弧上何处, $\angle APB$ 为定角,从而 $\angle PAB + \angle PBA$ 也是定角 .由于

$$\begin{aligned}\angle PAQ + \angle PBQ &= \angle PAM + \angle PBN \\ &= (d - \angle APM) + (d - \angle BPN)\end{aligned}$$

$$= \angle APB = \text{定角},$$

可见四边形 $PAQB$ 中,以 A、B、P 为顶点的三角之和为一定,于是$\angle AQB$ 为定角,所以点 Q 在以 AB 为弦而内接角等于定角的弧 Σ 上.

要是粗枝大叶以为所求轨迹就是这圆弧 Σ,就犯下严重的错误.要在弧上任取一点 Q 而证其合于所设条件,乃是不可能的.

事实上,若以 C 表示 AQ 与给定弓形弧所在圆周的另一交点,则

图 2.12

$$\angle PAC + \angle PCA = \angle PAM + \angle APM = d.$$

可见 AC 是这圆的直径,而 Q 点在通过 A 的直径上.同理,Q 也在通过 B 点的直径上.因此 Q 就是给定弓形弧的圆心,所求轨迹乃是一个孤立点而不是什么圆弧 Σ.

例 2 给定以 AB 为弦的弓形,P 为弧上动点,延长 AP 至 M 使 $PM = PB$,求点 M 的轨迹.

连接 PB 和 MB(图 2.13),容易看出

$$\angle AMB = \frac{1}{2}\angle APB = \text{定角 } \alpha.$$

所以点 M 落在以 AB 为弦且内接角等于 α 圆弧 Σ 上.

图 2.13

但如果认为 Σ 就是所求的轨迹,那就错了.事实上,当点 P 在它所运行的弧上由 B 无限逼近于点 A 时,AP 的极限位置是已知弧在 A

点的切线 AT.所以 AP 只能从 AB 连续移动到 AT,从而点 M 只能从 B 点起在 Σ 上连续移动到 AT 与 Σ 的交点 T.所以轨迹实际上是图上的 BMT.

例 3　<u>给定圆 O 及一点 A,通过 A 点任作直线与圆交于 B 及 C,求弦 BC 中点 M 的轨迹</u>(图 2.14).

图　2.14

设 M 为合于条件的任一点,则 $OM \perp BC$,即

$$\angle OMA = d.$$

从而点 M 总是落在以 OA 做直径的圆周 Σ 上.若贸然以这圆 Σ 作为所求轨迹,那就错了.弦 BC 的中点一定不会在已知圆外,所以,倘若已知点 A 在已知圆的外部,还得去掉 Σ 在已知圆 O 外的部分,这才能得出所求轨迹.至于当点 A 在圆 O 上时,轨迹要或不要去掉一点 A,那只是一个如何解释的问题:这时圆在 A 点的切线不是弦,从这种解释就去掉点 A.但切线可以看作弦的极限位

置,这时 B、C 都跟 A 重合,因此 M 也跟 A 重合,从这种解释就不必去掉 A 点.

例 4　<u>$\triangle ABC$ 的底边是定圆的定弦,顶点 C 在这圆的二弧之一上移动,求 $\triangle ABC$ 的垂心 H 的轨迹</u>.

定圆上 C 点所在的圆弧称之为 Σ_1,另一部分称之为 Σ_2,定角 ACB 记为 α.

设以 AD、BE、CF 表 $\triangle ABC$ 的高线(图 2.15(1)),则四点 C、E、H、D 共圆,故 $\angle AHB = \angle DHE = 2d - \alpha =$ 定角;从此断定垂心 H 在以 AB 为弦而内接角等于 $2d - \alpha$ 的圆弧 Σ_2' 上(Σ_2' 是 Σ_2 关于 AB 的对称形),或者甚至以为所求轨迹即是 Σ_2',那就是大错了!我们分别考查 α 为锐角、钝角、直角的情况.

图　2.15(1)

首先设 α 为锐角,这时 Σ_1 为优弧,Σ_2 因而 Σ_2' 是劣弧(图 2.15(2)).我们知道,垂心 H 总是在高线 CF 上的,如果在 A、B 作 AB 的垂线,分别与 Σ_1 相交于 P、Q,则当动点 C 超出 AP 和 BQ 所范围的区域,譬如当 C 在 BQ 上时,$\triangle ABC$ 的垂心 H 显然不在圆弧 Σ_2' 上了.

图　2.15(2)

这时 $\triangle ABC$ 是钝角三角形,从圆内接四边形 $CEDH$ 可以看出:

$$\angle AHB = \angle DHE = \angle DCE = \alpha.$$

上面的结论 $\angle AHB = 2d - \alpha$ 已不复成立.设以 P'、Q' 分别表 P、

Q 关于 AB 的对称点，那末当 C 由 A 移动到 P 时，H 画 $P'A$；当 C 由 P 移动到 Q 时，H 画 Σ_2' 弧；当 C 由 Q 移动到 B 时，H 画 BQ'. 这时点 H 的轨迹并非 Σ_2 的对称弧 Σ_2'，而必须加以扩充成为圆弧 $P'ABQ'$. 可注意两弧 $P'ABQ'$ 与 $APQB$ 相等，前者是从后者通过一个平移得来的.

其次设 α 为钝角. 这时 Σ_1 为劣弧，Σ_2 以及 Σ_2 关于 AB 的对称形 Σ_2' 都是优弧(图 2.15(3)). 这时点 C 和高线 CF 总超不出直线 AP 和 BQ 所范围的区域，所以点 H 的轨迹不是圆弧 Σ_2'，而只是它的一个部分 $P'Q'$. 这时也请注意，C 点所画的弧和 H 点所画的弧也是相等的.

图　2.15(3)

最后设 α 为直角. 这时 Σ_1 和 Σ_2 是半圆，Σ_2' 重合于 Σ_1 (图 2.15(4)). 由于 $\triangle ABC$ 是直角三角形，垂心 H 和直角顶 C 重合. 所以 H 点的轨迹即是 C 点的轨迹.

总之，以 Σ_2' 作为 H 点的轨迹，当顶角 C 是锐角时乃是纯粹而不完备的；当顶角 C 是钝角时乃是完备而不纯粹的.

图　2.15(4)

例 5　BC 是给定等腰三角形 ABC 的底边，求合于条件 $\angle APB = \angle APC$ 的点 P 的轨迹(图 2.16).

给定图形即等腰 $\triangle ABC$ 和给定条件都容许以 BC 的中垂线 l 为对称轴. 显然 l 上的点满足条件. 但若以为所求轨迹即是直线

l,却又大谬不然.

设 P 为合于条件的点,则两个三角形 ABP 和 ACP 有一边相等,即 $AB = AC$,而这两边的对角也相等,即$\angle APB = \angle APC$.所以这两三角形的外接圆相等.在同圆或等圆中,立于等弦 AP 上的内接角$\angle ABP$ 与$\angle ACP$ 是相等或相补的.

若 $\angle ABP = \angle ACP$,则$\triangle ABP \equiv \triangle ACP$,从而 $PB = PC$,故点 P 必在 BC 的中垂线 l 上.

若 $\angle ABP$ 与 $\angle ACP$ 相补,且 A、B、C、P 无三点共线,则 P 在$\triangle ABC$ 外接圆的 BMC 上;但若 A、B、C、P 有三点共线,则 P 在以 B 为端点的射线 m 上,或在以 C 为端点的射线 n 上.

图 2.16

容易证明,所求轨迹是由直线 l、射线 m 及 n、圆弧 BMC 所组成的复合图形.

习 题 十 六

1. 求距两已知相交直线距离的差等于定长的点的轨迹.

2. 从圆周上各点作线段和一给定线段平行且相等,求这些线段端点的轨迹.

3. 将已知点到定圆上各点连线,求连线段中点的轨迹.

4. 给定两点 A、B 及 AB 的一垂线 l,设通过 A、B 的动圆交 l 于 C,而 CM 是动圆的直径,求点 M 的轨迹.

5. 设两动圆各切同一直线于一定点,且保持互相切,求它们切点的轨

迹.

6. 给定直角 XOY 及直角△ABC,今将 B、C 两点分别置于 OX、OY 上移动,求直角顶点 A 的轨迹.

7. 给定△ABC 的底边 BC 以及顶角 A 的大小,求△ABC 的内心 I 和重心 G 的轨迹.

8. 一平行四边形的周长一定,一角的位置和大小也给定,求其对顶的轨迹.

9. 给定圆 O 及其内一点 A,以 A 为顶点任作一直角与圆周交于 B 及 C.求 BC 中点 M 的轨迹.

10. 求到两已知平行线的距离之和为定长的点的轨迹.

11. AB、BC 是直线上相邻的线段,以它们为弦任作两个等圆.求这两圆除点 B 外另一交点的轨迹.

第三章　作　图　题

§3.1　几何作图问题的意义与作用

假设给了一些条件,而设法求作具备这些条件的图形,这便是作图问题.完成作图以后,便可断言具备某些条件的图形存在,或在什么情况下这样的图形存在,因而使言之有物.这样,解几何作图问题,在某种意义上说,就是存在问题的证明.

工农业生产经常需要改良工具,创造新产品,不仅在设计过程中需要绘图样,即是在零件加工过程中,往往也需要精确而迅速的作图技能.

关于几何作图问题的意义和它在几何课中的地位,这样说是公允的.

几何作图在学习几何中的重要意义是大家公认的.几何作图问题的价值首先在于:完成一个作图题,在学生头脑里能把个别的几何事实具体化起来,将注意力从字面上的几何命题转到这命题所含有的现实几何关系上来.例如,学习了定理"垂直于弦的半径平分这弦"以后,再做一道很容易的题目:"过圆内一已知点求作一弦使被此点所平分",学生是不难解决的.在这时,如果简单地重复定理的条文,来复习巩固这个定理,意义就不大了.相反地,用这定理作为工具来解这个作图题,可以使学生明白到,在这里,不仅半径垂直于弦,反转来,弦也垂直于半径,那末便有积极意义了.因此,我们认为,几何作图的第一个价值在于,几何作图是建立学生的具体几何观念的重要手段,是克服学生单纯死记硬背定理条文的好办法.

其次,同样重要的一点是:几何作图可以提供题材,把所学的

命题用来解决某些具体问题,使学生学会学以致用.这一点几乎对于几何课的每一章节都适用.解作图题时还经常要求学生有一定程度的主动性和独立性,也给他们尝试一下自己能力的机会.因此几何作图的第二个价值在于:它为初等几何课程的几乎每个章节提供了练习的材料.

第三,几何作图的学习给制图学提供理论基础,它在实践上的意义是不可忽视的.

作图题的第四个价值,也就是这里指的最后一个价值(按重要性并非最后一个),是在解作图题的过程中,要运用一系列相当复杂的逻辑思维,解作图题的各个步骤的术语"分析"、"讨论",就是这一点的具体表现.

§3.2 尺 规 作 图

初等平面几何的研究对象,不外直线、圆以及由它们或它们的部分所构成的图形.因此,作图工具习惯上限用直尺和圆规(在实际作图过程中,也使用三角板、丁字尺、矩尺、量角器、比例规等作为辅助工具).仅用直尺和圆规经有限次手续的作图,称为<u>尺规作图</u>或<u>规矩作图</u>或<u>初等几何作图</u>.作图限用直尺和圆规,由来已久,从古希腊时代即有此限制,相沿成习.现代工业生产上除了成形刀具外,使用尺规作图一般已可解决问题了.一些成形刀具还是由线段和圆弧作为基础构成的.

利用直尺和圆规可以完成下列作图:

1°过两点作一直线;

2°已知圆心和半径可作一圆;

3°求直线与直线,直线与圆,圆与圆的交点(若交点存在).

不能经有限次数使用直尺和圆规完成作图的问题,称为<u>规矩作图不能问题</u>(或不可作问题).希腊时代的所谓几何三大难题(三

等分任意角、倍立方、化圆为方),都是尺规作图不能问题.要注意一点,所谓不可作或不可解,并非问题无解,而只是说限用圆规和直尺则不可能.例如任意角的三分之一必然存在,但不能仅用圆规和直尺作出.

初等几何作图的解必须实而有限,例如一点由两平行线决定,即是无解;一点由半径之和小于连心线的两圆决定,也是无解.此种无解的意义,和上面说的不可作,全然不同.不可作是工具问题,添用他种工具,问题就解决了.无解是解的性质问题,必须扩充解的意义,例如说二平行线相交于无穷远点,相离二圆相交于虚点,然后才有解.但无论增加何种工具,不能改变解的性质,使无穷变为有限,使虚变为实.

§3.3 定位作图与不定位作图

如果求作的图形必须作在指定的位置,便叫做<u>定位作图</u>.例如,“给定三角形,求作它的外接圆”,便是定位作图.

如果求作的图形,只要满足一定的条件,至于画在什么地方可以不计,便叫做<u>不定位作图</u>.例如,“求作定圆的内接正方形”,“给了三角形的底边、高和顶角,求作三角形”,都是不定位作图.

按一定步骤作出一个合于所设条件的图形,便说得到这个问题的一个<u>解</u>.凡定位作图问题能作出几个合于条件的图形,便说有多少个解.在不定位作图,由于位置无关重要,凡适合条件但彼此合同的图形,不算作不同的解而只算作一个解.例如‘给了三角形的底边、高和顶角,求作三角形’这一问题如果有解,只有一解.

§3.4 基本作图问题

习知的基本作图问题有

1. 以定射线为一边作一角等于给定的角;

2．求作三角形，已知

1°三边；2°二边及其夹角；3°二角及其夹边．

3．过一点作已知直线的垂线；

4．过一点作已知直线的平行线；

5．平分一角；

6．平分一弧；

7．作定线段的中垂线；

8．分一线段成若干等分；

9．作线段的和或差，作角的和或差；

10．已知弓形的弦长和其内接角，求作弓形弧；

11．内分或外分一线段成已知比；

12．作三已知线段的第四比例项；

13．作二已知线段 a、b 的第三比例项($a : b = b : x$)；

14．作二已知线段 a、b 的等比中项或比例中项($a : x = x : b$)；

15．已知线段 a、b，求作线段 $x = \sqrt{a^2 + b^2}$；

16．已知线段 a、b，求作线段 $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$．

将这些作图相互组合就可以得到一些较复杂的作图．

例 1 设 a、b、c、d、e、f、g 是已知线段，求作线段

$$x = \frac{abcd}{efg}.$$

解：置

$$z = \frac{cd}{g},\quad y = \frac{bz}{f},$$

则

$$x = \frac{ay}{e}.$$

所以，三次使用第四比例项的作图便得到所求线段 x．

倘若这些线段中有某些线段相等，就可以作出下面一些线段：

$$x = \frac{abc}{ef};\quad x = \frac{ab^2}{ef};\quad x = \frac{abc}{e^2};$$

$$x = \frac{ab^2}{e^2};\quad x = \frac{a^3}{e^2}\text{等等}.$$

例 2　**设** a、b、c、d **为已知线段，求作线段**

$$x = \frac{a\quad bc}{d}.$$

解：**置** $y = \quad bc$，　**则**　$x = \frac{ay}{d}$.

所以，作一次等比中项和一次第四比例项，即得所求线段 x.

例 3　**设** a、b、c、d **为已知线段，求作线段**

$$x = {}^{4}\quad abcd.$$

解：**置**　$y = \quad ab$，$z = \quad cd$，**则**

$$x = {}^{4}\quad y^2 z^2 = \quad yz.$$

所以，三次运用比例中项的作图，即得所求线段 x.

例 4　**求作两线段** x **和** y **使其比等于两已知线段** a **和** b **的平**

图　3.1

方、立方、四次方、……之比.

解: 作互垂直线 $X'OX$ 和 $Y'OY$(图 3.1),在 OX 上截取 $OA=a$,在 OY 上截取 $OB=b$;过 B 作 AB 的垂线,交 OX'于 C;过 C 作 BC 的垂线,交 OY'于 D;过 D 作 CD 的垂线,交 OX 于 E;等等.记

$$OA=a,\ OB=b,$$
$$OC=c,\ OD=d,$$
$$OE=e,\ \text{等等}.$$

由于$\triangle AOB\sim\triangle BOC\sim\triangle COD\sim\triangle DOE\sim\cdots$,

我们有
$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}=\cdots.$$

于是有
$$\frac{c}{a}=\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2}{a^2},$$
$$\frac{d}{a}=\frac{d}{c}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3},$$
$$\frac{e}{a}=\frac{e}{d}\cdot\frac{d}{c}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{a}\right)^4=\frac{b^4}{a^4},$$
$$\cdots.$$

所以
$$\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2},\quad \frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3},$$
$$\frac{a}{e}=\frac{a^4}{b^4},\cdots$$

即是凡与 $a^2:b^2$ 成比例的线段是和 a、c 成正比的,凡与 $a^3:b^3$ 成比例的线段是和 a、d 成正比的,其他类推.

§3.5 解作图题的步骤

解作图题分为四步:

1°<u>分析</u> 遇到比较困难不是一目了然的作图题,常假定合于

条件的图已作出,研究已知件和求作件间的关系,从而得出作图的线索,这过程称为分析,是解题重要的一步 .

2°作法　根据分析的线索,按作图公法及已知作图题作图 .利用已知作图题时,只须说明清楚,不必将它本身的作图过程絮絮而道 .教师对学生可随时追查他们掌握一些基本作图题的熟练情况 .

3°证明　用以表明所作图形确具所设条件 .

4°讨论　作图题解的有无多寡,定与不定,决定于已知条件的大小、位置及其相互关系,这种研究称为讨论 .

作图题不加分析和讨论,很可能遗漏一些解,就像解轨迹问题时只照顾到纯粹性而疏忽了完备性一样 .举两例如下:

例 1　已知四边形 $ABCD$ 的相邻二边 AB 和 AD 都等于定长 a,夹角为定角 α,对角线 AC 等于定长 $b(b>a)$ 且平分$\angle C$,求作这四边形 .

可能我们认为这问题很简单,注意到对称性这样来作图:先作$\angle BAD=\alpha$(图 3.2),并在二边上截取 $AB=AD=a$,再作这角的平分线 AC,并截取 $AC=b$;则 $ABCD$ 是所求四边形 .

证明没有任何困难,有一解 .

也可能我们注意到同圆内等弦所对的圆周角相等,这样来作图(图 3.3):作$\angle BAD=\alpha$,并在二边上截取 $AB=AD=a$;然后通过三点 A、B、D 作圆,并以 A 为中心以 b 为半径作弧,交前圆于点

图　3.2

图　3.3

C,则 $ABCD$ 为所求四边形.

证明也没有困难.当圆 ABD 和圆 $A(b)$没有交点时此作法无解 这时 $b > a\sec\frac{\alpha}{2}$,第一作法提供一解;当两圆相切或交于两点 C 和 C'时有一解 这时 $a < b \leq a\sec\frac{\alpha}{2}$,因为 $ABCD$ 和 $ABC'D$ 两个四边形合同,只算一解,第一法提供一解;当 $b = a\sec\frac{\alpha}{2}$时,两法提供同一解.

由是可知这两种作法都合于条件而都不完全.那末还有没有其他的解也合于条件呢?要想得到适合条件的所有图形,使无遗漏,我们来进行分析;这就是分析的重要性之一.换言之,只有通过正确的分析,才能得出全部解答.

假设四边形 $ABCD$ 已作出,合于所设条件,则在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADC$ 中有两边及其中一边的对角相等,即 $AB = AD$, AC 公用,$\angle ACB = \angle ACD$.不难证明(读者自证)$\angle B$ 与$\angle D$ 或相等或互补;当两角相等时,便有$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$,图形对称于 AC,于是由第一法作出;当这两角互补时,$ABCD$ 是圆内接四边形,于是由第二法作出.

到此可知,两个作法都有疏漏,二者合并,已求出合于条件的全部图形.所以当 $a < b < a\sec\frac{\alpha}{2}$时有两解;当 $b \geq a\sec\frac{\alpha}{2}$时有一解.

例 2 给定不共线三点 A、B、C,求过 C 作一直线 l 使距 A、B 等远.

解这个简单作图题,有人会连 AB,并通过 C 作 AB 的平行线 l;也有人会联结 C 和线段 AB 的中点 M 以得出 l(图 3.4).和例 1 一样,这两个作法都是瞎子摸象未得全貌.是否还有其他的解答呢?

我们知道,A、B 两点或在所求直线 l 的同侧,或在其异侧.在

图　3.4

前一场合,必有 $l\parallel AB$;在后一场合, l 必然通过 AB 的中点 M.所以本题有两解.

许多作图题都必须讨论,以研究解数的多少.我们举一个例.

例 3　求作一三角形,已知其两边及其中一边的对角.

设给定线段 a、b 及角 α,求作$\triangle ABC$ 使 $BC=a$, $CA=b$, $\angle A=\alpha$.

分析:假设$\triangle ABC$ 已作成(图 3.5),在其中$\angle A=\alpha$为已知,故可先作此角,顶点 A 就确定了.在角的一边上截取 $AC=b$,则顶点 C 也确定了.至于顶点 B,一方面应在角的另一边上,另一方面由于 $BC=a$,点 B 又应在圆 $C(a)$上,所以得

作法:作$\angle XAY=\alpha$,在射线 AY 上截取 $AC=b$,以 C 为中心以 a 为半径作圆,设其与射线 AX 交于点 B,则所求作的三角形即$\triangle ABC$.

证:由作法,有$\angle A=\alpha$, $AC=b$, $BC=a$.即$\triangle ABC$ 合于所设

图　3.5

条件.

讨论:解的有无多寡,显然决定于点 B 有无和它的数目多少.B 点应在射线 AX 上而不应在它过 A 点的延线上.若作 $CD\perp AB$ 于 D,并以 h 表 $CD(h=b\sin\alpha)$,则

一、若 α 为锐角,则

(1) $a<h$ 时无解;

(2) $a=h$ 时一解,是直角三角形;

(3) $h<a<b$ 时二解,一为锐角三角形,一为钝角三角形;

(4) $a=b$ 时一解,是等腰三角形;

(5) $b<a$ 时一解(所成另一钝角三角形不合条件);

二、若 α 为直角,则

(1) $a\leq b$ 时无解;

(2) $b<a$ 时一解(所成二直角三角形合同)

三、若 α 为钝角,则

(1) $a\leq b$ 时无解(或不成三角形,或成而不合条件);

(2) $b<a$ 时一解,是钝角三角形.

注意:凡解作图题,若无论已知条件的大小、位置及其关系如何,都有一般作法可以依据,那末在"作法"中当然叙述这一般的作法.也有可能有这样的情况发生,即已知条件的变化,引起了作法不得不相应地变化.那时,不是在讨论中来研究解的变化情况,而是应该在作法中就分列出各种不同情况的作法.举一个例:

例 4 给定三角形周界上一点,求由该点作二直线三等分这三角形的面积.

设定点 P 在$\triangle ABC$的 AB 边上(图 3.6),三等分 AB 于 M、N.

(1) 设 P 是 AB 边的一端例如 A(图 3.6(1)),则三等分 A 的对边 BC 于 R、S 连 AR、AS,便完成了作图.

(2) 设 P 重合于一个三等分点例如 M(图 3.6(2)),则二等分

BC 于 D，便得所求直线 PC、PD .

(3) 设 P 在中段上，即在 M、N 之间(图 3.6(3))，则连 PC，并过 M 作 $ME \parallel PC$，交 AC 于 E；过 N 作 $NF \parallel PC$，交 BC 于 F；那末 PE 和 PF 就是所求的直线 .

图　3.6

(4) 设 P 在靠边的三分之一，例如 AM 上(图 3.6(4))，则连 PC，作 $MX \parallel PC$ 交 BC 于 X，并平分 BX 于 Y，那末 PX、PY 就是所求的直线 .

证明是没有困难的，留给读者 .

§3.6　轨迹交截法

在上一章曾谈到，轨迹是解作图题的重要工具 .一个作图题的解决，往往归结到某一点的确定 .而一点的确定，须用两个条件 C_1 和 C_2 .如果能求出合于条件 C_1 的轨迹 F_1 以及合于条件 C_2 的轨

迹 F_2,那末 F_1 和 F_2 的交点同时满足条件 C_1 和 C_2.这种由轨迹相交以解作图题的方法称为轨迹交截法,简称交轨法.事实上,其他作图方法大都也要用交轨法.

决定某一点的轨迹可能有若干个,我们选择熟知简易的.

例 1 在已知弧 AmB 上求一点 M 使弦的比为 $MA \colon MB =$ 定比 $p \colon q \neq 1$.

分析:设点 M 已求到,满足

$$MA \colon MB = p \colon q,$$

则 M 除在 AmB 上外,还应在一个阿氏圆上.内分、外分 AB 于 C、D 使

$$AC \colon CB = AD \colon BD = p \colon q,$$

于是 M 还应在以 CD 做直径的圆上.

图 3.7

作法:如分析过程定出 C、D 两点,以 CD 为直径作圆,它与 AmB 相交于所求点 M.

证:由阿氏圆的性质,$MA \colon MB = AC \colon CB = p \colon q$.

讨论:本题恒有一解,因 C 在已知圆内而 D 在其外,这两圆必相交于两点,但其中一点必在阿氏圆直径 CD 的另一侧,故不在 AmB 上.当 $p \colon q = 1$ 时,阿氏圆不存在,但解依然存在,即 AmB 的中点.

注意:若作 $\angle AMB$ 的平分线,则必通过 AmB 的共轭弧中点 N.并且,由平分角线性质,这平分线 MN 必然通过 C 点(图 3.7).所以要解本题,可无须求助于阿氏圆,只要求出 N 点和 C 点,连 CN 与 AmB 相交便得 M 点,无须作出外分点 D.

例 2 已知 $\triangle ABC$ 的底边 a,顶角 A 以及余二边的平方和 $b^2 + c^2 = k^2$,求作这三角形.

分析:设 $\triangle ABC$(图 3.8)已作成,底边 $BC =$ 定长 a,顶角 A

= 定角 α, 且 $AB^2+AC^2=k^2$. 当任意作出 $BC=a$ 以后, 顶点 A 的一个轨迹是以 BC 为弦而内接角等于 α 的圆弧. 若以 M 表 BC 中点, 则

$$k^2=AB^2+AC^2=2BM^2+2AM^2$$
$$=\frac{1}{2}a^2+2AM^2,$$

图　3.8

所以 A 点的另一轨迹是一个圆周 (即以 M 为中心, 以 $\frac{1}{2}\quad 2k^2-a^2$ 为半径的圆). 因而 A 点可以确定.

作法: 作线段 $BC=a$, 在 BC 上作内接角等于 α 的圆弧; 以 BC 中点 M 为中心以 $\frac{1}{2}\quad 2k^2-a^2$ 为半径作圆, 交方才的圆弧于 A, 则 $\triangle ABC$ 即所求者.

证: 由作法, $BC=a$, $\angle A=\alpha$, 且

$$AB^2+AC^2=2BM^2+2AM^2$$
$$=2\cdot\quad\frac{a}{2}\quad^2+2\cdot\frac{1}{4}(2k^2-a^2)=k^2.$$

所以 $\triangle ABC$ 合于所设条件.

讨论: 当上面的圆弧和圆没公共点时, 无解; 相切时一解; 相交于两点 A、A' 时, 由于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'CB$ 合同, 仍然只有一解. a 和 k 要满足 $2k>a$, 否则无解.

例 3　已知 $\triangle ABC$ 的底边 a, 顶角 A 和余二边的积 bc, 求作这三角形.

分析: 设 $\triangle ABC$ 已作成, 底边 BC = 定长 a, 顶角 A = 定角 α, 余二边之积 $bc=k^2$ (图 3.9). 当在任意位置作出底边 $BC=a$ 以后, 仿上题, A 点的一个轨迹是一个圆弧, 以 ω 表示.

要得到顶点 A 的第二个轨迹, 如果直接从条件

$$bc=AC\cdot AB=k^2$$

来考虑,轨迹不是我们所熟知的,事实上是所谓卡西尼(Cassini)卵线,不属初等几何轨迹.但我们可以找到另一个轨迹.设 $AD\perp BC$ 于 D, AP 是圆 ω 的直径,则

$$\triangle ABP\sim\triangle ADC,$$

图　3.9

从此得出　$AD\cdot AP=AB\cdot AC=k^2$.

由于 AP 之长已定,可见 $\triangle ABC$ 的高 AD 可求.所以 A 点在 BC 的一条平行线上.

作法:作 $BC=a$,以 BC 为弦作内接角等于 α 的圆弧 ω,画出这圆的直径即得 AP 的长度 $2R(2R=a\csc A=a\csc\alpha)$.在圆弧所在的一侧作 BC 的一条平行线 l,使与 BC 的距离等于 $\frac{k^2}{2R}$.设 l 与 ω 交于点 A,则 $\triangle ABC$ 即所求者.

证:$\triangle ABC$ 合于条件可由分析及作图知道.

容易算出弓形弧的高度是 $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.当 AD 大于这长度时无解,否则一解.即当 $k^2>\frac{1}{2}a^2\csc\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ 或 $k>\frac{a}{2}\csc\frac{\alpha}{2}$ 时无解,当 $k\leq\frac{a}{2}\csc\frac{\alpha}{2}$ 时有一解.

习 题 十 七

1. 给定直线 l 及圆 ω,在 l 上求一点,使从此点向 ω 作切线所得两切点的连线段为定长.

2. 给定直线 l 及两圆 ω 及 ω′,在 l 上求一点,使从此点向 ω 所引二切线的夹角等于向 ω 所引二切线的夹角.

3. 设 a、b、c、d、e 为已知线段,λ 为已知正有理数,求作线段 x,使分别满足

1° $x=\quad 24a$;

2° $x = \lambda a$;

3° $x = a^2 + bc$;

4° $x = a^2 - bc$;

5° $x = ab + cd$;

6° $x = (ab + cd)\ e$;

7° $x = 9a^2 + 4b^2$;

8° $x = {}^4\ 5a$;

9° $x = {}^4\ a^4 - b^4$;

10° $x = {}^4\ a^4 + b^4$.

4. 给定直线 l 上一点 A 及 l 外一点 B,求 l 上一点 P 使 PA 与 PB 之和或差等于定长.

5. 在定△ABC 的边 BC 上求一点,使距余二边距离之和为定长.

6. 在定△ABC 的边 BC 上求一点,从这点引余二边的平行线,使与余二边交成的平行四边形的周长为定长.

7. 给定两线段 AB、CD 及一直线 l,在 l 上求一点 P,使△PAB 与△PCD 等积.

8. 在定圆中求作内接三角形,使其一边有定长,余二边各通过圆内一定点.

9. 求作已知扇形的内切圆.

10. 定直线上有按 A、B、C、D 顺序排列的四定点,求一点 P 使$\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$.

11. 在△ABC 的 BC 边上求一点 P,使 AP 是 BP 和 PC 的比例中项.

12. 在定圆中求作定长的弦,使其被一已知弦平分.

13. 在定圆中求作一内接三角形,使其两边各等于定长,且第三边(所在直线)通过一定点.

14. 求作一直线平行于△ABC 的边 BC,交边 AB 及 AC 于 D 及 E 使 DE 为 AE 及 EC 的比例中项.

15. 过两已知点求作一圆周,使在已知直线上截已知长的弦.

§3.7 三角形奠基法

一些作图题中,往往可以先作成图形的一个三角形,从而奠定

了全部图形的基础.即是说,图形的其余部分可由此陆续作出.这种三角形称为基础三角形.这种作图法称为三角形奠基法.

例 1 已知三角形底边 a,高 h_a,中线 m_a 的长,求作△ABC.

分析:设△ABC 已作成(图 3.10),底边 $BC = a$;高 $AD = h_a$;中线 $AM = m_a$.在直角△ADM 中,有两边为已知长,故可作出,顶点 A 位置决定了.要决定 B、C 两顶点的位置,只要注意

$$BM = MC = \frac{a}{2}.$$

图 3.10

作法:任作一直角 ADM,在一边上截 $AD = h_a$ 得 A 点.以 A 做中心,m_a 做半径画弧交另一边于 M.在这边上截取 $BM = MC = \frac{a}{2}$,则△ABC 即所求者.

证:由作法,△ABC 合于所设条件.

讨论:当 $m_a \geq h_a$ 时一解,当 $m_a < h_a$ 时无解.

例 2 已知△ABC 的三中线 m_a、m_b、m_c 的长度,求作这三角形.

分析:设△ABC 已作成(图 3.11).以 G 表中线 AL、BM、CN 的交点,图形上没有可以奠基的三角形.但若延长 GL 到 K 使 $LK = GL$,则 $GBKC$ 是平行四边形,而△BGK 的三边是已知长,即各中线长的 2 3.△BGK 可取为奠基三角形.

作法:作△BGK 使 $GK = \frac{2}{3} m_a$, $GB = \frac{2}{3} m_b$; $BK = \frac{2}{3} m_c$.作 GK 的中点 L,连 BL,并延长 BL 到 C 使 $LC = BL$.延长 LG 至 A 使 $GA = 2LG$,则△ABC 即所求者.

证:由作法,L 是 BC 的中点,因而 AL 是△ABC 的中线.由

于 $GA = 2LG$ .G 是△ABC 的重心,并且

$$AL = 3LG = \frac{3}{2}GK = m_a .$$

以 M、N 表 CA、AB 的中点,由于 G 是重心,则

$$BM = \frac{3}{2}BG = m_b ,$$

图　3.11

$$CN = \frac{3}{2}CG = \frac{3}{2}BK = m_c .$$

所以△ABC 合于条件 .

讨论: 本题有无解,决定于△BGK 是否存在 .此三角形存在的条件是

$$m_a + m_b > m_c ,\quad m_b + m_c > m_a ,\quad m_c + m_a > m_b .$$

所以,所给三中线能构成三角形时,本题有一解,否则无解 .

例 3　已知△ABC 发自同一顶点的高、中线、平分角线 h_a、m_a、t_a 的长,求作这三角形 .

分析: 设△ABC 已作成,高 $AH = h_a$,中线 $AM = m_a$,平分角线 $AT = t_a$(图 3.12) .直角△AHT 和△AHM 都有两边已知 .所以都可以作出 .

我们取△AHM 为基础三角形 .

设 AT 交外接圆于 P,则 P 为 BC 中点,P 点可以由直线 AT 以及 MH 在 M 点的垂线相交决定 .定出 P 以后,就可以定出外心 O,因为它在直线 MP 上,又在 AP 的中垂线上 .于是可以作外接圆,从而决定两顶点 B 和 C 的位置 .

图　3.12

作法: 作直角△AHM,使

$$\angle AHM = d, \quad AH = h_a, \quad AM = m_a.$$

在射线 HM 上作 T 点使

$$AT = t_a,$$

过 M 作 HM 的垂线与直线 AT 相交于 P.作 AP 的中垂线交 PM 线于 O.以 O 为中心以 OA 为半径作圆,设其交直线 HM 于 B 及 C,则△ABC 即所求者.

证: 因 O 在 AP 的中垂线上,则 $OP = OA$,从而 P 是BC的中点,从而 AM 是△ABC 的中线,而 AP 是$\angle BAC$ 的平分线.可见△ABC 中,有高 $AH = h_a$,中线 $AM = m_a$,平分角线 $AT = t_a$,即△ABC 合于所设条件.

讨论: 1°当 h_a、m_a、t_a 三者有两个相等时,△ABC 应为等腰三角形,这时,若三者不都相等便无解,若都相等便成不定问题,即有无穷多解.

2°当 h_a、m_a、t_a 互不相等时,要解答存在,首先要能作出△AHM,其次要能求出 P 点,并且还要 P 和 A 落在 HM 的异侧,B、C 两点才能存在.要保证这些事项,就非得点 T 介于 H 和 M 之间.总之,当 h_a、m_a、t_a 互不等时,有解的条件是

$$h_a < t_a < m_a.$$

当这些条件满足时,有一解.

习题十八

1. 求作△ABC,已知顶角 A,高 h_a,平分角线 t_a.
2. 求作△ABC,已知 a,$\angle B$,$b - c$.
3. 求作直角三角形,已知一锐角及两直角边之和.
4. 求作一菱形,已知其一角及两对角线之和.
5. 求作△ABC,已知$\angle A$,h_a,m_a.

6. 求作△ABC,已知∠A,平分角线 t_a,周长 $2p$.

7. 求作△ABC,已知∠A, a, $b+c$.

8. 求作△ABC,已知 a, m_b, m_c.

9. 求作△ABC,已知 h_a, m_b, m_c.

10. 求作△ABC,已知 h_b, m_b, m_c.

§3.8　应用合同变换解作图问题

我们在§1.22 介绍了合同变换.反射、平移、旋转以及它们的相继使用,都是合同变换.合同变换在证明命题、求轨迹、解作图题方面,都有广泛应用.现介绍它们在解作图题方面应用之例.

例1　给定直线 XY 及其同侧二点,在 XY 上求一点 P 使∠APX=∠BPY.

假定 P 点已求出(图 3.13),满足

$$\angle APX = \angle BPY$$

作 A 点关于 XY 的对称点 A',则

$$\angle APX = \angle A'PX,$$

图　3.13

于是∠$A'PX$=∠BPY,即 A'、P、B 三点共线.

可见欲得 P 点,只须作 A 关于 XY 的对称点 A',连 XY 异侧两点的直线 $A'B$ 必与 XY 交于一点 P.故本题总有一解.

人们早就知道,光线从 A 点射到平面镜上 P 点,反射以后,是向着一点 B 进行,,使 PA 和 PB 跟镜面 XY 成等角.公元一世纪希腊学者 Heron 发现,光线的这个路程是由 A 经 XY 到 B 的最短路程.

事实上,在 XY 上除 P 外任取一点 Q,则

$$PA + PB = PA' + PB = A'B,$$

$$QA + QB = QA' + QB > A'B.$$

$$\therefore\quad PA + PB < QA + QB.$$

例 2　求作△ABC,已知底边 a,高 h_a,两底角之差∠B-∠C.

分析:设△ABC 已作出,底边 $BC=a$,高 $AH=h_a$,且∠B-∠C=定角 α(图 3.14).

先作 $BC=a$,由于 $AH=h_a$,A 点的一个轨迹是 BC 的一条平行线 XY(由于这是不定位作图,考虑两平行线之一就够了).因 $BC\parallel XY$,故

图　3.14

$$\alpha=\angle B-\angle C=\angle BAX-\angle CAY.$$

为了把 α表示在图形上,延长 BA 至 E,并作 C 关于 XY 的对称点 D,则

$$\alpha=\angle B-\angle C=\angle BAX-\angle CAY$$
$$=\angle EAY-\angle DAY=\angle DAE,$$
$$\therefore\quad \angle BAD=180°-\alpha.$$

从此又得出 A 点的一个轨迹,即以 BD 为弦而内接角等于 180°-α的弓形弧.

作法:作 $BC=a$,作 BC 的平行线 XY 使其间距离为 h_a.作 C 关于 XY 的对称点 D.以 BD 为弦作内接角为 180°-α的圆弧,交 XY 于 A,则△ABC 即所求者.

证明留给读者.

讨论:BAD 关于 BD 的对称弧交 XY 于一点 A'.但对于△$A'BC$言,∠C-∠B=α,不合所设条件.故本题只有一解.

例 3　给定两平行线 x 及 y 和它们外侧各一点 A、B(图 3.15),求自 A 至 B 的最短路线,但介于 x、y 间的部分须与定直线 z 平行.

分析:设 X'、Y'是 x、y 上的点满足 $X'Y'\parallel z$.要决定 X'、Y'

的位置使折线 AX′Y′B 最短.以 M、N 表 z 与 x、y 的交点,则 $X'Y' = MN =$ 定长,所以问题在于决定(比方说) Y'的位置使 $AX' + Y'B$ 为最短.设将 AX'沿 MN 的方向和距离平移到 CY',则 C 为定点,且

$$AX' + Y'B = CY' + Y'B \geq BC.$$

从此得

图 3.15

作法: 作 AC 与 MN 同向平行且相等,得 C 点.按假设, B 和 C 是直线 y 异侧的两点,所以 BC 交 y 于一点 Y.作 $YX \parallel z$ 与 x 相交于一点 X,则 $AXYB$ 是所求最短路线.

证明是没有困难的.

讨论: 本题恒有一解.

例 4 给定△ABC,求作一直线平行于 BC,交边 AB、AC 于 D、E,使 $AD = EC$.

分析: 设图已作成(图 3.16),将 EC 平移至 DF,于是得等腰△DAF. 故

$$\angle BAF = \angle DFA.$$

又由 $DF \parallel AC$ 得

$$\angle DFA = \angle CAF.$$

可见 AF 是$\angle BAC$ 的平分线.

作法: 作$\angle BAC$ 的平分线交 BC 边于 F.作 $FD \parallel CA$ 交 AB 于 D.作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E.则 DE 即所求之线.

证明留给读者.

讨论: 本题有一解.若允

图 3.16

许 DE 线与 AB、AC 边所在直线相交,则由 $\angle BAC$ 外角平分线 AF',仿上作图又得一解 $D'E'$满足 $AD'=CE'$.由此可知,区别三角形的边与边所在直线,有时是必要的.

例 5　通过定点 P 引直线与二定圆 O、O'交于 A、B 使 $PA=PB$.

分析:假定图已作成(图 3.17),将圆 O 绕 P 点旋转 180°至对称位置 O'',则因 $PA=PB$,二点 A、B 必重合.点 B 应在圆 O'上,又应在圆 O''上,故必为圆 O'和 O''的交点.由此得

图　3.17

作法:取点 O 关于 P 的对称点 O'',以 O''为中心作圆与圆 O 相等.设圆 O'和 O''相交于 B,连 PB 即得所求直线.

证:以 A 表点 B 关于 P 的对称点,由于两圆 O''和 O 对称于点 P,A 必在圆 O 上.所以直线 APB 合于所设条件.

讨论:以 r 和 r'表圆 O 和 O'的半径.解答的存在与多寡决定于点 B 的存在与多寡.点 B 存在的条件即两圆 $O'(r')$和 $O''(r)$相交或相切,亦即

$$|r-r'|\leq O'O''\leq r+r'.$$

若以 M 表 OO'的中点,则 $PM=\frac{1}{2}O'O''$.上面的条件即

$$\frac{1}{2}|r-r'|\leq PM\leq\frac{1}{2}(r+r').$$

以 M 做中心,以$\frac{1}{2}|r-r'|$和$\frac{1}{2}(r+r')$做半径作两圆围成一个环区.于是

1°当 P 在环区内部时,有两解;

2°当 P 在环区边缘上时,有一解;

3°当 P 在环区外部时(即在内圆之内或外圆之外)无解;

4°当 $r = r'$而 P 重合于 M 时,圆 $O''(r)$与圆 $O'(r')$重合,有无穷多解.

例 6　给定三平行线 a、b、c,求以 a 上一定点 A 为顶点作正三角形 ABC,使余二顶点在 b、c 上(图 3.18).

分析:设正三角形 ABC 已作出,B 在 b 上而 C 在 c 上.若将直线 b 绕 A 为中心旋转 60°角至 b',则 B 点重合于 C.所以 C 是 b' 和 c 的交点.

作法:作 $AH \perp b$ 于 H,作 $\angle HAH' = 60°$且 $AH' = AH$,过 H 引直线 $b' \perp AH'$.直线 b'系由 b 旋转 60°而来,必与 b 从而与 c 交成 60°角.设 b'与 c 的交点为 C,作直线 AB 使$\angle BAC = 60°$且使$\angle BAC$ 与$\angle HAH'$有相同转向,以 B 表直线 AB 和 b 的交点,则$\triangle ABC$ 为所求三角形.

图　3.18

证:只要证明 $AB = AC$ 就足以保证$\triangle ABC$ 是正三角形.由于$\angle BAC = \angle HAH'$,立刻推出$\angle BAH = \angle CAH'$.所以两个直角三角形 BAH 和 CAH'有一直角边及一锐角对应相等,因而合同.

$\therefore AB = AC$.

讨论:由于 b 可以顺钟向或逆钟向旋转 60°,所以有两解.

例 7　给定五边形各边中点,求作此五边形.

设给定五点 K、L、M、N、P,求作一五边形 $ABCDE$(图 3.19)使已知点是各边顺次的中点.

设图已作成,在平面上任取一点 A_0,则可作一折线

$A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ 使 A_0A_1、A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5 依次以 K、L、M、N、P 为中点.由于 A_0 是任意取的,A_5 和 A_6 不会重合,而当 A_5 重合于 A_0 的时候,问题便解决了.由于 AA_0 和 BA_1 以 K 为对称中心,所以 BA_1 和 AA_0 异向平行且相等.同理 BA_1 跟 CA_2 也是异向平行且相等,以下类推.

图　3.19

因此,经过五次中心反射以后,AA_0 变成 AA_5,它们是等长而异向平行的.所以 A 就是 A_0A_5 的中点.决定了 A 点,问题便解决了.

关于这个问题我们就这样指点一下,请读者自行作图证明.一般地说,本题有一解.但在某些情况下,所得五边形可能有某些顶点要共线.

此法可推广于作奇数边的多边形.

习 题 十 九

1.设 l、m 代表两镜面,交于点 O 成 θ 角.设光线经过 A 点投射于镜面 l 上的 B 点,反射于镜面 m 上 C 点,最后反射仍通过 A 点.证明

1°OA 是 $\angle BAC$ 的平分线;

2°光线由 A 回到 A 的路程是 $2OA\sin\theta$;

3°射入光线与最后的反射光线的夹角为常数,即不因 A 点的位置而变.

4°给定 A 点,作出两次反射仍通过 A 点的光线进路.

2.假设弹子球撞击直线边缘后反射,撞击前后它所走的两条直线和边缘作相等的倾斜.设 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 是同一平面上的 n 条直线,而 A、B 是在每条直线同侧的两点.问弹子球由点 A 该沿什么方向出发依次从这些线反射以后才可以通过点 B?

证明弹子球所取的道路是从 A 到 B 而顶点顺次在这些直线上的最短折

线.

3. 求作一四边形,已知其四边长度,且知一角被对角线平分.

4. 已知$\triangle ABC$三内角平分线为三定直线x、y、z及AB边上一点P,求作此三角形.

5. 给定直线XY及其异侧二点A、B,于XY上求一点C使$\angle ACX=\angle BCX$.

6. 给定直线XY及其同侧二点A、B,于XY上求一点M使$\angle AMX=2\angle BMY$.

7. 求作四边形,已知其四边以及一双对边中点的连线段的长.

8. 求作四边形,已知一双对边及两对角线长度,以及两对角线的交角.

9. 给定直线$x\parallel y$,$z\parallel t$,过定点O求作直线使其介于两组平行线间的部分等长.

10. 设PQ为定圆定直径,A、B为PQ同侧圆周上二定点,在PQ另一侧圆弧上求作一点M,MA、MB交PQ于C、D,使CD等于定长a.

11. 给定$\triangle ABC$,置一边于AB上求作三角形的内接矩形,使矩形周长等于所给长度.

12. 过两圆O、O的一交点A求作直线,交两圆于P、Q,使PAQ有最大长度.

13. 给定直线$a\parallel b$,由二平行线外定点P求作直线,交a、b于A、B,使$PA+PB=$定长l.

14. 以一点A为顶点求作正三角形,使余二顶点分别在定直线b和c上.

15. 求作直角等腰三角形,使其直角顶为定点A,余二顶点分别在一定直线及一定圆上.

16. 求作一正三角形使其三顶点分别在三已知同心圆上.

17. 求作$\triangle ABC$,已知$\angle A$,中线$AM=m_c$,面积S.

§3.9 位似变换的应用

比例规、放缩尺都是位似变换的应用.照相也是用的位似原

理.在求轨迹解作图题方面,位似变换是一个有力工具.

例1 △ABC中,底边BC是固定的,顶点A移动时满足条件$AB^2-AC^2=k^2$(k表定长).求△ABC重心G的轨迹.

解:由§2.5例3,点A的轨迹是一条垂直于BC的直线l,它和BC的交点H由关系

$$BH=\frac{BC^2+k^2}{2BC}$$

决定.以M表BC中点(图3.20),因

$$\frac{MG}{MA}=\frac{1}{3},$$

可见重心G的轨迹是直线l的位似形,位似心是BC中点M,位似比是$\frac{1}{3}$.因此求出MH的一个三等分点P使$MP=\frac{1}{3}MH$,然后通过P作BC的垂线l',即得△ABC的重心G的轨迹.

图 3.20

例2 给定△ABC,求作其内接正方形,使其一边在BC上,另两顶点各在AB、AC上(图3.21).

此地给两个作法.

在左图上,以BC为底,在A的异侧作正方形$BCDE$,连AE、AD交BC于P、Q,作$PS\perp BC$交AB于S,作$QR\perp BC$交AC于R,则$PQRS$是所求正方形.

在右图上,以高AH为一边,在B的异侧作正方形$AHKL$;连BL交AC于R,作$RQ\perp BC$于Q,作$RS\parallel CB$交AB于S,作$SP\perp BC$于P,则$PQRS$是所求正方形.

证明请读者补足,第一作法以A作位似心,第二作法以B作

图　3.21

位似心.

例 3　求作一圆使通过一定点且切于两已知相交直线.

分析:假设圆 O 已作出(图 3.22),通过定点 P 并切于两已知相交线 a、b.以 S 表这两线交点,则 SO 应平分 a、b 的一个交角.问题在于如何决定 O 点.以 S 为位似心施行位似变换,设圆 O 变为圆 O_1,而 P 点变为点 P_1.由于位似比可以随意选取,所以实际上 O_1 乃是直线 SO 上除 S 以外任意取定的点.取定 O_1 以

图　3.22

后,圆 O_1 即可作,从而 P_1 可定(P_1 是圆 O_1 和直线 SP 的交点) .由位似变换性质, $O_1P_1 \parallel OP$,从此可定点 O .

作法: 两直线交成四角,设 P 点在其中一角内部,作出这角的平分线,并在这平分角线或其反向延长线上任取一点 O_1 .以 O_1 为中心作跟 a、b 相切的圆 .设直线 SP 与圆 O_1 的交点为 P_1,作 $PO \parallel P_1O_1$ 与直线 SO 交于点 O,则 O 为所求作的圆的中心,这圆就立刻可作了 .

证: 由作法, $PO \parallel P_1O_1$,所以点 S 分线段 OO_1 所成的比等于两圆半径之比,即 S 是两圆的位似心 . a、b 既切于圆 O_1(即与此两圆分别相交于两个重合点),则亦必切于圆 O .故圆 O 合于所设条件 .

图 3.23

注意：以上假设 P 点不在 a 或 b 上，并默认 P 不在 a、b 的交角之一的平分线上．在这两种情况下，将作法加以修改，各得两解（图 3.23）．

讨论：当点 P 异于 S 时有两解；当 P 重合于 S 时无解，或者也可以说这时所求的圆缩成一点．

例 4　求作△ABC，已知三高 h_a、h_b、h_c 的长度．

分析：设△ABC 已作成，高线 $AD=h_a$，$BE=h_b$，$CF=h_c$（图 3.24）．由于

(1)　$$ah_a=bh_b=ch_c,$$

或　$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c},$$

图　3.24

可见△ABC 三边之比已知，即形状已定．现在的问题是如何作一个跟它相似的三角形．

由关系(1)容易联想到圆幂定理，作一圆 k，并取一点 O，在 k 上取三点 P、Q、R 使 $OP=h_a$，$OQ=h_b$，$OR=h_c$．直线 OP、OQ、OR 跟圆的第二交点以 P'、Q'、R' 表示，则

(2)　$$OP'\cdot h_a=OQ'\cdot h_b=OR'\cdot h_c.$$

由(1)与(2)得

$$\frac{a}{OP'}=\frac{b}{OQ'}=\frac{c}{OR'}.$$

可见以 OP'、OQ'、OR'为边构成的三角形与$\triangle ABC$相似.

作法: 作一适当大小的圆 k, 并选一适当点 O. 以 O 为中心, 以所给长度 h_a、h_b、h_c 为半径画弧, 交圆 k 于 P、Q、R 三点. 以 P'、Q'、R'表 OP、OQ、OR 跟 k 的第二交点. 以 OP'、OQ'、OR'为边作一三角形 $AB'C'$. 作 $AD'\perp B'C'$于 D', 并在射线 AD'上截 $AD=h_a$. 过点 D 作 $B'C'$的平行线, 交 AB'、AC'于 B、C, 则$\triangle ABC$就是所求的三角形.

证: $AD=h_a$ 显然是$\triangle ABC$的高. 若再作其余二高 BE、CF, 则有

$$BC\cdot AD = CA\cdot BE = AB\cdot CF.$$

因$\triangle AB'C'\sim\triangle ABC$, 故有三边成比例, 即

$$\frac{OP'}{BC}=\frac{OQ'}{CA}=\frac{OR'}{AB}.$$

以之乘上式得

$$OP'\cdot AD = OQ'\cdot BE = OR'\cdot CF.$$

跟(2)比照并注意 $AD=h_a$, 便得

$$BE=h_b,\quad CF=h_c.$$

所以$\triangle ABC$确合于所设条件.

讨论: 有解条件是三数$\dfrac{1}{h_a}$、$\dfrac{1}{h_b}$、$\dfrac{1}{h_c}$中任两数之和大于第三数, 使得与$\triangle ABC$相似的三角形存在.

习 题 二 十

1. 作已知$\triangle ABC$的内接三角形, 使各边与三定直线平行.

2. 在已知$\triangle ABC$内作内接$\triangle DEF$, 使 EF 与定直线 l 平行, $\angle EDF=$定角 α, 且顶点 D 是 BC 边上的定点.

3. 求作$\triangle ABC$, 已知$\angle B$、$\angle C$及周长.

4. 给定$\angle XOY$及其内一点 P, 通过 P 求作一直线交两边于 A 及 B 使

$AP:PB=$ 已知比 $m:n$.(m、n 是两个已知线段.)

5. 求作已知弓形的内接正方形.

6. 给定二同心圆及外圆上一点 A,通过 A 求作一直线交内圆于 B 及 C,使 $AB:AC=$ 定比 $m:n$.

7. 给定两点 A、B 和 AB 的一条定垂线 l 通过 A、B 的动圆交 l 于 C,求 $\triangle ABC$ 重心的轨迹.

§3.10 代数分析法

在一些作图题中,解题的主要关键在于一线段的算出.这时借助于代数法便可解决问题.这种利用代数解作图题的方法称为代数分析法.

例 1 求作一圆,使通过两定点 A、B 并切于已知直线 l.

分析:设问题已解,求作的圆切直线 l 于 T(图 3.25).如果能确定 T 点的位置,那末通过三点 A、B、T 的圆就是所求的了.

假设直线 AB 和 l 相交于一点 O,那末 $x=OT$ 满足关系

图 3.25

$$x^2=OA\cdot OB,$$

即 x 是线段 OA 和 OB 的比例中项.

作法:连 AB 交 l 于点 O,作 OA 和 OB 的比例中项,在 l 上定 T 点使 OT 等于这比例中项.过 A、B、T 所作的圆就是所求的.

证:由作法 $OA:OT=OT:OB$,于是 $\triangle OAT$ 和 $\triangle OTB$ 有一角相等且夹边成比例,$\therefore \triangle OAT\sim\triangle OTB$,从而

$$\angle ABT=\angle OBT=\angle OTA.$$

由是推出 OT 切于圆.

讨论: 当直线 AB 与 l 相交于一点且 A、B 在 l 的同侧时,有二解; A、B 在 l 的异侧时无解.当 $AB /\!/ l$ 或 A、B 之一在 l 上时,有一解(图 3.26),这时的作法是显然的.当 A、B 都在 l 上时无解.

图　3.26

例 2　<u>已知两线段之和及积,求作这两线段</u>.

已知: 两线段 a 及 k.

求作: 两线段 x 及 y 使 $x+y=a$, $xy=k^2$.

分析: 这问题无异要以几何方法解这个方程组.若以 x 表较小的线段,则消去一个未知数,解二次方程,得出

$$x=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-k^2},\quad y=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-k^2}.$$

作法: 作一线段 $AB=a$(图 3.27),以 AB 为直径作半圆 O,作直线 $l /\!/ AB$,使其间距离等于 k,以 C 表 l 和半圆的一个交点,作 $CD\perp AB$ 于 D.则 AD 及 DB 为所求线段.

图　3.27

证: $AD=OA-OD=OA-\sqrt{OC^2-CD^2}=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-k^2}$,

$$DB=OB+OD=OB+\sqrt{OC^2-CD^2}=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-k^2}.$$

从几何方面讲, CD 是 AD 和 DB 的比例中项, 所以

$$AD + DB = a,\quad AD \cdot DB = CD^2 = k^2.$$

讨论: 当 $k \leq \frac{a}{2}$ 时有一解, 否则无解.

<u>注意</u>: 上面所介绍的乃是几何与代数的亲密联系, 这个几何问题可以不必借助于代数, 这个代数方程组也不一定需要几何解释. 但联系起来讲就显出了代数和几何的相互作用.

例 3　<u>已知两线段的差及积, 求作这两线段</u>.

已知: 两线段 a 及 k.

求作: 两线段 x 和 y, 使 $x - y = a$, $xy = k^2$.

分析: 利用代数法解得

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + k^2} + \frac{a}{2},\quad y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + k^2} - \frac{a}{2}.$$

作法: 作线段 $AB = a$ (图 3.28), 以 AB 为直径作圆 O, 作切线 $AC = k$, 连 CO 交圆于 D 及 E, 则线段 CE 和 CD 就是所求的.

证: 从代数方面讲,

$$CE = CO + OE = \sqrt{OA^2 + AC^2} + OE$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + k^2} + \frac{a}{2},$$

$$CD = CO - OD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + k^2} - \frac{a}{2}.$$

从几何方面讲,

$$CE - CD = DE = AB = a,$$

图 3.28

$$CE \cdot CD = AC^2 = k^2.$$

讨论: 本题恒有一解.

例 4　<u>求作一直线平行于梯形的底边, 且平分其面积</u>.

已知: $ABCD$ 是梯形, $AD \parallel BC$.

求作: 直线 $EF \parallel BC$, 使其平分 $ABCD$ 的面积.

分析: 设图已作成(图 3.29),无妨设 $AD < BC$.以 O 表直线 BA 和 CD 的交点,并置

$$OA = a,\quad OB = b,\quad OE = x.$$

以 S_{ABCD} 表梯形 $ABCD$ 的面积,则

图 3.29

$$S_{OEF} = S_{OAD} + \frac{1}{2}S_{ABCD},\qquad S_{OEF} = S_{OBC} - \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

可见
$$S_{OEF} = \frac{1}{2}(S_{OAD} + S_{OBC}).$$

但相似三角形面积之比等于对应边的平方之比,即

$$S_{OEF} : S_{OAD} : S_{OBC} = x^2 : a^2 : b^2.$$

于是
$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

作法: 延长两腰交于 O 点,引 $BP \perp OB$,且取

$$BP = OA.$$

连 OP,并以它为直径作半圆 Q.由圆心 Q 作 $QR \perp OP$,交半圆于 R.在 OB 上截

$$OE = OR,$$

作
$$EF \parallel BC,\quad \text{交 } CD \text{ 于 } F,$$

则 EF 为所求直线.

证: $OE^2 = OR^2 = OP \cdot OQ = \frac{1}{2}OP^2$

$$= \frac{1}{2}(BP^2 + OB^2) = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2).$$

而
$$S_{OEF} : S_{OAD} : S_{OBC} = OE^2 : OA^2 : OB^2,$$

因而 $$S_{OEF}=\frac{1}{2}(S_{OAD}+S_{OBC}).$$

从此得 $$S_{OEF}-S_{OAD}=S_{OBC}-S_{OEF},$$

即 $$S_{AEFD}=S_{EBCF}.$$

讨论:本题恒有一解.

注意:$S_{OEF}:S_{OAD}:S_{OBC}=EF^2:AD^2:BC^2$,

因 $$S_{OEF}=\frac{1}{2}(S_{OAD}+S_{OBC}),$$

所以 $$EF^2=\frac{1}{2}(AD^2+BC^2).$$

习题二十一

1. 求作一直线,使平行于三角形一边并平分其面积.
2. 求作一直线,使垂直于三角形一边并平分其面积.
3. 求作一三角形,使与一已知三角形相似,且与另一已知三角形等积.
4. 求作一直线,将一矩形分为二相似矩形.
5. 求作一直线,将一梯形分为二相似梯形.
6. 过定点 A 求作一直线交定圆于 B 及 C,使 $AB:AC=$ 定比 $m:n$.
7. 求作△ABC,已知其周长 $2p$、面积 S 及一高 h_a.

§3.11 等分圆周

把圆周分成 n 等分,就可以作出圆内接或外切正 n 边形,这在制图中应用的地方是很多的,如机械制图中的法兰盘、离合器等,日常生活中习见的国旗上的五角星,钟表面等,建筑中的瓷砖块,窗花图案等,常用到等分圆周.

作圆内接正 $3,6,12,\cdots,3\cdot2^m$ 以及正 $4,8,16,\cdots,4\cdot2^m$ 边的多边形,是大家习知的,我们不赘述.

§3.11.1 十等分圆周,黄金分割(外内比)

设 O 为已知圆心,R 为半径,AB 为圆内接正十边形一边,以 x 表其长度.我们来求 x 和 R 的关系(图 3.30).

因$\angle AOB = 36°$,则$\angle OAB = \angle OBA = 72°$.若作 BC 平分$\angle OBA$,交 OA 于 C,则$\triangle OAB$ 和$\triangle BAC$ 都是等腰三角形,且

$$\triangle OAB \sim \triangle BAC,$$

于是 $OA : AB = AB : AC$.

由于 $AB = BC = OC$(从三角形的角度很容易看出),亦即

图 3.30

$$(1)\quad \underline{OA : OC = OC : AC}.$$

我们称<u>C 点将线段 OA 分成外内比</u>或<u>黄金分割</u>,意思是说,全线段与长部分的比等于长部分与短部分的比.

所以圆内接正十边形的边长,乃是将半径分成黄金分割所得的长部分.

我们来瞧,给了线段 OA,如何用一点 C 将它分成黄金分割(图 3.31).以 x 表 AB 即 OC 的长度(图上故意扩大了长度),则 $AC = OA - OC = R - x$.

(1)式即 $R : x = x : (R - x)$,

或 $x^2 + Rx - R^2 = 0$.

解此式并弃负根得

$$x = \frac{R}{2}(5 - 1).$$

图 3.31

我们得出 C 点作法如下:在 A 点作 $AP \perp OA$,并截取 $AP = \frac{1}{2}OA$.连 OP,以 P 为中心以 PA 为半径作弧,交 OP 于 Q.在 OA 上截取 $OC = OQ$,则得分点 C.

因 $OA = R$, $AP = \frac{R}{2}$,故 $OP = \frac{5}{2}R$.所以确有

$$OC = OQ = OP - PQ = \frac{R}{2}(5-1).$$

注意: 1°由几何观点,可以不解代数方程.因若设 OP 再交圆于点 R,则由切割线定理有

$$OA^2 = OQ \cdot OR = OQ(OQ + QR) = OC(OC + OA),$$

所以
$$OA(OA - OC) = OC^2,$$

即
$$OC^2 = OA \cdot AC,$$

正是(1)式.

2°在半径为 R 的圆内,内接正十边形的边长是

$$a_{10} = \frac{R}{2}(5-1).$$

3°从这里立即推出

$$\sin 18° = \frac{1}{4}(5-1).$$

4° $\frac{1}{2}(5-1) \approx 0.618$,这个数目正是优选法上常用的数,其来源正好与黄金分割相联系.

§3.11.2 五等分圆周

若将圆内接正十边形各顶点,依次间点相连,即得圆内接正五边形.

以 $AB = a_5$ 表圆 $O(R)$内接正五边形一边(图 3.32),以 C 表 AB中点,则 $AC = BC = a_{10}$是内接正十边形的一边.我们现在来揭示 a_5、a_{10}、R 三者之间的一个函数关系.

作 $OE \perp AC$ 于 E,以 D 表 OE 与 AB 的交点.因 D 在 AC 的中垂线上,故 $AD = CD$.两个等腰三角形 DAC 和 CAB 有一底角公用,∴△DAC∼△CAB,从而有

图 3.32

$$AD : AC = AC : AB,$$

(1) $$AC^2 = AB \cdot AD.$$

又由$\angle ABO = \angle BAO = \angle BOD = 54°$得

$$\triangle AOB \sim \triangle ODB,$$

$$AB : OB = OB : DB = OB : (AB - AD),$$

(2) $$R^2 = AB^2 - AB \cdot AD.$$

将(1)、(2)相加得 $AB^2 = AC^2 + R^2$,即

$$\underline{a_5^2 = a_{10}^2 + R^2 = a_{10}^2 + a_6^2}.$$

即同圆的内接正五、六、十边形的边构成一个直角三角形.

由此得内接正五边形更简单的作法(图 3.33).

作法:在圆 $O(R)$内作互垂直径 PQ 和 AS,平分 OQ 于 M;以 M 为中心以 MA 为半径作弧,交 OP 于 N.又以 A 为中心以 AN 为半径作弧,交圆于 B,则 AB 为内接正五边形的一边.

证:
$$AB^2 = AN^2 = ON^2 + OA^2 = ON^2 + R^2.$$

图 3.33

且 $$ON = MN - MO = MA - MO = \frac{5}{2}R - \frac{1}{2}R = a_{10},$$

所以 $$AB^2 = a_{10}^2 + R^2 = a_5^2,$$

$$\therefore \quad AB = a_5.$$

§3.11.3 正五角星作法

若已将一圆分成十等分,那末从一个分点起,每隔开三个分点相连,便形成正五角

图 3.34

星(图 3.34) 若已将圆分为五等分,那末从一个分点起间点相连也成.

§3.11.4 十五等分圆周

作法: 作互垂半径 OP 和 OQ(图 3.35), 平分 OQ 于 M, 连 PM, 并在 PM 上截取 MN = OM. 则由内接正十边形作法, PN = 正十边形一边 a_{10}.

以 P 做中心, 分别以 PN 和 PO 为半径作弧, 分别交圆于 A 和 B. 那末 AB 就是正十五边形一边 a_{15}.

证: 由作法 $PA = PN = a_{10}$, 所以

$$\angle POA = \frac{1}{10} \cdot 4d = 36°.$$

图 3.35

另一方面

$$\angle POB = \frac{1}{6} \cdot 4d = 60°.$$

$$\therefore \quad \angle AOB = 60° - 36° = 24° = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) 4d = \frac{1}{15} \cdot 4d.$$

故 $\angle AOB$ 是内接正十五边形的中心角, $AB = a_{15}$.

本作法是由分数等式

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

启发得来的.

§3.11.5 n 等分圆周

高斯(Gauss)首先证明, 正 n 边形可用尺规作图解决的充要条件是 n 可表达成下形:

$$n = 2^l p_1 p_2 \cdots p_s,$$

其中 l 代表自然数或零, 而 p_1、p_2、…、p_s 中每一个是可以表示成

$$p_i = 2^{2^{h_i}} + 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

形式的质(或素)数或等于 1 .由此推出边数小于 100 的正多边形能用尺规作出的有下列 24 种:

$$n = 3, 6, 12, 24, 48, 96;$$

$$n = 4, 8, 16, 32, 64;$$

$$n = 5, 10, 20, 40, 80;$$

$$n = 15, 30, 60;$$

$$n = 17, 34, 68;$$

$$n = 51;$$

$$n = 85 .$$

关于任意等分圆周的方法,有许多近似作法,其来源多半是作图经验的积累 .这些作法的正确性无法用平面几何去证明,但可以通过计算指出近似的程度 .

此地介绍两种常用的也是误差较小的作法 .首先介绍陀因比耶法 .

作法: 分已知圆直径 QR 为 n 等分(图 3.36 上以 $n = 11$ 为例),并以 QR 为一边作正$\triangle PQR$. PO 交圆于点 A .在直径上取 $OK = \frac{2}{n}$直径 .连 PK 交圆于 B,则 AB 为圆内接正 n 边形的近似边长 .

图 3.36

证: 为计算方便计,设直径 $= n$(图 3.37),即每一等分为 1 .设

$$\angle OPB = \alpha,$$

$$\angle OBP = \beta,$$

于是

$$\angle AOB = \alpha + \beta .$$

因 $$OP = \frac{3n}{2},\quad OK = 2,$$

$$\therefore \quad PK = \frac{3n^2}{4} + 4 .$$

于是 $$\sin \alpha = \frac{OK}{PK} = \frac{4}{3n^2 + 16} .$$

又因 $OB = \frac{n}{2}$, 在△OBP中

应用正弦定律得

$$\frac{\frac{3n}{2}}{\sin \beta} = \frac{\frac{n}{2}}{\sin \alpha} .$$

图 3.37

以 $\sin \alpha$ 的值代入, 得

$$\sin \beta = \frac{4 \quad 3}{3n^2 + 16} .$$

经过运算和化简得

$$\sin\angle AOB = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha\cos \beta + \cos \alpha\sin \beta$$

$$= \frac{4(\quad 3n^2 - 32 + 3n)}{3n^2 + 16},$$

$$\angle AOB = \arcsin \frac{4(\quad 3n^2 - 32 + 3n)}{3n^2 + 16} .$$

$$误差 = \arcsin \frac{4(\quad 3n^2 - 32 + 3n)}{3n^2 + 16} - \frac{2\pi}{n} .$$

附误差表:

边数 n	4	5	7	9	11	12	13	41	100
误差	0	38′ (-)	18′20.2″ (-)	6′15.7″ (-)	1′23.8″ (-)	0	57.7″ (-)	1′59.5″ (+)	53.8″ (+)

可见当 $n > 9$ 时, 陀因比耶法误差较小.

再介绍圆内接正多边形的另一个近似作法——<u>莱纳基法</u>.

分已知圆直径为 n 等分(图 3.38 上以 $n=7$ 为例),在直径 AQ 上作正△APQ.以 K 表距 A 的第二分点,连 PK 交圆于 B,则 AB 是内接正 n 边形的近似边长.

证:仿上,设直径 $=n$ 以简化计算过程.令 $\angle PKO=\alpha$,$\angle PBO=\beta$,则 $\angle AOB=\alpha-\beta$.在 $\triangle APK$ 中,$AP=n$,$AK=2$,$\angle PAK=60°$,$\angle APK=\alpha-60°$,应用正弦定律得

$$\frac{n}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin(\alpha-60°)},$$

解得 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{n\sqrt{3}}{n-4}$,

$$\sin\alpha=\frac{n\sqrt{3}}{2\sqrt{n^2-2n+4}}.$$

图 3.38

又在$\triangle OBK$ 中,$OB=\dfrac{n}{2}$,$OK=\dfrac{n}{2}-2$,应用正弦定律得

$$\frac{\dfrac{n}{2}-2}{\sin\beta}=\frac{\dfrac{n}{2}}{\sin\alpha}.$$

以 $\sin\alpha$ 的值代入得 $\sin\beta=\dfrac{3(n-4)}{2\sqrt{n^2-2n+4}}$.

于是

$$\cos\angle AOB = \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{(n-4)(\sqrt{n^2+16n-32}+3n)}{4(n^2-2n+4)}.$$

$$误差 = \arccos\frac{(n-4)(\sqrt{n^2+16n-32}+3n)}{4(n^2-2n+4)} - \frac{2\pi}{n}.$$

附误差表:

边数 n	4	5	7	9	11	13
误　差	0	2′47″ (-)	5′26″ (+)	16′40″ (+)	25′14.32″ (+)	30′55.4″ (+)

习题二十二

1．证明:正五边形两条对角线相交的交点(非顶点)分每一对角线成外内比．

2．过圆外一点求作割线使被圆周分为外内比．

3．给了一边长度,求作正五边形．

4．在半径为 R 的圆内,证明内接正 n 边形、正 $2n$ 边形边长 a_n、a_{2n} 之间有关系 $a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}$．

5．证明:用同类型正多边形砖铺地,只有三种正多边形可用．

6．证明:圆内接奇数边等角多边形必是正多边形．

7．圆半径为 R,证明外切正 n 边形之边长是

$$b_n=\frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2-a_n^2}}.$$

8．正五角星中有(图 3.34)三种角($\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$),有四种线段(PQ, AP, AQ, AB),求证

1°$\angle 1:\angle 2:\angle 3=1:2:3$;

2°$\dfrac{PQ}{AP}-\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．

* §3.12　尺规作图不能解决的问题

作图问题,能用直尺和圆规作出的居少数,很多问题是不能用尺规经有限次作图完成的.这从§3.11.5 等分圆周问题就可以看出．

若是一个问题能用尺规作出,那末不论解法如何复杂,都是由两种手续陆续合成的:即是过两点作直线以及已知中心和半径作圆周.任何点都是由二直线,或一直线与一圆,或二圆相交决定的.假设由解析几何的方法和公式,逐次计算各点的坐标,所有求解的方程都是一次或二次的,那末作图要用着的各元素,都可由已知元素用有理式或只用平方根的无理式表达.反之,这种表达式总可以由直尺和圆规作出.

<u>所以,尺规作图可能的充要条件是所求的量能以已知量作有理式,或用只含平方根的无理式表出</u>.

这样,古希腊人的倍立方问题,即作一个立方体,使其体积为已知立方体体积的两倍,即求 x,使

$$x^3 = 2a^3;$$

由于此式的唯一正实根 $a\sqrt[3]{2}$ 不可能由已知线段 a 用有限回加减乘除或开平方得到,所以这个倍立方问题是一个尺规作图不能解决的问题.

我们再来看古希腊的另一个几何难题,所谓三等分任意角的解决的问题.

任给一角 $\alpha = \angle AOB$,要仅用直尺和圆规把它分成三等份.

在图 3.39,圆半径为单位长.弧 AB 的三等份点 C、D 肯定存在,问题在于能否用尺规作出.图上

$ON = \cos\alpha$ 是已知的,记为 a;

$x = OM = \cos\dfrac{\alpha}{3}$ 是未知的,能作出 x,就能作出三等份点 C 和 D.

由于 $\cos\alpha = 4\cos^3\dfrac{\alpha}{3} - 3\cos\dfrac{\alpha}{3}$,

即
$$4x^3 - 3x - a = 0,$$

问题归结到解这个三次方程.

图 3.39

若取 $\alpha = 90°$,则 $a = 0$,方程的唯一正根是

$$x = \frac{3}{2},$$

经过一次开平方,一次除法就得出,实际上

$$x = 1^2 - \frac{1}{2}^{2}.$$

表明 90°角可用尺规分成三等份,这是大家的常识.

再取另一个特例 $\alpha = 60°$,则方程变为

$$8x^3 - 6x - 1 = 0;$$

由代数知识,这方程没有有理根,因而不可能分解成以有理数(或其平方根)为系数的两因式之积.所以 x 不能用尺规作出.可见最常见的 60°角就无法用尺规作出.

所以三等份<u>任意</u>角是尺规作图不能解决的问题.

请读者验证,取特例 $\alpha = 135°$时,所得三次方程

$$8x^3 - 6x + 2 = 0$$

能分解成以有理数及其平方根为系数的两因式之积.

下面的一些问题都是尺规作图不能解决的问题:

1°给定线段 a 和 b,求作线段 x 和 y 使

$$a : x = x : y = y : b.$$

2°求作一立方体,使其体积等于两已知立方体体积之和.

3°给定一点及一角,通过这点求作一直线使被这角两边所截的线段等于一已知线段.

4°求作一三角形,已知它的三条角平分线的长度 t_a, t_b, t_c.

第四章　立体几何

§4.1　点与直线、点与平面的相关位置

平面几何的基本元素是点与直线.立体几何(或空间几何)新加一个基本元素平面.我们一般用大写拉丁字母表示点,用小写拉丁字母表直线,用希腊字母表平面.点 A 在直线 a 上写作 $A\in a$,直线 a 在平面α上写作 a 　α,等等.当说到两点、两线、两平面时,指互异的点、线、面.

下面的定理有的是习知的,有的(定理 4 到 6)是可以严格证明的.

定理 1　两点决定唯一直线.两点 A、B 在平面π上,则直线 AB 在π上.

定理 2　不共线三点决定唯一平面.

系 1　一直线和不在其上一点决定唯一平面.

系 2　两相交直线决定唯一平面.

系 3　两平行直线决定唯一平面.

定理 3　若两平面有一个公共点,则必公有一直线上的点,此外不再有公共点.

这时,这直线称为两平面的交线.

定理 4　共线三点中有一点也只有一点介于其他两点之间.

定理 5　一直线上每一点 O 将这线上其余的点分为两类;点 O 介于异类的两点之间,而不介于同类的任两点之间.

这时我们说点 O 分该直线成两条半(直)线或射线,O 称为它们的原点或端点.

定理 6 平面 π 上一直线 a 将 π 上除 a 以外的点分为两类;异类两点的连线段必与 a 相交,而同类两点的连线段不与直线 a 相交.

这时我们说 a 分该平面成两半(平)面,a 称为它们的边缘.

§4.2 空间两直线的相关位置

空间两直线至多只能有一个公共点.当公共点存在时,两直线称为相交的.上面提到,两相交直线是共面的.反之,共面二直线却未必相交.共面而又不相交的两直线称为平行线.平面几何上如此,立体几何上亦然.

不共面的直线是存在的.例如,设点 $A\in\pi$, B 是 π 外一点,那末 A、B 两点所决定的直线 a,跟 π 上不通过 A 的任一直线 b 是不共面的(图 4.1).所以有

图 4.1

定理 1 空间两直线有下列相关位置:

Ⅰ.两直线不共面,因而没有公共点(异面直线);

Ⅱ.两直线共面,这时有两种情况:

a.共面而有一公共点(相交直线);

b.共面而没有公共点(平行直线).

注意:(1) 在平面几何,两直线不平行便相交.在立体几何,不平行的直线未必相交,不相交的直线也未必平行,因为它们可能不共面.共面是两直线平行的先决条件.过去在平面上讨论,一切位于同一个平面上,现在在空间中讨论,情况变了,要加注意.

(2) 利用平行公理,与平面几何情形一样,仍然有:通过已知直线外一点,有一且仅一直线与已知直线平行.事实上,通过给定的点而与已知线平行的直线,只能在该点与该直线所决定的平面上.

(3) 从平行线的定义，平行关系是对称的，即若有 $a /\!/ b$，则亦有 $b /\!/ a$.并且平行性还是传递的.即有

定理 2　同时平行于第三直线的两直线互相平行.

即若 $a /\!/ c$，$b /\!/ c$，则 $a /\!/ b$.

在平面几何，证定理 2 是很简单的.假设命题不成立，则 a 与 b 有一公共点 P(图 4.2)，于是从点 P 可引两直线 a、b 跟 c 平行.这与平行公理矛盾，从而反证了 a 与 b 平行.

图　4.2

但在空间中，这反证法行不通了！因假设 $a /\!/ b$ 不成立，点 P 不一定存在.

要证定理 2，先证

引理　设相交两平面各通过两已知平行线之一，那末它们的交线平行于这两平行线.

假设 $a /\!/ b$，平面 α 通过 b，平面 β 通过 a，且 α 与 β 相交于直线 c(图 4.3)，求证 $c /\!/ a$ 及 $c /\!/ b$.

我们取 $c /\!/ a$ 证之，$c /\!/ b$ 的证明仿此.

以 γ 表 a、b 所在的平面.c 和 a 共平面 β，要断定 $c /\!/ a$，只要断定 c 与 a 不可能相交.我们使用反证法.

图　4.3

设 c 和 a 相交于一点 X.一方面，

$$X \in a,\quad a \quad \gamma \quad X \in \gamma;$$

另一方面，

$$X \in c,\quad c \quad \alpha \quad X \in \alpha.$$

从此可知，X 应在 γ 和 α 的交线 b 上.那末 a 和 b 相交于一点 X 了！这矛盾反证了 $c /\!/ a$.

现在转回来证定理 2：

设：直线 a、b、c 不共面，$a /\!/ c$，$b /\!/ c$，

求证：$a /\!/ b$(图 4.4)．

证：在直线 a 上任取一点 A，以 β 表 A 和 b 所决定的平面，以 γ 表 A 和 c 所决定的平面．由于 a、b、c 不共面，而 A 是 a 上任一点，那末 β 和 γ 不会重合．它们有了一个公共点 A，就交于一直线 a'(上节定理 3)．

由于 $b /\!/ c$，β 通过 b，γ 通过 c，且 β 和 γ 相交于 a'，据引理得 $a' /\!/ c$，$a' /\!/ b$．

但通过点 A 只能有一直线与 c 平行，而由假设 a 就是这样一条线，所以 a' 即是 a．

图　4.4

从 $a' /\!/ b$ 于是得结论 $a /\!/ b$．

定理 3　设两角的边分别同向平行，则此两角相等．

系(1)　设两角的边分别异向平行，则此两角相等．

(2)　设两角的边分别平行，一同向而另一异向，则此两角相补．

定理 3 和系是很容易证明的．在它们的基础上，我们来定义两条异面直线间的角．

设 a、b 为两条异面直线(图 4.5)，为确定起见，给它们一个正向．通过空间任意两点 O' 和 O''，各引直线 a' 和 a'' 与 a 同向平行，各引直线 b' 和 b'' 与 b 同向平行．由定理 3，

$$\angle(a', b') = \angle(a'', b'').$$

这个大小因 a 和 b 而定，而与角顶的选择无关的角，就定义为

图　4.5

异面直线 a、b 间的角.

若未给 a、b 的正向,则异面直线 a、b 也和平面几何上一样形成两个互补的角.

这两互补的角相等时,即各为一直角 d 时,则称两异面直线互(相)垂(直),记作 $a\perp b$ 或 $b\perp a$.

这垂直或正交的概念,是平面几何同一概念的推广.但须注意,平面上两垂线必相交.在空间,不相交的两线照样可以垂直.但当我们说:从一点 A 向一直线 a 作垂线时,则是指在 A 和 a 所决定的平面上所引的与 a 相交的垂线.

§4.3　直线与平面的相关位置

若直线 a 有两点在平面 α 上,则 a 的每一点都在 α 上.这时我们说 a 在 α 上或 α 含有或通过 a.在工业生产上用刀口尺检查工件的平面性时,观察刀口与工件的接触处是否透光,便是应用此性质.

若 a 与 α 只有一个公共点 A,称它们为相交,A 为交点.若 a 与 α 没有任何公共点,则称它们相平行,写作 $a/\!/ α$ 或 $α/\!/ a$.

与定平面 α 平行的直线的存在性,由下面的定理保证:

定理 1　设平面 α 外一直线 l 与 α 上一直线 l' 平行,则与此平面平行.

证: 以 β 表两平行线 l 和 l' 所决定的平面(图 4.6).倘若定理的反面成立,直线 l 交平面 α 于一点 X,那末 X 既在 α 上又在 β 上,因之在 α 和 β 的交线 l' 上,于是 l 和 l' 相交于点 X.这矛盾反证了 $l/\!/ α$.

图 4.6

系　通过平面外一点有无穷多条直线平行于这平面.

事实上,设 A 为平面 α 外一点(图 4.7),在 α 上任取一点 B,

并在 α 上通过 B 引一束直线 b .通过 A 引一些直线 a 分别与这束中每一条平行 .由于通过一点不能引一直线与两相交线平行,这些直线 a 彼此不重合 .它们都通过 A 而与 α 平行 .

图　4.7

由上所述,直线与平面的相关位置由下述定理概括:

定理 2　直线与平面有下列三种可能的相关位置:

1°直线在平面上(直线有两点因而点点在平面上);

2°直线与平面相交(直线只有一点在平面上);

3°直线与平面平行(直线没有任何点在平面上) .

定理 3　设二平行线之一与一平面相交,则另一线亦然 .

定理 4　设一直线平行于一平面,则凡通过这直线的平面只要与这平面相交,交线必与该直线平行 .

定理 5　若两相交平面都平行于一直线,则它们的交线也平行于该直线 .

定理 3、4、5 的证明留给读者 .

定理 6　有一且仅一平面通过两异面直线之一且与另一线平行 .

图　4.8

证:设 a、b 是异面直线(图 4.8),在 a 上任取一点 A,并通过 A 引一直线 b'∥ b .b'不是 a,否则 a 和 b 平行,变成共面直线了 .两相交直线 a 和 b'决定一平面 α,它既通过 A 而由定理 1 又和 b 平行 .存在性证明了 .

任何通过 a 而平行于 b 的平面必定和 b 与 A 所决定的平面相交 .由定理 4,这交线与 b 平行,因之就是 b' .通过 a 而又平行于 b 的平面,既含 a 又含 b',只能与 α 重合 .唯一性也证明了 .

§4.4 二平面的相关位置

两平面若有一公共点,就相交于一直线.

若两平面 α、β 没有任何公共点,就称为互相平行,记作 α∥β 或 β∥α.因此有

定理 1 两平面有两种可能的相关位置:

1°相交于一直线;

2°平行.

要两平面平行的定义和定理 1 有意义,首先要指出平行平面存在.

定理 2 给定平面 α 及其上两相交线 a、b,则通过 α 外一点 A 且与 a、b 平行的直线 a'、b' 所决定的平面 α′,必平行于 α.

图 4.9

证:首先,直线 a' 和 b' 不能重合,否则通过同一点而与同一直线平行的两直线 a、b 也将重合了.所以 a'、b' 的确可以决定一平面 α′(图 4.9).

由于 $a'∥a$, ∴ a∥α′(§4.3 定理 1),同理 b∥α′.

若 α、α′ 不平行,就相交于一直线 c.据上节定理 4 便得

$$c∥a, \quad c∥b,$$

即在平面 α 上,c 和两相交直线 a、b 都平行.这矛盾反证了 α∥α′.

定理 3 两平面平行的充要条件是:其中一平面平行于另一平面上某两相交直线.

证:设平面 α′∥α,则 α 跟 α 没有公共点,从而 α′ 平行于 α 上

的一切直线,也就必然平行于 α 上两相交线 a、b .

反之,设 α'平行于 α 上的两相交线 a、b,那末 α'∥α.否则,α'交 α 于一直线 c,但 α 上的直线 c 至少要与两相交线 a、b 之一相交,因而 α'至多与 a、b 之一平行,与假设矛盾.证完.

安装机床时,要求床身在水平位置.利用水准器先后沿两相交方向放下,如果水银泡都在正中,床身就水平了,其根据就是这命题.

下两定理和系,请读者自证.

定理 4　通过平面外一点,有一且仅一平面跟它平行.

系 1(平面平行的传递性)　若平面 α∥γ,β∥γ,则 α∥β.

系 2　若一平面与两平行平面之一相交,则也与另一平面相交,且两交线平行.

定理 5　若一直线与二平行面之一相交,则也与另一平面相交.

系　若一直线 a 及不通过 a 的一平面 α 都平行于平面 β,则 a∥α.

对于两条异面直线有

定理 6　给定两条不共面直线 a 和 b,则有一对且仅一对平行平面 α 和 β 通过其中一线且平行于另一线(图 4.10).

图　4.10

证:按§4.3 定理 6,有一且仅一平面 α 存在,它通过 a 且平行于 b.要得到它,只须由 a 上任一点 A 引 b 的平行线 b',则 a 与 b'决定平面 α.

同理有唯一平面 β 存在通过 b 而平行于 a;要得到它,只须由 b 上任一点 B 引 a 的平行线 a',则 a'与 b 决定平面 β.

并且由于 a'∥a,b∥b',按定理 2,有 α∥β.证完.

下两定理是不难证明的.

定理 7 介于两平行平面间的平行线段相等.

定理 8 若两直线被三平行面所截,则对应线段成比例.

§4.5 直线与平面的垂直

若一直线 l 垂直于一平面 α 上的所有直线,就说直线 l 垂直于平面 α,或者说它们互相垂直,记作 $l\perp\alpha$ 或 $\alpha\perp l$.

凡垂直于 α 的直线 l,必不在 α 上,因为 α 上的一条直线不可能垂直于 α 上的所有直线.

另一方面,凡垂直于 α 的直线 l 不可能和 α 平行.因为由§4.3定理4,α 上有一组直线与 l 平行,于是 l 就不垂直于 α 上的这一组直线了.

可见垂直于平面的直线一定和该平面相交.这交点称为垂(线)足.

跟平面相交但不垂直的直线,称为平面的斜线,交点称为斜(线)足.

关于直线与平面垂直常用的一些定理有

定理 1 直线 l 垂直于平面 α 的充要条件是 l 垂直于 α 上两条相交直线.

系 若一直线垂直于两相交直线,便垂直于它们所决定的平面.

定理 2 通过一点有一且仅一平面垂直于一定直线.

系 通过一点而垂直于一定直线的一切直线位于同一平面上,即通过该点而垂直于定直线的平面.

定理 3 通过一定点有一且仅一直线垂直于一定平面.

定理 4 垂直于同一直线的两平面互相平行.

定理 5 若两平行线之一垂直于一平面,则另一线亦然.

定理 6 垂直于同一平面的两直线互相平行.

系　给定平面 α 以及跟它不垂直的一直线 a，那末与 a 相交且垂直于 α 的一切直线位于同一平面上．

定理 7　若两平行平面之一垂直于一直线，则另一平面亦然．

定理 8　若平面 β 及不在 β 上的直线 b 同垂直于一直线 a，则 $b /\!/ \beta$．

这些定理，有的中学几何上讲过了，没有讲过的也不难证明．必要时可参考编者所写的《初等数学复习及研究（立体几何）》1.6 节，1980 年人民教育出版社出版．

§4.6　空 间 作 图

在初等平面几何里，我们根据所给条件，借助作图工具（圆规、直尺或其他代用工具）作出所求图形．一般较复杂的问题，分为分析、作法、证明、讨论四个步骤来解．

空间作图也是如此，所不同的是，这里情况比较复杂，因为在空间没有像圆规和直尺在平面上完成作图的工具．因此，我们采用下列作图公法．在这里，我们承认几种基础作图的可解性，其他作图问题，只要能归结到有限次运用作图公法中所列举的基础作图题而得到解决，便算问题解决了．

空间作图公法

以下四类问题我们承认其可解：

1°通过不共线三点作一平面；

2°求已知其相交的两平面的交线；

3°在已知平面上用直尺和圆规或代用工具照平面几何解决一切作图题；

4°任取一点，在或不在已知直线上，在或不在已知平面上；任取一直线，通过或不通过一已知点，在或不在已知平面上；任取一平面，通过或不通过一已知点，通过或不通过一已知直线．

按这些作图公法,就可以解一些作图题.它们的解决可以立刻归结到问题1°—4°.在这些作图中,解答存在与否,从前面一些定理已不难确定.我们由浅入深列出几个作图题.

作图题1 求作一平面使满足下列条件之一:

(1) 通过一已知直线及其外一已知点;

(2) 通过两已知相交直线;

(3) 通过两已知平行直线.

作图题2 求作已知直线和已知平面的交点.

作图题3 求三已知平面的交点.

作图题4 通过已知直线外一已知点,求作一直线使平行于该直线.

作图题5 给定两条不共面直线,求作一平面使通过其中一线而平行于另一线.

由§4.3定理6,解答唯一存在.

作图题6 给定两条不共面直线,通过每一线作一平面使这两平面平行.

由§4.4定理6,解答唯一存在.

作图题7 过给定平面外一点求作一平面使平行于该平面.

由§4.4定理4,解答唯一存在.

作图题8 给定两直线 a、b 及一点 A,求作一平面,使通过 A 且平行于 a 及 b.

解:若所求平面 π(图4.11)存在,则直线 a 和点 A 所决定的平面(如果它们可以决定一平面)交 π 于一直线 $a'\parallel a$(§4.3定理4).同理,直线 b 和点 A 所决定的平面(如果存在的话)交 π 于一直线 $b'\parallel b$.

图 4.11

所以通过点 A 分别作直线 $a'\parallel a$ 和 $b'\parallel b$,则两直线 a'、b' 所

决定的平面(如果它们能决定一平面)便是所求的.

证明是立刻可以得到的.

我们来讨论这个问题.

1°若 a、b 不共面,且 A 不在通过其中一线而平行于另一线的平面上,则问题有唯一解答.

2°若 a、b 相交,且 A 不在 a、b 所决定的平面上,也有唯一解答.

3°若 $a /\!/ b$,且 A 既不在 a 上又不在 b 上,则问题不定,即有无穷多个解.

4°在其他情况,问题无解.

作图题 9　已知平面 α、β 相交于直线 g,在 α、β 上依次给了一点 A、C(都不在 g 上).求作一个有内切圆的等腰梯形 $ABCD$(其中 $AB /\!/ CD$)使 B 在 α 上,D 在 β 上.

图　4.12

现在来解这作图题

分析:设图已作成(图 4.21),则因

$$AB /\!/ DC,\ \alpha\text{通过 } AB,\ \beta\text{通过 } DC,$$

按§4.2 定理 2 的引理,α 和 β 的交线 g 应跟 AB 和 DC 平行.因此,所求梯形的两底所在直线(记作 a、c)立刻可作出来,因为 g

是已知的.因此问题归结到在 a 和 c 所决定的平面 π 上解一个平面几何作图题.

由于求作的四边形是外切于圆的,其充要条件是

$$AB+DC=AD+BC.$$

又由于梯形要是等腰的,应有 $AD=BC$.在这样的情况下,从点 C 向 a 作垂直线段 CE,无论大底在 a 或 c 上,以 M 表 AB 中点,以 N 表 DC 中点,都有(图 4.13):

图 4.13

$$AE=AM+ME=AM+NC=\frac{1}{2}(AB+DC)=BC=AD.$$

从此可知,从 C 向 a 作垂线,可定垂足 E,AE 的长随点 E 而定,亦即 AD、BC 的长度确定了.

作法:1°在 α 上通过定点 A 引 $a\parallel g$,在 β 上通过定点 C 引 $c\parallel g$.

图 4.14

2°作 $CE\perp a$ 于 E(图 4.14),以 C 为圆心,以 AE 为半径画弧交 a 于 B 和 B',以 A 为圆心以 AE 为半径画弧交 c 于 D 和 D',则 $ABCD$ 和 $AB'CD'$是所求图形.

证明：例如就 $ABCD$ 而言，它由作图是等腰梯形，并且若以 M、N 表 AB、DC 的中点，便有

$$AB + DC = 2AM + 2NC = 2AE$$

由作法知
$$= AD + BC.$$

可见 $ABCD$ 是有内切圆的，即以 MN 为直径的圆．

把图 4.14 嵌进图 4.12 就是所求图形了．

讨论：当 $AE > CE$ 时，点 B、B'、D、D'存在，有两解．当 $AE = CE$ 时，B 与 B'重合于 E，有一解，是正方形．当 $AE < CE$ 时，点 B、B'不存在，无解．

请注意，在本题中，α、β 两平面以及 A、C 两点的地位均等，我们是从 C 向 a 作垂线的，得两解、一解或无解．那末从 A 向 c 作垂线是否还有新的解呢？事实上没有新的解．

§4.7　正射影·平行射影

直线垂直于平面的概念可用来讨论正射影．机械制图中画工件的三视图，便是利用平行射影这个工具．

给定一平面 α，从一点 A 所引 α 的垂线足称为 A 在 α 上的正射影，简称射影．一图形的所有各点在 α 上的射影的集合，称为该图形在 α 上的射影．

从图上各点所作 α 的垂线称为各该点的投射线．α 的法线方向称为投射方向．

设 l 是与 α 相交的一直线，通过一点 A 作直线平行于 l，必交 α 于一点 A'，A'称为 A 沿 l 方向在 α 上的平行射影，它是正射影的推广．

图　4.15

经过平行射影,点列投射成点列,线束投射成线束.

容易证明(利用相似三角形):

定理 1　设两线段合于 $AB \parallel CD$,但不平行于投射方向 l,则它们的平行射影合于 $A'B' \parallel C'D'$,并且

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{(图 4.15)}.$$

系　若平行四边形所在平面不平行于投射方向 l,则它的平行射影仍为平行四边形.

共点性、共线性、平行性以及平行线段之比,不因平行射影而改变.这些是平行射影的基本性质.

§4.7.1　三垂线定理及其逆定理

这个课题在数学上、物理学上是有用的工具.

定理 2(三垂线定理)　在斜线射影所在平面上的一直线,若垂直于这射影,便也垂直于斜线本身.

设:平面 α 的斜线 OA 在 α 上的射影是 HA(图 4.16),直线 l 在 α 上且 $l \perp HA$.

求证:$l \perp OA$.

证:OH 是 α 的垂线,所以 $OH \perp l$.又假设 $HA \perp l$,所以

$$l \perp \text{平面 } OAH, \text{ 因而 } l \perp OA.$$

图　4.16

定理 3(三垂线定理的逆)　在斜线射影所在平面上的一直线若垂直于该斜线,便也垂直于其射影.

证明和上面相仿,请读者补足.

注意:上面的原定理和逆定理,有些书上的命名正好与此颠倒.即把定理 3 称为三垂线定理,把定理 2 称为三垂线定理的逆.要避免这麻烦,无妨这样叙述:

三垂线定理：<u>平面的一条斜线垂直于这平面上的定直线的充要条件是，斜线的射影垂直于定直线</u>.

定理 4　<u>平面的一条斜线与平面上通过斜足的两条射线成等角的充要条件是：该斜线在平面上的射影与这两射线成等角</u>.

证：设 OA、OB 是平面 α 上两射线，从斜线 OC 上一点 C 作 $CD\perp$ α 于点 D 则 OD 是 OC 在 α 上的射影（图 4.17）.

我们先证必要条件，即

$$\angle AOC=\angle BOC \quad \angle AOD=\angle BOD.$$

作 $DP\perp OA$，$DQ\perp OB$，连 CP、CQ、CP 的射影是 DP，由 $DP\perp OA$，按定理 2 得 $CP\perp OA$. 仿此有 $CQ\perp OB$.

图　4.17

于是在直角△COP 和△COQ 中，有斜边公用，一锐角相等，因而

$$\triangle COP\equiv\triangle COQ.$$

由此得

$$OP=OQ.$$

到此，在两个直角△DOP 和△DOQ 中，斜边公用，一条直角边相等，因而合同：$\triangle DOP\equiv\triangle DOQ$.由此得结论$\angle AOD=\angle BOD$.

把过程倒过来便得充分性证明.

例 1　A、B、C、D 是空间四点，已知

$$AB\perp CD,\quad AC\perp BD.$$

求证

$$AD\perp BC.$$

证：从 CD、BD 的公共点 D（图 4.18）作 DH 垂直平面 ABC 于 H.对于此

图　4.18

平面, CD 的射影是 CH, BD 的射影是 BH, AD 的射影是 AH .从前两个假设,按三垂线定理逆定理推出

$$AB \perp CH, \quad AC \perp BH .$$

于是 H 是$\triangle ABC$ 的垂心,从而 $AH \perp BC$.

既然 AD 的射影 $AH \perp BC$,由三垂线定理也有 $AD \perp BC$.

§4.7.2 直线与平面间的角

定理 5 平面 α的斜线与其在α上的射影所成的角小于它跟α上任何其他直线间的角 .

证: 我们知道,两线间的角的大小,不因其中一线平行于自身的移动而变 .所以,所谓其他直线都可以假设它通过斜足 O(图 4.19) .

设 A'是斜线上一点 A 在α上的射影,于是 OA'是 OA 的射影 .在 α 上以 O 为中心以 OA'为半径作圆,并由 O 引任一射线交圆周于 M .在直角$\triangle AA'M$ 中,斜边 $AM >$ 直角边 AA'.

图 4.19

在$\triangle AOA'$与$\triangle AOM$ 中,

$$OA \text{ 公用}, \quad OA' = OM, \quad AA' < AM .$$

所以
$$\angle AOA' < \angle AOM . \quad \text{证完} .$$

斜线 OA 跟它在α上的射影所成的锐角 $\varphi = \angle AOA'$称为斜线跟α间的角 .

明显地,斜线和平面的夹角是该斜线和平面的法线所成锐角的余角 .

若 $OA \perp \alpha$,则 OA 与α上任何直线成直角 .我们说,平面的垂线跟平面所成的角是直角 .

若一直线平行于 α,它跟它的射影平行.两平行线间的角看作零(或 2 d),因此,平行于 α 的直线跟 α 间的角定义为零.

例 2 斜三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 的底是正三角形,其边长为 a.点 A_1 在底面 ABC 上的射影是△ABC 的重心 G.已知侧棱跟底面的夹角为 θ,求这三棱柱的侧面积和体积(图 4.20).

图 4.20

以 G 表△ABC 的重心,即三中线 AM、BP、CN 的交点.设

$$AB = BC = AC = a, \quad \angle A_1AG = \theta,$$

则

$$AM = \frac{3}{2}a, \quad AG = \frac{2}{3}AM = \frac{3}{3}a,$$

$$A_1G = AG\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{3}a\operatorname{tg}\theta, \quad A_1A = \frac{3}{3}a\sec\theta.$$

因 AA_1 在平面 ABC 上的射影 AG 跟 AB 和 AC 的夹角相等,按定理 4,AA_1 跟 AB 和 AC 的夹角也相等.故

$$\angle A_1AB = \angle A_1AC.$$

所以棱柱两侧面 ABB_1A_1 和 ACC_1A_1 的面积相等.要求它们,因平行四边形的两边已知道了,只需知道∠A_1AB 即可.

因 A_1N 在底面 ABC 上的射影 $GN\perp AB$,按三垂线定理也有 $A_1N\perp AB$,△A_1AN 是直角三角形,从而

$$\cos\angle A_1AN = \frac{AN}{A_1A} = \frac{3}{2}\cos\theta .$$

于是

$$S_{ACC_1A_1} = S_{ABB_1A_1} = AB\cdot A_1A\sin\angle A_1AN$$

$$= a\cdot\frac{3}{3}a\sec\theta \quad 1-\frac{3}{4}\cos^2\theta = \frac{1}{6}\quad 12\sec^2\theta-9\,a^2 .$$

还有一个侧面 BCC_1B_1,它的两边都已知了,还须知道 CC_1 与 CB 的夹角.由于 $CC_1 /\!/ AA_1$,而 AA_1 在底面上的射影 $AG\perp BC$,按三垂线定理, $AA_1\perp BC$ 或 $CC_1\perp BC$.所以第三个侧面是矩形,从而 $S_{BCC_1B_1} = \frac{3}{3}\sec\theta\cdot a^2$.

$$\text{三棱柱侧面积} = \frac{1}{3}\quad 12\sec^2\theta-9\,a^2 + \frac{3}{3}\sec\theta\cdot a^2$$

$$= \frac{3\sec\theta + \quad 12\sec^2\theta-9}{3}a^2 .$$

至于三棱柱体积则是

$$V = S_{ABC}\cdot A_1G = \frac{3}{4}a^2\cdot AG\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\cdot a^3 .$$

§4.8 二面角·垂直平面

有公共边缘的两半平面构成二面角,这公共边缘是它的棱,两半平面是它的面.

从棱上任一点 P,在每一面上作垂直于棱的射线,这两射线形成二面角的平面角,平面角的大小与 P 的位置无关.两个二面角的相等或大小,决定于它们的平面角的相等或大小.

将构成二面角的两面通过棱反向延展,得出它的对棱二面角.

下面的命题是众所周知的:

定理 1 两个对棱二面角相等.

两平面相交，组成四个二面角，两两对棱．当其中相邻的二面角相等（每个都是直二面角）时，两平面称为互（相）垂（直）．

定理 2　通过已知平面的一条垂线的平面必垂直于已知平面．

系　垂直于平面上一直线的平面，必垂直于该平面．

定理 3　设两平面垂直，若一直线在其一平面上且垂直于交线，则必垂直于另一平面．

系 1　设两平面垂直，从其一平面上一点所作第二平面的垂线必在第一平面上．

系 2　两相交平面同垂直于第三平面，则其交线也垂直于第三平面．

系 3　若直线 l 与平面 α 同垂直于平面 π，则 l 或者在 α 上，或者与 α 平行．

§4.8.1　异面直线的公垂线

定理 4　两条异面直线 a 和 b 有唯一的一条公共垂直相交线．

证：　由§4.4 定理 6，我们知道有唯一的一对平行平面 α 和 β 存在，α 含 a 而与 b 平行，β 含 b 而与 a 平行．凡垂直于 α（因之 β）的无数直线，都是既垂直于 a 又垂直于 b 的．其中有没有，有的话有多少条是跟 a、b 都相交的呢？其中跟 a 相交的落在一个平面 γ（图 4.21）上，即从 a 上任一点 A' 所作 β 的垂线 $A'A_0$ 与 a 所决定的平面．γ 交 β 于一直线 a_0，$a_0 \parallel a$（因 $a \parallel \beta$）；由于 a 与 b 不共面，所以 a_0 既不

图　4.21

能与 b 重合又不能与 b 平行 .所以平面 β 上的两直线 a_0 和 b 必相交于一点 B .在 γ 上作直线 $BA /\!/ A_0 A'$,那末容易看出 AB 就是所求的唯一与 a、b 相交的公垂线 .证完 .

设 A'是 a 上除 A 以外的任一点,B'是 b 上除 B 以外的任一点,由直角△ $A'A_0 B'$的斜边大于直角边可知:

$$A'B' > A'A_0 = AB .$$

可见,两点独立地在 a、b 上移动时,它们间的距离以公垂线段 AB 为最短 . AB 称为异面直线 a、b 间的距离 .这事实还可以这样看出,AB 是 α、β 这一对平行平面间的距离,乃是这两平面上任一对点间的最短距离 .

作为练习,试计算图 4.22 上棱长为 a 的立方体 $ABCDA'B'C'D'$中两直线 .AA'和 BD'间的夹角和距离 .

图 4.22

§4.8.2 例题

例 1 一直线与二面角的两面相交,若两交点到二面角的棱有等距离,则此直线交两面成等角 .并证逆命题 .

证:二面角的面记为 π 和 π′(图 4.23),棱为 l,交点为 A 和 B .以 A_1 表 A 在 π′上的射影,B_1 表 B 在 π 上的射影 .作

$$A_1 A_2 \perp l, \quad B_1 B_2 \perp l,$$

则 AA_2 在 π′上的射影是 $A_1 A_2$,BB_2 在 π 上的射影是 $B_1 B_2$.按三垂线定理有

$$AA_2 \perp l, \quad BB_2 \perp l .$$

AB 和 π 的夹角是∠ BAB_1,AB 和 π′的夹角是∠ ABA_1 .

先由 $AA_2 = BB_2$ 证∠ $ABA_1 =$

图 4.23

$\angle BAB_1$.

由于$\angle AA_2A_1=\angle BB_2B_1$**(二面角的平面角)以及**

$$AA_2=BB_2,$$

两直角$\triangle AA_1A_2$ **和**$\triangle BB_1B_2$ **合同,所以** AB **和** π **的夹角等于** AB **和** π' **的夹角** .

把程序倒过来,可由夹角相等证出 $AA_2=BB_2$.

例 2　**设二面角为** θ,**一面上点** A **距棱为** a,**另一面上点** B **距棱为** b, A、B **在棱上的射影间距离为** c .**求**

1° AB **的长;**

2° AB **与** B **点所在的面的夹角** .

解: **从** A **向另一面作垂线** AA_1,**从** A_1 **向棱作垂线** A_1A_2,**从** B **向棱作垂线** BB_2 **(图 4.24),则**

图　4.24

$$AA_2=a,\quad BB_2=b,\quad A_2B_2=c.$$

作 $A_1C\parallel A_2B_2$ **交直线** BB_2 **于** C,**则**

$$A_2A_1=a\cos\theta,\quad BC=BB_2-A_2A_1=b-a\cos\theta.$$

由直角$\triangle A_1BC$**得**

$$A_1B=\quad A_1C^2+BC^2=\quad c^2+(b-a\cos\theta)^2 .$$

由直角$\triangle AA_1B$**得**

$$AB^2=AA_1^2+A_1B^2=(a\sin\theta)^2+c^2+(b-a\cos\theta)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\theta.$$

所以　$$AB=\quad a^2+b^2+c^2-2ab\cos\theta.$$

以 $\varphi=\angle A_1BA$ **表** AB **线与它在** B **点所在的平面上射影的夹角,则**

$$\sin\varphi=\frac{AA_1}{AB}=\frac{a\sin\theta}{a^2+b^2+c^2-2ab\cos\theta}.$$

例 3 求已知角 α 在已知平面 π 上的射影 θ 及它所在的平面跟 π 的夹角 φ,知道了角 α 两边跟 π 的交角为 β 和 γ.

解:设 $\alpha=\angle BAC$(图 4.25),点 A 在 π 上的射影为 H,$\angle ABH=\beta$,$\angle ACH=\gamma$.作 $HD\perp BC$ 于 D,则按三垂线定理有 $AD\perp BC$,即 AD 在 π 上的射影是 HD,从而要求的是

$$\theta=\angle BHC \quad 和 \quad \varphi=\angle ADH.$$

为了求 θ,应用余弦定理于 $\triangle BAC$ 及 $\triangle BHC$:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha,$$

$$BC^2=HB^2+HC^2-2HB\cdot HC\cos\theta,$$

由此得

$$2HB\cdot HC\cos\theta=HB^2+HC^2-(AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha).$$

图 4.25

置 $h=AH$,则

$$HB=h\operatorname{ctg}\beta,\quad HC=h\operatorname{ctg}\gamma,$$

$$AB=h\csc\beta,\quad AC=h\csc\gamma;$$

代入上式,约去两端的 h^2,并注意到

$$\csc^2\beta=1+\operatorname{ctg}^2\beta,\quad \csc^2\gamma=1+\operatorname{ctg}^2\gamma,$$

便有

$$\begin{aligned}&2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma\cos\theta\\&=\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma-(\csc^2\beta+\csc^2\gamma-2\csc\beta\csc\gamma\cos\alpha)\\&=-2+2\csc\beta\csc\gamma\cos\alpha.\end{aligned}$$

以 $\sin\beta\sin\gamma$ 乘之得

$$\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

现在转入求二面角 φ.我们有

$$\cos\varphi=\frac{HD}{AD}.$$

注意,这里不必求分子和分母,它们分别是$\triangle BHC$和$\triangle BAC$的高,而这两个三角形是同底的.于是

$$\cos\varphi=\frac{HD}{AD}=\frac{HD\cdot BC}{AD\cdot BC}=\frac{2S_{BHC}}{2S_{BAC}}$$

$$=\frac{HB\cdot HC\cdot\sin\theta}{AB\cdot AC\cdot\sin\alpha}=\frac{HB}{AB}\cdot\frac{HC}{AC}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\beta\cos\gamma\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

§4.9　三面角·多面角

设从一点S顺次引出不共面的射线SA、SB、SC、…、SK、SL,则由S、SA、SB、…、SL以及$\angle ASB$、$\angle BSC$、…、$\angle KSL$、$\angle LSA$的内部所形成的图形,称为以S为顶点的多面角,记为$S-ABC\cdots KL$,射线SA、SB、…、SL称为它的棱,相邻二棱间的平面部分称为它的面,相邻二棱间的角称为面角,相邻二面形成的二面角称为它的二面角.

多面角按其面数分为三面角、四面角等等.

若多面角在其每一面所在平面的同侧,便称为凸的,否则称为凹的.三面角总是凸的.

以一平面截凸多面角的各棱,截口是一凸多边形.事实上,若此多边形不是凸的,就不能在某一边所在直线的同侧,从而原来的多面体就不能在该直线和顶点所决定的平面同侧了.

反之,给定一凸多边形,从不在其平面上某点向它的各顶点引射线,便得一凸多面角.

互补三面角　设给定三面角$S-ABC$,从顶点S出发作射线SA_0、SB_0、SC_0分别垂直于平面BSC、CSA、ASB并与射线SA、

SB、SC 分别在各该平面的同侧,那末三面角 $S - A_0B_0C_0$ 称为 $S - ABC$ 的补三面角(图 4.26).

图 4.26　　　　图 4.27

我们来证明,$S - ABC$ 也是 $S - A_0B_0C_0$ 的补三面角,即它们是互补的.为此先讲一个引理.

引理　设从平面上一点引两射线,一条是平面的法线,一条是平面的斜线,那末这两射线形成锐角的充要条件是:它们在平面的同侧.

证:设 OA 是平面 π 的法线(图 4.27),OB 是斜线,以 OB' 表 OB 在 π 上的射影.那末三条射线 OA、OB、OB' 共面.若 OA、OB 在 π 的同侧(图 4.27(1)),则

$$\angle AOB < \angle AOB' = d;$$

若 OA、OB 在 π 的异侧(图 4.27(2)),则

$$\angle AOB > \angle AOB' = d.$$

定理 1　若 $S - A_0B_0C_0$ 是 $S - ABC$ 的补三面角,则 $S - ABC$ 也是 $S - A_0B_0C_0$ 的补三面角.

证:从定义和引理有(图 4.26)

$$SB_0 \perp \text{平面 } CSA,\ SC_0 \perp \text{平面 } ASB,\ \angle ASA_0 < d,$$

由此推出 $\qquad SB_0 \perp SA,\quad SC_0 \perp SA,$

所以有 $\qquad SA \perp \text{平面 } B_0SC_0,\quad \angle A_0SA < d;$

即是说,射线 $SA \perp$ 平面 B_0SC_0,且 SA 和 SA_0 在这平面的同侧.

对于 SA 所说的,完全适用于 SB 以及 SC.按定义,$S-ABC$ 是 $S-A_0B_0C_0$ 的补三面角.

定理 2　两个互补三面角中,就度量讲来,一个的面角跟另一个相应的二面角互补,即

$$\angle BSC + \angle B_0 \cdot SA_0 \cdot C_0 = 2d,$$

$$\angle B_0SC_0 + \angle B \cdot SA \cdot C = 2d,$$

等等.

这定理的证明不难,归结到证明:二面角的平面角等于两面法线夹角的补角.利用平面几何这是显而易见的.

定理 3　三面角的任一面角小于另两面角之和而大于其差.

证:这是三角形中三边间的关系在三面角的类比.

假设 $S-ABC$ 中最大的面角是 $\angle ASC$(图 4.28),能证得

(1) $\angle ASC - \angle ASB < \angle BSC$,

问题就全部解决了.

图 4.28

在 ASC 面上作 $\angle ASB' = \angle ASB$,因此 $\angle B'SC$ 代表差 $\angle ASC - \angle ASB$.截取 $SB = SB'$,通过点 B 和 B' 任作一平面(不和平面 SAC 平行)截棱 SA 和 SC(而不是它们的反向延长线)于 A 和 C,则 $\triangle SAB$ 和 $\triangle SAB'$ 因两边及夹角对应相等而合同,于是 $AB = AB'$.从 $\triangle ABC$ 看,$BC > AC - AB = AC - AB' = B'C$.最后在 $\triangle SBC$ 和 $\triangle SB'C$ 中,两边对应相等而第三边不等,得出 $\angle BSC > \angle B'SC$,即(1)式.

系　凸多面角的任一面角小于其它各面角之和.

取五面角 $S-ABCDE$(图 4.29)为例,

$$\angle ASE < \angle ASB + \angle BSE < \angle ASB + \angle BSC + \angle CSE$$

$$< \angle ASB + \angle BSC + \angle CSD + \angle DSE.$$

图　4.29　　　　图　4.30

定理 4　<u>三面角各面角之和小于四直角</u>.

证: 反向延长棱 SA 得 SA'(图 4.30).在三面角 $S-A'BC$ 中应用定理 3:

$$\angle BSC < \angle CSA' + \angle A'SB = (2d - \angle CSA) + (2d - \angle ASB),$$

移项得证.

定理 4′　<u>任何凸多面角各面角之和小于四直角</u>.

证: 取一个与各棱相交的平面截各棱于 A、B、C、…、K、L,由定理 3 有

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS,$$
$$\angle BCD < \angle BCS + \angle DCS,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\angle LAB < \angle LAS + \angle BAS.$$

相加,左端是凸多边形 $ABC\cdots KL$ 的内角和 $2(n-2)d$;右端等于

$$(2d - \angle ASB) + (2d - \angle BSC) + \cdots + (2d - \angle LSA)$$
$$= 2nd - \text{各面角和}.$$

所以　　$$\text{各面角和} < 4d.$$

定理 5　<u>三面角的三个二面角之和大于二直角</u>.

证: 应用定理 4 于 $S-ABC$ 的补三面角 $S-A_0B_0C_0$ 得

$$\angle B_0SC_0+\angle C_0SA_0+\angle A_0SB_0<4d.$$

由定理 2,此式可写作

$$6d-(\angle B\cdot SA\cdot C+\angle C\cdot SB\cdot A+\angle A\cdot SC\cdot B)<4d$$

或　$\angle B\cdot SA\cdot C+\angle C\cdot SB\cdot A+\angle A\cdot SC\cdot B>2d$.

§4.9.1　有向三面角

在平面几何里,我们讨论过有向角,现在有必要介绍有向三面角.

给定三面角 $S-ABC$,倘若我们约定把 SA、SB、SC 依次叫做第一、第二、第三棱,那末便叫做有向三面角,记作 $\overline{S-ABC}$.

设以不通过顶点的任一平面 π 截三棱,从顶点 S 看 π 上的截口三角形,若围线 $ABCA$ 是逆时针方向(图 4.31 左),则称 $\overline{S-ABC}$ 有正向;如果是顺时针方向(图 4.31 右),则称 $S-ABC$ 有负向.转向的正负与 π 的选择无关.

从这个定义立刻看出:(a)若互换三面角的两棱,就改变了它的转向,即 $\overline{S-ABC}$ 和 $\overline{S-BAC}$ 的向相反;(b)若轮换三面角的三棱,它的向保持不变,即 $\overline{S-ABC}$ 和 $\overline{S-BCA}$ 及 $\overline{S-CAB}$ 的向相同.

倘若反向延长三面角 $S-ABC$ 的三棱,得一新三面角 $S-A'B'C'$

图　4.31　　　　　　图　4.32

(图 4.32),称为 $S-ABC$ 的对顶三面角.若将 SA 与 SA', SB 与 SB', SC 与 SC' 相对应,那末显见两个三面角 $S-ABC$ 和 $S-$

$A'B'C'$的对应的面角相等,对应的二面角相等;但它们的转向相反.

两个对顶三面角虽有对应相等的面角和二面角,在一般情况下却是无法叠合的.因在一般情况下,$S-ABC$的三个面角不相等,所以$S-A'B'C'$中只有$B'SC'$面能和BSC面相叠合.因此,倘若两个三面角能叠合,只有棱SA和SA'相叠合;同理SB须与SB'叠合,SC与SC'叠合.但这是不可能的:当SB'、SC'分别与SB、SC叠合以后,由于这两个三面角有反向,棱SA和SA'各在平面BSC的一侧,决不可能叠合.

§4.9.2 两个三面角的相等

倘若两个三面角的对应面角相等,对应二面角也相等.并且有同向.则称为全相等或简称全等;如果转向相反,则称为对称的或镜照相等.所以相等(或合同)兼指全等和对称而言.如果两个三面角是对称的,则其中一个和另一个的对顶三面角全等.两个对顶三面角是对称的,即相等而一般说来不全等.

若两个三面角可以叠合,那末就有对应相等的面角和二面角,并且有同向,所以是全等的.反之,若对应的面角相等,对应的二面角也相等,且有同向,就可以叠合,即全等与可叠合同义.

我们约定,将相等的三面角中相等的元素写在相应的位置.因此,如果$S-ABC$和$S'-A'B'C'$相等,则面角ASB等于面角$A'S'B'$,二面角SA等于二面角$S'A'$,余类推.

三面角的相等满足反身律,对称律和传递律.

这意思是说:(a)任一三面角与其自身相等;(b)若$S-ABC$与$S'-A'B'C'$相等,那末$S'-A'B'C'$与$S-ABC$也相等;(c)若$S-ABC$和$S'-A'B'C'$都跟$S''-A''B''C''$相等,那末前两者彼此相等.

三面角的对称或镜照相等,只满足对称律,而不满足反身律和

传递律.

下面介绍关于三面角相等的定理

定理 6 两个三面角若相等,则它们的补三面角也相等.

这是定理 2 与相等三面角定义的推论.

定理 7 设两个三面角的三个面角对应相等,则必相等[①].

证:设在三面角 $S\text{-}ABC$ 和 $S'\text{-}A'B'C'$ 中(图 4.33)有
$\angle ASB=\angle A'S'B'$, $\angle BSC=\angle B'S'C'$, $\angle CSA=\angle C'S'A'$,
我们来证明二面角 $\angle B\cdot SA\cdot C=\angle B'\cdot S'A'\cdot C'$.

首先在两个三面角的各棱上截取

$$SA=SB=SC=S'A'=S'B'=S'C',$$

于是得到三组合同的等腰三角形:$\triangle ASB$ 与 $\triangle A'S'B'$, $\triangle BSC$ 与 $\triangle B'S'C'$, $\triangle CSA$ 与 $\triangle C'S'A'$.因而有

图 4.33

$$\angle SAB=\angle S'A'B',\quad \angle SAC=\angle S'A'C',$$
$$AB=A'B',\quad AC=A'C',\quad BC=B'C'.$$

所以 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$, 从而 $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

其次,因 $\angle SAB$ 和 $\angle SAC$ 都是锐角,一定可以在线段 SA 上充分接近于点 A 处选一点 E,在 ASB 面上作 $EF\perp SA$,在 ASC 面上作 $EG\perp SA$,使这两垂线能与线段 AB 和 AC 各交于一点 F 和 G;并在线段 $S'A'$ 上取点 E' 使 $A'E'=AE$,仿此得出相应的交点 F' 和 G'.于是从两组合同直角三角形

$$\triangle AEF\equiv\triangle A'E'F',\quad \triangle AEG=\triangle A'E'G'$$

① 若两个三面角同向则全等,有反向则镜照相等,以下三定理同此.

得出
$$AF = A'F', \quad AG = A'G'.$$
那末$\triangle AFG$和$\triangle A'F'G'$有两边及夹角分别相等,因而合同.所以有 $FG = F'G'$.

最后,$\triangle EFG$和$\triangle E'F'G'$有三边分别相等,因而
$$\angle FEG = \angle F'E'G'.$$
所以证明了以 SA 和 $S'A'$为棱的二面角相等.

仿此证明其余的二面角对应相等.两个三面角的面角以及二面角分别对应相等,所以是相等的.

定理 8 设两个三面角有两个面角及其所夹二面角对应相等,则必相等.

证: 设在三面角 $S-ABC$ 和 $S'-A'B'C'$中(图 4.33)有
$$\angle ASB = \angle A'S'B', \quad \angle ASC = \angle A'S'C',$$
$$\angle B \cdot SA \cdot C = \angle B' \cdot S'A' \cdot C',$$
要证这两个三面角相等,由定理 7 只要能证明
$$\angle BSC = \angle B'S'C'.$$

为此,首先仍取 $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$.从合同等腰$\triangle ASB$和$\triangle A'S'B'$得出 $AB = A'B'$, $\angle SAB = \angle S'A'B'$;从合同等腰$\triangle ASC$和$\triangle A'S'C'$得出 $AC = A'C'$, $\angle SAC = \angle S'A'C'$.

其次,像上面那样取 $AE = A'E'$,并完全同样地得出点 F、G、F'、G'.从合同直角$\triangle AEF$ 和$\triangle A'E'F'$得出 $EF = E'F'$, $AF = A'F'$.仿此得出 $EG = E'G'$, $AG = A'G'$.于是$\triangle EFG$和$\triangle E'F'G'$因两边及其夹角分别相等而合同,从而 $FG = F'G'$.

接下去,$\triangle AFG \equiv \triangle A'F'G'$(三边对应相等).于是
$$\angle BAC = \angle B'A'C'.$$
从而
$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad (\text{两边及夹角对应相等}).$$
$$\therefore \quad BC = B'C'.$$

最后,
$$\triangle BSC \equiv \triangle B'S'C' \quad (\text{三边对应相等}),$$

$$\therefore\quad \angle BSC = \angle B'S'C'.$$ 证完.

定理 9　设两个三面角的两个二面角及其所夹面角对应相等,则必相等.

证: 设在三面角 $S-ABC$ 和 $S'-A'B'C'$中,两个二面角及所夹面角对应相等,则由定理 2,它们的补三面角 $S-A_0B_0C_0$ 和 $S'-A_0'B_0'C_0'$中有两个面角及其所夹二面角对应相等,由定理 8 它们相等.按定理 6,$S-ABC$ 和 $S'-A'B'C'$也相等.

定理 10　设两个三面角的三个二面角对应相等,则必相等.

证: 考虑 $S-ABC$ 和 $S'-A'B'C'$的补三面角,它们有三个面角对应相等,因而相等(定理 7).所以按定理 6,$S-ABC$ 和 $S'-A'B'C'$也相等.

§4.9.3　三直三面角

三面角中有一、二、三个二面角是直二面角的,依次称为单直、双直、三直三面角,统称直三面角.正交笛卡儿坐标系的一个卦限便是三直三面角.

定理 11　以一平面 π 截三直三面角 $S-ABC$ 得截口$\triangle ABC$,则

1°$\triangle ABC$ 的垂心 H 是顶点 S 在 π 上的射影;

2°$\triangle ASB$ 的面积是$\triangle ACB$ 和$\triangle AHB$ 面积的比例中项;

3°$\triangle ABC$ 面积的平方等于$\triangle ASB$、$\triangle BSC$、$\triangle CSA$ 面积的平方和.

证: 1°从顶点 S 作平面 ABC 的垂线,垂足 H 是 S 在 π 上的射影(图 4.34).

由于 $SA\perp SB$, $SA\perp SC$,所以 SA 垂直于平面 SBC 上每一直线,特别有 $SA\perp BC$, $SA\perp SD$.同理, $SC\perp SF$.

SA 垂直于 π 上的直线 BC,按三垂线定理的逆, SA 在 π 上的

射影 HA 垂直于 BC .同理 BH⊥ CA, $CH\perp AB$, 所以 S 在 π 上的射影 H 是△ ABC 的垂心 .

2°上面证明了 $AHD\perp BC$, 由三垂线定理有 $SD\perp BC$, 仿此有 $SF\perp AB$.△ ASB、△ ACB、△ AHB 有公共底边 AB, 所以它们面积的比等于它们高的比;

图　4 .34

$$(1)\ \frac{\triangle ASB\text{ 面积}}{SF}=\frac{\triangle ACB\text{ 面积}}{CF}=\frac{\triangle AHB\text{ 面积}}{HF}=\text{公比 }k .$$

上面证明了 $SC\perp SF$, 所以 SH 是直角△ SCF 中斜边 CF 上的高, 故有 $SF^2=CF\cdot HF$.由(1)式得

$$(\triangle ASB\text{ 面积})^2=\triangle ACB\text{ 面积}\cdot\triangle AHB\text{ 面积} .$$

3°仿上式有

$$(\triangle BSC\text{ 面积})^2=\triangle ABC\text{ 面积}\cdot\triangle BHC\text{ 面积},$$

$$(\triangle CSA\text{ 面积})^2=\triangle ABC\text{ 面积}\cdot\triangle CHA\text{ 面积} .$$

将最后三式相加得

$$(\triangle ASB\text{ 面积})^2+(\triangle BSC\text{ 面积})^2+(\triangle CSA\text{ 面积})^2$$
$$=(\triangle ABC\text{ 面积})^2 .$$

这结果还可这样得出:

$$\begin{aligned}4(\triangle ABC\text{ 面积})^2&=BC^2\cdot AD^2=BC^2(SA^2+SD^2)\\&=BC^2\cdot SD^2+SA^2(SB^2+SC^2)\\&=4(\triangle BSC\text{ 面积})^2+4(\triangle ASB\text{ 面积})^2\\&\quad+4(\triangle ASC\text{ 面积})^2,\end{aligned}$$

以 4 除得证 .

若以 a、b、c 表 SA、SB、SC 的长, 由此得出以 a、b、c 表

△ABC面积的公式:

$$4(\triangle ABC\text{面积})^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2,$$

$$(2)\qquad \triangle ABC\text{面积} = \frac{1}{2}\ b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 .$$

并且容易算出从顶点 S 到平面 ABC 的垂线长 SH:

用两种方法计算直角△BSC的面积得

$$SD\cdot BC = SB\cdot SC = bc,$$

$$SD = \frac{bc}{b^2+c^2}.$$

从直角△ASD 得到

$$AD^2 = SA^2 + SD^2 = a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} = \frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{b^2+c^2}.$$

用两种方法计算直角△ASD 的面积,得到

$$SH^2\cdot AD^2 = SD^2\cdot SA^2,$$

$$SH^2\cdot\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{b^2+c^2} = \frac{b^2c^2a^2}{b^2+c^2},$$

$$(3)\qquad SH = \frac{abc}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}.$$

倘若利用求三棱锥体积的公式,用两种方法计算三棱锥 $SABC$ 的体积,则有

$$\frac{1}{3}\triangle ABC\text{面积}\cdot SH = \frac{1}{3}\triangle SBC\text{面积}\cdot SA = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}bc\cdot a,$$

也得出上面 SH 的表达式 .

若应用空间解析几何,求原点到平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$$

的距离,也很快得出上述结果 .这样可利用(3)式求△ABC 的面积公式(2) .

§4.9.4　例题

设三面角 $S-ABC$ 中三个面角

$$\alpha=\angle BSC,\quad \beta=\angle CSA,\quad \gamma=\angle ASB$$

为已知,求跟它们相对的二面角 $\alpha'=\angle B\cdot SA\cdot C$.

反之,给了三面角的三个二面角 α'、β'、γ',求它们所对的面角 α、β、γ.

解:Ⅰ. 设 α、β、γ 三个面角为已知,我们来求它们所对的二面角.以 α'为例.

在棱 SA 上(图 4.35)取点 A_1 使 $SA_1=1$.在平面 ASB 和 ASC 上分别通过 A_1 作棱 SA 的垂线,分别交 SB、SC 于 B_1、C_1,则有

$$A_1B_1=\operatorname{tg}\gamma,\quad SB_1=\sec\gamma,$$
$$A_1C_1=\operatorname{tg}\beta,\quad SC_1=\sec\beta.$$

在 $\triangle SB_1C_1$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中应用余弦定律:

$$SB_1^2+SC_1^2-2SB_1\cdot SC_1\cdot\cos\alpha=B_1C_1^2$$
$$=A_1B_1^2+A_1C_1^2-2A_1B_1\cdot A_1C_1\cdot\cos\alpha'.$$

图　4.35

用上面的关系代入,并化简得公式:

$$(1)\cos\alpha'=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Ⅱ. 现设二面角 α'、β'、γ'为已知,求面角 α、β、γ.

以 α_0、β_0、γ_0 表 $S-ABC$ 的补三面角 $S-A_0B_0C_0$ 的面角,以 α_0'、β_0'、γ_0' 表其相对的二面角.按§4.9 定理 2,有

$$\alpha+\alpha_0'=\pi,\quad \beta+\beta_0'=\pi,\quad \gamma+\gamma_0'=\pi,$$
$$\alpha_0+\alpha'=\pi,\quad \beta_0+\beta'=\pi,\quad \gamma_0+\gamma'=\pi.$$

在 $S-A_0B_0C_0$ 中,三个面角已经知道,按公式(1)有

$$\cos\alpha_0' = \frac{\cos\alpha_0 - \cos\beta_0\cos\gamma_0}{\sin\beta_0\sin\gamma_0} = \frac{-\cos\alpha' - \cos\beta'\cos\gamma'}{\sin\beta'\sin\gamma'}.$$

于是得

$$(2)\qquad \cos\alpha = \cos(\pi - \alpha_0') = \frac{\cos\alpha' + \cos\beta'\cos\gamma'}{\sin\beta'\sin\gamma'}.$$

公式(1)和(2)是球面三角中两个重要的公式,即边的余弦定律和角的余弦定律.

§4.10 多 面 体

最简单的多面体是四面体.不共面的四点两两相连所得六线段,以及每三点所成三角形的内部点的集合称为<u>四面体</u>(或三棱锥).这四点、六线段、四个三角形连同它们的内部点,依次称为它的<u>顶(点)</u>、<u>棱</u>和<u>面</u>.以各棱为棱的二面角称为它的<u>二面角</u>.它有四个三面角.任一面可取作<u>底面</u>,其余三面就称<u>侧面</u>.底面到对顶的距离称为这底面上的<u>高</u>.一顶点到对面的垂线称为一条<u>高线</u>.

四面体的六棱分为三双,没有公共端点的一双称为<u>对棱</u>.在四面体 $ABCD$(图 4.36)中,AB 和 CD、AC 和 BD、AD 和 BC 各是一双对棱.

两条对棱必然不共面,因此可作两平行平面各通过其中一棱(§4.4 定理6).通过三双对棱所作三组平行面围成一平行六面体,称为四面体的<u>外接平行六面体</u>.四面体的六棱是六面体六面的对角线.

反过来,平行六面体的一顶和过此顶三面的三个对顶,就是一个四面体的顶点.

图 4.36

观察外接平行六面体,就可以证明四面体的一些性质.

从平行四边形的一些性质,容易知道平行六面体各对角线通过同一点而且在此点互相平分.由此性质可证明:

定理 1　1°通过四面体的一棱及其对棱中点的平面共有六个,它们通过同一点;

2°连接四面体的一顶点及其对面重心的线段共有四条,也都通过这一点,而且从各该顶点算起都被这点分为 3∶1;

3°三双对棱中点的连线段也通过这一点,而且被它平分.

证: 1°通过四面体的棱 AB 及其对棱 CD 中点 E 的平面(图 4.36),显然是平行六面体 $AC'BD'B'DA'C$ 中通过两棱 AB'、BA' 的平面 $ABA'B'$,因而通过其对角线交点 G.其余五平面仿此.

2°平面 $ABA'B'$交四面体的面 BCD 于其中线 BE.同理,平面 $ACA'C'$交四面体的面 BCD 于其另一中线.可见四面体的顶点 A 与其对面 BCD 的重心 K 的连线,就是两平面 $ABA'B'$和 $ACA'C'$的交线,即平行六面体的对角线 AA'.所以 AK 通过 G.其余三条类似线段仿此.

至于 $AG∶GK = 3∶1$ 乃是平行四边形的简单性质(图 4.37).

图　4.37

3°连接一双对棱 CD、AB 中点的线段 EF,显然通过 AA' 的中点 G 并被 G 所平分,余仿此.

系　若平行六面体外接于四面体,则平行六面体的各棱分别等于四面体各双对棱中点的连线段.

从图 4.36 立即看出 $AB'= BA'= CD'= DC'= EF$,余类推.

定理 2　设四面体有两双对棱各自互垂,则第三双对棱也互垂.

这是§4.7.1 例 1 的另一叙述方式.

一般多面体[①]只提及一下.

一组平面多边形(包括它们的内点)所围成的几何图形,称为多面体.各多边形称为它的面;多边形的边称为它的棱,多边形的顶点称为它的顶点;棱是两个相邻顶点的连线段;通过同一顶点的各面构成多面体的多面角;各多面角的面角和二面角也是多面体的面角和二面角.不在同一平面上两顶点的连线称为对角线,不在同一面上三顶点所决定的平面称为对角面.

多面体若在其每一面所在平面的同侧,称为凸的.凸多面体被一平面所截,截口是凸多边形.

§4.10.1 多面体的截面图的画法

给了一个多面体以及一个按给定条件可以确定的平面 π,试画出多面体被 π 所截的截口.我们举例说明画法.

例 1 给定四棱锥 $S-ABCD$ 及 SA 上一点 A',SB 上一点 B',SC 上一点 C'.画出平面 $A'B'C'$ 截四棱锥的截口(图 4.38).

解:截平面 π 被三点 A'、B'、C' 确定了,π 与面 SAB、SBC 的截痕 $A'B'$、$B'C'$ 首先可以画出.关键在于求 π 与棱 SD 的交点 D'.

图 4.38

我们利用锥底面 $ABCD$.这底面上,除四点 A、B、C、D 为已

① 关于多面体的比较严格的定义,可参考高等教育出版社出版的别列标尔金著,赵慈根等译《初等几何学教程》下卷§109,pp.30~32.

知外,还可作出 AB 与 $A'B'$的交点 P,以及 BC 与 $B'C'$的交点 Q .考察面 SCD,其上 DC 与 RC'两线已可以画出了,其中 R 指 PQ 与 DC 的交点 .所以画出两线 RC'与 SD 的交点就得出 D' 连 $A'D'$ 便得所求截口线 $A'B'C'D'$.

所以画图不难,先求底面上两点 P、Q,连 PQ 交 DC 于 R .R 既在底面上,又在 SDC 平面上 .连 RC'与这面上的 SD 交于一点 D',则四边形 $A'B'C'D'$便是所求截口 .

注意:若 $A'B'/\!/ AB$,则点 P 不存在,但只要 Q 存在,PQ 线还可画出,即通过 Q 所引 AB 的平行线 .

当 P、Q 都不存在时,即当 $A'B'/\!/ AB$,且 $B'C'/\!/ BC$ 时,有 π 平行底面 $ABCD$,问题十分简单,通过 C'作 $C'D'/\!/ CD$ 即足 .

(又解) 刚才利用了底面 .不利用底面也行 .

考虑两个对角面 SAC 和 SBD (图 4.39),它们的交线 SO 一开始就可以画出来,因为点 O 是底面对角线 AC 和 BD 的交点 . 我们所考虑的截面 π 跟底面 $ABCD$ 上的点之间,有一一对应关系,对应点的连线通过 S . 借用射影几何的语言,这是一个以 S 为中心从底面到 π 的中心射影 . A、B、C 分别投射成 A'、B'、C',要求的是 D 的对应点 D' .

图 4.39

在 SAC 平面上,O 是 AC 跟 SO 线的交点,所以 O 的对应点是 $A'C'$跟 SO 的交点,O'就这样确定了 .

在 SBD 平面上,BO 跟 SD 交于 D,因而 $B'O'$跟棱 SD 的交点就是所求的点 D' .

连 $D'A'$和 $D'C'$就得到截口 $A'B'C'D'$.

若棱锥的棱数多于 4,逐次用这两种方法,照样能画出截面图.

刚才的作图利用锥顶 S,倘若是四棱柱,能否作出截面图呢?

例 2 给定四棱柱 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 及三棱 AA_1、BB_1、CC_1 上各一点 A'、B'、C' 画出平面 $A'B'C'$截四棱柱的截口(图 4.40).

图 4.40

解:连 $A'B'$、$B'C'$.以 O 表 AC 和 BD 的交点.连 $A'C'$,通过点 O 作直线平行于棱的方向,在平面 $ACC'A'$上它交 $A'C'$于一点 O'.OO'位于 BB_1 和 DD_1 所决定的平面上,在此平面上连 $B'O'$,它交棱 DD_1 于一点 D'.A'、B'、C'、D'位于两相交线 $A'C'$、$B'O'$所决定的平面上.所以 $A'B'C'D'$是所求作的截口.

在例 2,给定平面 π 是由棱上的三点 A'、B'、C'决定的.这可加以推广.

例 3 给定四棱柱 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 及侧面 ADD_1A_1、ABB_1A_1、BCC_1B_1 上各一点 P'、Q'、R'.画出平面 $P'Q'R'$截棱柱的截口(图 4.41).

解:通过点 P'、Q'、R'作直线平行于棱的方向,分别交 AD 于 P、交 AB 于 Q、交 BC 于 R.连 PB 和 QR 相交于点 O.在平面 $QRR'Q'$上通过 O 作直线平行 RR',以 O'表它跟 $Q'R'$的交点.P、O、B 三点共线,所以三平行线 PP'、OO'、BB_1 共面.在这平面上连 $P'O'$交

图 4.41

BB_1 于一点 B',这是一个关键的点.在 ABB_1A_1 面上连 $B'Q'$交 AA_1 于 A'.在 BCC_1B_1 面上连 $B'R'$交 CC_1 于 C'.在 ADD_1A_1 面上连 $A'P'$交 DD_1 于 D'.

首先 B'在平面 $P'Q'R'$上(因 B'在这平面上的直线 $P'O'$上),从而 A'、C'在其上,最后 D'也在其上.

所以 $A'B'C'D'$是所求截口.

§4.10.2　关于凸多面体的欧拉(L.Euler)定理

多面体是古希腊几何的研究中心之一,而且当时已掌握了五种正多面体的存在(柏拉图),但下面的著名定理直到 1640 年才由笛卡儿发现,1752 年欧拉再度发现并加以运用.这定理不仅适用于凸多面体,也适用于较广泛的没有“孔”的简单多面体,这种多面体的表面可以通过不撕破、不粘连的连续变形(拓扑变形)构成一个球面.

定理 3(欧拉定理或公式)　设凸多面体的顶数为 V,面数为 F,棱数为 E,则

$$V+F-E=2.$$

证:设想多面体是空的,由薄橡皮做成,当我们割去其一面后,把其余表面连续变形直到铺在一个平面上,以形成一个平面网络.在变形过程中,尽管长度、角度、面积等度量性质改变了,却还有一些未改变的性质(所谓拓扑性质).这平面网络所含的顶数和棱数,跟原先多面体的一样,而面数少了割掉的一个.我们只要对于这平面网络证明它具有性质

$$V+F-E=1,$$

欧拉公式就证明了.

首先,将平面网络照下述方式划为由三角形构成的网络:在一个还不是三角形的多边形中,添上一条对角线.这样做,E 和 F 都加了 1,但顶点数未变,因而总数 $V+F-E$ 依旧不变.这样,逐次

画上一些对角线,就可以把由多边形构成的平面网络化为三角形网络,它的 $V+F-E$ 跟原先的平面网络一样.

下一步,在三角网络中,有一些三角形在边界上;其中的三角形可能有一边在边界上,也可能有两边在边界上.有一边在边界上的三角形(如图 4.42 的 ABC),我们去掉这一边,因而去掉一个面,所以 $V+F-E$ 仍未变.有两边在边界上的三角形(如图 4.42 的 MNP),去掉这两边,因而 E 减少了 2, F 和 V 各减少了 1,所以 $V+F-E$ 也未变,照这样逐次取消在边界上的三角形,每次都没改变 $V+F-E$,最后剩下一个三角形,所以有

$$V+F-E=3+1-3=1.$$

图　4.42

可见对于原来的多面体, $V+F-E=2$.这就是关于简单多面体的欧拉公式.

注意对于有孔的多面体,欧拉公式不适用.例如平行六面体去掉一个面,则

$$V+F-E=8+5-12=1\neq 2.$$

这定理以及它的推广在拓扑学上占重要地位.

§4.10.3　正多面体

若一凸多面角的各面角相等,各二面角也相等,则称为正多面

角 .

若一凸多面体各面是全等的正多边形,且各多面角是相等的正多面角,则称为<u>正多面体</u> .第二个条件显然可用“各二面角相等”来替代 .

立方体就是正多面体的一例 .

从平面几何我们知道,有无穷多种正多边形存在 .

至于正多面体,则完全不然 .

正多面体至多有五种

定理 4　<u>正多面体最多有五种</u>。

证: 假设正 m 面角和正 n 边形可用来构成正多面体,试看 m 和 n 的关系为何 ?

正 n 边形一个内角等于 $(1 - 2\ \ n)2d$.应用 § 4.9 定理 4 得

$$m(1 - 2\ \ n)2d < 4d,$$ 即

(1)
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} .$$

但多面角的面数 m 以及多边形的边数 n 都至少等于 3,而从不等式(1),知道它们不可能都大于 3:若有 $m \geq 4$, $n \geq 4$, 那末将有 $1\ \ m + 1\ \ n \leq 1\ \ 2$ 了 !

由此可知 m 和 n 至少有一个等于 3 .

设 $m = 3$,则由(1)得 $n < 6$.因此当 $m = 3$ 时,只可能有

$$n = 3, 4, 5 .$$

由于(1)式中 m 和 n 的地位是均等的,当 $n = 3$ 时,则 $m = 3$, 4 或 5 .因此,正多面体最多有下列五种:

各正多面角的面数 m	各正多边形的边数 n
3	3
3	4
4	3
3	5
5	3

证完 .

现在我们利用欧拉公式来求以上讲的可能存在的五种正多面体的面数 F、棱数 E 和顶数 V.同时就知道不等式(1)两端之差等于什么.

由于从每一顶点发出 m 条棱,V 个顶点发出 mV 条.但这样的棱每条数着两次,所以

$$mV = 2E. \tag{2}$$

由于每一面有 n 条棱,F 个面共有 nF 条棱.但这样每条棱数着两次,所以

$$nF = 2E. \tag{3}$$

从(2)、(3)解出 V 和 F,代入欧拉公式,得

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{E}.$$

现在将上表数据代入,得出 E 的值,再由(2)、(3)求得 V 和 F 的值,因而得出下面扩大的表:

多面角面数 m	多边形边数 n	棱数 E	顶数 V	面数 F	名 称
3	3	6	4	4	四面体
3	4	12	8	6	六面体
4	3	12	6	8	八面体
3	5	30	20	12	十二面体
5	3	30	12	20	二十面体

<u>注意</u>: 若将上表中顶(点)和面(平面)的地位对调,而将棱(直线)保留不变,则四面体变为其自身,六面体和八面体互调,十二面体和二十面体互调.我们说,<u>四面体自身对偶,六面体和八面体互为对偶图形,十二面体和二十面体互为对偶图形</u>.

以上推理过程中并没有涉及边和角的度量关系,只牵涉到点线接合、点面接合、线面接合.因此,我们实际上得到较广泛的定理:

<u>各多面角有相同的面数,且各面的多边形有相同的边数的多</u>

面体,最多有五种.

用作图的方法可以证明,五种正多面体确实存在.

例 4 证明不能有这样的多面体存在,它有奇数个面,而它的每一面都有奇数条边.

证:设有一多面体,面数 F 为奇数,各面的边数 e_1、e_2、…、e_F 也都是奇数.将各面的边数加在一起,就得到棱数 E 的 2 倍:

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_F = 2E,$$

这是因为每一棱曾作为相邻二面的边数着两次.

左端是奇数个奇数的和,因此是奇数;而右端是偶数,这矛盾反映这类多面体不存在.

例 5 设凸多面体有 V 个顶点,则其面角和为 $4(V-2)d$.

证:在每一面上连一点(如图 4.43 的 P_1、P_2、…)到该面各顶点.令

F = 多面体面数,

E = 多面体棱数,

P = 在 P_1、P_2、… 等点角各之和,

T = 各面所成三角形的内角和,

图 4.43

S = 多面体的面角和.

显见 $$S = T - P.$$

因每一棱是两个三角形的底,所以共有 $2E$ 个三角形,$T = 2E \cdot 2d$.又因 P_1、P_2、…共有 F 个点,故 $P = F \cdot 4d$.

所以 $S = T - P = 4(E - F)d = 4(V - 2)d$,

最后一步应用了欧拉公式.

习题二十三

1．证明：从任一点到空间多边形[①]各顶点的连线之和大于其半周长．

2．证明：在空间四边形中，

1°各边中点是平行四边形的顶点；

2°连接对边中点的线段互相平分；

3°连接对边中点的直线通过两对角线中点所连线段的中点；

4°各边的平方和等于两对角线的平方和加上四倍对角线中点的连线段的平方；

5°对角线的平方和等于对边中点连线段平方和的两倍．

3．一平面截空间四边形 $ABCD$ 的各边 AB、BC、CD、DA 于点 E、F、G、H，证明 $\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CG}{DG}\cdot\frac{DH}{AH}=1$．

叙述并证明逆定理．

4．设一平面平行于空间四边形的两边，证明它截另两边成比例线段．

5．梯形 $ABCD$ 的下底 AB 在平面 α 上，上底高出平面 40 cm，已知 $AB:DC=5:3$，求两对角线交点到平面 α的距离．

6．设直线 a 与三平行线 b、c、d 相交，证明 a、b、c、d 共面．

7．已知一组直线中任两线相交，证明它们共点或共面．

8．设上题假设“任两线相交”改为“任两线共面”，则结论如何？

9．设△ABC 和△$A'B'C'$不共面，且直线 BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$、AB 和 $A'B'$都相交，证明：

1°这三个交点共线；

2°三直线 AA'、BB'、CC'或共点或相平行．

10．在空间通过一点 O 引三直线 a、b、c，且在其上各取两点 A、A'；B、B'；C、C'．证明直线 AB 和 $A'B'$、BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$的交点（假设它们存在）共线．

11．给定两两不共面的三直线，证明有无穷多条直线存在与这三直线相交且其中任两线不共面．

12．证明：两端分别在两条不共面直线上的一切线段的中点共面．

13．过二定点求作一平面使与一定直线平行．

---

① 各顶点不在同一平面上的多边形．

14. 过相交二平面外一点求作一直线使平行于这两平面.

15. 过一点求作一直线使与两已知直线垂直.

16. 一点 A 在相交二平面间,从 A 向此二平面引垂线 AB、AC,证明 BC 垂直于交线.

17. $ABCD$ 为折线而$\angle BCD$ 为直角,设 AB 垂直于平面 BCD,证明 CD 垂直于平面 ABC.

18. 设直线 $a /\!/ b /\!/ c$,从 a 上一点 A 向 b、c 作垂线 AB、AC,证明 BC 是 b 和 c 间的距离.

19. 设 $ABCD$ 是平面 π 上的平行四边形,O 为其中心,M 为平面外一点,若 $MA = MC$, $MB = MD$,证明 $MO \perp \pi$.

20. 过平行四边形的一对角线作平面,证明另一对角线两端到这平面的距离相等.

21. 从矩形一顶点作它所在平面的垂线,设其末端到其他三顶点的距离为 a、b、c,求这垂线的长度.

22. 设射线 a 与平面 π 上两两相交的三射线 b、c、d 成等角,证明:

1° a 所在的直线与 π 相交;

2° $a \perp \pi$.

23. 旗杆 AB 和 $A'B'$ 同垂直于地平面,已知 $AB = 2A'B'$.

1° 在地面上哪些点看两杆的仰角相等?

2° 通过旗杆 AB 的下端 A 在地面上作一直线,使与两杆下端的连线 AA' 成 α 角,在这直线上求观察两杆仰角相等的点,并加以讨论.

24. 从$\triangle ABC$ 的顶点和重心 G 向不截这三角形的平面作垂线 AA'、BB'、CC'、GG',证明 $3GG' = AA' + BB' + CC'$.

当平面与三角形相交时,情况如何?

这里讲的是正射影,在平行射影场合,命题成立吗?

25. 图形 F 在一平面上的射影为一直线段,证明 F 是平面图形.

26. 从平面 π 外一点 D 向 π 引三斜线 DA、DB、DC 使与 π 都成 $60°$ 角,且$\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA$.设 D 到 π 的距离为 a,求斜线足连成的$\triangle ABC$ 各边之长.

27. 从平面 π 外一点 A 向 π 引两条互垂斜线 AB 和 AC,它们与 π 的交角是 $15°$ 和 $75°$,求$\triangle ABC$ 的角 B 和 C.

28. 一点到平面上两点的连线长是 51 cm 和 30 cm,这两线在平面上射

影的比为 5∶2,求这点到平面的距离.

29. 在△ABC 中 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$;通过 A 引平面 ABC 一条斜线 AD 与边 AB 和 AC 构成等角,AD 在平面 ABC 上的射影交边 BC 于 E,求线段 AE 的长.

30. 设一线段在互垂三线上的射影为 p_1、p_2、p_3,求这线段的长.

31. 设一线段在互垂三平面上的射影为 r_1、r_2、r_3,求这线段的长.

32. 三棱柱的各棱(侧棱和底棱)相等,长为 2 米.侧棱和底面的夹角为 60°.求它的侧面积.

33. 给定空间一圆周及一点,问从这点到圆周上各点的线段,以哪一条为最短,哪一条为最长?

34. A 为平面 α 上一点,B 为 α 外一点,设 H 为 B 在 α 上的射影且 $3AB=4BH$.通过直线 AB 有一平面 β 与 α 成 30°角,求平面 α、β 的交线和 AB 的交角.

35. 平面上放着一个圆锥,底的半径 1 米,高为 2 米.距底圆中心 2 米处有一铅垂的杆,高为 4 米,顶点有一点光源,求圆锥影子的面积(锥底面积不在其内).

36. 设平面 π 上的△ABC 在平面 π' 上的射影为△$A'B'C'$.证明它们的面积间满足△$A'B'C'=$△$ABC\cdot|\cos(\pi,\pi')|$.

37. 正四棱锥底面边长为 a,底上二面角等于 θ.通过底面一边在棱锥内部引一平面与底面夹角为 β,求所得截面的面积.

38. 过正四棱锥底的一边作平面垂直于这边所对的侧面,已知锥底一边长 30 cm,锥高 20 cm,求所得截面的面积.

39. 两平面 α、β 交角为 ψ,从其交线上一点 A 在平面 β 上引 α 的斜线 AB,它对 α 的倾斜角为 φ,直线 AB 与两平面交线间的角为 θ,证明

$$\sin\theta=\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}.$$

40. 以一平面截立方体使截口为正六边形.

41. 三面角的三个面角为 α、β、γ,求面角为 α、β 的两面所夹的二面角.

42. 三面角的三个面角为 90°、60°、60°,证明截三棱成等长的平面垂直于面角为 90°的面.

43. 证明:空间四边形(假设每一内角小于二直角)四角之和小于四直角.

44. 证明:任意凸四面角可用平面截之,使截口是平行四边形.

45. 四面体 $ABCD$ 中,已知 $AB=CD$, P、Q、R、S 分别是 AD、BD、BC、AC 的中点,证明 $PR\perp QS$.

46. 一平面与一四面体相交,若截面是平行四边形,证明这平面平行于一双对棱.

47. 证明:四面体中,连接两面重心的线段平行于一棱且等于这棱的 $\frac{1}{3}$.

48. 设四面体有一双对棱相等,证明以平行于这两棱的任一平面截之,所得平行四边形周长一定.

49. 证明:多面体中面角数是棱数的两倍,因之是偶数.

50. 证明:多面体中发出奇数条棱的顶点数必为偶数.

51. 证明:多面体中以奇数边多边形为面的面数是偶数.

52. 证明:有七条棱的多面体不存在.

53. 证明:正四面体一双对棱中点的连线垂直于这两棱.

54. 求作一平面,使截正四面体的截口成矩形.

55. 证明:以平行于正八面体一面的任一平面截此体,截面的周界有定长.

56. 一凸多面体的棱数为 30,面数为 12,求它的各面角之和.

§4.11 空间几何变换

§4.11.1 图形的相等

在§1.19～§1.23 我们介绍过相等图形和合同变换.在这方面,空间的情况不尽相同.我们仍简略介绍一下.相等图形的定义跟前面完全一样.

定理 1 <u>在相等图形中</u>,

1° <u>与共线点对应的是共线点,从而直线的相等图形是直线</u>;

2° <u>两相交直线的交角等于两条对应线的交角</u>;

3° <u>与共面点对应的是共面点,从而平面的相等图形是平面</u>;

4° <u>对应的二面角相等</u>;

5° 对应的三面角相等;

6° 对应的四面体相等.

证: 设 F 和 F' 是相等图形,同名的符号表示相互对应的元素点.

1° 和 2° 在 §1.19 证过了.

3° 设 F 的共面四点 A、B、C、D 与 F' 的四点 A'、B'、C'、D' 对应.由 2°,对应的三角形合同,对应的角相等:

$$\angle ADB = \angle A'D'B', \quad \angle ADC = \angle A'D'C',$$

$$\angle BDC = \angle B'D'C', \quad \cdots$$

若 A'、B'、C'、D' 不共面,则是一四面体的顶点.于是对于三面角 $D'-A'B'C'$ 应用 §4.9 定理 3 和 4 得

$$|\angle A'D'B' - \angle A'D'C'| < \angle B'D'C' < \angle A'D'B' + \angle A'D'C',$$

$$\angle A'D'B' + \angle A'D'C' + \angle B'D'C' < 4d.$$

从而类似的不等式对于 A、B、C、D 也得成立.但由于 A、B、C、D 共面,不论它们在平面上如何布列,类似于上面的不等式总有一个不会成立.事实上,$\triangle ABC$ 各边所在直线将平面分成七个区域,例如当 D 在 $\triangle ABC$ 内部时,则有

$$\angle ADB + \angle ADC + \angle BDC = 4d;$$

而当 D 在 $\angle A$ 的对顶角区内时,则有

$$\angle BDC = \angle ADB + \angle ADC;$$

其余类推.所以证明了 A'、B'、C'、D' 必共面.反过来,若 A、B、C、D 不共面,则 A'、B'、C'、D' 也不共面.

4° 由于距离不变,容易证明二面角相等.

5° 由 3°,三面角的对应图形仍是三面角.由 2°,对应的三个面角相等,所以对应的三面角相等(§4.9.2 定理 7).

6° 因为对应的棱、面角、二面角、三面角各相等.

图形相等的两种情况

从平面几何我们知道,两个相等图形中,若有两对对应点 A 和 A'重合,B 和 B'重合,则任何第三对对应点 C 和 C'或相重合,或对称于重合直线 AB.在前一场合,两图形 F 和 F'称为全(相)等,两图形有相同转向;在后一场合,F 和 F'称为镜照相等,两图形有相反转向.

现在推广于空间相等图形 F 和 F'.

倘若 F'有不共线三点 A'、B'、C'分别跟 F 中的对应点 A、B、C 重合,则任何第四对对应点 D'和 D 或相重合或对称于平面 ABC(即这平面是线段 DD'的垂直平分面)(图 4.44).因若 D、D'不重合,则 A、B、C 三点都距 D、D'等远,因而在 DD'的中垂面上.

图 4.44

这时,对应的四面体 $A'B'C'D'$和 $ABCD$ 相等(定理 1,6°).当底面 $A'B'C'$重合于底面 ABC 以后,若 D 和 D'在平面 ABC 同侧,则相重合,若在异侧则相对称.在前一场合,两四面体转向相同,在后一场合则相反.

前者称为<u>全(相)等</u>,后者称为<u>镜照相等</u>或<u>对称</u>.因此,在两全等图形中,对应的距离、角、二面角、三面角、四面体相等,而且对应的转向相同;两个对称图形,对应的距离、角、二面角、三面角、四面

体相等,但转向相反.

若 F 有不共面四点 A、B、C、D 与其相等图形 F'的对应点 A'、B'、C'、D'分别重合,则第五对对应点 E、E'只能重合.否则,由上所说,E 和 E'将对称于平面 ABC,且因 $DE = DE'$,那末 D 将在 EE'的中垂面 ABC 上了,这与 A、B、C、D 不共面的假设抵触.所以我们证明了.

定理 2　两个相等的空间图形中,若有不共线的三对对应点相重,则此两图形叠合或相对称.若再有跟这三对点不共面的第四对点相重,便点点相重,因而两图形叠合.两个全等的空间图形,只要有三对不共线的对应点分别相重便完全叠合了.

两个全等图形可以看作同一图形在空间所占的两个位置.

§4.11.2　运动[①]

设有两个相等且转向相同的图形,即是说两个全等图形,我们说其中一个可从另一个通过运动得到.即是说,两全等图形因运动而叠合.

空间的运动有平移,旋转,半周旋转(轴反射)和螺旋运动.

1°平移

跟平面几何一样,平移由一个向量决定.平移是运动.两个平移的乘积是一个平移.平移的逆是平移.

定理 3　除幺变换外,平移没有二重点,但有无穷多的二重线与二重面,即平行于平移方向的一切直线和平面.

这些直线和平面上没有任何二重点,但各直线和平面却没有变动.

2°旋转

设给定一直线 s,并于其上取一正向,通过图形 F 上任一点

① 或称移动,位移,移置.

M 作平面 $\mu \perp s$(图 4.45),交 s 于 M_0;定一点 M'作为 M 的对应点使满足条件:

$1°$ M'在平面 μ 上;

$2°$ $M_0M = M_0M'$;

$3°$ $\angle MM_0M' =$ 定角 θ;

则当点 M 在 F 上变动时,点 M'所形成的图形 F'称为由 F 经过旋转(s, θ)得来.s 称为旋转轴,定角 θ 称为旋转角.关于旋转的方向规定如下:右手握拳,拇指指向轴上的正方向,则当 θ 为正角时,其他四指指着从射线 M_0M 到 M_0M'的方向,如图所示;当 θ 为负,旋转与此反向.所以给定了 θ,旋转的方向由轴上的正向所决定.

图 4.45

旋转(s, θ)和$(s, \theta + 2k\pi)$有同样的作用,不论 k 为何整数.$(s, 0)$所表示的旋转是幺变换.

在一个与轴垂直的平面上,便得出平面几何上所讲的绕一点的旋转.

定理 4 旋转是运动.

定理 5 旋转(s, θ)和(s, θ')的积是一个旋转$(s, \theta + \theta')$.

定理 6 旋转(s, θ)的逆是旋转$(s, -\theta)$.

定理 7 除幺变换外,旋转有无穷多个二重点,即旋转轴上的一切点.若 $\theta \neq 2d$,则旋转有一条二重直线即旋转轴,有无穷多二重面即垂直于轴的一切平面.

当 $\theta = 2d$ 时,情况见下.

3° 半周旋转(轴反射)

在旋转运动中,若 $\theta = 2d$,则每一点 M 绕旋转轴转动半圆周,从而 M 与其对应点 M'关于轴 s 成对称(图 4.46).这样的旋转$(s, 2d)$称为关于 s 的半周旋转或轴反射.

轴反射既是一个特殊旋转,它就是一个运动,即将一图形变换

为一全等图形.

轴反射的逆变换就是它自身,因为 M 的反射点是 M', M'的反射点是 M.

轴反射有无穷多二重点,即反射轴上的所有点;它有无穷多二重线,即反射轴以及跟反射轴垂直且相交的一切直线;它有无穷多二重面,即垂直于轴以及通过轴的一切平面.

图 4.46

注意:平面上的轴反射是个对称变换,一般是要改变图形的转向的(除非原图形是一个对称图形,就以反射轴为其对称轴),所以不是运动.而在空间,轴反射是 180°的旋转,是不改变图形的转向的,是个运动.

4°螺旋运动

一个旋转 R 跟一个平行于旋转轴的平移 T 的乘积,称为螺旋运动.

由于旋转轴平行于平移的方向,这两个运动的顺序不影响乘积,即 $TR = RT$.事实上,倘若先旋转后平移,点 M 经过 M_1 到达 M'(图 4.47);倘若先平移后旋转,点 M 经过 M_2 也到达 M'.

螺旋运动由平移和旋转组成,并包含平移和旋转作为特款.当旋转角为零时,螺旋运动只是一个平移;当平移的距离为零时,就只是一个旋转;当二者都为零时便得幺变换.

图 4.47

由于平移和旋转都把一个图形变为与它全等的图形,所以有

定理 8　螺旋运动是运动.

定理 9　螺旋运动的逆也是螺旋运动.

事实上,要把点 M'送回到 M,可先平移到 M_1,再旋转到 M,

构成逆变换的平移和旋转,分别是原先的平移和旋转的逆.

定理 10　非单一平移或旋转的螺旋运动没有二重点,但有一条二重线,即螺旋运动的轴;若旋转角 $\theta\neq 2d$,则螺旋运动没有二重面,但若 $\theta=2d$,则通过轴的平面都是二重面.

给了两个全相等的图形 F 和 F',要将它们叠合,由 §4.11.1 定理 2,只须叠合三对对应点 A、A'; B、B'; C、C'.作平移 $T=\overline{A'A}$,则 A'重合于 A.设 $T(B')=B_1$, $T(C')=C_1$,则 $T(A'B'C')=AB_1C_1$.取平面 BAB_1 在点 A 的法线为轴经过一次旋转 R 使 B_1 重合于 B,设 $R(C_1)=C_2$,则 $RT(A'B'C')=ABC_2$.最后再经过一次绕 AB 为轴的旋转,便将 $A'B'C'$重合于 ABC 了.所以有

定理 11　任意两个全等图形可以通过一个平移继以两个旋转使相重合,这两旋转的轴是相交的.

可以证明,两个全等图形可以通过一个螺旋运动使相叠合.(可参考编者的《初等数学复习及研究》(立体几何)126 页,人民教育出版社出版.)

§4.11.3　反射或对称变换

上面介绍了轴反射或半周旋转.这是一个运动,既保留距离,又保留空间图形的转向.

此地再介绍两种反射变换或对称变换.

1°　面反射　给定一平面 σ(图 4.48),从空间一点 M 作 $MM_0\perp\sigma$, M_0 表垂足,并延长 MM_0 至 M',使 $M_0M'=MM_0$,则 M 的对应点 M'称为 M 关于 σ 的对称点或镜象.当 M 描绘一图形 F 时, M'描绘一图形 F',称为 F 关于 σ 的对称图形或镜象.从 F 得到 F'的这个变换称为关于 σ 的镜照反射或面反射,σ 称为反射面.

图　4.48

显然,两点的连线段等于它们对应点的连线段.所以 F 和 F' 是相等图形.但三面角和四面体的镜象改变了转向.所以 F 和 F' 是镜照相等或对称而不是全相等.

定理 12　一个面反射的逆是它自身.

定理 13　一个面反射与其自身的乘积是幺变换.

定理 14　面反射以反射面上的点为二重点;以反射面上的以及与反射面垂直的直线为二重线;以反射面以及垂直于反射面的平面为二重面.

由于每一面反射改变了转向,所以

定理 15　两个面反射的乘积是一个运动.

定理 16　设平面 $\sigma_1 /\!/ \sigma_2$,则关于 σ_1 和 σ_2 的两个面反射之积等于一个平移.

证:从任一点 M 作直线与 σ_1、σ_2 垂直,跟它们相交于 M_1、M_2(图 4.49).以 M'表 M 关于 σ_1 的对称点,以 M''表 M'关于 σ_2 的对称点.不论 M 在空间什么位置,应用有向线段的加法恒有

图　4.49

$$MM'' = MM' + M'M'' = 2M_1M' + 2M'M_2 = 2M_1M_2.$$

所以,关于二平行面 σ_1 和 σ_2 的两个反射之积等于平移 $2\overline{M_1M_2}$.平移方向是 σ_1、σ_2 的法线方向,平移的距离是平行面间距离的两倍.

系　每个平移可看作两个面反射之积,两反射面互相平行且垂直于平移的方向,并且其中一平面可任意选取,第二个反射面便随之而定.

定理 17　设两平面 σ_1 和 σ_2 相交于一直线 s,则关于 σ_1 和 σ_2 的两个面反射之积是一个旋转,以 s 为旋转轴,以 σ_1、σ_2 夹角的二

倍为旋转角.

系 每一旋转可看作等于两个面反射之积,两反射面通过旋转轴,其夹角是旋转角的一半,并且其中一个反射面可以任意选取.第二个反射面便随之而定.

定理 17 及系不难仿照定理 16 及系加以证明,留给读者.这两个定理和系在平面几何的情况,是完全相仿的.

这两个定理和系告诉我们这样一个值得注意的事实,即运动可以看作反射变换的乘积.

2°(中)心反射 设两点 M、M'以 O 为中点,则两点 M、M'对称于 O, O 称为对称中心或反射中心.当 O 为定点而 M 在一图形 F 中变动时,M 的对称点 M'所形成的图形 F'称为 F 关于 O 的对称图形.从 F 到 F'的过程称为中心对称变换或(中)心反射或点反射.显然,中心反射保留图形的距离但改变了转向(图 4.50)① .所以心反射和面反射一样,将一个图形 F 变换为与它相等但不全等的图形(即 F 的对称形) F'.

图 4.50

定理 18 一个心反射的逆是它自身.

定理 19 一个心反射与其自身之积是幺变换.

定理 20 心反射以反射心为二重点;以通过反射心的直线为二重线;以通过反射心的平面为二重面.

定理 21 面反射变换中对应的直线或平面相交于反射面上或相平行(或重合).心反射变换中,对应的直线或平面相平行(或重合).

① 这里是指空间一般的中心反射而言.可注意平面几何里的中心反射,看做空间的点变换时,实际上是一个轴反射(反射轴即通过反射中心而垂直于所论平面的直线),因而是运动.

定理 22　<u>两个心反射之积是一个平移</u>.

证：设 O_1 和 O_2 是两个反射中心(图 4.51)，M'是一点 M 关于 O_1 的对称点，M''是 M'关于 O_2 的对称点.则 O_1、O_2 是 $\triangle MM'M''$两边的中点，所以

$$MM'' /\!/ O_1O_2, \qquad MM'' = 2O_1O_2.$$

因此由平移 $2\overline{O_1O_2}$可从 M 得到 M''.

图 4.51　　　　图 4.52

系　<u>同一图形关于两点的对称形，是全等图形，可通过平移互得</u>.

定理 23　<u>设直线 s 垂直平面 σ 于点 O，那末关于中心 O、轴 s、平面 σ 的三个反射变换中，任两个按任意顺序的积等于第三个</u>.

证：我们举一种情形证之，余仿此.先做关于 σ 的面反射，由一点 M 得到点 M'(图 4.52)；再做关于 s 的轴反射，由 M'得到 M''，求证 M 和 M''关于 O 为对称.

在三点 M、M'、M''所决定的平面上，显然有 $OM = OM'$，$OM' = OM''$.所以这平面上的点 O 距三点 M、M'、M''等远，因而 O 是直角$\triangle MM'M''$的外接圆心，即斜边 MM''的中点.所以 M 和 M''对称于 O.

§4.11.4　合同变换

我们在§4.11.1 使用了相等图形，倘若能在两个图形的点之

间建立一一对应，使一形任两点的连线段总等于另一形中两个对应点的连线段，这两形就称为相等.倘若相等的图形有相同的转向(在两个平面图形，对应的角有相同的转向；在两个空间图形，两个对应的三面角，从顶点看对应的棱有相同的转向)，就称全等；有反向则称为镜照相等或相互对称.

在§4.11.2 定义了运动，运动就是一个变换，它将一图形变为与之全等的图形.运动包括平移、绕轴线的旋转以及平移和旋转的积(即螺旋运动).空间两个全等图形，倘若有不共线的三对对应点相重合便完全重合，这时相应的运动是幺变换；倘若有两对或一对对应点相重，便可由旋转而重合；任两全等形总可以通过一个螺旋运动使相叠合.

在§4.11.3 介绍了反射变换，两个镜照相等的图形可以通过运动和一个反射(面反射或心反射)的乘积使相叠合.

将一个图形变为与它相等的图形，有时称为<u>合同变换</u>.合同变换包括平移、旋转、反射(面反射和心反射)以及它们的乘积.

力学、机械学上经常使用合同变换.机械生产无非是利用平移、旋转和螺旋运动.例如刨平面、桁车都是平行移动，各种机床成天旋转，铣螺旋铰刀用螺旋运动.利用齿轮可以传动、改变轴的转向、改变轴的转速.有时利用惰轮(俗称过桥牙齿)使两只与它接触的齿轮保持同向旋转.一切工厂都是几何运动的博览会.

§4.11.5　对称图形

若一图形 F 上每一点 M 关于一平面 σ 的对称点 M' 也是 F 的点，或者说 F 上的点两两对称于 σ，则称 σ 是 F 的<u>对称面</u>，F 是<u>面对称图形</u>.

若 F 上的点两两对称于一直线 s，则称 s 是 F 的<u>对称轴</u>，F 是<u>轴对称图形</u>.

若 F 上的点两两对称于一点 O,则称 O 是 F 的对称心, F 是(中)心对称图形.

§4.11.3 定理 23 告诉我们,若一图形既具有一对称面 σ,又具有一条与 σ 垂直的对称轴 s,则也具有一个对称中心,即 s 与 σ 的交点.并且这样的对称性,任何两个包含着第三个.

知道了图形具有对称性,研究图形形状、位置、大小就方便很多,可以从它的某个局部推知它的全貌.

§4.12　立体几何轨迹

对轨迹问题我们作简单的鸟瞰.

轨迹 1　与一定点 O 有定距离 r 的点的轨迹是一个球面 $O(r)$.

轨迹 2　与两定点有等距离的点的轨迹是这两点连线段的中垂面.

将平面上的轨迹绕一条直线为轴在空中旋转一周,便得出这两命题.

轨迹 3　与定直线 a 有定距离 r 的点的轨迹是以 a 为轴以 r 为半径的无限圆柱面.(旋转平面轨迹)

轨迹 4　与一定平面 α 有定距离 d 的点的轨迹是 α 的两个平行面,各在 α 的一侧.(平移平面轨迹)

轨迹 5　距两相交平面等远的点的轨迹是两个互垂平面,各平分两已知平面所成的二面角.(平移平面轨迹)

轨迹 6　距两平行平面等远的点的轨迹是与这两平行面平行的一平面.(平移平面轨迹)

轨迹 7　距两相交直线等远的点的轨迹是两个互垂平面.

事实上,由§4.7 定理 4 容易证明:一点 M 距平面 α 上两相交直线 a、b 等远的充要条件是 M 在 α 上的正射影距 a、b 等远.于是

判断所求轨迹是通过 a、b 夹角的平分线且垂直于的两 α 个平面 .

轨迹 8　距两平行线等远的点的轨迹是这两线公垂线段的中垂面 .

轨迹 9　一点到两已知点的连线互相垂直,这点的轨迹是一个球面,以两已知点的连线段为其直径 .(旋转平面轨迹)

轨迹 10　到两定点的距离成定比$(\neq 1)$的点的轨迹是一个中心在这两点连线上的球面 .(旋转阿氏圆)

轨迹 11　到两定点距离的平方和为常量的点的轨迹(倘若存在)是一个球面(可能退缩为一点) .

轨迹 12　到两定点 A、B 距离的平方差为常量$(PA^2 - PB^2 = k)$的点的轨迹是垂直于这两点连线的一个平面 .

例题　给定两条互垂的不共面直线,一定长线段两端在这两线上移动,求其中点的轨迹 .

解: 设 a、b 是两条互垂的异面直线,要求端点在 a、b 上而有定长 k 的动线段中点的轨迹 .

从习题二十三题 12,轨迹是一个平面图形 .

倘若把条件中“不共面直线”改为“共面直线”,其他条件“互垂”、“定长”、“中点”保留不变,那末利用“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”这一性质,可知定长动线段两端在平面上互垂直线上移动时,其中点轨迹为一圆周,以两垂线交点为圆心,以定长之半为半径 .

我们的轨迹问题,只给了条件 C,至于图形 F 的形状、大小、位置则都要我们自己去决定 .我们可不可以猜想轨迹仍然是一个圆周呢?倘若是的,中心在哪里,半径又是多长呢?

给定直线 a、b 既不共面,就容易联想到它们的唯一公垂线段 AB(§4.8.1 定理 4) .以 O 表 AB 的中点(图 4.53) .考察定长动线段的两个特殊位置 AB_1 和 AB_2,那末它们的中点 M_1 和 M_2 是

所求轨迹上的点.显然 M_1 和 M_2 在通过 O 而平行于 b 的直线上,并且

$$OM_1 = OM_2 = \frac{1}{2}BB_1$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - AB^2} \equiv r.$$

同样,考察定长动线段另两特殊位置 BA_1 和 BA_2,可见它们的中点 M_3 和 M_4 在通过 O 而平行于 a 的直线上,并且

图 4.53

$$OM_3 = OM_4 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - AB^2} = r.$$

这四个在特殊位置的定长动线段中点确在一个圆周上,圆平面即 AB 的中垂面,中心在 O,半径即上式定义的 r.其他定长动线段的中点也在圆 $O(r)$上吗?

通过公垂线段 AB 的中点 O(图 4.54)引直线 $a'∥a$ 和 $b'∥b$.由于 a、b 不共面,a'与 b'不能重合,因此 a'和 b'决定一平面 π.

$\because a'∥a, b'∥b, \therefore a∥\pi, b∥\pi$.由于 $AB\perp a'$, $AB\perp b'$,这个既与 a 又与 b 平行的平面 π 实际上是公垂线段 AB 的中垂面.

以 PQ 表示在任意位置的定长动线段,以 M 表 PQ 和 π 的交点①.设 P'、Q'分别是 P、Q 在 π 上的射影,P'在 a'上而 Q'在 b'上.由于 PP'和 AO 平行且相等,

图 4.54

① P、Q 在 π 的异侧,这交点 M 必存在.

$Q'Q$ 和 OB 平行且相等，可见 P、P'、Q、Q' 构成平行四边形．显然 M 就是 PQ 和 $P'Q'$ 的交点．于是 M 正就是线段 $P'Q'$ 的中点．

由于 $a'\parallel a$，$b'\parallel b$，$a\perp b$，$\therefore a'\perp b'$，且

$$P'Q' = 2MP' = 2\sqrt{MP^2 - PP'^2} = \sqrt{PQ^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{k^2 - AB^2} = 2r,$$

所以根据一开始所说，$P'Q'$ 中点 M 的轨迹是 π 平面上的圆 $O(r)$．所以 PQ 中点的轨迹也是这个圆．

当 $k < AB$ 时，轨迹不存在，当 $AB = k$ 时，轨迹退缩为点 O．

（又解）为了启发思考，再介绍一个解法．这次写精简一点，符号同上（图 4.55）．

假设 M 是定长 k 的动线段 PQ 的中点，由于 $a\perp AB$，$a\perp b$，所以 $a\perp$ 平面 ABQ，从而 $a\perp AQ$．M 是直角 $\triangle PAQ$ 斜边 PQ 的中点，所以

图　4.55

$$MA = \frac{1}{2}PQ = \frac{k}{2}.$$

仿此

$$MB = \frac{k}{2}.$$

可见 M 在以 A、B 为中心以 $\frac{k}{2}$ 为半径的两个等球面上，因而在两球相交的圆周上．这圆周在两等球连心线 AB 的中垂面上，半径是

$$OM = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - AB^2} = r.$$

依然得到上面的圆周．

至于这圆周上任一点 M 确是某一等于 k 的动线段 PQ 的中点，则可仿照上面的推理，由 M 先定出 $P'Q'$，由 $P'Q'$ 再定出 PQ，并证 $PQ = k$．

习题二十四

1. 举例说明两个运动的乘积因顺序而变.

2. 求一动点的轨迹,从这点看一定线段的视角为定角.

3. 设 AB、AC、AD 是立方体通过同一顶点的三棱,AE 是对角线,证明 $AE\perp$ 平面 BCD.

4. 给定两条异面直线,求作其对称轴.

5. 设三球面相交,证明其公共之二点对称于三球心的平面.

6. 哪些运动,哪些反射变换,保留一条给定的直线?

7. 给定一二面角及每面上一点 A、B,在棱上求一点 M 使 MA 与 MB 之差为最大.

8. 给定平面 α 及其异侧两点 P、Q,试于 α 上取一有定长定向的线段 AB 使折线 $PABQ$ 为最短.当 P、Q 在 α 同侧时,如何作图?

9. 给定直线 a 及其外一点 A,求 A 关于 a 上各点的对称点的轨迹.

10. 一点按定比分一定点和已知图形 F 上各点的连线,求这点的轨迹.

11. 已证空间四边形四边中点是平行四边形的顶点,现设空间四边形三顶点固定,第四顶点在一图形 F 上变动,求这平行四边形中心的轨迹.

12. 证明:与定球相交成半径有定长的圆周的一切平面,切于该球的一个同心球.

13. 过球内一定点 P 任作两两互垂的三弦 AA'、BB'、CC',证明 $PA^2+PA'^2+PB^2+PB'^2+PC^2+PC'^2$ 为常数.

14. 证明:从球外一点向球所引的切线等长.

15. 设四面体各棱切于同一球,证明三双对棱之和都相等.

16. 证明:不共面二直线上各一点所连线段中点的轨迹是一个平面.

17. 求一定点在通过另一定点的动平面上的射影的轨迹.

18. 形状和大小固定的直角三角形三顶点各在三给定平行平面之一上变动,求其外接圆心的轨迹.

19. 设形状和大小固定的三角形的顶点在一定平面上变动,底边在另一给定平行平面上变动,求其重心的轨迹.

20. 正四面体棱长为 a,有一球切于各棱,求其半径.

§4.13 面积与体积

面积和体积跟长度一样是度量几何相当深刻的基本概念.我们在§1.27介绍了面积的概念,这里介绍相仿的体积概念.

设两个多面体公有一面或若干面(或面的一部分),但没有任何公共内点,便称为<u>相邻的</u>.设在相邻的两多面体 V、V'中,取消它们的公共面(或其公共部分),于是形成第三个多面体 V'',称它为前两多面体 V、V'的<u>和</u>.这多面体 V''的内部含有一切属于 V、V'内部的点以及它们公共面上的公共点,也只有这些点.

所谓定义多面体的体积,就是使每一多面体跟满足下列条件的一个量(称为这多面体的<u>体积</u>)相对应:

1°<u>两个合同的多面体有相同体积,不论它们在空间所占的位置为何</u>;

2°<u>两多面体 V、V'的和 V''的体积,等于 V、V'体积之和</u>.

假设这样的对应存在[①],即是说,我们假设多面体的体积存在.

就像面积一样,一经体积存在,它就以无穷多方式存在.因将所考虑的量改为与它成比例的量以作替代,显然仍满足上述二条件.

为了唯一地度量体积,<u>我们约定,取棱长等于单位长的立方体作为体积单位</u>(与它对应的数是1),于是任何体积的度量数就是这体积与单位体积的比值.

到此,跟在§1.27相仿,证明一个命题:底相等的两个长方体体积之比等于它们的高之比.

然后,仿照那里证明:两个长方体体积之比,等于三维的乘积之比.

① 这事实是可以证明的,参看阿达玛著,朱德祥译《初等几何》下册附录F.上海科技出版社1966年第一版.

最后,引进体积单位,得出

定理 1　长方体体积等于长阔高三维的乘积 .

系　立方体体积等于一棱的立方 .

这样就奠定了求立体的体积的基础 .

有同一体积的立体称为等积的 .

§4.13.1　祖　原理·棱柱体积和面积

为了以后引用方便,我们及早介绍大约 15 个世纪以前我国伟大数学家祖冲之的儿子祖　用以准确算出球的体积的原理 .这原理国外称为卡瓦利尔(B .Cavalieri, 1598—1647) 原理 .当然,我们下面介绍求球体积的方法,没有引用祖的原法[①] .

祖　原理: 设两立体夹在二平行面 α、β 之间(图 4.56), 若以介于 α、β 间的任一平行面 γ 截之,所得截面积恒相等,则此两立体等积 .

设给了一个平行六面体和一个长方体,假设它们的高相同且底面积相等,那末把它们置于上下两底所在平面 α、β 之间,以平行于底面的任一平面截它们,截面等于各自的底面,当然截面积相等 .于是按祖　原理得出结论:它们的体积相等 .故由定理 1 得

图　4.56

定理 2　平行六面体的体积等于底面积乘高 .

将平行六面体 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ 用对角面一剖为二(图 4.57), 两部分底等积,高相同,所以又得

① 参考编者《初等几何复习及研究》(立体几何)附录(二)祖　求球体积法,人民教育出版社 1980 年版 .

定理 3 三棱柱体积等于底面积乘高.

由于任意的棱柱可用对角面分解成三棱柱之和(图 4.58),由定理 3 得

定理 4 棱柱体积等于底面积乘高.

图 4.57　　　图 4.58

现在我们来求棱柱的侧面积.棱柱的侧棱一般不垂直于两底面,所以叫斜棱柱,当棱垂直于底面时,称直棱柱.当直棱柱的底是正多边形时,称正棱柱.图 4.59 上 $ABC\cdots EA_1B_1C_1\cdots E_1$ 表一斜棱柱,用一个垂直于棱的平面一截,所得多边形 $PQR\cdots T$ 称为直截面.

各侧面可看作以相等的侧棱为底的平行四边形,高就是直截面的各边.所以棱柱侧面积是

$$S_{侧} = AA_1 \cdot PQ + BB_1 \cdot QR + \cdots EE_1 \cdot TP$$
$$= AA_1(PQ + QR + \cdots + TP).$$

图 4.59

定理 5 棱柱的侧面积等于直截面周长跟侧棱的积.

系 直棱柱的侧面积等于底面周长跟侧棱的积.

要求全面积或表面积,在 $S_{侧}$ 上加底面积的二倍.

§4.13.2　棱锥

将平面上一多边形 $ABC\cdots L$ 各顶点跟平面外一点 P 相连,得一棱锥或角锥 $P\text{-}ABC\cdots L$, P 是锥顶,多边形是底面,以 P 为顶点的三角形 PAB、PBC、…是侧面.顶点到底面的距离是棱锥的高.

底面是正多边形且各侧棱相等的锥称为正棱锥.正棱锥各侧面是相等的等腰三角形.这些三角形的高称为斜高.

图　4.60

定理 6　正棱锥的侧面积等于底面周长与斜高乘积的一半.

证:设 $P\text{-}ABC\cdots L$(图 4.60)是正棱锥, l 为斜高.则其侧面积是

$$S_{侧} = S_{PAB} + S_{PBC} + \cdots + S_{PLA}$$
$$= \frac{1}{2}(AB + BC + \cdots + LA)\,l.$$

如果要求表面积,再加上底面积.

定理 7　棱锥被平行于其底面的平面所截,截口多边形相似于底面,它们面积的比等于从锥顶到截面的距离与锥高的平方之比.

证:设 $P\text{-}ABC\cdots L$(图 4.60)是任意棱锥,底面的平行面 α 截它于多边形 $A'B'C'\cdots L'$.从顶点作底面的垂线,它与底面及 α 分别交于 H 及 H'.

由于 α 平行底面,显见截口多边形与底面多边形的边两两平行,两多边形的角对应相等,且

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{PB'}{PB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{PC'}{PC} = \cdots = \frac{PL'}{PL} = \frac{L'A'}{LA} = \frac{PA'}{PA}.$$

从相似直角△$PA'H'$和△PAH,可知两相似多边形相似比等于

$$\frac{PA'}{PA}=\frac{PH'}{PH}.$$

所以

$$\frac{S_{A'B'C'\cdots L'}}{S_{ABC\cdots L}}=\frac{PH'^2}{PH^2}.$$

系 设两个棱锥的底面积和高分别相等,则以距底同一高度的平行平面截之,截面积也相等.于是按祖 原理,两棱锥体积相等.

定理 8 设三棱锥底面积为 S,高为 h,则体积为

$$V=\frac{1}{3}Sh.$$

证:设 $P-ABC$ 是三棱锥(图 4.61).作 AD、CE 与 BP 同向平行且相等,得出一个三棱柱 $ABCDPE$,按定理 4,它的体积是 Sh.

这三棱柱可看作以 P 为顶点的三个棱锥之和:

$$V_{ABCDPE}=V_{P-ABC}+V_{P-ACD}+V_{P-EDC}.$$

图 4.61

右端后两锥等底同高,所以体积按上面的系是相等的.最后的锥 V_{P-EDC}可以看做以 C 为顶,以△EDP 为底.此锥 $C-EDP$ 跟所给的锥 $P-ABC$ 是等底等高,所以体积也相等.

所以

$$V_{ABCDPE}=3V_{P-ABC},$$

即

$$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}V_{ABCDPE}=\frac{1}{3}Sh.$$

证完.

由于任意的棱锥可分解成三棱锥的和,所以有

系 棱锥的体积 V 等于底面积 S 跟高 h 乘积的 1 3:

$$V_{锥}=\frac{1}{3}Sh.$$

定理 9　设三棱锥 $S-ABC$ 的三条侧棱长为 a、b、c,侧棱两两的夹角为 α、β、γ,求证这棱锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}abc\quad \sin\varphi\sin(\varphi-\alpha)\sin(\varphi-\beta)\sin(\varphi-\gamma),$$

其中 φ 表三个面角 α、β、γ 的半和:

$$\varphi=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).$$

证:设点 C 在 SAB 面(图 4.62)上的射影为 H,H 在 SA 上的射影为 D,则由三垂线定理,$CD\perp SA$.

这样,在以 S 为顶点的三面角中,面角 α 所对的二面角是

图　4.62

$$\alpha'=\angle B\cdot SA\cdot C=\angle HDC.$$

且
$$HC=CD\cdot\sin\alpha'=c\sin\beta\sin\alpha'$$

由§4.9.4 的公式(1)有

$$\cos\alpha'=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

由于 $0<\alpha'<\pi$,故 $\sin\alpha'>0$,

$$\sin\alpha'=\quad 1-\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}^{2}$$

$$=\frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\qquad \begin{matrix}(\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)\\(\sin\beta\sin\gamma-\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)\end{matrix}$$

$$=\frac{2}{\sin\beta\sin\gamma}\qquad [\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)][\cos(\beta-\gamma)-\cos\alpha]\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{2}{\sin\beta\sin\gamma}\qquad \begin{matrix}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\\\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\end{matrix}$$

$$= \frac{2}{\sin\beta\sin\gamma} \quad \sin\phi\sin(\phi - \alpha)\sin(\phi - \beta)\sin(\phi - \gamma) .$$

到此得所求锥体积为

$$V = \frac{1}{3}\triangle SAB\text{面积}\cdot HC = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\sin\gamma\cdot c\sin\beta\sin\alpha'$$

$$= \frac{1}{3}abc \quad \sin\phi\sin(\phi - \alpha)\sin(\phi - \beta)\sin(\phi - \gamma) .$$

可注意此公式与已知三角形三边求面积,以及已知圆内接四边形的四边求面积的公式的类似之处 .

§4.13.3　棱台

棱锥以平行于底面的平面去截,介于底面和截面间的部分称为棱台(或平截角锥或角锥台) .原来的底称为下底,截面称为上底 .两底是相似形 .两底间的距离是高 .各侧面是梯形,相邻侧面的交线是侧棱 .

若原来的棱锥是正棱锥,则所得为正棱台 .正棱台各侧面是相等的等腰梯形 .这些等腰梯形的高是正棱台的斜高 .棱台也因侧棱数目称为三棱台、四棱台等 .

定理 10　正棱台的侧面积等于上下两底周长的半和与斜高的乘积 .

定理 11　设棱台两底的面积是 S、S_1,高是 h,则体积是

$$V_{台} = \frac{h}{3}(S + \quad SS_1 + S_1) .$$

证: 以 P 表原先棱锥的顶点,即棱台各侧棱的会合点(图 4.63) .以 x 表 P 到上底的距离 .棱台是两个棱锥之差,它们的底分别是 S 和 S_1,高分别是 $h + x$ 和 x .由锥体积公式,

图　4 .63

$$V_{台} = \frac{1}{3}S(h+x) - \frac{1}{3}S_1 x = \frac{h}{3}S + \frac{x}{3}(S - S_1).$$

由§4.13.2定理7,

$$\frac{S}{S_1} = \frac{h+x}{x} = 1 + \frac{h}{x},$$

从而
$$x = \frac{S_1}{S - S_1}h.$$

回代得

$$V_{台} = \frac{h}{3}[S + (S + S_1)S_1] = \frac{h}{3}(S + SS_1 + S_1).$$

证完.

<u>注意</u>: 1°设 $S_1 = 0$,棱台就是棱锥,这时有

$$V_{锥} = \frac{1}{3}Sh,\quad S\text{表锥底面积},\quad h\text{表锥高};$$

2°设 $S_1 = S$,棱台就是棱柱,这时有

$$V_{柱} = Sh,\quad S\text{表柱底面积},\quad h\text{表柱高}.$$

§4.13.4　圆柱

给了一个直圆柱,设半径为 r,高为 h.要求它的侧面积和体积 这时可作底圆的内接正 n 边形 $ABC\cdots L$ 和它的内接棱柱 $ABC\cdots LA_1B_1C_1\cdots L_1$ (图4.64).按定理5,棱柱侧面积是

$$(AB + BC + \cdots + LA)h.$$

当 $n \to \infty$ 时,底面多边形周界趋于圆周 $2\pi r$,所以<u>圆柱侧面积是</u>

$$\underline{S_{侧} = 2\pi rh}.$$

表面积是 $\underline{S_{表}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \underline{2\pi r(h+r)}$.

图 4.64

仿此,取底面多边形面积的极限得圆

面积 πr^2,按定理 4,内接棱柱体积等于底面积乘高,这底面积趋于圆面积 πr^2.所以圆柱体积是

$$\underline{V = \pi r^2 h}.$$

从直观上讲,圆柱面沿一条母线切开,展开在平面上得一矩形,底是圆周长 $2\pi r$,高是 h.这是记这公式 $S_{侧} = 2\pi rh$ 的简单办法.

§4.13.5 圆锥

给了一个直圆锥,底半径是 r,母线长是 l,高是 h.要求侧面积和体积.

我们用直观法求侧面积.沿一条母线切开圆锥面,展开在平面上得一扇形(图 4.65).扇形半径等于母线长 l,扇形弧长等于锥底圆周长 $2\pi r$,所以扇形中心角 ϕ(以弧度为单位)可以算出来,因三者的关系是

图 4.65

$$2\pi r = l\phi.$$

圆锥侧面积即扇形面积 S,按扇形面积公式有

$$S = \frac{1}{2} l^2 \phi = \frac{l}{2} \cdot l\phi = \pi r l.$$

所以 $$\underline{圆锥侧面积 = \pi r l}$$

$$\underline{全面积 = \pi r(l + r)}.$$

要求圆锥体积,可仿照圆柱的场合,作其内接正 n 棱锥,再让 $n\to\infty$以求极限,仍得

$$\underline{V_{圆锥}} = \frac{1}{3} 底面积 \times 高 = \underline{\frac{1}{3}\pi r^2 h}.$$

§4.13.6　圆台

直圆锥被平行于底面的一平面所截，得一圆锥台或圆台．设其两底半径为 r、r_1，高为 h，母线长为 l．要求它的侧面积和体积．

将圆台沿一母线切开，展开在平面上（图 4.66），这是两个扇形的差，半径各为 $l+l_1$ 和 l_1，弧长各为 $2\pi r$ 和 $2\pi r_1$，中心角记为 ϕ（以弧度为单位）．这展开图的面积是

$$S=\pi r(l+l_1)-\pi r_1 l_1=\pi rl+\pi(r-r_1)l_1.$$

图　4.66

考虑中心角（以弧度为单位）与弧长的关系，又有

$$2\pi r=(l+l_1)\phi,\qquad 2\pi r_1=l_1\phi.$$

两式相除以消去 ϕ 得

$$(r-r_1)l_1=r_1 l.$$

代入 S 中得　　$S=\pi rl+\pi r_1 l=\pi(r+r_1)l.$

所以对于圆台，

$$\underline{S_{侧}=\pi(r+r_1)l.}$$

圆台体积可以看作两个圆锥体积之差，一个的底半径为 r，高为 $h+h_1$（图 4.66）；另一底半径为 r_1，高为 h_1．所以

$$V=\frac{\pi}{3}r^2(h+h_1)-\frac{\pi}{3}r_1^2h_1=\frac{\pi}{3}r^2h+\frac{\pi}{3}(r^2-r_1^2)h_1.$$

由相似三角形，

$$\frac{r}{r_1}=\frac{h+h_1}{h_1}=1+\frac{h}{h_1},$$

由此得
$$(r-r_1)h_1=r_1h.$$

代入 V 的表达式中,

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h+\frac{\pi}{3}(r+r_1)\cdot(r-r_1)h_1$$
$$=\frac{\pi}{3}r^2h+\frac{\pi}{3}(r+r_1)r_1h,$$

所以圆台体积是

$$\underline{V=\frac{\pi}{3}h(r^2+rr_1+r_1^2).}$$

当 $r_1=0$ 时,这是圆锥体积;

当 $r_1=r$ 时,这是圆柱体积.

§4.13.7 拟柱体积

拟柱是这样一种多面体,它的所有顶点在两个称为底的平行平面上,它的侧面不是三角形便是梯形.两底间的距离叫做高.与两底平行且等距的截面称为中截面.

棱柱、棱锥、棱台都是拟柱的特例.

设拟柱两底面积为 S 和 S_1,中截面面积为 M,高为 h,那末拟柱的体积是由下面的公式表达的:

$$V_{拟柱}=\frac{h}{6}(S+4M+S_1).$$

证:在中截面上任取一点 O(图 4.67),到各顶连线,将拟柱分解成以 O 为公共顶点的三种类型的棱锥之和,一种以上底为底面,一种以下底为底面,一种以各个侧面为底面.这三种棱锥的体积之和就是拟柱的体积.

前两种棱锥的体积分别是

$$V_1 = \frac{1}{3} S \cdot \frac{h}{2}, \quad V_2 = \frac{1}{3} S_1 \cdot \frac{h}{2}.$$

现在来计算以一个侧面为底的棱锥的体积.倘若一侧面是四边形,连对角线分解成两个三角形.因此我们取 V_{O-ABC} 作为解剖麻雀的典型.以 DE 表$\triangle ABC$ 的中位线,则 $S_{ABC} = 4S_{ADE}$.所以

图　4.67

$$V_{O-ABC} = 4V_{O-ADE} = 4V_{A-ODE} = 4 \cdot \frac{1}{3} S_{ODE} \cdot \frac{h}{2} = \frac{4}{6} h \cdot S_{ODE}.$$

所以

$$V_{\text{拟柱}} = V_1 + V_2 + \frac{4}{6} h \sum S_{ODE} = \frac{1}{6} hS + \frac{1}{6} hS_1 + \frac{4}{6} hM$$

$$= \frac{h}{6}(S + 4M + S_1).$$

证完.

按定义,棱柱、棱锥、棱台都是拟柱.我们来看,在这些场合,拟柱的体积公式各变成什么:

1°棱柱: $V = \dfrac{h}{6}(S + 4M + S_1)$

$$= \frac{h}{6}(S + 4S + S) = Sh.$$

2°棱锥: $V = \dfrac{h}{6}(S + 4M + S_1)$

$$= \frac{h}{6}(S + S + 0) = \frac{1}{3} Sh.$$

图　4.68

3°棱台: 设两底的一条对应边为 a、b(图 4.68),则因三个多边形相似,

$$\frac{S}{a^2} = \frac{M}{m^2} = \frac{S_1}{b^2}, \qquad m = \frac{a+b}{2}.$$

所以
$$\frac{\sqrt{S}}{a}=\frac{\sqrt{M}}{m}=\frac{\sqrt{S_1}}{b}=\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{S}+\sqrt{S_1})}{\frac{1}{2}(a+b)}.$$

推出 $2\sqrt{M}=\sqrt{S}+\sqrt{S_1}$, $4M=S+S_1+2\sqrt{SS_1}$.

从而
$$V=\frac{h}{6}(S+4M+S_1)=\frac{h}{6}(2S+2S_1+2\sqrt{SS_1})$$
$$=\frac{h}{3}(S+\sqrt{SS_1}+S_1).$$

跟过去得到的一致.

§4.13.8 球

半圆绕其直径旋转一周产生球面.球面介于两平行平面间的部分称为球带.例如地球表面南纬 23.5°与北纬 23.5°这两纬度圈构成地球上的所谓热带.两截面间的距离称为球带的高.所截两圆称为球带的底.特别当这两平面之一切于球时,得出单底带,单底带呈冠状,因此称为球冠.所以球冠是球带的特例.当两平行面都切于球时,球带就扩大成全球面了.只要会算球带的面积,就会算球冠面积和球面积.

球带是一段圆弧绕一条直径旋转得出的.设作这圆弧的内接折线,弧的两端为其端点,当折线的边数无限增大且使每一边长趋于零,这内接折线的旋转面积有一个极限,称为球带的面积.

我们先介绍圆柱、圆锥、圆台侧面积的一个统一表达式.

引理 以 h 表圆柱、圆锥或圆台的高,以 l 表示其一母线的中垂线介于这母线跟旋转轴间的长度,那末这三种旋转体的侧面积都可写作 $2\pi lh$.

证: 1°圆柱 以 AB 表一母线(图 4.69(1)), AB 的中垂线 MO 交轴 XY 于 O, $l=MO=$柱半径 r.

$$S_{侧} = 2\pi rh = 2\pi lh .$$

图 4.69

2° **圆锥** 符号同上,以 N、D 表 M、B 在轴 XY 上的射影(图 4.69(2)).锥底半径 $r = BD = 2MN$.两直角$\triangle ABD \sim \triangle MON$(对应边互垂),所以

$$\frac{AB}{MO} = \frac{AD}{MN} \quad 或 \quad MN \cdot AB = MO \cdot AD .$$

$$S_{侧} = \pi \cdot BD \cdot AB = 2\pi \cdot MN \cdot AB = 2\pi \cdot MO \cdot AD = 2\pi lh .$$

3° **圆台** 作 $AE \perp BD$,圆台两底半径为 AC 及 BD(图 4.69(3)).两直角$\triangle ABE \sim \triangle MON$(对应边互垂),跟上面一样得

$$MO \cdot AE = MN \cdot AB .$$

$$S_{侧} = \pi(AC + BD)AB = 2\pi \cdot MN \cdot AB = 2\pi \cdot MO \cdot AE = 2\pi lh .$$

现在转入球带面积的计算.

定理 12 球带面积 $S_{带} = 2\pi rh$, r 表球半径, h 表带高.

证:假设球带是由半圆的一部分(也可能是半圆本身)A_1A_{n+1}绕直径 XY 旋转而得(图 4.70).用点 A_2、A_3、…、A_n 将它分成 n 等份,因此内接折线的 n 段都相等,每一段的中垂线都通过圆心 O,且这些中垂线段都等长,仍写作 l.折线各段在 XY 上的射影长记为 $h_1, h_2, \cdots, h_n$.则

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \text{带高 } h .$$

弦 A_1A_2、A_2A_3、…、A_nA_{n+1} 绕 XY 旋转产生的面积是圆柱、圆锥或圆台的侧面积,其和为

$$S_n = 2\pi l h_1 + 2\pi l h_2 + \cdots + 2\pi l h_n = 2\pi l h .$$

当折线的段数 n 无限增大时, h 为定数,弦心距 l 趋于半径 r .所以 S_n 有极限:

$$S_{\text{球带}} = 2\pi r h .$$

注意球冠是球带的特例,其面积也由此式表达 .

图　4.70

系　同球的两个球带面积之比等于它们的高之比 .

定理 13　球面积等于大圆面积的四倍 .

证: 上面说过,令 $h = 2r$ 即得球面积:

$$S_{\text{球}} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 = \pi D^2, \quad D \text{ 表直径} .$$

下面求球扇形、球、球缺的体积 .

设 OAB 是圆扇形, O 表圆心(图 4.71), XOY 是圆平面上通过中心但不通过扇形内部的直线 .将扇形 OAB 绕 XY 为轴旋转一周得出一个几何体 $O - ABA'B'$称为球扇形 .球扇形是由两个(由半径 OA 和 OB 旋转生成的)圆锥面以及(由弧 AB 旋转生成的)球带 $ABA'B'$围成的 .这球带称为球扇的底 .底上任一点到球心的距离当然等于半径 r .

如果半径 OB 跟轴 XY 重合,那末球扇的底面就是一个球冠 .若 AB 是半圆弧 .则球扇是整个球体 .

定理 14　设球半径为 r, 球扇的底面(球带或球冠)面积为 $S_{\text{带}}$,则球扇的体积是

$$V_{\text{球扇}} = \frac{1}{3} S_{\text{带}} \cdot r .$$

图　4.71

证: 设想将球带(或球冠)分成 n 个三角形区域,以△PQR 作表征,并作成以 O 为顶点的三棱锥. n 个三棱锥的底面积记作 S_1、S_2、…、S_n,高记作 h_1、h_2、…、h_n,这 n 个小棱锥的体积之和记为 V_n:

$$V_n = \frac{1}{3}(S_1 h_1 + S_2 h_2 + \cdots + S_n h_n).$$

令 n 充分增大并使得全部三角形边长趋于零,这时各个 h_i 趋于球半径 r, V_n 趋于

$$\frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) r.$$

括号内的量趋于球带(或球冠)的面积 $S_{带} = 2\pi rh$.所以

$$V_{球扇} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r^2 h.$$

当 $h = 2r$ 时,得

定理 15　设球半径为 r,则球体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3$.

最后,我们来求球缺的体积.

所谓球缺,是圆的一部分即弓形 $ACBA$(图 4.72)以弓形的弦

AB 的垂直平分线 XY 为轴旋转生成的几何体.弓形弧的高 $CE = h$ 称为球缺的高.

定理 16 设球半径为 r,球缺的高为 h,则球缺的体积是

$$V_{球缺} = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

证: 1° 设弓形是劣弓形, $h < r$.

这时所求体积等于扇形 $OACO$ 旋转生成的球扇体积减去 $\triangle OAE$ 旋转生成的圆锥体积.所以

图 4.72

$$V_{球缺} = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi\rho^2(r - h)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h(2r - h)(r - h) \quad (\rho^2 = EB^2 = DE \cdot EC)$$

$$= \frac{\pi}{3} h[2r^2 - (2r^2 - 3rh + h^2)] = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right).$$

2° 设弓形是优弓形 $ADBA$,这时球缺的高 $h' = 2r - h > r$.这大于半球的球缺体积等于全球体积减去刚才的球缺体积,

$$V_{球缺} = \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) \quad (以\ h = 2r - h'\ 代入)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi(2r - h')^2\left(r - \frac{2r - h'}{3}\right)$$

$$= \pi h'^2\left(r - \frac{h'}{3}\right).$$

这跟上面公式同形,只是以 h' 代替了 h.

习题二十五

1. 长阔高之和为定值的长方体中,证明表面积最大的是立方体.

2. 设棱柱的底是梯形,证明它的体积等于相平行的两侧面面积的半和乘以这两面间的距离.

3. 在三条平行但不共面的直线上各任取相等的线段,证明这样形成的三棱柱的体积以及侧面积都是常数.

4. 已知三棱柱的底面积为 S,三个侧面面积为 m、n、p,求体积.

5. 连接平行六面体内任一点到八顶点构成六个棱锥,证明三双相对的棱锥体积之和相等.

6. 证明棱锥侧面积大于底面积.

7. 三棱锥侧棱互相垂直,其长为 a、b、c,求体积.

8. 设四面体的三侧面等积,证明从底面上任一点到三侧面的距离之和为常数.

9. 在两条异面直线上各截取一定长线段,证明以其端点为顶点的四面体体积为常数,与所取线段的位置无关.

10. 证明:通过四面体一双对棱中点的平面将它分为两个等积部分.

11. 从四面体 $ABCD$ 底面 BCD 内一点 O 引平行于 AB、AC、AD 的直线,交各侧面 ACD、ADB、ABC 于 B'、C'、D',证明

$$\frac{OB'}{AB}+\frac{OC'}{AC}+\frac{OD'}{AD}=1.$$

12. 在四面体内求一点,使到各顶点的连线分原形为四个等积四面体.

13. 设两个四面体有一个三面角相等,证明其体积之比等于相等三面角的三棱的乘积之比.

14. 一直线通过四面体 $ABCD$ 顶点 A 而与三面角 A 的三面成等角,它与对面 BCD 的交点为 A'.证明三角形 $A'BC$、$A'CD$、$A'DB$ 面积之比,等于三角形 ABC、ACD、ADB 面积之比.

15. 设正四棱台两底棱长为 a、b,求其高使两底面面积之和等于侧面积.

16. 我国古代的《九章算术》中称为“刍童”的是一平截长方楔,如图 4.73 所示.设上底矩形长阔各为 a、b,下底长阔各为 c、d,高为 h,证明《九章》“刍童”体积公式

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c].$$

并验证这与拟柱求积公式相一致.

图 4.73

17. 证明四面体中,一个二面角的平分面将对棱所

分成两线段的比,等于夹这二面角的两个面的面积之比 .

18. 圆柱半径为 r,高为 h,一平面平行于其轴截底面所得的弦长等于半径,求圆柱被这平面所分成两部分的体积和表面积 .

19. M、N 是△ABC 两边 AB、AC 的中点 .

1°以 MN 为旋转轴,求三角形两部分旋转体积之比;

2°以 BC 为轴求△ABC 和四边形 $BMNC$ 的旋转体积之比 .

20. 半径为 r 的球作一外切圆锥,其底半径为 R 而高为 h,证明

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{2}{rh}.$$

21. 直角三角形中,以两直角边和斜边为轴所得旋转体积分别是 V_1、V_2、V,证明

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{1}{V^2}.$$

22. 三角形三边为轴的旋转体积分别是 V_a、V_b、V_c,求三边之长 .

23. 设地球半径为 4000 哩,北温带之高(两临界纬度所在平面间的距离)是半径的 13 25,求北温带的面积和它所占全球面积的百分比 .

24. 设球半径为 r,高出球面为 h 之处可见的球面积是多少?

25. 通过第一球中心任作第二球使被第一球所截,证明不论第二球半径为何,第二球被第一球所截的球冠面积为常数 .

26. 一平面截球面所得二部分的面积之差等于截面面积,求平面与球心的距离 .

27. 凸透镜的厚度为 d,两面所属球半径为 R 和 r,证明它的表面积是

$$\pi d[4Rr - d(R + r)] \quad (R + r - d).$$

28. 两球相外切,其半径为 r、r',一圆锥外切于这两球,求介于三曲面间的体积 .