浙江大学 2014－2015 学年春夏学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学系，任课教师：__________

考试试卷：A 卷√、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭√、开卷（请在选定项上打√），允许带计算器入场

考试日期：2015 年 7 月 8 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

请注意：本试卷共六大题，四页，两大张。

请勿将试卷拆开或撕页！如发生此情况责任自负！

考生姓名：__________ 学号：__________ 专业/大类：__________

题序	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
评卷人							

注：$\Phi(1)=0.84$，$\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(2)=0.98$，$\Phi(3.36)=0.9996$，$t_{0.025}(8)=2.31$，$t_{0.005}(8)=3.36$，$\chi^2_{0.05}(2)=5.991$，$\chi^2_{0.05}(3)=7.815$，$F_{0.05}(2,22)=3.44$，$F_{0.05}(3,22)=3.05$，$F_{0.05}(2,6)=5.14$.

一． 填空题（每小格 3 分，共 42 分）：

1. 设随机事件 A,B,C 相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=x$，（1）若 $x=0.4$，则 $P(A-B)=$ 0.24；（2）若 $P(A\cup B\cup C)=0.973$，则 $x=$ 0.7.

2. 某公交车站单位时间等车的人数 X 服从泊松分布 $\pi(\lambda)$，则 X 的分布函数值 $F(1.5)=$ $(1+\lambda)e^{-\lambda}$，若独立观察 5 个单位时间，等车人数分别为 2，5，3，6，0，则 λ 的似然函数 $L(\lambda)=$ $\lambda^{16}e^{-5\lambda}/1036800$，$\lambda$ 的极大似然估计值为 3.2.

3. 某小店开门到首个顾客到达所用的时间 X（单位：分钟）的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}0.2e^{-0.2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，则在开门后 10 分钟内首个顾客到达的概率为 $1-e^{-2}$，若开门后 5 分钟内没有顾客到达，则在接下来的 5 分钟内仍没有顾客到达的概率为 e^{-1}.

4. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛到 $\mu^2+\sigma^2$，$\sum_{i=1}^{9} X_i$ 与 $\sum_{i=4}^{19} X_i$ 的相关系数为 0.5，$\dfrac{2\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mu)^2}{\sum_{i=4}^{9}(X_i-\mu)^2} \sim$ $F(3,6)$ 分布（写出参数），若取得容量是 9 的样本，计算得样本均值 $\bar{x}=1.896$，样本标准差为 $s=0.8$，则假设 $H_0:\mu=1, H_1:\mu\neq 1$ 的 P_值为 0.01，若显著水平为 0.05，则应该拒绝还是接受原假设 拒绝. $P\_=2P\left(t(8)\geq \left|\frac{1.896-1}{0.8/\sqrt{9}}\right|\right)$

5. 一个四面体各面标有 1，2，3，4，现抛掷 200 次，1，2，3，4 面出现次数分别为 60，58，38，44，若计算得 $(60^2+58^2+38^2+44^2)/50=206.88$。则在显著水平为 0.05 下检验假设“$H_0$:该四面体匀称”，应该(拒绝/接受)原假设？答：接受，理由：$\chi^2=6.88<\chi^2_{0.05}(3)=7.815$

二.（10 分）设三种不同型号灯的寿命（单位：千小时）X，Y 与 Z 相互独立，均服从正态分布，方差相等，$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，$Z\sim N(\mu_3,\sigma^2)$。现从这三个总体中分别抽取容量为 8，9，8 的样本，数据如下表所示：

	寿命数据									平均	方差
A 型号 X	3.33	3.73	3.29	3.12	2.98	3.08	3.18	3.77		3.31	0.0862
B 型号 Y	2.94	3.44	3.54	2.92	3.31	3.51	3.28	3.58	3.00	3.28	0.0701
C 型号 Z	3.29	3.42	3.62	3.67	3.72	3.66	3.75	3.51		3.58	0.0256

（1）求全部数据的样本均值 $\bar{x}=$ 3.3856，并完成方差分析表； （2分）

方差来源	平方和	自由度	均方	F
类型	0.448416	2	0.224208	3.671711
误差	1.3434	22	0.061064	
总和	1.791816	24	/	

$S_A=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_{i\cdot}-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{r} n_i(\bar{X}_{i\cdot}-\bar{X})^2=0.448416$

$S_E=S_T-S_A=1.3434$

（2）在显著水平 0.05 下检验假设 $H_0:\mu_1=\mu_2=\mu_3, H_1:\mu_1,\mu_2,\mu_3$ 不全相等．并说明理由． （7分）

检验统计量 $F_{比}=\dfrac{MS_A}{MS_E}$

H_0 的拒绝域为. $F_{比}=\dfrac{MS_A}{MS_E}\geq F_\alpha(r-1,n-r)$

$\because F_{比}=3.671711>F_{0.05}(2,22)=3.44$

$\therefore$ 拒绝 H_0，即认为 μ_1,μ_2,μ_3 不全相等. （10分）

三.（9 分）盒中有 3 个红球，4 个白球，第 1 次从中随机取一球，不放回，第 2 次从剩下的球中一次性取两个球，X 表示第 1 次取到的红球数，Y 表示第 2 次取到的红球数. 求 (X,Y) 的联合分布律及 Y 的边际分布律.

X与Y的取值范围分别为"0,1"与"0,1,2"

$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j|X=i)$

$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0|X=0)=\frac{4}{7}\times\frac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\frac{4}{35}.$

其余类推.

X\Y	0	1	2	$P_{i\cdot}$
0	4/35	12/35	4/35	4/7
1	6/35	8/35	1/35	3/7
$P_{\cdot j}$	2/7	4/7	1/7	

(5+2+2分)

四.（15 分）某人喜欢长跑，基本上每天跑 10 公里，假设他跑 10 公里所花时间（分钟）为 Y=40+20X，其中 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), 0<x<1,\\ 0,\ 其他.\end{cases}$（1）求他跑完 10 公里用时少于 50 分钟的概率；（2）求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$；（3）若一周跑 6 次，每天用时是相互独立同分布的，求至少有 5 次用时少于 50 分钟的概率；（4）在未来的 100 天，每天跑 10 公里所花时间为 $Y_1,\ldots,Y_{100}$，设 $Y_1,\ldots,Y_{100}$ 相互独立，与 Y 同分布，求 $\bar{Y}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}Y_i$ 的近似分布。

(1) $P(Y<50)=P(40+20X<50)=P(X<0.5)=\int_0^{0.5}2(1-x)dx=0.75$

(2) $y'=2>0$ 单调.

$h(y)=x=\frac{y-40}{20}$ $\quad f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\begin{cases}2(1-\frac{y-40}{20})\cdot\frac{1}{20}=\frac{3}{10}-\frac{y}{200}, & 0<y<60\\ 0, & 其他\end{cases}$

(3) 设 Z为一周6次跑步中用时少于50分钟的次数. 则 $Z\sim B(6,0.75)$

所求概率为 $P(Z\geq5)=P(Z=5)+P(Z=6)=C_6^5 0.75^5\times0.25+C_6^6 0.75^6\doteq0.534$

(4) $E(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot2(1-x)dx=1/3$

$E(X^2)=\int_0^1 x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot2(1-x)dx=1/6$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1/6-1/9=1/18$

$E(Y)=E(40+20X)=40+20E(X)=140/3 \quad\Rightarrow E(\bar{Y})=140/3$

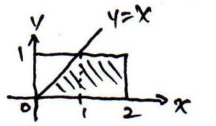
$D(Y)=D(40+20X)=D(20X)=400D(X)=200/9 \quad\Rightarrow D(\bar{Y})=2/9$

$\bar{Y}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}Y_i \overset{近似}{\sim} N(140/3,\ 2/9)$

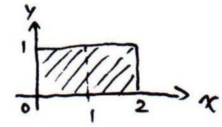
（3+3+4+5分）

五.（10 分）设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases} x-xy, & 0<x<2,0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$。

求（1）$P(X>Y)$，（2）分别求 X,Y 的边际概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 是否相互独立？说明理由。



(1) $P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_y^2 (x-xy)\,dx=\frac{23}{24}$



(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases} \int_0^1 (x-xy)\,dy=\frac{1}{2}x, & 0<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases} \int_0^2 (x-xy)\,dx=2-2y, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

可见 $f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 与 $f(x,y)$ 在平面上相等. 所以 X与Y 相互独立.

（3+2+2+3分）

六.（14 分）设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases} \frac{8x}{\theta^2}, & 0<x\le\frac{\theta}{2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ $\theta>0$ 是未知参数，

$X_1,\ldots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$，并判断其是否为无偏估计，说明理由；（2）求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$，并判断其是否为无偏估计，说明理由.

(1) $\mu_1=E(X)=\int_0^{\theta/2} x\cdot\frac{8x}{\theta^2}\,dx=\frac{\theta}{3}$, $\theta=3\mu_1$, $\hat{\theta}=\hat{\theta}_1=3\bar{X}$.

$E(\hat{\theta}_1)=E(3\bar{X})=3E(\bar{X})=3E(X)=3\cdot\frac{\theta}{3}=\theta$. 无偏

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\prod_{i=1}^n \frac{8}{\theta^2}x_i=8^n\theta^{-2n}x_1x_2\cdots x_n$, $0<x_i<\frac{\theta}{2}$

$\ln L(\theta)=n\ln 8-2n\ln\theta+\ln(x_1x_2\cdots x_n)$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0-\frac{2n}{\theta}+0=-\frac{2n}{\theta}<0$, 单调减函数.

由定义得 θ 的极大似然估计为. $\hat{\theta}_2=2\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

记 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. $F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 4x^2/\theta^2, & 0<x\le\theta/2 \\ 1, & x>\theta/2. \end{cases}$

$F_Y(y)=[F_X(y)]^n=\begin{cases} 0, & y<0 \\ 4^n y^{2n}\theta^{-2n}, & 0<y\le\theta/2 \\ 1, & y>\theta/2 \end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases} 2n4^n y^{2n-1}\theta^{-2n}, & 0<y\le\theta/2 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

$E(\hat{\theta}_2)=E(2Y)=2E(\max(X_1,\cdots,X_n))=2\int_0^{\frac{\theta}{2}} y\cdot\frac{2n4^n y^{2n-1}}{\theta^{2n}}\,dy=\frac{2n\theta}{2n+1}<\theta$.

所以 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的有偏估计.

(4+3+4+3分)