

吉林大学 2014-2015 学年第一学期“数学分析 I”期末考试试题

共八道大题 满分 100 分 时间 150 分钟

一、(共 10 分) 叙述子数列收敛定理并利用子数列收敛定理证明 *Cauchy* 收敛准则.

二、(共 10 分) 用定义证明

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+7}{5n^2-10} = \frac{1}{5}; (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{6x^2-4} = \frac{5}{2}.$$

三、(共 15 分) 求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})^n; (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2+3k+1}{(k+2)!};$$

$$(3) \text{已知 } x_1 \in (0, \pi), x_{n+1} = \sin x_n, n \in N_+, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}.$$

四、(共 15 分) 导数计算

$$(1) \text{设 } f(x) = (1+x^2)\cos x, \text{ 求 } f^{(2015)}(x);$$

$$(2) \text{设 } y = t - \sin t, x = 1 + t^2, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2};$$

$$(3) \text{已知函数由方程 } \cos(x+y) - x^2y = 0 \text{ 确定, 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$$

五、(共 20 分) 计算下列各题:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}; (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}; (3) \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x});$$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有连续的二阶导数, 且 $f'(a) \neq 0$, 求

$$\lim_{x \rightarrow a} [\frac{1}{f(x) - f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)}] \text{ 的值.}$$

六、(共 10 分) 设函数 $f(x) = (x+6)e^{\frac{1}{x}}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 的凹凸区间;

(3) 求函数 $f(x)$ 的渐近线.

七、(共 10 分) 分别讨论在 $\alpha = -1, 0, 1$ 时, $f(x) = x^\alpha \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上的一致连续性.

八、(共 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二次可导, 且 $f(0) = -2, f(1) = 1, \min_{x \in [0, 1]} f(x) = -3$. 求证:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $(3\xi - 1)f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$;

(2) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) \geq 18$.