第 12 讲：幂级数与零点 2019.4.2

1. 设正数列 $\{a_n\}$ 单调收敛到 0, 证明

(1). 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq 1$.

(2). 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\partial D(0,R) \setminus \{R\}$ 上处处收敛.

2. 是否存在满足下面条件, 在原点附近全纯的函数 $f(z)$?

(1). $f(\frac{1}{2n-1}) = 0$, $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}$, $\forall n \geq 1$.

(2). $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ $\forall n \geq 1$.

(3). $f(\frac{1}{2n-1}) = f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 1$.

3. 假设 $f(z)$ 在复平面上全纯, 在 $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ 上取实数值, 证明 $f(z)$ 必然在实轴上取实数值.

4. 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 对于 $r \in (0,R)$, 定义 $A(r) = \max_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$. 证明对任意 $n \geq 1$, 成立

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\mathrm{Re} f(re^{i\theta})] e^{-in\theta} d\theta; \quad |a_n| r^n \leq 2A(r) - 2\mathrm{Re} f(0).$$

5. 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $D(0,R)$ 上全纯，将 $D(0,R)$ 一一映为区域 Ω，证明 Ω 的面积为

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 R^{2n}.$$

6. 假设 f 在 $D = D(0,R)$ 上全纯，可以展成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \forall z \in D.$$

记其部分和函数 $S_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$, 取 $\rho \in (0,R)$, 证明

$$|f(z) - S_m(z)| \leq \frac{\|f\|_{D_\rho} |z|^{m+1}}{\rho^m(\rho - |z|)}, \ \forall z \in D_\rho = D(0,\rho).$$

(注：上式不仅可以说明 S_m 内闭一致收敛于 f, 而且给出收敛的速度估计)