华南理工大学 2010-2011 学年第一学期“解析几何”期末考试 B

参考解析

一、简答题（共 32 分）

（1）设$|\vec{e}|=1$，$\vec{e}\perp\vec{r}$，求将$\vec{r}$绕$\vec{e}$右旋角度β所得到的向量.

解：设其为$\vec{x}$，则有：$\vec{x}=\vec{r}\cos\theta+\vec{e}\times\vec{r}\sin\theta$.（右旋即逆时针）

（2）求将曲线Γ：$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转所得旋转曲面的方程.

解：为$f(\sqrt{x^2+y^2},z)f(-\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

（3）求直线$l:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$与平面$\pi:2x+y-z-3=0$的交点坐标.

解：直线的坐标式参数方程为：$\begin{cases}x=-t\\y=1+t\\z=1+2t\end{cases}$。设交点处对应的参数为$t_0$，则有：

$2(-t_0)+(1+t_0)-(1+2t_0)-3=0$，解得$t_0=-1$，故所求为$(1,0,-1)$.

（4）设仿射坐标I到II的点的坐标变换公式为$\begin{cases}x=y'-2\\y=-x'+3\end{cases}$，求直线$l_1:2x-y+1=0$在坐标系$II$中的方程和直线$l_2:2x'+y'-3=0$在坐标系$I$中的方程.

解：直接代入可得所求为：$x'+2y'-6=0$和$x-2y+5=0$.

（5）求通过平面$4x-y+3z-1=0$和$x+5y-z+2=0$的交线且经过原点的平面方程.

解：由条件知，可设所求的平面为：$4x-y+3z-1+k(x+5y-z+2)=0$.

由其过原点知：$-1+2k=0$，$k=\dfrac{1}{2}$.

故有$2(4x-y+3z-1)+x+5y-z+2=0$，即为$9x+3y+5z=0$.

（6）求二次曲线$x^2-2xy+y^2-1=0$的渐近方向和曲线类型.

解：设$u=(m,n)$为其主方向，则有$u\,//\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}u^T$，得：$m(m+n)=n(n+m)$.

解之得：$u_1=(1,1)$与$u_2=(1,-1)$.而由$I_2=I_3=0$，$K_1=-2<0$知原曲线一对平行直线.

（7）平面上，设 x' 轴和 y' 轴在原坐标系中的方程分别为 $12x-5y-2=0$ 和 $5x+12y-29=0$,且新，旧坐标系都是右手直角坐标系，求 I 到 II 的点的坐标变换公式.

解：由 $\begin{cases}12x-5y-2=0\\5x+12y-29=0\end{cases}$ 得新坐标系的原点为 $(1,2)$，

故坐标变换公式为：$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

（8）求单叶双曲面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 上经过点 $P(0,-2,0)$ 的直母线方程.

解：其两族直母线的方程为：$\begin{cases}s(\frac{x}{3}+\frac{z}{4})=t(1-\frac{y}{2})\\t(\frac{x}{3}-\frac{z}{4})=s(1+\frac{y}{2})\end{cases}$ 和 $\begin{cases}s(\frac{x}{3}+\frac{z}{4})=t(1+\frac{y}{2})\\t(\frac{x}{3}-\frac{z}{4})=s(1-\frac{y}{2})\end{cases}$.

代入点 $M(0,2,0)$ 后可求得满足要求的两条直母线的方程为 $\begin{cases}4x+3z=0\\y=2\end{cases}$，$\begin{cases}4x-3z=0\\y=2\end{cases}$.

二、(共 10 分) 用向量法证明：三直角棱锥的斜面面积的平方等于其他三个面的面积的平方和.

证明：设三个棱上的共起点的向量为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.则其他三个面面积平方和为：

$\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2}{4}$. 两个底边上的向量为 $\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{c}$，故底面积为：

$\frac{1}{2}|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{c})|=\frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}|$.而 $\vec{b}\times\vec{c},\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{c}$ 两两垂直.

故其平方为：$\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2}{4}$.

三、(共 12 分))按参数 λ 的值讨论曲线 $\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$ 的类型.

解：其不变量 $I_1=2\lambda, I_2=\lambda^2-1, I_3=(5\lambda+3)(\lambda-1), K_1=10\lambda-2$.

（1）$-1<\lambda<1$时，其为双曲型曲线.

①若 $\lambda=-\dfrac{3}{5}$，则其为一对相交直线；

②若 $\lambda\neq-\dfrac{3}{5}$，则其为双曲线.

（2）$-1>\lambda$或$\lambda>1$时，其为椭圆型曲线.

①若 $\lambda>1$，其为空集（虚椭圆）；

②若$-1>\lambda$，其为椭圆.

（3）$\lambda=\pm1$时，其为抛物型曲线.

①若 $\lambda=1$，其为空集（虚平行直线）；

②若 $\lambda=-1$，其为抛物线.

四、(共 12 分）求到定点与定直线(定点不在定直线上)距离之比等于常数 k>0 的点的轨迹，并根据 k 的取值范围，说明轨迹的形状.

解：设定点不在定直线上，建立坐标系，使定直线为 x 轴，定点为 $C(0,0,c),(c\neq0)$.

设动点为 $P(x,y,z)$，则由条件：$\lambda(P,C)=\lambda d(P,x轴)$，

即：$\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}=\lambda\sqrt{y^2+z^2}$.平方，得：$x^2+(1-\lambda^2)y^2+(1-\lambda^2)z^2-2cz+c^2=0$.

①当 $\lambda=1$时，得 $x^2-2cz+c^2=0$，即 $x^2=2c(z-\dfrac{c}{2})$，为抛物柱面.

②当 $\lambda\neq1$时，得 $x^2+(1-\lambda^2)y^2+(1-\lambda^2)(z-\dfrac{c}{1-\lambda^2})^2=\dfrac{c^2\lambda^2}{1-\lambda^2}$；

则当 $\lambda>1$时，此为单叶双曲面；当 $0<\lambda<1$时，此为椭球面.

五、(共 12 分）求通过直线 $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-3}$ 且与点 $p(4,1,2)$ 的距离等于 3 的平面的方程.

解：直线的一般方程为：$\begin{cases}x+1=0\\3y+2z+2=0\end{cases}$.

设所求的平面的方程为$\lambda(x+1)+\mu(3y+2z+2)=0$.

据要求，有：$\dfrac{|4\lambda+3\mu+4\mu+\lambda+2\mu|}{\sqrt{\lambda^2+9\mu^2+4\mu^2}}=3$，

故有$9(\lambda^2+13\mu^2)=25\lambda^2+81\mu^2+90\lambda\mu$，解得 $\lambda:\mu=-6:1$或$3:8$，

即所求平面为：$-6(x+1)+(3y+2z+2)=0$ 或 $3(x+1)+8(3y+2z+2)=0$

即：$6x-3y-2z+4=0$ 或 $3x+24y+16z+19=0$.

六、（共 12 分）已知空间两条异面直线间的距离为$2a$，夹角为2α，过这两条直线分别作平面，并使这两平面相互垂直，求这两个平面交线的轨迹.

解：建立坐标系：取二异面直线的公垂线作为z轴，公垂线的中点为原点O，让x轴与二异面直线夹角相等，则二直线方程为：$\begin{cases} y+tg\alpha\cdot x=0 \\ z=a \end{cases}$与$\begin{cases} y-tg\alpha\cdot x=0 \\ z=-a \end{cases}$.

过这两直线的平面为：

$\pi_1:\lambda(z-a)+u(y+tg\alpha\cdot x)=0$

$\pi_2:l(z+a)+m(y-tg\alpha\cdot x)=0$

二平面的交线为：$\begin{cases} \lambda(z-a)+u(y+tg\alpha\cdot x)=0 \\ l(z+a)+m(y-tg\alpha\cdot x)=0 \end{cases}$

$\because \pi_1\perp\pi_2$，$\therefore \lambda l+um(1-tg^2\alpha)=0$.

①当二异面直线不直交时，$|tg\alpha|\neq 1$，从上式消去λ,u,l,m，得：

$\dfrac{x^2}{a^2(ctg^2\alpha-1)}-\dfrac{y^2}{a^2(1-tg^2\alpha)}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$（单叶双曲面）此为要求的轨迹方程.

②当二异面直线直交时，则$tg\alpha=1$，此时直线方程变为：

$\begin{cases} \lambda(z-a)+u(y+x)=0 \\ l(z+a)+m(y-x)=0 \end{cases}$，$\lambda l=0$.

当$\lambda=0$时，$(1)'$为$\begin{cases} y+x=0 \\ l(z+a)+m(y-x)=0 \end{cases}$，

它的轨迹为平面$y+x=0$.

当$l=0$时，$(1)'$为$\begin{cases} \lambda(z-a)+u(y+x)=0 \\ y-x=0 \end{cases}$，

它的轨迹为平面$y-x=0$

从而当二异面直交时，动直线的轨迹为二平面：$y+x=0$与$y-x=0$.

七、(共 10 分)求顶点为$M(1,2,3)$, 轴与平面$2x+2y-z+1=0$垂直, 母线与轴夹角为$\frac{\pi}{3}$的圆锥面的方程.

解：由条件，其轴的方向向量为$u=(2,2,-1)$.设$P(x,y,z)$为圆锥面上任一点，则有：

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|(2,2,-1)\cdot(x-1,y-2,z-3)|}{|(2,2,-1)||(x-1,y-2,z-3)|}$，即：

$4[2(x-1)+2(y-2)-(z-3)]^2=9[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2]$. 得：

$7(x-1)^2+7(y-2)^2-5(z-3)^2+32(x-1)(y-2)-16(x-1)(z-3)-16(z-3)(y-2)]=0$.

即：$7x^2+7y^2-5z^2+32xy-16xz-16yz-30x-12y+78z-90=0$.