# 浙江大学 2007-2008 学年秋冬学期

## 《高等代数 I》课程期末考试试卷

开课学院：理学院，考试形式：闭卷，允许带＿＿＿＿＿入场

考试时间：2008 年 1 月 19 日，所需时间：120 分钟，任课老师：＿＿＿＿

考生姓名：＿＿＿＿＿＿学号：＿＿＿＿＿＿专业：理科试验班

| 题序 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | | | | |

1. 计算 $2n$ 阶行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & c_1 & d_1 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

2. 求解矩阵方程 $AXC + XC = A + 2E$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 设 $A, B, C$ 是数域 $\mathrm{P}$ 上的 $n$ 阶方阵，证明关于秩的 Sylvester 不等式：

$$r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

4. 假设数域 $\mathrm{P}$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 中的 $s$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 在 $V$ 的基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标分别是 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$。试证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的任一子向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_t}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组当且仅当它们的对应坐标向量组 $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \cdots, \gamma_{i_t}$ 是向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 的极大线性无关组。

5. 设 $A, B$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)+r(B)<n$，那么齐次线性方程组 $AX=O$ 和 $BX=O$ 有非零的公共解。

6. 设 $A, C$ 是正定矩阵，且矩阵方程 $AX+XA=C$ 有且只有唯一解 $B$。那么，请证明：(1) $B$ 是对称阵；(2) $B$ 是正定矩阵。

7. (i) 设 $n$ 阶方阵 $A$ 存在可逆阵 $M=(\beta_1\cdots\beta_n)$ 使得

$$M^{-1}AM=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 分别有 $r_1,\cdots,r_s$ 个。解决下列问题：

（1） 求出 $A$ 的所有特征值，说明原因；
（2） 求出 $A$ 的各个特征值的特征子空间的维数，说明原因；
（3） 证明 $A$ 的所有特征子空间的维数之和等于 $n$。

(ii) 证明，当一个 $n$ 阶方阵的所有特征子空间的维数之和等于 $n$，那么该方阵可相似对角化。

8. 试寻找正交矩阵 $U$ 使得 $U^TAU$ 为对角阵，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$。