数学系常微分方程08-09学年春夏学期期末试卷

一、（40分）求下述方程的解

1、 $y''(t)+w_0{}^2 y(t)=\cos wt$，其中$w_0$， w为非零常数。

2、 $xy'''+3y''-xy'-y=0$，已知$y=\dfrac{1}{x}$是方程的解。

3、 $\dfrac{dX}{dt}=AX$， $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

4、 $y'=\dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}, y(0)=0$

二、（15分）设 $F(x,y)=\begin{cases}0, x=0,-\infty<y<\infty\\ 2x, 0<x\le 1,-\infty<y<0\\ 2x-\dfrac{4y}{x}, 0<x\le 1, 0\le y<x^2\\ -2x, 0<x\le 1, x^2\le y<\infty\end{cases}$

1、写出$\dfrac{dy}{dx}=F(x,y), y(0)=0$的毕卡迭代序列（要求有具体步骤）

2、验证$y=\dfrac{1}{3}x^2$是其解

三、（15分）证明初值问题$\dfrac{dy}{dx}=y^2, y(0)=y_0$的解在某个包含原点的闭区间[a,b]上关于初值$y_0>0$是连续依赖的。

四、（15分）（1）请根据你的理解阐述能利用定正函数来判断一个自治系统零解稳定性的主要原因。

（2）利用李雅普若夫第二方法讨论系统 $\frac{dx}{dt}=-y+\alpha x^3, \frac{dy}{dt}=x+\alpha y^3$ 零解的稳定性，其中 α 为常数（提示，可取 $V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$）

（3）请问，是否可用线性近似系统来判断该系统的稳定性？为什么？

五、（15 分）设函数 $f(x,y)$ 在平面上连续，求证对于任何 x_0，只要 $|y_0|$ 适当的小，方程 $\frac{dy}{dx}=(y^2-e^{2x})f(x,y)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解必可研拓到 $x_0 \le x < \infty$