浙江大学 2017-2018 学年春夏学期
《常微分方程》期末试卷A卷答案

1 求解下列常微分方程，每题10分,共30分

1. 求平面上一切圆满足的常微分方程.
解：一切圆的表达式为：$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$. 3分
可以得到：$2(x-a)+2y'(y-b)=0$.
再微分后可以得到：$2+2y''(y-b)+2(y')^2=0$
再微分后可以得到：$2y'''(y-b)+6y''y'=0$, 即：$y-b=-3y''y'/(y''')$ 4分
代入上述方程后 3分
可以得到：$(1+y'^2)y'''-3(y'')^2y'=0$.

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2y}$.
解：令$z=y^2$, 原方程可转化为： 2分
$z'=x^2+z$,由此可以得到 3分
$z=e^x[C+\int_0^x s^2e^{-s}ds]=Ce^x-(x^2+2x+2)$, i.e.,
$y^2=Ce^x-(x^2+2x+2)$. 5分

3. $e^x\sin ydx+(e^x\cos y+y\sin 2y)dy=0$.
解：令$P(x,y)=e^x\sin y, Q(x,y)=e^x\cos y+y\sin 2y$, 则：
$\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$ 3分
因此满足全微分方程： $d(e^x\sin y)+y\sin 2ydy=0$, 3分
两边同时积分可以得到 $e^x\sin y+(-\frac{1}{2}y\cos 2y+\frac{1}{4}\sin 2y)=C$ 4分

2 求解高阶常系数微分方程的通解，每题10分，共20分

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+2y=\ln x$.
解：特征方程为：
$\lambda^2+2\lambda+2=0, \quad \to \lambda_{1,2}=-1\pm i$,
对应齐次方程的通解为：$C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x$ 6分
根据常数变异法，可得对应的非齐次方程的通解为：
$y(x)=C_1(x)e^{-x}\cos x+C_2(x)e^{-x}\sin x$
其中 $C_1(x)=-\int e^{\xi}\sin\xi\ln\xi d\xi$, $C_2(x)=\int e^{\xi}\cos\xi\ln\xi d\xi$ 4分

2. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-6\dfrac{d^3y}{dx^3}+17\dfrac{d^2y}{dx^2}-28\dfrac{dy}{dx}+20y=0$.
解：对应的特征方程为：
$\lambda^4-6\lambda^3+17\lambda^2-28\lambda+20=(\lambda-2)^2(\lambda^2-2\lambda+5)=0$ 8分
因此对应的齐次方程的通解为：$C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3e^x\cos 2x+C_4e^x\sin 2x$. 2

3 求解高阶变系数微分方程的通解，每题10分，共30分

1. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+5x\frac{dy}{dx}+13y=x^2,(x>0)$.
解：令$x=e^t$，则原方程可化为常系数方程：$y''+4y'+13y=e^{2t}$. 3分
求解后可得：$y(t)=C_1e^{-2t}\cos 3t+C_2e^{-2t}\sin 3t+\frac{1}{25}e^{2t}$.
即：$y(x)=\frac{1}{x^2}(C_1\cos(3\ln x)+C_2\sin(3\ln x))+\frac{1}{25}x^2$. 2分+2分+3分

2、$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.
解：令$y'=p$，则$y''=y'\frac{dp}{dy}$,
则原方程可化为：$\frac{dp}{dy}=\frac{p}{y}-2p^2$ 或 $p=0(y=c)$. 2分 + 1分
令$z=\frac{1}{p}$,则上述方程可以进一步转化为：$\frac{dz}{dy}=-\frac{1}{y}z+2$. 2分
其通解为：$z=\frac{c_1+y^2}{y}$，则$\frac{dy}{dx}=p=\frac{1}{z}=\frac{y}{c_1+y^2}$. 2分
最后可以通过分离变量得到通解为：$c_1\ln|y|+\frac{1}{2}y^2=x+c_2$. 2分

3. 已知$y_1=\frac{e^x}{x}$是微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-y=0$的一个特解,求$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-y=x$的通解
解: 根据Liouville公式，可以求出齐次方程的另一个线性无关解为：
$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(s)ds}dx=\frac{e^x}{x}\int\frac{x^2}{e^{2x}}e^{\int-\frac{2}{s}ds}dx=-\frac{e^{-x}}{2x}$. 5分
再根据常数变异法求出非齐次方程对应的特解:
$y^*=-\frac{x^2+2}{x}$. 5分
最后，该方程的通解为$y=c_1\frac{e^x}{x}+c_2\frac{e^{-x}}{x}-\frac{x^2+2}{x}$.

4 求解常微分方程组，每题10分，共20分

1. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x+2y+e^t\cos t\\ \frac{dy}{dt}=2x+4y+e^t\sin t\end{cases}$
解：令 $A=\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}, F(t)=\begin{bmatrix}e^t\cos t\\e^t\sin t\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$,
则其对应的特征值和特征向量分别为:
$\lambda_1=6,\ v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \lambda_2=2,\ v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. 2+2分
所以，对应的齐次方程的基解矩阵为：$X(t)=\begin{bmatrix}e^{6t}&e^{2t}\\e^{6t}&-e^{2t}\end{bmatrix}$.
因此该方程组的解为:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= X(t) \times \left(C + \int_0^t X^{-1}(s)F(s)ds \right) \qquad 2分 \\
&= \begin{bmatrix} e^{6t} & e^{2t} \\ e^{6t} & -e^{2t} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-6s} & e^{-6s} \\ e^{-2s} & -e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \cos s \\ e^s \sin s \end{bmatrix} ds \right) \\
&= \begin{bmatrix} c_1 e^{6t} + c_2 e^{2t} + \frac{e^t}{26}(3e^{5t} - 3\cos t + 11 \sin t) \\ c_1 e^{6t} - c_2 e^{2t} + \frac{e^t}{26}(3e^{5t} - 3\cos t - 15 \sin t) \end{bmatrix} \qquad 2+2分
\end{aligned}
$$

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$

解：令$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，其对应的特征方程为：$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 =$ $-(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$.

对于特征根$\lambda_1 = 1$，其对应的特征向量为：$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

对于共轭复根$\lambda_{2,3} = \pm i$，对应的特征向量分别为：$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

所以，我们可以将原方程的通解写为：

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) + c_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right) \\
&= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y - 2z, & x(0) = 1. \\ \frac{dy}{dt} = -x, & y(0) = 1. \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z, & z(0) = 2. \end{cases}$

解：令$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，其对应的特征方程为：$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda +$ $-(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$. 3 分

对于特征根$\lambda_1 = 1$，其对应的特征向量为：$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

对于共轭复根$\lambda_{2,3} = \pm i$，对应的特征向量分别为：$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.