第 6 讲：分式线性变换 2020-3-12

1. (三点组之间映射的表示) 证明将复球面上相异三点 z_1, z_2, z_3 依次映为相异三点 w_1, w_2, w_3 的分式线性变换 f 可写为

$$(f(z), w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

2. (上半平面到自身的变换) 证明分式线性变换 f 将上半平面映为上半平面的充要条件是 f 可以表示为如下形式

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 且 $ad - bc = 1$.

3. (反演变换的几何意义) 考虑反演变换 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$，$f(z) = 1/z$. 令 $F = \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi : S^2 \to S^2$ (其中 Φ 是球极投影), 证明 F 的几何意义是：球面 S^2 绕一条直径旋转 180 度. 这条直径是哪一条？

4.(圆周的对称点) 证明 z_1, z_2 关于圆周 $a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + d = 0$ $(a \neq 0)$ 对称的充要条件是

$$az_1\overline{z_2} + \bar{b}z_1 + b\overline{z_2} + d = 0.$$

5. (双全纯映射) 求双全纯映射 (全纯同胚),

(1). 将上半平面映为单位圆盘.

(2). 将上半单位圆映为单位圆.

6. (四点共圆) 凸四边形 $ABCD$ 中, 三角形 ΔABC, ΔBCD, ΔCDA, ΔDAB 的重心分别为 X, Y, X, W, 证明 $ABCD$ 四点共圆的充要条件是 $XYZW$ 四点共圆.

7. (附加题，不做要求)

我在访问印第安纳大学布卢明顿分校数学系时，发现他们的马克杯上印了一个几何图案. 它实际上是一条几何定理，你能证明它吗？请把你的证明发送到 wxg688@163.com. 无截止日期.

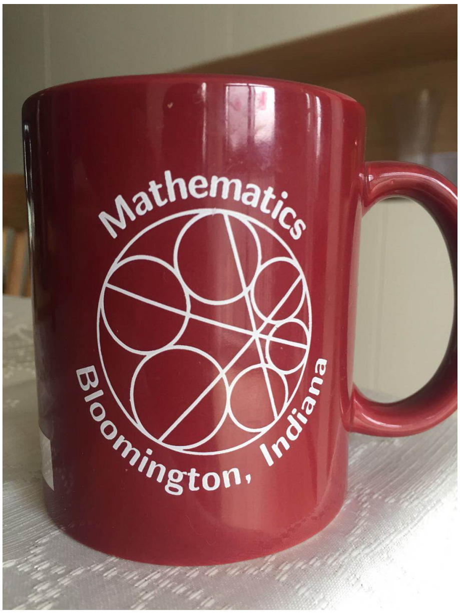

图 1: 马克杯上的几何定理