解 析 几 何

December 20, 2018

作业(10) (P100: 7; P108:1, 2, 3.)

7. 证明: 由定理4.1.1知, 必存在从直角坐标系$I = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 到$I^* = \{O^*; \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*\}$的等距变换 σ. 我们现在只证明σ的唯一性. 因为I 和 I^* 具有相同的定向, 所以它是第一类等距变. 再次由定理4.1.1知, σ可分解为绕原点的旋转变换和平移的复合. 反证法, 设存在两个这样的分解, 即分别存在绕原点的旋转变换σ_1,σ_1^* 和平移σ_2, σ_2^* , 满足

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma = \sigma_1^* \circ \sigma_2^*.$$

因为σ_1, σ_1^*, σ_2 , σ_2^* 均可逆, 可知

$$\sigma_1^{*-1} \circ \sigma_1 = \sigma_2^* \circ \sigma_2^{-1}.$$

注意到 $\sigma_1^{*-1} \circ \sigma_1$ 是平移, $\sigma_2^* \circ \sigma_2^{-1}$ 是旋转, 因此只可能是

$$\sigma_1^{*-1} \circ \sigma_1 = \sigma_2^* \circ \sigma_2^{-1} = id,$$

因此 $\sigma_1 = \sigma_1^*$, $\sigma_2 = \sigma_2^*$.

如下方法也是可以的: 由于I, I^*都是右手直角坐标系, 则存在正交矩阵A使得 $(\vec{e_1}^*, \vec{e_2}^*) = (\vec{e_1}, \vec{e_2})A$.记$O^*$在原来坐标系的坐标为 (x_0, y_0), 并作如下变换σ

$$\begin{cases} x' = x_0 + a_{11}x + a_{12}y \\ y' = y_0 + a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 则$\sigma$为等距变换, 且$\sigma$把$I$变成$I^*$.

下证唯一性.假设σ_1, σ_2都是把I变成I^*的等距变换. 则对于平面中任一点p, 令$\overrightarrow{OP} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$, 则有

$$\sigma_1(\overrightarrow{OP}) = \sigma_1(a\vec{e_1} + b\vec{e_2}) = a\sigma_1(\vec{e_1}) + b\sigma_1(\vec{e_2}) = a\vec{e_1}^* + b\vec{e_2}^*$$

同理可得$\sigma_2(\overrightarrow{OP}) = a\vec{e_1}^* + b\vec{e_2}^*$, 从而 $\sigma_1(\overrightarrow{OP}) = \sigma_2(\overrightarrow{OP})$.

另一方面, $\sigma_i(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\sigma_i(O)\sigma_i(P)}, i = 1, 2$, 从而 $\overrightarrow{\sigma_1(O)\sigma_1(P)} = \overrightarrow{\sigma_2(O)\sigma_2(P)}$. 由于$\sigma_1(O) = O^* = \sigma_2(O)$, 则有 $\sigma_(P) = \sigma_2(P)$, 由P的任意性知$\sigma_1 = \sigma_2$, 唯一性得证.

第108页习题:

1. 解:记位似变换为σ,σ的位似中心为O,以O为原点建立坐标系$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$,则$\sigma$在$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

不妨设$\lambda > 0$(否则建立坐标系$\{O, -\vec{e_1}, -\vec{e_2}\}$即可) 下面做变换$\sigma_1, \sigma_2$,在坐标系$\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$下$\sigma_1, \sigma_2$的坐标变换公式分别如下：

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x \\ y_1 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x \\ y_2 = \lambda y \end{cases}$$

则易知$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$,并且显然$\sigma_1, \sigma_2$为两个互相垂直方向的伸缩变换.

2. 解:(1) 记相似变换为σ, 相似比为λ,作一个位似系数为$\frac{1}{\lambda}$ 且以原点为位似中心的位似变换τ,则$\varphi = \tau \circ \sigma$为相似比为1的相似变换, 因而是等距变换,而$\sigma = \tau^{-1} \circ \varphi$.由于$\tau^{-1}$也是位似变换, 从而平面上相似变换可分解成一个平面上等距变换与一个位似变换的乘积.

(2)任取两个非零向量, 记为$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

如果A, B, C共线,则由于相似变换保持线段的分比,易知$\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)$仍然共线且显然 $\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)}, \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)}$的夹角与$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$的夹角相同.

如果A, B, C不共线,则不妨设

$$|\overrightarrow{AB}| = \lambda|\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)}|, |\overrightarrow{AC}| = \lambda|\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)}|, |\overrightarrow{BC}| = \lambda|\overrightarrow{\sigma(B)\sigma(C)}|$$

从而三角形ABC与三角形$\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C)$相似,$\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)}, \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)}$的夹角与$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$的夹角相同.

3. 解: (1)

取直线AB上任一点C,则不妨设$\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma(A)\sigma(C)} = \sigma(\overrightarrow{AC}) = \sigma(a\overrightarrow{AB}) = a\sigma(\overrightarrow{AB})$$

利用A, B为σ的不动点, 可得

$$\overrightarrow{A\sigma(C)} = a\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$

既得 $C=\sigma(C)$.

(2)任取平面上一点D,不妨设$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$,

$\Rightarrow \sigma(\overrightarrow{AD})=\sigma(a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC})=a\sigma(\overrightarrow{AB})+b\sigma(\overrightarrow{AC})=a\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A\sigma(D)}=\overrightarrow{AD}$,从而$D=\sigma(D)$,由$D$的任意性,可知平面上任一点为不动点.