

北京大学数学科学学院数学分析 I 期中考试题目

共七道大题, 满分 101 分, 时间 110 分钟

2018.11.15 8: 00-9: 50

一. (本题 30 分) 判断下列极限是否存在。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x^2} \right)^{x^2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin 2x}{2(2 + \sin 2x)} + \frac{\sin 3x}{3(3 + \sin 3x)} + \dots + \frac{\sin nx}{n(n + \sin nx)} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(\pi n! e)$$

二. (本题 36 分) 下列问题若回答是, 请给出证明; 若回答否, 请给出反例。

(1) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上均一致连续, 问 $f(x)g(x)$ 在 $(0, 1)$ 是否一致连续?

(2) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 R 上均一致连续, 问 $f(x)g(x)$ 在 R 是否一致连续?

(3) 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上均一致连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 问 $f(x)g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 是否一致连续?

(4) 设 $f(x)$ 在 R 上连续, 且 $|f(x)|$ 一致连续, 问 $f(x)$ 是否一致连续?

三. (本题 10 分) 设 $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}, a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} (n = 1, 2, 3 \dots)$

证明: 此数列当 $n \rightarrow \infty$ 时, 极限存在, 并求其值。

四. (本题 10 分) 假设 $g(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数, $g(0) = 1, g(1) = 0$, 如果存在一个定义在 $[0, 1]$ 上的连续函数 $h(x)$ 使得 $g(x) + h(x)$ 单调上升, 证明: $g(x)$ 可以取到 0 与 1 之间的任一实数。

五. (本题 5 分) 设 $f(x)$ 是定义在整个实数轴上的连续函数。

证明: 函数方程 $f(f(x)) = -x^3 + \sin(x^2 + \ln(1 + |x|))$ 不可能有连续解。

六. (本题 5 分) 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 如果极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1)}{n} = M$$

其中 M 是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值, 证明: $f(x) \equiv M$

七. (本题 5 分) 设 $f(x)$ 是定义在实数轴 R 上最小正周期为无理数 $\mu (\mu > 0)$ 的连续函数,

证明: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 数列 $\{f(n)\}$ 的极限不存在。