

# 浙江大学2014——2015学年春夏学期

## 《常微分方程》课程期末考试试卷

课程号：\_\_\_\_06123700\_\_\_\_， 开课学院：\_\_\_\_数学科学学院\_\_\_\_

考试试卷：A✓卷、B卷（请在选定项上打✓）

考试形式：闭✓、开卷（请在选定项上打✓）， 允许带\_\_\_\_无\_\_\_\_入场

考试日期：2015 年 7 月 8 日,考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_ 所属院系：\_\_\_\_

题序	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷人								

一. 求解下列方程（25分）

1.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+y^2}$

2.  $2y^2 + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4$

3.  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 5y = x^2 \sin(\ln x)$

二. 求解下列方程 (组) (25分)

1. 用幂级数法求解  $y'' + 4xy = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x - 2z = 0 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + x = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x + 2y = 0 \end{cases}$$

三. (20分) 对于系统  $\begin{cases} x' = 1 - x + y - x^2 \\ y' = x(x - y) \end{cases}$  找出所有平衡点 (奇点), 写出关于这些平衡点所相应的线性化系统, 判断平衡点的类型, 并画出平衡点附近相图的草图。

四. (15分) 讨论下面2个方程组零解的李雅普诺夫稳定性

$$(1) \begin{cases} x' = 4y^3 - x^3 \\ y' = -4x - y^3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x' = -x^4 y \\ y' = x^3 y^2 \end{cases}$$

五. (15分) 给定区间  $I = [0, a]$ , 非负连续函数  $u(t) \leq 1$ ,  $u(0) = 0$ , 连续可微函数  $f : (t, x) \in I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 以及区间  $[-2, 0]$  中的一个连续可微函数  $\phi(t)$ , 并满足  $\phi'(0-) = f(0, \phi(0))$ . 考虑如下问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t - u(t))) & t \in [0, a] \\ x(t) = \phi(t) & t \in [-2, 0] \end{cases}$$

- (1) 试证明存在一个  $\alpha > 0$  使得该问题在  $t \in [0, \alpha]$  至少存在一个解。
- (2) 更进一步, 这样的解是否有唯一性, 给出充足的理由。