每日一题（8）

2019.03.28

已知方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}, r(\boldsymbol{A})=1, \lambda=a_{11}+\cdots+a_{nn}$. 求证: $\boldsymbol{A}^2=\lambda\boldsymbol{A}$.

证: 因为 $r(\boldsymbol{A})=1$, 所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(1,0,\cdots,0)\boldsymbol{Q}=\alpha\beta,$$

其中:

$$\alpha=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta=(1,0,\cdots,0)\boldsymbol{Q}=(b_1,\cdots,b_n).$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\alpha\beta=\begin{pmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}, \lambda=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\beta\alpha.$$

所以 $\boldsymbol{A}^2=(\alpha\beta)(\alpha\beta)=\alpha(\beta\alpha)\beta=\lambda\alpha\beta=\lambda\boldsymbol{A}$.