第 7 讲：复积分 2020-3-17

1. 假设 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H} := \{z; \Im z > 0\}$ 是上半平面的一条光滑曲线, 起点 $\gamma(0) = 1 + i$, 终点 $\gamma(1) = i$.

(a). 计算积分

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz, \ \int_\gamma z dz.$$

(b). $1/z$, z 在上半平面是否有原函数? 说明理由.

2. 函数 $f(z) = 1/z$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上是否存在原函数? 函数 $g(z) = \overline{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上是否存在原函数? 证明你的结论.

3. 证明: 一个复值函数的原函数, 在差一个常数的意义下是唯一的.

4. 令 $\gamma(t) = z_0(1-t) + tz_1, t \in [0,1]$.

(a). 计算积分

$$\int_\gamma \mathrm{Re} z \ dz, \ \int_\gamma \overline{z} dz.$$

(b). 求满足

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| = \int_\gamma |f(z)||dz|$$

的连续函数 f 的一般形式.

5. 假设 γ 为平面分段光滑的简单闭曲线, 证明其围成的区域 D 的面积为

$$\frac{1}{2i} \int_\gamma \overline{z} dz.$$

其中, γ 为正定向: 即沿着前进方向, 区域 D 在 γ 的左侧.

6. 假设复值函数 f 在 z_0 连续, 证明

$$f(z_0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

7. a, b 是平面的两个不同的复数, $|a| < r < |b|$, 令曲线 $\gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. 计算积分

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz.$$