# 第十一章 反常积分

## §1 反常积分的概念

1．讨论下列无穷积分是否收敛？若收敛，则求其值：

(1)$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$； (2)$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$；

(3)$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx$； (4)$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$；

(5)$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$； (6)$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$；

(7)$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\sin x dx$； (8)$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 1) $\int_0^a xe^{-x^2}dx = \int_0^a e^{-x^2}d(\frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\mid_0^a = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-a^2}$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to+\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-a^2}) = \frac{1}{2}$$

$\therefore \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$ $\quad\therefore$ 无穷积分收敛

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

由上一题知 $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$ 收敛，令 $t=-x$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}$$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{x^2}dx = 0$ $\quad\therefore$ 无穷积分收敛

3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-\frac{x}{2}}dx = \lim_{a\to+\infty} -2e^{-\frac{x}{2}}\mid_0^a$

$= \lim\limits_{a\to+\infty}(1-2e^{-\frac{a}{2}}) = 1$　∴ 无穷积分收敛

4) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x)}dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{ax}{x^2(1+x)}$

$= \lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^a(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x})dx$

$= \lim\limits_{a\to+\infty}(-\frac{1}{x}+\ln(1+x)-\ln x)\big|_1^a$

$= \lim\limits_{a\to+\infty}(1-\frac{1}{a}+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 2) = 1-1\ln 2$　∴ 无穷积分收敛

5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$

$= \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{4(x+\frac{1}{2})^2+4}dx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{4(x+\frac{1}{2})^2+4}dx$

$= \lim\limits_{b\to-\infty}\frac{1}{4}\arctan(x+\frac{1}{2})\big|_b^0 + \lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{4}\arctan(x+\frac{1}{2})\big|_0^a$

$= \frac{1}{4}(\lim\limits_{a\to+\infty}\arctan(a+\frac{1}{2}) - \lim\limits_{b\to-\infty}\arctan(b+\frac{1}{2})) = \frac{\pi}{4}$

∴ 无穷积分收敛

6) $\int_0^a e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}(1-e^{-a}\cos a - e^{a}\sin a)$

∴ $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}$　∴ 积分收敛

7) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x\sin x dx = \int_{-\infty}^{0}e^x\sin x dx + \int_0^{+\infty}e^x\sin x dx$

$\int_0^a e^x\sin dx = \frac{1}{2}(1-(\cos a-\sin a)e^a)$ 当 $a\to+\infty$ 时，极限不存在，

同理 $\int_b^0 e^x\sin x dx = \frac{1}{2}[(\sin b-\cos b)e^b-1]$，当 $b\to-\infty$ 时，趋于 $-\frac{1}{2}$

∴ 原积分发散

8) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$　∵ $\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(a+\sqrt{1+a^2})$ 当 $a\to+\infty$ 时，趋于 $+\infty$，∴ 原积分发散.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛?若收敛,则求其值:

(1) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$;　　(2) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$;

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$;　　(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(5) $\int_0^1 \ln x dx$;　　(6) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$;

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;　　(8) $\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

1) 解　$\int_n^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p} - (n-a)^{1-p}]$　①

当 $P<1$ 时, $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \lim\limits_{n\to a} |_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ 收敛.

当 $P>1$ 时, $n\to a^+$ ① 式极限不存在　∴ 发散

当 $P=1$ 时, $\int_a^b \frac{1}{x-a}dx = \ln|b-a| - \ln|n-a|$ 当 $n\to a^+$ 极限不存在. ∴ 原积分发散

2) 解　$\int_0^b \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^b (\frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1})dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\right|$
$b\to 1^-$ 时,极限不存在 ∴ 原积分发散

3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim\limits_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim\limits_{b\to 1^-}[2-2(1-b)^{\frac{1}{2}}] = 2$

$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim\limits_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim\limits_{a\to 1^+}[2-2\sqrt{a-1}] = 2$

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = 4$　积分收敛

4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{a\to 1^-}[1-\sqrt{1-a^2}] = 1$

∴ 积分收敛

5) $\because \int_a^1 \ln x dx = x\ln x \mid_a^1 - \int_a^1 \ln x = -a\ln a-(1-a)$

$$\lim_{a\to 1^+}(a-1-a\ln a)=-1 \quad \therefore \text{积分收敛}$$

6) $\int_0^a \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt$

$$= 2\left(\int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{1}{1+t^2}dt - \int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt\right)$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan\sqrt{\frac{a}{1-a}} - \arctan 0 = \arctan\sqrt{\frac{a}{1-a}} \quad ①$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{1+t^2}+\arctan t\right)\Big|_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a(1-a)}+\arctan\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right) \quad ②$$

当 $a\to 1^-$ 时，① 式极限为$\frac{\pi}{4}$，② 极限为$\frac{\pi}{4}$，所以

$$\int_0^a \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \frac{\pi}{2}$$

7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}d(2x-1) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}d(2x-1)$$

$$= \operatorname{arcsh}(2x-1)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \operatorname{arcsh}(2x-1)\mid_{\frac{1}{2}}^1 = \pi$$

(8) $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^p}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^p}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(\ln x)^p}dx$

$$= \lim_{a\to 0^+}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^p}dx + \lim_{b\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(\ln x)^p}dx$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_a^{\frac{1}{2}} + \lim_{b\to 1^-}\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p}(\ln\frac{1}{2})^{1-p} - \frac{1}{1-p}(\ln a)^{1-p}\right) + \lim_{b\to 1^-}\left(\frac{1}{1-p}(\ln b)^{1-p} - \frac{1}{1-p}(\ln\frac{1}{2})^{1-p}\right)$$

$$= \lim_{a\to 1^-}\frac{1}{1-p}(\ln b)^{1-p} - \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{1-p}(\ln a)^{1-p}$$

此极限不存在,故积分发散

3. 举例说明:瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 收敛时,$\int_a^b f^2(x)dx$ 不一定收敛.

解　例如令 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,则$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$

$\therefore \int_0^1 f(x)dx$ 收敛,但$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ 由 $p$ 积分知发散

4. 举例说明:$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且 $f$ 在$[a, +\infty)$上连续时,不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

解　例如 $\int_1^{+\infty}\sin x^2 dx = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$, 由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 收敛但当 $x\to+\infty$ 时,$\sin x^2$ 极限不存在.

5. 证明:若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,且存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,则 $A = 0$.

证若 $A \neq 0$,不妨设 $A > 0$,则由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,取 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, $\exists M$,当 $x > M$ 时,有 $|f(x) - A| < \frac{A}{2}$　$f(x) > \frac{A}{2}$　$\because \int_a^{+\infty}\frac{A}{2}dx$ 发散,由比较判别法知,$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散,矛盾. $\therefore A = 0$

6. 证明:若 $f$ 在$[a, +\infty)$ 上可导,且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证 $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$

$\because \int_a^{+\infty} f'(t)dt$ 收敛

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(t)dt$　极限存在

又$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,由上题知,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

## §2　无穷积分的性质与收敛判别

1. 证明定理 11.2 及其推论 1.

解　定理11.2的证明:$\because \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛.$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists G > a$,当 $u_1 > G, u_2 > G$ 时,令 $U_2 > U_1$,有 $\left|\int_{u_1}^{u_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$,又当 $x \in [a, +\infty)$ 时,$|f(x)| \leqslant g(x)$

$\therefore \left|\int_{u_1}^{u_2} (f(x))\right| dx \leqslant \left|\int_{u_1}^{u_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$　$\therefore \int_a^{+\infty} (f(x))dx$ 收敛.

推论1的证明:$\because \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = l$　$\therefore \forall \varepsilon > 0$(特别取 $\varepsilon = \frac{c}{2}$),$\exists M$,当 $x > M$ 时,$\left|\frac{|f(x)|}{g(x)} - c\right| < \varepsilon$　$\because \frac{c}{2} g(x) < |f(x)| < \frac{3}{2} < g(x)$

对于 ⅰ) 由比较原则得　$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 与$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛态

对于 ⅱ) $|f(x)| < \varepsilon g(x)$　$\therefore \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} (f(x))dx$ 收敛

当 $c=+\infty$ 时,即:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=+\infty$,则 $\forall M>0,\exists G$,当 $x>G,\dfrac{|f(x)|}{g(x)}>M.\therefore |f(x)|>Mg(x)$

$\because\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散 $\quad\therefore\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散

2. 设 $f$ 与 $g$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上了函数,对任何 $u>a$,它们在 $[a,u]$ 上都可积. 证明:若 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$ 也都收敛.

证 $\because |f(x)g(x)|\leqslant\dfrac{f^2+g^2}{2}$ 且 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$ 收敛 $\quad\therefore\int_a^{+\infty}\dfrac{f^2+g^2}{2}dx$ 收敛

由比较原则 $\int_a^{+\infty}|f(x)g(x)|dx$ 收敛,$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

又

$$\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))^2dx=\int_a^{+\infty}f^2(x)dx+\int_a^{+\infty}g^2(x)dx+2\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$$

等式右端三个积分都收敛 $\quad\therefore\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))^2dx$ 收敛

3. 设 $f,g,h$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的三个连续函数,且成立不等式 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. 证明:

(1) 若 $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 都收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛;

(2) 又若 $\int_a^{+\infty}h(x)dx=\int_a^{+\infty}g(x)dx=A$,则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=A$.

证 (1) $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 都收敛 $\therefore\int_a^{+\infty}(g(x)-h(x))dx$ 收敛 $\quad$ 又 $0\leqslant g(x)-f(x)\leqslant g(x)-h(x)$ $\quad$ 由比较原则

知 $\int_a^{+\infty} |g(x)-f(x)|dx$ 收敛,又 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} g(x)dx + \int_a^{+\infty}(f-g)dx$,故 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

2) 对 $\forall n > a, h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ $\therefore \int_a^n h(x)dx \leqslant \int_a^n f(x)dx \leqslant \int_a^n g(x)dx$,令 $n \to +\infty$,由迫敛性得 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = A$

4. 讨论下列无穷积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;　　(2) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;　　(4) $\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$;

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$;　　(6) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx(n,m \geqslant 0)$.

解　1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} = 1, P>1 \quad 0<\lambda<+\infty$

$\therefore \int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 收敛

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1-e^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-e^x} = 0$

由 $p$ 积分知,$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ 收敛　$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}dx$ 收敛

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1, 0<\lambda<+\infty, 0<p<1$

$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ 发散

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x\arctan x}{1+x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\arctan x}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}$

由 $p$ 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛 $\quad\therefore\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{1+x^3}dx$ 收敛

5) 当 $n>1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}}{\dfrac{1}{x^{1+\frac{n-1}{2}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\frac{n}{2}-1}}=0$

由 $p$ 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{1+\frac{n-1}{2}}}dx$ 收敛 $\quad\therefore$ 当 $n>1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛.

当 $n\leqslant 1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}}{\dfrac{1}{x^n}}=+\infty$

$\because\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx$ 发散 $\quad\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^n}dx$ 发散

6) 当 $n-m>1$ 时, $\frac{1}{2}+\frac{n-m}{2}>1$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}+\frac{n-m}{2}}\frac{x^m}{1+x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1+n-m}{2}}}{1+x^n}=0$$

$\lambda=0,p=\frac{1}{2}+\frac{n-m}{2}>1\quad\therefore$ 积分收敛

5. 讨论下列无穷积分为绝对收敛还是条件收敛:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$; $\qquad$ (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}dx$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$; $\qquad$ (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x dx$.

解 1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx=2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

$\because\frac{1}{t}$ 单调递减趋于 $0(t\to+\infty)$, $\left|\int_1^y\sin t dt\right|\leqslant 2(y>1)$

由狄利克雷判别法,积分收敛.

又 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$, $\left|\frac{\sin t}{t}\right|\geqslant\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{2t}-\frac{\cos t}{2t}\quad t\in[1,+\infty)$

其中$\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{2t}dt$　由狄利克雷判别法知收敛，而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ 发散

$\therefore\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ 发散　$\therefore$ 原积分条件收敛

2) $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\quad(\sin x\neq 0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\frac{1}{1+x^2}=1, P=2>1, \lambda=1\quad\therefore\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛

当 $\sin x\neq 0$ 时，$\frac{\mathrm{sgn}(\sin x)}{1+x^2}=0\quad\therefore$ 原积分绝对收敛

3) $\left|\int_0^A\cos xdx\right|\leqslant 1$，$\frac{\sqrt{x}}{100+x}$ 在$[0,+\infty)$上单调递减且当 $x\to+\infty$ 时，趋于零，$\therefore$ 积分收敛

又$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|\geqslant\frac{\sqrt{x}}{100+x}\cos^2x=\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}+\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\cos 2x$

而$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}dx$ 发散　$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\cos 2xdx$ 收敛

$\therefore$ 原积分为条件收敛

4) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx$

$$=\int_0^{e^e}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx+\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx$$

$\because\left|\int_{e^e}^u\sin xdx\right|\leqslant 2$ 且在$[e^e,+\infty)$上，$\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)'=\frac{1-\ln(\ln x)}{x+(\ln x)^2}<0$

$\therefore\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ 单调递减且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$

$\therefore$ 由狄利克雷判别法知，$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx$ 收敛

$\therefore$ 原积分收敛

又$\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right|\geqslant\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin^2x=\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}-\frac{\cos 2x}{2\ln x}\ln(\ln x)$

而$\int_{e^e}^{+\infty}\left|\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\right|dx$ 发散，$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cos xdx$ 收敛

$\therefore \int_{e^e}^{+\infty} \left| \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x \right| dx$ 发散

$\therefore$ 原积分条件收敛

6. 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 不一定收敛；$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛时，$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 也不一定收敛.

解　例如 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}} dx$　由狄利克雷判别法知收敛

但 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ 发散

7. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$，则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 必定收敛.

证　$\because \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$　$\therefore$ 取 $\varepsilon = 1$，$\exists M$，当 $x > M$ 时，$|f(x)| < 1$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{M+1} f(x)dx + \int_{M+1}^{+\infty} f(x)dx$　$\because \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛　$\therefore \int_{M+1}^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛

又当 $x \in [M+1, +\infty)$ 时，$|f(x)| < 1$

$\therefore |f^2(x)| < |f(x)|$　$\because \int_{M+1}^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛

$\therefore \int_M^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛

又 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx = \int_a^{M+1} f^2(x)dx + \int_{M+1}^{+\infty} f^2(x)dx$

$\therefore \int_a^{+\infty} f^2(x)dx$　收敛

8. 证明：若 $f$ 是 $[a, +\infty)$ 上的单调函数，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,且 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right),x\to+\infty$.

证不妨设 $f(x)$ 单调递减,则 $f(x)\geqslant 0$,(否则,$\exists x_1$,使 $f(x_1)<0$,则当 $x>x_1$ 时,$f(x)\leqslant f(x_1)<0$,$\because -\int_a^{+\infty}f(x_1)dx$ 发散,$\therefore\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散,矛盾)

$\because\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,由 Cauchy 准则,对 $\forall\varepsilon>0,\exists M$,当 $x>M$ 时,$\left|\int_x^{2x}f(t)dt\right|<\varepsilon$,即$\int_x^{2x}f(t)dt<\varepsilon$,当 $x>2M$ 时,

$$0\leqslant xf(x)=2\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(x)dt\leqslant 2\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)dt<2\varepsilon$$

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}xf(x)=0,f(x)=0\left(\frac{1}{x}\right),\text{从而}\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

9. 证明:若 $f$ 在$[a,+\infty)$上一致连续,且$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证 $\because f(x)$ 在$[a,+\infty)$上一致连续,$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\sigma>0$,当 $x_1$,$x_2\in[a,+\infty)$,$|x_1-x_2|<\sigma$ 时,

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$　① 又因$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,

$\therefore$ 对 $\varepsilon_1=\sqrt{\varepsilon},\exists M>a$,当 $x>M$ 时,有 $\left|\int_x^{x+\sigma}f(t)dt\right|<\sqrt{\varepsilon}$②

考虑积分$\int_x^{x+\delta}f(t)dt$　当 $x<1<x+\delta$ 时,由 ① 有

$$f(t)-\varepsilon<f(x)<(f(x)+\varepsilon)$$

从而　$\int_x^{x+\delta}f(t)dt-\sqrt{\varepsilon}\leqslant\int_x^{x+\delta}f(x)dt\leqslant\int_x^{x+\delta}f(t)dt+\sqrt{\varepsilon}$

即　$\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dt-\int_x^{x+\delta}f(t)dt\right|<\varepsilon\delta$③

$\therefore$ 当 $x>M$ 时,由 ②③ 知,$|f(x)|=\frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dt\right|$

$\leqslant \frac{1}{\delta}(\mid \int_x^{x+\delta} f(x)dx - \int_x^{x+\delta} f(t)dt \mid + \mid \int_x^{x+\delta} \mid f(x)dt) < 2\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

10. 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法.

证令 $F(u) = \int_a^u f(x)dx$　$\because \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

$\therefore \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = \lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$ 极限存在,记为 $J$,取 $\varepsilon = 1$, $\exists A$,当 $n > A$ 时,有 $\mid \int_a^u f(x)dx - J \mid < 1$

$\therefore \mid \int_a^u f(x)dx \mid < \mid J \mid + 1$　$\therefore \mid F(u) \mid < \mid J \mid + 1$. 又在 $[a, u+1]$ 上,$F(u)$ 连续,从而有界　$\therefore \exists M > \mid J \mid + 1$,对一切 $u \in [a, +\infty)$,有 $\mid \int_a^u f(x)dx \mid \leqslant M$,即 $\mid F(u) \mid \leqslant M$. $\therefore F(u)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

又 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界,$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 极限存在,记为 $B$,令 $g_1(x) = g(x) - B$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - B) = 0$

$\therefore g_1(x)$ 单调趋于 0,由狄利克雷判别法知,$\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)(g(x) - B)dx$ 收敛

又 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛　$\therefore \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx + B\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

## §3　瑕积分的性质与收敛判别

1. 写出性质 3 的证明.

证 $\because \int_u^{+\infty} \mid f(x) \mid dx$ 收敛 $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $u_1, u_2 \in (a,$

$a+\delta)$ 时，有 $\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$

$\therefore \left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|\leqslant\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$

$\therefore \int_a^b f(x)dx$ 收敛，且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$

2. 写出定理 11.6 及其推论 1 的证明.

证 $\because \int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\quad\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)$ 时，有 $\left|\int_{u_1}^{u_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$，又 $|f(x)|\leqslant g(x)$

$\therefore \left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|\leqslant\left|\int_{u_1}^{u_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$

$\therefore \int_a^b(f(x))dx$ 收敛

推论 1 $\quad\because \lim\limits_{x\to a+}\frac{|f(x)|}{g(x)}=c\quad\therefore\forall\varepsilon>0$（特别取 $\varepsilon=\frac{c}{2}$）$\exists\delta>0$，当 $a<x<a+\delta$ 时，$\left|\frac{|f(x)|}{g(x)}-c\right|<\varepsilon$

$\therefore \frac{c}{2}g(x)<|f(x)|<\frac{3}{2}cg(x)$

由比较原则，$\int_a^b|f(x)|dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态.

当 $c=0$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon g(x)$. 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b|f(x)|dx$ 收敛. 当 $c=+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to a+}\frac{|f(x)|}{g(x)}=+\infty$ 则对 $\forall M>0, \exists\sigma>0$，当 $a<x<a+\sigma$ 时，$\frac{|f(x)|}{g(x)}>M$

$\therefore |f(x)|>Mg(x)$ 由 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，知 $\int_a^b|f(x)|dx$ 发散

3. 讨论下列瑕积分的收敛性：

(1) $\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}$； (2) $\int_0^x\frac{\sin x}{x^{3/2}}dx$；

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$;　　(4) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$;

(5) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}dx$;　　(6) $\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}dx$;

(7) $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$;　　(8) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$.

解　1) 1 是瑕点

$\because \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\frac{1}{(x-1)^2}=1 \quad P>1, 0<\lambda<+\infty$　积分发散

2) 0 是瑕点

$\because \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1 \quad 0<P<1 \quad 0<\lambda<+\infty$,积分收敛

3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sin x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$

$\because \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}=0, \lambda=0, 0<P<1$

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$ 发散　$\therefore$ 原积分发散

4) 1 为瑕点

$\therefore \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\ln x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}=0, \lambda=0, 0<P<1$,

$\therefore \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ 收敛

5) 1 为瑕点

$\therefore \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)\frac{\arctan x}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{12}, P=1, 0<\lambda<+\infty$

$\therefore \int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}dx$ 发散

6) 0 为瑕点($m>0$)

$\because \lim\limits_{x\to 0+} x^{m-2}\dfrac{1-\cos x}{x^m}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2},\lambda=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 当 $0<m<3$ 时,积分收敛;$m\geqslant 3$ 时,积分发散,$m\leqslant 0$ 时,原积分为定积分

7）0 为瑕点

令 $\dfrac{1}{x}=t$,则 $\int_0^1 \dfrac{1}{x^a}\sin\dfrac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t^{2-a}}dt$

当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时,$\left|\dfrac{\sin t}{t^{2-a}}\right|\leqslant\dfrac{1}{t^{2-a}}$ 而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^{2-a}}dt$ 收敛

$\therefore$ 原积分绝对收敛

当 $1\leqslant a<2$ 时,$\dfrac{1}{t^{2-a}}$ 单调递减 $\to 0$ $\left|\int_1^u \sin t dt\right|\leqslant 2$

$\because$ 积分收敛　　又当 $t\in[1,+\infty)$ $\left|\dfrac{\sin t}{t^{2-a}}\right|\geqslant\dfrac{\sin^2 t}{t}=\dfrac{1}{2^t}-\dfrac{\cos 2t}{2^t}$

$\therefore\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2t}dt$ 发散,$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos t}{2t}dt$ 收敛

$\therefore$ 原积分条件收敛

当 $a\geqslant 2$ 时,$x\cdot x^{a-2}\sin x$ 极限不存在$(x\to+\infty)$

$\therefore$ 积分发散

8) $\int_1^{+\infty}e^{-x}\ln x dx=\int_0^1 e^{-x}\ln x dx+\int_1^{+\infty}e^{-x}\ln x dx$

$\because \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\sin x=0,\lambda=0,0<P<1$

$\therefore\int_0^1 e^{-x}\ln x dx$ 收敛

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\ln x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+3}{x^3}=0,\lambda=0,P>1$

$\therefore\int_1^{+\infty}e^{-x}\ln x dx$ 收敛　$\therefore$ 原积分收敛

4. 计算下列瑕积分的值(其中 $n$ 为正整数):

(1) $\int_0^1(\ln x)^n dx$;　　　(2) $\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$.

解　1）当 $n=1$ 时，有

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{b\to 0^+}(x\ln x)\big|_b^1 - \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 dx = -1$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 (\ln x)^n dx$$

$$= \lim_{b\to 0^+}(x(\ln x)^n)\big|_b^1 - \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 n(\ln x)^{n-1}dx = -nI_{n-1}$$

$$\therefore I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n!$$

2）令 $x=\sin^2\theta$，则 $dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\sin\theta d\theta$$

$$= -2\left[\sin^{2n}\theta\cos\theta\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^{2n-1}\theta d\theta\right]$$

$$= -2\left[2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta d\theta - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta\right]$$

$$= 2n(I_{n-1} - I_n)$$

$\therefore I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$，而 $I_0 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = 2$

$$\therefore I_n = \frac{(2n)!}{(2n+1)!}\cdot 2 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

5. 证明瑕积分 $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$ 收敛，且 $J=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.（提示：利用 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx$，并将它们相加.）

证　$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)dt$$

$$\therefore 2J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin\theta)d\theta - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin\theta)dx) - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos\theta)d\theta) - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= J - \frac{\pi}{2}\ln 2 \quad \therefore J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

6. 利用上题结果，证明：

(1) $\int_0^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$;　　(2) $\int_0^{\pi} \frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta = 2\pi\ln 2$

1) 证　$\int_0^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\ln(\sin\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta$

对于 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta$，令 $\theta = \pi - \varphi$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - \varphi)\ln(\sin\varphi)d\varphi$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)d\theta = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

2) 证　$\int_0^{\pi} \frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta = \int_0^{\pi} \theta\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \theta\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\frac{\cos t}{\sin t}dt$$

$$\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\frac{\cos x}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\therefore \text{原式} = 4 - \frac{\pi}{2}\ln 2 = 2\pi\ln 2$$

## 总 练 习 题

1. 证明下列等式:

(1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_1^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}dx, p > 0$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{x^{-p}}}{x+1}dx, 0 < p < 1.$

解　1) 因为 $P > 0$,从而易知积分收敛,令 $x = \frac{1}{t}$,则

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx$$

$$= \lim_{a\to 0+}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{(\frac{1}{t})^{p-1}}{\frac{1}{t}+1}(1-\frac{1}{t^2})dt = \lim_{a\to 0+}\int_1^{\frac{1}{a}}\frac{f^{-p}}{t+1}dt$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{t^{-p}}{t+1}dt = \int_1^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}dx$$

2) 由 $0 < P < 1$,从而易见两个积分都收敛

因而　$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_0^1\frac{x^{p-1}}{x+1}dx + \int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx$

由上题　$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_1^{+\infty}\frac{x^{-p}}{x+1}dx$

对于右端第 2 个积分,令 $x = \frac{1}{t}$,有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{\frac{1}{A}}^1\frac{t^p}{x+1}dt$$

$$= \int_0^1\frac{t^{-p}}{t+1}dt = \int_0^1\frac{x^{-p}}{x+1}dx$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{-p}}{x+1}dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x^{1-p}}{x+1}dx$$

2. 证明下列不等式:

(1) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$;

(2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx < 1+\frac{1}{2e}$.

证　1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

又 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$

2) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$

$< \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 1 + \frac{1}{2e}$

又 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx > \int_0^1 e^{-x^2}dx$

$> \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$

$\therefore \frac{1}{2}(1-\frac{1}{e}) < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx < 1+\frac{1}{2e}$

3. 计算下列反常积分的值:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx (a>0)$;　　(2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx (a>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$;　　(4) $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan\theta)d\theta$.

解　1) 原式 $= \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A e^{-ax}\cos bx dx$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \mid b\sin bx - a\cos bx \mid_0^A$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}$$

2) 原式 $= \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^{\theta} e^{ax}\sin bx dx$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\sin bx - b\cos bx) \mid_0^A$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

3) 原式 $= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{-\ln x}{1+(\frac{1}{x})^2}d(\frac{1}{x})$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{0} \frac{\ln u}{1+u^2}du$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_0^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$$

4) 令 $\tan\theta = t$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan\theta)d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$$

4. 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx\ (b \neq 0)$,$\lambda$ 取何值时绝对收敛或条件收敛.

解 $\because b \neq 0$,设 $b > 0$,记

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx \quad I_1 = \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx \quad I_2 = \int_{\frac{1}{b}}^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx$$

先讨论积分 $I_1$,当 $\lambda \leqslant 1$ 时,由于

$$\lim_{x\to0+} \frac{\sin xb}{x^\lambda} = \lim_{x\to0+} bx^{1-\lambda}\frac{\sin xb}{xb} = \begin{cases} 0 & \lambda < 1 \\ b & \lambda = 1 \end{cases}$$

$\therefore I_1$ 是正常积分,当 $\lambda > 1$ 时,$x = 0$ 是瑕点,由于

$$\lim_{x\to0+} x^{\lambda-1}\frac{\sin xb}{x^\lambda} = b\in(0,+\infty)$$

故当 $1<\lambda<2$ 时，$I_1$ 绝对收敛，当 $\lambda\geqslant2$ 时，$I_1$ 发散(因在 $(0,\frac{1}{b})$ 上，$\frac{\sin b\lambda}{x^\lambda}>0$)

积分 $I_2$ 是无穷限非正常积分，当 $\lambda\leqslant0$ 时，

令 $A_n=(2n\pi+\frac{\pi}{4})\frac{1}{b}\quad B_n=(2n\pi+\frac{\pi}{2})\frac{1}{b}$

则 $A_n\to+\infty, Bn\to+\infty(n\to\infty)$ 且

$$\left|\int_{An}^{Bn}\frac{\sin bx}{x^\lambda}dx\right| = b^\lambda\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{u^\lambda}du\geqslant(2n\pi+\frac{\pi}{4})^{-\lambda}b^\lambda\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\geqslant$$

$\frac{\pi}{8}b^\lambda\sqrt2>0$　由 Cauchy 准则知，当 $\lambda\leqslant0$ 时，$I_2$ 发散.

当 $0<\lambda\leqslant1$ 时，由狄利克雷判别法知 $I_2$ 收敛，但由于 $\int_{\frac{1}{b}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}dx$ 不绝对收敛，

由 $\left|\frac{\sin xb}{x^\lambda}\right|\geqslant\left|\frac{\sin xb}{x}\right|$　$(0\leqslant\lambda\leqslant1, x>1)$，可知当 $0<\lambda\leqslant1$ 时，积分 $I_2$ 条件收敛

当 $\lambda>1$ 时，由于 $|\sin xb/x^\lambda|\leqslant\frac{1}{x^\lambda}$，从而积分 $I_2$ 绝对收敛.

∴

| | $\lambda\leqslant0$ | $0<\lambda\leqslant1$ | $1<\lambda<2$ | $\lambda\geqslant2$ |
|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 正常积分 | 正常积分 | 绝对收敛 | 发散 |
| $I_2$ | 发散 | 收敛 | 绝对收敛 | 绝对收敛 |
| $I$ | 发散 | 收敛 | 绝对收敛 | 发散 |

5. 证明：设 $f$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$0<a<b$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a};$$

(2) 若$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

1) 证　令 $ax=t$,则$\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(t)}{t}dt(0<\varepsilon<A)$

令 $bx=u$,有$\int_\varepsilon^A\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(u)}{u}du$.于是

$$\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(y)}{y}dy-\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(y)}{y}dy$$

$$=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(y)}{y}dy-\int_{aA}^{bA}\frac{f(y)}{y}dy$$

$$=\int_a^b\frac{f(\varepsilon\omega)}{\omega}d\omega-\int_a^b\frac{f(A\omega)}{\omega}d\omega$$

$$=[f(\varepsilon\xi)-f(A\eta)]\int_a^b\frac{1}{\omega}dx$$

其中 $\xi,\eta$ 介于 $a,b$ 之间,令 $\varepsilon\to0^+,A\to+\infty$,得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-k)\int_a^b\frac{1}{\omega}d\omega=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a}$$

2) 证　由于积分$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛,则对 $\forall\varepsilon>0$,

有
$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\varepsilon b}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(\varepsilon x)}{x}dx=f(\varepsilon\xi)\int_a^b\frac{1}{x}dx(a\leqslant\xi\leqslant b)$$

令 $\varepsilon\to0$,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\int_a^b\frac{1}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

6. 证明下述命题:

(1) 设 $f$ 为$[a,+\infty)$上的非负连续函数. 若$\int_a^{+\infty}xf(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛.

(2) 设 $f$ 为$[a,+\infty)$上的连续可微函数,且当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 递减地趋于 0,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的充要条件为$\int_a^{+\infty}xf'(x)dx$ 收敛.

1) 证　取 $M=\max\{|a|,1\}$ 则$\int_a^{+\infty}xf(x)dx$ 与$\int_M^{+\infty}xf(x)dx$ 有相同的敛散性.

$\because$ 在$[M,+\infty)$上,$f(x)$为非负连续函数

$\therefore 0\leqslant f(x)\leqslant xf(x)$　$\therefore$ 由比较判别法知$\int_M^{+\infty}xf(x)dx$ 收敛

则$\int_M^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,从而$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

2) 证　由已知在$[a,+\infty)$上,$f,f'$ 均为连续函数,$\forall A>a$,

$$\int_a^A xf'(x)dx = xf(x)\Big|_a^A - \int_a^A f(x)dx \qquad ①$$

设$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,又 $f(x)$ 单调递减趋于 0　$(x\to+\infty)$

$\therefore \lim\limits_{A\to+\infty}xf(x)\Big|_a^A=-af(a)$

$\therefore$ 由 ① 知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A xf'(x)dx$ 存在,即$\int_a^{+\infty}xf'(x)dx$ 收敛

设$\int_a^{+\infty}xf'(x)dx$ 收敛,则 $\forall\varepsilon>0$,$\exists M>|a|$,当 $A>x>M$ 时,有 $\left|\int_x^A tf'(t)dt\right|<\varepsilon$,由于 $f'$ 不变号($\leqslant 0$),从而由积分中值定理知,存在 $\xi\in[x,b]$ 使得$\int_x^A tf'(t)dt=\xi\int_x^A f'(t)dt=\xi(f(A)-f(x))$

于是

$0\leqslant x|f(A)-f(x)|\leqslant\xi(f(A)-f(x))<\varepsilon.$

可见 $\quad 0 \leqslant x \mid f(A) - f(x) \mid < \varepsilon \quad (A > x > M)$

令 $A \to +\infty$ $\quad$ 由 $\lim\limits_{A \to +\infty} f(A) = 0$ 知

$\mid xf(x) \mid = x \mid f(x) \mid \leqslant \varepsilon \quad (x > M)$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 0 \quad \therefore \lim\limits_{A \to +\infty} xf(x) \mid_a^A = -af(a)$ 存在,由①知,

$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$ 存在 $\therefore \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

$\therefore \int_a^{+\infty} f$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛.

# 第十一章　反常积分

## §1　反常积分的概念

1. 讨论下列无穷积分是否收敛?若收敛,则求其值:

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx$;　　(4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$;

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;　　(6) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$;

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \sin x dx$;　　(8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

解　1) $\int_0^a xe^{-x^2}dx = \int_0^a e^{-x^2}d(\frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to+\infty}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}) = \frac{1}{2}$$

$\therefore \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$　∴ 无穷积分收敛

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

由上一题知　$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$ 收敛,令 $t = -x$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}$$

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{x^2}dx = 0$　∴ 无穷积分收敛

3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-\frac{x}{2}}dx = \lim_{a\to+\infty} -2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^a$

$= \lim\limits_{a \to +\infty}(1 - 2e^{-\frac{a}{2}}) = 1$　∴ 无穷积分收敛

4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)}dx = \lim\limits_{a \to +\infty}\int_1^a \frac{ax}{x^2(1+x)}$

$= \lim\limits_{a \to +\infty}\int_1^a (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x})dx$

$= \lim\limits_{a \to +\infty}(-\frac{1}{x} + \ln(1+x) - \ln x) |_1^a$

$= \lim\limits_{a \to +\infty}(1 - \frac{1}{a} + \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln 2) = 1 - 1\ln 2$　∴ 无穷积分收敛

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$

$= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4(x + \frac{1}{2})^2 + 4}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{4(x + \frac{1}{2})^2 + 4}dx$

$= \lim\limits_{b \to -\infty} \frac{1}{4}\arctan(x + \frac{1}{2}) |_b^0 + \lim\limits_{a \to +\infty} \frac{1}{4}\arctan(x + \frac{1}{2}) |_0^a$

$= \frac{1}{4}(\lim\limits_{a \to +\infty}\arctan(a + \frac{1}{2}) - \lim\limits_{b \to -\infty}\arctan(b + \frac{1}{2})) = \frac{\pi}{4}$

∴ 无穷积分收敛

6) $\int_0^a e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-a}\cos a - e^a \sin a)$

∴ $\lim\limits_{a \to \infty}\int_0^a e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}$　∴ 积分收敛

7) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \sin x dx = \int_{-\infty}^0 e^x \sin x dx + \int_0^{+\infty} e^x \sin x dx$

$\int_0^a e^x \sin d x = \frac{1}{2}(1 - (\cos a - \sin a)e^a)$ 当 $a \to +\infty$ 时，极限不存在，

同理$\int_b^0 e^x \sin x dx = \frac{1}{2}[(\sin b - \cos b)e^b - 1]$，当 $b \to -\infty$ 时，趋于 $-\frac{1}{2}$

∴ 原积分发散

8) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$　$\because \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(a + \sqrt{1+a^2})$ 当

$a \to +\infty$ 时，趋于 $+\infty$，∴ 原积分发散.

2. 讨论下列瑕积分是否收敛?若收敛,则求其值:

(1)$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$;　　(2)$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$;

(3)$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$;　　(4)$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(5)$\int_0^1 \ln x dx$;　　(6)$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$;

(7)$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;　　(8)$\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

1) 解　$\int_n^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-(n-a)^{1-p}]$　①

当 $P<1$ 时,$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \lim\limits_{n\to a} |_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$
收敛.

当 $P>1$ 时,$n\to a^+$ ① 式极限不存在　∴ 发散

当 $P=1$ 时,$\int_a^b \frac{1}{x-a}dx = \ln|b-a|-\ln|n-a|$ 当$n\to a^+$
极限不存在. ∴ 原积分发散

2) 解　$\int_0^b \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^b(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1})dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+1}{b-1}\right|$
$b\to 1^-$ 时,极限不存在 ∴ 原积分发散

3)$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{b\to 1^-}[2-2(1-b)^{\frac{1}{2}}] = 2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{a\to 1^+}[2-2\sqrt{a-1}] = 2$$

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = 4$　积分收敛

4)$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim\limits_{a\to 1^-}[1-\sqrt{1-a^2}] = 1$

∴ 积分收敛

5) $\because \int_a^1 \ln x dx = x\ln x \mid_a^1 - \int_a^1 \ln x = -a\ln a - (1-a)$

$$\lim_{a\to 1^+}(a-1-a\ln a) = -1 \quad \therefore \text{积分收敛}$$

6) $\int_0^a \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt$

$$= 2\left(\int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{1}{1+t^2}dt - \int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt\right)$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan\sqrt{\frac{a}{1-a}} - \arctan 0 = \arctan\sqrt{\frac{a}{1-a}} \quad ①$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{1+t^2} + \arctan t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{a}{1-a}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a(1-a)} + \arctan\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right) \quad ②$$

当 $a \to 1^-$ 时，① 式极限为 $\frac{\pi}{4}$，② 极限为 $\frac{\pi}{4}$，所以

$$\int_0^a \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \frac{\pi}{2}$$

7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}d(2x-1) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}d(2x-1)$$

$$= \operatorname{arcsh}(2x-1)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \operatorname{arcsh}(2x-1)\mid_{\frac{1}{2}}^1 = \pi$$

(8) $\int_0^1 \frac{1}{x(\ln x)^p}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln x)^p}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(\ln x)^p}dx$

$$= \lim_{a\to0^+}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx + \lim_{b\to1^-}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$$

$$= \lim_{a\to0^+}\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_a^{\frac{1}{2}} + \lim_{b\to1^-}\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_{\frac{1}{2}}^b$$

$$= \lim_{a\to0^+}\left(\frac{1}{1-p}(\ln\frac{1}{2})^{1-p} - \frac{1}{1-p}(\ln a)^{1-p}\right) + \lim_{b\to1^-}\left(\frac{1}{1-p}(\ln b)^{1-p} - \frac{1}{1-p}(\ln\frac{1}{2})^{1-p}\right)$$

$$= \lim_{a\to1^-}\frac{1}{1-p}(\ln b)^{1-p} - \lim_{a\to0^+}\frac{1}{1-p}(\ln a)^{1-p}$$

此极限不存在，故积分发散

3. 举例说明：瑕积分$\int_a^b f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f^2(x)dx$ 不一定收敛.

解　例如令 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，则$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2$

$\therefore\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，但$\int_0^1\frac{1}{x}dx$ 由 $p$ 积分知发散

4. 举例说明：$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛且 $f$ 在$[a,+\infty)$上连续时，不一定有 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

解　例如$\int_1^{+\infty}\sin x^2dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$，由狄利克雷利别法知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 收敛但当 $x\to+\infty$ 时，$\sin x^2$ 极限不存在.

5. 证明：若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，且存在极限 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $A=0$.

证若 $A\neq0$，不妨设 $A>0$，则由 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，$\exists M$，当 $x>M$ 时，有 $|f(x)-A|<\frac{A}{2}$　$f(x)>\frac{A}{2}$　$\because\int_a^{+\infty}\frac{A}{2}dx$ 发散，由比较判别法知，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，矛盾. $\therefore A=0$

6. 证明:若 $f$ 在$[a,+\infty)$上可导,且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$

$\because \int_a^{+\infty} f'(t)dt$ 收敛

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=f(a)+\int_a^{+\infty} f'(t)dt$　极限存在

又$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,由上题知,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

## §2　无穷积分的性质与收敛判别

1. 证明定理 11.2 及其推论 1.

解　定理11.2的证明:$\because \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛. $\therefore \forall \varepsilon>0, \exists G>a$,当 $u_1>G, u_2>G$ 时,令 $U_2>U_1$,有 $\left|\int_{u_1}^{u_2} g(x)dx\right|<\varepsilon$,又当 $x\in[a,+\infty)$ 时,$|f(x)|\leqslant g(x)$

$\therefore \left|\int_{u_1}^{u_2}(f(x))\right|dx \leqslant \left|\int_{u_1}^{u_2} g(x)dx\right|<\varepsilon$　$\therefore \int_a^{+\infty}(f(x))dx$ 收敛.

推论1的证明:$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=l$　$\therefore \forall\varepsilon>0$(特别取 $\varepsilon=\frac{c}{2}$),$\exists M$,当 $x>M$ 时,$\left|\frac{|f(x)|}{g(x)}-c\right|<\varepsilon$　$\because \frac{c}{2}g(x)<|f(x)|<\frac{3}{2}<g(x)$

对于 ⅰ) 由比较原则得　$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛态

对于 ⅱ) $|f(x)|<\varepsilon g(x)$　$\therefore \int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty}(f(x))dx$ 收敛

当 $c=+\infty$ 时,即: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=+\infty$,则 $\forall M>0,\exists G$,当 $x>G,\dfrac{|f(x)|}{g(x)}>M.\therefore |f(x)|>Mg(x)$

$\because\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散　$\therefore\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散

2. 设 $f$ 与 $g$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上了函数,对任何 $u>a$,它们在 $[a,u]$ 上都可积. 证明:若 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]^2dx$ 也都收敛.

证　$\because |f(x)g(x)|\leqslant\dfrac{f^2+g^2}{2}$ 且 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g^2(x)dx$ 收敛　$\therefore\int_a^{+\infty}\dfrac{f^2+g^2}{2}dx$ 收敛

由比较原则 $\int_a^{+\infty}|f(x)g(x)|dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛. 又

$$\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))^2dx=\int_a^{+\infty}f^2(x)dx+\int_a^{+\infty}g^2(x)dx+2\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$$

等式右端三个积分都收敛　$\therefore\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))^2dx$ 收敛

3. 设 $f,g,h$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的三个连续函数,且成立不等式 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. 证明:

(1) 若 $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 都收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛;

(2) 又若 $\int_a^{+\infty}h(x)dx=\int_a^{+\infty}g(x)dx=A$,则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=A$.

证　(1) $\int_a^{+\infty}h(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 都收敛 $\therefore\int_a^{+\infty}(g(x)-h(x))dx$ 收敛　又 $0\leqslant g(x)-f(x)\leqslant g(x)-h(x)$　由比较原则

知 $\int_a^{+\infty} |g(x)-f(x)|dx$ 收敛,又$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} g(x)dx + \int_a^{+\infty}(f-g)dx$,故 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

2) 对 $\forall n > a, h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ $\therefore \int_a^n h(x)dx \leqslant \int_a^n f(x)dx \leqslant \int_a^n g(x)dx$,令 $n \to +\infty$,由迫敛性得$\int_a^{+\infty} f(x)dx = A$

4. 讨论下列无穷积分的收敛性:

(1)$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;　　(2)$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}dx$;

(3)$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;　　(4)$\int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$;

(5)$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$;　　(6)$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx(n,m \geqslant 0)$.

解　1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} = 1, P > 1 \quad 0 < \lambda < +\infty$

$\therefore \int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 收敛

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1-e^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-e^x} = 0$

由 $p$ 积分知,$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ 收敛　$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}dx$ 收敛

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1, 0 < \lambda < +\infty, 0 < p < 1$

$\therefore \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ 发散

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x\arctan x}{1+x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\arctan x}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}$

由 $p$ 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛　$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{1+x^3}dx$ 收敛

5）当 $n>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}}{\dfrac{1}{x^{1+\frac{n-1}{2}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\frac{n}{2}-1}}=0$

由 $p$ 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{1+\frac{n-1}{2}}}dx$ 收敛　$\therefore$ 当 $n>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛.

当 $n\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^n}}{\dfrac{1}{x^n}}=+\infty$

$\because\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n}dx$ 发散　$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^n}dx$ 发散

6）当 $n-m>1$ 时，$\frac{1}{2}+\frac{n-m}{2}>1$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}+\frac{n-m}{2}}\frac{x^m}{1+x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1+n-m}{2}}}{1+x^n}=0$$

$\lambda=0,p=\frac{1}{2}+\frac{n-m}{2}>1$　$\therefore$ 积分收敛

5. 讨论下列无穷积分为绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}dx$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}dx$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x dx$.

解　1）$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx=2\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

$\because\frac{1}{t}$ 单调递减趋于 $0(t\to+\infty)$，$\left|\int_1^y\sin t dt\right|\leqslant 2(y>1)$

由狄利克雷判别法，积分收敛.

又 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$，$\left|\frac{\sin t}{t}\right|\geqslant\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{2t}-\frac{\cos t}{2t}$　$t\in[1,+\infty)$

其中$\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{2t}dt$　由狄利克雷判别法知收敛，而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ 发散

$\therefore\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ 发散　$\therefore$ 原积分条件收敛

2) $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}\right|dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\quad(\sin x\neq 0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\frac{1}{1+x^2}=1, P=2>1,\lambda=1\quad\therefore\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛

当 $\sin x\neq 0$ 时，$\frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2}=0\quad\therefore$ 原积分绝对收敛

3) $\left|\int_0^A\cos xdx\right|\leqslant 1,\frac{\sqrt{x}}{100+x}$在$[0,+\infty)$上单调递减且当 $x\to+\infty$ 时，趋于零，$\therefore$ 积分收敛

又$\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\right|\geqslant\frac{\sqrt{x}}{100+x}\cos^2x=\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}+\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\cos 2x$

而$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}dx$ 发散　$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(100+x)}\cos 2xdx$ 收敛

$\therefore$ 原积分为条件收敛

4) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx$

$$=\int_0^{e^e}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx+\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx$$

$\because\left|\int_{e^e}^u\sin xdx\right|\leqslant 2$ 且在$[e^e,+\infty)$上，$\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)'=\frac{1-\ln(\ln x)}{x+(\ln x)^2}<0$

$\therefore\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ 单调递减且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$

$\therefore$ 由狄利克雷判别法知，$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin xdx$ 收敛

$\therefore$ 原积分收敛

又$\left|\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin x\right|\geqslant\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\sin^2x=\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}-\frac{\cos 2x}{2\ln x}\ln(\ln x)$

而$\int_{e^e}^{+\infty}\left|\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\right|dx$ 发散，$\int_{e^e}^{+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{2\ln x}\cos xdx$ 收敛

$\therefore \int_{e^e}^{+\infty} \left| \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x \right| dx$ 发散

$\therefore$ 原积分条件收敛

6. 举例说明：$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 不一定收敛；$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛时，$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 也不一定收敛.

解　例如 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{1}{2}}} dx$　由狄利克雷判别法知收敛

但 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ 发散

7. 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 必定收敛.

证　$\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$　$\therefore$ 取 $\varepsilon = 1$，$\exists M$，当 $x > M$ 时，$|f(x)| < 1$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{M+1} f(x)dx + \int_{M+1}^{+\infty} f(x)dx$　$\because \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛　$\therefore \int_{M+1}^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛

又当 $x \in [M+1, +\infty)$ 时，$|f(x)| < 1$

$\therefore |f^2(x)| < |f(x)|$　$\because \int_{M+1}^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛

$\therefore \int_M^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛

又 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx = \int_a^{M+1} f^2(x)dx + \int_{M+1}^{+\infty} f^2(x)dx$

$\therefore \int_a^{+\infty} f^2(x)dx$　收敛

8. 证明：若 $f$ 是 $[a, +\infty)$ 上的单调函数，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，且 $f(x)=o\left(\dfrac{1}{x}\right),x\to+\infty$.

证不妨设 $f(x)$ 单调递减，则 $f(x)\geqslant 0$，(否则，$\exists x_1$，使 $f(x_1)<0$，则当 $x>x_1$ 时，$f(x)\leqslant f(x_1)<0$，$\because -\int_a^{+\infty}f(x_1)dx$ 发散，$\therefore\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，矛盾)

$\because\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，由 Cauchy 准则，对 $\forall\varepsilon>0,\exists M$，当 $x>M$ 时，$\left|\int_x^{2x}f(t)dt\right|<\varepsilon$，即 $\int_x^{2x}f(t)dt<\varepsilon$，当 $x>2M$ 时，

$$0\leqslant xf(x)=2\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(x)dt\leqslant 2\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)dt<2\varepsilon$$

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}xf(x)=0,f(x)=0(\frac{1}{x}),\text{从而}\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

9. 证明：若 $f$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证 $\because f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\sigma>0$，当 $x_1$，$x_2\in[a,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\sigma$ 时，

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ ① 又因 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，

$\therefore$ 对 $\varepsilon_1=\sqrt{\varepsilon}$，$\exists M>a$，当 $x>M$ 时，有 $\left|\int_x^{x+\sigma}f(t)dt\right|<\sqrt{\varepsilon}$②

考虑积分 $\int_x^{x+\delta}f(t)dt$　当 $x<1<x+\delta$ 时，由 ① 有

$$f(t)-\varepsilon<f(x)<(f(x)+\varepsilon)$$

从而　$\int_x^{x+\delta}f(t)dt-\sqrt{\varepsilon}\leqslant\int_x^{x+\delta}f(x)dt\leqslant\int_x^{x+\delta}f(t)dt+\sqrt{\varepsilon}$

即　$\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dt-\int_x^{x+\delta}f(t)dt\right|<\varepsilon\delta$③

$\therefore$ 当 $x>M$ 时，由 ②③ 知，$|f(x)|=\dfrac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dt\right|$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}(|\int_x^{x+\delta} f(x)dx - \int_x^{x+\delta} f(t)dt| + |\int_x^{x+\delta}| f(x)dt) < 2\varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

10. 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法.

证令 $F(u) = \int_a^u f(x)dx$　$\because \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

$\therefore \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = \lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$ 极限存在,记为 $J$,取 $\varepsilon = 1$,$\exists A$,当 $n > A$ 时,有 $|\int_a^u f(x)dx - J| < 1$

$\therefore |\int_a^u f(x)dx| < |J| + 1$　$\therefore |F(u)| < |J| + 1$. 又在 $[a, u+1]$ 上,$F(u)$ 连续,从而有界　$\therefore \exists M > |J| + 1$,对一切 $u \in [a, +\infty)$,有 $|\int_a^u f(x)dx| \leqslant M$,即 $|F(u)| \leqslant M$. $\therefore F(u)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

又 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界,$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 极限存在,记为 $B$,令 $g_1(x) = g(x) - B$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x) - B) = 0$

$\therefore g_1(x)$ 单调趋于 0,由狄利克雷判别法知,$\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)(g(x) - B)dx$ 收敛

又 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛　$\therefore \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx + B\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

## §3　瑕积分的性质与收敛判别

1. 写出性质 3 的证明.

证 $\because \int_u^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛 $\therefore \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $u_1, u_2 \in (a,$

$a+\delta)$ 时，有 $\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$

$\therefore \left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|\leqslant\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$

$\therefore\int_a^b f(x)dx$ 收敛，且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$

2. 写出定理 11.6 及其推论 1 的证明.

证 $\because\int_a^b g(x)dx$ 收敛　$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)$ 时，有 $\left|\int_{u_1}^{u_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$，又 $|f(x)|\leqslant g(x)$

$\therefore\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|\leqslant\left|\int_{u_1}^{u_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$

$\therefore\int_a^b(f(x))dx$ 收敛

推论 1　$\because\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=c$　$\therefore\forall\varepsilon>0$（特别取 $\varepsilon=\dfrac{c}{2}$）$\exists\delta>0$，当 $a<x<a+\delta$ 时，$\left|\dfrac{|f(x)|}{g(x)}-c\right|<\varepsilon$

$\therefore\dfrac{c}{2}g(x)<|f(x)|<\dfrac{3}{2}cg(x)$

由比较原则，$\int_a^b|f(x)|dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛态.

当 $c=0$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon g(x)$. 当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b|f(x)|dx$ 收敛. 当 $c=+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}=+\infty$ 则对 $\forall M>0,\exists\sigma>0$，当 $a<x<a+\sigma$ 时，$\dfrac{|f(x)|}{g(x)}>M$

$\therefore|f(x)|>Mg(x)$ 由 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，知 $\int_a^b|f(x)|dx$ 发散

3. 讨论下列瑕积分的收敛性：

(1) $\int_0^2\dfrac{dx}{(x-1)^2}$;　　　　(2) $\int_0^x\dfrac{\sin x}{x^{3/2}}dx$;

(3)$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$；　　(4)$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$；

(5)$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}dx$；　　(6)$\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}dx$；

(7)$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$；　　(8)$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$.

解　1) 1 是瑕点

$\because \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\frac{1}{(x-1)^2}=1 \quad P>1,0<\lambda<+\infty$　积分发散

2) 0 是瑕点

$\because \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1 \quad 0<P<1 \quad 0<\lambda<+\infty$，积分收敛

3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sin x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$

$\because \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}=0,\lambda=0,0<P<1$

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}dx$ 发散　$\therefore$ 原积分发散

4) 1 为瑕点

$\therefore \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\ln x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}=0,\lambda=0,0<P<1,$

$\therefore \int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$ 收敛

5) 1 为瑕点

$\therefore \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)\frac{\arctan x}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{12},P=1,0<\lambda<+\infty$

$\therefore \int_0^1\frac{\arctan x}{1-x^3}dx$ 发散

6) 0 为瑕点($m>0$)

$\because \lim\limits_{x\to 0+} x^{m-2}\dfrac{1-\cos x}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}, \lambda = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 当 $0 < m < 3$ 时，积分收敛；$m \geqslant 3$ 时，积分发散，$m \leqslant 0$ 时，原积分为定积分

7）0 为瑕点

令 $\dfrac{1}{x} = t$，则 $\int_0^1 \dfrac{1}{x^a}\sin\dfrac{1}{x}dx = \int_1^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t^{2-a}}dt$

当 $0 \leqslant a \leqslant 1$ 时，$\left|\dfrac{\sin t}{t^{2-a}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{2-a}}$ 而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^{2-a}}dt$ 收敛

$\therefore$ 原积分绝对收敛

当 $1 \leqslant a < 2$ 时，$\dfrac{1}{t^{2-a}}$ 单调递减 $\to 0$ $\left|\int_1^u \sin t dt\right| \leqslant 2$

$\because$ 积分收敛　　又当 $t \in [1, +\infty)$ $\left|\dfrac{\sin t}{t^{2-a}}\right| \geqslant \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2^t} - \dfrac{\cos 2t}{2^t}$

$\therefore \int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2t}dt$ 发散，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos t}{2t}dt$ 收敛

$\therefore$ 原积分条件收敛

当 $a \geqslant 2$ 时，$x \cdot x^{a-2}\sin x$ 极限不存在($x \to +\infty$)

$\therefore$ 积分发散

8）$\int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx = \int_0^1 e^{-x}\ln x dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$

$\because \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}e^{-x}\sin x = 0, \lambda = 0, 0 < P < 1$

$\therefore \int_0^1 e^{-x}\ln x dx$ 收敛

$\because \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\ln x + 3}{x^3} = 0, \lambda = 0, P > 1$

$\therefore \int_1^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$ 收敛　$\therefore$ 原积分收敛

4．计算下列瑕积分的值(其中 $n$ 为正整数)：

(1) $\int_0^1 (\ln x)^n dx$；　　　(2) $\int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx$.

解 1) 当 $n=1$ 时,有

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{b\to 0^+}(x\ln x)\Big|_b^1 - \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 dx = -1$$

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 (\ln x)^n dx$$

$$= \lim_{b\to 0^+}(x(\ln x)^n)\Big|_b^1 - \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 n(\ln x)^{n-1}dx = -nI_{n-1}$$

$$\therefore I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n!$$

2) 令 $x=\sin^2\theta$,则 $dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\sin\theta d\theta$$

$$= -2[\sin^{2n}\theta\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^{2n-1}\theta d\theta]$$

$$= -2[2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta d\theta - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta]$$

$$= 2n(I_{n-1} - I_n)$$

$$\therefore I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1},\text{而 } I_0 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = 2$$

$$\therefore I_n = \frac{(2n)!}{(2n+1)!}\cdot 2 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

5. 证明瑕积分 $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx$ 收敛,且 $J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.(提示:利用 $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)dx$,并将它们相加.)

证 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-t))d(\frac{\pi}{2}-t)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)dt$$

$$\therefore 2J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin\theta)d\theta - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin\theta)dx) - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos\theta)d\theta) - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$= J - \frac{\pi}{2}\ln 2 \quad \therefore J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

6. 利用上题结果，证明：

(1) $\int_0^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$;　　(2) $\int_0^{\pi} \frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta = 2\pi\ln 2$

1) 证　$\int_0^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\ln(\sin\theta)d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta$

对于 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta$，令 $\theta = \pi - \varphi$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-\varphi)\ln(\sin\varphi)d\varphi$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \theta\ln(\sin\theta)d\theta = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin\theta)d\theta = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$$

2) 证　$\int_0^{\pi} \frac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}d\theta = \int_0^{\pi} \theta\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \theta\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\frac{\cos t}{\sin t}dt$$

$$\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\therefore \text{原式} = 4 - \frac{\pi}{2}\ln 2 = 2\pi\ln 2$$

# 总 练 习 题

1. 证明下列等式:

(1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx, p > 0$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{x^{-p}}}{x+1}dx, 0 < p < 1.$

解 1) 因为 $P > 0$,从而易知积分收敛,令 $x = \frac{1}{t}$,则

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx$$

$$= \lim_{a\to 0+}\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{(\frac{1}{t})^{p-1}}{\frac{1}{t}+1}(1 - \frac{1}{t^2})dt = \lim_{a\to 0+}\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{f^{-p}}{t+1}dt$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-p}}{t+1}dt = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx$$

2) 由 $0 < P < 1$,从而易见两个积分都收敛

因而 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}dx$

由上题 $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx$

对于右端第 2 个积分,令 $x = \frac{1}{t}$,有

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{\frac{1}{A}}^1 \frac{t^p}{x+1}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{-p}}{t+1}dt = \int_0^1 \frac{x^{-p}}{x+1}dx$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{-p}}{x+1}dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x^{1-p}}{x+1}dx$$

2. 证明下列不等式:

(1) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$;

(2) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right) < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx < 1+\frac{1}{2e}$.

证　1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

又 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$

2) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$

$< \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 1+\frac{1}{2e}$

又 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx > \int_0^1 e^{-x^2}dx$

$> \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$

$\therefore \frac{1}{2}(1-\frac{1}{e}) < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx < 1+\frac{1}{2e}$

3. 计算下列反常积分的值:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx (a>0)$;　　(2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx (a>0)$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$;　　(4) $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan\theta)d\theta$.

解　1) 原式 $= \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A e^{-ax}\cos bx dx$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \mid b\sin bx - a\cos bx \mid_0^A$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}$$

2) 原式 $= \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^\theta e^{ax}\sin bx dx$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\sin bx - b\cos bx) \mid_0^A$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

3) 原式 $= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{-\ln x}{1+(\frac{1}{x})^2}d(\frac{1}{x})$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^0 \frac{\ln u}{1+u^2}du$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$$

4) 令 $\tan\theta = t$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan\theta)d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$$

4. 讨论反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx(b \neq 0)$,$\lambda$ 取何值时绝对收敛或条件收敛.

解　$\because b \neq 0$,设 $b > 0$,记

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx \quad I_1 = \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx \quad I_2 = \int_{\frac{1}{b}}^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\lambda}dx$$

先讨论积分 $I_1$,当 $\lambda \leqslant 1$ 时,由于

$$\lim_{x\to0+} \frac{\sin xb}{x^\lambda} = \lim_{x\to0+} bx^{1-\lambda}\frac{\sin xb}{xb} = \begin{cases} 0 & \lambda < 1 \\ b & \lambda = 1 \end{cases}$$

$\therefore I_1$ 是正常积分,当 $\lambda > 1$ 时,$x = 0$ 是瑕点,由于

$$\lim_{x\to 0+} x^{\lambda-1}\frac{\sin xb}{x^{\lambda}} = b \in (0,+\infty)$$

故当 $1<\lambda<2$ 时，$I_1$ 绝对收敛，当 $\lambda\geqslant 2$ 时，$I_1$ 发散(因在$(0,\frac{1}{b})$上，$\frac{\sin b\lambda}{x^{\lambda}}>0$)

积分 $I_2$ 是无穷限非正常积分，当 $\lambda\leqslant 0$ 时，

令 $A_n=(2n\pi+\frac{\pi}{4})\frac{1}{b}$　$B_n=(2n\pi+\frac{\pi}{2})\frac{1}{b}$

则 $A_n\to+\infty, Bn\to+\infty(n\to\infty)$ 且

$$\left|\int_{An}^{Bn}\frac{\sin bx}{x^{\lambda}}dx\right| = b^{\lambda}\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{u^{\lambda}}du \geqslant (2n\pi+\frac{\pi}{4})^{-\lambda}b^{\lambda}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\geqslant$$

$\frac{\pi}{8}b^{\lambda}\sqrt{2}>0$　由 Cauchy 准则知，当 $\lambda\leqslant 0$ 时，$I_2$ 发散.

当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时，由狄利克雷判别法知 $I_2$ 收敛，但由于$\int_{\frac{1}{b}}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}dx$不绝对收敛，

由 $\left|\frac{\sin xb}{x^{\lambda}}\right|\geqslant\left|\frac{\sin xb}{x}\right|$　$(0\leqslant\lambda\leqslant 1, x>1)$，可知当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时，积分 $I_2$ 条件收敛

当 $\lambda>1$ 时，由于 $|\sin xb/x^{\lambda}|\leqslant\frac{1}{x^{\lambda}}$，从而积分 $I_2$ 绝对收敛.

$\therefore$

| | $\lambda\leqslant 0$ | $0<\lambda\leqslant 1$ | $1<\lambda<2$ | $\lambda\geqslant 2$ |
|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 正常积分 | 正常积分 | 绝对收敛 | 发散 |
| $I_2$ | 发散 | 收敛 | 绝对收敛 | 绝对收敛 |
| $I$ | 发散 | 收敛 | 绝对收敛 | 发散 |

5．证明：设 $f$ 在$[0,+\infty)$上连续，$0<a<b$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a};$$

(2) 若$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

1) 证　令 $ax=t$,则$\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(t)}{t}dt\,(0<\varepsilon<A)$

令 $bx=u$,有$\int_\varepsilon^A\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(u)}{u}du$.于是

$$\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(y)}{y}dy-\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(y)}{y}dy$$

$$=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(y)}{y}dy-\int_{aA}^{bA}\frac{f(y)}{y}dy$$

$$=\int_a^b\frac{f(\varepsilon\omega)}{\omega}d\omega-\int_a^b\frac{f(A\omega)}{\omega}d\omega$$

$$=[f(\varepsilon\xi)-f(A\eta)]\int_a^b\frac{1}{\omega}dx$$

其中 $\xi,\eta$ 介于 $a,b$ 之间,令 $\varepsilon\to0^+,A\to+\infty$,得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-k)\int_a^b\frac{1}{\omega}d\omega=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a}$$

2) 证　由于积分$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛,则对 $\forall\varepsilon>0$,

有
$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\varepsilon a}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\varepsilon b}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(\varepsilon x)}{x}dx=f(\varepsilon\xi)\int_a^b\frac{1}{x}dx\,(a\leqslant\xi\leqslant b)$$

令 $\varepsilon\to0$,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\int_a^b\frac{1}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

6. 证明下述命题:

(1) 设 $f$ 为 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数. 若 $\int_a^{+\infty} xf(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

(2) 设 $f$ 为 $[a,+\infty)$ 上的连续可微函数, 且当 $x \to +\infty$ 时, $f(x)$ 递减地趋于 0, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件为 $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛.

1) 证　取 $M = \max\{|a|,1\}$ 则 $\int_a^{+\infty} xf(x)dx$ 与 $\int_M^{+\infty} xf(x)dx$ 有相同的敛散性.

$\because$ 在 $[M,+\infty)$ 上, $f(x)$ 为非负连续函数

$\therefore 0 \leqslant f(x) \leqslant xf(x)$　$\therefore$ 由比较判别法知 $\int_M^{+\infty} xf(x)dx$ 收敛

则 $\int_M^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 从而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

2) 证　由已知在 $[a,+\infty)$ 上, $f, f'$ 均为连续函数, $\forall A > a$,

$$\int_a^A xf'(x)dx = xf(x)\Big|_a^A - \int_a^A f(x)dx \qquad ①$$

设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 又 $f(x)$ 单调递减趋于 0　$(x \to +\infty)$

$\therefore \lim\limits_{A\to+\infty} xf(x)\Big|_a^A = -af(a)$

$\therefore$ 由 ① 知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A xf'(x)dx$ 存在, 即 $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛

设 $\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > |a|$, 当 $A > x > M$ 时, 有 $\left|\int_x^A tf'(t)dt\right| < \varepsilon$, 由于 $f'$ 不变号 $(\leqslant 0)$, 从而由积分中值定理知, 存在 $\xi \in [x,b]$ 使得 $\int_x^A tf'(t)dt = \xi\int_x^A f'(t)dt = \xi(f(A) - f(x))$

于是

$0 \leqslant x\,|f(A) - f(x)| \leqslant \xi(f(A) - f(x)) < \varepsilon.$

可见　$0 \leqslant x \mid f(A) - f(x) \mid < \varepsilon \quad (A > x > M)$

令 $A \to +\infty$　由 $\lim\limits_{A \to +\infty} f(A) = 0$ 知

$\mid xf(x) \mid = x \mid f(x) \mid \leqslant \varepsilon \quad (x > M)$

$\therefore \lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = 0 \quad \therefore \lim\limits_{A \to +\infty} xf(x) \mid_a^A = -af(a)$ 存在，由 ① 知，$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$ 存在 $\therefore \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

$\therefore \int_a^{+\infty} f$ 收敛 $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} xf'(x)dx$ 收敛.