§5

1. 证明: 在曲面的一般参数下, Gauss方程为

$$\begin{aligned} KF &= (\Gamma_{12}^1)_1 - (\Gamma_{11}^1)_2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 \\ KE &= (\Gamma_{11}^2)_2 - (\Gamma_{12}^2)_1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \\ KG &= (\Gamma_{22}^1)_1 - (\Gamma_{12}^1)_2 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 \\ KF &= (\Gamma_{12}^2)_2 - (\Gamma_{22}^2)_1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 \end{aligned}$$

而Codazzi方程为

$$\begin{aligned} L_2 - M_1 &= L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 \\ M_2 - N_1 &= L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

2. 证明: 假设将Codazzi方程中的L, M, N分别用E, F, G代替, 则可得到恒等式:

$$\begin{aligned} E_2 - F_1 &= E\Gamma_{12}^1 + F(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - G\Gamma_{11}^2 \\ F_2 - G_1 &= E\Gamma_{22}^1 + F(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - G\Gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

3. 证明: 当曲面的参数曲线取曲率线网时, Codazzi方程化为:

$$L_2 = HE_2,\ N_1 = HG_1$$

从而证明: 平均曲率为常数的曲面或者是平面, 或者是球面, 或基本形式由下式给出:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \lambda(du^2 + dv^2) \\ \mathrm{II} &= (1+\lambda H)du^2 - (1-\lambda H)dv^2 \end{aligned}$$

4. 已知以下曲面的第一基本形式, 求总曲率.

(1) $\mathrm{I} = \frac{du^2+dv^2}{[1+\frac{k}{4}(u^2+v^2)]^2}$

(2) $\mathrm{I} = \frac{a^2}{v^2}(du^2+dv^2) \quad (v>0)$

(3) $\mathrm{I} = du^2 + e^{\frac{2u}{a}}dv^2$

(4) $\mathrm{I} = du^2 + \cosh^2\frac{u}{a}dv^2$

其中k, a为常数.

5. 设曲面线素取等温形式: $\mathrm{I} = \rho^2(\mathrm{du}^2 + \mathrm{dv}^2)$, 证明:

$$K = -\frac{1}{\rho^2}\Delta\ln\rho$$

其中$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$. 从而证明: 当$\rho = \frac{1}{u^2+v^2+c}$时, $K = 4c$(常数).

6. 证明: 在曲面的一般参数下:

$$K = \frac{1}{g^2}\left(\begin{vmatrix} -\frac{G_{11}}{2} + F_{12} - \frac{E_{12}}{2} & \frac{E_1}{2} & F_1 - \frac{E_2}{2} \\ F_2 - \frac{G_1}{2} & E & F \\ \frac{G_2}{2} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{E_2}{2} & \frac{G_1}{2} \\ \frac{E_2}{2} & E & F \\ \frac{G_1}{2} & F & G \end{vmatrix}\right)$$

7. 设曲面S_1与S_2的第一基本形式相差正常数倍: $\mathrm{I}_2=\rho\mathrm{I}_2$(称两曲面位似). 证明: 相应的总曲率有如下关系:

$$K_1=\frac{1}{\rho}K_2$$

8. 证明下列曲面之间不存在等距对应:

(1) 球面; (2) 柱面; (3) 鞍面$z=x^2-y^2$.

9. 证明: 曲面S : $\mathbf{r}=(u\cos v,u\sin v,\ln u)$与$\bar{S}$: $\bar{\mathbf{r}}=(\bar{u}\cos\bar{v},\bar{u}\sin\bar{v},\bar{v})$在点$(u,v)$与$(\bar{u},\bar{v})$处总曲率相等, 但$S$与$\bar{S}$不存在等距对应.

10. 证明: 曲面S : $\mathbf{r}=(au,bv,\frac{au^2+bv^2}{2})$与$\bar{S}$: $\bar{\mathbf{r}}=(\bar{a}\bar{u},\bar{b}\bar{v},\frac{\bar{a}\bar{u}^2+\bar{b}\bar{v}^2}{2})$, 当$ab=\bar{a}\bar{b}$时, 在点$(u,v)$与$(\bar{u},\bar{v})$处总曲率相等, 但$S$与$\bar{S}$不存在等距对应.

11. 利用曲面论基本定理证明: 不存在曲面, 使

$$E=G=1,\ F=0;\quad L=1,\ M=0,\ N=-1$$

又: 是否存在曲面, 使

$$E=1,\ F=0,\ G=\cos^2 u;\quad L=\cos^2 u,\ M=0,\ N=1$$

12. 设曲面的第一, 第二基本形式为

$$\mathrm{I}=\mathrm{II}=du^2+\cos^2 u dv^2$$

证明: 曲面是单位球面.

13. 若曲面的第一, 第二基本形式分别为

$$\mathrm{I}=(1+u^2)du^2+u^2dv^2,\quad \mathrm{II}=\frac{du^2+u^2dv^2}{\sqrt{1+u^2}}$$

求该曲面.

§6

1. 计算曲线$\mathbf{r}=(\frac{1}{k}\cos ks,\frac{1}{k}\sin ks,h)$的曲率, 其中$0<h<1$, $k=\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}$, 并求它在单位球面上的切向法曲率及测地曲率, 并验证:

$$k\mathbf{N}=k_n\mathbf{n}+\boldsymbol{\tau}$$

2. 当参数曲线构成正交网时, 求参数曲线的测地曲率k_{g_1}与k_{g_2}, 并证明:

(1) 此时Liouville公式可写成

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}+k_{g_1}\cos\theta+k_{g_2}\sin\theta$$

(2)

$$K=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}(k_{g_1}\sqrt{E})-\frac{\partial}{\partial u}(k_{g_2}\sqrt{G})\right]$$

(3) 若k为u曲线的曲率, 则

$$k^2=\frac{(E_2)^2}{4E^2G}+\frac{L^2}{E^2}$$

3. 证明: 在球面$\mathbf{r}=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$ $(-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2},\ 0\le v<2\pi)$上, 任何曲线的测地曲率可写成

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\sin u\frac{dv}{ds}$$

其中θ表示曲线与经线的交角.

4. 证明: 旋转曲面上的纬线的测地曲率等于常数. 它的倒数(测地曲率半径) 等于经线的切线上从切点到旋转轴之间的线段长.

5. 证明: 在曲面的一般参数下, 弧长参数曲线$u=u(s),\ v=v(s)$的测地曲率为

$$k_g=\sqrt{g}(Bu'-Av'+u'v''-v'u'')$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \Gamma^1_{11}u'^2+2\Gamma^1_{12}u'v'+\Gamma^1_{22}v'^2 \\ B &= \Gamma^2_{11}u'^2+2\Gamma^2_{12}u'v'+\Gamma^2_{22}v'^2 \end{aligned}$$

从而证明参数曲线的测地曲率分别为

$$k_{g_1}=\sqrt{g}\,\Gamma^2_{11}u'^3,\ \ k_{g_2}=-\sqrt{g}\,\Gamma^1_{22}v'^3$$

6. 证明: 曲线(非直线)为曲面上的测地线的充要条件是, 曲线的密切平面与曲面的切平面正交, 即曲线的从切平面与曲面的切平面重合.

7. 证明: 若曲面的所有测地线均为平面曲线, 则曲面为全脐点曲面.

8. 利用Liouville公式证明:

(1) 平面上的测地线为直线;

(2) 圆柱面上的测地线为圆柱螺线.

9. 求正螺面$\mathbf{r}=(u\cos v, u\sin v, av)$上的测地线.

10. 求以下曲面的测地线:

(1) $ds^2=\rho(u)^2(du^2+dv^2)$

(2) $ds^2=v(du^2+dv^2)$

(3) $ds^2=\frac{a^2}{v^2}(du^2+dv^2)$ (a为常数)

(4) $ds^2=[\varphi(u)+\psi(v)](du^2+dv^2)$

11. 证明:

(1) 若曲线既是测地线又是渐近曲线, 则它必为直线;

(2) 若曲线既是测地线又是曲率线, 则它必为平面曲线.

12. 证明: 非直线的测地线若为平面曲线, 则它必为曲率线.

13. 证明: 若曲面上有两族测地线交于定角, 则曲面是可展曲面.

14. 设曲面S_1与S_2沿着曲线C相切, C是S_1的测地线. 证明: C 也是S_2的测地线.

15. 证明: 曲面上测地线的方程在一般参数下可取如下形式:

$$\frac{d^2v}{du^2}=\Gamma^2_{11}\Big(\frac{dv}{du}\Big)^3+(2\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{22})\Big(\frac{dv}{du}\Big)^2+(\Gamma^1_{11}-2\Gamma^2_{12})\frac{dv}{du}-\Gamma^2_{11}$$

16. 证明: 柱面的测地线是一般螺线.
17. 求旋转曲面$\mathbf{r} = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, t)$的测地线. 设$\theta$为测地线与经线的交角, f为交点到旋转轴之间的距离, 证明:

$$f\sin\theta = 常数$$

利用此结果研究正圆锥面上的测地线.
18. 设在旋转曲面上有一条测地线与经线交于定角. 证明: 此时曲面为圆柱面.
19. 求曲面$F(x,y,z)=0$的测地线方程.
20. 证明: 若曲面S是某曲线C的从切平面的包络, 则C是S的测地线.
21. 设以曲面上一点为中心, r为半径作测地圆, 周长为L, 面积为A. 证明:

$$\begin{aligned} K_0 &= \lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r - L}{r^3} \\ K_0 &= \lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\frac{\pi r^2 - A}{r^4} \end{aligned}$$

从而总曲率刻划了曲面在给定点邻近的内蕴几何与平面几何的差异.
22. 设曲面线素为$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$

(1) 求Γ_{ij}^k;
(2) 证明: u曲线为测地线;
(3) 证明: $K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$;
(4) 若一测地线与u线的交角为θ, 证明: $\frac{d\theta}{dv} = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}$.

23. 证明: 存在测地坐标系, 使曲面线素取如下形式:

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2$$

且有

$$\sqrt{G}|_{u=0} = 1, \qquad (\sqrt{G})_u|_{u=0} = 0$$

24. 证明: 常曲率曲面的线素可取如下形式:

$K=0$时, $\quad ds^2 = du^2 + dv^2$
$K = \frac{1}{a^2} > 0$时, $\quad ds^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{a}dv^2$
$K = -\frac{1}{a^2} < 0$时, $\quad ds^2 = du^2 + \cosh^2\frac{u}{a}dv^2$

25. 证明: 负常曲率曲面($K = -\frac{1}{a^2} < 0$)的线素可取如下形式:

(1) $ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{a}}dv^2$
(2) $ds^2 = \frac{a^2}{v^2}(du^2 + dv^2)$

26. 已给常曲率曲面:

$$\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}u)dv^2 \quad (K>0) \\ ds^2 &= du^2 - \frac{1}{K}\sinh^2(\sqrt{-K}u)dv^2 \quad (K<0) \end{aligned}$$

证明: 测地线可分别表示为

$$A\sin(\sqrt{K}u)\cos v + B\sin(\sqrt{K}u)\sin v + C\cos(\sqrt{K}u) = 0$$

$$A\sinh(\sqrt{-K}u)\cos v + B\sinh(\sqrt{-K}u)\sin v + C\cosh(\sqrt{-K}u) = 0$$

27. 设常曲率曲面S的线素为$ds^2 = du^2 + c^2 e^{\frac{2u}{a}} dv^2$, 曲面$\bar{S}$: $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - a\mathbf{r}_1$. 证明: $\bar{S}$与S有相同的总曲率, 但对应点的切平面互相正交.
28. 已知与u线交于θ角的测地线满足$d\theta = -(\sqrt{G})_2 dv$. 证明Gauss-Bonnet公式在测地三角形的特殊情况:

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} K d\sigma = A + B + C - \pi$$

29. 设曲面上无限小的测地三角形ABC边长分别为a, b, c. 边$\widehat{\mathrm{AB}}$所对的角为C. 证明: 三角形面积S与点C处的总曲率有如下关系:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(C - \frac{KS}{3}\right)$$

§7

1. 证明: 曲面S上u^i曲线的单位切向量沿着曲线C平行移动的充要条件是: 沿着曲线C

$$\Gamma_{ij}^k du^j = 0 \quad (k \neq i)$$

2. 设曲面的线素为$ds^2 = du^2 + 2F du dv + dv^2$. 证明: 坐标曲线切向量$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$分别沿着坐标曲线$u =$常数与$v =$常数平行移动.