第 11 讲：函数列的收敛性, 幂级数，2019.3.31

1. 举例说明函数列的点态收敛和内闭一致收敛不同.

2. 证明复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n), \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

收敛.

3. 假设 $\mathrm{Re}(z_n) \geq 0$, $\forall n \geq 1$. 证明如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ 也收敛.

4. 求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$$

的收敛半径 $R$. 讨论级数在圆周 $\{|z| = R\}$ 上的敛散性, 并给出严格证明.

5. 求出下面级数的收敛半径

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n, \ \sum_{n=1}^{\infty} (n + a^n) z^n, \ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{3^n}.$$

6. 求出下面函数项级数的收敛范围

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z^n}{n^2} + \frac{1}{2^n z^n} \right), \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}.$$

7. (附加题，不做要求) 尝试证明 Morera 定理的如下形式的推广：

假设 $f$ 在平面区域 $\Omega$ 上连续, 并且沿着 $\Omega$ 内任意圆周的积分为 0, 证明：$f$ 在 $\Omega$ 中全纯. 请将证明发送至 wxg688@163.com. 无截止日期.