第 8 讲：Cauchy 积分定理, 2020-3-19

1. 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{2z-1}{z(z-1)}dz.$$

2. 假设 γ 是一个椭圆的边界，$a \notin \gamma$，计算积分

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a}dz.$$

3. 假设 f 在区域 $\{z \in \mathbb{C}; |z| > r\}$ 上全纯, 满足 $\lim_{z\to\infty} zf(z) = A$, 证明

$$\int_{|z|=R} f(z)dz = 2\pi i A,$$

这里 $R > r$.

4. 假设 n 为正整数, 通过计算积分

$$\int_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

证明

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

5. 假设 f 在 z_0 处连续, 证明

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0).$$

6. 如果 f 是多项式, γ 是 Ω 中的一条分段光滑闭曲线, 证明

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z)dz$$

是纯虚数.

7. 假设 P 是多项式, γ 是圆周 $\{|z-a| = R\}$, 计算积分

$$\int_{\gamma} P(z)d\overline{z},$$

这里 $d\overline{z} = \overline{dz} = dx - idy$.