第 24 讲 调和函数 2

1. 利用调和函数的均值性质证明

$$\int_0^\pi \log(1-2r\cos t+r^2)dt=0, 0<r<1.$$

2. (调和函数列的紧性) 设 $\{u_n\}$ 是区域 Ω 上的一列调和函数, 内闭一致收敛于函数 u, 证明 u 在 Ω 上调和。

3. (唯一性定理) u 在区域 D 上调和，且在 D 的子区域 G 上恒等于 0, 证明 u 在 D 上恒为零. 若将 G 改为一列收敛于 $z_0\in D$ 的点列，结论是否成立？

4. (两种积分公式) 单位圆周上给出连续函数 $\cos t$.

(1). 求出单位圆盘上 Dirichlet 问题的解.

(2). 求出单位圆盘上 Schwarz 问题的解.

5. (Liouville 型定理的应用) 复平面上的调和函数 u 满足 $|u(x,y)|\leq K|x+y|$, 证明 $u(z)=k(x+y)$ 其中 k 是实数, 满足 $|k|\leq K$.

6. (调和函数的 Hadamard 三圆定理) 设 $0<r_1<r_2<\infty$, $\Omega=\{z\in\mathbb{C}; r_1<|z|<r_2\}$. u 在 Ω 上调和, 在闭包 $\overline{\Omega}$ 上连续, 记 $M(r)=\max_{|z|=r}u(z)(r_1\leq r\leq r_2)$, 证明 $M(r)$ 在 $[r_1,r_2]$ 上是 $\log r$ 的凸函数, 即

$$M(r)\leq\frac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}M(r_1)+\frac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}M(r_2).$$