李洪全老师部分期末试题

第四蛋女士　整理

2018 年 1 月 21 日

2007-2008

1. 填空题 (5×6)

(1) $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^3}\,\mathrm{d}x=$

(2) $\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x=$

(3) 曲面$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=2x^2+y^2\end{cases}$ 在点$(1,1,3)$处的切线方程为

(4) $f(x^2+y^2+z^2,xyz)=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=$

(5) $I(t)=\int_0^{\sin t}\frac{\ln(1+tx)}{x}\,\mathrm{d}x$, $\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=$

(6) $\overrightarrow{f}(x,y,z)=\frac{(y-z,z-x,x-y)}{x^2+y^2+z^2}$, $\nabla\times\overrightarrow{f}(x,y,z)=$

解答题 (10×7)

2. 由变量代换$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把$6z_{xx}+z_{xy}-z_{yy}=0$化简为$z_{uv}=0$, 求a的值.

3. 设$\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t=A$, D是由曲线$xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$所围区域, 求二重积分$\iint_D f(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. 计算曲面$z=2\sqrt{xy}(x,y\geq 0)$包含在球面$x^2+y^2+z^2=1$内的部分的面积.

5. 利用Lagrange乘数法, 在曲面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1(x,y,z>0)$ 内的部分的面积.

6. 计算第二类曲线积分: $I=\int_L(x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-zx)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z$, 其中有向曲线$L$为$L:x=e^t\cos t,y=e^t\sin t,z=t$, $t:0\to 2\pi$.

7. 判断含参变量反常积分$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{1+yx^2}\,\mathrm{d}x$ 关于y在下述区间上是否一致收敛? 证明你的断言. $(1)0<y_0\leq y<+\infty$; $(2)0<y<+\infty$.

8. 设α不等于整数, 求$f(x)=\cos\alpha x$在$x\in[-\pi,\pi]$ 上的Fourier展开, 并利用展开式证明:$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$.

2008-2009 I

1. 计算 (60)

(1) 在曲面$z=xy$上找一点, 使该曲面在这点的法线垂直于平面$x+3y+z+9=0$, 并写出这条法线的方程.

(2) 计算曲线积分$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 是曲线$\begin{cases} x=2t^2+t+1, \\ y=t^2+1 \end{cases}$ 从点$(1,1)$ 到点$(4,2)$的一段.

(3) 计算三重积分$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是球$\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le h^2\}$与$\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 2hz\}$的公共部分$(h>0)$.

(4) 计算曲面积分$\iint_\Sigma (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截的有界部分.

(5) 计算曲面积分$\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 为曲面$x^2+y^2+z^2=1(x,y\ge 0)$, 且定向取为: 曲面的法向量与x 轴的正向的夹角为锐角.

2. (10) 设$f(x)=x^2(-\pi\le x\le\pi)$.

(1) 将$f(x)$展开为Fourier级数; (2) 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$的和.

3. (10) 求曲线$\begin{cases} z=\sqrt{x}, \\ y=0 \end{cases}$ 与$\begin{cases} x+2y-3=0, \\ z=0 \end{cases}$ 的最短距离.

4. (10) 设函数$z=f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}(a>0)$上具有连续的偏导数, 且在$D$的边界$\partial D$上成立$f(x,y)=0$.

(1) 计算$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(2) 证明: $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_D y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;

(3) 证明: $\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\le \frac{\pi}{3}a^3\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

5. (10) 设$f(y)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{1+5x^2}\,\mathrm{d}x$, $y\in(-\infty,+\infty)$.

(1) 证明: 积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{1+5x^2}\,\mathrm{d}x$ 关于y在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛;

(2) 证明: $\lim\limits_{y\to\infty}f(y)=0$;

(3) 问$f(y)$是否在$(-\infty,+\infty)$上一致连续? 试说明理由.

2008-2009 II

1. 填空题 (5×6)

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在$(3,4)$沿$\overrightarrow{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的方向导数是

(2) 球面$x^2+y^2+z^2=4a^2$和柱面$x^2+y^2=2ay$的交线在点$P(a,a,\sqrt{2}a)$处的法平面方程为

(3) 交换积分次序: $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$

(4) $I(y)=\displaystyle\int_0^{\sin y}\sqrt{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x$, 则$I'(y)=$

(5) 利用Euler积分计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x=$

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ 关于α在$[0,+\infty)$是否一致收敛?

解答题 (10×7)

2. 二元函数$f(x,y)$有连续偏导数, 并且$f(1,0)=f(0,1)$, 证明: 在单位原周上至少存在两点满足$yf_x(x,y)=xf_y(x,y)$.

3. 计算球冠$\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=R^2,z\geq\frac{\sqrt{2}}{2}R\}$ 的面积.

4. 设$0<p<1$, 求积分$I(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

5. 利用Lagrange乘数法, 在曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(x,y,z>0)$ 上求一点, 使过该点的切平面与三个坐标平面所围体积最小.

6. $\overrightarrow{r}=(x,y,z)$, $r=\|\overrightarrow{r}\|_2$, 求函数$\Phi(r)$, 使得$\nabla\cdot(\Phi(r)\overrightarrow{r})=0$.

7. 计算第二类曲线积分

$$\int_L(x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-zx)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z,$$

其中$L:x=a\cos t,y=be^t\sin t,z=ct^2$, $a,b,c>0$ 为常数, $t:0\to 2\pi$.

8. 将$y=\sin x,x\in(0,\pi)$展开成余弦级数, 并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

2010-2011

1. **判断题** (3×5)

(1) $(0,0)$是函数$f(x,y)=xy^2$的驻点, 也是其极值点.

(2) 若函数f在$[0,+\infty)^2$上可积, 则$|f|$也是如此.

(3) 若D为平面上的区域, $P,Q\in C^1(D)$, 则D内曲线积分$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$与路径无关当且仅当在$D$内成立$P_y=Q_x$.

(4) $\int_0^1 x^t\ln^4 x\,\mathrm{d}x$关于$t$在$(-1,+\infty)$上一致收敛.

(5) 设非负函数$f(x,u)$在$[a,+\infty)\times[c,d]$上连续, 积分$I(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$存在且在$[c,d]$上连续, 则$\int_a^{\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$关于$u$在$[c,d]$上一致收敛.

2. (10×2)

(1) 求曲面$x^2-xy-8x+z+5=0$在点$(2,-3,1)$处的切平面方程.

(2) 求第一类曲线积分$\int_L(x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, 其中$L$为曲线$x=2(\cos t+t\sin t)$, $y=2(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

3. (10) 设$z=z(x,y)$是方程$x^2+y^2+z^2-yf(\frac{x}{y})=0$ 确定的隐函数, 其中f可微, 证明: $(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

4. (10) 设函数f在$[1,2]$上连续, 证明: $\iint_D f(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{6}\int_1^2 uf(u)\,\mathrm{d}u$, 其中$D$是四条直线$x+y=1$, $x+y=2$, $y=x$, $y=2x$所围区域.

5. (11) 利用Gauss公式计算$\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$\Sigma$ 为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 方向取上侧.

6. (11) 证明: $\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^6}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty}x^4e^{-x^6}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{18}$.

7. (11) 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<2,\\ 0, & 2\le|x|\le\pi,\end{cases}$$

在$[-\pi,\pi]$ 上展开成Fourier级数, 并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2n}{n^2}$的和.

8. (12)

(1) 证明: 若$f(x,y)$在$D=[a,b]\times[c,d]$上连续, 则$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$在$[c,d]$上连续.

(2) 把(1)中的假设减弱为: $f(x,y)$在D上有界, 且除去D内的光滑曲线短$x=\phi(y)$, f在D内连续, 问: $I(y)$在$[c,d]$上还连续吗? 论证你的结论.

2011-2012

1. (10) 求下面四段曲线所包围的平面区域的面积:
$L_1 = \{(x,y), x=1, y\in[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]\}$, $L_2 = \{(x,y), x^2+y^2=\frac{4}{2}, x,y\in[\frac{\sqrt{3}}{3},1]\}$,
$L_3 = \{(x,y), y=1, x\in[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]\}$, $L_4 = \{(x,y), x^2+y^2=1, x,y\in[0,1]\}$.

2. (10) 计算曲面$\{(x,y,z)|z=x^3+y^2, x,y\in[0,1]\}$的面积.

3. (10) 已知$[-\pi,\pi]$上的可积函数f,g的Fouier 展开分别为

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$$g \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n\cos nx + d_n\sin nx),$$

求$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

4. (10) 设g是$[a,b]$上的连续函数, 已知

$$G(x) = \int_a^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t \ge 0, \quad G(b)=0,$$

且$G(x)$在$[a,b]$上有唯一的最大值. 证明: 对于$[a,b]$上单调递减的函数f, 成立

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \ge 0.$$

5. (15) 证明:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2}}\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

6. (15) 设

$$\omega_1 = \frac{(x-2)\,\mathrm{d}y - (y-3)\,\mathrm{d}x}{(x-2)^2+(y-3)^2},$$

$$\omega_2 = (3y+e^{x^4})\,\mathrm{d}x + (e^{y^3}+4)\,\mathrm{d}y,$$

L是平面上以原点为中心, 半径100的圆周, 取顺时针方向, 求$\displaystyle\int_L \omega_1+\omega_2$.

7. (15) 对于实数β, 计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. (提示: 可以利用$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$)

8. (15) 在曲面$\Sigma = \{(x,y,z), x^2+y^2+z^2=1, x+y+z\ge 1\}$ 上, 计算$\displaystyle\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$.

2012-2013

1. (1+3) (1)证明方程$\sin x=\frac{4}{\pi^2}x^2$仅有$x=0$ 与$x=\frac{\pi}{2}$两个根.

(2) 利用Green公式计算下述区域的面积:

$$D=\{(x,y);y\le\sin x,y\ge\sqrt{2x}\}.$$

2. (6) 计算第一类曲面积分

$$\iint\Sigma\frac{x^3}{x^2+4y^2}\,\mathrm{d}S,$$

其中曲面

$$\Sigma=\{z=1+\frac{x^2}{2}+y^2;x\ge 2y\ge x\sqrt{x^2+4y^2}\ge 0\}.$$

3. (2+3) 已知

$$\omega=xyz^2e^{x^4}\,\mathrm{d}x+ze^{y^2}\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}z.$$

求ω的外微分$\mathrm{d}x$并计算第二类曲面积分

$$\iint_\Sigma\mathrm{d}\omega,$$

其中Σ为上半球面$(x-4)^2+(y-5)^2+z^2=100(z\ge 0)$, 方向朝上.

4. (5) 计算第二类曲线积分

$$I=\oint_L^+(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中L是曲面$x^2+y^2+z^2=4x$与$x^2+y^2=2x$的交线$z\ge 0$ 的部分, 积分方向从原点进入第一卦限.

5. (7) 计算第二类曲线积分

$$I=\int_L\frac{(x+y)\,\mathrm{d}x-(x-y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中L是从点$A(0,1)$到点$B(1,0)$的一条不通过原点的光滑曲线, 它的方程是$y=f(x)$, $-1\le 0\le 1$, 且$f(0)>0$.

6. (7) 计算第二类曲面积分

$$I=\iint_\Sigma\frac{\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{r})}{r^2}\,\mathrm{d}S,$$

其中Σ是$\mathbb{R}^3$中的光华封闭曲面, 原点在Σ所围成的区域内部. r是Σ上的动点(x,y,z)到原点的距离, $(\overrightarrow{n},\overrightarrow{r})$是动点$(x,y,z)$处的单位外法线方向$\overrightarrow{n}$与径向量$\overrightarrow{r}=(x,y,z)$的夹角.

7. (1+2+4+4) 证明及计算(需有严格的推导过程):

$$x^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-xt},\quad\forall x>0,\quad\alpha>0,$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1+x^2},\quad\forall x>0,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin(\frac{\alpha}{2}\pi)},\quad \forall 1<\alpha<2,$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x,\quad \beta\in[\frac{1}{2},2],\quad 0<\gamma<1.$$

8. (1+2+4) (1) 是否存在$[-\pi,\pi]$上的Riemann可积函数f 使得

$$f\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}?$$

为什么?

(2)

$$g(x)=\begin{cases}x^2+\pi x, & -\pi\le x<\pi,\\ 0, & x=\pi.\end{cases}$$

求g的Fourier级数以及其Fourier级数的和函数并证明:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

9. (4+2+2) 本题中总假设函数$f\in C^1(\mathbb{R})$ 且以2π为周期.

(1) 证明(可以利用第8题中的结论):

$$\left|f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\sqrt{\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)^2\,\mathrm{d}t},\quad \forall x\in[-\pi,\pi].$$

(2) 证明上述不等式中常数$\frac{\pi^2}{6}$是最佳的, 即$\forall 0<\alpha<\frac{\pi^2}{6}$, 可以找到$f_\alpha\in C^1\mathbb{R}$ 以及$x_\alpha\in[-\pi,\pi]$使得

$$\left|f_\alpha(x_\alpha)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_\alpha(t)^2\,\mathrm{d}t\right|>\sqrt{\alpha\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_\alpha'(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

(3) 证明f的Fourier级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于f.

10. (5) 令

$$u(y)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(\pi yx)}{\tan(\pi x)}\,\mathrm{d}x,\quad y>0.$$

求(需有推导过程)

$$\lim_{y\to\infty}u(y)=?$$

2013-2014

曲线曲面积分部分

1. (3+4) 令

$$f(x,y,z)=e^{x^2}+e^{\sin y}+xy^2z^3.$$

求$\mathrm{d}f$并计算第二类曲线积分$\int_L \mathrm{d}f$, 其中曲线L: $x=t(t-1)e^{t^3}$, $y=\cos(\frac{\pi}{2}t)\ln(1+t)$, $z=\sin(\frac{\pi}{2}t^2)$, $t:0\to 1$.

2. (5) 假设常数$a,b,c>0$, 计算第二类曲面积分:

$$\iint_\Sigma f(x)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+g(y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+h(z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

式中$f(x),g(y),h(z)$为连续函数, Σ为平行六面体$0\le x\le a$; $0\le y\le b$; $0\le z\le c$的表面, 方向为指向外侧.

3. (2+3+3) 已知

$$\omega=x^2e^{\sin(y^2)}(z-2)\,\mathrm{d}x+(z-2)^2e^y\,\mathrm{d}y+\mathrm{d}z.$$

求ω的外微分$\mathrm{d}\omega$并计算第二类曲面积分

$$\iint_\Sigma \mathrm{d}\omega+\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中Σ为上半椭球面$\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{16}+\frac{(z-2)^2}{25}=1(z\ge 2)$, 方向指向$z$轴正方向.

4. (7) 假设常数$a>0$. 求由曲面$x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=-u+a\cos v(u\ge 0)$以及区域$x\ge 0$, $z\ge 0$所界有界物体的体积.

5. (8) 计算第二类曲线积分

$$I=\int_L \frac{e^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y],$$

其中L为圆周$x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

含参变量积分部分

6. (4) 求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{1-\sin y}^{1+y^2} e^{xy}\,\mathrm{d}x.$$

7. (8) 计算(需有推导过程)

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos(mx)\,\mathrm{d}x,\quad \alpha,\beta,m>0.$$

Fourier级数部分

8. (3+2+1+3) 假设$0<\alpha<\pi$. 写出

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le a,\\ 0, & \alpha<|x|<\pi,\end{cases}$$

的Fourier级数以及其Fourier级数的和函数并(通过适当选取α的值)证明

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

综合部分

9. (4+5) 求(需有推导过程)

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1}\int_0^1 \frac{\cos(2xy)-\cos x}{\ln(1+\pi x)}\frac{1}{\arctan(ex)}\,\mathrm{d}x.$$

2014-2015

1. (3+7) (1)给出$\mathbb{R}^2$上一阶微分形式$x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$在极坐标

$$\begin{cases} x=r\cos x, \\ y=r\sin x. \end{cases}$$

下的表达式.

(2) 证明曲线$(x^2+y^2)^3=x^2y(x,y\geq 0)$所围图形的面积为$\frac{\pi}{12}$.

2. (5+5+5) 假设$0<\alpha<\pi$, 写出

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x|\leq\alpha \\ 0, & \alpha<|x|\leq\pi, \end{cases}$$

的Fourier级数以及其Fourier级数的和函数并(通过适当选取α的值)求

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

3. (6+6) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是有界光滑区域, $\vec{n}$是边界$\partial\Omega$上的单位外法向量, 函数$u:\Omega\cup\partial\Omega\to\mathbb{R}$光滑. 证明:

(1) 若存在$\lambda\in\mathbb{R}$使得

$$-\Delta u(x)=\lambda u(x),\quad x\in\Omega,$$

且$\nabla u\cdot\vec{n}(y)=0,\forall y\in\partial\Omega$, 则

$$\int_\Omega|\nabla u|^2=\lambda_\Omega u^2.$$

(2) 若

$$\Delta u=0,\quad \forall x\in\Omega,$$

且$\nabla u\cdot\vec{n}\geq 0,\forall y\in\partial\Omega$, 则$u$ 是Ω 上的常函数.

4. (6+6) 设$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{4}}$, 对任意的$t>0$, 令

$$A_t=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=t\},\quad V_t=\{(x,y,z)|f(x,y,z)\leq t,\}$$

并记A_t的面积为$\mathrm{Area}(A_t)$, V_t的体积为$\mathrm{Vol}(V_t)$.

(1) 严格说明

$$\int_1^2\mathrm{Area}(A_t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{Vol}(V_2)-\mathrm{Vol}(V_1)$$

是否成立, 即证明你的判断.

(2) 证明:

$$\int_1^2\mathrm{Area}(A_t)\,\mathrm{d}t=\int_{V_2V_1}|\nabla f|(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中

$$|\nabla f|^2(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

5. (2+3+5+5) 令$f(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 证明:

(1) 积分在$-\infty < t < +\infty$上一致收敛;

(2) $f \in C(\infty, +\infty)$;

(3) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$;

(4) f在$[0,\pi]$上至少有一个零点.

6. (5+5+5) 假设$\alpha, \beta > 0$. 定向曲面Σ 为

$$z = e^{(2013x^2+2014y^2-1)^2015} - 1, \quad z \le 0,$$

方向指向z轴负方向. 令(定义域显然)

$$\omega = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{\alpha x^2 + \beta y^2}, \quad \eta = \frac{(x + \frac{e^{\cosh(xy)}}{z^2+1}\sin z^2 017)\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{\alpha x^2 + \beta y^2 + z^{2016}} + e^{z\sinh(xyz)}\,\mathrm{d}z.$$

(1) 计算在$\mathbb{R}^2$

$\{(0,0)\}$上有$\mathrm{d}\omega = 0$.

(2) 计算第二类曲面积分

$$\iint_\Sigma \mathrm{d}\eta.$$

7. (3+8+10) 考虑$(0,1] \times [1,+\infty)$上的光滑函数

$$f(x,y) = \frac{\cos(2xy) - \cos x}{x^2}.$$

(1) 证明f关于x在$[0,1]$上可积. 记

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y \ge 1.$$

(2) 证明$F \in C^1([1,+\infty))$并求$\lim\limits_{y\to\infty} F(y)$.

(3) 证明

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1} \int_0^1 \frac{\cos(2xy) - \cos x}{\ln(1+\pi x)} \frac{1}{\arcsin(ex)}\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{e\pi} \frac{F(y)}{y}$$

并求出上述极限.

8. (4+6) 设$\omega = P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$满足$\mathrm{d}\omega = 0$, 其中$P, Q, R \in C^1(\mathbb{R}^3)$. 1-形式$\eta$定义如下:

$$
\begin{aligned}
\eta = &\left(\int_0^1 t[zQ(tx,ty,tz) - yR(tx,ty,tz)]\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\
&\left(\int_0^1 t[xR(tx,ty,tz) - zP(tx,ty,tz)]\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\\
&\left(\int_0^1 t[yP(tx,ty,tz) - xQ(tx,ty,tz)]\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

证明: $\omega = \mathrm{d}\eta$.

(2) 设$X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为连续可微的向量场, 它的散度满足

$$\nabla\cdot X(x,y,z) = 0,\quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

构造出一个向量场Y, 使得$X = \nabla\times Y$.

回忆: 若$Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$为$\mathbb{R}^3$上的C^1向量场, 则

$$\nabla\cdot Z(x,y,z) = \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z},$$

$$\nabla\times Z(x,y,z) = \left(\frac{\partial Z_3}{\partial y} - \frac{\partial Z_2}{\partial z}, \frac{\partial Z_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_3}{\partial x}, \frac{\partial Z_2}{\partial x} - \frac{\partial Z_1}{\partial y}\right).$$

2015-2016

1. 计算积分:

(1)

$$\iint_S x^3 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中S为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部并选取外侧;

(2)

$$\int_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

其中L为$x+y+z=1$与三坐标面的交线, 若从z轴正向看去, L的方向为逆时针方向.

2. 设$F(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$在开区域D内处处连续可微, 在D内任一圈圆周C上, 有

$$\int_C F\cdot n\,\mathrm{d}s=0,$$

其中n 是圆周外法线单位向量. 试证在D内恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0.$$

3. 函数$u=u(x,y,z)$在区域V内有直到二阶的连续偏导数, 试证明: V内任何封闭光滑曲面S上的积分

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=0$$

的充分必要条件是u为V内的调和函数(即V内恒有$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$).

4. 计算积分:

(1)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(2)

$$\varphi(r)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos rx\,\mathrm{d}x.$$

5. 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,\mathrm{d}x,\quad \alpha,\beta>0.$$

6. 写出函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\alpha\\ 0, & \alpha<|x|\le\pi\end{cases}$在$[-\pi,\pi]$上的Fourier级数, 其中$\alpha\in(0,\pi)$. 并计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

7. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上有连续偏导数, 且$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 试证:

$$\int_0^\pi f'^2(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$