

吉林大学 2010-2011 学年第一学期“高等代数 I”期末考试试题

共六道大题 满分 100 分 时间 120 分钟

一、(共 30 分)

1、求多项式 $f(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8$ 在有理数域上的标准分解;

2、计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & x_2^2 + x_2 & \dots & x_n^2 + x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{vmatrix}$ 的值;

3、求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

二、(共 15 分) 设 f, g 为不全为 0 的多项式. 证明对任意正整数 n 都有 $(f, g)^n = (f^n, g^n)$.

三、(共 15 分) 设 A 是 n 阶方阵. 证明若存在非零矩阵 B , 使得 $AB=O$, 则一定存在非零矩阵 C , 使得 $CA=O$.

四、(共 15 分) 讨论方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5 \end{cases}$ 解的情况, 并在有解时求出这个

方程组的所有解.

五、(共 15 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \geq 2)$ 满足 $\alpha_i \neq \theta$.

证明: 对任意的数 k_1, k_2, \dots, k_{m-1} , 向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + k_1 \alpha_m, \beta_2 = \alpha_2 + k_2 \alpha_m, \dots, \beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + k_{m-1} \alpha_m$

都线性无关当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

六、(共 10 分) 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, $AC=CA, AD=CB$, A 可逆, 求证: $r \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = n$.