华南理工大学2011-2012学年第一学期“解析几何”期末考试B参考解析

一、简答题（共32分）

（1）求母线$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕y轴旋转产生的旋转曲面方程.

解：设$M(x,y,z)$为旋转面上一点，$M_0(x_0,y_0,0)$为母线上一点，则有：

$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2\\ x_0^2+y_0^2=1\end{cases}$，得：$x^2+y^2+z^2=1$.

（2）若直线$\begin{cases}x=2t+2\\ y=-4t-5\\ z=3t-1\end{cases}$与平面$lx+my+6z-7=0$垂直，求$l,m$的值.

解：欲使所给直线与平面垂直，则须：$\dfrac{l}{2}=\dfrac{m}{-4}=\dfrac{6}{3}$，所以$l=4,m=-8$.

（3）求二次曲线$x^2-xy+y^2-1=0$通过点(0,2)的切线方程.

解：设切线为$y=kx+2$，与曲线联立，有：$(1-k+k^2)x^2+(4k-2)x+3=0$

由相切知：$(4k-2)^2-12(1-k+k^2)=0$，解得$k=-1,2$.

故所求为$y=-x+2,y=2x+2$.

（4）若单位向量向量α，β，γ两两相互垂直，求$\alpha+\beta+\gamma$的长度.

解：为$\sqrt{3}$.

（5）设平面仿射坐标I到II的点的坐标变换公式为$\begin{cases}x=-y'+1\\ y=x'-1\end{cases}$，求直线$l_1:x-2y+2=0$在坐标系$II$中的方程与直线$l_2:x'+2y'-1=0$在坐标系$I$中的方程.

解：直接代入可得所求为：$2x'+y'-5=0$，$2x-y-2=0$.

（6）求二次曲线 $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$ 的主方向和对称轴.

解：由 $[m,n]//\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ n\end{bmatrix}\Rightarrow[m,n]//\begin{bmatrix}m-\frac{3}{2}n\\ -\frac{3}{2}m+n\end{bmatrix}\Rightarrow m(2m-3n)-n(2n-3m)=0$

解得 $(m,n)=(1,1)$或$(1,-1)$.由 $\begin{cases}x-\frac{3}{2}y+5=0\\ -\frac{3}{2}x+y-5=0\end{cases}$ 得中心坐标为 $(-2,2)$.

故对称轴方程为：$x+y=0$,，$x-y+4=0$.

（7）求二次曲线 $x^2-2xy+y^2-1=0$ 的渐近方向和曲线类型.

解：由二次部分 $\Phi(m,n)=0$ 解得渐进方向为 $(-1,1)$，为抛物型曲线.

（8）平面上, 设 x' 轴和 y' 轴在原坐标系中的方程是 $3x-4y+6=0$，$4x+3y-17=0$，且新, 旧坐标系都是右手直角坐标系, 求 I 到 II 的点的坐标变换公式.

解：$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$.

二、(共 10 分）求经过直线 $\begin{cases}x+3y-5=0\\ x-y-2z+4=0\end{cases}$，并且在 x，y 两轴上截距相等的平面方程.

解：经过已知直线的平面为：$\lambda(x+3y-5)+\mu(x-y-2z+4)=0$
即：$(\lambda+\mu)x+(3\lambda-\mu)y-2\mu z-5\lambda+4\mu=0$.由条件，有：$(\lambda-\mu)(5\lambda-4\mu)=0$.
于是 $\lambda=\mu$或$5\lambda=4\mu$.故所求平面方程为 $2x+2y-2z-1=0$ 或 $9x+7y-10z=0$.

三、(共 10 分）用向量方法证明：三角形的三条高线交于一点.
证明：设△ABC，BC，CA 边上的高线 AD，BE 交于一点 P，

作 $\overrightarrow{PA}=\alpha$，$\overrightarrow{PB}=\beta$ ，$\overrightarrow{PC}=\gamma$ ，则 $\begin{cases}\alpha\cdot(\beta-\gamma)=0\\ \beta\cdot(\gamma-\alpha)=0\end{cases}$

由此可得 $\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\gamma=0$，于是 $(\beta-\alpha)\cdot\gamma=0$，即 $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{BA}$.

因此，PC 是 AB 边上高线的一部分，所以三角形的三条高线相交于一点.

四、（共 14 分）证明两直线 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$ 与 $l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$ 为异面直线，并求这两条直线的公垂线.

解：由 $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0$ 知其不共面.又 $(1,-1,0)\times(1,1,0)=(0,0,2)$，

故知公垂线方程为：$\begin{cases}\begin{vmatrix}x & y & z+1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x-y=0\\ x+y=0\end{cases}$

五、（共 10 分）在直角坐标系中，将方程 $xy=1$ 化成标准型，并且作出其图形，说明该方程表示什么曲线.

解：考虑正交变换 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{cases}$，则原方程化为：$\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}=1$，为双曲线.

六、（共 10 分）求单叶双曲面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 上经过点 $M(0,2,0)$ 的两条直母线方程.

解：其两族直母线的方程为：$\begin{cases}s(\frac{x}{3}+\frac{z}{4})=t(1-\frac{y}{2})\\ t(\frac{x}{3}-\frac{z}{4})=s(1+\frac{y}{2})\end{cases}$ 和 $\begin{cases}s(\frac{x}{3}+\frac{z}{4})=t(1+\frac{y}{2})\\ t(\frac{x}{3}-\frac{z}{4})=s(1-\frac{y}{2})\end{cases}$.

代入点 $M(0,2,0)$ 后可求得满足要求的两条直母线的方程为 $\begin{cases}4x+3z=0\\ y=2\end{cases}$，$\begin{cases}4x-3z=0\\ y=2\end{cases}$.

七、（共 14 分）将直线 $\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转，求这旋转曲面的方程，并就 α,β 可能的值讨论此曲面的类型.

解：所得旋转曲面的方程为：$x^2+y^2=a^2z^2+\beta^2$.

①$\alpha=0$，$\beta=0$ 时，方程表示 z 轴；
②$\alpha=0$，$\beta\neq 0$ 时，方程表示以 z 轴为中心轴，半径为 $|\beta|$ 的圆柱面；
③$\alpha\neq 0$，$\beta=0$ 时，方程表示顶点在原点，以 z 轴为轴的圆锥面；
④$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$ 时，方程表示以 z 轴为虚轴的单叶旋转双曲面.