סונגוס אמנו מגיעם
326501756
אלינס בג'קיאוס
213480121

שאלה 1

נרצה לאמן מודל למידת מכונה, עבורו נרצה למצוא את הפתרון הטוב ביותר לפונקציית ההפסד הבאה, ז"א xה עבורו $f(x)$ מקבלת את הערך המינימלי:

$$f(x) = x \cdot ln(x) + (1 - x) \cdot ln(1 - x) + 1$$

ידוע כי לפונקציית ההפסד קיים פתרון אופטימלי בטווח $(0, 1)$.

1. חשבו את הפתרון האופטימלי של $f(x)$ בשיטת המיתר עבור $\delta = 0.01$ החל מ- $x_0 = 0.2,\ x_1 = 0.9$.
2. חשבו כמה איטרציות ידרשו בשיטת החצייה על מנת לקרב לפתרון האופטימלי לדיוק שהתבקשתם בסעיף 1.
3. הסבירו האם ניתן למצוא פתרון אופטימלי בעזרת שיטת ניוטון ראפסון.
4. האם איטרציית נקודת השבת $g(x) = \frac{x^2+2}{3}$ תקרב לשורש $x = 1$ מהר או לאט יותר מאשר שיטת החצייה בתחום ההתכנסות סביב נקודת השבת?

א.

$f(x) = x \cdot ln(x) + (1-x) \cdot ln(1-x) + 1$

$f'(x) = ln(x) - ln(1-x)$

$f'(x_0=0.2) = -1.386 \qquad f'(x_1=0.9) = 2.197$

$x_2 = x_1 - f(x_1) * \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 0.9 - 2.197 * \left(\frac{0.9-0.2}{2.197+1.386}\right) = 0.470 \qquad f'(x_2) = -0.120 \qquad |-0.120| \not< 0.01$

$x_3 = 0.470 + 0.120 * \left(\frac{0.470-0.9}{-0.120-2.197}\right) = 0.492 \qquad f'(x_3) = -0.032 \qquad |-0.032| \not< 0.01$

$x_4 = 0.492 + 0.032 * \left(\frac{0.492-0.470}{-0.032+0.120}\right) = \frac{1}{2} \qquad f'(x_4) = 0 \qquad |0| < 0.01$

$\Downarrow$

x_4 הפתרון האופטימלי $\bar{z} = 0.5$

ב. $a=0.2 \quad b=0.9$

איטרציה 1

$\bar{z} = \frac{0.9+0.2}{2} = 0.55 \qquad f'(a) = -1.386 \qquad f'(\bar{z}) = 0.2$

$f'(a) * f'(\bar{z}) < 0 \Rightarrow b = \bar{z} \qquad |0.2 - 0.55| \not\leq 2 * 0.01$

עושים איטרציה הבאה

$a = 0.2 \quad b = 0.55$

איטרציה 2

$\bar{z} = \frac{0.2+0.55}{2} = 0.375 \qquad f'(a) = -1.386 \qquad f'(0.375) = -0.510$

$a=0.375 \quad b=0.55$ $\qquad |0.375-0.55| < 2*0.01$ ✗

איטרציה 3

$z=\frac{0.375+0.55}{2}=0.4625$ $\qquad f'(a)=-0.5$ ו $f'(z)=-0.15$

$a=0.4625 \quad b=0.55$ $\qquad |0.4625-0.55| < 0.02$ ✗

איטרציה 4

$z=\frac{0.4625+0.55}{2}=0.506$ $\qquad f'(a)=-0.15 \quad f'(z)=0.02$

$|0.4625-0.506| < 0.02$ ✗

$a=0.4625 \quad b=0.506$

איטרציה 5

$z=\frac{0.4625+0.506}{2}=0.484$ $\qquad f'(a)=-0.15 \quad f'(z)=-0.064$

$a=0.484 \quad b=0.506$ $\qquad |0.484-0.506| < 0.02$ ✗

איטרציה 6

$z=\frac{0.484+0.506}{2}=0.495$ $\qquad f'(a)=-0.064 \quad f'(z)=-0.02$

$a=0.495 \quad b=0.506$ $\qquad |0.495-0.506| < 0.02$

$0.011 < 0.02$ ✓

$z=\frac{0.495+0.506}{2}=0.5005$

3.

$f'(x)=\ln(x)-\ln(1-x)$

$f''(x)=\frac{1}{x-x^2}$

$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x-x^2}=0 \Rightarrow \cancel{1=0}$

הנגזרת השנייה לא מתאפסת עבור אף x ⇐ אין נקודה שבה היא מתאפסת
וגם הפונקציה לא מתאפסת.

$\Downarrow$

ניתן למצוא פתרון בשיטת ניוטון רפסון.

$g(x)=\frac{x^2+2}{3}$ .4

$g'(x)=\frac{2}{3}x \quad \lim_{x\to 1}=\frac{2}{3}<1$

א. סדר ההתכנסות לפי נקודת השבת יהיה $\frac{2}{3}$

א. סדר ההתכנסות לפי שיטת החצייה היא $\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ מתקרב לאפס יותר מהר

$\Downarrow$

שיטת החצייה יותר מהירה אז לפי נקודת

השבת איטי יותר מאשר שיטת החצייה

שאלה 2

בהינתן שיטת איטרציית נקודת שבת המוגדרת על ידי פונקציה $g(x)$. נניח שהנקודה $\alpha = 4$ הינה נקודת שבת של $g(x)$. בנוסף, מתקיים:

$$g'(4) = g''(4) = 0, \ \forall x \in [4-10^{-5}, 4+10^{-5}]: \ g'''(x) = -3$$

התחלנו את האיטרציה בנקודה x_0 קרובה מספיק לנקודת השבת, לאחר 4 צעדים הגענו לנקודה $x_4 = 4 - 10^{-6}$. מצאו את הנקודה x_5.

טיילור

$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{g'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$

$g(x)\approx g(x_0)+\frac{g'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$

$g(x)\approx 4+\frac{-3}{6}\cdot(x-4)^3$

$g(x)\approx 4-\frac{1}{2}(x-4)^3$

נתון $x_4=4-10^{-6}$

$x_5=4-\frac{1}{2}(\cancel{4}-10^{-6}\cancel{-4})^3$

$=4-\frac{1}{2}\left(-10^{-18}\right)=4+\frac{10^{-18}}{2}\approx 4$

שאלה 3

עבור איטרציית נקודת השבת הבאה לחישוב נקודת השבת $\alpha = 2$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n\left(3 - \frac{x_n^2}{4}\right) + \frac{3}{8}x_n\left(1 + \frac{4}{x_n^2}\right)$$

מצאו את סדר ההתכנסות ואת קבוע ההתכנסות.

*. סדר התכנסות

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n\left(3-\frac{x_n^2}{4}\right) + \frac{3}{8}x_n\left(1+\frac{4}{x_n^2}\right)$$

$$= \frac{3}{8}x_n - \frac{x_n^3}{32} + \frac{3}{8}x_n + \frac{12}{8x_n} \qquad \frac{12}{8}\cdot\frac{1}{x_n} \qquad \frac{12}{8}\cdot x_n^{-1}$$

$$(x_{n+1})' = \frac{3}{8} - \frac{3}{32}x_n^2 + \frac{3}{8} - \frac{3}{2x_n^2}$$

נציב $\alpha = 2$

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{32}\cdot 2^2 + \frac{3}{8} - \frac{3}{2\cdot 2^2} = 0$$

אם הנגזרת אפס אז ממשיכים עד פעם

$$(x_{n+1})'' = -\frac{6}{32}x_n + \frac{3}{x_n^3}$$

נציב $\alpha = 2$

$$-\frac{6}{32}\cdot 2 + \frac{3}{2^3} = 0$$

$$(x_{n+1})''' = -\frac{6}{32} - \frac{9}{x_n^4}$$

נציב $\alpha = 2$

$$-\frac{6}{32} - \frac{9}{2^4} = -\frac{3}{4} \neq 0$$

$\Downarrow$

$$P = 3$$

נמצא קבוע התכנסות

$$A = \frac{1}{P!}|P(x)| = \frac{1}{3!}\cdot\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{1}{8}$$

שאלה 4

בהינתן פונקציה $f(x)$ כלשהי, אשר קיימת לה פונקציה הופכית בשם $g(y)$, ידוע גם כי $g(y)$ הינו פולינום מדרגה כלשהי, נתון אוסף הדגימות הבא מ$f(x)$:

x	-5	-95	-55	35
$f(x)$	3	0	-2	-5

חשבו את $f'(-5)$, כאשר ידוע כי מתקיים $f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$.

רוצים למצוא $g(x)$, ידוע כי $g(x)$ היא הפוכה של $f(x)$

	0	1	2	3
x	3	0	-2	-5
$g(x)$	-5	-95	-55	35

$(3,-5) \to P_0(3)=-5$

$(0,-95) \to P_1(x)=P_0(x)+c_1(x-x_0)=-5+c_1(x-3)=-5+c_1x-3c_1$

$-5+c_1\cdot 0-3c_1=-95$

$-5-3c_1=-95$

$-3c_1=-90$

$c_1=30$

$P_1(x)=-5+30x-90=30x-95$

$(-2,-55) \to P_2(x)=P_1(x)+c_2(x-\overset{3}{x_0})(x-\overset{0}{x_1})=30x-95+(c_2x-3c_2)\cdot x$

$30x-95+c_2x^2-3xc_2$

$30(-2)-95+c_2(-2)^2-3\cdot(-2)\cdot c_2=-55$

$-60-95+4c_2+6c_2=-55$

$10c_2=100 \quad /:10$

$c_2=10$

$P_2(x)=30x-95+10x^2-3x\cdot 10=$
$10x^2-95$

$(-5,35) \to P_3(x)=P_2(x)+c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=10x^2-95+c_3(x-3)(x-0)(x+2)$

$10\cdot(-5)^2-95+c_3(\overbrace{-5-3}^{-8})(-5)(\overbrace{-5+2}^{-3})=35$

$250-95-120c_3=35$

$-120c_3=-120$

$c_3=1$

$P_3(x)=10x^2-95+(x-3)\cdot x(x+2)$

$g(x)=10x^2-95+(x-3)\cdot x(x+2)=10x^2-95+x^3-x^2-6x=x^3+9x^2-6x-95$

$g'(x)=3x^2+18x-6$

$g'(3)=3\cdot 3^2+18\cdot 3-6=75$

$f'(-5)=\frac{1}{75}$

שאלה 5

בהינתן פונקציה $f(x)=e^{2x}$, עבורה נרצה לחשב את פולינום האינטרפולציה באינטרוול $[-1,1]$:

1. מצאו מהי דרגת הפולינום n אשר תבטיח כי שגיאת הקירוב תהיה קטנה מ-1 ללא ידיעת נקודות הדגימה.
2. חשבו מהו חסם השגיאה כאשר דוגמים 4 נקודות במרווחים שווים.
3. עבור פולינום מדרגה 5, מצאו מהו גודל תת האינטרוול אשר יבטיח כי שגיאת הקירוב תהיה קטנה מ-1 ללא ידיעת נקודות הדגימה(ניתן להניח כי חסם הנגזרת נשאר זהה).

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$f^{(n)}(x)=e^{2x}\cdot 2^n \Rightarrow$

$f'(x)=2e^{2x}$ -e [illegible]

$f''(x)=4e^{2x}$

$f'''(x)=8e^{2x}$

אז e^{2x} קבוע תמיד מקבלים אותו כפול 2^n

$$R_n(x)=\frac{e^{2x}\cdot 2^{n+1}\cdot c}{(n+1)!}(x-x_i)$$

$x=1 \quad c=1$

$\frac{e^2\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}\leq 1$ נבדוק עבור איזה n מתקיים כי

$n=1: \frac{e^2\cdot 2^2}{2!}=14.778\leq 1$ ✗

$n=2: \frac{e^2\cdot 2^3}{3!}=9.85\leq 1$ ✗

$n=3: \frac{e^2\cdot 2^4}{4!}=4.92\leq 1$ ✗

$n=4: \frac{e^2\cdot 2^5}{5!}=1.970\leq 1$ ✗

$n=5: \frac{e^2\cdot 2^6}{6!}=0.65\leq 1$ ✓

לכן התשובה $n=5$

ב)

$x_0, x_1, x_2, x_3 \Rightarrow n=3$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

$$R_3(x) = \frac{f^{4}(c)}{4!} \prod_{i=0}^{3} (x-x_i)$$

$$f^{4} = \frac{e^2 \cdot 2^4}{4!}$$

התחום שלנו $[-1,1]$ ו c יהיה אורגא
נק' באמצע מכיוון שלא מעניין"ם

$$\overbrace{-1 \quad -\tfrac{1}{3}}^{2/3} \quad \overbrace{-\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}}^{2/3} \quad \overbrace{\tfrac{1}{3} \quad 1}^{2/3}$$

$x_0 = -1, \; x_2 = -\frac{1}{3}, \; x_3 = \frac{1}{3}, \; x_4 = 1$

$$\prod_{i=0}^{3} (x-x_i) = (0+1)\left(0+\frac{1}{3}\right)\left(0-\frac{1}{3}\right)(0-1) = \frac{1}{9}$$

$$R_3(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{e^2 \cdot 2^4}{4!} = 0.547$$

ג) צריך $n=5$

$$f^{6}(x) = e^{2x} \cdot 2^6$$

ב חמש נק'

x_0, x_1, x_2, x_3, x_4

$$\overbrace{-1 \quad -\tfrac{3}{5}}^{2/5} \quad \overbrace{-\tfrac{3}{5} \quad -\tfrac{1}{5}}^{2/5} \quad \overbrace{-\tfrac{1}{5} \quad \tfrac{3}{5}}^{2/5} \quad \overbrace{\tfrac{3}{5} \quad 1}^{2/5}$$

$h = 2/5$

$$\prod_{i=0}^{5} (x-x_i) = (0+1)\left(0+\frac{3}{5}\right)\left(0+\frac{1}{5}\right)\left(0-\frac{3}{5}\right)(0-1) = \frac{9}{125}$$

$$R_5(x) = \frac{9}{125} \cdot \frac{e^2 \cdot 2^6}{6!} = 0.47 \leq 1 \checkmark$$