Сложность вычислений

«Дерево Штейнера: покупка или аренда ребер»

Бондарь София, группа Б05-021

13 января 2023 г.

Оглавление

1 Введение

Задача Штейнера о минимальном дереве, названная в честь швейцарского математика Якова Штейнера, заключается в поиске минимального подграфа, соединяющего конечное число заданных вершин (терминалов) и образующего таким образом сеть кратчайших путей между этими вершинами и является обобщением задачи поиска минимального остовного дерева. В данном проекте будет рассмотрена одна из вариаций этой задачи.

2 Определения

Деревом Штейнера для ненаправленного взвешенного связного графа $G = (V, E)$, и множества вершин $V_0 \subseteq V$, с весами на рёбрах $\omega : E \to \mathbb{R}^+$ называется дерево T минимального веса, покрывающее все вершины V_0.

Множеством требования назовём множество V_0

Множеством Штейнера назовём множество $V \setminus V_0$

Метрическим деревом Штейнера для полного графа $G = (V, E)$ в метрическом пространстве (X, ρ), где $V \subset X$ и для каждого ребра $e = \{u, v\} \in E$ определена его длина, как расстояние $\rho(u, v)$ и для конечного множества $V_0 \subseteq V$ называется дерево T минимальной длины, покрывающее все вершины V_0.

Минимальным остовным деревом для графа $G = (V, E)$ называется дерево $T \subseteq G$ минимального веса, проходящее по всем вершинам V.

3 Постановка задачи

Условие

Дан ненаправленный связный граф $G = (V, E)$, в нём выделена вершина r и множество вершин V_0. Также имеются веса на рёбрах $\omega : E \to \mathbb{R}^+$. Для дерева T, покрывающего r и все вершины V_0, издержки определяются так:

(а) Если через ребро e проходит $k < M$ кратчайших путей от вершин V_0 к корню r, то ребро даёт вклад kw_e (каждая из вершин «арендует» ребро).

(б) Если через ребро e проходит $k >= M$ кратчайших путей от вершин V_0 к корню r, то ребро даёт вклад Mw_e (вершины в совокупности «покупают» ребро).

Требуется найти дерево T минимального веса, покрывающее все вершины V_0 и r.

Пояснение

Задача является модификацией обычной задачи дерева Штейнера с наложением доп условия - веса ребер в зависимости от этого условия будут домнажаться на какое-то число.

Задание

1. Докажите, что проверка существования дерева веса не более k является NP-полной.

2. Сведите задачу к метрической версии (в метрической версии исходный граф является полным и верно $w(x,z) \leqslant w(x,y) + w(y,z)$.

3. Опираясь на алгоритм для поиска дерева Штейнера, постройте алгоритм, дающий 2-приближение для метрической версии задачи, а также имплементируйте его.

4 Доказательство NP-полноты задачи

Теорема 4.1.

$ST = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе G есть дерево Штейнера весом не более чем $k \in \mathbb{Z}\} \in$ NP

Доказательство.
1. **ST $\in$ NP**: В качестве сертификата можно предъявить дерево веса не более k.
2. **ST – NP-трудный**:
Чтоб это доказать сведем задачу к обычному дереву Штейнера. (доказательство NP трудности обычной задачи будет ниже).

Для того чтоб свести нашу задачу обозначим произвольную вершину в графе как r и берём все остальные вершины как $V0$.

Посчитаем расстояние от r до всех с помощью алгоритма Форда-Беллмана (работает за $O(|E| * |V|)$ - полином, значит все в порядке) и, исходя их полученной информации, меняем вес рёбер исходя из дополнительных ограничений задачи (Форд-Беллман умеет восстанавливать кратчайшие пути, поэтому мы можем очень просто для каждого ребра посчиать сколько кратчайших путей через него проходит - $O(|V| *$ длина макс пути $+ |E|)$. Получается, что после этой замены весов мы свели задачу к обычной задаче поиска минимального дерева.

$STS = \{(G,k) \mid$ в неориентированном графе G есть обычное дерево Штейнера весом не более чем $k \in \mathbb{Z}\}$

3. **STS – NP-трудный**: Докажем, что $VERTEX - COVER \leqslant_p STS$.
Полиномиальное сведение:

1. Дополним $G = (V, E)$ до полного графа и после подразделим исходные рёбра. V_1 обозначим множество, добавленных вершин. В результате получим граф $G = (V', E')$. Назначим весом каждого ребра в G: 1.

2. Если после преобразования за V_0' взять V_1, то в G' имеется дерево Штейнера веса не больше $|E| + k - 1 \iff$ в G существует вершинное покрытие можности не больше k

   Доказательство.

   $\Rightarrow$ Пусть T дерево Штейнера для V_0' в G'. Рассмотрим множество $V' = V(T) \setminus V_0'$, можно заметить, что V' вершинное покрытие в $G(V' \subset V$ и накрывает все ребра из E по построению). Также:
   $$|V'| = |V(T)| - |V_0'| = \omega(T) + 1 - |V_0'| \leqslant (|E| + k - 1) + 1 - |V_0'| = k,$$
   т.к. $|E| = |V_0'|$ по построению.

   $\Leftarrow$ Теперь пусть $V' \subset V$, $|V'| \leqslant k$ и T - дерево в G' на вершинах V'. Нам надо чтобы T покрывало множество терминальных вершин. Чтобы быть уверенными в том, что $V_0' \subset V(T)$ расширим Т: Для всех вершин $v_0' = V_0' \setminus V(T)$ добавим ребро (v', v_0'), где $v' \in V'$ вершина, накрывающая ребро, подразделением которого получена вершина v_0'. В итоговом графе рёбер не меньше, чем $E+k-1$. Если в T после расширения появились циклы их можно раскрыть. В итоге мы получили дерево Штейнера с весом не меньше $E+k-1$ для V_0' в G'. □

Ещё надо проверить, что наши шаги построения G' полиномиальны:

- Добавляем $O(|V|^2)$ рёбер и вершин
- Для восстановления вершинного покрытия по Дереву Штейнера нужно $O(|V|^2)$ операций
- А из вершинного покрытия в дерево штейнера мы тратим тоже $O(|V|^2)$ операций

□

5 Сведение к метрическому случаю

5.1 Метрическая версия задачи Штейнера

$$\omega(x,y) \leqslant \omega(x,z) + \omega(z,y),$$

Теорема 5.1. Существование $p-$приближенного алгоритма для метрической задачи Штейнера влечет существование $p-$приближенного алгоритма для задачи Штейнера.

Доказательство.

- Пусть $G=(V,E)$ - граф для задачи Штейнера. По графу G построим полный граф G_0 для метрической задачи Штейнера. Определим стоимость ребра (u,v) в G_0, как стоимость кратчайшего uv пути в G с учетом пересчитанных весов по Форду-Беллману. Граф G_0 называется метрическим замыканием графа G. Множество требований и множество Штейнера в обоих примерах совпадают. Стоимость любого ребра $(u,v) \in E$ в графе G_0 не превосходит стоимости этого ребра в графе G. Поэтому стоимость оптимального решения для G не превосходит стоимости оптимального решения примера G_0.

- Пусть задано дерево Штейнера T_0 для графа G_0. Покажем, как за полиномиальное время построить дерево Штейнера для G не большей стоимости. Стоимость ребра (u,v) в графе G_0 соответствует стоимости пути в графе G. Заменим каждое ребро дерева T_0 на соответствующий путь для получения подграфа графа G. Очевидно, что в этом подграфе все вершины множества требований соединены. Однако, этот подграф в общем случае может содержать цикл. Если это так, то удалим лишние ребра, чтобы получить дерево T. Пусть C_0 — решение, найденное $p-$приближенным алгоритмом для метрической задачи Штейнера. Способом, описанным выше, найдем решение стоимости C в задаче Штейнера, такое, что

$$C \leqslant C_0 \leqslant pOPT_0 \leqslant pOPT$$

□

6 Алгоритм 2-приближения для метрической задачи Штейнера

Теорема 6.1. Рассмотрим метрическое дерево Штейнера для графа $G = (V, E)$, и множества вершин $V_0 \subseteq V$. Стоимость минимального остовного дерева в V_0 не превосходит двух стоимостей оптимального дерева Штейнера в графе G.

Доказательство. Рассмотрим дерево Штейнера стоимость которого равна OPT. Дублируя ребра, получим Эйлеров граф, связывающий все вершины из множества V_0, а также, возможно, и некоторые Штейнеровы вершины. Найдем Эйлеров обход в этом графе. Стоимость этого обхода равна $2 \cdot OPT$. Затем, используя порядок вершин в Эйлеровом обходе, получим Гамильтонов цикл методом срезания углов, пропуская вершины Штейнера и уже пройденные вершины. Из неравенства треугольника следует, что стоимость нового цикла не может превышать стоимости Эйлерова обхода. Удалив одно ребро из Гамильтонового цикла, получим путь P по вершинам из V_0 стоимости, не превышающей $2 \cdot OPT$. Путь P является остовным деревом на R. Поэтому стоимость минимального остовного дерева не превышает $2 \cdot OPT$. □

Теорема 6.2. Алгоритм поиска остовного дерева для подрафа G с множеством вершин V_0 является 2-приближенным алгоритмом для задачи Штейнера.

Доказательство. Приведём пример графа для которого оценка достигается(в пределе). Дерево построенное алгоритмом будет состоять из вершин внешнего цикла(V_0) без одного ребра . А дерево Штейнера будет состоять из корня вершины $V \setminus V_0$, и листьев V_0. То есть, если внешний цикл имеет вид n-угольника, то верно, что $\frac{d(T_M ST)}{d(T)} = \frac{2n-2}{n} = 2 - \frac{2}{n} \to 2$. □

7 Реализация(план)

Найдём EMST для $V_0(|V_0| = n)$:

- Строим триангуляцию Делоне за время $O(nlogn)$ с использованием памяти $O(n)$. Поскольку триангуляция Делоне является планарным графом и число рёбер не более чем в три раза превосходит число вершин, в любом планарном графе, это построение образует лишь $O(n)$ рёбер.
- Запустим алгоритм Форда-Беллмана ($O(n|E|)$) из r до всех вершин из V_0 и найдем новые веса ребер.
- Помечаем каждое ребро его длиной.
- Запускаем алгоритм поиска минимального остовного дерева на этом графе. Поскольку имеется $O(n)$ рёбер, этот алгоритм потребует время $O(nlogn)$

7.1 Асимптотика работы алгоритма

Теорема 7.1. Алгоритм построения Евклидова минимального остовного дерева на плоскости требует $O(n|E| + nlogn)$ времени.

7.2 Код

Код можно посмотреть по ссылке