Передовые инженерные школы

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИННОПОЛИС

онлайн университет

Программная инженерия. Разработка ПО (Python для продвинутых специалистов. Машинное обучение)

Модуль: Предобработка данных и машинное обучение

Лекция 13: Введение во временные ряды

Дата: 30.06.2025

Прогнозирование

ПЕРЕДОВАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

- AR (модель авторегрессии)
- MA (модель скользящего среднего)
- ARMA (Модель авторегрессии - скользящего среднего)
- ARIMA (Интегрированная Модель авторегрессии - скользящего среднего)
- SARIMA (Интегрированная Модель авторегрессии - скользящего среднего с учетом сезонности)
- ARIMAX, SARIMAX (X - eXtended) - возможность учета дополнительных внешних факторов

AR (модель авторегрессии)

ПЕРЕДОВАЯ
ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА
УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

Метод авторегрессии моделирует следующий шаг в последовательности как линейную функцию наблюдений на предыдущих временных шагах

Регрессия ряда на собственные значения в прошлом

В модели **авторегрессии** мы прогнозируем интересующую переменную, используя линейную комбинацию прошлых значений переменной.

$$X_t = c + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \cdot X_{t-i} + \varepsilon_t$$

p - порядок модели

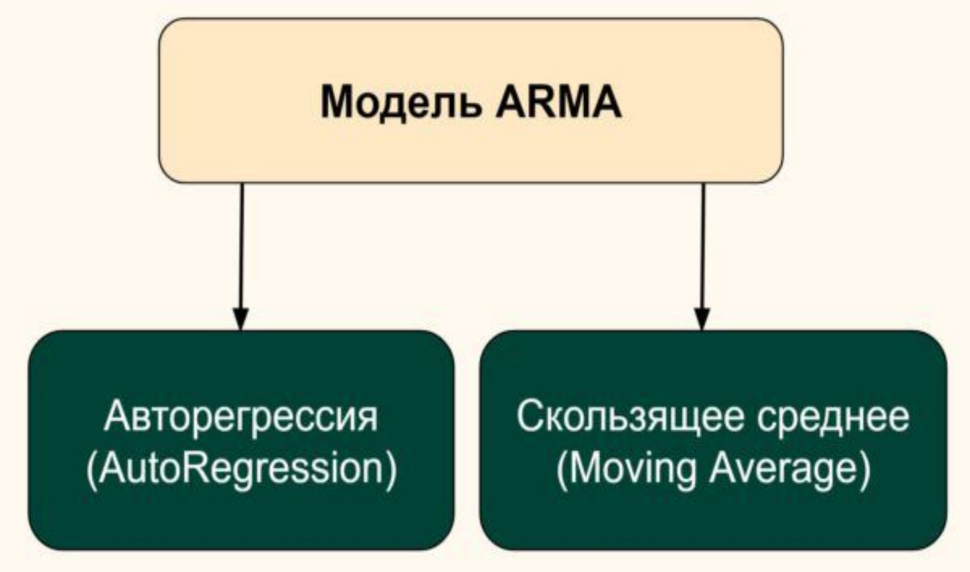
MA (модель скользящего среднего)

Модель скользящего среднего (moving average, MA) помогает учесть случайные колебания или отклонения (ошибки) истинного значения от прогнозного.

Можно также сказать, что модель скользящего среднего — это авторегрессия на ошибку.

$$X_t = \sum_{i=1}^{q} \theta_i \cdot \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

ARMA (Модель авторегрессии - скользящего среднего)



Когда мы прогнозируем значение в период t с помощью данных за предыдущий период (AR(p), где p - сколько предыдущих периодов использовать)

$$y_t = c + \varphi \cdot y_{t-1}$$

где c — это константа, φ — вес модели, y_{t-1} — значение в период $t-1$

ARMA (Модель авторегрессии - скользящего среднего)

Метод авторегрессионного скользящего среднего моделирует следующий шаг в последовательности как линейную функцию наблюдений и ошибок на предыдущих временных шагах

Он сочетает в себе модели **авторегрессии (AR)** и **скользящего среднего (MA)**

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \cdot X_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \cdot \varepsilon_{t-i}$$

ARIMA: AR(p)+I(d)+MA(q) = ARIMA(p,d,q)

Метод авторегрессионного интегрированного скользящего среднего (ARIMA) моделирует следующий шаг в последовательности как линейную функцию разностных наблюдений и остаточных ошибок на предыдущих временных шагах

Он сочетает в себе ***модели авторегрессии (AR)*** и ***скользящего среднего (MA)***, а также этап предварительной обработки разности, чтобы сделать последовательность стационарной

Метод подходит для временных рядов с трендом и без сезонных составляющих.

Добавляется компонент Integrated (I), который отвечает за удаление тренда (сам процесс называется дифференцированием)

ARIMA: AR(p)+I(d)+MA(q) = ARIMA(p,d,q)

ARIMA представляет собой комбинацию трех моделей

- AR (p) Авторегрессия - модель авторегрессии, которая использует зависимость между текущим наблюдением и наблюдениями за предыдущий период или периоды.

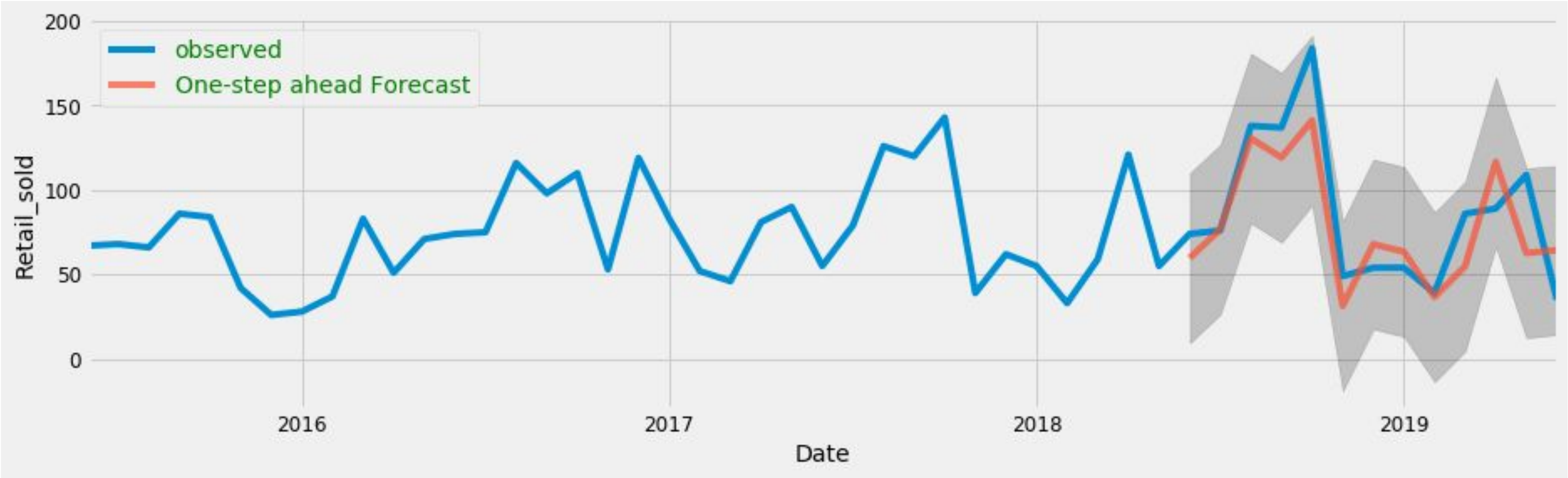
- I (d) Интеграция - использует разность наблюдений, чтобы сделать временной ряд стационарным.

- MA (q) Moving Average - модель, которая использует зависимость между наблюдением и остаточной ошибкой из модели скользящего среднего, применяемой к запаздывающим наблюдениям.

SARIMA (S - seasonal)

Модель имеет набор параметров:

- p, d, q - для модели ARIMA
- P, D, Q - для сезонности
- m - представляет количество точек данных (строк) в каждом сезонном цикле



Параметры модели можно подбирать с помощью auto_arima(). Выбор наиболее удачных параметров осуществляется на основе определенного критерия

Модель учитывает сезонность (Seasonality, S)

ARIMAX, SARIMAX (X — eXtended)

ПЕРЕДОВАЯ
ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА
УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

SARIMAX включает еще и внешние или экзогенные факторы (eXogenous factors, отсюда и буква X в названии), которые напрямую не учитываются моделью, но влияют на нее.

Параметров у модели SARIMAX больше:

SARIMAX(p, d, q) x (P, D, Q, s)

- p и q, у нас появляется параметр d - отвечает за тренд
- набор параметров (P, D, Q, s) отвечает за сезонность.

SARIMAX: Introduction

$$y_t = \beta_t x_t + u_t$$

$$\phi_p(L)\tilde{\phi}_P(L^s)\Delta^d\Delta_s^D u_t = A(t) + \theta_q(L)\tilde{\theta}_Q(L^s)\epsilon_t$$

```
# Dataset
raw = pd.read_stata(StringIO(friedman2))
raw.index = raw.time
data = raw.ix[:'1981']

# Variables
endog = data.ix['1959':, 'consump']
exog = sm.add_constant(data.ix['1959':, 'm2'])
nobs = endog.shape[0]

# Fit the model
mod = sm.tsa.statespace.SARIMAX(
    endog.ix[:'1978-01-01'],
    exog=exog.ix[:'1978-01-01'],
    order=(1,0,1)
)
fit_res = mod.fit()
print fit_res.summary()
```

```
                           Statespace Model Results
==============================================================================
Dep. Variable:                consump   No. Observations:                   92
Model:                 SARIMAX(1, 0, 1)   Log Likelihood                -340.508
Date:                Wed, 11 Feb 2015   AIC                            691.015
Time:                        10:29:10   BIC                            703.624
Sample:                    01-01-1959   HQIC                           696.105
                         - 10-01-1981
==============================================================================
                 coef    std err          z      P>|z|      [95.0% Conf. Int.]
------------------------------------------------------------------------------
const        -36.0609     42.932     -0.840      0.401      -120.207    48.085
x1             1.1220      0.038     29.417      0.000         1.047     1.197
ar.L1          0.9348      0.054     17.385      0.000         0.829     1.040
ma.L1          0.3091      0.114      2.705      0.007         0.085     0.533
sigma2        93.2556     13.753      6.781      0.000        66.300   120.212
==============================================================================
```

Метрики ARIMA, SARIMA

ПЕРЕДОВАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

- ***Средняя абсолютная ошибка (Mean Absolute Error, MAE)*** - это степень несоответствия между фактическими и прогнозируемыми значениями.

- ***Среднеквадратическая ошибка (Mean Squared Error, MSE)*** измеряет среднюю квадратическую разницу между оценочными значениями и фактическим значением. Чем ниже значение MSE, тем лучше модель способна точно предсказывать значения.

- ***Квадратный корень из MSE (Root Mean Squared Error, RMSE)*** для того, чтобы показатель эффективности MSE имел размерность исходных данных, из него извлекают квадратный корень и получают показатель эффективности RMSE

Метрики ARIMA, SARIMA

ПЕРЕДОВАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

- ***Информационный критерий Акаике (AIC)*** полезен при выборе предикторов для регрессии, также полезен для определения порядка построения модели ARIMA. Критерий для выбора лучшей из нескольких статистических моделей, построенных на одном и том же наборе данных. Существует также AICC

$$AIC = 2k - 2ln(L),$$

где k — число параметров модели, L — максимизированное значение функции правдоподобия модели. Лучшей признается та модель, для которой значение AIC минимально.

- ***Байесовский информационный критерий (Bayesian information criterion - BIC).*** Критерий основан на использовании функции правдоподобия и тесно связан с информационным критерием Акаике

$$BIC = k \cdot \ln(n) - 2\ln(\widehat{L}),$$

где $\widehat{L}$ — максимальное значение функции правдоподобия наблюдаемой выборки с известным числом параметров, k — число параметров модели, n — объем обучающей выборки.

Аддитивная модель (additive)

ПЕРЕДОВАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

Ряд представляется как сумма компонент:

$$Y_t = T_t + S_t + R_t$$

где:

- Y_t — исходный ряд,
- T_t — тренд,
- S_t — сезонность,
- R_t — остаток.

Применяется, когда амплитуда сезонных колебаний не зависит от уровня ряда (например, температура воздуха).

Мультипликативная модель (multiplicative)

Ряд представляется как произведение компонент:

$$Y_t = T_t \times S_t \times R_t$$

Применяется, если сезонность усиливается с ростом ряда (например, продажи товаров).

Алгоритм декомпозиции

Шаг 1: Оценка тренда (T)
Используется скользящее среднее (moving average) с окном = period

Период — это длина сезонного цикла во временном ряде.

- Годовая сезонность в месячных данных: period=12 (12 месяцев в году).

- Квартальная сезонность в ежеквартальных данных: period=4 (4 квартала в году).

- Недельная сезонность в дневных данных: period=7 (7 дней в неделю).

Алгоритм декомпозиции

Затем для каждого сезона (например, для всех январей в годовом ряду) вычисляют среднее значение S_t

- **Аддитивная модель:**

$$S_t = Y_t - T_t$$

- **Мультипликативная модель:**

$$S_t = \frac{Y_t}{T_t}$$

Ограничения метода

Линейность тренда: скользящее среднее плохо работает для нелинейных трендов

Фиксированный период: требует знания period (не подходит для рядов с изменяющейся сезонностью)

Чувствительность к выбросам: скользящее среднее может искажаться из-за аномалий.

Prophet

ПЕРЕДОВАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

- `'additive'` (по умолчанию) — аддитивная модель: $y(t) = g(t) + s(t) + h(t) + \epsilon$.
- `'multiplicative'` — мультипликативная модель: $y(t) = g(t) \cdot (1 + s(t) + h(t)) + \epsilon$.

где:

- $g(t)$ — **тренд** (кусочно-линейный или логистический),
- $s(t)$ — **сезонность** (Фурье-ряд для аппроксимации периодичности),
- $h(t)$ — **эффект праздников/событий**,
- ϵ_t — шум (обычно нормально распределённый).

Тренд

ПЕРЕДОВАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

- **Линейный тренд** с точками изменения (changepoints):

$$g(t) = (k + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\delta}) \cdot t + (m + \mathbf{a}(t)^T \boldsymbol{\gamma})$$

где k — базовый рост, $\boldsymbol{\delta}$ — корректировки в точках изменения.

- **Логистический тренд** (для насыщающихся рядов):

$$g(t) = \frac{C}{1 + e^{-k(t-m)}}$$

Сезонность

ПЕРЕДОВАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

Сезонность ($s(t)$)

Аппроксимируется **рядом Фурье** для гибкости:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{P}\right) \right)$$

где P — период (например, 365.25 для годовой сезонности).

Праздники

ПЕРЕДОВАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ ШКОЛА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

Праздники ($h(t)$)

Задаются вручную или автоматически (например, Чёрная пятница):

$$h(t) = \sum_i \kappa_i \cdot 1_{\{t \in D_i\}}$$

где D_i — дни событий, κ_i — их влияние.

Передовые инженерные школы

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИННОПОЛИС

онлайн университет

Спасибо за внимание