[오답풀이]

<문제1>

① $\sim(\sim p \cap q) \cup q$

p	q	$\sim p \cap q$	$\sim(\sim p \cap q)$	$\sim(\sim p \cap q) \cup q$
T	T	$F \cap T = F$	T	$T \cup T = T$
T	F	$F \cap F = F$	T	$T \cup F = T$
F	T	$T \cap T = T$	F	$F \cup T = T$
F	F	$T \cap F = F$	T	$T \cup F = T$

<문제4>

① $(p \cap \sim q) \cup (p \cap q)$

$= p \cap (\sim q \cup q)$

$= p \cap T$

$= p$

② $(p \cup \sim q) \cap (\sim p \cup \sim q)$

$= \sim q \cup (p \cap \sim p)$

$= \sim q \cup F$

$= \sim q$

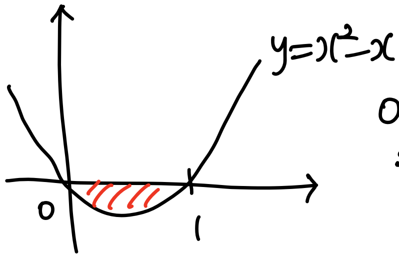
<문제 5>

① R에 속하는 $\boxed{\overset{\forall(x)}{모든\ x}}$에 대해 $x^2 \geq x$ 인지 확인

$x^2 \geq x$

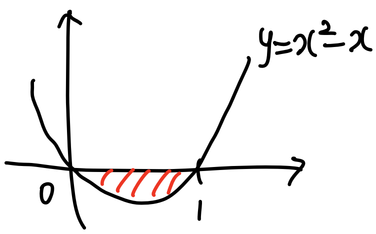
$x^2 - x \geq 0$

$x(x-1) \geq 0$



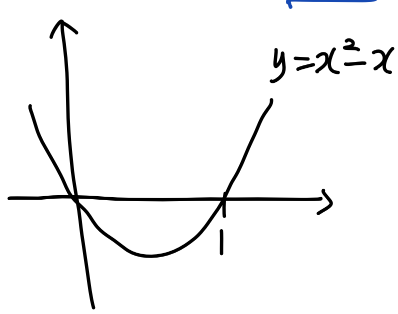
$0 < x < 1$ 인 범위에서는 음수값을 가지므로 참이 아니다.

② Z(정수)에 속하는 모든 x에 대해 $x^2 \geq x$ 인지 확인



$0 < x < 1$ 인 범위에서는 성립하지 않는데 정수인 범위에서는 $x^2 - x \geq 0$ 이므로 참

③ R(실수)에 속하는 $\boxed{\overset{\exists(x)}{일부\ x}}$에 대해 $x^2 < x$ 인지 확인



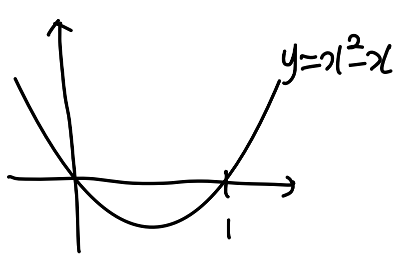
$x^2 - x < 0$

$x(x-1) < 0$

$0 < x < 1$ 인 범위에서만

$x > 1$, $x < 0$ 인 범위에서는 성립하지 않으므로 거짓

④ Z(정수)에 속하는 일부 x에 대해 $x^2 < x$ 인지 확인



$0 < x < 1$ 인 범위에서만 $x^2 < x$ 이므로 거짓

<문제6>

n이 짝수이므로 $n=2k$라고 가정. $k=1,2\cdots$

$3n+5 = 3\cdot 2k+5$

$= 2(3k+3)-1$ 으로

($2\times$어떤자연수-1) 형태로 표현되므로 홀수이다.

따라서 명제는 참

<문제9>

명제의 대우 → 참이면 명제도 참이다.

n이 홀수이면, n^2+5가 짝수이다. [대우]

$p\to q$ 역 $q\to p$

이 $\sim p\to\sim q$

대우 $\sim q\to\sim p$

<문제11>

[자연수 n < 홀수 / 짝수 로 나누어서 증명하기]

<문제13>

n이 홀수이므로 $n=2k-1$ $(k=1,2\cdots)$ 라고 가정

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1 = 8(\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)+1$

$= 2(2k^2-2k)+1$ 로 표현된다.

8로 나눈 나머지가 1이라는 것은, 2로 나눈 나머지도 1이다.

따라서 명제는 참이다.

<문제14>

n이 짝수라고 가정하면 $n=2k$ $(k=1,2\cdots)$

$n^2=(2k)^2=4k^2=3(\frac{4}{3}k^2)+0$

$\therefore$ n은 3X어떤자연수 형태로 표현되니까 나머지 0

n이 홀수 $n=2k-1$ $(k=1,2\cdots)$

$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=3(\frac{4}{3}k^2-\frac{4}{3}k)+1$

$\therefore$ n은 (3X어떤자연수+1) 형태로 표현되니까 나머지 1

<문제15>

귀류법: 모순을 보이는 방법

a: 유리수, b: 무리수, c: 유리수 라고 가정하고 $a+b=c$ 임을 증명한다.

$b=c-a$

c-a 값인 b는 <유리수 성질에 의해> 유리수여야 하는데 무리수라고 가정에 모순되므로 유리수와 무리수의 합이 무리수이다.

<문제16>

귀류법을 적용하기 위해 $\sqrt{2}$가 유리수임을 증명해보자.

유리수는 b/a 형태로 표현가능하므로 $\sqrt{2}=b/a$

(a,b는 서로소인 정수, $a\neq 0$)

$b=\sqrt{2}a$ $\quad b^2=2a^2$

b^2은 2X(어떤자연수) 형태로 표현되므로 짝수이다.

b^2이 짝수이므로 b도 짝수이다.

$b=2c$로 표현 $\quad b^2=4c^2$

$2a^2=4c^2$

$a^2=2c^2$ 이므로 2X(어떤자연수)형태이므로 짝수이다.

$a^2=2c^2$ 이므로 $2\times$(어떤 자연수) 형태이므로 짝수이다,
a^2이 짝수이므로 a도 짝수이다.

$\therefore$ a, b가 모두 짝수이면 a, b가 서로소라는 가정에 모순된다.

<문제 17>

$\log_2 5$가 유리수라고 가정하자.

유리수는 기약분수로 나타낼 수 있어야 하므로 $\log_2 5=\frac{b}{a}$

$b=a\log_2 5$

$b=\log_2 5^a$

$\log_2 2^b = \log_2 5^a$

$2^b=5^a$

2^b는 짝수인데, 5^a는 홀수이므로
$\log_2 5$가 유리수라는 가정이 모순된다.

$\therefore$ $\log_2 5$는 무리수이다.

<문제 18>

- $\boxed{\text{수학적 귀납법}}$을 통한 증명

① $n=1$ 일 때 $P(1)$이 성립한다.
② $n=k$ 일 때 <$P(n)$이 성립한다고 가정하면>
$n=k+1$ 일 때도 $P(n)$이 성립한다.

① $n=1$ 일 때, $1=\frac{1\times2}{2}=1$

② $n=k$ 일 때, $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ ① 식에 $(k+1)$을 더하면

식이 성립한다고 가정하면

$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$$= \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$n=k+1$ 일 때도 식이 성립한다.

<문제19>

$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 임을 증명하라

① $n=1$ 일때 $\quad 1^2 = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$

② $n=k$ 일때 명제가 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \cdots(1)$$

(1) 에 $(k+1)^2$ 을 양변에 더하면

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\{2k^2+k+6(k+1)\}}{6}$$

$$= (k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$ 이므로

$n=k+1$ 일때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대해 식이 성립한다.

<문제20>

$\boxed{r \neq 1 \text{ 일때,}}$ $\sum_{i=0}^{n} r^i = \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$ 임을 증명하라.

① $n=1$ 일때

$\sum_{i=0}^{1} r^i = \dfrac{r^2-1}{r-1}$

$1+r^1 = r+1$

좌,우변이 동일

① $n=k$ 일때 명제가 참이라고 가정하자

$$\sum_{i=0}^{k} r^i = r^0+r^1+\cdots+r^k$$
$$= 1+r+\cdots+r^k = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

양변에 r^{k+1} 을 더하면

$$1+r+\cdots+r^k+r^{k+1} = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}+r^{k+1}$$
$$= \frac{r^{k+1}-1+(r-1)r^{k+1}}{r-1}$$
$$= \frac{r^{k+2}-1}{r-1} \text{ 이므로}$$

$\therefore$ $n=k+1$ 일 때도 식이 성립한다.

<문제22>

$\sqrt{2} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2} < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

① $n = \cancel{1}\,2$ 일때, ~~$1 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + 1$ 이므로~~ 성립

$2\sqrt{2} < 2+\sqrt{2}$ $\sqrt{2} < 2$ 이므로 성립

② $n=k$ 일때, $\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}}$ 가 성립한다고 가정한다.

$\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ 을 양변에 더하면

$(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$

$$\sqrt{k} + \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$\sqrt{k+1} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$n=k+1$ 일때는 $\sqrt{k+1} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 인데

$\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 이 $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ 보다 크기 때문에 부등식이 성립한다.

∴ 2이상의 모든 자연수 n에 대해 성립한다.

<문제23>

$n+2\{(n-1)+(n-2)+\cdots+1\}$

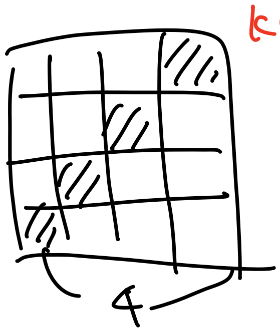
$n\times n = n+2\{\frac{(n-1)\cdot n}{2} = n^2$

감염된 칸을 대각선에 최소 n개 놓고 모든 칸에 퍼지는것을 나타내면

초기에 감염된 칸이 n개일 경우에 감염시킬 수 있는 칸 수

① $n=1$ 일때 체스판이 모두 감염되어있으므로 성립

② $n=k$ 일때



$k\cdot k = k+2\{\frac{(k-1)\cdot k}{2}\} = k^2$

양변에 $2k+1$ 을 더하면

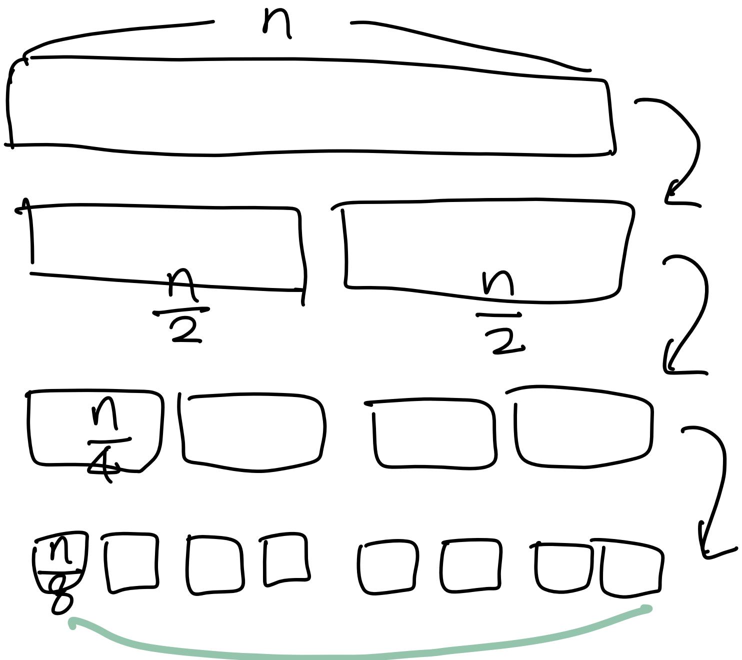
$k^2+2k+1 = k+2\{(k-1)+\cdots+1\}+2k+1$

$k^2+2k+1 = k+2\cdot\frac{(k-1)\cdot k}{2}+2k+1$

$= k+k^2-k+2k+1$

$(k+1)^2 = k^2+2k+1 = (k+1)^2$

$n=k+1$ 일 때도 성립하므로 모든 n에 대해 성립한다.



$n=8$

$\log n = 3$번

$\log 8 = 3$번 분할

$\log n$

n → 분할한 횟수마다 다시 병합해야 함

→ $n\log n$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{2^i} = \frac{n}{2^0} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \cdots + 1$$

$$= n + \frac{n}{2} + \cdots + 1 = \frac{n\left(1-\frac{1}{2}^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2n\left(1-\frac{1}{2}^n\right)$$

$$\fallingdotseq 2n$$

$$\frac{n}{2^i} = 1$$

$n = 2^i$

$i = \log_2 n$

$i=0$ 부터까지 $\log n+1$

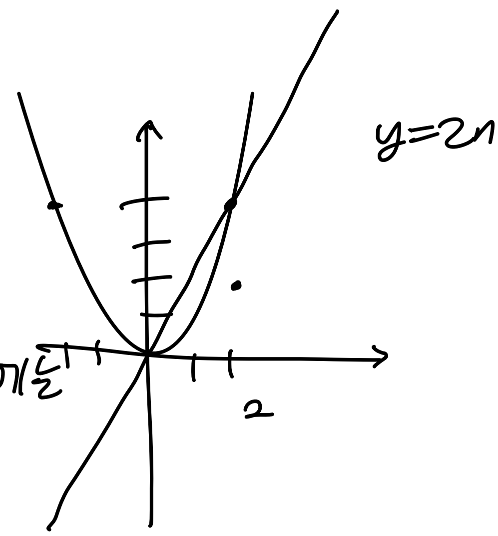
log8=3비트

<문제1>

0~ $2^{\log n}-1$

<문제3>

① $2n$ $\quad n^2$



$0<x<2$인 경우에는

$n^2<2n$

$n>2$인 범위에서는 $2n<n^2$

② $2^{\frac{n}{2}}$ $\quad \sqrt{3^n} = 3^{\frac{n}{2}}$

$2^{\frac{n}{2}} < 3^{\frac{n}{2}}$

③ $2^{n\log n}$ $\quad n!$

$2^{n\log n} \quad = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$

$n=2)\quad 2^2 \qquad 2\times1=2^1$

$n=4)\quad 2^{4\cdot 2}=2^8 \qquad 4!$

$n=8)\quad 2^{8\cdot 3}=2^{24} \qquad 8!$

$2^{n\log n} > n!$

④ $\log 2^{2n} < n\sqrt{n}$

$=2n \qquad =n\sqrt{n}$

$=n^{\frac{3}{2}}$

$n=1$	2	1
$n=2$	4	$2^{\frac{3}{2}}$
$n=4$	8	$2^3=8$
$n=16$	32	$2^6=64$

<문제4>

$$x = \log_a y + \log_a z = \frac{\log_2 y}{\log_2 a} + \frac{\log_2 z}{\log_2 a}$$

$$= \frac{\log_2 y + \log_2 z}{\log_2 a} = \frac{\log_2 yz}{\log_2 a}$$