作业题

例 1 物方空间布置有 20 个控制点，请列出使用单像空间后方交会解算内、外方位元素以及畸变系数的误差方程式，指出误差方程式、未知数、多余观测数的个数。其中畸变差模型为

$$\begin{cases}\Delta x=(x-x_0)\left[r^2k_1+r^4k_2\right]\\ \Delta y=(y-y_0)\left[r^2k_1+r^4k_2\right]\end{cases}$$

解 误差方程式为

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_{ad}-\boldsymbol{L}$$

其中，

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}v_x & v_y\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}\Delta X_S & \Delta Y_S & \Delta Z_S & \Delta\varphi & \Delta\omega & \Delta\kappa\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_{17} & a_{18} & a_{19}\\ a_{27} & a_{28} & a_{29}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}(x-x_0)\,r^2 & (x-x_0)\,r^4\\ (y-y_0)\,r^2 & (y-y_0)\,r^4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{ad}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}x-(x) & y-(y)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

误差方程式的个数：40 个

未知数：$3+6+2=11$ 个

多余观测数：$40-11=29$ 个

注 对于 $\boldsymbol{D}$，要保证 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_{ad}$ 乘出来是畸变差模型的那几项就可以了。

例 2 物方空间布置有 10 个控制点，列出解求 l_i 系数精确解及畸变系数 k_1、k_2 的误差方程式。其中畸变差模型为

$$\begin{cases} \Delta x = (x - x_0)\left[r^2 k_1 + r^4 k_2\right] \\ \Delta y = (y - y_0)\left[r^2 k_1 + r^4 k_2\right] \end{cases}$$

解 当有多余观测值，当像点坐标观测值改正数为 (v_x, v_y)，像点坐标的非线性改正为 $(\Delta x, \Delta y)$，直接线性变换取如下形式：

$$\begin{cases} (x + v_x) + \Delta x + \frac{l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \\ (y + v_y) + \Delta y + \frac{l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8}{l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1} = 0 \end{cases}$$

记 $A = l_9 X + l_{10} Y + l_{11} Z + 1$，代入像点坐标的非线性改正得到

$$\begin{cases} A\left(x + v_x\right) + A\left(x - x_0\right)\left[r^2 k_1 + r^4 k_2\right] + l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4 = 0 \\ A\left(y + v_y\right) + A\left(y - y_0\right)\left[r^2 k_1 + r^4 k_2\right] + l_5 X + l_6 Y + l_7 Z + l_8 = 0 \end{cases}$$

整理得到

$$\begin{cases} v_x = -\frac{1}{A}\left[A\left(x - x_0\right)\left(r^2 k_1 + r^4 k_2\right) + l_1 X + l_2 Y + l_3 Z + l_4 + xXl_9 + xYl_{10} + xZl_{11} + x\right] \\ v_y = -\frac{1}{A}\left[A\left(y - y_0\right)\left(r^2 k_1 + r^4 k_2\right) + l_5 X + l_5 Y + l_7 Z + l_8 + yXl_9 + yYl_{10} + yZl_{11} + y\right] \end{cases}$$

从而误差方程为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{W}$$

其中，

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{M} = -\begin{bmatrix} \frac{X}{A} & \frac{Y}{A} & \frac{Z}{A} & \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{xX}{A} & \frac{xY}{A} & \frac{xZ}{A} & \left(x - x_0\right) r^2 & \left(x - x_0\right) r^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{X}{A} & \frac{Y}{A} & \frac{Z}{A} & \frac{1}{A} & \frac{xX}{A} & \frac{xY}{A} & \frac{xZ}{A} & \left(x - x_0\right) r^2 & \left(x - x_0\right) r^4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_7 & l_8 & l_9 & l_{10} & l_{11} & k_1 & k_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{A} & -\frac{y}{A} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

注 1. 若只需要求解 k_1，则只代入含 k_1 的非线性改正项即可。

2. 观测值：像点坐标（20 个）

未知数：DLT 参数、畸变系数（$11 + 2 = 13$ 个）

真题

例 3 使用 Kodak Professional DCS Pro SLR/n 型数码相机对某目标物摄影，该目标物在摄影方向的纵深为 2.5m，镜头焦距为 50mm，安置的光圈号数为 11，若取模糊圈直径为 20mm，相机调焦在目标物的中心，距离为 4m，请计算超焦距，并判断能否获得清晰影像。

解 超焦距

$$H=\frac{F^2}{k\cdot E}=\frac{50^2}{11\cdot 20}=11.4\text{mm}$$

调焦距 $D=4\text{m}$

前景深

$$D_1=\frac{H\cdot D}{H+D}=\frac{11.4\times 4000}{11.4+4000}=11.37\text{mm}$$

后景深

$$D_2=\frac{H\cdot D}{H-D}=\frac{11.4\times 4000}{11.4-4000}=-11.43\text{mm}$$

后景深为负数，说明能获得清晰影像的范围只有 $0\sim 11.37\text{mm}$，故不能获得清晰影像

例 4 由两台 Hasselblad 555ELD 型数码相机组成的立体摄影测量系统，使用 40mm 镜头，两相机间的距离为 1.5m，现对某试验模型按正直摄影方式拍摄立体影像对，同名点的影像坐标按单片方式量测，量测精度为 ±2 像素，像素大小为 7.07 mm，若要求摄影方向的测量精度优于 ±3.0mm，请估算最长摄影距离应设置为多少？

解 $m_x=\pm 2\times 7.07=14.14\text{mm}$

$m_Z=\pm\sqrt{2}\cdot\dfrac{H^2}{f\cdot B}m_x=\pm\dfrac{14.14\sqrt{2}}{40\times 1500}H^2=\pm 3\text{mm}$，从而 $H=\sqrt{\dfrac{3\times 40\times 1500}{14.14\times\sqrt{2}}}=94.9\text{mm}=9.49\text{cm}$

例 5 就共线条件方程，回答下列问题

（1）写出以像点坐标为观测值的误差方程一般式，并写出各符号所代表的含义

（2）为测量某矿体模型的变形情况，在其表面贴敷 215 个标志点作为变形监测点，另外在边框上布置 20 个分布合理的标志点用全站仪测量其三维坐标作为控制点。使用数码相机在 9 个摄站对矿体模型摄影（不调焦），重叠度为 100%。若物方控制点坐标作为真值，实地不测外方位元素，列出以内、外方位元素及待定点物方坐标为未知数的光束法平差的误差方程式。指出哪类参数是观测值？误差方程式的个数是多少？多余观测数是多少？

（3）什么是近景摄影测量的光线束法平差？与空间后方交会-前方交会解法的区别是什么？

解（1）

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X_S} & \frac{\partial x}{\partial Y_S} & \frac{\partial x}{\partial Z_S} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial x}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial y}{\partial X_S} & \frac{\partial y}{\partial Y_S} & \frac{\partial y}{\partial Z_S} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial \kappa} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta X_S \\ \Delta Y_S \\ \Delta Z_S \\ \Delta\varphi \\ \Delta\omega \\ \Delta\kappa \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial f} & \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial f} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta f \\ \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x-(x) \\ y-(y) \end{bmatrix}$$

其中，v_x、v_y 为像点坐标改正数，(x,y) 为像点坐标观测值，(X,Y,Z) 为控制点的物方空间坐标，$(X_S,Y_S,Z_S,\varphi,\omega,\kappa)$ 为外方位元素，$(\Delta X_S,\Delta Y_S,\Delta Z_S,\Delta\varphi,\Delta\omega,\Delta\kappa)$ 为外方位元素改正数，(x_0,y_0,f) 为内方位元素，$(\Delta x_0,\Delta y_0,\Delta f)$ 为内方位元素改正数，(x)、(y) 是前一次迭代运算结果近似值。

（2）

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_c = \boldsymbol{A}_c\boldsymbol{t} + \boldsymbol{C}_c\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{D}_c\boldsymbol{X}_{ad} - \boldsymbol{L}_c\ , \boldsymbol{P}_c \\ \boldsymbol{V}_u = \boldsymbol{A}_u\boldsymbol{t} + \boldsymbol{B}_u\boldsymbol{X}_u + \boldsymbol{C}_u\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{D}_u\boldsymbol{X}_{ad} - \boldsymbol{L}_u\ , \boldsymbol{P}_u \end{cases}$$

观测值：待定点像点坐标，控制点像点坐标

误差方程式的个数：$9 \times (20 \times 2 + 215 \times 2) = 4230$（9 张像片，每个点 2 个误差方程）

必要观测数：$215 \times 3 + 9 \times 6 + 3 \times 9 = 726$

多余观测数：$4230 - 702 = 3504$

（3）把控制点的像点坐标、待定点的像点坐标以至其它内外业量测数据的一部分或全部均视作观测值，按共线条件方程整体地、同时地解算它们的最或是值和待定点的物方空间坐标的解算方法。

与空间后交—前交的区别：①空间后方交会-空间前方交会解法分步解求，光线束法为整体解算；②空间后交—前交解法中待定点的像点坐标对外方位元素的确定不起作用；光线束法中，待定点的像点坐标对外方位元素的确定有很大影响。

例 6 就直接线性变换解法，回答下列问题

（1）写出三维直接线性变换解法的基本关系式，指出各符号的含义。

（2）条件同例 5，列出计算第 5 张影像的 l_i 系数精确值的误差方程式。畸变差模型取

$$\begin{cases} \Delta x = (x - x_0)\left[r^2k_1 + r^4k_2\right] \\ \Delta y = (y - y_0)\left[r^2k_1 + r^4k_2\right] \end{cases}$$

解（1）

$$\begin{cases} x + \frac{l_1X + l_2Y + l_3Z + l_4}{l_9X + l_{10}Y + l_{11}Z + 1} = 0 \\ y + \frac{l_5X + l_6Y + l_7Z + l_8}{l_9X + l_{10}Y + l_{11}Z + 1} = 0 \end{cases}$$

其中，l_i 为直接线性变换系数，(x, y) 为像点坐标，(X, Y, Z) 为物方空间坐标。

（2）当有多余观测值，当像点坐标观测值改正数为 (v_x, v_y)，像点坐标的非线性改正为 $(\Delta x, \Delta y)$，直接线性变换取如下形式：

$$\begin{cases} (x + v_x) + \Delta x + \frac{l_1X + l_2Y + l_3Z + l_4}{l_9X + l_{10}Y + l_{11}Z + 1} = 0 \\ (y + v_y) + \Delta y + \frac{l_5X + l_6Y + l_7Z + l_8}{l_9X + l_{10}Y + l_{11}Z + 1} = 0 \end{cases}$$

记 $A = l_9X + l_{10}Y + l_{11}Z + 1$，代入像点坐标的非线性改正得到

$$\begin{cases} A(x + v_x) + A(x - x_0)\left[r^2k_1 + r^4k_2\right] + l_1X + l_2Y + l_3Z + l_4 = 0 \\ A(y + v_y) + A(y - y_0)\left[r^2k_1 + r^4k_2\right] + l_5X + l_6Y + l_7Z + l_8 = 0 \end{cases}$$

整理得到

$$\begin{cases} v_x = -\frac{1}{A}\left[A(x - x_0)(r^2k_1 + r^4k_2) + l_1X + l_2Y + l_3Z + l_4 + xXl_9 + xYl_{10} + xZl_{11} + x\right] \\ v_y = -\frac{1}{A}\left[A(y - y_0)(r^2k_1 + r^4k_2) + l_5X + l_5Y + l_7Z + l_8 + yXl_9 + yYl_{10} + yZl_{11} + y\right] \end{cases}$$

从而误差方程为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{ML} - \boldsymbol{W}$$

其中，

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{M} = -\begin{bmatrix} \frac{X}{A} & \frac{Y}{A} & \frac{Z}{A} & \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{xX}{A} & \frac{xY}{A} & \frac{xZ}{A} & (x - x_0)r^2 & (x - x_0)r^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{X}{A} & \frac{Y}{A} & \frac{Z}{A} & \frac{1}{A} & \frac{xX}{A} & \frac{xY}{A} & \frac{xZ}{A} & (x - x_0)r^2 & (x - x_0)r^4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_7 & l_8 & l_9 & l_{10} & l_{11} & k_1 & k_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{A} & -\frac{y}{A} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$