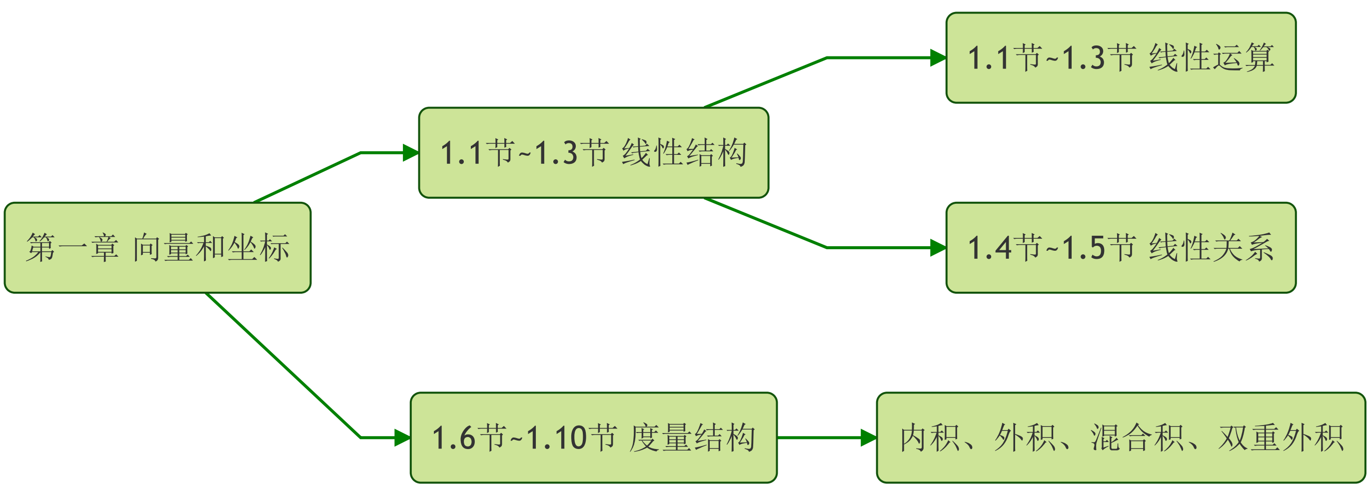
第一讲 向量的线性运算（1.1~1.3节）

目录

一、引言

各位未来的数学工作者们，大家早上好．今天是我们**空间解析几何**的第一次课．我们就从第一章说起．第一章的核心其实是在讲**向量空间**．它又可以分成两部分，后五节讲的是向量空间的**度量结构**，前五节讲的是向量空间的**线性结构**．

前五节**线性结构**又可以分为两部分：1.1节-1.3节讨论**线性运算**，1.4节-1.5节讨论**线性关系**．



这次课我们讨论向量的**线性运算**，主要内容包括：向量的**定义**，向量的**加法**，向量的**数乘**．

有同学可能有想法了：*我们在中学已经学过了这些内容了啊*

既然如此，那么就请你们思考几个问题吧：

1.1. 思考

- 在高中所学的解析几何里，最重要的内容是什么？

> 学生答：圆锥曲线

- 这些圆锥曲线的方程是建立在什么坐标系下的？

> 学生答：平面直角坐标系

- 平面直角坐标系是什么样的？

> 学生答：两条相互垂直的数轴，垂足是原点，两条数轴的单位长度一样.

- 如果两个坐标轴不垂直会怎么样？

> 教师答：对某些问题而言不垂直的坐标轴反而更方便

- 如果两个坐标轴上的单位长度不相等会怎么样？

> 教师答：两个单位长度必须一样吗？如果不影响问题的解决，也许会更有利哦

- 在立体空间中能不能建立坐标系？能建立什么样的坐标系？

> 教师答：高中学过空间直角坐标系，但它同样不是惟一的选择

- 为什么平面上的坐标系有两个坐标轴，而立体空间中的坐标系有三个坐标轴？

> 教师答：有同学说因为平面是2维的，立体是3维的．那么什么叫2维，什么叫3维？`

- 超越我们直观体验的4维空间、5维空间、甚至n维空间应该如何刻画呢？

> 教师答：所有这些问题归根结底都是**坐标系**的问题！

1.2. 关键问题

那么对于上述纷繁复杂的各种坐标系，我们能否建立一个严密而又统一的数学理论，来回答如下问题呢：

> 坐标系为什么可以建立起来？又是如何建立起来的呢？

这其实是我们第一章前五节所要解决的根本问题.

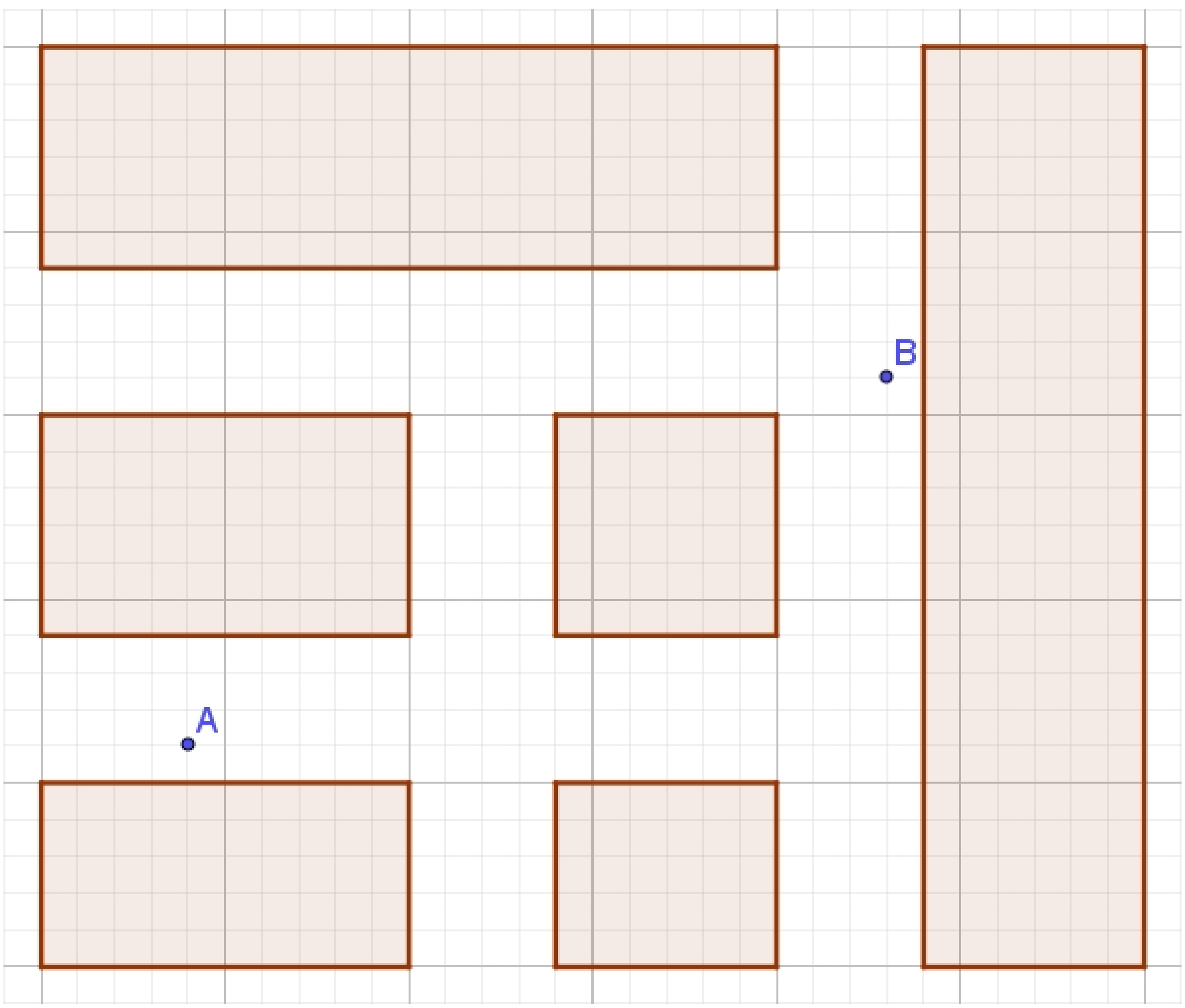
要想解决这个问题，我们首先应该思考一下：**我们要用坐标系来干什么**？或者说，**坐标系的本质作用是什么**？比如平面坐标系，它究竟起了什么作用？

> [讨论后，教师回答]它的作用在于使用有限手段，也就是两个参数，来描述平面上任何一个点．而平面上的点，也就是平面上的位置．平面上有多少个位置呢？无限多个．所以坐标系的本质作用在于**以有限描述无限**．描述无限个什么？无限个位置！

那么，我们在日常生活中是如何描述某个位置的呢？

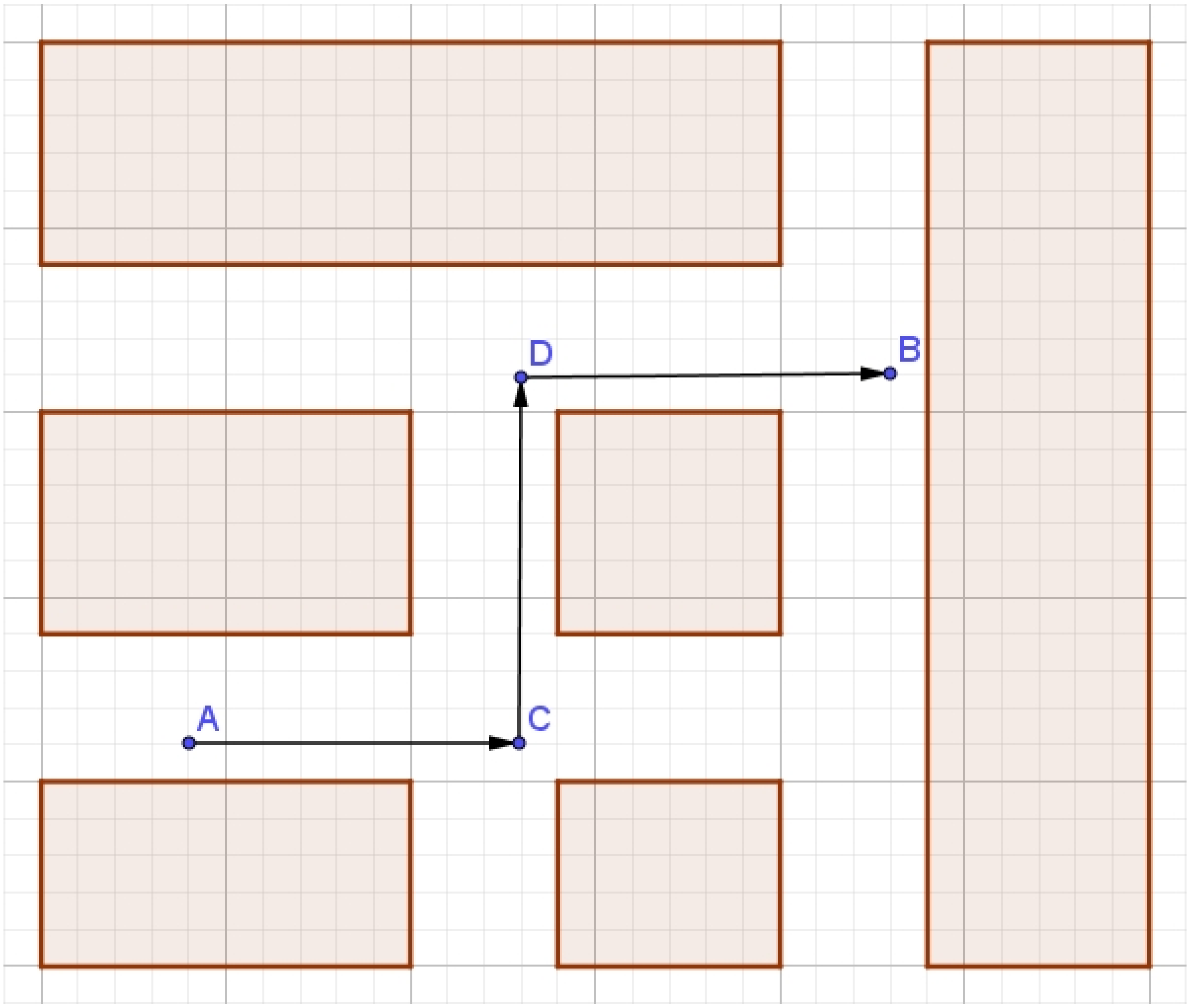
1.3. 一个问路问题

比如，你现在正在下图中的A点处沿着马路向东行走，这时候有个人向你问路，问你B怎么走．你会怎么描述B的位置呢？



你可能会说：顺着我走的这个方向，见到第一个十字路口左拐，一直走，等见到三叉路口了就右拐，走到头就看到B了．

也就是这个路线：

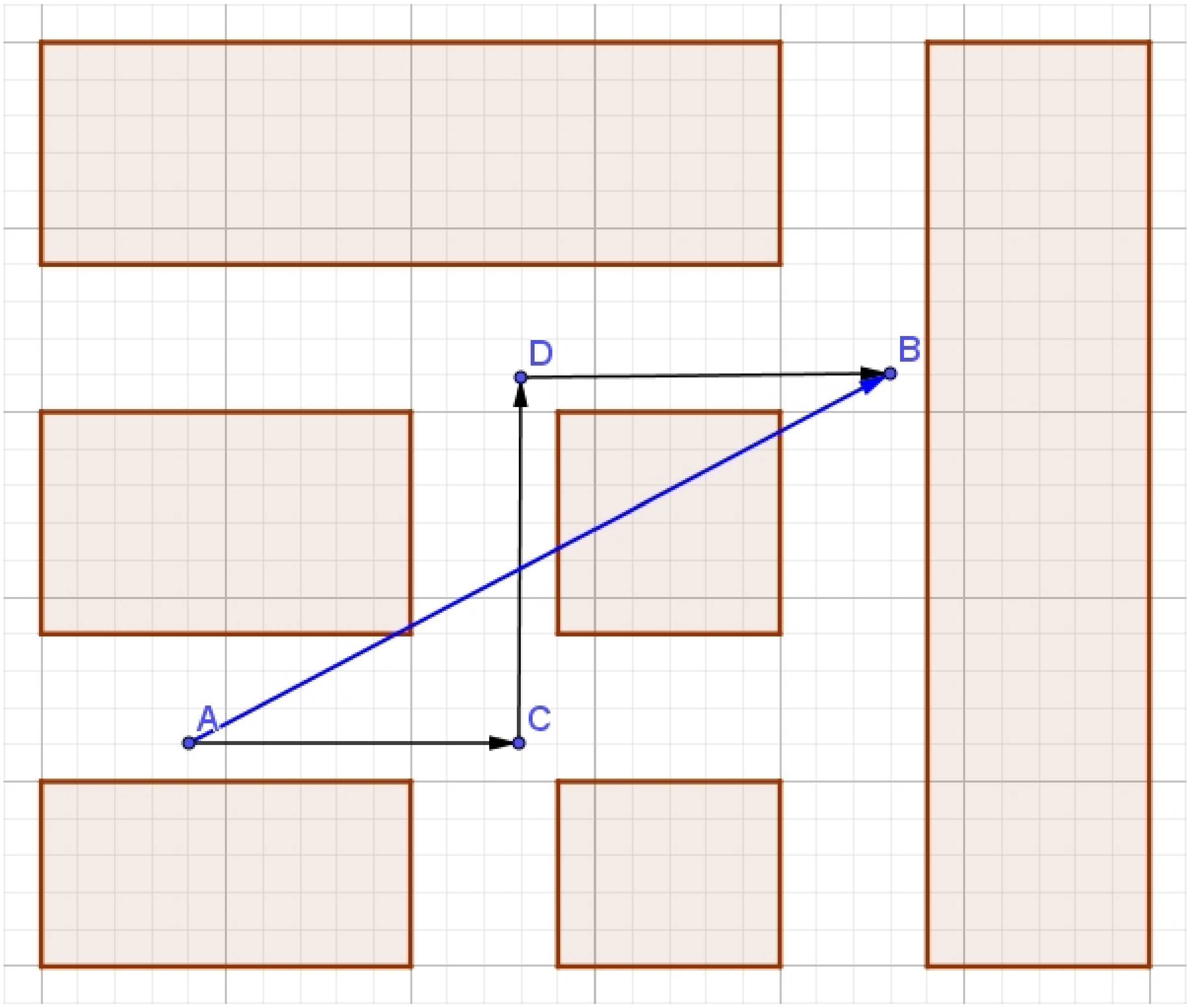


实际上，如果以A为参考点，我们可以使用这个方式描述出这个地图中任何一点的位置．那么我们使用的是什么方式呢？

> 我们无非是使用了几条首尾相接的有向线段，这就是你们中学所学过的**向量**

那么，在描述点的位置时，为什么我们不直接用点呢？

> 点有一个致命的问题，点的集合是松散的、没有结构的，点与点的相互关系必须借助于其他几何对象实现．而向量则不同．某些向量的集合，它们在直观上带有一种结构．以上图为例，我们实际要得到的是B的位置，实际上我们本来只需要向量$\overrightarrow{AB}$就够了，但是城市交通让我们不能沿直线到达B，于是我们使用了向量$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CD}$和$\overrightarrow{DB}$．事实上，这三个向量恰好等效于向量$\overrightarrow{AB}$，这正是我们中学所学过的**向量加法**．换句话说，向量之间的运算，将不同向量联系了起来，从而使向量的集合产生了结构．即，**运算产生了结构**．



我们这里要探讨**坐标系是如何构造起来的**，我们需要研究的运算有两种，其一就是上面提到的**向量加法**．但是只有向量加法，我们并不能实现**以有限描述无限**．我们还需要一种运算，就是你们中学所学的**向量数乘**．这两种运算合称**线性运算**．这次课我们将系统地回顾和学习向量的加法与数乘这两种线性运算．下次课我们就要探究一下，线性运算是如何实现**以有限描述无限**的．

首先我们从向量的定义开始，虽然你们中学已经学过，但是我们的数学是需要**体系化**的，任何一个概念，如果它众所周知，那么我们可以将其作为基本概念，而不加定义，比如，点、直线、平面；而其他概念，则都应该从定义出发．

二、向量的定义

2.1. 何为向量

向量，就是既有大小又有方向的量．更具体一点说，在我们空间解析几何这门课上，向量就是用**有向线段**来表示的，而有向线段的起点和终点分别就是对应向量的**起点**和**终点**．那么接下来，如何书写向量呢？课本上使用了粗体的英文字母，但是我要求你们手写的时候，必须给它头上戴上箭头，例如$\vec{a}$，否则将无法与实数相区分．如果已经明确了起点和终点，我们还可以用起点和终点表示向量，同样地，必须戴上箭头，例如$\overrightarrow{AB}$．

我们刚才说了向量是既有大小又有方向的量，一个向量的大小，也被称为**向量的模**，也就是对应**有向线段的长度**，因此也称为**向量的长度**．向量$\vec{a}$的模，记作$|\vec{a}|$．

- 模为零的向量叫做**零向量**，记作$\vec{0}$，其方向任意，不确定
- 模为1的向量叫做**单位向量**，向量$\vec{a}$方向上的单位向量记作$\vec{a}^0$

2.2. 共线与共面

前面说到，模和方向是向量额两大要素，所以我们定义模相等、方向相同的两个向量为**相等**的向量；而模相等、方向相反的两个向量则叫做**相反**向量，其中一个称为另一个的**反向量**，向量$\vec{a}$的反向量记作$-\vec{a}$．

由向量相等的定义可以看出：**平移不改变向量**．所以对两个向量而言，**平行和共线是一回事**．一般来说，平行于同一直线的一组向量叫做**共线向量**；平行于同一平面的一组向量叫做**共面向量**．对于这二者，后面我们会给出更深刻的刻画．

> 由于零向量方向不定，所以零向量可以和任何共线的向量组共线，也可以和任何共面的向量组共面．

三、向量的加法

3.1. 向量加法的定义

3.2. 向量加法的运算律

3.3. 向量减法

四、向量的数乘

4.1. 向量数乘的定义

4.2. 向量数乘的运算律

4.3. 例题

五、小结

- 关键问题
- 核心概念
- 两种运算
    - 定义、性质、运算律
    - 合称**线性运算**

线性运算是坐标系得以建立的根本原因，下一讲我们将探究如何使用线性运算掌控无限个向量，从而建立起坐标系。

作业

- 13页：2（2）（3），3
- 14页：6，10

思考题

- 14页：12，13