

# 第一讲 向量的线性运算（1.1~1.3节）

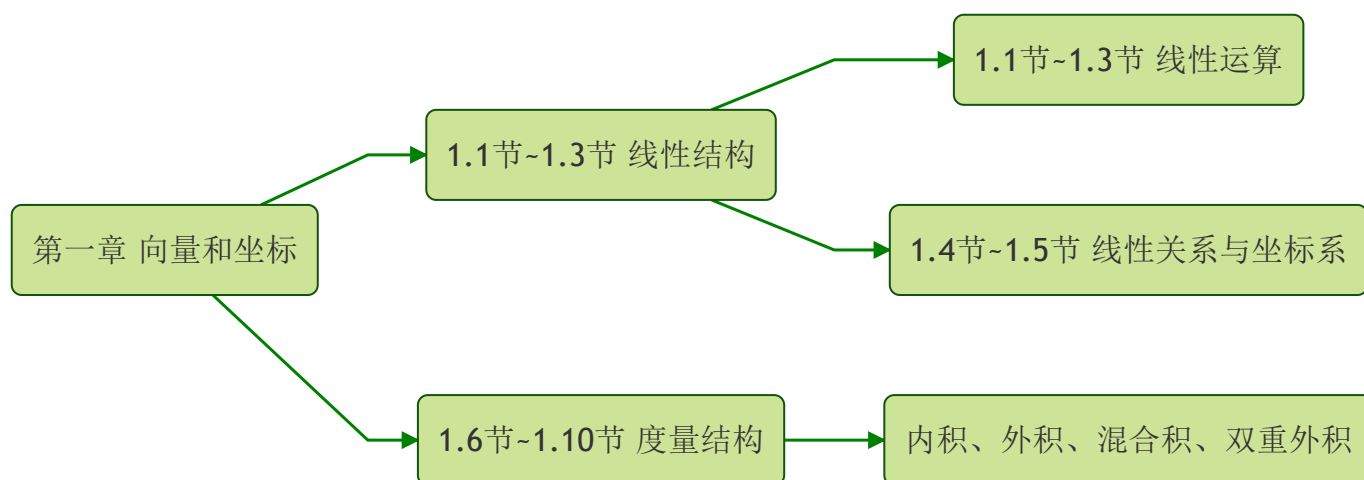
## 目录

- 一、引言
- 二、向量的定义
- 三、向量的加法
- 四、向量的数乘
- 五、小结

## 一、引言

各位未来的数学工作者们，大家早上好。今天是我们空间解析几何的第一次课。我们就从第一章说起。第一章的核心其实是在讲向量空间。它又可以分成两部分，后五节讲的是向量空间的度量结构，前五节讲的是向量空间的线性结构。

前五节线性结构又可以分为两部分：1.1节-1.3节讨论线性运算，1.4节-1.5节讨论线性关系与坐标系。



这次课我们讨论向量的线性运算，主要内容包括：向量的定义，向量的加法，向量的数乘。

有同学可能有想法了：我们在中学已经学过了这些内容了啊

既然如此，那么就请你们思考几个问题吧：

## 1.1. 思考

- 在高中所学的解析几何里，最重要的内容是什么？

学生答：圆锥曲线

- 这些圆锥曲线的方程是建立在什么坐标系下的？

学生答：平面直角坐标系

- 平面直角坐标系是什么样的？

学生答：两条相互垂直的数轴，垂足是原点，两条数轴的单位长度一样。

- 如果两个坐标轴不垂直会怎么样？

教师答：对某些问题而言不垂直的坐标轴反而更方便

- 如果两个坐标轴上的单位长度不相等会怎么样？

教师答：两个单位长度必须一样吗？如果不影响问题的解决，也许会更有利哦

- 在立体空间中能不能建立坐标系？能建立什么样的坐标系？

教师答：高中学过空间直角坐标系，但它同样不是惟一的选择

- 为什么平面上的坐标系有两个坐标轴，而立体空间中的坐标系有三个坐标轴？

教师答：有同学说因为平面是2维的，立体是3维的。那么什么叫2维，什么叫3维？`

- 超越我们直观体验的4维空间、5维空间、甚至 $n$ 维空间应该如何刻画呢？

教师答：所有这些问题归根结底都是**坐标系**的问题！

## 1.2. 关键问题

那么对于上述纷繁复杂的各种坐标系，我们能否建立一个严密而又统一的数学理论，来回答如下问题呢：

坐标系为什么可以建立起来？又是如何建立起来的呢？

这其实是我们第一章前五节所要解决的根本问题。

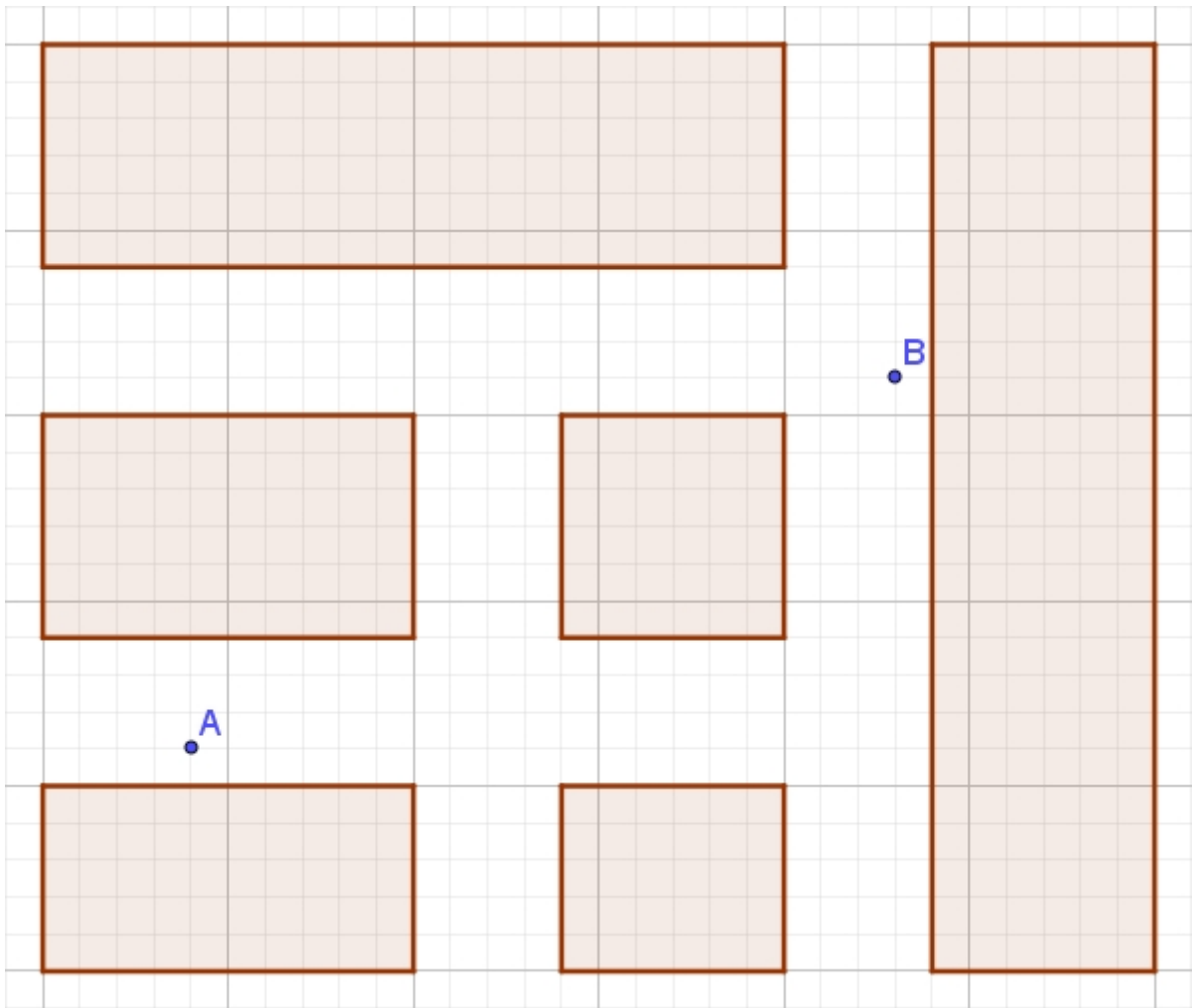
要想解决这个问题，我们首先应该思考一下：我们要用坐标系来干什么？或者说，坐标系的本质作用是什么？比如平面坐标系，它究竟起了什么作用？

[讨论后，教师回答]它的作用在于使用有限手段，也就是两个参数，来描述平面上任何一个点，而平面上的点，也就是平面上的位置。平面上有多少个位置呢？无限多个。所以坐标系的本质作用在于以有限描述无限。描述无限个什么？无限个位置！

那么，我们在日常生活中是如何描述某个位置的呢？

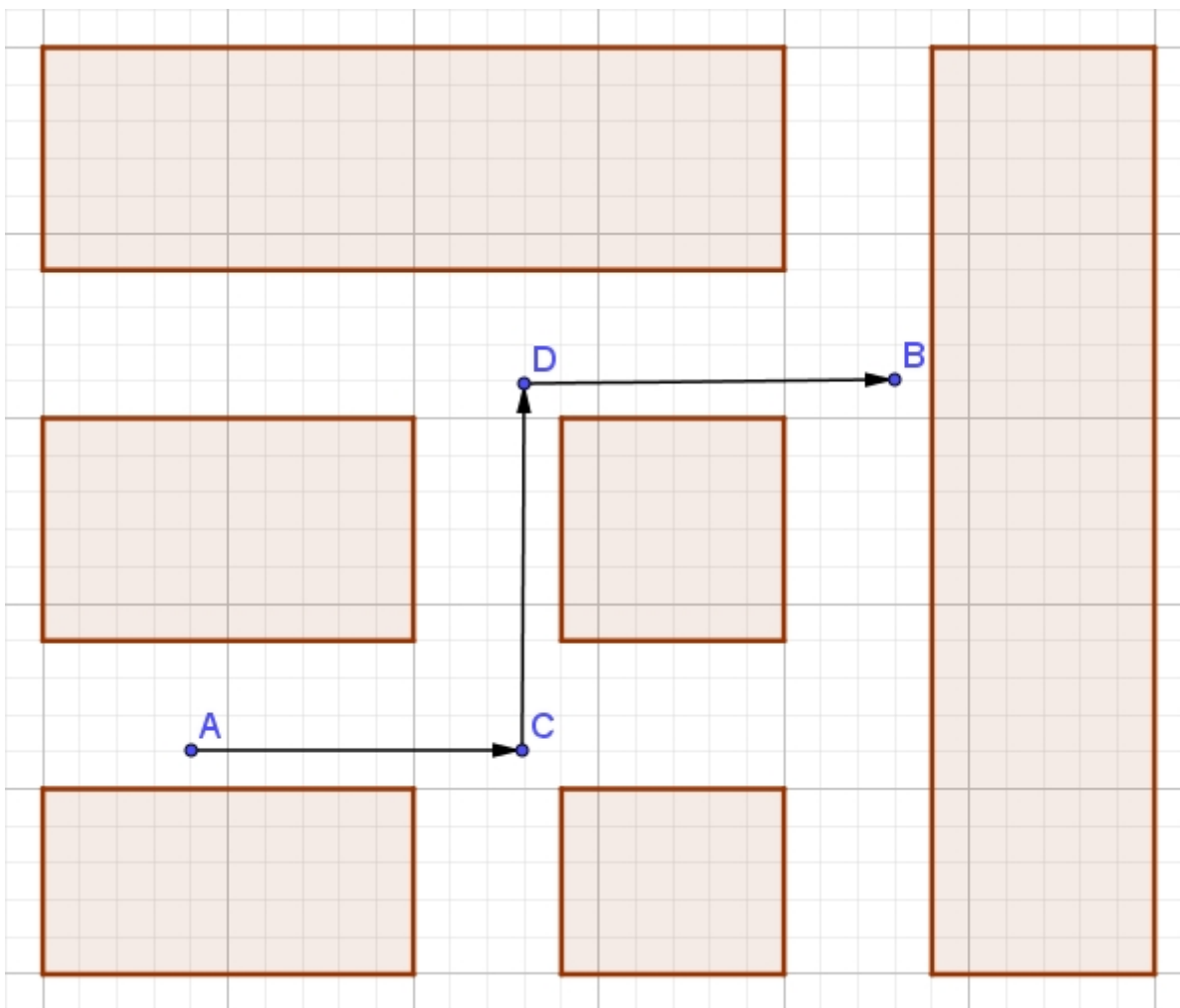
### 1.3. 一个问路问题

比如，你现在正在下图中的A点处沿着马路向东行走，这时候有个人向你问路，问你B怎么走。你会怎么描述B的位置呢？



你可能会说：顺着我走的这个方向，见到第一个十字路口左拐，一直走，等见到三叉路口了就右拐，走到头就看到B了。

也就是这个路线：

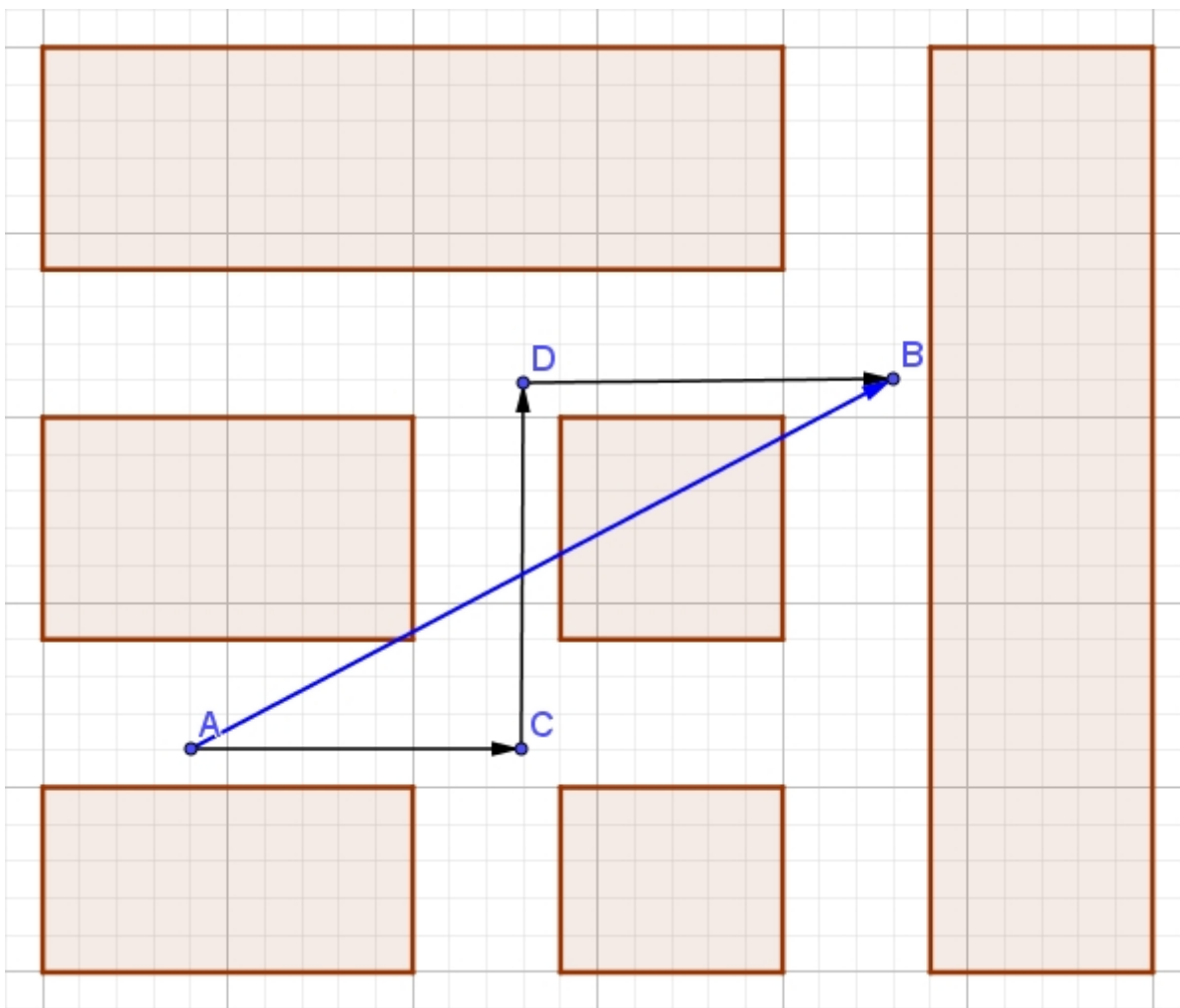


实际上，如果以 $A$ 为参考点，我们可以使用这个方式描述出这个地图中任何一点的位置。那么我们使用的是什么呢？

我们无非是使用了几条首尾相接的有向线段，这就是你们中学所学过的**向量**

那么，在描述点的位置时，为什么我们不直接用点呢？

点有一个致命的问题，点的集合是松散的、没有结构的，点与点的相互关系必须借助于其他几何对象实现。而向量则不同。某些向量的集合，它们在直观上带有一种结构。以上图为例，我们实际要得到的是 $B$ 的位置，实际上我们本来只需要向量 $\overrightarrow{AB}$ 就够了，但是城市交通让我们不能沿直线到达 $B$ ，于是我们使用了向量 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{CD}$ 和 $\overrightarrow{DB}$ 。事实上，这三个向量恰好等效于向量 $\overrightarrow{AB}$ ，这正是我们中学所学过的**向量加法**。换句话说，向量之间的运算，将不同向量联系了起来，从而使向量的集合产生了结构。即，**运算产生了结构**。



我们这里要探讨坐标系是如何构造起来的，我们需要研究的运算有两种，其一就是上面提到的**向量加法**。但是只有向量加法，我们并不能实现**以有限描述无限**。我们还需要一种运算，就是你们中学所学的**向量数乘**。这两种运算合称**线性运算**。这次课我们将系统地回顾和学习向量的加法与数乘这两种线性运算。下次课我们就要探究一下，线性运算是如何实现**以有限描述无限**的。

首先我们从向量的定义开始，虽然你们中学已经学过，但是我们的数学是需要**体系化**的，任何一个概念，如果它众所周知，那么我们可以将其作为基本概念，而不加定义，比如，点、直线、平面；而其他概念，则都应该从定义出发。

## 二、向量的定义

### 2.1. 何为向量

**向量**，就是既有大小又有方向的量。更具体一点说，在我们空间解析几何这门课上，向量就是用**有向线段**来表示的，而有向线段的起点和终点分别就是对应向量的**起点**和**终点**。那么接下来，如何书写向量呢？课本上使用了粗体的英文字母，但是我要求你们手写的时候，必须给它头上戴上箭头，例如 $\vec{a}$ ，否则将无法与实数相区分。如果已经明确了起点和终点，我们还可以用起点和终点表示向量，同样地，必须戴上箭头，例如 $\overrightarrow{AB}$ 。

我们刚才说了向量是既有大小又有方向的量，一个向量的大小，也被称为**向量的模**，也就是对应有向线段的长度，因此也称为**向量的长度**。向量 $\vec{a}$ 的模，记作 $|\vec{a}|$ 。

- 模为零的向量叫做**零向量**，记作 $\vec{0}$ ，其方向任意，不确定
- 模为1的向量叫做**单位向量**，向量 $\vec{a}$ 方向上的单位向量记作 $\vec{a}^0$

## 2.2. 共线与共面

前面说到，模和方向是向量的两大要素，所以我们作如下定义。

模相等、方向相同的两个向量为**相等**的向量；而模相等、方向相反的两个向量则叫做**相反向量**，其中一个称为另一个的**反向量**，向量 $\vec{a}$ 的反向量记作 $-\vec{a}$ 。

由向量相等的定义可以看出：**平移不改变向量**。所以对两个向量而言，**平行和共线是一回事**。

一般来说，平行于同一直线的一组向量叫做**共线向量**；平行于同一平面的一组向量叫做**共面向量**。对于这二者，后面我们会给出更深刻的刻画。

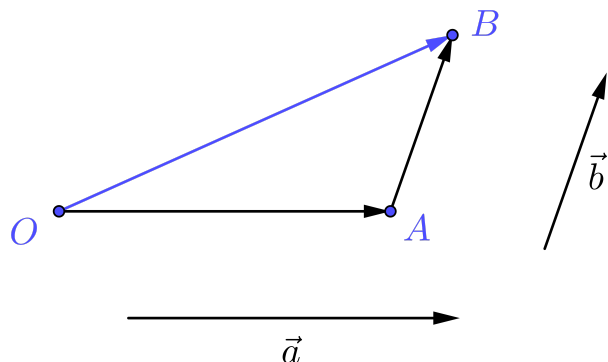
由于零向量方向不定，所以零向量可以和任何共线的向量组共线，也可以和任何共面的向量组共面。

## 三、向量的加法

我们在前面的“问路问题”中，已经见识过了向量的加法。下面给出严格的定义。

### 3.1. 向量加法的定义

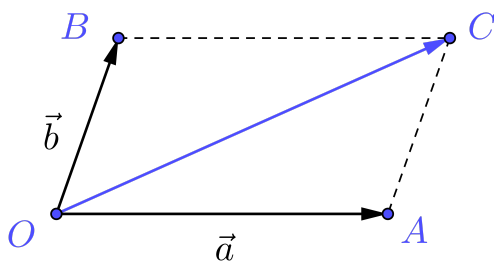
设已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 以及空间中任意一点 $O$ 。作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 。记向量 $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ 。我们定义 $\vec{c}$ 叫做 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的**和**，记作 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 。



向量加法的上述定义也称为向量加法的三角形法则。

如果我们不是将向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 首尾相接，而是将它们的起点归结于一点，我们很容易证明下面的平行四边形法则。

**定理 1.2.1**（向量加法的平行四边形法则） 如果以两个向量 $\vec{OA}$ 和 $\vec{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$ ，那么对角线向量 $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ 。



## 3.2. 向量加法的运算律

从向量加法的定义（即三角形法则）和平行四边形法则出发，可以很容易证明，向量加法满足如下四条运算律。

**定理 1.2.2**（向量加法的运算律）

- 交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ；
- 结合律： $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ；
- 零向量律： $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ；
- 反向量律： $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ 。

需要指出的一点是，运算不是天然的，是我们定义出来，所以运算律也不是天然的，应该由定义和其他已知理论证明出来。我们第四次课就会遇到不满足交换律和结合律的运算，所以建议大家课下自行证明这四个运算律。

尤其需要指出的是结合律。由于结合律的成立，所以多个向量求和的时候可以不加括号。也是因为结合律的成立，多个向量求和事实上满足多边形法则。

多个向量求和的多边形法则 设  $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1, \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{a}_n$ 。那么

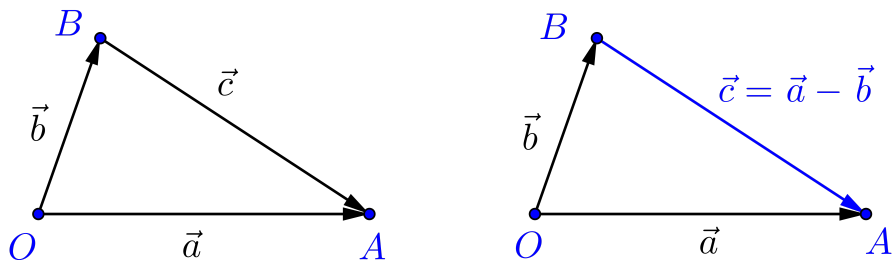
$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \overrightarrow{OA_n}.$$

它之所以成立，是因为我们可以逐次使用三角形法则。

### 3.3. 向量减法

既然有了向量加法的定义，我们可以将向量减法定义为向量加法的逆运算，即：

如果  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ ，那么我们就定义  $\vec{c}$  为  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的差，记作  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ，并且称运算  $\vec{a} - \vec{b}$  为向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的减法。



上述向量减法的定义也称为向量减法的三角形法则，只需要记住：

两个向量的差总是指向被减向量。

由于向量加法和减法都满足三角形法则，而三角形的一边之长小于等于另外两边长度之和，因而我们有如下不等式。

三角不等式

$$|\vec{a} \pm \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

借助于向量减法的定义和向量加法的运算律，我们可以证明如下结论。

向量减法与反向量加法的等效性



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

证明. 设  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

由向量减法的定义可知:  $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ .

等式两边同时加上  $(-\vec{b})$ , 再由向量加法的结合律可知:

$$\vec{c} + (\vec{b} + (-\vec{b})) = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

由反向量律和零向量律可知:  $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .  $\square$

我们之所以要将如此显而易见的结论的证明写下来, 是为了向大家强调几件事:

- 看似平凡而直观的结论, 其证明未必是平凡的, 它甚至可能是错的. 数学专业的学生应该养成严谨的治学态度.
- 证明的书写是有一定格式的. 我们要求:
  - 以“证明”二字开始, 随后有一个点 (注意不是冒号).
  - 以  $\square$  结束,  $\square$  是证明结束的标志, 它表示这之后的文本与此证明无关.
  - 凡是命题中没有出现的名称, 应该设出, 例如上述证明中的  $\vec{c}$ .
  - 凡是添加新的操作, 如辅助线等, 必须以文字明确说明, 禁止仅以“如图所示”等含糊的话语说明.
- 禁止一切形式的“循环论证”.
- 最后, 数学证明是严谨的演绎推理. 证明中每一个小结论的出现, 必须要有“三段论”, 即
  - 大前提 (所依据的理论, 必须是已经证明过的正确的理论而非你的臆想)
  - 小前提 (条件)
  - 结论.
- 其中, 大前提或小前提可以酌情省略.

另外, 这个证明还告诉我们一件有趣的事情:

向量等式可以移项.

## 四、向量的数乘

前面我们已经讲向量的加法, 这是两种线性运算之一.

但是只有向量加法, 并不能实现我们以有限描述无限的目的, 我们还需要第二种线性运算, 那就是向量的数乘.

## 4.1. 向量数乘的定义

设 $\lambda$ 是一个实数， $\vec{a}$ 是一个向量。我们构造一个新向量 $\vec{b}$ ，满足

- $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ;
- 当 $\lambda > 0$ 时， $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向；当 $\lambda < 0$ 时， $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向。

那么，我们就说 $\vec{b}$ 是 $\lambda$ 和 $\vec{a}$ 的**数乘**，记作 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 。

从向量数乘的定义可以得到一个基本性质。

**向量数乘的基本性质** 设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个向量且\*\* $\vec{a}$ 非零。那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 当且仅当存在实数 $\lambda$ ，使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 。

请大家思考一个问题

条件“ $\vec{a}$ 非零”能否省略？如果删除了这个条件会在什么地方出问题？

假如删除条件“ $\vec{a}$ 非零”，那么充要条件的一个方向仍然是对的，但是另一个方向有问题。具体说来，

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftarrow \text{存在实数}\lambda, \text{使得}\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

这仍然成立，因为这是由数乘的定义所保证的。但是

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \text{存在实数}\lambda, \text{使得}\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

是由问题的。因为我们删除了条件“ $\vec{a}$ 非零”，所以 $\vec{a}$ 可能是零向量。在 $\vec{a}$ 是零向量，而 $\vec{b}$ 不是零向量的前提下，这里的实数 $\lambda$ 显然无法找到。

使用数乘的定义，我们还能得到另一个以外收获，那就是前面提到的向量 $\vec{a}^0$ ，它是非零向量 $\vec{a}$ 方向上的单位向量。借助向量数乘的定义，我们可以得到如下刻画。

**非零向量的单位化** 若 $\vec{a}$ 是非零向量，那么

$$\vec{a}^0 = |\vec{a}|^{-1} \vec{a}.$$

## 4.2. 向量数乘的运算律

与向量加法类似地，向量数乘也满足四条运算律。

**定理1.3.1（向量数乘的运算律）** 向量数乘满足如下运算律：

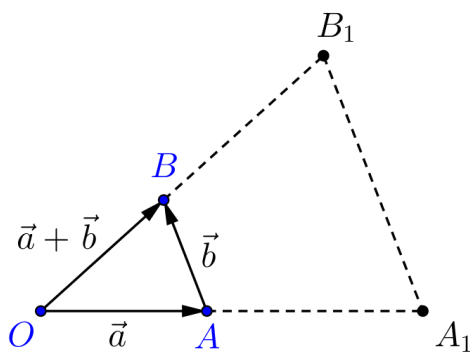
- 幺律： $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;

- 结合律:  $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ;
- 第一分配律:  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ;
- 第二分配律:  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ .

请大家课下自行证明前面三条运算律, 下面我们给出**第二分配律**的证明.

**证明.** 当 $\lambda = 0$ 、 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$ 时, 结论是平凡的. 我们不妨设上述三者都非零. 如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 由于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都不是零向量, 所以由数乘的基本性质可知, 存在实数 $\mu$ , 使得 $\vec{b} = \mu\vec{a}$ , 所以 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \mu\vec{a})$ . 由第一分配律可知, 此式 $= \lambda[(1 + \mu)\vec{a}]$ . 由结合律可得, 上式 $= (\lambda + \lambda\mu)\vec{a}$ . 由第一分配律可知, 上式 $= \lambda\vec{a} + \lambda\mu\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ . 以下我们只需考虑 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线的情况.

设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线. 令 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ , 那么 $OAB$ 构成一个三角形, 所以 $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ . 不妨设 $\lambda > 0$ . 延长 $OA$ 至 $A_1$ 使得 $\overrightarrow{OA_1} = \lambda\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}$ , 延长 $OB$ 至 $B_1$ 使得 $\overrightarrow{OB_1} = \lambda\overrightarrow{OB} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ , 连接 $A_1B_1$  (见下图). 那么 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OA_1B_1$ 相似. 所以 $AB \parallel A_1B_1$ , 所以 $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\vec{b}$ . 因此,  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ .  $\square$



我们的证明中使用了**不妨设**这个词, 它表示**不妨设**后面的内容不影响证明, 或者**不妨设**所隐藏的证明与我们所写出的证明相似. 例如我们的证明中, 只是讨论了 $\lambda > 0$ 的情况, 实际上 $\lambda < 0$ 的情况与此类似. 请大家课下自行补充相关证明.

### 4.3. 例题

关于向量数乘的应用, 我们看一下课本例2.

**例2.** 使用向量法证明: 三角形两边的中位线平行于第三边, 且等于第三边长度的一半.

**证明.** 设 $\triangle ABC$ 两边 $AB$ 和 $AC$ 的中点分别为 $M$ 和 $N$ , 那么

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

由数乘的定义和性质可知， $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$  且  $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ .  $\square$

请大家课下自行证明1.1节-1.3节的其他例题.

## 五、小结

- 关键问题
- 核心概念
- 两种运算
  - 定义、性质、运算律
  - 合称**线性运算**

**线性运算**是坐标系得以建立的根本原因，下一讲我们将探究如何使用线性运算掌控无限个向量，从而建立起坐标系.

## 作业

- 13页：2 (2) (3), 3
- 14页：6, 10

## 思考题

- 14页：12, 13

好好学习，天天向上。做好作业，下次再见！