Minimum Snap轨迹规划详解（2）corridor与时间分配

轨迹规划

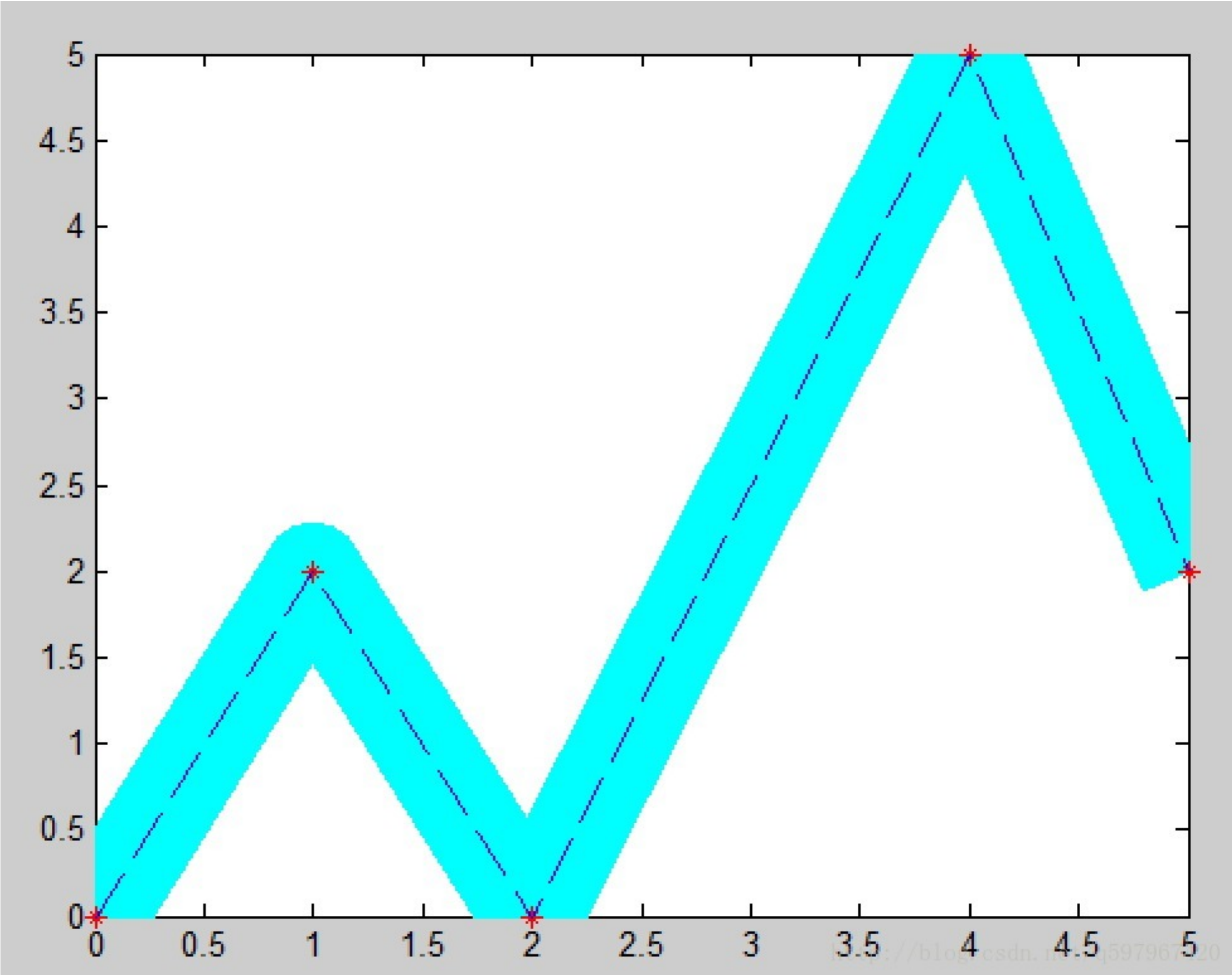
在上一篇文章中，我们得到的轨迹并不是很好，与路径差别有点大，我们期望规划出的轨迹跟路径大致重合，而且不希望有打结的现象，而且希望轨迹中的速度和加速度不超过最大限幅值。为了解决这些问题有两种思路：

- 思路一：把这些"期望"加入到优化问题中。
- 思路二：调整时间分配，来避免这些问题。

1.corridor

1.1 corridor是什么？

为了限制轨迹的形状，引入了corridor的概念，corridor可以理解为可行通道，如下图，规划出的轨迹必须在corridor内。直观的思路是：如果能把corridor当作约束加入到QP问题中，那么解得的轨迹自然就在corridor内了。



1.2 corridor约束怎么加?

很容易想到，把之前的等式约束$Ap=d$改成不等式约束$Ap\le d_1$和$Ap\ge d_2$。**然而，不管是等式约束还是不等式约束，都是针对一个特定的时刻**，而实际希望的是对所有时刻$t\in[0,T]$，都需要在corridor中。
一个简单粗暴的思路：在路径上多采样一些中间点，每个中间点都加corridor约束。尽管这种方法理论上只能保证采样点在corridor中，但实际过程中，如果corridor大小和采样步长设置得合理，而且不Fix waypoints，能work的比较好。这里不fix 中间点的位置，是为了去掉中间点的强约束，尽量避免轨迹打结，实际中，我们也是不一样要求轨迹完全经过中间点，只要在那附近（corridor）内就行。

1.3 构造corridor不等式约束

为了方便构造，对于每一个采样点pt，我们施加一个矩形的corridor，即

$$x_{min}\le pt_x\le x_{max},\ y_{min}\le pt_y\le y_{max}$$

这里用矩形corridor是因为斜线corridor（平行四边形）不好构造，而且我们只需要大致在corridor里面就好，没有必要非弄一个严格的斜线corridor。对于每个采样点，设矩形corridor的边长为$2r$，增加两个位置不等式约束：

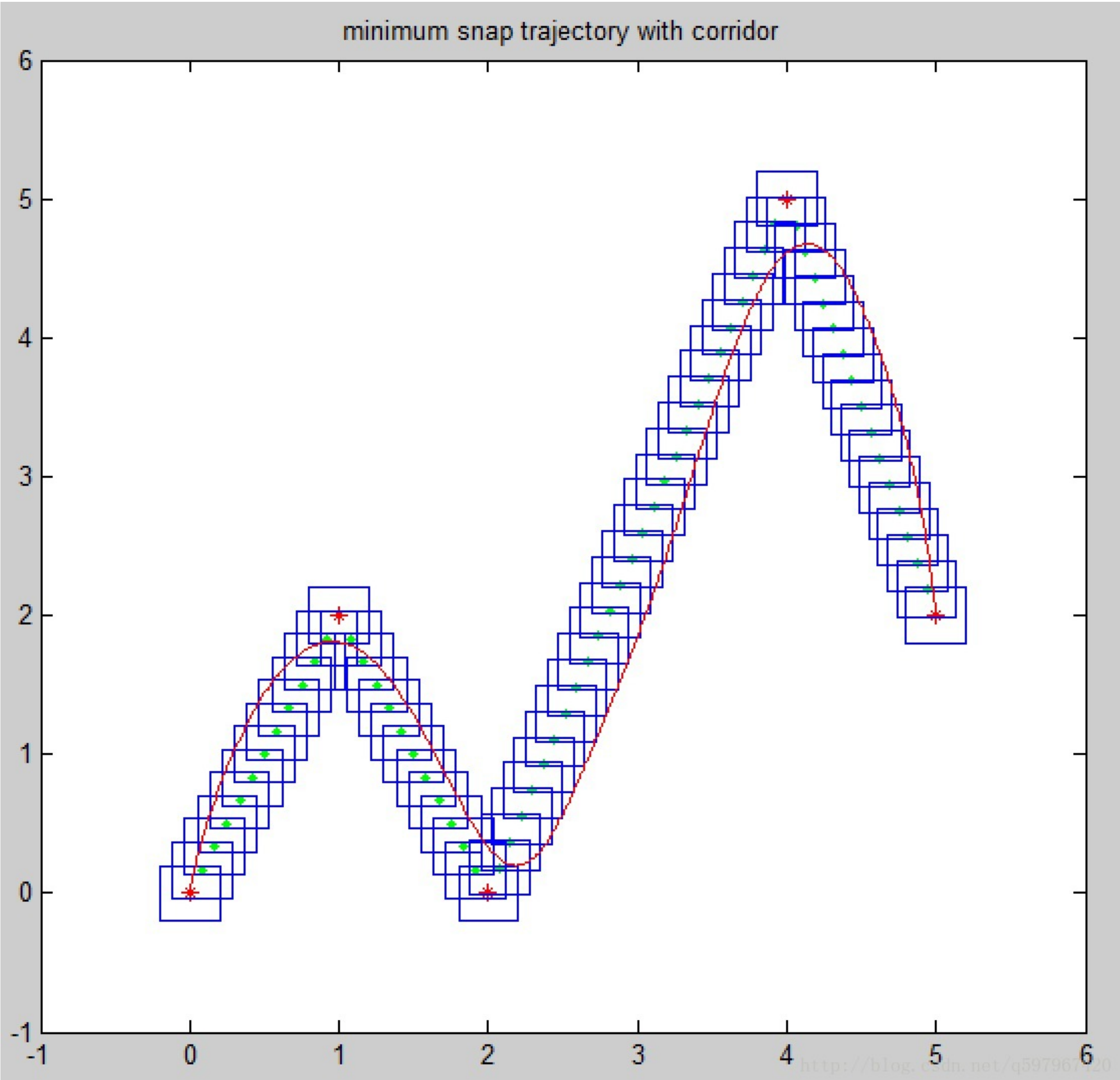
$$\begin{aligned}[1,t_i,t_i^2,\dots,t_i^n]p&\le p(t_i)+r\\ [-1,-t_i,-t_i^2,\dots,-t_i^n]p&\le -(p(t_i)-r)\end{aligned}\tag{1}$$

1.4 实验结果

代码见这里
优化列表

- min：snap
- 等式约束：起点pva(3)+终点pva(3)+中间点pva连续(3*(n_{poly}-1))
- 不等式约束：中间点位置corridor(2*(n_{poly}-1))

优化结果如下图所示，绿色的点为按固定步长新采样的中间点，每个中间点都有一个矩形corridor，红色为优化后的轨迹。可以看到，去掉中间点的位置强约束(等式约束)改成弱约束(corridor不等式约束)后，轨迹比之前要好很多，而且尽管轨迹有小部分超出了corridor（因为只加了**采样时刻**的位置corridor约束），但基本不会超出太多。



但这带来的一个问题是，为了保证轨迹不超出corridor，需要采样比较密，但这样轨迹的段数就上来的（轨迹段数=waypoint数量-1），优化参数变多了，计算效率会下降。

- 一种解决思路是通过corridor合并来减少中间点\轨迹段数，从而提高计算效率；
- 另一种解决思路是，不采样中间点，直接规划出轨迹以后，找到轨迹的极值点（波峰、波谷），若极值点位置超出corridor，在极值点上添加一个corridor或者位置强约束（俗称”压点“，把极值点压

到corridor以内），以此迭代。实验证明：压有限个（不超过路径点总数）点就能把整段轨迹压到corridor以内。

1.5 广义corridor

上面实验介绍了位置corridor，也就是位置不等式约束，但同样也可以扩展到速度corridor、加速度corridor乃至更高阶。
诶~是不是有点灵感？上一篇文章中实验得到的轨迹的另一个问题是速度、加速度超过了最大限幅，所以同样的思路每个waypoint都增加速度、加速度corridor，是不是就能解决了？
然而，**并不能！！！** 为什么呢？举个简单的例子，假设一维空间规划一条轨迹从0到10，给定总时间T=1s，要求最大限速2m/s，满足要求的轨迹根本不存在，即使你加很多中间点并加速度corridor，得到的轨迹在采样点中间肯定会速度蹭的巨高。
速度、加速度之所以很大，是因为时间给的不合理（时间太小），所以这种情况光靠加corridor是行不通的，还是要从时间分配的层面来解决。

2. 时间分配

时间分配是轨迹规划中很关键的一个问题，它直接影响规划结果的好坏。

2.1 初始时间分配

- 总时间给定：通常给一个平均速度，根据总路程计算得到总时间
- 各段时间分配：
  - 匀速分配：假设每段polynomial内速度恒定不变，这样各段poly的时间比就等于路程比。
  - 梯形分配：假设每段polynomial内速度曲线为：以恒定加速度a从0加速到最大速度v_{max}，再以$-a$减速到0。a和v_{max}事先给定，就能得出每一段所需要的时间。

  设各段时间分别为$t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$，求前k项和可以得到轨迹分段的时刻向量$t_0 = 0, t_1 = t'_1, t_2 = t_1 + t'_2, \ldots, t_n = t_{n-1} + t'_n$。

2.2 feasibility check

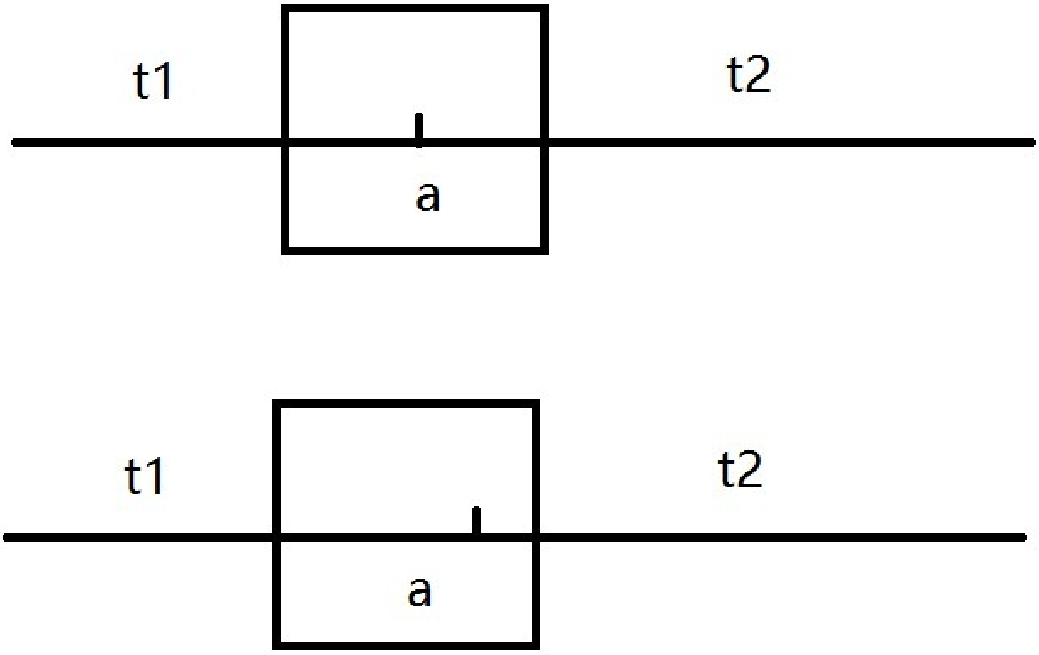
有了时间分配，就可以规划得到轨迹参数，对于轨迹参数，求速度和加速度曲线的极值，判断是否超过最大限幅，如果所有极值都小于最大限幅，则得到可行轨迹。如果不满足，则需要调整该段的时间。

调整的方法是：增大unfeasible段poly的时间，显然，增大时间会使得速度和加速度都变小。通常以一个固定的比例来调整时间如（k=1.2~1.5），并进行迭代，每调整一次，重新规划轨迹并check feasibility，如若不满足，再次加大时间，直至满足为止。

2.3 corridor与时间分配的关联

不等式corridor约束实际上也有时间分配的效果，可以这么想，polynomial的分段点（轨迹中间点）在corridor内移动，实际上就相当于分段点的时刻在移动，中间点在corridor内移动，也就变相调整了前后

两段poly分配的时间。
举个简单的例子，如下图所示，两段轨迹的分段点为a，初始时间分配为t_1, t_2，比如说想减少前一段的时间t_1，加大后一段的时间t_2，其实就相当于把分段点a向右挪。也就是说，还是前段poly仍然分配t_1时间，但走的路程更多了（相当于原来路程所用的时间减少了），后一段poly在t_2时间走的路程更少了（相当于原来的路程所用时间增加了）。



所以如果corridor比较大的话，时间调整的空间就会更大，规划出的轨迹就会更平滑。

3. 归一化时间参数

轨迹规划中容易出现一些数值问题，比如需要求t的高阶指数，如果t比较大，计算数值就会很大，而且最终轨迹的参数会很小，特别是高阶项系数，比如很有可能小于float的精度，所以一般计算过程中最好用double。
但还有一种办法，是把轨迹参数做时间归一化，将时间归一化到$[0, 1]$之间。设未归一化的轨迹为$p(t) = p_0 + p_1 t + ... + p_n t^n$，令时间$\bar{t} = t/T$，则

$$\bar{p}(\bar{t}) = p(\bar{t}T) = p_0 + p_1 T\bar{t} + ... + p_n T^n \bar{t}^n = \sum_{i=0}^{n} \bar{p}_i \bar{t}^i$$

其中，$\bar{p}_i = p_i * T^i$，T为轨迹总时间，$[\bar{p}_i]_{i=0 \to n}$就是归一化时间的轨迹参数，它们不会像非归一化参数那么小，便于参数传递。

归一化参数如何求pva?

对于任一时刻t，先除以总时间T得到归一化时间$\bar{t}$，

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \bar{p}(\bar{t}) = \sum_{i=0}^{n} \bar{p}_i \bar{t}^i \\
v(t) &= \frac{d\bar{p}(\bar{t})}{dt} = \frac{d\bar{p}(\bar{t})}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} = \bar{p}'(\bar{t})/T \\
a(t) &= \bar{p}''(\bar{t})/T^2
\end{aligned} \tag{2}
$$

注意：归一化事件参数后，位置计算和原来相同，但速度计算需要除以T，加速度需要除以T^2，即每求一阶导需要除以一个T。

实验过程中，用Matlab求解，如果一开始就用归一化时间参数，会解不出来，不知为何？所以，在求解过程中，仍然用的非归一化时间参数，而求解完以后，参数传递出去时，转换成归一化时间参数。

参考文献

1. Richter C, Bry A, Roy N. Polynomial trajectory planning for aggressive quadrotor flight in dense indoor environments[M]//Robotics Research. Springer International Publishing, 2016: 649-666.
2. Vijay Kumar的一系列论文：Mellinger D, Kumar V. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors[C]//Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on. IEEE, 2011: 2520-2525.
3. HKUST 沈劭劼老师的工作：Chen J, Liu T, Shen S. Online generation of collision-free trajectories for quadrotor flight in unknown cluttered environments[C]//Robotics and Automation (ICRA), 2016 IEEE International Conference on. IEEE, 2016: 1476-1483.