Minimum Snap轨迹规划详解（1）轨迹规划入门

1. 轨迹规划是什么？

在机器人导航过程中，如何控制机器人从A点移动到B点，通常称之为运动规划。运动规划一般又分为两步：

1. 路径规划：在地图（栅格地图、四\八叉树、RRT地图等）中搜索一条从A点到B点的路径，由一系列离散的空间点（waypoint）组成。
2. 轨迹规划：由于路径点可能比较稀疏、而且不平滑，为了能更好的控制机器人运动，需要将稀疏的路径点变成平滑的曲线或稠密的轨迹点，也就是轨迹。

2. 轨迹是什么？

轨迹一般用n阶多项式(polynomial)来表示，即

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 \ldots + p_n t^n = \sum_{i=0}^{n} p_i t^i$$

其中$p_0, p_1, \ldots, p_n$为轨迹参数（n+1个），设参数向量$p = [p_0, p_1, \ldots, p_n]^T$，则轨迹可以写成向量形式，

$$p(t) = [1, t, t^2, \ldots, t^n] \cdot p$$

对于任意时刻t，可以根据参数计算出轨迹的位置P(osition)，速度V(elocity)，加速度A(cceleration)，jerk，snap等。

$$\begin{aligned} v(t) &= p^{'}(t) = [0, 1, 2t, 3t^2, 4t^3, \ldots, nt^{n-1}] \cdot p \\ a(t) &= p^{''}(t) = [0, 0, 2, 6t, 12t^2, \ldots, n(n-1)t^{n-2}] \cdot p \\ jerk(t) &= p^{(3)}(t) = [0, 0, 0, 6, 24t, \ldots, \frac{n!}{(n-3!)} t^{n-3}] \cdot p \\ snap(t) &= p^{(4)}(t) = [0, 0, 0, 0, 24, \ldots, \frac{n!}{(n-4!)} t^{n-4}] \cdot p \end{aligned} \tag{1}$$

一个多项式曲线过于简单，一段复杂的轨迹很难用一个多项式表示，所以将轨迹按时间分成多段，每段各用一条多项式曲线表示，形如：

$$p(t) = \begin{cases} [1, t, t^2, \ldots, t^n] \cdot p_1 & t_0 \le t < t_1 \\ [1, t, t^2, \ldots, t^n] \cdot p_2 & t_1 \le t < t_2 \\ \ldots & \\ [1, t, t^2, \ldots, t^n] \cdot p_k & t_{k-1} \le t < t_k \end{cases} \tag{2}$$

k为轨迹的段数，$p_i = [p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}]^T$为第i段轨迹的参数向量。

此外，实际问题中的轨迹往往是二维、三维甚至更高维，通常每个维度单独求解轨迹。

3. Minimum Snap轨迹规划

轨迹规划的目的：求轨迹的多项式参数$p_1, \ldots, p_k$。
我们可能希望轨迹满足一系列的约束条件，比如：希望设定起点和终点的位置、速度或加速度，希望相邻轨迹连接处平滑（位置连续、速度连续等），希望轨迹经过某些路径点，设定最大速度、最大加速度等，甚至是希望轨迹在规定空间内（corridor）等等。
通常满足约束条件的轨迹有无数条，而实际问题中，往往需要一条特定的轨迹，所以又需要构建一个最优的函数，在可行的轨迹中找出“最优”的那条特定的轨迹。
所以，我们将问题建模（fomulate）成一个约束优化问题，形如：

$$\begin{aligned} &\min f(p) \\ s.t.\ \ &A_{eq}p = b_{eq}, \\ &A_{ieq}p \le b_{ieq} \end{aligned} \tag{3}$$

这样，就可以通过最优化的方法求解出目标轨迹参数p。**注意：这里的轨迹参数p是多端polynomial组成的大参数向量$p = [p_1^T, p_2^T, \ldots, p_k^T]^T$。**
我们要做的就是：**将优化问题中的$f(p)$函数和$A_{eq}, b_{eq}, A_{ieq}, b_{ieq}$参数给列出来，然后丢到优化器中求解轨迹参数p。**
Minimum Snap顾名思义，Minimum Snap中的最小化目标函数是Snap（加加加速度），当然你也可以最小化Acceleration（加速度）或者Jerk（加加速度），至于它们之间有什么区别，quora上有讨论。一般不会最小化速度。

$$\begin{aligned} minimum\ snap:\ \ &\min f(p) = \min(p^{(4)}(t))^2 \\ minimum\ jerk:\ \ &\min f(p) = \min(p^{(3)}(t))^2 \\ minimum\ acce:\ \ &\min f(p) = \min(p^{(2)}(t))^2 \end{aligned} \tag{4}$$

4. 一个简单的例子

给定包含起点终点在内的k+1个二维路径点$pt_0, pt_1, \ldots, pt_k$，$pt_i = (x_i, y_i)$，给定起始速度和加速度为v_0, a_0，末端加速度为v_e, a_e，给定时间T，规划出经过所有路径点的平滑轨迹。

a. 初始轨迹分段与时间分配

根据路径点，将轨迹分为k段，计算每段的距离，按距离平分时间T(匀速时间分配)，得到时间序列$t_0, t_1, \ldots, t_k$。**对x,y维度单独规划轨迹。**后面只讨论一个维度。
时间分配的方法：匀速分配或梯形分配，假设每段*polynomial*内速度满足匀速或梯形速度变化，根据每段的距离将总时间*T*分配到每段。
这里的轨迹分段和时间分配都是初始分配，在迭代算法中，如果*corridor check*和*feasibility check*不满足条件，会插点或增大某一段的时间，这个后续细说。

b. 构建优化函数

Minimum Snap的优化函数为:

$$
\begin{aligned}
&\min \int_0^T (p^{(4)}(t))^2 \mathrm{d}t \\
&= \min \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (p^{(4)}(t))^2 \mathrm{d}t \\
&= \min \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} ([0,0,0,0,24,\ldots,\frac{n!}{(n-4!)}t^{n-4}]\cdot p)^T [0,0,0,0,24,\ldots,\frac{n!}{(n-4!)}t^{n-4}]\cdot p \,\mathrm{d}t \\
&= \min \sum_{i=1}^{k} p^T \int_{t_{i-1}}^{t_i} [0,0,0,0,24,\ldots,\frac{n!}{(n-4!)}t^{n-4}]^T [0,0,0,0,24,\ldots,\frac{n!}{(n-4!)}t^{n-4}] \,\mathrm{d}t\, p \\
&= \min \sum_{i=1}^{k} p^T Q_i p
\end{aligned} \tag{5}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
Q_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} [0,0,0,0,24,\ldots,\frac{n!}{(n-4!)}t^{n-4}]^T [0,0,0,0,24,\ldots,\frac{n!}{(n-4!)}t^{n-4}] \,\mathrm{d}t \\
&= \begin{bmatrix} 0_{4\times 4} & 0_{4\times(n-3)} \\ 0_{(n-3)\times 4} & \frac{r!}{(r-4)!}\frac{c!}{(c-4)!}\frac{1}{(r-4)+(c-4)+1}(t_i^{(r+c-7)}-t_{i-1}^{(r+c-7)}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6}
$$

注意:r,c为矩阵的行索引和列索引,**索引从0开始,即第一行r=0。**

$$
Q = \begin{bmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_k \end{bmatrix} \tag{7}
$$

$$
\min p^T Q p
$$

可以看到,问题建模成了一个数学上的二次规划(Quadratic Programming,QP)问题。

c. 构建等式约束方程

1. 设定某一个点的位置、速度、加速度或者更高为一个特定的值,可以构成一个等式约束。例如:

$$
\begin{aligned}
&\text{位置约束:} [1, t_0, t_0^2, \ldots, t_0^n, \underbrace{0 \ldots 0}_{(k-1)(n+1)}]p = p_0 \\
&\text{速度约束:} [0, 1, 2t_0, \ldots, nt_0^{n-1}, \underbrace{0 \ldots 0}_{(k-1)(n+1)}]p = v_0 \\
&\text{加速度约束:} [0, 0, 2, \ldots, n(n-1)t_0^{n-2}, \underbrace{0 \ldots 0}_{(k-1)(n+1)}]p = a_0
\end{aligned} \tag{8}
$$

   由于要过中间点,对中间点的位置也构建等式约束,方法同上。

2. 相邻段之间的位置、速度、加速度连续可以构成一个等式约束，例如第i、i+1段的位置连续构成的等式约束为

$$[\underbrace{0\ldots0}_{(i-1)(n+1)}, 1, t_i, t_i^2, \ldots, t_i^n, -1, -t_i, -t_i^2, \ldots, -t_i^n, \underbrace{0\ldots0}_{(k-i-1)(n+1)}]p = 0$$

速度、加速度连续类似，不再罗列。

合并所有等式约束，得到

$$\begin{bmatrix}
1, t_0, t_0^2, \ldots, t_0^n, \underbrace{0\ldots0}_{(k-1)(n+1)} \\
0, 1, 2t_0, \ldots, nt_0^{n-1}, \underbrace{0\ldots0}_{(k-1)(n+1)} \\
0, 0, 2, \ldots, n(n-1)t_0^{n-2}, \underbrace{0\ldots0}_{(k-1)(n+1)} \\
\vdots \\
\underbrace{0\ldots0}_{(i-1)(n+1)}, 1, t_i, t_i^2, \ldots, t_i^n, \underbrace{0\ldots0}_{(k-i)(n+1)} \\
\vdots \\
\underbrace{0\ldots0}_{(k-1)(n+1)}, 1, t_k, t_k^2, \ldots, t_k^n \\
\underbrace{0\ldots0}_{(k-1)(n+1)}, 0, 1, 2t_k, \ldots, nt_k^{n-1} \\
\underbrace{0\ldots0}_{(k-1)(n+1)}, 0, 0, 2, \ldots, n(n-1)t_k^{n-2} \\
\underbrace{0\ldots0}_{(i-1)(n+1)}, 1, t_i, t_i^2, \ldots, t_i^n, -1, -t_i, -t_i^2, \ldots, -t_i^n, \underbrace{0\ldots0}_{(k-i-1)(n+1)} \\
\underbrace{0\ldots0}_{(i-1)(n+1)}, 0, 1, 2t_i, \ldots, nt_i^{n-1}, -0, -1, -2t_i, \ldots, -nt_i^{n-1}, \underbrace{0\ldots0}_{(k-i-1)(n+1)} \\
\underbrace{0\ldots0}_{(i-1)(n+1)}, 0, 0, 2, \ldots, \frac{n!}{(n-2)!}t_i^{n-2}, -0, -0, -2, \ldots, -\frac{n!}{(n-2)!}t_i^{n-2}, \underbrace{0\ldots0}_{(k-i-1)(n+1)}
\end{bmatrix}_{(4k+2)\times(n+1)k} p = \begin{bmatrix} p_0 \\ v_0 \\ a_0 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_k \\ v_k \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

等式约束个数=3（起始PVA）+k-1（中间点的p）+3（终点pva）+3(k-1)（中间点PVA连续）=4k+2

d. 构建不等式约束

不等式约束与等式约束类似，也是设置某个点的P、V、A小于某一特定值，从而构建$A_{ieq}p = b_{ieq}$，不等式约束一般是在corridor中用的比较多，这里暂时先不使用不等式约束。

e. 求解

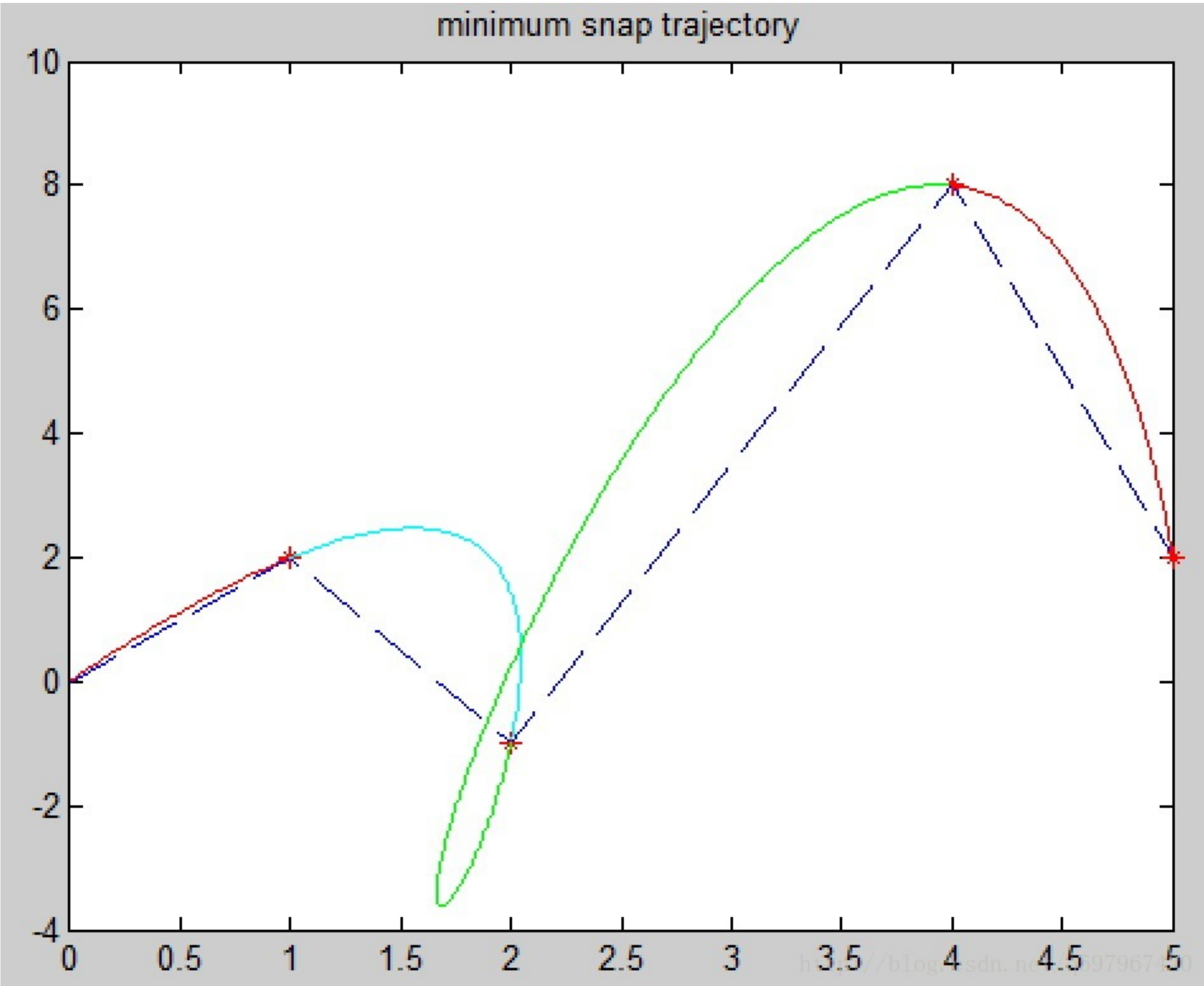
利用QP求解器进行求解，在MATLAB中可以使用quadprog() 函数，C++的QP求解器如OOQP，也可以自己去网上找。

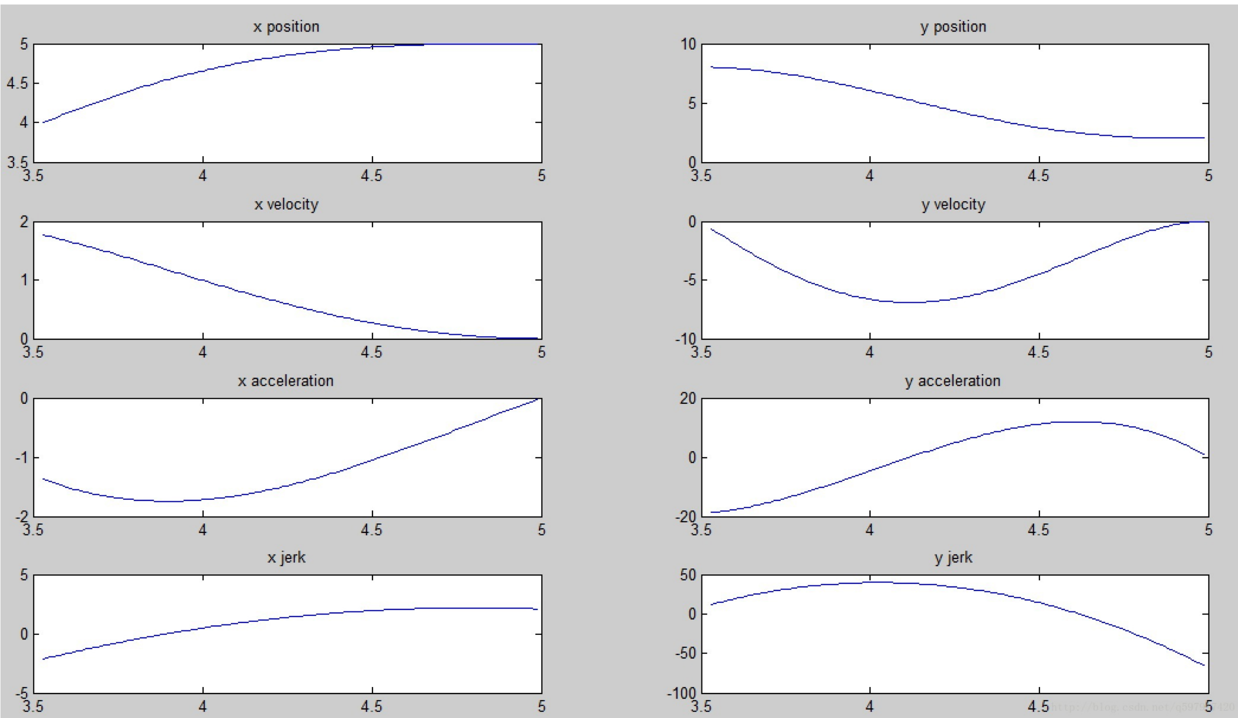
实验结果

MATLAB代码在这里。
优化列表：

```
min：snap
等式约束：起点pva，终点pva，中间点的p，中间点pva连续
不等式约束：无
```

生成x、y两个维度的轨迹，合并后如下图所示。包含起始终止共5个点，用四段poly来描述，中间点也就是poly之间的交界点。





5. 轨迹怎么用？（轨迹跟踪）

至此，我们已经求得了轨迹（**很多段高阶多项式的参数**），但怎么用来控制机器人运动呢？轨迹跟踪是：根据轨迹和机器人当前状态（当前位置、速度、加速度），输出机器人控制指令（速度、加速度、角速度等），控制机器人沿着轨迹运动。有很多种跟踪方法

- 最简单的跟踪方法是位置控制：计算轨迹上离当前位置最近的点，以最近点为期望位置做位置控制，即$v = k_p(p_{nearest} - p_{cur})$
- Minimum Snap中的前馈控制：计算轨迹上离最近点的（位置p_e、速度v_e、加速度a_e），

$$\begin{aligned} \text{速度指令：} & v = v_e \\ \text{加速度前馈：} & a = a_e + k_p(p_e - p_{cur}) + k_d(v_e - v_{cur}) \end{aligned} \tag{10}$$

6. 小结

1. 轨迹规划问题通常建模成一个带约束的二次规划（QP）问题来求解，优化函数可以是snap、jerk、acceleration及它们的组合或其他任何能够formulate成$p^T Qp$形式的函数，约束包括等式约束和不等式约束。
2. 轨迹规划中默认时间t已知，通常根据期望速度和总路程计算一个总时间T，再按照匀速运动和梯形速度曲线分配到每段polynomial上。
3. 上面例子中规划出的轨迹并不是很好，有以下问题：
   a) 轨迹与路径相差有点大，而且在第三个waypoint处会有打结的现象；
   b) y轴的加速度非常大（接近$20m/s^2$），超过了机器人的最大加速度。实际轨迹需要进行feasibility check（可行性检测），确保满足工程可行性，比如最大速度、最大角速度限制等。
4. 这两个问题的根本原因在于时间给的不合理，时间分配是轨迹规划中比较蛋疼的问题，给的时间太小，速度、加速度自然就很大，两段时间分配不当就会生成打结的轨迹。下一节，专门讨论时间分配问题。

参考文献

1. Richter C, Bry A, Roy N. Polynomial trajectory planning for aggressive quadrotor flight in dense indoor environments[M]//Robotics Research. Springer International Publishing, 2016: 649-666.
2. Vijay Kumar的一系列论文：Mellinger D, Kumar V. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors[C]//Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on. IEEE, 2011: 2520-2525.