

机器人曲线插值拟合算法研究现状简述



作者：混沌无形
日期：2022-03-19



摘要：运动规划是移动机器人自主导航系统中的重要模块之一，相关算法研究成果层出不穷，本文将曲线插值拟合算法拆解为三个子类算法：基于插值的规划算法、基于特殊曲线的规划算法及基于优化的规划算法，并沿时间顺序概述相关算法的发展历程，最后从模型复杂度、实时性、环境适应能力及路径曲线质量等方面分析了上述三类算法的优缺点。

1 引言

在前文《[机器人图规划算法研究现状简述](#)》中，结合图 1.1 对“运动规划是什么？要解决什么问题？”这两个问题有详细阐述，并概述了[运动规划](#)与[运动控制模型](#)、[环境感知](#)这两个部分之间的关系。

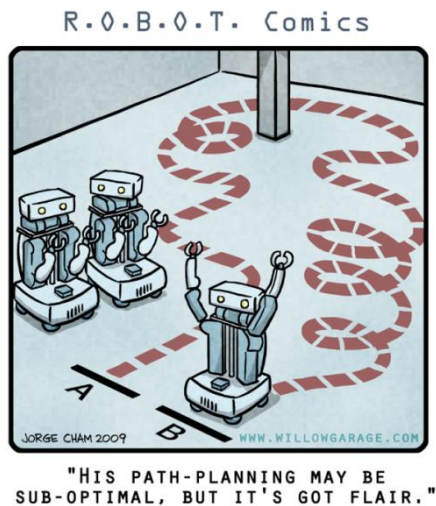


图 1.1 运动规划示意图（图片来源：<http://wiki.ros.org/navigation>）

如图 1.2 所示，运动规划的研究主要是对多目标多变量多约束耦合的规划模型优化求解。对于具有非完整约束的移动机器人而言（见《[两轮差速驱动机器人运动模型及应用分析](#)》），在分布有障碍物的环境中求解最优路径是 NP-hard 问题，即对于任意场景无法保证在多项式时间内求得最优解，因此大部分规划算法追求次优解或局部最优[1]。

诸多学者针对不同应用场景和需求，设计、改进了非常多的运动规划算法，其中常见的运动规划算法主要包括四类：[图规划算法](#)、[空间采样算法](#)、[曲线插值拟合算法](#)和[仿生智能算法](#)，通过规划模型求解得到最佳轨迹曲线，包含无碰撞顺滑的路径曲线和平滑的速度曲线，并输入到控制器驱动机器人运动。

本文将对曲线插值拟合算法领域的研究进展及成果进行分类阐述，主要概述同族算法的发展过程，不对具体算法展开分析，在后续系列文章会挑选部分经典常用算法深入剖析。

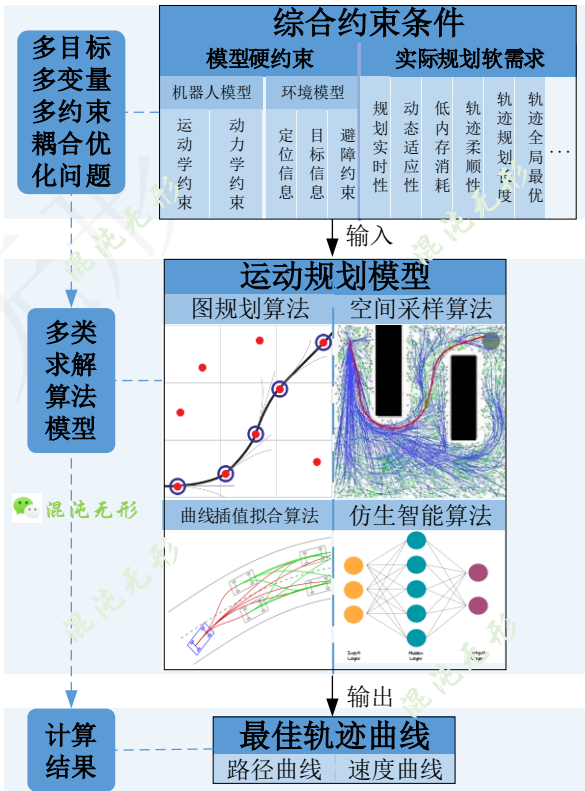


图 1.2 运动规划通用模型

2 曲线插值拟合算法研究分析

上述大部分《[图规划算法](#)》和《[空间采样算法](#)》生成的路径存在折点、急弯等曲率不连续的情况，影响了机器人运动平稳性，因此需要综合考虑模型硬约束与实际规划软需求，以提升路径平滑度。

曲线插值拟合算法在曲线平滑控制及优化方面有显著的优势，按照曲线生成方式及其种类可分为：[基于插值的规划算法](#)、[基于特殊曲线的规划算法](#)及[基于优化的规划算法](#)三类，该类算法在自动驾驶等

领域有着广泛的应用。

2.1 基于插值的规划算法

第一类是采用多项式曲线来描述机器人运动轨迹，这是因为多项式曲线灵活多变，且能容易满足曲率连续要求，并能够容易导出速度曲线，因此非常适合描述机器人运动轨迹，按照多项式构造方式主要分为：**插值多项式曲线**、**贝塞尔曲线**、**样条曲线**，具体如下：

➤ 插值多项式曲线

Chang 等人提出 QPMI (Quadratic Polynomial and Membership Interpolation) 算法可创建无碰撞、无龙格现象的曲率连续曲线，并使用 Pan 算法检测曲线碰撞点位置，并通过增加子锚点以重规划无碰撞路径，但在复杂拥挤环境下的碰撞检测及重规划成本较高[2]。

Werling 等人基于道路建立 Frenet 坐标系，将无人车运动分解为纵向、横向运动，并分别建立路程-时间的五次多项式方程，考虑避障约束、舒适度等因素及其长期运动模式（换道、合并等）设计优化目标函数，结合始末运动状态，输出最佳运动控制量[3]。

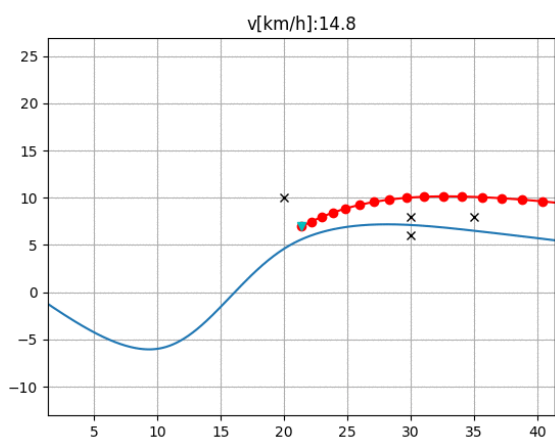


图 2.1 基于 Frenet 坐标系规划的多项式轨迹[3]

Xu 等人进一步提出路径、速度解耦循环迭代优化框架，如图 2.2 所示，将三次多项式（绿色）或五次多项式（红色）应用于道路状态网格，综合静态、动态成本函数，选择最佳轨迹，并以该最佳轨迹（包含路径、曲线）为初值，使用单纯形法循环迭代优化路径曲线（先）及速度曲线（后），比未使用该迭代优化框架的算法性能提升 10%，规划时间减少 50% [4]。

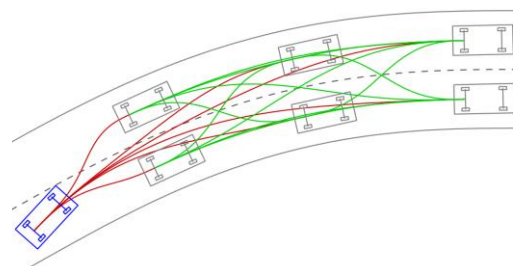


图 2.2 多项式路径曲线[4]

Talamino 等人提出与文献[3, 4]相似的运动规划方法，作者基于 Frenet 坐标系横轴、纵轴分别用两个五次多项式曲线连接相邻状态，并分析得到该曲线及其曲率变化具有对称性，得到简洁的优化模型，极大提升路径曲线生成效率，并基于该曲线建立速度优化模型，最终在仿真中验证了无人车在避障、变道等场景的良好性能[5]。

➤ 贝塞尔曲线

Han 等人综合局部栅格图中的全局路径及障碍物影响以确定控制点，生成无碰撞的四阶贝塞尔曲线作为局部路径，并使用 PID 控制器根据曲线[6]。

如图 2.3 所示，González 等人针对单岔口、连续岔口场景使用三阶贝塞尔曲线过渡，并提出曲率评估权重算法调节控制点以保证曲线曲率（起始点、终止点及中间段）连续且满足最大曲率约束，并被集成到 RITS 自动驾驶系统[7]。

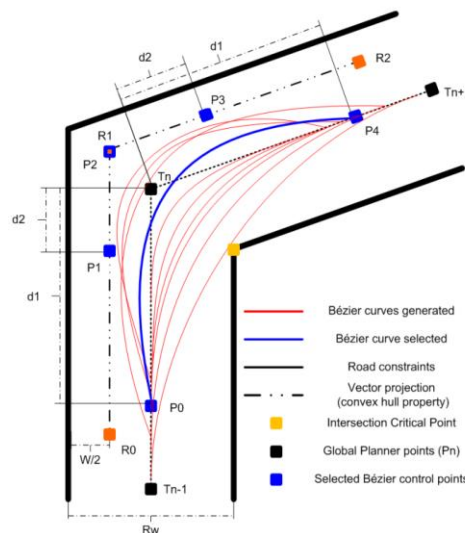


图 2.3 贝塞尔曲线[7]

➤ 样条曲线

Elbanhawi 等人针对类车机器人提出 B 样条曲线与 RRT 相结合的方法，利用 B 样条曲线平滑性好的特点以降低搜索维度，快速生成适用于轮式机器人的曲率连续曲线[8]。

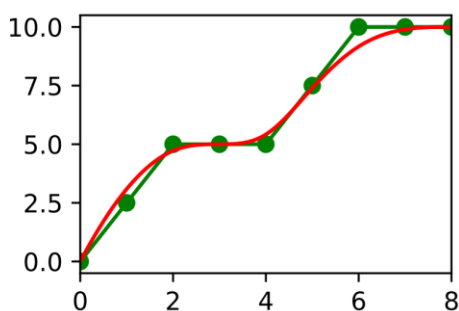


图 2.4 B 样条曲线[8]

NURBS 曲线是特殊的 B 样条曲线，Belaidi 等人针对移动机器人在三维环境下的运动规划问题，采用 NURBS 曲线生成平滑的路径[9]。

2.2 基于特殊曲线的规划算法

第二类算法是采用特殊曲线描述规划的轨迹，特殊曲线规划主要包含了直线-圆弧曲线和 Clothoid 曲线两种。

其中直线-圆弧曲线是指针对类车机器人运动约束问题，在给定两个位置矢量，仅使用圆弧（满足最小曲率）和直线段合成最短平滑的路径，Dubins 曲线限定机器人仅能前向运动。如图 2.5 所示，R&S 曲线将其拓展为双向运动，由于其简洁性而多被后续研究集成应用到其他算法，如 Hybrid A*[10]使用 R&S 曲线条件改善路径质量，CL-RRT[11]使用 Dubins 距离提升采样点生成“良率”。

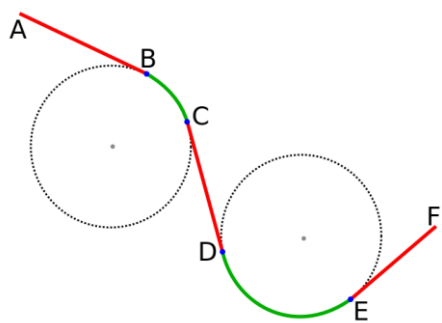


图 2.5 Dubins 曲线[10]

Clothoid 曲线的曲率随弧长线性变化，在轨迹平滑中极具优势，如 Kim 等人提出了一种基于 Clothoid 曲线的移动机器人运动规划算法，不仅缩短了路径长度，也降低了曲率变化量[12]。

2.3 基于优化的规划算法

第三类算法是主要是将多目标多变量多约束耦合的规划模型转化为有权重的惩罚函数，并优化求解，通常用于初始路径的平滑。

Ren 等人针对势场法存在振荡等问题，将改进牛顿法优化方法应用于连续势场导航模型，并考虑了机器人非全向约束和移动障碍物影响，极大提升了系统性能，但存在优化计算成本较高的问题[13]。

Ratliff 等人针对高维运动规划问题提出 CHOMP (Covariant Hamilton Optimization Motion Planning) 算法（图 2.6），先创建起始位置到终止位置的初始路径，针对成本函数使用梯度下降法对轨迹进行优化，获得平滑、无碰撞的轨迹，但存在容易陷入局部最小值的问题，因此引入了使用 Hamilton Monte Carlo 算法施加扰动，以重新启动优化过程，然而，引入了随机性，从而降低了优化结果的确定性。

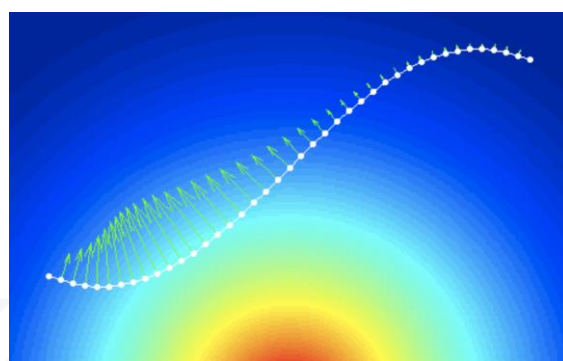


图 2.6 CHOMP[14]

与之相近，Kalakrishnan 等人提出的 STOMP (Stochastic Trajectory Optimization Motion Planning) 算法不需要目标函数梯度信息，因此可提高机器人运动规划性能，通过生成带有噪声的轨迹探索初始轨迹周围的空间，以产生较低成本的轨迹。其随机性也克服了基于梯度方法存在的局部最小值问题[14]。

Dolgov 等人使用 Hybrid A*生成的初始路径，并以路径曲率最小化为目标，使用共轭梯度法优化得到平滑路径，并将存在碰撞情况的对应原始路径点作为锚点重新优化，以保证路径安全可靠[10]。

Ziegler 等人提出一种局部连续的轨迹规划方法，通过结合道路边缘及障碍物将工作空间转化为凸空间，并引入连续可微的伪距离构建伪梯度场，综合模型硬约束及舒适性等要求，转化为带约束的非线性规划问题，并使用序列二次规划算法求解[15]。

Quinlan、Rösmann、Magyar 等人将“橡皮筋受内、外力作用产生形变”的原理应用于路径平滑处理，EB (Elastic Bands) [16]算法使用气泡带算法生成不连续的初始路径，再使用“橡皮筋”形变模型优化路径形状，生成无碰撞的平滑路径。TEB (Timed Elastic Band) [17]将静态、动态约束（速度、加速度等）和机器人状态使用稀疏图描述（强扩展特性），并转

化为加权的单目标优化问题，并使用大规模最小二乘法求解，生成符合约束最低成本的轨迹（见图 2.7），具有极强的动态避障和重规划能力，并应用于多种类型的轮式机器人。DT-TEB（TEB in distinctive topologies）[18]将 RRT 算法、Voronoi 图分别与 TEB 相结合，实时生成局部拓扑空间中全局最优轨迹，并延长了生成轨迹的长度，提高避障性能。CES(Convex Elastic Smoothing)[19]算法针对类车机器人运动规划模型，将气泡带初始路径形状“拉伸”优化及给定路径下速度优化问题构造为两个凸优化问题，并迭代优化路径曲线-速度曲线，实时生成平滑轨迹。

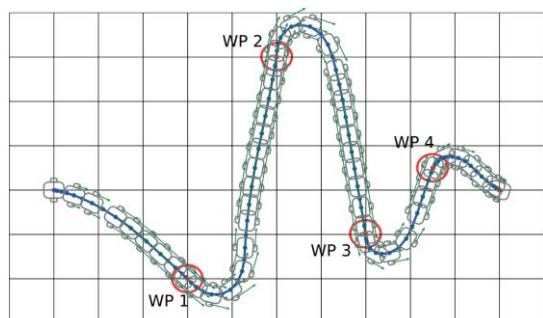


图 2.7 TEB 算法[17]

3 曲线插值拟合算法分析

上述三类曲线插值拟合算法各有各的特点，接下来对比分析这三类规划算法的优缺点：

3.1 基于插值的规划算法

➤ 多项式曲线

主要优点：易于计算，曲线形态灵活多变；

主要缺点：曲率连续性不保证

➤ 贝塞尔曲线

主要优点：计算成本低，控制点可产生期望的曲线，曲线间可相互连接；

主要缺点：高阶曲线难以调节，全局路径点影响整条曲线，控制点较难设置

➤ 样条曲线

主要优点：计算成本低，曲率连续易于保证，控制点容易控制曲线形状；

主要缺点：难以平衡曲线形状和连续性需求

3.2 基于特殊曲线的规划算法

➤ 直线-圆弧曲线

主要优点：易于计算，且为最短路径；

主要缺点：路径的曲率不保证连续

➤ Clothoid 曲线

主要优点：路径曲率变化线性，曲率连续性容易

保证；

主要缺点：算法中的 Fresnel 积分难以计算

3.3 基于优化的规划算法

主要优点：各类软硬约束易于综合处理，曲线连续性易于保证；

主要缺点：优化变量越多，耗时越久，且易陷入局部最小值。

总体而言，基于插值拟合算法已经能够在诸多场景下的规划生成一条无碰撞路径，且应用较为广泛，比如 TEB 算法就被作为 ROS navigation stack 中 local planner 的算法之一，Dubins 曲线或 R&S 曲线常被应用于自动泊车领域。随着诸多学者的改进升级，基于插值拟合算法的实时性和动态适应性逐渐提升，但多数算法仍存在优化计算容易陷入局部最小值、计算复杂等问题，但随着硬件计算能力的提升，相关算法已经被应用于实际。

4 结论及展望

本文将曲线插值拟合算法拆解为三个子类算法：基于插值的规划算法、基于特殊曲线的规划算法及基于优化的规划算法，并沿时间先后顺序概述了相关类型算法的发展改进历程，接着从模型复杂度、计算实时性、动态环境适应能力及路径曲线质量等方面分析了上述三类算法的优缺点，并指出存在的相关问题。

运动规划算法种类繁多，应用场景各不相同，而本文仅概述分析了四类运动规划算法之一的曲线插值拟合算法，后续会分析其他类型算法。

（文章仅笔者个人分析，有误请指正，谢谢！）

5 参考文献

- [1] REIF J, WANG H. The complexity of the two dimensional curvature-constrained shortest-path problem; proceedings of the Third International Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics, 1999.
- [2] CHANG S-R, HUH U-Y. A collision-free G² continuous path-smoothing algorithm using quadratic polynomial interpolation [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2014, 11(12): 194.
- [3] WERLING M, KAMMEL S, ZIEGLER J, et al. Optimal trajectories for time-critical street scenarios using discretized terminal manifolds [J]. The International Journal of Robotics Research, 2012, 31(3): 346-59.
- [4] XU W, WEI J, DOLAN J M, et al. A real-time motion planner with trajectory optimization for autonomous vehicles; proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation, F, 2012 [C]. IEEE.
- [5] TALAMINO J P, SANFELIU A. Anticipatory kinodynamic motion planner for computing the best path and velocity trajectory in autonomous driving [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2019, 114(93-105).
- [6] HAN L, YASHIRO H, NEJAD H T N, et al. Bezier curve based path planning for autonomous vehicle in urban environment; proceedings of the 2010 IEEE Intelligent Vehicles Symposium, F, 2010 [C]. IEEE.
- [7] GONZÁLEZ D, PÉREZ J, LATTARULO R, et al. Continuous curvature planning with obstacle avoidance capabilities in urban scenarios; proceedings of the 17th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), F, 2014 [C]. IEEE.
- [8] ELBANHAWI M, SIMIC M, JAZAR R. Randomized bidirectional B-Spline parameterization motion planning [J]. IEEE Transactions on intelligent transportation systems, 2015, 17(2): 406-19.

- [9] BELAIDI H, HENTOUT A, BOUZOUIA B, et al. NURBs trajectory generation and following by an autonomous mobile robot navigating in 3D environment; proceedings of the The 4th Annual IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent, F, 2014 [C]. IEEE.
- [10] DOLGOV D, THRUN S, MONTEMERLO M, et al. Path planning for autonomous vehicles in unknown semi-structured environments [J]. The International Journal of Robotics Research, 2010, 29(5): 485-501.
- [11] KUWATA Y, TEO J, FIORE G, et al. Real-time motion planning with applications to autonomous urban driving [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2009, 17(5): 1105-18.
- [12] KIM Y, PARK J B, SON W, et al. Modified turn algorithm for motion planning based on clothoid curve [J]. Electronics Letters, 2017, 53(24): 1574-6.
- [13] REN J, MCISAAC K A, PATEL R V. Modified Newton's method applied to potential field-based navigation for nonholonomic robots in dynamic environments [J]. Robotica, 2008, 26(1): 117-27.
- [14] KALAKRISHNAN M, CHITTA S, THEODOROU E, et al. STOMP: Stochastic trajectory optimization for motion planning; proceedings of the 2011 IEEE international conference on robotics and automation, F, 2011 [C]. IEEE.
- [15] ZIEGLER J, BENDER P, DANG T, et al. Trajectory planning for Bertha—A local, continuous method; proceedings of the 2014 IEEE intelligent vehicles symposium proceedings, F, 2014 [C]. IEEE.
- [16] QUINLAN S, KHATIB O. Elastic bands: Connecting path planning and control; proceedings of the [1993] Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, F, 1993 [C]. IEEE.
- [17] RÖSMANN C, FEITEN W, WÖSCH T, et al. Trajectory modification considering dynamic constraints of autonomous robots; proceedings of the ROBOTIK 2012; 7th German Conference on Robotics, F, 2012 [C]. VDE.
- [18] RÖSMANN C, HOFFMANN F, BERTRAM T. Integrated online trajectory planning and optimization in distinctive topologies [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2017, 88(142-53).
- [19] ZHU Z, SCHMERLING E, PAVONE M. A convex optimization approach to smooth trajectories for motion planning with car-like robots; proceedings of the 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), F, 2015 [C]. IEEE.

延伸阅读

- 《[机器人图规划算法研究现状简述](#)》
- 《[机器人空间采样算法研究现状简述](#)》
- 《[常见移动机器人运动学模型总结](#)》
- 《[机器人环境感知研究现状简述](#)》
- 《[两轮差速驱动机器人运动模型及应用分析](#)》

相关声明

全文完，感谢阅读!! 如果觉得写的不错，那就关注我的公众号吧（[公众号中可下载更多文章 PDF](#)）。



微信搜一搜

混沌无形

如果转载本文，文末务必注明：“转自微信公众号：混沌无形。”

喜欢作者，给他打赏



“谢谢打赏”