



UFR DES SCIENCES ET TECHNIQUE DU
MADRILLET
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master 2

Mention : Mathématiques et Applications
Parcours : Mathématiques Fondamentales et Appliquées
Option : [Analyse](#)

Sujet de mémoire

**LES ÉQUATIONS D'HAMILTON ET JACOBI SUR
LES RÉSEAUX : SOUS ET SUR-SOLUTIONS À
FLUX-LIMITÉ**

Par

SONGO Ablanvi

Soutenu le 11 Juin 2019

Superviseur : Professeur Nicolas FORCADEL

*En mémoire de mon père ,
À ma famille ,
Spécialement :
À ma mère.*

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord le Professeur **Nicolas FORCADEL** pour son encadrement, ses idées ainsi que pour sa passion des Mathématiques qu'il m'a généreusement fait partager. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie, ses remarques et conseils ont énormément aidé à la qualité scientifique de mon travail.

Enfin, je remercie mes parents et amis pour leurs soutiens qu'ils ne cessent de m'apporter, surtout durant ces deux dernières années.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	1
Abstract	2
Introduction générale	3
1 Solutions à flux-limité du problème d'Hamilton-Jacobi sur \mathbb{R}	4
1.1 Solutions à flux-limité	4
1.1.1 Hypothèses et définitions	4
1.1.2 Principe de Comparaison pour les sous et sur-solutions à flux-limité	7
2 Solutions à flux-limité du problème d'H-J sur un réseau à n branches	16
Conclusion et perspectives	26

Résumé

L'objectif du mémoire est de présenter, du point de vue mathématique, dans un premier temps, une approche des problèmes de contrôle régional (optimal). Il s'agit d'une récente approche qui repose sur les idées introduites par **Régis Monneau et Cyril Imbert** dans une série de travaux et qui porte sur les problèmes posés sur les réseaux, en particulier la notion des solutions à flux-limité. Dans un deuxième temps, un autre problème posé sur un réseau à n branches (toutes sortantes) raccordées en un même point O et qui sont définies comme étant des demi-droites d'origine O générées par des vecteurs unitaires $e_i \in \mathbb{R}^2$. Le principal thème abordé dans les deux cas, est le théorème donnant le principe de comparaison pour les solutions bornées à flux-limité stationnaires pour un système d'équations d'Hamilton-Jacobi.

Abstract

The aim of this dissertation is to present, in mathematical point of view, on the one hand, an approach for the regional (optimal) control problems. It's more recent and relies on ideas introduced by **Régis Monneau and Cyril Imbert** in series of works for problems set on networks. On the other hand, the problems set on the networks with n branches. The main theme discussed in the both cases, is the theorem of the comparison principle in the class of bounded flux-limited solutions of stationary Hamilton-Jacobi equations.

Introduction générale

Ce mémoire porte sur une approche des problèmes de contrôle régional utilisant les équations d'Hamilton-Jacobi. Il s'agit notamment du théorème donnant le principe de comparaison des solutions à flux-limité des équations d'Hamilton-Jacobi posées sur les réseaux. Le travail est divisé en deux grandes étapes. La première, est de considérer deux hamiltoniens H_1 sur \mathbb{R}_+^* et H_2 sur \mathbb{R}_-^* , et est consacrée au principe de comparaison des solutions à flux-limité en 0. La deuxième, quant à elle, est de considérer n hamiltoniens $(H_i, 1 \leq i \leq n)$ sur n branches toutes sortantes, raccordées en un même point O et identifiées aux demi-droites \mathbb{R}^+ , d'origine O , de même consacrée au principe de comparaison des solutions à flux-limité en 0.

CHAPITRE 1

SOLUTIONS À FLUX-LIMITÉ DU PROBLÈME D'HAMILTON-JACOBI SUR \mathbb{R}

Sommaire

1.1 Solutions à flux-limité	4
1.1.1 Hypothèses et définitions	4
1.1.2 Principe de Comparaison pour les sous et sur-solutions à flux-limité	7

1.1 Solutions à flux-limité

On se réfère essentiellement à [1] .

1.1.1 Hypothèses et définitions

On considère :

$\Omega_1 := \{x = (x_1, \dots, x_N) : x_N > 0\}$ et $\Omega_2 := \{x = (x_1, \dots, x_N) : x_N < 0\}$.

Nous définissons premièrement les hypothèses sur la dynamique et le coût courant dans chaque Ω_i ($i = 1, 2$) et sur $\mathcal{H} = \{x = (x_1, \dots, x_N) : x_N = 0\}$. On suppose que les coûts dynamique et courant sont définis sur tout l'espace \mathbb{R}^N .

Sur Ω_i , les ensembles de contrôles sont désignés par A_i , le système est conduit par la dynamique b_i et le coût courant est donné par l_i . Nous utilisons l'indice $i = 0$ pour \mathcal{H} . Les principales hypothèses sont les suivantes.

[H0] :

Pour $i = 0, 1, 2$, A_i est un espace métrique compact et $b_i : \mathbb{R}^N \times A_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction continue bornée, plus précisément $|b_i(x, \alpha_i)| \leq M_b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i, i = 0, 1, 2$. Par ailleurs, il existe $L_i \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i$:

$$|b_i(x, \alpha_i) - b_i(y, \alpha_i)| \leq L_i |x - y|.$$

[H1] :

Pour $i = 0, 1, 2$, la fonction $l_i : \mathbb{R}^N \times A_i \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et $|l_i(x, \alpha_i)| \leq M_i$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $\alpha_i \in A_i, i = 1, 2$.

La dernière hypothèse est celle de contrôlabilité que nous utilisons seulement sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$, et non sur \mathcal{H} .

[H2] :

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, les ensembles $\{(b_i(x, \alpha_i), l_i(x, \alpha_i)) : \alpha_i \in A_i\}, (i = 1, 2)$, sont fermés et convexes. Par ailleurs il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $i = 1, 2$ et $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\overline{B(0, \delta)} \subset B_i := \{b_i(x, \alpha_i) : \alpha_i \in A_i\}. \quad (1.1)$$

Nous définissons maintenant plusieurs hamiltoniens.

Pour $x \in \overline{\Omega}_1$:

$$H_1(x, p) := \sup_{\alpha_1 \in A_1} \{-b_1(x, \alpha_1) \cdot p - l_1(x, \alpha_1)\}, \quad (1.2)$$

$$H_1^-(x, p) := \sup_{\alpha_1 \in A_1 : b_1(x, \alpha_1) \cdot e_N \leq 0} \{-b_1(x, \alpha_1) \cdot p - l_1(x, \alpha_1)\}, \quad (1.3)$$

$$H_1^+(x, p) := \sup_{\alpha_1 \in A_1 : b_1(x, \alpha_1) \cdot e_N > 0} \{-b_1(x, \alpha_1) \cdot p - l_1(x, \alpha_1)\}, \quad (1.4)$$

et pour $x \in \overline{\Omega}_2$:

$$H_2(x, p) := \sup_{\alpha_2 \in A_2} \{-b_2(x, \alpha_2) \cdot p - l_2(x, \alpha_2)\}, \quad (1.5)$$

$$H_2^+(x, p) := \sup_{\alpha_2 \in A_2 : b_2(x, \alpha_2) \cdot e_N \geq 0} \{-b_2(x, \alpha_2) \cdot p - l_2(x, \alpha_2)\}, \quad (1.6)$$

$$H_2^-(x, p) := \sup_{\alpha_2 \in A_2 : b_2(x, \alpha_2) \cdot e_N < 0} \{-b_2(x, \alpha_2) \cdot p - l_2(x, \alpha_2)\}. \quad (1.7)$$

Finalement, pour le problème spécifique de contrôle sur \mathcal{H} , nous définissons pour tout $x \in \mathcal{H}$ et $p_{\mathcal{H}} \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$G(x, p_{\mathcal{H}}) := \sup_{\alpha_0 \in A_0} \{-b_0(x, \alpha_0) \cdot p_{\mathcal{H}} - l_0(x, \alpha_0)\}. \quad (1.8)$$

Les points de \mathcal{H} seront identifiés par $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ ou par $x = (x', 0) \in \mathbb{R}^N$.

On utilisera la notation $D_{\mathcal{H}}u$ pour les $(N - 1)$ premières composantes du gradient, i.e

$$D_{\mathcal{H}}u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} \right)$$

et

$$Du = \left(D_{\mathcal{H}}u, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

On désignera aussi par $D_{\mathcal{H}}u$ le gradient d'une fonction définie seulement sur \mathbb{R}^{N-1} .

Sous les hypothèses $[H0]$, $[H1]$, on remarque que les hamiltoniens H_i , H_i^\pm ($i = 1, 2$) satisfont les conditions structurelles ou de régularité classiques suivantes :

Pour $R > 0$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^N$ tels que $|x|, |y| \leq R$, pour tous $p, q \in \mathbb{R}^N$ et pour $i = 1, 2$

$$\begin{cases} |H_i(x, p) - H_i(x, q)| \leq M_b |p - q| \\ |H_i(x, p) - H_i(y, p)| \leq L_i |x - y| (1 + |p|) + m_i^R (|x - y|); \end{cases} \quad (1.9)$$

où m_i^R est un module de continuité de la fonction l_i sur l'ensemble compact $\overline{B(0, R)} \times A_i$.

Les hypothèses sur la fonction G imitent celles satisfaites naturellement par les H_1 et H_2 .
 $[HG]$:

La fonction $G : \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et satisfait : pour tout $x \in \mathcal{H}$, la fonction $p' \mapsto G(x, p') : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et ils existent $C_1, C_2 > 0$ et, pour tous R , un module de continuité m_R^G , tels que, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$ avec $|x|, |y| \leq R$, pour tout $p' \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$|G(x, p') - G(x, q')| \leq C_2 |p' - q'| \text{ et}$$

$$|G(x, p') - G(y, p')| \leq C_1 |x - y| (1 + |p'|) + m_R^G (|x - y|).$$

On introduit l'espace \mathcal{P} des fonctions test à valeurs réelles :

On dit que $\psi \in \mathcal{P}$ si $\psi \in C(\mathbb{R}^N)$ et ils existent $\psi_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1)$, $\psi_2 \in C^1(\overline{\Omega}_2)$ tels que $\psi = \psi_1$ sur $\overline{\Omega}_1$ et $\psi = \psi_2$ sur $\overline{\Omega}_2$. On a sur \mathcal{H} $\psi_1 = \psi_2$ et $D_{\mathcal{H}}\psi_1 = D_{\mathcal{H}}\psi_2$.

Nous nous intéressons maintenant seulement par la suite au cas $N = 1$.

Nous donnons la définition de sous et sur-solution pour le problème suivant sur \mathbb{R} noté $(HJ - FL)$:

$$\begin{cases} u + H_1(x, Du) = 0 & \text{dans } \Omega_1 =]0, +\infty[, \\ u + H_2(x, Du) = 0 & \text{dans } \Omega_2 =]-\infty, 0[, \\ u + \beta = 0 & \text{en } x = 0. \end{cases} \quad (HJ-FL)$$

où β est une constante réelle.

Puisque sur les Ω_i , $i = 1, 2$, les définitions de sous et sur-solutions sont celles de viscosités classiques, nous donnons seulement les définitions en $x = 0$.

Rappels :

Une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *semi-continue supérieurement* (scs) si $\limsup_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x)$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *semi-continue inférieurement* (sci) si $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$.

Définition 1.1 (Sous et sur-solutions à flux-limité en $x = 0$)

Une fonction *semi-continue supérieurement* (scs), bornée $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une *sous-solution* de $(HJ - FL)$ en $x = 0$ si pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{P}$ et pour tout point maximum local x de la fonction à $x \mapsto (u - \psi)(x)$ dans \mathbb{R} , on a

$$\max(u(x) + \beta, u(x) + H_1^+(x, D\psi_1), u(x) + H_2^-(x, D\psi_2)) \leq 0.$$

Une fonction *semi-continue inférieurement* (sci), bornée $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une *sur-solution* de $(HJ - FL)$ en $x = 0$ si pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{P}$ et pour tout point minimum local x de la fonction à $x \mapsto (v - \psi)(x)$ dans \mathbb{R} , on a

$$\max(v(x) + \beta, v(x) + H_1^+(x, D\psi_1), v(x) + H_2^-(x, D\psi_2)) \geq 0.$$

1.1.2 Principe de Comparaison pour les sous et sur-solutions à flux-limité

Nous admettons les lemmes suivants, très important dans la suite .

Lemme 1.1 (Les sous solutions sont Lipschitz continues)

[1] Supposons les hypothèses $[H0]$ - $[H2]$ et $[HG]$.

Alors, toute fonction scs bornée sous solution de $(HJ - FL)$ est Lipschitz continue.

Soit $p \in \mathbb{R}$. Notons que pour tout (x, \cdot) fixé, les fonctions $H_1(x, \cdot)$ et $H_2(x, \cdot)$ sont convexes et coercives, d'où chacune atteint son minimum.

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{H}_1(x) &:= \min_{s \in \mathbb{R}} H_1(x, s), \\ \underline{H}_2(x) &:= \min_{s \in \mathbb{R}} H_2(x, s). \end{aligned}$$

Puisque le minimum peut être probablement obtenu sur tout un intervalle, on pose

$$\begin{aligned} m_1(x) &:= \sup \{s \in \mathbb{R} : H_1(x, s) = \underline{H}_1(x)\}, \\ m_2(x) &:= \inf \{s \in \mathbb{R} : H_2(x, s) = \underline{H}_2(x)\}, \end{aligned}$$

Lemme 1.2

[1] Supposons les hypothèses $[H0]$ - $[H2]$ et $[HG]$.

Alors, les hamiltoniens H_1^- et H_2^+ satisfont

$$H_1^-(x, p) = \begin{cases} \underline{H}_1(x) & \text{si } p \leq m_1, \\ H_1(x, p) & \text{si } p > m_1, \end{cases}$$

$$H_2^+(x, p) = \begin{cases} H_2(x, p) & \text{si } p \leq m_2, \\ \underline{H}_2(x) & \text{si } p > m_2. \end{cases}$$

Comme conséquences, $H_1^-(x, p)$ est croissant en p , et $H_2^+(x, p)$ est décroissant en p . Par ailleurs, $H_1^-(x, p)$ est strictement croissant en p pour $p > m_1$ et H_2^+ est strictement décroissant en p pour $p < m_2$.

Lemme 1.3

[1] Pour tout $A > \max(\underline{H}_1(x), \underline{H}_2(x))$, il existe une unique paire $\lambda_2 < \lambda_1$ tel que

$$\begin{aligned} H_1^-(x, \lambda_1) &= A \\ \text{et} \\ H_2^+(x, \lambda_2) &= A \end{aligned}$$

et ces mêmes équations sont vérifiées en utilisant les hamiltoniens H_1 et H_2 au lieu de H_1^- et H_2^+ .

Nous énonçons maintenant le théorème donnant le principe de comparaison pour les sous et sur-solution à flux-limité de $(HJ - FL)$:

Théorème 1.1 (Principe de comparaison)

Supposons les hypothèses $[H0]$ - $[H2]$ et $[HG]$.

Si $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement une fonction scs bornée sous-solution à flux-limité et une fonction sci bornée sur-solution à flux-limité de $(HJ - FL)$, alors $u \leq v$ dans \mathbb{R} .

Preuve

Reprenons le système $(HJ - FL)$:

$$\begin{cases} u + H_1(x, Du) = 0 & \text{dans } \Omega_1 =]0, +\infty[, \\ u + H_2(x, Du) = 0 & \text{dans } \Omega_2 =]-\infty, 0[, \\ u + \beta = 0 & \text{en } x = 0. \end{cases} \quad (HJ-FL)$$

Supposons que u est sous-solution et v une sur-solution à flux-limité de $(HJ - FL)$.

Pour $K > 0$ assez grand, la fonction $\psi(x) := -K - \sqrt{(1 + |x|^2)}$ est une sous-solution classique à flux-limité de $(HJ - FL)$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \psi(x) = -\infty$, $\psi'(x) = 0$, $\psi(x) = -K - 1$ pour $x = 0$, donc en particulier, $\psi(x) + \kappa \leq 0$, pour tout constante réelle κ .

Pour $\mu \in]0, 1[$ proche de 1, la fonction $u_\mu(x) := \mu u(x) + (1 - \mu)\psi(x)$ est une fonction Lipschitzienne continue en tant que combinaison linéaire de fonctions Lipschitziennes (lemme (1.1)) et en utilisant la convexité de H_1, H_2 , c'est une sous-solution à flux-limité de $(HJ - FL)$.

En effet :

Sur Ω_1 , en utilisant la convexité de H_1 , on a :

$$\begin{aligned}
 u_\mu(x) + H_1(x, Du_\mu(x)) &= \mu u(x) + (1 - \mu)\psi(x) + H_1(x, D(\mu u(x) + (1 - \mu)\psi(x))) \\
 &= \mu u(x) + (1 - \mu)\psi(x) + H_1(x, \mu Du(x) + (1 - \mu)D\psi(x)) \\
 &\leq \mu u(x) + (1 - \mu)\psi(x) + \mu H_1(x, Du(x)) + (1 - \mu)H_1(x, D\psi(x)) \\
 &\leq \mu \{u(x) + H_1(x, Du(x))\} + (1 - \mu) \{\psi(x) + H_1(x, D\psi(x))\} \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

Il en est de même sur Ω_2 et en $x = 0$.

La preuve consiste à montrer que, pour tout $\mu \in]0, 1[$, $u_\mu \leq v$ dans \mathbb{R} et en passant à la limite quand $\mu \rightarrow 1$ on obtient le résultat désiré.

On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_\mu(x) \rightarrow -\infty$ car $\left(1 - \mu > 0; \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \psi(x) \rightarrow -\infty \text{ et en plus du fait que } u \text{ est bornée}\right)$.

Puisque $u_\mu(x) - v(x) \rightarrow -\infty$ quand $|x| \rightarrow +\infty$ car $\left(\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_\mu(x) \rightarrow -\infty, v \rightarrow +\infty \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty\right)$ alors il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que

$$M := u_\mu(\bar{x}) - v(\bar{x}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (u_\mu(x) - v(x)).$$

On suppose par contradiction que $M > 0$.

On introduit pour $\alpha > 0$ assez petit :

$$\begin{aligned}
 M_\alpha &:= \sup_{x \in \mathbb{R}} \{u_\mu(x) - v(x) - \alpha|x|^2\}, \\
 &:= u_\mu(x_\alpha) - v(x_\alpha) - \alpha|x_\alpha|^2.
 \end{aligned}$$

On alors : $M = \lim_{\alpha \rightarrow 0} M_\alpha$.

Puisque $M = \lim_{\alpha \rightarrow 0} M_\alpha$, on peut choisir α de telle manière que $M_\alpha \geq \frac{M}{2} > 0$.

Suivant le signe de x_α , on a :

$$\boxed{\text{CAS A : } x_\alpha > 0 \text{ ou } x_\alpha < 0}.$$

On dédouble les variables de la façon suivante en introduisant un nouveau paramètre $0 < \gamma \ll 1$ et en posant

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha, \gamma} &:= \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \left\{ u_\mu(x) - v(y) - \alpha|x|^2 - \frac{|x - y|^2}{\gamma^2} - |x - x_\alpha|^2 \right\} \\
 &:= u_\mu(x_\gamma) - v(y_\gamma) - \alpha|x_\gamma|^2 - \frac{|x_\gamma - y_\gamma|^2}{\gamma^2} - |x_\gamma - x_\alpha|^2.
 \end{aligned}$$

On a alors $M_\alpha = \lim_{\gamma \rightarrow 0} M_{\alpha, \gamma}$.

On peut donc choisir γ tel que $M_{\alpha, \gamma} \geq \frac{M}{4} > 0$.

Supposons par exemple que $x_\alpha > 0$.

Puisque les points maximum x_γ et y_γ de la fonction

$(x, y) \mapsto u_\mu(x) - v(y) - \alpha|x|^2 - \frac{|x-y|^2}{\gamma^2} - |x-x_\alpha|^2$ convergent vers x_α quand $\gamma \rightarrow 0$, on conclut

que $x_\gamma \in \Omega_1$ et $y_\gamma \in \Omega_1$ pour γ assez petit.

On peut donc considérer x_γ comme le point maximum local de la fonction

$$x \mapsto u_\mu(x) - v(y_\gamma) - \alpha|x|^2 - \frac{|x-y_\gamma|^2}{\gamma^2} - |x-x_\alpha|^2.$$

En posant $\psi_{\alpha,\gamma}(x) = v(y_\gamma) + \alpha|x|^2 + \frac{|x-y_\gamma|^2}{\gamma^2} + |x-x_\alpha|^2$

alors, $u_\mu - \psi_{\alpha,\gamma}$ atteint son maximum en x_γ .

Or, par hypothèse, u_μ est sous-solution de $u_\mu(x) + H_1(x, Du_\mu(x)) = 0$,

donc on a :

$$u_\mu(x_\gamma) + H_1(x_\gamma, D\psi_1(x_\gamma)) \leq 0, \quad (1.10)$$

avec

$$\begin{aligned} D\psi_1(x_\gamma) &:= D_x\psi_{\alpha,\gamma}(x_\gamma) \\ &:= 2\alpha x_\gamma + \frac{2|x_\gamma - y_\gamma|}{\gamma^2} + 2|x_\gamma - x_\alpha|. \end{aligned}$$

De la même manière, on peut considérer y_γ comme le point minimum local de la fonction

$$y \mapsto v(y) - u_\mu(x_\gamma) - \alpha|x_\gamma|^2 - \frac{|x_\gamma - y|^2}{\gamma^2} - |x_\gamma - x_\alpha|^2.$$

En posant $\psi_{\alpha,\gamma}(y) = u_\mu(x_\gamma) + \alpha|x_\gamma|^2 + \frac{|x_\gamma - y|^2}{\gamma^2} + |x_\gamma - x_\alpha|^2$

alors, $v - \psi_{\alpha,\gamma}$ atteint le minimum en y_γ .

Or, par hypothèse, v est sur-solution de $v(y) + H_1(y, Dv(y)) = 0$,

donc, on a :

$$v(y_\gamma) + H_1(y_\gamma, -D\psi_2(y_\gamma)) \geq 0, \quad (1.11)$$

avec

$$\begin{aligned} D\psi_2(y_\gamma) &:= D_y\psi_{\alpha,\gamma}(y_\gamma) \\ &:= \frac{2|x_\gamma - y_\gamma|}{\gamma^2}. \end{aligned}$$

En combinant (1.10) et (1.11), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} u_\mu(x_\gamma) - v(y_\gamma) &\leq H_1(y_\gamma, -D\psi_2(y_\gamma)) - H_1(x_\gamma, D\psi_1(x_\gamma)) \\ &\leq H_1(y_\gamma, -D\psi_2(y_\gamma)) - H_1(y_\gamma, D\psi_1(x_\gamma)) + H_1(y_\gamma, D\psi_1(x_\gamma)) - H_1(x_\gamma, D\psi_1(x_\gamma)) \end{aligned}$$

Le fait que les sous-solutions de $(HJ - FL)$ sont Lipschitziennes continues (confer lemme (1.1)) implique par la condition de sous-solution que :

$$|D_x\psi_1(x_\gamma)| \leq C,$$

pour $C > 0$ indépendant de $\alpha > 0, \gamma > 0$.

En particulier,

$$\frac{2|x_\gamma - y_\gamma|}{\gamma^2} \leq C. \quad (1.12)$$

Maintenant, en utilisant (1.9) et (1.12), l'inégalité précédente donne :

$$u_\mu(x_\gamma) - v(y_\gamma) \leq m\{|x_\gamma - y_\gamma|(1 + |p|)\} + C\{2\alpha|x_\gamma| + 2|x_\gamma - x_\alpha|\}$$

avec

$$p = 2\alpha x_\gamma + \frac{2(x_\gamma - y_\gamma)}{\gamma^2} + 2(x_\gamma - x_\alpha)$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} u_\mu(x_\gamma) - v(y_\gamma) &\leq m\{|x_\gamma - y_\gamma|(1 + C + 2\alpha|x_\gamma| + 2|x_\gamma - x_\alpha|)\} + C\{2\alpha|x_\gamma| + 2|x_\gamma - x_\alpha|\} \\ &\leq m\{(1 + C)|x_\gamma - y_\gamma| + 2\alpha|x_\gamma||x_\gamma - y_\gamma| + 2|x_\gamma - y_\gamma||x_\gamma - x_\alpha|\} + C\{2\alpha|x_\gamma| + 2|x_\gamma - x_\alpha|\} \end{aligned}$$

pour $m(\cdot)$ module de continuité croissant défini en (1.9).

En faisant tendre $\gamma \rightarrow 0$ premièrement, puis ensuite $\alpha \rightarrow 0$, on obtient la contradiction $M \leq 0$.

CAS B : $x_\alpha = 0$.

$$\text{On pose } A := \left(\frac{u_\mu(0) + v(0)}{2} \right).$$

On a alors $-u_\mu(0) < A < -v(0)$.

En utilisant le lemme (1.3), il existe un unique couple (λ_1, λ_2) avec $\lambda_1 < \lambda_2$ solution de

$$H_1^-(0, \lambda_1) = A, \quad (1.13)$$

et

$$H_2^+(0, \lambda_2) = A. \quad (1.14)$$

Afin de construire la fonction test ψ , on définit les fonctions suivantes :

$h(t) := \lambda_1 t_+ - \lambda_2 t_-$ avec $(t_+ = \max(t, 0)$ et $t_- = \max(-t, 0)$)

et

$$\chi(x, y) := h(x) - h(y) = \begin{cases} \lambda_1(x - y) & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ \lambda_1 x - \lambda_2 y & \text{si } x \geq 0, y < 0 \\ \lambda_2 x - \lambda_1 y & \text{si } x < 0, y \geq 0 \\ \lambda_2(x - y) & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour $0 < \gamma$ assez petit, on définit la fonction test de la façon suivante :

$$\psi_{\alpha, \gamma}(x, y) := \chi(x, y) + \alpha|x|^2 + \frac{|x - y|^2}{\gamma^2} + |x - x_\alpha|^2.$$

On a bien $\forall x, y \in \mathbb{R}, \psi_{\alpha, \gamma} \in \mathcal{P}$.

On définit x_γ, y_γ les points maximum de la fonction $(x, y) \mapsto u_\mu(x) - v(y) - \psi_{\alpha, \gamma}(x, y)$.

Dans la suite, on écrira ψ pour $\psi_{\alpha, \gamma}$.

Suivant les positions de x_γ et y_γ dans \mathbb{R} , les cas $x_\gamma > 0, y_\gamma > 0$ ou $x_\gamma < 0, y_\gamma < 0$ étant faciles grâce à la coercivité de H_1 ou de H_2 , on a :

Sous-cas B-(a) : $x_\gamma > 0, y_\gamma \leq 0$.

Supposons d'abord que $y_\gamma < 0$.

Puisque $x_\gamma \in \Omega_1$, on peut considérer x_γ comme le point maximum local dans Ω_1 de la fonction $x \mapsto u_\mu(x) - v(y_\gamma) - \psi(x, y_\gamma)$ où

$$\begin{aligned} \psi(x, y_\gamma) &= \chi(x, y_\gamma) + \alpha|x|^2 + \frac{|x - y|^2}{\gamma^2} + |x - x_\alpha|^2 \\ &= \lambda_1 x - \lambda_2 y_\gamma + \alpha|x|^2 + \frac{|x - y|^2}{\gamma^2} + |x - x_\alpha|^2. \end{aligned}$$

Mais, u_μ est une sous-solution dans Ω_1 de $u_\mu(x) + H_1(x, Du_\mu(x)) = 0$, donc on a :

$$u_\mu(x_\gamma) + H_1(x_\gamma, D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \leq 0 \tag{1.16}$$

avec

$$D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma) = \lambda_1 + 2\alpha|x_\gamma| + \frac{2|x_\gamma - y_\gamma|}{\gamma^2} + 2|x_\gamma - x_\alpha|.$$

En utilisant la monotonie de H_1^- (confer lemme (1.2)), alors on peut écrire que :

$$H_1^-(x_\gamma, D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \geq H_1^-(0, \lambda_1).$$

Or, $H_1 \geq H_1^-$, donc en utilisant (1.13) et (1.16) et le fait que $u_\mu(x_\gamma) = u_\mu(0)$ quand $\gamma \rightarrow 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\geq u_\mu(x_\gamma) + H_1(x_\gamma, D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \\ &\geq u_\mu(x_\gamma) + H_1^-(x_\gamma, D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \\ &\geq u_\mu(0) + H_1^-(0, \lambda_1) \\ &\geq u_\mu(0) + A. \end{aligned}$$

Mais, $u_\mu(0) + A > 0$, d'où pour γ assez petit, on obtient une contradiction puisque $M > 0$. Le même argument marche pour $y_\gamma = 0$, il nous suffit de changer y_γ en 0 dans la fonction χ .

Sous-cas B-(b) : $x_\gamma < 0, y_\gamma \geq 0$

Ici, $x_\gamma \in \Omega_2$ et on procède de la même manière mais de façon symétrique par rapport au cas **B-a**.

En effet, on a :

Puisque $x_\gamma \in \Omega_2$, on peut considérer x_γ comme le point maximum local dans Ω_2 de la fonction $x \mapsto u_\mu(x) - v(y_\gamma) - \psi(x, y_\gamma)$ où

$$\begin{aligned}\psi(x, y_\gamma) &= \chi(x, y_\gamma) - \alpha|x|^2 - \frac{|x - y_\gamma|^2}{\gamma^2} - |x - x_\alpha|^2 \\ &= \lambda_2 x - \lambda_1 y_\gamma - \alpha|x|^2 - \frac{|x - y_\gamma|^2}{\gamma^2} - |x - x_\alpha|^2.\end{aligned}$$

Mais, u_μ est une sous-solution dans Ω_2 de $u_\mu(x) + H_2(x, Du_\mu(x)) = 0$, donc on a :

$$u_\mu(x_\gamma) + H_2(x_\gamma, D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \leq 0 \tag{1.17}$$

avec

$$D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma) = \lambda_2 - 2\alpha|x_\gamma| - \frac{2|x_\gamma - y_\gamma|}{\gamma^2} - 2|x_\gamma - x_\alpha|.$$

En utilisant la monotonie de H_2^+ (confer lemme (1.2)), alors on peut écrire que :

$$H_2^+(x_\gamma, D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \geq H_2^+(0, \lambda_2).$$

Or, $H_2 \geq H_2^+$, donc en utilisant (1.14) et (1.17) et le fait que $u_\mu(x_\gamma) = u_\mu(0)$ quand $\gamma \rightarrow 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}0 &\geq u_\mu(x_\gamma) + H_2(x_\gamma, D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \\ &\geq u_\mu(x_\gamma) + H_2^+(x_\gamma, D_x \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \\ &\geq u_\mu(0) + H_2^+(0, \lambda_2) \\ &\geq u_\mu(0) + A.\end{aligned}$$

D'où la contradiction.

Sous-cas B-(c) : $x_\gamma = 0, y_\gamma > 0$

D'une part, puisque $x_\gamma = 0$, alors la définition (1.1) donne :

$$\max(u_\mu(x_\gamma) + \beta, u_\mu(x_\gamma) + H_1^+(x_\gamma, D_x \psi_1(x_\gamma, y_\gamma)), u_\mu(x_\gamma) + H_2^-(x_\gamma, D_x \psi_2(x_\gamma, y_\gamma))) \leq 0$$

Ce qui implique en particulier,

$$u_\mu(x_\gamma) + H_1^+(x_\gamma, D_x \psi_1(x_\gamma, y_\gamma)) \leq 0 \quad (1.18)$$

où

$$D_x \psi_1(x_\gamma, y_\gamma) = \lambda_1 - \frac{2|y_\gamma|}{\gamma^2}.$$

D'autre part, puisque v est sur-solution de $v(y) + H_1(y, Dv(y)) = 0$ dans Ω_1 . Cela implique

$$v(y_\gamma) + H_1(y_\gamma, -D_y \psi_1(x_\gamma, y_\gamma)) \geq 0 \quad (1.19)$$

où

$$D_y \psi_1(x_\gamma, y_\gamma) = -\lambda_1 + \frac{2|y_\gamma|}{\gamma^2}.$$

On aimerait montrer que

$$v(y_\gamma) + H_1^+(y_\gamma, -D_y \psi_1(x_\gamma, y_\gamma)) \geq 0.$$

Mais, puisque $H_1 = \max(H_1^-, H_1^+)$, il nous suffit de montrer que :

$$v(y_\gamma) + H_1^-(y_\gamma, -D_y \psi_1(x_\gamma, y_\gamma)) < 0.$$

En effet, puisque $\frac{2|y_\gamma|}{\gamma^2} > 0$, on peut utiliser la monotonie de H_1^- (vu que $-D_y \psi_1(x_\gamma, y_\gamma) \leq \lambda_1$) qui donne, quand $\gamma \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} v(y_\gamma) + H_1^-(y_\gamma, -D_y \psi_1(x_\gamma, y_\gamma)) &\leq v(y_\gamma) + H_1^-(0, \lambda_1) \\ &\leq v(0) + A \end{aligned} \quad (1.20)$$

Mais, $v(0) + A < 0$ d'où l'inégalité désirée. Ainsi, pour γ assez petit, on a nécessairement

$$v(y_\gamma) + H_1^+(y_\gamma, -D_y \psi_1(x_\gamma, y_\gamma)) \geq 0. \quad (1.21)$$

On obtient ainsi la conclusion en combinant (1.18) et (1.21) et en faisant tendre premièrement $\gamma \rightarrow 0$ puis α .

Sous-cas B-(d) : $x_\gamma = 0, y_\gamma < 0$

Ici, la preuve est symétrique à celle du cas **B-c** ci-dessus : le fait que $x_\gamma = 0$ nous donne la condition sous-solution à flux-limité pour H_2^- et $y_\gamma < 0$ donne la condition de sur-solution avec H_2^+ .

Sous-cas B-(e) : $x_\gamma = 0, y_\gamma = 0$

Clairement, puisque $x_\gamma = y_\gamma = 0$, alors en utilisant l'hypothèse i.e que u_μ et v sont respectivement une sous-solution et une sur-solution à flux-limité, par la définition (1.1), on a :

$$\max(u_\mu(x_\gamma) + \beta, u_\mu(x_\gamma) + H_1^+(x_\gamma, \lambda_1), u_\mu(x_\gamma) + H_2^-(x_\gamma, \lambda_2)) \leq 0 \quad (1.22)$$

$$\max(v(y_\gamma) + \beta, v(y_\gamma) + H_1^+(y_\gamma, \lambda_1), v(y_\gamma) + H_2^-(y_\gamma, \lambda_2)) \geq 0. \quad (1.23)$$

Alors on a, soit

$$\begin{aligned} u_\mu(x_\gamma) + \beta &\leq 0 \\ v(y_\gamma) + \beta &\geq 0. \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} u_\mu(x_\gamma) + H_1^+(x_\gamma, \lambda_1) &\leq 0 \\ v(y_\gamma) + H_1^+(y_\gamma, \lambda_1) &\geq 0. \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} u_\mu(x_\gamma) + H_2^-(x_\gamma, \lambda_2) &\leq 0 \\ v(y_\gamma) + H_2^-(y_\gamma, \lambda_2) &\geq 0. \end{aligned}$$

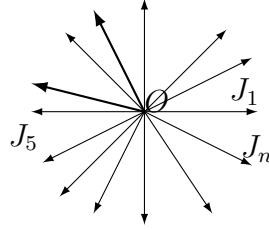
Dans tous les cas, on a $u_\mu(x_\gamma) \leq v(y_\gamma)$.

Ainsi, en faisant tendre $\gamma \rightarrow 0$, puis α , on obtient le résultat. \square

CHAPITRE 2

SOLUTIONS À FLUX-LIMITÉ DU PROBLÈME D'H-J SUR UN RÉSEAU À N BRANCHES

On considère le problème suivant : n branches J_1, \dots, J_n raccordées au point O :



On définit les branches de la façon suivante :

$$\begin{cases} J_i := \mathbb{R}^+ . e_i & , 1 \leq i \leq n \\ J_i^* := \mathbb{R}_+^* . e_i & , 1 \leq i \leq n . \end{cases}$$

avec $e_i \in \mathbb{R}^2$.

La distance entre deux points du réseau est donnée par :

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y| & \text{si } x, y \in J_i \\ |x| + |y| & \text{si } x \in J_i, y \in J_j \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

On considère maintenant sur les branches le problème suivant, noté (P_i) , en posant :

$$H(x, u, Du(x)) := \begin{cases} u(x) + H_1(D_{x_1} u(x)) = 0 & \text{si } x \in J_1^* \\ \dots \\ \dots \\ u(x) + H_n(D_{x_n} u(x)) = 0 & \text{si } x \in J_n^*. \end{cases}$$

avec

$$D_{x_i} u(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{u(t + \varepsilon e_i) - u(t)}{\varepsilon}$$

la dérivée de u en un point t dans la direction de e_i et H_i l'hamiltonien défini sur J_i .

Par ailleurs, si $x \in J_i$, alors $x = |x|e_i$ et $\forall \delta > 0$, on a :

$$\begin{aligned} D_{x_i}(\delta x^2) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\delta(x + \varepsilon e_i)^2 - \delta x^2}{\varepsilon} \\ &= \delta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(|x| + \varepsilon)^2 - |x|^2}{\varepsilon} \\ &= \delta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(|x| + \varepsilon)^2 - |x|^2}{\varepsilon} \\ &= \delta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2|x| + \varepsilon) \\ &= 2\delta|x|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En $x = 0$, on considère le système suivant, noté (P_0) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) + F_\tau(Du(0^+)) = 0 \\ \text{avec} \\ Du(0^+) = (D_{x_1}u(0^+), \dots, D_{x_n}u(0^+)) \\ \text{et} \\ F_\tau(Du(0^+)) = \max\left(\tau, \max_{1 \leq i \leq n} H_i^+(D_{x_i}u(0^+))\right) \\ \text{où } \tau \text{ est une constante.} \end{array} \right.$$

Dans la suite, on posera $J := \bigcup_{i=1}^{i=n} J_i$, $J^* := \bigcup_{i=1}^{i=n} J_i^*$ et on notera $(P) := \{(P_i), (P_0)\}$.

À présent, nous donnons la définition de sous et sur-solutions pour le problème (P) . Sur les J_i^* , les définitions de sous et sur-solutions sont celles de viscosités classiques, donc nous donnons seulement les définitions en $x = 0$.

Posons : $\mathcal{T} = \{\psi \in C^0(J) : \psi|_{J_i} \in C^1(J_i)\}$ l'ensemble des fonctions tests.

Définition 2.1 (Sous et sur-solutions à flux-limité en $x = 0$)

Une fonction semi-continue supérieurement (s.c.s) bornée $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-solution à flux-limité de (P) en $x = 0$ si pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{T}$ et pour tout point maximum local de la fonction $x \mapsto (u - \psi)(x)$ dans J , on a :

$$u(x) + \max\left(\tau, \max_{1 \leq i \leq n} H_i^+(D_{x_i}\psi(0^+))\right) \leq 0.$$

On dit qu'une fonction semi-continue inférieurement (s.c.i) bornée $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ est sur-solution à flux-limité de (P) en $x = 0$ si pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{T}$ et pour tout point minimum local de la fonction $x \mapsto (v - \psi)(x)$ dans J , on a :

$$v(x) + \max \left(\tau, \max_{1 \leq i \leq n} H_i^+(D_{x_i} \psi(0^+)) \right) \geq 0.$$

Le théorème suivant énonce le principe de comparaison des sous et sur- solution du problème (P).

Théorème 2.1 (Principe de comparaison)

Supposons les hypothèses [H0]-[H2] et [HG].

Si $u, v : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement une fonction s.c.s bornée sous solution à flux-limité et une fonction s.c.i bornée sur-solution à flux-limité de (P), alors $u \leq v$ dans J .

Preuve

Posons $M := \sup_{x \in J} (u(x) - v(x))$ et supposons par contradiction que $M > 0$.

Pour $\alpha > 0$ assez petit, on pose :

$$\begin{aligned} M_\alpha &:= \sup_{x \in J} \{u(x) - v(x) - \alpha|x|^2\}. \\ &:= u(x_\alpha) - v(x_\alpha) - \alpha|x_\alpha|^2. \end{aligned}$$

On a : $M = \lim_{\alpha \rightarrow 0} M_\alpha$.

Puisque $M = \lim_{\alpha \rightarrow 0} M_\alpha$, on peut choisir α de telle manière que $M_\alpha \geq \frac{M}{2} > 0$.

Suivant le signe de x_α , on a :

CAS A : $x_\alpha \in J_i^*$

On dédouble les variables de la façon suivante en introduisant un nouveau paramètre $0 < \gamma \ll 1$ et en posant :

$$\begin{aligned} M_{\alpha, \gamma} &:= \sup_{(x, y) \in J^2} \left\{ u(x) - v(y) - \alpha|x|^2 - \frac{d^2(x, y)}{2\gamma} - d^2(x, x_\alpha) \right\} \\ &:= u(x_\gamma) - v(y_\gamma) - \alpha|x_\gamma|^2 - \frac{d^2(x_\gamma, y_\gamma)}{2\gamma} - d^2(x_\gamma, x_\alpha). \end{aligned}$$

On a : $M_\alpha = \lim_{\gamma \rightarrow 0} M_{\alpha, \gamma}$.

En effet,

$$M_{\alpha, \gamma} > 0 \text{ donc } \alpha|x_\gamma|^2 + \frac{d^2(x_\gamma, y_\gamma)}{2\gamma} + d^2(x_\gamma, x_\alpha) \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

$$\implies \exists C_0 > 0 \text{ tel que } d(x_\gamma, y_\gamma) \leq C_0 \sqrt{\gamma}.$$

J étant une réunion finie de fermés, donc un fermé. C'est donc un ensemble de limites des suites convergentes. Quitte à extraire une sous-suite :

On a :

$$x_\gamma \rightarrow \hat{x}, y_\gamma \rightarrow \hat{x}$$

On a :

$$\begin{aligned} M_\alpha \leq M_{\alpha, \gamma} &= u(x_\gamma) - v(y_\gamma) - \alpha |x_\gamma|^2 - \frac{d^2(x_\gamma, y_\gamma)}{2\gamma} - d^2(x_\gamma, x_\alpha) \\ &\leq u(x_\gamma) - v(y_\gamma) - \alpha |x_\gamma|^2 - d^2(x_\gamma, x_\alpha) \end{aligned}$$

Par définition,

$$M_\alpha \leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} M_{\alpha, \gamma} \leq \overline{\lim}_{\gamma \rightarrow 0} M_{\alpha, \gamma}$$

$$\implies M_\alpha \leq \overline{\lim}_{\gamma \rightarrow 0} M_{\alpha, \gamma}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} M_\alpha &\leq \overline{\lim}_{\gamma \rightarrow 0} u(x_\gamma) + \overline{\lim}_{\gamma \rightarrow 0} (-v(y_\gamma)) - \alpha |\hat{x}|^2 - d^2(\hat{x}, x_\alpha) \\ &\leq \overline{\lim}_{\gamma \rightarrow 0} u(x_\gamma) - \lim_{\gamma \rightarrow 0} v(y_\gamma) - \alpha |\hat{x}|^2 - d^2(\hat{x}, x_\alpha) \\ &\leq u(\hat{x}) - v(\hat{x}) - \alpha |\hat{x}|^2 - d^2(\hat{x}, x_\alpha) \\ &\leq M_\alpha - d^2(\hat{x}, x_\alpha). \end{aligned}$$

car,

$$u(\hat{x}) - v(\hat{x}) - \alpha |\hat{x}|^2 \leq u(x_\alpha) - v(x_\alpha) - \alpha |x_\alpha|^2.$$

Donc,

$$0 \leq -d^2(\hat{x}, x_\alpha).$$

C'est-à-dire $\hat{x} = x_\alpha$.

D'où,

$x_\gamma \rightarrow \hat{x} = x_\alpha, y_\gamma \rightarrow \hat{x} = x_\alpha$ quand $\gamma \rightarrow 0$.

$$\implies M_{\alpha, \gamma} \rightarrow M_\alpha \text{ quand } \gamma \rightarrow 0.$$

On a également :

$$M_\alpha \leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} M_{\alpha, \gamma}$$

Ce qui donne encore :

$$\begin{aligned}
 M_\alpha &\leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} u(x_\gamma) + \lim_{\gamma \rightarrow 0} (-v(y_\gamma)) - \alpha|x_\alpha|^2 \\
 &\leq \lim_{\gamma \rightarrow 0} u(x_\gamma) - \overline{\lim}_{\gamma \rightarrow 0} v(y_\gamma) - \alpha|x_\alpha|^2 \\
 &\leq \overline{\lim}_{\gamma \rightarrow 0} u(x_\gamma) - \lim_{\gamma \rightarrow 0} v(y_\gamma) - \alpha|x_\alpha|^2 \\
 &\leq u(x_\alpha) - v(x_\alpha) - \alpha|x_\alpha|^2.
 \end{aligned}$$

$\implies u(x_\gamma) \rightarrow u(x_\alpha)$. De même $v(y_\gamma) \rightarrow v(x_\alpha)$.

D'où finalement, quand $\gamma \rightarrow 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2(x_\gamma, y_\gamma)}{2\gamma} &= u(x_\gamma) - v(y_\gamma) - \alpha|x_\gamma|^2 - d^2(x_\gamma, x_\alpha) - M_{\alpha, \gamma} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Puisque $x_\alpha \in J_i^*$ et puisque les points maximum x_γ, y_γ convergent vers x_α quand $\gamma \rightarrow 0$, on conclut que $x_\gamma, y_\gamma \in J_i^*$ pour $\gamma > 0$ assez petit.

On considère x_γ comme un point maximum local de la fonction :

$$x \mapsto u(x) - v(y_\gamma) - \alpha|x|^2 - d^2(x, x_\alpha) - \frac{d^2(x, y_\gamma)}{2\gamma}.$$

En posant $\psi_1(x, y_\gamma) := v(y_\gamma) + \alpha|x|^2 + d^2(x, x_\alpha) + \frac{d^2(x, y_\gamma)}{2\gamma}$, alors $u - \psi_1$ atteint le maximum en x_γ .

Or, par hypothèse, u est sous-solution de (P), donc :

$$u(x_\gamma) + H_i(D_{x_i}\psi_1(x_\gamma, y_\gamma)) \leq 0 \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{aligned}
 d^2(x_\gamma, x_\alpha) &= |x_\gamma - x_\alpha|^2 \\
 d^2(x_\gamma, y_\gamma) &= |x_\gamma - y_\gamma|^2
 \end{aligned}$$

et, par (2.1)

$$D_{x_i}\psi_1(x_\gamma, y_\gamma) = 2\alpha|x_\gamma| + \frac{|x_\gamma - y_\gamma|}{\gamma} + 2|x_\gamma - x_\alpha|.$$

De la même manière, y_γ est un point minimum local de la fonction

$$y \mapsto v(y) - u(x_\gamma) + \alpha|y|^2 + d^2(y, x_\alpha) + \frac{d^2(x_\gamma, y)}{2\gamma}.$$

En posant $\psi_2(x_\gamma, y) := u(x_\gamma) - \alpha|y|^2 - d^2(y, x_\alpha) - \frac{d^2(x_\gamma, y)}{2\gamma}$, alors $u - \psi_2$ atteint le minimum en y_γ .

Or, par hypothèse, v est sur-solution de (P), donc :

$$v(y_\gamma) + H_i(-D_{y_i}\psi_2(x_\gamma, y_\gamma)) \geq 0 \quad (2.3)$$

avec, par (2.1)

$$D_{y_i}\psi_1(x_\gamma, y_\gamma) = -\frac{|x_\gamma - y_\gamma|}{\gamma}.$$

En combinant (2.2) et (2.3), on a alors :

$$u(x_\gamma) - v(y_\gamma) \leq H_i(-D_{y_i}\psi_2(x_\gamma, y_\gamma)) - H_i(-D_{x_i}\psi_1(x_\gamma, y_\gamma))$$

et par (1.9), $\exists c_0 > 0$ tel que

$$H_i(-D_{y_i}\psi_2(x_\gamma, y_\gamma)) - H_i(-D_{x_i}\psi_1(x_\gamma, y_\gamma)) \leq c_0| - 2\alpha x_\gamma|.$$

Donc, l'inégalité précédente donne :

$$u(x_\gamma) - v(y_\gamma) \leq c_0| - 2\alpha x_\gamma|.$$

D'où en tendant $\gamma \rightarrow 0$ puis $\alpha \rightarrow 0$, on obtient $M \leq 0$: ce qui conduit à une contradiction.

CAS B : $x_\alpha = 0$.

On pose $A := \left(\frac{u(0) + v(0)}{2} \right)$.

On a alors $-u(0) < A < -v(0)$.

En utilisant le lemme (1.3), il existe des $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ tels que :

$$H_i^-(0, \lambda_i) = A, \tag{2.4}$$

et

$$H_i^+(0, \lambda_i) = A. \tag{2.5}$$

Pour pouvoir construire des fonctions tests, on définit les fonctions suivantes :

$$h(x) := \lambda_i x, x \in J_i$$

et

$$\chi(x, y) := h(x) - h(y) = \begin{cases} \lambda_i(x - y) & \text{si } x \in J_i, y \in J_i \\ \lambda_i x - \lambda_j y & \text{si } x \in J_i, y \in J_j, i \neq j \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour $0 < \gamma$ assez petit, on définit la fonction test de la façon suivante :

$$\psi_{\alpha, \gamma}(x, y) := \chi(x, y) + \alpha|x|^2 + \frac{d^2(x, y)}{2\gamma}.$$

On a bien $\forall x, y \in J, \psi_{\alpha, \gamma} \in \mathcal{T}$.

On définit x_γ, y_γ les points maximum de la fonction $(x, y) \mapsto u(x) - v(y) - \psi_{\alpha, \gamma}(x, y)$.

Dans la suite, on écrira ψ pour $\psi_{\alpha, \gamma}$.

Sous-cas B-(1) : $x_\gamma, y_\gamma \in J_i^*$.

x_γ est un point maximum local dans J_i^* de la fonction $x \mapsto u(x) - v(y_\gamma) - \psi(x, y_\gamma)$, où :

$$\psi(x, y_\gamma) = \lambda_i(x - y_\gamma) + \alpha|x|^2 + \frac{|x - y_\gamma|^2}{2\gamma}$$

Mais, u est une sous-solution de $u(x) + H_i(Du(x)) = 0$ sur J_i^* . Cela implique que :

$$u(x_\gamma) + H_i(D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma)) \leq 0 \quad (2.7)$$

où, par (2.1)

$$D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma) = \lambda_i + 2\alpha|x_\gamma| + \frac{|x_\gamma - y_\gamma|}{\gamma}.$$

Mais, par le lemme (1.2) i.e par la monotonie de H_i^- on a :

$$H_i^-(D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma)) \geq H_i^-(\lambda_i)$$

et puisque $H_i \geq H_i^-$, alors on a en utilisant (2.7) et (2.4) et en tendant $\gamma \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\geq u(x_\gamma) + H_i(D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma)) \\ &\geq u(x_\gamma) + H_i^-(D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma)) \\ &\geq u(0) + H_i^-(\lambda_i) \\ &\geq u(0) + A. \end{aligned}$$

Mais, $u(0) + A > 0$, d'où pour γ assez petit, on obtient une contradiction .

Sous-cas B-(2) : $x_\gamma \in J_i^*, y_\gamma \in J_j^*, i \neq j$.

Ici :

$$\frac{d^2(x_\gamma, y_\gamma)}{2\gamma} = \frac{(|x_\gamma| + |y_\gamma|)^2}{2\gamma}$$

et

$$\chi(x, y) := \lambda_i x - \lambda_j y$$

x_γ est un point maximum local dans J_i^* de la fonction $x \mapsto u(x) - v(y_\gamma) - \psi(x, y_\gamma)$, où :

$$\psi(x, y_\gamma) = \lambda_i x - \lambda_j y_\gamma + \alpha |x|^2 + \frac{(|x| + |y_\gamma|)^2}{2\gamma}$$

Mais, u est une sous-solution de $u(x) + H_i(Du(x)) = 0$ sur J_i^* . Cela implique que :

$$u(x_\gamma) + H_i(D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma)) \leq 0 \quad (2.8)$$

où, par (2.1)

$$D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma) = \lambda_i + 2\alpha|x_\gamma| + \frac{|x_\gamma| + |y_\gamma|}{\gamma}.$$

et par le lemme (1.2), on a :

$$H_i^-(D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma)) \geq H_i^-(\lambda_i)$$

En utilisant le fait que $H_i \geq H_i^-$ plus (2.4), (2.8) et en tendant $\gamma \rightarrow 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} 0 &\geq u(x_\gamma) + H_i(D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma)) \\ &\geq u(x_\gamma) + H_i^-(D_{x_i}\psi(x_\gamma, y_\gamma)) \\ &\geq u(0) + H_i^-(\lambda_i) \\ &\geq u(0) + A. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une contradiction car $u(0) + A > 0$.

Sous-cas B-(3) : $x_\gamma = 0, y_\gamma \in J_i^*$.

D'une part, puisque $x_\gamma = 0$, alors, par la définition (2.1), on a :

$$\max \left(u(x_\gamma) + \tau, u(x_\gamma) + \max_{1 \leq i \leq n} H_i^+(D_{x_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \right) \leq 0.$$

En particulier,

$$u(x_\gamma) + \max_{1 \leq i \leq n} H_i^+(D_{x_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \leq 0. \quad (2.9)$$

où

$$D_{x_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma) = \lambda_i + \frac{|y_\gamma|}{\gamma}$$

D'autre part, puisque v est sur-solution de $v(y) + H_i(Dv(y)) = 0$ dans J_i^* , alors cela implique qu'on a :

$$v(y_\gamma) + H_i(-D_{y_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \geq 0 \quad (2.10)$$

où, par (2.1)

$$D_{y_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma) = -\lambda_i + \frac{|y_\gamma|}{\gamma}$$

On aimerait montrer qu'on a aussi :

$$v(y_\gamma) + H_i^+(-D_{y_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma)) \geq 0. \quad (2.11)$$

et donc, en combinant (2.9) et (2.11) on aboutit au résultat escompté.

Pour ce faire, puisque $H_i = \max(H_i^-, H_i^+)$, alors il nous suffit de montrer qu'on a :

$$v(y_\gamma) + H_i^-(-D_{y_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma)) < 0.$$

Mais, puisque $\frac{|y_\gamma|}{\gamma} > 0$, alors en appliquant le lemme (1.2), on a clairement :

$$\begin{aligned} v(y_\gamma) + H_i^-(-D_{y_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma)) &\leq v(y_\gamma) + H_i^-(\lambda_i) \\ &\leq v(y_\gamma) + A \end{aligned}$$

Or, quand $\gamma \rightarrow 0$, $v(y_\gamma) + A \rightarrow v(0) + A < 0$.

D'où, pour γ assez petit, on a

$$v(y_\gamma) + H_i^-(-D_{y_i} \psi(x_\gamma, y_\gamma)) < 0.$$

et donc nécessairement on a (2.11).

La conclusion s'ensuit en tendant $\gamma \rightarrow 0$ premièrement puis $\alpha \rightarrow 0$.

Sous-cas B-(4) : $x_\gamma = 0, y_\gamma = 0$.

Dans cette partie, on utilise le fait que u et v sont respectivement une sous et sur-solutions à flux-limité.

D'où, en appliquant la définition (2.1), on a :

$$\max \left(u(x_\gamma) + \tau, u(x_\gamma) + \max_{1 \leq i \leq n} H_i^+(\lambda_i) \right) \leq 0. \quad (2.12)$$

De même,

$$\max \left(v(y_\gamma) + \tau, v(y_\gamma) + \max_{1 \leq i \leq n} H_i^+(\lambda_i) \right) \geq 0. \quad (2.13)$$

En combinant (2.12) et (2.13), on obtient :

$$u(x_\gamma) \leq v(y_\gamma).$$

d'où, en tendant $\gamma \rightarrow 0$ puis $\alpha \rightarrow 0$, on aboutit au résultat. □

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, on a présenté une approche des problèmes de contrôle optimal posés sur les réseaux, en particulier, la notion des solutions à flux-limité pour un système d'équations d'Hamilton-Jacobi. Sans doute, ces équations ont considérablement contribué à l'essor spectaculaire de la théorie de contrôle de nos jours.

Contrôle optimal et applications :[\[2\]](#)

Les systèmes automatisés par exemple, de nos jours font complètement partie de notre quotidien, ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : systèmes de freinage ABS (systèmes anti-blocage des roues), assistance à la conduite, servomoteurs, circuits frigorifiques, contrôle des flux routiers, ferroviaires, aériens, réseaux informatiques, moteurs de recherche sur internet, circuits électriques, contrôle des procédés chimiques, raffinage pétrolier, guidages aérospatiaux, opérations au laser, robotique, distillation, satellite, ... La liste est longue, les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec la notion de rendement optimal.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Guy Barles, Ariela Briani, Emmanuel Chasseigne, Cyril Imbert. Flux-limited and classical viscosity solutions for regional control problems. 2016. < *hal* – 01392414 >
- [2] Emmanuel Trélat , Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France. Contrôle optimal : théorie et applications.