

3 ปฏิบัติการที่ 8: ค่าและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

ในปฏิบัติการนี้เราจะใช้ package

1. “sympy” <https://www.sympy.org/en/index.html>
2. “numpy” ในส่วนของ linearalgebra <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.linalg.html>

ให้ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงขนาด $n \times n$ และ $v \neq [0]$ เป็นเมทริกซ์จำนวนจริงขนาด $n \times 1$ (คอลัมน์เวกเตอร์ขนาด n) เรากล่าวว่า v เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ A ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ $\lambda \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$Av = \lambda v$$

เราเรียก λ ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A และกล่าวว่า v เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สัมพันธ์กับ λ

การคำนวณ	numpy	sympy
การเรียก package	<code>import numpy as np from numpy import linalg as LA</code>	<code>from sympy import *</code>
การคำนวณค่าลักษณะเฉพาะของ A	<code>eival, eivec = LA.eig(A)</code>	<code>A.eigenvals()</code>
การคำนวณเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A	<code>eival, eivec = LA.eig(A)</code>	<code>A.eigenvecs</code> แสดงผล (ค่าลักษณะเฉพาะ, จำนวนซ้ำ, [เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ])

ตัวอย่าง 3.1.

```

from sympy import *
init_printing(use_unicode=True)

from sympy import *
init_printing(use_unicode=True)

A = Matrix([[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12],[13,14,15,16]])
eival=A.eigenvals()
eivec=A.eigenvecs()
A

```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

```

eival

```

$$\{0 : 2, 17 - 3\sqrt{41} : 1, 17 + 3\sqrt{41} : 1\}$$

```

eivec

```

$$\left[\left(0, 2, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(17 - 3\sqrt{41}, 1, \begin{bmatrix} -\frac{9\sqrt{41}}{82} - \frac{1}{2} \\ -\frac{3\sqrt{41}}{41} \\ \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{41}}{82} \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(17 + 3\sqrt{41}, 1, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{9\sqrt{41}}{82} \\ \frac{3\sqrt{41}}{41} \\ \frac{3\sqrt{41}}{82} + \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]$$

แบบฝึกหัด 3.1. จงสร้างเมทริกซ์แยงมูม A ขนาด 4×4 โดยกำหนดค่าในแนวเส้นแยงมูมเอง คำนวณค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

แบบฝึกหัด 3.2. จงสร้างเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน A ขนาด 4×4 โดยกำหนดค่าในแนวเส้นแยงมูมและแนวเหนือเส้นแยงมูมเอง คำนวณค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

แบบฝึกหัด 3.3. ทำซ้ำแบบฝึกหัดแบบฝึกหัด 3.1 และ 3.2 โดยการเปลี่ยนเมทริกซ์และเปลี่ยนขนาดเมทริกซ์ A หลายรูปแบบ (โดยยังเป็นเมทริกซ์แยงมูม และเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน) นักศึกษาสังเกตเห็นหรือสรุปอะไรได้บ้าง

แบบฝึกหัด 3.4. ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ขนาด $n \times n$ ที่มีค่าลักษณะเฉพาะแตกต่างกัน n ค่า ให้ L เป็นเมทริกซ์แยงมูมที่มีสมาชิกเป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A และ Q เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีคอลัมน์เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะใน L จงหา QLQ^{-1} เช่น

```
import numpy as np
from numpy import linalg as LA
from numpy.linalg import inv
A = np.array([[1,0,0],[5,2,0],[3,0,-3]])
eival, eivec = LA.eig(A)
Q=eivec
L=np.diag(eival)
B=Q.dot(L).dot(inv(Q))
print(A)

print(B)
```

```
[[ 1  0  0]
 [ 5  2  0]
 [ 3  0 -3]]
[[ 1.  0.  0.]
 [ 5.  2.  0.]
 [ 3.  0. -3.]]
```

ทำซ้ำโดยการเปลี่ยนเมทริกซ์ A หลาย ๆ ค่า แล้วนักศึกษาสังเกตเห็นหรือสรุปอะไรได้บ้าง

แบบฝึกหัด

ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1. จงคำนวณค่าต่อไปนี้

- (a) คำนวณค่าเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ ของ A (อาจซ้ำกันได้)
- (b) แต่ละ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ คำนวณเวกเตอร์เฉพาะ v_i ของ A ที่สมนัยกับ λ_i
- (c) แต่ละ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ คำนวณ Av_i
- (d) แต่ละ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ คำนวณ $\lambda_i v_i$
- (e) ข้อ (c) และ (d) สัมพันธ์กันอย่างไร

2. จงคำนวณค่าต่อไปนี้

- (a) แต่ละ $k = 1, 2, 3, 4, \dots, 20$ คำนวณค่าเฉพาะ $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \lambda_4^k, \lambda_5^k$ โดยอาศัยข้อมูลจาก 1 (a)
- (b) แต่ละ $k = 1, 2, 3, 4, \dots, 20$ คำนวณค่าเฉพาะ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ ของ A^k (อาจซ้ำกันได้)
- (c) ข้อ (a) และ (b) สัมพันธ์กันอย่างไร

3. จงคำนวณค่าต่อไปนี้

- (a) $\det(A)$
- (b) ผลคูณของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมด (หากมีการซ้ำให้คูณโดยนับจำนวนซ้ำด้วย)
- (c) ข้อ (a) และ (b) สัมพันธ์กันอย่างไร

4. นักศึกษาทำซ้ำปฏิบัติการข้างต้นโดยใช้ package numpy พร้อมสังเกต ผลลัพธ์ เหมือนหรือแตกต่างของผลลัพธ์ที่เคยคำนวณด้วย package sympy เช่น

```
|: import numpy as np
|: from numpy import linalg as LA
|: A = np.array([[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10,11,12],[13,14,15,16]])
|: eival, eivec = LA.eig(A)
|: eival
|: array([ 3.62093727e+01, -2.20937271e+00, -3.18863232e-15, -1.34840081e-16])
|: eivec
|: array([[ -0.15115432,  0.72704996,  0.50370019, -0.06456091],
|:        [-0.34923733,  0.28320876, -0.8319577 , -0.31932112],
|:        [-0.54732033, -0.16063243,  0.15281481,  0.83232496],
|:        [-0.74540333, -0.60447363,  0.17544269, -0.44844294]])
```