Семинар 1
(Темы: Проективная резольвента, гомотопическая категория)

Вспомним, что в резольвенте (**??**) мы накрывали модуль свободным. Как мы увидели, категорным "аналогом"свободного модуля может быть проективный объект, причем утверждение **??** говорит о том, что эти два понятия не совпадают. Введём понятие, необходимое для повторения процесса (**??**) в абстрактной категории.

def 1.1. Говорят, что в категории достаточно много проективных (инъективных) объектов, если для любого объекта $A \in \mathcal{C}$ существует "накрывающий"его ("вкладывающийся"в него) проективный (инъективный) объект P с эпиморфизмом $p : P \to A$ (мономорфизмом $i : A \to I$).

Видно, что в категории модулей проективных объектов достаточно много. Тогда процесс построения проективной (инъективной) резольвенты абсолютно аналогичен (**??**). Опять же, верно аналогичное **??** утверждение о том, что объект квазиизоморфен всем своим проективным резольвентам. Еще раз посмотрим на какой-нибудь пример проективной резольвенты.

Ex 1.2. *Рассмотрим модули над кольцом* $R = \mathbb{C}[x]$. *Построим проективную резольвенту*[1] $\mathbb{C}$ *как* R*-модуля.*[2]

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[x] \xrightarrow{x\cdot} \mathbb{C}[x] \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Ex 1.3. *Пример поинтереснее состоит в построении бесконечной проективной резольвенты. Положим* $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x]/(x^2) - \mathsf{mod}$. *Тогда одной из проективных резольвент* $\mathbb{C}$ *как* $\mathbb{C}[x]/(x^2)$*-модуля будет выглядеть следующим образом:*

$$\ldots \xrightarrow{x\cdot} \mathbb{C}[x]/(x^2) \xrightarrow{x\cdot} \mathbb{C}[x]/(x^2) \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Последний пример мотивирует ввести следующее определение[3]

def 1.4. Проективной размерностью объекта **pd** M называют длину его минимальной проективной резольвенты. Если объект не имеет конечной проективной резольвенты, то говорят, что **pd** $M = \infty$.

Вспомним дуальное понятие инъективного объекта **??**. В отличие от проективных объектов, для них не существует общего аналога критерия **??**. Попробуем рассмотреть инъективные объекты в категории модулей над кольцом $\mathbb{Z}$. В данной категории рассмотрим семейство объектов, являющихся группами. Оказывается, что все инъективные объекты в данном семействе исчерпываются делимыми группами.

def 1.5. Назовём G делимой группой, если $\forall x \in G, n \in \mathbb{N}\ \exists y \in G :\ ny = x$.

Prop 1.6. G *— инъективный* $\mathbb{Z}$*-модуль* $\iff$ G *— делимая группа.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Пусть G не делимая. Попытаемся поднять некоторый морфизм $f : \mathbb{Z} \to G$ до морфизма $\to G$ с естественным вложением $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

$$\begin{tikzcd} & G \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "i"'] & \mathbb{Q} \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

Раз G не делимая, то существуют $x \in G, n \in \mathbb{Z}$ такие, что $\forall y \in G\ nx \neq y$. В качестве морфизма f возьмём тот, что отправляет единичный элемент в найденный x. Тогда существование искомого морфизма $g : \mathbb{Q} \to G$ невозможно. Действительно, тогда $x = f(1) = gi(1) = gi(n)/n = x$, откуда $nx = gi(n)$. $(\Leftarrow)$ Теперь G — делимая группа. $i : A \to B$ — мономорфизм и $\varphi : A \to G$ — какой-то морфизм, который мы хотим поднять. Приведём следующую конструкцию. Рассмотрим множество расширений (A', φ') нашего морфизма: $A \subset A' \subset B$, $\varphi'|_A = \varphi$. На данном множестве введём частичный порядок: $(A', \varphi') \leqslant (A'', \varphi'')$ если $A' \subset A''$ и $\varphi''|'_A = \varphi'$. По лемме Цорна существует максимальный элемент (B', φ_B). Покажем, что $B' = B$, тогда окажется, что φ_B — искомый морфизм. Пусть B' и B не совпадают. Тогда существует $x \in B/B'$. Тут нам потребуется делимость G. Возможны два варианта.

- Пусть $\forall n \in \mathbb{Z}\ nx \notin B'$. Тогда полагая $\varphi_B(x) = 0$ получаем продолжение φ_B на $< B', x >$, что противоречит максимальности.

- Пусть $\exists n \in \mathbb{Z}$ такой, что $nx \in B'$. Тогда $\varphi_B(nx) = g$, причем в силу делимости G существует $g' \in G$ такое, что $ng' = g$. Полагая $\varphi_B(x) = g'$ снова получим продолжение, противоречащее максимальности.

[1]Это частный пример т. н. резольвенты Кошуля(Koszul)
[2]ε_0– evaluation at zero
[3]далее будет дано ещё одно определение проективной размерности **??**

■

Prop 1.7. *В категории $\mathbb{Z}$-модулей достаточно инъективных объектов.*

Доказательство. Построение инъективного объекта для M иллюстрируется диаграммой.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\pi \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
\oplus\mathbb{Z}e_i \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \oplus\mathbb{Q}e_i \arrow[d, two heads] \\
M \arrow[r, hook] & \operatorname{Coker} f
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Утверждение следует из следующего факта:

Prop 1.8. *Факторгруппа делимой группы — тоже делимая группа.*

Тогда $\operatorname{Coker} f$ будет делимым объектом как фактор $\oplus\mathbb{Q}e_i$ ■

Остановимся в рассуждениях с инъективными и проективными объектами. Следующее определение является первым шагом к построению производной категории.

def 1.9. Морфизм $f^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$ называется гомотопным нулю $f \sim 0$, если существуют $h^n : K^n \to L^{n-1}$ такие, что $f^n = d^{n+1} \circ h^{n+1} + h^n \circ d^n$.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & K^i \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "f^i"'] \arrow[dl, "h^i"'] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+2}"] \arrow[d, "f^{i+1}"'] \arrow[dl, "h^{i+1}"'] & K^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+2}"] \arrow[dl, "h^{i+2}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^i"'] & L^i \arrow[r, "d_L^{i+1}"'] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+2}"'] & L^{i+2} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Два отображения $f^\bullet$, $g^\bullet$ комплексов называются гомотопически эквивалентными $f \sim g$, если $f - g \sim 0$.

Prop 1.10.

- *Гомотопные морфизмы образуют идеал. Если $f \sim 0$, то для любых компонуемых с ним морфизмов g, h верно $gf \sim 0$, $fh \sim 0$.*

- *Гомотопически эквивалентные морфизмы комплексов индуцируют одинаковые морфизмы на когомологиях.*

Доказательство. Для ясности не обозначая индексов приведём для первого пункта следующие выкладки.

$$gf = g(hd + dh) = ghd + gdh = ghd + dgh,$$

где последнее равенство сделано из коммутативности дифференциалов с морфизмами комплексов. Тогда gh — морфизм, из которого следует гомотопичность нулю. Для второго пункта в силу линейности достаточно доказать, что гомотопное нулю отображение индуцирует нулевое отображение на когомологиях. Пусть $x \in \operatorname{Ker} d_K^{i+1}$. Тогда

$$f^i(x) = d_L^i h^i(x) + h^{i+1} d_L^{i+1}(x),$$

где первый член в когомологиях будет равен нулю, т. к. $d_L^i h^i(x) \in \operatorname{Im} d_L^i$, а второй — т. к. дифференциал действует на элемент из ядра. ■

Теперь заменим все наши морфизмы на соответствующие классы эквивалентности по отношению гомотопности и получим новую категорию.

def 1.11. Гомотопичесокой категорией $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ называется категория с объектами из $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$ и морфизмами $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{Kom}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)/\sim$.

Prop 1.12 (Лемма о зигзаге)**.** *Пусть есть короткая точная последовательность.*

$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \longrightarrow 0$$

Тогда существуют связующие гомоморфизмы $\delta^i : H^i(M^\bullet) \to H^{i+1}(K^\bullet)$*, делающие следующую последовательность точной.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll] \\
H^{i-1}(K^\bullet) \arrow[r, "f^*"'] & H^{i-1}(L^\bullet) \arrow[r, "g^*"] & H^{i-1}(M^\bullet) \arrow[dll, "\delta^{i-1}"] \\
H^{i}(K^\bullet) \arrow[r, "f^*"'] & H^{i}(L^\bullet) \arrow[r, "g^*"] & H^{i}(M^\bullet) \arrow[dll, "\delta^{i}"] \\
H^{i+1}(K^\bullet) \arrow[r, "f^*"'] & H^{i+1}(L^\bullet) \arrow[r, "g^*"] & H^{i+1}(M^\bullet) \arrow[dll] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}$$

Добавить доказательство в приложение

def 1.13. Пусть даны два комплекса $K^\bullet$ и $L^\bullet$ над $\mathcal{A}$. Комплексом морфизмов называется комплекс с объектами $\underline{\mathrm{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)^i = \prod_n \mathrm{Hom}(K^n, L^{n+1})$. Дифференциал на нём будет действовать следующим образом. Элемент из члена i нашего комплекса можно представить как набор морфизмов $(\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)$, действующих между членами $K^\bullet$ и $L^\bullet$, отстоящих друг от друга на i. Тогда набор новых $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ в $i+1$-м члене получим как:

$$d^i : f_n \to g_n = df_n - (-1)^i f_{n+1} d$$