Семинар 1
(Темы: Производный функтор, приспособленный класс объектов, выделенные треугольники)

Ранее мы ввели понятие приспособленного класса объектов $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ для точного слева (справа) функтора $\mathcal{F}$. Далее будем проводить все рассуждения для точного слева аддитивного функтора $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между абелевыми категориями $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Ab}$. $\mathcal{R} \subset \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$ – приспособленный к $\mathcal{F}$ класс объектов.

Claim 1.1. *Если $\mathcal{R}$ – достаточно большой класс объектов, то для любого комплекса существует $\mathcal{R}$-резольвента, то есть*

$$\forall C^\bullet \subset \mathsf{Kom}^+(\mathcal{A}) \quad \exists R^\bullet \subset \mathsf{Kom}^+(\mathcal{R})\colon \quad C^\bullet \overset{qis}{\sim} R^\bullet$$

Доказательство. Строим резольвенту. На первом шаге вложим нулевой член в некоторый объект из класса $\mathcal{R}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & C^1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \dots \\
0 \arrow[r] & R^0 \arrow[r] & R^0 \coprod_{C^0} C^1 \arrow[r, hook] & R^1 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& C^i \arrow[rr, "d_C^i"] \arrow[dl, "t^i"'] \arrow[d, "\tau^i"] & & C^{i+1} \arrow[d] \arrow[dr, "t^{i+1}"] & \\
R^i \arrow[r] & \operatorname{Coker} d_R^{i-1} \arrow[r, "p"] & \operatorname{Coker} d_R^{i-1} \coprod_{C^i} C^{i+1} \arrow[rr, hook] & & R^{i+1}
\end{tikzcd}$$

$$C^i \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tau^i \\ -d_C^i \end{pmatrix}} \operatorname{Coker} d_R^{i-1} \oplus C^{i+1} \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} d_R^{i-1} \coprod_{C^i} C^{i+1} \longrightarrow 0$$

Осталось проверить, что таким образом задан квазиизоморфизм комплексов.
▲epi

$$C^i \supset Z^i(R^\bullet) \ni x \mapsto (p(x), 0) \in \operatorname{Coker} d_R^{i-1} \oplus C^{i+1}$$

$$\exists \widetilde{x} \in C^i\colon \quad \begin{pmatrix} \tau^i \\ -d_C^i \end{pmatrix} \widetilde{x} = \begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_c^i \widetilde{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{x} \in Z^i(C^\bullet)$$

▲mono

$$C^i \supset B^{i-1}(C^\bullet) \ni x \mapsto d_C^i(x) = 0 \in C^{i+1} \mapsto (0, 0) \in \operatorname{Coker} d_R^{i-1} \oplus C^{i+1} \Rightarrow d_R^i t^i(x) = 0 \Rightarrow t^i(x) \in B^{i-1}(R^\bullet)$$

■

Продолжим построение производного функтора. Ранее было отмечено, что если $\mathcal{F}$ – точный, то приспособленным классом являются все объекты нашей категории. Продолжим рассуждение для точного слева функтора между абелевыми категориями. Почленным действием он продолжается до точного функтора в категории комплексов и гомотопической категории.

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

$$\mathsf{Kom}^+\mathcal{F}\colon \mathsf{Kom}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{Kom}^+(\mathcal{B})$$

$$\mathcal{K}^+\mathcal{F}\colon \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^+(\mathcal{B})$$

Однако, вообще говоря, функтор не обязан сохранять квазиизоорфизмы. Поэтому продление на прозводную категорию мы будем организовывать следующим образом: комплекс мы будем заменять на квазиизоморфный ему комплекс с приспособленными членами и уже на этот комплекс будем действовать функтором почленно. Так мы получим производный функтор.

$$\mathcal{D}^+\mathcal{F}\colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$$

План действий:

- Локализация гомотопической категории приспособленных объектов по квазиизоморфизмам эквивалентна производной категории $\begin{tikzcd} \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \arrow[r, bend right, "\psi"'] & \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[l, bend right, dashed, "\phi"'] \end{tikzcd}$

- $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$

Lem 1.2. *Пусть $\mathcal{C}$ – категория, S – локализующее семейство, $\mathcal{B}$ – полная подкатегория в $\mathcal{C}$. Пусть также*

1. $S_{\mathcal{B}} = S \bigcap \mathbf{Mor}(\mathcal{B})$ *– локализующее семейство в $\mathcal{B}$.*

2. *У любого морфизма, заканчивающегося на объекте подкатегории $\mathcal{B}$ мы можем поправить начало так, чтобы он начинался тоже в $\mathcal{B}$.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "s"] & \\ \underset{\in\mathcal{B}}{X''} \arrow[u, "t"] \arrow[r] & \underset{\in\mathcal{B}}{X} \end{tikzcd}$$

$$\forall s \in S \quad s\colon X' \to \underset{\in\mathcal{B}}{X} \qquad \exists t \in S \quad t\colon \underset{\in\mathcal{B}}{X''} \to X' \qquad st \in S_{\mathcal{B}}$$

2' *У любого морфизма, начинающегося на объекте подкатегории $\mathcal{B}$ мы можем поправить начало так, чтобы он заканчивался тоже в $\mathcal{B}$.*[1]

$$\begin{tikzcd} \underset{\in\mathcal{B}}{X'} \arrow[d] \arrow[dr, "s"] & \\ \underset{\in\mathcal{B}}{X''} & X \arrow[l, "t"'] \end{tikzcd}$$

Тогда имеется строгое и полное вложение $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$

Доказательство.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(A, B)$$

$\blacktriangle\mathsf{mono(inj)}$ Покажем, что, если два морфизма представлялись эквивалентными домиками в $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$, то они останутся эквивалентными в $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Изобразим последовательность домиков на диаграмме.

$$\begin{tikzcd} & & \underset{\in\mathcal{B}}{D} \arrow[d, "t"] & & \\ & & X'' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr] & & \\ & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[drrr] & & X' \arrow[dlll] \arrow[dr] & \\ \underset{\in\mathcal{B}}{A} & & & & \underset{\in\mathcal{B}}{B} \end{tikzcd}$$

$$rs \in S \quad A \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \exists D \subset \mathcal{B} \quad D \xrightarrow{t} X'' \quad rst \in S$$

$\blacktriangle\mathsf{epi(surj)}$ То есть любой домик, полностью лежащий в $\mathcal{B}$ поднимается в объемлющую категорию $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & \underset{\in\mathcal{B}}{X'} \arrow[d] & \\ & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr] & \\ \underset{\in\mathcal{B}}{A} & & \underset{\in\mathcal{B}}{B} \end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

[1] и тогда в доказательстве нужно будет применять левые домики

Теперь применим 1.2 для $\mathcal{A} = \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ и $\mathcal{B} = \mathcal{K}^+(\mathcal{R})$ и $\mathsf{S} = \mathsf{QIS}_{\mathcal{A}}$. Тогда

Claim 1.3. $\exists \psi\colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathsf{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ *– эквивалентность категорий.*[2]

[2] Функтор взятия резольвенты

def 1.4. Производный функтор точного слева $\mathcal{F}$, действующего между двумя абелевыми категориями – это **пара** $(\mathcal{D}^+\mathcal{F}, \varepsilon_{\mathcal{F}})$ точного в смысле производной категории [3] функтора и естественного преобразования композиций функтора $\mathcal{F}$ с функторами локализации $\varepsilon_{\mathcal{F}} \colon Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F} \to \mathcal{D}^+\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}}$, обладающая следующим универсальным свойством для любого точного в смысле производной категории функтора G:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}^+(\mathcal{R}) \arrow[r, "\mathcal{K}^+\mathcal{F}"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\
\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathcal{D}^+\mathcal{F}"] \arrow[r, dashed, bend right, "G"'] & \mathcal{D}^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr] & \mathcal{D}^+\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}} \arrow[d, dashed, "\exists!\eta"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

Com 1.5. *Очевидно, что $\mathcal{D}^+\mathcal{F}$ – единственный.*

Thr 1.6. *Если точный слева функтор допускает класс приспособленных объектов $\mathcal{R}$, то $\exists!$ $(\mathcal{D}^+\mathcal{F}, \varepsilon_{\mathcal{F}})$.*

Построение. На этом шаге мы показываем **точность в смысле производной категории**. Будем использовать полученную ранее эквивалентность категорий $\psi \colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, обратную $\phi \colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}]$ и два естественных изоморфизма [4] $\alpha \colon \mathrm{Id} \to \phi \circ \psi$ и $\beta \colon \psi \circ \phi \to \mathrm{Id}$. Мы определим вспомогательный функтор $\widetilde{\mathcal{F}} \colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ просто почленным действием, а производный функтор как $\mathcal{D}^+\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}} \circ \phi$.
План:

1. *Точность $\mathcal{D}^+\mathcal{F}$*[5]

   Lem 1.7. *Пусть Δ – треугольник в локализованной гомотопической подкатегории приспособленных объектов. Предположим, что он изоморфен выделенному треугольнику в производной категории*[6]*. Тогда он будет изоморфен выделенному треугольнику в локализованной гомотопической подкатегории приспособленных объектов.*

   $$\mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}^{-1}] \ni \Delta \cong \Delta' \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \Delta \cong \widetilde{\Delta'} \in \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}^{-1}]$$

   Доказательство.

   $$\begin{tikzcd}
\Delta\colon & X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & X[1] \arrow[d, "\phi[1]"] \\
\widetilde{\Delta}\colon & \widetilde{X} \arrow[r, "f"] & \widetilde{Y} \arrow[r] & C(f) \arrow[r] & \widetilde{X}[1]
\end{tikzcd}$$

   Пусть морфизм ϕ представляется в производной категории домиком

   $$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "r"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

   Тогда существует морфизм между конусами

   $$Y \oplus S[1] = C(r) \xrightarrow{(\psi,\phi,q)} C(f) = \widetilde{Y} \oplus \widetilde{X}[1]$$

   Теперь можем построить изоморфизм треугольников

   $$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, "q"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "id"] & C(r) \arrow[d, "\theta^{-1}\circ(\psi,\phi,q)"] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

   $\Rightarrow \mathcal{D}^+\mathcal{F}$ – точный. ■

[3] то есть переводящего выделенные треугольники в выделенные

[4] "единица и коединица сопряжения"

[5] **в смысле производной категории**

[6] Так как мы не вводили понятия треангулированной категории, то для нас просто треугольником будет набор из трёх объектов и трёх морфизмов, а выделенным треугольником будет такой набор, где $Z = C(X \to Y)$

2. *Построение $\varepsilon_{\mathcal{F}}$, единственность.* Для построения естественного изоморфизма, возьмём некоторый комплекс, вложим его в производную категорию и выберем его резольвенту, подбором квазиизоморфного ему. То есть

$$\mathsf{X} \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \quad \mathsf{Y} = \phi \mathsf{Q}_{\mathcal{A}}(\mathsf{X})$$

Квазиизоморфизм $\beta \colon \mathsf{X} \to \psi\phi(\mathsf{X}) = \psi(\mathsf{Y})$ представляется домиком

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Z} & & & & \mathcal{K}^+\mathcal{F}(\mathsf{Z}) & \\ \mathsf{X} \arrow[ur] & & \mathsf{Y} \arrow[ul] & \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{\mathcal{K}^+\mathcal{F}}"] & \mathcal{K}^+\mathcal{F}\mathsf{X} \arrow[ur] & & \mathcal{K}^+\mathcal{F}\mathsf{Y} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{F}} \colon \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(\mathsf{X}) \to \mathsf{Q}_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(\mathsf{Y}) = \widetilde{\mathcal{F}}\mathsf{Q}_{\mathcal{R}}(\mathsf{Y}) = \mathcal{D}^+\mathcal{F}\mathsf{Q}_{\mathcal{A}}(\mathsf{Y})$$

Далее мы проверим, что таким образом опредлённый морфизм является естественным преобразованием функторов и не зависит от выбора Z.

3. *Универсальность to be continued...*