Семинар 1
(Темы: Спектральная последовательность. Дополнительные примеры.)

Ex 1.1 (Элементарный пример, нефильтрованный)**.** *Самым простым примером спектральной последовательности является любой комплекс* $K_\bullet \in \mathsf{Kom}(\mathcal{A})$*. Он естественно имеет дифферициал* $d_i^K \colon K_i \to K_{i+1}$*, поэтому на нулевом листе* $d_0 = d^K$*. Пусть* $E_0^\bullet = K_\bullet$*, тогда* $E_1^\bullet = H^\bullet(C_\bullet)$*, дифференциал индуцирует нулевые отображения на когомологиях, поэтому на первом листе мы имеем* $d_1 = 0$*. Из этого следует, что* $E_2 = E_\infty^\bullet$ *и* $d_n = 0\ \forall\ n \geqslant 2$*, таким образом, получаем следующую спектральную последовательность:*

- $E_0 = K_\bullet$
- $E_r = H(K_\bullet)\ \forall\ r \geqslant 1$

Такая спектральная последовательность стабилизируется на первом листе, так как нетривиальные дифференциалы присутствовали лишь на нулевом.

1.1 Доказательство пять-леммы с помощью спектральной последовательности

Ex 1.2 (Пять-лемма)**.** *Спектральная последовательность по столбцам сходится к 0, поэтому средняя стрелка на второй диаграмме ниже – изоморфизм.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & B \arrow[r] \arrow[u, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & \ker\beta \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0
\end{tikzcd}$$

1.2 Доказательство леммы о змее с помощью спектральной последовательности

Ex 1.3. *Докажем лемму о змее* **??***, используя спектральную последовательность. Диаграмма в этой лемме представляет собой двойной комплекс* $C^{\bullet\bullet}$ *с точными строками в абелевой категории.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{00} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & C^{10} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C^{20} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{01} \arrow[r] & C^{11} \arrow[r] & C^{21} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Для такого комплекса существуют две спектральные последовательности, которые будут сходиться к когомологиям тотального комплекса $H^{p+q}(\mathsf{Tot}(C^{\bullet\bullet}))$*.*
Нулевые листы этих последовательностей, естественно, $E_0^{pq} = C^{pq}$ *и* $E_0^{pq} = C^{qp}$*:*

$$\begin{array}{|ccccc}
0 & \to & 0 & \to & 0 \\
C^{20} & \to & C^{21} & \to & 0 \\
C^{10} & \to & C^{11} & \to & 0 \\
C^{00} & \to & C^{01} & \to & 0 \\
0 & \to & 0 & \to & 0 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|ccccccccc}
0\to & 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\
0\to & C^{01} & \to & C^{11} & \to & C^{21} & \to & 0 \\
0\to & C^{00} & \to & C^{10} & \to & C^{20} & \to & 0 \\ \hline
\end{array}$$

1.3 Доказательство расширенной пять-леммы с помощью спектральной последовательности

Ex 1.4.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \\
A \arrow[r] \arrow[u, two heads] & B \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"] & D \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & E \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

При фильтрации по строкам получаем следующие листы спектральной последовательности: Теперь фильтрация по столбцам:

$$\begin{array}{|ccc}
0 & 0 & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\ker\gamma & \operatorname{coker}\gamma & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\ker\beta & \operatorname{coker}\beta & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\ker\alpha & \operatorname{coker}\alpha & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \arrow[d, phantom] \\
\ker\gamma/\ker\beta & 0 \\
0 & 0 \arrow[uul] \\
0 & \ker(\operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta) \arrow[uul, "\delta^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{array}{|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

1.4 Что-то о нётеровых кольцах

Несколько примеров фильтрации из коммутативной алгебры.

Ex 1.5 (Фильтрация кольца)**.** *Убывающей мкльтипликативной фильрацией кольца* R *называется убывающая последовательность идеалов вида*

$$R = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

Удовлетворяющая условию $I_i I_j \subset I_{i+j}\ \forall\ i, j$. *Эта конструкция чаще всего используется, в случае, когда* $I_j = I^j$ *– степени одного идеала* I, *это называется* I*-адической фильтрацией. В приложениях чаще всего встречается ситуация локального нётерова кольца и его максимального идеала.*
Полезно обобщить эту конструкцию на $R-\mathrm{mod}$ *иизучать фильтрации модулей*

$$M \supset IM \supset I^2M \supset \dots$$

Однако, пересекая члены такой фильтрации с некоторым подмодулем $M' \subset M$ *в общем случае мы не получим* I*-адическую фильтрацию* M'.

$$
\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A' \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & E' \arrow[u] \\
A \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & E \arrow[u] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A' & 0 & 0 & 0 & E' \\
A & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul] & E \arrow[uul] \\
0 & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
0 & \operatorname{im} \varepsilon \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
? \arrow[u] & ? \arrow[u] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
\ker \alpha \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A' & 0 & 0 & 0 & E' \\
A & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul] & E \arrow[uul] \\
0 & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul] & 0 \arrow[uul]
\end{tikzcd}
$$