

# Конспект лекций по гомологической алгебре

Лектор: Монченко Н. М.

2023/05/10

## Содержание

1	Введение, комплекс, резольвента, проективный объект	2
2	Проективная резольвента, гомотопическая категория	6
3	Конус	9
4	Проективные резольвенты в гомотопической категории, абелевость гомотопической категории	12
5	Локализация, условия Оре	14
6	Локализация гомотопической категории и производная категория	18
7	Строгое и полное вложение в производную категорию	21
7.1	Каноническое вложение в производную категорию	21
7.2	Мотивировка	22
7.3	Производный функтор, класс приспособленных объектов	23
8	Производный функтор, приспособленный класс объектов, выделенные треугольники	24
9	Производный функтор, классический Ext, сложение по Бэру	28
9.1	Производный функтор	28
9.2	Функтор Ext по Йонедэ	30
9.3	Сложение по Бэру	31
9.4	Сложение Ext длины n	32
10	Класс приспособленных объектов, градуированная алгебра Ext	33
10.1	Умножение Ext' ов	33
11	Ext, gldim, pd, фильтрованная категория	35
11.1	Ext как производный функтор	36
12	Функтор Tor	38
13	Спектральные последовательности	40
13.1	Фильтрованный комплекс	41
13.2	Лирическое отступление	43
13.3	Двойной комплекс	43
A	Диаграммный поиск	45
B	Расслоённые суммы и произведения	49
C	Спектральная последовательность. Дополнительные примеры.	51
C.1	Доказательство леммы о змее с помощью спектральной последовательности	51
C.2	Что-то о нётеровых кольцах	51

**Семинар 1**

(Темы: Введение, комплекс, резольвента, проективный объект)

Рассмотрим следующую задачу. Пусть есть какое-то поле  $k$  и кольцо многочленов над ним  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ . Дана система уравнений с элементами из кольца

$$\sum_i a_{ij} y_i = 0, \quad a_{ij} \in R.$$

Множеством решений этой системы будет какой-то модуль  $M$ , определяющийся своими образующими и соотношениями. Соотношения, вообще говоря, могут быть достаточно сложно устроены. Предлагается воспользоваться следующим фактом.

**Prop 1.1.** *Любой модуль — это фактормодуль свободного модуля.*

Иначе говоря, существует свободный модуль  $F_1$  вместе с эпиморфизмом  $f_1 : F_1 \rightarrow M$ . Соотношения образующих тогда будут определяться ядром  $\text{Ker } f_1$  этого самого эпиморфизма. Однако данное ядро может быть также сложно устроено. Повторим процесс и накроем и  $\text{Ker } f_1$  свободным модулем. Продолжая получим набор коротких точных последовательностей.

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Ker } f_1 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} M \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \text{Ker } f_2 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} \text{Ker } f_1 \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \text{Ker } f_3 \longrightarrow F_3 \xrightarrow{f_3} \text{Ker } f_2 \longrightarrow 0 \\ &\dots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Этот процесс повторять будем до тех пор, пока не получим  $\text{Ker } f_- = F_-$ . Вопрос состоит в том сколько раз придётся повторить это. Ответ даёт следующая теорема.

**Thr 1.2** (Теорема Гильберта о сизигиях). *Для кольца многочленов от  $n$  переменных свободная резольвента имеет длину не более  $n$ .*

Таким образом, модулю решений нашего уравнения можно сопоставить длинную точную последовательность, называющуюся свободной (состоящей из свободных модулей) резольвентой модуля  $M$ .

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

То, что мы по сути сделали — это "приблизили" наш сложно устроенный модуль  $M$  простыми свободными модулями  $F_i$ . Приведём обобщение этих рассуждений и введём необходимые определения.

**def 1.3.** Пусть  $\mathcal{A}$  — абелева категория. Её категорией комплексов  $\text{Kom}(\mathcal{A})$  называется категория, объекты в которой — цепные комплексы — последовательности объектов и морфизмов (дифференциалов)  $(K^i, d^i)$

$$\dots \longrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots$$

где  $d^{i+1} \circ d^i = 0$  ( $\text{Im } d^i \subset \text{Ker } d^{i+1}$ ). Комплекс с возрастающей индексацией (как выше) называется когомологическим. Соответственно с убывающей — гомологическим. Морфизмы  $\text{Hom}_{\text{Kom}(\mathcal{A})}((K^\bullet, d_K^\bullet), (L^\bullet, d_L^\bullet))$  — наборы морфизмов  $f^i \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K^i, L^i)$ , делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \xrightarrow{d_K^{i-1}} & K^i & \xrightarrow{d_K^i} & K^{i+1} \xrightarrow{d_K^{i+1}} \dots \\ & & \downarrow f_K^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ \dots & \longrightarrow & L^{i-1} & \xrightarrow{d_L^{i-1}} & L^i & \xrightarrow{d_L^i} & L^{i+1} \xrightarrow{d_L^{i+1}} \dots \end{array} \tag{1.3}$$

$\text{Kom}^{\leq}(\mathcal{A})$ ,  $\text{Kom}^{\geq}(\mathcal{A})$ ,  $\text{Kom}^b(\mathcal{A})$  соответственно обозначают ограниченные справа, слева, с двух сторон комплексы.

Естественный вопрос, который можно задать к определению 1.3 — выполняется ли  $\text{Im } d^i = \text{Ker } d^{i+1}$  (тогда комплекс — точная последовательность) и если не выполняется, то насколько. Ответ на этот вопрос даёт следующее определение.

**def 1.4.** Назовём

- кограницей комплекса  $B^i(K^\bullet) = \text{Im } d^{i-1}$ .

- коциклом комплекса  $Z^i(K^\bullet) = \text{Ker } d^i$ .
- когомологией комплекса  $H^i(K^\bullet) = Z^i(K^\bullet)/B^i(K^\bullet)$

Комплекс с нулевыми когомологиями будем называть ациклическим.<sup>1</sup>

По существу, мы определили функторы из категории комплексов  $\text{Kom}(\mathcal{A})$  в  $\mathcal{A}$ . Это следствие того, что морфизмы в  $\text{Kom}(\mathcal{A})$  переводят кограницы (коциклы) в кограницы (коциклы), т. к. диаграмма (1.3) коммутует. Соответственно любой морфизм  $f \in \text{Hom}_{\text{Kom}(\mathcal{A})}$  индуцирует морфизмы на когомологиях  $f^*$ . Кроме того, существует функтор естественного вложения, который объекту  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  сопоставляет комплекс с объектом  $A$  в нулевом члене.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \text{Kom}(\mathcal{A}) & & & \\ & a \longmapsto \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow & a & \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots & & & \\ & & & \parallel & & & \\ & & & H^0(\mathcal{F}(a)) & & & \end{array}$$

Из вида функтора очевидно существование естественного изоморфизма  $H^0 \circ \mathcal{F} \cong \text{id}_{\mathcal{A}}$ . Отсюда следует

**Prop 1.5.**  $\mathcal{A}$  — полная подкатегория в  $\text{Kom}(\mathcal{A})$ .<sup>2</sup>

Теперь вернемся к исходной задаче. Выбор резольвенты (1.2) в общем случае не единственный. Поэтому мы хотим каким-то образом отождествить объект со всеми его резольвентами. Для этого просто запишем морфизм в крайний член 1.2 в виде морфизма комплексов

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{n+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Теперь зададимся вопросом: что между двумя получившимися комплексами общего? Про комплекс  $\mathcal{F}(M)$  мы знаем все. Он точен везде, кроме нулевого члена, а в нулевом члене его когомология  $M$ . Верхний комплекс по построению также точен везде, кроме нулевого члена. А в нулевом члене его кограница  $\text{Im } 0 = 0$ , коцикл  $\text{Ker } d_F^2 = \text{Im } \varepsilon = M$ , т. к. исходная резольвента (1.2) точна. Отсюда  $H^0(F^\bullet) = M$ . Тогда индуцированный морфизм на когомологиях  $\varepsilon^* = \text{Id}_M$  — изоморфизм. В таком случае мы называем  $\varepsilon$  квазиизоморфизмом.

**def 1.6.** Морфизм  $f \in \text{Hom}_{\text{Kom}(\mathcal{A})}$  называется квазиизоморфизмом, если его индуцированные морфизмы  $f^*$  на когомологиях — изоморфизмы.

**Prop 1.7.** В абелевой категории объект квазиизоморфен всем своим резольвентам.

Логично было бы тогда отождествлять объект с резольвентами при помощи квазиизоморфизма. Проблема в том, что последний отношением эквивалентности не является, поэтому необходимо рассматривать другую категорию (производную), в которой все квазиизоморфизмы являются изоморфизмами и, следовательно, квазиизоморфность — отношение эквивалентности. Приведём пример, почему квазиизоморфизмы не являются отношением эквивалентности.

**Ex 1.8.** В категории  $\mathbb{Z}$ -мод проективная резольвента  $\mathbb{Z}_2$  может выглядеть следующим образом:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Рассматривая соответствующий связующий квазиизоморфизм

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\cdot} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

получаем, что  $\mathbb{Z}_2$  квазиизоморфен своей резольвенте. Но не существует нетривиального морфизма  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , откуда резольвента не квазиизоморфна  $\mathbb{Z}_2$ . Т. е. нарушена симметричность.

На самом деле нарушена и транзитивность. Действительно, пусть существуют два квазиизоморфизма  $K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  и  $U^\bullet \rightarrow L^\bullet$ . Но никто не гарантирует, что существует квазиизоморфизм  $K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ , ведь обращать мы эти морфизмы в

<sup>1</sup>Таким образом, когомологии — мера неточности комплекса.

<sup>2</sup>доказательство см. 7.2

общем случае не можем. **Рассмотрим теперь другую задачу.** Пусть дан точный слева функтор между абелевыми категориями  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  и короткая точная последовательность из  $\mathcal{A}$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \mathcal{F} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}(B) & \longrightarrow & \mathcal{F}(C) \longrightarrow \dots? \end{array}$$

После применения функтора  $F$  ноль справа исчезнет. Задача следующая: можно ли как-то канонически точно продолжить получившуюся последовательность вправо? Для начала упростим задачу, задавшись подобным вопросом для конкретного функтора: функтора  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot)$ . Когда он точен? Ответ такой: он точен тогда и только тогда, когда  $P$  — проективный объект.

**def 1.9.** Объект  $P$  категории  $\mathcal{A}$  называется проективным, если для любого эпиморфизма  $\pi : A \rightarrow B$  с морфизмом  $p : P \rightarrow B$  существует морфизм, делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists \swarrow & \downarrow p & \\ A & \xrightarrow{\pi} & B \end{array} \quad (1.4)$$

**Prop 1.10.** Функтор  $\text{Hom}(P, \cdot)$  точен  $\iff P$  — проективный объект.

*Доказательство.* Докажем сначала, что функтор  $\text{Hom}(P, \cdot)$  всегда точен слева. Пусть последовательность

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \longrightarrow 0$$

точна. Докажем точность следующей последовательности.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P, A) \xrightarrow{a \circ} \text{Hom}(P, B) \xrightarrow{b \circ} \text{Hom}(P, C)$$

Пусть  $a \circ f : P \rightarrow B$  равна нулю. Но т. к.  $a$  — мономорфизм из точности исходной последовательности, то и  $f = 0$ , откуда  $a \circ$  — инъективный. Это доказывает точность в первом члене. Из точности исходной последовательности  $b \circ a \circ f = 0$  для любого морфизма  $f : P \rightarrow A$ . Это доказывает вложение  $\text{Im } a \circ \subset \text{Ker } b \circ$ . Пусть теперь  $f \in \text{Ker } b \circ$ . В исходной точной последовательности  $A = \text{Ker } b$  и по универсальному свойству ядра существует единственный морфизм  $f'$ , делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow f' & \downarrow f & \searrow 0 & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{a} & B \xrightarrow{b} C \end{array} \quad (1.5)$$

Отсюда любой  $f \in \text{Ker } b \circ$  поднимается до  $f' \in \text{Hom}(P, A)$ , что доказывает вложение  $\text{Ker } b \circ \subset \text{Im } a \circ$  и, следовательно, точность во втором члене. Докажем, что  $\text{Hom}(P, -)$  — точный  $\iff P$  — проективный. Если  $P$  — проективный. В левую сторону это очевидно: если  $P$  — проективный, то любой морфизм из  $\text{Hom}(P, C)$  поднимается до морфизма из  $\text{Hom}(P, B)$  по определению проективного объекта. Обратно, если  $\text{Hom}(P, -)$  точный, то применяя его к точной последовательности  $A \rightarrow B \rightarrow 0$  получим, что для любого морфизма  $p \in \text{Hom}(P, B)$  будет морфизм из  $\text{Hom}(P, A)$ , делающий диаграмму (1.5) коммутативной. ■

Встает также вопрос о том, как выглядят проективные объекты в интересующей нас категории  $R\text{-mod}$ . Ответ дает следующий критерий.

**Prop 1.11.** В категории  $R\text{-mod}$   $P$  — проективный  $\iff$  существует  $M$  такой, что  $M \oplus P$  — свободный модуль.

**Com 1.12.** Если  $P$  — свободный, то, очевидно, он и проективный. Действительно, достаточно тогда задать искомый морфизм в (1.4) на образующих. Может возникнуть мысль, что только такие модули проективными и будут. Приведем контрпример.

**Ex 1.13** (Проективный несвободный модуль). Рассмотрим категорию  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\text{-mod}$ . Само по себе  $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  является, кроме кольца,  $R$ -модулем над собой. Более того, он свободный как  $R$ -модуль. Вспомним разложение

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

где ни  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , ни  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  свободными как  $R$ -модули не являются. Однако по критерию 1.11 оба будут проективными.

*Доказательство предложения 1.11.* ( $\Rightarrow$ ) По предложению 1.1  $P$  накрывается свободным модулем. Вспомним тогда диаграмму (1.4).

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \exists f \swarrow & \downarrow \text{id} & \\ F & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

И получим существование свободного модуля  $F$  с парой морфизмов  $f, g$ , дающих  $gf = \text{id}_M$ . Покажем, что  $F \cong P \oplus M$ , где  $M$  — какой-то  $R$ -модуль. Предлагается использовать следующее утверждение.

**Prop 1.14** (Splitting lemma). *Пусть дана короткая точная последовательность.*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \longrightarrow 0$$

$B \cong A \oplus C$  тогда и только тогда, когда существует  $g$  такой, что  $g \circ a = \text{id}$  или  $b \circ g = \text{id}$ .

В нашем случае применение этого утверждения к точной последовательности ниже даёт  $P \oplus \text{Ker } f \cong F$ .

$$0 \longrightarrow \text{Ker } g \hookrightarrow F \xrightleftharpoons[g]{f} P \longrightarrow 0$$

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $P \oplus M$  — свободный модуль,  $\pi : P \oplus M \rightarrow P$  — каноническая проекция. Выше мы отметили, что для свободного модуля утверждение очевидно. Тогда  $f\pi$  поднимается до  $h : P \oplus M \rightarrow A$ . Применим каноническое вложение бипроизведения  $i$  и получим  $f\pi i = ghi$ , откуда  $f = ghi$  и  $hi$  — искомый морфизм.

$$\begin{array}{ccc} & \overset{i}{\curvearrowright} & \\ M \oplus P & \xrightarrow{\pi} & P \\ \downarrow h & \searrow f\pi & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

■

Понятие, двойственное проективному объекту — инъективный объект.

**def 1.15.** Объект  $I$  называется инъективным, если для любых двух объектов с мономорфизмом  $i : A \rightarrow B$  и морфизмом  $p : A \rightarrow I$  существует морфизм  $B \rightarrow I$ , делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} & & I \\ & \nearrow p & \uparrow \exists \\ A & \xrightarrow{i} & B \end{array} \quad (1.6)$$

Соответствующее двойственное утверждение.

**Prop 1.16.** *Функтор  $\text{Hom}(-, I)$  — точен  $\iff I$  — инъективный.*

**Семинар 2****(Темы: Проективная резольвента, гомотопическая категория)**

Вспомним, что в резольвенте (1.2) мы накрывали модуль свободным. Как мы увидели, категорным "аналогом" свободного модуля может быть проективный объект, причем утверждение 1.11 говорит о том, что эти два понятия не совпадают. Введём понятие, необходимое для повторения процесса (1.1) в абстрактной категории.

**def 2.1.** Говорят, что в категории достаточно много проективных (инъективных) объектов, если для любого объекта  $A \in \mathcal{C}$  существует "накрывающий" его ("вкладываемый" в него) проективный (инъективный) объект  $P$  с эпиморфизмом  $p : P \rightarrow A$  (мономорфизмом  $i : A \rightarrow I$ ).

Видно, что в категории модулей проективных объектов достаточно много. Тогда процесс построения проективной (инъективной) резольвенты абсолютно аналогичен (1.2). Опять же, верно аналогичное 1.7 утверждение о том, что объект квазиизоморфен всем своим проективным резольвентам. Еще раз посмотрим на какой-нибудь пример проективной резольвенты.

**Ex 2.2.** Рассмотрим модули над кольцом  $R = \mathbb{C}[x]$ . Построим проективную резольвенту<sup>3</sup>  $\mathbb{C}$  как  $R$ -модуля.<sup>4</sup>

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[x] \xrightarrow{x \cdot} \mathbb{C}[x] \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

**Ex 2.3.** Пример поинтереснее состоит в построении бесконечной проективной резольвенты. Положим  $A = \mathbb{C}[x]/(x^2) - \text{mod}$ . Тогда одной из проективных резольвент  $\mathbb{C}$  как  $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ -модуля будет выглядеть следующим образом:

$$\dots \xrightarrow{x \cdot} \mathbb{C}[x]/(x^2) \xrightarrow{x \cdot} \mathbb{C}[x]/(x^2) \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Последний пример мотивирует ввести следующее определение<sup>5</sup>

**def 2.4.** Проективной размерностью объекта  $\text{pd } M$  называют длину его минимальной проективной резольвенты. Если объект не имеет конечной проективной резольвенты, то говорят, что  $\text{pd } M = \infty$ .

Вспомним дуальное понятие инъективного объекта 1.15. В отличие от проективных объектов, для них не существует общего аналога критерия 1.11. Попробуем рассмотреть инъективные объекты в категории модулей над кольцом  $\mathbb{Z}$ . В данной категории рассмотрим семейство объектов, являющихся группами. Оказывается, что все инъективные объекты в данном семействе исчерпываются делимыми группами.

**def 2.5.** Назовём  $G$  делимой группой, если  $\forall x \in G, n \in \mathbb{N} \exists y \in G : ny = x$ .

**Prop 2.6.**  $G$  — инъективный  $\mathbb{Z}$ -модуль  $\iff G$  — делимая группа.

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) Пусть  $G$  не делимая. Попробуем поднять некоторый морфизм  $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$  до морфизма  $\rightarrow G$  с естественным вложением  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow f & \uparrow \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Q} \end{array}$$

Раз  $G$  не делимая, то существуют  $x \in G, n \in \mathbb{Z}$  такие, что  $\forall y \in G \quad nx \neq y$ . В качестве морфизма  $f$  возьмём тот, что отправляет единичный элемент в найденный  $x$ . Тогда существование искомого морфизма  $g : \mathbb{Q} \rightarrow G$  невозможно. Действительно, тогда  $x = f(1) = gi(1) = gi(n)/n = x$ , откуда  $nx = gi(n)$ . ( $\Leftarrow$ ) Теперь  $G$  — делимая группа.  $i : A \rightarrow B$  — мономорфизм и  $f : A \rightarrow G$  — какой-то морфизм, который мы хотим поднять. Приведём следующую конструкцию. Рассмотрим множество расширений  $(A', \varphi')$  нашего морфизма:  $A \subset A' \subset B, \varphi'|_A = \varphi$ . На данном множестве введём частичный порядок:  $(A', \varphi') \leq (A'', \varphi'')$  если  $A' \subset A''$  и  $\varphi''|_{A'} = \varphi'$ . По лемме Цорна существует максимальный элемент  $(B', \varphi_B)$ . Покажем, что  $B' = B$ , тогда окажется, что  $\varphi_B$  — искомый морфизм. Пусть  $B'$  и  $B$  не совпадают. Тогда существует  $x \in B/B'$ . Тут нам потребуется делимость  $G$ . Возможны два варианта.

- Пусть  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad nx \notin B'$ . Тогда полагая  $\varphi_B(x) = 0$  получаем продолжение  $\varphi_B$  на  $\langle B', x \rangle$ , что противоречит максимальности.
- Пусть  $\exists n \in \mathbb{Z}$  такой, что  $nx \in B'$ . Тогда  $\varphi_B(nx) = g$ , причем в силу делимости  $G$  существует  $g' \in G$  такое, что  $ng' = g$ . Полагая  $\varphi_B(x) = g'$  снова получим продолжение, противоречащее максимальности.

<sup>3</sup>Это частный пример т. н. резольвенты Кошуля (Koszul)

<sup>4</sup> $\varepsilon_0$  — evaluation at zero

<sup>5</sup>далее будет дано ещё одно определение проективной размерности 11.5

■

**Prop 2.7.** В категории  $\mathbb{Z}$ -модулей достаточно инъективных объектов.

*Доказательство.* Построение инъективного объекта для  $M$  иллюстрируется диаграммой.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ker } \pi & & \\
 \downarrow & \searrow f & \\
 \oplus \mathbb{Z} e_i & \hookrightarrow & \oplus \mathbb{Q} e_i \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \\
 M & \hookrightarrow & \text{Coker } f
 \end{array} \quad (2.1)$$

Утверждение следует из следующего факта:

**Prop 2.8.** Факторгруппа делимой группы — тоже делимая группа.

Тогда  $\text{Coker } f$  будет делимым объектом как фактор  $\oplus \mathbb{Q} e_i$

■

Остановимся в рассуждениях с инъективными и проективными объектами. Следующее определение является первым шагом к построению производной категории.

**def 2.9.** Морфизм  $f^\bullet : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  называется гомотопным нулю  $f \sim 0$ , если существуют  $h^n : K^n \rightarrow L^{n-1}$  такие, что  $f^n = d_L^{n+1} \circ h^{n+1} + h^n \circ d_K^n$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \xrightarrow{d_K^i} & K^i & \xrightarrow{d_K^{i+1}} & K^{i+1} & \xrightarrow{d_K^{i+2}} & K^{i+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} & & \downarrow f^{i+2} & & \\
 \dots & \longrightarrow & L^{i-1} & \xrightarrow{d_L^i} & L^i & \xrightarrow{d_L^{i+1}} & L^{i+1} & \xrightarrow{d_L^{i+2}} & L^{i+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \swarrow h^i & & \swarrow h^{i+1} & & \swarrow h^{i+2} & & & & 
 \end{array}$$

Два отображения  $f^\bullet, g^\bullet$  комплексов называются гомотопически эквивалентными  $f \sim g$ , если  $f - g \sim 0$ .

**Prop 2.10.**

- Гомотопные морфизмы образуют идеал. Если  $f \sim 0$ , то для любых компонент с ним морфизмов  $g, h$  верно  $gf \sim 0, fh \sim 0$ .
- Гомотопически эквивалентные морфизмы комплексов индуцируют одинаковые морфизмы на когомологиях.

*Доказательство.* Для ясности не обозначая индексов приведём для первого пункта следующие выкладки.

$$gf = g(hd + dh) = ghd + gdh = ghd + dgh,$$

где последнее равенство сделано из коммутативности дифференциалов с морфизмами комплексов. Тогда  $gh$  — морфизм, из которого следует гомотопичность нулю. Для второго пункта в силу линейности достаточно доказать, что гомотопное нулю отображение индуцирует нулевое отображение на когомологиях. Пусть  $x \in \text{Ker } d_K^{i+1}$ . Тогда

$$f^i(x) = d_L^i h^i(x) + h^{i+1} d_L^{i+1}(x),$$

где первый член в когомологиях будет равен нулю, т. к.  $d_L^i h^i(x) \in \text{Im } d_L^i$ , а второй — т. к. дифференциал действует на элемент из ядра. ■

Теперь заменим все наши морфизмы на соответствующие классы эквивалентности по отношению гомотопности и получим новую категорию.

**def 2.11.** Гомотопическая категория  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  называется категорией с объектами из  $\text{Kom}(\mathcal{A})$  и морфизмами  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) = \text{Hom}_{\text{Kom}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) / \sim$ .

**Prop 2.12** (Лемма о зигзаге). Пусть есть короткая точная последовательность.

$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \longrightarrow 0$$

Тогда существуют связующие гомоморфизмы  $\delta^i : H^i(M^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(K^\bullet)$ , делающие следующую последовательность точной.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \dots \\
 & & & \swarrow & & & \\
 H^{i-1}(K^\bullet) & \xleftarrow{f^*} & H^{i-1}(L^\bullet) & \xrightarrow{g^*} & H^{i-1}(M^\bullet) & & \\
 & \nwarrow \delta^{i-1} & \nearrow & & & & \\
 H^i(K^\bullet) & \xleftarrow{f^*} & H^i(L^\bullet) & \xrightarrow{g^*} & H^i(M^\bullet) & & \\
 & \nwarrow \delta^i & \nearrow & & & & \\
 H^{i+1}(K^\bullet) & \xleftarrow{f^*} & H^{i+1}(L^\bullet) & \xrightarrow{g^*} & H^{i+1}(M^\bullet) & & \\
 & \nwarrow & \nearrow & & & & \\
 \dots & & & & & & 
 \end{array}$$

Добавить доказательство в приложение

**def 2.13.** Пусть даны два комплекса  $K^\bullet$  и  $L^\bullet$  над  $\mathcal{A}$ . Комплексом морфизмов называется комплекс с объектами  $\text{Hom}(K^\bullet, L^\bullet)^i = \prod_n \text{Hom}(K^n, L^{n+1})$ . Дифференциал на нём будет действовать следующим образом. Элемент из члена  $i$  нашего комплекса можно представить как набор морфизмов  $(\dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots)$ , действующих между членами  $K^\bullet$  и  $L^\bullet$ , отстоящих друг от друга на  $i$ . Тогда набор новых  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  в  $i+1$ -м члене получим как:

$$d^i : f_n \rightarrow g_n = df_n - (-1)^i f_{n+1}d$$



**Семинар 3**  
(Темы: Конус)

**def 3.1.** Сдвигом комплекса  $K[n]$  назовём комплекс с членами  $K[n]^i = K^{n+i}$  и дифференциалами  $d[n]^i = (-1)^n d^{i+n}$

**def 3.2.** Конусом  $C[f]^\bullet$  морфизма комплексов  $f^\bullet : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  называется комплекс с объектами  $C[f]^i = K^{i+1} \oplus L^i$  и дифференциалами  $d^i = \begin{pmatrix} -d_K^{i+1} & 0 \\ f & d_L^i \end{pmatrix}$ .

Простая выкладка (индексы опущены для простоты) показывает корректность определения:

$$d^2 = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ f & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} d^2 & 0 \\ -fd + df & d^2 \end{pmatrix} = 0$$

**Prop 3.3.** Для морфизма комплексов  $f : K \rightarrow L$  следующая последовательность точна.

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\pi} K[1] \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

*Доказательство.* Приведённая последовательность расщепима в каждом члене. ■

**Thr 3.4.**  $f$  — квазиизоморфизм тогда и только тогда, когда  $C(f)$  — ациклический.

*Доказательство.* Применим лемму о зигзаге A.4 к последовательности (3). ■

Дадим ещё несколько определений.

**def 3.5.**  $K^\bullet$  — расщепимый комплекс, если

$$\exists s^i : K^i \rightarrow K^{i-1} \quad : \quad dsd = d$$

**def 3.6.**  $K^\bullet$  — стягиваемый, если  $\text{id}_{K^\bullet} \sim 0$

**Ex 3.7** (простейший стягиваемый комплекс).

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow M \xrightarrow{\text{id}} M \rightarrow 0 \rightarrow \dots \quad (3.2)$$

**Ex 3.8** (простейший расщепимый комплекс).

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow \dots \quad (3.3)$$

**NB** он не стягиваемый

**Prop 3.9.**  $(K^\bullet - \text{стягиваемый}) \Rightarrow (K^\bullet - \text{расщепимый})$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \longrightarrow & K^i & \longrightarrow & K^{i+1} \longrightarrow \dots \\ & \swarrow s^{i-1} & \downarrow \text{id} & \swarrow s^i & \downarrow \text{id} & \swarrow s^{i+1} & \downarrow \text{id} \\ \dots & \longrightarrow & K^{i-1} & \longrightarrow & K^i & \longrightarrow & K^{i+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

**Prop 3.10.** Любой стягиваемый комплекс является суммой сдвигов комплексов вида 3.7.

**Prop 3.11.**  $K^\bullet - \text{стягиваемый} \Leftrightarrow K^\bullet - \text{расщепимый и ациклический.}$

**Prop 3.12.**  $K^\bullet - \text{ограниченный расщепимый комплекс} \Rightarrow K^\bullet \overset{\text{qis}}{\sim} H^\bullet(K^\bullet).$

Иными словами любой расщепимый комплекс представляется в виде суммы комплексов вида 3.2 и 3.3.

**def 3.13.** Морфизм комплексов  $f : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  называется гомотопической эквивалентностью, если  $\exists f : L^\bullet \rightarrow K^\bullet$  такой что  $fg \sim \text{id}_{K^\bullet}$  и  $gf \sim \text{id}_{L^\bullet}$ .

**Prop 3.14.**  $f - \text{гомотопическая эквивалентность} \Leftrightarrow C(f) - \text{стягиваем.}$

<sup>6</sup> Воспользуемся введённым ранее понятием комплекса морфизмов 2.13.<sup>7</sup>

$$\text{Hom}(K^\bullet, L^\bullet)^i = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(K^n, L^{n+i})$$

<sup>6</sup> существует более прямое доказательство этого утверждения, получаемое перемножением соответствующих матриц морфизмов, см. листочки

<sup>7</sup> Это конструкция представляет собой 'внутренний' Hom. Обычный функтор  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}$  действует из  $\mathcal{A}$  в категорию абелевых групп, а Hom из категории комплексов в категорию комплексов

$$\begin{aligned}\partial: g^m &= df^m - (-1)^i f^{m+1}d \\ f &\in \underline{\text{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)^i \\ \partial: f &\mapsto g\end{aligned}$$

**Com 3.15** (Циклы комплекса морфизмов).<sup>8</sup> В случае  $i = 0$  циклами морфизма комплексов будут просто морфизмы комплексов

$$\begin{aligned}Z^0(\underline{\text{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)) &= \text{Hom}(K^\bullet, L^\bullet) \\ df^n &= f^{n+1}d\end{aligned}$$

А для  $i > 0$  это будут морфизмы в сдвинутые комплексы, то есть

$$Z^i(\underline{\text{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)) = \text{Hom}(K^\bullet, L^\bullet[i])$$

**Com 3.16** (Границы комплекса морфизмов). В случае  $i = 0$  выражение для дифференциала принимает вид  $\partial: f^m \mapsto g^m = df^m - f^{m+1}d$ . Образом такого отображения будет гомотопный нулю морфизм. При  $i > 0$  получим гомотопные нулю морфизмы в сдвинутый комплекс.

$$B^i(\underline{\text{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)) = \{f \in \text{Hom}(K^\bullet, L^\bullet[i]) \mid f \sim 0\}$$

**Com 3.17** (Когомологии комплекса морфизмов). Наконец, когомологиями комплекса морфизмов будут гомотопический классы эквивалентности морфизмов комплексов.

$$H^i(\underline{\text{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)) = \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet[i])$$

Теперь можем доказывать утверждение 3.14.

*Доказательство.* Применим функтор  $\underline{\text{Hom}}(X, )$  к короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow L \rightarrow C(f) \rightarrow K[1] \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \underline{\text{Hom}}(X, L) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(X, C(f)) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(X, K[1]) \rightarrow 0$$

Имея теперь короткую точную последовательность комплексов, естественно применить лемму о зигзаге A.4. Получим длинную точную последовательность когомологий комплексов морфизмов, которые в силу 3.17 являются просто гомотопическими классами эквивалентности морфизмов в сдвинутый комплекс, то есть

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C(f)[-1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, K) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C(f)) \rightarrow \dots$$

$\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0$

■

**Lem 3.18.** Короткой точной последовательности комплексов соответствует длинная точная последовательность морфизмов в гомотопической категории

$$0 \rightarrow K^\bullet \rightarrow L^\bullet \rightarrow M^\bullet \rightarrow 0$$

$$\dots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, K^\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, L^\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, M^\bullet) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, M^\bullet[1]) \dots$$

**Prop 3.19** (Тактическая цель). Проективная резольвента – строгий функтор

$$\mathcal{P}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

$$A \mapsto P_\bullet(A)$$

**Lem 3.20.** Пусть  $P_\bullet$  – проективная резольвента  $M$ ,  $K_\bullet$  – какая-то резольвента  $N$ , также пусть есть морфизм  $f: M \rightarrow N$ . Тогда  $\exists g_\bullet: P_\bullet \rightarrow K_\bullet$ , такой, что  $H^0(g_\bullet) = f$

*Доказательство.* Просто построим этот морфизм комплексов. Дополним проективный комплекс до ациклического. Далее доказательство будем проводить по индукции. В силу проективности можем поднять  $f \in$  вдоль эпиморфизма из крайнего члена резольвенты  $K_\bullet$  до морфизма  $f_0$ . Аналогично далее все морфизмы диагональные морфизмы вида  $f_i \circ d_{i-1}^P$  поднимаются вдоль эпиморфизмов вида  $d_{i-1}^K: K_{i-1} \twoheadrightarrow K_{i-1}$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1^P} & P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & \searrow & \downarrow f_0 \searrow f \varepsilon \downarrow f \\ \dots & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & K_1 & \xrightarrow{d_1^K} & K_0 \twoheadrightarrow N \longrightarrow 0 \end{array}$$

■

<sup>8</sup> $i$ -ые циклы комплекса морфизмов это морфизмы комплексов первого комплекса в сдвиг на  $i$  второго

**Lem 3.21.** *Любой морфизм из ограниченного справа комплекса из проективных объектов в ациклический гомотопен нулю.*

*Доказательство.* Крайний морфизм строится по проективности  $P_0$  поднятием вдоль эпиморфизма на  $d_1 = \ker d_1$ . Получили базу индукции  $f_0 = d_1 h_0 - 0$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1^P} & P_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & \nearrow h_0 & \downarrow f_0 & & \downarrow f_{-1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & K_1 & \xrightarrow{d_1^K} & K_0 & \longrightarrow & K_{-1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Пусть теперь все гомотопии до  $i$ -й построены и  $f_{i-1} = h_{i-2}d - dh_{i-1}$ . Рассмотрим разность образов вертикальной и диагональной стрелок

$$g_i = f_i - h_{i-1}d_{i+1}$$

$$d_i g_i = d(f_i - h_{i-1}d) = f_{i-1}d - dh_{i-1}d = (h_{i-2}d - dh_{i-1})d - dh_{i-1}d = dh_{i-1}d - dh_{i-1}d = 0$$

■

## Семинар 4

(Темы: Проективные резольвенты в гомотопической категории, абелевость гомотопической категории)

Мы движемся к тому, чтобы определить производную категорию – это наша стратегическая цель. Наша тактическая цель на данном этапе – установить нужные нам свойства функтора взятия проективной резольвенты.

**Сом 4.1.** Проективная резольвента с точностью до гомотопической эквивалентности определена однозначно.

**Prop 4.2.** Пусть  $P_\bullet$  – проективная резольвента  $M$ ,  $Q_\bullet$  – какая-то резольвента  $N$ . Тогда

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$$

*Доказательство.* Рассмотрим связывающий морфизм между резольвентой и объектом как морфизм комплексов  $f: Q_\bullet \rightarrow N[0]$ , тогда его конус – это просто  $P_\bullet \rightarrow Q \rightarrow 0$ . Теперь, как обычно, имеем короткую точную последовательность, к которой можем применить функтор  $\underline{\mathrm{Hom}}(P_\bullet, -)$  и из леммы о зигзаге получим длинную точную последовательность:

$$Q_\bullet \rightarrow N[0] \rightarrow C(f) \rightarrow Q_\bullet[1]$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[-1]) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, Q_\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[0]) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, C(f)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[1]) \rightarrow \dots$$

Так как  $f$  – квазиизоморфизм, то  $C(f)$  – ациклический. В силу 3.21  $\forall g \in \mathrm{Hom}(P_\bullet, C(f)[i])$  выполнено, что  $g \sim 0$ . Также в  $\mathrm{Hom}(P_\bullet, N[0])$  нет нетривиальных гомотопий, они все пропускаются через 0. А также  $\mathrm{fd}_1 = 0$  и  $P_0/\mathrm{imd}_1 = M^9$ . Отсюда получаем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, Q_\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[0]) \cong \mathrm{Hom}(P_\bullet, N[0]) \cong \mathrm{Hom}(M, N)$$

■

**Corr 4.3.** Пусть  $P_\bullet^1, P_\bullet^2$  – проективные резольвенты  $M \Rightarrow P_\bullet^1 \sim P_\bullet^2$ .

**Corr 4.4.** Проективная резольвента от модуля – строгий полный функтор. 3.19

$$\mathcal{P}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

$$A \mapsto P_\bullet(A)$$

**Сом 4.5.**  $\mathcal{P}$  не является функтором в категорию комплексов, но является функтором в гомотопическую категорию.

**Сом 4.6.** Понятно, что категория комплексов является абелевой, так как все ядра и коядра можно брать почленно, однако гомотопическая категория абелевой, вообще говоря, не является.

$$\mathcal{A} \in \mathbf{Ab} \Rightarrow \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{A} \in \mathbf{Ab} \not\Rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

**Ex 4.7** (Потеря эпиморфности при переходе в гомотопическую категорию).  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  не является эпиморфизмом в  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $f$  – ерi

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0 \rightarrow \dots = A \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}_p & \rightarrow & 0 \rightarrow \dots = C \end{array}$$

В абелевой категории любой морфизм раскладывается в композицию топо и ерi.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow & \uparrow \\ & & \mathrm{im} f = B \end{array} \quad A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

Теперь снова рассмотрим точные тройки из последовательности с конусами, на диаграмме ниже дуговые стрелки гомотопны 0

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad} & B & \rightarrow & C(\alpha) \\ & \searrow & & & \\ C(\beta)[-1] & \rightarrow & B & \rightarrow & C \end{array}$$

<sup>9</sup>универсальность коядра гомоморфизмов групп

$$C(\beta)[-1] \rightarrow B \rightarrow C(\alpha)$$

Таким образом получили, что  $B$  – расщепим. Тогда, используя 3.12 мы можем представить его в виде

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B_{-1} & \longrightarrow & B_{-1} & \longrightarrow & B_{-1} \oplus \mathbb{Z} \\
 \downarrow & \nearrow h_0 & \downarrow & \nearrow k_0 & \downarrow \\
 B_0 & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & B_0 \\
 \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow & \nearrow k_1 & \downarrow \\
 B_1 \oplus \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

$$s = \begin{cases} h^n, & n \neq 1 \\ k^n, & n = 1 \end{cases}$$

$$d = dsd$$

И подобрать квазиизоморфный комплекс с когомологиями, сосредоточенными только в нулевом члене.

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B_{-1} \oplus \mathbb{Z} \\
 \downarrow & \nearrow h_0 & \downarrow & \nearrow k_0 & \downarrow \\
 B_0 & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & B_0 \\
 \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow & \nearrow k_1 & \downarrow \\
 B_1 \oplus \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Но тогда имеем следующую последовательность морфизмов и противоречие:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{id} & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \\
 B_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow B_0 \\
 & & \searrow & \nearrow & & & \\
 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

■

**def 4.8.**  $\mathcal{A}$  – полупроста  $\Leftrightarrow \forall$  точная последовательность расщепима.

**Claim 4.9.**  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$  – абелева  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  – полупроста<sup>10</sup>.

**Ex 4.10** (Нерасщепимая короткая точная последовательность).

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

То есть  $\mathbf{Ab}$  – не полупроста.

<sup>10</sup>то есть  $\forall$  точная последовательность расщепима

**Семинар 5**

(Темы: Локализация, условия Оре)

Рассмотрим категорию  $\mathcal{C}$  и  $S \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}$  — произвольное множество морфизмов, замкнутое относительно композиции. Предположим, мы бы хотели рассмотреть похожую на неё категорию с тем различием, что все морфизмы семейства  $S$  в ней обратимы. Сконструировать её не очень сложно: мы навino добавляем обратные морфизмы и все композиции с ними. Естественно, морфизмов в итоге станет больше и появится естественное вложение  $F$ . Тем не менее, такая конструкция не очень тривиальна: несмотря на простоту построения, мы не знаем как она работает. Более того, категорий, удовлетворяющих нашему условию, может быть много. Оказывается, что именно самая наивная конструкция обладает следующим универсальным свойством в 2-категории всех категорий, которым мы такое построение и определим.

**Prop 5.1.** *Существует единственная с точностью до эквивалентности категория  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  с функтором  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ , обладающая универсальным свойством: для любого  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , переводящего  $S$  в изоморфизмы, существует единственный функтор  $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$ , делающий следующую диаграмму коммутативной.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}[S^{-1}] \\ & \searrow T & \downarrow G \\ & & \mathcal{D} \end{array} \quad (5.1)$$

*Доказательство.* Для доказательства приведем явную конструкцию категории  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ . Объекты в ней будут точно такие же:  $\text{Ob } \mathcal{C}[S^{-1}] = \text{Ob } \mathcal{C}$ . Обратные морфизмы введём следующим образом:

Назовём словом формальный набор букв, обозначающий морфизмы из  $\mathcal{C}$ . Добавим к буквам обратные  $s^{-1}$  морфизмы для семейства  $S$ . Слова должны состоять из компонуемых букв, т. е. в слове  $fg$  конец морфизма  $f$  и начало морфизма  $g$  должны совпадать. Будем считать, что начало и конец морфизма  $s^{-1}$  — это соответственно конец и начало  $s$ . Введём на словах отношение эквивалентности, удовлетворяющее следующим правилам:

- $(f)(g) \sim (fg)$
- $(s)(s^{-1}) \sim \text{Id}_A$ , где  $A$  — объект, являющийся началом  $s^{-1}$ .
- $(f)(s)(s^{-1})(g) \sim (f)(g)$ .

Классы эквивалентности положим морфизмами в  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ . Легко проверить, что они удовлетворяют определению категории и каждый морфизм в  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  обратим.

Тогда функтор  $F$  определим как тождественно действующий на объектах и как вложение на морфизмах.  $G$  определим как действующий аналогично  $T$  на объектах и морфизмах, являющихся образами  $F$ . Появившиеся обратные морфизмы  $G$  будет отправлять в соответствующие обратные в  $\mathcal{D}$ . ■

**Com 5.2.** *Конструкция, приведённая в доказательстве, тесно связана с понятием локализации кольца  $R$  мультипликативно замкнутым подмножеством  $S$ . Мы также чисто формально добавляем обратный элемент каждому из заданного подмножества, рассматривая дроби вида  $m/s$ ,  $m \in R, s \in S$ . Тогда нашим отношением эквивалентности станет не что иное, как сокращение дробей:  $r_1/s_1 \sim r_2/s_2 \iff \exists t \in S : t(s_1r_2 - s_2r_1) = 0$ . Причем такая конструкция имеет точно такое же универсальное свойство в категории колец!*

Доказанное утверждение гарантирует корректность следующего определения.

**def 5.3.** Пусть  $\mathcal{C}$  — локально малая категория,  $S \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}$  — произвольное множество морфизмов, замкнутое относительно композиции. Локализацией  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  категории  $\mathcal{C}$  по локализирующему семейству  $S$  будем называть категорию с универсальным свойством (5.1).

С помощью данного объекта введём пока что бесполезное определение.

**def 5.4.** Производной категорией  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  категории  $\mathcal{A}$  будем называть локализацию категории комплексов по квази-изоморфизмам.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \text{Kom}(\mathcal{A})[\text{Qis}^{-1}]$$

Введённое определение, конечно, не дают никакого понятия того, как такая категория устроена. Однако это устройство становится проще, если на семейство наложить условия Оре.

**def 5.5** (Условия Оре). Назовём семейство морфизмов  $S$  в категории  $\mathcal{C}$  локализирующим, если оно удовлетворяет парам условий (указанным ниже и двойственным им).

- Все тождественные морфизмы лежат в  $S$  и  $S$  замкнуто относительно композиции.
- Для любого морфизма  $f : X \rightarrow Z$  и морфизма  $s : Y \rightarrow Z$  из семейства  $S$  найдется объект  $W$  и два морфизма  $g \in \text{Hom}_c(W, Y)$ ,  $t \in \text{Hom}_c(W, X)$ ,  $t \in S$ , делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Y \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array} \quad (5.2)$$

- Если известно, что для  $s \in S$   $sf_1 = sf_2$ , то найдется  $t \in S$  такой, что  $f_1t = f_2t$ . Или иначе, если у двух морфизмов нашёлся левый уравниватель, то найдется и правый.

При таких условиях оказывается, что можно дать более явное описание локализации в терминах домиков.

**def 5.6.** 1. Назовём (левым) домиком  $(s, f)$  тройку объектов  $X, Y, Z$  и пару морфизмов  $f \in \text{Hom}_c(Z, Y)$ ,  $s \in \text{Hom}_c(Z, X)$ ,  $t \in S$ .

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array} \quad (5.3)$$

2. Назовём два (левых) домика эквивалентными, если они “достраиваются до большого домика”.  $(s, f) \sim (t, g)$ , если существует объект  $Z'''$  и морфизмы  $v, h$ ,  $v \in S$ , делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccc} & & Z''' & & \\ & v \swarrow & & \searrow h & \\ & Z' & & Z'' & \\ s \swarrow & & t \rightarrow & \rightarrow f & \searrow g \\ X & & & & Y \end{array} \quad (5.4)$$

Т. е. существует “большой” домик  $(sv, gh)$ .

3. Композиций двух (левых) домиков  $(v, g)$ ,  $(s, f)$  называется домик  $(st, gl)$ , делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccc} & & Z' & & \\ & t \swarrow & & \searrow l & \\ & X' & & Y' & \\ s \swarrow & & f \rightarrow & \rightarrow v & \searrow g \\ X & & & & Y & & Z \end{array} \quad (5.5)$$

Следующее предложение помимо доказательства корректности определения выше показывает, что классы эквивалентности домиков удовлетворяют определению морфизмов в категории.

**Prop 5.7.** 1 Отношение, заданное (5.4), является отношением эквивалентности.

2 Композиция (5.5) двух любых домиков определена. Более того, она не зависит от представителя класса эквивалентности.

3 Композиция (5.5) домиков ассоциативна на классах эквивалентности. Также существует единичный домик  $(\text{id}, \text{id})$

**Доказательство.** 1. Симметричность и рефлексивность очевидны. Проверим транзитивность. Рассмотрим три домика  $(f_A^i, f_B^i)$ ,  $f_A^i \in \text{Hom}_c(X^i, A)$ ,  $f_B^i \in \text{Hom}_c(X^i, B)$ , с вершинами  $X^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Пусть эквивалентны домики 1, 2 и 2, 3. Докажем эквивалентность 1, 3. Используя второе условие Оре существует объект  $Z$  с морфизмами  $f_1, f_2$ ,

причем  $f_1$  из локализующего семейства.



Отметим, что диаграмма выше не является коммутативной. Для того, чтобы добиться коммутативности воспользуемся 3 условием Оре. Мы знаем, что верхний квадрат коммутует:  $f_{\lambda}^2 \alpha_2 f_1 = f_{\lambda}^2 \beta_1 f_2$ . Тогда существует объект  $W$  с морфизмом из локализующего семейства  $w : W \rightarrow Z : \alpha_2 f_1 w = \beta_1 f_2 w$ . Теперь, взяв  $w_1 = f_1 w$ ,  $w_2 = f_2 w$ , получим уже коммутативную диаграмму с объектом  $W$  вместо  $Z$ . Тогда искомым домиком будет объект  $W$  с морфизмами  $\alpha_1 w_1$  и  $\beta_2 w_2$ .

2. Пусть домики с вершинами  $Z_1, Z_2$  эквивалентны и берутся в композиции с домиком с вершиной  $M$ .



Применим второе условие Оре (5.2) два раза и, соответственно, получим искомый домик.



3. Покажем, что  $(f_1, g_1)((f_2, g_2)(f_3, g_3)) \sim ((f_1, g_1)(f_2, g_2))(f_3, g_3)$ .



$Y_1, Y_2$  — вершины композиций первого и второго, второго и третьего домиков соответственно. Снова применим 2 условие Оре (5.2) и получим для итоговых композиций  $Z_1, Z_2$  эквивалентность:



■



комый морфизм  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$  будет действовать тождественно на объектах. На морфизмах положим:

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \begin{array}{ccc} & X & \\ \text{id} \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array} \quad (5.6)$$

Под домиком, естественно, понимается его класс эквивалентности. То, что такая конструкция даёт локализацию и удовлетворяет аксиомам функториальности, конечно, под вопросом. Для начала можно проверить некоторые факты. Проверим, например, что образ локализующего семейства состоит из обратимых морфизмов. Действительно, обратным к домику  $(\text{id}, s)$  будет домик  $(s, \text{id})$ , так как следующая диаграмма коммутрует:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{id} \swarrow & & \searrow \text{id} & \\ & X & & X & \\ \text{id} \swarrow & & s \searrow & s \swarrow & \text{id} \searrow \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

Верность аксиомы функториальности  $F(fg) \sim F(f)F(g)$  следует из коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{id} \swarrow & & \searrow f & \\ & X & & Y & \\ \text{id} \swarrow & & f \searrow & \text{id} \swarrow & g \searrow \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

Очевидно, домик выше эквивалентен  $F(fg)$ . Наконец, проверим, что домики удовлетворяют универсальному свойству и докажем следующую теорему.

**Thr 5.8.** Пусть  $S$  — локализующее семейство локально малой категории  $\mathcal{C}$ . Тогда  $\text{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$  — в точности классы эквивалентности домиков вида (5.3).

*Доказательство.* Пусть  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  переводит семейство  $S$  в изоморфизмы. Построим функтор  $G$ , делающий диаграмму 5.1 коммутативной. На объектах  $G$  должен определяться также, как и  $T$ . Пусть  $\varphi$  — морфизм в  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ , представляющийся домиком  $(s, g)$ . Возьмем его композицию  $\varphi \cdot (1, s) = (1, f)$ , где из построения (5.6)  $(1, s) = F(s)$ ,  $(1, f) = F(f)$ . Т. е. мы получили, что

$$\varphi \cdot F(s) = F(f) \quad G(\cdot) \Rightarrow G(\varphi) \cdot T(s) = T(f) \quad \Rightarrow G(\varphi) = T(f)T(s)^{-1},$$

где последнее равенство даёт явное построение  $G$  и, следовательно, доказывает универсальность. ■

**Семинар 6**

(Темы: Локализация гомотопической категории и производная категория)

Вспомним определение 5.4 производной категории. Возникает вопрос о том, являются ли квазиизоморфизмы локализующим семейством. Не очень сложно проверить, что это не так.

**Prop 6.1.**  $Qis$  не является в общем случае локализующим семейством в категории  $Kom(\mathcal{A})$ .

*Доказательство.* Возьмём  $X \in Ob \mathcal{A}$  с инъективной резольвентой длины 1. Тогда естественно возникнет два вложенных в инъективную резольвенту комплекса, соответствующих объектам  $X$  и  $I_1$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{i} & I_0 & \longrightarrow & I_1 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow id \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Вложение комплекса  $X[0]$  будет квазиизоморфизмом. Тогда второе условие Оре (5.2) гарантирует существование комплекса с квазиизоморфизмом в  $I_1[-1]$  и морфизмом в  $X[0]$ . Естественно, из вида наших комплексов найденный объект имеет вид  $0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0$ . Получим коммутативную диаграмму.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & I_1 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Так как  $P_\bullet \rightarrow I_1[-1]$  — квазиизоморфизм, то  $P_\bullet$  имеет лишь одну нетривиальную когомологию в первом члене. Отсюда  $P_0 \rightarrow I_0$  — нулевой морфизм. С другой стороны морфизм  $P_0 \rightarrow X$  в общем случае ненулевой. Также ненулевым является  $X \rightarrow I_0$  из квазиизоморфности. Противоречие заключается в коммутативности следующей диаграммы.

$$\begin{array}{ccc}
 & 0 & \\
 P_0 & \nearrow & \searrow I_0 \\
 & X &
 \end{array}$$

■

Несмотря на утверждение выше, описать структуру производной категории  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  можно. Для начала нашей целью будет установить следующую теорему. **Это надо переписать после того как напишу про конусы в начале**

**Thr 6.2.**  $Qis$  — локализующее семейство в  $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ .

*Доказательство.* Первое условие Оре очевидно. Проверим второе (5.2). Рассмотрим тройку  $X, Y, Z \in Ob \mathcal{K}(\mathcal{A})$  с морфизмами  $f \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Z)$ ,  $s \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, Z)$ , где  $s \in Qis$  из локализующего семейства. Объектом, который будет удовлетворять условию, станет сдвинутый конус  $C[hf][-1]$ , где  $h$  — естественный морфизм из  $Z$  в конус  $C[s]$ .

$$\begin{array}{ccc}
 C[hf][-1] & \xrightarrow{\beta} & Y \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow s \\
 X & \xrightarrow{f} & Z \\
 & \searrow hf & \downarrow h \\
 & & C[s]
 \end{array} \tag{6.1}$$

Рассмотрим откуда берутся морфизмы  $\alpha, \beta$  в (6.1) и почему  $\alpha \in Qis$ . Напомним, что вместе с конусом  $C[s]$  поставляется короткая точная последовательность комплексов:

$$0 \rightarrow C[s] \rightarrow C[hf] \rightarrow X[1] \rightarrow 0$$

которая вместе со сдвигом на 1 даёт морфизм  $\alpha$  в (6.1). Применим к такой сдвинутой последовательности лемму о зигзаге. Так как  $s \in \text{Qis}$ , у  $C[s]$  нулевые когомологии. Отсюда получим точные последовательности.

$$0 \longrightarrow H_i(C[\text{hf}][-1]) \xrightarrow{\alpha^*} H_i(X) \longrightarrow 0 \quad (6.2)$$

Тогда  $\alpha \in \text{Qis}$ . Для поиска  $\beta$  такого, что  $s\beta$  гомотопен  $f\alpha$ , напомним также о длинной точной последовательности, поставленной с конусом.

$$\dots \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow C[s] \rightarrow Y[1] \rightarrow Z[1] \rightarrow \dots \quad (6.3)$$

Воспользуемся следующим утверждением для такой последовательности, которое докажем немного позже.

**Lem 6.3.** *Композиция любых двух морфизмов в последовательности (6.3) гомотопна нулю.*

Для такой последовательности нас интересует т. н. выделенный треугольник: точная подпоследовательность (6.3) из четырёх элементов. Применяя функтор  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[\text{hf}][-1], -)$  получим также точную последовательность множеств морфизмов из конуса.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & C[s] \longrightarrow \dots \\ & & & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[\text{hf}][-1], -) & & \\ \dots & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[\text{hf}][-1], Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[\text{hf}][-1], Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[\text{hf}][-1], C[s]) \longrightarrow \dots \\ & & \beta & \longrightarrow & f\alpha & \longrightarrow & hf\alpha \end{array}$$

Применяя утверждение 6.3 к аналогичной (6.3) последовательности для конуса  $C[\text{hf}]$  получим, что  $hf\alpha \sim 0$ . Отсюда из точности этот морфизм поднимается до  $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[\text{hf}][-1], Y)$ . Докажем выполнение третьего условия Ore. Нам пригодится ещё одно утверждение.

**Lem 6.4.** *Локализация аддитивной категории по локализующему семейству тоже аддитивна.*

В силу аддитивности необходимо доказать, что  $sf \sim 0$ , где  $s$  из локализующего семейства, влечёт существование  $t \in \text{Qis} : ft \sim 0$ . Конструкция будет следующей: опять возьмём конус  $C[s]$ , соответствующую точную последовательность и применим функтор  $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, \cdot)$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & X & \xleftarrow{t} & C[f'][-1] \\ & & & \downarrow f & & \\ \dots & \longrightarrow & C[s][-1] & \xleftarrow{f'} & Y & \xrightarrow{s} & Z \longrightarrow \dots \\ & & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, -) & & \\ \dots & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C[s][-1]) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Z) \longrightarrow \dots \\ & & & f' & \longrightarrow & f & \longrightarrow sf \sim 0 \end{array}$$

Из точности  $sf$  поднимается до  $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C[s][-1])$ . Искомый морфизм тогда будет соответствующий канонический для конуса  $t : C[f'][-1] \rightarrow X$ . Для такого построения остается проверить квазиизоморфность и гомотопность композиции нулю. Аналогично квазиизоморфность следует из ацикличности конуса  $C[s]$  и точности следующей последовательности по лемме о зигзаге.

$$\dots \rightarrow C[f'][-1] \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f'} C[s][-1] \rightarrow C[f'] \rightarrow \dots$$

Гомотопность нулю следует из того, что по построению  $ft \sim hf't$ , а  $f't \sim 0$  из точности последовательности выше. ■

*Доказательство леммы 6.3.* i dont know ■

*Доказательство леммы 6.4.* i dont know ■

Ещё раз вспомним логику всего, что делалось ранее. Нашей целью было отождествить объект со всеми его резольвентами. Оказалось, что все резольвенты квазиизоморфны объекту: поэтому мы захотели изучить локализацию категории комплексов квазиизоморфизмами, ведь в такой категории интересующее нас отношение является изоморфизмом. Но такая локализация простому описанию сразу не поддаётся, в чём мы убедились в предложении 6.1. Поэтому сначала мы научились обращать квазиизоморфизмы в гомотопической категории. Следующая теорема завершает наши рассуждения, утверждая, что получившаяся локализация в гомотопической категории и производная категория — это одно и то же.

**Thr 6.5.**

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{A})[\text{Qis}^{-1}]$$

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ccc} \text{Kom}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{Q_{\mathcal{D}}} & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ \downarrow Q_{\mathcal{K}} & \nearrow \pi & \downarrow \beta \\ \mathcal{K}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{Q_{\mathcal{D}}} & \mathcal{K}(\mathcal{A})[\text{Qis}^{-1}] \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \alpha \\ \downarrow \beta \\ \nearrow \alpha \end{array}$$

Покажем, что существуют единственные два морфизма  $\alpha, \beta$ , делающие диаграмму выше коммутативной. Функтор  $Q_{\mathcal{K}}$  обращает гомотопические эквивалентности (отметим, что гомотопическая категория — локализация категории комплексов гомотопическими эквивалентностями) и сохраняет квазиизоморфизмы.  $Q_{\mathcal{D}}$  обращает все квазиизоморфизмы. Тогда и  $Q_{\mathcal{K}} \cdot Q_{\mathcal{D}}$  обращает все квазиизоморфизмы. Следовательно по универсальному свойству локализации (5.1) существует единственный  $\beta$ . Отметим, что все гомотопические эквивалентности — это квазиизоморфизмы. Следовательно,  $Q_{\mathcal{D}}$  переводит все гомотопические эквивалентности в изоморфизмы и опять по универсальному свойству локализации (5.1) имеем единственный морфизм  $\pi$ . Из коммутативности  $\pi$  переводит все квазиизоморфизмы в изоморфизмы. Ещё раз по универсальному свойству (5.1) имеем единственный морфизм  $\alpha$ . ■

**Семинар 7**

(Темы: Строгое и полное вложение в производную категорию)

Пусть  $\mathcal{A}$  – абелева категория. Напомним результаты, полученные при её локализации по разным классам морфизмов:

$$\mathbf{Ob}(\mathcal{D}(\mathcal{A})) = \mathbf{Ob}(\mathcal{K}(\mathcal{A})) = \mathbf{Ob}(\mathbf{Kom}(\mathcal{A}))$$

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathbf{Kom}^*(\mathcal{A}) \twoheadrightarrow \mathcal{K}^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}} \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$$

$$* \in \{\emptyset, +, -, b\}$$

При локализации категории, несмотря на формальное сохранение объектов, *меняется структура категории*, так как внутри категории мы работаем с классами эквивалентности объектов, а при локализации меняется отношение "быть изоморфным".

**Сом 7.1** (почему проективный объект проективный). Если мы имеем эпиморфизм между некоторым объектом  $A$  и проективным объектом  $P$ , то  $P$  отщипляется как прямое слагаемое в  $A$ . В линейной алгебре это соответствует проекции на некоторое подпространство и вложению его как прямого слагаемого.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ s \swarrow & \downarrow \text{id} & \\ A & \xrightarrow{\pi} P & \end{array}$$

$$s\pi: A \rightarrow P$$

$$A \cong A' \oplus P$$

**7.1 Каноническое вложение в производную категорию**

Существует каноническое вложение в производную категорию  $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ , которое сопоставляет каждому объекту исходной категории комплекс с нетривиальными когомологиями в нулевом члене и все изоморфные ему, в частности, все точные резольвенты.

**Claim 7.2.**  $\iota: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$  – строгий и полный.<sup>11</sup>

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \cong \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A[0], B[0])$$

*Доказательство.* **▲mono(inj)** Возьмём  $f \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  такой, что  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}(f) = 0$ . Ему в производной категории будет соответствовать домик, эквивалентный нулевому домику.

$$\begin{array}{ccc} & A[0] & \\ \text{id} \swarrow & & \searrow f \\ A[0] & & B[0] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & K^\bullet & \\ g \swarrow & & \searrow fg \\ A[0] & & B[0] \end{array}$$

Применим функтор когомологий

$$0 \xrightarrow{fg \sim 0} H^0(fg) = H^0(f)H^0(g) \xrightarrow{g \sim 0} H^0(f)$$

Для проверки сюръективности нам понадобится некоторое дополнительное знание о производной категории, а именно, определения следующих функторов, действующих на производной категории:

**def 7.3.** Функтор сдвига

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: \mathcal{D}^*(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathcal{D}^*(\mathcal{A}) \\ K^\bullet &\mapsto K^\bullet[1] \end{aligned}$$

**def 7.4.** Функторы обрезания  $\tau_{\leq i}, \tau_{\geq i}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$H^k(\tau_{\leq i} K^\bullet) = \begin{cases} H^k(K^\bullet) & , k \leq i \\ 0 & , k > i \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\leq i} K^\bullet & \dots & \rightarrow & K^{i-1} & \rightarrow & Z^i(K^\bullet) & \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ K^\bullet & \dots & \rightarrow & K^{i-1} & \rightarrow & K^i & \rightarrow K^{i+1} \rightarrow \dots \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} K^\bullet & \dots & \rightarrow & K^{i-2} & \rightarrow & K^{i-1} & \rightarrow K^{i+1} \rightarrow \dots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \tau_{\geq i} K^\bullet & \dots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & B^i(K^\bullet) & \rightarrow K^{i+1} \rightarrow \dots \end{array}$$

<sup>11</sup>строгая полнота вложений  $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Kom}(\mathcal{A})$  и  $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}^*(\mathcal{A})$  очевидна, так как любой морфизм между объектами задаёт морфизм соответствующих комплексов, а все гомотопии таких комплексов пропускаются через ноль, поэтому нет нетривиальных гомотопий

Теперь можем доказывать сюръективность. **▲epi(surj)** Покажем, что заданному в производной категории домику будет соответствовать морфизм объектов в исходной категории. Так как  $K^\bullet$  и  $A[0]$  квазиизоморфны, то у  $K^\bullet$  есть только одна нетривиальная когология. Применяя к  $K^\bullet$  последовательно функтор обрезания, мы получим ещё один квазиизоморфный комплекс. Так как мы в производной категории, то стрелки соответствующие квазиизоморфизмам между этими комплексами можно обращать, а в силу квазиизоморфности  $A[0]$  и  $K^\bullet$  мы получаем эквивалентный домик, который соответствует морфизму в исходной категории.

$$\begin{array}{c}
 K^\bullet \rightarrow \tau_{\geq 0} K^\bullet \leftarrow \tau_{\leq 0} \tau_{\geq 0} K^\bullet \\
 K^\bullet \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} K^\bullet \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} \tau_{\geq 0} K^\bullet \\
 \tau_{\leq 0} \tau_{\geq 0} K^\bullet \stackrel{qis}{\sim} K^\bullet \stackrel{qis}{\sim} A[0] \\
 \begin{array}{ccc}
 & K^\bullet & \\
 qis \swarrow & & \searrow \\
 A[0] & & B[0]
 \end{array}
 \sim
 \begin{array}{ccc}
 & A[0] & \\
 id \swarrow & & \searrow f \\
 A[0] & & B[0]
 \end{array}
 \end{array}$$

■

## 7.2 Мотивировка

Имея каноническое вложение, мы хотим по функтору между исходными аддитивными категориями определить функтор между производными категориями. При вложении в категорию комплексов и гомотопическую категорию комплексов, функтор корректно продолжается почленным действием на комплексы, так как, помимо всего прочего, он является гомоморфизмом абелевых групп морфизмов между объектами. То есть, если в  $\mathcal{A}$  гомоморфизм распался в сумму композиций, то и в  $\mathcal{B}$  он будет распадаться в сумму композиций. Переход к производным категориям оказывается более сложным, потому что произвольный функтор не обязан сохранять отношение квазиизоморфности (не все функторы точные). Существует аналогия между гомологической алгеброй и линейной. Точные тройки играют в этой аналогии роль суммы элементов (группа Гротендика  $K_0(\mathcal{A})$  категории, также может быть введён базис), а функтор Ном (эйлерова характеристика  $\chi$ ) – роль скалярного произведения. Следуя этой логике, можно сказать, что, если точные тройки (выделенные треугольники) играют роль сумм, то точный функтор играет роль линейного отображения.

Будем требовать от функтора  $\mathcal{F}$  точности хотя бы с одной стороны. Пусть, например, он точен справа. Этот неточный функтор мы будем "приближать" точными, откуда и возникает понятие "производный" функтор.

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(C) \rightarrow R^1\mathcal{F}(A) \rightarrow R^1\mathcal{F}(B) \rightarrow R^1\mathcal{F}(C) \rightarrow \dots$$

Сформулируем следующие утверждения для точного функтора

**Claim 7.5.** Точный функтор сохраняет отношение квазиизоморфности.

**Claim 7.6.** Почленное применение  $\mathcal{DF}$  корректно определено.

**Com 7.7.** Для морфизма комплексов  $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$  определена следующая бесконечная последовательность морфизмов, каждая композиция в которой гомотопна 0 :

$$K^\bullet \rightarrow L^\bullet \rightarrow C(f) \rightarrow K^\bullet[1]$$

**Claim 7.8.**  $\mathcal{DF}$  точен как функтор между производными категориями, то есть выделенные треугольники он переводит в выделенные.

**Claim 7.9.** Пусть  $\mathcal{F}$  – точен, а  $K^\bullet$  – ациклический, тогда  $\mathcal{F}(K^\bullet)$  – ациклический.

*Доказательство.* Ациклический комплекс состоит из композиций точных троек вида

$$0 \longrightarrow B^i(K^\bullet) \xrightarrow{e^i} Z^i(K^\bullet) \xrightarrow{p^i} B^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow 0 \quad d^i = p^i e^i$$

$$0 \longrightarrow B^i(\mathcal{F}K^\bullet) \xrightarrow{\mathcal{F}e^i} Z^i(\mathcal{F}K^\bullet) \xrightarrow{\mathcal{F}p^i} B^{i+1}(\mathcal{F}K^\bullet) \longrightarrow 0 \quad \mathcal{F}d^i = \mathcal{F}p^i \mathcal{F}e^i$$

Конус квазиизоморфизма ациклический. Поскольку функтор  $\mathcal{F}$  – сохраняет прямые суммы, и мы можем применять его почленно, а дифференциал в конусе определялся изоморфизмом, то существует канонический изоморфизм  $\mathcal{F}(C(f)) \cong C(\mathcal{F}(f))$ . Оба конуса ациклически, оба морфизма – изоморфизмы. ■

### 7.3 Производный функтор, класс приспособленных объектов

**def 7.10.**  $\mathcal{R} \subset \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$  – класс объектов, приспособленный к точному слева функтору  $\mathcal{F}$ , если

- $\mathcal{F}$  переводит ациклические ограниченные комплексы из  $\mathcal{K}^+(\mathcal{R})$  в ациклические
- класс  $\mathcal{R}$  – достаточно большой, то есть  $\forall A \in \mathcal{A} \exists R \in \mathcal{R} : A \hookrightarrow R$  <sup>12</sup>

**NB** Приспособленный класс объектов определён неоднозначно. Например, если функтор точен, то любой достаточно большой класс объектов категории будет приспособленным. Этот факт существенно усложняет построение производного функтора.

**def 7.11.**  $\mathcal{R}$ -резольвентой будем называть квазиизоморфный комплекс с членами из  $\mathcal{R}$ . <sup>13</sup>

**Claim 7.12.** Существует эквивалентность категорий

$$\phi: \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \cong \mathcal{K}^-(\mathcal{R})[\mathbf{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}]$$

**Claim 7.13.**  $\mathbf{QIS}_{\mathcal{R}}$  являются локализирующим семейством в  $\mathcal{K}^+(\mathcal{R})$

*Доказательство.* Конус квазиизоморфизма между комплексами приспособленных объектов будет приспособлен, так как при взятии суммы будет сохраняться ациклическость, а функтор аддитивный

$$\mathbf{QIS}_{\mathcal{R}} \ni f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet \quad K^\bullet, L^\bullet \in \mathcal{K}^+(\mathcal{R}) \quad \Rightarrow \quad C(f) \in \mathcal{K}^+(\mathcal{R})$$

■

<sup>12</sup>Если бы  $\mathcal{F}$  был точен справа, мы бы потребовали, чтобы любой объект категории являлся факторобъектом объекта из  $\mathcal{R}$

<sup>13</sup>Существует эквивалентный подход к определению производного функтора, не использующий приспособленный класс, а только проективные и инъективные объекты.

## Семинар 8

(Темы: Производный функтор, приспособленный класс объектов, выделенные треугольники )

Ранее мы ввели понятие приспособленного класса объектов  $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$  для точного слева (справа) функтора  $\mathcal{F}$ . Далее будем проводить все рассуждения для точного слева аддитивного функтора  $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  между абелевыми категориями  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Ab}$ .  $\mathcal{R} \subset \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$  – приспособленный к  $\mathcal{F}$  класс объектов.

**Claim 8.1.** Если  $\mathcal{R}$  – достаточно большой класс объектов, то для любого комплекса существует  $\mathcal{R}$ -резольвента, то есть

$$\forall C^\bullet \subset \mathbf{Kom}^+(\mathcal{A}) \quad \exists R^\bullet \subset \mathbf{Kom}^+(\mathcal{R}): \quad C^\bullet \stackrel{qis}{\sim} R^\bullet$$

*Доказательство.* Строим резольвенту. На первом шаге вложим нулевой член в некоторый объект из класса  $\mathcal{R}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^0 & \longrightarrow & C^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & R^0 & \longrightarrow & R^0 \coprod_{C^0} C^1 & \hookrightarrow & R^1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} & \\ t^i \swarrow & \downarrow \tau^i & & \downarrow & \searrow t^{i+1} \\ R^i & \longrightarrow & \text{Coker } d_R^{i-1} & \xrightarrow{p} & \text{Coker } d_R^{i-1} \coprod_{C^i} C^{i+1} \hookrightarrow R^{i+1} \end{array}$$

$$C^i \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tau^i \\ -d_C^i \end{pmatrix}} \text{Coker } d_R^{i-1} \oplus C^{i+1} \twoheadrightarrow \text{Coker } d_R^{i-1} \coprod_{C^i} C^{i+1} \rightarrow 0$$

Осталось проверить, что таким образом задан квазиизоморфизм комплексов.

▲ ерi

$$C^i \supset Z^i(R^\bullet) \ni x \mapsto (p(x), 0) \in \text{Coker } d_R^{i-1} \oplus C^{i+1}$$

$$\exists \tilde{x} \in C^i: \quad \begin{pmatrix} \tau^i \\ -d_C^i \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_C^i \tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x} \in Z^i(C^\bullet)$$

▲ моно

$$C^i \supset B^{i-1}(C^\bullet) \ni x \mapsto d_C^i(x) = 0 \in C^{i+1} \mapsto (0, 0) \in \text{Coker } d_R^{i-1} \oplus C^{i+1} \Rightarrow d_R^i t^i(x) = 0 \Rightarrow t^i(x) \in B^{i-1}(R^\bullet)$$

■

Продолжим построение производного функтора. Ранее было отмечено, что если  $\mathcal{F}$  – точный, то приспособленным классом являются все объекты нашей категории. Продолжим рассуждение для точного слева функтора между абелевыми категориями. Почленным действием он продолжается до точного функтора в категории комплексов и гомотопической категории.

$$\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

$$\mathbf{Kom}^+ \mathcal{F}: \mathbf{Kom}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Kom}^+(\mathcal{B})$$

$$\mathcal{K}^+ \mathcal{F}: \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}^+(\mathcal{B})$$

Однако, вообще говоря, функтор не обязан сохранять квазиизоморфизмы. Поэтому продление на производную категорию мы будем организовывать следующим образом: комплекс мы будем заменять на квазиизоморфный ему комплекс с приспособленными членами и уже на этот комплекс будем действовать функтором почленно. Так мы получим производный функтор.

$$\mathcal{D}^+ \mathcal{F}: \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$$

План действий:

- Локализация гомотопической категории приспособленных объектов по квазиизоморфизмам эквивалентна про-

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\phi} & \\ \text{изводной категории } \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathbf{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] & & \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \\ & \xrightarrow{\psi} & \end{array}$$



- $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\text{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$

**Lem 8.2.** Пусть  $\mathcal{C}$  – категория,  $S$  – локализующее семейство,  $\mathcal{B}$  – полная подкатегория в  $\mathcal{C}$ . Пусть также

1.  $S_{\mathcal{B}} = S \cap \mathbf{Mor}(\mathcal{B})$  – локализующее семейство в  $\mathcal{B}$ .
2. У любого морфизма, заканчивающегося на объекте подкатегории  $\mathcal{B}$  мы можем поправить начало так, чтобы он начинался тоже в  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \uparrow t & \searrow s & \\ X'' & \longrightarrow & X \\ \in \mathcal{B} & & \in \mathcal{B} \end{array}$$

$$\forall s \in S \quad s: X' \rightarrow X \quad \exists t \in S \quad t: X'' \rightarrow X' \quad st \in S_{\mathcal{B}}$$

- 2' У любого морфизма, начинающегося на объекте подкатегории  $\mathcal{B}$  мы можем поправить начало так, чтобы он заканчивался тоже в  $\mathcal{B}$ .<sup>14</sup>

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \in \mathcal{B} & & \\ \downarrow & \searrow s & \\ X'' & \xleftarrow{t} & X \\ \in \mathcal{B} & & \end{array}$$

Тогда имеется строгое и полное вложение  $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$

Доказательство.

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]}(A, B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(A, B)$$

▲**mono(inj)** Покажем, что, если два морфизма представлялись эквивалентными домиками в  $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$ , то они останутся эквивалентными в  $\mathcal{C}[S^{-1}]$ . Изобразим последовательность домиков на диаграмме.

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & & \in \mathcal{B} & & \\ & & \downarrow t & & \\ & & X'' & & \\ & \swarrow s & & \searrow & \\ X & & & & X' \\ \swarrow r & & & & \searrow \\ A & & & & B \\ \in \mathcal{B} & & & & \in \mathcal{B} \end{array}$$

$$rs \in S \quad A \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \exists D \in \mathcal{B} \quad D \xrightarrow{t} X'' \quad rst \in S$$

▲**epi(surj)** То есть любой домик, полностью лежащий в  $\mathcal{B}$  поднимается в объемлющую категорию  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \in \mathcal{B} & & \\ \downarrow & & \\ X & & \\ \swarrow s & & \searrow \\ A & & B \\ \in \mathcal{B} & & \in \mathcal{B} \end{array}$$

■

Теперь применим 8.2 для  $\mathcal{A} = \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$  и  $\mathcal{B} = \mathcal{K}^+(\mathcal{R})$  и  $S = \text{QIS}_{\mathcal{A}}$ . Тогда

**Claim 8.3.**  $\exists \psi: \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\text{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$  – эквивалентность категорий.<sup>15</sup>

<sup>14</sup>и тогда в доказательстве нужно будет применять левые домики

<sup>15</sup>Функтор взятия резольвенты

**def 8.4.** Производный функтор точного слева  $\mathcal{F}$ , действующего между двумя абелевыми категориями – это пара  $(\mathcal{D}^+\mathcal{F}, \varepsilon_{\mathcal{F}})$  точного слева в смысле производной категории <sup>16</sup> функтора и естественного преобразования, обладающая следующим универсальным свойством для любого точного в смысле производной категории функтора  $G$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{K}^+(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\mathcal{K}^+\mathcal{F}} & \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) \\
 Q_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow Q_{\mathcal{B}} \\
 \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{D}^+\mathcal{F}} & \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \\
 & \dashrightarrow & \\
 & G &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F} & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} & \mathcal{D}^+\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}} \\
 & \searrow & \downarrow \exists! \eta \\
 & & G
 \end{array}$$

**Com 8.5.** Очевидно, что  $\mathcal{D}^+\mathcal{F}$  – единственный.

**Thr 8.6.** Если точный слева функтор допускает класс приспособленных объектов  $\mathcal{R}$ , то  $\exists! (\mathcal{D}^+\mathcal{F}, \varepsilon_{\mathcal{F}})$ .

*Построение.* На этом шаге мы показываем **точность в смысле производной категории**. Будем использовать полученную ранее эквивалентность категорий  $\psi: \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\text{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ , обратную  $\phi: \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\text{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}]$  и два естественных изоморфизма <sup>17</sup>  $\alpha: \text{Id} \rightarrow \phi \circ \psi$  и  $\beta: \psi \circ \phi \rightarrow \text{Id}$ . Мы определим вспомогательный функтор  $\tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\text{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$  просто почленным действием, а производный функтор как  $\mathcal{D}^+\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \circ \phi$ .

**План:**

1. Точность  $\mathcal{D}^+\mathcal{F}$ <sup>18</sup>

**Lem 8.7.** Пусть  $\Delta$  – треугольник в локализованной гомотопической подкатегории приспособленных объектов. Предположим, что он изоморфен выделенному треугольнику в производной категории<sup>19</sup>. Тогда он будет изоморфен выделенному треугольнику в локализованной гомотопической подкатегории приспособленных объектов.

$$\mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\text{QIS}^{-1}] \ni \Delta \cong \Delta' \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \Rightarrow \Delta \cong \tilde{\Delta}' \in \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\text{QIS}^{-1}]$$

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Delta: & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\
 & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow \theta & & \downarrow \phi[1] \\
 \tilde{\Delta}: & \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{Y} & \longrightarrow & C(f) & \longrightarrow & \tilde{X}[1]
 \end{array}$$

Пусть морфизм  $\phi$  представляется в производной категории домиком

$$\begin{array}{ccc}
 & S & \\
 q \swarrow & & \searrow r \\
 X & & Y
 \end{array}$$

Тогда существует морфизм между конусами

$$Y \oplus S[1] = C(r) \xrightarrow{(\psi, \phi, q)} C(f) = \tilde{Y} \oplus \tilde{X}[1]$$

Теперь можем построить изоморфизм треугольников

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & C(r) \\
 \downarrow q & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \theta^{-1} \circ (\psi, \phi, q) \\
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z
 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathcal{D}^+\mathcal{F}$  – точный. ■

2. Построение  $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ , единственность. Для построения естественного изоморфизма, возьмём некоторый комплекс, вложим его в производную категорию и выберем его резольвенту, подбором квазиизоморфного ему. То есть

$$X \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \quad Y = \phi Q_{\mathcal{A}}(X)$$

<sup>16</sup>то есть переводящего выделенные треугольники в выделенные

<sup>17</sup>"единица и коединица сопряжения"

<sup>18</sup>в смысле производной категории

<sup>19</sup>Так как мы не вводили понятия треангулированной категории, то для нас просто треугольником будет набор из трёх объектов и трёх морфизмов, а выделенным треугольником будет такой набор, где  $Z = C(X \rightarrow Y)$

Квазиизоморфизм  $\beta: X \rightarrow \psi\phi(X) = \psi(Y)$  представляется домиком

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{Z} & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 X & & & & Y \\
 & & \xrightarrow{\mathcal{K}^+\mathcal{F}} & & \\
 & & \mathcal{K}^+\mathcal{F}X & & \mathcal{K}^+\mathcal{F}Y \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
 & & \mathcal{K}^+\mathcal{F}(\mathbf{Z}) & & 
 \end{array}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{F}}: Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(X) \rightarrow Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(Y) = \tilde{\mathcal{F}}Q_{\mathcal{R}}(Y) = \mathcal{D}^+\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}}(Y)$$

Далее мы проверим, что таким образом определённый морфизм является естественным преобразованием функторов и не зависит от выбора  $\mathbf{Z}$ .

3. *Универсальность to be continued...*

## Семинар 9

(Темы: Производный функтор, классический Ext, сложение по Бэру)

## 9.1 Производный функтор

Пусть  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  – точный слева или справа функтор между абелевыми категориями. Мы хотим продолжить его на производную категорию. Для этого нужно выбрать класс приспособленных объектов  $\mathcal{R} \in \mathcal{A}$ . Приспособленных объектов должно быть достаточно много<sup>20</sup>. Также под действием функтора ацикличный комплекс, состоящий из приспособленных объектов должен переходить в ацикличный. Отсюда, в частности, следует, что этот функтор будет сохранять  $\text{qis}$ .<sup>21</sup> Ранее была построена эквивалентность категорий.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}^+(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) & & \\ \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{K}^+(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\mathcal{K}^+\mathcal{F}} & \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}} & \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \\ & \searrow & & \text{D}^+\mathcal{F} & \nearrow & & \end{array}$$

**Сом 9.1.** При определении производного функтора мы делаем два неканонических выбора. Во-первых, выбор эквивалентности  $\varphi : \mathcal{D}^+(A) \rightarrow \mathcal{K}^+(A)$ . Во-вторых, выбор класса приспособленных объектов  $\mathcal{R}^{22}$ .

## Напоминание с определением производного функтора 8.4

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}^+(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\mathcal{K}^+\mathcal{F}} & \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) \\
\mathcal{Q}_\mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{Q}_\mathcal{B} \\
\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{D}^+\mathcal{F}} & \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \\
& \dashrightarrow \text{G} & \\
\mathcal{Q}_\mathcal{B} \mathcal{K}^+ \mathcal{F} & \xrightarrow{\varepsilon_\mathcal{F}} & \mathcal{D}^+ \mathcal{F} \mathcal{Q}_\mathcal{A} \\
& \searrow & \downarrow \exists ! \eta \\
& & \text{G}
\end{array}$$

Продолжаем построение...

3. *Универсальность* Для компоненты по  $X \in \mathcal{K}^+(A)$  определим естественное преобразование как  $Y = \varphi\psi(X)$ . Применим к нему  $Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}$  и получим морфизм в  $\mathcal{D}^+(B)$ . Образ этого морфизма в  $\mathcal{D}^+(B)$  не зависит от выбора расширения.

```

graph LR
    X --> Z
    X --> Zp[Z'']
    X --> Zp1[Z']
    Y --> Z
    Y --> Zp
    Y --> Zp1
    Z --> Zp
    Zp1 --> Zp

```

Доказательство естественности преобразования  $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ <sup>23</sup>

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_X} & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & Y_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(X_1) & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} & \mathcal{D}^+\mathcal{F}(Y_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(X_2) & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} & \mathcal{D}^+\mathcal{F}(Y_2) \end{array}$$

<sup>20</sup>то есть любой комплекс в  $\mathcal{A}$  должен ими покрываться

<sup>21</sup> Точный справа (или слева) функтор сохраняя выделения треугольники и конусы. Конус  $qis$  ацикличен. Если под действием функтора конус остался ациклическим, то и  $qis$  остался  $qis$ 'ом.

<sup>22</sup>если в классе приспособленных объектов выделить достаточно большой подкласс, то он тоже будет приспособленным

<sup>23</sup> естественное преобразование коммутирует с морфизмами

4. Теперь построим естественное преобразование  $\eta$  для объекта  $X \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ , вложенного в  $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$  как  $Q_{\mathcal{A}}X$ <sup>24</sup>

$$\begin{array}{ccc}
 X & & Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varepsilon_X} G(X) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \quad \nearrow \eta_X \quad \downarrow \theta \cong \\
 \phi\psi X & & Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(\phi Q_{\mathcal{A}}X) \xrightarrow{\varepsilon_{Q_{\mathcal{A}}X}} G(\phi\psi X) \\
 & & \cong \\
 & & \mathcal{D}^+\mathcal{F}(X)
 \end{array}$$

$$\eta_X = \theta^{-1} \varepsilon_{Q_{\mathcal{A}}X}$$

**Claim 9.2.** Если в  $\mathcal{A}$  достаточно много инъективных(проективных) объектов, то их класс приспособлен к любому точному слева (справа) функтору.

*Доказательство.* Нужно показать, что любой точный слева функтор ограниченные слева инъективные комплексы переводит в ациклические. Мы знаем, что любой морфизм из инъективного комплекса в ациклический гомотопен 0.

$$\text{id}_{I^\bullet} \sim 0 \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{F}(I^\bullet)} \sim 0 \Rightarrow \mathcal{F}(I^\bullet) - \text{ациклический.}$$

■

**def 9.3.** Функтор  $\mathcal{H} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}$  называется когомологическим, если выделенные треугольники  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$

он переводит в длинные точные последовательности  $\dots \rightarrow H(X[i]) \rightarrow H(Y[i]) \rightarrow H(Z[i]) \rightarrow H(X[i+1]) \rightarrow \dots$

**Ex 9.4.**

- $H^0$  – когомологический<sup>25</sup>
- $\text{Hom}(X, -)$  – тоже.

**def 9.5.** Классический производный функтор

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^i \mathcal{F} &= H^{-i}(\mathcal{D}^+ \mathcal{F}) \\
 \mathcal{R}^i \mathcal{F} &= H^i(\mathcal{D}^+ \mathcal{F}) \\
 \mathcal{L}^i \mathcal{F}, \mathcal{R}^i \mathcal{F} : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{B}
 \end{aligned}$$

**Claim 9.6.** Пусть  $\mathcal{F}$  – точный слева функтор.  $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$  – короткая точная последовательность. Тогда  $\exists$  длинная точная последовательность вида:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(Z) \rightarrow \mathcal{R}^1 \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{R}^1 \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{R}^1 \mathcal{F}(Z) \rightarrow \dots$$

*Доказательство.* Действуем по определению производного функтора. Для этого короткую точную последовательность мы погружаем в производную категорию и выбираем квазиизоморфные им комплексы с приспособленными членами. Далее мы подействуем почленно производным функтором и сделаем из короткой точной последовательности треугольник. Для этого в производной категории рассмотрим морфизм комплексов с когомологиями, сосредоточенными в нулевом члене<sup>26</sup>. Конусом данного морфизма будет являться комплекс с нулевой когомологией  $C(f) \stackrel{\text{qis}}{\cong} Z[0]$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \\
 X[0] & \xrightarrow{f} & Y[0] & \rightarrow & Y \\
 & & \uparrow f & & \\
 & & X & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 
 \end{array}
 \quad C(f) \cong Z[0]$$

Для каждого комплекса мы находим его резольвенту и заменяем исходный треугольник треугольником соответствующих резольвент.

$$0 \rightarrow \mathcal{R}^0_X \rightarrow \mathcal{R}^1_X \rightarrow \dots = \mathcal{R}^\bullet_X$$

$$0 \rightarrow \mathcal{R}^0_Y \rightarrow \mathcal{R}^1_Y \rightarrow \dots = \mathcal{R}^\bullet_Y$$

$$0 \rightarrow \mathcal{R}^0_Z \rightarrow \mathcal{R}^1_Z \rightarrow \dots = \mathcal{R}^\bullet_Z$$

<sup>24</sup> возможно, стоит подробнее описать как устроено

<sup>25</sup>snake lemma

<sup>26</sup> строго полное вложение в производную категорию

Так как производный функтор точен для класса приспособленных объектов, мы получим выделенный треугольник после его применения к выделенному треугольнику, полученному на предыдущем шаге.

$$\mathcal{R}^\bullet_X \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet_Y \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet_Z \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet_Z[1]$$

$$\mathcal{K}^+\mathcal{R}^\bullet_X \rightarrow \mathcal{K}^+\mathcal{R}^\bullet_Y \rightarrow \mathcal{K}^+\mathcal{R}^\bullet_Z \rightarrow \mathcal{K}^+\mathcal{R}^\bullet_Z[1]$$

Когомологический функтор  $H^0$  сделает из выделенного треугольника длинную точную последовательность когомологий:

$$0 \rightarrow H^0\mathcal{D}^+\mathcal{R}^\bullet_X \rightarrow H^0\mathcal{D}^+\mathcal{R}^\bullet_Y \rightarrow H^0\mathcal{D}^+\mathcal{R}^\bullet_Z \rightarrow H^0 \circ [1](\mathcal{D}^+\mathcal{R}^\bullet_X) \rightarrow \dots$$

■

## 9.2 Функтор Ext по Йонедэ

**def 9.7.** Пусть  $\mathcal{A}$  – абелева категория. Расширением объекта  $C$  с помощью объекта  $A$  длины 1 будем называть короткую точную последовательность вида:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

Аналогично расширение длины  $n$  определим как:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B_1 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow C \rightarrow 0$$

**def 9.8.** Два расширения называются эквивалентными, если существует морфизм расширений как комплексов  $\alpha = \{\alpha_i\}_i^n$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \alpha_1 & & & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B'_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B'_n & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Com 9.9.** Введённое отношение эквивалентности не является отношением эквивалентности. Правильное определение должно являться минимальным отношением такого вида. Правильнее было бы сказать, что расширения должны быть квазиизоморфны как комплексы, однако, проверка квазиизоморфности комплексов крайне алгоритмически сложна. Но в силу того, что мы рассматриваем ациклические комплексы, проверка квазиизоморфности может быть выполнена за  $2n$  шагов.

В случае расширений длины 1 по лемме о 5 два расширения будут эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны средние члены последовательностей.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \cong & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Таким образом может быть определено множество классов эквивалентности расширений  $\text{Ext}^1(C, A)$ .

**Ex 9.10.** Неэквивалентные расширения  $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Ex 9.11.**  $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}_m, A) = A/mA$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}_n(c) \longrightarrow 0 \\ & & g & & \alpha g = \text{mu} & & \\ & & & & & & a \longmapsto c \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \forall b \in B, \quad h \in \{1, \dots, m-1\} \\
& \alpha b = a + hu \\
& mb = m\alpha a + h(\mu u) \\
& \quad \quad \quad \in \ker \beta \\
& \mu u = \alpha g, \quad g \in A \\
& (\alpha a + hu) + (\alpha a' + h'u) = \begin{cases} \alpha(a + a') + (h + h')u, & h + h' \leq m \\ \alpha(a + a' + g) + (h + h' - m)u, & h + h' \geq m \end{cases}
\end{aligned}$$

Задание элемента  $g$  однозначно задаёт сложение в группе  $B$ . Несмотря на то, что сам элемент  $g$  определён неоднозначно, класс смежности в образе определён однозначно. Это и означает, что существует биекция между классами смежности и всевозможными расширениями  $\mathbb{Z}_m$ .

### 9.3 Сложение по Бэру

Приведённый пример наводит на мысль, что на множестве  $\text{Ext}'$  ов может быть задана групповая структура. Может и будет задана. Для этого введём сложение расширений по Бэру:

**Claim 9.12.** Пусть есть расширение  $E: A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$  и морфизм  $\gamma: C' \rightarrow C$ . Тогда  $\exists!$  расширение  $E'$ , которое начинается на  $A$  и заканчивается на  $C'$ , задаваемое морфизмом комплексов  $(\text{id}_A, \delta, \gamma): E' \rightarrow E$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \overset{a}{A} & \longrightarrow & B \times_C C' & \xrightarrow{\beta'} & C' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \delta & & \downarrow \gamma \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B_a & \xrightarrow{\beta} & C_0 \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
B \times_C C' &= \{(b, c) \in B \oplus C' \mid \beta\delta(b) = \gamma\beta'(c)\} \\
\delta(b, c) &= b \\
\beta'(b, c') &= c'
\end{aligned}$$

Проведя двойственные рассуждения можем получить аналогичное утверждение для  $\gamma': A \rightarrow A'$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \gamma' & & \downarrow \delta & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & A' \coprod_A B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0
\end{array}$$

Опишем теперь алгоритм сложения двух расширений:

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 &= 0 \rightarrow A \rightarrow B''' \rightarrow C \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow A \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \coprod_{A \oplus A} B'' = B''' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & A \oplus A & \longrightarrow & (B \oplus B') \times_{C \oplus C} C = B'' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Delta \\
0 & \longrightarrow & A \oplus A & \longrightarrow & B \oplus B' & \longrightarrow & C \oplus C \longrightarrow 0
\end{array}$$

Итак, мы ввели сложение расширений по Бэру, задав на них групповую структуру. Несложно убедиться, что нейтральным по сложению элементом данной группы является тривиальное расширение  $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C \rightarrow 0$ .

## 9.4 Сложение Ext длины n

Пусть имеем два расширения  $\xi, \xi'$  и морфизм комплексов, тождественный на  $A$  и  $B$ .

$$\begin{array}{ccccccc} \xi: & 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & X_n & \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow A \rightarrow 0 \\ & & & \downarrow \text{id}_B & & & \downarrow \text{id}_A \\ \xi': & 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & X'_n & \rightarrow \cdots \rightarrow X'_1 \rightarrow A \rightarrow 0 \end{array}$$

Тогда суммой по Бэру двух таких расширений будет комплекс

$$0 \rightarrow B \longrightarrow X''_n \longrightarrow X_{n-1} \oplus X'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_2 \oplus X'_2 \longrightarrow X''_1 \longrightarrow A \rightarrow 0$$

$$X_n \coprod_B X'_n$$

$$X_1 \times_A X'_1$$



## Семинар 10

(Темы: Класс приспособленных объектов, градуированная алгебра  $\text{Ext}$ )

Пусть  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – абелевы категории.  $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{D}^-\mathcal{F}} \mathcal{D}^-(\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}^0 \circ (\mathbf{n})} \mathcal{B}$

$\mathcal{R}^{\mathbf{n}}\mathcal{F}$

**def 10.1.** Объект  $X$  называется  $\mathcal{F}$ -ациклическим, если  $\mathcal{R}^n \mathcal{F}(X) = 0 \ \forall n \neq 0$ .

Обозначим  $\mathcal{Z}$  класс  $\mathcal{F}$ -адиклических объектов. До сих пор мы получали существование производного функтора из наличия приспособленного класса. Имеет место следующее частичное обращение этого рассуждения:

**Claim 10.2.**  $\exists$  класс приспособленных к  $\mathcal{F}$  объектов  $\Leftrightarrow \exists$  достаточно большой<sup>27</sup>  $\mathcal{Z}$ .

*Доказательство.* Проведём доказательство для точного слева функтора  $\mathcal{F}$ .

$\Leftarrow$  Пусть  $\mathcal{R}$ - класс приспособленных к  $\mathcal{F}$  объектов. Тогда  $\mathcal{DF}(X[0]) \stackrel{\text{qis}}{\cong} \mathcal{F}(X)[0] \forall X \in \mathcal{R}$ , поэтому  $\mathcal{R} \subset \mathcal{Z}$  и  $\mathcal{Z}$ - достаточно большой, так как  $\mathcal{R}$ - достаточно большой.

⇒ Пусть теперь  $\mathcal{R} \subset \mathcal{Z}$  – достаточно большой подкласс  $\mathcal{F}$ -ациклических объектов. Чтобы установить приспособленность достаточно показать, что  $\mathcal{F}$  переводит ациклические комплексы из  $\text{Kom}^{\pm}(\mathcal{R})$  в ациклические. Если мы имеем ациклическую тройку вида  $0 \rightarrow K^0 \rightarrow K^1 \rightarrow K^2 \rightarrow 0$ , то точность  $0 \rightarrow \mathcal{F}(K^0) \rightarrow \mathcal{F}(K^1) \rightarrow \mathcal{F}(K^2) \rightarrow 0$  следует из  $\mathcal{R}^1\mathcal{F}(K^0) = 0$ . В общем случае можно отщипывать точные тройки следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & K^0 = X^0 & \xrightarrow{d^0} & K^1 & \xrightarrow{d^1} & K^2 \longrightarrow \dots \\
& & & & \searrow & \uparrow & \\
& & & & & \text{imd}^1 = X^1 & \\
& & & & & X^i = \text{imd}^i & 
\end{array}$$

Далее так как  $X^i, K^{i+1} \in \mathcal{Z} \Rightarrow X^i \in \mathcal{Z} \Rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}(X^i) \rightarrow \mathcal{F}(K^{i+1}) \rightarrow \mathcal{F}(X^{i+1}) \rightarrow 0$  – точны  $\Rightarrow \mathcal{F}(K^\bullet)$  – ацикличен.

**Claim 10.3.**  $\forall$  достаточно большой  $\mathbb{Z}$  приспособлен к  $\mathcal{F}^{28}$

**Claim 10.4.** *В достаточно большом  $\mathbb{Z}$  лежат все инъективные<sup>29</sup> и проективные<sup>30</sup> объекты категории  $\mathcal{A}$ .*

Пусть есть расширение  $\text{Ext}^1(C, A)$  и морфизм  $\alpha: A \rightarrow X$ . Если  $\alpha$  продолжаем на  $B$ , то есть  $\exists \alpha': B \rightarrow X$ , тогда можно построить диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow (\alpha' \pi) & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & X \oplus C & \rightarrow & C \rightarrow 0 \end{array}$$

$$X \coprod_A B$$

Таким образом можно сказать, что существование нетривиальных Ext'ов препятствует продолжению морфизмов.

## 10.1 Умножение Ext' ов

Пусть имеем 2 расширения длины 1  $\gamma \in \text{Ext}^1(C, A)$  и  $\delta \in \text{Ext}^1(Z, C)$ . Опустив  $C$  в цепочке морфизмов мы получим некоторый элемент  $\text{Ext}^2(Z, A)$ .

$$\begin{array}{lcl} \gamma: & 0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow 0 \\ \delta: & 0 \longrightarrow C \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \\ \gamma * \delta: & A \longrightarrow X \longrightarrow C' \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

<sup>27</sup> $\forall X \in \mathcal{A}$  является подобъектом  $\mathcal{F}$ -ацикличного (если  $\mathcal{F}$ -точен слева), или факторобъектом ацикличного (если  $\mathcal{F}$ -точен справа)

<sup>28</sup>любой класс приспособленных лежит в достаточно большом  $Z$ .

29 точный справа

30 ТОЧНЫЙ слева

$$*: \text{Ext}^m(C, A) \times \text{Ext}^n(Z, C) \rightarrow \text{Ext}^{n+m}(Z, A)$$

Таким образом может быть задана структура градуированной алгебры<sup>31</sup>  $\text{Ext}_{\mathbf{R}}^{\bullet}(A, A)$ ,  $A \in \mathbf{R}\text{-mod}$ .  
 $\text{Ext}_{\mathbf{R}}^{\bullet}(A, B)$  – это модуль над  $\text{Ext}_{\mathbf{R}}^{\bullet}(A, A)$ ,  $A, B \in \mathbf{R}\text{-mod}$

**Claim 10.5.**

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(A, B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A[0], B[i]) & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow A \\ & \searrow & & & & & \searrow \\ & & B[-n] & & & & A[0] \end{array}$$

Про сщепление комплексов по общему крайнему члену писать пока лень... Потом добавлю

**Claim 10.6.**

$$\text{Ext}^n(A, -) = \mathbf{R}^n\text{Hom}(A^{\bullet}, -)$$

<sup>31</sup>градуированной некоммутативной  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -алгебры при совпадающих аргументах, если не фиксировать аргумент, то алгебра градуирована целыми неотрицательными числами и парами объектов

**Семинар 11****(Темы: Ext, gldim, pd, фильтрованная категория)**

Ранее мы добились того, что смогли определить функтор, действующий между производными категориями и являющийся точным в смысле производной категории. Для точного слева функтора  $\text{Hom}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  был таким образом определён функтор  $\mathbf{R}\text{Hom}(A, -) : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathbf{Ab})$ .

Также для  $\text{Hom}$  был определен  $\text{Ext}^i(A, -) = H^i(\mathbf{R}\text{Hom}(A, -)) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  – классический производный функтор, но этот функтор действует между обычными абелевыми категориями. Также была показана следующая связь между этими сущностями  $\text{Ext}^i(A, B) = \mathbf{R}\text{Hom}(A, B[i])$ . Докажем следующее утверждение, являющееся вообще говоря общим свойством всех производных функторов:

**Claim 11.1.** Не бывает отрицательных  $\text{Ext}'$ ов.

$\forall A, B \in \mathcal{A} \text{ Ext}^n(A, B) = 0, n < 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $0 \neq f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, B[-n])$

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & & B[-n] \end{array} \sim \begin{array}{ccc} & M & \\ \swarrow \tau_n \neq 0 & & \searrow \\ A & & B[-n] \end{array}$$

■

**Напоминание:** Для точного справа функтора  $F$  и короткой точной последовательности  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$   $\exists$  когомологическая последовательность  $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow R^1F(A) \rightarrow R^1F(B) \rightarrow \dots$ . Введём понятие глобальной размерности. Это некоторая мера того, насколько сложно устроена категория, насколько длинные могут возникать последовательности.

**def 11.2.** Говорят, что  $\mathcal{A}$  имеет глобальную(гомологическую) размерность  $n \in \mathbb{N}$ , если  $n$  – наибольшее такое число, что  $\exists X, Y \in \mathcal{A} : \text{Ext}(X, Y)^n \neq 0$

$$\text{gldim}(\mathcal{A}) = n$$

Если такого числа нет, говорят, что категория имеет бесконечную глобальную размерность:

$$\text{gldim}(\mathcal{A}) = \infty$$

**Thr 11.3.** Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $\text{gldim } \mathcal{A} = 0$
2.  $\text{Ext}^1(X, Y) = 0 \forall X, Y \in \mathcal{A}$
3.  $\mathcal{A}$  – полупроста.

*Доказательство.* •  $1 \Rightarrow 2$  см. 11.2

•  $3 \Leftrightarrow 2$  см. определение по Йонедэ

•  $3 \Rightarrow 1$  Для  $n = 1$  – очевидно. Пусть для  $n - 1$  также имеем расщипимое расширение

$$0 \rightarrow Y \rightarrow A_1 \rightarrow B \rightarrow 0 \quad B \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow X \rightarrow 0$$

Но тогда их композиция тоже расщипима:

$$0 \rightarrow Y \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow X \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{Ext}^n(X, Y) = 0 \forall X, Y \in \mathcal{A}$$

■

**Ex 11.4.**  $\text{gldim Vect}_k = 0$

**def 11.5.** Проективная размерность  $X \in \mathcal{A}$

$$\text{pd } X = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists Y : \text{Ext}^n(X, Y) \neq 0\}$$

**Prop 11.6.**

$$\text{pd } X = 0 \Leftrightarrow X \text{ – проективный}$$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  очевидно из определения по Йонедэ, так как  $\forall$  короткая точная последовательность, заканчивающаяся на проективном объекте – расщипима.

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P & & & \\ & & & \swarrow \downarrow \varphi & & & \\ 0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C \rightarrow 0 \\ & & & & \text{Hom}(P, B) & \rightarrow & \text{Hom}(P, C) \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi - \text{поднимается} \end{array}$$

■

**Lem 11.7.** Пусть имеем проективную резольвенту  $P_\bullet$ :

$$0 \rightarrow X' \rightarrow P_{-k} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

Тогда

$$\text{pd } X' = \max\{\text{pd } X - k + 1, 0\}$$

*Доказательство.* Определим отображение склейки расширений  $\gamma: \text{Ext}^d(X', Y) \rightarrow \text{Ext}^{d+k+1}(X, Y)$ .

Если  $d = 0$ , то  $\gamma$  – epi(surj).

Если  $d \geq 1$ , то  $\gamma$  – iso.

1. База:  $k = 0$

$$0 \rightarrow X' \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$$

$$\text{Ext}_0^d(P, Y) \rightarrow \text{Ext}^d(X', Y) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}^{d+1}(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_0^{d+1}(P, Y) \rightarrow 0$$

2. Пусть верно для  $k - 1$ , тогда

$$\text{Ext}^d(X', Y) \rightarrow \text{Ext}^{d+1}(X', Y) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}^{d+k+1}(X, Y)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X' & \rightarrow & P_{-k-1} & \rightarrow & P_{-k} \rightarrow \dots \\ & & & & \searrow & \uparrow & \\ & & & & & X'' & \end{array}$$

$$0 \rightarrow \text{Ext}^d(X', Y) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}^{d+1}(X, Y) \rightarrow 0$$

32

■

**Corr 11.8.**

$$\text{pd } X \leq k \Rightarrow \exists \text{ проективная резольвента длины } \leq k$$

**Prop 11.9.**

$$\boxed{\text{gldim } \mathcal{A} = \sup_{X \in \mathcal{A}} \text{pd } X} \quad (11.1)$$

## 11.1 Ext как производный функтор

**def 11.10.** категория  $\mathcal{I}$  называется фильтрованной, если выполняется:

$$\forall i, j \in \mathcal{I} \quad \exists k: \begin{array}{ccc} i & & \\ & \searrow & \\ j & \rightarrow & k \end{array} \quad (11.2)$$

$$\forall i, j \in \mathcal{I}, u, v: i \rightarrow j \quad \exists \omega: j \rightarrow k: \omega u = \omega v \quad i \xrightarrow[v]{u} j \xrightarrow{\omega} k \quad (11.3)$$

Пусть есть функтор  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  и функтор копредела  $\text{colim}: \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{A}$ .

Сформулируем следующее утверждение, которое является важным техническим требованием для ряда задач:

<sup>32</sup>Неформально можно сказать так: проективная размерность ядра длинной точной последовательности проективных объектов не может быть очень большой.

**Claim 11.11.** Пусть  $\mathcal{A} = \mathcal{R}\text{-mod}$  – категория модулей над кольцом,  $\mathcal{J}$  – фильтрованная категория, тогда функтор  $\text{colim}: \mathcal{A}^{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{A}$  точен.

Доказательство. <sup>33</sup>

- Точность справа очевидна. <sup>34</sup>
- <sup>35</sup>

**Lem 11.12.**  $a \in \text{colim}_{i \in \mathcal{J}} A_i$ , то  $a$  поднимается до  $a_{i_0} \in A_{i_0}$ .

Доказательство. Определим морфизмы  $\mathcal{F}(i \rightarrow j) = \varphi_{ij}: A_i \rightarrow A_j$ . Каждое слагаемое канонически вкладывается в сумму  $\lambda_i: A_i \rightarrow \bigoplus A$  так, что  $\lambda_i = \lambda_j \varphi_{ij}$ . Это значит, что любой морфизм из  $\text{colim}$  имеет прообраз в  $\bigoplus A$  вида  $\sum \alpha_j a_j$ , где  $J < \infty$ .

Изобразим на диаграмме конус функтора  $\mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & A_j & \longrightarrow & \dots \\ & & \searrow \lambda_i & & \downarrow \lambda_j & \searrow \alpha & \\ & & & & \bigoplus_J A & \longrightarrow & \text{colim}_{i \in \mathcal{J}} A \longrightarrow 0 \end{array}$$

Имея условие фильтрованности категории  $\mathcal{J}$  можем применить лемму Цорна и найти максимальный элемент среди таких прообразов, то есть любой элемент копредела имеет прообраз в одном конкретном модуле. <sup>36</sup>

$$\exists i_0 = \sup J : \quad \forall j \in J \quad \exists j \rightarrow i_0$$

$$\varphi_{ji_0}(a_i) \in A_{i_0}$$

$$\sum_J \alpha_i a_i \mapsto a$$

■

Продолжаем доказательство исходного утверждения. Покажем, что в категории  $\mathcal{R}\text{-mod} \text{colim}$  – точен.

$$A = \text{colim}_{i \in \mathcal{J}} A_i$$

$$B = \text{colim}_{i \in \mathcal{J}} B_i$$

Пусть есть мономорфизм  $m_i: A_i \rightarrow B_i$ . Пусть  $t$  – это индуцированный морфизм (после взятия копредела). Теперь

$$\forall a \neq 0 \in A \quad \exists a_i \in A_i: \quad t_i(a_i) \neq 0 \quad t_i\text{--mono}$$

$$t_i(a_i) = t_j(\varphi_{ij}(a_i)) \mapsto t \neq 0 \in \text{colim}$$

Соответствует ненулевому элементу в коядре.

■

в категории  $\mathbf{Ab}^{\text{op}} = (\mathbb{Z}\text{-mod})^{\text{op}} \approx \mathbf{Ab}$ . Может разберём не разобрали....

**Claim 11.13.**  $\text{Ext}$  и  $\text{colim}$  (фильтрованный) коммутируют.

Произвольная грппа является фильтрованным копределом  $M = \text{colim}_{i \in \mathcal{J}} M_i$

<sup>33</sup>Для точности справа нужно, чтобы  $\mathcal{F}(\text{epi}) = \text{epi}$ , для точности слева  $\mathcal{F}(\text{mono}) = \text{mono}$

<sup>34</sup>Точность справа функтора  $\text{colim}$  следует из его сопряженности слева диагональному функтору  $\Delta$ .  $(\text{colim} \dashv \Delta \dashv \text{lim})$  Левые сопряженные функторы сохраняют копределы, в частности, сохраняют коядра, а значит эпиморфизм переводят в эпиморфизм, что и нужно для точности справа. Эпиморфизмы на уровне

<sup>35</sup>Нужно показать, что, если был мономорфизм на уровне диаграм, то он останется и мономорфизмом на уровне копределов.

<sup>36</sup>Копредел – это терминальный элемент в категории конусов под функтором, то есть такое семейство морфизмов, в которое мы можем попасть из любого другого семейства морфизмов. Копредел функтора действующего из фильтрованной категории можно понимать как семейство морфизмов, действующее в объединение своих образов. Категория является фильтрованной тогда и только тогда, когда существует конус под каждой конечной диграммой.

**Семинар 12**  
(Темы: Функтор  $\text{Tor}$ )

**Note 12.1.** Если в  $\mathcal{A}$  достаточно много проективных объектов и  $\text{gldim } \mathcal{A} = n$ , а  $\mathcal{F}$  – точный справа функтор, то

$$\forall m > n \quad L^m \mathcal{F}(X) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{A}$$

**Note 12.2.** Комплекс де-Рама является резольвентой постоянного пучка на гладком многообразии.

**Claim 12.3.** Пусть в  $\mathcal{A} \in \mathbf{Ab}$  имеем комплекс  $K^\bullet$  с двумя нетривиальными соседними когомологиями.

$$H^n(K^\bullet) = \begin{cases} H^0, & n = 0 \\ H^1, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Комплекс такого вида классифицируется с помощью  $H^0$ ,  $H^1$  и  $\text{Ext}^2(H^1, H^0)$  с точностью до  $\text{qis}$ .

**Hint:** Под классификацией понимаются соответствующие классы эквивалентности квазиизоморфных комплексов в производной категории. Комплекс в производной категории будет квазиизоморфен комплексу с двумя нетривиальными членами<sup>37</sup>  $0 \rightarrow K^0 \rightarrow K^1 \rightarrow 0$ .

Такой комплекс достаивается до комплекса  $H^0 \rightarrow K^0 \rightarrow K^1 \rightarrow H^1 \in \text{Ext}^2(H^1, H^0)$ .

Любой  $\text{qis}$  задаёт эквивалентность расширений.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K^0 & \rightarrow & K^1 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \\ 0 & \rightarrow & H^0 & \rightarrow & H^1 & \rightarrow & 0 \\ \\ 0 & \rightarrow & H^0 & \rightarrow & K^0 & \rightarrow & K^1 & \rightarrow & H^1 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \\ 0 & \rightarrow & H^0 & \rightarrow & L^0 & \rightarrow & L^1 & \rightarrow & H^1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Но также любая эквивалентность расширений будет давать квазиизоморфизм комплексов. Эквивалентность расширений задаётся последовательностью домиков, определяющую квазиизоморфизм комплексов.

$$\begin{array}{ccccc} & & K^\bullet & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & K^\bullet & & L^\bullet & \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\ H^0[0] & & & & H^1[1] \end{array}$$

**def 12.4.**

$$\text{Tor}_n^R(A, -) = L_n(A \otimes)(-)^{38}$$

$$\text{Ext}^\bullet(A, -): \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \vdash \text{Tor}^\bullet(A, -): \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$$

**Ex 12.5.**  $\mathcal{A} \in \mathbf{Ab}$

$$\text{Tor}_n(\mathbb{Z}_p, A)$$

Для точного справа функтора выпишем проективную резольвенту

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot p} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}_p \rightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Далее применим к ней ковариантный функтор  $\otimes_{\mathbb{Z}} A(-)$  и вычислим когомологии

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\cdot p} & A \\ & \uparrow & \\ & 0 & \end{array}$$

<sup>37</sup> строго-полное вложение  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , обрезание комплексов

<sup>38</sup>  $A \otimes (-)$  – сопряженный слева к фуктору  $\text{Hom}$ , а значит он точен справа, значит у него есть левые производные

$$\mathrm{Tor}_0(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; A) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A = A/pA$$

$$\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; A) = \{a \in A \mid pa = 0\} - \text{элементы порядка } p$$

**Ex 12.6.** Пусть  $A$  – конечно порождена, то есть имеет структуру  $A = (\bigoplus_k \mathbb{Z}^k) \oplus (\bigoplus_{i=1, N} \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})$ . Тогда  $\mathrm{Tor}$  также будет раскладываться в сумму

$$\mathrm{Tor}_1(A; B) = \bigoplus_{i=1, N} \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}; B)$$

**Ex 12.7.** Если же  $A$  – произвольная группа, то она являясь пределом конечнопорядённых групп  $A = \varinjlim A_i$ , а также всегда представима в виде прямой суммы свободной группы и группы кручения  $A \cong \mathcal{T}A \oplus \mathcal{F}A \Rightarrow$  если  $A$  – без кручения, то  $\mathrm{Tor}(A; B) = 0$ .

**def 12.8.**  $A$  – **плоский**  $\Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1(A; B) = 0, \forall B$ .

**Claim 12.9.** Плоские модули – приспособлены к функтору  $(-) \otimes B$  ( $A \otimes (-)$  – точный).

**Claim 12.10.** Проективный модуль  $\Rightarrow$  плоский.

**Claim 12.11.** Если  $\mathcal{R}$  – **PID**<sup>39</sup>  $\Rightarrow$  (плоский)  $\Leftrightarrow$  (без кручения).

**Claim 12.12.**

$$A \in \mathbf{Ab}$$

$$\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}; A) = \mathcal{T}A - \text{кручение } A$$

$$\varinjlim \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

40

**Claim 12.13** ( $\mathcal{T} = 0, \mathrm{Tor} \neq 0$ ). Рассмотрим пример, когда модуль без кручения над кольцом  $\mathcal{R} \neq \mathbf{PID}$ , имеет ненулевые  $\mathrm{Tor}$ . Стандартным примером не **PID** является  $\mathcal{R} = \mathbf{k}[x, y]$ . Рассмотрим в нём модуль  $A = (x; y) \neq \mathbf{PI}$ . Напишем резольвенту Кошуля

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}} & \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}} & \mathbf{k} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}} & \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}} & (x; y) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Применяя функтор  $\mathbf{k}_{\mathbf{k}[x; y]} \otimes (-)$ , получаем комплекс с нулевыми морфизмами:

$$0 \rightarrow \mathbf{k} \xrightarrow{0} \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \xrightarrow{0} 0$$

$$\mathrm{Tor}_1(A, \mathbf{k}) = \mathbf{k} \neq 0$$

**Ex 12.14** (кольцо с делителями нуля). Пусть  $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_m, M = \mathbb{Z}_d \in \mathcal{R} - \mathrm{mod}, d|m$ .

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}_m \xrightarrow{m/d} \mathbb{Z}_d \rightarrow 0$$

Мы получили бесконечную циклическую проективную резольвенту.<sup>41</sup> Применим к ней  $\bigotimes_{\mathbb{Z}_m} B(-)$ :

$$\dots \xrightarrow{\cdot d} B \xrightarrow{\cdot m/d} B \xrightarrow{\cdot d} B \rightarrow 0$$

Теперь вычислим когомологии

$$\mathrm{Tor}_0(M; B) = B/dB$$

$$\mathrm{Tor}_{2k+1}(M; B) = \{b \mid \mathrm{ord}(b) = d\} / (m/d)$$

$$\mathrm{Tor}_{2k}(M; B) = \{b \mid \mathrm{ord}(b) = m/d\} / (d)$$

<sup>39</sup>КГИ

<sup>40</sup>при подстановке в  $\mathrm{Tor}$  получаем прямой предел подгрупп элементов имеющих заданный порядок для всех возможных порядков, то есть кручение группы.  $\varinjlim$  учитывает пересечения всех таких подгрупп

<sup>41</sup>Наличие делителей нуля тесно связано с бесконечной глобальной размерностью.

**Семинар 13****(Темы: Спектральные последовательности)**

Работаем, например, в категории  $\text{Kom}(A)$ . Будем говорить, что на объекте  $A$  задана убывающая регулярная фильтрация, то есть цепочка вложенных друг в друга подобъектов  $A \supset \dots F^p A \supset F^{p+1} A \supset \dots$ , регулярность означает, что:

- $\bigcap F^p A = 0$
- $\bigcup F^p A = A$

Тогда по такой последовательности можно построить **градуировочный фактор**  $E^p = F^p A / F^{p+1} A$ . "Пристёгивание" факторов к подмодулю будем обозначать как  $F^N \supset E^{N-1} \supset E^{N-2} \supset \dots$ . **Вопрос:** если известны все градуировочные факторы фильтрации, можем ли мы восстановить наш исходный объект?

**def 13.1.** Спектральной последовательностью является набор данных, состоящий из

- стопки листов с занумерованными клетками, в которых находятся объекты категории<sup>42</sup>
- дифференциала между объектами листа<sup>43</sup>
- изоморфизма между когомологиями и следующим листом<sup>44</sup>
- изоморфизма между пределом когомологий на трансфинитном листе и градуировочными факторами фильтрации
- объект на котором задана фильтрация

$$(E_r^{pq}, E^n, d_r^{pq}, \alpha_r^{pq}, \beta_r^{pq})$$

$$d_r^{pq}: E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

$$\alpha_r^{pq}: H_r^{pq}(E_r^{\bullet\bullet}) \rightarrow E_{r+1}^{pq}$$

Начиная с некоторого листа для любого члена все дифференциалы, которые быют из него и в него зануляются, то есть

$$\forall(p, q) \quad \exists r_0: \forall r \geq r_0 \quad \Leftrightarrow \quad d_r^{pq} = 0 \quad d_r^{p-r, q+r-1} = 0$$

Это означает, что когомологии с этого момента перестают меняться, а последовательность стабилизируется.

$E^n$  – это комплекс, на котором задана убывающая регулярная фильтрация  $\dots \supset \dots F^p E^n \supset F^{p+1} E^n \supset \dots$

$$E_{r_0}^{pq} \cong E_{\infty}^{pq}$$

$$\beta_r^{pq}: E_{\infty}^{pq} \rightarrow F^p E^{p+q} / F^{p+1} E^{p+q}$$

**Спектральная последовательность сходится к градуировочным факторам фильтрации.**

Гротендик придумал спектральные категории, чтобы ввести спектральные последовательности. Знание градуировочных факторов фильтрации не позволяет восстановить объект. Однозначности восстановления нет. **filtration respects differential structure**

**Ex 13.2** (Эйлера характеристика).  $\chi: \mathbf{Ab} \rightarrow G$ ,  $G$  – абелева группа. Фильтрация длины 1

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \quad \chi(B) = \chi(A) + \chi(C)$$

$$\chi(K^{\bullet}) = \sum (-1)^n \chi(K^n) = \sum (-1)^n \chi(H^n(K^{\bullet}))$$

$$\chi(E^n) = ?$$

$E_r^{pq} \Rightarrow E^n$  Вычислим альтернированную сумму на листе  $r$

$$E_{pq}^{\bullet} = \bigoplus_{p+q=\bullet} E_r^{pq}$$

$$\chi(E_r^{\bullet\bullet}) = \sum (-1)^k \chi(H^k(E_r^{\bullet})) = \chi(E_{r+1}^{\bullet}) = \dots = \chi(E_{\infty}^{\bullet})$$

$$\chi(E^n) = \sum \chi(F^p E^n / F^{p+1} E^n) = \chi(E_{\infty}^{\bullet\bullet})$$

<sup>42</sup>  $r$  – номер листа, а  $p, q$  – номер клетки

<sup>43</sup> бьёт обобщённым "ходом коня на нудевом шаге он бьёт вправо, потом вверх, а потом всегда попадает на соседнюю диагональ

<sup>44</sup> на каждом следующем листе стоят когомологии предыдущего, дифференциалы на каждом следующем листе индуцированы



### 13.1 Фильтрованный комплекс

Пусть  $E^n$  – комплекс, на котором задана фильтрация. Отметим, что дифференциал "не понижает градус фильтрации", т. е.  $d(F^p E^n) \subset F^p E^{n+1}$ . Можем рассмотреть два варианта фильтрации:

- Глухая фильтрация

$$\begin{aligned} \tilde{F}_p E^n &= \begin{cases} 0, & n < p \\ E^n, & n \geq p \end{cases} \\ H^n(\tilde{F}^p E^n) &= \begin{cases} 0, & n < p \\ \ker d^p, & n = p \\ E^n, & n > p \end{cases} \\ \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E^{n+1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & E^{n-1} & \longrightarrow & E^n & \longrightarrow & E^{n+1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & E^{n-1} & \longrightarrow & E^n & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \end{array} \end{aligned}$$

- Каноническая фильтрация

$$\begin{aligned} F_p E^n &= \begin{cases} E^n, & n < -p \\ \ker d^p, & n = -p \\ 0, & n > -p \end{cases} \\ H^n(F^p E^\bullet) &= \begin{cases} 0, & n > -p \\ H^n(E^\bullet), & n \leq -p \end{cases} \\ \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & E^{-p-1} & \longrightarrow & E^{-p} & \longrightarrow & E^{-p+1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & \updownarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & E^{-p-1} & \longrightarrow & \ker d^{-p} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \end{array} \end{aligned}$$

**Ех 13.3** (Спектральная последовательность фильтрованного комплекса  $K^\bullet$ ). Для фильтрованного комплекса существует спектральная последовательность.

Определим следующие группы элементов комплекса: [13.1](#) группа элементов, лежащих в  $F^p K^{p+q}$  члене фильтрации, у которых дифференциал углубляет фильтрационный номер не более чем на  $r$ , [13.2](#) элементы, у которых номер фильтрации углубляется более чем на  $r$  при применении дифференциала и границы [13.3](#). С помощью этих элементов мы определим элементы спектральной последовательности по формуле [13.4](#), нулевой лист спектральной последовательности будет иметь вид [13.5](#) возможно надо  $Z$  заменить на  $G$ , например

$$Z_r^{p,q} = d^{-1}(F^{p+r} K^{p+q+1}) \cap F^p K^{p+q} \quad (13.1)$$

$$Z_{r-1}^{p+1,q-1} = d^{-1}(F^{p+r} K^{p+q+1}) \cap F^{p+1} K^{p+q} \quad (13.2)$$

$$d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) = d(F^{p-r+1} K^{p+q+1}) \cap F^p K^{p+q+1} \quad (13.3)$$

$$E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \quad (13.4)$$

$$E_0^{p,q} = F^p K^{p+q} / F^{p+1} K^{p+q} \quad (13.5)$$

Утверждается, что спектральная последовательность, заданная элементами вида [13.4](#) будет сходиться к градуировочным факторам фильтрации комплекса.

Чтобы это проверить нужно установить следующее:

- Дифференциал корректно определён<sup>45</sup>
- Существуют изоморфизмы между когомологиями на соседних листах

$$\frac{Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \rightarrow \mathcal{Z}(E_r^{pq}) \quad (13.6)$$

$$\frac{dZ_r^{p-r,q+r-1} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \rightarrow \mathcal{B}(E_r^{pq}) \quad (13.7)$$

- Группы корректно определены, то есть

$$\mathcal{Z}(E_r^{pq})/\mathcal{B}(E_r^{pq}) = E_{r+1}^{pq}$$

Проверка происходит руками и с большим количеством индексов. Поехали...

### 1 Определение дифференциала<sup>46</sup>

$$d_r^{pq}: E_r^{pq} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

$$dZ_r^{pq} \subset Z_r^{p+r,q-r+1}$$

2 Изоморфизм между когомологиями 13.6 и 13.7 являются мономорфизмами, так как в числителе стоят подгруппы  $Z_r^{pq}$ , а фактор берётся по одним и тем же подгруппам. Теперь выпишем явно циклы. В них будут те элементы, по которым берётся фактор на следующем шаге, отфакторизованный по подгруппам из предыдущего шага

$$\mathcal{Z}(E_r^{pq}) = \frac{Z_r^{pq} \cap d^{-1} \left( Z_{r-1}^{p+r+1,q-2} + dZ_{r-1}^{p+1,q-1} \right)}{Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}}$$

Выполняем "по действиям":

$$(1) \quad d^{-1} \left( Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + dZ_{r-1}^{p+1,q-1} \right) = d^{-1} \left( Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \right) + Z_{r-1}^{p+1,q-1}$$

$$(2) \quad Z_r^{pq} \cap \left( d^{-1} \left( Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \right) + Z_{r-1}^{p+1,q-1} \right) = Z_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_r^{pq} \cap d^{-1} Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$$

$$(3) \quad Z_r^{pq} \cap d^{-1} Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} = \left( d^{-1} (F^{p+r} K^{p+q+1}) \cap F^p K^{p+q} \right) \cap d^{-1} \left( Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \right) \subset d^{-1} (F^{p+r+1} K^{p+q+1}) \cap F^p K^{p+q} \subset Z_{r+1}^{pq}$$

Таким образом, для любого элемента цикла нашёлся элемент в факторе, то есть 13.6 также является эпиморфизмом. Аналогично и 13.7 будет эпиморфизмом. Таким образом, заданные отображения действительно будут изоморфизмами.

3 Корректность определения подгрупп для изоморфизма Хотим показать, что фактор левой части 13.6 по левой части 13.7 это действительно когомологии, то есть из этих отображений действительно получается изоморфизм когомологий и членов спектральной последовательности следующего листа 13.4.

$$\alpha_r^{pq}: H(E_r^{pq}) \rightarrow E_{r+1}^{pq}$$

$$\frac{Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,q+r-1}} = \frac{Z_{r+1}^{pq}}{\underbrace{Z_{r+1}^{pq} \cap (Z_{r-1}^{p+1,q} + dZ_r^{p-r,q+r-1})}_{=Z_r^{p+1,q-1}}} = \frac{Z_{r+1}^{pq}}{Z_r^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,q+r-1}} \stackrel{\text{ур.1}}{=} E_{r+1}^{pq}$$

Если фильтрация конечна на каждом  $K^n$ , то спектральная последовательность сходится к градуировочным факторам когомологий:

$$E_\infty^{pq} = \frac{Z_r^{pq}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1}}, \quad Z_r^{pq} = \mathcal{Z}(F^p K^{p+q}), \quad Z_{r-1}^{p+1,q-1} = \mathcal{Z}(F^{p+1} K^{p+q}), \quad \bigoplus_{p+q=r} E_\infty^{pq} = \bigoplus \text{Gr} H^n(K^\bullet), \quad \text{при } r > r_0.$$

<sup>45</sup> Дифференциалы на когомологиях спектральной последовательности не могут быть восстановлены по начальным листам, на которых дифференциал унаследован из исходной фильтрации. Если известны первые несколько листов спектральной последовательности, то могут быть построены члены следующих листов, но не их дифференциалы.

<sup>46</sup> Обратим внимание, что для заданных групп для дифференциала на комплексе не выполнено  $d^2 = 0$ , в отличие от дифференциала на листах

<sup>47</sup> ассоциированное пространство

## 13.2 Лирическое отступление

Есть три основных источника спектральных последовательностей

- Спектральная последовательность фильтрованного комплекса
- Спектральная последовательность двойного комплекса
- Спектральная последовательность точной пары <sup>48</sup>

## 13.3 Двойной комплекс

**def 13.4.**  $K^{p,q}$  – двойной комплекс <sup>49</sup>

$$d^{\rightarrow}: K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$$

$$d^{\uparrow}: K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$$

$$d^{\rightarrow} d^{\uparrow} + d^{\uparrow} d^{\rightarrow} = 0$$

$$(d^{\rightarrow})^2 = (d^{\uparrow})^2 = 0$$

<sup>50</sup>

**def 13.5.** Тотальный комплекс

$$\text{Tot}^{\oplus}(K^{\bullet\bullet})^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$$

$$\text{Tot}^{\Pi}(K^{\bullet\bullet})^n = \prod_{p+q=n} K^{p,q}$$

**Claim 13.6.** Если комплекс находится в первом квадранте, то все суммы по диагоналям будут конечными

$$\text{Tot}^{\oplus} \cong \text{Tot}^{\Pi}$$

<sup>51</sup> Докажем следующее утверждение для двойного комплекса без использования спектральной последовательности

**Claim 13.7.** Пусть  $K^{\bullet\bullet}$  – ограничен (лежит в первом квадранте), а его строки или столбцы ациклически. Тогда  $\text{Tot}(K)^{\bullet}$  – ациклически.

*Доказательство.* Возьмём некоторый элемент диагонали  $(z_0, z_1, z_2, \dots, z_n)$  принадлежащий границам и покомпонентно распишем действие дифференциала в тотальном комплексе покомпонентно, полагая столбцы точными.

$$d(z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$

$$d^h z_0 + d^v z_1 = 0$$

$$d^h z_1 + d^v z_2 = 0$$

$$\dots$$

$$d^v z_n + dz_{n-1} = 0^{52}$$

Нужно поднять эти элементы на диагональ выше

$$b_0 \dots b_{n+1}$$

$$K^{20} \ni b_0 = 0$$

$$K^{10} \ni d^h(b_0) = z_0$$

$$\exists b_1: d^v(b_1) = z_0$$

$$d^v(z_1 - d^h b_1) = dz_1 + d^h d^v b_1 = d^v z_1 + d^h z_0 = 0 \Rightarrow \exists b_2: d^v b_2 = z_1 - d^h b_1$$

В силу конечности комплекса, итерационный процесс закончится. И продолжая далее по индукции мы получаем поднятие диагонали. ■

<sup>48</sup>Хатчер, Алгебраическая топология

<sup>49</sup> $p$  – горизонтально,  $q$  – вертикально

<sup>50</sup> так определённые дифференциалы вообще говоря не являются морфизмами комплексов, однако соглашение о знаках гарантирует, что индуцированный дифференциал в тотальном комплексе будет корректно определён, т. е.  $(d^v + d^h)^2 = d^{v2} + d^{h2} + d^v d^h + d^h d^v = 0$

<sup>51</sup> Спектральная последовательность двойного комплекса задаётся таким образом, что на тотальном комплексе существует две канонические фильтрации – по строкам и по столбцам. Из этих фильтраций получаются разные последовательности, имеющие один и тот же предел.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & K^{01} & \longleftarrow & K^{11} & \longleftarrow & K^{21} \longleftarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & K^{00} & \longleftarrow & K^{10} & \longleftarrow & K^{20} \longleftarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

## Приложение А

### Диаграммный поиск

**Thr A.1** (Фрейд-Митчелл). Для любой малой абелевой категории существует полный, строгий и точный функтор в  $\mathbf{R-mod}$  для некоторого кольца  $\mathbf{R}$ .

Благодаря этой теореме многие утверждения для диаграмм можно доказывать рассматривая объекты абелевой категории как модули, а морфизмы — как соответствующие гомоморфизмы. Приведём примеры.

**Prop A.2** (Лемма о пяти). Пусть в абелевой категории дана коммутативная диаграмма с точными строками.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Тогда если  $\beta, \delta$  — изоморфизмы,  $\alpha$  — эпиморфизм,  $\varepsilon$  — мономорфизм, то  $\gamma$  — изоморфизм.

*Доказательство.* Рассмотрим правую часть диаграммы и покажем, что  $\gamma$  — эпиморфизм.

$$\begin{array}{ccccccc} B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} c & \longmapsto & d & \longmapsto & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ c' & \longmapsto & d' & \longmapsto & 0 \end{array}$$

**Тут ошибка** Рассмотрим произвольный элемент  $c' \in C'$ . Из точности нижней строки его образом в  $E'$  будет 0.  $\varepsilon$  — мономорфизм, откуда его прообраз в  $E$  — ноль. Из точности верхней последовательности у него будет прообраз  $c$ . Это доказывает сюръективность.

Теперь рассмотрим правую часть диаграммы. Докажем инъективность  $\gamma$ .

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} a & \longmapsto & b & \longrightarrow & x = 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a' & \longmapsto & b' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

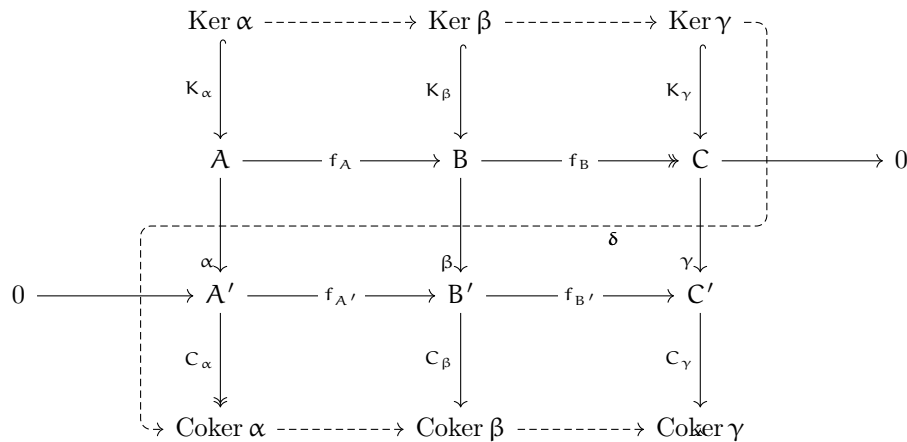
Пусть  $x \in \text{Ker } \gamma$ . Образом нуля в  $D'$  будет ноль.  $\delta$  — изоморфизм, откуда прообраз нуля в  $D$  будет ноль. Из коммутативности правого квадрата и точности верхней последовательности  $x$  имеет прообраз  $b \in B$ . Его образ  $\beta(b) = b'$  из точности нижней последовательности и коммутативности тогда имеет прообраз  $a' \in A'$ . Т. к.  $\alpha$  — эпиморфизм, то  $a'$  есть прообраз  $a \in A$ . Но верхняя строка точна, откуда  $x = 0$ . Это доказывает инъективность  $\gamma$ . ■

**Prop A.3** (Лемма о змее). Пусть в абелевой категории дана коммутативная диаграмма с точными строками.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

Тогда существует длинная точная последовательность.

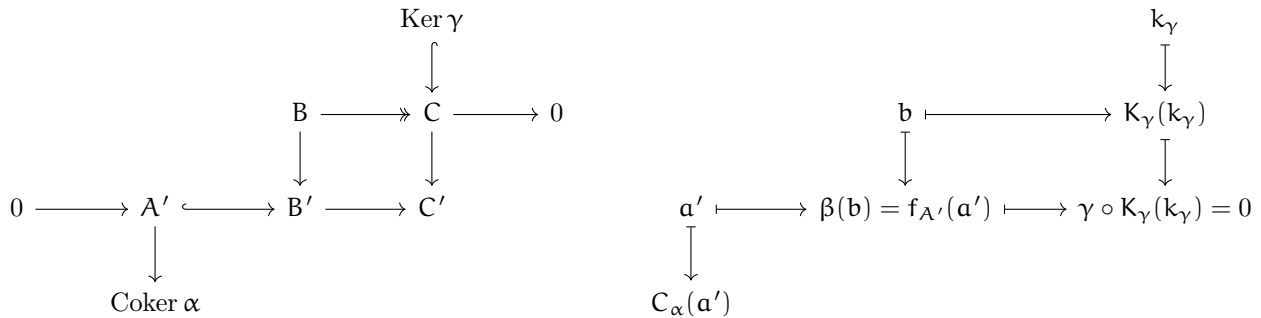
$$\text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow \text{Ker } \gamma \longrightarrow \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma$$

**Доказательство. Комедия в четырёх действиях****Добавить про нули в концах Построение морфизмов**

Построим искомые морфизмы. Из коммутативности диаграммы  $f_{A'} \circ \alpha \circ \kappa_\alpha = \beta \circ f_A \circ \kappa_\alpha = 0$ , где равенство нулю следует из  $\alpha \circ \kappa_\alpha = 0$ . Тогда по универсальному свойству ядра существует единственный морфизм  $\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \beta$ , делающий квадрат  $\text{Ker } \alpha$ ,  $\text{Ker } \beta$ ,  $A$ ,  $B$  коммутативным. Его мы и возьмём. Так строятся все морфизмы кроме "змеи"  $\delta : \text{Ker } \gamma \rightarrow \text{Coker } \alpha$ .

**Построение "змеи"**

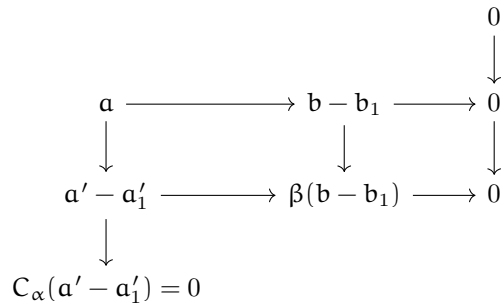
"Змею" мы построим диаграммным поиском.



Рассмотрим  $k_\gamma \in \text{Ker } \gamma$ . По определению ядра  $\gamma \circ K_\gamma(k_\gamma) = 0$ . Из сюръективности  $K_\gamma(k_\gamma)$  имеет прообраз  $b \in B$ . Тогда из коммутативности диаграммы и точности нижней строки имеем прообраз  $f_{A'}(a') = \beta(b)$ . Тогда искомый  $\delta(k_\gamma) = C_\alpha(a')$ .

**Корректность определения "змеи"**

Отметим, что определённый выше морфизм неоднозначен. Неоднозначность заключается в выборе  $b$ . Рассмотрим два различных  $b$  и  $b_1$ . "Вычтем" соответствующие диаграммы друг из друга.



Из точности  $b - b_1$  имеет прообраз  $f_A(a) = b - b_1$ , причем т. к.  $f_{A'}$  — мономорфизм имеем  $\alpha(a) = a' - a'_1$ . Тогда из коммутативности и по определению коядра соответственно получаем  $C_\alpha(a' - a'_1) = \alpha \circ C_\alpha(a' - a'_1) = 0$ .

**Доказательство точности**

Докажем точность в  $\text{Ker } \beta$  и  $\text{Ker } \gamma$ . Для коядер доказательство аналогично.

Пусть  $k_\alpha \in \text{Ker } \alpha$ . Из коммутативности его образ в  $\text{Ker } \gamma$  будет  $K_\gamma^{-1} \circ f_B \circ f_A \circ K_\alpha(k_\alpha)$ , причём  $f_B \circ f_A = 0$  из точности и  $K_\gamma$  — мономорфизм. Откуда образ в  $\text{Ker } \gamma$  будет ноль. Это доказывает вложение образа в ядро в члене

$\text{Ker } \beta$ .

$$\begin{array}{ccccc} k_\alpha & \longrightarrow & k_\beta & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_\alpha & \longrightarrow & f_A \circ K_\alpha(k_\alpha) & \longrightarrow & f_B \circ f_A \circ K_\alpha(k_\alpha) = 0 \end{array}$$

Пусть  $k_\beta$  лежит в ядре морфизма  $\text{Ker } \beta \rightarrow \text{Ker } \gamma$ . Тогда из точности верхней строки существует прообраз  $f_A(a) = K_\beta(k_\beta)$ . Из точности нижней строки и коммутативности диаграммы  $\alpha(a) = 0$ , откуда у  $a$  по определению ядра существует прообраз  $K_\alpha(k_\alpha) = a$ . Т. к.  $K_\beta$  — мономорфизм получим, что  $k_\alpha$  — прообраз  $k_\beta$ . Это доказывает вложение ядра в образ и, следовательно, точность в члене  $\text{Ker } \beta$ .

$$\begin{array}{ccccc} k_\alpha & \longrightarrow & k_\beta & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & \longrightarrow & K_\beta(k_\beta) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & & 0 \end{array}$$

Пусть теперь  $k_\gamma \in \text{Ker } \delta$ . Вспомним построение  $\delta$ , где теперь  $C_\alpha(a') = 0$ . Тогда по определению коядра существует прообраз  $\alpha(a) = a'$ , причём  $f_B \circ f_A(a) = 0$  и  $\beta \circ f_A(a) = \beta(b)$ . Это позволяет "вычесть" из правой части диаграммы образы  $a$ .

$$\begin{array}{ccccc} f_A(a) & & k_\gamma & & k_\beta \longrightarrow k_\gamma \\ \uparrow f_A & & \downarrow & & \downarrow \\ a & \longrightarrow & b & \longrightarrow & K_\gamma(k_\gamma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a' & \longrightarrow & \beta(b) = \beta \circ f_A(a) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ C_\alpha(a') & & & & 0 \end{array}$$

Тогда по определению ядра существует прообраз  $K_\beta(b - f_A(a))$ . Из коммутативности и инъективности  $K_\gamma$  получим, что  $k_\beta$  — прообраз  $k_\gamma$ . Это доказывает вложение ядра в образ в члене  $\text{Ker } \gamma$ .

Теперь пусть  $k_\beta \in \text{Ker } \beta$ . По определению ядра получим нули в  $B'$  и  $C'$ . Из инъективности  $f_A$  им соответствует 0 в  $A'$ . Соответственно построение морфизма даёт  $C_\alpha(0) = 0$ . Это доказывает вложение образа в ядро и, следовательно, точность в члене  $\text{Ker } \gamma$ .

$$\begin{array}{ccccc} k_\beta & \longrightarrow & k_\gamma & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ K_\beta(k_\beta) & \longrightarrow & K_\gamma(k_\gamma) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

■

**Prop A.4** (Лемма о зигзаге). Пусть есть короткая точная последовательность.

$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \longrightarrow 0$$

Тогда существуют связующие морфизмы  $\delta^i : H^i(M^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(K^\bullet)$ , делающие следующую последовательность

точной.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \dots \\
 & & \swarrow & & \\
 H^{i-1}(K^\bullet) & \xleftarrow{f^*} & H^{i-1}(L^\bullet) & \xrightarrow{g^*} & H^{i-1}(M^\bullet) \\
 & \swarrow \delta^{i-1} & & \nearrow & \\
 H^i(K^\bullet) & \xleftarrow{f^*} & H^i(L^\bullet) & \xrightarrow{g^*} & H^i(M^\bullet) \\
 & \swarrow \delta^i & & \nearrow & \\
 H^{i+1}(K^\bullet) & \xleftarrow{f^*} & H^{i+1}(L^\bullet) & \xrightarrow{g^*} & H^{i+1}(M^\bullet) \\
 & \swarrow & & \nearrow & \\
 \dots & & & & 
 \end{array}$$



## Приложение В

### Расслоённые суммы и произведения

**def B.1.** Пусть в категории  $\mathcal{C}$  дана пара морфизмов  $f : X \rightarrow Z$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ . Расслоённым произведением (pullback)  $X \amalg_Z Y$  называется объект  $P$  и пара морфизмов  $p_1 : P \rightarrow X$ ,  $p_2 : P \rightarrow Y$ , делающие диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & X \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad (B.1)$$

И обладающие следующим универсальным свойством. Для любого объекта  $Q$  с парой морфизмов  $q_1 : Q \rightarrow X$ ,  $q_2 : Q \rightarrow Y$ , дополняющих  $(f, g)$  до коммутативного квадрата, существует единственный морфизм  $u : Q \rightarrow P$ , делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ & \searrow u & & & \\ & & P & \xrightarrow{p_1} & X \\ & & p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} \quad (B.2)$$

Дуальным к нему будет понятие расслоённой суммы (pushout). В абелевой категории есть более простое и конструктивное описание. Чтобы показать это, воспользуемся следующей теоремой.

**Thr B.2.** Расслоённое произведение можно выразить как уравнитель пары морфизмов из произведения  $X \amalg Y$ . Тогда  $p_1 = \pi_X p$ ,  $p_2 = \pi_Y p$ .

$$X \amalg_Z Y \xrightarrow{p} X \amalg Y \xrightarrow[\pi_Y]{f\pi_X} Z$$

Дуально, расслоённую сумму можно выразить как коуравнитель пары морфизмов из копроизведения  $X \amalg Y$ . Тогда  $p_1 = p\pi_X$ ,  $p_2 = p\pi_Y$ .

$$Z \xrightarrow[\pi_Y]{i_Y g} X \amalg Y \xrightarrow{p} X \amalg_Z Y$$

*Доказательство.* Приведём доказательство для произведения. Доказательство для копроизведения аналогично.

$$\begin{array}{ccccc} Q & & & & \\ & \searrow u & & & \\ & & X \amalg_Z Y & \xrightarrow{p_1} & X \\ & & p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Дополнительные морфизмы и соотношения в диаграмме:

- $q_1 : Q \rightarrow X$ ,  $q_2 : Q \rightarrow Y$
- $p : X \amalg Y \rightarrow X \amalg_Z Y$
- $\pi_X : X \amalg Y \rightarrow X$ ,  $\pi_Y : X \amalg Y \rightarrow Y$
- $f : X \rightarrow Z$ ,  $g : Y \rightarrow Z$
- $p_1 = \pi_X p$ ,  $p_2 = \pi_Y p$
- $f\pi_X p = g\pi_Y p$  (уравнитель)

По определению уравнителя  $f\pi_X p = g\pi_Y p$ , откуда  $f p_1 = f\pi_X p = g\pi_Y p = g p_2$  и диаграмма (B.1) коммутует. Покажем универсальное свойство.

Пусть есть  $Q$  с двумя морфизмами  $q_1, q_2$  такими, что  $f q_1 = g q_2$ . Из универсального свойства произведения существует  $q$  такой, что  $\pi_X q = q_1$  и  $\pi_Y q = q_2$ . Отсюда  $f\pi_X q = g\pi_Y q$  и по универсальному свойству уравнителя получаем существование единственного  $u$  делающего диаграмму (B.2) коммутативной. ■

**Corr B.3.** В абелевой категории расслоённое произведение является ядром морфизма  $h : X \oplus Y \rightarrow Z$ ,  $h = f\pi_X - g\pi_Y$ . Иначе, в терминах модулей, это подмодуль  $X \oplus Y$  такой, что  $f(x) = g(y)$ .

$$X \prod_Z Y \sim \text{Ker}(f\pi_X - g\pi_Y).$$

Дуально для расслоённой суммы.

$$X \coprod_Z Y \sim \text{Coker}(i_X f - i_Y g).$$

Также в абелевой категории существуют все расслоённые суммы и произведения.

*Доказательство.* Напомним, что в абелевой категории:

- Произведение и копроизведение изоморфны.
- Уравнитель  $f, g$  изоморфен  $\text{Ker}(f - g)$ .
- Все ядра и коядра существуют

Применение этих трёх фактов вместе с теоремой B.2 даёт желаемое утверждение. ■

**Приложение С****Спектральная последовательность. Дополнительные примеры.**

**Ех С.1** (Элементарный пример, нефильтрованный). Самым простым примером спектральной последовательности является любой комплекс  $K_\bullet \in \text{Kom}(A)$ . Он естественно имеет дифференциал  $d_i^K: K_i \rightarrow K_{i+1}$ , поэтому на нулевом листе  $d_0 = d^K$ . Пусть  $E_0^\bullet = K_\bullet$ , тогда  $E_1^\bullet = H^\bullet(C_\bullet)$ , дифференциал индуцирует нулевые отображения на когомологиях, поэтому на первом листе мы имеем  $d_1 = 0$ . Из этого следует, что  $E_2 = E_\infty^\bullet$  и  $d_n = 0 \ \forall n \geq 2$ , таким образом, получаем следующую спектральную последовательность:

- $E_0 = K_\bullet$
- $E_r = H(K_\bullet) \ \forall r \geq 1$

Такая спектральная последовательность стабилизируется на первом листе, так как нетривиальные дифференциалы присутствовали лишь на нулевом.

**С.1 Доказательство леммы о змее с помощью спектральной последовательности**

Докажем лемму о змее [А.3](#), используя спектральную последовательность. Диаграмма в этой лемме представляет собой двойной комплекс  $C^{\bullet\bullet}$  с точными строками в абелевой категории.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{00} & \longrightarrow & C^{10} & \longrightarrow & C^{20} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \longrightarrow & C^{01} & \longrightarrow & C^{11} & \longrightarrow & C^{21} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Для такого комплекса существуют две спектральные последовательности, которые будут сходиться к когомологиям тотального комплекса  $H^{p+q}(\text{Tot}(C^{\bullet\bullet}))$ .

Нулевые листы этих последовательностей, естественно,  $E_0^{p,q} = C^{p,q}$  и  $E_0^{q,p} = C^{q,p}$ :

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 \\ C^{00} & C^{01} & 0 \\ C^{10} & C^{11} & 0 \\ C^{20} & C^{21} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|ccccc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{00} & C^{10} & C^{20} & 0 \\ 0 & C^{01} & C^{11} & C^{21} & 0 \\ \hline \end{array}$$

**С.2 Что-то о нётеровых кольцах**

Несколько примеров фильтрации из коммутативной алгебры.

**Ех С.2** (Фильтрация кольца). Убывающей мультипликативной фильтрацией кольца  $R$  называется убывающая последовательность идеалов вида

$$R = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

Удовлетворяющая условию  $I_i I_j \subset I_{i+j} \ \forall i, j$ . Эта конструкция чаще всего используется, в случае, когда  $I_j = I^j$  – степени одного идеала  $I$ , это называется  $I$ -адической фильтрацией. В приложениях чаще всего встречается ситуация локального нётерова кольца и его максимального идеала.

Полезно обобщить эту конструкцию на  $R - \text{mod}$  изучать фильтрации модулей

$$M \supset IM \supset I^2 M \supset \dots$$

Однако, пересекая члены такой фильтрации с некоторым подмодулем  $M' \subset M$  в общем случае мы не получим  $I$ -адическую фильтрацию  $M'$ .