Семинар 1
(Темы: Спектральные последовательности)

Работаем, например, в категории $\mathsf{Kom}(A)$. Будем говорить, что на объекте A задана убывающая регулярная фильтрация, то есть цепочка вложенных друг в друга подобъектов $A \supset \dots F^p A \supset F^{p+1} A \supset \dots$, регулярность означает, что:

- $\bigcap F^p A = 0$
- $\bigcup F^p A = A$

Тогда по такой последовательности можно построить **градуировочный фактор** $E^p = F^p A / F^{p+1} A$. "Пристёгивание"факторов к подмодулю будем обозначать как $F^N \sqsupset E^{N-1} \sqsupset E^{N-2} \sqsupset \dots$. **Вопрос:** если известны все градуировочные факторы фильтрации, можем ли мы восстановить наш исходный объект?

def 1.1. Спектральной последовательностью является набор данных, состоящий из

- стопки листов с занумерованными клетками, в которых находятся объекты категории[1]
- дифференциала между объектами листа [2]
- изоморфизма между когомологиями и следующим листом[3]
- изоморфизма между пределом когомологий на трансфинитном листе и градуировочными факторами фильтрации
- объект на котором задана фильтрация

$$(E_r^{pq}, E^n, d_r^{pq}, \alpha_r^{pq}, \beta^{pq})$$
$$d_r^{pq} \colon E_r^{pq} \to E_r^{p+r, q-r+1}$$
$$\alpha_r^{pq} \colon H_r^{pq}(E_r^{\bullet\bullet}) \to E_{r+1}^{pq}$$

Начиная с некоторого листа для любого члена все дифференциалы, которые бьют из него и в него зануляются, то есть

$$\forall (p,q) \quad \exists r_0 \colon \forall r \geqslant r_0 \quad \hookrightarrow \quad d_r^{pq} = 0 \quad d_r^{p-r, q+r-1} = 0$$

Это означает, что когомологии с этого момента перестают меняться, а последовательность стабилизируется.
E^n – это комплекс, на котором задана убывающая регулярная фильтрация $\dots \supset \dots F^p E^n \supset F^{p+1} E^n \supset \dots$.

$$E_{r_0}^{pq} \cong E_\infty^{pq}$$
$$\beta^{pq} \colon E_\infty^{pq} \to F^p E^{p+q} / F^{p+1} E^{p+q}$$

Спектральная последовательность сходится к градуировочным факторам фильтрации.

Гротендик придумал спектральные категории, чтобы ввести спектральные последовательности.
Знание градуировочных факторов фильтрации не позволяет восстановить объект. Однозначности восстановления нет. **filtration respects differentiall structure**

Ex 1.2 (Эйлерова характеристика)**.** $\chi \colon \mathbf{Ab} \to G$, G *– абелева группа. Фильтрация длины 1*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \qquad \chi(B) = \chi(A) + \chi(C)$$

$$\chi(K^\bullet) = \sum (-1)^n \chi(K^\bullet) = \sum (-1)^n \chi(H^n(K^\bullet))$$

$\chi(E^n) = ?$
$E_r^{pq} \Rightarrow E^n$ *Вычислим альтернированную сумму на листе* r

$$E_{pq}^\bullet = \underset{p+q=\bullet}{\oplus} E_r^{pq}$$

$$\chi(E_r^{\bullet\bullet}) = \sum (-1)^k \chi(H^k(E_r^\bullet)) = \chi(E_{r+1}^\bullet) = \dots = \chi(E_\infty^\bullet)$$
$$\chi(E^n) = \sum \chi(F^p E^n / F^{p+1} E^n) = \chi(E_\infty^{\bullet\bullet})$$

[1] r – номер листа, а pq – номер клетки
[2] бьёт обобщённым "ходом коня на нудевом шаге он бьёт вправо, потом вверх, а потом всегда попадает на соседнюю диагональ
[3] на каждом следующем листе стоят когомологии предыдущего, дифференциалы на каждом следующем листе индуцированы

1.1 Фильтрованный комплекс

Пусть E^n – комплекс, на котором задана фильтрация. Отметим, что дифференциал *"не понижает градус фильтрации"*, т. е. $d(F^pE^n) \subset F^pE^{n+1}$. Можем рассмотреть два варианта фильтрации:

- *Глупая фильтрация*

$$\widetilde{F}_pE^n = \begin{cases} 0, & n < p \\ E^n, & n \geqslant p \end{cases}$$

$$H^n(\widetilde{F}^pE^n) = \begin{cases} 0, & n < p \\ \ker d^p, & n = p \\ E^n, & n > p \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & E^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] \arrow[d] & E^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & E^n \arrow[r] \arrow[d] & E^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r] & E^n \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

- *Каноническая фльтрация*

$$F_pE^n = \begin{cases} E^n, & n < -p \\ \ker d^p, & n = -p \\ 0, & n > -p \end{cases}$$

$$H^n(F^pE^\bullet) \begin{cases} 0, & n > -p \\ H^n(E^\bullet), & n \leqslant -p \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] \arrow[d] & E^{-p-1} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & E^{-p} \arrow[r] \arrow[d] & E^{-p+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & E^{-p-1} \arrow[r] & \ker d^{-p} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Ex 1.3 (Спектральная последовательность фильтрованного комплекса $K^\bullet$)**.** *Для фильтрованного комплекса существует спектральная последовательность.*

Определим следующие группы элементов комплекса: 1 группа элементов, лежащих в F^pK^{p+q} члене фильтрации, у которых дифференциал углубляет фильтрационный номер не более чем на r, 2 элементы, у которых номер фильтрации углубляется более чем на r при применении дифференциала и границы 3. С помощью этих элементов мы определим элементы спектральной последовательности по формуле 4, нулевой лист спектральной последовательности буде иметь вид 5 возможно надо Z заменить на G, например

$$Z_r^{pq} = d^{-1}(F^{p+r}K^{p+q+1}) \bigcap F^pK^{p+q} \tag{1}$$

$$Z_{r-1}^{p+1;q-1} = d^{-1}(F^{p+r}K^{p+q+1}) \bigcap F^{p+1}K^{p+q} \tag{2}$$

$$d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) = d(F^{p-r+1}K^{p+q+1}) \bigcap F^pK^{p+q+1} \tag{3}$$

$$E_r^{pq} = \frac{Z_r^{pq}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \tag{4}$$

$$E_0^{pq} = F^pK^{p+q}/F^{p+1}K^{p+q} \tag{5}$$

Утверждается, что спектральная последовательность, заданная элементами вида 4 будет сходиться к градуировочным факторам фильтрации комплекса.

Чтобы это проверить нужно установить следующее:

- Дифференциал корректно определён[4]
- Существую изоморфизмы между когомологиями на соседних листах

$$\frac{Z^{pq}_{r+1} + Z^{p+1,q-1}_{r-1}}{Z^{p+1,q-1}_{r-1} + dZ^{p-r+1,q+r-2}_{r-1}} \quad \to \quad \mathcal{Z}(E^{pq}_r) \tag{6}$$

$$\frac{dZ^{p-r,q+r-1}_{r} + Z^{p+1,q-1}_{r-1}}{Z^{p+1,q-1}_{r-1} + dZ^{p-r+1,q+r-2}_{r-1}} \quad \to \quad \mathcal{B}(E^{pq}_r) \tag{7}$$

- Группы корректно определены, то есть

$$\mathcal{Z}(E^{pq}_r)/\mathcal{B}(E^{pq}_r) = E^{pq}_{r+1}$$

Проверка происходит руками и с большим количеством индексов. Поехали...

1 *Определение дифференциала*[5]

$$d^{pq}_r \colon E^{pq}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r$$
$$dZ^{pq}_r \subset Z^{p+r,q-r+1}_r$$

2 *Изоморфизм между когомологиями* 6 и 7 являются мономорфизмами, так как в числителе стоят подгруппы Z^{pq}_r, а фактор берётся по одним и тем же подгруппам. Теперь выпишем явно циклы. В них будут те элементы, по которым берётся фактор на следующем шаге, отфакторизованный по подгруппам из предыдущего шага

$$\mathcal{Z}(E^{pq}_r) = \frac{Z^{pq}_r \overset{(2)}{\bigcap} d^{-1}\left(Z^{p+r+1,q-2}_{r-1} + dZ^{p+1,q-1}_{r-1}\right)^{(1)}}{Z^{p+r+1,q-r}_{r-1} + dZ^{p-r+1,q+r-2}_{r-1}}$$

Выполняем "по действиям":

(1) $d^{-1}\left(Z^{p+r+1,q-r}_{r-1} + dZ^{p+1,q-1}_{r-1}\right) = d^{-1}\left(Z^{p+r+1,q-r}_{r-1}\right) + Z^{p+1,q-1}_{r-1}$

(2) $Z^{pq}_r \bigcap \left(d^{-1}\left(Z^{p+r+1,q-r}_{r-1}\right) + Z^{p+1,q-1}_{r-1}\right) = Z^{p+1,q-1}_{r-1} + Z^{pq}_r \overset{(3)}{\bigcap} d^{-1} Z^{p+r+1,q-r}_{r-1}$

(3) $Z^{pq}_r \bigcap d^{-1} Z^{p+r+1,q-r}_{r-1} = \left(d^{-1}\left(F^{p+r}K^{p+q+1}\right) \bigcap F^pK^{p+q}\right) \bigcap d^{-1}\left(Z^{p+r+1,q-r}_{r-1}\right) \quad \subset d^{-1}\left(F^{p+r+1}K^{p+q+1}\right) \bigcap F^pK^{p+q} \subset Z^{pq}_{r+1}$

Таким образом, для любого элемента цикла нашёлся элемент в факторе, то есть 6 также является эпиморфизмом. Аналогично и 7 будет эпиморфизмом. Таким образом, заданные отображения действительно будут изоморфизмами.

3 *Корректность определения подгрупп для изоморфизма.* Хотим показать, что фактор левой части 6 по левой части 7 это действительно когомологии, то есть из этих отображений действительно получается изоморфизм когомологий и членов спектральной последовательности следующего листа 4.

$$\alpha^{pq}_r \colon H(E^{pq}_r) \to E^{pq}_{r+1}$$

$$\frac{Z^{pq}_{r+1} + Z^{p+1,q-1}_{r-1}}{Z^{p+1,q-1}_{r-1} + dZ^{p-r,q+r-1}_{r}} = \frac{Z^{pq}_{r+1}}{\underbrace{Z^{pq}_{r+1} \bigcap (Z^{p+1,q}_{r-1}}_{=Z^{p+1,q-1}_r} + \underbrace{dZ^{p-r,q+r-1}_r)}_{\subset Z^{pq}_{r+1}}} = \frac{Z^{pq}_{r+1}}{Z^{p+1,q-1}_{r} + dZ^{p-r,q+r-1}_{r}} \overset{\text{ура!}}{=} E^{pq}_{r+1}$$

Если фильтрация конечна на каждом K^n, то спектральная последовательность сходится к градуировочным факторам когомологий:

$$E^{pq}_\infty = \frac{Z^{pq}_r}{Z^{p+1,q-1}_{r-1}}, \qquad Z^{pq}_r = \mathcal{Z}(F^pK^{p+q}), \qquad Z^{p+1,q-1}_{r-1} = \mathcal{Z}(F^{p+1}K^{p+q}), \qquad \bigoplus_{p+q=r} E^{pq}_\infty = \oplus \mathbf{Gr}H^n(K^\bullet), \qquad \text{при } r > r_0.$$

[6]

[4] Дифференциалы на когомологиях спектральной последовательности не могут быть восстановлены по начальным листам, на которых дифференциал унаследован из исходной фильтрации. Если известны первые несколько листов спектральной последовательности, то могут быть построены члены следующих листов, но не их дифференциалы.

[5] Обратим внимание, что для заданных групп для дифференциала на комплексе не выполнено $d^2 = 0$, в отличие от дифференциала на листах

[6] ассоциированное пространство

1.2 Лирическое отступление

Есть три основных источника спектральных последовательностей

- Спектральная последовательность фильтрованного комплекса
- Спектральная последовательность двойного комплекса
- Спектральная последовательность точной пары [7]

1.3 Двойной комплекс

def 1.4. Двойной комплекс K^{pq} [8] состоит из "матраса"объектов и двух дифференциалов – вертикального и горизонтального. Помимо стандартного $d^2 = 0$ также требуют, чтобы эти дифференциалы антикоммутировали.

$$\begin{gathered}
d^{\rightarrow}\colon K^{pq} \to K^{p+1,q} \\
d^{\uparrow}\colon K^{pq} \to K^{p,q+1} \\
d^{\rightarrow}d^{\uparrow} + d^{\uparrow}d^{\rightarrow} = 0 \\
(d^{\rightarrow})^2 = (d^{\uparrow})^2 = 0
\end{gathered}$$

[9]

def 1.5. Тотальный комплекс двойного комплекса определяется

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(K^{\bullet\bullet})^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{pq}$$

$$\mathrm{Tot}^{\Pi}(K^{\bullet\bullet})^n = \prod_{p+q=r} K^{pq}$$

Claim 1.6. *Если комплекс находится в первом квадранте, то все суммы и произведения по диагоналям будут конечными, что в абелевой категории влечёт:*

$$\mathrm{Tot}^{\oplus} \cong \mathrm{Tot}^{\Pi}$$

[10] Докажем следующее утверждение для двойного комплекса без использования спектральной последовательности

Claim 1.7. *Пусть $K^{\bullet\bullet}$ – ограничен (лежит в первом квадранте), а его строки* <u>*или*</u> *столбцы ацикличны. Тогда $\mathrm{Tot}(K)^{\bullet}$ – ацикличен.*

Доказательство. Возьмём некоторый элемент диагонали $(z_0, z_1, z_2, \dots, z_n)$ принадлежащий границам и покомпонентно распишем действие дифференциала в тотальном комплексе покомпонентно, полагая столбцы точными.

$$\begin{aligned}
&d(z_0, z_1, z_2, \dots z_n) = 0 \\
&d^h z_0 + d^v z_1 = 0 \\
&d^h z_1 + d^v z_2 = 0 \\
&\dots \\
&d^v z_n + dz_{n-1} = 0
\end{aligned}$$ [11]

Нужно поднять эти элементы на диагональ выше

$$\begin{aligned}
&b_0 \dots b_{n+1} \\
&K^{20} \ni b_0 = 0 \\
&K^{10} \ni d^h(b_0) = z_0 \\
&\exists b_1\colon d^v(b_1) = z_0 \\
&d^v(z_1 - d^h b_1) = dz_1 + d^h d^v b_1 = d^v z_1 + d^h z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists b_2\colon d^v b_2 = z_1 - d^h b_1
\end{aligned}$$

В силу конечности комплекса, итерационный процесс закончится. И, продолжая далее по индукции, мы получаем поднятие диагонали. ■

[7] Хатчер, Алгебраическая топология

[8] p– горизонтально, q – вертикально

[9] так определённые дифференциалы вообще говоря не являются морфизмами комплексов, однако соглашение о знаках гарантирует, что индуцированный дифференциал в тотальном комплексе будет корректно определён, т. е. $(d^v + d^h)^2 = d^{v2} + d^{h2} + d^v d^h + d^h d^v = 0$

[10] Спектральная последовательность двойного комплекса задаётся таким образом, что на тотальном комплексе существует две канонические фильтрации – по строкам и по столбцам. Из этих фильтраций получаются разные последовательности, имеющие один и тот же предел.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 & K^{01} \arrow[l] \arrow[d] & K^{11} \arrow[l] \arrow[d] & K^{21} \arrow[l] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
0 & K^{00} \arrow[l] \arrow[d] & K^{10} \arrow[l] \arrow[d] & K^{20} \arrow[l] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим два примера, когда один из тотальных комплексов оказывается неточным:

Ex 1.8 ($\mathsf{Tot}^{\oplus}$ – точен, $\mathsf{Tot}^{\prod}$ – нет)**.** *Ниже изображены два комплекса,* $L_1^{\bullet\bullet}$ *с точными столбцами и* $L_2^{\bullet\bullet}$ *с точными строками.*

$$L_1^{\bullet\bullet} \quad \begin{tikzcd}
\ldots & \mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\
\ldots & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & \underset{0-1}{\mathbb{Z}} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\
\ldots & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \underset{00}{\mathbb{Z}} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\
\ldots & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$L_2^{\bullet\bullet} \quad \begin{tikzcd}
\ldots & \mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\
\ldots & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\
\ldots & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

В первом случае рассмотрим тотальный комплекс суммы $\mathsf{Tot}^{\oplus}(L_1)$ $\mathsf{Tot}^{\oplus 0} \ni (1, 0, 0, \ldots)$, $\mathsf{Tot}^{\prod}(L_2) \ni (1, -1, 1, \ldots)$ *– не точен.*

Существует две стандартные фильтрации двойных комплексов – по строкам и по столбцам

$$F^p\mathsf{Tot}(L)^n = \bigoplus_{i+j=n, i\geqslant p} L^{ij}$$

$$F^q\mathsf{Tot}(L)^n = \bigoplus_{i+j=n, j\geqslant q} L^{ij}$$

Существует спектральная последовательность с $E_2^{pq} = H_I^q(H_{II}^p(L^{\bullet,q}))$, сходящийся к $H^{p+q}(\mathsf{Tot}(L^{\bullet\bullet}))$

Ex 1.9.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & B \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0
\end{tikzcd}$$

$\ker f = \operatorname{Coker} f = 0 \Rightarrow f$ – iso.

Ex 1.10.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \\
A \arrow[r] \arrow[u, two heads] & B \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"] & D \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & E \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$\ker f = \operatorname{Coker} f = 0 \Rightarrow f$ – iso.

Ex 1.11. $\mathsf{Tor}(A, B) \cong \mathsf{Tor}(B, A)$. *Выберем две проективные резолвенты:* $P_\bullet \to A$, $Q_\bullet \to B$.

$$(P_\bullet \otimes Q_\bullet)_{ij} = P_i \otimes Q_j$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longleftarrow & P_0 \otimes Q_2 & \longleftarrow & P_1 \otimes Q_2 & \longleftarrow & P_2 \otimes Q_2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longleftarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longleftarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longleftarrow & P_2 \otimes Q_1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longleftarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longleftarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longleftarrow & P_2 \otimes Q_0
\end{array}$$

$$0 \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow P_2$$

$$E_r^{pq} \Rightarrow \mathsf{Tor}^{p+q}(A, B) \cong \mathsf{Tor}^{p+q}(B, A)$$

Ex 1.12 (Спектральная последовательность Кюннета[12]). *Пусть* $P^{\bullet\bullet}$ *– ограниченный снизу комплекс плоских модулей, а* M *– произвольный модуль. Тогда существует спектральная последовательность с листом*

$$E_2^{pq} = \mathsf{Tor}_p(H_q(P), M) \quad \Rightarrow \quad H_{p+q}(P \otimes M)$$

Имеет место формула Кюннета:
Пусть дополнительно $d(P_\bullet)$ *– тоже плосский для* $\forall n$. *Тогда* $\exists k$*:*

$$0 \longrightarrow H_n(P) \longrightarrow H_n(P \otimes M) \longrightarrow \mathsf{Tor}_1(H_{n-1}(P), M) \longrightarrow 0$$

Доказательство. $Q_\bullet \to M$ – плоская резовьвента. Рассмотрим $(P_\bullet \otimes Q_\bullet)$. Воспользуемся результатом **??** и выпишем второйлист спектральной последовательности

$$\text{I:} \quad \begin{array}{lcccc}
{}^{I}E_1: & 0 \longleftarrow & P_0 \otimes M \longleftarrow & P_1 \otimes M & \dots \\
{}^{I}E_2 = E_\infty; & & H_0(P_0 \otimes M); & H_1(P \otimes M) & \dots
\end{array}$$

$$\text{II} \qquad {}^{II}E_1 = H_q(P) \otimes Q_p$$

$${}^{II}E_2 = \mathsf{Tor}_p(H_q(P), M)$$

∎

$$0 \longrightarrow dP_{q+1} \longrightarrow \mathcal{Z}_q \longrightarrow H_q(P) \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{cccc}
0 & H_q(P) \otimes M & \mathsf{Tor}_1(H_q(P), M) & 0 \\
0 & H_{q-1}(P) \otimes M & \mathsf{Tor}_1(H_{q-1}(P), M) & 0
\end{array}$$

[12] Künneth