Семинар 1
(Темы: Локализация гомотопической категории и производная категория)

Вспомним определение **??** производной категории. Возникает вопрос о том, являются ли квазиизоморфизмы локализующим семейством. Не очень сложно проверить, что это не так.

Prop 1.1. Qis *не является в общем случае локализующим семейством в категории* $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Возьмём $X \in \mathsf{Ob}\mathcal{A}$ с инъективной резольвентой длины 1. Тогда естественно возникнет два вложенных в инъективную резольвенту комплекса, соответствующих объектам X и I_1.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "i"] & I_0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & 0 \\
 & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & I_1 \arrow[r] \arrow[u, "id"] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Вложение комплекса $X[0]$ будет квазиизоморфизмом. Тогда второе условие Оре (**??**) гарантирует существование комплекса с квазиизоморфизмом в $I_1[-1]$ и морфизмом в $X[0]$. Естественно, из вида наших комплексов найденный объект имеет вид $0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0$. Получим коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & I_1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & P_0 \arrow[r] \arrow[u] & P_1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & X \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & P_0 \arrow[r] \arrow[u] & P_1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Так как $P_\bullet \to I_1[-1]$ — квазиизоморфизм, то $P_\bullet$ имеет лишь одну нетривиальную когомологию в первом члене. Отсюда $P_0 \to I_0$ — нулевой морфизм. С другой стороны морфизм $P_0 \to X$ в общем случае ненулевой. Также ненулевым является $X \to I_0$ из квазиизоморфности. Противоречие заключается в коммутативности следующей диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & \\
P_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_0 \\
 & X \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

∎

Несмотря на утверждение выше, описать структуру производной категории $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ можно. Для начала нашей целью будет установить следующую теорему. Это надо переписать после того как напишу про конусы в начале

Thr 1.2. Qis — *локализующее семейство в* $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Первое условие Оре очевидно. Проверим второе (**??**). Рассмотрим тройку $X, Y, Z \in \mathsf{Ob}\mathcal{K}(\mathcal{A})$ с морфизмами $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$, $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, где $s \in \mathsf{Qis}$ из локализующего семейства. Объектом, который будет удовлетворять условию, станет сдвинутый конус $C[hf][-1]$, где h — естественный морфизм из Z в конус $C[s]$.

$$\begin{tikzcd}
C[hf][-1] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "hf"'] & Z \arrow[d, "h"] \\
 & C[s]
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Рассмотрим откуда берутся морфизмы α, β в (1) и почему $\alpha \in \mathsf{Qis}$. Напомним, что вместе с конусом $C[s]$ поставляется короткая точная последовательность комплексов:

$$0 \longrightarrow C[s] \longrightarrow C[hf] \longrightarrow X[1] \longrightarrow 0$$

которая вместе со сдвигом на 1 дает морфизм α в (1). Применим к такой сдвинутой последовательности лемму о зигзаге. Так как $s \in \mathsf{Qis}$, у $C[s]$ нулевые когомологии. Отсюда получим точные последовательности.

$$0 \longrightarrow H_i(C[hf][-1]) \xrightarrow{\alpha^*} H_i(X) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Тогда $\alpha \in \mathsf{Qis}$. Для поиска β такого, что $s\beta$ гомотопен $f\alpha$, напомним также о длинной точной последовательности, поставляющейся с конусом.

$$\ldots \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow C[s] \longrightarrow Y[1] \longrightarrow Z[1] \longrightarrow \ldots \tag{3}$$

Воспользуемся следующим утверждением для такой последовательности, которое докажем немного позже.

Lem 1.3. *Композиция любых двух морфизмов в последовательности (3) гомотопна нулю.*

Для такой последовательности нас интересует т. н. выделенный треугольник: точная подпоследовательность (3) из четырёх элементов. Применяя функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], \cdot)$ получим также точную последовательность множеств морфизмов из конуса.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1],\cdot)"] & C[s] \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], C[s]) \arrow[r] & \ldots \\
& \beta \arrow[r, mapsto] & f\alpha \arrow[r, mapsto] & hf\alpha &
\end{tikzcd}$$

Применяя утверждение 1.3 к аналогичной (3) последовательности для конуса $C[hf]$ получим, что $hf\alpha \sim 0$. Отсюда из точности этот морфизм поднимается до $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], Y)$. Докажем выполнение третьего условия Оре. Нам пригодится еще одно утверждение.

Lem 1.4. *Локализация аддитивной категории по локализующему семейству тоже аддитивна.*

В силу аддитивности небоходимо доказать, что $sf \sim 0$, где s из локализующего семейства, влечёт существование $t \in \mathsf{Qis} : ft \sim 0$. Конструкция будет следующей: опять возьмём конус $C[s]$, соответствующую точную последовательность и применим функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, \cdot)$.

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dll, "f'"'] \arrow[d, "f"] & C[f'][-1] \arrow[l, "t"'] & \\
\ldots \arrow[r] & C[s][-1] \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X,\cdot)"] & Z \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C[s][-1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Z) \arrow[r] & \ldots \\
& f' \arrow[r, mapsto] & f \arrow[r, mapsto] & sf \sim 0 &
\end{tikzcd}$$

Из точности sf поднимается до $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C[s][-1])$. Искомым морфизмом тогда будет соответствующий канонический для конуса $t : C[f'][-1] \to X$. Для такого построения остается проверить квазиизоморфность и гомотопность композиции нулю. Аналогично квазиизоморфность следует из ацикличности конуса $C[s]$ и точности следующей последовательности по лемме о зигзаге.

$$\ldots \longrightarrow C[f'][-1] \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f'} C[s][-1] \longrightarrow C[f'] \longrightarrow \ldots$$

Гомотопность нулю следует из того, что по построению $ft \sim hf't$, а $f't \sim 0$ из точности последовательности выше. ∎

Доказательство леммы 1.3. i dont know ∎

Доказательство леммы 1.4. i dont know ∎

Ещё раз вспомним логику всего, что делалось ранее. Нашей целью было отождествить объект со всеми его резольвентами. Оказалось, что все резольвенты квазиизоморфны объекту: поэтому мы захотели изучить локализацию категории комплексов квазиизоморфозмами, ведь в такой категории интересующее нас отношение является изоморфизмом. Но такая локализация простому описанию сразу не поддаётся, в чём мы убедились в предложении 1.1. Поэтому сначала мы научились обращать квазиизоморфизмы в гомотопической категории. Следующая теорема завершает наши рассуждения, утверждая, что получившаяся локализация в гомотопической категории и производная категория — это одно и то же.

Thr 1.5.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{A})[\mathsf{Qis}^{-1}]$$

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Kom}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, bend right, "\beta"'] \\
\mathcal{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{D}}"'] \arrow[ur, dashed, "\pi"] & \mathcal{K}(\mathcal{A})[\mathsf{Qis}^{-1}] \arrow[u, dashed, bend right, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Покажем, что существуют единственные два морфизма α, β, делающие диаграмму выше коммутативной. Функтор $Q_{\mathcal{K}}$ обращает гомотопические эквивалентности (отметим, что гомотопическая категория — локализация категории комплексов гомотопическими эквивалентностями) и сохраняет квазиизоморфизмы. $Q_{\mathcal{D}}$ обращает все квазиизоморфизмы. Тогда и $Q_{\mathcal{R}} \cdot Q_{\mathcal{D}}$ обращает все квазиизоморфизмы. Следовательно по универсальному свойству локализации (**??**) существует единственный β. Отметим, что все гомотопические эквивалентности — это квазиизоморфизмы. Следовательно, $Q_{\mathcal{D}}$ переводит все гомотопические эквивалентности в изоморфизмы и опять по универсальному свойству локализации (**??**) имеем единственный морфизм π. Из коммутативности π переводит все квазиизоморфизмы в изоморфизмы. Ещё раз по универсальному свойству (**??**) имеем единственный морфизм α. ■