Семинар 1
(Темы: Спектральные последовательности)

Работаем, например, в категории $\mathsf{Kom}(\mathsf{A})$. Будем говорить, что на объекте A задана убывающая регулярная фильтрация, то есть цепочка вложенных друг в друга подобъектов $\mathsf{A} \supset \ldots \mathsf{F}^p\mathsf{A} \supset \mathsf{F}^{p+1}\mathsf{A} \supset \ldots$, регулярность означает, что:

- $\bigcap \mathsf{F}^p\mathsf{A} = 0$
- $\bigcup \mathsf{F}^p\mathsf{A} = \mathsf{A}$

Тогда по такой последовательности можно построить **градуировочный фактор** $\mathsf{E}^p = \mathsf{F}^p\mathsf{A}/\mathsf{F}^{p+1}\mathsf{A}$. "Пристёгивание"факторов к подмодулю будем обозначать как $\mathsf{F}^N \sqsupset \mathsf{E}^{N-1} \sqsupset \mathsf{E}^{N-2} \sqsupset \ldots$. **Вопрос:** если известны все градуировочные факторы фильтрации, можем ли мы восстановить наш исходный объект?

def 1.1. Спектральной последовательностью является набор данных, состоящий из

- стопки листов с занумерованными клетками, в которых находятся объекты категории[1]
- дифференциала между объектами листа [2]
- изоморфизма между когомологиями и следующим листом[3]
- изоморфизма между пределом когомологий на трансфинитном листе и градуировочными факторами фильтрации
- объект на котором задана фильтрация

$$(\mathsf{E}_r^{pq}, \mathsf{E}^n, d_r^{pq}, \alpha_r^{pq}, \beta^{pq})$$
$$d_r^{pq}\colon \mathsf{E}_r^{pq} \to \mathsf{E}_r^{p+r,q-r+1}$$

$$\alpha_r^{pq}\colon \mathsf{H}_r^{pq}(\mathsf{E}_r^{\bullet\bullet}) \to \mathsf{E}_{r+1}^{pq}$$

Начиная с некоторого листа для любого члена все дифференциалы, которые бьют из него и в него зануляются, то есть

$$\forall (p,q) \quad \exists r_0\colon \forall r \geqslant r_0 \quad \hookrightarrow \quad d_r^{pq} = 0 \quad d_r^{p-r,q+r-1} = 0$$

Это означает, что когомологии с этого момента перестают меняться, а последовательность стабилизируется.
E^n – это комплекс, на котором задана убывающая регулярная фильтрация $\ldots \supset \ldots \mathsf{F}^p\mathsf{E}^n \supset \mathsf{F}^{p+1}\mathsf{E}^n \supset \ldots$.

$$\mathsf{E}_{r_0}^{pq} \cong \mathsf{E}_\infty^{pq}$$
$$\beta^{pq}\colon \mathsf{E}_\infty^{pq} \to \mathsf{F}^p\mathsf{E}^{p+q}/\mathsf{F}^{p+1}\mathsf{E}^{p+q}$$

Спектральная последовательность сходится к градуировочным факторам фильтрации.

Гротендик придумал спектральные категории, чтобы ввести спектральные последовательности.
Знание градуировочных факторов фильтрации не позволяет восстановить объект. Однозначности восстановления нет. **filtration respects differentiall structure**

Ex 1.2 (Эйлерова характеристика)**.** $\chi\colon \mathbf{Ab} \to \mathsf{G}$, G *– абелева группа. Фильтрация длины 1*

$$0 \longrightarrow \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{B} \longrightarrow \mathsf{C} \longrightarrow 0 \qquad \chi(\mathsf{B}) = \chi(\mathsf{A}) + \chi(\mathsf{C})$$

$$\chi(\mathsf{K}^\bullet) = \sum (-1)^n \chi(\mathsf{K}^\bullet) = \sum (-1)^n \chi(\mathsf{H}^n(\mathsf{K}^\bullet))$$

$\chi(\mathsf{E}^n) = ?$
$\mathsf{E}_r^{pq} \Rightarrow \mathsf{E}^n$ *Вычислим альтернированную сумму на листе* r

$$\mathsf{E}_{pq}^\bullet = \bigoplus_{p+q=\bullet} \mathsf{E}_r^{pq}$$

$$\chi(\mathsf{E}_r^{\bullet\bullet}) = \sum (-1)^k \chi(\mathsf{H}^k(\mathsf{E}_r^\bullet)) = \chi(\mathsf{E}_{r+1}^\bullet) = \ldots = \chi(\mathsf{E}_\infty^\bullet)$$

$$\chi(\mathsf{E}^n) = \sum \chi(\mathsf{F}^p\mathsf{E}^n/\mathsf{F}^{p+1}\mathsf{E}^n) = \chi(\mathsf{E}_\infty^{\bullet\bullet})$$

[1] r – номер листа, а pq – номер клетки
[2] бьёт обобщённым "ходом коня на нудевом шаге он бьёт вправо, потом вверх, а потом всегда попадает на соседнюю диагональ
[3] на каждом следующем листе стоят когомологии предыдущего, дифференциалы на каждом следующем листе индуцированы

1.1 Фильтрованный комплекс

Пусть E^n – комплекс, на котором задана фильтрация. Отметим, что дифференциал *"не понижает градус фильтрации"*, т. е. $d(F^p E^n) \subset F^p E^{n+1}$. Можем рассмотреть два варианта фильтрации:

- *Глупая фильтрация*

$$\widetilde{F}_p E^n = \begin{cases} 0, & n < p \\ E^n, & n \geqslant p \end{cases}$$

$$H^n(\widetilde{F}^p E^n) = \begin{cases} 0, & n < p \\ \ker d^p, & n = p \\ E^n, & n > p \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & E^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] \arrow[d] & E^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & E^n \arrow[r] \arrow[d] & E^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r] & E^n \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

- *Каноническая фльтрация*

$$F_p E^n = \begin{cases} E^n, & n < -p \\ \ker d^p, & n = -p \\ 0, & n > -p \end{cases}$$

$$H^n(F^p E^\bullet) \begin{cases} 0, & n > -p \\ H^n(E^\bullet), & n \leqslant -p \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] \arrow[d] & E^{-p-1} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & E^{-p} \arrow[r] \arrow[d] & E^{-p+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & E^{-p-1} \arrow[r] & \ker d^{-p} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Ex 1.3 (Спектральная последовательность фильтрованного комплекса $K^\bullet$)**.** *Для фильтрованного комплекса существует спектральная последовательность.*

Определим следующие группы элементов комплекса: 1 группа элементов, лежащих в $F^p K^{p+q}$ члене фильтрации, у которых дифференциал углубляет фильтрационный номер не более чем на r, 2 элементы, у которых номер фильтрации углубляется более чем на r при применении дифференциала и границы 3. С помощью этих элементов мы определим элементы спектральной последовательности по формуле 4, нулевой лист спектральной последовательности буде иметь вид 5 возможно надо Z заменить на G, например

$$Z_r^{pq} = d^{-1}(F^{p+r} K^{p+q+1}) \bigcap F^p K^{p+q} \tag{1}$$

$$Z_{r-1}^{p+1;q-1} = d^{-1}(F^{p+r} K^{p+q+1}) \bigcap F^{p+1} K^{p+q} \tag{2}$$

$$d(Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}) = d(F^{p-r+1} K^{p+q+1}) \bigcap F^p K^{p+q+1} \tag{3}$$

$$E_r^{pq} = \frac{Z_r^{pq}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \tag{4}$$

$$E_0^{pq} = F^p K^{p+q} / F^{p+1} K^{p+q} \tag{5}$$

Утверждается, что спектральная последовательность, заданная элементами вида 4 будет сходиться к градуировочным факторам фильтрации комплекса.

Чтобы это проверить нужно установить следующее:

- Дифференциал корректно определён[4]
- Существую изоморфизмы между когомологиями на соседних листах

$$\frac{Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \quad \to \quad \mathcal{Z}(E_r^{pq}) \tag{6}$$

$$\frac{dZ_r^{p-r,q+r-1} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}} \quad \to \quad \mathcal{B}(E_r^{pq}) \tag{7}$$

- Группы корректно определены, то есть

$$\mathcal{Z}(E_r^{pq})/\mathcal{B}(E_r^{pq}) = E_{r+1}^{pq}$$

Проверка происходит руками и с большим количеством индексов. Поехали...

1 *Определение дифференциала*

$$d_r^{pq} \colon E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$$

$$dZ_r^{pq} \subset Z_r^{p+r,q-r+1}$$

2 *Изоморфизм между когомологиями* 6 и 7 являются мономорфизмами, так как в числителе стоят подгруппы Z_r^{pq}, а фактор берётся по одним и тем же подгруппам. Теперь выпишем явно циклы. В них будут те элементы, по которым берётся фактор на следующем шаге, отфакторизованный по подгруппам из предыдущего шага

$$\mathcal{Z}(E_r^{pq}) = \frac{Z_r^{pq} \overset{(\mathbf{2})}{\bigcap} d^{-1}\left(Z_{r-1}^{p+r+1,q-2} + dZ_{r-1}^{p+1,q-1}\right)^{(\mathbf{1})}}{Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}}$$

Выполняем "по действиям":

$$(\mathbf{1}) \quad d^{-1}\left(Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + dZ_{r-1}^{p+1,q-1}\right) = d^{-1}\left(Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}) + Z_{r-1}^{p+1,q-1}\right)$$

$$(\mathbf{2}) \quad Z_r^{pq} \bigcap \left(d^{-1} Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}\right) = Z_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_r^{pq-1} Z_{r-1}^{p+1,q-1}$$

$$Z_r^{pq} \bigcap d^{-1}(Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}) = d^{-1}\left(F^{p+r}K^{p+q+1} \bigcap d^{-1}(Z_{r-1}^{p+r+1,q-r})\right) \bigcap F^p K^{p+q} \subset d^{-1}\left(F^{p+r+1}K^{p+q+1}\right) \bigcap F^p K^{p+q} \subset Z_{r+1}^{pq}$$

$$\alpha_r^{pq} \colon H(E_r^{pq}) \to E_{r+1}^{pq}$$

$$E_{r+1}^{pq} = \frac{Z_{r+1}^{pq}}{Z_r^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,q+r-1}}$$

тут не успела за исправлениями

$$\frac{Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,q+r-1}} = \frac{Z_{r+1}^{pq}}{Z_{r+1}^{pq} \bigcap (\underset{Z_r^{p+1,q-1}}{dZ_{r+1}^{p-r,q+r-1}} + Z_{r-1}^{p+1,q})} = \frac{Z_{r+1}^{pq}}{Z_r^{p+1,q-1} + dZ_r^{p-r,}}$$

Если фильтрация конечна на каждом K^n, то спектральная последовательность сходится

$$E_\infty^{pq} = \frac{Z_r^{pq}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1}} \quad \text{при } r > r_0$$

$$Z_r^{pq} = Z(F^p K^{p+q})$$

$$Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z(F^{p+1}K^{p+q})$$

$$\bigoplus_{p+q=r} E_\infty^{pq} = \oplus \mathbf{Gr} H^n(K^\bullet)$$

Спектральная последовательность сходится к градуировочным факторам когомологий

[4] Дифференциалы на когомологиях спектральной последовательности не могут быть восстановлены по начальным листам, на которых дифференциал унаследован из исходной фильтрации. Если известны первые несколько листов спектральной последовательности, то могут быть построены члены следующих листов, но не их дифференциалы.

1.2 Лирическое отступление

Есть три основных источника спектральных последовательностей

- Спектральная последовательность фильтрованного комплекса
- Спектральная последовательность двойного комплекса
- Спектральная последовательность точной пары (Хатчер, Алгебраическая топология)

1.3 Двойной комплекс

def 1.4. K^{pq} – двойной комплекс[5]

$$d^{\to}\colon K^{pq} \to K^{p+1,q}$$
$$d^{\uparrow}\colon K^{pq} \to K^{p,q+1}$$
$$d^{\to}d^{\uparrow} + d^{\uparrow}d^{\to} = 0$$
$$d^{\to 2} = d^{\uparrow 2} = 0$$

def 1.5. Тотальный комплекс

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(K^{\bullet\bullet})^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{pq}$$
$$\mathrm{Tot}^{\Pi}(K^{\bullet\bullet})^n = \prod_{p+q=r} K^{pq}$$

Claim 1.6. *Если комплекс находится в первом квадранте, то*

$$\mathrm{Tot}^{\oplus} \cong \mathrm{Tot}^{\Pi}$$

Claim 1.7. *Пусть $K^{\bullet\bullet}$ – ограничен (лежит в первом квадранте), а его строки <u>или</u> столбцы ацикличны. Тогда $\mathrm{Tot}(K)^{\bullet}$ – ацикличен.*

$$(d^{v} + d^{h})^2 = d^{v2} + d^{h2} + d^{v}d^{h} + d^{h}d^{v} = 0$$
$$d(z_0, z_1, z_2, \dots z_n) = 0$$

$$d^{h}z_0 + d^{v}z_1 = 0$$
$$d^{h}z_1 + d^{v}z_2 = 0$$
$$\dots$$
$$d^{v}z_n + dz_{n-1} = 0$$

$$b_0 \dots b_{n+1}$$
$$b_0 = 0$$
$$\exists b_1 :$$

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 & K^{01} \arrow[l] \arrow[d] & K^{11} \arrow[l] \arrow[d] & K^{21} \arrow[l] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
0 & K^{00} \arrow[l] \arrow[d] & K^{10} \arrow[l] \arrow[d] & K^{20} \arrow[l] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

---

[5] p– горизонтально, q – вертикально