Семинар 1
(Темы: Введение, комплекс, резольвента, проективный объект)

Рассмотрим следующую задачу. Пусть есть какое-то поле k и кольцо многочленов над ним $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Дана система уравнений с элементами из кольца

$$\sum_i a_{ij} y_i = 0, \quad a_{ij} \in R.$$

Множеством решений этой системы будет какой-то модуль M, определяющийся своими образующими и соотношениями. Соотношения, вообще говоря, могут быть достаточно сложно устроены. Предлагается воспользоваться следующим фактом.

Prop 1.1. *Любой модуль — это фактормодуль свободного модуля.*

Иначе говоря, существует свободный модуль F_1 вместе с эпиморфизмом $f_1 : F_1 \to M$. Соотношения образующих тогда будут определяться ядром $\operatorname{Ker} f_1$ этого самого эпиморфизма. Однако данное ядро может быть также сложно устроено. Повторим процесс и накроем и $\operatorname{Ker} f_1$ свободным модулем. Продолжая получим набор коротких точных последовательностей.

$$\begin{gathered}
0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_1 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} M \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_2 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} \operatorname{Ker} f_1 \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_3 \longrightarrow F_3 \xrightarrow{f_3} \operatorname{Ker} f_2 \longrightarrow 0 \\
\dots
\end{gathered} \tag{1}$$

Этот процесс повторять будем до тех пор, пока не получим $\operatorname{Ker} f_{\_} = F_{\_}$. Вопрос состоит в том сколько раз придётся повторить это. Ответ даёт следующая теорема.

Thr 1.2 (Теорема Гильберта о сизигиях)**.** *Для кольца многочленов от n переменных свободная резольвента имеет длину не более n.*

Таким образом, модулю решений нашего уравнения можно сопоставить длинную точную последовательность, называющуюся свободной (состоящей из свободных модулей) резольвентой модуля M.

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{2}$$

То, что мы по сути сделали — это "приблизили"наш сложно устроеннный модуль M простыми свободными модулями F_i. Приведём обобщение этих рассуждений и введём необходимые определения.

def 1.3. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. Её категорией комплексов $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$ называется категория, объекты в которой — цепные комплексы — последовательности объектов и морфизмов (дифференциалов) (K^i, d^i)

$$\dots \longrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots$$

где $d^{i+1} \circ d^i = 0$ ($\operatorname{Im} d^i \subset \operatorname{Ker} d^{i+1}$). Комплекс с возрастающей индексацией (как выше) называется когомологическим. Соответственно с убывающей — гомологическим. Морфизмы $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Kom}(\mathcal{A})}((K^\bullet, d^\bullet_K), (L^\bullet, d^\bullet_L))$ — наборы морфизмов $f^i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(K^i, L^i)$, делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f_K^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "f^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i \arrow[r, "d^i{}_L"'] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"'] & \dots
\end{tikzcd} \tag{3}$$

$\mathsf{Kom}^{\leqslant}(\mathcal{A}), \mathsf{Kom}^{\geqslant}(\mathcal{A}), \mathsf{Kom}^{b}(\mathcal{A})$ соответственно обозночают ограниченные справа, слева, с двух сторон комплексы.

Естественный вопрос, который можно задать к определению 1.3 — выполняется ли $\operatorname{Im} d^i = \operatorname{Ker} d^{i+1}$ (тогда комплекс — точная последовательность) и если невыполняется, то насколько. Ответ на этот вопрос даёт следующее определение.

def 1.4. Назовём

- кограницей комплекса $B^i(K^\bullet) = \operatorname{Im} d^{i-1}$.
- коциклом комплекса $Z^i(K^\bullet) = \operatorname{Ker} d^i$.
- когомологией комплекса $H^i(K^\bullet) = Z^i(K^\bullet)/B^i(K^\bullet)$

Комплекс с нулевыми когомологиями будем называть ацикличным.[1]

По существу, мы определили функторы из категории комплексов $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$ в $\mathcal{A}$. Это следствие того, что морфизмы в $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$ переводят кограницы (коциклы) в кограницы (коциклы), т. к. диаграмма (3) коммутирует. Соответственно любой морфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{Kom}(\mathcal{A})}$ индуцирует морфизмы на когомологиях f^*. Кроме того, существует функтор естественного вложения, который объекту $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$ сопоставляет комплекс с объектом A в нулевом члене.

$$\mathcal{F}: \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Kom}(\mathcal{A})$$

$$\begin{tikzcd} a \mapsto \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] & \dots \\ & & H^0(\mathcal{F}(a)) & & \end{tikzcd}$$

Из вида функтора очевидно существование естественного изоморфизма $H^0 \circ \mathcal{F} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Отсюда следует

Prop 1.5. *$\mathcal{A}$ — полная подкатегория в $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$.*[2]

Теперь вернемся к исходной задаче. Выбор резольвенты (2) в общем случае не единственный. Поэтому мы хотим каким-то образом отождествить объект со <u>всеми</u> его резольвентами. Для этого просто запишем морфизм в крайний член 2 в виде морфизма комплексов

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & F_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Теперь зададимся вопросом: что между двумя получившемися комплексами общего? Про комплекс $\mathcal{F}(M)$ мы знаем все. Он точен везде, кроме нулевого члена, а в нулевом члене его когомология M. Верхний комплекс по построению также точен везде, кроме нулевого члена. А в нулевом члене его кограница $\operatorname{Im} 0 = 0$, коцикл $\operatorname{Ker} d_F^2 = \operatorname{Im} \varepsilon = M$, т. к. исходная резольвента (2) точна. Отсюда $H^0(F^\bullet) = M$. Тогда индуцированный морфизм на когомологиях $\varepsilon^* = \mathrm{Id}_M$ — изоморфизм. В таком случае мы называем ε квазиизоморфизмом.

def 1.6. Морфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{Kom}(\mathcal{A})}$ называется квазиизоморфизмом, если его индуцированные морфизмы f^* на когомологиях — изоморфизмы.

Prop 1.7. *В абелевой категории объект квазиизоморфен всем своим резольвентам.*

Логично было бы тогда отождествлять объект с резольвентами при помощи квазиизоморфизма. Проблема в том, что последний отношением эквивалентности не является, поэтому необходимо рассматривать другую категорию (производную), в которой все квазиизоморфизмы являются изоморфизмами и, следовательно, квазиизоморфность — отношение эквивалентности. Приведём пример, почему квазиизоморфизмы не являются отношением эквивалентности.

Ex 1.8. *В категории $\mathbb{Z}$-mod проективная резольвента $\mathbb{Z}_2$ может выглядеть следующим образом:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Рассматривая соответствующий связующий квазиизоморфизм

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2\cdot"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

получаем, что $\mathbb{Z}_2$ квазиизоморфен своей резольвенте. Но не существует нетривиального морфизма $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$, откуда резольвента не квазиизоморфна $\mathbb{Z}_2$. Т. е. нарушена симметричность.

[1] Таким образом, когомологии — мера неточности комплекса.

[2] доказательство см. **??**

На самом деле нарушена и транзитивность. Действительно, пусть существуют два квазиизоморфизма $K^\bullet \to L^\bullet$ и $U^\bullet \to L^\bullet$. Но никто не гарантирует, что существует квазиизоморфизм $K^\bullet \to L^\bullet$, ведь обращать мы эти морфизмы в общем случае не можем. **Рассмотрим теперь другую задачу.** Пусть дан точный слева функтор между абелевыми категориями $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и короткая точная последовательность из $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\mathcal{F}"] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}(A) \arrow[r] & \mathcal{F}(B) \arrow[r] & \mathcal{F}(C) \arrow[r] & \ldots? \end{tikzcd}$$

После применения функтора F ноль справа исчезнет. Задача следующая: можно ли как-то канонически точно продолжить получившуюся последовательность вправо? Для начала упростим задачу, задавшись подобным вопросом для конкретного функтора: функтора $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot)$. Когда он точен?. Ответ такой: он точен тогда и только тогда, когда P — проективный объект.

def 1.9. Объект P категории $\mathcal{A}$ называется проективным, если для любого эпиморфизма $\pi : A \to B$ с морфизмом $p : P \to B$ существует морфизм, делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "p"] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \\ A \arrow[r, two heads, "\pi"] & B \end{tikzcd} \tag{4}$$

Prop 1.10. *Функтор* $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ *точен* $\iff$ P *— проективный объект.*

Доказательство. Докажем сначала, что функтор $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ всегда точен слева. Пусть последовательность

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow[a]{} B \xrightarrow[b]{} C \longrightarrow 0$$

точна. Докажем точность следующей последовательности.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, A) \xrightarrow[a\circ]{} \mathrm{Hom}(P, B) \xrightarrow[b\circ]{} \mathrm{Hom}(P, C)$$

Пусть $a \circ f : P \to B$ равна нулю. Но т. к. a — мономорфизм из точности исходной последовательности, то и $f = 0$, откуда $a\circ$ — инъективный. Это доказывает точность в первом члене. Из точности исходной последовательности $b \circ a \circ f = 0$ для любого морфизма $f : P \to A$. Это доказывает вложение $\mathrm{Im}\, a\circ \subset \mathrm{Ker}\, b\circ$. Пусть теперь $f \in \mathrm{Ker}\, b\circ$. В исходной точной последовательности $A = \mathrm{Ker}\, b$ и по универсальному свойству ядра существует единственный морфизм f', делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "a"'] & B \arrow[r, "b"'] & C \end{tikzcd} \tag{5}$$

Отсюда любой $f \in \mathrm{Ker}\, b\circ$ поднимается до $f' \in \mathrm{Hom}(P, A)$, что доказывает вложение $\mathrm{Ker}\, b\circ \subset \mathrm{Im}\, a\circ$ и, следовательно, точность во втором члене. Докажем, что $\mathrm{Hom}(P, -)$ — точный $\iff$ P — проективный. Если P — проективный. В левую сторону это очевидно: если P — проективный, то любой морфизм из $\mathrm{Hom}(P, C)$ поднимается до морфизма из $\mathrm{Hom}(P, B)$ по определению проективного обхекта. Обратно, если $\mathrm{Hom}(P, -)$ точный, то применяя его к точной последовательности $A \to B \to 0$ получим, что для любого морфизма $p \in \mathrm{Hom}(P, B)$ будет морфизм из $\mathrm{Hom}(P, A)$, делающий диаграмму (5) коммутативной. ∎

Встает также вопрос о том, как выглядят проективные объекты в интересующей нас категории $R-\mathrm{mod}$. Ответ дает следующий критерий.

Prop 1.11. *В категории* $R-\mathrm{mod}$ P *— проективный* $\iff$ *существует* M *такой, что* $M \oplus P$ *— свободный модуль.*

Com 1.12. *Если* P *— свободный, то, очевидно, он и проективный. Действительно, достаточно тогда задать искомый морфизм в (4) на образующих. Может возникнуть мысль, что только такие модули проективными и будут. Приведём контрпример.*

Ex 1.13 (Проективный несвободный модуль)**.** *Рассмотрим категорию* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}-\mathrm{mod}$. *Само по себе* $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *является, кроме кольца,* $R-$*модулем над собой. Более того, он свободный как* $R-$*модуль. Вспомним разложение*

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

где ни $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, *ни* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *свободными как* $R-$*модули не являются. Однако по критерию 1.11 оба будут проективными.*

Доказательство предложения 1.11. ($\Rightarrow$) По предложению 1.1 P накрывается свободным модулем. Вспомним тогда диаграмму (4).

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists f"'] \arrow[d, "id"] \\ F \arrow[r, two heads, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

И получим существование свободного модуля F с парой морфизмов f, g, дающих $gf = id_M$. Покажем, что $F \cong P \oplus M$, где M — какой-то R-модуль. Предлагается использовать следующее утверждение.

Prop 1.14 (Splitting lemma)**.** *Пусть дана короткая точная последовательность.*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \longrightarrow 0$$

$B \cong A \oplus C$ *тогда и только тогда, когда существует* g *такой, что* $g \circ a = id$ *или* $b \circ g = id$*.*

В нашем случае применение этого утверждения к точной последовательности ниже даёт $P \oplus \operatorname{Ker} f \cong F$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r, hook] & F \arrow[r, two heads, "g"'] & P \arrow[l, bend right, "f"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Пусть $P \oplus M$ — свободный модуль, $\pi : P \oplus M \to P$ — каноническая проекция. Выше мы отметили, что для свободного модуля утверждение очевидно. Тогда $f\pi$ поднимается до $h : P \oplus M \to A$. Применим каноническое вложение бипроизведения i и получим $f\pi i = ghi$, откуда $f = ghi$ и hi — искомый морфизм.

$$\begin{tikzcd} M \oplus P \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f\pi"] & P \arrow[l, hook, bend right, "i"'] \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, two heads, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

■

Понятие, двойственное проективному объекту — инъективный объект.

def 1.15. Объект I называется инъективным, если для любых двух объектов с мономорфизмом $i : A \to B$ и морфизмом $p : A \to I$ существует морфизм $B \to I$, делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & I \\ A \arrow[ur, "p"] \arrow[r, hook, "i"] & B \arrow[u, dashed, "\exists"'] \end{tikzcd} \tag{6}$$

Соответствующее двойственное утверждение.

Prop 1.16. *Функтор* $\operatorname{Hom}(-, I)$ *— точен* $\iff$ I *— инъективный.*