Семинар 1
(Темы: Конус)

def 1.1. Сдвигом комплекса $K[n]$ назовём комплекс с членами $K[n]^i = K^{n+i}$ и дифференциалами $d[n]^i = (-1)^n d^{i+n}$

def 1.2. Конусом $C[f]^\bullet$ морфизма комплексов $f^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$ называется комплекс с объектами $C[f]^i = K^{i+1} \oplus L^i$ и дифференциалами $d^i = \begin{pmatrix} -d_K^{i+1} & 0 \\ f & d_K^i \end{pmatrix}$.

Простая выкладка (индексы опущены для простоты) показывает корректность определения:

$$d^2 = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ f & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} d^2 & 0 \\ -fd + df & d^2 \end{pmatrix} = 0$$

Prop 1.3. *Для морфизма комплексов* $f : K \to L$ *следующая последовательность точна.*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\ i\ } C(f) \xrightarrow{\ \pi\ } K[1] \longrightarrow 0 \tag{1}$$

Доказательство. Приведённая последовательность расщепима в каждом члене. ■

Thr 1.4. f *— квазиизоморфизм тогда и только тогда, когда* $C(f)$ *— ацикличен.*

Доказательство. Применим лемму о зигзаге **??** к последовательности (1). ■

Дадим ещё несколько определений.

def 1.5. $K^\bullet$ – расщепимый комплекс, если

$$\exists s^i \colon K^i \to K^{i-1} \quad : \quad dsd = d$$

def 1.6. $K^\bullet$ – стягиваемый, если $\mathrm{id}_{K^\bullet} \sim 0$

Ex 1.7 (простейший стягиваемый комплекс)**.**

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{id}} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \tag{2}$$

Ex 1.8 (простейший расщепимый комплекс)**.**

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \tag{3}$$

NB *он не стягиваемый*

Prop 1.9. $(K^\bullet$ *– стягиваемый*$) \quad \Rightarrow \quad (K^\bullet$ *– расщепимый*$)$

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "s^{i-1}"'] & K^i \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "s^i"'] & K^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "s^{i+1}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r] & K^i \arrow[r] & K^{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Prop 1.10. *Любой стягиваемый комплекс является суммой сдвигов комплексов вида 1.7.*

Prop 1.11. $K^\bullet$ *– стягиваемый* $\quad\Leftrightarrow\quad$ $K^\bullet$ *– расщепимый и ацикличный.*

Prop 1.12. $K^\bullet$ *– ограниченный расщепимый комплекс* $\quad\Rightarrow\quad$ $K^\bullet \overset{qis}{\sim} H^\bullet(K^\bullet)$.
Иными словами любой расщепимый комплекс представляется в виде суммы комплексов вида 2 и 3.

def 1.13. Морфизм комплексов $f \colon K^\bullet \to L^\bullet$ называется гомотопической эквивалентностью, если $\exists f \colon L^\bullet \to K^\bullet$ такой что $fg \sim \mathrm{id}_{K^\bullet}$ и $gf \sim \mathrm{id}_{L^\bullet}$

Prop 1.14. f *– гомотопическая эквивалентность* $\quad\Leftrightarrow\quad$ $C(f)$ *– стаягиваем.*

[1] Воспользуемся введённым ранее понятием комплекса морфизмов ??.[2]

$$\underline{\mathrm{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)^i = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(K^n, L^{n+i})$$

$$\partial\colon \quad g^m = df^m - (-1)^i f^{m+1} d$$

$$f \in \underline{\mathrm{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)^i$$

$$\partial\colon f \mapsto g$$

Com 1.15 (Циклы комплекса морфизмов)**.** [3] *В случае* $i = 0$ *циклами морфизма комплексов будут просто морфизмы комплексов*

$$Z^0(\underline{\mathrm{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)) = \mathrm{Hom}(K^\bullet, L^\bullet)$$

$$df^n = f^{n+1} d$$

А для $i > 0$ *это будут морфизмы в сдвинутые комплексы, то есть*

$$Z^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)) = \mathrm{Hom}(K^\bullet, L^\bullet[i])$$

Com 1.16 (Границы комплекса морфизмов)**.** *В случае* $i = 0$ *выражение для дифференциала принимает вид* $\partial\colon f^m \mapsto g^m = df^m - f^{m+1}d$. *Образом такого отображения будет гомотопный нулю морфизм. При* $i > 0$ *получим гомотопные нулю морфизмы в сдвинутый комплекс.*

$$B^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)) = \{f \in \mathrm{Hom}(K^\bullet, L^\bullet[i]) \quad | \quad f \sim 0\}$$

Com 1.17 (Когомологии комплекса морфизмов)**.** *Наконец, когомологиями комплекса морфизмов будут гомотопический классы эквивалентности морфизмов комплексов.*

$$H^i(\underline{\mathrm{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet[i])$$

Теперь можем доказывать утверждение 1.14.

Доказательство. Применим функтор $\underline{\mathrm{Hom}}(X, \ )$ к короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow C(f) \longrightarrow K[1] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, L) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X, C(f)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(K[1]) \longrightarrow 0$$

Имея теперь короткую точную последовательность комплексов, естественно применить лемму о зигзаге ??. Получим длинную точную последовательность когомологий комплексов морфизмов, которые в силу 1.17 являются просто гомотопическими классами эквивалентности морфизмов в сдвинутый комплекс, то есть

$$\underset{0}{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C(f)[-1])} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, K) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, L) \longrightarrow \underset{0}{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C(f))} \longrightarrow \dots$$

∎

Lem 1.18. *Короткой точной последовательности комплексов соответсвует длинная точная последовательность морфизмов в гомотопической категории*

$$0 \longrightarrow K^\bullet \longrightarrow L^\bullet \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow 0$$

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, K^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, L^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, M^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, M^\bullet[1]) \dots$$

Prop 1.19 (Тактическая цель)**.** *Проективная резольвента – строгий функтор*

$$\mathcal{P}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

$$A \mapsto P_\bullet(A)$$

[1] существует более прямое доказательство этого утверждения, получаемое перемножением соответсвующих матриц морфизмов, см. листочки

[2] Это конструкция представляет собой 'внутренний' $\underline{\mathrm{Hom}}$. Обычный функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ действует из $\mathcal{A}$ в кататегорию абелевых групп, а $\underline{\mathrm{Hom}}$ из категории комплексов в категорию комплексов

[3] i-ые циклы комплекса морфизмов это морфизмы комплексов первого комплекса в сдвиг на i второго

Lem 1.20. *Пусть* $P_\bullet$ *– проективная резольвента* M, $K_\bullet$ *– какая-то резольвента* N, *также пусть есть морфизм* $f\colon M \to N$. *Тогда* $\exists g_\bullet \colon P_\bullet \to K_\bullet$, *такой, что* $H^0(g_\bullet) = f$

Доказательство. Просто построим этот морфизм комплексов. Дополним проективный комплекс до ацикличного. Далее доказательство будем проводить по индукции. В силу проективности можем поднять $f\varepsilon$ вдоль эпиморфизма из крайнего члена резольвенты $K_\bullet$ до морфизма f_0. Аналогично далее все морфизмы диагональные морфизмы вида $f_i \circ d^P_{i-1}$ поднимаются вдоль эпиморфизмов вида $d^K_{i-1} \colon K_{i-1} \twoheadrightarrow d^K_{i-1} K_{i-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d^P_1"] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "f_0"] \arrow[dr, "f\varepsilon"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "d^K_1"'] & K_0 \arrow[r, two heads] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

■

Lem 1.21. *Любой морфизм из ограниченного справа комплекса из проективных объектов в ацикличный гомотопен нулю.*

Доказательство. Крайний морфизм строится по проективности P_0 поднятием вдоль эпиморфизма на $d_1 = \ker d_1$. Получили базу индукции $f_0 = d_1 h_0 - 0$.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d^P_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, "h_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & K_1 \arrow[r, "d^K_1"'] & K_0 \arrow[r] & K_{-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Пусть теперь все гомотопии до i-й построены и $f_{i-1} = h_{i-2}d - dh_{i-1}$ Рассмотри разность образов вертикальной и диагональной стрелок

$$g_i = f_i - h_{i-1}d_{i+1}$$

$$d_i g_i = d(f_i - h_{i-1}d) = f_{i-1}d - dh_{i-1}d = (h_{i-2}d - dh_{i-1})d - dh_{i-1}d = dh_{i-1}d - dh_{i-1}d = 0$$

■