

Семинар 1

(Темы: Локализация, условия Оре)

Рассмотрим категорию \mathcal{C} и $S \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}$ — произвольное множество морфизмов, замкнутое относительно композиции. Предположим, мы бы хотели рассмотреть похожую на неё категорию с тем различием, что все морфизмы семейства S в ней обратимы. Сконструировать её не очень сложно: мы навino добавляем обратные морфизмы и все композиции с ними. Естественно, морфизмов в итоге станет больше и появится естественное вложение F . Тем не менее, такая конструкция не очень тривиальна: несмотря на простоту построения, мы не знаем как она работает. Более того, категорий, удовлетворяющих нашему условию, может быть много. Оказывается, что именно самая наивная конструкция обладает следующим универсальным свойством в 2-категории всех категорий, которым мы такое построение и определим.

Prop 1.1. *Существует единственная с точностью до эквивалентности категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ с функтором $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$, обладающая универсальным свойством: для любого $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, переводящего S в изоморфизмы, существует единственный функтор $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{D}$, делающий следующую диаграмму коммутативной.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}[S^{-1}] \\ & \searrow T & \downarrow G \\ & & \mathcal{D} \end{array} \quad (1)$$

Доказательство. Для доказательства приведем явную конструкцию категории $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Объекты в ней будут точно такие же: $\text{Ob } \mathcal{C}[S^{-1}] = \text{Ob } \mathcal{C}$. Обратные морфизмы введём следующим образом:

Назовём словом формальный набор букв, обозначающий морфизмы из \mathcal{C} . Добавим к буквам обратные s^{-1} морфизмы для семейства S . Слова должны состоять из компонентных букв, т. е. в слове fg конец морфизма f и начало морфизма g должны совпадать. Будем считать, что начало и конец морфизма s^{-1} — это соответственно конец и начало s . Введём на словах отношение эквивалентности, удовлетворяющее следующим правилам:

- $(f)(g) \sim (fg)$
- $(s)(s^{-1}) \sim \text{Id}_A$, где A — объект, являющийся началом s^{-1} .
- $(f)(s)(s^{-1})(g) \sim (f)(g)$.

Классы эквивалентности положим морфизмами в $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Легко проверить, что они удовлетворяют определению категории и каждый морфизм в $\mathcal{C}[S^{-1}]$ обратим.

Тогда функтор F определим как тождественно действующий на объектах и как вложение на морфизмах. G определим как действующий аналогично T на объектах и морфизмах, являющихся образами F . Появившиеся обратные морфизмы G будет отправлять в соответствующие обратные в \mathcal{D} . ■

Com 1.2. *Конструкция, приведённая в доказательстве, тесно связана с понятием локализации кольца R мультипликативно замкнутым подмножеством S . Мы также чисто формально добавляем обратный элемент каждому из заданного подмножества, рассматривая дроби вида m/s , $m \in R, s \in S$. Тогда нашим отношением эквивалентности станет не что иное, как сокращение дробей: $r_1/s_1 \sim r_2/s_2 \iff \exists t \in S : t(s_1r_2 - s_2r_1) = 0$. Причем такая конструкция имеет точно такое же универсальное свойство в категории колец!*

Доказанное утверждение гарантирует корректность следующего определения.

def 1.3. Пусть \mathcal{C} — локально малая категория, $S \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}$ — произвольное множество морфизмов, замкнутое относительно композиции. Локализацией $\mathcal{C}[S^{-1}]$ категории \mathcal{C} по локализирующему семейству S будем называть категорию с универсальным свойством (1).

С помощью данного объекта введём пока что бесполезное определение.

def 1.4. Производной категорией $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ категории \mathcal{A} будем называть локализацию категории комплексов по квази-изоморфизмам.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \text{Kom}(\mathcal{A})[\text{Qis}^{-1}]$$

Введённое определение, конечно, не дают никакого понятия того, как такая категория устроена. Однако это устройство становится проще, если на семейство наложить условия Оре.

def 1.5 (Условия Оре). Назовём семейство морфизмов S в категории \mathcal{C} локализирующим, если оно удовлетворяет парам условий (указанным ниже и двойственным им).

- Все тождественные морфизмы лежат в S и S замкнуто относительно композиции.
- Для любого морфизма $f : X \rightarrow Z$ и морфизма $s : Y \rightarrow Z$ из семейства S найдется объект W и два морфизма $g \in \text{Hom}_c(W, Y)$, $t \in \text{Hom}_c(W, X)$, $t \in S$, делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Y \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array} \quad (2)$$

- Если известно, что для $s \in S$ $sf_1 = sf_2$, то найдется $t \in S$ такой, что $f_1t = f_2t$. Или иначе, если у двух морфизмов нашёлся левый уравниватель, то найдется и правый.

При таких условиях оказывается, что можно дать более явное описание локализации в терминах домиков.

def 1.6. 1. Назовём (левым) домиком (s, f) тройку объектов X, Y, Z и пару морфизмов $f \in \text{Hom}_c(Z, Y)$, $s \in \text{Hom}_c(Z, X)$, $t \in S$.

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array} \quad (3)$$

2. Назовём два (левых) домика эквивалентными, если они “достраиваются до большого домика”. $(s, f) \sim (t, g)$, если существует объект Z''' и морфизмы v, h , $v \in S$, делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccc} & & Z''' & & \\ & v \swarrow & & \searrow h & \\ & Z' & & Z'' & \\ s \swarrow & & t \rightarrow & \rightarrow f & \searrow g \\ X & & & & Y \end{array} \quad (4)$$

Т. е. существует “большой” домик (sv, gh) .

3. Композиций двух (левых) домиков (v, g) , (s, f) называется домик (st, gl) , делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{array}{ccccc} & & Z' & & \\ & t \swarrow & & \searrow l & \\ & X' & & Y' & \\ s \swarrow & & f \rightarrow & \rightarrow v & \searrow g \\ X & & & & Y & & Z \end{array} \quad (5)$$

Следующее предложение помимо доказательства корректности определения выше показывает, что классы эквивалентности домиков удовлетворяют определению морфизмов в категории.

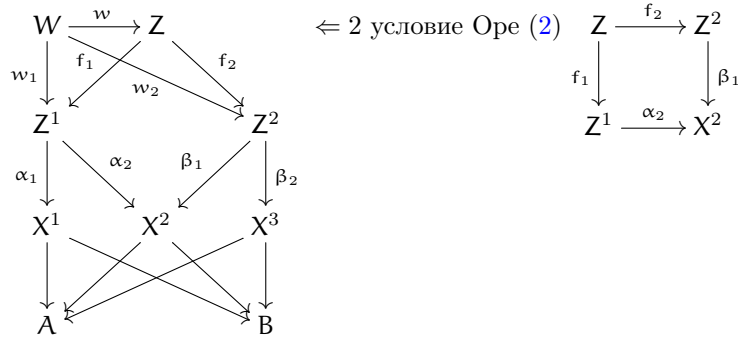
Prop 1.7. 1 Отношение, заданное (4), является отношением эквивалентности.

2 Композиция (5) двух любых домиков определена. Более того, она не зависит от представителя класса эквивалентности.

3 Композиция (5) домиков ассоциативна на классах эквивалентности. Также существует единичный домик (id, id)

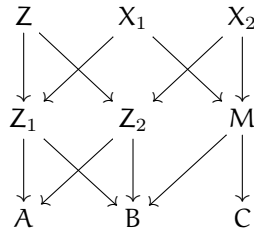
Доказательство. 1. Симметричность и рефлексивность очевидны. Проверим транзитивность. Рассмотрим три домика (f_A^i, f_B^i) , $f_A^i \in \text{Hom}_c(X^i, A)$, $f_B^i \in \text{Hom}_c(X^i, B)$, с вершинами X^i , $i = 1, 2, 3$. Пусть эквивалентны домики 1, 2

и 2,3. Докажем эквивалентность 1, 3. Используя второе условие Оре существует объект Z с морфизмами f_1, f_2 , причем f_1 из локализующего семейства.

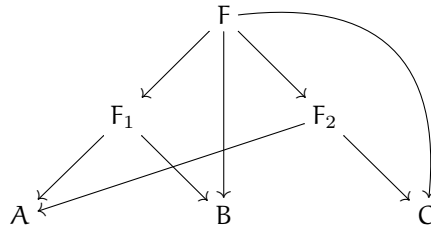


Отметим, что диаграмма выше не является коммутативной. Для того, чтобы добиться коммутативности воспользуемся 3 условием Оре. Мы знаем, что верхний квадрат коммутирует: $f_A^2 \alpha_2 f_1 = f_A^2 \beta_1 f_2$. Тогда существует объект W с морфизмом из локализующего семейства $w : W \rightarrow Z : \alpha_2 f_1 w = \beta_1 f_2 w$. Теперь, взяв $w_1 = f_1 w$, $w_2 = f_2 w$, получим уже коммутативную диаграмму с объектом W вместо Z . Тогда искомым домиком будет объект W с морфизмами $\alpha_1 w_1$ и $\beta_2 w_2$.

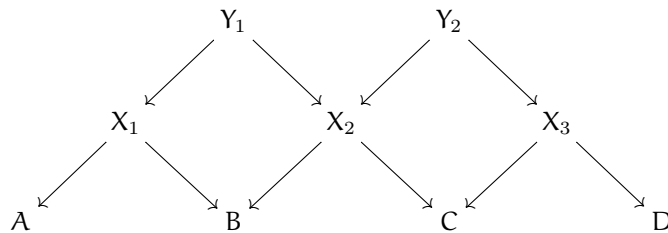
2. Пусть домики с вершинами Z_1, Z_2 эквивалентны и берутся в композиции с домиком с вершиной M .



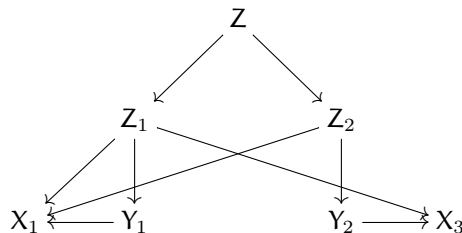
Применим второе условие Оре (2) два раза и, соответственно, получим искомый домик.



3. Покажем, что $(f_1, g_1)((f_2, g_2)(f_3, g_3)) \sim ((f_1, g_1)(f_2, g_2))(f_3, g_3)$.



Y_1, Y_2 — вершины композиций первого и второго, второго и третьего домиков соответственно. Снова применим 2 условие Оре (2) и получим для итоговых композиций Z_1, Z_2 эквивалентность:



Теперь займёмся явным построением локализации категории семейством, удовлетворяющим условиям Оре. Искомый морфизм $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ будет действовать тождественно на объектах. На морфизмах положим:

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \begin{array}{ccc} & X & \\ \text{id} \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array} \quad (6)$$

Под домиком, естественно, понимается его класс эквивалентности. То, что такая конструкция даёт локализацию и удовлетворяет аксиомам функториальности, конечно, под вопросом. Для начала можно проверить некоторые факты. Проверим, например, что образ локализующего семейства состоит из обратимых морфизмов. Действительно, обратным к домику (id, s) будет домик (s, id) , так как следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{id} \swarrow & & \searrow \text{id} & \\ & X & & X & \\ \text{id} \swarrow & & s \searrow & & \swarrow s & \searrow \text{id} \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

Верность аксиомы функториальности $F(fg) \sim F(f)F(g)$ следует из коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \text{id} \swarrow & & \searrow f & \\ & X & & Y & \\ \text{id} \swarrow & & f \searrow & & \swarrow \text{id} & \searrow g \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

Очевидно, домик выше эквивалентен $F(fg)$. Наконец, проверим, что домики удовлетворяют универсальному свойству и докажем следующей теореме.

Thr 1.8. Пусть S — локализующее семейство локально малой категории \mathcal{C} . Тогда $\text{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ — в точности классы эквивалентности домиков вида (3).

Доказательство. Пусть $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ переводит семейство S в изоморфизмы. Построим функтор G , делающий диаграмму 1 коммутативной. На объектах G должен определяться также, как и T . Пусть φ — морфизм в $\mathcal{C}[S^{-1}]$, представляющийся домиком (s, g) . Возьмем его композицию $\varphi \cdot (1, s) = (1, f)$, где из построения (6) $(1, s) = F(s)$, $(1, f) = F(f)$. Т. е. мы получили, что

$$\varphi \cdot F(s) = F(f) \quad G(\cdot) \Rightarrow G(\varphi) \cdot T(s) = T(f) \quad \Rightarrow G(\varphi) = T(f)T(s)^{-1},$$

где последнее равенство даёт явное построение G и, следовательно, доказывает универсальность. ■