**Семинар 1**
**(Темы: Локализация, условия Оре)**

Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$ и $S \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ — произвольное множество морфизмов, замкнутое относительно композиции. Предположим, мы бы хотели рассмотреть похожую на неё категорию с тем различием, что все морфизмы семейства $S$ в ней обратимы. Сконструировать её не очень сложно: мы навино добавляем обратные морфизмы и все композиции с ними. Естественно, морфизмов в итоге станет больше и появится естественное вложение $F$. Тем не менее, такая конструкция не очень тривиальна: несмотря на простоту построения, мы не знаем как она работает. Более того, категорий, удовлетворяющих нашему условию, может быть много. Оказывается, что именно самая наивная конструкция обладает следующим универсальным свойством в 2-категории всех категорий, которым мы такое построение и определим.

**Prop 1.1.** *Существует единственная с точностью до эквивалентности категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ с функтором $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, обладающая универсальным свойством: для любого $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, переводящего $S$ в изоморфизмы, существует единственный функтор $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$, делающий следующую диаграмму коммутативной.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "T"'] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "G"] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd} \tag{1}$$

*Доказательство.* Для доказательства приведем явную конструкцию категории $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Объекты в ней будут точно такие же: $\mathrm{Ob}\mathcal{C}[S^{-1}] = \mathrm{Ob}\mathcal{C}$. Обратные морфизмы введём следующим образом:

Назовём словом формальный набор букв, обозначающий морфизмы из $\mathcal{C}$. Добавим к буквам обратные $s^{-1}$ морфизмы для семейства $S$. Слова должны состоять из компонуемых букв, т. е. в слове $fg$ конец морфизма $f$ и начало морфизма $g$ должны совпадать. Будем считать, что начало и конец морфизма $s^{-1}$ – это соответственно конец и начало $s$. Введём на словах отношение эквивалентности, удовлетворяющее следующим правилам:

- $(f)(g) \sim (fg)$
- $(s)(s^{-1}) \sim \mathrm{Id}_A$, где $A$ — объект, являющийся началом $s^{-1}$.
- $(f)(s)(s^{-1})(g) \sim (f)(g)$.

Классы эквивалентности положим морфизмами в $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Легко проверить, что они удовлетворяют определению категории и каждый морфизм в $\mathcal{C}[S^{-1}]$ обратим.

Тогда функтор $F$ определим как тождественно действующий на объектах и как вложение на морфизмах. $G$ определим как действующий аналогично $T$ на объектах и морфизмах, являющихся образами $F$. Появившиеся обратные морфизмы $G$ будет отправлять в соответствующие обратные в $\mathcal{D}$. ■

**Com 1.2.** *Конструкция, приведённая в доказательстве, тесно связана с понятием локализации кольца $R$ мультипликативно замкнутым подмножеством $S$. Мы также чисто формально добавляем обратный элемент каждому из заданного подмножества, рассматривая дроби вида $m/s$, $m \in R, s \in S$. Тогда нашим отношением эквивалентности станет не что иное, как сокращение дробей: $r_1/s_1 \sim r_2/s_2 \iff \exists t \in S : t(s_1r_2 - s_2r_1) = 0$. Причем такая конструкция имеет точно такое же универсальное свойство в категории колец!*

Доказанное утверждение гарантирует корректность следующего определения.

**def 1.3.** Пусть $\mathcal{C}$ — локально малая категория, $S \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ — произвольное множество морфизмов, замкнутое относительно композиции. Локализацией $\mathcal{C}[S^{-1}]$ категории $\mathcal{C}$ по локализующему семейству $S$ будем называть категорию с универсальным свойством (1).

С помощью данного объекта введём пока что бесполезное определение.

**def 1.4.** Производной категорией $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ категории $\mathcal{A}$ будем называть локализацию категории комплексов по квазиизоморфизмам.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \mathsf{Kom}(\mathcal{A})[\mathsf{Qis}^{-1}]$$

Введённое определение, конечно, не дают никакого понятия того, как такая категория устроена. Однако это устройство становится проще, если на семейство наложить условия Оре.

**def 1.5** (Условия Оре)**.** Назовём семейство морфизмов $S$ в категории $\mathcal{C}$ локализующим, если оно удовлетворяет парам условий (указанным ниже и двойственным им).

- Все тождественные морфизмы лежат в $S$ и $S$ замкнуто относительно композиции.

- Для любого морфизма $f : X \to Z$ и морфизма $s : Y \to Z$ из семейства $S$ найдется объект $W$ и два морфизма $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$, $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X), t \in S$, делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd} \tag{2}$$

- Если известно, что для $s \in S$ $sf_1 = sf_2$, то найдется $t \in S$ такой, что $f_1 t = f_2 t$. Или иначе, если у двух морфизмов нашёлся левый уравнитель, то найдется и правый.

При таких условиях оказывается, что можно дать более явное описание локализации в терминах домиков.

**def 1.6.** 1. Назовём (левым) домиком $(s, f)$ тройку объектов $X, Y, Z$ и пару морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$, $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, $t \in S$.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \tag{3}$$

2. Назовём два (левых) домика эквивалентными, если они "достраиваются до большого домика". $(s, f) \sim (t, g)$, если существует объект $Z'''$ и морфизмы $v, h$, $v \in S$, делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & & Z''' \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & Z' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f"' near start] & & Z'' \arrow[dlll, "t" near start] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & & & Y \end{tikzcd} \tag{4}$$

Т. е. существует "больший" домик $(sv, gh)$.

3. Композиций двух (левых) домиков $(v, g)$, $(s, f)$ называется домик $(st, gl)$, делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & & Z' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "l"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \tag{5}$$

Следующее предложение помимо доказательства корректности определения выше показывает, что классы эквивалентности домиков удовлетворяют определению морфизмов в категории.

**Prop 1.7.** *1 Отношение, заданное (4), является отношением эквивалентности.*

*2 Композиция (5) двух любых домиков определена. Более того, она не зависит от представителя класса эквивалентности.*

*3 Композиция (5) домиков ассоциотивна на классах эквивалентности. Также существует единичный домик* $(id, id)$

*Доказательство.* 1. Симметричность и рефлексивность очевидны. Проверим транзитивность. Рассмотрим три домика $(f^i_A, f^i_B)$, $f^i_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^i, A)$, $f^i_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^i, B)$, с вершинами $X^i$, $i = 1, 2, 3$. Пусть эквивалентны домики 1, 2 и 2,3. Докажем эквивалентность 1, 3. Используя второе условие Оре существует объект $Z$ с морфизмами $f_1, f_2$, причем $f_1$ из локализующего семейства.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "w"] \arrow[d, "w_1"'] \arrow[drr, "w_2"] & Z \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
Z^1 \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & & Z^2 \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[d, "\beta_2"] \\
X^1 \arrow[d] \arrow[drr] & X^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & X^3 \arrow[dll] \arrow[d] \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

$\Leftarrow$ 2 условие Оре (2)

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Z^2 \arrow[d, "\beta_1"] \\
Z^1 \arrow[r, "\alpha_2"] & X^2
\end{tikzcd}
$$

Отметим, что диаграмма выше не является коммутативной. Для того, чтобы добиться коммутативности воспользуемся 3 условием Оре. Мы знаем, что верхний квадрат коммутирует: $f_A^2 \alpha_2 f_1 = f_A^2 \beta_1 f_2$. Тогда существует объект $W$ с морфизмом из локализующего семейства $w : W \to Z : \alpha_2 f_1 w = \beta_1 f_2 w$. Теперь, взяв $w_1 = f_1 w$, $w_2 = f_2 w$, получим уже коммутативную диаграмму с объектом $W$ вместо $Z$. Тогда искомым домиком будет объект $W$ с морфизмами $\alpha_1 w_1$ и $\beta_2 w_2$.

2.Пусть домики с вершинами $Z_1, Z_2$ эквивалентны и берутся в композиции с домиком с вершиной $M$.

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[d] \arrow[dr] & X_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & X_2 \arrow[dl] \arrow[d] \\
Z_1 \arrow[d] \arrow[dr] & Z_2 \arrow[dl] \arrow[d] & M \arrow[dl] \arrow[d] \\
A & B & C
\end{tikzcd}
$$

Применим второе условие Оре (2) два раза и, соответственно, получим искомый домик.

$$
\begin{tikzcd}
& & F \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend left] & & \\
& F_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[dlll] \arrow[dr] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}
$$

3. Покажем, что $(f_1, g_1)((f_2, g_2)(f_3, g_3)) \sim ((f_1, g_1)(f_2, g_2))(f_3, g_3)$.

$$
\begin{tikzcd}
& & Y_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& X_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B & & C & & D
\end{tikzcd}
$$

$Y_1, Y_2$ — вершины композиций первого и второго, второго и третего домиков соответственно. Снова применим 2 условие Оре (2) и получим для итоговых композиций $Z_1, Z_2$ эквивалентность:

$$
\begin{tikzcd}
& & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& Z_1 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drrr] & & Z_2 \arrow[dlll] \arrow[d] & \\
X_1 & Y_1 \arrow[l] & & Y_2 \arrow[r] & X_3
\end{tikzcd}
$$

∎

Теперь займёмся явным построением локализации категории семейством, удовлетворяющим условиям Оре. Искомый морфизм $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$ будет действовать тождественно на объектах. На морфизмах положим:

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \tag{6}$$

Под домиком, естественно, понимается его класс эквивалентности. То, что такая конструкция даёт локализацию и удовлетворяет аксиомам функториальности, конечно, под вопросом. Для начала можно проверить некоторые факты. Проверим, например, что образ локализующего семейства состоит из обратимых морфизмов. Действительно, обратным к домику $(id, s)$ будет домик $(s, id)$, так как следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "id"] & & \\ & X \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "s"] & & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "id"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

Верность аксиомы функториальности $F(fg) \sim F(f)F(g)$ следует из коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ & X \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "f"] & & Y \arrow[dl, "id"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

Очевидно, домик выше эквивалентен $F(fg)$. Наконец, проверим, что домики удовлетворяют универслаьному свойству и докажем следуещюю теорему.

**Thr 1.8.** *Пусть* $S$ *— локализующее семейство локально малой категории* $\mathcal{C}$*. Тогда* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ *— в точности классы эквивалентности домиков вида* (3).

*Доказательство.* Пусть $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ переводит семейство $S$ в изоморфизмы. Построим функтор $G$, делающий диаграмму 1 коммутативной. На объектах $G$ должен определяться также, как и $T$. Пусть $\varphi$ — морфизм в $C[S^{-1}]$, представляющийся домиком $(s, g)$. Возьмем его композицию $\varphi \cdot (1, s) = (1, f)$, где из построения (6) $(1, s) = F(s)$, $(1, f) = F(f)$. Т. е. мы получили, что

$$\varphi \cdot F(s) = F(f) \quad \overset{G(\cdot)}{\Rightarrow} G(\varphi) \cdot T(s) = T(f) \quad \Rightarrow G(\varphi) = T(f)T(s)^{-1},$$

где последнее равенство даёт явное построение $G$ и, следовательно, доказывает универсальность. ■