В предыдущих сериях мы рассматривали двойной ограниченный комплекс L^{ij}, его тотальный комплекс $\mathsf{Tot}^{\oplus}(K^{\bullet\bullet})^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{pq}$ и соответствующие фильтрации:

$$^{I}F^p(\mathsf{TotL})^n = \bigoplus_{\substack{i+j=n,\\ i\geqslant p}} L^{ij}$$

$$^{II}F^q(\mathsf{TotL})^n = \bigoplus_{\substack{i+j=n,\\ i\geqslant q}} L^{ij}$$

$$\exists \text{с. п.}\, ^{I}E_r^{pq} = H_I^p(H_{II}^q) \Rightarrow H^{p+q}(\mathsf{TotL})$$

Если мы делаем фильтрацию типа I, дифференциал бьёт в бок, на втором листе будут стоять горизонтальные когомологии.

$$E_r^{pq}: \qquad Z_1^{pq} = (d_I + d_I I)^{-1}(F^{p+1}\mathsf{Tot}^{p+q+1}L)\bigcap F^p\mathsf{Tot}^{p+q}L$$

$$= (d_I + d_{II})^{-1}\left(\bigoplus_{\substack{i+j=p+q\\ i\geqslant p+1}} L^{ij}\right)\bigcap\left(\bigoplus_{\substack{i+j=p+q\\ i\geqslant p}} L^{ij}\right) = \ker d_{II}^{pq}\bigoplus\left(\bigoplus_{\substack{i+j=p+q\\ i\geqslant p+1}} L^{ij}\right)$$

$$E_r^{pq} = \frac{Z_2^{pq}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1;q+r-2}} \overset{r=1}{=} \frac{\ker d^{pq}\bigoplus\left(\bigoplus_{\substack{i+j=p+q\\ i\geqslant p+1}} L^{ij}\right)}{\left(\bigoplus_{\substack{i+j=p+q\\ i\geqslant p+1}} L^{ij} + \operatorname{im} d^{p,q+1}\right)} = H_{II}^{pq}(L^{\bullet\bullet}) = E_1^{pq}$$

$$E_2^{pq} = H_I^p(H_{II}^q(L^{\bullet\bullet}))$$

$$Z_0^{p+1,q-1} = \bigoplus_{\substack{i+j=p+q\\ i\geqslant p+1}} L^{ij} \qquad Z_0^{p,q-1} = \bigoplus_{\substack{i+j=p+q-1\\ i\geqslant p}} L^{ij}$$

$K^{\bullet}$ – комплекс.

0.1 Спектральная последовательность комплекса с "глупой"фильтрацией

$$E_r^{pq} = \frac{Z_2^{pq}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1;q+r-2}} =$$

$$E_2^{pq}\begin{cases} 0, & q\neq 0\\ H^p(K^{\bullet}), & q=0; r\geqslant 2\end{cases}$$

$$E_2^{pq} \Rightarrow H^n(K^{\bullet})$$

$$f_* : \mathsf{mod}\text{-}S \to \mathsf{mod}\text{-}R$$

[1]

[1] каноническая фильтрация идёт в другую сторону

Ex 0.1. *Пусть есть* R, S *– коммутативные кольца.* $f\colon R \to S$. *Пусть* $A \in R\text{-mod}$, $B \in S\text{-mod}$. $\exists$ *с. п.* $E_r^{pq} = \mathrm{Tor}_p^S(\mathrm{Tor}_q^R(A;S);B) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^R(A;B)$

$P_\bullet \to A \to 0$ – прроективная резольвента A как $R\text{-mod}$. $Q_\bullet \to B \to 0$ – прроективная резольвента B как $S\text{-mod}$.

$$\begin{tikzcd}
0 & P_0 \otimes_R Q_2 \arrow[l] \arrow[d] & P_1 \otimes_R Q_2 \arrow[l] \arrow[d] & P_2 \otimes_R Q_2 \arrow[l] \arrow[d] \\
0 & P_0 \otimes_R Q_1 \arrow[l] \arrow[d] & P_1 \otimes_R Q_1 \arrow[l] \arrow[d] & P_2 \otimes_R Q_1 \arrow[l] \arrow[d] \\
0 & P_0 \otimes_R Q_0 \arrow[l] \arrow[d] & P_1 \otimes_R Q_0 \arrow[l] \arrow[d] & P_2 \otimes_R Q_0 \arrow[l] \arrow[d] \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

$$^{II}H_q(P_\bullet \otimes Q_p) = H_q(P_\bullet \otimes_R S \otimes_S Q_p) = H_q(P_\bullet \otimes_R S) \otimes_S Q_p = \mathrm{Tor}_q^R(A,S)_p$$

$$E_r^{pq} = \mathrm{Tor}_p^S(\mathrm{Tor}_q^R(A,S);B)$$

Thr 0.2 (Гротендик)**.** $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *– абелевы категории.* $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *– точные слева.* $\mathcal{R}_\mathcal{A}$, $\mathcal{R}_\mathcal{B}$ *– соответствующие классы приспособленных объектов. Пусть также* $\mathcal{F}(\mathcal{R}_\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}_\mathcal{B}$

- *Тогда* $\exists$ *естественный изоморфизм между функторами* $R(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) \cong R\mathcal{G} \circ R\mathcal{F}$.
- $\exists$ *с. п. Гротендика* $E_2^{pq} = R^p\mathcal{G}(R^q\mathcal{F}(X)) \Rightarrow R^{p+q}(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(X)$

Доказательство.

def 0.3 (Резольвента Картана-Эйленберга)**.** $K^\bullet$ – комплекс L^{ij} – резольвента К.-Э. для $K^\bullet$:

- L^{ij} – ограниченный двойной комплекс в IV квадранте, L^{ij} – инъективные (приспособленные к $\mathcal{F}$).
- $\varepsilon\colon K^\bullet \to L^{\bullet,0}$.
- Комплекс $0 \to K^i \to K^{i,0} \to K^{i,1} \to \ldots$ – точен.

Thr 0.4.

- $K^\bullet$ *– имеет резолвенту К.-Э.*
- *Она определена однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности комлексов.*
- $\forall f\colon K^\bullet \to K^\bullet$ *– продолжается до морфизма резолвент однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности.*

∎

Prop 0.5 (Миттаг-Леффлер)**.** $\{p_1, \ldots, p_N\} \in \mathbb{C}$. *Хотим построить мероморфную функцию с фикс. главными частями рядов Лорана в точках* $p_1, \ldots, p_N$. *Выберем* $U_i \supset p_i$ *– откр. окр. т.* p_i. *Тогда локально решение существует* f_i *– соответствующая мероморфная функция, решающая заадчу в* U_i.
$\mathcal{O}$ *– пучок регулярных функций.* M *– пучок мероморфныз функций.* $f_{ij} = (f_i - f_j)|_{U_i \bigcap U_j} \in \mathcal{O}(U_i \bigcap U_j)$.

$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$$

$$g_i \in \mathcal{O}(U_i)$$

$$f_{ij} = g_i - g_j$$

$$f_i = f_i - g_i$$

Обозначим $\mathcal{PP} = \mathcal{M}/\mathcal{O}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{PP} \longrightarrow 0$$

Пусть $\mathcal{F}$ – пучок на X, $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение.

- $\Gamma(U,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$ – функтор глобального сечения.
- $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U\ni x} = \mathcal{F}(U)$ – стебель пучка.
- $\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}; \mathcal{G}\otimes\mathcal{F} = \{U\mapsto \mathcal{F}(U)\otimes\mathcal{G}(U)\}^+$
- $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$
- $f^{-1}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V\ni f(U)}\mathcal{G}(V)$
- $\Gamma(X,\mathcal{F}) = f_*\mathcal{F}; f\colon X\to pt\}$
- f^{-1} – точный, f_* – точный слева $\Rightarrow \Gamma(X,\mathcal{F})$ – точный слева.
- $f^{-1}?f_*$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{O}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{PP}) & \longrightarrow & R^1\Gamma(\mathcal{O}) & \longrightarrow & R^1\Gamma(\mathcal{O}) & \longrightarrow & \dots \\
\\
 & & H^0(\mathcal{O}) & & & & H^0(\mathcal{PP}) & & H^1(\mathcal{O}) & & & &
\end{array}
$$

Claim 0.6. *$\mathcal{F}$ – пучок на X. $\mathcal{F}\in Sh(X)$. В категории пучков достаточно много инъективных объектов (но, как правило не достаточно проективных).*

Доказательство. $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I(x)$, $\mathcal{I}(U) = \prod_{x\in U} I(x)$ – инъективный.
Проективных не достаточно много. X– топологическое пространство, локально односвязно, у точек нет минимальных(?) окрестностей.

$$i\colon \{x\}\hookrightarrow X$$

$i_*\mathbb{Z}$ – пучок-небоскрёр. Выберем произвольную окрестность $U(x)$, $V(x)\subset U$. Предположим существует проективное накрытие $P \twoheadrightarrow i_*\mathbb{Z}(U)$. Продолжение нулём $\mathbb{Z}_V$

$$W\mapsto \begin{cases}\mathbb{Z}, & WV\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl] \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_V \arrow[r] & i_*\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & P(U) \arrow[dl] \arrow[d] \\
\underset{=0}{\mathbb{Z}_V(U)} \arrow[r] & i_*\mathbb{Z}(U)
\end{tikzcd}
$$

∎

Com 0.7. *В $Sh(X)$ – достаточно много инъективных объектов $\Rightarrow \exists R\Gamma\colon \mathcal{D}^+(Sh)\to\mathcal{D}^+(\mathbf{Ab})$*

def 0.8 (Когомологии Чеха с коэффициентами в пучке)**.** X – т.п., R_x – пучок колец, $\mathcal{F}$ – пучок R_x-mod. $U = \{U_\alpha\}$ – локально конечное покрытие.

$$C^0(U,\mathcal{F}) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{F}(U_\alpha)$$

$$C^1(U,\mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0\neq\alpha_1}\mathcal{F}(U_{\alpha_0}\bigcap U_{\alpha_1})$$

$$\dots$$

$$C^p(U,\mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0\neq\ldots\neq\alpha_p}\mathcal{F}(\bigcap_{i=1\ldots p}U_{\alpha_i})$$

$$\delta\colon C^p(U,\mathcal{F})\to C^{p+1}(U,\mathcal{F})$$

$$C^0\to C^1\to C^2$$

$$(\sigma_U;\sigma_V;\sigma_W)\mapsto(\sigma_{UV};\sigma_{VW};\sigma_{WU})\mapsto\sigma_{UVW}$$

$$\sigma_{UV} = \sigma_U - \sigma_V|_{U\bigcap V}$$

$$\sigma_{VW} = \sigma_V - \sigma_W|_{V\bigcap W}$$

$$(\delta\sigma)_{i_0\dots i_p} = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j \sigma_{i_0,\dots,i_j,\dots i_p}$$
$$\delta^2 = 0$$
$$Z^i(U,\mathcal{F}) = \{\sigma \in C^i(U,\mathcal{F}) | \delta\sigma = 0\}$$
$$B^i(U,\mathcal{F}) = \{\sigma \in C^i(U,\mathcal{F}) | \exists\tau \in C^{i-1} \colon \delta\tau = 0\}$$
$$H^i = Z^i/B^i$$

$U'?U$ – измельчение U. $\forall\alpha' \in \mathcal{A}' \exists \alpha \in \mathcal{A} \colon U_{\alpha'} \subset U_\alpha$

$$\varphi \colon \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$$
$$\rho_\varphi \colon C^p(U\mathcal{F}) \to C^p(U',\mathcal{F})$$
$$(\rho_\varphi\sigma)_{i'_o\dots i'_p} = \sigma_{\varphi(i'_0)\varphi(i'_1)\dots\varphi(i'_p)}|_{U_{i'_0\dots i'_p}}$$

Хотя отображение φ и определено неоднозначно, оно обладает следующим свойством: Пусть есть второе отображение φ и $\psi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$, тогда морфизмы комплексов $\rho_\varphi \sim \rho_\psi$ – гомотопически эквивалентны.

$$H^p(\mathcal{F}) = \varinjlim_{U} H^p(U,\mathcal{F})$$

где предел берётся по всем локально конечным покрытиям.

Thr 0.9 (Лере о покрытии)**.** $X = U_i$ *– локально конечное покрытие.* $H^q(\bigcap_{k=0,\dots p} U_{i_k},\mathcal{F}) = 0,\ p \geqslant 0,\ q \geqslant 0$. $\mathcal{F}$ *– ацикличный пучок на пересечении. Тогда* $H^p(\mathcal{F}) = H^p(U,\mathcal{F})$.

Ex 0.10. Ω *– пучок дифференциалов на гладкой проективной кривой* $\mathbb{P}^1$. $U = \{\mathbb{A}^1; \mathbb{A}^1\}$.

$$\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x] = U$$
$$\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[y] = V$$
$$x \mapsto \frac{1}{y}$$
$$\Gamma(U,\Omega) = \mathbf{k}[x]dx$$
$$\Gamma(V,\Omega) = \mathbf{k}[y]dy$$
$$dy \mapsto -\frac{1}{x^2}dx$$
$$\Gamma(V,\Omega) = \mathbf{k}[x,\frac{1}{x}]dx$$

Комплекс Чеха:

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow 0$$
$$(f(x)dx, g(y)dy)$$
$$(f(x)dx, -g(x)\frac{1}{x^2}dx)$$
$$f(x)dx - g(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2}dx = 0$$
$$f = g = 0 \quad \Rightarrow \quad H^0(U,\Omega) = 0$$
$$H^1(U,\Omega) = \mathbf{k}[x,\frac{1}{x}]/(f(x) - g(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}dx) = (x^{-1}dx) \cong \mathbf{k}$$

Thr 0.11. X *– локальное окольцованное пространство со структурным пучком* $\mathcal{R}_x$.

a $\Phi \colon \mathcal{R}_x\text{-mod} \to \mathrm{ShAb}$ *– забывающий функтор. Тогда* $\exists$ *канонический изоморфизм* $R\Gamma \cong R(\Gamma \circ \Phi)$.

b *Th. Лере,* $H^i(X,\mathcal{F})$ *совпадает с когомологиями Чеха.*

c $H^i(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{R}_x,\mathcal{F})$

d $R^i f_*(\mathcal{F}) \cong (U \to H^i(f^{-1}(U);\mathcal{F}))^+$

e Спектральная последовательность Лере $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, *$\mathcal{F}$ – пучок на* X.

$$E_r^{pq} = R^p g_*(R^q f_*(\mathcal{F})) \Rightarrow R^{p+q}(gf)_*(\mathcal{F})$$

f Спектральная последовательность Чеха $\mathfrak{U}$*-покрытие.*

$$E_r^{pq} = H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H^n(X, \mathcal{F})$$

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{F}) \text{ – пучко когомологий } \mathcal{F}$$

$$\{U \to H^q(U, \mathcal{F})\}^+$$

def 0.12. Пучок $\mathcal{F}$ назывется вялым, если все морфизмы сужения сюръективны.[2]

Claim 0.13. *Вялых пучков достаточно мног* $\mathcal{G}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ *– очевидно вялый.* $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$

Claim 0.14. *Инъективный* $\Rightarrow$ *вялый.* $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{I}$ *– прямое слагаемо в* $\mathcal{G} \Rightarrow$ *вялый.*

Claim 0.15. *Пусть дана точная последовательность пучков:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

$\mathcal{F}$ – вялый. Тогда:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi} \Gamma(X, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

Доказательство. $s \in \Gamma(\mathcal{H})$, $E = (U, t) | U \subset X; t \in \mathcal{G}(U) \colon \psi(t) = s|_U\}$.

$$(U', t') \prec (U'', t'') \iff U' \subset U'', t''|_{U'} = t'$$

По лемме Цорна найдётся максимальный элемент U, t. Предположим, что $U \neq X$, $\in X/U$; $V(x)$ – окрестность $\exists t_1 \in \mathcal{G}(V) \colon s|_V = \psi(t_1)$ $(t - t_1)|_{U \bigcap V} = \varphi(r_{UV})$, $r_{UV} \in \mathcal{F}(U \bigcap V) \Rightarrow r \in \Gamma(\mathcal{F}) \colon r|_{U \bigcap V} = r_{UV}$, $t_2 = t_1 + r|_V$, t_1; t_2 – согласованы $\Rightarrow$ противоречие.
$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ – вялы $\Rightarrow \mathcal{F}$ – вял.

$$s \in \mathcal{H}(U) \qquad t', t \in \mathcal{G}(U) \qquad r = t - t'$$

$$s \in \Gamma(U)$$

$$t + r \in \Gamma(\mathcal{G})$$

$$\psi(t) = s \qquad \psi(t') = s \qquad \Rightarrow \qquad (r) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r \in \Gamma(\mathcal{F})$$

Γ преводит ациклочные комплексы (огр. слева) вялых пучков в ацикличные

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \dots$$

$$0 \longrightarrow Z^i(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{F}^i \longrightarrow Z^{i+1}(\mathcal{F}^\bullet)$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{B}^i(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow 0$$

************ $\{U_\alpha\}$ $I = (i_0, \dots, i_p)$

$$j_I \colon U_{i_0} \bigcap \dots \bigcap U_{i_p} \hookrightarrow X$$

$$\mathcal{F}_I = j_* j^* \mathcal{F}$$

$$H^q(U_{i_0} \bigcap \dots U_{i_p}, j_{I*} j_I^* \mathcal{F}) = 0, \text{ при } p \geqslant 0, q \geqslant 0$$

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^1 \to \dots \text{ – вялая мягкая резольвента.}$$

$$C^p(\mathcal{K}(^) q) \text{ – вялые пучки.}$$

$e^p(\mathcal{K}(^) q)$ – двойной комплекс.

$$E_r^{pq} = H^p(H^q(U; C^\bullet(\mathcal{F}))) \qquad \Rightarrow \qquad H^{p+q}(\Gamma(X, C^\bullet(\mathcal{F})))$$

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{R}_x; \mathcal{F}) = R^i \mathrm{Hom}(\mathcal{R}_x; \mathcal{F}) = R^i \Gamma(\mathcal{F}) = H^i(\mathcal{F})$$

$$\mathcal{F} \hookrightarrow I^\bullet \qquad R^q f_*(\mathcal{F}) = H^q f_*(I^\bullet)$$

$$(U \to H^q(U; f_* I))^+$$

∎

[2]Можно продолжать на большие множества, поднимать морфизмы сужения