Семинар 1
(Темы: Спектральная последовательность. Дополнительные примеры.)

Ex 1.1 (Элементарный пример, нефильтрованный)**.** *Самым простым примером спектральной последовательности является любой комплекс $K_\bullet \in \mathsf{Kom}(\mathcal{A})$. Он естественно имеет дифференциал $d^K_i \colon K_i \to K_{i+1}$, поэтому на нулевом листе $d_0 = d^K$. Пусть $E^\bullet_0 = K_\bullet$, тогда $E^\bullet_1 = H^\bullet(C_\bullet)$, дифференциал индуцирует нулевые отображения на когомологиях, поэтому на первом листе мы имеем $d_1 = 0$. Из этого следует, что $E_2 = E^\bullet_\infty$ и $d_n = 0 \ \forall \ n \geqslant 2$, таким образом, получаем следующую спектральную последовательность:*

- $E_0 = K_\bullet$
- $E_r = H(K_\bullet) \ \forall \ r \geqslant 1$

Такая спектральная последовательность стабилизируется на первом листе, так как нетривиальные дифференциалы присутствовали лишь на нулевом.

1.1 Доказательство леммы о змее с помощью спектральной последовательности

Докажем лемму о змее **??**, используя спектральную последовательность. Диаграмма в этой лемме представляет собой двойной комплекс $C^{\bullet\bullet}$ с точными строками в абелевой категории.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{00} & \longrightarrow & C^{10} & \longrightarrow & C^{20} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{01} & \longrightarrow & C^{11} & \longrightarrow & C^{21} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Для такого комплекса существуют две спектральные последовательности, которые будут сходиться к когомологиям тотального комплекса $H^{p+q}(\mathsf{Tot}(C^{\bullet\bullet}))$.
Нулевые листы этих последовательностей, естественно, $E^{pq}_0 = C^{pq}$ и $E^{pq}_0 = C^{qp}$:

$$\begin{array}{|ccc} 0 & 0 & 0 \\ C^{00} & C^{01} & 0 \\ C^{10} & C^{11} & 0 \\ C^{20} & C^{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{00} & C^{10} & C^{20} & 0 \\ 0 & C^{01} & C^{11} & C^{21} & 0 \\ \hline \end{array}$$

1.2 Что-то о нётеровых кольцах

Несколько примеров фильтрации из коммутативной алгебры.

Ex 1.2 (Фильтрация кольца)**.** *Убывающей мкльтипликативной фильрацией кольца R называется убывающая последовательность идеалов вида*

$$R = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

Удовлетворяющая условию $I_iI_j \subset I_{i+j} \ \forall \ i, j$. Эта конструкция чаще всего используется, в случае, когда $I_j = I^j$ – степени одного идеала I, это называется I-адической фильтрацией. В приложениях чаще всего встречается ситуация локального нётерова кольца и его максимального идеала.
Полезно обобщить эту конструкцию на $R - \mathsf{mod}$ иизучать фильтрации модулей

$$M \supset IM \supset I^2M \supset \dots$$

Однако, пересекая члены такой фильтрации с некоторым подмодулем $M' \subset M$ в общем случае мы не получим I-адическую фильтрацию M'.