Ранее ?? было введенопонятие двойного комплекса $L^{ij} \subset \mathcal{A}$ – абелева. Было также сформулировано утверждение о точности тотального комплекса. Рассмотрим два примера, когда один из тотальных комплексов оказывается неточным

Ex 0.1 ($\mathsf{Tot}^{\oplus}$ – точен, $\mathsf{Tot}^{\prod}$ – нет)**.**

$$L_1^{\bullet\bullet} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\ 0 & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\ 0 & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$L_2^{\bullet\bullet} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\ 0 & \mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\ 0 & 0 \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\mathsf{Tot}^{\oplus}(L_1) \ni (1,0,0,\dots)$ – *точен,* $\mathsf{Tot}^{\prod}(L_2) \ni (1,-1,1,\dots)$ – *не точен,*

Существует две стандартные фильтрации двойных комплексов – по строкам и по столбцам

$$F^p \mathsf{Tot}(L)^n = \bigoplus_{i+j=n, i \geqslant p} L^{ij}$$

$$F^q \mathsf{Tot}(L)^n = \bigoplus_{i+j=n, j \geqslant q} L^{ij}$$

Существует спектральная последовательность с $E_2^{pq} = H_I^q(H_{II}^p(L^{\bullet,q}))$, сходящийся к $H^{p+q}(\mathsf{Tot}(L^{\bullet\bullet}))$

Ex 0.2.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & B \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0 \end{tikzcd}$$

$\ker f = \operatorname{Coker} f = 0 \Rightarrow$ f – iso.

Ex 0.3.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \\ A \arrow[r] \arrow[u, twoheadrightarrow] & B \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"] & D \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & E \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$\ker f = \operatorname{Coker} f = 0 \Rightarrow$ f – iso.

Ex 0.4. $\mathsf{Tor}(A,B) \cong \mathsf{Tor}(B,A)$. *Выберем две проективные резолвенты:* $P_\bullet \to A$, $Q_\bullet \to B$.

$$(P_\bullet \otimes Q_\bullet)_{ij} = P_i \otimes Q_j$$

$$\begin{tikzcd} 0 & P_0 \otimes Q_2 \arrow[l] \arrow[d] & P_1 \otimes Q_2 \arrow[l] \arrow[d] & P_2 \otimes Q_2 \arrow[l] \arrow[d] \\ 0 & P_0 \otimes Q_1 \arrow[l] \arrow[d] & P_1 \otimes Q_1 \arrow[l] \arrow[d] & P_2 \otimes Q_1 \arrow[l] \arrow[d] \\ 0 & P_0 \otimes Q_0 \arrow[l] & P_1 \otimes Q_0 \arrow[l] & P_2 \otimes Q_0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$0 \longleftarrow P_0 \longleftarrow P_1 \longleftarrow P_2$$

$$E_r^{pq} \Rightarrow \mathsf{Tor}^{p+q}(A,B) \cong \mathsf{Tor}^{p+q}(B,A)$$

Ex 0.5 (Спектральная последовательность Кюннеты[1]). *Пусть* $P^{\bullet\bullet}$ *– ограниченный снизу комплекс плоских модулей, а* M *– произвольный модуль. Тогда существует спектральная последовательность с листом*

$$E_2^{pq} = \mathrm{Tor}_p(H_q(P), M) \quad \Rightarrow \quad H_{p+q}(P \otimes M)$$

Имеет место формула Кюннета:
Пусть дополнительно $d(P_\bullet)$ *– тоже плосский для* $\forall n$. *Тогда* $\exists k$*:*

$$0 \longrightarrow H_n(P) \longrightarrow H_n(P \otimes M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(P), M) \longrightarrow 0$$

Доказательство. $Q_\bullet \to M$ – плоская резоьвента. Рассмотрим $(P_\bullet \otimes Q_\bullet)$. Воспользуемся результатом 0.4 и выпишем второйлист спектральной последовательности

$$\mathrm{I}: \quad \begin{array}{lcccc} {}^{\mathrm{I}}E_1: & 0 \longleftarrow & P_0 \otimes M \longleftarrow & P_1 \otimes M & \dots \\ {}^{\mathrm{I}}E_2 = E_\infty; & & H_0(P_0 \otimes M); & H_1(P \otimes M) & \dots \end{array}$$

$$\mathrm{II} \qquad {}^{\mathrm{II}}E_1 = H_q(P) \otimes Q_p$$

$${}^{\mathrm{II}}E_2 = \mathrm{Tor}_p(H_q(P), M)$$

■

$$0 \longrightarrow dP_{q+1} \longrightarrow \mathcal{Z}_q \longrightarrow H_q(P) \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & H_q(P) \otimes M & \mathrm{Tor}_1(H_q(P), M) & 0 \\ & & & \\ 0 & H_{q-1}(P) \otimes M & \mathrm{Tor}_1(H_{q-1}(P), M) & 0 \end{array}$$

[1] Künneth