Семинар 1
(Темы: Проективные резольвенты в гомотопической категории, абелевость гомотопической категории)

Мы движемся к тому, чтобы определить производную категорию – это наша стратегическая цель. Наша тактическая цель на данном этапе – установить нужные нам свойства фунткора взятия проективной резольвенты.

Com 1.1. *Проективная резольвента с точностью до гомотопической эквивалентности определена однозначно.*

Prop 1.2. *Пусть* $P_\bullet$ *– проективная резольвента* M*,* $Q_\bullet$ *– какая-то резольвента* N*. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(A)}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

Доказательство. Рассмотрим связывающий морфизм между резольвентой и объектом как морфизм комплексов $f\colon Q_\bullet \to N[0]$, тогда его конус – это просто $P_\bullet \to Q \to 0$. Теперь, как обычно, имеем короткую точную последовательность, к которой можем применить функтор $\underline{\mathrm{Hom}}(P_\bullet, -)$ и из леммы о зигзаге получим длинную точную последовательность:

$$Q_\bullet \longrightarrow N[0] \longrightarrow C(f) \longrightarrow Q_\bullet[1]$$

$$\underset{0}{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[-1])} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, Q_\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[0]) \longrightarrow \underset{0}{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, C(f))} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[1]) \longrightarrow \dots$$

Так как f – квазиизоморфизм, то $C(f)$– ацикличен. В силу **??** $\forall g \in \mathrm{Hom}(P_\bullet, C(f)[i])$ выполнено, что $g \sim 0$. Также в $\mathrm{Hom}(P_\bullet, N[0])$ нет нетривиальных гомотопий, они все пропускаются через 0. А также $fd_1 = 0$ и $P_0/\mathrm{im} d_1 = M$[1]. Отсюда получаем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, Q_\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[0]) \cong \mathrm{Hom}(P_\bullet, N[0]) \cong \mathrm{Hom}(M, N)$$

■

Corr 1.3. *Пусть* $P^1_\bullet$*,* $P^2_\bullet$ *– проективные резольвенты* $M \Rightarrow P^1_\bullet \sim P^2_\bullet$*.*

Corr 1.4. *Проективная резольвента от модуля – строгий полный функтор.***??**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\colon \mathcal{A} &\to \mathcal{K}(\mathcal{A}) \\ A &\mapsto P_\bullet(A) \end{aligned}$$

Com 1.5. $\mathcal{P}$ *не является фунткором в категоию комплексов, но является функтором в гомотопическую категорию.*

Com 1.6. *Понятно, что категория комплексов является абелевой, так как все ядра и коядра можно брат почленно, однако гомотопическая категория абелевой, вообще говоря, не является.*

$$\mathcal{A} \in \mathbf{Ab} \Rightarrow \mathsf{Kom}(\mathcal{A})$$
$$\mathcal{A} \in \mathbf{Ab} \not\Rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

Ex 1.7 (Потеря эпиморфности при переходе в гомотопическую категорию)**.** $f : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$ *не является эпиморфизмом в* $\mathcal{K}(\mathcal{A})$*.*

Доказательство. Предположим, что f – epi

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots = A \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots = C \end{array}$$

В абелевой категории любой морфизм раскладывается в композицию mono и epi.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads] & C \\ & \mathrm{im} f = B \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

[1]универсальность коядра гомоморфизмов групп

Теперь снова рассмотрим точные тройки из последовательности с конусами, на диаграмме ниже дуговые стрелки гомотопны 0

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r] & C(\alpha) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C(\beta)[-1] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

$$C(\beta)[-1] \longrightarrow B \longrightarrow C(\alpha)$$

Таким образом получили, что B – расщепим. Тогда, используя **??** мы можем представить его в виде

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] \\
B_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{-1} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d] \\
B_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "h_0"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "k_0"] & B_0 \arrow[d] \\
B_1 \oplus \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "h_1"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "k_1"] & B_1 \arrow[d] \\
\dots & \dots & \dots
\end{tikzcd}$$

$$s = \begin{cases} h^n, & n \neq 1 \\ k^n, & n = 1 \end{cases}$$

$$d = dsd$$

И подобрать квазиизоморфный комплекс с когомологиями, сосредоточенными только в нулевом члене.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & B_{-1} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d] \\
B_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "h_0"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "k_0"] & B_0 \arrow[d] \\
B_1 \oplus \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "h_1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "k_1"] & 0 \arrow[d] \\
\dots & \dots & \dots
\end{tikzcd}$$

Но тогда имеем следующую последовательность морфизмов и противоречие:

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[r] \arrow[rrrr, bend left, "id"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & B_0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & B_0 \end{tikzcd}$$

∎

def 1.8. $\mathcal{A}$ – полупроста ⇔ ∀ точная последовательность расщепима.

Claim 1.9. $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ *– абелева* ⇔ $\mathcal{A}$ *– полупроста*[2]*.*

Ex 1.10 (Нерасщепимая короткая точная последовательность)**.**

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

То есть **Ab** *– не полупроста.*

[2]то есть ∀ точная последовательность расщепима