Конспект лекций по гомологической алгебре

Лектор: Монченко Н. М.

2023/04/26

Содержание

Содержание

Семинар 1
(Темы: Введение, комплекс, резольвента, проективный объект)

Рассмотрим следующую задачу. Пусть есть какое-то поле k и кольцо многочленов над ним $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Дана система уравнений с элементами из кольца

$$\sum_i a_{ij} y_i = 0, \quad a_{ij} \in R.$$

Множеством решений этой системы будет какой-то модуль M, определяющийся своими образующими и соотношениями. Соотношения, вообще говоря, могут быть достаточно сложно устроены. Предлагается воспользоваться следующим фактом.

Prop 1.1. *Любой модуль — это фактормодуль свободного модуля.*

Иначе говоря, существует свободный модуль F_1 вместе с эпиморфизмом $f_1 : F_1 \to M$. Соотношения образующих тогда будут определяться ядром $\operatorname{Ker} f_1$ этого самого эпиморфизма. Однако данное ядро может быть также сложно устроено. Повторим процесс и накроем и $\operatorname{Ker} f_1$ свободным модулем. Продолжая получим набор коротких точных последовательностей.

$$\begin{gathered}
0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_1 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} M \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_2 \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} \operatorname{Ker} f_1 \longrightarrow 0 \\
0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_3 \longrightarrow F_3 \xrightarrow{f_3} \operatorname{Ker} f_2 \longrightarrow 0 \\
\dots
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Этот процесс повторять будем до тех пор, пока не получим $\operatorname{Ker} f_{\_} = F_{\_}$. Вопрос состоит в том сколько раз придётся повторить это. Ответ даёт следующая теорема.

Thr 1.2 (Теорема гильберта о сизигиях)**.** *При повторении процесса* (1.1) *для уравнения с* n *многочленов получим* $\operatorname{Ker} f_n = F_{n+1}$.

Таким образом, модулю решений нашего уравнения можно сопоставить длинную точную последовательность, называющуюся свободной (состоящей из свободных модулей) резольвентой модуля M.

$$0 \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

То, что мы по сути сделали — это "приблизили"наш сложно устроеннный модуль M простыми свободными модулями F_i. Приведём обобщение этих рассуждений и введём необходимые определения.

def 1.3. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. Её категорией комплексов $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$ называется категория, объекты в которой — цепные комплексы — последовательности объектов и морфизмов (дифференциалов) (K^i, d^i)

$$\dots \longrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots$$

где $d^{i+1} \circ d^i = 0$ ($\operatorname{Im} d^i \subset \operatorname{Ker} d^{i+1}$). Комплекс с возрастающей индексацией (как выше) называется когомологическим. Соответственно с убывающей — гомологическим. Морфизмы $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Kom}(\mathcal{A})}((K^\bullet, d^\bullet_K), (L^\bullet, d^\bullet_L))$ — наборы морфизмов $f^i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(K^i, L^i)$, делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f_K^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "f^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i \arrow[r, "d^i{}_L"'] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"'] & \dots
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

$\mathsf{Kom}^{\leqslant}(\mathcal{A}), \mathsf{Kom}^{\geqslant}(\mathcal{A}), \mathsf{Kom}^b(\mathcal{A})$ соответственно обозночают ограниченные справа, слева, с двух сторон комплексы.

Естественный вопрос, который можно задать к определению 1.3 — выполняется ли $\operatorname{Im} d^i = \operatorname{Ker} d^{i+1}$ (тогда комплекс — точная последовательность) и если невыполняется, то насколько. Ответ на этот вопрос даёт следующее определение.

def 1.4. Назовём кограницей комплекса $B^i(K^\bullet) = \operatorname{Im} d^i$. Назовём коциклом комплекса $Z^i(K^\bullet) = \operatorname{Ker} d^{i+1}$. Назовём когомологией комплекса $H^i(K^\bullet) = Z^i(K^\bullet)/B^i(K^\bullet)$ Комплекс с нулевыми когомологиями будем называть ацикличным.

Таким образом, когомологии — мера неточности комплекса. Обратим вниманее, что все эти определения представляют собой функторы $\mathsf{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. Это следствие того, что морфизмы в $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$ переводят кограницы (коциклы) в кограницы (коциклы), т. к. диаграмма (1.3) коммутирует. Соответственно любой морфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{Kom}(\mathcal{A})}$ индуцирует морфизмы на когомологиях f^*. Вместе с категорией комплексов поставляется и функтор естественного вложения, сопоставляющий объекту $a \in \mathsf{Ob}\mathcal{A}$ комплекс с объектом a в нулевом члене.

$$F: \quad \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Kom}(\mathcal{A})$$

$$\begin{array}{c} a \mapsto \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow a \longrightarrow 0 \to \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad H^0(F(a)) \end{array}$$

Из вида функтора очевидна эквивалентность $H^0 \cong F$. Отсюда следует вывод.

Prop 1.5. *$\mathcal{A}$ — полная подкатегория в $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$.*

Теперь вернемся к исходной задаче. Выбор резольвенты (1.2) в общем случае не единственный. Поэтому мы хотим каким-то образом отождествить объект со всеми его резольвентами. Для этого применим следующую конструкцию. Мы используем вложение $F(M)$ построим т. н. связующий морфизм ε.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & F_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Теперь зададимся вопросом: что между двумя получившемися комплексами общего? Про комплекс $F(M)$ мы знаем все. Он точен везде, кроме нулевого члена, а в нулевом члене его когомология M. Верхний комплекс по построению также точен везде, кроме нулевого члена. А в нулевом члене его кограница $\operatorname{Im} 0 = 0$, коцикл $\operatorname{Ker} d_F^2 = \operatorname{Im} \varepsilon = M$, т. к. исходная резольвента (1.2) точна. Отсюда $H^0(F^\bullet) = M$. Тогда индуцированный морфизм на когомологиях $\varepsilon^* = \mathrm{Id}_M$ — изоморфизм. В таком случае мы называем ε квазиизоморфизмом.

def 1.6. Морфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{Kom}(\mathcal{A})}$ называется квазиизоморфизмом, если его индуцированные морфизмы f^* на когогмологиях — изоморфизмы.

Prop 1.7. *В абелевой категории объект квазиизоморфен всем своим резольвентам.*

Логично было бы тогда отождествлять объект с резольвентами при помощи квазиизоморфизма. Проблема в том, что последний отношением эквивалентности не является, поэтому необходимо рассматривать другую категорию (производную), в которой все квазиизоморфизмы являются изоморфизмами и, следовательно, квазиизоморфность — отношение эквивалентности. Приведём пример, почему квазиизоморфизмы не являются отношением эквивалентности.

Ex 1.8. *В категории $\mathbb{Z} - \mathsf{mod}$ проективная резольвента $\mathbb{Z}_2$ может выглядеть следующим образом.*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[2\cdot]{} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Рассматривая соответствующий связующий квазиизоморфизм

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2\cdot"'] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

получаем, что $\mathbb{Z}_2$ квазиизоморфен своей резольвенте. Но не существует нетривиального морфизма $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$, откуда резольвента не квазиизоморфна $\mathbb{Z}_2$. Т. е. нарушена симметричность.

На самом деле нарушена и транзитивность. Действительно, пусть существуют два квазиизоморфизма $K^\bullet \to L^\bullet$ и $U^\bullet \to L^\bullet$. Но никто не гарантирует, что существует квазиизоморфизм $K^\bullet \to L^\bullet$, ведь обращать мы эти морфизмы в общем случае не можем. **Рассмотрим теперь другую задачу.** Пусть дан точный слева функтор между абелевыми категориями $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и короткая точная последовательность из $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "F"] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F(A) \arrow[r] & F(B) \arrow[r] & F(C) \arrow[r] & \ldots? \end{tikzcd}$$

После применения функтора F ноль справа исчезнет. Задача следующая: можно ли как-то канонически точно продолжить получившуюся последовательность вправо? Для начала упростим задачу, задавшись подобным вопросом для конкретного функтора: функтора $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \cdot)$. Когда он точен?. Ответ такой: он точен тогда и только тогда, когда P — проективный объект.

def 1.9. Объект P категории $\mathcal{A}$ называется проективным, если для любого эпиморфизма $\pi : A \to B$ с морфизмом $p : P \to B$ существует морфизм, делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "p"] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \\ A \arrow[r, two heads, "\pi"] & B \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Prop 1.10. *Функтор* $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ *точен* $\iff$ P — *проективный объект.*

Доказательство. Докажем сначала, что функтор $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ всегда точен слева. Пусть последовательность

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow[a]{} B \xrightarrow[b]{} C \longrightarrow 0$$

точна. Докажем точность следующей последовательности.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, A) \xrightarrow[a\circ]{} \mathrm{Hom}(P, B) \xrightarrow[b\circ]{} \mathrm{Hom}(P, C)$$

Пусть $a \circ f : P \to B$ равна нулю. Но т. к. a — мономорфизм из точности исходной последовательности, то и $f = 0$, откуда $a\circ$ — инъективный. Это доказывает точность в первом члене. Из точности исходной последовательности $b \circ a \circ f = 0$ для любого морфизма $f : P \to A$. Это доказывает вложение $\mathrm{Im}\, a\circ \subset \mathrm{Ker}\, b\circ$. Пусть теперь $f \in \mathrm{Ker}\, b\circ$. В исходной точной последовательности $A = \mathrm{Ker}\, b$ и по универсальному свойству ядра существует единственный морфизм f', делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "a"'] & B \arrow[r, "b"'] & C \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Отсюда любой $f \in \mathrm{Ker}\, b\circ$ поднимается до $f' \in \mathrm{Hom}(P, A)$, что доказывает вложение $\mathrm{Ker}\, b\circ \subset \mathrm{Im}\, a\circ$ и, следовательно, точность во втором члене. Докажем, что $\mathrm{Hom}(P, -)$ — точный $\iff$ P — проективный. Если P — проективный. В левую сторону это очевидно: если P — проективный, то любой морфизм из $\mathrm{Hom}(P, C)$ поднимается до морфизма из $\mathrm{Hom}(P, B)$ по определению проективного обхекта. Обратно, если $\mathrm{Hom}(P, -)$ точный, то применяя его к точной последовательности $A \to B \to 0$ получим, что для любого морфизма $p \in \mathrm{Hom}(P, B)$ будет морфизм из $\mathrm{Hom}(P, A)$, делающий диаграмму (1.5) коммутативной. ∎

Встает также о том, как выглядят проективные объекты в интересующей нас категории $R-\mathrm{mod}$. Ответ дает следующий критерий.

Prop 1.11. *В категории* $R-\mathrm{mod}$ P — *проективный* $\iff$ *существует* M *такой, что* $M \oplus P$ — *свободный модуль.*

Com 1.12. *Если* P — *свободный, то, очевидно, он и проективный. Действительно, достаточно тогда задать искомый морфизм в* (1.4) *на образующих. Может возникнуть мысль, что только такие модули проективными и будут. Приведём контрпример.*

Ex 1.13 (Проективный несвободный модуль)**.** *Рассмотрим категорию* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}-\mathrm{mod}$. *Само по себе* $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *является, кроме кольца,* R*—модулем над собой. Более того, он свободный как* R*—модуль. Вспомним разложение*

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

где ни $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, *ни* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *свободными как* R*—модули не являются. Однако по критерию 1.11 оба будут проективными.*

Доказательство предложения 1.11. ($\Rightarrow$) По предложению 1.1 P накрывается свободным модулем. Вспомним тогда диаграмму (1.4).

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "id"] \arrow[dl, dotted, "\exists f"'] \\ F \arrow[r, two heads, "g"'] & P \end{tikzcd}$$

И получим существование свободного модуля F с парой морфизмов f, g, дающих $gf = id_M$. Покажем, что $F \cong P \oplus M$, где M — какой-то R-модуль. Предлагается использовать следующее утверждение.

Prop 1.14 (Splitting lemma)**.** *Пусть дана короткая точная последовательность.*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \longrightarrow 0$$

$B \cong A \oplus C$ *тогда и только тогда, когда существует* g *такой, что* $g \circ a = id$ *или* $b \circ g = id$.

В нашем случае применение этого утверждения к точной последовательности ниже даёт $\mathsf{P} \oplus \operatorname{Ker} \mathsf{f} \cong \mathsf{F}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r, hook] & F \arrow[r, two heads, "g"'] & P \arrow[l, bend right, "f"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mathsf{P} \oplus \mathsf{M}$ — свободный модуль, $\pi : \mathsf{P} \oplus \mathsf{M} \to \mathsf{P}$ — каноническая проекция. Выше мы отметили, что для свободного модуля утверждение очевидно. Тогда $f\pi$ поднимается до $h : \mathsf{P} \oplus \mathsf{M} \to \mathsf{A}$. Применим каноническое вложение бипроизведения i и получим $f\pi i = ghi$, откуда $f = ghi$ и hi — искомый морфизм.

$$\begin{tikzcd} M \oplus P \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f\pi"] & P \arrow[l, bend right, "i"'] \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, two heads, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

■

Понятие, дуальное проективному объекту — инъективный объект.

def 1.15. Объект I называется инъективным, если для любых двух объектов с мономорфизмом $i : A \to B$ и морфизмом $p : A \to I$ существует морфизм $B \to I$, делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & I \\ A \arrow[ur, "p"] \arrow[r, hook, "i"] & B \arrow[u, dashed, "\exists"'] \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Соответствующее дуальное утверждение.

Prop 1.16. *Функтор* $\operatorname{Hom}(-, I)$ *— точен* $\iff$ I *— инъективный.*

Семинар 2
(Темы: Проективная резольвента, гомотопическая категория)

Вспомним, что в резольвенте (1.2) мы накрывали модуль свободным. Как мы увидели, категорным "аналогом"свободного модуля может быть проективный объект, причем утверждение 1.11 говорит о том, что эти два понятия не совпадают. Введём понятие, необходимое для повторения процесса (1.1) в абстрактной категории.

def 2.1. Говорят, что в категории достаточно много проективных (инъективных) объектов, если для любого объекта $A \in \mathcal{C}$ существует "накрывающий"его ("вкладывающийся"в него) проективный (инъективный) объект P с эпиморфизмом $p : P \to A$ (мономорфизмом $p : A \to P$).

Видно, что в категории модулей проективных объектов достаточно много. Тогда процесс построения проективной (инъективной) резольвенты абсолютно аналогичен (1.2). Опять же, верно аналогичное 1.7 утверждение о том, что объект квазиизоморфен всем своим проективным резольвентам. Еще раз посмотрим на какой-нибудь пример проективной резольвенты.

Ex 2.2. *Рассмотрим модули над кольцом $R = \mathbb{C}[x]$. Построим проективную резольвенту*[1] $\mathbb{C}$ *как R-модуля.*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[x] \xrightarrow{x\cdot} \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Ex 2.3. *Пример поинтереснее состоит в построении бесконечной проективной резольвенты. Положим $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x]/(x^2) - \mathrm{mod}$. Тогда одной из проективных резольвент $\mathbb{C}$ как $\mathbb{C}[x]/(x^2)$-модуля будет выглядеть следующим образом.*

$$\ldots \xrightarrow{x\cdot} \mathbb{C}[x]/(x^2) \xrightarrow{x\cdot} \mathbb{C}[x]/(x^2) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Последний пример мотивирует ввести следующее определение.

def 2.4. Проективной размерностью объекта **pd** M называют длину его проективной резольвенты. Если объект не имеет конечной проективной резольвенты, то говорят, что **pd** $M = \infty$.

Вспомним дуальное понятие инъективного объекта 1.15. В отличие от проективных объектов, для них не существует общего аналога критерия 1.11. Попробуем рассмотреть инъективные объекты в категории модулей над кольцом $\mathbb{Z}$. В данной категории рассмотрим семейство объектов, являющихся группами. Оказывается, что все инъективные объекты в данном семействе исчерпываются делимыми группами.

def 2.5. Назовём G делимой группой, если $\forall x \in G, n \in \mathbb{N} \exists y \in G : ny = x$.

Prop 2.6. G *— инъективный $\mathbb{Z}$-модуль* $\iff$ G *— делимая группа.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть G не делимая. Попытаемся поднять некоторый морфизм $f : \mathbb{Z} \to G$ до морфизма $\to G$ с естественным вложением $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

$$\begin{tikzcd} & G \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{Q} \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

Раз G не делимая, то существуют $x \in G, n \in \mathbb{Z}$ такие, что $\forall y \in G$ $nx \neq y$. В качестве морфизма f возьмём тот, что отправляет единичный элемент в найденный x. Тогда существование искомого морфизма $g : \mathbb{Q} \to G$ невозможно. Действительно, тогда $x = f(1) = gi(1) = gi(n)/n = x$, откуда $nx = gi(n)$. ($\Leftarrow$) Теперь G — делимая группа. $i : A \to B$ — мономорфизм и $\varphi : A \to G$ — какой-то морфизм, который мы хотим поднять. Приведём следующую конструкцию. Рассмотрим множество расширений (A', φ') нашего морфизма: $A \subset A' \subset B$, $\varphi'|_A = \varphi$. На данном множестве введём частичный порядок: $(A', \varphi') \leqslant (A'', \varphi'')$ если $A' \subset A''$ и $\varphi''|'_A = \varphi'$. По лемме Цорна существует максимальный элемент (B', φ_B). Покажем, что $B' = B$, тогда окажется, что φ_B — искомый морфизм. Пусть B' и B не совпадают. Тогда существует $x \in B/B'$. Тут нам потребуется делимость G. Возможны два варианта.

- Пусть $\forall n \in \mathbb{Z}$ $nx \notin B'$. Тогда полагая $\varphi_B(x) = 0$ получаем продолжение φ_B на $< B', x >$, что противоречит максимальности.

- Пусть $\exists n \in \mathbb{Z}$ такой, что $nx \in B'$. Тогда $\varphi_B(nx) = g$, причем в силу делимости G существует $g' \in G$ такое, что $ng' = g$. Полагая $\varphi_B(x) = g'$ снова получим продолжение, противоречащее максивальности.

∎

[1] Это частный пример т. н. резольвенты Козюля

Prop 2.7. *В категории $\mathbb{Z}$-модулей достаточно инъективных объектов.*

Доказательство. Построение инъективного объекта для M иллюстрируется диаграммой. Откуда мономорфизм M -> cokerf???

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\pi \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\ \oplus\mathbb{Z}e_i \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \oplus\mathbb{Q}e_i \arrow[d, two heads] \\ M \arrow[r, hook] & \mathrm{Coker} f \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Утверждение следует из следующего факта: Это бы доказать наверное...

Prop 2.8. *Факторгруппа делимой группы — тоже делимая группа.*

Тогда $\mathrm{Coker} f$ будет делимым объектом как фактор $\oplus\mathbb{Q}e_i$ ■

Остановимся в рассуждениях с инъективными и проективными объектами. Следующее определение является первым шагом к построению производной категории.

def 2.9. Морфизм $f^\bullet : K^\bullet \to L^\bullet$ называется гомотопичным нулю $f \sim 0$, если существуют $h^n : K^n \to L^{n-1}$ такие, что $f^n = d^{n+1} \circ h^{n+1} + h^n \circ d^n$.

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & K^i \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "f^i"'] \arrow[dl, "h^i"'] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+2}"] \arrow[d, "f^{i+1}"'] \arrow[dl, "h^{i+1}"'] & K^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+2}"] \arrow[dl, "h^{i+2}"'] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^i"'] & L^i \arrow[r, "d_L^{i+1}"'] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+2}"'] & L^{i+2} \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Два отображения $f^\bullet$, $g^\bullet$ комплексов называются гомотопически эквивалентными $f \sim g$, если $f - g \sim 0$.

Prop 2.10.

- *Гомотопные морфизмы образуют идеал. Если $f \sim 0$, то для любых компонуемых с ним морфизмов g, h верно $gf \sim 0$, $fh \sim 0$.*
- *Гомотопически эквивалентные морфизмы комплексов индуцируют одинаковые морфизмы на когомологиях.*

Доказательство. Для ясности не обозначая индексов приведём для первого пункта следующие выкладки.

$$gf = g(hd + dh) = ghd + gdh = ghd + dgh,$$

где последнее равенство сделано из коммутативности дифференциалов с морфизмами комплексов. Тогда gh — морфизм, из которого следует гомотопичность нулю. Для второго пункта в силу линейности достаточно доказать, что гомотопное нулю отображение индуцирует нулевое отображение на когомологиях. Пусть $x \in \operatorname{Ker} d_K^{i+1}$. Тогда

$$f^i(x) = d_L^i h^i(x) + h^{i+1} d_L^{i+1}(x),$$

где первый член в когомологиях будет равен нулю, т. к. $d_L^i h^i(x) \in \mathrm{Im} d_L^i$, а второй — т. к. дифференциал действует на элемент из ядра. ■

Теперь заменим все наши морфизмы на соответствующие классы эквивалентности по отношению гомотопности и получим новую категорию.

def 2.11. Гомотопичесокой категорией $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ называется категория с объектами из $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ и морфизмами $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)/\sim$.

??? Добавить доказательство в приложение

Prop 2.12 (Лемма о зигзаге)**.** *Пусть есть короткая точная последовательность.*

$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \xrightarrow{g} M^\bullet \longrightarrow 0$$

Тогда существуют связующие гомоморфизмы $\delta^i : H^i(M^\bullet) \to H^{i+1}(K^\bullet)$, *делающие следующую последовательность точной.*

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll] \\
H^{i-1}(K^\bullet) \arrow[r, "f^*"'] & H^{i-1}(L^\bullet) \arrow[r, "g^*"] & H^{i-1}(M^\bullet) \arrow[dll, "\delta^{i-1}"'] \\
H^{i}(K^\bullet) \arrow[r, "f^*"'] & H^{i}(L^\bullet) \arrow[r, "g^*"] & H^{i}(M^\bullet) \arrow[dll, "\delta^{i}"'] \\
H^{i+1}(K^\bullet) \arrow[r, "f^*"'] & H^{i+1}(L^\bullet) \arrow[r, "g^*"] & H^{i+1}(M^\bullet) \arrow[dll] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}$$

a?

def 2.13. Пусть даны два комплекса $K^\bullet$ и $Ł^\bullet$ над $\mathcal{A}$. Морфизмом комплексов называется комплекс с объектами $\underline{\mathrm{Hom}}(K^\bullet, L^\bullet)^i = \prod_n \mathrm{Hom}(K^n, L^{n+1})$. Дифференциал на нём будет действовать следующим образом. Элемент из члена i нашего комплекса можно представить как набор морфизмов $(\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)$, действующих между членами $K^\bullet$ и $L^\bullet$, отстоящих друг от друга на i. Тогда набор новых $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ в $i+1$-м члене получим как:

$$d^i : f_n \to g_n = df_n - (-1)^i f_{n+1} d$$

Семинар 4
(Темы: Проективные резольвенты в гомотопической категории, абелевость гомотопической категории)

Com 4.1. *Проективная резольвента с точностью до гомотопической эквивалентности определена однозначно.*

Prop 4.2. *Пусть* $M, N \in$ ***Ob(Ab)****.* $P_\bullet$ *– проективная резольвента* M*,* $Q_\bullet$ *– какая-то резольвента* N*.*

$$\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M$$

$$\ldots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow N$$

Тогда

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(A)}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

Доказательство. Имеем морфизм комплексов $f \quad Q_\bullet \longrightarrow N[0]$ и его конус $Q_\bullet \longrightarrow N[0] \longrightarrow C(f) \longrightarrow Q_\bullet[1]$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

f – $qis \Leftrightarrow C(f)$– ацикличен $\Rightarrow \forall g : P_\bullet \to C(f) \hookrightarrow g \sim 0$. Применим точный функтор $\mathrm{Hom}(P_\bullet, -)$ к короткой точной последовательности

$$\underset{\cong 0}{\mathrm{Hom}(P_\bullet, N[-1])} \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_\bullet, Q_\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(P_\bullet, N[0]) \longrightarrow \underset{\cong 0}{\mathrm{Hom}(P_\bullet, C(f))} \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_\bullet, N[1]) \longrightarrow \ldots$$

В $\mathrm{Hom}(P_\bullet, N[0])$ нет нетривиальных гомотопий, а также $fd_1 = 0$ и $P_0/imd_1 = M$(универсальность коядра гомоморфизмов групп). Отсюда получаем:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P_\bullet, N[0]) \cong \mathrm{Hom}(P_\bullet, N[0]) \cong \mathrm{Hom}(M, N)$$

■

Corr 4.3. *Пусть* $P^1_\bullet$*,* $P^2_\bullet$ *– проективные резольвенты* $M \Rightarrow P^1_\bullet \sim P^2_\bullet$*.*

Corr 4.4. *Проективная резольвента от модуля – строгий полный функтор.*

$$P_\bullet(-) : \mathcal{A} \to \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

Com 4.5.

$$\mathcal{A} \in \mathbf{Ab} \Rightarrow \mathsf{Kom}(\mathcal{A})$$
$$\mathcal{A} \in \mathbf{Ab} \not\Rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$$

Ex 4.6. $f : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p$ *не является эпиморфизмом в* $\mathcal{K}(\mathcal{A})$*.*

Доказательство. Предположим, что f – epi

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots = A \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots = C
\end{array}$$

Тогда существует разложение:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads] & C \\
 & imf = B \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r] & C(\alpha)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C(\beta)[-1] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

$$C(\beta)[-1] \longrightarrow B \longrightarrow C(\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] \\
B_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{-1} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d] \\
B_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "h_0"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "k_0"] & B_0 \arrow[d] \\
B_1 \oplus \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "h_1"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "k_1"] & B_1 \arrow[d] \\
\dots & \dots & \dots
\end{tikzcd}$$

$$s = \begin{cases} h^n, & n \neq 1 \\ k^n, & n = 1 \end{cases}$$

$$d = dsd$$

Таким образом получили, B – расщипим.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & B_{-1} \oplus \mathbb{Z} \arrow[d] \\
B_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "h_0"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "k_0"] & B_0 \arrow[d] \\
B_1 \oplus \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "h_1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, "k_1"] & 0 \arrow[d] \\
\dots & \dots & \dots
\end{tikzcd}$$

Но тогда имеем последовательность следующую морфизмов и противоречие:

$$\begin{tikzcd}
B_0 \arrow[r] \arrow[rrrr, bend left, "id"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & B_0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & B_0
\end{tikzcd}$$

■

def 4.7. $\mathcal{A}$ – полупроста $\Leftrightarrow \forall$ точная последовательность расщипима.

Claim 4.8. $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \in$ **Ab** $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ *– полупроста(то есть $\forall$ точная последовательность расщипима).*

Ex 4.9. **Ab**– *не полупроста. Пример нерасщипимой короткой точной последовательности:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

Семинар 5
(Темы: Локализация, условия Оре)

Рассмотрим категорию $\mathcal{C}$ и $S \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ — произвольное множество морфизмов, замкнутое относительно композиции. Предположим, мы бы хотели рассмотреть похожую на неё категорию с тем различием, что все морфизмы семейства S в ней обратимы. Сконструировать её не очень сложно: мы навино добавляем обратные морфизмы и все композиции с ними. Естественно, морфизмов в итоге станет больше и появится естественное вложение F. Тем не менее, такая конструкция не очень тривиальна: несмотря на простоту построения мы не знаем как она работает. Более того, категорий, удовлетворяющих нашему условию, может быть много. Оказывается, что именно самая наивная конструкция обладает следующим универсальным свойством в 2-категории, которым мы такое построение и определим.

Prop 5.1. *Существует единственная с точностью до эквивалентности категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ с функтором $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, обладающая универсальным свойством: для любого $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, переводящего S в изоморфизмы, существует единственный функтор $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$, делающий следующую диаграмму коммутативной.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "T"'] & \mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "G"] \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Доказательство. Для доказательства приведем явную конструкцию категории $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Объекты в ней будут точно такие же: $\mathrm{Ob}\mathcal{C}[S^{-1}] = \mathrm{Ob}\mathcal{C}$. Обратные морфизмы введём следующим образом.

Назовём <u>словом</u> формальный набор букв, обозначающий морфизмы из $\mathcal{C}$. Добавим к буквам обратные s^{-1} морфизмы для семейства S. Слова должны состоять из компонуемых букв, т. е. в слове fg конец морфизма f и начало морфизма g должны совпадать. Будем считать, что начало и конец морфизма s^{-1} это соответственно конец и начало s. Введём на словах отношение эквивалентности, удовлетворяющее следующим правилам:

- $(f)(g) \sim (fg)$
- $(s)(s^{-1}) \sim \mathrm{Id}_A$, где A — объект, являющийся началом s^{-1}.
- $(f)(s)(s^{-1})(g) \sim (f)(g)$.

Классы эквивалентности положим морфизмами в $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Легко проверить, что они удовлетворяют определению категории и каждый морфизм в $\mathcal{C}[S^{-1}]$ обратим.

Тогда функтор F определим как тождественно действующий на объектах и как вложение на морфизмах. G определим как действующий аналогично T на объектах и морфизмах, являющихся образами F. Появившиеся обратные морфизмы G будет отправлять в соответствующие обратные в $\mathcal{D}$. ■

Com 5.2. *Конструкция, приведённая в доказательстве, тесно связана с понятием локализации кольца R мультипликативно замкнутым подмножеством S. Мы также чисто формально добавляем обратный элемент каждому из заданного подмножества, рассматривая дроби вида m/s, $m \in R, s \in S$. Тогда нашим отношением эквивалентности станет не что иное, как сокращение дробей: $r_1/s_1 \sim r_2/s_2 \iff \exists t \in S : t(s_1r_2 - s_2r_1) = 0$. Причем такая конструкция имеет точно такое же универсальное свойство в категории колец!*

Доказанное утверждение гарантирует корректность следующего определения.

def 5.3. Пусть $\mathcal{C}$ — локально малая категория, $S \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ — произвольное множество морфизмов, замкнутое относительно композиции. Локализацией $\mathcal{C}[S^{-1}]$ категории $\mathcal{C}$ по локализующему семейству S будем называть категорию с универсальным свойством (5.1).

С помощью данного объекта введём пока что бесполезное определение.

def 5.4. Производной категорией $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ категории $\mathcal{A}$ будем называть локализацию категории комплексов по квазиизоморфизмам.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \mathsf{Kom}(\mathcal{A})[\mathsf{Qis}^{-1}]$$

Введённое определение, конечно, не дают никакого понятия того, как такая категория устроена. Однако это устройство становится проще, если на семейство наложить <u>условия Оре</u>.

def 5.5 (Условия Оре)**.** Назовём семейство морфизмов S в категории $\mathcal{C}$ локализующим, если оно удовлетворяет следующим условиям.

- Все тождественные морфизмы лежат в S и S замкнуто относительно композиции.

- Для любого морфизма $f : X \to Z$ и морфизма $s : Y \to Z$ из семейства S найдется объект W и два морфизма $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$, $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X), t \in S$, делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

- Если известно, что для $s \in S$ $sf_1 = sf_2$, то найдется $t \in S$ такой, что $f_1 t = f_2 t$. Или иначе, если у двух морфизмов нашёлся левый уравнитель, то найдется и правый.

При таких условиях оказывается, что можно дать более явное описание локализации в терминах домиков.

def 5.6. 1. Назовём (левым) домиком (s, f) тройку объектов X, Y, Z и пару морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$, $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, $t \in S$.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

2. Назовём два (левых) домика эквивалентными, если они “достраиваются до большого домика”. $(s, f) \sim (t, g)$, если существует объект Z''' и морфизмы v, h, $v \in S$, делающие следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & & Z''' \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & Z' \arrow[dl, "s"'] \arrow[drrr, "f", near start] & & Z'' \arrow[dlll, "t"', near start] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & & & Y \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Т. е. существует “больший” домик (sv, gh).

3. Композиций двух (левых) домиков (v, g), (s, f) называется домик (st, gl), делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & & Z' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "l"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

Следующее предложение помимо доказательства корректности определения выше показывает, что классы эквивалентности домиков удовлетворяют определению морфизмов в категории.

Prop 5.7.

- *Отношение, заданное (5.4), является отношением эквивалентности.*

- *Композиция (5.5) двух любых домиков определена. Более того, она не зависит от представителя класса эквивалентности.*

- *Композиция (5.5) домиков ассоциотивна на классах эквивалентности. Также существует единичный домик* (id, id)

Доказательство. 1. Симметричность и рефлексивность очевидны. Проверим транзитивность. Рассмотрим три домика (f_A^i, f_B^i), $f_A^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^i, A)$, $f_B^i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^i, B)$, с вершинами X^i, $i = 1, 2, 3$. Пусть эквивалентны домики 1, 2 и 2,3. Докажем эквивалентность 1, 3. Используя второе условие Оре существует объект Z с морфизмами f_1, f_2, причем f_1 из локализующего семейства.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "w"] \arrow[d, "w_1"'] \arrow[drr, "w_2"] & Z \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
Z^1 \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & & Z^2 \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[d, "\beta_2"] \\
X^1 \arrow[d] \arrow[drr] & X^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & X^3 \arrow[dll] \arrow[d] \\
A & & B
\end{tikzcd} \quad \Leftarrow \text{2 условие Оре (5.2)} \quad \begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Z^2 \arrow[d, "\beta_1"] \\
Z^1 \arrow[r, "\alpha_2"] & X^2
\end{tikzcd}$$

Отметим, что диаграмма выше не является коммутативной. Для того, чтобы добиться коммутативности воспользуемся 3 условием Оре. Мы знаем, что верхний квадрат коммутирует: $f^2_A \alpha_2 f_1 = f^2_A \beta_1 f_2$. Тогда существует объект W с морфизмом из локализующего семейства $w : W \to Z : \alpha_2 f_1 w = \beta_1 f_2 w$. Теперь взяв $w_1 = f_1 w$, $w_2 = f_2 w$ получим уже коммутативную диаграмму с объектом W вместо Z. Тогда искомым домиком будет объект W с морфизмами $\alpha_1 w_1$ и $\beta_2 w_2$. Тут в 2 и 3 нужно чекнуть и попроверять коммутативность различных квадратиков 2. Второе условие Оре (5.2) очевидным образом гарантирует существование композиции для любых двух домиков. На лекции не было, вот попытка: Пусть домики с вершинами Z_1, Z_2 эквивалентны и берутся в композиции с домиком с вершиной M.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d] \arrow[dr] & X_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & X_2 \arrow[dl] \arrow[d] \\
Z_1 \arrow[d] \arrow[dr] & Z_2 \arrow[dl] \arrow[d] & M \arrow[dl] \arrow[d] \\
A & B & C
\end{tikzcd}$$

Применим второе условие Оре (5.2) два раза и соответственно получим искомый домик.

$$\begin{tikzcd}
& & F \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend left] & & \\
& F_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & F_2 \arrow[dlll] \arrow[dr] & \\
Z & & X_1 & & X_2
\end{tikzcd}$$

3. Ассоциативности тоже не было. Это тоже попытка. Покажем, что $(f_1, g_1)((f_2, g_2)(f_3, g_3)) \sim ((f_1, g_1)(f_2, g_2))(f_3, g_3)$.

$$\begin{tikzcd}
& & Y_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& X_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & X_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B & & C & & D
\end{tikzcd}$$

Y_1, Y_2 — вершины композиций первого и второго, второго и третего домиков соответственно. Снова применим 2 условие Оре (5.2) и получим для итоговых композиций Z_1, Z_2 эквивалентность.

$$\begin{tikzcd}
& & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& Z_1 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drrr] & & Z_2 \arrow[dlll] \arrow[d] & \\
X_1 & Y_1 \arrow[l] & & Y_2 \arrow[r] & X_3
\end{tikzcd}$$

■

Теперь займёмся явным построением локализации категории семейством, удовлетворяющим условиям Оре. Искомый морфизм $\mathsf{F}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}[\mathsf{S}^{-1}]$ будет действовать тождественно на объектах. На морфизмах положим

$$
\mathsf{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathsf{X},\mathsf{Y}) \to
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{X} \arrow[dl, "\mathtt{id}"'] \arrow[dr, "\mathtt{f}"] & \\
\mathsf{X} & & \mathsf{Y}
\end{tikzcd}
\tag{5.6}
$$

Под домиком, естественно, понимается его класс эквивалентности. То, что такая конструкция даёт локализацию и удовлетворяет аксиомам функториальности, конечно, под вопросом. Для начала можно проверить некоторые факты. Проверим, например, что образ локализующего семейства состоит из обратимых морфизмов. Действительно, обратным к домику $(\mathsf{id}, \mathsf{s})$ будет домик $(\mathsf{s}, \mathsf{id})$, так как следующая диаграмма коммутирует:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{X} \arrow[dl, "\mathtt{id}"'] \arrow[dr, "\mathtt{id}"] & & \\
 & \mathsf{X} \arrow[dl, "\mathtt{id}"'] \arrow[dr, "\mathtt{s}"] & & \mathsf{X} \arrow[dl, "\mathtt{s}"'] \arrow[dr, "\mathtt{id}"] & \\
\mathsf{X} & & \mathsf{Y} & & \mathsf{Z}
\end{tikzcd}
$$

Верность аксиомы функториальности $\mathsf{F}(\mathsf{fg}) \sim \mathsf{F}(\mathsf{f})\mathsf{F}(\mathsf{g})$ следует из коммутативности следующей диаграммы.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{X} \arrow[dl, "\mathtt{id}"'] \arrow[dr, "\mathtt{f}"] & & \\
 & \mathsf{X} \arrow[dl, "\mathtt{id}"'] \arrow[dr, "\mathtt{f}"] & & \mathsf{Y} \arrow[dl, "\mathtt{id}"'] \arrow[dr, "\mathtt{g}"] & \\
\mathsf{X} & & \mathsf{Y} & & \mathsf{Z}
\end{tikzcd}
$$

Очевидно, домик выше эквивалентен $\mathsf{F}(\mathsf{fg})$. Наконец, проверим, что домики удовлетворяют универслаьному свойству и докажем следуещюю теорему.

Thr 5.8. *Пусть* S *— локализующее семейство локально малой категории* $\mathcal{C}$. *Тогда* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[\mathsf{S}^{-1}]}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ *— в точности классы эквивалентности домиков вида* (5.3).

Доказательство. Пусть $\mathsf{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ переводит семейство S в изоморфизмы. Построим функтор G, делающий диаграмму 5.1 коммутативной. На объектах G должен определяться также, как и T. Пусть φ — морфизм в $C[\mathsf{S}^{-1}]$, представляющийся домиком (s, g). Возьмем его композицию $\varphi \cdot (1, \mathsf{s}) = (1, \mathsf{f})$, где из построения (5.6) $(1, \mathsf{s}) = \mathsf{F}(\mathsf{s})$, $(1, \mathsf{f}) = \mathsf{F}(\mathsf{f})$. Т. е. мы получили, что

$$
\varphi \cdot \mathsf{F}(\mathsf{s}) = \mathsf{F}(\mathsf{f}) \quad \overset{\mathsf{G}(\cdot)}{\Rightarrow} \mathsf{G}(\varphi) \cdot \mathsf{T}(\mathsf{s}) = \mathsf{T}(\mathsf{f}) \quad \Rightarrow \mathsf{G}(\varphi) = \mathsf{T}(\mathsf{f})\mathsf{T}(\mathsf{s})^{-1},
$$

где последнее равенство даёт явное построение G и, следовательно, доказывает универсальность. ∎

Семинар 6
(Темы: Локализация гомотопической категории и производная категория)

Вспомним определение 5.4 производной категории. Возникает вопрос о том, являются ли квазиизоморфизмы локализующим семейством. Не очень сложно проверить, что это не так.

Prop 6.1. Qis *не является в общем случае локализующим семейством в категории* $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Возьмём $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ с инъективной резольвентой длины 1. Тогда естественно возникнет два вложенных в инъективную резольвенту комплекса, соответствующих объектам X и I_1.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] & I_0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & 0 \\
& \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & I_1 \arrow[r] \arrow[u, "id"'] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Вложение комплекса $X[0]$ будет квазиизоморфизмом. Тогда второе условие Оре (5.2) гарантирует существование комплекса с квазиизоморфизмом в $I_1[-1]$ и морфизмом в $X[0]$. Естественно, из вида наших комплексов найденный объект имеет вид $0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow 0$. Получим коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & I_1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & P_0 \arrow[r] \arrow[u] & P_1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & X \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
0 \arrow[r] \arrow[u] & P_0 \arrow[r] \arrow[u] & P_1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Так как $P_\bullet \to I_1[-1]$ — квазиизоморфизм, то $P_\bullet$ имеет лишь одну нетривиальную когомологию в первом члене. Отсюда $P_0 \to I_0$ — нулевой морфизм. С другой стороны морфизм $P_0 \to X$ в общем случае ненулевой. Также ненулевым является $X \to I_0$ из квазиизоморфности. Противоречие заключается в коммутативности следующей диаграммы.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr] & \\
P_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_0 \\
& X \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

■

Несмотря на утверждение выше, описать структуру производной категории $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ можно. Для начала нашей целью будет установить следующую теорему. Это надо переписать после того как напишу про конусы в начале

Thr 6.2. Qis — *локализующее семейство в* $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Первое условие Оре очевидно. Проверим второе (5.2). Рассмотрим тройку $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\mathcal{K}(\mathcal{A})$ с морфизмами $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$, $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, где $s \in \mathsf{Qis}$ из локализующего семейства. Объектом, который будет удовлетворять условию, станет сдвинутый конус $C[hf][-1]$, где h — естественный морфизм из Z в конус $C[s]$.

$$\begin{tikzcd}
C[hf][-1] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "hf"'] & Z \arrow[d, "h"] \\
& C[s]
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Рассмотрим откуда берутся морфизмы α, β в (6.1) и почему $\alpha \in \mathsf{Qis}$. Напомним, что вместе с конусом $C[s]$ поставляется короткая точная последовательность комплексов:

$$0 \longrightarrow C[s] \longrightarrow C[hf] \longrightarrow X[1] \longrightarrow 0$$

которая вместе со сдвигом на 1 дает морфизм α в (6.1). Применим к такой сдвинутой последовательности лемму о зигзаге. Так как $s \in \mathrm{Qis}$, у $C[s]$ нулевые когомологии. Отсюда получим точные последовательности.

$$0 \longrightarrow H_i(C[hf][-1]) \xrightarrow{\alpha^*} H_i(X) \longrightarrow 0 \tag{6.2}$$

Тогда $\alpha \in \mathrm{Qis}$. Для поиска β такого, что $s\beta$ гомотопен $f\alpha$, напомним также о длинной точной последовательности, поставляющейся с конусом.

$$\ldots \to Y \to Z \to C[s] \to Y[1] \to Z[1] \to \ldots \tag{6.3}$$

Воспользуемся следующим утверждением для такой последовательности, которое докажем немного позже.

Lem 6.3. *Композиция любых двух морфизмов в последовательности (6.3) гомотопна нулю.*

Для такой последовательности нас интересует т. н. выделенный треугольник: точная подпоследовательность (6.3) из четырёх элементов. Применяя функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], \cdot)$ получим также точную последовательность множеств морфизмов из конуса.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1],\cdot)"] & C[s] \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], C[s]) \arrow[r] & \ldots \\
 & \beta \arrow[r, mapsto] & f\alpha \arrow[r, mapsto] & hf\alpha &
\end{tikzcd}$$

Применяя утверждение 6.3 к аналогичной (6.3) последовательности для конуса $C[hf]$ получим, что $hf\alpha \sim 0$. Отсюда из точности этот порфизм поднимается до $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(C[hf][-1], Y)$. Докажем выполнение третьего условия Оре. Нам пригодится еще одно утверждение.

Lem 6.4. *Локализация аддитивной категории локализующим семейством тоже аддитивна.*

В силу аддитивности небоходимо доказать, что $sf \sim 0$, где s из локализующего семейства, влечёт существование $t \in \mathrm{Qis} : ft \sim 0$. Конструкция будет следующей. Опять возьмём конус $C[s]$, соответствующую точную последовательность и применим функтор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, \cdot)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, "f'"'] \arrow[d, "f"] & C[f'][-1] \arrow[l, "t"'] & \\
\ldots \arrow[r] C[s][-1] & \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X,\cdot)"] & Z \arrow[r] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C[s][-1]) & \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Z) \arrow[r] & \ldots \\
f' & \arrow[r, mapsto] & f \arrow[r, mapsto] & sf \sim 0 &
\end{tikzcd}$$

Из точности sf поднимается до $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, C[s][-1])$. Искомым морфизмом тогда будет соответствующий канонический для конуса $t : C[f'][-1] \to X$. Для такого построения остается проверить квазиизоморфность и гомотопность композиции нулю. Аналогично квазиизоморфность следует из ацикличности конуса $C[s]$ и точности следующей последовательности по лемме о зигзаге.

$$\ldots \longrightarrow C[f'][-1] \xrightarrow{t} X \xrightarrow{f'} C[s][-1] \longrightarrow C[f'] \longrightarrow \ldots$$

Гомотопность нулю следует из того, что по построению $ft \sim hf't$, а $f't \sim 0$ из точности последовательности выше. ■

Доказательство леммы 6.3. i dont know ■

Доказательство леммы 6.4. i dont know ■

Ещё раз вспомним логику всего, что делалось ранее. Нашей целью было отождествить объект со всеми его резольвентами. Оказалось, что все резольвенты квазиизоморфны объекту: поэтому мы захотели изучить локализацию категории комплексов квазиизоморфозмами, ведь в такой категории интересующее нас отношение является изоморфизмом. Но такая локализация простому описанию сразу не поддаётся, в чём мы убедились в предложении 6.1. Поэтому сначала мы научились обращать квазиизоморфизмы в гомотопической категории. Следующая теорема завершает наши рассуждения, утверждая, что получившаяся локализация в гомотопической категории и производная категория — это одно и то же.

Thr 6.5.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$$

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Kom}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{Q}_{\mathcal{D}}"] \arrow[d, "\mathrm{Q}_{\mathcal{K}}"] & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[d, dashed, bend right, "\beta"'] \\
\mathcal{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{Q}_{\mathcal{D}}"'] \arrow[ur, dashed, "\pi"] & \mathcal{K}(\mathcal{A})[\mathsf{Qis}^{-1}] \arrow[u, dashed, bend right, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Покажем, что существуют единственные два морфизма α, β, делающие диаграмму выше коммутативной. Функтор $\mathrm{Q}_{\mathcal{K}}$ обращает гомотопические эквивалентности (отметим, что гомотопическая категория — локализация категории комплексов гомотопическими эквивалентностями) и сохраняет квазиизоморфизмы. $\mathrm{Q}_{\mathcal{D}}$ обращает все квазиизоморфизмы. Тогда и $\mathrm{Q}_{\mathcal{R}} \cdot \mathrm{Q}_{\mathcal{D}}$ обращает все квазиизоморфизмы. Следовательно по универсальному свойству локализации (5.1) существует единственный β. Отметим, что все гомотопические эквивалентности — это квазиизоморфизмы. Следовательно, $\mathrm{Q}_{\mathcal{D}}$ переводит все гомотопические эквивалентности в изоморфизмы и опять по универсальному свойству локализации (5.1) имеем единственный морфизм π. Из коммутативности π переводит все квазиизоморфизмы в изоморфизмы. Ещё раз по универсальному свойству (5.1) имеем единственный морфизм α. ■

Семинар 7
(Темы: Производный функтор, приспособленный класс объектов, выделенные треугольники)

Ранее мы ввели понятие приспособленного класса объектов $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ для точного слева (справа) функтора $\mathcal{F}$. Далее будем проводить все рассуждения для точного слева аддитивного функтора $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Ab}$. Напоминание: $\mathcal{R} \subset \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$ – приспособленный к $\mathcal{F}$ класс объектов, если он:

- достаточно большой, то есть для люього объекта мы можем построить $\mathcal{R}$-резольвенту
$$\forall X \in \mathcal{A} \quad \exists R \in \mathcal{R}: \quad X \hookrightarrow R$$
- $\mathcal{F}$ переводит ациклический комплекс из $\mathsf{Kom}^+ R$ в ацикличный.

Claim 7.1. *Если $\mathcal{R}$ – достаточно большой класс объектов, то для любого комплекса существует $\mathcal{R}$-резольвента, то есть*
$$\forall C^\bullet \subset \mathsf{Kom}^+(\mathcal{A}) \quad \exists R^\bullet \subset \mathsf{Kom}^+(\mathbb{R}): \quad C^\bullet \overset{qis}{\to} R^\bullet$$

Доказательство. Строим резольвенту. На первом шаге вложим нудевой член в некоторый объект из класса R
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & C^1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, dashed] & \dots \\
0 \arrow[r] & R^0 \arrow[r] & R^0 \coprod\limits_{C^0} C^1 \arrow[r, hook] & R^1 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C^i \arrow[r, "d_C^i"] \arrow[dl, "t^i"'] \arrow[d, "\tau^i"] & C^{i+1} \arrow[d] \arrow[dr, "t^{i+1}"] & \\
R^i \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, d_R^{i-1} \arrow[r, "p"] & \mathrm{Coker}\, d_R^{i-1} \coprod\limits_{C^i} C^{i+1} \arrow[r, hook] & R^{i+1}
\end{tikzcd}$$

$$C^i \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tau^i \\ -d_C^i \end{pmatrix}} \mathrm{Coker}\, d_R^{i-1} \oplus C^{i+1} \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\, d_R^{i-1} \coprod_{C^i} C^{i+1} \longrightarrow 0$$

Осталось проверить, что таким образом задан квазиизоморфизм комплексов.
$\blacktriangle$ epi
$$C^i \supset Z^i(R^\bullet) \ni x \mapsto (p(x), 0) \in \mathrm{Coker}\, d_R^{i-1} \oplus C^{i+1}$$
$$\exists \widetilde{x} \in C^i: \quad \begin{pmatrix} \tau^i \\ -d_C^i \end{pmatrix} \widetilde{x} = \begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_c^i \widetilde{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{x} \in Z^i(C^\bullet)$$
$\blacktriangle$ $mono$
$$C^i \supset B^{i-1}(C^\bullet) \ni x \mapsto d_C^i(x) = 0 \in C^{i+1} \mapsto (0,0) \in \mathrm{Coker}\, d_R^{i-1} \oplus C^{i+1} \Rightarrow d_R^i t^i(x) = 0 \Rightarrow t^i(x) \in B^{i-1}(R^\bullet)$$
■

Продолжим теперь построение производного функтора. Ранее было отмечено, что если $\mathcal{F}$ – точный, то приспособленным классом являются все объекты нашей категории.
Продолжим рассуждение для точного слева функтора между абелевыми категориями. Почленным действием он продолжается до точного функтора в категории комплексов и гомотопической категории.
$$\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$
$$\mathsf{Kom}^+ \mathcal{F} \colon \mathsf{Kom}^+(\mathcal{A}) \to \mathsf{Kom}^+(\mathcal{B})$$
$$\mathcal{K}^+ \mathcal{F} \colon \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^+(\mathcal{B})$$
Однако, вообще говоря, функтор не обязан сохранять квазиизоорфизмы. Поэтому продление на прозводную категорию мы будем организовывать следующим образом: комплекс мы будем заменять на квазиизоморфный ему комплекс с приспособленными членами и уже на этот комплекс будем действовать функтором почленно. Так мы получим производный фунтор.
$$\mathcal{D}^+ \mathcal{F} \colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$$
План действий:

- Локализация гомотопической категории приспособленных объектов по квазиизоморфизмам эквивалентна производной категории

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \arrow[r, bend right, "\psi"'] & \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[l, bend right, dashed, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$

Lem 7.2. *Пусть $\mathcal{C}$ – категория, S – локализующее семейство, $\mathcal{B}$ – полная подкатегория в $\mathcal{C}$. Пусть также*

1. $S_{\mathcal{B}} = S \bigcap \mathbf{Mor}(\mathcal{B})$ *– локализующее семейство в $\mathcal{B}$.*
2. *У любого морфизма, заканчивающегося на объекте подкатегории $\mathcal{B}$ мы можем поправить начало так, чтобы он начинался тоже в $\mathcal{B}$.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "s"] & \\ \underset{\in\mathcal{B}}{X''} \arrow[u, "t"] \arrow[r] & \underset{\in\mathcal{B}}{X} \end{tikzcd}$$

$$\forall s \in S \quad s\colon X' \to \underset{\in\mathcal{B}}{X} \qquad \exists t \in S \quad t\colon \underset{\in\mathcal{B}}{X''} \to X' \qquad st \in S_{\mathcal{B}}$$

2' *У любого морфизма, начинающегося на объекте подкатегории $\mathcal{B}$ мы можем поправить начало так, чтобы он заканчивался тоже в $\mathcal{B}$.*[2]

$$\begin{tikzcd} \underset{\in\mathcal{B}}{X'} \arrow[d] \arrow[dr, "s"] & \\ \underset{\in\mathcal{B}}{X''} & X \arrow[l, "t"'] \end{tikzcd}$$

Тогда имеется строгое и полное вложение $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$

Доказательство.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(A, B)$$

$\blacktriangle\mathrm{mono}(\mathrm{inj})$ Покажем, что, если два морфизма представлялись эквивалентными домиками в $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$, то они остануться эквивалентными в $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Изобразим последовательность домиков на диаграмме. Эквивалентные домики в

$$\begin{tikzcd} & & \underset{\in\mathcal{B}}{D} \arrow[d, "t"] & & \\ & & X'' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr] & & \\ & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[drrr] & & X' \arrow[dlll] \arrow[dr] & \\ \underset{\in\mathcal{B}}{A} & & & & \underset{\in\mathcal{B}}{B} \end{tikzcd}$$

$$rs \in S \quad A \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \exists D \subset \mathcal{B} \quad D \xrightarrow{t} X'' \quad rst \in S$$

$\blacktriangle\mathrm{epi}(\mathrm{surj})$ То есть любой домик, полностью лежащий в $\mathcal{B}$ поднимается в объемлющую категорию $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & \underset{\in\mathcal{B}}{X'} \arrow[d] & \\ & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr] & \\ \underset{\in\mathcal{B}}{A} & & \underset{\in\mathcal{B}}{B} \end{tikzcd}$$

[2]и тогда в доказательстве нужно будет применять левые домики

■

Теперь применим 7.2 для $\mathcal{A} = \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ и $\mathcal{B} = \mathcal{K}^+(\mathcal{R})$ и $S = \mathrm{QIS}_{\mathcal{A}}$. Тогда

Claim 7.3. *$\exists\psi\colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ – эквивалентность категорий.*[3]

def 7.4. Производный функтор точного слева $\mathcal{F}$, действующего между двумя абелевыми категориями это **пара** $(\mathcal{D}^+\mathcal{F}, \varepsilon_{\mathcal{F}})$ точного слева[4] функтора и естественного преобразования.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}^+(\mathcal{R}) \arrow[r, "\mathcal{K}^+\mathcal{F}"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\
\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathcal{D}^+\mathcal{F}"] \arrow[r, dashed, bend right, "G"'] & \mathcal{D}^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr] & \mathcal{D}^+\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}} \arrow[d, dashed, "\exists!\eta"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Com 7.5. *Очевидно, что $\mathcal{D}^+\mathcal{F}$ – единственный.*

Thr 7.6. *Если точный слева функтор допускает класс приспособленных объектов $\mathcal{R}$, то $\exists!$ $(\mathcal{D}^+\mathcal{F}, \varepsilon_{\mathcal{F}})$.*

Построение. На этом шаге мы показываем **точность в смысле производной категории**. Будем использовать полученную ранее эквивалентность категорий $\psi\colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, обратную $\phi\colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}_{\mathcal{R}}]$ и два естественных изоморфизма [5] $\alpha\colon \mathrm{Id} \to \phi\circ\psi$ и $\beta\colon \psi\circ\phi \to \mathrm{Id}$. Мы определим вспомогательный функтор $\widetilde{\mathcal{F}}\colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}^{-1}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ просто почленным действием, а производный функтор как $\mathcal{D}^+\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}\circ\phi$.
План:

1. *Точность $\mathcal{D}^+\mathcal{F}$*[6]

   Lem 7.7. *Пусть Δ – треугольник в локализованной гомотопической подкатегории приспособленных объектов. Предположим, что он изоморфен выделенному треугольнику в производной категории*[7]*. Тогда он будет изоморфен выделенному треугольнику в локализованной гомотопической подкатегории приспособленных объектов.*

   $$\mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}^{-1}] \ni \Delta \cong \Delta' \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \Delta \cong \widetilde{\Delta'} \in \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}^{-1}]$$

   Доказательство.

   $$\begin{tikzcd}
\Delta\colon & X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & X[1] \arrow[d, "\phi[1]"] \\
\widetilde{\Delta}\colon & \widetilde{X} \arrow[r, "f"] & \widetilde{Y} \arrow[r] & C(f) \arrow[r] & \widetilde{X}[1]
\end{tikzcd}$$

   Пусть морфизм ϕ представляется в производной категории домиком

   $$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "r"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

   Тогда существует морфизм между конусами

   $$Y \oplus S[1] = C(r) \xrightarrow{(\psi,\phi,q)} C(f) = \widetilde{Y} \oplus \widetilde{X}[1]$$

   Теперь можем построить изоморфизм треугольников

   $$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, "q"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "id"] & C(r) \arrow[d, "\theta^{-1}\circ(\psi,\phi,q)"] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

[3] Функтор взятия резольвенты
[4] в смысле производной категории, то есть переводящего выделенные треугольники в выделенные
[5] "единица и коединица сопряжения"
[6] **в смысле производной категории**
[7] Так как мы не вводили понятия треангулированной категории, то для нас просто треугольником будет набор из трёх объектов и трёх морфизмов, а выделенным треугольником будет такой набор, где $Z = C(X \to Y)$

$\Rightarrow \mathcal{D}^+\mathcal{F}$ – точный. ■

2. *Построение $\varepsilon_{\mathcal{F}}$, единственность.* Для построения естественного изоморфизма, возьмём некоторый комплекс, вложим его в производную категорию и выберем его резольвенту, подбором квазиизоморфного ему. То есть

$$X \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \quad Y = \phi Q_{\mathcal{A}}(X)$$

Квазиизоморфизм $\beta\colon X \to \psi\phi(X) = \psi(Y)$ представляется домиком

$$\begin{tikzcd} & Z & & & \mathcal{K}^+\mathcal{F}(Z) & \\ X \arrow[ur] & & Y \arrow[ul] \arrow[r, "\mathcal{K}^+\mathcal{F}"] & \mathcal{K}^+\mathcal{F}X \arrow[ur] & & \mathcal{K}^+\mathcal{F}Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{F}}\colon Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(X) \to Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(Y) = \widetilde{\mathcal{F}}Q_{\mathcal{R}}(Y) = \mathcal{D}^+\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}}(Y)$$

Далее мы проверим, что таким образом опредлённый морфизм является естественным преобразованием функторов и не завичит от выбора Z.

3. *Универсальность to be continued...*

Семинар 8
(Темы: Производный функтор, классический Ext, сложение по Бэру)

8.1 Производный функтор

Пусть $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – точный слева или справа функтор между абелевыми категориями. Мы хотим продолжить его на производную категорию. Для этого нужно выбрать класс приспособленных объектов $\mathcal{R} \in \mathcal{A}$. Приспособленных объектов должно быть достаточно много [8]. Также под действием функтора ацикличный комплекс, состоящий из приспособленных объектов дожен переходить в ацикличный. Отсюда, в частности, следует, что этот функтор будет сохранять qis.[9] Ранее была построена эквивалентность категорий.

$$\mathcal{K}^+(\mathcal{R}) \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrr, bend right, "\mathcal{D}^+\mathcal{F}"'] & \mathcal{K}^+(\mathcal{R}) \arrow[r, "\mathcal{K}^+\mathcal{F}"] & \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] & \mathcal{D}^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Com 8.1. *При определении производного функтора мы делаем два неканонических выбора. Во-первых, выбор эквивалентности* $\varphi : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$. *Во-вторых, выбор класса приспособленных объектов* $\mathcal{R}$[10].

Напоминание с определением производного функтора 7.4

def 8.2. Производный функтор точного слева $\mathcal{F}$, действующего между двумя абелевыми категориями это **пара** $(\mathcal{D}^+\mathcal{F}, \varepsilon_{\mathcal{F}})$ точного слева[11] функтора и естественного преобразования.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}^+(\mathcal{R}) \arrow[r, "\mathcal{K}^+\mathcal{F}"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\
\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathcal{D}^+\mathcal{F}"] \arrow[r, bend right, dashed, "G"'] & \mathcal{D}^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr] & \mathcal{D}^+\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}} \arrow[d, dashed, "\exists! \eta"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Для компоненты по $X \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ определим естественное преобразование как $Y = \varphi\psi(X)$. Применим к нему $Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}$ и получим морфизм в $\mathcal{D}^+(\mathcal{B})$. Образ этого морфизма в $\mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ не зависит от выбора расширения.

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
X \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & Z'' & Y \arrow[ul] \arrow[l] \arrow[dl] \\
& Z' &
\end{tikzcd}$$

Доказательство естественности преобразования $\varepsilon_{\mathcal{F}}$[12]

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d] \\
X_2 \arrow[r] & Y_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(X_1) \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}}"] \arrow[d] & \mathcal{D}^+\mathcal{F}(Y_1) \arrow[d] \\
Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(X_2) \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{D}^+\mathcal{F}(Y_2)
\end{tikzcd}$$

[8] то есть любой комплекс в $\mathcal{A}$ должен ими накрываться

[9] Точный справа (или слева) функтор сохраняет выделенные треугольники и конусы. Конус qis ацикличен. Если под действием функтора конус остался ацкличным, то и qis остался qis'ом.

[10] если в классе приспособленных объектов выделить достаточно большой подкласс, то он тоже будет приспособленным

[11] в смысле производной категории, то есть переводящего выделенные треугольники в выделенные

[12] естественное преобразование коммутирует с морфизмами

Теперь построим естественное преобразование η. $X \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\cong"] \\ \phi\psi X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d] & G(X) \arrow[d, "\theta", "\cong"'] \\ \underset{\mathcal{D}^+\mathcal{F}(X)}{\underset{\cong}{Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F}(\phi Q_{\mathcal{A}}X)}} \arrow[r, "\varepsilon_{Q_{\mathcal{A}}X}"] \arrow[ur, "\eta_X"] & G(\phi\psi X) \end{tikzcd}$$

$$\eta_X = \theta^{-1}\varepsilon_{Q_{\mathcal{A}}X}$$

Claim 8.3. *Если в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных(проективных) объектов, то их класс приспособлен к любому точному слева (справа) функтору.*

Доказательство. Нужно показать, что любой точный слева функтор ограниченные слева инъктивные комплексы переводит в ацикличные. Мы знаем, что любой морфизм из инъективного комплекса в ацикличный гомотопен 0.

$$\mathrm{id}_{I^\bullet} \sim 0 \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{F}(I^\bullet)} \sim 0 \Rightarrow \mathcal{F}(I^\bullet) \text{ – ацикличный.}$$

∎

def 8.4. Функтор $\mathcal{H} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ называется когомологическим, если выделенные треугольники $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ он переводит в длинные точные последовательности $\ldots \longrightarrow H(X[i]) \longrightarrow H(Y[i]) \longrightarrow H(Z[i]) \longrightarrow H(X[i+1]) \longrightarrow \ldots$

Ex 8.5.

- H^0 – *когомологический*[13]
- $\mathrm{Hom}(X, -)$ – *тоже.*

def 8.6. Классический производный функтор

$$\mathcal{L}^i\mathcal{F} = H^{-i}(\mathcal{D}^+\mathcal{F})$$
$$\mathcal{R}^i\mathcal{F} = H^{i}(\mathcal{D}^+\mathcal{F})$$
$$\mathcal{L}^i\mathcal{F}, \mathcal{R}^i\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

Claim 8.7. *Пусть $\mathcal{F}$ – точный слева функтор.* $0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ *– короткая точная последовательность. Тогда $\exists$ длинная точная последовательность вида:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(Z) \longrightarrow \mathcal{R}^1\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{R}^1\mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{R}^1\mathcal{F}(Z) \longrightarrow \ldots$$

Доказательство. Действуем по определению производного функтора. Для этого короткую точную последовательность мы погружаем в производную категорию и выбираем квазиизоморфные им комплексы с приспособленными членами. Далее мы подействуем почленно действуем производным функтором Сделаем из короткой точной последовательности треугольник. Для этого в производной категории рассмотрим морфизм комплексов с когомологиями, сосредоточенными в нулевом члене[14]. Конусом данного морфизма будет являться комлекс с нулевой когомологией $C(f) \overset{qis}{\cong} Z[0]$.

$$X[0] \xrightarrow{f} Y[0] \longrightarrow \begin{matrix} 0 \\ \uparrow \\ Y \\ \uparrow f \\ X \\ \uparrow \\ 0 \end{matrix} \qquad C(f) \cong Z[0]$$

Для каждого комплекса мы находим его резольвенту и заменяем исходный треугольник треугольником соответствующих резольвент.

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}^0{}_X \longrightarrow \mathcal{R}^1{}_X \longrightarrow \ldots = \mathcal{R}^\bullet{}_X$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}^0{}_Y \longrightarrow \mathcal{R}^1{}_Y \longrightarrow \ldots = \mathcal{R}^\bullet{}_Y$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}^0{}_Z \longrightarrow \mathcal{R}^1{}_Z \longrightarrow \ldots = \mathcal{R}^\bullet{}_Z$$

[13] snake lemma

[14] строго полное вложение в производную категорию

Так как производный функтор точендля класса приспособбленных оъектов, мы получим выделенный треугольник после его применения к выделенному треугольнику, полученному на предыдущем шаге.

$$\mathcal{R}^\bullet{}_X \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet{}_Y \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet{}_Z \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet{}_Z[1]$$

$$\mathcal{K}^+\mathcal{R}^\bullet{}_X \to \mathcal{K}^+\mathcal{R}^\bullet{}_Y \to \mathcal{K}^+\mathcal{R}^\bullet{}_Z \to \mathcal{K}^+\mathcal{R}^\bullet{}_Z[1]$$

Когомологический функтор H^0 сделает из выделенного треугольника длинную точную последовательность когомологий:

$$0 \to H^0\mathcal{D}^+\mathcal{R}^\bullet{}_X \to H^0\mathcal{D}^+\mathcal{R}^\bullet{}_Y \to H^0\mathcal{D}^+\mathcal{R}^\bullet{}_Z \to H^0 \circ [1](\mathcal{D}^+\mathcal{R}^\bullet{}_X) \to \dots$$

■

8.2 Функтор Ext по Йонеде

def 8.8. Пусть $\mathcal{A} \in \mathbf{Ab}$. Расширением объекта C с помощью объекта A длины 1 будем называть короткую точную последовательность вида:

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

Аналогично расширение длины n определим как:

$$0 \to A \to B_1 \to \dots \to B_n \to C \to 0$$

def 8.9. Два расширения называются эквивалентными, если существует морфизм расширений как комплексов $\alpha = \exists\{\alpha_i\}_i^n$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "id"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & \dots \arrow[r] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_1' \arrow[r] & \dots \arrow[r] & B_n' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Com 8.10. *Введённое отношение эквивалентности не является отношением эквивалентности. Правильное определение должно являться минимальным отношением такого вида. Правильнее было бы сказать, что расширения должны быть квазиизоморфны как комплексы, однако, проверка квазиизоморфности комплексов крайне алгоритмически сложна. Но в силу того, что мы рассматриваем ацикличные комплексы, проверка квазиизоморфности может быть выполнена за $2n$ шагов.*

В случае расширений длины 1 по лемме о 5 два расширения будут эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны средние члены последовательностей.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "id"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Таким образом может быть определено множество классов эквивалентности расширений $\mathrm{Ext}^1(C, A)$.

Ex 8.11. *Неэквивалентные расширения* $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ex 8.12. $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_m, A) = A/mA$

$$0 \to \underset{g}{A} \xrightarrow{\alpha} \underset{\alpha g = mu}{B} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_n(c) \to 0$$

$$a \longmapsto c$$

$$\begin{aligned}
&\forall b \in B, \quad h \in \{1, ..., m-1\} \\
&\alpha b = a + hu \\
&mb = m\alpha a + h\underset{\in \ker \beta}{(mu)} \\
&mu = \alpha g, \quad g \in A
\end{aligned}$$

$$(\alpha a + hu) + (\alpha a' + h'u) = \begin{cases} \alpha(a + a') + (h + h')u, & h + h' \leqslant m \\ \alpha(a + a' + g) + (h + h' - m)u, & h + h' \geqslant m \end{cases}$$

Задание элемента g однозначно задаёт сложение в группе B. Несмотря на то, что сам элемент g определён неоднозначно, класс смежности в образе определён однозначно. Это и означает, что существует биекция между классами смежности и всевозможными расширениями $\mathbb{Z}_m$.

8.3 Сложение по Бэру

Приведённый пример наводит на мысль, что на множестве Ext' ов может быть задана групповая структура. Ответ – да. Для этого введём сложение расширений по Бэру:

Claim 8.13. *Пусть есть расширение* $E\colon A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *и морфизм* $\gamma\colon C' \to C$. *Тогда* $\exists!$ *расширение* E', *которое начинается на* A *и заканчивается на* C', *задаваемое морфизмом комплексов* $(\mathrm{id}_A, \delta, \gamma) : E' \to E$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overset{a}{A} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] & \overset{(a,0)}{B \underset{C}{\times} C'} \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\delta"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & \underset{a}{B} \arrow[r, "\beta"] & \underset{0}{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
B \underset{C}{\times} C' &= \{(b, c) \in B \oplus C' | \quad \beta\delta(b) = \gamma\beta'(c)\} \\
\delta(b, c) &= b \\
\beta'(b, c') &= c'
\end{aligned}$$

Проведя двойственные рассуждения можем получить аналогичное утверждение для $\gamma'\colon A \to A'$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma'"] & B \arrow[r, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, "\delta"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & A' \coprod\limits_A B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Опишем теперь алгоритм сложения двух расширений:

$$\begin{matrix} 0 \to A \to B \to C \to 0 \\ 0 \to A \to B' \to C \to 0 \end{matrix} = 0 \longrightarrow A \longrightarrow B''' \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \coprod\limits_{A \oplus A} B'' = B''' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & (B \oplus B') \underset{C \oplus C}{\times} C = B'' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, "\Delta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r] & B \oplus B' \arrow[r] & C \oplus C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Итак, мы ввели сложение расширений по Бэру, задав на них групповую структуру. Несложно убедиться, что нейтральным по сложению элементом данной группы является тривиальное расширение $0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0$.

8.4 Сложение Ext длины n

Пусть имеем два расширения ξ, ξ' и морфизм комплексов, тождественный на A и B.

$$\begin{array}{llcccccccccc}
\xi: & 0 & \to & B & \to & X_n & \to & \cdots & \to & X_1 & \to & A \\
 & & & \big\downarrow \mathrm{id}_B & & & & & & & & \big\downarrow \mathrm{id}_A \\
\xi': & 0 & \to & B & \to & X'_n & \to & \cdots & \to & X'_1 & \to & A
\end{array}$$

Тогда суммой по Бэру двух таких расширений будет комплекс

$$0 \to B \longrightarrow X''_n \longrightarrow X_{n-1} \oplus X'_{n-1} \to \cdots \to X_2 \oplus X'_2 \longrightarrow X''_1 \longrightarrow A \to 0$$

$$X_n \underset{B}{\oplus} X'_n \qquad\qquad\qquad\qquad X_1 \underset{A}{\times} X'_1$$

Семинар 9
(Темы: Класс приспособленных объектов, градуированная алгебра Ext)

$$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{Ab}.\quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "\mathcal{R}^n\mathcal{F}"'] & \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathcal{D}^-\mathcal{F}"] & \mathcal{D}^-(\mathcal{B}) \arrow[r, "H^0\circ(n)"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

def 9.1. Объект X называется $\mathcal{F}$–ацикличным, если $\mathcal{R}^n\mathcal{F}(X)=0\ \forall n\neq 0$.

Обозначим $\mathcal{Z}$ класс $\mathcal{F}$– ацикличных объектов. До сих пор мы получали существование производного функтора из наличия приспособленного класса. Имеет место следующее частичное обращение этого рассуждения:

Claim 9.2. $\exists$ *класс приспособленных к* $\mathcal{F}$ *объектов* $\Leftrightarrow \exists$ *достаточно большой*[15] $\mathcal{Z}$.

Доказательство. Проведём доказательство для точного слева функтора $\mathcal{F}$.

$\Leftarrow$ Пусть $\mathcal{R}$– класс приспособленных к $\mathcal{F}$ объектов. Тогда $\mathcal{D}\mathcal{F}(X[0]) \overset{qis}{\cong} \mathcal{F}(X)[0]\ \forall X\in\mathcal{R}$, поэтому $\mathcal{R}\subset\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}$– достаточно большой, так как $\mathcal{R}$– достаточно большой.

$\Rightarrow$ Пусть теперь $\mathcal{R}\subset\mathcal{Z}$ – достаточно большой подкласс $\mathcal{F}$-ацикличных объектов. Чтобы установить приспособленность достаточно показать, что $\mathcal{F}$ переводит ацикличные комплексы из $\mathsf{Kom}^{\pm}(\mathcal{R})$ в ацикличные. Если мы имеем ацикличную тройку вида $0\longrightarrow K^0\longrightarrow K^1\longrightarrow K^2\longrightarrow 0$, то точность $0\longrightarrow \mathcal{F}(K^0)\longrightarrow \mathcal{F}(K^1)\longrightarrow \mathcal{F}(K^2)\longrightarrow 0$ следует из $\mathcal{R}^1\mathcal{F}(K^0)=0$. В общем случае можно отщиплять точные тройки следующим образом:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K^0=X^0 \arrow[r, "d^0"] & K^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[dr] & K2 \arrow[r] & \dots \\ & & & \mathrm{im}d^1=X^1 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$X^i=\mathrm{im}d^i$$

Далее так как $X^i,K^{i+1}\in\mathcal{Z}\Rightarrow X^i\in\mathcal{Z}\Rightarrow\ 0\longrightarrow\mathcal{F}(X^i)\longrightarrow\mathcal{F}(K^{i+1})\longrightarrow\mathcal{F}(X^{i+1})\longrightarrow 0$ – точны $\Rightarrow\mathcal{F}(K^\bullet)$ – ацикличен. ■

Claim 9.3. $\forall$ *достаточно большой* $\mathcal{Z}$ *приспособлен к* $\mathcal{F}$[16]

Claim 9.4. *В достаточно большом* $\mathcal{Z}$ *лежат все инъективные*[17] *и проективные* [18] *объекты категории* $\mathcal{A}$.

Пусть есть расширение $\mathrm{Ext}^1(C,A)$ и морфизм $\alpha\colon A\to X$. Если α продолжаем на B, то есть $\exists\alpha'\colon B\to X$, тогда можно построить диаграмму:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "(\alpha'\pi)"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & X\oplus C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$X\coprod_A B$$

Таким образом можно сказать, что существование нетривиальных Ext' ов препятствует продолжению морфизмов.

9.1 Умножение Ext' ов

Пусть имеем 2 расширения длины 1 $\gamma\in\mathrm{Ext}^1(C,A)$ и $\delta\in\mathrm{Ext}^1(Z,C)$. Опустив C в цепочке морфизмов мы получим некоторый элемент $\mathrm{Ext}^2(Z,A)$.

$$\gamma:\qquad 0\longrightarrow A\longrightarrow X\longrightarrow C$$

$$\delta:\qquad 0\longrightarrow C\longrightarrow Y\longrightarrow Z$$

$$\gamma*\delta:\qquad A\longrightarrow X\longrightarrow \cancel{C}\longrightarrow Y\longrightarrow Z$$

[15] $\forall\ X\in\mathcal{A}$ является подобъектом $\mathcal{F}$–ацикличного (если $\mathcal{F}$– точен слева), или факторобъектом ацикличного (если $\mathcal{F}$– точен справа)
[16] любой класс приспособленных лежит в достаточно большом $\mathcal{Z}$
[17] точный справа
[18] точный слева

$$\ast\colon \mathsf{Ext}^m(C,A)\times \mathsf{Ext}^n(Z,C)\to \mathsf{Ext}^{n+m}(Z,A)$$

Таким образом может быть задана структура градуированного кольца[19] $\mathsf{Ext}^\bullet_R(A,A)$, $A\in R-\mathsf{mod}$.
$\mathsf{Ext}^\bullet_R(A,B)$ – это модуль над $\mathsf{Ext}^\bullet_R(A,A)$, $A,B\in R-\mathsf{mod}$

Claim 9.5.

$$\mathsf{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B)\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A[0],B[i])$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[dl] & X_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[dr] & A \\
B[-n] & & & & & A[0]
\end{tikzcd}$$

Про сцепление комплексов по общему крайнему члену писать пока лень... Потом добавлю

Claim 9.6.

$$\mathsf{Ext}^n(A,-)=R^n\mathsf{Hom}(A^\bullet,-)$$

[19]или градуированной $\mathbb{Z}$–алгебры

Семинар 10
(Темы: Ext, gldim, pd, фильтрованная категория)

Ранее мы добились того, что смогли определить функтор, действующий между производными категориями и являющийся точным в смысле производной категории. Для точного слева функтора $\mathrm{Hom}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ был таким образом определён функтор $R\,\mathrm{Hom}(A, -) : \mathcal{D}^\flat(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^\flat(\mathbf{Ab})$.
Также для Hom был определен $\mathsf{Ext}^i(A, -) = H^i(R\,\mathrm{Hom}(A, -)) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ – классический производный функтор, но этот функтор действует медждку обычными абелевыми категориями. Также была показана следующая связь между этими сущностями $\mathsf{Ext}^i(A, B) = R\,\mathrm{Hom}(A, B[i])$. Докажем следующее утверждение, являющееся вообще говоря общим свойством всех производных функторов:

Claim 10.1. *Не бывает отрицательных* Ext'*ов.*
$\forall\ A,\ B \in \mathcal{A}\ \mathsf{Ext}^n(A, B) = 0,\ n < 0.$

Доказательство. Пусть $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, B[-n])$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[dr] & & & M \arrow[dl, "\tau_{n\succcurlyeq 0}"'] \arrow[dr] & \\ A & & B[-n] \arrow[r, phantom, "\sim"] & A & & B[-n] \end{tikzcd}$$

■

Напоминание: Для точного справа функтора F и короткой точной последовательности $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ $\exists$ когомологическая последовательность $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow R^1F(A) \longrightarrow R^1F(B) \longrightarrow \dots$ Введём понятие глобальной размерности. Это некоторая мера того, насколько сложно устроена категория, насколько длинные могут возникать последовательности.

def 10.2. Говорят, что $\mathcal{A}$ имеет глобальную(гомологическую) размерность $n \in \mathbb{N}$, если n – наибольшее такое число, что $\exists X, Y \in \mathcal{A} : \mathsf{Ext}(X, Y)^n \neq 0$

$$\mathbf{gldim}(\mathcal{A}) = n$$

Если такого числа нет, говорят, что категория имеет бесконечную глобальную размерность:

$$\mathbf{gldim}(\mathcal{A}) = \infty$$

Thr 10.3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\mathbf{gldim}\ \mathcal{A} = 0$
2. $\mathsf{Ext}^1(X, Y) = 0\ \forall X, Y \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{A}$*– полупроста.*

Доказательство.
- 1 $\Rightarrow$ 2 см. 10.2
- 3 $\Leftrightarrow$ 2 см. определние по Йонеде
- 3 $\Rightarrow$ 1 Для $n = 1$ – очевидно. Пусть для $n - 1$ также имеем расщипимое расширение
$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow A_1 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \qquad B \longrightarrow A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_n \longrightarrow X \longrightarrow 0$$
Но тогда их композиция тоже расщипима:
$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow A_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_n \longrightarrow X \longrightarrow 0$$
$\Rightarrow \mathsf{Ext}^n(X, Y) = 0\ \forall X, Y \in \mathcal{A}$

■

Ex 10.4. $\mathbf{gldim}\mathcal{V}ect_k = 0$

def 10.5. Проективная размерность $X \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{pd}\ X = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists Y : \mathsf{Ext}^n(X, Y) \neq 0\}$$

Prop 10.6.

$$\mathbf{pd}\ X = 0 \Leftrightarrow X\text{– \textit{проективный}}$$

Доказательство. $\Leftarrow$ очевидно из определения по Йонеде, так как $\forall$ короткая точная последовательность, заканчивающаяся на проективном объекте – расщипима.
$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl] \arrow[d, "\varphi"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}(P, B) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(P, C) \to 0 \Rightarrow \varphi \text{ – поднимается}$$

■

Lem 10.7. *Пусть имеем проективную резольвенту* $P_\bullet$*:*

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow P_{-k} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Тогда

$$\mathbf{pd}\ X' = \max\{\mathbf{pd}\ X - k + 1, 0\}$$

Доказательство. Определим отображение склейки раширений $\gamma : \mathsf{Ext}^d(X', Y) \to \mathsf{Ext}^{d+k+1}(X, Y)$.
<u>Если $d = 0$, то γ– $\mathsf{epi}(\mathsf{surj})$.</u>
<u>Если $d \geqslant 1$, то γ– iso.</u>

1. База: $k = 0$

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

$$\underbrace{\mathsf{Ext}^d(P, Y)}_{\cong 0} \longrightarrow \mathsf{Ext}^d(X', Y) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Ext}^{d+1}(X, Y) \longrightarrow \underbrace{\mathsf{Ext}^{d+1}(P, Y)}_{\cong 0} \longrightarrow 0$$

2. Пусть верно для $k - 1$, тогда

$$\mathsf{Ext}^d(X', Y) \longrightarrow \mathsf{Ext}^{d+1}(X', Y) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Ext}^{d+k+1}(X, Y)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & P_{-k-1} \arrow[r] \arrow[dr] & P_{-k} \arrow[r] & \dots \\ & & & X'' \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow \mathsf{Ext}^d(X', Y) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Ext}^{d+1}(X, Y) \longrightarrow 0$$

Неформально можно сформулировать данное утверждение следующим образом: проективнаяразмерность ядра длинной точной последовательности проективных объектов не может быть очень большой. ■

Corr 10.8.

$$\mathbf{pd}\ X \leqslant k \Rightarrow \exists \textit{ проективная резольвента длины } \leqslant k$$

Prop 10.9.

$$\boxed{\mathbf{gldim}\ \mathcal{A} = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbf{pd}\ X} \tag{10.1}$$

Вычисление Ext'ов как производных функторов

def 10.10. категоря $\mathcal{I}$ называется фильтрованной, если выполняется:

$$\forall i, j \in \mathcal{I} \quad \exists k : \quad \begin{tikzcd} i \arrow[dr] & \\ j \arrow[r] & k \end{tikzcd} \tag{10.2}$$

$$\forall i, j \in \mathcal{I}, u, v \colon i \to j \quad \exists \omega \colon j \to k \colon \omega u = \omega v \qquad i \underset{u}{\overset{v}{\rightrightarrows}} j \xrightarrow{\omega} k \tag{10.3}$$

Пусть есть функтор $F \colon \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ и функтор копредела $\mathsf{colim} \colon \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{A}$.
Сформулируем следующее утверждение, которое является важным техническим требованием для ряда задач:

Claim 10.11. *Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{R}-\mathtt{mod}$ – категория модулей над кольцом, $\mathcal{I}$– фильтрованная категория, тогда функтор $\mathtt{colim}\colon \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{A}$ точен.*

Доказательство. [20]

- Точность справа очевидна.[21]
- [22]

Lem 10.12. $a \in \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} A_i$*, то* a *поднимаеся до* $a_{i_0} \in A_{i_0}$.

Доказательство. Определим морфизмы $\mathcal{F}(i \to j) = \varphi_{ij}\colon A_i \to A_j$. Каждое слагаемое канонически вкладывается в сумму $\lambda_i\colon A_i \to \oplus A$ так, что $\lambda_i = \lambda_j\varphi_{ij}$. Это значит, что любой морфизм из $\mathtt{colim}$ имеет прообраз в $\oplus A$ вида $\sum_J \alpha_j a_i$, где $J < \infty$.
Изобразим на диаграмме конус функтора $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\lambda_i"'] & A_j \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_j"] \arrow[dr, "a"] & \dots & \\
& & \oplus_J A \arrow[r] & \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Имея условие фильтрованности категории $\mathcal{I}$ можем применить лемму Цорна и найти максимальный элемент среди таких прообразов, от есть любой элемент копредела имеет прообраз в одном конкретном модуле.[23]

$$\exists i_0 = \sup J \quad : \quad \forall j \in J \quad \exists j \to i_0$$

$$\varphi_{ji_0}(a_i) \in A_{i_0}$$

$$\sum_J \alpha_i a_i \mapsto a$$

■

Продолжаем доказательство исходного утверждения. Покажем, что в категории $\mathcal{R} - \mathtt{mod}$ $\varinjlim$ – точен.

$$A = \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} A_i$$

$$B = \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} B_i$$

Пусть есть мономорфизм $m_i\colon A_i \to B_i$. Пусть t – это индуциорванный морфизм (после взятия копредела). Теперь

$$\forall a \neq 0 \in A \quad \exists a_i \in A_i\colon \quad t_i(a_i) \neq 0 \quad t_i\text{– mono}$$

$$t_i(a_i) = t_j(\varphi_{ij}(a_i)) \mapsto t \neq 0 \in \varinjlim$$

Соответствует ненулевому элементу в коядре.

■

в категории $\mathbf{Ab}^{\mathrm{op}} = (\mathbb{Z} - \mathtt{mod})^{\mathrm{op}} \nsim \mathbf{Ab}$. Может разберём не разобрали....

Claim 10.13. Ext *и* $\varinjlim$ *(фильтрованный) коммутируют.*

Произвольная грппа является фильтрованым копредлом $M = \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} M_i$

[20] Для точности справа нужно, чтобы $\mathcal{F}(\mathtt{epi}) = \mathtt{epi}$, для точности слева $\mathcal{F}(\mathtt{mono}) = \mathtt{mono}$

[21] Точность справа функтора $\mathtt{colim}$ следует из его сопряженности слева диагональному функтоору Δ. ($\mathtt{colim} \dashv \Delta \dashv \mathtt{lim}$) Левые сопряженные функторы сохраняют копределы, в частности, сохраняют коядра, а значит эпиморфизм переводят в эпиморфизм, что и нужно для точности справа. Эпиморфизмы на уровне

[22] Нужно показать, что, если был мономорфизм на уровне диаграм, то он останется и мономорфизмом на уровне копределов.

[23] Копредел – это терминальный элемент в категории конусов под функтором , то есть такое семейство морфизмов, в которое мы можем попасть из любого другого семейства морфизмов. Копредел функтора действующего из фильтрованной категории можно понимать как семейство морфизмов, действующее в объединение своих образов. Категория является фильтрованной тогда и только тогда, когда существует конус под каждой конечной диграммой.

Семинар 11
(Темы: Функтор Tor)

Note 11.1. *Если в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов и* **gldim** $\mathcal{A} = n$*, а* $\mathcal{F}$ *– точный справа функтор, то*

$$\forall m > n \quad L^m\mathcal{F}(X) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{A}$$

Note 11.2. *Комплекс де-Рама является резольвентой постоянного пучка на гладком многообразии.*

Claim 11.3. *Пусть в* $\mathcal{A} \in \mathbf{Ab}$ *имеем комплекс* $K^\bullet$ *с двумя нетривиальными соседними когомологиями.*

$$H^n(K^\bullet) = \begin{cases} H^0, & n = 0 \\ H^1, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Комплекс такого вида классифицируется с помощью H^0*,* H^1 *и* $\mathrm{Ext}^2(H^1, H^0)$ *с точностью до* qis*.*

Hint: Под классификацией понимаются соответствующие классы эквивалентности квазиизоморфных комплексов в производной категории. Комплекс в производной категории будет квазиизоморфен комплексу с двумя нетривиальными членами[24] $0 \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow 0$.

Такой комплекс достаивается до комплекса $H^0 \longrightarrow K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow H^1 \in \mathrm{Ext}^2(H^1, H^0)$.
Любой qis задаёт эквивалентность расширений.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K^0 & \longrightarrow & K^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0 & \longrightarrow & H^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0 & \longrightarrow & K^0 & \longrightarrow & K^1 & \longrightarrow & H^1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\sim & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\sim & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0 & \longrightarrow & L^0 & \longrightarrow & L^1 & \longrightarrow & H^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Но также любая эквивалентность расширений будет давать квазиизоморфизм комплексов. Эквивалентность расширений задаётся последовательностью домиков, определяющую квазиизоморфизм комплексов.

$$\begin{tikzcd}
& & K^\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll, bend right] \arrow[ddrr, bend left] & & \\
& K^\bullet \arrow[dl] \arrow[drrr] & & L^\bullet \arrow[dlll] \arrow[dr] & \\
H^0[0] & & & & H^1[1]
\end{tikzcd}$$

def 11.4.

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, -) = L_n(A\otimes)(-)^{25}$$

$$\mathrm{Ext}^\bullet(A, -) \colon \mathcal{D}^\flat(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^\flat(\mathcal{A}) \vdash \mathrm{Tor}^\bullet(A, -) \colon \mathcal{D}^\flat(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^\flat(\mathcal{A})$$

Ex 11.5. $\mathcal{A} \in \mathbf{Ab}$

$$\mathrm{Tor}_n(\mathbb{Z}_p, A)$$

Для точного справа функтора выпишем проективную резольвенту

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot p} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

*Далее применим к ней ковариантный фунткто*р $\underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A(-)$ *и вычислим когомологии*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\cdot p} & A \\ & & \uparrow \\ & & 0 \end{array}$$

[24] строго-полное вложение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, обрезание комплексов

[25] $A \otimes (-)$– сопряженный слева к фуктору $\mathcal{H}om$, а значит он точен справа, значит у него есть левые производные

$$\mathrm{Tor}_0(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};A) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A = A/pA$$
$$\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};A) = \{a \in A | pa = 0\} \text{ – \textit{элементы порядка} } p$$

Ex 11.6. *Пусть* A *– конечно порождена, то есть имеет структуру* $A = (\underset{k}{\oplus}\mathbb{Z}^k) \oplus (\underset{i=1,N}{\oplus} \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})$. *Тогда* Tor *также будет раскладываться в сумму*

$$\mathrm{Tor}_1(A;B) = \underset{i=1,N}{\oplus} \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z};B)$$

Ex 11.7. *Если же* A*– произвольная группа, то она являеься пределом конечнопорждённых груп* $A = \varinjlim A_i$*, а также всегда представима в виде прямой суммы свободной группы и группы кручения* $A \cong \mathcal{T}A \oplus \mathcal{F}A \Rightarrow$ *если* A *– без кручения, то* $\mathrm{Tor}(A;B) = 0$.

def 11.8. A – **плоский** $\Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1(A;B) = 0,\ \forall\ B$.

Claim 11.9. *Плоские модули – приспособлены к функтору* $(-) \otimes B$ *(*$A \otimes (-)$*– точный).*

Claim 11.10. *Проективный модуль* $\Rightarrow$ *плоский.*

Claim 11.11. *Если* $\mathcal{R}$ *–* ***PID***[26] $\Rightarrow$ *(плоский)* $\Leftrightarrow$ *(без кручения).*

Claim 11.12.

$$A \in \mathbf{Ab}$$
$$\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Q}/\mathbb{Z};A) = \mathcal{T}A \text{ – \textit{кручение} } A$$
$$\varinjlim \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

[27]

Claim 11.13 ($\mathcal{T} = 0$, $\mathrm{Tor} \neq 0$)**.** *Рассмотрим пример, когда модуль без кручения над кольцом* $\mathcal{R} \neq$ ***PID****, имеет ненулевые* Tor. *Стандартным примером не* ***PID*** *является* $\mathcal{R} = \mathbf{k}[x,y]$. *Рассмотрим в нём модуль* $A = (x;y) \neq$ ***PI****. Напишем резольвенту Кошуля*

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}} \mathcal{R}\oplus\mathcal{R} \xrightarrow{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}} \mathbf{k} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}} \mathcal{R}\oplus\mathcal{R} \xrightarrow{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}} (x;y) \longrightarrow 0$$

Применяя функтор $\underset{k[x;y]}{\otimes} \mathbf{k}(-)$*, получаем комплекс с нулевыми морфизмами:*

$$0 \longrightarrow \mathbf{k} \xrightarrow{0} \mathbf{k}\oplus\mathbf{k} \xrightarrow{0} 0$$
$$\mathrm{Tor}_1(A,\mathbf{k}) = \mathbf{k} \neq 0$$

Ex 11.14 (кольцо с делителями нуля)**.** *Пусть* $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_m$*,* $M = \mathbb{Z}_d \in \mathcal{R}-\mathrm{mod}$*,* $d|m$.

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}_m \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}_m \xrightarrow{m/d} \mathbb{Z}_d \longrightarrow 0$$

Мы получили бесконечную циклическую проективную резольвенту.[28] *Применим к ней* $\underset{\mathbb{Z}_m}{\otimes} B(-)$*:*

$$\ldots \xrightarrow{\cdot d} B \xrightarrow{\cdot m/d} B \xrightarrow{\cdot d} B \longrightarrow 0$$

Теперь вычислим когомологии

$$\mathrm{Tor}_0(M;B) = B/dB$$
$$\mathrm{Tor}_{2k+1}(M;B) = \{b\ |\mathrm{ord}(b) = d\}\ /(m/d)$$
$$\mathrm{Tor}_{2k}(M;B) = \{b\ |\mathrm{ord}(b) = m/d\}\ /(d)$$

[26]КГИ

[27]при подстановке в Tor получаем прямой предел подгрупп элементов имеющий заднаный порядок для всех возможных порядков, то есть кручение группы. $\varinjlim$ учитывает пересечения всех таких подгрупп

[28]Наличие делителей нуля тесно связано с бесконечной глобальной размерностью.

11.1 Спектральные последовательности

Работаем, например в категории $\mathsf{Kom}(\mathcal{A})$. Будем говорить, что на объекте A задана убывающая регулярная фильтрация, то есть цепочка вложенных друг в друга подобъктов $A \supset \ldots F^pA \supset F^{p+1}A \supset \ldots$, которая обладает следующими свойствами:

- $\bigcap F^pA = 0$
- $\bigcup F^pA = A$

Тогда по такой последовательности можно построить **градуировочный фактор** $E^p = F^pA/F^{p+1}A$.
"Пристёгивание"факторов к подмодулю будем обозначать как $F^N \sqsupset E^{N-1} \sqsupset E^{N-2} \sqsupset \ldots$.
Вопрос: если известны все градуировочные факторы фильтрации, можем ли мы восстановить наш исходный объект?

def 11.15. Спектральной последовательностью является набор данных, состоящий из

- стопки листов с занумерованными клетками, в которых находятся объекты категории[29]
- дифференциала между объектами листа [30]
- изоморфизма между когомологиями и следующим листом
- морфизма из момента стабилизации когомологий в градуировочные факторы фильтрации

$$(E_r^{pq}, E^n, d_r^{pq}, \alpha_r^{pq}, \beta^{pq})$$
$$d_r^{pq}\colon E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$$
$$\alpha_r^{pq}\colon H_r^{pq}(E_r^{\bullet\bullet}) \to E_{r+1}^{pq}$$

Начиная с некоторого листа для любого члена все дифференциалы, которые бьют из него и в него зануляются, то есть

$$\forall (p,q) \quad \exists r_0\colon \forall r \geqslant r_0 \quad \hookrightarrow \quad d_r^{pq} = 0 \quad d_r^{p-r,q+r-1} = 0$$

Это означает, что когомологии с этого момента перестают меняться, а последовательность стабилизируется.
E^n – это комплекс, на котором задана убывающая регулярная фильтрация $\ldots \supset \ldots F^pE^n \supset F^{p+1}E^n \supset \ldots$.

$$E_{r_0}^{pq} = E_\infty^{pq}$$
$$\beta^{pq}\colon E_\infty^{pq} \to F^pE^{p+q}/F^{p+1}E^{p+q}$$

Спектральная последовательность сходится к градуировочным факторам фильтрации.

---

[29] r – номер листа, а pq – номер клетки
[30] бьёт обобщённым "ходом коня"

Приложение A
Расслоённые суммы и произведения

def A.1. Пусть в категории $\mathcal{C}$ дана пара морфизмов $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$. Расслоённым произведением (pullback) $X \prod_Z Y$ называется объект P и пара морфизмов $p_1 : P \to X$, $p_2 : P \to Y$, делающие диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

И обладающие следующим универсальным свойством. Для любого объекта Q с парой морфизмов $q_1 : Q \to X$, $q_2 : Q \to Y$, дополняющих (f, g) до коммутативного квадрата, существует единственный морфизм $u : Q \to P$, делающий диаграмму ниже коммутативной.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd} \tag{A.2}$$

Дуальным к нему будет понятие расслоенной суммы (pushout). В абелевой категории есть более простое и конструктивное описание. Чтобы показать это, воспользуемся следующей теоремой.

Thr A.2. *Расслоённое произведение можно выразить как уравнитель пары морфизмов из произведения* $X \prod Y$. *Тогда* $p_1 = \pi_X p$, $p_2 = \pi_Y p$.

$$\begin{tikzcd} X \prod_Z Y \arrow[r, "p"] & X \prod Y \arrow[r, shift left, "f\pi_X"] \arrow[r, shift right, "g\pi_Y"'] & Z \end{tikzcd}$$

Дуально, расслоённую сумму можно выразить как коуравнитель пары морфизмов из копроизведения $X \coprod Y$. *Тогда* $p_1 = p\pi_X$, $p_2 = p\pi_Y$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "i_Y g"] \arrow[r, shift right, "i_X f"'] & X \coprod Y \arrow[r, "p"] & X \coprod_Z Y \end{tikzcd}$$

Доказательство. Приведём доказательство для произведения. Доказательство для копроизвдения аналогично.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, dashed, "u"'] \arrow[ddr, dashed, "q"] \arrow[drr, "q_1"] \arrow[ddd, bend right=60, "q_2"'] & & \\ X \prod_Z Y \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, "p_2"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\ & X \prod Y \arrow[ur, "\pi_X"'] \arrow[dl, "\pi_Y"] & \\ Y \arrow[rr, "g"'] & & Z \end{tikzcd}$$

По определению уравнителя $f\pi_X p = g\pi_Y p$, откуда $fp_1 = f\pi_X p = g\pi_Y p = gp_2$ и диаграмма (A.1) коммутирует. Докажем универсальное свойство.

Пусть есть Q с двумя морфизмами q_1, q_2 такими, что $fq_1 = gq_2$. Из универсального свойсва произведения существует q такой, что $\pi_X q = q_1$ и $\pi_Y q = q_2$. Отсюда $f\pi_X q = g\pi_Y q$ и по универсальному свойству уравнителя получаем существование единственного u делающего диаграмму (A.2) коммутативной. ■

Corr A.3. *В абелевой категории расслоённое произведение является ядром морфизма* $h : X \oplus Y \to Z$, $h = f\pi_X - g\pi_Y$. *Иначе, в терминах модулей, это подмодуль* $X \oplus Y$ *такой, что* $f(x) = g(y)$.

$$X \prod_Z Y \sim \operatorname{Ker}(f\pi_X - g\pi_Y).$$

Дуально для расслоённой суммы.

$$X \coprod_Z Y \sim \operatorname{Coker}(i_X f - i_Y g).$$

Также в абелевой категории существуют все расслоённые суммы и произведения.

Доказательство. Напомним, что в абелевой категории:

- Произведение и копроизведение изоморфны.
- Уравнитель f, g изоморфен $\operatorname{Ker}(f - g)$.
- Все ядра и коядра существуют

Применение этих трёх фактов вместе с теоремой A.2 даёт желаемое утверждение. ■