Семинар 1
(Темы: Спектральная последовательность. Дополнительные примеры.)

Ex 1.1 (Элементарный пример, нефильтрованный). *Самым простым примером спектральной последовательности является любой комплекс* $\mathsf{K}_\bullet \in \mathsf{Kom}(\mathcal{A})$*. Он естественно имеет дифференциал* $\mathsf{d}_i^{\mathsf{K}} \colon \mathsf{K}_i \to \mathsf{K}_{i+1}$*, поэтому на нулевом листе* $\mathsf{d}_0 = \mathsf{d}^{\mathsf{K}}$*. Пусть* $\mathsf{E}_0^\bullet = \mathsf{K}_\bullet$*, тогда* $\mathsf{E}_1^\bullet = \mathsf{H}^\bullet(\mathsf{C}_\bullet)$*, дифференциал индуцирует нулевые отображения на когомологиях, поэтому на первом листе мы имеем* $\mathsf{d}_1 = 0$*. Из этого следует, что* $\mathsf{E}_2 = \mathsf{E}_\infty^\bullet$ *и* $\mathsf{d}_n = 0\ \forall\ n \geqslant 2$*, таким образом, получаем следующую спектральную последовательность:*

- $\mathsf{E}_0 = \mathsf{K}_\bullet$
- $\mathsf{E}_r = \mathsf{H}(\mathsf{K}_\bullet)\ \forall\ r \geqslant 1$

Такая спектральная последовательность стабилизируется на первом листе, так как нетривиальные дифференциалы присутствовали лишь на нулевом.

1.1 Доказательство леммы о змее с помощью спектральной последовательности

Докажем лемму о змее ??, используя спектральную последовательность. Диаграмма в этой лемме представляет собой двойной комплекс $\mathsf{C}^{\bullet\bullet}$ с точными строками в абелевой категории.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathsf{C}^{00} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathsf{C}^{10} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathsf{C}^{20} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{C}^{01} \arrow[r] & \mathsf{C}^{11} \arrow[r] & \mathsf{C}^{21} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Для такого комплекса существуют две спектральные последовательности, которые будут сходиться к когомологиям тотального комплекса $\mathsf{H}^{p+q}(\mathsf{Tot}(\mathsf{C}^{\bullet\bullet}))$.
Нулевые листы этих последовательностей, естественно, $\mathsf{E}_0^{pq} = \mathsf{C}^{pq}$ и $\mathsf{E}_0^{pq} = \mathsf{C}^{qp}$:

$$\begin{array}{|ccccc}
0 & \to & 0 & \to & 0 \\
\mathsf{C}^{20} & \to & \mathsf{C}^{21} & \to & 0 \\
\mathsf{C}^{10} & \to & \mathsf{C}^{11} & \to & 0 \\
\mathsf{C}^{00} & \to & \mathsf{C}^{01} & \to & 0 \\
0 & \to & 0 & \to & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|ccccccccc}
0 \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\
0 \to & \mathsf{C}^{00} & \to & \mathsf{C}^{10} & \to & \mathsf{C}^{20} & \to & 0 \\
0 \to & \mathsf{C}^{01} & \to & \mathsf{C}^{11} & \to & \mathsf{C}^{21} & \to & 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{|ccc}
0 & 0 & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\ker\gamma & \operatorname{Coker}\gamma & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\ker\beta & \operatorname{Coker}\beta & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\ker\alpha & \operatorname{Coker}\alpha & 0 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow \\
0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

1.2 Что-то о нётеровых кольцах

Несколько примеров фильтрации из коммутативной алгебры.

Ex 1.2 (Фильтрация кольца). *Убывающей мкльтипликативной фильрацией кольца* R *называется убывающая последовательность идеалов вида*

$$\mathsf{R} = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

Удовлетворяющая условию $I_i I_j \subset I_{i+j}\ \forall\ i, j$*. Эта конструкция чаще всего используется, в случае, когда* $I_j = I^j$ *– степени одного идеала* I*, это называется* I*-адической фильтрацией. В приложениях чаще всего встречается ситуация локального нётерова кольца и его максимального идеала.*
Полезно обобщить эту конструкцию на $\mathsf{R} - \mathsf{mod}$ *иизучать фильтрации модулей*

$$M \supset IM \supset I^2M \supset \dots$$

Однако, пересекая члены такой фильтрации с некоторым подмодулем $\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$ *в общем случае мы не получим* I-*адическую фильтрацию* M'.