Семинар 1

(Темы: Производный функтор, приспособленный класс объектов, выделенные треугольники)

Ранее мы ввели понятие приспособленного класса объектов $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ для точного слева (справа) функтора \mathcal{F} . Далее будем проводить все рассуждения для точного слева аддитивного функтора \mathcal{F} : $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между абелевыми категориями $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{Ab}$. $\mathcal{R} \subset \mathbf{Ob}(\mathcal{A})$ – приспособленный к \mathcal{F} класс объектов.

Claim 1.1. Если \Re – достаточно большой класс объектов, то для любого комплекса существует \Re -резольвента, то есть

$$\forall C^{\bullet} \subset \operatorname{Kom}^{+}(\mathcal{A}) \quad \exists R^{\bullet} \subset \operatorname{Kom}^{+}(\mathcal{R}) \colon \quad C^{\bullet} \stackrel{qis}{\sim} R^{\bullet}$$

Доказательство. Строим резольвенту. На первом шаге вложим нулевой член в некоторый объект из класса $\mathcal R$

$$0 \longrightarrow C^{0} \longrightarrow C^{1} \longrightarrow \dots$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \longrightarrow R^{0} \longrightarrow R^{0} \coprod_{C^{0}} C^{1} \longrightarrow R^{1} \longrightarrow \dots$$

$$\begin{matrix} C^{i} & \xrightarrow{d^{i}_{C}^{i}} & C^{i+1} \\ \downarrow^{\tau^{i}} & \downarrow & \downarrow^{t^{i+1}} \end{matrix}$$

$$R^{i} & \xrightarrow{Coker} d^{i-1}_{R} & \xrightarrow{p} Coker d^{i-1}_{R} \coprod_{C^{i}} C^{i+1} & \xrightarrow{R^{i+1}} R^{i+1}$$

$$C^{\overset{\left(\begin{matrix}\tau^{i}\\-d^{i}_{C}\end{matrix}\right)}{-d^{i}_{C}}}\operatorname{Coker} d^{i-1}_{R}\oplus C^{i+1} \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} d^{i-1}_{R}\coprod_{C^{i}}C^{i+1} \longrightarrow 0$$

Осталось проверить, что таким образом задан квазиизоморфизм комплексов.

▲epi

$$C^{\mathfrak{i}}\supset \mathsf{Z}^{\mathfrak{i}}(\mathsf{R}^{\bullet})\ni x\mapsto (\mathfrak{p}(x),0)\in \operatorname{Coker} d_{\mathsf{R}}^{\mathfrak{i}-1}\oplus C^{\mathfrak{i}+1}$$

$$\exists \widetilde{x} \in C^i \colon \quad \begin{pmatrix} \tau^i \\ -d^i_C \end{pmatrix} \widetilde{x} = \begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d^i_c \widetilde{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{x} \in \mathsf{Z}^i(C^\bullet)$$

▲mono

$$C^{\mathfrak{i}}\supset B^{\mathfrak{i}-1}(C^{\bullet})\ni x\mapsto d_{C}^{\mathfrak{i}}(x)=0\in C^{\mathfrak{i}+1}\mapsto (0,0)\in \operatorname{Coker} d_{R}^{\mathfrak{i}-1}\oplus C^{\mathfrak{i}+1}\Rightarrow d_{R}^{\mathfrak{i}}t^{\mathfrak{i}}(x)=0\Rightarrow t^{\mathfrak{i}}(x)\in B^{\mathfrak{i}-1}(R^{\bullet})$$

Продолжим построение производного функтора. Ранее было отмечено, что если \mathcal{F} – точный, то приспособленным классом являются все объекты нашей категории. Продолжим рассуждение для точного слева функтора между абелевыми категориями. Почленным действием он продолжается до точного функтора в категории комплексов и гомотопической категории.

$$\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$$

$$\mathsf{Kom}^+\mathcal{F}\colon\mathsf{Kom}^+(\mathcal{A})\to\mathsf{Kom}^+(\mathcal{B})$$

$$\mathcal{K}^+\mathcal{F}\colon\mathcal{K}^+(\mathcal{A})\to\mathcal{K}^+(\mathcal{B})$$

Однако, вообще говоря, функтор не обязан сохранять квазиизоорфизмы. Поэтому продление на прозводную категорию мы будем организовывать следующим образом: комплекс мы будем заменять на квазиизоморфный ему комплекс с приспособленными членами и уже на этот комплекс будем действовать функтором почленно. Так мы получим производный функтор.

$$\mathcal{D}^+\mathcal{F}: \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$$

План действий:

• Локализация гомотопической категории приспособленных объектов по квазиизоморфизмам эквивалентна про-

изводной категории
$$\mathcal{K}^+(\mathcal{R})[QIS_{\mathcal{R}}^{-1}]$$
 $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$

• $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[QIS^{-1}_{\mathcal{R}}] \longrightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$

Lem 1.2. Пусть $\mathfrak C$ – категория, S – локализующее семейство, $\mathfrak B$ – полная подкатегория в $\mathfrak C$. Пусть также

- 1. $S_{\mathfrak{B}} = S \cap \mathbf{Mor}(\mathfrak{B})$ локализующее семейство в \mathfrak{B} .
- 2. У любого морфизма, заканчивающегося на объекте подкатегории В мы можем поправить начало так, чтобы он начинался тоже в В.

$$\begin{array}{cccc} X' & & & & \\ & t & & & s & \\ & X'' & \longrightarrow & X & \\ & X'' & \longrightarrow & X & \\ \forall s \in S & s \colon X' \to X & & \exists t \in S & t \colon X'' \to X' & st \in S_{\mathcal{B}} \end{array}$$

2' У любого морфизма, начинающегося на объекте подкатегории ${\mathbb B}$ мы можем поправить начало так, чтобы он заканчивался тоже в ${\mathbb B}.^1$

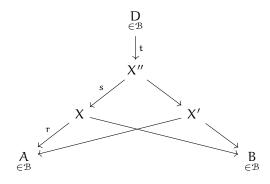


Тогда имеется строгое и полное вложение $\mathfrak{B}[S_\mathfrak{B}^{-1}] \hookrightarrow \mathfrak{C}[S^{-1}]$

Доказательство.

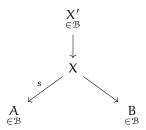
$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{\mathcal{B}}[S_{\operatorname{\mathcal{B}}}^{-1}]}(A,B) \cong \operatorname{Hom}_{\operatorname{\mathcal{C}}[S^{-1}]}(A,B)$$

Amono(inj) Покажем, что, если два морфизма представлялись эквивалентными домиками в $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}]$, то они останутся эквивалентными в $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Изобразим последовательность домиков на диаграмме.



$$rs \in S \quad A \in \mathfrak{B} \quad \Rightarrow \quad \exists D \subset \mathfrak{B} \quad D \xrightarrow{t} X'' \quad rst \in S$$

▲ері(surj) То есть любой домик, полностью лежащий в В поднимается в объемлющую категорию С



 $^{^{1}}$ и тогда в доказательстве нужно будет применять левые домики

Теперь применим 1.2 для $\mathcal{A}=\mathfrak{K}^+(\mathcal{A})$ и $\mathfrak{B}=\mathfrak{K}^+(\mathfrak{R})$ и $S=QIS_{\mathcal{A}}.$ Тогда

Claim 1.3. $\exists \psi \colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[QIS^{-1}_{\mathcal{R}}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ – эквивалентность категорий.²

 $^{^2\}Phi$ унктор взятия резольвенты

def 1.4. Производный функтор точного слева \mathcal{F} , действующего между двумя абелевыми категориями – это **пара** $(\mathcal{D}^+\mathcal{F}, \epsilon_{\mathcal{F}})$ точного в смысле производной категории 3 функтора и естественного преобразования композиций функтора \mathcal{F} с функторами локализации $\epsilon_{\mathcal{F}} \colon Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^+\mathcal{F} \to \mathcal{D}^+\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}}$, обладающая следующим универсальным свойством для любого точного в смысле производной категории функтора G:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}^{+}(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\mathcal{K}^{+}\mathcal{F}} & \mathcal{K}^{+}(\mathcal{B}) \\
Q_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow Q_{\mathcal{B}} \\
\mathcal{D}^{+}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{D}^{+}\mathcal{F}} & \mathcal{D}^{+}(\mathcal{B}) \\
& & & & & & & \downarrow \\
Q_{\mathcal{B}}\mathcal{K}^{+}\mathcal{F} & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} & \mathcal{D}^{+}\mathcal{F}Q_{\mathcal{A}} \\
\downarrow \exists ! \eta \\
& & & & \downarrow \\
G
\end{array}$$

Com 1.5. Очевидно, что $D^+\mathcal{F}$ – единственный.

Thr 1.6. Если точный слева функтор допускает класс приспособленных объектов \mathbb{R} , то $\exists ! \ (\mathbb{D}^+ \mathfrak{F}, \epsilon_{\mathfrak{F}}).$

Построение. На этом шаге мы показываем **точность в смысле производной категории**. Будем использовать полученную ранее эквивалентность категорий $\psi \colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}^{-1}_{\mathcal{R}}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, обратную $\phi \colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}^{-1}_{\mathcal{R}}]$ и два естественных изоморфизма $\alpha \colon \mathrm{Id} \to \phi \circ \psi$ и $\beta \colon \psi \circ \phi \to \mathrm{Id}$. Мы определим вспомогательный функтор $\widetilde{\mathcal{F}} \colon \mathcal{K}^+(\mathcal{R})[\mathrm{QIS}^{-1}_{\mathcal{R}}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ просто почленным действием, а производный функтор как $\mathcal{D}^+\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}} \circ \phi$.

1. Точность $\mathcal{D}^+\mathcal{F}^5$

Lem 1.7. Пусть Δ – треугольник в локализованной гомотопической подкатегории приспособленных объектов. Предположим, что он изоморфен выделенному треугольнику в производной категории⁶. Тогда он будет изоморфен выделенному треугольнику в локализованной гомотопической подкатегории приспособленных объектов.

$$\mathcal{K}^+(\mathcal{R})[QIS^{-1}]\ni\Delta\cong\Delta'\in\mathcal{D}(\mathcal{A})\quad\Rightarrow\quad\Delta\cong\widetilde{\Delta'}\in\mathcal{K}^+(\mathcal{R})[QIS^{-1}]$$

Доказательство.

Пусть морфизм ф представляется в производной категории домиком

$$X$$
 q
 r
 Y

Тогда существует морфизм между конусами

$$Y \oplus S[1] = C(r) \xrightarrow{(\psi, \phi, q)} C(f) = \widetilde{Y} \oplus \widetilde{X}[1]$$

Теперь можем построить изоморфизм треугольников

$$\Rightarrow \mathcal{D}^+\mathcal{F}$$
 – точный.

³то есть переводящего выделенные треугольники в выделенные

 $^{^4}$ "единица и коединица сопряжения"

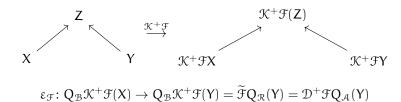
⁵в смысле производной категории

 $^{^6}$ Так как мы не вводили понятия треангулированной категории, то для нас просто треугольником будет набор из трёх объектов и трёх морфизмов, а выделенным треугольником будет такой набор, где $Z = C(X \to Y)$

2. *Построение* $\varepsilon_{\mathcal{F}}$, единственность. Для построения естественного изоморфизма, возьмём некоторый комплекс, вложим его в производную категорию и выберем его резольвенту, подбором квазиизоморфного ему. То есть

$$X \in \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \quad Y = \varphi Q_{\mathcal{A}}(X)$$

Квазиизоморфизм $\beta\colon X\to \psi\varphi(X)=\psi(Y)$ представляется домиком



Далее мы проверим, что таким образом опредлённый морфизм является естественным преобразованием функторов и не зависит от выбора Z.

3. Универсальность to be continued...