Курсовая работа. Теория меры. Эргодическая теорема и Максимальная эргодическая теорема

Гурьева С.Д.

ФОПФ, МФТИ

Весна 2022

С другой стороны, если физический мир можно мыслить как образованный исчислимыми группами, плывущими наподобие touche volantes по затаённому фону, лежащему за границами физики, тогда конечно смиренное ограничение своих интересов измерением измеримого отдаёт всепокорнейшей тщетой.

Владимир Набоков
"Под знаком незаконнорождённых"

Основная асимптотическая проблема эргодической теории сводится к изучению предельного поведения средних вида:

$$A_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j \text{,где } T\text{- сохраняющее меру преобразование вероятностного пространства.}$$

Называемых *эргодическими средними.* В книге Халмоша П. "Лекции по эргодической теории"(Lectures on Ergodic Theory), например, представлены доказательства Ф. Рисса сходимости в среднем(Статистическая эргодическая теорема) и точечной сходимости почти всюду (Индивидуальная эргодическая теорема) таких средних. Доказательство индивидуальной эргодической теоремы включает в себя Максимальную эргоддическую теорему.
Далее будет сделан разбор доказательства, приведённого в заметке "Easy and nearly simultaneous proofs of the Ergodic Theorem and Maximal Ergodic Theorem". Авторы доказывают утверждение о неотрицательности интеграла вида $\int_{\{f^*>\lambda\}}(f-\lambda)$, которое при выборе нужного вида инвариантной функции λ сводится как к максимальной так и к индивидуальной теоремам. Таким образом, получается одновременное доказательство ИЭТ и МЭТ, которые являются следствиями упомянутого ранее утверждения.
Хотелось бы также привести несколько примеров сохраняющих меру и эргодических систем.

Содержание

1 Теорема и Следствие

Приводится короткое доказательство усиленной МЭТ из которого немедленно следует ИЭТ.

Теорема 1.1. *Пусть*
$(X, \mathcal{B}, \mu)$ *– вероятностное пространство.*
$T : X \to X$ *– сохраняющее меру* μ *преобразование.*
$f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ *– интегрируемая на* X *по мере* μ *функция.*
$\lambda : \lambda \circ T = \lambda$ $(\dot{\forall}_\mu x \in X)$ *– инвариантная почти всюду на* X *функция,* $\lambda^+ \in L^1$
Пусть также:

$$A_k f = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} f T^j$$

$$f_N^* = \sup_{1 \le k \le N} A_k f$$

$$f^* = \sup_N f_N^*$$

$$\overline{A} = \lim_{k \to \infty} \sup A_k f$$

Тогда:

$$\boxed{\int_{\{f^* > \lambda\}} (f - \lambda) \ge 0} \tag{1}$$

Когда λ - константа, следующие результаты являются МЭТ, положив же $\lambda = \overline{A} - \varepsilon$ мы получим значительную часть доказательства ИЭТ.

Доказательство. Шаг 0: Предполагая, что λ интегрируема на множестве, где она ограничена f^*(иначе интеграл (1) равен $\infty \ge 0$) можем получить, что она интегрируема на всём X

$$\lambda \in L^1(\{f^* > \lambda\}) \Rightarrow \lambda \in L^1(X)$$

$\triangleright$.

$$\begin{aligned} \int_X |\lambda| \, d\mu = \int_{\{f^* > \lambda\}} |\lambda| \, d\mu + \int_{\{f^* \le \lambda\}} |\lambda| \, d\mu \\ |\lambda| = \lambda^+ + \lambda^- \\ \dot{\forall} x \in \{f^* \le \lambda\} \\ \dot{\forall} x \in X : f^* \underset{\forall N}{\ge} f_N^* \underset{N=1}{=} f \in L^1(X) \\ \Rightarrow f(x) \le \lambda(x) = \lambda^+(x) - \lambda^-(x) \Rightarrow \lambda^- \le -f + \lambda^+ \end{aligned}$$

$\square$

Шаг 1: Рассмотрим сначала случай, когда $f \in L^\infty(X)$. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и определим $E_N = \{f_N^* > \lambda\}$

$$x \notin E_N \Rightarrow (f^* - \lambda)(x) \le 0 \Rightarrow /f \le f^* \le \lambda/ \Rightarrow (f - \lambda)(x) \le 0 \Rightarrow \tag{*}$$
$$\Rightarrow \boxed{(f - \lambda)\chi_{E_N} \ge (f - \lambda)}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (f - \lambda)\chi_{E_N}(T^k x) \quad m >> N \tag{+}$$

Используя (*) можно разбить сумму (+) следующим образом:
сначала могут идти слагаемые, равные 0

$$T^k x \notin E_N \Rightarrow \chi_{E_N}(T^k x) = 0$$

Затем в какой-то момент может случиться, что мы всё-таки попадаем в E_N ($\exists k_0 : T^{k_0}x = x_1 \in E_N$). Теперь начнутся другие $h \leq N$ слагаемых(тот h на котором достигается супремум в определении f_N^*)

$$\forall x \in E_N \quad f_N^* x = A_h f x = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{h-1} fT^j x > \lambda x$$

$$\sum_{j=0}^{h-1} fT^j x > h \cdot \lambda x$$

$$\sum_{j=0}^{h-1}(fT^j - \lambda)x > 0 \qquad x \in E_N$$

То есть сумма этих слагаемых положительна. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока слагаемые не кончатся на моменте m, для которого $\chi_{E_N}(T^m x) = 0$ или же $\chi_{E_N}(T^m x) \neq 0$.
Теперь $\exists j = m - N + 1, ..., m$:

$$\sum_{k=0}^{m-1}(f-\lambda)\chi_{E_N}(T_x^k) \geq \sum_{k=j}^{m-1}(f-\lambda)\chi_{E_N}(T^k x) \geq -N(\|f\|_\infty + \lambda^+(x))$$

Первая оценка выполнена, так как сумма всех членов до момента j будет неотрицательна. Каждое из оставшихся N слагаемых мы можем оценить снизу $-(\|f\|_\infty + \lambda^+)$. Проинтегрируем левую и правую часть полученной оценки:

$$m\int_X (f-\lambda) \geq -N \cdot \int_X (\|f\|_\infty + \lambda^+(x)) \underset{\mu(X)=1}{\Rightarrow} m\int_{E_N}(f-\lambda) \geq -N \cdot (\|f\|_\infty + \|\lambda^+\|_1)$$

$$\int_{E_N}(f-\lambda) \geq \frac{-N}{m} \cdot (\|f\|_\infty + \|\lambda^+\|_1) \underset{m\to\infty}{\rightarrow} 0$$

$E_N \underset{N\to\infty}{\rightarrow} \{f^* > \lambda\}$. Таким образом, доказательство для $f \in L^\infty(X)$ завершено.
Шаг 2: Докажем теперь для $f \in L^1(X)$. Для этого мы приблизим её функциями из $L^\infty(X)$ вида:

$$\phi_s = f \cdot \chi_{\{|f| \leq s\}} \qquad s \in \mathbb{N}$$

$$\phi_s \underset{s\to\infty}{\rightarrow} f \qquad \dot{\forall} x \in X$$

Тогда для фиксированного N мы можем приблизить f_N^* почти всюду:

$$(\phi_s)_N^* \underset{s\to\infty}{\rightarrow} f_N^* \qquad \dot{\forall} x \in X$$

$$\mu(\{(\phi_s)_N^* > \lambda\} \setminus \{f_N^* > \lambda\}) \underset{s\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Таким образом получается:

$$0 \leq \int_{\{(\phi_s)_N^* > \lambda\}}(\phi_s - \lambda) \underset{s\to\infty}{\rightarrow} \int_{\{f_N^* > \lambda\}}(f-\lambda) \underset{N\to\infty}{\rightarrow} \int_{\{f^* > \lambda\}}(f-\lambda)$$

□

Следствие 1.1.1. $(A_k f)$ *сходится почти всюду.*

Доказательство. Если удастся показать, что

$$\int \overline{A} \leq \int f \tag{**}$$

То можно также получить для $\underline{A} = \liminf_{k\to\infty} A_k f$, $-f$ и $\overline{A}(-f) = -\underline{A}$ следующее

$$\int \underline{A} \geq \int f$$

Тогда получается утверждение о сходимости

$$\int \overline{A} \le \int f \le \int \underline{A} \le \int \overline{A} \Rightarrow \int (\overline{A} - \underline{A}) = 0 \Rightarrow \overline{A} = \underline{A} \qquad \dot{\forall} x \in X$$

и , собственно, об интегрируемости.
Авторы получают оценку (**) приближая $\overline{A}(f^+)$ последовательностью инвариантных функций $\lambda_n = \min(\overline{A}(f^+), n) - 1/n$.

$$\overline{A}(f^+) \stackrel{?}{=} T \circ \overline{A}(f^+)$$

$\triangleright$.

$$\sum_{i=l}^{u} fT^j \stackrel{\text{def}}{=} F_l^u, \quad fT^j \stackrel{\text{def}}{=} f_j$$

$$\begin{aligned}
\overline{A}(f^+x) = b(x) \Rightarrow \\
\Rightarrow \forall \varepsilon_0 > 0 \quad \exists N_0 : A_n f^+(x) = \frac{F_0^{n-1}}{n} = \frac{f_0}{n} + \frac{F_1^n}{n} - \frac{f_n}{n} < b(x) + \varepsilon_0 \Rightarrow \\
\Rightarrow A_n f^+(Tx) = \frac{F_1^n}{n} < b(x) + \varepsilon_0 + \frac{f_n - f_0}{n} < b(x) + \varepsilon_0 + \frac{\max_{X \setminus N} f - f_0}{n} \quad \forall n > N_0 \\
\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N_1 > N_0 : \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_0 + \frac{M(x)}{n} \quad \forall n > N_1 \Rightarrow \\
\Rightarrow \forall \varepsilon_1 \quad \exists N_1 : \quad A_n f^+(Tx) < b(x) + \varepsilon_1 \quad \forall n > N_1 \Rightarrow \\
\Rightarrow \overline{A}(f^+Tx) = b(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Последовательность приближает предельную функцию снизу, то есть

$$\lambda_n < \overline{A} \le f^* \Rightarrow \{(f^+)^* \ge \lambda_n\} = X \qquad \forall n \in N$$

По теореме 1.1 интеграл от инвариантных функций последовательности будет ограничен интегралом от $f^+ \in L^1(X)$

$$\int f^+ \ge \int \lambda_n \to \int \overline{A}(f^+) \ge \int (\overline{A})^+$$

Аналогично можно получить оценку $\int (\overline{A})^-$ и далее, применяя теорему 1.1 для $\lambda = \overline{A} - \varepsilon$, получим, что:

$$\int_{\{f^* > \overline{A} - \varepsilon\}} (f - \overline{A} + \varepsilon) \ge 0$$

$$\int f \ge \int \lambda_n \to \int \overline{A}$$

$\square$

1.1 Комментарий

Можно заметить следующее свойство конструкции, используемой в доказательстве

$$\begin{aligned}
(f - \lambda)^* \stackrel{?}{=} f^* - \lambda \\
\lambda \text{ -- } T\text{-инвариантна } T \circ \lambda = \lambda \qquad \dot{\forall} x \in X \\
\Rightarrow A_k f = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (f - \lambda) T^j x = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} (f) T^j x - k \cdot \lambda(x) \right) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (f - \lambda) T^j x = A_k f - \lambda_0) \\
\lambda_0 = \text{const для каждого фиксированного } x \Rightarrow \sup_{1 \le k \le N} (A_k f - \lambda_0) = \sup_{1 \le k \le N} (A_k f) - \lambda_0 \\
\Rightarrow (f - \lambda)^* = f^* - \lambda
\end{aligned}$$

Это замечание, как мне кажется, имеет связь со следующим вариантом эргодической теоремы:

Теорема 1.2 (эргодическая теорема Фон Нейнмана).

$$(U : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ - унитарный}) \Rightarrow \left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n v = \pi(v), \forall v \in \mathcal{H} \right)$$

$\pi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^U$ - ортогональная проекция $\mathcal{H}$ на замкнутое подпространство $\mathcal{H}^U \overset{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{H} : Uv = v\}$ векторов, инвариантных относительно U.

Доказательство. Шаг 0: $\sqsupset f \in \mathcal{H}^U$

$$Uf = f \Rightarrow A_k f \to f$$

Шаг 1: $\sqsupset G \overset{\text{def}}{=} \{Ug - g : g \in \mathcal{H}\}$, $f \in G$

$$\sqsupset f = Ug - g,\, g \in \mathcal{H}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} U^j (Ug - g) = \sum_{j=0}^{n-1} U^{j+1} g - U^j g = U^n g - g$$

$$\|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j f\| \leq \frac{2}{n} \|g\| \to 0$$

Теперь рассмотрим замыкание G.

$$\underset{\in G}{f_k} \overset{\mathcal{H}}{\to} \underset{\in \overline{G}}{f}, \quad A_n f_k \overset{\mathcal{H}}{\to} 0 \quad \forall k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n f \overset{\mathcal{H}}{\to} 0$$

$\triangleright$.

$$\|A_n f\| \leq \|A_n (f - f_k)\| + \|A_n f_k\| \leq C \cdot \|f - f_k\| + \|A_n f_k\| < \varepsilon(k) + \varepsilon(n)$$

$\square$

Шаг 2: $\overline{G}^{\perp} = G^{\perp} \subseteq \mathcal{H}^U$

$$\forall h \in G^{\perp} \qquad \langle h, g - Ug \rangle \Rightarrow \langle h, g \rangle - \langle U^* h, g \rangle = 0 \Rightarrow \langle h - U^* h, g \rangle = 0 \qquad \forall g \in \mathcal{H}$$

$$h = U^* h \Rightarrow Uh = h$$

$$\Rightarrow h \in \mathcal{H}^U$$

$G^{\perp} \supseteq \mathcal{H}^U$

$$\forall h \in \mathcal{H}^U \qquad Uh = h \Rightarrow \rangle h, Ug - g \langle = \langle U^* h, g \rangle - \langle h, g \rangle = \langle h, g \rangle - \langle h, g \rangle = 0$$

$$\Rightarrow h \in G^{\perp}$$

Шаг 3: На предыдущих шагах доказано, что $\overline{\mathcal{H}^U + G} = \mathcal{H}$

$$\forall f \in \mathcal{H} \quad \exists \underset{\in \mathcal{H}^U}{f_1}, \underset{\in \overline{G}}{f_2} \quad : \quad f = f_1 + f_2$$

$\square$

Следствие 1.2.1 (эргодическая теорема о сходимости в среднем(квадратичном)).

$$(\sqsupset f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu), f \mapsto Tf \text{ – унитарное преобразование сдвига}) \Rightarrow (A_N f \underset{L^2}{\to} \pi(f))$$

$\pi(f) : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to L^2(X, \mathcal{B}, \mu)^T$ ортогональная проекция на пространство функций инвариантных относительно сдвига.

Следствие 1.2.2 (частичная эргодическая теорема Фон Нейнмана). *$A_N f$ образуют фундаментальную последовательность в $\mathcal{H}$*

В случае вероятностной меры $L^2 \subset L^1$, L^2 - гильбертово. Из сходимости в L^2 будет следовать сходимость в L^1. Напомним формулировки теорем о компактности и секвенциальной компактности в двойственном пространстве, которые понадобятся в доказательстве теоремы о сходимости эргодических средних в слабой топологии.

Теорема 1.3 (Banach-Alaouglu). *Замкнутые единичные шары в двойственном пространстве нормированного векторного пространства - компакты в *-слабой топологии.*

Теорема 1.4 (секвенцикальная компактность). *Замкнутый единичный шар в двойственном пространстве сепарабельного нормированного векторного пространства – секвенциальный компакт в *-слабой топологии.*

Теорема 1.5 (слабая эргодическая теорема Фон Нейнмана). *Сходимость 1.2 имеет место в слабой топологии(скалярно произведение непрерывно).*

Доказательство. $\forall\ N A_N v \in K$, K - ограниченное подмножество сепарабельного $\mathcal{H} \underset{1.4}{\Rightarrow} K$ - предкомпакт в слабой топологии(его замыкание - компакт). Предположим, что требуемое не выполнено и существует подпоследовательность $A_{Nj} v \xrightarrow{w} w \neq \pi(v)$

$$\|UA_{Nj}v - A_{Nj}v\| \leq \frac{2\|v\|}{N_j}$$
$$\|Uw - w\| = 0 \Rightarrow w \in \mathcal{H}^U$$

$$\begin{aligned}
\sqsupset y \in \mathcal{H}^U &\Rightarrow A^*_{Nj} y = y \\
\langle y, A_{N_j} v\rangle &= \langle y, v\rangle \\
\langle y, w\rangle &= \langle y, v\rangle \\
\langle y, w - v\rangle = 0 \Rightarrow w - v \in (\mathcal{H}^U)^\perp &\Rightarrow w = \pi(v)
\end{aligned}$$

□

2 Доказательство теоремы Пуанкаре о возвращении через эргодическую

Докажем теорему Пуанкаре о возвращении, используя эргодическую теорему.
Будем доказывать следующую формулировку теоремы о возвращении:

Теорема 2.1. *Пусть*
$(X, \mathcal{B}, \mu)$ *– вероятностное пространство.*
$T : X \to X$ *– сохраняющее меру* μ *преобразование.*
Пусть $A \subset X$ *— измеримое множество,* $\mu(A) > 0$
Тогда для некоторого натурального N

$$\mu(\{x \in A \colon \{T^n(x)\}_{n \geqslant N} \subset (X \setminus A)\}) = 0$$

Доказательство. Обозначим E множество точек, покидающих A. Применим теорему для $f = -1_E$ и $\lambda = \overline{A} - \varepsilon$

$$\int_{\{f^* > \overline{A} - \varepsilon\}} (-1_E + \varepsilon) \geq 0$$

$$x \in E \Rightarrow \overline{A} = \underline{A} = 0$$
$$f_N^* = \sup_{1 \leq k \leq N} (-A_k f) = - \inf_{1 \leq k \leq N} A_k f \Rightarrow f^* = \sup_N (- \inf_{1 \leq k \leq N} A_k f) = - \inf_N (\inf_{1 \leq k \leq N} A_k f) = 0 \Rightarrow \{f^* \geq -\varepsilon\} = X$$

$$\int (-1_E + \varepsilon) = -\mu(E) + \varepsilon \geq 0 \Rightarrow \mu(E) < \epsilon \Rightarrow \mu(E) = 0$$

□

3 Примеры

3.1 Конечный случай

Пусть $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ - конечная система, μ - равномерное вероятностное распределение, сохраняющее меру преобразование T - это перестановка. Перестановка может быть представлена в виде графа, разделимого на несвязные циклы c. Инвариантные относительно T функции - это константы на таких циклах.

$$\forall x \in X : \mu(x) = 1/|X|, \qquad |X| < \infty$$
$$c \overset{def}{=} \{x \quad |\forall n \quad T^n(x) \in c\}$$

Эргодические средние $A_k f$ будут сходиться к средним значениям функции на циклах $\overline{f}_c$.

$$\forall x \in c \quad T^{|c|-1}x = x \Rightarrow A_{k=|c|}f(x) = \frac{1}{|c|}\sum_{x\in c} f(x) = \overline{f}_c$$
$$\lim_{k\to\infty} \mu(x \in X : |A_k f(x) - \overline{f}_{c\ni x}(x)| > \varepsilon) \to 0$$
$$\forall k = n \cdot |c| + l \qquad 0 \le l < |c| - 1$$

$$\left|A_k f(x) - \overline{f}_{c\ni x}\right| = \left|\frac{\cancel{n \cdot \sum_{i=0}^{|c|-1} f(x_i)} + \sum_{i=0}^{l} f(x_i) - \cancel{n \cdot \sum_{i=0}^{|c|-1} f(x_i)} - \frac{l}{|c|}\sum_{i=0}^{|c|-1} f(x_i)}{n \cdot |c| + l}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{|c|-1} f(x_i) \frac{\frac{\sum_{i=0}^{l} f(x_i)}{\sum_{i=0}^{|c|-1} f(x_i)} - \frac{l}{|c|}}{n|c|+l}\right| \le \overline{f}_c \frac{2}{k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

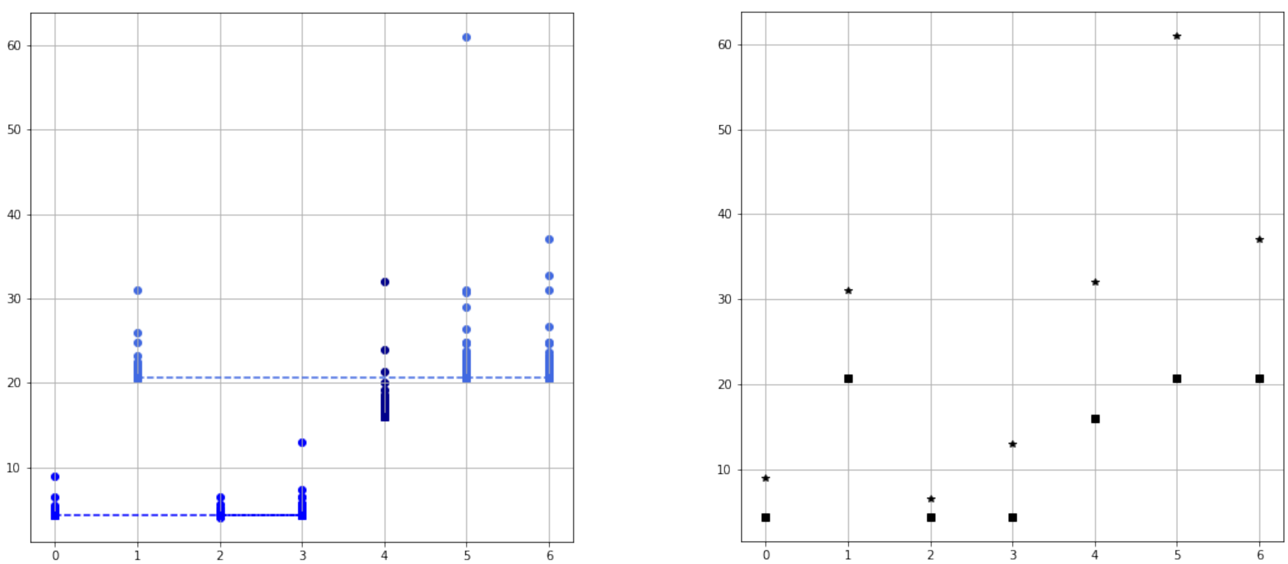
Для примера рассмотрим μ-интегрируемую относительно $\mathcal{B} = \sigma(\{x\}, x \in X)$ функцию

$$f : X \to \{x^2 | x \in X\} \qquad \int_X f d\mu = \sum_{x\in X} f(x)\mu(x) = \overline{f}_X$$

Ниже представлен код для вычисления элементов последовательности $A_k f$.

```
#функция поиска в глубину в графе
def dfs(adjacency, vertex, visited = None, path = None):
    if visited is None:
        visited = set()
    if path is None:
        path = []
    visited.add(vertex)
    path.append(vertex)
    if vertex in adjacency:
        for neighbor in adjacency[vertex]:
            if neighbor not in visited:
                dfs(adjacency, neighbor, visited, path)
    return path

#функция поиска циклов в графе
def cicle_search(graph, v):
    cicle = dict()
    visited=set()
    for vi in v:
        if vi in visited: continue
        else:
            cicle[vi] = dfs(graph, vi)
            for vj in cicle[vi]: visited.add(vj)
    return [c for c in cicle.values()]

# преобразование T
def T(x):
    return (2*x + 3)%7

#заданная на X функция
def f(x):
    return x**2

# k-e эргодическое среднее функции f с преобразованием T на множестве точек X
def Akf(f, T, k, X):
    #T^0(X), f(X)
    Tj_X = X.copy()
    fTj = f(Tj_X)
    for j in range(1, k):
        #T^n(X), \sum_{j=1}^{n-1}f(T^j X)
        Tj_X = T(Tj_X)
        fTj+=f(Tj_X)
        # j-e эргодическое среднее
        Akf = fTj/j
    return Akf
```

```python
#задание графа преобразования
X = np.array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6])
graph = dict()
for x in X:
    graph[x] = [T(x)]
#поиск циклов
cicles = cicle_search(graph, X)
print(cicles)
#[[0, 3, 2], [1, 5, 6], [4]]
#построение изображения
# свой цвет для каждого цикла
cicle_colors = ['b', 'royalblue', 'darkblue']
# момент до которого вычисляем
K = 61
for k in range(2, K):
    Anf = Akf(f, T, k, X)
    for i, c in enumerate(cicles):
        plt.scatter(c, Anf[c], color = cicle_colors[i])
#просто среднее значение f на цикле
for i, c in enumerate(cicles):
    av = sum(f(np.array(c)))/len(c) # сумма значений функции на цикле разделённыя на длину цикла
    cav_ = np.full(len(c), av)
    plt.plot(c, cav_, marker = 's', linestyle = '--', color = cicle_colors[i])
```



(a) $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$
$T(x) = (2x+3) \mod 7$, $T = (0,3,2)(1,5,6)(4)$

(b) ■ $\lim A_k f = \sum_c \overline{f}_c \chi_c$
★ $f^*_{N=60}$

3.2 Статистика первых цифр геометрической прогрессии

С помощью эргодической теоремы можно получить распределение первых цифр геометрической прогрессии, например - степеней двойки 2^n.
Теперь $X = [0, 1]$, μ - мера Лебега. $T_\theta x = (\theta + x) \mod 1$, где $\theta = \log_{10} 2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.
Значение первой цифры i числа 2^n определяется попаданием $\log_{10} 2^n \mod 1$ в интервал $[\log_{10}(i), \log_{10}(i+1))$. Следовательно её вероятность определяется мерой этого интервала.
Рассмотрим последовательность эргодических средних для характеристических функций таких интервалов. В числителе будет стоять число "попаданий"образа точки в интервал, а само значение элемента $A_N f(x)$ характеризует долю всех образов, попавших в интервал до момента N. Множество $\{T_\theta^n x\}_{n=0}^{\infty}$ - всюду плотно в X, то есть в пределе мы получим меру интервала.

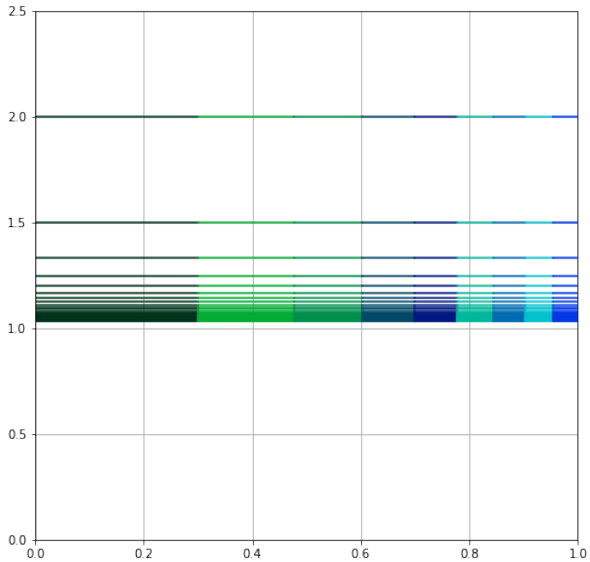
$$\forall x \in X \quad \{T_\theta^n x, \forall n \in \mathbb{N}\}^c = X$$

$$I_i = [\log_{10}(i), \log_{10}(i+1)) \qquad \bigcup_{i=1}^{9} I_i = [0, 1) \qquad f_i = \chi_{I_i}$$

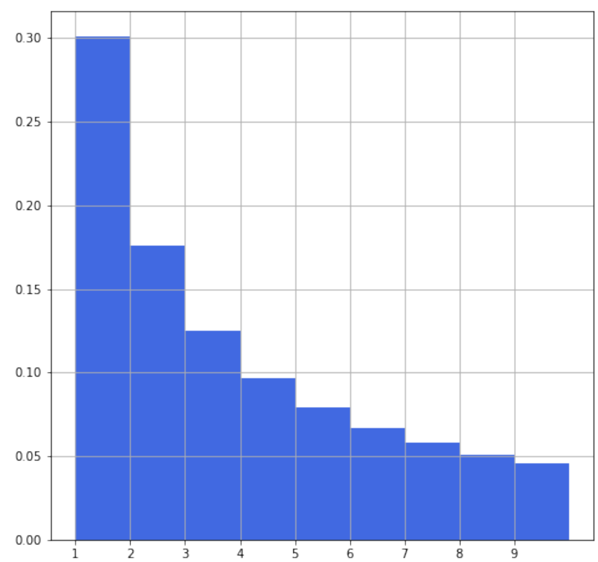
$$A_N f_i = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{I_i}(T^j x)$$

$$\lim_{N \to \infty} A_N f_i = \mu(I_i) = \log_{10}(i+1) - \log_{10}(i)$$

```
#преобразование
def T2(x): return (x+np.log10(2))%1
#характеристическая функция
def f2(x): return np.full(len(x), 1)
def Xi(i): return np.linspace(np.log10(i),np.log10(i+1), 10)
# момент до которого вычисляем
K = 30
for i in range(1, 10):
    # цвет для характеристической функции нужного отрезка
    c1 = i/10
    c2 = np.random.rand()
    for k in range(2, K):
        Anf = Akf(f2, T2, k, Xi(i))
        plt.plot(Xi(i), Anf, color = (0, c2, c1))
```



(a)
-



(b)
-

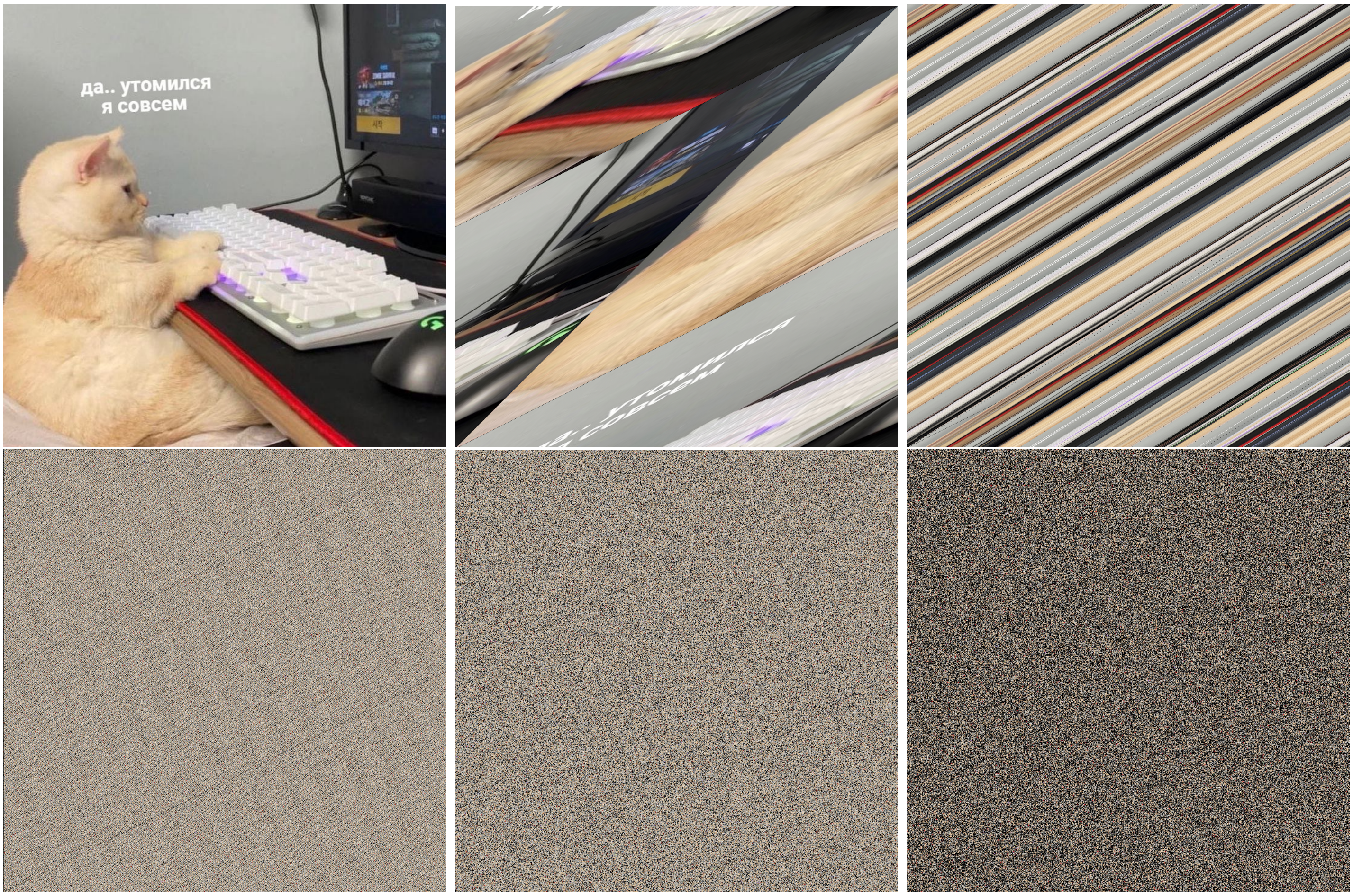
3.3 Окрошка из кошки

Представим тор $\mathbb{T}^2$ как единичный квадрат со склеенными противоположными сторонами $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$
Окрошка из кошки $\Gamma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ задаётся следующим образом:

$$\Gamma \, : \, (x, y) \to (2x + y, x + y) \bmod 1$$

$$\Gamma\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1$$

Соответствующее преобразование плоскости для окрошки из кошки — это линейное преобразование, задаваемое матрицей G, $\det G = 1$, то есть Γ – обратимо и сохраняет меру.



OLa S.P.A. a donné son autorisation pour la reproduction de cette figure, comme bien d'autres.
Общество защиты животных дало дозволение на воспроизведение этого изображения, а равно и иных.

4 Эргодические преобразования

Преобразоание T_θ в примере 3.2 и Γ в 3.3 являются примерами эргодических преобразований. Дадим определение

Определение 4.1. $\sqsupset$ $(X, \mathcal{B})$ - измеримое пространство, $T : X \to X$ - измеримое преобразование, μ - вроятностная мера ($\mu(X) = 1$).

$$\begin{aligned}
&(T \text{ - } \mu\text{-эргодическое} \Leftrightarrow \mu \text{ - эргодическая мера для } T) \iff \\
\iff &\Big(T \text{ сохраняет } \mu \text{ и } \forall A \in \mathcal{B} : T^{-1}(A) \subset A \Rightarrow \mu(A) = 1 \text{ или } 0\Big) \iff \\
&\iff (\nexists A \subset \mathcal{B} : T(A) = A \text{ и } \mu(A) > 0)
\end{aligned}$$

Соответственно преобразование в примере 3.1 эргодическим не является, так как имеет циклы - инвариантные подмножества положительной меры.
Для эргодического преобразования можно доказать следующие утверждения

Лемма 4.1. $\sqsupset$ $f : X \to \mathbb{R}$ - μ-измерима

$$(f \circ T = f) \Rightarrow \Big(f = \text{const} \quad \dot{\forall} x \in X\Big)$$

$\triangleright$.

$\sqsupset \exists Y \in \mathbb{R} : \mu(Y) > 0$ и $\mu(f^{-1}(Y) = F) > 0 \Rightarrow f \circ T(F) = f(F) \Rightarrow T^{-1}(F) \subset F$, но $\mu(F) > 0$, а T - эргодическое.

$\square$

Лемма 4.2. $\sqsupset (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ и f удовлетворяют условиям теоремы 1.1 и при этом T - μ-эргодическое, тогда

$$\hat{f} \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} A_k f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \overset{\text{def}}{=} \overline{f}$$

$\triangleright$.

$$\hat{f} \circ T = \hat{f} \underset{4.1}{\Longrightarrow} \hat{f} \overset{\dot{\forall}}{=} \text{const} \Longrightarrow \int \hat{f} = \mu(X) \cdot \hat{f} \underset{\int \hat{f} = \int f}{\Longrightarrow} \hat{f} = \frac{1}{\mu(X)} \int f = \overline{f}$$

$\square$

$\hat{f}$ часто называют средним по времени, а $\overline{f}$ – средним по пространству.

5 Заключение

В данной работе было разобрано доказательство эргодической теоремы и приведены несколько примеров сохраняющих меру систем с иллюстративным материалом. Были рассмотрены разные виды сходимости эргодических средних. Также было дано определение эргодического преобразования и доказаны леммы об инварантных относительно эргодического преобразования функциях и пределе эргодических средних для таких преобразований.