Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Matemática II

TP nº 2

Salvatori Emiliano

Mayo del 2020

Índice

1. Introducción

En el siguiente trabajo se detalla las soluciones llevadas a cabo para la materia **Matemática II** para la **Comisión nº 6** sobre el tema **Superficies cónicas, cilíndricas y cuádricas, curvas parametrizadas. Funciones vectoriales**

2. Ejercicios

Ejercicio nº 1

1. Identificar a qué tipo de superficie corresponde la siguiente expresión. Justifique su respuesta y esboce un gráfico de la misma, a partir de las trazas.

$$\frac{x^2}{x} + \frac{y^2}{16} - z = 0$$

2. Dados los siguientes puntos $A : (0, -2)$ y $B : (-4, -2)$, que pertenecen a una parábola, cuyo foco es $F : (-2, 1)$:
   - Determine su vértice y directriz.
   - Encuentre la ecuación de esta cónica.

Ejercicio nº 2

1. Las ecuaciones que siguen, definen una curva parametirzada. Determine cuál es la curva, encontrando su ecuación cartesiana. Grafique, indicando el sentido de la misma.

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 1 - 3\sin(t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

2. Escriba la función vectorial de esta curva. Calcule la velocidad instantánea para $t = \pi$ y muéstrelo en la gráfica.

Ejercicio nº 3

La siguiente función vectorial, representa una curva parametrizada:

$$\vec{r}(t) = \sin(t)i + \cos(t)j + tk \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- Grafique su imagen. ¿Qué representa?
- Calcule la longitud de arco en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

3. Resoluciones

3.1. Ejercicio nº 1

1. Para poder dar a conocer la superficie a la que pertenece la ecuación, lo mejor será reordenarla para que de esta forma, se pueda asemejar con las ecuaciones canónicas expuestas en el manual de Matemática II:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - z = 0$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z$$

Se puede visualizar que sólo las variables x e y son las que están elevadas a la segunda potencia, siendo la variable z la única que no cumple esto. Por otro lado, las operaciones entre las variables x e y no son combinadas, siendo ambas positivas.

Todo ello puede darnos el indicio que se asemeja a la ecuación canónica del **Paraboloide elíptico**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Esta, nos indica *a priori* que será una superficie de tipo Paraboloide elíptico, que se erigirá sobre el eje z cuyo vértice inicial se encontrará en el punto $V = (0, 0)$ y que los valores para a y b serán 3 y 4 respectivamente.

Pasando en limpio, se tiene:

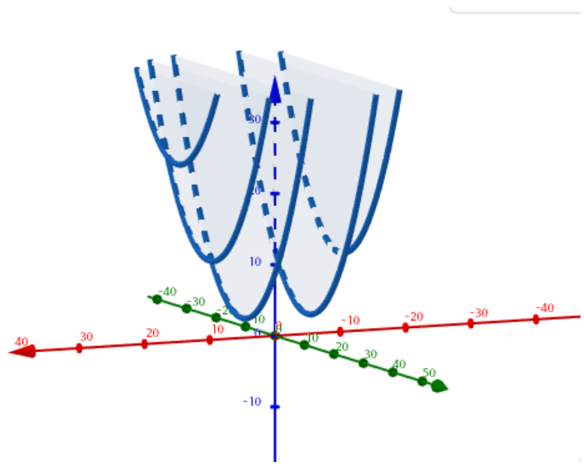
- $V : (0, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = 1$

Se realizan las trazas con distintos valores para k perteneciente a $\mathbf{R}$, pudiendo distinguir de esta manera, qué superficies delimitan a este Paraboloide:

- Traza $x = k$:

$$\frac{k^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z$$

Se realizan cortes con planos paralelos al plano yz, evidenciando que su superficie corresponde a una **Parábola**. En la siguiente imagen se puede observar la trazas del plano yz:

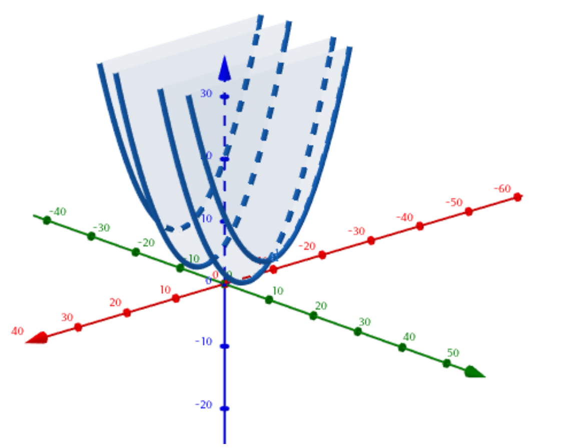


Los valores para la variable x fueron: $-10, -5, 5, 10$ y 15 .

- Traza $y = k$:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{k}{16} = z$$

Se realizan cortes con planos paralelos al plano xz, evidenciando que su superficie corresponde a una **Parábola**. En la siguiente imagen se puede observar la traza del plano xz:

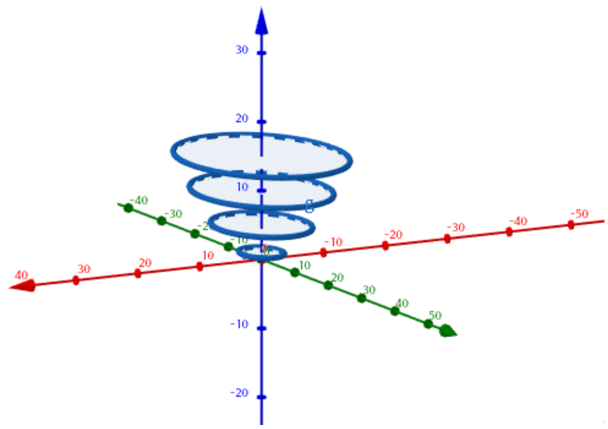


Los valores para la variable y fueron: $-10, -5, 5$ y 10 .

- Traza $z = k$:

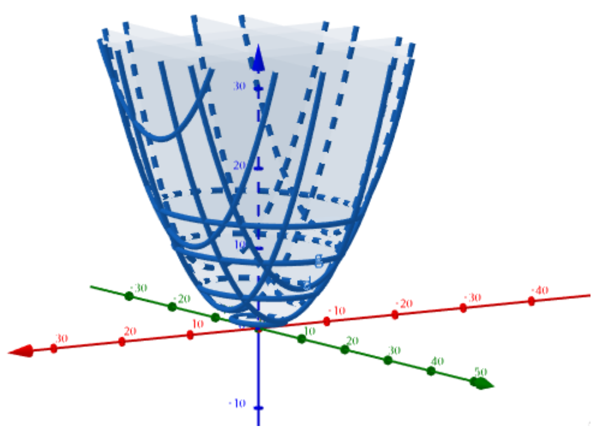
$$\frac{x^2}{9} + \frac{k^2}{16} = k$$

Se puede apreciar que cortando con planos paralelos al plano xy , la gráfica tiene la forma de un **Elipse**, cuyo centro estará dado por el valor de $\sqrt{k}$, teniendo que ser $k \geq 0$. En la siguiente imagen se puede observar la traza del plano yz:



Los valores para la variable z fueron: $1, 5, 10$ y 15 .

Si se juntan todas las trazas, efectivamente puede observarse que todas ellas forman un **Paraboloide Elíptico** como se supuso al comienzo:



2. Para la resolución del siguiente ítem, se debe recordar que los puntos son $A : (0, -2)$ y $B : (-4, -2)$, y todos ellos pertenecen a una parábola, cuyo foco es $F : (-2, 1)$.

   Dado que es una parábola, se tiene presente la siguiente ecuación general:

$$(x - \alpha)^2 = -4p(y - \beta)$$

Se debe tener en cuenta *que la distancia desde cualquier punto de la parábola al foco, será igual a la distancia de ese mismo punto a la directriz*. Por lo tanto, se toma el punto B para calcular dicha distancia:

$$
\begin{aligned}
|\vec{BF}| :& \sqrt{(-2-(-4)^2+(1+(-2))^2} \\
|\vec{BF}| :& \sqrt{2^2+3^2} \\
|\vec{BF}| :& \sqrt{13} \approx 3,60
\end{aligned}
$$

Como la directriz será perpendicular al eje focal en el que se apoya el punto F (por lo que será paralelo al eje x) entonces debemos calcular la coordenada y, la cual será:

$$
\begin{aligned}
Dir_y :& \sqrt{13}-2 \approx 1{,}60 \\
Dir_y :& \frac{8}{5}
\end{aligned}
$$

El vértice se encontrará sobre el eje focal, a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. Hay varias formas de obtener el punto de la coordenada del foco en y. Una forma es hacer la diferencia entre la coordenada de la directriz y el punto focal:

$$
\begin{aligned}
V_y &= \frac{Dir_y - F_y}{2} \\
V_y &: \frac{3}{10}+1 \\
V_y &: \frac{13}{10}
\end{aligned}
$$

Ahora bien, también podemos calcular la distancia a partir de la coordenada en y desde el punto A, restándole también la diferencia entre el foco y la directriz. Por lo que el vértice se obtendrá de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
V :& (-2, \sqrt{13}-2-\frac{Dir_y - F_y}{2}) \\
V :& (-2, \frac{8}{5}-\frac{3}{10})
\end{aligned}
$$

En ambos casos se llega al mismo punto:

$$\boxed{V : (-2, \frac{13}{10})}$$

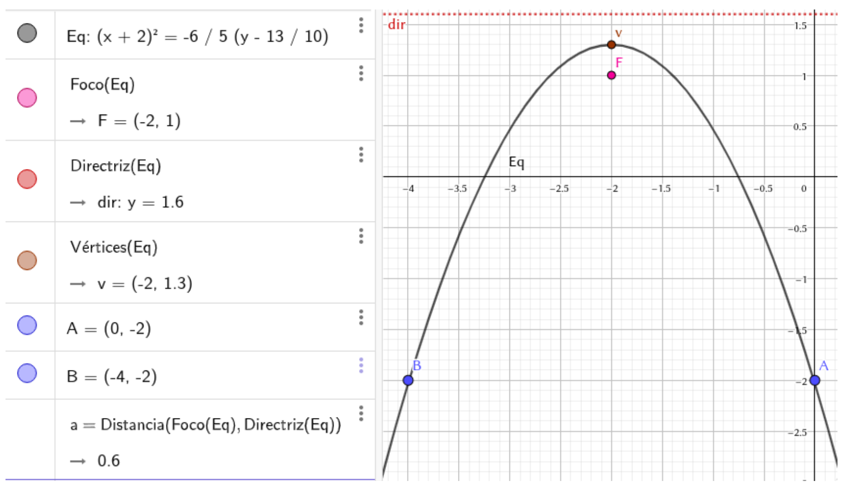
Tenemos que considerar que la directriz en este ejercicio, se encuentra por sobre el punto focal, por lo que la distancia del punto p será **negativa**. Como la distancia desde la directriz hasta el foco es la diferencia entre: $\frac{\sqrt{13}-3}{2}$, se puede decir que:

$$p = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$$
$$p = \frac{3}{10}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se puede resolver que la ecuación será la siguiente:

$$\boxed{(x+2)^2 = -4(\frac{3}{10})(y - \frac{13}{10})}$$

Por último, para una mejor comprensión de lo anterior, se visualiza un gráfico detallando punto por punto lo realizado:



3.2. Ejercicio nº 2

1. Se tienen las siguientes ecuaciones: $\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 1 - 3\sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

   Se despejan en la ecuación de x:

$$x = 3\cos(t)$$
$$\frac{x}{3} = \cos(t)$$

   Luego se despeja en la ecuación de y:

$$y = 1 - 3\sin(t)$$
$$\frac{y-1}{-3} = \sin(t)$$

Ahora bien, para poder igualar estas dos ecuaciones, es necesario recordar la relación pitagórica trigonométrica:

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

Entonces, a ambas ecuaciones les aplicaremos el cuadrado para poder realizar su correspondencia:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \cos^2(t)$$
$$\left(\frac{y-1}{-3}\right)^2 = \sin^2(t)$$

Aplicando la relación trigonométrica anterior, se obtiene:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{-3}\right)^2 = 1$$

Distribuyendo las potencias:

$$\boxed{\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1}$$

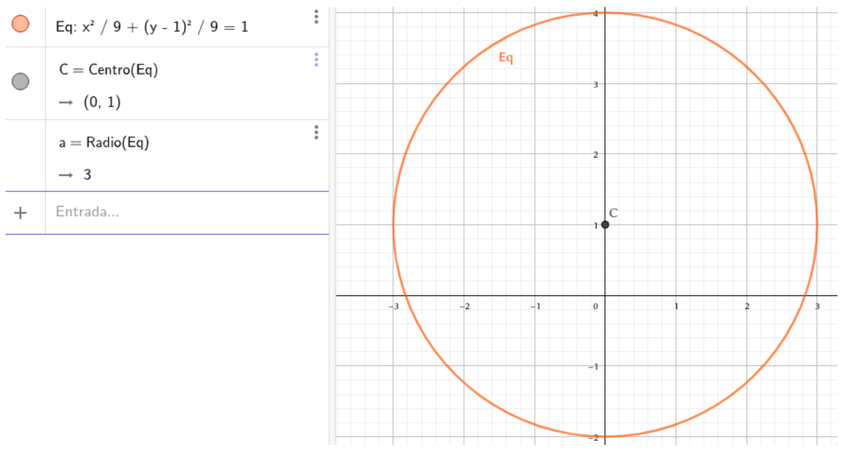
Se puede observar que tiene la forma de una **elipsis**, cuya canónica es:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Por lo que se puede deducir que es una elipsis particular, con las siguientes características:

- Centro: $C : (0, 1)$
- Como $a = b = c$, es decir, que las distancias focales respecto a los vértices situados en el mismo eje focal son **iguales** entonces se puede deducir que es un círculo, cuya distancia desde el centro a sus vértices es 3.
- Radio: $r = 3$

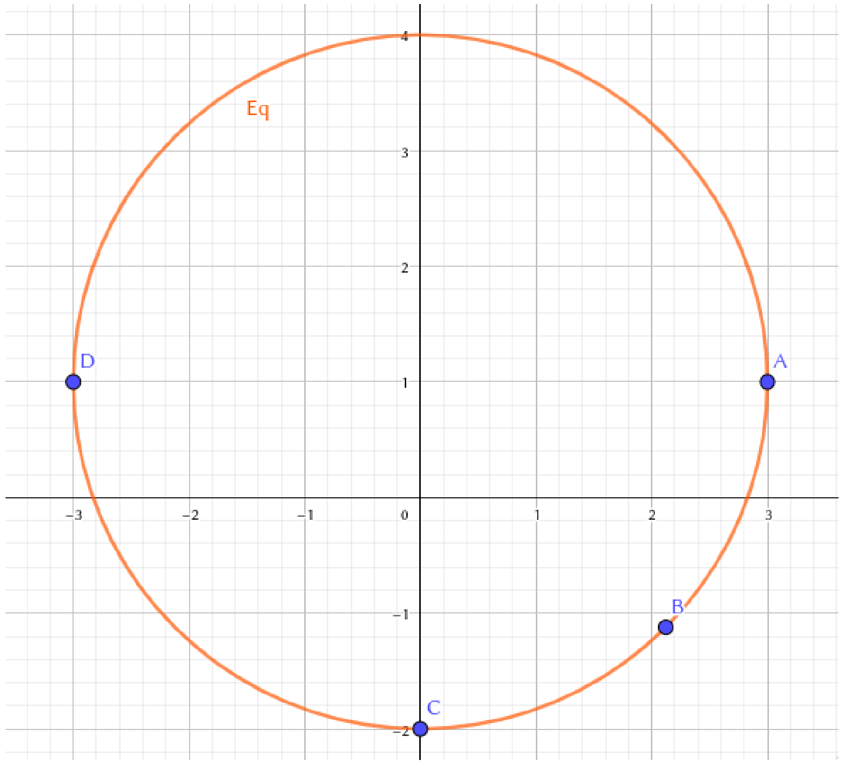
A continuación se puede visualizar una gráfica de lo obtenido hasta el momento:



Realizamos una tabla con algunos valores para determinar el sentido del movimiento de la particula a lo largo de la función posición. Como vamos a trabajar con ángulos, es importante realizar los cálculos en base a radianes:

Punto	t	x	y
A	0	3	1
B	$\frac{\pi}{4}$	0.12	-1.12
C	$\frac{\pi}{2}$	0	-2
D	π	-3	1
E	2π	3	1

Los puntos A y E (señalados en negrita en la tabla anterior), coinciden en sus coordenadas de posición y esto es así ya que se puede entender como el giro completo que dio la partícula, en **sentido de las agujas del reloj**:



2. Ahora bien, para obtener la velocidad en un punto dado, se debe escribir las componentes en función de t tal que el vector $\vec{r}(t)$ sea una *función vectorial*.

$$\vec{r}(t) = \langle 3\cos(t); 1 - 3\sin(t) \rangle$$

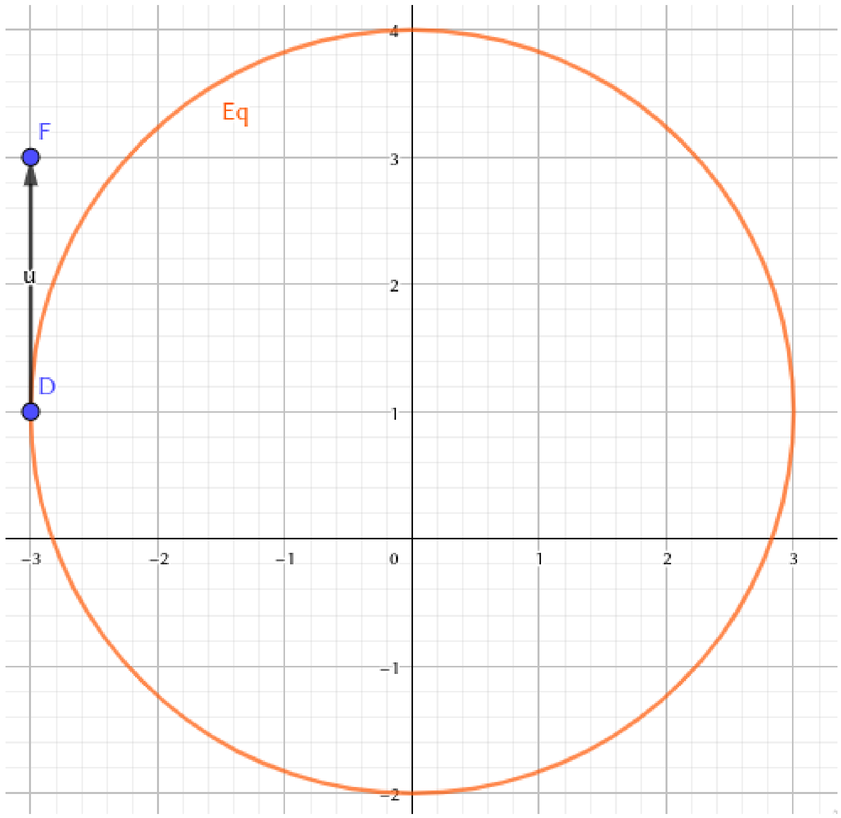
Se sabe que para la velocidad se deberá de obtener la derivada de esta función:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\prime(t) = \langle x\prime(t); y\prime(t) \rangle$$
$$\vec{v}(t) = \vec{r}\prime(t) = \langle -3\sin(t); -3\cos(t) \rangle$$

Ahora que ya sabemos las componentes del vector velocidad, sólo resta evaluarlas en función del valor del instante deseado, es decir π:

$$\vec{v}(\pi) = \vec{r}\prime(\pi) = \langle x\prime(\pi); y\prime(\pi) \rangle$$
$$\vec{v}(\pi) = \vec{r}\prime(\pi) = \langle -3\sin(\pi); -3\cos(\pi) \rangle$$
$$\vec{v}(\pi) = \vec{r}\prime(\pi) = \langle 0; 3 \rangle$$

Ya sabemos entonces que la posición en el instante π será $\vec{r}(\pi) = \langle -3; 1 \rangle$ y que su velocidad al pasar por ese punto será $\vec{r}\prime(\pi) = \langle 0; 3 \rangle$. Localizamos el punto $\vec{r}\prime(\pi)$ a partir de la coordenada posición:

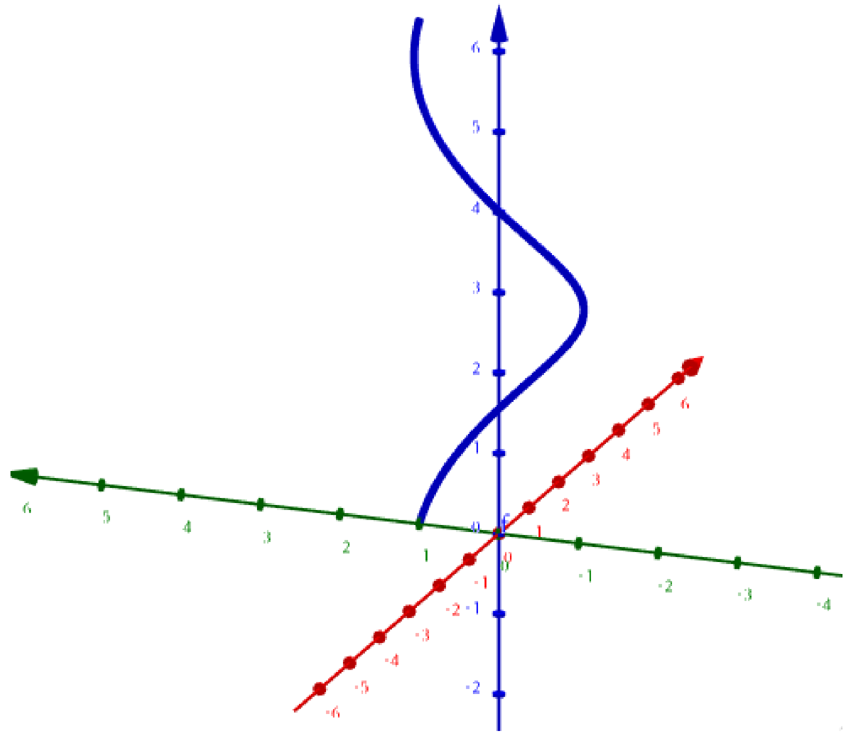


Como puede observarse en el gráfico, el vector velocidad resultante, es tangente a la curva del vector posición en el instante π.

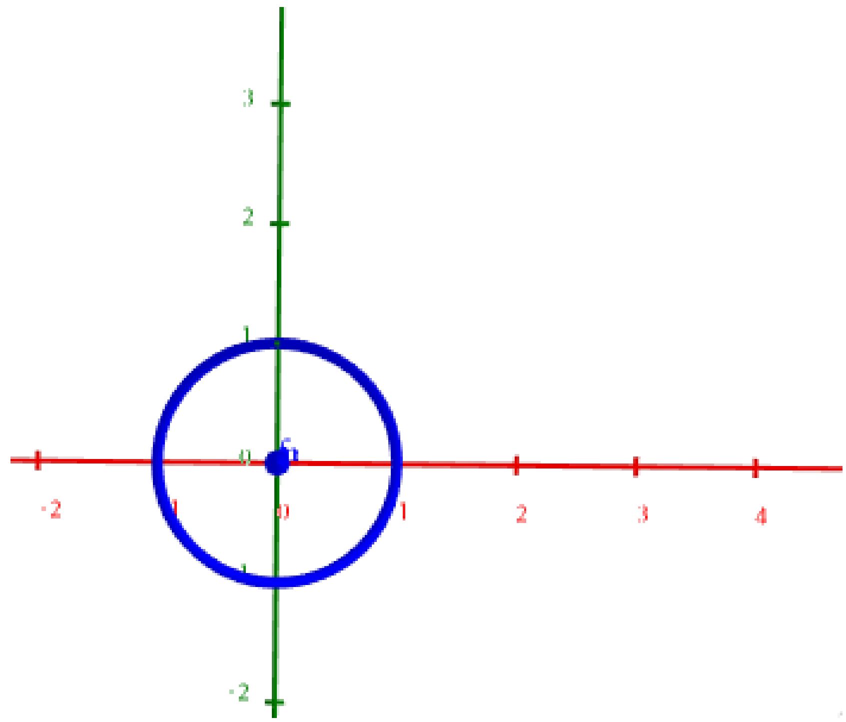
También puede evidenciarse, que el sentido en ese punto D concuerda con el sentido de las agujas del reloj antes mencionado.

3.3. Ejercicio nº 1

1. La gráfica es la siguiente:



Se puede observar de alguna manera que representa una elipse pero elevada sobre el eje de abscisas z. También cabe observar, que si prescindiéramos de z y *aplastaríamos* la curva sobre los ejes de abscisas xy podríamos observar cómo se forma un círculo, cuyo centro es el origen de coordenadas, y de radio igual a uno:



2. Para poder realizar el cáculo de la longitud del arco existente entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$ se debe recordar que esta longitud es posible calcularla integrando el vector posición de la función paramétrica. Es decir:

$$\int_a^b |\vec{r}\prime(t)|dt$$

- Primero derivamos para obtener $\vec{r}\prime(t)$:

$$\vec{r}\prime(t) = \langle \cos(t), -\sin(t), 1 \rangle$$

- Luego calculamos su módulo:

$$|\vec{r}\prime(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2}$$
$$|\vec{r}\prime(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1^2}$$

Como vimos en el **Ejercicio nº 2**, la ecuación se puede simplificar mediante la relación pitagórica trigonométrica:

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

Quedando de la siguiente forma:

$$|\vec{r}\prime(t)| = \sqrt{1 + 1^2}$$
$$|\vec{r}\prime(t)| = \sqrt{2}$$

- Conocemos además, los extremos de los intervalos a calcular , que resultan ser $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$, por lo que la integral quedará evaluada de la siguiente manera:

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dt$$

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dt$$

$$L = \sqrt{2}t + C$$

$$L = \left[\sqrt{2} \cdot \tfrac{\pi}{2}\right] - \left[\sqrt{2} \cdot \tfrac{\pi}{4}\right]$$

Por lo que el resultado de la longitud termina siendo aproximadamente:

$$\boxed{L \approx 1{,}11}$$

4. Herramientas

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo

Para la resolución de los presentes ejercicios se utilizaron las siguientes herramientas:

1. Arch Linux V5.1.11
2. Para la composición del presente Informe se utilizó el paquete *texlive-latexextra 2018.50031-1*
3. Las imágenes pertenecen al software *Geogebra 6.0.574.0-2.*