Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Matemática II

TP nº 5

Salvatori Emiliano

Junio del 2020

Índice

1. Introducción

En el siguiente trabajo se detalla las soluciones llevadas a cabo para la materia **Matemática II** para la **Comisión nº 6** sobre el tema **Integrales dobles y triples. Coordenadas polares**.

2. Ejercicios

Ejercicio nº 1

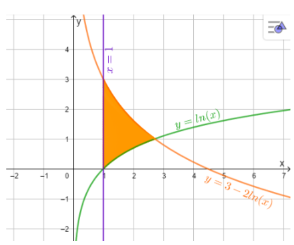
La siguiente integral triple calcula la masa de un sólido:

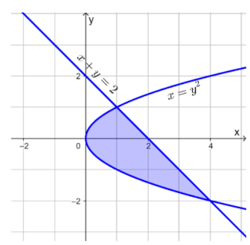
$$\int_0^2 \int_0^{2-z} \int_0^{\sqrt{2y}} x \;\; dxdydz$$

1. Graficar el sólido
2. ¿Cuál es la función densidad?
3. Volver a plantear la integral proyectando en otro plano coordenado
4. Resolver la integral que prefiera

Ejercicio nº 2

Calcular el álrea de las dos regiones graficadas:





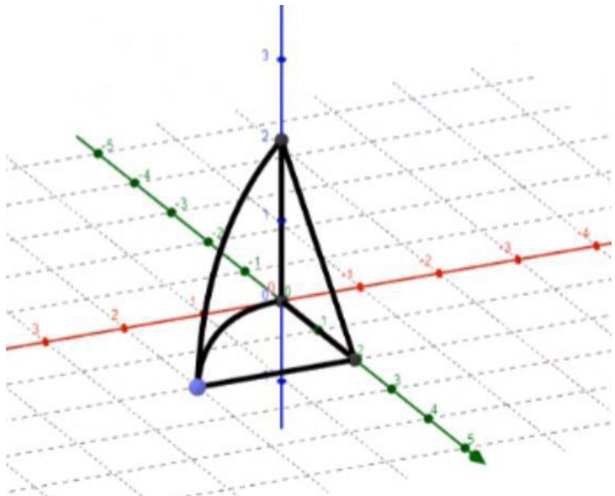
Ejercicio nº 3

Graficar el sólico cuyas fronteras son el semicono $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide elíptico $z = 2(x^2 + y^2)$. Calcular su volumen usando un cambio de variables.

3. Resoluciones

3.1. Ejercicio nº 1

1. A continuación, se visualiza el gráfico del sólido con el que se trabajará:



2. La función densidad es la siguiente:

$$\delta(x;y;z) = x$$
$$\int\int\int x\,dV =$$
$$\int_0^2\int_0^{2-z}\int_0^{\sqrt{2y}} x\;dxdydz$$

3. Podemos plantear la integral en el plano zy:

$$\delta(x;y;z) = x$$
$$\int\int\int x\,dV =$$
$$\int_0^2\int_0^{2-y}\int_0^{\sqrt{2y}} x\;dxdzdy$$

4. Se procede a resolver la integral planteada en el punto nº 2. Por lo tanto se tiene la siguiente integral triple:

$$\int_0^2\int_0^{2-z}\int_0^{\sqrt{2y}} x\;dxdydz \tag{1}$$

Siendo su región:

$$R: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2y} \\ 0 \leqslant y \leqslant 2-z \end{cases}$$

Procedemos a calcular la **masa**. Para ello debemos de comenzar resolviendo la integral de más adentro, es decir, la integral con respeecto a x:

$$\int_0^{\sqrt{2y}} x \, dx =$$
$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2y}} =$$
$$\frac{(\sqrt{2y})^2}{2} - 0 = y$$

Integramos con respecto a y:

$$\int_0^{2-z} y \, dy =$$
$$\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-z} =$$
$$\frac{(2-z)}{2} - 0 =$$
$$\frac{(2-z)^2}{2}$$

Y por último, integramos en z:

$$\int_0^2 \frac{(2-z)^2}{2} \, dz =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^2 (2-z)^2 \, dz =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^2 (4-4z+z^2) \, dz =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^2 4 \, dz - \frac{1}{2}\int_0^2 4z \, dz + \frac{1}{2}\int_0^2 z^2 dz =$$
$$2z\Big|_0^2 - z^2\Big|_0^2 + \frac{z^3}{6}\Big|_0^2 =$$
$$4 - 0 - 4 - 0 + \frac{8}{6} - 0 =$$

Siendo la masa:

$$\boxed{\frac{4}{3}}$$

Ahora calculamos el **volumen**:

$$\int_0^2 \int_0^{2-z} \int_0^{\sqrt{2y}} 1 \, dxdydz \tag{2}$$

Procedemos como hasta ahora, resolviendo la integral de más adentro, es decir, la integral con respecto a x:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2y}} 1\, dx &= \\
x\Big|_0^{\sqrt{2y}} &= \\
\sqrt{2y} - 0 &= \\
\sqrt{2y}
\end{aligned}
$$

Ahora integramos en y:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2-z} \sqrt{2y}\, dy &= \\
\frac{2}{3}\sqrt{2}(y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2-z} &= \\
\frac{2}{3}\sqrt{2}(2-z)^{\frac{3}{2}} - 0 &= \\
\frac{2}{3}\sqrt{2}(2-z)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Finalmente integramos en z:

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{2}{3}\sqrt{2}(2-z)^{\frac{3}{2}}\, dz &= \\
\frac{2}{3}\sqrt{2}\int_0^2 (2-z)^{\frac{3}{2}}\, dz &= \\
-\frac{2}{3}\sqrt{2}\,\frac{2}{5}(2-z)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 &= \\
-\frac{4}{15}\sqrt{2}\,(2-z)\Big|_0^2 &= \\
-\frac{4}{15}\sqrt{2}\,(2-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15}\sqrt{2}\,(2-0)^{\frac{5}{2}} &= \\
\frac{4}{15}\sqrt{2}(2)(2)\sqrt{2} &=
\end{aligned}
$$

Siendo el volumen obtenido:

$$\boxed{\frac{32}{15}}$$

Estos resultados, se pueden calcular también mediante la integral proyectada sobre el plano zy del punto anterior. Podemos definir su región:

$$
R : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2y} \\ 0 \leqslant z \leqslant 2 - y \end{cases}
$$

Recordemos su integral triple:

$$\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{\sqrt{2y}} x \; dxdzdy \tag{3}$$

Calculamos primero su **masa** comenzando con la integral de x:

$$\int_0^{\sqrt{2y}} x \; dx =$$
$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2y}} =$$
$$\frac{(\sqrt{2y})^2}{2} - 0 = y$$

Ahora procedemos a integrar z:

$$\int_0^{2-y} y \; dz =$$
$$yz\Big|_0^{2-y} =$$
$$y(2-y) - 0 =$$
$$2y - y^2$$

Por último procedemos con la integral en y:

$$\int_0^2 (2y - y^2) \; dy =$$
$$2\int_0^2 y - \int_0^2 y^2 \; dy =$$
$$y^2\Big|_0^2 - \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 =$$
$$4 - 0 - \frac{8}{3} + 0$$

Dando como resultado, el mismo valor de **masa** que se obtuvo anteriormente:

$$\boxed{\frac{4}{3}}$$

3.2. Ejercicio nº 2

3.2.1. Ejercicio 2.a

Para la resolución del siguiente problema, lo que primero debemos encontrar es el punto de intersección entre las funciones $y = ln(x)$ y $3 - 2ln(x)$. Para ello lo mejor será igualarlas:

$$\begin{aligned} ln(x) &= 3 - 2ln(x) \\ ln(x) + 2ln(x) &= 3 \\ 3ln(x) &= 3 \\ ln(x) &= 1 \\ x &= e \end{aligned}$$

Habiendo encontrado el punto donde intersectan, ahora podemos plantear de una forma más fácil, la integral doble para encontrar el área. Sabemos que la región estará comprendida de la siguiente forma:

$$R : \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant e \\ ln(x) \leqslant y \leqslant 3 - 2ln(x) \end{cases}$$

Planteamos la integral doble:

$$\int_1^e \int_{ln(x)}^{3-2ln(x)} 1 \ \ dydx$$

Procedemos a resolver de adentro hacia afuera, por lo tanto primero resolvemos la integral con respecto a y:

$$\begin{aligned} \int_{ln(x)}^{3-2ln(x)} 1 \ \ dy &= \\ 3 - 2ln(x) - ln(x) &= \\ 3 - 3ln(x) & \end{aligned}$$

Ahora que sabemos el resultado de haber integrado y, procedemos a integrar x:

$$\begin{aligned} \int_1^e (3 - 3ln(x)) \ \ dx &= \\ \int_1^e 3 \ \ dx - \int_1^e 3ln(x) \ \ dx &= \end{aligned}$$

Para integrar el segundo término, realizamos un cambio de variable:

$$\begin{cases} u = ln(x) \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases} \quad \begin{cases} dv = dx \\ v = x \end{cases}$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\int ln(x)dx =$$
$$xln(x) - \int \frac{1}{x}(x)dx =$$
$$xln(x) - \int 1dx =$$
$$xln(x) - x$$

Evaluamos:

$$3x\Big|_1^e - 3(xln(x) - x)\Big|_1^e =$$
$$3e - 3 - (3e)ln(e) + 3e + 3(1) + 3(1)(ln(1)) - 3(1) =$$
$$3e - 3 - 3 =$$

Obteniendo como resultado final, el área deseada:

$$\boxed{3e - 6}$$

3.2.2. Ejercicio 2.b

Al igual que en el ejercicio anterior, deberemos encontrar la intersección entre las dos funciones. Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Suplantamos la segunda en la primera y utilizamos Bascara:

$$\begin{aligned} &y^2 + y = 2 \\ &y^2 + y - 2 = 0 \\ y_{12} &= -1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)} \quad = \\ y_{12} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \\ y_{12} &= \frac{-1 \pm 3}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

La región está definida por lo tanto entre:

$$R : \begin{cases} -2 \leqslant y \leqslant 1 \\ y^2 \leqslant x \leqslant 2 - y \end{cases}$$

Procedemos a escribir la integral doble y calculamos:

$$\int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y} 1 \ dxdy =$$

Primero comenzamos con la integral en función de x:

$$\begin{aligned}\int_{y^2}^{2-y} 1\,dx &= x\Big|_{y^2}^{2-y}\\ &= 2-y-y^2\end{aligned}$$

Y luego procedemos con la integral en y:

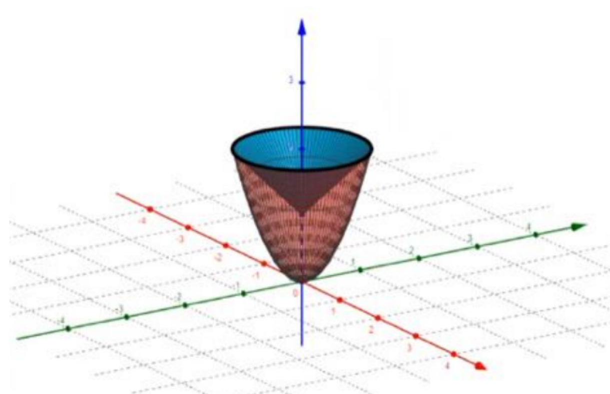
$$\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)\,dy =$$
$$\int_{-2}^{1} 2\,dy - \int_{-2}^{1} y\,dy - \int_{-2}^{1} y^2\,dy =$$
$$2y\Big|_{-2}^{1} - \frac{y^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{1} =$$
$$2+4-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}-\frac{8}{3} =$$

Dando como resultado:

$$\boxed{\frac{9}{2}}$$

3.3. Ejercicio nº 3

El gráfico del sólido es:



- Para calcuar el volumen del sólido, primero debemos hallar la curva de intersección entre el semicono determinado por $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide elíptico $z = 2(x^2 + y^2)$.

  Para ello despejamos de la primera:

  $$\begin{aligned} z &= 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \\ z - 1 &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ (z-1)^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

  Deduciendo:

  $$\begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

  Ahora en la segunda:

  $$\begin{aligned} z &= 2(x^2 + y^2) \\ \frac{z}{2} &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

  Obteniendo:

  $$\begin{cases} z = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

  Podemos observar que la curva de intersección es una circunferencia determinada por $x^2 + y^2 = 1$, de Radio 1, cuyo centro se encuentra en $(0, 0)$.

  Ahora bien, para obtener la región, debemos despejar y:

  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ y^2 &= 1 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

  Deducimos que la región está conformada mediante:

  $$R : \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\sqrt{1 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

  Procedemos a calcular el volumen mediante el método de integrales dobles. Para ello primero realizamos el cálculo del volumen que se encuentra **por debajo del semicono**. Su integral sería:

  $$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 + \sqrt{x^2 + y^2}\, dydx$$

Realizamos el cambio a coordenadas polares para proceder con más claridad, respetando las siguientes equivalencias:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Redefiniendo las variables y los límites obtenemos una integral doble equivalente, que mediante la relación pitagórica conocida, nos permite simplificar la raíz cuadrada:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)})\, r dr d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \sqrt{r^2})\, r dr d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r)\, r dr d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + r^2)\, dr d\theta =$$

Resolvemos la integral con respectoa a r:

$$\int_0^1 (r + r^2)\, dr =$$
$$\int_0^1 (r)\, dr + \int_0^1 (r^2)\, dr =$$
$$\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 + \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1 =$$
$$\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{3} - 0 =$$
$$\frac{5}{6}$$

Ahora integramos con respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi} \frac{5}{6}\, d\theta =$$
$$\left.\frac{5}{6}\,\theta\right|_0^{2\pi} =$$
$$\frac{5}{6} \cdot 2\pi - \frac{5}{6}(0) = \frac{5}{3}\pi$$

Obtenemos que el volumen **por debajo del semicono** es de:

$$\boxed{\frac{5}{3}\pi} \tag{4}$$

Procedemos a realizar el cálculo para obtener el volumen **por debajo del paraboloide elíptico**:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2(x^2+y^2)\,dydx$$

Volvemos a realizar un cambio de coordenadas, recordamos las equivalencias:

$$\begin{cases} x = r\cdot\,\cos(\theta) \\ y = r\cdot\,\sin(\theta) \end{cases}$$

Procedemos a realizar el cambio, y teniendo en cuenta la relación pitagórica, nos queda:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\int_0^1 2(r^2\cdot\,\cos^2(\theta)+r^2\,\mathrm{sen}^2(\theta))\,rdrd\theta = \\ \int_0^{2\pi}\int_0^1 [2(r^2(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))]\,rdrd\theta = \\ \int_0^{2\pi}\int_0^1 2(r^2)(1)\,rdrd\theta = \\ \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^3\,drd\theta = \end{aligned}$$

Realizamos la integral con respecto a x:

$$\begin{aligned} \int_0^1 2r^3\,dr = \\ \frac{2}{4}r^4\Big|_0^1 = \\ \frac{2}{4}-0 = \\ \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por último realizamos la integral con respecto a θ:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,d\theta = \\ \frac{1}{2}\,\theta\,\Big|_0^{2\pi} = \\ \frac{2\pi}{2}-0 = \pi \end{aligned}$$

Obtenemos que el volumen por debajo del **paraboloide elíptico** es:

$$\boxed{\pi} \tag{5}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta tanto los resultados en 4 como 5 se puede hacer la diferencia entre ellas para obtener el volumen buscado:

$$\frac{5}{3}\pi - \pi = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$$

- Podemos realizar un cambio de variable y comprobar que el resultado sigue siendo el mismo. Para ello volvemos a definir la región a integrar.

$$R : \begin{cases} -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2} \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

Comencemos planteando la misma idea que en el punto anterior. Buscamos primero la superficie por debajo del cono. Tenemos que:

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^{1} 1 + \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$$

Realizamos el cambio a coordenadas polares para proceder con más claridad, respetando las siguientes equivalencias:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Obtenemos que la integral doble a resolver es:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)})\, rd\theta dr =$$
$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + \sqrt{r^2})\, rd\theta dr =$$
$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + r)\, rd\theta dr =$$
$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r + r^2)\, d\theta dr =$$

Procedemos a realizar la integral con respecto a θ:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (r+r^2)\, d\theta &= \\
\int_0^{2\pi} (r)\, d\theta + \int_0^{2\pi} (r^2)\, d\theta &= \\
r\,\theta\Big|_0^{2\pi} + r^2\theta\Big|_0^{2\pi} &= \\
2\pi(r) - 0 + 2\pi(r^2) - 0 &= \\
2\pi(r) + 2\pi(r^2)
\end{aligned}$$

Por último, integramos con respecto a r:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (2\pi r + 2\pi r^2)\, dr &= \\
2\pi \int_0^{2\pi} r\, dr + 2\pi \int_0^{2\pi} r^2\, dr &= \\
\frac{2\pi}{2} r^2\Big|_0^{2\pi} + 2\pi \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\pi} &= \\
\pi - 0 + \frac{2}{3}\pi - 0 = \frac{5}{3}\pi
\end{aligned}$$

Por lo que obtenemos nuevamente:

$$\boxed{\frac{5}{3}\pi} \tag{6}$$

Ahora integramos para obtener la superfice delimitada por el paraboloide elíptico:

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^{1} 2(x^2+y^2)\, dxdy$$

Volvemos a realizar un cambio de coordenadas, recordamos las equivalencias:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Por lo tanto, nos queda:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{2\pi} 2(r^2\cdot\cos^2(\theta)+r^2\operatorname{sen}^2(\theta))\,rd\theta dr &=\\ \int_0^1\int_0^{2\pi}[2(r^2(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))]\,rd\theta dr &=\\ \int_0^1\int_0^{2\pi}2(r^2)(1)\,rd\theta dr &=\\ \int_0^1\int_0^{2\pi}2r^3\,d\theta dr &=\end{aligned}$$

Realizamos la integral con respecto a θ:

$$\begin{aligned}\int_0^1 2r^3\,d\theta &=\\ 2r^3\theta\Big|_0^{2\pi} &=\\ 2(r^3)2\pi-0 &=\\ 4\pi r^3\end{aligned}$$

Ahora integramos respecto a r:

$$\begin{aligned}\int_0^1 4\pi r^3\,dr &=\\ \pi r^4\Big|_0^1 &=\\ \pi-0 &=\pi\end{aligned}$$

Obteniendo nuevamente:

$$\boxed{\pi} \tag{7}$$

Teniendo en cuenta los resultados en 6 y en 7 podemos corroborar el resultado obtenido:

$$\frac{5}{3}\pi-\pi=\boxed{\frac{2}{3}\pi}$$

4. Herramientas

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo

Para la resolución de los presentes ejercicios se utilizaron las siguientes herramientas:

1. Arch Linux V5.1.11
2. Para la composición del presente Informe se utilizó el paquete *texlive-latexextra 2018.50031-1*
3. Las imágenes pertenecen al software *Geogebra 6.0.574.0-2*.