Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Matemática II

TP nº 7

Salvatori Emiliano

Julio del 2020

Índice

1. Introducción

En el siguiente trabajo se detalla las soluciones llevadas a cabo para la materia **Matemática II** para la **Comisión nº 6** sobre el tema **Independencia Lineal y diagonalización**.

2. Ejercicios

2.1. Ejercicio nº 1

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 6 & -10 & 6 \\ 6 & -12 & 8 \end{pmatrix}$

1. Mostrar que el vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ es autovector de A. ¿A qué autovector está asociado?.
2. Hallar todos los autovalores de A y sus autovectores asociados.
3. ¿Es posible escribir la base de $\mathbb{R}^3$, cuyos elementos sean todos autovectores de A? Si es posible, proponer una base,y si no es posible, explicar por qué.
4. Diagonalizar la matriz A (completando todos los pasos).

3. Resoluciones

3.1. Ejercicio nº 1

1. Para determinar el autovalor asociado al autovector $\vec{u}$ realizamos la siguiente operación:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 6 & -10 & 6 \\ 6 & -12 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   Desarrollamos fila a fila:

   - $$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 + (-12) + 6 = -1$$
   - $$\begin{bmatrix} 6 & -10 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 - 20 + 12 = -2$$

- $$\begin{bmatrix} 6 & -12 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 - 24 + 16 = -2$$

Por lo que obtenemos la solución:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 6 & -10 & 6 \\ 6 & -12 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Se puede observar a simple vista que todo el autovector resultante está multiplicado por el autovalor buscado que sería -1. Pasándolo en limpio quedaría:

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 6 & -10 & 6 \\ 6 & -12 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se concluye que $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ es autovector de A y que su autovalor asociado es $\lambda = -1$.

2. Ahora trataremos de hallar todos los autovalores de A y sus autovectores asociados. Para ello emplearemos la siguiente condición:

$$det(A - \lambda * I) = 0 \tag{1}$$

Procedemos a realizar la operación entre A y su identidad:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 6 & -10 & 6 \\ 6 & -12 & 8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & 3 \\ 6 & -10-\lambda & 6 \\ 6 & -12 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

Comenzamos a operar para escalonar la matriz:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & 3 \\ 6 & -10-\lambda & 6 \\ 6 & -12 & 8-\lambda \end{pmatrix} F3 - F2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & 3 \\ 6 & -10-\lambda & 6 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$F2 - 2F1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & 3 \\ -4+2\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Ahora bien, como no podemos seguir operando, a riesgo de perder los ceros obtenidos, procedemos a realizar su determinante mediante Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & 3 \\ -4+2\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \\ 5-\lambda & -6 & 3 \\ -4+2\lambda & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$[(5-\lambda)*(2-\lambda)*(2-\lambda)+(-4+2\lambda)*(-2+\lambda)*(-2\cancel{+}\lambda)*3+0]-$$
$$[0+0+(2-\lambda)*-6*(-4+2\lambda)] =$$
$$[(5-\lambda)*(2-\lambda)^2+(-2)(2-\lambda)*(-1)(2-\lambda)*3]-[(2-\lambda)(-6)*(-2)(2-\lambda)] =$$
$$(5-\lambda)*(2-\lambda)^2+6(2-\lambda)^2-12(2-\lambda)^2 =$$
$$(2-\lambda)^2*(5-\lambda+6-12) =$$
$$(2-\lambda)^2*(-1-\lambda) =$$
$$(2-\lambda)^2*(-1)(1+\lambda)$$

Por ende las raíces obtenidas son:

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 2$$

Se puede observar que existe una **raíz doble** para el autovalor $\lambda_2 = 2$.

a) Procedemos a desarrollar el primer autovalor $\lambda = -1$. Volviendo a (1) se tiene:

$$A-(-1)*I = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 5-(-1) & -6 & 3 \\ 6 & -10-(-1) & 6 \\ 6 & -12 & 8-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 6 \\ 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 6 \\ 6 & -12 & 9 \end{pmatrix} * \vec{V} = 0$$

Procedemos a utilizar el Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 3\,|\,0 \\ 6 & -9 & 6\,|\,0 \\ 6 & -12 & 9\,|\,0 \end{pmatrix} F3-F1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3\,|\,0 \\ 6 & -9 & 6\,|\,0 \\ 0 & -6 & 6\,|\,0 \end{pmatrix} F2-F1 \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 3\,|\,0 \\ 0 & -3 & 3\,|\,0 \\ 0 & -6 & 6\,|\,0 \end{pmatrix} F3-2*F2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3\,|\,0 \\ 0 & -3 & 3\,|\,0 \\ 0 & 0 & 0\,|\,0 \end{pmatrix} F1-2F2 \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3\,|\,0 \\ 0 & -3 & 3\,|\,0 \\ 0 & 0 & 0\,|\,0 \end{pmatrix} \frac{F1}{6}\ y\ \frac{F2}{-3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\,|\,0 \\ 0 & 1 & -1\,|\,0 \\ 0 & 0 & 0\,|\,0 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} V_1 - \frac{1}{2} * V_3 = 0 \\ V_2 - V_3 = 0 \end{cases}$$

Se despeja en función de V_3:

$$V_1 = \frac{1}{2} V_3$$
$$V_2 = V_3$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} V_3 \\ V_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} V_3$$

Este es el autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$, con $V_3 \neq 0$.

b) Procedemos ahora con $\lambda = 2$. Volviendo a (1) se tiene:

$$A - 2 * I = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 5-2 & -6 & 3 \\ 6 & -10-2 & 6 \\ 6 & -12 & 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 6 & -12 & 6 \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 6 & -12 & 6 \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} * \vec{V} = 0$$

Procedemos a utilizar el Método de Gauss, como en el punto anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 \end{array}\right) F3 - F2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) F2 - 2F1 \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \frac{F1}{3} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Con esto, obtenemos una única ecuación. Resolvemos teniendo en cuenta que $V_2 = \beta; V_3 = \alpha$

$$V_1 - 2V_2 + V_3 = 0$$
$$V_1 - 2\beta + \alpha = 0$$
$$V_1 = 2\beta - \alpha$$

A partir de acá se puede obtener la siguiente combinación lineal:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, podemos obtener la Combinación Lineal deseada:

$$\vec{V} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consecuentemente, se pueden escribir los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2$ como los múltiplos no nulos de: $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) Tenemos como resolucion del punto anterior, los siguientes autovectores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar si es posible escribir la base de $\mathbb{R}^3$, hay que determinar primero si los autovectores obtenidos son linealmente independientes. Por lo tanto establecemos las siguiente ecuaciones:

$$C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + 2C_3 = 0 \\ 2C_1 + (0)C_2 + C_3 = 0 \\ 2C_1 + 2C_2 + (0)C_3 = 0 \end{cases}$$

Procedemos a emplear el Método de Eliminación de Gauss nuevamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\,|\,0 \\ 2 & 0 & 1\,|\,0 \\ 2 & 1 & 0\,|\,0 \end{pmatrix} F3{-}F2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\,|\,0 \\ 2 & 0 & 1\,|\,0 \\ 0 & 1 & -1\,|\,0 \end{pmatrix} F2-2F1 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\,|\,0 \\ 0 & 2 & -3\,|\,0 \\ 0 & 1 & -1\,|\,0 \end{pmatrix} 2F3{-}F2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\,|\,0 \\ 0 & 2 & -3\,|\,0 \\ 0 & 0 & 1\,|\,0 \end{pmatrix} \frac{F2}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\,|\,0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2}\,|\,0 \\ 0 & 0 & 1\,|\,0 \end{pmatrix}$$

Pasando en limpio se evidencia que el sistema de ecuaciones tiene como soluicón única la solución trivial, por lo que se puede inferir que los elementos son **Linealmente independientes**.

$$\begin{cases} C_3 = 0 \\ C_2 - \frac{3}{2}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ C_1 - 1(0) + 2(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases}$$

Procedemos a calcular el determinante con los autovectores que se encontraron. Para ello armamos una matriz M y calculamos el determinante mediante Sarrus:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinante sería:

$$det(M) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$[0 + (2 * 1 * 2) + (2 * (-1) * 1)] - [0 + (1 * 1 * 1) + (0)] =$$

$$[0 + 4 + (-2)] - [0 + 1 + 0] =$$

$$2 - 1 = 1$$

Por lo que se tiene que el determinante de la Matriz M es distinto de cero. Cabe recordar que en una matriz cuadrada, si se establece que el determinante es distinto de cero, siendo su rango igual que el número de incógnitas, el sistema tiene solución única (comprobándose anteriormente que es la trivial) entonces los vectores son **linealmente independientes**.

Entonces se comprueba que:

$$\vec{W} \in \mathbb{R}^3 : a\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{W}$$

Se obtiene el sistema con matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & \vec{W}_1\\2 & 0 & 1 & \vec{W}_2\\2 & 1 & 0 & \vec{W}_3\end{array}\right)$$

Se observó que la matriz de coeficientes tiene rango 3, por lo cual la matriz ampliada también debe tener rango 3. Además, el sistema tiene tres incógnitas, demostrándose que tiene solución única. Cualquier vector $\vec{W} \in \mathbb{R}^3$ se puede generar como combinación lineal de los vectores del conjunto.

Por lo tanto el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

d) Recordemos que diagonalizar una matriz cuadrada es halla la matriz invertible $C \in \mathbb{R}^{nxn}$ que cumple con $D = C^{-1} * A * C$
Procedemos a diagonalizar la matriz A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) F3 - F2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right) F2 - 2F1 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right) 2F3 - F2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2\end{array}\right) 3F1 + 2F2 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2\end{array}\right) F2 + 3F3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 4 & -8 & 6\\0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2\end{array}\right) \frac{F2}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 3\\0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2\end{array}\right) F1 - F2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3\\0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 3\\0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2\end{array}\right) \frac{F1}{3} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 3\\0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2\end{array}\right)$$

Por lo tanto se obtiene que la matriz Inversa es:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\2 & -4 & 3\\2 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

Entonces sustituyendo lo encontrado en la ecuación:

$$C^{-1} * A * C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 6 & -10 & 6 \\ 6 & -12 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Procedemos a realizar el producto punto entre A y C.
Empezamos con la primer fila de A y todas las columnas de C:

- $$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$ $$5 + (-12) + 6 = -1$$
- $$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$ $$-5 + 0 + 3 = -2$$
- $$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$ $$10 - 6 + 0 = 4$$

Continuamos con la segunda fila de A y todas las columnas de C:

- $$\begin{pmatrix} 6 & -10 & 6 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$ $$6 + (-20) + 12 = -2$$
- $$\begin{pmatrix} 6 & -10 & 6 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$ $$-6 + 0 + 6 = 0$$
- $$\begin{pmatrix} 6 & -10 & 6 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$ $$12 + (-10) + 0 = 2$$

Finalmente realizamos las operaciones con la tercer fila de A y todas las columnas de C:

- $$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
  $$6 + (-24) + 16 = -2$$

- $$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
  $$-6 + 0 + 8 = 2$$

- $$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
  $$12 + (-12) + 0 = 0$$

Obteniendo el producto entre las matrices A y C:

$$A * C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} *$$

4. Herramientas

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo

Para la resolución de los presentes ejercicios se utilizaron las siguientes herramientas:

1. Arch Linux V5.1.11
2. Para la composición del presente Informe se utilizó el paquete *texlive-latexextra 2018.50031-1*
3. Las imágenes pertenecen al software *Geogebra 6.0.574.0-2.*

Índice de comentarios

11.1 Falta multiplicar por la inversa de C, y verificar que el resultado es la matriz diagonal.