Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Matemática II

TP nº 4

Salvatori Emiliano

Junio del 2020

Índice

1. Introducción

En el siguiente trabajo se detalla las soluciones llevadas a cabo para la materia **Matemática II** para la **Comisión nº 6** sobre el tema **Plano tangente. Extremos locales y absolutos**.

2. Ejercicios

Ejercicio nº 1

Halle la ecuación del plano tangente al paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ que contenga a los puntos $P(0, 1, -1)$ y $Q(1, 1, 1)$.

Ejercicio nº 2

1. Halle el valor del parámetro a para la función $g(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy$ posea un punto crítico en el punto $(1, 1)$.
2. Con el valor de a hallado, encuentre todos los puntos críticos de la función g y clasifíquelo. ¿Cuál o cuáles son los valores extremos de g ?.

Ejercicio nº 3

Considere la función $f(x, y) = x + y^2$ y la curva $C : x^2 + y^2 = 1$.

1. Dibuje la curva C y las curvas de nivel -1; 0; 0,5; 1; 1,25 de f.
2. Si se quiere encontrar un mínimo de f sobre C, marque en el dibujo anterior, los posibles candidatos.
3. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar el mínimo de f sobre C.

3. Resoluciones

3.1. Ejercicio nº 1

Se tienen la siguente función: $x^2 + y^2 - z = 0$
Se sabe que los dos puntos $P(0, 1, -1)$ y $Q(1, 1, 1)$ deben pertenecer al plano tangente.

3.1.1. Evaluación de los puntos P y Q

Lo que primero hacemos es evaluar cada uno de los puntos en la función, para saber si pertenecen o no a su dominio:

- Evaluamos primero el punto P:

$$\begin{aligned}
f(0,1,-1) &: 0^2+1^2-(-1)=0\\
f(0,1,-1) &: 1^2+1=0\\
f(0,1,-1) &: 1+1=0\\
f(0,1,-1) &: 2\neq 0
\end{aligned}$$

  Evidenciamos que el punto P **no pertenece** al dominio de la función.

- Y luego el punto Q:

$$\begin{aligned}
f(1,1,1) &: 1^2+1^2-1=0\\
f(1,1,1) &: 1+1-1=0\\
f(1,1,1) &: 1\neq 0
\end{aligned}$$

  Evidenciamos que el punto Q **tampoco pertenece** al dominio de la función.

3.1.2. Obtención del gradiente de la función

Debido a que para construir un plano, se deben tener como mínimo 3 puntos, entonces será necesario generar un tercer punto R que pertenezca al dominio de la función y también al plano tangente, por lo que lo denominaremos de la siguente forma:

$$R(x,y,z)$$

Como se quiere obtener el plano tangente, será necesario obtener el gradiente de la función, el cual se obtiene derivando respecto de cada una de las variables de la función:

- Derivamos primero a fx, considerando a las demás variables como constantes:

$$fx=2x$$

- Derivamos primero a fy, considerando a las demás variables como constantes:

$$fy=2y$$

- Derivamos primero a fz, considerando a las demás variables como constantes:

$$fz=-1$$

Por lo que el gradiente de f resulta ser:

$$\vec{\bigtriangledown}f(x,y,z):\langle 2x,2y,-1\rangle$$

3.1.3. Producto cruz entre los vectores

Ya tenemos los 3 puntos, los cuales son: P, Q y R, y el gradiente de f. Primero generamos 2 vectores con estos 3 puntos (teniendo en común el punto R); con esto nos aseguramos que al realizar el **producto cruz** con el gradiente de f el resultado será cero, ya que el plano será tangente al punto R que estamos tratando de hallar.

Los vectores son:

- $\vec{RP} = \begin{pmatrix} 0-x \\ 1-y \\ -1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -1-z \end{pmatrix}$
- $\vec{RQ} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ 1-z \end{pmatrix}$

Ahora bien, como se dijo anteriormente, sabemos que para obtener un vector perpendicular, será necesario que el producto cruz entre los vectores RP y RQ y el gradiente de f sea **cero**:

- Primero realicemos el Producto Cruz entre $\vec{\bigtriangledown} f(x,y,z)$ y $\vec{RP}$:
  $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -1-z \end{pmatrix} = -2x^2 + 2y - 2y^2 + 1 + z = 0$
- Ahora, pasemos a realizar el Producto Cruz entre $\vec{\bigtriangledown} f(x,y,z)$ y $\vec{RQ}$:
  $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ 1-z \end{pmatrix} = 2x - 2x^2 + 2y - 2y^2 - 1 + z = 0$

Por lo tanto se tiene un sistema de ecuaciones donde una es la función original, a la que tiene que pertenecer el punto R y las otras dos las resultantes del producto cruz entre el gradiente y los dos vectores:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0(a) \\ -2x^2 + 2y - 2y^2 + 1 + z = 0(b) \\ 2x - 2x^2 + 2y - 2y^2 - 1 + z = 0(c) \end{cases}$$

Se puede ver a simple vista, que se pueden operar con las dos últimas ecuaciones ((b) y (c)) realizado sumas y restas. Multiplicando a la segunda por -1 y luego realizando una suma, nos quedaría:

$$-2x^2 + 2y - 2y^2 + 1 + z = 0$$
$$-2x + 2x^2 - 2y + 2y^2 + 1 - z = 0$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} -2x + 2 &= 0 \\ 2 &= 2x \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Este resultado lo evaluamos en la función original (a):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z &= 0 \\ 1^2 + y^2 - z &= 0 \\ 1 + y^2 &= z \end{aligned}$$

Y ahora evaluamos en (b) lo obtenido tanto para x como para z:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2y - 2y^2 + 1 + z &= 0 \\ -2(1)^2 + 2y - 2y^2 + 1 + (1 + y^2) &= 0 \\ -2 + 2y - 2y^2 + 2 + y^2 &= 0 \\ 2y - 2y^2 + y^2 &= 0 \\ 2y - y^2 &= 0 \\ y(2 - y) &= 0 \end{aligned}$$

3.1.4. Puntos obtenidos y evaluación en el dominio de f

Ahora bien, tenemos dos posibles resultados:

- Si **y = 0**, entonces obtenemos R_1:

  $$\begin{aligned} &x = 1 \\ &y = 0 \\ &z = 1 + (0)^2 = 1 \end{aligned}$$

  $R_1 : \langle 1, 0, 1 \rangle$

- Si **y = 2**, entonces obtenemos R_2:

  $$\begin{aligned} &x = 1 \\ &y = 0 \\ &z = 1 + (2)^2 = 5 \end{aligned}$$

  $R_2 : \langle 1, 2, 5 \rangle$

Evaluemos si estos puntos obtenidos, satisfacen la condición de pertenecer al dominio de nuestra función inicial:

- Para el punto R_1:

$$f(x,y,z) : x^2 + y^2 - z = 0$$
$$f(1,0,1) : 1^2 + 0^2 - 1 = 0$$
$$f(1,0,1) : 1 - 1 = 0$$
$$f(1,0,1) : 0 = 0$$

Efectivamente el punto R_1 **pertenece** al dominio de la función.

- Ahora para el punto R_2:

$$f(x,y,z) : x^2 + y^2 - z = 0$$
$$f(1,2,5) : 1^2 + 2^2 - 5 = 0$$
$$f(1,2,5) : 1 + 4 - 5 = 0$$
$$f(1,2,5) : 0 = 0$$

Nuevamente el punto R_2 también **pertenece** al dominio de la función.

3.1.5. Obtención de las ecuciones del Plano Tangente

Tenemos dos puntos que satisfacen la condición de pertenecer a la función y de al evaluarlos en el gradiente de f se obtiene un vector perpendicular. Veamos de obtener las ecuaciones del **Plano Tangente**:

1. Obtenemos primero el **Vector perpendicular** basándonos en R_1:

$$\vec{\bigtriangledown} f(x,y,z) : \langle 2x, 2y, -1 \rangle$$
$$\vec{\bigtriangledown} f R_1(1,0,1) : \langle 2(1), 2(0), -1 \rangle$$
$$\vec{\bigtriangledown} f R_1(1,0,1) : \langle 2, 0, -1 \rangle$$

Sabemos que la ecuación del plano General o Implícita, siendo a, b, c las componentes del vector normal $\vec{n}$, y x_0, y_0, z_0 un punto perteneciente al plano, es la siguiente:

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Suplantamos y obtenemos:

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$\pi_1 : 2(x - 1) + 0(y - 0) - 1(z - 1) = 0$$
$$\pi_1 : 2(x - 1) - 1(z - 1) = 0$$
$$\pi_1 : 2x - 2 - z + 1 = 0$$
$$\pi_1 : 2x - z - 1 = 0$$
$$\pi_1 : 2x - z = 1$$

2. Nuevamente obtenemos primero el **Vector perpendicular** pero ahora, basándonos en R_2:

$$\vec{\bigtriangledown} f(x, y, z) : \langle 2x, 2y, -1\rangle$$
$$\vec{\bigtriangledown} f R_2(1, 2, 5) : \langle 2(1), 2(2), -1\rangle$$
$$\vec{\bigtriangledown} f R_2(1, 2, 5) : \langle 2, 4, -1\rangle$$

Suplantamos en la ecuación General del Plano y obtenemos:

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$\pi_2 : 2(x - 1) + 4(y - 2) - 1(z - 5) = 0$$
$$\pi_2 : 2(x - 1) + 4(y - 2) - 1(z - 5) = 0$$
$$\pi_2 : 2x - 2 + 4y - 8 - z + 5 = 0$$
$$\pi_2 : 2x + 4y - z - 5 = 0$$
$$\pi_2 : 2x + 4y - z = 5$$

Por lo tanto, obtuvimos dos ecuaciones de dos planos distintos:

1. Por un lado el plano π_1:
$$\boxed{\pi_1 : 2x - z = 1}$$

2. Por otro lado, el plano π_2:
$$\boxed{\pi_2 : 2x + 4y - z = 5}$$

3.1.6. Evaluación de P y Q en las ecuaciones

Ahora veremos si los puntos P y Q pertenecen a las ecuaciones del Plano Tangente obtenidas:

1. Comencemos con el plano π_1 y el punto P:

$$\pi_1(0, 1, -1) : 2x - z = 1$$
$$\pi_1(0, 1, -1) : 2(0) - (-1) = 1$$
$$\pi_1(0, 1, -1) : 1 = 1$$

Ahora con el punto Q:

$$\pi_1(1, 1, 1) : 2x - z = 1$$
$$\pi_1(1, 1, 1) : 2(1) - (1) = 1$$
$$\pi_1(1, 1, 1) : 1 = 1$$

Como podemos observar, tanto el punto P como el punto Q, **pertenecen** al plano π_1.

2. Ahora sigamos con el plano π_2 y el punto P:

$$\begin{aligned}
&\pi_2(0,1,-1) : 2x + 4y - z = 5\\
&\pi_2(0,1,-1) : 2(0) + 4(1) - (-1) = 5\\
&\pi_2(0,1,-1) : 4 + 1 = 5\\
&\pi_2(0,1,-1) : 5 = 5
\end{aligned}$$

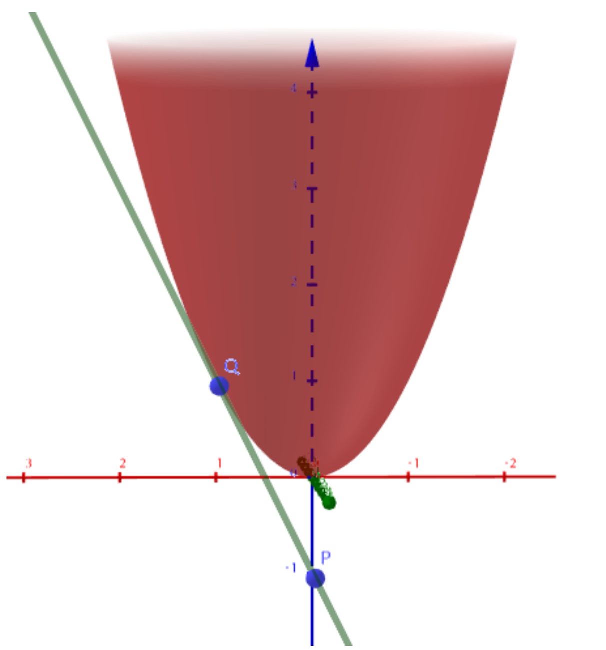
Ahora con el punto Q:

$$\begin{aligned}
&\pi_2(1,1,1) : 2x + 4y - z = 5\\
&\pi_2(1,1,1) : 2(1) + 4(1) - (1) = 5\\
&\pi_2(1,1,1) : 2 + 4 - 1 = 5\\
&\pi_2(1,1,1) : 6 - 1 = 5\\
&\pi_2(1,1,1) : 5 = 5
\end{aligned}$$

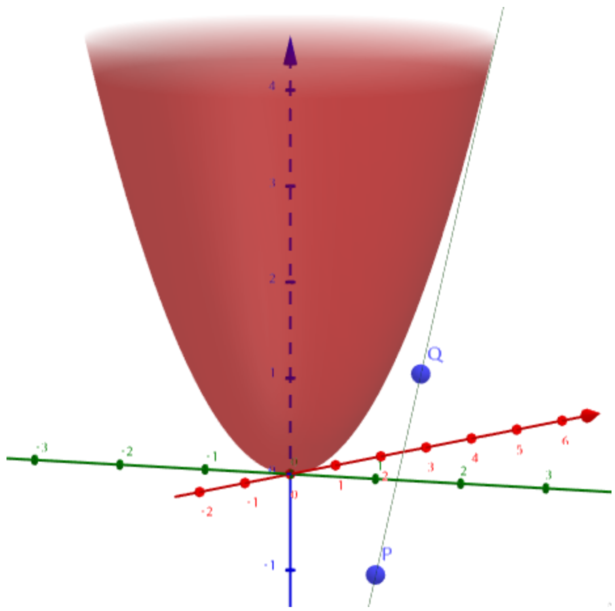
Nuevamente podemos observar que tanto el punto P como Q, **pertenecen** al plano π_2.

3.1.7. Grafica de los planos hallados

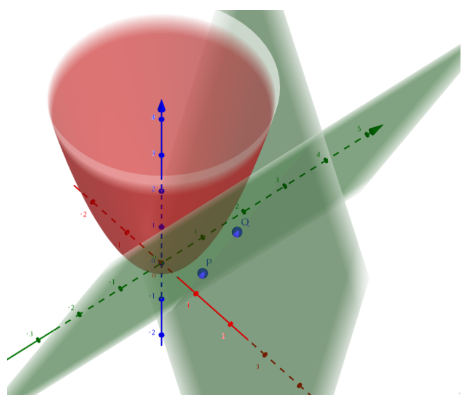
En la siguiente gráfica podemos observar los puntos **P** y **Q** en el plano π_1:



Y ahora para el plano π_2:



Y en la siguiente los dos planos de forma simultánea:



3.2. Ejercicio nº 2

Tenemos la función $g(x, y) : x^3 + y^3 + 3axy$ debiéndose hallar el valor de a para que posea un punto crítico en $Q(1, 1)$.

3.2.1. Obtención del valor de a

Sabemos por definición, que se denomina como *Punto crítico* de una función $f(x, y)$ a un punto interior del dominio donde f_x y f_y valen 0, o donde alguna de ellas no existe. Por lo tanto, primero derivamos respecto de las dos variables:

- Derivamos la función obteniendo f_x:

$$f_x : 3x^2 + 3ay$$

- Derivamos la función obteniendo f_y:

$$f_y : 3y^2 + 3ax$$

Sabemos que para que exista un punto crítico, el resultado de la evaluación en el punto Q deberá ser igual a cero, por lo tanto:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3ay = 0 \\ 3y^2 + 3ax = 0 \end{cases}$$

Evaluamos en el punto Q:

$$\begin{cases} 3(1)^2 + 3a(1) = 0 \\ 3(1)^2 + 3a(1) = 0 \end{cases}$$

Pasamos a desarrollar:

- Para f_x:

$$\begin{aligned} &f_x : 3(1)^2 + 3a(1) = 0 \\ &f_x : 3 + 3a = 0 \\ &f_x : 3a = -3 \\ &f_x : a = -1 \end{aligned}$$

- Para f_y que será igual:

$$\begin{aligned} &f_y : 3(1)^2 + 3a(1) = 0 \\ &f_y : 3 + 3a = 0 \\ &f_y : 3a = -3 \\ &f_y : a = -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor buscado es $a = -1$.

3.2.2. Hallar Puntos Críticos

Ahora que tenemos que $a = -1$ pasamos a obtener todos los puntos críticos de la función para su posterior clasificación. Para ello primero reemplazamos el valor de a para obtener la función resultante:

$$\begin{aligned} &f(x, y) : x^3 + y^3 + 3(-1)xy \\ &f(x, y) : x^3 + y^3 - 3xy \end{aligned}$$

La función con la que trabajaremos será:

$$\boxed{f(x, y) : x^3 + y^3 - 3xy}$$

Obtenemos las derivadas con respecto tanto a x como a y:

- Para f_x:

$$f_x : 3x^2 - 3y$$

- Para f_y:

$$f_y : 3y^2 - 3x$$

Generamos un sistema de ecuaciones, ya que por definición sabemos que las derivadas parciales serán cero en sus puntos críticos, como en el punto anterior:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Si despejamos de la primera ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3x^2 &= 3y \\ \frac{3x^2}{3} &= y \\ x^2 &= y \end{aligned}$$

Reemplazamos en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 3y^2 - 3x &= 0 \\ 3(x^2)^2 - 3x &= 0 \\ 3(x^4) - 3x &= 0 \\ 3x(x^3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Se evidencia que para que se cumpla la ecuación, los valores posibles serán $x = 0$ o $x = 1$.

- Si **x = 0**:

$$\begin{aligned} x^2 &= y \\ (0)^2 &= y \\ 0 &= y \end{aligned}$$

- En cambio, si **x = 1**:

$$x^2 = y$$
$$(1)^2 = y$$
$$1 = y$$

Por lo tanto los puntos críticos a evaluar serán **A : (1,1)** y **B : (0,0)**.

3.2.3. Criterio de la segunda derivada para extremos locales

Para una correcta clasificación de los puntos obtenidos, deberemos de evaluar según el criterio de las derivadas segundas, definiendo el Hessiano de f, como:

$$H(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Por lo tanto, obtengamos las derivadas segundas:

1. Sabíamos que la derivada respecto de x es f_x:

$$f_x : 3x^2 - 3y$$

   - Por lo tanto, tenemos para f_{xx}:

$$f_{xx} = 6x$$

   - Y para f_{xy}:

$$f_{xy} = -3$$

2. Por otro lado, que la derivada respecto de y es f_y:

$$f_y : 3y^2 - 3x$$

   - Por lo tanto, tenemos para f_{yy}:

$$f_{yy} = 6x$$

   - Y para f_{yx}:

$$f_{yx} = -3$$

Evaluamos el Hessiano, tanto en el punto **A** como en **B**:

$$H(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$
$$H(x, y) = 6x \cdot 6y - (-3)^2$$

En el punto **B : (0,0)**:

$$H(0,0) = 6(0) \cdot 6(0) - (-3)^2$$
$$H(0,0) = 0 \cdot 0 - 9$$
$$H(0,0) = -9$$

La clasificación dice que en caso de ser $H(1,1) < 0$ entonces se tiene un **punto silla** en **B**. El punto silla por definición, es un punto donde la pendiente es cero, pero **no se trata de un extremo local**. Por lo que restará evaluar el otro punto que nos queda.

Evaluemos en el punto **A : (1,1)**:

$$H(1,1) = 6(1) \cdot 6(1) - (-3)^2$$
$$H(1,1) = 6 \cdot 6 - 9$$
$$H(1,1) = 27$$

Como el Hessiano nos dió un resultado mayor a cero, según la clasificación de extremos locales, deberemos de ampararnos en el valor de f_{xx} evaluado en el punto, para determinar si es un mínimo o un máximo local. Por lo tanto, pasamos a evaluar $f_{xx}(1,1)$ para determinar si es mayor o menor a cero:

$$f_{xx}(1,1) = 6x$$
$$f_{xx}(1,1) = 6(1)$$
$$f_{xx}(1,1) = 6$$

La clasificación dice que en caso de ser $H(1,1) > 0$ y $f_{xx}(1,1) > 0$ se tiene en el punto **A : (1,1)** un **Mínimo Local**

Pasemos a evaluar el punto en la función:

$$f(x,y) : x^3 + y^3 - 3xy$$
$$f(1,1) : (1)^3 + (1)^3 - 3(1)(1)$$
$$f(1,1) : 1 + 1 - 3$$
$$f(1,1) : -1$$

El valor obtenido evaluado en el punto **A** es de -1, es decir, ese valor será el punto mínimo local, proyectado en el eje z

3.2.4. Grafico de los puntos hallados

En la **Figura nº 1** se puede observar el punto **B**, sobre el eje de coordenadas, el cual efectivamente es un **punto silla** También se puede observar en esta misma imagen, el punto **A**, situado dentro de la función y sobre un **Mínimo Local**.

Como se dijo anteriormente, el punto **A** tiene su proyección en el eje z (eje pintado de azul) con el valor -1, donde la función alcanza un mínimo local. Esto se puede ver mejor en la **Figura nº 2**:

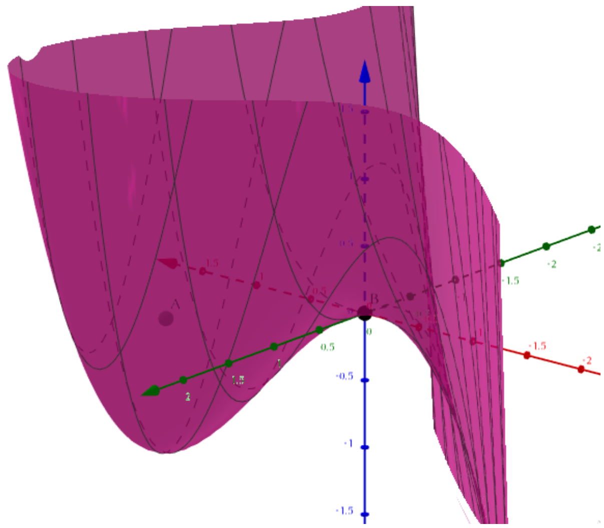


Figura 1: Punto Silla y Mínimo Local

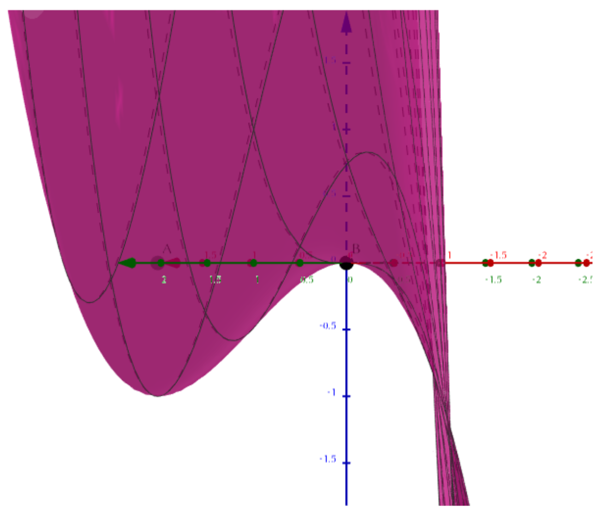


Figura 2: Mínimo Local en el punto A

3.3. Ejercicio nº 3

3.3.1. Grafico de C y sus curvas de nivel

En la **Figura nº 3** se puede visualizar tanto la función C, sus curvas de nivel condicionadas por f y los puntos candidatos a extremos absolutos.

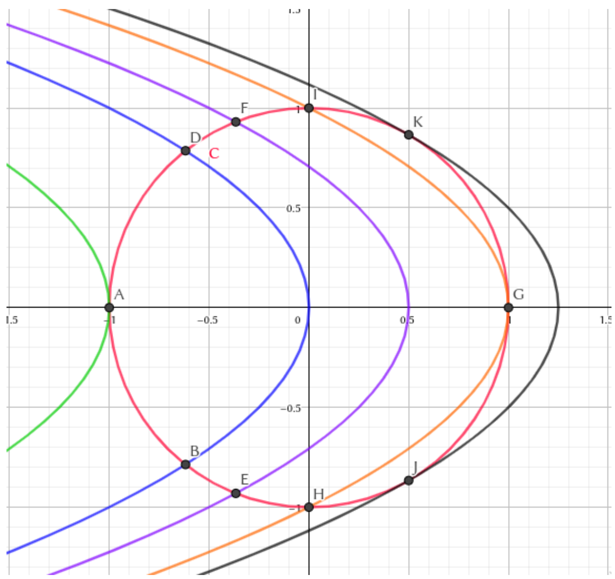


Figura 3: Curvas de nivel sobre C, y sus posibles extremos absolutos

3.3.2. Lagrange y mínimos de f sobre C

Recordaremos que habrá que trabajar con las siguientes funciones:

$$f(x,y) = x + y^2$$
$$C : x^2 + y^2 = 1$$

Sabemos que según el **Método de los multiplicadores de Lagrange** para determinar los extremos absolutos de f en la curva dada por la función a optimizar, hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \vec{\bigtriangledown} f(x,y) = \lambda \cdot \vec{\bigtriangledown} g(x,v) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Calculando los gradientes obtenemos:

$$\begin{cases} \langle 1, 2y \rangle = \lambda \cdot \langle 2x; 2y \rangle \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Como es una igualdad entre vectores, la primera ecuación genera dos ecuacioens, y el sistema desarrollado nos queda:

$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 2y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Tomamos la segunda y la desarrollamos:

$$2y = \lambda \cdot 2y$$
$$2y - \lambda \cdot 2y = 0$$
$$2y(1 - \lambda) = 0$$

Como vemos, las posibles soluciones pueden ser:

1. **y = 0**
2. λ **= 1**

1. Desarrollamos primero la primer alternativa, es decir $y = 0$:
   - Reemplazamos en la tercera ecuación de nuestro sistema de 3 ecuaciones:

   $$x^2 + 0^2 = 1$$
   $$x = \sqrt{1}$$
   $$x = \pm 1$$

   - Para $x = 1$, tenemos:

   $$1 = \lambda \cdot 2 \cdot 1$$
   $$\lambda = \frac{1}{2}$$

   - Para $x = -1$ tenemos:

   $$-1 = \lambda \cdot 2 \cdot 1$$
   $$\lambda = -\frac{1}{2}$$

   Por lo tanto tenemos dos puntos:

   - El punto $(1, 0)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$
   - El punto $(-1, 0)$ con $\lambda = -\frac{1}{2}$

2. Desarrollemos ahora la segunda alternativa, es decir $\lambda = 1$:

   Reemplazamos en la primera ecuación de nuestro sistema de tres ecuaciones:

   $$1 = 1 \cdot 2x$$
   $$x = \frac{1}{2}$$

Ahora reemplazamos en la tercer ecuación:

$$
\begin{aligned}
(\frac{1}{2})^2 + y^2 &= 1 \\
y^2 &= 1 - \frac{1}{4} \\
y &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\
y &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos dos puntos:

- El punto $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ con $\lambda = 1$
- El punto $(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ con $\lambda = 1$

Ahora bien, nos toca evaluar cada uno de los cuatro puntos obtenidos dentro de nuestra función f, es decir:

$$\boxed{f(x, y) = x + y^2}$$

1. Para el punto $f(1, 0)$:
$$f(1, 0) = 1 + 0^2 = 1$$
2. Para el punto $f(-1, 0)$:
$$f(-1, 0) = -1 + 0^2 = -1$$
3. Para el punto $f(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$:
$$f(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$
4. Para el punto $f(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$:
$$f(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Como se puede evidenciar, el **Mínimo Absoluto** se alcanza en el punto $A : (-1; 0)$, con un valor de -1, tal y como se puede visualizar en la **Figura nº 3**.

4. Herramientas

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo

Para la resolución de los presentes ejercicios se utilizaron las siguientes herramientas:

1. Arch Linux V5.1.11

2. Para la composición del presente Informe se utilizó el paquete *texlive-latexextra 2018.50031-1*

3. Las imágenes pertenecen al software *Geogebra 6.0.574.0-2.*