



Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Matemática II

TP n° 4

Salvatori Emiliano

Junio del 2020

Índice

1. Introducción	3
2. Ejercicios	3
3. Resoluciones	3
3.1. Ejercicio nº 1	3
3.1.1. Evaluación de los puntos P y Q	3
3.1.2. Obtención del gradiente de la función	4
3.1.3. Producto cruz entre los vectores	5
3.1.4. Puntos obtenidos y evaluación en el dominio de f	6
3.1.5. Obtención de las ecuaciones del Plano Tangente	7
3.1.6. Evaluación de P y Q en las ecuaciones	8
3.1.7. Grafica de los planos hallados	9
3.2. Ejercicio nº 2	10
3.2.1. Obtención del valor de a	10
3.2.2. Hallar Puntos Críticos	11
3.2.3. Criterio de la segunda derivada para extremos locales	13
3.2.4. Grafico de los puntos hallados	14
3.3. Ejercicio nº 3	15
3.3.1. Grafico de C y sus curvas de nivel	15
3.3.2. Lagrange y mínimos de f sobre C	16
4. Herramientas	19
4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo	19

1. Introducción

En el siguiente trabajo se detalla las soluciones llevadas a cabo para la materia **Matemática II** para la **Comisión n° 6** sobre el tema **Plano tangente. Extremos locales y absolutos**.

2. Ejercicios

Ejercicio n° 1

Halle la ecuación del plano tangente al paraboloides $x^2 + y^2 - z = 0$ que contenga a los puntos $P(0, 1, -1)$ y $Q(1, 1, 1)$.

Ejercicio n° 2

1. Halle el valor del parámetro a para la función $g(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy$ posea un punto crítico en el punto $(1, 1)$.
2. Con el valor de a hallado, encuentre todos los puntos críticos de la función g y clasifíquelo. ¿Cuál o cuáles son los valores extremos de g ?

Ejercicio n° 3

Considere la función $f(x, y) = x + y^2$ y la curva $C : x^2 + y^2 = 1$.

1. Dibuje la curva C y las curvas de nivel $-1; 0; 0,5; 1; 1,25$ de f .
2. Si se quiere encontrar un mínimo de f sobre C , marque en el dibujo anterior, los posibles candidatos.
3. Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar el mínimo de f sobre C .

3. Resoluciones

3.1. Ejercicio n° 1

Se tienen la siguiente función: $x^2 + y^2 - z = 0$

Se sabe que los dos puntos $P(0, 1, -1)$ y $Q(1, 1, 1)$ deben pertenecer al plano tangente.

3.1.1. Evaluación de los puntos P y Q

Lo que primero hacemos es evaluar cada uno de los puntos en la función, para saber si pertenecen o no a su dominio:

- Evaluamos primero el punto P :

$$f(0, 1, -1) : 0^2 + 1^2 - (-1) = 0$$

$$f(0, 1, -1) : 1^2 + 1 = 0$$

$$f(0, 1, -1) : 1 + 1 = 0$$

$$f(0, 1, -1) : 2 \neq 0$$

Evidenciamos que el punto P **no pertenece** al dominio de la función.

- Y luego el punto Q :

4.1

$$f(1, 1, 1) : 1^2 + 1^2 - 1 = 0$$

$$f(1, 1, 1) : 1 + 1 - 1 = 0$$

$$f(1, 1, 1) : 1 \neq 0$$

Evidenciamos que el punto Q **tampoco pertenece** al dominio de la función.

3.1.2. Obtención del gradiente de la función

Debido a que para construir un plano, se deben tener como mínimo 3 puntos, entonces será necesario generar un tercer punto R que pertenezca al dominio de la función y también al plano tangente, por lo que lo denominaremos de la siguiente forma:

$$R(x, y, z)$$

Como se quiere obtener el plano tangente, será necesario obtener el gradiente de la función, el cual se obtiene derivando respecto de cada una de las variables de la función:

- Derivamos primero a fx , considerando a las demás variables como constantes:

$$fx = 2x$$

- Derivamos primero a fy , considerando a las demás variables como constantes:

$$fy = 2y$$

- Derivamos primero a fz , considerando a las demás variables como constantes:

$$fz = -1$$

Por lo que el gradiente de f resulta ser:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) : \langle 2x, 2y, -1 \rangle$$



3.1.3. Producto cruz entre los vectores

Ya tenemos los 3 puntos, los cuales son: P , Q y R , y el gradiente de f . Primero generamos 2 vectores con estos 3 puntos (teniendo en común el punto R); con esto nos aseguramos que al realizar el **producto cruz** con el gradiente de f el resultado será cero, ya que el plano será tangente al punto R que estamos tratando de hallar.

Los vectores son:

$$\begin{aligned} \blacksquare \vec{RP} &= \begin{pmatrix} 0-x \\ 1-y \\ -1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -1-z \end{pmatrix} \\ \blacksquare \vec{RQ} &= \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ 1-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora bien, como se dijo anteriormente, sabemos que para obtener un vector perpendicular, será necesario que el producto cruz entre los vectores RP y RQ y el gradiente de f sea **cero**:

- Primero realicemos el **Producto Cruz** entre $\vec{\nabla}f(x, y, z)$ y \vec{RP} :

5.1

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -1-z \end{pmatrix} = -2x^2 + 2y - 2y^2 + 1 + z = 0$$

- Ahora, pasemos a realizar el **Producto Cruz** entre $\vec{\nabla}f(x, y, z)$ y \vec{RQ} :

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ 1-z \end{pmatrix} = 2x - 2x^2 + 2y - 2y^2 - 1 + z = 0$$

Por lo tanto se tiene un sistema de ecuaciones donde una es la función original, a la que tiene que pertenecer el punto R y las otras dos las resultantes del producto cruz entre el gradiente y los dos vectores:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0(a) \\ -2x^2 + 2y - 2y^2 + 1 + z = 0(b) \\ 2x - 2x^2 + 2y - 2y^2 - 1 + z = 0(c) \end{cases} \quad \checkmark$$

Se puede ver a simple vista, que se pueden operar con las dos últimas ecuaciones ((b) y (c)) realizado sumas y restas. Multiplicando a la segunda por -1 y luego realizando una suma, nos quedaría:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2y - 2y^2 + 1 + z &= 0 \\ -2x + 2x^2 - 2y + 2y^2 + 1 - z &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo:

$$-2x + 2 = 0$$

$$2 = 2x$$

$$1 = x$$



Este resultado lo evaluamos en la función original (a):

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

$$1^2 + y^2 - z = 0$$

$$1 + y^2 = z$$



Y ahora evaluamos en (b) lo obtenido tanto para x como para z :

$$-2x^2 + 2y - 2y^2 + 1 + z = 0$$

$$-2(1)^2 + 2y - 2y^2 + 1 + (1 + y^2) = 0$$

$$-2 + 2y - 2y^2 + 2 + y^2 = 0$$

$$2y - 2y^2 + y^2 = 0$$

$$2y - y^2 = 0$$

$$y(2 - y) = 0$$



3.1.4. Puntos obtenidos y evaluación en el dominio de f

Ahora bien, tenemos dos posibles resultados:

- Si $y = 0$, entonces obtenemos R_1 :

$$x = 1$$

$$y = 0$$

$$z = 1 + (0)^2 = 1$$

$$\underline{R_1 : (1, 0, 1)}$$

- Si $y = 2$, entonces obtenemos R_2 :

6.1

$$x = 1$$

$$y = 0$$

$$z = 1 + (2)^2 = 5$$

$$\underline{R_2 : (1, 2, 5)}$$

Evaluemos si estos puntos obtenidos, satisfacen la condición de pertenecer al dominio de nuestra función inicial:

- Para el punto R_1 :

$$f(x, y, z) : x^2 + y^2 - z = 0$$

$$f(1, 0, 1) : 1^2 + 0^2 - 1 = 0$$

$$f(1, 0, 1) : 1 - 1 = 0$$

$$f(1, 0, 1) : 0 = 0$$

Efectivamente el punto R_1 **pertenece** al dominio de la función.

- Ahora para el punto R_2 :

7.1

$$f(x, y, z) : x^2 + y^2 - z = 0$$

$$f(1, 2, 5) : 1^2 + 2^2 - 5 = 0$$

$$f(1, 2, 5) : 1 + 4 - 5 = 0$$

$$f(1, 2, 5) : 0 = 0$$

Nuevamente el punto R_2 también **pertenece** al dominio de la función.

3.1.5. Obtención de las ecuaciones del Plano Tangente

Tenemos dos puntos que satisfacen la condición de pertenecer a la función y de al evaluarlos en el gradiente de f se obtiene un vector perpendicular. Veamos de obtener las ecuaciones del **Plano Tangente**:

1. Obtenemos primero el **Vector perpendicular** basándonos en R_1 :

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) : \langle 2x, 2y, -1 \rangle$$

$$\vec{\nabla} f_{R_1}(1, 0, 1) : \langle 2(1), 2(0), -1 \rangle$$

$$\vec{\nabla} f_{R_1}(1, 0, 1) : \langle 2, 0, -1 \rangle$$

Sabemos que la ecuación del plano General o Implícita, siendo a, b, c las componentes del vector normal \vec{n} , y x_0, y_0, z_0 un punto perteneciente al plano, es la siguiente:

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Suplantamos y obtenemos:

$$\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\pi_1 : 2(x - 1) + 0(y - 0) - 1(z - 1) = 0$$

$$\pi_1 : 2(x - 1) - 1(z - 1) = 0$$

$$\pi_1 : 2x - 2 - z + 1 = 0$$

$$\pi_1 : 2x - z - 1 = 0$$

$$\pi_1 : 2x - z = 1$$



2. Nuevamente obtenemos primero el **Vector perpendicular** pero ahora, basándonos en R_2 :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(x, y, z) &: \langle 2x, 2y, -1 \rangle \\ \vec{\nabla} f R_2(1, 2, 5) &: \langle 2(1), 2(2), -1 \rangle \\ \vec{\nabla} f R_2(1, 2, 5) &: \langle 2, 4, -1 \rangle\end{aligned}$$

Suplantamos en la ecuación General del Plano y obtenemos:

$$\begin{aligned}\pi &: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ \pi_2 &: 2(x - 1) + 4(y - 2) - 1(z - 5) = 0 \\ \pi_2 &: 2(x - 1) + 4(y - 2) - 1(z - 5) = 0 \\ \pi_2 &: 2x - 2 + 4y - 8 - z + 5 = 0 \\ \pi_2 &: 2x + 4y - z - 5 = 0 \\ \pi_2 &: 2x + 4y - z = 5\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtuvimos dos ecuaciones de dos planos distintos:

1. Por un lado el plano π_1 :

$$\pi_1 : 2x - z = 1$$

2. Por otro lado, el plano π_2 :

$$\pi_2 : 2x + 4y - z = 5$$

3.1.6. Evaluación de P y Q en las ecuaciones

Ahora veremos si los puntos P y Q pertenecen a las ecuaciones del Plano Tangente obtenidas:

1. Comencemos con el plano π_1 y el punto P :

$$\begin{aligned}\pi_1(0, 1, -1) &: 2x - z = 1 \\ \pi_1(0, 1, -1) &: 2(0) - (-1) = 1 \\ \pi_1(0, 1, -1) &: 1 = 1\end{aligned}$$

Ahora con el punto Q :

$$\begin{aligned}\pi_1(1, 1, 1) &: 2x - z = 1 \\ \pi_1(1, 1, 1) &: 2(1) - (1) = 1 \\ \pi_1(1, 1, 1) &: 1 = 1\end{aligned}$$

Como podemos observar, tanto el punto P como el punto Q , **pertenecen** al plano π_1 .

2. Ahora sigamos con el plano π_2 y el punto P :

$$\pi_2(0, 1, -1) : 2x + 4y - z = 5$$

$$\pi_2(0, 1, -1) : 2(0) + 4(1) - (-1) = 5$$

$$\pi_2(0, 1, -1) : 4 + 1 = 5$$

$$\pi_2(0, 1, -1) : 5 = 5$$



Ahora con el punto Q :

$$\pi_2(1, 1, 1) : 2x + 4y - z = 5$$

$$\pi_2(1, 1, 1) : 2(1) + 4(1) - (1) = 5$$

$$\pi_2(1, 1, 1) : 2 + 4 - 1 = 5$$

$$\pi_2(1, 1, 1) : 6 - 1 = 5$$

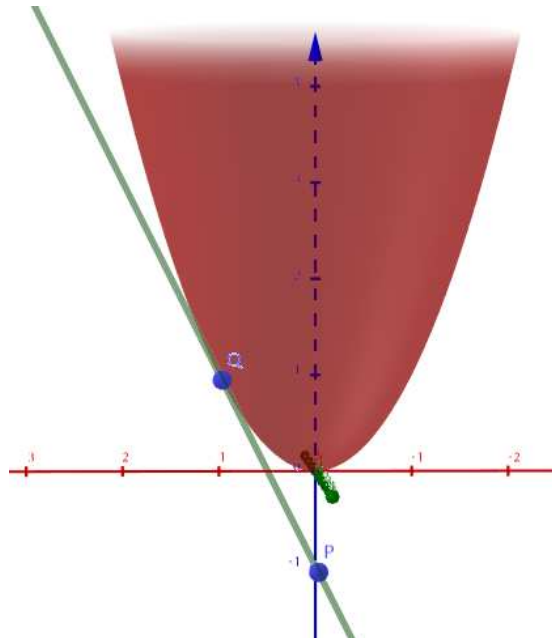
$$\pi_2(1, 1, 1) : 5 = 5$$



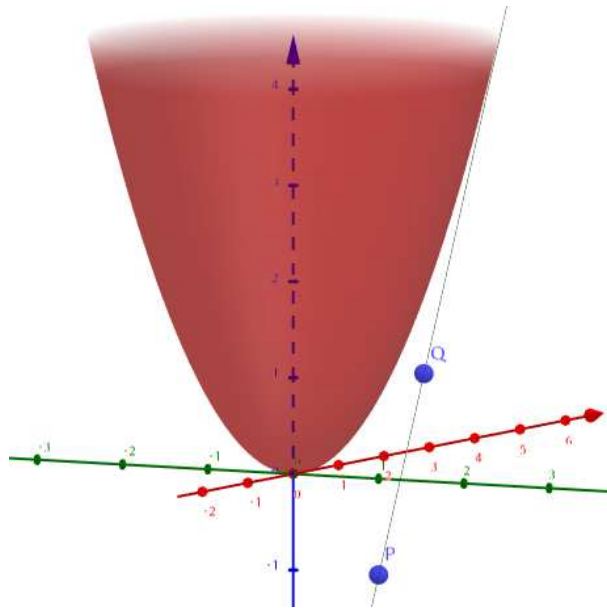
Nuevamente podemos observar que tanto el punto P como Q , **pertenecen** al plano π_2 .

3.1.7. Grafica de los planos hallados

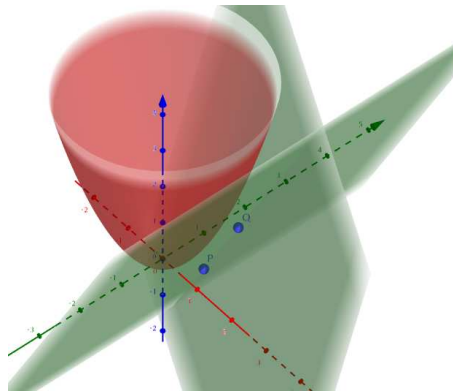
En la siguiente gráfica podemos observar los puntos P y Q en el plano π_1 :



Y ahora para el plano π_2 :



Y en la siguiente los dos planos de forma simultánea:



3.2. Ejercicio nº 2

Tenemos la función $g(x, y) : x^3 + y^3 + 3axy$ debiéndose hallar el valor de a para que posea un punto crítico en $Q(1, 1)$.

3.2.1. Obtención del valor de a

Sabemos por definición, que se denomina como *Punto crítico* de una función $f(x, y)$ a un punto interior del dominio donde f_x y f_y valen 0, o donde alguna de ellas no existe. Por lo tanto, primero derivamos respecto de las dos variables:

- Derivamos la función obteniendo f_x :

$$f_x : 3x^2 + 3ay$$

- Derivamos la función obteniendo f_y :

$$f_y : 3y^2 + 3ax$$

Sabemos que para que exista un punto crítico, el resultado de la evaluación en el punto Q deberá ser igual a cero, por lo tanto:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3ay = 0 \\ 3y^2 + 3ax = 0 \end{cases}$$

Evaluamos en el punto Q :

$$\begin{cases} 3(1)^2 + 3a(1) = 0 \\ 3(1)^2 + 3a(1) = 0 \end{cases}$$

Pasamos a desarrollar:

- Para f_x :

$$f_x : 3(1)^2 + 3a(1) = 0$$

$$f_x : 3 + 3a = 0$$

$$f_x : 3a = -3$$

$$f_x : a = -1$$



- Para f_y que será igual:

$$f_y : 3(1)^2 + 3a(1) = 0$$

$$f_y : 3 + 3a = 0$$

$$f_y : 3a = -3$$

$$f_y : a = -1$$



Por lo tanto, el valor buscado es $a = -1$.

3.2.2. Hallar Puntos Críticos

Ahora que tenemos que $a = -1$ pasamos a obtener todos los puntos críticos de la función para su posterior clasificación. Para ello primero reemplazamos el valor de a para obtener la función resultante:

$$f(x, y) : x^3 + y^3 + 3(-1)xy$$

$$f(x, y) : x^3 + y^3 - 3xy$$

La función con la que trabajaremos será:

$$f(x, y) : x^3 + y^3 - 3xy$$

Obtenemos las derivadas con respecto tanto a x como a y :

■ Para f_x :

$$f_x : 3x^2 - 3y$$

■ Para f_y :

$$f_y : 3y^2 - 3x$$

Generamos un sistema de ecuaciones, ya que por definición sabemos que las derivadas parciales serán cero en sus puntos críticos, como en el punto anterior:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

Si despejamos de la primera ecuación obtenemos:

$$3x^2 - 3y = 0$$

$$3x^2 = 3y$$

$$\frac{3x^2}{3} = y$$

$$x^2 = y$$

Reemplazamos en la segunda ecuación:

$$3y^2 - 3x = 0$$

$$3(x^2)^2 - 3x = 0$$

$$3(x^4) - 3x = 0$$

$$3x(x^3 - 1) = 0$$

Se evidencia que para que se cumpla la ecuación, los valores posibles serán $x = 0$ o $x = 1$.

■ Si $x = 0$:

$$x^2 = y$$

$$(0)^2 = y$$

$$0 = y$$

- En cambio, si $\mathbf{x} = \mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}x^2 &= y \\ (1)^2 &= y \\ 1 &= y\end{aligned}$$

Por lo tanto los puntos críticos a evaluar serán **A : (1,1)** y **B : (0,0)**.



3.2.3. Criterio de la segunda derivada para extremos locales

Para una correcta clasificación de los puntos obtenidos, deberemos de evaluar según el criterio de las derivadas segundas, definiendo el Hessiano de f , como:

$$H(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Por lo tanto, obtengamos las derivadas segundas:

1. Sabíamos que la derivada respecto de x es f_x :

$$f_x : 3x^2 - 3y$$

- Por lo tanto, tenemos para f_{xx} :

$$f_{xx} = 6x$$

- Y para f_{xy} :

$$f_{xy} = -3$$

2. Por otro lado, que la derivada respecto de y es f_y :

$$f_y : 3y^2 - 3x$$

- Por lo tanto, tenemos para f_{yy} :

$$f_{yy} = 6y$$

- Y para f_{yx} :

$$f_{yx} = -3$$

Evaluamos el Hessiano, tanto en el punto **A** como en **B**:

$$\begin{aligned}H(x, y) &= f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \\ H(x, y) &= 6x \cdot 6y - (-3)^2\end{aligned}$$



En el punto **B : (0,0)**:

$$H(0,0) = 6(0) \cdot 6(0) - (-3)^2$$

$$H(0,0) = 0 \cdot 0 - 9$$

$$H(0,0) = -9$$

La clasificación dice que en caso de ser $H(1,1) < 0$ entonces se tiene un **punto silla** en **B**. El punto silla por definición, es un punto donde la pendiente es cero, pero **no se trata de un extremo local**. Por lo que restará evaluar el otro punto que nos queda.

Evaluemos en el punto **A : (1,1)**:

$$H(1,1) = 6(1) \cdot 6(1) - (-3)^2$$

$$H(1,1) = 6 \cdot 6 - 9$$

$$H(1,1) = 27$$

Como el Hessiano nos dió un resultado mayor a cero, según la clasificación de extremos locales, deberemos de ampararnos en el valor de f_{xx} evaluado en el punto, para determinar si es un mínimo o un máximo local. Por lo tanto, pasamos a evaluar $f_{xx}(1,1)$ para determinar si es mayor o menor a cero:

$$f_{xx}(1,1) = 6x$$

$$f_{xx}(1,1) = 6(1)$$

$$f_{xx}(1,1) = 6$$



La clasificación dice que en caso de ser $H(1,1) > 0$ y $f_{xx}(1,1) > 0$ se tiene en el punto **A : (1,1)** un **Mínimo Local**

Pasemos a evaluar el punto en la función:

$$f(x,y) : x^3 + y^3 - 3xy$$

$$f(1,1) : (1)^3 + (1)^3 - 3(1)(1)$$

$$f(1,1) : 1 + 1 - 3$$

$$f(1,1) : -1$$

14.1

El valor obtenido evaluado en el punto **A** es de -1 , es decir, ese valor será el punto mínimo local, proyectado en el eje z

3.2.4. Grafico de los puntos hallados

En la **Figura n° 1** se puede observar el punto **B**, sobre el eje de coordenadas, el cual efectivamente es un **punto silla**. También se puede observar en esta misma imagen, el punto **A**, situado dentro de la función y sobre un **Mínimo Local**.

Como se dijo anteriormente, el punto **A** tiene su proyección en el eje z (eje pintado de azul) con el valor -1 , donde la función alcanza un mínimo local. Esto se puede ver mejor en la **Figura n° 2**:

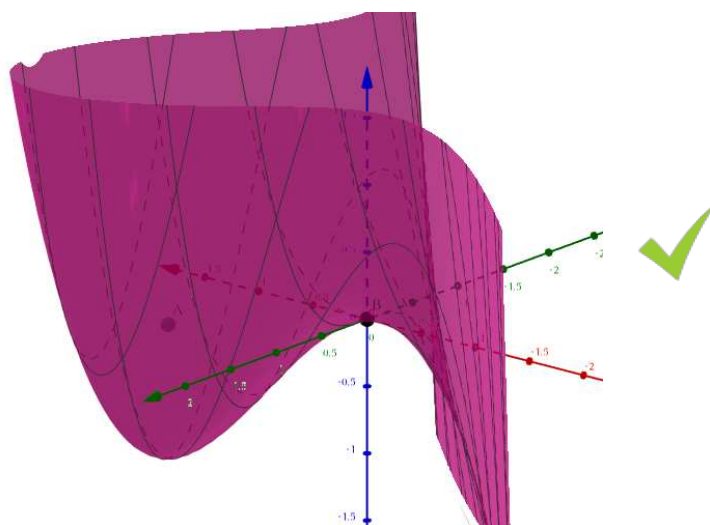


Figura 1: Punto Silla y Mínimo Local

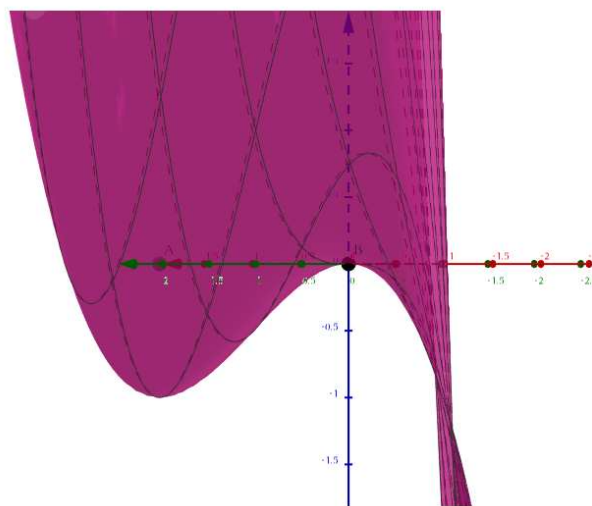


Figura 2: Mínimo Local en el punto A

3.3. Ejercicio nº 3

3.3.1. Grafico de C y sus curvas de nivel

En la **Figura nº 3** se puede visualizar tanto la función C , sus curvas de nivel condicionadas por f y los puntos candidatos a extremos absolutos.

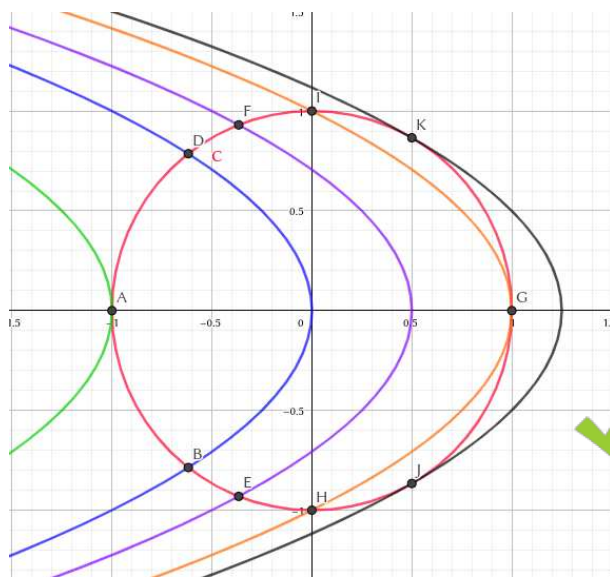


Figura 3: Curvas de nivel sobre C, y sus posibles extremos absolutos

3.3.2. Lagrange y mínimos de f sobre C

Recordaremos que habrá que trabajar con las siguientes funciones:

$$f(x, y) = x + y^2$$

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

Sabemos que según el **Método de los multiplicadores de Lagrange** para determinar los extremos absolutos de f en la curva dada por la función a optimizar, hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \cdot \vec{\nabla} g(x, y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Calculando los gradientes obtenemos:

$$\begin{cases} \langle 1, 2y \rangle = \lambda \cdot \langle 2x, 2y \rangle \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Como es una igualdad entre vectores, la primera ecuación genera dos ecuaciones, y el sistema desarrollado nos queda:

$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 2y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$



Tomamos la segunda y la desarrollamos:

$$\begin{aligned}2y &= \lambda \cdot 2y \\2y - \lambda \cdot 2y &= 0 \\2y(1 - \lambda) &= 0\end{aligned}$$

Como vemos, las posibles soluciones pueden ser:

1. $y = 0$

2. $\lambda = 1$

1. Desarrollamos primero la primer alternativa, es decir $y = 0$:

- Reemplazamos en la tercera ecuación de nuestro sistema de 3 ecuaciones:

$$\begin{aligned}x^2 + 0^2 &= 1 \\x &= \sqrt{1} \\x &= \pm 1\end{aligned}$$


- Para $x = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}1 &= \lambda \cdot 2 \cdot 1 \\\lambda &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- Para $x = -1$ tenemos:

$$\begin{aligned}-1 &= \lambda \cdot 2 \cdot 1 \\\lambda &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos dos puntos:

- El punto $(1, 0)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$
- El punto $(-1, 0)$ con $\lambda = -\frac{1}{2}$ 

2. Desarrollemos ahora la segunda alternativa, es decir $\lambda = 1$:

Reemplazamos en la primera ecuación de nuestro sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}1 &= 1 \cdot 2x \\x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ahora reemplazamos en la tercer ecuación:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 1 \\ y^2 &= 1 - \frac{1}{4} \\ y &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ y &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos dos puntos:

- El punto $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ con $\lambda = 1$
- El punto $(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ con $\lambda = 1$



Ahora bien, nos toca evaluar cada uno de los cuatro puntos obtenidos dentro de nuestra función f , es decir:

$$f(x, y) = x + y^2$$

1. Para el punto $f(1, 0)$:

$$f(1, 0) = 1 + 0^2 = 1$$

2. Para el punto $f(-1, 0)$:

$$f(-1, 0) = -1 + 0^2 = -1$$

3. Para el punto $f(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$:

$$f\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$



4. Para el punto $f(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$:

$$f\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Como se puede evidenciar, el **Mínimo Absoluto** se alcanza en el punto $A : (-1; 0)$, con un valor de -1 , tal y como se puede visualizar en la **Figura nº 3**.



4. Herramientas

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo

Para la resolución de los presentes ejercicios se utilizaron las siguientes herramientas:

1. Arch Linux V5.1.11
2. Para la composición del presente Informe se utilizó el paquete *texlive-latexextra* 2018.50031-1
3. Las imágenes pertenecen al software *Geogebra* 6.0.574.0-2.

Índice de comentarios

- 4.1 P y Q no pertenecen al paraboloide, pero sí al dominio
- 5.1 producto punto!!
- 6.1 ojo! son puntos, no vectores
- 7.1 pertenecen a la superficie!
- 14.1 no hace falta