Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Matemática II

TP nº 6

Salvatori Emiliano

Julio del 2020

Índice

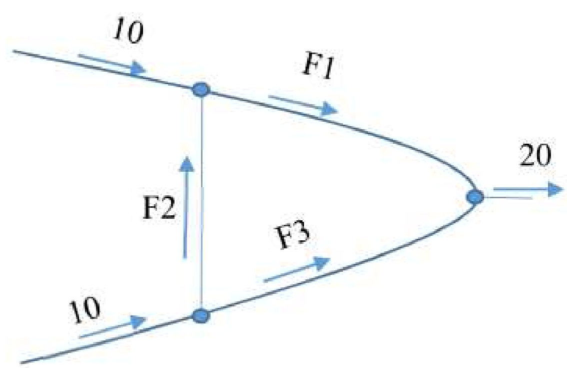
1. Introducción

En el siguiente trabajo se detalla las soluciones llevadas a cabo para la materia **Matemática II** para la **Comisión nº 6** sobre el tema **Sistemas de Ecuaciones Lineales. Matrices y Determinantes**

2. Ejercicios

2.1. Ejercicio nº 1

La figura muestra los flujos de tráfico vehicular en una palza de Florencio Varela.



1. Establezca y resuelva un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los flujos posibles.
2. Si el tráfico por F2 se restringe a 5 autos, ¿cuáles serán los flujos a través de las otras ramas?

2.2. Ejercicio nº 2

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Hallar una matriz D tal que $-3D + \frac{1}{2}AB = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^T$
2. Con lo hallado en el punto anterior, verifique la operación realizada.
3. Calcule el determinante de D y D^{-1}.

2.3. Ejercicio nº 3

Sea el sistema $S : \begin{cases} ax + 2y - 2z = -c \\ 4x + by - z = 7 \\ x + 4y + cz = -2 \end{cases}$

1. Sabiendo que $(2; 2; 3)$ es solución del sistema S, encuentre los valores de a, b, y c (No resuelva el sistema).
2. Con los valores de a, b y c encontrados anteriormente:
   a) Escriba el Sistema S en su forma matricial y con ella verifique que $(2; 1; 2)$ es solución de S.
   b) Encuentre todos los valores reales de x que permiten que $(2; -2x; 4 - x^2)$ sea solución del sistema S.
   c) Resuelva el sistema de ecuaciones S con Gauss (o Gauss-Jordan), escribiendo todas las operaciones de filas usadas. Escriba el conjunto de soluciones del sistema.

3. Resoluciones

3.1. Ejercicio nº 1

1. A partir del esquema de los flujos de tráfico vehicular de Florencio Varela, se puede establecer lo siguiente:

$$\begin{cases} 10 + F2 = F1 \\ 10 = F2 + F3 \\ F1 + F3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F1 - F2 - 0 = 10 \\ 0 + F2 + F3 = 10 \\ F1 + 0 + F3 = 20 \end{cases}$$

Por lo que se puede establecer la siguiente matriz y comenzar a operar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \mid 10 \\ 0 & 1 & 1 \mid 10 \\ 1 & 0 & 1 \mid 20 \end{pmatrix} F3{-}F1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \mid 10 \\ 0 & 1 & 1 \mid 10 \\ 0 & 1 & 1 \mid 10 \end{pmatrix} F3{-}F2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \mid & 10 \\ 0 & 1 & 1 & \mid & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{pmatrix}$$

Reescribimos nuevamente y despejamos en función de $F2$:

$$\begin{cases} F1 - F2 = 10 \\ F2 + F3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F2 = F1 - 10 \\ F2 = 10 - F3 \end{cases}$$

Igualamos y obtenemos:

$$F1 - 10 = 10 - F3$$
$$F1 = 20 - F3$$

El conjunto de soluciones es:

$$(20 - F3; 10 - F3; F3)$$

con $0 \leq F3 \leq 10, F3 \in \mathbb{N}$

Según lo dispuesto por el Teorema de Rouché-Frobrenius y habiendo utilizado el Método de Eliminación de Gauss, se establece que siendo el rango de la matriz menor que el número de incógnitas del sistema, el mismo se puede clasificar como un **Sistema Compatible Indeterminado** cuyas soluciones son infinitas. Pero este, se encuentra acotado, por lo que de todas las posibles soluciones, sólo 11 serán las correctas.

Siendo las siguientes:

$$\begin{cases} F3 = 0 \\ F1 = 20 \\ F2 = 10 \end{cases} \begin{cases} F3 = 1 \\ F1 = 19 \\ F2 = 9 \end{cases} \begin{cases} F3 = 2 \\ F1 = 18 \\ F2 = 8 \end{cases} \begin{cases} F3 = 3 \\ F1 = 17 \\ F2 = 7 \end{cases} \begin{cases} F3 = 4 \\ F1 = 16 \\ F2 = 6 \end{cases} \begin{cases} F3 = 5 \\ F1 = 15 \\ F2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F3 = 6 \\ F1 = 14 \\ F2 = 4 \end{cases} \begin{cases} F3 = 7 \\ F1 = 13 \\ F2 = 3 \end{cases} \begin{cases} F3 = 8 \\ F1 = 12 \\ F2 = 2 \end{cases} \begin{cases} F3 = 9 \\ F1 = 11 \\ F2 = 1 \end{cases} \begin{cases} F3 = 10 \\ F1 = 10 \\ F2 = 0 \end{cases}$$

2. Se vuelve a generar un sistema de ecuaciones, pero restringiendo el flujo de $F2 = 5$:

$$\begin{cases} 10 + F2 = F1 \\ 10 = F2 + F3 \\ F1 + F3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 + 5 = F1 \\ 10 = 5 + F3 \\ F1 + F3 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F1 = 15 \\ F3 = 5 \\ F1 + F3 = 20 \end{cases}$$

Se puede observar que se obtiene un **Sistema Compatible determinado** cuya solución (que también era una de las posibles soluciones al punto anterior) es la siguiente:

$$\begin{cases} F1 = 15 \\ F2 = 5 \\ F3 = 5 \end{cases}$$

3.2. Ejercicio nº 2

1. Recordamos que tenemos la siguiente ecuación a resolver:

$$-3D + \frac{1}{2}AB = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^T$$

Primero procedemos a resolver el producto entre A y B:

$$\begin{aligned}(5-12)*(0-23) &= 0+2+6=8\\(5-12)*(54-1) &= 10-4-2=4\\(-31-4)*(0-23) &= 0-2-12=-14\\(-31-4)*(54-1) &= -6+4+4=2\end{aligned}$$

Obteniendo la matriz: $AB = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}$

Procedemos a multiplicarla por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -14 & 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la transpuesta:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Hasta ahora obtuvimos:

$$-3D + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Reorganizando, nos queda:

$$-3D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo tenemos:

$$-3D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} * -\frac{1}{3}$$

Y por último, hallamos D:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Con el resultado obtenido, procedemos a verificar. Teníamos:

$$-3D + \frac{1}{2}AB = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$

$$-3 * \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Por el punto anterior, sabíamos el resultado de AB, por lo que nos queda:

$$-3 * \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -14 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Procedemos a realizar las multiplicaciones por cada escalar:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Por último realizamos la suma elemento a elemento de las dos matrices, verificando que la solución hallada es correcta:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

3. *a*) Primero calculamos el determinante de D:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 * 1 - (-1) * (-1) = 2 - 1 = 1$$

b) Ahora calculamos la inversa de D:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) F2 * 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) F2 + F1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$F1 + F2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) F1 : 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Procedemos a calcular el determinante de la matriz obtenida:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 * 2 - 1 * 1 = 2 - 1 = 1$$

3.3. Ejercicio nº 3

Tenemos que el sistema es el siguiente: $\begin{cases} ax + 2y - 2z = -c \\ 4x + by - z = 7 \\ x + 4y + cz = -2 \end{cases}$ y $S : (2; 2; 3)$

1. Reemplazamos en el sistema con la solución que se nos provee:

$$\begin{cases} (2)a + 2(2) - 2(3) = -c \\ 4(2) + (2)b - (3) = 7 \\ (2) + 4(2) + (3)c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4 - 6 = -c \\ 8 + 2b - 3 = 7 \\ 2 + 8 + 3c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2 = -c \\ 2b = 7 - 5 \\ 3c = -2 - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2 = -c \\ 2b = 2 \\ 3c = -12 \end{cases}$$

Procedemos a despejar cada una por separado:

- Despejamos de la primer ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} 2a - 2 &= -c \\ 2a &= -c + 2 \\ a &= \frac{-c + 2}{2} \end{aligned}$$

- Despejamos de la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} 2b &= 2 \\ b &= \frac{2}{2} \\ b &= 1 \end{aligned}$$

- Despejamos de la tercer ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} 3c &= -12 \\ c &= -\frac{12}{3} \\ c &= -4 \end{aligned}$$

- Y ahora reemplazamos en la primera con los valores obtenidos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-c + 2}{2} \\ a &= \frac{-(-4) + 2}{2} \\ a &= \frac{6}{2} \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Por lo que los valores hallados para a, b y c son:

- $a = 3$
- $b = 1$
- $c = -4$

2. *a*) Reescribimos el sistema S con los valores hallados para luego, reescribirla a su forma matricial:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -(-4) \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 4 \\ 4 & 1 & -1 & | & 7 \\ 1 & 4 & 4 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Reescribimos cada una de las ecuaciones con sus valores correspondientes y verificamos sus resultados.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -(-4) \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2) + 2(1) - 2(2) = 4) \\ 4(2) + (1) - (2) = 7 \\ (2) + 4(1) - 4(2) = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6 + 2 - 4 = 4 \\ 8 + 1 - 2 = 7 \\ 2 + 4 - 8 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 7 = 7 \\ -2 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto $(2; 1; 2)$ es solución del sistema con los valores $a = 3$, $b = 1$ y $c = -4$.

b) Se tiene el sistema de ecuaciónes: $S = \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = -2 \end{cases}$ y se propone hallar los valores reales de x para que $(2; -2x; 4 - x^2)$ sea solución del sistema S.

Para hallar de una forma más sencilla el sistema de soluciones propuesto, se hace uso de las operaciones entre las distintas ecuaciones ya que son del mismo grado. Por lo tanto se procede a multiplicar la primer ecuación por 2:

$$3(2)x + 2(2)y - 2(2)z = 4(2)$$
$$6x + 4y - 4z = 8$$

A este resultado le restamos la tercer ecuación:

$$6x + 4y - 4z = 8$$
$$-$$
$$x + 4y - 4z = -2$$

Obteniendo como resultado de la operación:

$$5x + 0y - 0z = 10$$

Con la ecuación resultante se procede a despejar x:

$$\begin{aligned} 5x + 0y - 0z &= 10 \\ 5x &= 10 \\ x &= \frac{10}{5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos este valor en la segunda ecuación del sistema original:

$$\begin{aligned} 4x + y - z &= 7 \\ 4(2) + y - z &= 7 \\ 8 + y - z &= 7 \\ y &= 7 - 8 + z \\ y &= -1 + z \end{aligned}$$

Se proponía que los valores sean $(2; -2x; 4 - x^2)$, por lo que tomamos estos valores, teniendo en cuenta que están en función de la variable x y la introducimos en el despeje de y, hallado en el punto anterior:

$$\begin{aligned} y &= -1 + z \\ (-2x) &= -1 + (4 - x^2) \\ -2x &= 3 - x^2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Procedemos a utilizar Bhaskara:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1,2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1 * (-3))}}{2(1)} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm 4}{2} \\ x_{1,2} &= 1 \pm 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores posibles son:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -1$$

Reemplazamos en las soluciones al sistema $(2; -2x; 4 - x^2)$ obteniendo dos posibles soluciones: $(2; -6; -5)$ y $(2; 2; 3)$.

Procedemos a verificar que lo hallado es válido, reemplazando en $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = -2 \end{cases}$

- Procedemos con la solución $(2; -6; -5)$:

$$\begin{cases} 3(2) + 2(-6) - 2(-5) = 4 \\ 4(2) + (-6) - (-5) = 7 \\ (2) + 4(-6) - 4(-5) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 12 + 10 = 4 \\ 8 - 6 + 5 = 7 \\ 2 - 24 + 20 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 7 = 7 \\ -2 = -2 \end{cases}$$

- Procedemos con la solución $(2; 2; 3)$: 11.1

$$\begin{cases} 3(2) + 2(2) - 2(3) = 4 \\ 4(2) + (2) - (3) = 7 \\ (2) + 4(2) - 4(3) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 4 - 6 = 4 \\ 8 + 2 - 3 = 7 \\ 2 + 8 - 12 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 7 = 7 \\ -2 = -2 \end{cases}$$

c) Resolvemos el sistema de ecuaciones S con el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & | & 4 \\ 4 & 1 & -1 & | & 7 \\ 1 & 4 & -4 & | & -2 \end{pmatrix} 4 * F3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & | & 4 \\ 4 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 16 & -16 & | & -8 \end{pmatrix}$$

$$F3 - F2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & | & 4 \\ 4 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 15 & -15 & | & -15 \end{pmatrix} F3 : 15 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & | & 4 \\ 4 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$4 * F1 \; y \; 3 * F2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 8 & -8 & | & 16 \\ 12 & 3 & -3 & | & 21 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} F2 - F1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 8 & -8 & | & 16 \\ 0 & -5 & 5 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$F1 : 4 \; y \; F2 - 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} F3 - F2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F1 : 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Según el Teorema de Rouché-Frobenius, podemos decir que el sistema es un **Sistema Compatible Indeterminado**

- Podemos despejar de la segunda fila para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} y - z &= -1 \\ y &= -1 + z \end{aligned}$$

- Despejamos de la primera fila y luego reemplazamos con lo obtenido anteriormente:

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z &= \frac{4}{3} \\ x + \frac{2}{3}(-1 + z) - \frac{2}{3}z &= \frac{4}{3} \\ x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}z &= \frac{4}{3} \\ x - \frac{2}{3} &= \frac{4}{3} \\ x &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \\ x &= \frac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Se obtiene por lo tanto que la solución al sistema es $(2; -1 + z; z)$ con $z \in \mathbb{R}$.

4. Herramientas

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo

Para la resolución de los presentes ejercicios se utilizaron las siguientes herramientas:

1. Arch Linux V5.1.11
2. Para la composición del presente Informe se utilizó el paquete *texlive-latexextra 2018.50031-1*
3. Las imágenes pertenecen al software *Geogebra 6.0.574.0-2*.

Índice de comentarios

11.1 esto ya se demostró antes!