Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Matemática II

TP nº 1

Salvatori Emiliano

Abril del 2020

Índice

1. Introducción

En el siguiente trabajo se detalla las soluciones llevadas a cabo para la materia **Matemática II** para la **Comisión nº 6** sobre el tema **vectores, rectas y planos**.

2. Ejercicios

Ejercicio nº 1

1. Calcular un vector perpendicular a: $\vec{v}:\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ y $\vec{v}:\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, simultáneamente. ¿Es único?
2. Calcular el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejercicio nº 2

Sean $L_1:\begin{cases}3x=t\\y=2-t\\z=t\end{cases}$ y $L_2:\begin{cases}x=3-t\\y=-1\\z=3+t\end{cases}$

1. ¿Son paralelas? ¿Son perpendiculares?
2. Dar, **si es posible**, la ecuación del plano que contiene a las dos rectas. Justificar.

Ejercicio nº 3

1. Hallar la recta de intersección entre los planos

$$\pi_1 : 2x+y-z=5$$

   y

$$\pi_2 : x+z=1$$

2. Dar el punto de intersección entre el plano π_1 y la recta $L_1:\begin{cases}x=0\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$
3.
   - ¿El punto $Q:(0,6,1)$ pertenece a π_1 ?
   - ¿Y pertenece a la intersección entre π_1 y π_2 ?
   - ¿Y a la recta L_1 ?

3. Resoluciones

3.1. Ejercicio nº 1

1. Para obtener el vector perpendicular o normal entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se realiza el **producto vectorial o cruz** entre ellos: $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \bar{k} =$$

$$[(1 \times 1) - (-1 \times 0)]\,\bar{i} - [(0 \times 1) - (-1 \times 3)]\,\bar{j} + [(0) - (3 \times 1)]\,\bar{k}$$

$$\boxed{1\bar{i} - 3\bar{j} - 3\bar{k} = \overrightarrow{\mathrm{u_n}}}$$

El vector $\overrightarrow{\mathrm{u_n}}$ **no** es único, existen infinitos vectores perpendiculares o normales a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como por ejemplo cualquier múltiplo de $\overrightarrow{\mathrm{u_n}}$.

2. Para calcular el ángulo, se tiene en cuenta la siguiente ecuación general:

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos\alpha \tag{1}$$

- Hacemos el producto escalar entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$:
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0 \times 3) + (1 \times 0) + (-1 \times 1) = -1$
- Obtenemos la longitud de $\vec{v}$:

$$\boxed{|\vec{v}| : \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}}$$

- Obtenemos la longitud de $\vec{u}$:

$$\boxed{|\vec{v}| : \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}}$$

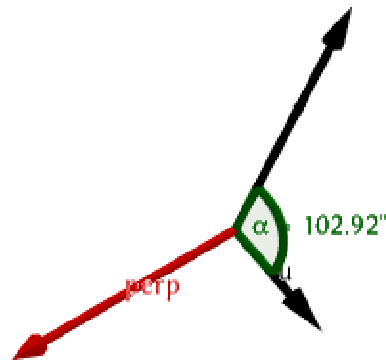
- Reemplazamos en la ecuación general (1):

$$-1 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha$$
$$\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}}\right) = \alpha$$

  Obtenemos:

$$\boxed{\alpha \simeq 102{,}92^\circ}$$

  Tanto el vector perpendicular como el ángulo hallado se puede visualizar en la siguiente imagen:



3.2. Ejercicio nº 2

$$L_1 : \begin{cases} 3x = t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Cuyo vector director es $\vec{v_1} = < 1, -1, 1 >$

$$L_2 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Cuyo vector director es $\vec{v_2} = < -1, 0, 1 >$

1. Las rectas L_1 y L_2 **no** son paralelas, ya que sus **vectores directores** no son múltiplos entre sí.

   Para que las rectas sean perpendiculares se deberá comprobar que el **producto punto** entre sus vectores directores, será cero.

   Producto vectorial entre L_1 y L_2:

   $$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (1 \times -1) + (-1 \times 0) + (1 \times 1) = 0$$

   El producto punto entre ambos vectores es:

   $$\boxed{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0}$$

Por lo que **son perpendiculares** entre sí.

2. Para hallar la ecuación del plano que contenga a las dos rectas será necesario:

   - Encontrar el **vector normal** a los vectores directores de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ mediante el **producto cruz**.
   - Obtener un punto en común entre L_1 y L_2

   Comenzamos por realizar el producto vectorial para encontrar un vector normal a ambas rectas: $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} k =$$

$$[(-1 \times 1) - (-1 \times 0)]\,\bar{i} - [(1 \times 1) - (1 \times -1)]\,\bar{j} + [(1 \times 0) - (-1 \times -1)]\,\bar{k} =$$

$$-1\bar{i} - 2\bar{j} - 1\bar{k}$$

   Por lo que el vector perpendicular o normal a ambas rectas es:

$$\boxed{\vec{v_\perp} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

   Pasamos a obtener el punto en común entre L_1 y L_2 igualando ambas rectas y cambiando la variable de t en L_2 por λ, quedando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} t = 3 - \lambda \\ 2 - t = 1 \\ t = 3 + \lambda \end{cases}$$

   De la segunda ecuación obtenemos el valor de t para la ecuación L_1:

$$t = 3$$

   Se reemplaza en la primer ecuación del sistema:

$$t = 3 - \lambda$$
$$3 = 3 - \lambda$$
$$0 = \lambda$$

Se obtiene que $t = 0$ para la ecuación de la recta L_1.

Y $\lambda = 0$ para la ecuación de la recta L_2.

Para comprobar que el sistema de ecuaciones tiene una **única solución**, basta con reemplar t y λ en sus respectivas ecuaciones de la recta. Se elije reemplazar en cualquier de las dos ecuaciones de la recta. Se utilizará para obtener el punto, la recta L_1:

$$L_1 = \begin{cases} x = (3) \\ y = 2 - (3) \\ z = (3) \end{cases}$$

Por lo que se obtiene el punto $P_1 : (3, -1, 3)$ pudiendo ya con el punto y el vector normal, obtener la ecuación del plano.

Se debe recordar que la ecuación general del plano es la siguiente:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

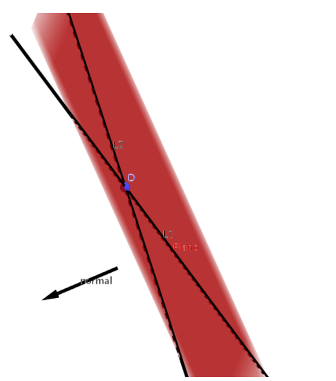
$$-1(x - 3) - 2(y - 1) - 1(z - 3) = 0$$

$$-x + 3 - 2y + 2 - z + 3 = 0$$

Por lo que el plano que contiene a las dos rectas es:

$$\boxed{\pi : -x - 2y - z + 8 = 0}$$

Esto se puede evidenciar en el siguiente gráfico:



3.3. Ejercicio nº 3

1. Para el plano

$$\pi : 2x+y-z=5$$

Su vector normal es:

$$\boxed{\vec{v_\pi} :< 2,1,-1 >}$$

Para el plano:

$$\beta : x+z=1$$

Su vector normal es:

$$\boxed{\vec{v_\beta} :< 1,0,1 >}$$

Para obtener el vector director de la recta intersección entre los dos planos, será necesario encontrar el vector normal o perpendicular a los dos planos, por lo que se tendrá que emplear el **producto cruz** entre los vectores: $\vec{n_\pi} \times \vec{n_\beta}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} k =$$

$$[(1\times 1)-(-1\times 0)]\,\bar{i} - [(2\times 1)-(1\times -1)]\,\bar{j} + [(2\times 0)-(1\times 1)]\,\bar{k} =$$

$$\boxed{\vec{v_d} : 1\bar{i} - 3\bar{j} - 1\bar{k}}$$

Para obtener el punto en común a ambos planos, lo que realiza es una operación entre las dos ecuaciones:

$$\pi : 2x+y-z=5$$
$$\beta : x+0y+z=1$$

Operando entre las funciones, obtenemos:

$$3x+y=6$$

Despejando y podemos obtener la siguiente igualdad:

$$y=6-3x$$

Ahora bien, podemos dar un valor a x tal que esto condicione el resultado de y y podamos reemplazar esos valores en la ecuación del plano π.

Elegimos el valor $x=1$:

$$y=6-3(1)$$

$$y = 3$$

Ahora bien, reemplazamos en la ecuación del plano π los valores $x = 1$ e $y = 3$:

$$\pi : 2(1) + (3) - z = 5$$

$$z = 0$$

Por lo que obtuvimos el punto

$$P_L :< 1, 3, 0 >$$

Con el vector director de la recta intersección y un punto en común con los dos planos, ya podemos dar las ecuaciones de la recta.

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta son:

$$\boxed{L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 3t \\ z = 0 - t \end{cases}}$$

La **ecuación simétrica** de la recta es:

$$\boxed{t = \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{3} = -\frac{z}{1}}$$

2. Recordemos que la ecuación de π es:

$$\pi : 2x + y - z = 5$$

Y la de la recta es:

$$L_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Para encontrar el punto donde el plano y la recta se tocan, bastará con igualar en la ecuación del plano las componentes del punto x, y y z, obtener la constante y poder de esta forma ingresarla en el sistema de ecuaciones de la recta L_1.

Comenzamos con encontrar el escalar: $L_1 \cap \pi$

$$\begin{aligned} 2(0) + (2 + 2t) - (3 + t) &= 5 \\ 0 + 2 + 2t - 3 - t &= 5 \\ t - 1 &= 5 \\ t &= 6 \end{aligned}$$

Con el valor $t = 6$ remplazamos en L_1 y obtenemos:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2(6) \\ z = 3 + (6) \end{cases}$$

$$\boxed{P_L : (0, 14, 9)}$$

3. Se tiene el punto:

$$\boxed{Q : (0, 6, 1)}$$

- Se reemplaza en la ecuación del plano π_1:

$$\begin{aligned} 2(0) + (6) - (1) &= 5 \\ 0 + 6 - 1 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto el punto Q **pertenece al plano**

- Utilizamos la ecuación simétrica de la recta:

$$\begin{aligned} &t = \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{3} = -\frac{z}{1} \\ &t = \frac{(0)-1}{1} = \frac{(7)+3}{3} = -\frac{(1)}{1} \\ &t = -1 = 3 = -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto el punto Q **no pertenece** a la recta intersección.

- Reemplazmos el punto Q en la recta de L_1:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 6 = 2 + 2t \\ 1 = 3 + t \end{cases}$$

Se deduce que de la segunda coordenada: $t = 2$, pero el despeje en la tercer coordenada $t = -2$ por lo que el punto Q **tampoco pertenece** a la recta L_1.

4. Herramientas

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo

Para la resolución de los presentes ejercicios se utilizaron las siguientes herramientas:

1. Arch Linux V5.1.11
2. Para la composición del presente Informe se utilizó el paquete *texlive-latexextra 2018.50031-1*
3. Las imágenes pertenecen al software *Geogebra 6.0.574.0-2*.