Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Matemática II

TP nº 3

Salvatori Emiliano

Mayo del 2020

Índice

1. Introducción **3**

2. Ejercicios **3**

3. Resoluciones **3**

3.1. Ejercicio nº 1 3

3.2. Ejercicio nº 2 6

3.3. Ejercicio nº 3 7

4. Herramientas **9**

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo 9

1. Introducción

En el siguiente trabajo se detalla las soluciones llevadas a cabo para la materia **Matemática II** para la **Comisión nº 6** sobre el tema **Funciones de varias variables. Dominio. Gráficas y derivadas**.

2. Ejercicios

Ejercicio nº 1

Dada la función:

$$g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

1. Indicar y graficar el dominio de la función $g(x, y)$.
2. Hallar la ecuación de la curva de nivel para $k = 0, 1, 2$ y graficarlas.
3. Graficar la función $g(x, y)$.

Ejercicio nº 2

Dada la función:

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^4 - 2y^2$$

1. Encuentre $f_x(1, 2)$, y también $f_y(1, 1)$.

Ejercicio nº 3

Suponga que la temperatura dentro de un fluido estanco, está dada por $T(x, y, z)$ donde T provee la temperatura en C° y (x, y, z) es la posición en metros.

$$T(x, y, z) = 10x^2y + y^3z + xz^5$$

1. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en el punto $(1, -1, 0)$?.
2. ¿Cuál es la razón máxima de variación de T?

3. Resoluciones

3.1. Ejercicio nº 1

Tenemos la siguiente función:

$$g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

1. Para encontrar el dominio de la función, lo que primero hay que hacer es evaluar cómo la función está condicionada. Se encuentra que la función está acotada en su dominio por una raíz cuadrada. Esto significa que su argumento deberá de ser mayor a cero.

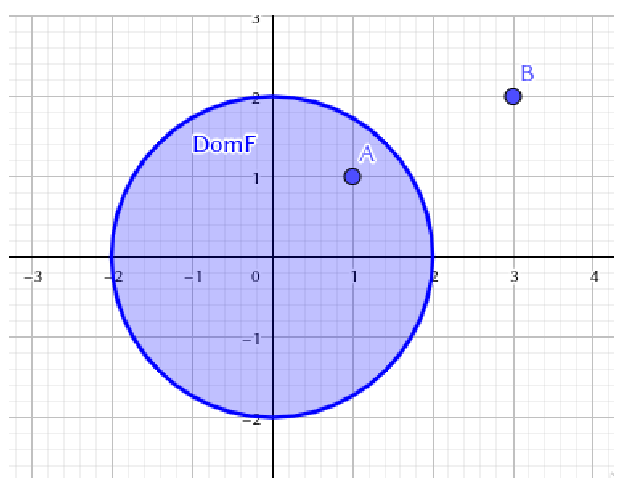
   Lo planteamos teniendo en cuenta solo el argumento:

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$
$$4 \geq x^2 + y^2$$

   Como se puede observar, los valores tanto de x como de y (ambos elevados al cuadrado), deberán de ser menores al valor 4. Por lo tanto, se puede decir que su dominio estará definido de la siguiente manera:

$$Dom\ g(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 \geq x^2 + y^2\}$$

   Graficamos el dominio obtenido, y para visualizar de una manera más sencilla, evaluamos dos puntos en la gráfica.



   Podemos notar que el punto $A : (1, 1)$ pertenece dentro del dominio de la función $g(x, y)$. Si lo evaluamos en la función, nos queda:

$$g(1, 1) = \sqrt{4 - (1)^2 - (1)^2}$$
$$g(1, 1) = \sqrt{4 - 2}$$
$$g(1, 1) = \sqrt{2}$$
$$g(1, 1) \approx 1{,}41422135...$$

   Por otra parte, podemos notar que el punto $B : (3, 2)$ no se encuentra dentro del dominio; evaluando en la función tenemos:

$$\begin{aligned} g(3,2) &= \sqrt{4-(3)^2-(2)^2} \\ g(3,2) &= \sqrt{4-13} \\ g(3,2) &= \sqrt{-9} \end{aligned}$$

Como puede evidenciarse, no existe el resultado para $\sqrt{-9}$.

2. Teniendo el dominio, ahora obtendremos las curvas de nivel:

   - **k = 0**: podemos igualar la función a una constante k que en este caso valdrá cero. Se obtiene:

     $$\begin{aligned} g(x,y) &= \sqrt{4-x^2-y^2} \\ k &= \sqrt{4-x^2-y^2} \\ 0 &= \sqrt{4-x^2-y^2} \\ 0^2 &= (\sqrt{4-x^2-y^2})^2 \\ 0 &= 4-x^2-y^2 \end{aligned}$$

     Se observa que es una elipse, siendo la ecuación equivalente a:

     $$\boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1}$$

     El centro de la misma se encuentra en el origen y ambos semiejes miden $\sqrt{4}=2$

   - **k = 1**: podemos igualar la función a una constante k que en este caso valdrá uno. Se obtiene:

     $$\begin{aligned} g(x,y) &= \sqrt{4-x^2-y^2} \\ k &= \sqrt{4-x^2-y^2} \\ 1 &= \sqrt{4-x^2-y^2} \\ 1^2 &= (\sqrt{4-x^2-y^2})^2 \\ 1 &= 4-x^2-y^2 \end{aligned}$$

     Se observa que es una elipse, siendo la ecuación equivalente a:

     $$\boxed{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}=1}$$

     El centro de la misma se encuentra en el origen y ambos semiejes miden $\sqrt{3}\approx 1{,}73...$

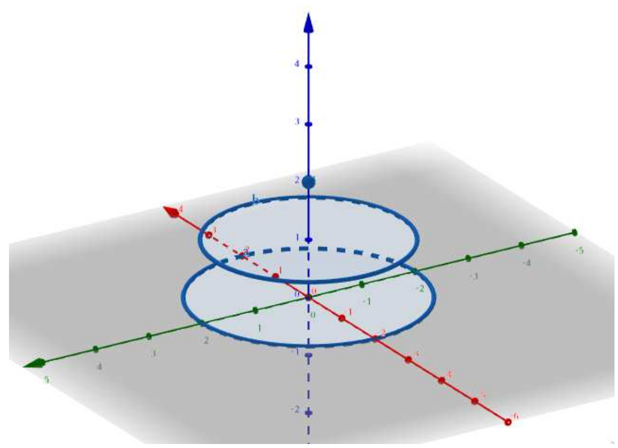
- **k = 2**: podemos igualar la función a una constante k que en este caso valdrá dos. Se obtiene:

$$
\begin{aligned}
g(x, y) &= \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\
k &= \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\
2 &= \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\
2^2 &= (\sqrt{4 - x^2 - y^2})^2 \\
4 &= 4 - x^2 - y^2
\end{aligned}
$$

  Por lo que finalmente se logra la función de una circunferencia cuyo radio es $r = 0$, configurando un punto sobre el eje z:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 0}$$

Visualizamos todas las curvas de nivel en el siguiente gráfico:



3.2. Ejercicio nº 2

Tenemos la siguiente función:

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^4 - 2y^2$$

1. Para evaluar en el punto solicitado, primero deberemos obtener la derivada de la función respecto de la variable x. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= x^4 + x^2y^4 - 2y^2 \\
f_x(x, y) &= 4x^3 + 2xy^4
\end{aligned}
$$

Evaluamos en el punto $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x^3 + 2xy^4 \\ f_x(1, 2) &= 4(1)^3 + 2(1) * (2)^4 \\ f_x(1, 2) &= 4 + 2 * 16 \\ f_x(1, 2) &= 36 \end{aligned}$$

2. Al igual que en el punto anterior, debemos primero obtener la derivada de la función, pero esta vez respecto de la variable y, y luego evaluamos en el punto $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + x^2y^4 - 2y^2 \\ f_y(x, y) &= 4x^2y^3 - 4y \\ f_y(1, 1) &= 4(1)^2(1)^3 - 4(1) \\ f_y(1, 1) &= 0 \end{aligned}$$

3.3. Ejercicio nº 3

Tenemos la siguiente función que nos proporciona la temperatura de un fluido:

$$T(x, y, z) = 10x^2y + y^3z + xz^5$$

1. Para obtener la dirección en la que aumenta más rápido la temperatura en el punto $(1, -1, 0)$, se deberá utilizar el concepto de **derivada direccional** ya que la función, es diferenciable. Para ello se utilizará la siguiente ecuación:

$$\boxed{D_u f(a, b, c) = \vec{\bigtriangledown} f(a, b, c) \cdot \vec{u}} \tag{1}$$

Primero lo que haremos es derivar de forma parcial la función respecto de cada una de las variables independientes que la componen:

- **T respecto de x**: Realizamos la derivada parcial de la función $T(x, y, z)$ respecto de x de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_x(x, y, z) &= 10x^2y + y^3z + xz^5 \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 20xy + z^5 \end{aligned}$$

- **T respecto de y**: Realizamos la derivada parcial de la función $T(x, y, z)$ respecto de y de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_y(x, y, z) &= 10x^2y + y^3z + xz^5 \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= 10x^2 + 3y^2z \end{aligned}$$

- **T respecto de z**: Realizamos la derivada parcial de la función $T(x,y,z)$ respecto de z de la siguiente manera:

$$T_z(x,y,z) = 10x^2y + y^3z + xz^5$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} = y^3 + 5xz^4$$

Ahora bien, una vez obtenidas las derivadas parciales, procedemos a obtener el gradiente de la función. Cabe resaltar que el gradiente reprensenta la pendiente de la línea tangente a la gráfica de la función, es decir, apunta hacia los puntos de la gráfica a los cuales la gráfica tiene mayor incremento.

Teniendo en cuenta lo siguiente:

$$\vec{\bigtriangledown} f(a,b,c) \Rightarrow \vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0)$$

Podemos obtener:

$$\vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0) : \begin{cases} 20xy + z^5 \Rightarrow 20(1)(-1) + (0)^5 = -20 \\ 10x^2 + 3y^2z \Rightarrow 10(1)^2 + 3(-1)^2(0) = 10 \\ y^3 + 5xz^4 \Rightarrow (-1)^3 + 5(1)(0)^4 = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos:

$$\vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0) = \langle -20, 10, -1 \rangle$$

Obtenemos del gradiente, su distancia, para convertir el vector en unitario:

$$|\vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0)| = \sqrt{(-20)^2 + 10^2 + (-1)^2}$$
$$|\vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0)| = \sqrt{501}$$

Como sabemos, la **Dirección de máximo crecimiento** de la función en un punto, está dada por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0)}{|\vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0)|} = \langle -\frac{20}{\sqrt{501}}, \frac{10}{\sqrt{501}}, -\frac{1}{\sqrt{501}} \rangle$$

Ahora bien, también sabemos que la **Dirección de máximo decrecimiento** de la función está dada por el siguiente vector, que tiene igual dirección y sentido opuesto al del gradiente:

$$\vec{V} = -\frac{\vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0)}{|\vec{\bigtriangledown} T(1,-1,0)|} = \langle \frac{20}{\sqrt{501}}, -\frac{10}{\sqrt{501}}, \frac{1}{\sqrt{501}} \rangle$$

2. Ahora encontremos la razón de máxima variación de T:

- La derivada direccional $D_uT(1,-1,0)$ se hace **máxima** si $\cos((\theta)) = 1$, es decir, si $\theta = 0°$, por lo tanto:

$$D_uT(1,-1,0) = |\vec{\bigtriangledown}T(1,-1,0)| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos{(0°)}$$
$$D_uT(1,-1,0) = |\sqrt{501}| \cdot 1 \cdot 1$$
$$D_uT(1,-1,0) = \sqrt{501}\ c°/m$$

- Y por el contrario, la derivada direccional $D_uT(1,-1,0)$ se hace **mínima** si $\cos((\theta)) = -1$, es decir, si $\theta = 180°$, por lo tanto:

$$D_VT(1,-1,0) = |\vec{\bigtriangledown}T(1,-1,0)| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos{(180°)}$$
$$D_VT(1,-1,0) = |\sqrt{501}| \cdot 1 \cdot (-1)$$
$$D_VT(1,-1,0) = -\sqrt{501}\ c°/m$$

4. Herramientas

4.1. Materiales utilizados para el presente trabajo

Para la resolución de los presentes ejercicios se utilizaron las siguientes herramientas:

1. Arch Linux V5.1.11
2. Para la composición del presente Informe se utilizó el paquete *texlive-latexextra 2018.50031-1*
3. Las imágenes pertenecen al software *Geogebra 6.0.574.0-2*.

Índice de comentarios

6.1 ¿y el gráfico de la función?