УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У НОВОМ САДУ

Соња Савић

Анализа процеса избора пута у саобраћајној мрежи применом еволутивне теорије игара

ДИПЛОМСКИ РАД

- Основне академске студије -

Нови Сад, 2019

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска документација
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	Завршни (Bachelor) рад
Аутор, **АУ**:	Соња Савић
Ментор, **МН**:	Др Милан Рапаић, ванредни професор
Наслов рада, **НР**:	Анализа процеса избора пута у саобраћајној мрежи применом еволутивне теорије игара
Језик публикације, **ЈП**:	Српски / латиница
Језик извода, **ЈИ**:	Српски
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2019
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Нови Сад; трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	6/32/0/5/15/0/1
Научна област, **НО**:	Електротехника и рачунарство
Научна дисциплина, **НД**:	Аутоматика и управљање системима
Предметна одредница/Kључне речи, **ПО**:	Методе оптимизације
УДК	
Чува се, **ЧУ**:	У библиотеци Факултета техничких наука, Нови Сад
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овом раду презентован је аналитички метод избора пута, употребом кумулативне проспект теорије у еволутивној теорији игара. Анализира се утицај тренутних информација о стању на путевима, на возачев избор пута. Формиран је модел еволутивне теорије игара ради описа еволутивног процеса доношења одлуке о избору пута. У зависности од одлука возача, процес напредује у различита еволутивно стабилна стања.
Датум прихватања теме, **ДП**:	
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	Др Зоран Јеличић, редовни професор	
	Члан:	Др Мирна Капетина, доцент	Потпис ментора
	Члан, ментор:	Др Милан Рапаић, ванредни професор	

UNIVERSITY OF NOVI SAD ● **FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monographic publication
Type of record, **TR**:	Textual printed material
Contents code, **CC**:	Bachelor Thesis
Author, **AU**:	Sonja Savić
Mentor, **MN**:	Milan Rapaić, Associated Professor, Ph.D
Title, **TI**:	Analysis of Driver’s Route Choice Behavior Based on Evolutionary Game Theory
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2019
Publisher, **PB**:	Author’s reprint
Publication place, **PP**:	Novi Sad, Dositeja Obradovica sq. 6
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	6/32/0/5/15/0/1
Scientific field, **SF**:	Electrical and computer engineering
Scientific discipline, **SD**:	Automation and control systems
Subject/Key words, **S/KW**:	Optimization Methods
UC	
Holding data, **HD**:	The Library of Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Serbia
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	This paper proposes a route choice analytic method that embeds cumulative prospect theory in evolutionary game theory to analyze how drivers adjust their route choice behaviors under the influence od the traffic information. An evolutinary game model is constructed to describe the evolutinary process od the driver's route choice decision-making behaviors. The driver's route decision-making process develops towards different evolutinary stable states in accordance with different transportation situations.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	Zoran Jeličić, Full-professor, Ph.D
Member:	Mirna Kapetina, Assistant Professor, Ph.D
Member, Mentor:	Milan Rapaić, Associated Professor, Ph.D

Menthor's sign

Садржај

1. Увод

Транспортни систем је класичан пример инжењерског система чије перформансе зависе од одлука корисника. На одлуке корисника може се утицати преко различитих индиректних метода, попут путарине, снабдевања одређеним информацијама, контроле приступа и других. Индиректан метод који се користи у овом раду су тренутне информације о стању на путевима, које су услед различитих ограничења непотпуне. Возачи на добијене информације могу да одговоре на више начина, нпр. променом брзине, времена кретања, и слично, али најчешће је то променом избора пута, стога ће даљи фокус рада бити на томе. Дакле, возачи су суочени су са процесом доношења одлуке, а теорија која ће се користити да тај процес опише је кумулативна теорија изгледности [1-6]. Због претходно споменутих информација, процес доношења одлуке о избору пута је процес динамичке селекције, који ће бити објашњен коришћењем еволутивне теорије игара. Она се бави динамиком ширења успешне стратегије решавања неког проблема кроз популацију, било да се ширење остварује путем репликације или имитације. У овом случају, возачи базирају свој избор пута посматрајући времена проласка других возача у својој околини, тако да се овде ради о еволуцији имитацијом, у складу са којом систем напредује у различита стања. Стања у систему, представљају уделе различитих стратегија у укупној популацији возача. У овом раду је представљена анализа понашања групе возача, уколико се њихов процес доношења одлука разуме кроз кумулативну теорију изгледности, а начин ширења тих одлука кроз еволутивну теорију игара, али поред ове врсте анализе, постоје и многе друге [8- 13].

Поред Увода, Додатка и Литературе, овај рад садржи још пет поглавља:

- **Поглавље 2. Кумулативна теорија изгледности** – у овом поглављу дате су теоријске основе кумулативне теорије изгледности и објашњен је процес доношења одлуке,
- **Поглавље 3. Еволутивна теорија игара**– у овом поглављу постављена је паралела између класичне теорије игара и еволутивне теорије игара, дат је пример примене, дефиниција еволутивно стабилне стратегије и објашњен је концепт динамике репликације,
- **Поглавље 4. Формирање модела избора пута** – у овом поглављу приказана су три корака формирања модела избора пута, који је заснован на теоријама објашњеним у поглављу 2 и поглављу 3,
- **Поглавље 5. Анализа локалне стабилности** – у овом поглављу врши се анализа локалне стабилности и тражи се еволутивно стабилна стратегија претходно формираног модела и
- **Поглавље 6**. **Дискусија, закључак и приказ апликације –** у овом поглављу наведена су ограничења решења, донети су закључци на основу претходно одрађене анализе, и приказана је апликација у којој је симулиран проблем.

2. Кумулативна теорија изгледности

Као што је већ речено у уводу, овај рад анализира понашање групе возача која је суочена са процесом доношења одлуке. Теорија која ће се користити да тај процес опише је кумулативна теорија изгледности.

2.1 Основни појмови и проблеми везани за процес одлучивања

Одлука подразумева избор из скупа од најмање две опције којима можемо остварити жељени циљ [3].

Процес доношења одлуке се дешава у условима који могу бити различитог нивоа (не)извесности. По том критеријуму, услове у којима се одлуке доносе можемо сврстати у једну од четири категорије:

- извесност (одређеност),
- ризик,
- неизвесност,
- неодређености.

Извесност представља стање у којем су вероватноће исхода познате и једнаке јединици, односно постоји сигурност у остваривању исхода.

Ризик представља стање у којем су познати исходи, али су њихове вероватноће непознате, мада се могу квантификовати. До квантификација вероватноће може доћи услед података које доносилац одлука има на располагању, као и знања потребних за обраду тих података. На тај начин доносилац одлука може сваком исходу да припише објективну вероватноћу дешавања.

Стање неизвесности представља ситуацију када су познати исходи, али вероватноће њихових остваривања нису познате и не постоји могућност за њихово објективно сазнавање. Неизвесност настаје услед утицаја спољних фактора, које није могуће предвидети и на њих утицати, као и услед недостатка података о одређеним појавама које се могу јавити у систему.

Неодређеност представља стање у којем нису познате алтернативе, или постоји велики број алтернатива, којима се не може приписати вероватноћа. Ово стање је углавном семантичког порекла, тј. односи се на ситуације у којима се одлучује када не постоје подаци који би могли да се искористе за доношење одлуке.

Постоје многобројни докази да људи као доносиоци одлука често греше у постављању вероватноће за неки догађај. Наиме, у случају да су уверени да ће се неки догађај десити сигурно, тај догађај се дешава у 80% случајева, и обратно, уколико си сигурни да се неки догађај неће десити, он се дешава у 20% случајева [5].

Да би донели квалитетну одлуку, доносиоци одлука морају на располагању имати све релевантне информације. Ипак, те информације није могуће увек прибавити услед различитих ограничења, нпр. високих трошкова. Због тога, одлуке се не доносе само на основу објективних информација већ на сам процес утицај имају и субјективне преференције доносилаца одлуке. Поред тога, информације се некад не процесуирају на одговарајући начин, услед ограничења рационалности доносилаца одлуке.

Уколико су могућности за прибављање информација слабе, односно, постоји ограничена рационалност код доносилаца одлука, они ће се окренути хеуристици у одлучивању. Хеуристика представља опште сазнајне стратегије које се заснивају на интуицији или на претходно стеченом искуству из сличних ситуација.

Поред већ наведених проблема, потребно је споменути и ефекат уоквиривања. Он објашњава зашто долази до разлике између две групе субјеката уколико им се представи исти догађај са истим исходима и вероватноћама тог исхода. Један од чувених примера ефекта урамљивања који су поставили творци ове теорије, Тверски и Канеман, назива се сценарио болести, у којем су испитаници морали да бирају да ли ће одабрати сигуран исход или ће прихватити ризик. Њихов закључак је да иако су крајњи исходи једнаки сам начин на који су алтернативе представљене има утицај на процес доношења одлука.

Сам процес одлучивања има две фазе:

- формулација
- евалуација.

У фази формулације особа која одлучује формира „слику“ о самим опцијама, о будућим догађајима и околностима и о исходима самих одлука. У процесу евалуације особа процењује добит сваке опције и на основу процене одлучује се за онај са највећом добити.

Једна од основних карактеристика ове теорије је да се корист опција дефинише путем добити и губитка, а не путем крајњег „богатства“. Овакав начин представљања добити упориште има у животу, пошто се многе ствари вреднују у односу на референтну (полазну) тачку, а не на основу њихове апсолутне вредности. Тверски и Канеман су користећи изнад наведену карактеристику, показали да постоје разлике у понашању доносилаца одлука у ситуацијама када се остварује добит и када се остварује губитак, без обзира што су крајњи исходи исти [1 - 4].

Кумулативна теорија изгледности базира се на процес доношења одлуке када су доносиоци изложени губитку у условима неизвесности.

Субјективна добит ризичног исхода описана је мером густине вероватноће p

$$U(p) = \int_{-\infty}^{0} v(x)\frac{d}{dx}(w(F_p(x)))dx + \int_{0}^{+\infty} v(x)\frac{d}{dx}\left(-w\left(1 - F_p(x)\right)\right)dx \tag{2.1}$$

где је $\mathrm{v(x)}$ функција корисности, $\mathrm{w(x)}$ тежинска функција , а $F_p(x) = \int_{-\infty}^{x} dp$ функција расподеле.

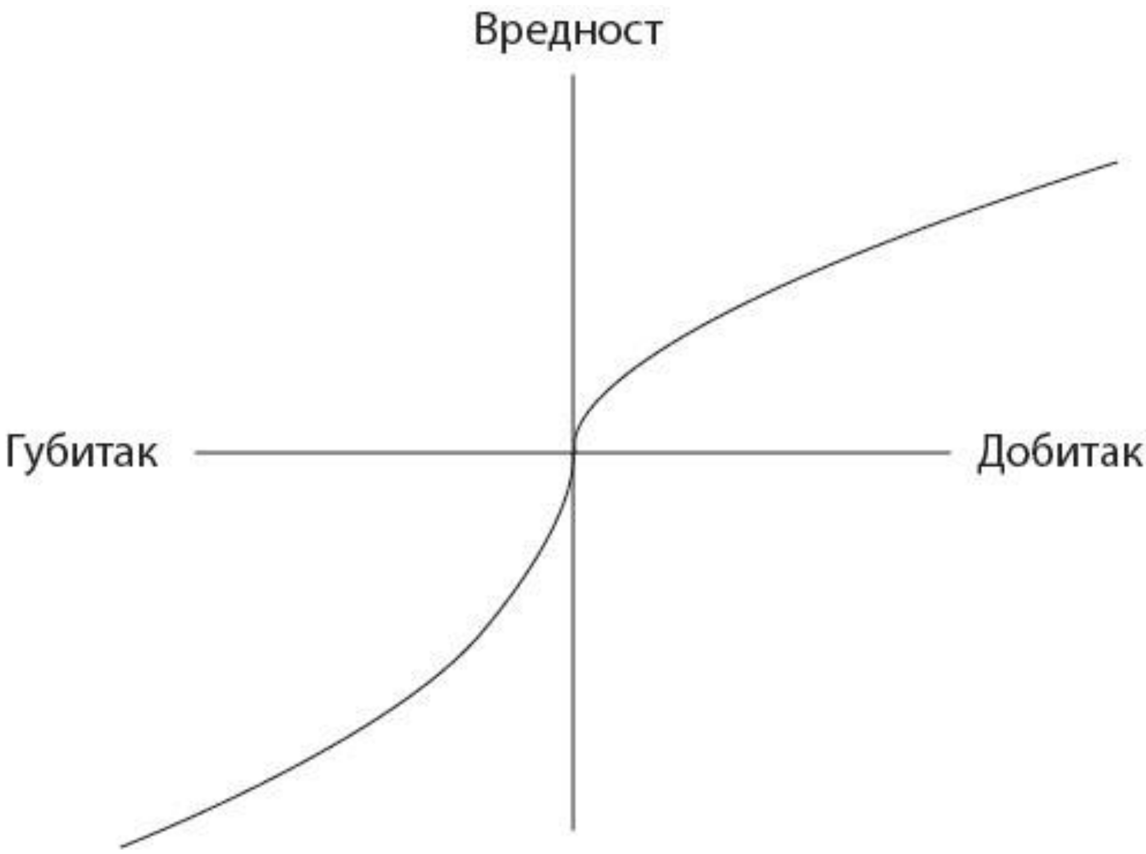
2.2 Функција корисности

Дефинишимо Канеманову и Тверскијеву [2] фунцкију корисности $\mathrm{v(x)}$ у коју укључујемо и параметар аверзије према ризику λ:

$$v(x) = x^{\gamma} \text{ за } x \geq 0$$
$$v(x) = -\lambda(-x)^{\theta}, \quad \text{за } x < 0, \tag{2.2}$$

при чему су γ, θ, λ константе а x је исход везан за одређену референтну тачку. И важи:

$$0 < \gamma < 1,$$
$$0 < \theta < 1, \lambda > 1.$$



Слика 1 – *Функција корисности*

Функција корисности је конкавна за вредности веће од референтне тачке ($\mathrm{v}''(\mathrm{x}) \leq 0, \mathrm{x} \geq 0$), тј. у домену добитака, и конвексна за вредности мање од референтне тачке ($\mathrm{v}''(\mathrm{x}) \geq 0, \mathrm{x} \leq 0$), тј. у домену губитака. Из тога можемо да закључимо да су људи као доносиоци одлука аверзни према ризику када имају добитке и траже ризик у случају када имају губитке.

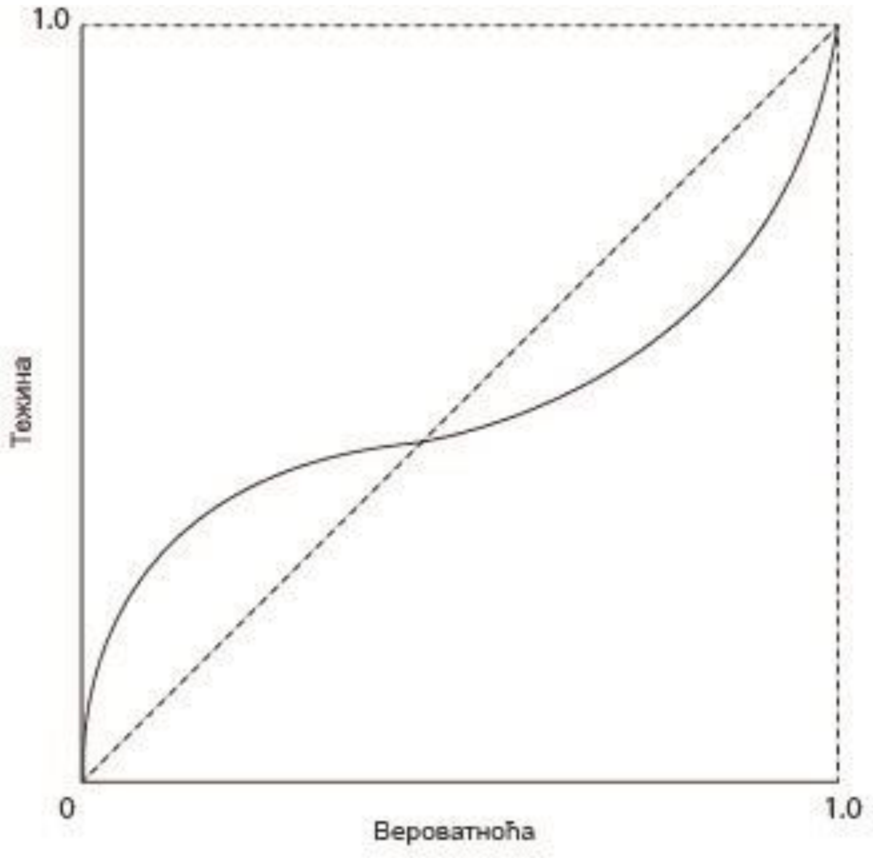
Такође се види да је функција корисности стрмија за губитке него за добитке ($\mathrm{v}'(\mathrm{x}) < \mathrm{v}'(-\mathrm{x})$), односно постоји разлика у нагибу функције из почетне тачке. Та разлика је доказ аверзије према губитку. Аверзија према губитку представља субјективни однос доносиоца одлука ка могућношћу остваривања губитка. Она настаје из личне сатисфакције, односно негативних осећања које производи губитак у било ком смислу.

2.3 Тежинска функција

Аутори Канеман и Тверски су у свом раду 1992. године [2] предложили следећу параметарску фамилију тежинских функција

$$w(p) = \frac{p^c}{(p^c + (1-p)^c)^{1/c}}, \text{при чему важи } c \geq 0.28, \qquad w(0) = 0 \text{ и } w(1) = 1 \tag{2.3}$$

где је p вероватноћа. За c мање од 0.28 функције нису строго растуће. Тверски и Канеман су проценили да ће за $\mathrm{c} = 0.61$ тежинска функција најбоље одговарати подацима. На пример, за $\mathrm{c} = 1$, тежинска функција постаје линеарна. Смањењем параметра c добијамо истакнутији обрнути S облик функције и тиме већи нагласак на песимизму.



Слика 2 – *Тежинска функција*

2.4 Корист у зависности од ранга

У позадини теорије изгледности крије се рангирање исхода, па сходно томе и додељивање тежина појединомисходу, како би одлуке постале упоредиве. У овом одломку описаћемо наслеђе из теорије ранг-зависне корисности [7] у контексту теорије изгледности. Посматраћемо лутрију p_1x_1, $p_2x_2 \dots p_nx_n$, при чему за исходе важи $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$, а p_i, $i = 1, 2, \dots, n$ су одговарајуће вероватноће тих исхода x_i, $i = 1, 2, \dots, n$. У теорији изгледности имамо две тежинске функције у ознаци w^+ за добитке и w^- за губитке. Тежинска функција w^+ се односи на вероватноће рангиране обзиром на позитиван исход, а w^- се односи на вероватноће рангиране обзиром на негативан исход. Рангирање обзиром на референтну вредност 0, зове се потпуно рангирање с обзиром на предзнак.

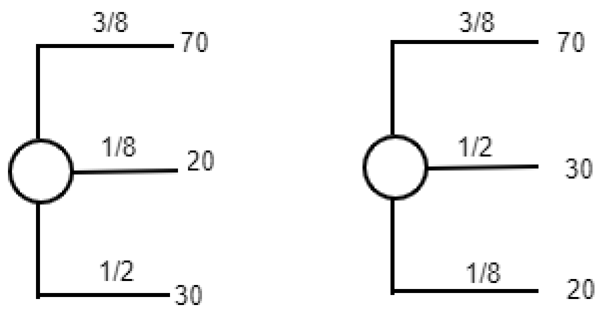
Функција којом вреднујемо поједине одлуке тежине π_j у теорији изгледности дефинисана је формулом

$$V = \sum_{j=1}^{n} \pi_j v(x_j). \tag{2.4}$$

С обзиром да тежине појединих одлука зависе од ранга, прво ћемо објаснити шта је корисност у зависности од ранга.

2.5 Рангирање

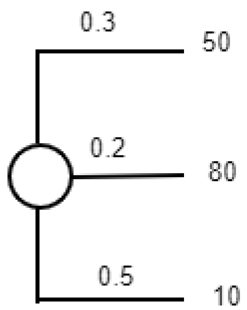
Специфично својство ранг-зависне теорије [7] је то што тежина исхода не зависи само од вероватноће догађаја, већ и од ранга исхода. Стога је потребно рангирати исходе од најбољег према најгорем. Уколико погледамо леви проспект можемо да видимо да исходи нису рангирани. Потребно је поново написати проспект, али тако да рангирамо исходе као што је приказано на слици десно, при чему најбољи исход има ранг 0, а сваком следећем исходу је ранг једнак збиру претходних вероватноћа.



Слика 3 – *Одређивање ранга*

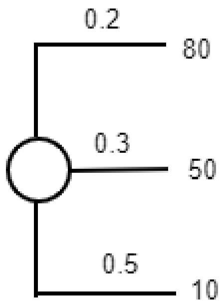
Помоћу тежинске функције w, за сваки исход x рачунамо гранични допринос вероватности исхода рангу исхода користећи следећу формулу: $w(p+r) - w(r)$, при чеми је $w(p+r)$ суседни (лошији) исход по рангу од x.

Пример: Дефинисаћемо тежинску функцију са $w(p) = p^2$ и функцију корисности $v(\alpha) = \alpha$.



Слика 4 – *Одређивање ранга*

Потом рангирамо исходе:



Слика 5 – *Одређивање ранга*

Ако погледамо пример са слике изнад, ранг од 80 је 0, ранг од 50 је 0.2, а ранг од 10 је 0.5 (0.2 + 0.3). Тежинске фунцкије редом износе $\mathrm{w}(0) = 0$, $\mathrm{w}(0.2) = 0.04$, а $\mathrm{w}(0.5) = 0.25$. На крају рачунамо корисност у зависности од ранга и добијамо:

$$\mathrm{w}(0.2)\mathrm{v}(80) + (\mathrm{w}(0.5) - \mathrm{w}(0.2))\mathrm{v}(50) + (1 - \mathrm{w}(0.5))\mathrm{v}(10) = 21.2$$

Потребно је нагласити да се ово поглавље односи на рангирање добрих исхода (добитака).

2.6 Вероватноћа лоших исхода, ранг губитка

За лош исход потребно је одредити вероватноћу, али на начин да буде лошије рангиран, а не боље као што смо до сада гледали за добре исходе. Ранг губитка означавамо са l а припадну вероватноћу са $\mathrm{p_i}$. Ранг губитка трансформисаћемо са функцијом z. Тежина исхода би требало да буде гранични допринос вероватноће тог исхода његовом рангу губитка:

$$\pi(p_i) = z(p + l) - z(l).$$

(2.5)

Када распишемо формулу добићемо:

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j\, v(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j(p_j) v(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \Big(z(p_j + \cdots + p_n) - z(p_{j+1} + \cdots + \, p_n)\Big) v(x_j).$$

(2.6)

У следећем кораку ћемо размотрити тежинске функције. За рангирање лоших исхода користићемо тежинску функцију z. Дефинисаћемо је као дуал тежинске функције добрих исхода w:

$$z(p) = 1 - w(1 - p) \text{ и } w(p) = 1 - z(1 - p).$$

(2.7)

У наставку ћемо показати да је тежинска функција z за рангирање губитака заиста еквивалент функцији w за рангирање добрих исхода.

За проспект са исходом α и вероватноћом тог исхода p, имамо ранг добити g и ранг губитка l, такве да важи $\mathrm{l} = 1 - \mathrm{p} - \mathrm{g}$ и $\mathrm{g} = 1 - \mathrm{p} - \mathrm{l}$. Стога видимо да ранг од p јединствено одређује ранг губитка, и обратно, тако да заједно у суми са вероватноћом p, износе 1.

У теорији изгледности исход x са додељеном вероватноћом p, рангом добити g и рангом губитка l има следећу тежину:

$$x \geq 0: \pi = \pi(p^g) = w^+(p + g) - w^+(g)$$
$$x = 0: v(x) = 0 \ (status\ quo)$$
$$x \leq 0: \pi = \pi(p_l) = w^-(p + l) - w^-(l)$$

(2.8)

Када бисмо расписали горњу формулу у односу на референтну тачку, а затим преко одговарајућих вероватноћа, добили бисмо следеће тврдње:

$$i \leq k: \pi_i = \pi\big(p_i^{p_{i-1}+\cdots+p_1}\big) = w^+(p_i + \cdots + p_1) - w^+(p_{i-1} + \cdots + p_1)$$
$$j \geq k + 1: \pi_j = \pi\left(\pi_{j_{p_{j+1}+\cdots+p_n}}\right) = w^-\big(p_j + \cdots + p_n\big) - w^-(p_{j+1} + \cdots + p_n).$$

(2.9)

Из тога следи:

$$V = \sum_{i=1}^{k} \pi_i \left(p_i^{p_{i-1}+\cdots+p_1}\right) v(x_i) + \sum_{j=k+1}^{n} \pi \left(\pi_{j_{p_{j+1}+\cdots+p_n}}\right) v(x_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left(w^+(p_i + \cdots + p_1) - w^+(p_{i-1} + \cdots + p_1)\right) v(x_i)$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{n} (w^-(p_j + \cdots + p_n) - w^-(p_{j+1} + \cdots + p_n)) v(x_j)$$

(2.10)

3. Еволутивна теорија игара

У појединим случајевима последице донешене одлуке зависе само од стране која доноси одлуку. Међутим, постоје и одлуке чије последице не зависе само од једне стране него и од повезаности са одлукама које доносе друге стране, па тако исход одлуке једне стране зависи и од одлуке друге или других страна.

Неизвесност у одлучивању називамо игром, а наука о доношењу одлука у ситуацији када већи број доносилаца одлука делује у истом контексту тј. када су њихове одлуке међузависне назива се теорија игара. Циљ теорије игара јесте да се одреде оптималне стратегије за сваког учесника у игри, односно да се прецизним математичким алгоритмом преиспита ситуација и одреди разумно понашање у току игре [14]. Више о теорији игара уопште може се пронаћи у [15].

Пре него што пређемо на поделу игара, потребно је објаснити основне појмове.

Игру ћемо дефинисати као скуп правила помоћу којих се одређује ток игре и понашање играча. Играчи (учесници) треба да знају правила игре и морају их се придржавати. Циљ сваког учесника јесте да постигне у игри онакво решење које ће му омогућити да оствари најбољи могући резултат. Исход игре тј. потенцијалне резултате учесника представљамо нумеричким изразом добитка односно губитка учесника неке игре.

Један од најбитнијих појмова у теорији игре је стратегија. Она се дефинише као скуп свих алтернатива којима играч располаже при доношењу одлуке. У току игре, уместо да играч доноси одлуке у сваком тренутку игре, он може унапред да испланира како ће водити игру од самог почетка до краја. Стратегија играча мора садржати све могуће случајеве који се могу десити у току игре или приликом одлучивања. Такође, она мора узимати у обзир сваку информацију коју играч може добити у току игре. Дакле играч бира стратегију на почетку игре и тиме одређује сваку алтернативу коју предузима током игре, тј. он већ на почетку игре има планиран скуп мера који ће следити без обзира на потезе противника или неке случајне догађаје. Свака игра се остварује преко појединачних потеза играча, док потез представља један избор могуће алтернативе. Чиста стратегија у теорији игара представља стратегију која је детерминистичка, тј. она при којој играч не користи случајност при избору.

Нагласићемо и два веома битна појма у теорији игара – рационални играчи и Нешов еквилибријум.

У теорији игара претпоставља се да су играчи су савршено рационалне индивидуе које настоје да максимизирају своју корист тј. они желе да постигну што бољи резултат по својим сопственим критеријумима.

Нешов еквилибријум је концепт решења игре која укључује два или више играча, код ког се подразумева да сваки играч зна стратегија еквилибријума осталих играча, и ниједан играч ништа не може да добије тако што само он промени своју стратегију. Ако је сваки играч изабрао стратегију, и ниједан играч не може да профитира променом своје стратегије под претпоставком да остали играчи не промене своје стратегије, онда тренутни скуп изабраних стратегија, и одговарајућих добитака представља Нешов еквилибријум. Два играча су у Нешовом еквилибријуму ако је сваки донео најбољу могућу одлуку узевши у обзир одлуку противника. Међутим важно је имати у виду да Нешов еквилибријум не мора да значи највећу збирну добит за све играче; чест је случај да сви играчи могу да повећају своју добит ако би некако могли да се договоре око симултане промене својих стратегија. На пример, конкурентни трговци могу да формирају картел како би повећали своје профите [16].

Нама најважнија подела игара је према критеријуму присуства или одсуства елемента случајности. И на основу тог критеријума имамо игре на срећу, код којих играч својим способностима не може да утиче на њихов исход и стратешке игре, код којих играч директно својим способностима утиче на исход игре.

Тип игре који ће се користити даље у овом раду је матрична игра и она је стратешка игра [16]. Матрична игра има коначан број стратегија. Након што сваки играч изабере своју стратегију, рачуна му се добит која је одређена елементом матрице. Изабрана стратегија првог играча одговара одређеном реду матрице, а изабрана стратегија другог играча одређеној колони матрице. Све могуће користи дате су елементима матрице. Таква матрица назива се матрица плаћања. Добит коју добија играч одређена је комбинацијом изабраних стратегија.

Еволутивна теорија игара комбинује теорију игара са динамиком еволуције. Еволутивна игра има унутрашњу и спољашњу игру. Унутрашња игра је игра која се објашњава класичном теоријом игара. На основу ње играчи у еволутивној игри примају добит на основу сопствене и стратегија других играча. Спољашња игра односи се на динамику еволуције, тј. еволуцију репликацијом и еволуцију имитацијом, помоћу које се добит играча за одређену стратегију „преводи" у промене у фреквенцији појављивања саме стратегије. Комбинацијом унутрашње и спољашње игре, добија се еволуција природном селекцијом.

Већ смо нагласили да се класичној теорији игара претпоставља да су играчи рационалне индивидуе, међутим, код еволутивне теорије игара претпоставља се врло мало о рационалном размишљању о стратегијама тј. одлукама. Она претпоставља учење временом. Играчи испробавају стратегије и уколико се стратегија покаже као добра наставиће да је користе, а ако не испробаће неку другу и временом ће наћи стратегију која ће бити добра у већини околности [17-18].

Еволутивна теорија игара се користи да објасни више аспеката људског понашања [19-26].

3.1 Једначина репликације

Најчешћи начин проучавања еволутивних процеса је помоћу селекционе динамике. Она показује раст дела популације који користи одређену стратегију.

Основни израз селекционе динамике представљен је на следећи начин:

$$\dot{\theta_i}(t) = \theta_i(t) \cdot g_i(\theta), \tag{3.1}$$

где је $\theta_i(t)$ величина популације која користи стратегију i, за време t, а $g_i(\theta)$ представља одређени селекциони процес, и различите механизме учења који одговарају различитим формама функције.

Пре објашњења примарне карактеристике селекционе динамике потребно је објаснити појам чисте стратегије у еволутивној теорији игара. Чиста стратегија је она стратегија коју примењује читава популација, а примарна карактеристика селекционе динамике је да ако чисту стратегију нико није прихватио у иницијалном стању, она се никада неће користити. Учесници могу само да имитирају постојеће стратегије.

Најчешће истраживана динамика игре, динамика репликације, представљена је изразом:

$$\dot{\theta_i}(t) = \theta_i(t) \cdot [\mu_t(s_i) - \bar{\mu_t}], \qquad \bar{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t)\mu_t(s_i) \tag{3.2}$$

У динамици репликације сваки учесник представља једну врсту групе, са униформном расподелом популације, која инсистира на коришћењу чисте стратегије s_i. Степен раста $\mathrm{d}\theta_i/\mathrm{d}t$ дела популације θ_i која користи чисту стратегију је стриктно растућа функција разлике добити $\mu(s_i)$ и просечне добити $\bar{\mu}(t)$.

3.2 Еволутивно стабилна стратегија (ЕСС)

ЕСС је стратегија која је прихваћена од стране популације у одређеној околини, и не може бити угрожена било којом другом алтернативном стратегијом која је иницијално ретка. С тим у вези долази се до закључка да скоро читава популација мора да користи ту стратегију да би она била ЕСС, а из тога следи да она мора да буде боља од свих других алтернативних стратегија [17 - 18].

Дефиниција ЕСС-а има сличности са Нешовим еквилибријумом из класичне теорије игара. ЕСС и Нешов еквилибријум су тзв. „*no regret*“ стратегије, у смислу да ако сви у популацији користе Нешову, односно ЕСС-у ниједна јединка неће имати добит ако унилатерално промени своју стратегију. Али разлика је у томе што ЕСС мора да има у виду динамику популације, на коју утичу стратегије у популацији и између популација које интерагују. Свака ЕСС представља Нешов еквилибријум, али сваки Нешов еквилибријум не мора да буде ЕСС.

Математички, ЕСС може да се представи на следећи начин. За веома мало позитивно ε, свако $\sigma \neq \sigma^*$, мора да задовољи следећи услов:

$$\mu(\sigma^*, (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma) > \mu(\sigma, (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma), \tag{3.3}$$

Оваква математичка формулације ЕСС-а значи, да за веома мало пропорцију ε мутираног понашања σ у популацији, коришћењем стратегије σ^* добиће се већа добит μ, и стабилно стање настало као резултат стратегије σ^*, не може бити угрожено малим мутацијама. Дакле стратегија σ^*, је ЕСС. Треба напоменути да је мутирана стратегија, из различитог сета стратегија.

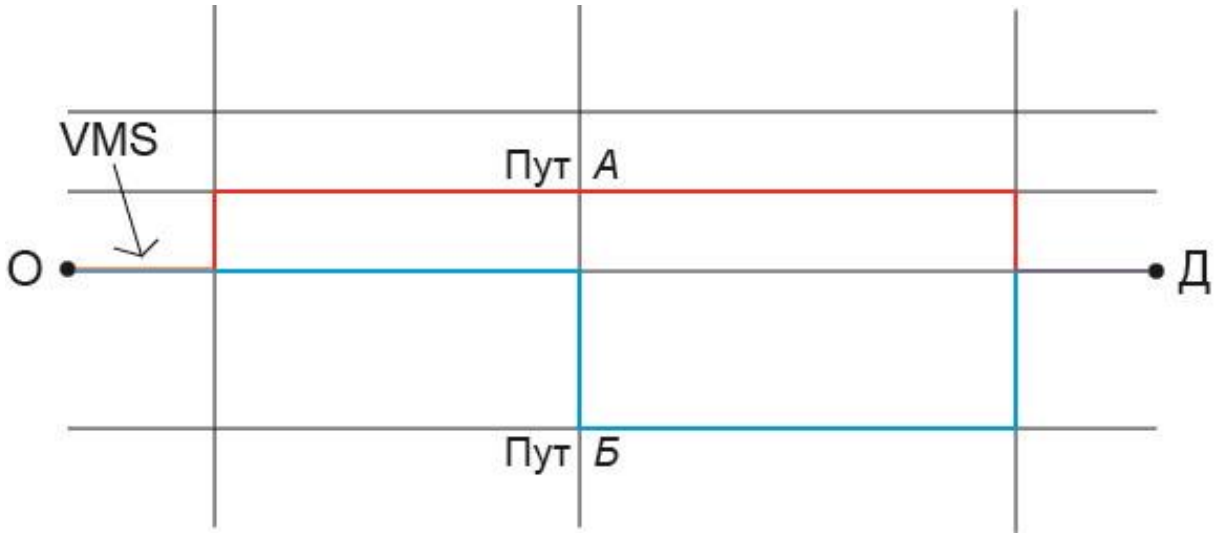
Да би стратегија σ^* била ЕСС морају да важе следећа два услова:

$$\begin{gathered}\mu(\sigma^*, \sigma^*) > \mu(\sigma, \sigma^*) \text{ или } \mu(\sigma^*, \sigma^*) = \mu(\sigma, \sigma^*),\\ \mu(\sigma^*, \sigma) > \mu(\sigma, \sigma).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Први услов представља стриктно Неш еквилибријум решење, док други услов значи да иако је стратегија σ, неутрална стратегија, део популације који користи стратегију σ^*, има предност над онима који користе стратегију σ.

4. Формирање модела избора пута

Као што је у уводу напоменуто, индиректан метод с којим ће се утицати на одлуке возача су информације о тренутном стању на путевима, које се приказују на VMS-у (Variable Message Sign). VMS је електронски саобраћајни знак који се често користи на путевима како би путницима пружио информације о различитим догађајима, у овом случају, пре свега гужве на путевима. Поред тога, такође је речено да ће возачи на те информације одговарати у виду промене избора пута. У овом раду, користиће се мрежа са два пута. Мрежа се састоји од пута А и пута Б. Пут А, је најкраћи пут, а пут Б је пут препоручен од стране VMS-а, уколико је дошло до закрчења, тј. гужви на путу А. Пут Б је дужи од пута А, и поред тога, постоји одређена раздаљина која треба да се пређе приликом преусмеравања на пут Б. VMS се налази у близини тачке 0 (Слика 6).



Слика 6 – *Модел мреже*

Само формирање модела састоји се од три корака. У првом кораку рачуна се перципирано време путовања путем А и путем Б, и на основу тога опције се вреднују помоћу кумулативне теорије изгледности. У другом кораку, дефинишу се играчи и стратегије те се формира матрица плаћања еволутивне игре, коришћењем претходног вредновања опција. У финалном кораку, разматра се динамика само процеса.

Корак 1: За специфичну мрежу путева, возачи одређују перципирано време путовања за сваки алтернативни пут, на основу свог пређашњег искуства. Претпоставља се да је расподела времена путовања сваког пута идентична и независна од осталих. По централној граничној теореми [27], расподела времена путовања тежиће нормалној расподели и записује се:

$$T_K \sim N(t_k, (\sigma_k)^2),$$

$$t_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i,$$

$$\sigma_k{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(t_i - t_k)^2,$$

(4.1)

где је T_K перципирано време путовања путем k, t_k средње време путовања путем k, $\sigma_k{}^2$ варијанса времена путовања путем k и n број путовања.

Референтна тачка се дефинише као средња вредност времена неометаног пута:

$$T_0 = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} T_k^{free}$$

(4.2)

где је $\mathrm{T_k^{free}}$ време неометаног путовања и К број алтернативних путева, у овом случају, К = 2.

На основу перципираног времена путовања, сваком путу к се додели вредност $\mathrm{V(k)}$, коришћењем кумулативне теорије изгледности.

Функција корисности рачуна се на основу (2.2), битно је споменути да се x у (2.2) рачуна као $\mathrm{T_0 - T_K}$. У зависности од вероватноће сваког x-а, израчунавају се одговарајуће тежинске функције коришћењем (2.3), и на крају само $\mathrm{V(k)}$ се рачуна као (2.10).

Корак 2: На основу разлике у индивидуалним преференцијама, претпостављамо два типа учесника:

1. $T_{1:}$ возачи који преферирају најкраћи пут
2. T_2: возачи који су склони да промене избор пута на препоручени.

T_1 и T_2 су учесници у игри у овом транспортном систему, и они као циљ имају да максимизују своју корист.

Играчи T_1 и T_2, могу да изаберу једну од две могуће стратегије:

1. $S_{1:}$ изабрати најкраћи пут (пут А)
2. S_2: изабрати препоручени пут (пут Б).

Један те исти возач бира коју ће стратегију применити, посматрајући исход (времена проласка) других возача у својој околини. Дакле можемо закључити да се у овој еволутивној игри, ради о еволуцији имитацијом.

Након дефинисања играча и стратегија, потребно је формирати матрицу плаћања:

T_1	T_2 Пут А	Пут Б
Пут А	$V_{1(A)}$ - R, $V_{2(A)}$ - R	$V_{1(A)} + R_1$, $V_{2(B)} - D_1$
Пут Б	$V_{1(B)} - D_2$, $V_{2(A)} + R_2$	$V_{1(B)} - D_3$, $V_{2(B)} - D_4$

Табела 1 – *Матрица плаћања*

Добит сваког учесника при доношењу различитих одлука репрезентује је на следећи начин:

1. Учесник T_1 је изабрао пут А, и учесник T_2 је изабрао пут А:
   Добит учесника T_1 је $V_{1(A)}$-R, а добит учесника T_2 је $V_{2(A)}$-R.
2. Учесник T_1 је изабрао пут А, а учесник T_2 је изабрао пут Б:
   Добит учесника T_1 је $V_{1(A)}+R_1$, а добит учесника T_2 је $V_{2(Б)}-D_1$.
3. Учесник T_1 је изабрао пут Б а учесник T_2 је изабрао пут А:
   Добит учесника T_1 је $V_{1(Б)}-D_2$, а добит учесника T_2 је $V_{2(Б)}+R_2$.
4. Учесник T_1 је изабрао пут Б а учесник T_2 је изабрао пут Б:
   Добит учесника T_1 је $V_{1(Б)}-D_3$, а добит учесника T_2 је $V_{2(Б)}-D_4$.

Када учесници изаберу различите путеве, учесник који је изабрао пут А ће имати већу добит и добре услове у саобраћају, док ће учесник који је изабрао пут Б, имати мању добит, због повећања у времену путовања.

Када узмемо у обзир индивидуалне преференције учесника T_1 и T_2, можемо да закључимо да је $R_1 > R_2$, јер учесник T_1 преферира пут А, док је учесник T_2, не преферира нужно пут Б, већ је само флексибилан, и у случају гужве на путу А, вољан је да иде путем Б. Такође на исти начин долазимо до закључка $D_2 > D_1$, јер је степен незадовољства (који доводи до смањења добити) учесника T_1 већи од степена незадовољства учесника T_2, приликом избора пута Б.

Ако оба учесника изаберу пут Б, због индивидуалних преференција, смањење добити учесника T_1 је веће од оног када је учесник T_1 изабрао пут Б, а учесник T_2 пут А. Из тога можемо да закључимо да је $D_3 > D_2$.

До закључка $D_4 > D_1$ долазимо на основу чињенице да ће учесник T_2 имати већу добит уколико учесник T_1 изабере пут А, него уколико оба учесника изаберу пут Б.

Такође степен смањења добити учесника T_1 приликом преласка са пута А, на пут Б, је већи од степена смањења добити T_2, на основу тога знамо да је $D_2 > D_4$.

Након ове анализе можемо да закључимо следећи однос константи:

$$D_3 > D_2 > D_4 > D_1 \text{ и } R_1 > R_2.$$

Дакле, модел се може представити на следећи начин:

Играчи: T_1, T_2

Сет стратегија: $\{S_1, S_2\}$

Матрица плаћања: погледати Табела 1.

У следећем кораку бавићемо се динамиком самог процеса.

Корак 3: У овом делу, разматра се динамичка еволуција процеса.

Претпоставимо да су вероватноће да да учесници T_1 и T_2 изаберу пут Б, x и y ($x, y \in [0,1]$), респективно. Према томе, вероватноће да изаберу пут А су 1-x и 1-y.

Сада ћемо дефинисати добит стратегија S_1, S_2 и просечну добит стратегија S_1 S_2 за играче T_1 и T_2.

Добит стратегије S_2 за играча T_1 (U_{1B}) састоји се од два дела:

1. Добит када играч T_1 изабере пут Б, а играч T_2 пут А.
2. Добит када играч T_1 изабере пут Б, а играч T_2 изабере исто пут Б.

Математички се то записује:

$$\begin{aligned} U_{1B} &= y \cdot \left(V_{1(B)} - D_3\right) + (1-y) \cdot \left(V_{1(B)} - D_2\right) \\ &= (D_2 - D_3) \cdot y + (V_{1(B)} - D_2). \end{aligned}$$

(4.3)

Добит стратегије S_1 за играча T_1 (U_{1A}) рачуна се на исти начин и састоји се од:

1. Добит када играч T_1 изабере пут А, а играч T_2 изабере пут Б.
2. Добит када играч T_1 изабере пут А, а играч T_2 исто изабере пут А.

Математички запис добити стратегије S_1 за играча T_1:

$$\begin{aligned} U_{1A} &= y \cdot \left(V_{1(A)} + R_1\right) + (1-y) \cdot (V_{1(A)} - R) \\ &= (R_1 + R) \cdot y + (V_{1(A)} - R). \end{aligned}$$

(4.4)

Овако дефинисана добит представља математичко очекивање добити, за дате вероватноће (фреквенције) „противничких" стратегија. То је условно математичко очекивање, дакле очекивање добити под условом да се одабере једна од две чисте стратегије.

Просечна добит од стратегија S_1 и S_2 за играча T_1 рачуна се:

$$U_{p1} = x \cdot U_{1B} + (1-x) \cdot U_{1A}$$
$$= (D_2 - R - R_1 - D_3) \cdot x \cdot y + (R - D_2) \cdot x + (R_1 + R) \cdot y + (V_{1(A)} - R).$$

(4.5)

Просечна добит представља безусловно математичко очекивање, имајући у виду да играч T_1 бира стратегије са различитом вероватноћом.

У еволутивној теорији игара, динамика промене стратегије зависи од играчеве способности да учи.

Овај процес се може описати динамиком репликације.

Динамика репликације стратегије S_2 играча T_1 је:

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (U_{1B} - U_{P1})$$
$$= x \cdot (1-x) \cdot [(D2 - R - R1 - D3) \cdot y + (R - D2)].$$

(4.6)

Добит играча T_2 за стратегије S_1 и S_2, U_{2A} и U_{2B} рачунају се на исти начин као код играча T_1:

$$U_{2B} = x \cdot \left(V_{2(B)} - D_4\right) + (1-x) \cdot (V_{2(B)} - D_1)$$
$$= (D_1 - D_4) \cdot x + (V_{2(B)} - D_1),$$

(4.7)

$$U_{2A} = x \cdot \left(V_{2(A)} + R_2\right) + (1-x) \cdot (V_{2(A)} - R)$$
$$= (R_2 - R) \cdot x + (V_{2(A)} - R).$$

(4.8)

Просечна добит стратегија S_1 и S_2 играча T_2 је следећа:

$$U_{P2} = y \cdot U_{2B} + (1-y) \cdot U_{2A}$$
$$= (D_1 - R - R_2 - D_4) \cdot x \cdot y + (R_2 + R) \cdot x + (R - D_1) \cdot y + \left(V_{2(A)} - R\right).$$

(4.9)

Динамика репликације стратегије S_2 играча T_2 је:

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot (U_{2B} - U_{P2})$$
$$= y \cdot (1-y) \cdot [(D_1 - R - R_2 - D_4) \cdot x + (R - D_1)].$$

(4.10)

Треба напоменути да је приликом рачунања просечних добити стратегија S_1 и S_2 играча T_1 и T_2 , $V_{ia} = V_{ib}$ $(i = 1,2)$, подразумевано.

Фиксна тачка за динамику репликације је популација која задовољава услов:

$$\dot{x_i} = 0, \forall i.$$

(4.11)

Фиксна тачка је мирна радна тачка у терминологији управљања [28].

У фиксној тачки еволуција и даље постоји, али нема промене. Дакле, еволуција је ушла у устаљено стање.

Решавањем система једначина:

$$\dot{x} = x \cdot (1-x) \cdot [(D_2 - R - R_1 - D_3) \cdot y + (R - D_2)] = 0,$$
$$\dot{y} = y \cdot (1-y) \cdot [(D_1 - R - R_2 - D_4) \cdot x + (R - D_1)] = 0,$$

долази се до закључка да су фиксне тачке овог система избора пута:

1. (0, 0),
2. (0, 1),
3. (1, 0),
4. (1, 1),

$$((D_1 - R) / (D_1 - R - R_2 - D_4), (D_2 - R) / (D_2 - R - R_1 - D_3)).$$

Када смо пронашли фиксне тачке, време је да се формира Јакобинова матрица, која је потребна за дискутовање еволутивно стабилне стратегије за различите правце еволуције.

Јакобинова матрица је матрица парцијалних извода првог реда неке функције, у нашем случају функције су изнад дефинисане динамике репликације.

Само формирање матрице врши се на следећи начин:

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (U_{1B} - U_{P1}) = x \cdot (1 - x) \cdot [(D2 - R - R1 - D3) \cdot y + (R - D2)]\,,$$

уради се парцијални извод по x-у једначине изнад и добије:

$$(1 - 2 \cdot x)[(D_2 - R - R_1 - D_3) \cdot y + (R - D_2)]$$

затим се уради и парцијални извод по y-у:

$$x \cdot (1 - x) \cdot (D_2 - R - R_1 - D_3).$$

Исти поступак се понови за једначину:

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot (U_{2B} - U_{P2}) = y \cdot (1 - y) \cdot [(D_1 - R - R_2 - D_4) \cdot x + (R - D_1)],$$

и добије је следећа Јакобинова матрица

$$\begin{pmatrix} (1 - 2 \cdot x) \cdot [(D_2 - R - R_1 - D_3) \cdot y + (R - D_2)] & x \cdot (1 - x) \cdot (D_2 - R - R_1 - D_3) \\ y \cdot (1 - y) \cdot (D_1 - R - R_2 - D_4) & (1 - 2 \cdot y) \cdot [(D_1 - R - R_2 - D_4) \cdot x + (R - D_1)] \end{pmatrix}$$

а затим се рачуна њена детерминанта(det J), и траг матрице(trag J):

$$\det J = (1 - 2 \cdot x) \cdot [(D_2 - R - R_1 - D_3) \cdot y + (R - D_2)] \cdot (1 - 2 \cdot y) \cdot [(D_1 - R - R_2 - D_4) \cdot x + (R - D_1)] - y \cdot (1 - y)(D_1 - R - R_2 - D_4) \cdot x \cdot (1 - x) \cdot (D_2 - R - R_1 - D_3),$$

$$trag\,J = (1 - 2 \cdot x) \cdot [(D_2 - R - R_1 - D_3) \cdot y + (R - D_2)] + (1 - 2 \cdot y) \cdot [(D_1 - R - R_2 - D_4) \cdot x + (R - D_1)].$$

који се даље користе за анализу локалне стабилности и проналажење еволутивно стабилне стратегија, а начин на који се то ради, биће објашњен у следећем поглављу.

5. Анализа локалне стабилности

Пре саме анализе морамо дефинисати локалну стабилност нелинеарног система линеаризацијом у мирној радној тачки. Систем је локално стабилан уколико је линеаризован модел стабилан, а то значи да све својствене вредности имају негативан реалан део. То се да проверити већим бројем поступака (Раутов критеријум, директно срачунавање својствених вредности…). Међутим наша Јакобинова матрица је димензија 2x2, па је најзгодније испитивати стабилност користећи следећи услов:

$$\det \mathrm{J} > 0 \text{ и } \mathrm{trag}\, \mathrm{J} < 0,$$

с обзиром да је детерминанта производ, а траг збир свих својствених вредности, па се лако показује да им је свима реални део негативан ако и само ако је испуњен горе наведен услов.

То ћемо сада и доказати користећи матрицу A чије су димензије 2x2:

Ако се ненулти вектор x, линеарном трансформацијом са матрицом A трансформише у себи колинеаран вектор [29]:

$$Ax = \lambda x$$

(5.1)

Он представља својствени вектор матрице A. Скалар λ се назива својствена вредност матрице A, која одговара својственом вектору x.

Пошто је дефинициона једначина еквивалентна једначини:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

(5.2)

Својствени вектори представљају решење хомогеног система линеарних једначина са матрицом система:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

(5.3)

која се назива својствена или карактеристична матрица. Да би хомогени систем (5.2) имао ненулта решења потребно је и довољно да матрица система буде сингуларна тј.:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

(5.4)

Што је даље једнако:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Добили смо квадратну једначину чији су корени λ_1 и λ_2 па горњи израз може да се запише као:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Одатле можемо да закључимо да је:

$$a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda_1\lambda_2.$$

(5.5)

Већ знамо да $a_{11} + a_{22}$ представља траг матрице A, док $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ представља детерминанту матрице A.

Уколико се вратимо на услов локалне стабилности, долазимо до закључка да ће систем бити локално стабилан уколико су испуњени следећи услови:

$$a_{11} + a_{22} < 0$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$$
(5.6)

У нашем случају матрица A је Јакобинова матрице дефинисана у претходном поглављу.

Након што смо дефинисали и доказали услов локалне стабилности, можемо почети са самом анализом.

Постоје четири случаја од значаја, која ћемо анализирати:

(1) $R = 0$

Практично значење овог случаја, је да VMS није инсталиран у транспортном систему. Из Табеле 2 се види да је стриктно доминантна стратегија (0, 0), што значи да ће сви возачи изабрати најкраћи пут (пут А), када немају више информација о алтернативним путевима у транспортном систему(Слика 7).

Тачка равнотеже	**det(J)**	**Знак det(J)**	**trag(J)**	**Знак trag(J)**	**Локална стабилност**
(0,0)	D_1D_2	+	$-(D_1+D_2)$	-	ЕСС
(0,1)	$-D_1(D_3+R_1)$	-	$D_1-D_3-R_1$	-	Нестабилно
(1,0)	$-D_2(D_4+R_2)$	-	$D_2-D_4-R_2$	-	Нестабилно
(1,1)	$(R_1+D_3)(R_2+D_4)$	+	$R_1+D_3+R_2+D_4$	+	Нестабилно

Табела 2 – *Анализа локалне стабилности за R = 0*

(2) $0 < R < D_1$

Практично значење овог случаја, је да ће губитак ефикасности путовања, проузрокованогужвом услед тога што су сви возачи изабрали пут А, бити мали. На основу Табеле 3, видимо да је стриктно доминантна стратегија (0,0), што значи, да уколико су губици у ефикасности мали, сви возачи ће изабрати пут А(Слика 8).

Тачка равнотеже	**det(J)**	**Знак det(J)**	**trag(J)**	**Знак trag(J)**	**Локална стабилност**
(0,0)	$(R-D_2)(R-D_1)$	+	$(R-D_2)+(R-D_1)$	-	ЕСС
(0,1)	$(R_1+D_3)(R-D_1)$	-	$(D_1-D_3)-(R+R_1)$	-	Нестабилно
(1,0)	$(R-D_2)(R_2+D_4)$	-	$D_2-D_4-R-R_2$	-	Нестабилно
(1,1)	$(R_1+D_3)(R_2+D_4)$	+	$R_1+D_3+R_2+D_4$	+	Нестабилно

Табела 3 - *Анализа локалне стабилности за $0 < R < D_1$*

(3) $D_1 < R < D_2$

У овом случају губитак ефикасности у путовању приказан на VMS-у је између D_1 и D_2. Након анализе стабилности (Табела 4) види се да је (0, 1) ЕСС, што значи да ће под дејством информација о тренутном стању на путевима, систем доћи у еволутивно стабилно стање у којем ће T_1 тип возача изабрати пут А, а T_2 тип возача изабрати пут Б (Слика 9).

Тачка равнотеже	**det(J)**	**Знак det(J)**	**trag(J)**	**Знак trag(J)**	**Локална стабилност**
(0,0)	$(R-D_2)(R-D_1)$	-	$(R-D_2)+(R-D_1)$		Нестабилно
(0,1)	$(R_1+D_3)(R-D_1)$	+	$(D_1-D_3)-(R+R_1)$	-	ЕСС
(1,0)	$(R-D_2)(R_2+D_4)$	-	$D_2-D_4-R-R_2$		Нестабилно
(1,1)	$(R_1+D_3)(R_2+D_4)$	+	$R_1+D_3+R_2+D_4$	+	Нестабилно

Табела 4 - *Анализа локалне стабилности за $D_1 < R < D_2$*

(4) $R > D_2$

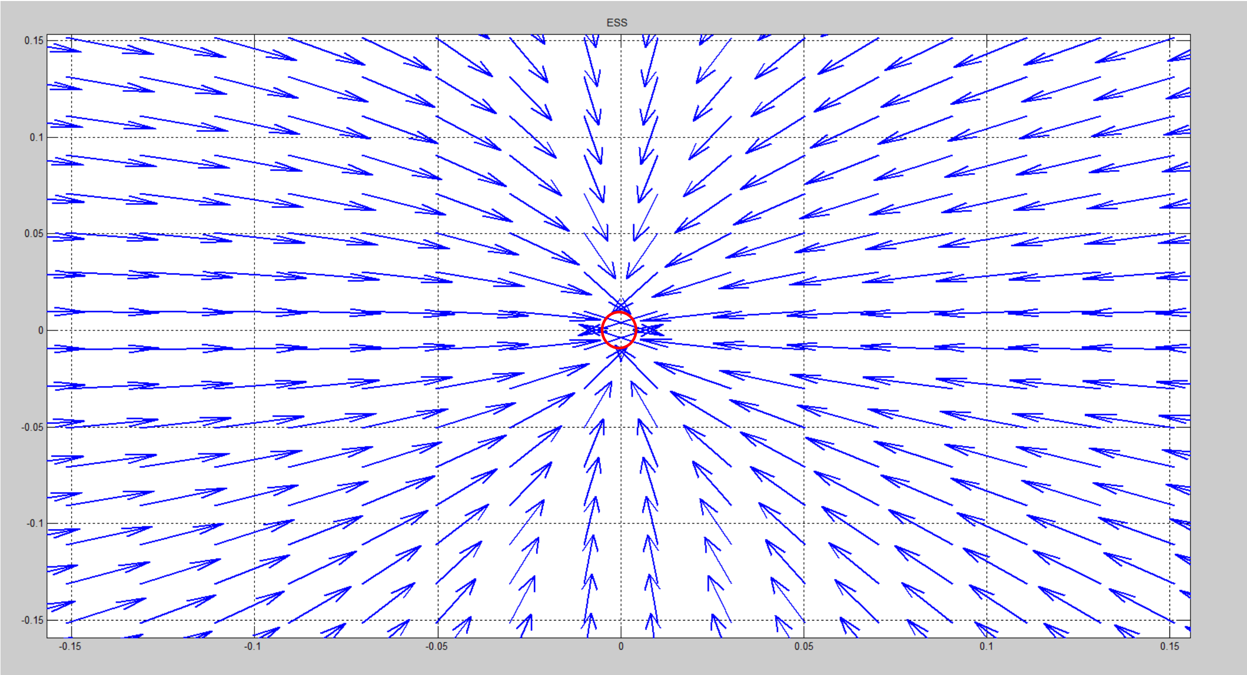
Уколико је $R > D_2$ то значи је гужва, тј. закрчење на путу А велико. На основу Табеле 5, може се закључити да динамички систем има две чисте стратегије и то су (0, 1) и (1, 0), и оне су ЕСС. То значи да кад возачи у систему добију информације о великим губицима у ефикасности, систем ће прогресирати ка еволутивно стабилном стању x = 0 и y = 1 или x = 1 и y = 0. Што значи да ће се под дејством информација, један тип учесника, тј. возача пребацити на пут Б, док се други тип учесника остати на путу А(Слика 10, Слика 11).

Тачка равнотеже	**det(J)**	**Знак det(J)**	**trag(J)**	**Знак trag(J)**	**Локална стабилност**
(0,0)	$(R-D_2)(R-D_1)$	+	$(R-D_2)+(R-D_1)$	+	Нестабилно
(0,1)	$(R_1+D_3)(R-D_1)$	+	$(D_1-D_3)-(R+R_1)$	-	ЕСС
(1,0)	$(R-D_2)(R_2+D_4)$	+	$D_2-D_4-R-R_2$	-	ЕСС
(1,1)	$(R_1+D_3)(R_2+D_4)$	+	$R_1+D_3+R_2+D_4$	+	Нестабилно

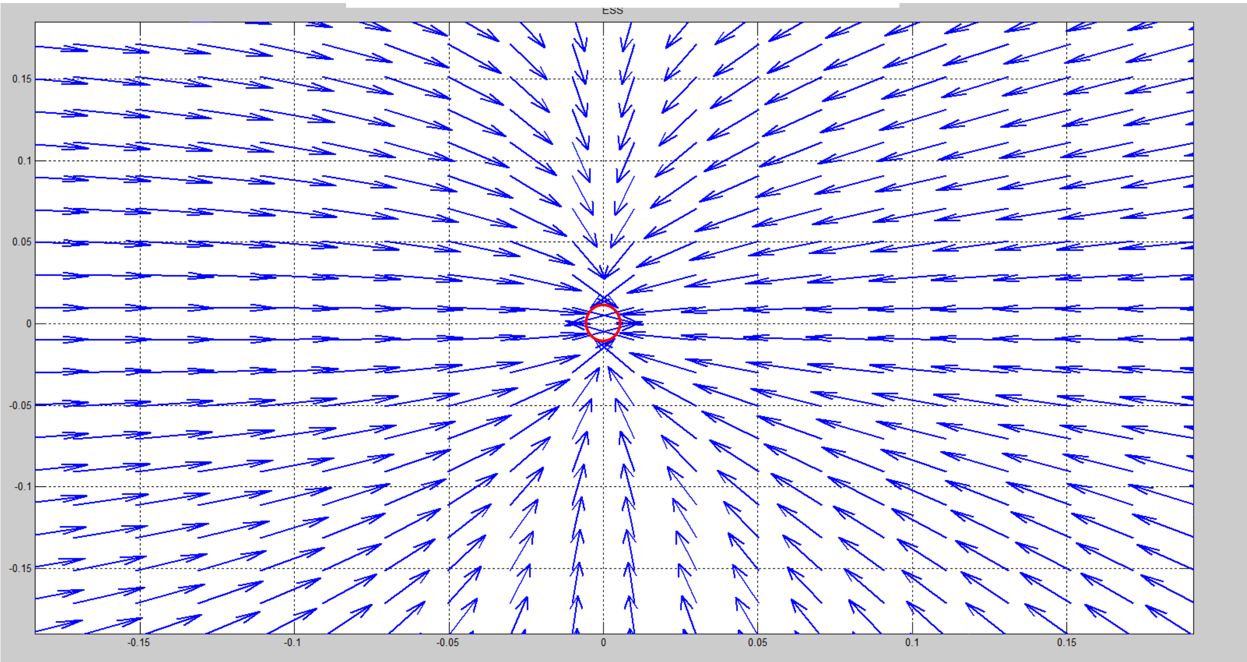
Табела 5 - *Анализа локалне стабилности за $R > D_2$*

На наредним сликама приказана је симулација диференцијалних једначина (4.6) и (4.10) и приказано је како систем напредује у еволутивно стабилно стање, за горе наведене случајеве.

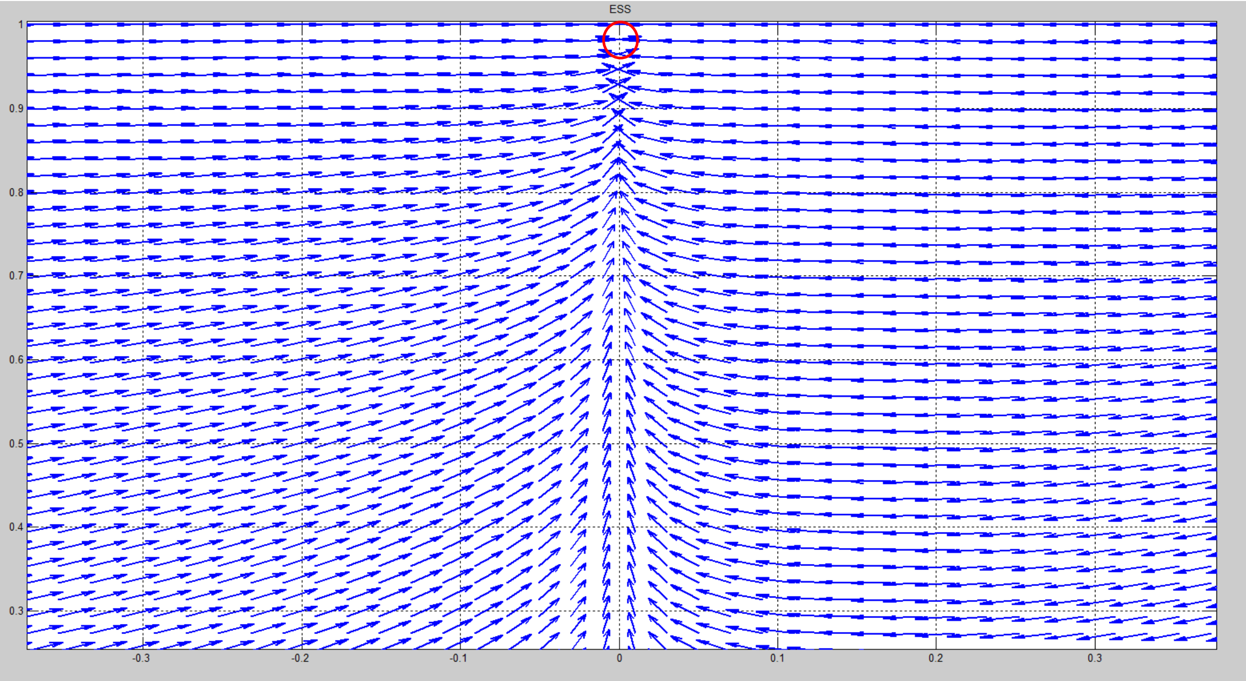
На слици 7, тачка равнотеже (0,0) је стабилна тачка, на слици 8, такође, на слици 9, стабилна тачка равнотеже је (0,1), на слици 10 такође, док на слици 11 систем напредује у стабилно стање (1,0).



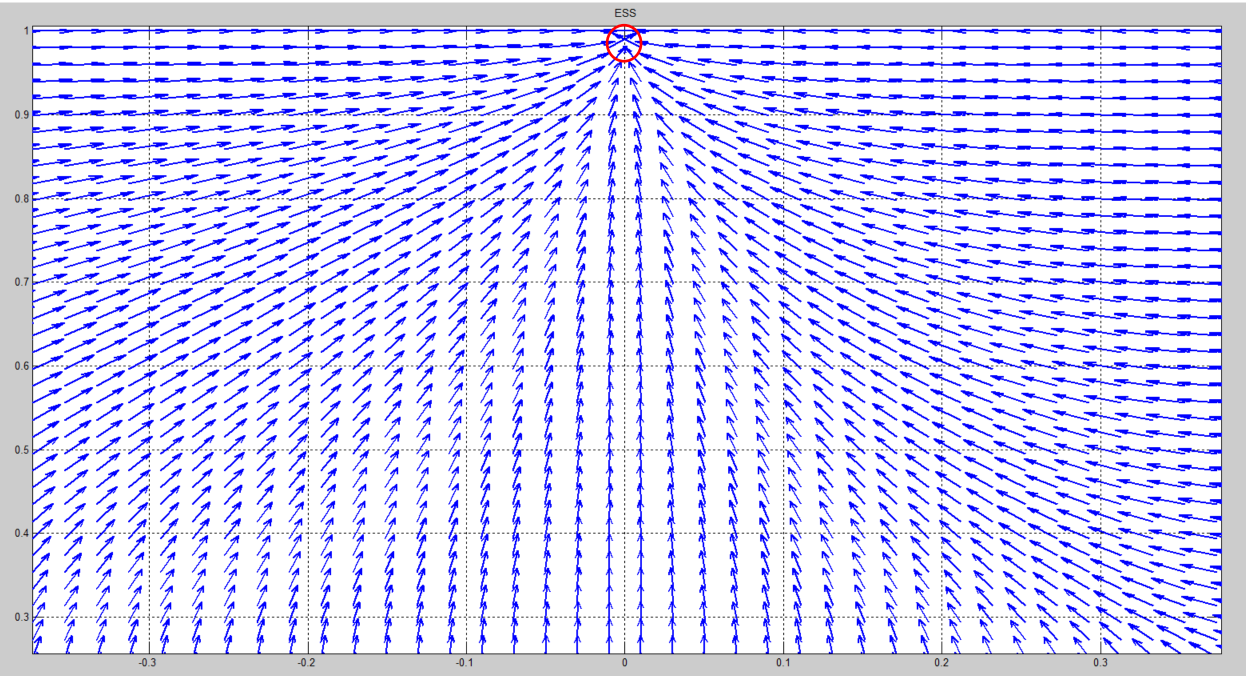
Слика 7 – *Приказ симулације ЕСС- а за случај R = 0*



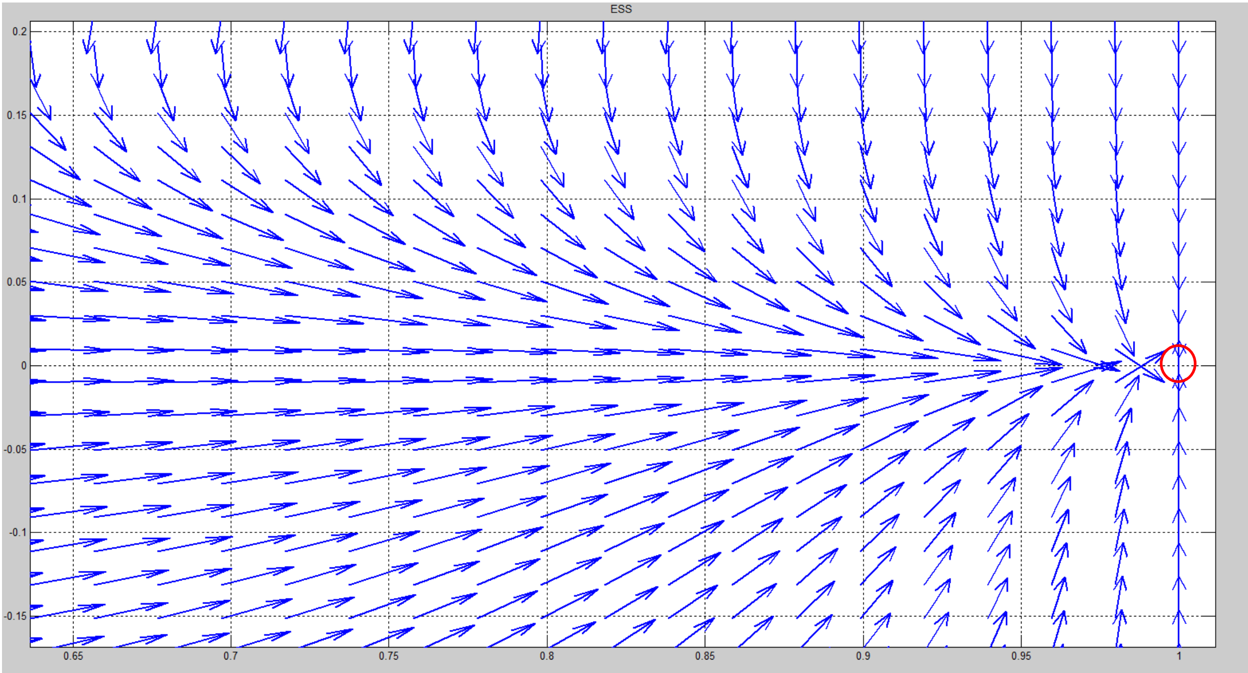
Слика 8 - *Приказ симулације ЕСС- а за случај* $0 < R < D_1$



Слика 9 - *Приказ симулације ЕСС- а за случај* $D_1 < R < D_2$



Слика 10 - *Приказ симулације ЕСС- а за случај* $R > D_2$



Слика 11 - *Приказ симулације ЕСС- а за случај R > D_2*

За учесника T_1, постоје две тачке равнотеже за динамику репликације , $x^* = 0, x^* = 1$.

За:

$$F(x) = \frac{dx}{dt} = x \cdot (U_{1B} - \overline{U_1})$$
$$= x(1-x)[(D_2 - R - R_1 - D_3)y + (R - D_2)],$$

$F'(x)$ је:

$$F'(x) = (1-2x)[(D_2 - R - R_1 - D_3)y + (R - D_2)].$$

Да би систем био стабилан у тачки x^*, $F'(x^*) < 0$ за свако $x > x^*$.

(5.7)

Део популације, који припада групи возача T_1, који бира пут А временом ће напредовати у различита стабилна стања у зависности од различитих иницијалних вредности избора пута возача T_2.

За $y = \frac{D_2 - R}{D_2 - R - R_1 - D_3}$, $F'(x) = 0$. Што значи да ће без обзира на то колики део популације, који припада групи возача T_1, иницијално изабере пут Б, систем бити стабилан.

За $0 < y < \frac{D_2 - R}{D_2 - R - R_1 - D_3}$, $F'(0) > 0, F'(1) < 0$, стабилна тачка је $x^* = 1$. Што значи да ће део популације, који припада групи возача T_1, и који бира пут Б, бити стабилан 100%, како време пролази.

За $\frac{D_2 - R}{D_2 - R - R_1 - D_3} < y < 1, F'(0) < 0, F'(1) > 0$, стабилна тачка је $x^* = 0$. Што значи да ће се возачи T_1, како време пролази пребацивати на пут Б.

За учесника T_2, постоје две тачке равнотеже за динамику репликације , $y^* = 0, y^* = 1$.

За:

$$F(y) = \frac{dy}{dt} = y \cdot (U_{1B} - \overline{U_1})$$
$$= y(1-y)[(D_1 - R - R_2 - D_4)y + (R - D_1)],$$

$\mathrm{F}'(\mathrm{y})$ је:

$$F'(y) = (1-2y)[(D_1 - R - D2 - D_4)x + (R - D_1)].$$

На основу (5.7) можемо да закључимо следеће:

За $x = \frac{D_1 - R}{D_1 - R - R_2 - D_4}, F'(y) = 0$. Што значи да ће без обзира на то колики део популације, који припада групи возача T_2, иницијално изабере пут Б, систем бити стабилан.

За $0 < x < \frac{D_1 - R}{D_1 - R - R_2 - D_4}, F'(0) > 0, F'(1) < 0$, стабилна тачка је $y^* = 1$. Што значи да ће део популације, који припада групи возача T_1, и бира пут Б, порасти до 100% како време пролази.

За $\frac{D_1 - R}{D_1 - R - R_2 - D_4} < x < 1, F'(0) < 0, F'(1) > 0$, стабилна тачка је $y^* = 0$. Што значи да ће се возачи T_2, како време пролази пребацивати на пут А.

6. Дискусија, закључак и приказ апликације

Претходном анализом закључили смо да уколико у транспортном систему VMS није инсталиран (R = 0), сви возачи ће изабрати најкраћи пут (пут А) (Слика 12).

Када су губици у ефикасности приказани на VMS-у мали ($0 < R < D_1$), утицај VMS-а на избор пута је занемарљив. Резултати показују да ће сви возачи и даље изабрати најкраћи пут (Слика 13).

Када су губици приказани на VMS-у већи ($D_1 < R < D_2$), транспортни систем ће прогресирати у еволутивно стабилно стање, у којем возачи који преферирају пут А , и бирају тај пут, а возачи који су склони промени избора пута на препоручени, изабраће пут Б (Слика 14).

Резултати анализе показују да су сви возачи осетљиви на велике губитке ефикасности ($R > D_2$), и да ће транспортни систем прогресирати у еволутивно стабилно стање у којем један тип возача изабере пут А, а други тип возача, пут Б (Слика 15).

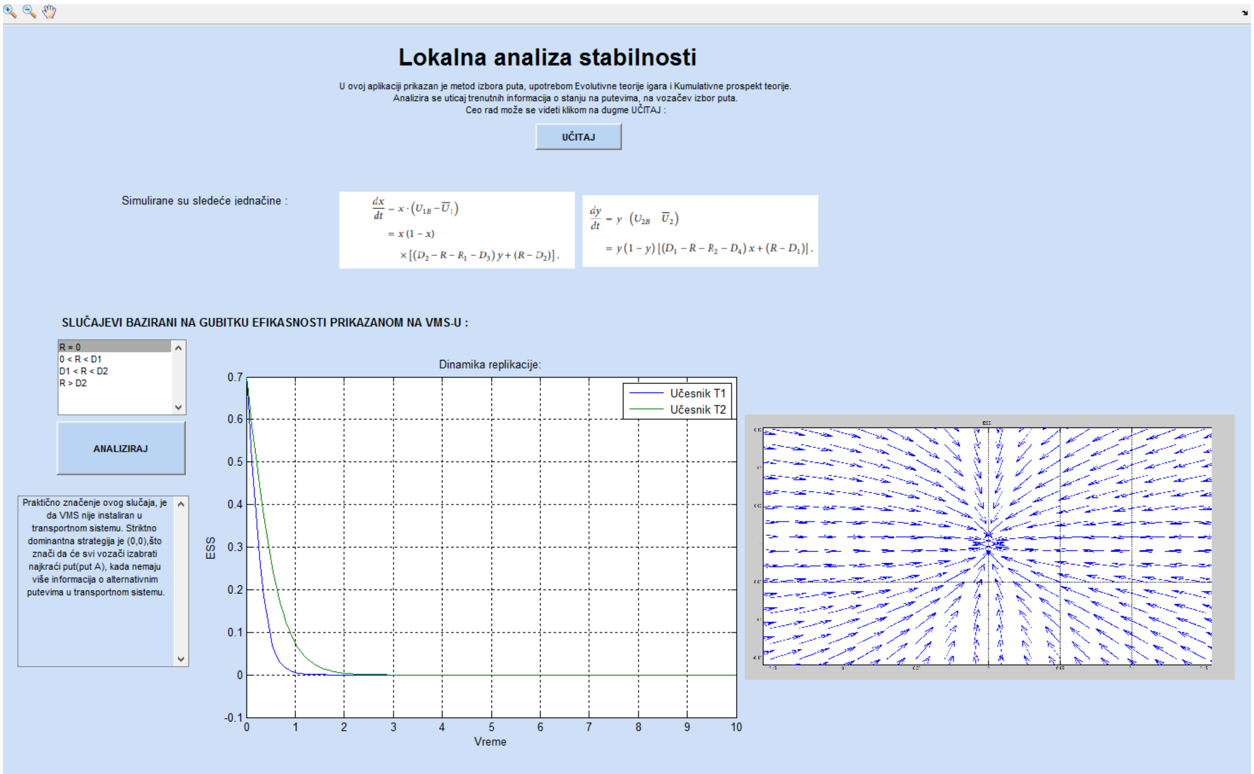
У овом истраживању постоје одређена ограничења.

Прво је да није емпиријски доказано, а друго ограничење је да се претпоставља да сви возачи одређеног типа(T_1, T_2) имају идентичне карактеристике.

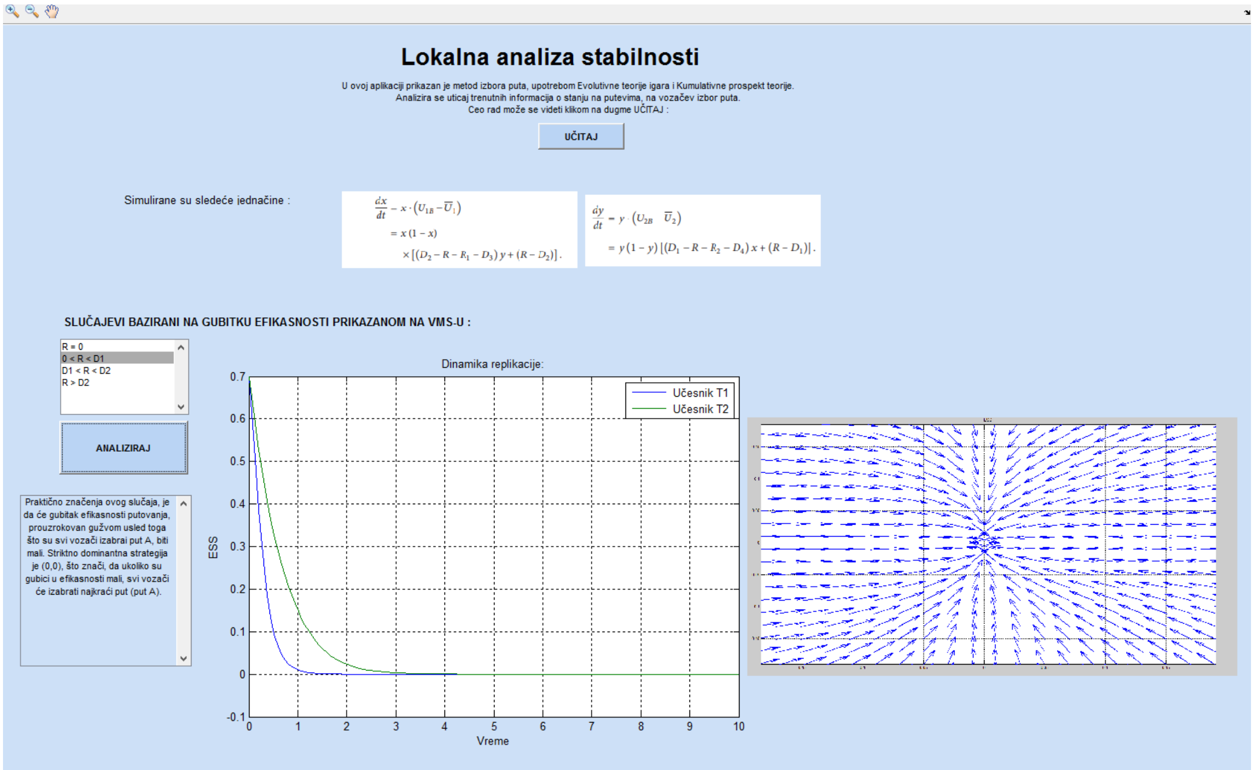
На следећим сликама, приказана је *matlab* апликација, која симулира диференцијалне једначине (4.6) и (4.10).

У самој апликацији дат је кратак опис проблема, а поред тога, омогућено је отварање рада за детаљнији опис проблематике, кликом на дугме учитај.

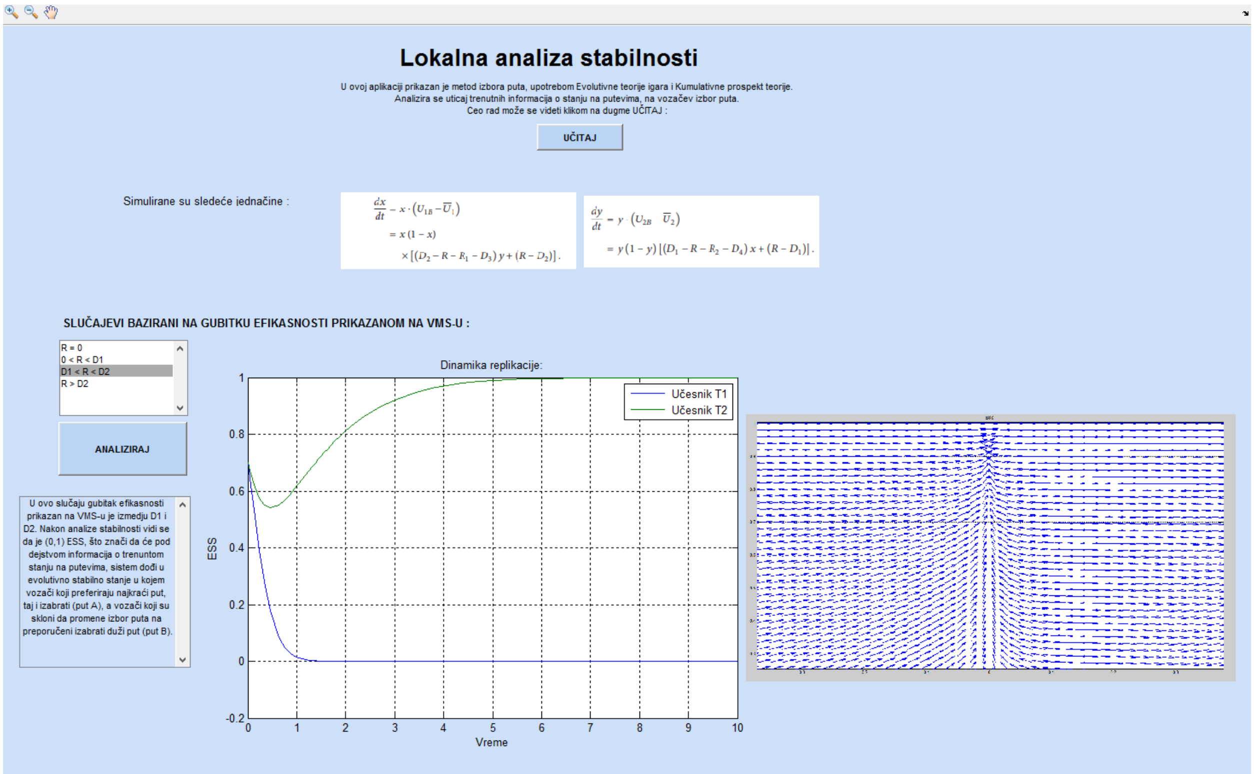
Може да се изабере један четири случаја, наведена изнад, и кликом да дугме анализирај, врши се сама симулација, и приказују се резултати исте, као и практично значење изабраног случаја и објашњење добијених резултата.



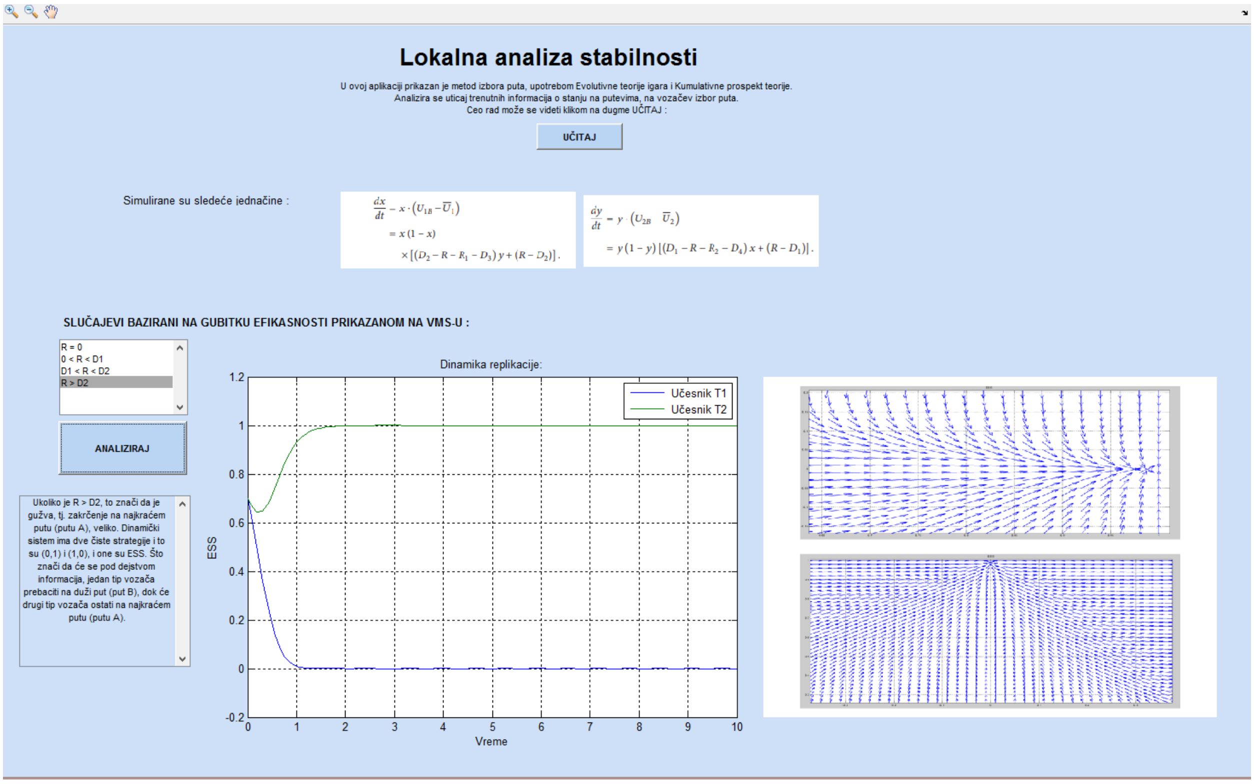
Слика 12 – *Приказ апликације за случај R = 0*



Слика 13 - *Приказ апликације за случај $0<R<D_1$*



Слика 14 - *Приказ апликације за случај $D_1<R<D_2$*



Слика 15 - *Приказ апликације за случај $R > D_2$*

Додатак

Апликација која симулира проблем може се пронаћи на https://github.com/SonjaSavic/PROJEKTI.

Литература

[1] Daniel Kahneman and Amos Tversky, *“Prospect Theory: An Analysis Of Decision Under Risk”*, 1979

[2] Daniel Kahneman and Amos Tversky, *“Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty”*, 1992

[3] Miroslav Ferenčak, *“Model poslovnog odlučivanja u uslovima neizvesnosti”*, 2019

[4] Hein Fennema and Peter Wakker, *“Original and Cumulative Prospect Theory: A Discussion of Empirical Differences”* , 1997

[5] Baruch Fishhoff, Paul Slovic, and Sarah Lichtenstein, *“Knowing with Certainty: The Appropriateness of Extreme Confidence”*, 1977

[6] Ana Šlogar, *“Teorija izglednosti i rizik”*, 2017

[7] Enrico Diecidue and Peter P. Walker, *“On the Intuition of Rank-Dependent Utility”*, 2001

[8] W.-H Chen, and P.P Jovanis, “Driver en route guidance compliance and driver learning with advanced traveler information system”, 2003

[9] A. Polydoropoulou, M. Ben-Akiva, and I. Kaysi, *“Influence of traffic information on drivers’ route choice behavior”*, 1994

[10] O. Jan, A.Horowitz, and Z. Peng, *“Using global positioning system data to understand variations in path choice”*, 2000

[11] H. Li, R. Guensler and J. Ogle, *“Analysis of morning commute route choice patterns using global positioning system-based vehicle activity data”*, 2005

[11] K.K. Srinivasen and H. S. Mahmassani, *“Modeling interia and compliance mechanisms in route choice behavior under real-time information”*, 2000

[12] E. A. I. Bogers, E. Viti and S. P. Hoogendoorn, *“Joint modeling of advanced travel information service, habit, and learning impacts on route choice by laboratory simulator experiments”*, 2005

[13] E. Ben- Elia, I. Erev, and Y. Shiftan, *“The combined effect of information and experience on drivers’ route-choice behavior”*, 2008

[14] Hykšova M. , “Several Milestones in the History of Game Theory”, 2004

[15] Stanford Encyclopedia of Philosophy, plato.stanford.edu

[16] Nataša Mukić, “Teorija igara: matematičke osnove mitova i paradoksa”,2014

[17] J. McKenzie Alexander, *“Evolutionary Game Theory”*, 2002

[18] Jun Tanimoto, *“Fundamentals od Evolutionary Game Theory and its Applications”*, 2015

[19] *Altruism (*Fletcher and Zwick, 2007; Sanchez and Cuesta, 2005; Trivers, 1971*),*

[20] *Behavior in public goods game* (Clemens and Reichmann, 2006; Hauert, 2006; Hubermann and Glance, 1995)

[21] *Human culture* (Enquist and Ghirlanda, 2007)

[22] *Empathy* (Page and Nowak, 2002; Fishman, 2006)

[23] *Moral behaviour* (Alexander, 2007; Boehm, 1982; Harms and Skyrms, 2008)

[24] *Social learning* (Kameda and Nakanishi, 2003; Rogers, 1988; Wakano and Aoki, 2006)

[25] *Social norms* (Axelrod, 1986; Bicchieri, 2006; Ostrum 2000)

[26] *Signaling systems and other proto-linguistic behaviour* (Barat, 2007; Hard, 1995)

[27] Mila Stojaković, *“Verovatnoća i slučajni procesi”*, 2013

[28] Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko, *“Modelovanje i simulacija sistema – sa primerima ”*, 2015

[29] Rade Dorolovački, *“Principi algebra, opšte, linearne, diskretne”*, 2014