

1. Mějme čtverec $ABCD$ o straně $a = 5$ cm (znázorněn na obrázku). Vypočtěte obsah oranžového obrazce, kdy body E, F, G a H jsou středy stran čtverce $ABCD$.

Povšimněme si, že obrazec, jehož obsah máme vypočítat, má všechny strany stejně dlouhé, je symetrický podle čtyř os souměrnosti a každé dvě jeho sousední strany svírají pravý úhel. Jedná se tedy o čtverec.

Obsah čtverce vypočteme jako $S = a^2$, kde a je délka jedné jeho strany. Pro výpočet obsahu oranžového obrazce tedy potřebujeme znát délku jedné jeho strany. Tu jednoduše vypočteme Pythagorovou větou jako $c = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, kde a je délka strany zadaného čtverce a c je délka strany oranžového obrazce. Obsah oranžového obrazce tedy vypočteme jako

$$S = c^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 2\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Po dosazení tedy dostáváme výsledek $S = \frac{5^2}{2} \text{ cm} = \frac{25}{2} \text{ cm}$.

Ke stejnému výsledku lze dojít i alternativní metodou, kdy si povšimneme, že dvojice šedých trojúhelníků, které zbydou po „vyříznutí“ oranžového obrazce ze zadaného čtverce, tvoří dva čtverce o straně délky $b = \frac{a}{2}$. Pokud obsah těchto dvou čtverců $S_{\text{e}} = 2 \cdot b^2$ odečteme od obsahu zadaného čtverce $S_z = a^2$, získáme obsah oranžového obrazce ze vztahu

$$S = S_z - S_{\text{e}} = a^2 - 2b^2 = a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2 - a^2}{2} = \frac{1}{2}a^2.$$

Po dosazení tedy opět dojdeme k výsledku $S = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \text{ cm} = \frac{25}{2} \text{ cm}$

2. Vypočtěte obsah mezikruží vymezeného kružnicí opsanou a vepsanou čtverci o straně $a = 10$ cm.

Obsah mezikruží S_{m} vypočteme jako rozdíl obsahu S_{o} kruhu s hraniční kružnicí opsanou čtverci a obsahu S_{v} kruhu s hraniční kružnicí vepsanou čtverci, tedy $S_{\text{m}} = S_{\text{o}} - S_{\text{v}}$. Obsah kruhu vypočteme jako $S = \pi r^2$, tedy pro obě kružnice potřebujeme znát jejich poloměry.

Poloměr kružnice opsané r_{o} tvoří polovina úhlopříčky čtverce. Úhlopříčku u vypočteme pomocí Pythagorovy věty

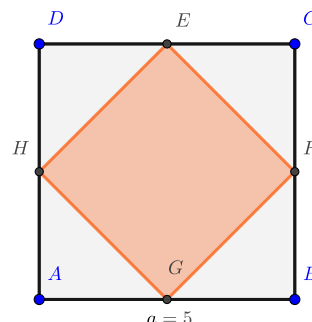
$$\begin{aligned} u^2 &= a^2 + a^2, \\ u &= \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}, \\ r_{\text{o}} &= \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Z takto vyjádřeného poloměru kružnice opsané pak vypočteme obsah příslušného kruhu jako

$$\begin{aligned} S_{\text{o}} &= \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2, \\ S_{\text{o}} &= \frac{a^2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Poloměr kružnice vepsané tvoří polovina strany čtverce, tedy $r_{\text{v}} = \frac{a}{2}$. Obsah příslušného kruhu tedy vypočteme jako

$$\begin{aligned} S_{\text{v}} &= \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2, \\ S_{\text{v}} &= \frac{a^2\pi}{4}. \end{aligned}$$



Po dosazení do první rovnice dostáváme vztah pro obsah mezikruží

$$S_m = \frac{a^2\pi}{2} - \frac{a^2\pi}{4},$$

$$S_m = \frac{2a^2\pi - a^2\pi}{4},$$

$$S_m = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Dosadíme číselné hodnoty a vypočteme obsah mezikruží

$$S_m = \frac{10^2\pi}{4} \text{ cm}^2 = \frac{100\pi}{4} \text{ cm}^2 = 25\pi \text{ cm}^2 \doteq 78,54 \text{ cm}^2.$$

3. Načrtněte graf závislosti objemu válce výšky $h = 1$ na poloměru jeho podstavy.

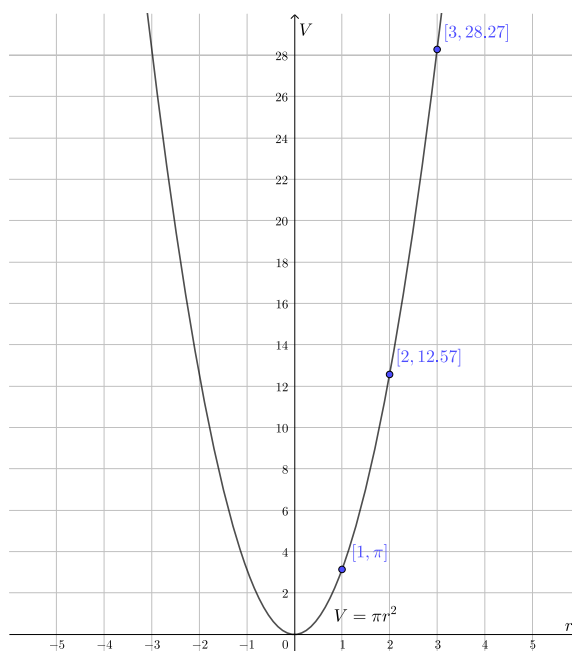
Objem válce vypočteme jako $V = Sh$, kde $h = 1$ je výška válce a $S = \pi r^2$ je obsah jeho postavy, tedy $V = \pi r^2 h$. Výšku válce známe, máme tedy závislost $V = \pi r^2$ jedné proměnné (objemu) na druhé (výšce) a můžeme konstruovat graf.

Objem je závislá proměnná, patří tedy na osu y . Nezávislá proměnná, kterou je poloměr podstavy válce, patří na osu x . Jelikož veličiny máme zadané bez rozměru, nebudeme jej do grafu uvádět.¹

Máme-li předpis funkce a počítač, graf už můžeme pohodlně zkonstruovat. Ručně ale potřebujeme znát několik bodů, kterými prochází, abychom jej mohli mezi nimi načrtnout podle toho, jak víme, že se funkce daného typu chová. My máme kvadratickou funkci, tedy budeme črtat parabolu. Naše funkce nemá lineární člen ani absolutní člen, tedy určitě prochází bodem $[0, 0]$. Ostatní body vypočteme obyčejným dosazením konkrétních hodnot do předpisu funkce. Pro jednoduchost výpočtu stačí dosazovat kladné hodnoty, protože tato kvadratická funkce je sudá, tedy její graf je osově souměrný podle osy y .

Jak z tabulky vidíme, funkce začne velmi brzy velmi prudce stoupat, tedy se nám do rozumného grafu dost pravděpodobně všechny body nevejdou. Máme ale nyní všechno, abychom mohli graf i ručně načrtnout.

	x	y
1	-1	3,14
2	-2	12,57
3	-3	28,27
4	-4	50,27
5	-5	78,54



¹Nemůžeme si „vycucat z prstu“, že máme výšku v centimetrech, když nevíme, v čem je zadaná.