МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА

Кафедра дискретного аналізу
та інтелектуальних систем

Індивідуальне завдання №3

з курсу "Теорія ймовірності та математична статистика"

Виконав:
студент групи ПМі-23с
Гуменюк Станіслав

Оцінка

Перевірила:
доц. Квасниця Г.А.

Львів 2024

Постановка задачі:

1. За даними кореляційної таблиці обчислити умовні середні y_{xi} ($i = 1,\ldots,k$).
2. Побудувати поле кореляції, тобто нанести точки $M_i(x_i;y_{xi})$, $i = 1,\ldots,k$, на координатну площину. На основі цього зробити припущення про вигляд функції регресії (парабола, гіпербола і т.д.)
3. В залежності від вигляду функції регресії скласти відповідну систему рівнянь. Розв'язати її і знайти невідомі параметри вибраної функції регресії.
4. Записати рівняння кривої регресії Y на X : $y_x = f(x)$ та побудувати її графік.
5. Обчислити дисперсію величини Y відносно кривої регресії Y на X .
6. Визначити суму квадратів відхилень δ^2 умовних середніх від значень функції регресії за формулою.

Короткі теоретичні відомості

НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Нехай вивчається генеральна сукупність, що характеризується системою кількісних ознак (X,Y). Для аналізу залежності між випадковими величинами X і Y зроблена вибірка, причому складова X набула значень $x_1, x_2, ..., x_k$, складова Y – $y_1, y_2, ..., y_l$, а подія $\{X = x_i,\ Y = y_j\}$ мала частоту появи n_{ij} ($i = 1,..,k$; $j = 1,..,l$). Результати цих спостережень записують у вигляді кореляційної таблиці:

$Y\|X$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k	m_j
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{i1}	...	n_{k1}	m_1
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{i2}	...	n_{k2}	m_2
...	...	...	...	...	...	...	...
y_j	n_{1j}	n_{2j}	...	n_{ij}	...	n_{kj}	m_j
...	...	...	...	...	...	...	...
y_l	n_{1l}	n_{2l}	...	n_{il}	...	n_{kl}	m_l
n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k	n

За даними кореляційної таблиці обчислюють умовні середні $\overline{y_{xi}}$ ($i = 1,...,k$):

$$\overline{y_{x_1}} = \frac{y_1 n_{11} + y_2 n_{12} + ... + y_l n_{1l}}{n_1}, \quad \overline{y_{x_2}} = \frac{y_1 n_{21} + y_2 n_{22} + ... + y_l n_{2l}}{n_2}, \ ... ,$$

$$\overline{y_{x_i}} = \frac{y_1 n_{i1} + y_2 n_{i2} + ... + y_l n_{il}}{n_i}, \ ... , \overline{y_{x_k}} = \frac{y_1 n_{k1} + y_2 n_{k2} + ... + y_l n_{kl}}{n_k}.$$

Складають таблицю умовних середніх $\overline{y_x}$:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
$\overline{y_x}$	$\overline{y_{x_1}}$	$\overline{y_{x_2}}$	...	$\overline{y_{x_i}}$	...	$\overline{y_{x_k}}$

Аналогічно можна скласти таблицю умовних середніх $\overline{x_{yj}}$:

y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_l
$\overline{x_y}$	$\overline{x_{y_1}}$	$\overline{x_{y_2}}$	...	$\overline{x_{y_j}}$	...	$\overline{x_{y_l}}$

Для визначення вигляду функції регресії будують точки $(x;\bar{y}_x)$ (або $(y;\bar{x}_y)$) і за їх розміщенням роблять висновок про приблизний вигляд функції регресії.

Якщо графік регресії $\bar{y}_x = f(x)$ або $\bar{x}_y = \phi(y)$ зображається кривою лінією, то кореляцію називають *нелінійною* (криволінійною).

Наприклад, функції регресії Y на X можуть мати вигляд:

$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ (параболічна кореляція другого порядку);

$\bar{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (параболічна кореляція третього порядку);

$\bar{y}_x = \dfrac{a}{x} + b$ (гіперболічна кореляція);

$\bar{y}_x = ba^x$ (показникова кореляція).

Теорія криволінійної кореляції розв'язує ті самі задачі, що і теорія лінійної кореляції, а саме:

1) за даними кореляційної таблиці встановлюють форму кореляційного зв'язку, тобто визначають вигляд функції $\bar{y}_x = f(x)$ або $\bar{x}_y = \phi(y)$;

2) оцінюють щільність кореляційного зв'язку, тобто дають оцінку ступеню розсіювання значень випадкової величини Y навколо побудованої кривої регресії $\overline{y_x}$ (або значень випадкової величини X навколо $\bar{x}_y$).

1. **Параболічна кореляція.** У прямокутній системі координат позначимо всі точки, які відповідають парам чисел $(x_i; y_{xi})$, тобто побудуємо *поле кореляції*.

Припустимо, що точки $M_i(\bar{x}_i;\, y_{xi}), i = 1,...,k$, розташовані приблизно на параболі другого порядку. Рівняння параболи – параболічної регресії Y на X будемо шукати у вигляді

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

де a,b,c – невідомі параметри.

Із всіх парабол такого виду шукана найближче розташована (згідно з методом найменших квадратів) до точок M_1 , M_2 ,...,M_k , причому точка M_i вибирається n_i разів, $i = 1,...,k$ (скільки разів зустрічаються у розподілі значення x_i).

Невідомі коефіцієнти a,b,c визначимо таким чином, щоб сума відповідних відхилень була мінімальною. Застосуємо відомий спосіб найменших квадратів. Для цього складемо функцію:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{k} n_i (f(x_i) - \overline{y}_{x_i})^2 = \sum_{i=1}^{k} (ax_i^2 + bx_i + c - \overline{y}_{x_i})^2 n_i .$$

Це функція трьох незалежних змінних a,b,c. Необхідна умова екстремуму функції (рівність нулю частинних похідних за змінними a,b і c) дає три рівняння. Наведемо кінцевий вигляд системи рівнянь відносно параметрів a,b,c:

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^4)a + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^3)b + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2)c = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_{x_i} x_i^2; \\ (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^3)a + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2)b + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i)c = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_{x_i} x_i; \\ (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2)a + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i)b + nc = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_{x_i}. \end{cases} \tag{2}$$

Розв'язуючи її методом Гаусса, знайдемо параметри a,b,c, які підставимо в (1).

У випадку параболічної регресії X на Y необхідно знайти функцію $\phi(y) = a_1y^2 + b_1y + c_1$. У результаті одержуємо систему рівнянь відносно параметрів a_1, b_1, c_1, в якій порівняно з системою (2) x і y міняються місцями.

2. **Гіперболічна кореляція.** Припустимо, що аналіз залежності між змінними X і Y, вираженої кореляційною таблицею, приводить до вибору форми кореляційної залежності Y на X у вигляді рівняння гіперболи

$$\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b, \tag{3}$$

а у випадку регресії X на Y – гіперболи

$$\overline{x}_y = \frac{c}{y} + d. \tag{4}$$

Регресії такого типу називаються *гіперболічними*.

За методом найменших квадратів невідомі параметри a і b шукаємо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}n_i + bn = \sum_{i=1}^{k}\overline{y}_{x_i}n_i; \\ a\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i^2}n_i + b\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}n_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}\overline{y}_{x_i}n_i. \end{cases} \tag{5}$$

У випадку гіперболічної регресії X на Y система рівнянь для визначення параметрів c, d рівняння (4) знаходиться аналогічно.

3. **Показникова кореляція.**

Розглянемо випадок, коли аналіз зв'язку між змінними X та Y, заданими кореляційною таблицею, приводить до вибору форми кореляційної залежності Y на X у вигляді показникової функції

$$\overline{y}_x = ba^x, \tag{6}$$

а при розгляді регресії X на Y – показникової функції

$$\overline{x}_y = dc^y. \tag{7}$$

Логарифмуючи обидві частини рівності (6), одержимо $\lg y = x\lg a + \lg b$. Отже, якщо між X та Y існує кореляційна залежність Y на X з параметрами a і b, то між $\lg Y$ і X – лінійна кореляційна залежність з параметрами $\lg a$ і $\lg b$. Тому система рівнянь для визначення $\lg a$ і $\lg b$ буде мати вигляд

$$\begin{cases} \lg a \sum_{i=1}^{k} n_i x_i + n \lg b = \sum_{i=1}^{k} n_i \lg \overline{y}_{x_i}; \\ \lg a \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 + \lg b \sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \lg \overline{y}_{x_i}. \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язуючи її, знаходимо $\lg a$ і $\lg b$, а потім параметри a і b показникової функції (6). Аналогічно можна одержати систему рівнянь для визначення логарифмів параметрів c і d рівняння (7).

4. **Коренева кореляція.** Припустимо, що аналіз залежності між змінними X і Y, вираженої кореляційною таблицею, приводить до вибору форми кореляційної залежності Y на X у вигляді рівняння

$$\overline{y}_x = a\sqrt{x} + b, \tag{9}$$

а у випадку регресії X на Y – рівняння

$$\overline{x}_y = c\sqrt{y} + d. \tag{10}$$

У цьому випадку невідомі параметри a і b будемо шукати з системи рівнянь

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^{k} n_i \sqrt{x_i} + bn = \sum_{i=1}^{k} \overline{y}_{x_i} n_i; \\ a \sum_{i=1}^{k} n_i x_i + b \sum_{i=1}^{k} n_i \sqrt{x_i} = \sum_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_{x_i} \sqrt{x_i}. \end{cases} \tag{11}$$

Для відшукання параметрів c і d рівняння (10) складаємо аналогічну до (11) систему рівнянь, де змінні x і y міняються місцями.

5. **Оцінка щільності кореляційного зв'язку.** За побудованою кривою регресії $\overline{y}_x = f(x)$ (або $\overline{x_y} = \phi(y)$) можна оцінити відхилення значень випадкової величини Y від кривої регресії $\overline{y_x}$ (або значень випадкової величини X від кривої регресії x_y). Зокрема, обчислюють дисперсію величини Y відносно кривої регресії Y на X :

$$\sigma^2(y, \overline{y}_x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (y_j - f(x_i))^2 n_{ij} = \frac{\Delta}{n},$$

$$\begin{aligned} \Delta = {} & n_{11}[y_1 - f(x_1)]^2 + n_{21}[y_1 - f(x_2)]^2 + ... + n_{k1}[y_1 - f(x_k)]^2 + \\ & + n_{12}[y_2 - f(x_1)]^2 + n_{22}[y_2 - f(x_2)]^2 + ... + n_{k2}[y_2 - f(x_k)]^2 + ... + \\ & + n_{1l}[y_l - f(x_1)]^2 + n_{2l}[y_l - f(x_2)]^2 + ... + n_{kl}[y_l - f(x_k)]^2. \end{aligned} \tag{12}$$

За міру розсіяння значень випадкової величини Y від кривої регресії $\overline{y}_x$ можна також взяти, наприклад, суму квадратів відхилень δ^2 умовних середніх

$$\overline{y_{x_i}} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1} y_j n_{ij}$$

обчислених за даними кореляційної таблиці, від значень $f(x_i)$ функції регресії:

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^{k} \delta_i^2 n_i = \sum_{i=1}^{k} |\overline{y_{x_i}} - f(x_i)|^2 n_i$$

Програмна реалізація

Програма реалізована засобами C# з допомогою бібліотек Plotly.NET, MathNet.Numerics, Sonorma.SuperDuperMenu.

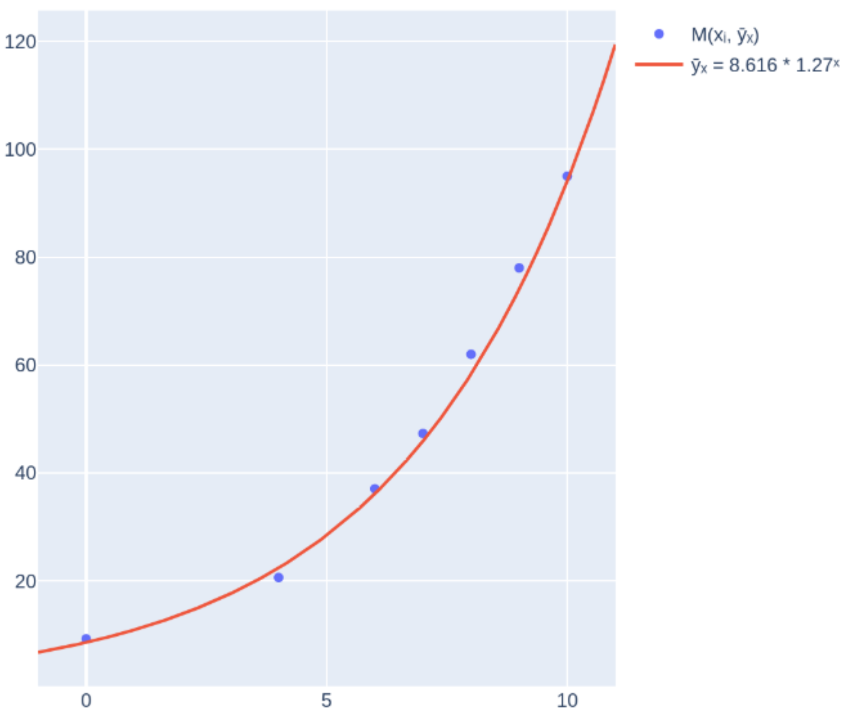
Отримані результати

```
-------------------------------------
nᵢ : | 35 | 62 | 24 | 3 | 2 | 28 | 21 |
-------------------------------------------------------
ȳₓ : | 9.286 | 20.645 | 37.083 | 47.333 | 62 | 78 | 95 |
-------------------------------------------------------
Assumption: Exponential function

a: 1.27, b: 8.616

ȳₓ = 8.616 * 1.27ˣ

σ²: 32.378
δ²: 716.245
```



Висновки

Під час виконання цього завдання я оволодів навичками роботи з математичною статистикою, зокрема нелінійною регресією. Також я навчився створювати програму для розв'язання задач з цієї теми.