ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №3 З КУРСУ «МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Нехай вивчається генеральна сукупність, що характеризується системою кількісних ознак (X,Y). Для аналізу залежності між випадковими величинами X і Y зроблена вибірка, причому складова X набула значень $x_1,x_2,...,x_k$, складова Y – $y_1,y_2,...,y_l$, а подія $\{X = x_i,\ Y = y_j\}$ мала частоту появи n_{ij} ($i = 1,..,k$; $j = 1,..,l$). Результати цих спостережень записують у вигляді кореляційної таблиці:

$Y \mid X$	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k	m_j
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{i1}	...	n_{k1}	m_1
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{i2}	...	n_{k2}	m_2
...	...	...	...	...	...	...	...
y_j	n_{1j}	n_{2j}	...	n_{ij}	...	n_{kj}	m_j
...	...	...	...	...	...	...	...
y_l	n_{1l}	n_{2l}	...	n_{il}	...	n_{kl}	m_l
n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k	n

За даними кореляційної таблиці обчислюють умовні середні $\overline{y_{xi}}$ ($i = 1,...,k$):

$$\overline{y_{x_1}} = \frac{y_1 n_{11} + y_2 n_{12} + ... + y_l n_{1l}}{n_1}, \quad \overline{y_{x_2}} = \frac{y_1 n_{21} + y_2 n_{22} + ... + y_l n_{2l}}{n_2}, \ ... ,$$

$$\overline{y_{x_i}} = \frac{y_1 n_{i1} + y_2 n_{i2} + ... + y_l n_{il}}{n_i}, \ ... , \overline{y_{x_k}} = \frac{y_1 n_{k1} + y_2 n_{k2} + ... + y_l n_{kl}}{n_k}.$$

Складають таблицю умовних середніх $\overline{y_x}$:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
$\overline{y_x}$	$\overline{y_{x_1}}$	$\overline{y_{x_2}}$	...	$\overline{y_{x_i}}$	...	$\overline{y_{x_k}}$

Аналогічно можна скласти таблицю умовних середніх $\overline{x_{yj}}$:

y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_l
$\overline{x_y}$	$\overline{x_{y_1}}$	$\overline{x_{y_2}}$	...	$\overline{x_{y_j}}$	...	$\overline{x_{y_l}}$

Для визначення вигляду функції регресії будують точки $(x;\bar{y}_x)$ (або $(y;\bar{x}_y)$) і за їх розміщенням роблять висновок про приблизний вигляд функції регресії.

Якщо графік регресії $\bar{y}_x = f(x)$ або $\bar{x}_y = \phi(y)$ зображається кривою лінією, то кореляцію називають *нелінійною* (криволінійною).

Наприклад, функції регресії Y на X можуть мати вигляд:

$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ (параболічна кореляція другого порядку);

$\bar{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (параболічна кореляція третього порядку);

$\bar{y}_x = \dfrac{a}{x} + b$ (гіперболічна кореляція);

$\bar{y}_x = ba^x$ (показникова кореляція).

Теорія криволінійної кореляції розв'язує ті самі задачі, що і теорія лінійної кореляції, а саме:

1) за даними кореляційної таблиці встановлюють форму кореляційного зв'язку, тобто визначають вигляд функції $\bar{y}_x = f(x)$ або $\bar{x}_y = \phi(y)$;

2) оцінюють щільність кореляційного зв'язку, тобто дають оцінку ступеню розсіювання значень випадкової величини Y навколо побудованої кривої регресії $\overline{y_x}$ (або значень випадкової величини X навколо $\bar{x}_y$).

1. **Параболічна кореляція.** У прямокутній системі координат позначимо всі точки, які відповідають парам чисел $(x_i; y_{xi})$, тобто побудуємо *поле кореляції*.

Припустимо, що точки $M_i(\bar{x}_i; y_{xi}), i = 1,...,k$, розташовані приблизно на параболі другого порядку. Рівняння параболи – параболічної регресії Y на X будемо шукати у вигляді

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad (1)$$

де a,b,c – невідомі параметри.

Із всіх парабол такого виду шукана найближче розташована (згідно з методом найменших квадратів) до точок M_1 , M_2 ,...,M_k , причому точка M_i вибирається n_i разів, $i = 1,...,k$ (скільки разів зустрічаються у розподілі значення x_i).

Невідомі коефіцієнти a,b,c визначимо таким чином, щоб сума відповідних відхилень була мінімальною. Застосуємо відомий спосіб найменших квадратів. Для цього складемо функцію:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{k} n_i (f(x_i) - \overline{y}_{x_i})^2 = \sum_{i=1}^{k} (ax_i^2 + bx_i + c - \overline{y}_{x_i})^2 n_i .$$

Це функція трьох незалежних змінних a,b,c. Необхідна умова екстремуму функції (рівність нулю частинних похідних за змінними a,b і c) дає три рівняння. Наведемо кінцевий вигляд системи рівнянь відносно параметрів a,b,c:

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^4)a + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^3)b + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2)c = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_{x_i} x_i^2; \\ (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^3)a + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2)b + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i)c = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_{x_i} x_i; \\ (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2)a + (\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i)b + nc = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_{x_i}. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язуючи її методом Гаусса, знайдемо параметри a,b,c, які підставимо в (1).

У випадку параболічної регресії X на Y необхідно знайти функцію $\phi(y) = a_1y^2 + b_1y + c_1$. У результаті одержуємо систему рівнянь відносно параметрів a_1,b_1,c_1 , в якій порівняно з системою (2) x і y міняються місцями.

2.**Гіперболічна кореляція.** Припустимо, що аналіз залежності між змінними X і Y , вираженої кореляційною таблицею, приводить до вибору форми кореляційної залежності Y на X у вигляді рівняння гіперболи

$$\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b, \tag{3}$$

а у випадку регресії X на Y – гіперболи

$$\overline{x}_y = \frac{c}{y} + d. \tag{4}$$

Регресії такого типу називаються *гіперболічними*.

За методом найменших квадратів невідомі параметри a і b шукаємо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}n_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{k}\overline{y}_{x_i}n_i; \\ a\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i^2}n_i + b\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}n_i = \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}\overline{y}_{x_i}n_i. \end{cases} \tag{5}$$

У випадку гіперболічної регресії X на Y система рівнянь для визначення параметрів c,d рівняння (4) знаходиться аналогічно.

3.**Показникова кореляція.**

Розглянемо випадок, коли аналіз зв’язку між змінними X та Y, заданими кореляційною таблицею, приводить до вибору форми кореляційної залежності Y на X у вигляді показникової функції

$$\bar{y}_x = ba^x, \tag{6}$$

а при розгляді регресії X на Y – показникової функції

$$\bar{x}_y = dc^y. \tag{7}$$

Логарифмуючи обидві частини рівності (6), одержимо $\lg y = x\lg a+\lg b$. Отже, якщо між X та Y існує кореляційна залежність Y на X з параметрами a і b, то між $\lg Y$ і X – лінійна кореляційна залежність з параметрами $\lg a$ і $\lg b$. Тому система рівнянь для визначення $\lg a$ і $\lg b$ буде мати вигляд

$$\begin{cases} \lg a \sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i + n \lg b = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \lg \overline{y}_{x_i}; \\ \lg a \sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2 + \lg b \sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i \lg \overline{y}_{x_i}. \end{cases} \tag{8}$$

Розв'язуючи її, знаходимо lg$a$ і lg$b$, а потім параметри a і b показникової функції (6). Аналогічно можна одержати систему рівнянь для визначення логарифмів параметрів c і d рівняння (7).

4. **Коренева кореляція.** Припустимо, що аналіз залежності між змінними X і Y, вираженої кореляційною таблицею, приводить до вибору форми кореляційної залежності Y на X у вигляді рівняння

$$\overline{y}_x = a\sqrt{x} + b, \tag{9}$$

а у випадку регресії X на Y – рівняння

$$\overline{x}_y = c\sqrt{y} + d. \tag{10}$$

У цьому випадку невідомі параметри a і b будемо шукати з системи рівнянь

$$\begin{cases} a \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \sqrt{x_i} + bn = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{y}_{x_i} n_i; \\ a \sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i + b \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \sqrt{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i \overline{y}_{x_i} \sqrt{x_i}. \end{cases} \tag{11}$$

Для відшукання параметрів c і d рівняння (10) складаємо аналогічну до (11) систему рівнянь, де змінні x і y міняються місцями.

5. **Оцінка щільності кореляційного зв'язку.** За побудованою кривою регресії $\overline{y}_x = f(x)$ (або $\overline{x_y} = \phi(y)$) можна оцінити відхилення значень випадкової величини Y від кривої регресії $\overline{y_x}$ (або значень випадкової величини X від кривої регресії x_y). Зокрема, обчислюють дисперсію величини Y відносно кривої регресії Y на X :

$$\sigma^2(y, \overline{y}_x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (y_j - f(x_i))^2 n_{ij} = \frac{\Delta}{n},$$

$$\Delta = n_{11}[y_1 - f(x_1)]^2 + n_{21}[y_1 - f(x_2)]^2 + ... + n_{k1}[y_1 - f(x_k)]^2 + \tag{12}$$

$$+ n_{12}[y_2 - f(x_1)]^2 + n_{22}[y_2 - f(x_2)]^2 + ... + n_{k2}[y_2 - f(x_k)]^2 + ... +$$

$$+ n_{1l}[y_l - f(x_1)]^2 + n_{2l}[y_l - f(x_2)]^2 + ... + n_{kl}[y_l - f(x_k)]^2.$$

За міру розсіяння значень випадкової величини Y від кривої регресії $\overline{y_x}$ можна також взяти, наприклад, суму квадратів відхилень δ^2 умовних середніх

$$\overline{y_{x_i}} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1} y_j n_{ij}$$

обчислених за даними кореляційної таблиці, від значень $f(x_i)$ функції регресії:

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^{k} \delta_i^2 n_i = \sum_{i=1}^{k} |\overline{y_{x_i}} - f(x_i)|^2 n_i. \tag{13}$$

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. За даними кореляційної таблиці обчислити умовні середні $\overline{y_{xi}}$ ($i = 1,\ldots,k$).
2. Побудувати поле кореляції, тобто нанести точки $M_i(x_i;\overline{y_{xi}})$, $i = 1,\ldots,k$, на координатну площину. На основі цього зробити припущення про вигляд функції регресії (парабола, гіпербола і т.д.)
3. В залежності від вигляду функції регресії ((1), (3), (6) чи (9)) скласти відповідну систему рівнянь ((2), (5), (8) чи (11)). Розв'язати її і знайти невідомі параметри вибраної функції регресії.
4. Записати рівняння кривої регресії Y на X : $\overline{y_x} = f(x)$ (з конкретною знайденою в пункті 3 функцією регресії $f(x)$) та побудувати її графік.
5. Обчислити дисперсію (12) величини Y відносно кривої регресії Y на X .
6. Визначити суму квадратів відхилень δ^2 умовних середніх від значень функції регресії за формулою (13).

Структура звіту:
1) Постановка задачі;
2) Короткі теоретичні відомості;
3) Програмна реалізація (без тексту програми);
4) Отримані результати (графічні та числові) та їх аналіз;
5) Висновки

Максимальна кількість балів – 10.

1.

$Y\|X$	3	6	7	10	13	15	17
1	22						
1,5	2	31					
2		1	25	4			
2,5			2	18	3		
3,5				1	30	8	
4						12	2

2.

$Y\|X$	2	3	5	7	9	12	13
3						13	4
5				1	21	2	
6				24	3		
7		7	13	2			
10	3	18	4				
12	23						

3.

$Y\|X$	0	1	2	3	4	5	6
2	30	3	5				
3	2	20					
5		5	10	2			
10			7	12	10		
17					20	15	
30						5	5

4.

$Y\|X$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
5	3	18	2	3			
25		2	1	10	5		
40					7		
55						10	
70						1	10
100							35

5.

$Y\|X$	3	4	7	10	11	14	17
1	18						
2	2	18	3				
2,5		4	25	2			
3				30	2	5	
4					16	4	4
4,5						22	3

6.

$Y\|X$	2	3	5	8	10	11	13
3						19	2
4				3	31	2	
6			1	16	3		
8		2	21	4			
10	3	31	5				
12	30	2					

7.

$Y\|X$	0	4	6	7	8	9	10
5	25		2				
20	10	60					
40		2	22	2			
62				1	2		
78						28	
95							21

8.

$Y\|X$	0	1	2	3	4	5	6
1	29	5	10	15			
10		1	2	50	8		
20			1	1	10	9	
30					1	20	
40						5	
64						4	20

9.

$Y\|X$	3	5	6	9	12	14	19
1,5	21						
2,5	4	31	3				
3		5	28	3	4		
3,5				25	4	3	
4					17	3	5
4,5						29	2

10.

$Y\|X$	2	3	5	7	9	12	13
3						21	1
4			2	3	20		
5		2	31	12	4		
6		15	3				
10	3	7					
12	25						

11.

$Y\|X$	0	1	2	3	4	5	6
7	50	1					
11	2	15	3				
20		20	17	4			
35			15	13	7		
50				7	42	20	
75					1	16	2

12.

$Y\|X$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
1	2	15	25		10	2	
5		3	30	45	10	5	
10			2	1	20	15	
15			1	1	3	25	
25				1	5	18	3
27					1		18

13.

$Y\|X$	4	5	7	9	12	15	17
1	12						
1,5	3	19					
2,5		3	31	1			
3			2	18	7		
3,5				1	20	4	
4						17	2

14.

$Y\|X$	2	3	5	6	8	10	12
2						22	2
3				4	13		
5		2	3	14	5		
7		4	21				
12	3	14					
13	12						

15.

$Y\|X$	4	5	7	9	10	11
4					15	1
15			7	11	15	
20	18	3	2			
25	2	20		1		
30	3	5	9	1	1	
35	11	10	4	1	3	

16.

$Y\|X$	0	1	2	3	4	5	6
1	10	20	30	50	18	40	22
6		2	5	45	15	10	30
12			2	1	2	18	40
20					3	15	30
28						1	10
30							1

17.

$Y\|X$	3	5	7	9	13	15	17
1	23						
1,5	2	19					
2		3	32	2			
3			8	23	5		
3,5				2	17	4	
4						20	3

18.

$Y\|X$	1	2	4	6	9	11	12
3						7	31
4				2	21	4	
5			4	12	6		
7		3	22	5			
10	4	20					
12	23						

19.

$Y\|X$	0	1	2	3	4	5	6
1	45	4	5				
10	1	4	8	10			
20			7	20			
25				1	44		
30					3	28	
44						15	11

20.

$Y\|X$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
1	50	15	30	20			
10	1	2	12	60	23		
20			1	2	20	20	
30				1	2	22	
40					1	25	
60						1	57

21.

$Y\|X$	4	6	8	11	13	15	17
1,5	13	2					
2	7	21	1				
3			20	7			
3,5				18	2		
4					25	3	4
4,5						16	1

22.

$Y\|X$	0	1	2	3	4	5	6
2	18	3	2				
3	2	20					
5	3	5	10	2			
10			7	12	5		
17					20	3	
26						45	5

23.

$Y\|X$	2	3	5	7	9	12	13
3						21	1
4			2	3	20		
5		2	31	12	4		
6		15	3				
10	3	7					
12	25						

24.

$Y\|X$	0	4	6	7	8	9	10
7	19	3	2				
13	2	14					
40		3	22	2			
80					5		
120				1	22	28	
200						2	21