

पाठ 8. त्रिकोणमिति का परिचय

प्रश्नावली 8.1

Q1. DABC में, जिसका कोण B समकोण है, AB = 24 cm और BC = 7 cm है | निम्न लिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin A$, $\cos A$

(ii) $\sin C$, $\cos C$

Solution:

समकोण त्रिभुज DABC में,

$$AB = 24 \text{ cm}, BC = 7 \text{ cm}$$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 24^2 + 7^2$$

$$= 576 + 49$$

$$= 625$$

$$AC = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

अब त्रिकोणमितिय अनुपात लेने पर

(i) $\sin A$, $\cos A$

Q2. आकृति 8.13 में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए |

Solution:

$$PQ = 12 \text{ cm}, PR = 13 \text{ cm}$$

$$QR = ?$$

समकोण त्रिभुज DPQR में,

$$PQ = 12 \text{ cm}, PR = 13 \text{ cm}$$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$13^2 = 12^2 + QR^2$$

$$169 = 144 + QR^2$$

$$169 - 144 = QR^2$$

$$QR^2 = 25$$

$$QR = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

अब त्रिकोणमिति अनुपात लेने पर

प्रश्नावली 8.2

Q1. निम्नलिखित के मान निकालिए:

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

हल: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर

(ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

हल: $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

Q2. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए :

(A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है :

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

हल: $\sin 2A = 2 \sin A$

$$\Rightarrow 2 \sin A \cos A = 2 \sin A \quad [\sin 2x = 2 \sin x \cos x]$$

$$\Rightarrow \cos A = 2 \sin A - 2 \sin A$$

$$\Rightarrow \cos A = 0$$

$$\therefore A = 0^\circ$$

विकल्प (A) सत्य है ।

A का मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$A + B = 60^\circ$$

$$\Rightarrow 45^\circ + B = 60^\circ$$

$$\Rightarrow B = 60^\circ - 45^\circ$$

$$\Rightarrow B = 15^\circ$$

$$A = 45^\circ, B = 15^\circ$$

Q4. बताइए कि निम्नलिखित में से कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं । कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

(i) $\sin (A + B) = \sin A + \sin B$.

(ii) θ में वृद्धि होने के साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है ।

(iii) θ में वृद्धि होने के साथ $\cos \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है ।

(iv) θ के सभी मानों पर $\sin \theta = \cos \theta$

(v) $A = 0^\circ$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है ।

उत्तर:

(i) दिया गया कथन असत्य है ।

(ii) दिया गया कथन सत्य है ।

(iii) दिया गया कथन असत्य है ।

(iv) दिया गया कथन असत्य है ।

(v) दिया गया कथन सत्य है ।

प्रश्नावली 8.3

Q1. निम्नलिखित का मान निकालिए:

(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$

हल: $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$

$$\Rightarrow \sin(90^\circ - 48^\circ) - \sin 42^\circ$$

$$\Rightarrow \sin 42^\circ - \sin 42^\circ = 0$$

(iv) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

हल: $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

$$\Rightarrow \sec(90^\circ - 31^\circ) - \sec 59^\circ \quad [\operatorname{cosec} q = \sec(90^\circ - q)]$$

$$\Rightarrow \sec 59^\circ - \sec 59^\circ = 0$$

Q2. दिखाइए कि

(i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

हल: (i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

$$\text{LHS} = \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$

$$= \cot(90^\circ - 48^\circ) \tan(90^\circ - 23^\circ) \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$

$$= \cot 42^\circ \cot 67^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$

$$= (\cot 42^\circ \times \tan 42^\circ) (\cot 67^\circ \times \tan 67^\circ)$$

$$= 1 \times 1 \quad [\cot A \times \tan A = 1]$$

$$= 1$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

(ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

हल: (ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

$$\text{LHS} = \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$$

$$= \sin(90^\circ - 38^\circ) \cos 52^\circ - \cos(90^\circ - 38^\circ) \sin 52^\circ$$

$$= \sin 52^\circ \cos 52^\circ - \cos 52^\circ \sin 52^\circ$$

$$= \sin 52^\circ (\cos 52^\circ - \cos 52^\circ)$$

$$= \sin 52^\circ \times 0$$

$$= 0$$

$$\text{LHS} = \text{RHS}$$

Q3. यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए ।

हल: $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$,

$$\Rightarrow \cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$$

दोनों पक्षों में तुलना करने पर

$$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 18^\circ = A + 2A$$

$$\Rightarrow 3A = 108^\circ$$

Q4. यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$

हल: $\tan A = \cot B$ दिया है ।

$$\Rightarrow \tan A = \tan(90^\circ - B) \text{ तुलना करने पर}$$

$$\Rightarrow A = 90^\circ - B$$

$$\Rightarrow A + B = 90^\circ \text{ Proved}$$

Q5. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए ।

हल: $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ) \quad [\sec q = (90^\circ - q)]$$

तुलना करने पर

$$\Rightarrow 90^\circ - 4A = A - 20^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 20^\circ = A + 4A$$

$$\Rightarrow 5A = 110^\circ$$

Q7. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए ।

हल : $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$

$$\Rightarrow \cos (90^\circ - 67^\circ) + \sin (90^\circ - 75^\circ)$$

$$\Rightarrow \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$$

अभ्यास 8.4

Q4. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ बराबर है:

- (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

Correct Answer: (B) 9

Solution:

$$\begin{aligned} 9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A &= 9(\sec^2 A - \tan^2 A) \\ &= 9 \times 1 = 9 \end{aligned}$$

(ii) $(\sec A + \tan A) (1 - \sin A)$ बराबर हैं :

- (A) $\sec A$ (B) $\sin A$ (C) $\operatorname{cosec} A$ (D) $\cos A$

Correct Answer: (D) $\cos A$

Q5. निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यूनकोण है :

अतः $LHS = RHS$ proved