Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso de Ciência da Computação
Campus Chapecó

Álgebra de Boole

Prof. Luciano L. Caimi
lcaimi@uffs.edu.br

Álgebra de Boole

Definida por:

- Um conjunto de operações válidas;
- Um conjunto de valores que cada variável pode assumir;

Valores das Variáveis:

Seja $A \in B \Rightarrow A \in \{0,1\}$ ({F,V}, {high, low}, {on, off}...)

De outra forma:

$$\text{Se } A \neq 0 \Rightarrow A = 1$$

$$\text{Se } A \neq 1 \Rightarrow A = 0$$

Álgebra de Boole

Operações Básicas da Álgebra de Boole

Cada operação possui pelo três formas de representação clássicas:

- Expressão lógica (simbólica);
- Tabela-verdade;
- Circuito;

Além destes formatos clássicos existem outros:

- Diagrama de decisão binária (BDD);
- Diagrama de Venn;

Álgebra de Boole

Operações Básicas da Algebra de Boole

1) Complemento (NOT)

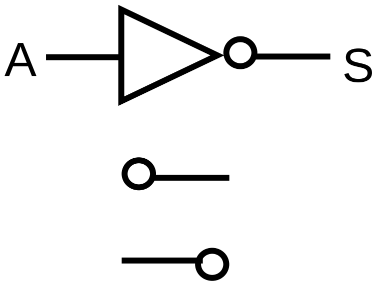
Também chamado inversão ou negação.

Símbolo	Tabela Verdade	Porta Lógica

$\bar{A}$, ¬A, ~A, A´, not(A)

(lê-se “A negado”)

A	S
0	1
1	0



- É uma operação unária (i.e. só pode ser aplicada a uma variável por vez);
- Tem como resultado na saída o valor oposto ao presente na entrada.

Álgebra de Boole

2) Operação E (AND)

Também denominada multiplicação lógica.

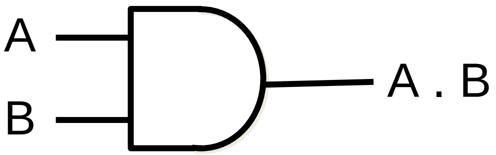
Símbolo

{ . , ˄ }

Tabela Verdade

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Porta Lógica



Definição 1: a operação “E” resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.

Definição 2: a operação “E” resulta 0 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 0.

Álgebra de Boole

Operação “E” para 3 variáveis

Porta Lógica

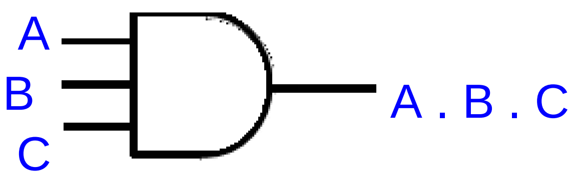


Tabela Verdade

A	B	C	A.B.C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- **Definição 1:** a operação “E” resulta 1 se e somente se todas as variáveis de entrada valerem 1.

Álgebra de Boole

3) Operação OU (OR)

Também denominada adição lógica.

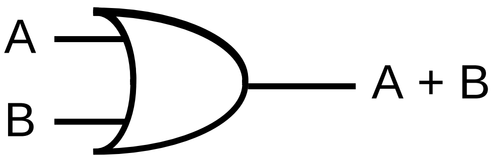
Símbolo

$\{ +, \vee \}$

Tabela Verdade

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

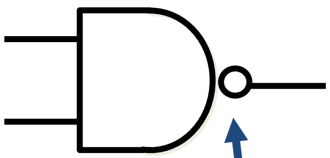
Porta Lógica



- **Definição 1:** a operação "OU" resulta 1 se ao menos uma das variáveis de entrada valer 1.
- **Definição 2:** a operação "OU" resulta 0 se e somente se todas variáveis de entrada valerem 0.

Álgebra de Boole

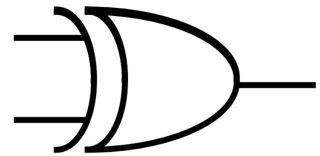
NAND



Indica complemento da porta

A	B	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

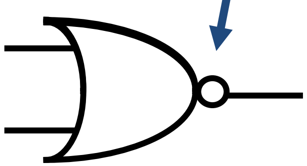
XOR



eXclusive OR
OU Exclusivo

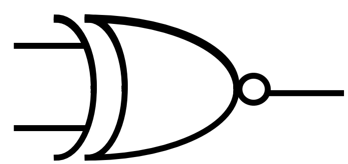
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR



A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

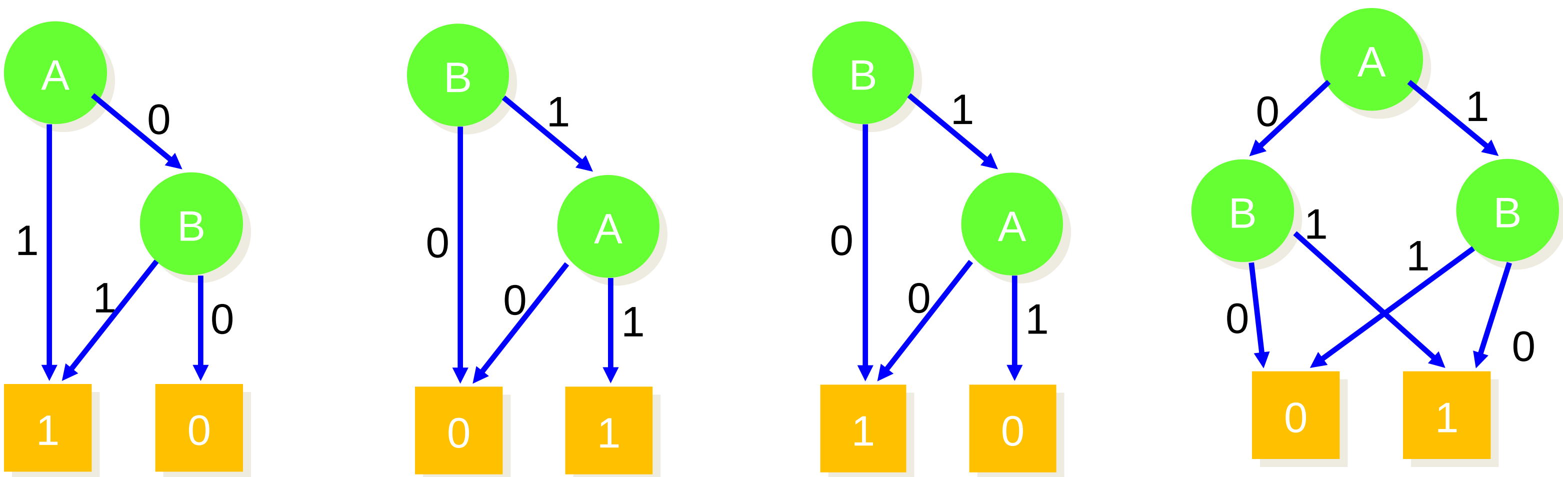
XNOR



A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra de Boole

Uma outra forma de representação é o Diagrama de Decisão Binária (Bynary Decision Diagram - BDD)

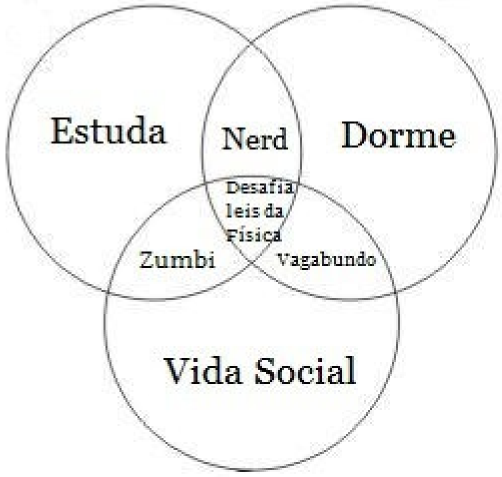


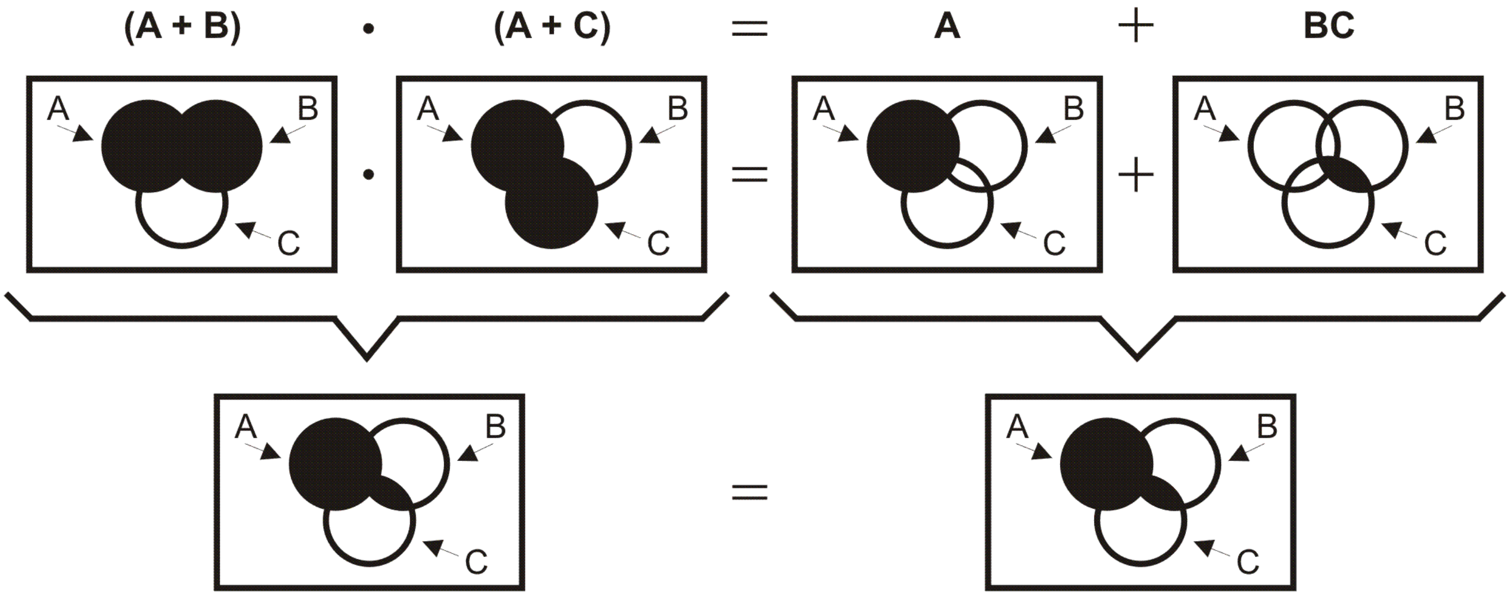
OR AND NAND XOR

Parte-se de uma variável de entrada qualquer e chega-se ao valor da saída conforme o valor contido nas variáveis de entrada (indicadas por arcos)

Álgebra de Boole

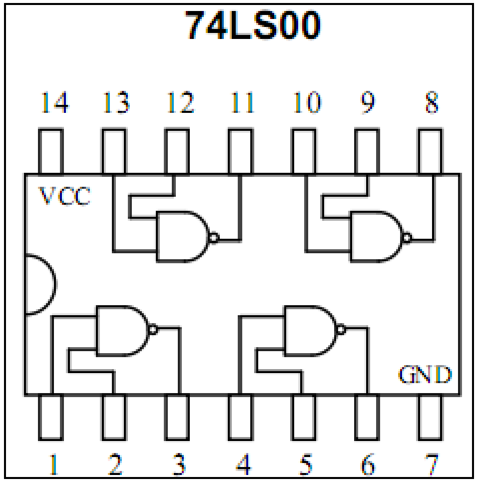
Diagrama de Venn

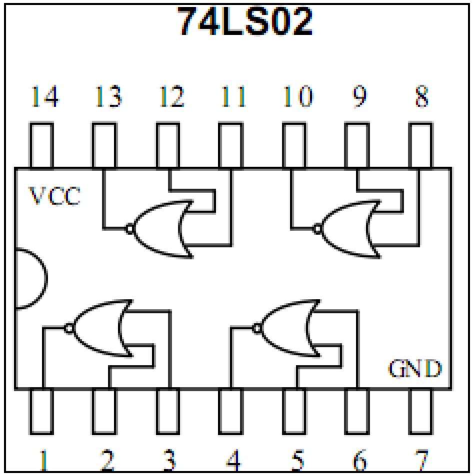


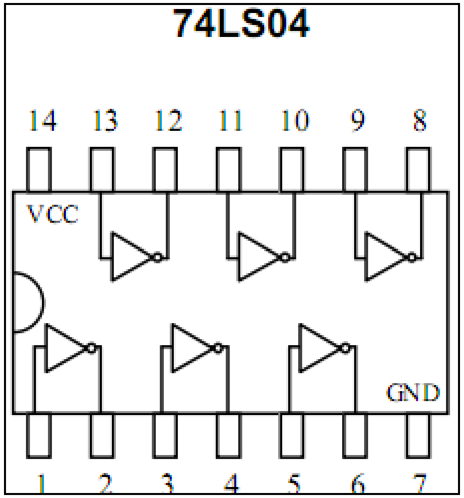


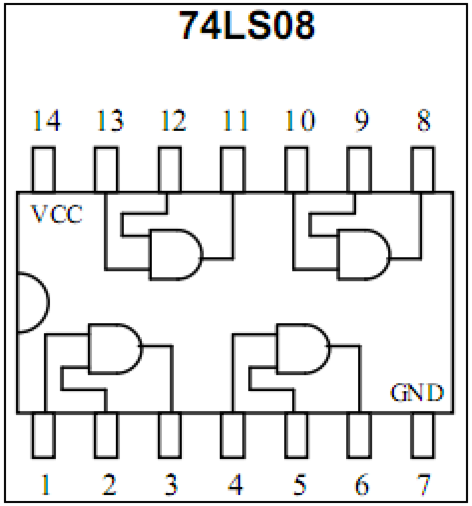
Álgebra de Boole

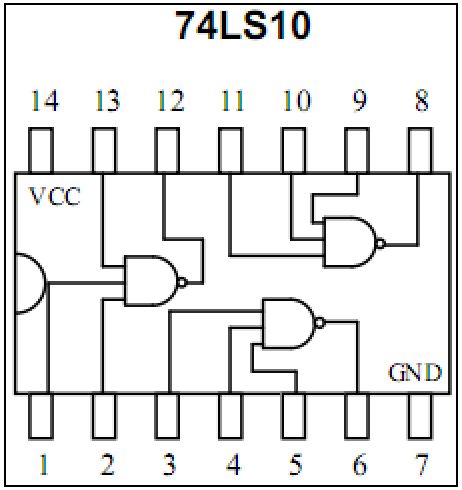
Circuitos Integrados comerciais











74LS32 – OR 2 entradas

74LS86 – XOR 2 entradas

74LS73A – Flip-Flop JK

74LS74A – Flip-Flop D

...

Álgebra de Boole

Propriedades da Álgebra de Boole

1) Comutativa

As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem

2) Associativa

As variáveis podem ser associadas em qualquer conjunto

3) Distributiva

Em relação a operação de multiplicação booleana

Propriedades da Algebra de Boole

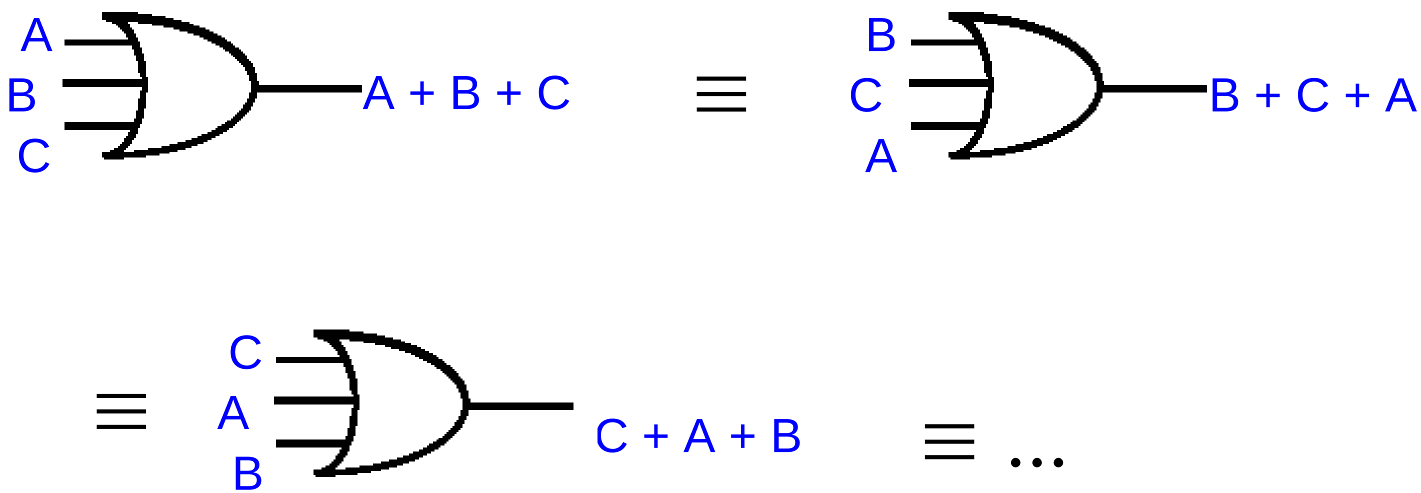
1) Comutativa

As variáveis de entrada podem ser operadas em qualquer ordem.

Álgebra de Boole

... Comutativa

Em termos de portas lógicas, teremos...



Tal propriedade é válida para qualquer uma das portas lógicas, respeitando-se obviamente a sua função.

Álgebra de Boole

2) Associativa

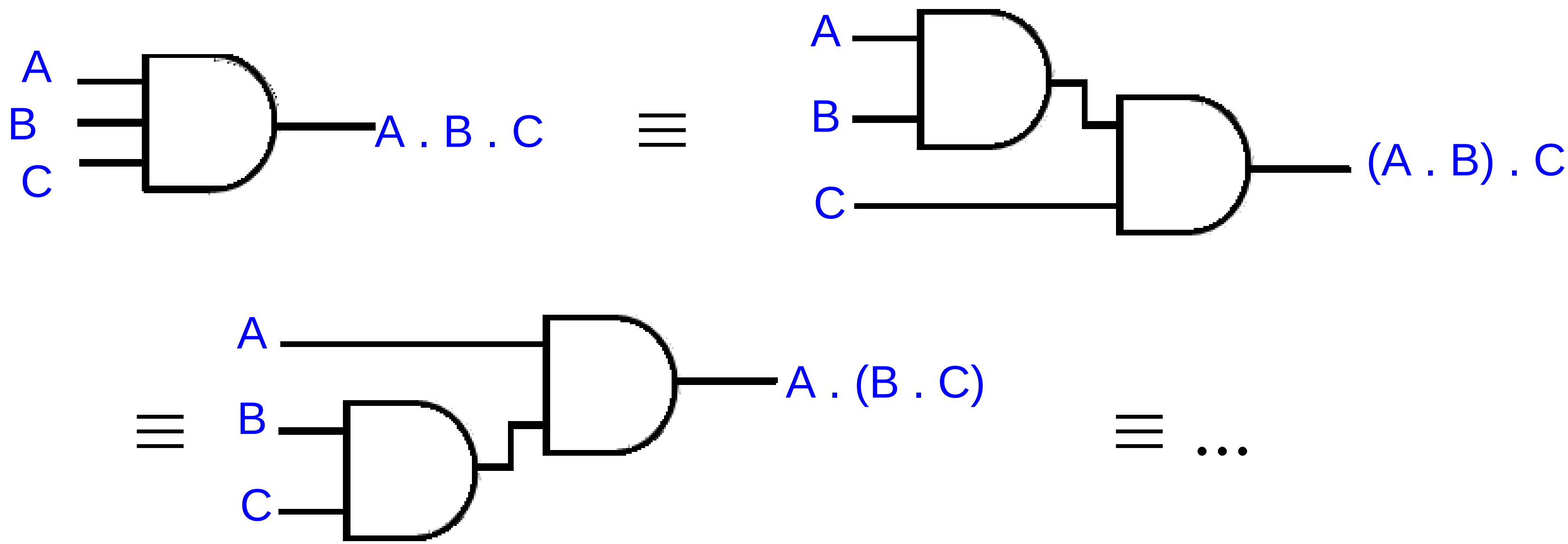
As variáveis de entrada podem ser operadas de duas em duas (ou de três em três, ou de quatro em quatro...)

Os parênteses indicam precedência.

Álgebra de Boole

... Associativa

Em termos de portas lógicas, teremos...



Tal propriedade é válida para qualquer uma das portas lógicas, respeitando-se obviamente a sua função.

Álgebra de Boole

3) Distributiva

Refere-se a operação de “multiplicação”

$$S = A.(B + C) = (A.B) + (A.C)$$

Álgebra de Boole

Conversão entre formatos de representação

Considerando as três formas de representação clássicas precisamos realizar a conversão entre as mesmas

- Expressão para tabela-verdade: avaliação
- Circuito para tabela verdade: avaliação
- Expressão para Circuito: síntese
- Circuito para expressão: variáveis e operações
- Tabela-verdade para expressão: SOP ou POS
- Tabela verdade para circuito: síntese

Álgebra de Boole

Avaliação de expressões booleanas

Dada uma expressão booleana desejamos saber o comportamento da mesma:

- Montamos uma tabela-verdade com as variáveis de entrada a esquerda;
- Criar colunas à direita, conforme a ordem de precedência das operações contidas na equação que se está avaliando;
- Avaliar as expressões e obter resultados intermediários até encontrar valores finais;

Exemplo: Dada a expressão abaixo obtenha a tabela-verdade da mesma:

$$F\left(X,Y,Z\right) = X \cdot \left(Y + \overline{Z}\right)$$

Álgebra de Boole

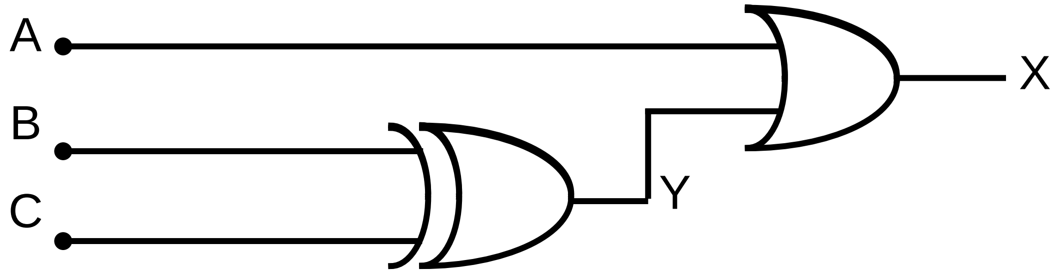
Avaliação de expressões booleanas: exemplo

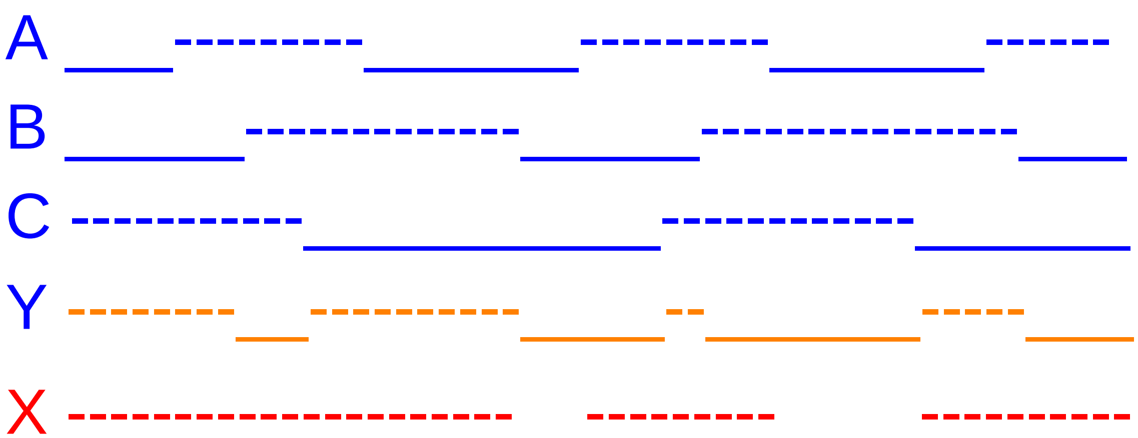
$$F(X,Y,Z) = X \,.\, (Y + \overline{Z})$$

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$(Y + \overline{Z})$	$X \,.\, (Y + \overline{Z})$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Álgebra de Boole

Avaliação de expressões booleanas: exemplo





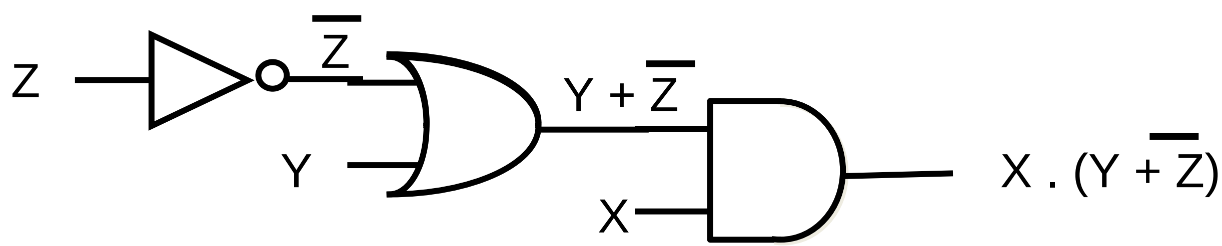
Álgebra de Boole

Circuitos Lógicos

- Dada uma equação que representa uma função Booleana, é possível representá-la graficamente, por meio de uma associação apropriada de portas lógicas.
- O desenho de um circuito lógico deve obedecer à ordem de precedência das operações mostradas na equação lógica que se deseja implementar.

Exemplo: Desenhe o circuito lógico que implementa a equação:

$$F(X,Y,Z) = X\,.\left(Y + \overline{Z}\right)$$



Álgebra de Boole

Exercício:

Avalie a expressão que segue e desenhe seu circuito lógico

$$F\left(A,B,C\right)=\overline{A}\,.\,C+\left(\left(B\,.\,C\right)+A\,.\,\overline{B}\right)$$

Álgebra de Boole

Exercício:

Avalie a expressão que segue e desenhe seu circuito lógico

$$F(A,B,C) = \overline{A}\,.\,C + ((B\,.\,C) + A\,.\,\overline{B})$$

A	B	C	B.C	$A\,.\,\overline{B}$	$((B\,.\,C)+A\,.\,\overline{B})$	$\overline{A}\,.\,C$	$\overline{A}\,.\,C+((B\,.\,C)+A\,.\,\overline{B})$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	1

Álgebra de Boole

Exercício:

Avalie a expressão que segue e desenhe seu circuito lógico

$$F(A,B,C)=\overline{A}.\ C+((B\ .\ C)+A\ .\overline{B})$$