三、奇点类型

[16,18] 求 $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 上奇点

奇点 $z_k=2k\pi i\,(k\neq 0)$，$z=0$，$z=\infty$.

① $z=\infty$. $z_k\to\infty\ (k\to\infty)$. 故 $z=\infty$ 为非孤立奇点

② $z=0$ $f(z)=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}$. 由洛必达

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}=\lim_{z\to 0}\frac{-e^z}{e^z+e^z+ze^z}=-\frac{1}{2}$$

故 $z=0$ 为可去奇点

③ $z_k=2k\pi i$ $k\in\mathbb{Z},k\neq 0$，$\frac{1}{z}$ 在 $U(z_k)$ 处解析

又 $e^z-1\big|_{z_k}=0$ $(e^z-1)'\big|_{z_k}\neq 0$. 故 z_k 为 $f(z)$ 的一阶极点

[20] 求 $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}$ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 上奇点

奇点 $z_k=2k\pi i$，$z_m=m\pi$，$z=\infty$，$z=0$，$k,m\in\mathbb{Z}$ 且 $\neq 0$

① $z=\infty$、 $z_k, z_m\to\infty\ (k,m\to\infty)$．故 $z=\infty$ 为非孤立奇点

② $z=0$ $f(z)=\frac{\sin z-e^z+1}{\sin z(e^z-1)}$，由洛必达

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-e^z}{\cos z\, e^z-\cos z+\sin z\, e^z}=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z-e^z}{2\cos z\, e^z+\sin z}=-\frac{1}{2}$$

故 $z=0$ 为可去奇点

③ $z_k=2k\pi i$ $k\in\mathbb{Z}, k\neq 0$，$\frac{1}{\sin z}$ 在 $U(z_k)$ 处解析

又 $e^z-1\Big|_{z_k}=0$ $(e^z-1)'\Big|_{z_k}\neq 0$．故 z_k 为 $f(z)$ 的一阶极点

④ $z_m=m\pi$．$m\in\mathbb{Z}, m\neq 0$、 $\frac{1}{e^z-1}$ 在 $U(z_m)$ 处解析

又 $\sin z\Big|_{z_m}=0$，$(\sin z)'\Big|_{z_m}\neq 0$．故 z_m 为 $f(z)$ 的一阶极点

[17,19,21] 求 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ 奇点

奇点有 $z=\infty$，$z_k=2k\pi i$，$z=1$.

① $z=1$. e^z-1 在 $\mathbb{C}$ 上解析，且 $e^z-1|_1\neq0$.

设路径在实轴，$\lim\limits_{z\to1^+} e^{\frac{1}{z-1}}=\infty$，$\lim\limits_{z\to1^-} e^{\frac{1}{z-1}}=0$. 故极限不存在

原函数以 $z=1$ 为本质奇点

② $z_k=2k\pi i$. $e^{\frac{1}{z-1}}$ 以 z_k 为解析点

$e^z-1|_{z_k}=0$. $(e^z-1)'=e^z$，$e^z|_{z_k}\neq0$.

故原函数以 z_k 为一阶极点

③ $z=\infty$ $z_k\to\infty\ (k\to\infty)$. 故 $z=\infty$ 为非孤立奇点