第三讲、 反函数和隐函数定理

基本内容: 隐函数求导、微分变换、压缩映射、反函数和隐函数定理

压缩映射定理 设 $\boldsymbol{f}$ 是 E 到 E 的映射, 其中 E 是完备度量空间, 且存在 $0<\rho<1$, 使得
$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})|\leqslant\rho|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|,\quad\forall\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in E.$$
则存在惟一的 $\boldsymbol{x}_0\in E$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$.

映射的中值不等式 设凸区域 $D\subset\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}$ 在 D 上可微, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$, 则 $\exists\theta\in(0,1)$, 使
$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|\leqslant\|J(\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))\|\cdot|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|,$$
其中 $J(\cdot)$ 是 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{f}'(\cdot)=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\cdot)\right)_{m\times n}$ 且 $\|J(\cdot)\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n}\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\cdot)\right|$.

反函数存在定理 (局部逆映射存在定理) 设 $\boldsymbol{f}:\ E\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, $\boldsymbol{a}\in E$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, 并且 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 可逆. 则

(1) 存在开集 $U\subset E$ 和 V, 使得 $\boldsymbol{a}\in U$, $\boldsymbol{b}\in V$, 并且 $\boldsymbol{f}:\ U\to V$ 是 1–1 满映射;

(2) 设 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}^{-1}:\ V\to U$, 则 $\boldsymbol{g}$ 是 C^1 映射, 并且
$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})))^{-1},\quad\boldsymbol{y}\in V.$$

隐函数存在定理 (局部隐映射存在定理) 设 $\boldsymbol{f}:\ E\subset\mathbf{R}^{n+m}\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in E$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$, 并且 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 可逆, 其中 "$\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$" 表示固定 $\boldsymbol{y}$ 而把 $\boldsymbol{x}$ 看成自变量而得到的 Jacobi 矩阵 , 则

(1) 存在开集 $U\subset E$ 和 W, 使得 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in U$, $\boldsymbol{b}\in W$, 且 $\forall\boldsymbol{y}\in W$, 存在惟一的 $\boldsymbol{x}$, 使得 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in U$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$;

(2) 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$, 则 $\boldsymbol{g}$ 是 C^1 映射, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$, $\forall\boldsymbol{y}\in W$, 并且
$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))^{-1}\cdot\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

隐函数组存在定理 (分量叙述形式) 考虑三个方程和五个变量的方程组
$$\begin{cases}F(x,y,u,v,w)=0,\\G(x,y,u,v,w)=0,\\H(x,y,u,v,w)=0.\end{cases}$$

设

(1) $F(x,y,u,v,w)$, $G(x,y,u,v,w)$ 和 $H(x,y,u,v,w)$在点 $\boldsymbol{p}_0(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0)$ 的一个邻域内对各个变元有连续的偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0)=H(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0)=0$;

(3) Jacobi 行列式 $J(\boldsymbol{p}_0)=\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,W)}\Big|_{\boldsymbol{p}_0}=\begin{vmatrix}F_u(\boldsymbol{p}_0)&F_v(\boldsymbol{p}_0)&F_w(\boldsymbol{p}_0)\\G_u(\boldsymbol{p}_0)&G_v(\boldsymbol{p}_0)&G_w(\boldsymbol{p}_0)\\H_u(\boldsymbol{p}_0)&H_v(\boldsymbol{p}_0)&H_w(\boldsymbol{p}_0)\end{vmatrix}\neq0$. 则存在 $\boldsymbol{p}_0$ 点的一个邻域, 在此邻域内由方程组
$$\begin{cases}F(x,y,u,v,w)=0,\\G(x,y,u,v,w)=0,\\H(x,y,u,v,w)=0\end{cases}$$
可以惟一确定隐函数组
$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),\quad w=w(x,y),$$
使满足 $F(x,y,u(x,y),v(x,y),w(x,y))=G(x,y,u(x,y),v(x,y),w(x,y))=H(x,y,u(x,y),v(x,y),w(x,y))=0$ 及 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$和 $w_0=w(x_0,y_0)$, 且 u,v,w 具有关于 x,y 的连续偏导数, 满足

$$
\begin{pmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \\ H_x & H_y \end{pmatrix}.
$$

§3.1 **隐函数求导(形式计算)**

隐函数求导时, 涉及到一系列的复合的隐函数. 必须明辨函数关系, 弄清哪些是自变量，哪些是因变量, 以免漏项.

例 1 设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $F(x-y, y-z) = 0$ 确定的隐函数, 试求 z_x, z_y 及 z_{xy}.

例 2 设 $u(x, y)$ 是由方程组 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 确定的函数, 其中 $f,\ g,\ h$ 关于其各变量均连续可微, 且 $\dfrac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \neq 0$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

例 3 设 $u(x, y)$ 的所有二阶偏导数都连续, 且 $u(x, 2x) = x,\ u'_x(x, 2x) = x^2$ 以及 $u''_{xx} = u''_{yy}$. 求 $u''_{xx}(x, 2x),\ u''_{yy}(x, 2x)$ 和 $u''_{xy}(x, 2x)$.

例 4 设 $x = \cos\varphi\cos\psi,\ y = \cos\varphi\sin\psi,\ z = \sin\varphi$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

例 5 设 $u = f(x-ut, y-ut, z-ut),\ g(x, y, z) = 0$, 求$u_x,\ u_y$. 这时 t 是自变量还是因变量?

§3.2 **微分式变换**

1. 仅变换自变量的情形.

例 1 在方程 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u$ 中作极坐标代换$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 试求方程在变换后的形式.

例 2 通过代换 $x = uv, y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, 变换方程

$$
\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.
$$

例 3 设方程

$$
a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,
$$

其中 $a,\ b,\ c$ 都是常数, $b^2 - ac = 0,\ c \neq 0$, 作代换

$$
u = x + \alpha y, \quad v = x + \beta y.
$$

问如何选择 α, β, 能使代换后的方程有简单的形式?

2. 自变量与函数一起变换的情形(这种情况比只变自变量的情况稍复杂些, 它要多一个函数关系分析的步骤).

例 4 通过代换 $x = t, y = \dfrac{t}{1+tu}, z = \dfrac{t}{1+tv}$ 把方程 $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$ 变为以 v 为函数, $t,\ u$ 为自变量的形式.

反函数存在定理的证明　(1) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$, 取 $\lambda>0$, 使得 $2\lambda\|\boldsymbol{A}^{-1}\|=1$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的模(如 $\|\boldsymbol{A}\|=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$). 因为 $\boldsymbol{f}'$ 在 $\boldsymbol{a}$ 连续, 故可取以 $\boldsymbol{a}$ 为中心的开球 U, 使得

$$\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\|<\lambda,\quad \boldsymbol{x}\in U. \tag{1}$$

对 $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$, 定义带参数 $\boldsymbol{y}$ 的映射

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})),\ \boldsymbol{x}\in U. \tag{2}$$

则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是 φ 的不动点. 再记 $V=\boldsymbol{f}(U)$, 下面证明由 (2) 定义的映射对每一个任意固定的 $\boldsymbol{y}\in V$ 有惟一不动点 $\boldsymbol{x}$, 即存在惟一的 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$. 这就证明了 $\boldsymbol{f}$ 是 U 到 V 的 1–1 可逆映射.

为此, 先对 φ 作估计, 其 Jacobi 矩阵为

$$\varphi'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})).$$

由公式 (1) 及 Schwarz 不等式得 $\|\varphi'(\boldsymbol{x})\|<\dfrac{1}{2},\ \boldsymbol{x}\in U$. 再由映射的中值不等式得

$$|\varphi(\boldsymbol{x}_1)-\varphi(\boldsymbol{x}_2)|\leqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|,\quad \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in U. \tag{3}$$

因此 φ 是一个压缩映射. 这说明对每一个 $\boldsymbol{y}\in V$, 最多存在一个 $\boldsymbol{x}\in U$, 满足 $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$.

其次, 注意到 $\forall\,\boldsymbol{y}_0\in V$, 存在 $\boldsymbol{x}_0\in U$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0$. 取 r 足够小, 使以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心 r 为半径的开球 B 的闭包 $\overline{B}\subset U$. 限制 $\boldsymbol{y}$ 满足 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|<\lambda r$, 此时对于 $\overline{B}$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 有

$$\begin{aligned}|\varphi(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0|&\leqslant|\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)|+|\varphi(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0|\leqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|+|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)|\\&\leqslant\frac{r}{2}+\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\lambda r\leqslant r,\end{aligned}$$

因此 $\varphi(\boldsymbol{x})\in\overline{B}$, 从而 φ 是 $\overline{B}$ 上的压缩映射. 故存在 $\boldsymbol{x}\in\overline{B}$, 使 $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$. 也即只要 $\boldsymbol{y}$ 满足 $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|<\lambda r$, 就存在 $\boldsymbol{x}\in\overline{B}$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$, 即 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(\overline{B})\subset\boldsymbol{f}(U)=V$. 结合上面两条就证明了对 $\forall\,\boldsymbol{y}\in V$, 存在惟一的 $\boldsymbol{x}\in U$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$. 所以 $\boldsymbol{f}$ 是 U 到 $V=\boldsymbol{f}(U)$ 的 1–1 可逆映射. 上述讨论也证明了以 $\boldsymbol{y}_0$ 为中心 λr 为半径的开球位于V 中, 故 V 是开集.

(2) 因为 $\boldsymbol{f}$ 是 C^1 映射, 故 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数. $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 可逆, 即 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\neq0$, 故不妨认为在公式 (1) 中给出的邻域 U 内, 都有 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\neq0$. 即 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 可逆. 记其逆为 $\boldsymbol{T}$. 设 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的逆, 即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$. 取 $\boldsymbol{y}\in V,\ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{k}\in V$. 于是 $\exists\,\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$, 使 $\boldsymbol{x}\in U,\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}\in U$ 及 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$. 用公式 (2) 估计有

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}))=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{k},$$

由 公式(3) 得 $|\boldsymbol{h}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{k}|\leqslant\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{h}|$, 即 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{k}|\geqslant\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{h}|$, 从而

$$|\boldsymbol{k}|\geqslant\lambda|\boldsymbol{h}|. \tag{4}$$

于是

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}).$$

所以

$$\frac{|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{k}|}\leqslant\frac{\|\boldsymbol{T}\|\cdot|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}|}{\lambda|\boldsymbol{h}|},$$

且当 $|\boldsymbol{k}|\to0$, 由 (4) 也有 $|\boldsymbol{h}|\to0$, 上式右边的极限为 0. 这就证明了 $\boldsymbol{g}$ 是可微映射, 且 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})))^{-1}$. 容易验证 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})$ 为连续的.　□

注　设 $\boldsymbol{f}\colon E\subset\mathbf{R}^{n+m}\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in E$, 使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\mathbf{0}$, 并且 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 可逆. 这时方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$ 在 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的邻域内存在惟一 C^1 隐映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ 的隐函数存在定理可通过定义 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})$ 而转化为 $\boldsymbol{F}$ 的反函数存在定理. 事实上可检验反函数存在定理的条件成立, 因此存在 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的开邻域 U 和 $(\mathbf{0},\boldsymbol{b})$ 的开邻域 V , 使 F 是 U 到 V 的 1–1 映射. 再设 W 是满足 $(\mathbf{0},\boldsymbol{y})\in V$ 的一切 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ 组成的集合即可.

§3.4 若干应用的例子

例 1 设 $f(x,y)$存在二阶连续偏导数, 且 $f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2\neq 0$, 证明变换

$$\begin{cases} u=f'_x(x,y), \\ v=f'_y(x,y), \\ w=-z+xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y) \end{cases}$$

存在唯一的逆变换

$$\begin{cases} x=g'_u(u,v), \\ y=g'_v(u,v), \\ z=-w+ug'_u(u,v)+vg'_v(u,v) \end{cases} .$$

例 2 设 f 为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续可微函数, 已知 $f(x,y)=0$ 为 8 字形的曲线. 问

$$f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中至少有几组解?

例 3 设函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 是定义在平面开区域 G 内的两个函数, 在 G 内均有连续的一阶偏导数, 且在 G 内任意点处均有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\neq 0.$$

又设有界闭区域 $D\subset G$. 试证在 D 中满足方程组

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

的点至多有有限个.

第三讲练习题

1. 设二元函数 $u=F(x,y)$ 满足方程
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$
证明: $F(x,y)$ 在极坐标系下只是 θ 的函数.

2. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正交矩阵, $f(\boldsymbol{y})$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的二次可微函数， $F(\boldsymbol{x})=f(A\boldsymbol{x})$. 证明:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2$；　(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$.

3. 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微, 对微分方程
$$\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$
作变量代换
$$u=xy,\qquad v=x-y.$$
求变换后的方程.

4. 对方程组
$$\begin{cases}x^3+y^3+z^3=3xyz,\\ x+y+z=a\end{cases}$$
确定的隐函数组 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 和, $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$

5. 以 $\xi=x+y,\eta=x-y$ 为新自变量, 变换方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设 $u=xe^z,v=ye^z,w=ze^z$. 以 w 为新的函数, u,v 为新的自变量, 变换方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为连续可微函数. 证明存在连续的单射 $g:\ [0,1]\to\mathbb{R}^2$ 使得 $f\circ g$ 为常值.