第二讲、 Taylor 公式

基本内容: 一元和多元的 Taylor 公式

带 Peano 余项的 Taylor 公式 若在点 x_0 存在$f^{(n)}(x_0)$, 则有

$$f(x) = f(x_0) \quad + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \ \ (x \to x_0).$$

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式 若 f 在点 x_0 的某邻域 $O(x_0)$ 中 $n+1$ 阶可微, 则对每个给定的 $x \in O(x_0), x \neq x_0$, 在 x_0 和 x 之间存在 ξ, 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x),$$

其中

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

向量与矩阵形式的多元 Taylor 公式 考虑定义在一个开区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的 n 元二次连续可微函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$. 设 $\boldsymbol{p}_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in D$. 带Peano 余项的二阶Taylor 展式可写为

$$f(\boldsymbol{p}_0 + \Delta \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}_0) + \nabla f(\boldsymbol{p}_0) \cdot \Delta \boldsymbol{x}^T + \frac{1}{2!} \Delta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \Delta \boldsymbol{x}^T + \circ(r^2)$$

其中 $\Delta \boldsymbol{x} = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n) = (x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0)$, $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{p}_0$ 处的梯度, $Q = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n \times n} (\boldsymbol{p}_0)$ 称为Hesse 矩阵.

记函数差值 $\Delta f = f(\boldsymbol{p}_0 + \Delta \boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}_0)$. 易知当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0) \neq \mathbf{0}$ 时可取不同的 $\Delta \boldsymbol{x}$ 使 Δf 取到正值与负值, 因此当 $\boldsymbol{p}_0$ 是可微函数 f 的一个极值点时, $\boldsymbol{p}_0$ 必是 f 的驻点（又称临界点）, 即有

$$\nabla f(\boldsymbol{p}_0) = \mathbf{0}.$$

又当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0) \neq \mathbf{0}$, 且 $|\Delta \boldsymbol{x}|$ 为定值时, 在 $\Delta \boldsymbol{x}$ 与 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0)$ 同向时 Δf 取最大. 因此梯度方向是函数增长最快的方向. 当 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0) = \mathbf{0}$ 时, 可根据 Q 的情况来讨论函数增长最快的方向.

§2.1 Peano 余项和 Lagrange 余项的比较

例 1 确定 a, b , 使得当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$ 是尽可能高阶的无穷小量.（ Peano 余项：用于局部比较； Lagrange 余项；用于整体估计）

例 2 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微，且 $f(\dfrac{1}{n}) = 0,\ n = 1, 2, \cdots,$.

(1) 证明 $f^{(n)}(0) = 0,\ n = 1, 2, \cdots,$;

(2) 若对 $\forall x,\ \forall n$ 还有 $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$, 则 $f(x) \equiv 0$;

(3) 若 (2) 的条件不满足，则不一定有 $f(x) \equiv 0$. 如

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \sin \dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

这也是一个无穷次可微但非解析函数的例子.

例 3 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微，且 $f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{n^2}{n^2+1},\ n = 1, 2, \cdots,$. 计算 f 在点 0 处的所有阶导数.

§2.2　Taylor **展开的技巧**

例 1　设 $f(x)$ 有二阶导数, $f(x) \le \dfrac{1}{2}[f(x-h)+f(x+h)]$, $\forall h>0$. 证明: $f''(x) \ge 0$.

例 2　设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 有二阶导数, $f'(a)=f'(b)=0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得成立

$$|f''(\xi)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有二阶导数, $0 \le x \le 1$ 时, $|f(x)| \le 1$, $|f''(x)| < 2$. 证明: 当 $0 \le x \le 1$ 时, $|f'(x)| \le 3$.

例 4　设 $f(x)$ 二次可微, $f(0)=f(1)=0$, $\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)=2$. 证明: $\inf\limits_{0\le x\le 1} f''(x) \le -16$.

§2.3　**多元问题**

例 1　证明当 $|x|$ 和 $|y|$ 充分小时,有近似式

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2.$$

例 2　设 $f(x,y)$ 在 $B \equiv \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$ 上有连续偏导数，写出 $(x,y) \in \partial B \equiv \{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 处的方向导数的表达式, 并证明: 若

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)<0, \quad \forall (x,y) \in \partial B,$$

则 $f(x,y)$ 必在 B 的内部取到最大值.

例 3　设 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, 其中 $a>b>c>0$. 求在 $(0,0,0)$ 处函数增长最快的方向.

第二讲练习题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2\ln(1+x)}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\right)^{\mathrm{e}^{2x}}$; (3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$ $(a>0)$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{1+x}-1)^{\arcsin x}$; (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可微, $f(a)=f(b)=0$. 证明: 对每个$x\in(a,b)$ 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得成立 $f(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶可微, $f(a)=f'(a)=f(b)=0$. 证明: 对每个 $x\in[a,b]$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得成立 $f(x)=\dfrac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶可微. 证明: 存在 $c\in(a,b)$, 使得成立

$$f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f'''(c)(b-a)^3.$$

5. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 二阶可微, $|f(x)|,|f''(x)|$ 在 $(0,+\infty)$ 的上确界 $M_0=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f(x)|$ 和 $M_2=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f''(x)|$ 为有限数. 证明: $M_1=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f'(x)|$ 也是有限数, 并满足不等式 $M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}$.
6. 证明在上题中若将区间 $(0,+\infty)$ 改为 $(-\infty,+\infty)$, 则可以得到更好的估计: $M_1\le\sqrt{2M_0M_2}$.
7. 设函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二次连续可微, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 存在, 且 $\varphi''(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 试证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$.
8. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续, 在 $x^2+y^2<1$ 上二阶连续可微且满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=u$, 则

   (1) 若在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)\geqslant 0$, 证明: 当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时, $u(x,y)\geqslant 0$;

   (2) 若在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)>0$, 证明: 当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时, $u(x,y)>0$.
9. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微, 且

$$\lim_{r\to+\infty}(xf_x(x,y)+yf_y(x,y))=a>0,\quad \text{其中 } r=\sqrt{x^2+y^2},$$

   证明: $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上必有最小值.

附录 用 Rolle 定理证明 Cauchy 中值定理、导函数性质和 L'Hospital 法则

Cauchy 中值定理的证明

令

$$h(t) = g(t)(f(b) - f(a)) - f(t)(g(b) - g(a)), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

则 h 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上可导, 并且 $h(b) = h(a)$. 由 Rolle 定理存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $h'(\xi) = 0$. 整理就得 Cauchy 中值定理.

导函数介值定理的证明

设 $f'(x) < c < f'(y)$, 则必存在 $\xi \in (x,y)$, 使 $f'(\xi) = c$. 事实上令 $g(t) = f(t) - ct$.于是 $g'(x) < 0$, 从而有 $x_1 \in (x,y)$ 使得 $g(x_1) < g(x)$. 同样 $g'(y) > 0$, 从而有 $x_2 \in (x,y)$ 使得 $g(x_2) < g(x)$. 因此根据闭区间上最值定理, g 在 (x,y) 的某点 ξ 上达到它在 $[x,y]$ 上的最小值. 再由 Fermat 定理, $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = c$.

$\dfrac{*}{\infty}$ **型的不定式的** L'Hospital **法则证明**

仅对 $x \to a^+$ 证明. 由条件, $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta >$, 使 $a < x < a + \delta$ 时,

$$A - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < A + \varepsilon.$$

又结合 $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$, 知在 $(a, a+\delta)$ 上 $g(x) > 0$ 且是严格单调减少的.

取 $a < x < y < a + \delta$, 由 Cauchy 中值定理

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < A + \varepsilon.$$

因此 $f(y) + (A-\varepsilon)g(x) - (A-\varepsilon)g(y) < f(x) < f(y) + (A+\varepsilon)g(x) - (A+\varepsilon)g(y)$, 即

$$\frac{f(y) - (A-\varepsilon)g(y)}{g(x)} + A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(y) - (A+\varepsilon)g(y)}{g(x)} + A + \varepsilon.$$

固定 y , 令 $x \to a^+$, 则存在 $\delta_2 > 0$, 使 $a < x < a + \delta_2$ 时

$$\left|\frac{f(y) - (A-\varepsilon)g(y)}{g(x)}\right|, \ \left|\frac{f(y) - (A+\varepsilon)g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

从而就有 $A - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + 2\varepsilon$.

此即 $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. $\square$