数学分析(I)习题选编

(习题选自谢惠民教授编《数学分析讲义(第一册)》. 任课老师可以根据分组在课后或者复习时布置, 其中 A 组为基本题, B 组稍有综合性, C 组为参考题. 最后是基础讲座的相关练习题. 在习题中除特别申明, 一般以 m, n 等表示正整数, 以 a, b 等表示实数.)

第一章 引论

A 组习题

1. 设 n 为正整数, 证明: 含有 n 个元素的集合恰好有 2^n 个子集.
2. 证明: 有限个可列集的并是可列集.
3. 证明非空数集若存在上 (下) 确界, 则必定惟一.
4. (确界的比较性质) 若 A, B 均为非空数集, 且 $A \subset B$, 证明: $\sup A \leqslant \sup B$, $\inf A \geqslant \inf B$.
5. 设由非空数集 A 定义数集 $B = \{x + c \mid x \in A\}$, 其中 c 是一个常数, 证明: $\sup B = \sup A + c$.
6. 用肯定叙述方式写出下列命题的否定说法:

   (1) $x \in A - B$;　(2) $x \geqslant 0$ 且 $x \leqslant 1$;

   (3) $\exists x_n \in O_\delta(a)$;　(4) $\min A = b$;

   (5) $\inf A = m$;　(6) 集合序列 $\{A_n\}$ 中任何有限交不空.

7. 用肯定叙述方式写出以下命题:

   (1) 数列 $\{x_n\}$ 无上界;　(2) 数 M 不是数列 $\{x_n\}$ 的上界;

   (3) 数列 $\{x_n\}$ 发散;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 不成立;

   (5) 函数 f 在点 x_0 处没有极限;　(6) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 不成立;

   (7) 函数 f 在区间 (a, b) 上不连续　(8) 函数 f 在区间 (a, b) 上不一致连续;

   (在下列有关不等式的证明题中应当讨论其中成立等号的条件.)

8. 从实数的绝对值满足不等式 $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ 出发直接证明:

   (1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

   (2) $|a \pm b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$;

   (3) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$.

9. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 均为非负数, 证明不等式:
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

10. (Bernoulli不等式) 证明: 若 $a > -1$, 则成立不等式 $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

B 组 习 题

1. 证明: 可列个可列集的并是可列集. (提示: 试用定理 1.2 中的对角线方法.)
2. 证明平面 $\mathbb{R}^2$ 中横坐标和纵坐标都是有理数的点全体所成集合
$$\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \mid p \in \mathbb{Q}, q \in \mathbb{Q}\}$$
是可列集.
3. 证明 $\sqrt{12}$ 不是有理数.
4. 证明有理数和无理数都在实数系 $\mathbb{R}$ 中处处稠密, 也就是说, 对任何两个实数 $a < b$, 在开区间 (a,b) 中既存在有理数, 也存在无理数.
5. 设 a, c, g, t 均为非负数, $a + c + g + t = 1$, 证明: $a^2 + c^2 + g^2 + t^2 \geqslant 1/4$, 且其中等号成立的充分必要条件是 $a = c = g = t = 1/4$. (本题来自 DNA 序列分析.)

C 组 习 题

1. 证明Bernoulli不等式在条件 $a \geqslant -2$ 时仍然成立.
2. (Bernoulli 不等式的推广) 证明: 若 $a_i > -1$ $(i = 1, \cdots, n)$ 且同号, 则成立不等式
$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

又问, 若去掉 a_i $(i = 1, \cdots, n)$ 同号的条件后不等式是否成立?
3. 证明不等式:
$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
并说明 $n = 2, 3$ 时的几何意义.
4. $n!$ 是一个很重要的数量, 它在数学分析中经常出现.

(1) 试用平均值不等式证明:
$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \forall n > 1;$$
(2) 考虑 $(n!)^2 = (n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\cdot(1\cdot n)$, 证明
$$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n \quad \forall n > 1;$$
(3) 比较 (1)(2) 的优劣, 并说明原因;

(4) 证明: 对任意实数 r 有
$$\left(\sum_{k=1}^{n}k^r\right)^n \geqslant n^n(n!)^r.$$

第二章　数列极限

A 组习题

§2.1 练习题

1. 指出下列命题中那些是与 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 等价的, 那些不是.

   (1) $\forall \dfrac{1}{k}$(其中 k 取正整数), $\exists N, \forall n \geqslant N:\ |x_n - a| < \dfrac{1}{k}$;

   (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N:\ |x_n - a| \leqslant 5\varepsilon$;

   (3) $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N:\ |x_n - a| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$;

   (4) $\exists N, \forall \varepsilon > 0$ 和 $\forall n \geqslant N:\ |x_n - a| < \varepsilon$;

   (5) 对 $\varepsilon = 10^{-10}, \exists N, \forall n \geqslant N : |x_n - a| < \varepsilon$;

   (6) $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 无穷多项 $x_n : |x_n - a| < \varepsilon$;

   (7) $\forall (b,c)$ 满足 $a \in (b,c), \exists N, \forall n \geqslant N : x_n \in (b,c)$;

   (8) k 为一个确定的正整数, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.

2. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的充分必要条件是: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$ 收敛且有同样的极限 a .

3. 用 $\varepsilon - N$ 定义和适当放大法证明:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中 $0 < a < 1$;

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, 其中 $a > 1$;

   (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\varepsilon}{a^n} = 0$, 其中 $a > 1, \varepsilon > 0$;

   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3}{2n^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

5. 下列运算是否合理？为什么？应如何论证才是正确的？
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sin n^2 = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin n^2 = 0.$$

6. (1) 若 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 之一收敛, 另一发散, 或两者都发散, 能否对 $\{x_n + y_n\}$ 的敛散性作出结论? 为什么?

   (2) 对 $\{x_n y_n\}$ 作同样讨论.

7. 设已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 问是否成立
$$\lim_{n\to\infty} x_1 x_2 \cdots x_n = 0?$$
   又问: 反之如何?

8. 讨论无穷大量与无界量的关系.

9. 当 $n \to \infty$ 时, 对下列无穷大量从小到大排个次序:
$n^{\varepsilon}\ (\varepsilon > 0)$, $\log_a n\ (a > 0,\ a \neq 1)$, $n!$, n^n, $a^n\ (a > 1)$.

§2.2 练 习 题

1. 设已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - a}{x_n + a} = 0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
2. 证明加强形式的保号性定理: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则对于满足 $0 < c < a$ 的常数 c, 存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时成立 $x_n > c$.
3. 已知正数列 $\{x_n\}$ 的极限为 $a > 0$, 计算极限 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.
4. 从无穷大量的定义出发, 对 Cauchy 命题中 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ 的情况作出证明.
5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$.
6. 求下列极限:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} (1 - \dfrac{1}{k^2})$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}}$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}) \cos(\sqrt[n]{n})$;

   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + n)^{\frac{1}{2n+1}}$.

7. 证明:

   (4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 收敛, $x_n > 0\ \forall n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} = a$;

   (5) 若 $x_n > 0\ \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a$;

§2.3 练 习 题

1. 下列数列中哪些是单调的:

   (1) $\{\dfrac{1}{1+n^2}\}$;　　(2) $\{\sin n\}$;　　(3) $\{2n + (-1)^n\}$.
2. 设数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的正数列, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 的充分必要条件是对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使得 $x_N < \varepsilon$.
3. 设 $a_1 > b_1 > 0$, 令 $a_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, $b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$, 一般地令 $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 收敛且有相同极限.

4. 求下列数列的极限:

   (1) 设 $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$ $\forall n$;

   (2) 设 $-1<x_0<1$, $x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}}$ $\forall n$.

5. 设 $\{x_n\}$ 单调增加, $\{y_n\}$ 单调减少, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在且相等.

§2.4 练 习 题

1. 设 $\{x_n\}$ 满足条件 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant aq^n$, $\forall n$, 其中 $a>0$, $0<q<1$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛.

§2.5 练 习 题

1. 证明: 单调数列收敛的充分必要条件是它有一个子列收敛.
2. 设数列 $\{x_n\}$ 无界, 但不是无穷大量, 证明: 该数列一定存在两个子列, 其中之一收敛, 另一个是无穷大量.
3. 证明: 数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 发散.

B 组 习 题

1. 设 $\{x_n+x_{n+1}\}$ 和 $\{x_n+x_{n+2}\}$ 都收敛, 证明: $\{x_n\}$ 收敛.
2. (1) 设 $(2-x_n)x_{n+1}=1$ $\forall n$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$;

   (2) 设 $x_{n+1}=x_n-x_n^2$ $\forall n$, 讨论 $\{x_n\}$ 的敛散性;

3. 求下列数列的极限:

   (1) 设 $x_1=a>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{c}{x_n})$, $\forall n$, 其中 $c>0$;

   (2) 设 $x_1=a>0$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3c)}{3x_n^2+c}$, $\forall n$, 其中 $c>0$.

4. 设 $x_1=2$, $x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$ $\forall n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
5. 设 p 为一个给定的正整数, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{p}a_k\sqrt{n+k}$, 其中 $\sum\limits_{k=1}^{p}a_k=0$.
6. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{n(x_n-x_{n-1})\}$ 可能是无穷大量吗?
7. (改进定理 2.2 的结论) 证明: 以 β 为上确界的非空数集 A 中若没有最大数, 则存在取自 A 的严格单调增加数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$.
8. 在闭区间套定理中, 若将 $\{[a_n,b_n]\}$ 换成为开区间套 $\{(a_n,b_n)\}$, 其他条件不变, 问可推出什么结论?

9. 设数列 $\{a_n\}$ 严格单调增加, $\{b_n\}$ 严格单调减少, 且对每个 n 成立 $a_n < b_n$, 证明: 开区间套 $\{(a_n, b_n)\}$ 有公共点.

10. 设有可列个有界闭区间 $\{I_n\}$, 且对于每个 n, 集 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} I_k \neq \varnothing$, 证明:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing.$$

11. 设 $\{x_n\}$ 是有界发散数列, 证明: 该数列一定存在两个收敛于不同极限值的子列.

12. (1) 证明: 数列 $\{x_n\}$ 有界的充分必要条件是该数列的每一个子列中有收敛子列;
(2) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的充分必要条件是该数列的每一个子列中有收敛于 a 的子列.

13. 设点 ξ 的每一个邻域中都含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项, 证明在该数列中一定存在以 ξ 为极限的收敛子列.

14. 设 $\{x_n\}$ 为正数列, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^b = a^b$;

15. 设 A 和 B 都是非空数集, 且满足 $A \cup B = [0,1]$, $A \cap B = \varnothing$, 证明: 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得在 ξ 的每一个邻域中既有 A 中的点, 也有 B 中的点.

16. 用 Bolzano-Weierstrass 凝聚定理证明单调有界数列收敛定理.

C 组习题

1. 求下列极限:
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$;
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}),\ 0 < |x| < 1$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^3-1}{k^3+1}$.

2. (1) 设 $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, $(1-x_n)x_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}$, $\forall n \geqslant 1$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛;
(2) 设 $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$ $\forall n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;
(3) 设 $x_{n+1} = px_n + q$, $|p| < 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. 证明 (定理 2.25 后的注): 无上界的数列一定有一个严格单调增加子列为正无穷大量, 无下界的数列一定有一个严格单调减少子列为负无穷大量.

4. 若数列 $\{x_n\}$ 没有任何收敛子列, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 证明:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} = ab.$$

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|$ 收敛, 定义数列 $\{z_n\}$ 如下:
$$z_n = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \ \forall n,$$
证明: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

7. 求 $I=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$.

8. 利用上一题求出的极限 I, 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-nI\right)$.

9. 设 $x_n=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$, $\forall\, n$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛.
(用一点技巧可以证明其极限为 0.)

10. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 且对所有正整数 n 成立 $x_n\leqslant x_{n+2}$, $x_n\leqslant x_{n+3}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

11. 试用闭区间套定理证明 Bolzano-Weierstrass 凝聚定理 (即定理 2.28).

12. 试用有限覆盖定理证明: 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义, 且处处存在极限, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

13. 试用有限覆盖定理证明凝聚定理.

14. 设对数列 $\{x_n\}$ 存在 a, 使得该数列的每个子列 $\{x_{n_k}\}$ 都有
$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_k}}{k}=a,$$
证明 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$.

第三章 映射与函数

A 组习题

1. 求下列函数的反函数, 如果存在的话:

(1) $f(x)=1$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$;

(3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[0,1]$;

(4) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(-\infty,1),\\ x^2, & x\in[1,4],\\ 2^x, & x\in(4,+\infty). \end{cases}$

2. 对于在 X 上定义的两个函数 f 和 g, 证明:

(1) $\max\{f,g\}(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}+\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$,

(2) $\min\{f,g\}(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}-\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$,

并试从几何上作出解释.

3. 填充题:

函数名称	表达式 (记号)	定义域	值域	周期性	奇偶性	单调性	有界性	反函数	函数图像
常值函数	$f(x)=$const								
幂函数	$f(x)=x$ $f(x)=x^2$ $f(x)=x^{1/2}$								
指数函数	$f(x)=2^x$ $f(x)=(1/2)^x$								
对数函数	$f(x)=\log_2 x$ $f(x)=\log_{1/2} x$								
三角函数	$f(x)=\sin x$ $f(x)=\cos x$ $f(x)=\tan x$ $f(x)=\cot x$ $f(x)=\sec x$ $f(x)=\csc x$								
反三角函数	$f(x)=\arcsin x$ $f(x)=\arccos x$ $f(x)=\arctan x$ $f(x)=\operatorname{arccot} x$								

B 组习题

1. 设函数 f 有反函数 f^{-1}, 证明: $y=f(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.
2. 在什么条件下, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 存在反函数 f^{-1}, 且成立 $f=f^{-1}$.
3. 证明一个任意函数 $f(x)$ 一定可以按照下列公式分解为两个非负函数之差:
   (1) $f_+(x)=\max\{f,0\}(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)+|f(x)|\}$;
   (2) $f_-(x)=\min\{f,0\}(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)-|f(x)|\}$.
   并从几何图像上对此分解作出解释.
4. 下列各函数组 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 是否可以复合成 $f\circ g$? 若可以, 写出之.
   (1) $y=u^2+u^3$, $u=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\notin\mathbb{Q};\end{cases}$
   (2) $y=\sqrt[3]{u}$, $u=\cos x-2$;
5. 用图形合成法作出函数 $y=\dfrac{4+x}{1+x}=1+\dfrac{3}{1+x}$ 的图像.
   (参见例题 2.35 与图 2.7.)
6. 设 f,g 都是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 若 f,g 的周期 T_1,T_2 可公度 (即 T_1/T_2 为有理数), 证明 $f+g$ 是周期函数.
7. 设 f,g 是定义在 X 上的单调增加函数, 问 $f+g$ 和 fg 是否在 X 上单调增加.

C 组习题

1. 试在 $[0,1]$ 上作一个函数, 它在 $[0,1]$ 的每个子区间上都不单调, 但却存在反函数. 这个例子说明什么问题?
2. 设 f,g 是 X 上的单调减少函数, 问 $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 是否也在 X 上单调减少.
3. 证明 Dirichlet 函数有下列表达式:
$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}[\cos(\pi m!x)]^{2n}\right\}.$$
4. 在区间 $[0,1]$ 上对于 Dirichlet 函数和 Riemann 函数验证以下关系式:
   (1) $D(x)=-[-R(x)]$; (2) $D(x)=(\operatorname{sgn}\circ R)(x)$;
   (3) $D(x)R(x)=R(x)$; (4) $(D\circ D)(x)\equiv 1$.
5. 证明: $\sin\sqrt{2}x+\cos x$ 不是周期函数.

第四章　函数极限与连续性

A 组习题

§4.1 练习题

1. 设已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}=b$ 和 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+6x+2}=b$, 分别求 b.

2. 设已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$, 求 a,b.

3. 按照函数极限的定义证明:

   (1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+5x+4}=\dfrac{2}{3}$;　　(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in(-\infty,0),\\ 0, & x\in[0,1],\\ 1+x^2, & x\in(1,+\infty),\end{cases}$ 分别计算 f 在点 $x=0,1,2$ 处的左、右极限.

5. (1) 设 f 为多项式, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 证明: $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

   (2) 设 f,g 为多项式, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 证明: $f(x)=g(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

6. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 证明: f 是恒等于 A 的常值函数.

7. 设 a,A 都是有限数, 给出 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的否定说法的肯定叙述.

8. 设 a 为有限数, 给出 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ 的否定说法的肯定叙述.

§4.2 练习题

1. 设 a,A 为有限数, 对于以下情况叙述和证明 Heine 归结原理:

   (1) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$,　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

   注意这时在归结原理中的数列 $\{x_n\}$ 可限制为严格单调增加数列.

2. 求下列数列的极限:

   (1) $\{(1-\frac{1}{n})^n\}$;　　(2) $\{(1+\frac{1}{2n})^n\}$;

   (3) $\{(1-\frac{2}{n})^n\}$;　　(4) $\{(1+\frac{1}{n})^{n^2}\}$;

   (5) $\{(1+\frac{1}{n^2})^n\}$.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=\dfrac{1}{2}$, 求 a,b.

4. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^2+1)^{10}(x-2)^{20}}{(x+4)^{40}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\arctan x}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}x[\dfrac{1}{x}]$;

(10) $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-[x])$, 又考虑 $x\to 2^-$ 如何?

5. (1) 用对偶法则和 Cauchy 收敛准则写出“当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 没有极限”的正面叙述;

(2) 用 (1) 证明 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时没有极限;

(3) 用 (1) 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在, 并与 (2) 作比较.

§4.3 练 习 题

1. 证明: 无穷大量加有界量是无穷大量. 又问: 无穷大量乘有界量则如何?

2. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\arctan x$;

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}+\lambda\sin\dfrac{x}{n}\right)^n$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a,b>0)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{n}\cdot\sin n$;

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\arccos\mathrm{e}^x}{x-\sin x^2}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arccos\mathrm{e}^x}{x-\sin x^2}$.

3. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 9x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\prod_{k=1}^n\cos kx}{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\csc x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\dfrac{\pi\cos x}{2})}{\sin^2(\sin x)}$;

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

4. 设 $x \to 0$, 求下列各无穷小量的形如 x^μ 的等价无穷小量:

(1) $2x + 4x^3 - x^6$; (2) $x^2 - 3x^3 + 5x^4$;

(3) $(1+x)^n - 1$; (4) $\dfrac{1}{1+x} - (1-x)$;

(5) $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}$; (6) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\ (x > 0)$.

5. 设 $x \to +\infty$, 求下列各无穷大量的形如 x^μ 的等价无穷大量:

(1) $2x + 4x^3 - x^6$; (2) $x^2 - 3x^3 + 5x^4$;

(3) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\ (x > 0)$; (4) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}\ (x > 0)$;

(5) $\sqrt[3]{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}$; (6) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{10})$.

6. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 证明:

(1) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$; (2) $\forall\, c, c \cdot o(f(x)) = o(f(x))$;

(3) $O(f(x)) \cdot o(f(x)) = o(f(x))$; (4) $\dfrac{1}{c + o(1)} = \dfrac{1}{c} + o(1), c \neq 0$.

7. $o(f(x)) - o(f(x)) = 0$ 吗? 为什么?

8. 求 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2-1}+x)^n + (\sqrt{x^2-1}-x)^n}{x^n}$.

9. 设 $a > 1, \varepsilon > 0$, 证明:

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\varepsilon}{a^x} = 0$; (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$; (3) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\varepsilon \ln x = 0$.

B 组习题

1. 若 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = A$, 证明:

$$\lim_{x \to 0^-} f(-x) = \lim_{x \to 0} f(|x|) = \lim_{x \to 0} f(x^2) = A.$$

2. 设 f 是 $[a,b]$ 上的严格单调增加函数, 且对于在 $[a,b]$ 中的任意数列 $\{x_n\}$ 有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$, 证明: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

3. 设 $f(y) = |\operatorname{sgn} y|$, $g(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, 则有 $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, 问: 复合函数 $f(g(x))$ 当 $x \to 0$ 时的极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(g(x))$ 是否存在? 为什么?

C 组习题

1. 设 f, g 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$, 证明: $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. (注意并没有设函数 f, g 的周期相同.)

第五章 连续函数与单调函数

A 组习题

§5.1 练习题

1. 用 ε-δ 语言写出 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续和右连续的定义.

2. 举出一个函数, 它在无限多个点上左连续而不右连续.

3. 直接用定义证明下列函数的连续性:

   (1) $f(x)=|x|$; (2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

4. 求下列函数的连续范围:

   (1) $f(x)=\sec x+2\csc x$; (2) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

5. 找出下列各函数的间断点, 判别其类型, 对可去间断点改变或补充该点的函数值使之连续, 对跳跃间断点求出其跃度.

   (1) $f(x)=D(x)$; (2) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$;

   (3) $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin\dfrac{1}{x}$; (4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$;

   (5) $f(x)=x+[x]$; (6) $f(x)=[x]+[-x]$;

   (7) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$; (8) $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$;

   (9) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-1}{x^n+1}, x\neq-1$; (10) $f(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x, & x\neq0,\\ \mathrm{e}, & x=0.\end{cases}$

6. 试确定 b,c 使下列函数在其定义域上处处连续:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0,\\ x^2+bx+c, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}, & x>1.\end{cases}$$

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上定义, 且对每个足够小的 $\varepsilon>0$, $f\in C(a+\varepsilon,b-\varepsilon)$, 问是否有 $f\in C(a,b)$ 和 $f\in C[a,b]$?

8. 讨论 $f(x)$, $|f(x)|$, $f^2(x)$ 在点 x_0 的连续性的关系.

§5.2 练 习 题

1. 请举例说明以下各点:

(1) 在零点存在定理中 f 连续或端点的函数值异号的条件不成立时定理不再成立;

(2) 满足零点存在定理条件的函数可以有无限多个零点.

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上是严格单调减少的连续函数, 参数 $k<0$, 问方程 $f(x)=kx$ 在 $[a,b]$ 中有几个根. (即将例题 5.12(2) 中的条件 $k>0$ 换为 $k<0$.)

3. 设 $f\in C[a,b]$, $f(a)=f(b)$, 证明: 存在 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$, 满足条件 $b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$ 和 $f(a_1)=f(b_1)$.

4. 设 $f\in C[a,b]$, $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant b$, 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得
$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

5. 设 f 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明: 对每一个实数 $\alpha\in(0,1)$, 存在 x_0, 使得 $x_0+\alpha\in[0,1]$, 且成立
$$f(x_0)=f(x_0+\alpha).$$
又问: 若去掉 f 非负的条件, 结论是否仍然成立?

6. 设 f 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对每一个正整数 n, 存在 x_0, 使得 $x_0+\dfrac{1}{n}\in[0,1]$, 且成立
$$f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{n}).$$
又问: 本题与上一题有什么联系?

7. 设 $f\in C[a,b]$, 且 $f(x)$ 只取有理数, 问 f 是怎样的函数?

8. 设 $f\in C[a,b]$, 且满足条件 $f([a,b])\subset[a,b]$, 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得成立 $f(\xi)=\xi$.

9. 设 $f\in C[a,b]$, 且满足条件 $f([a,b])\supset[a,b]$, 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得成立 $f(\xi)=\xi$.

10. 若 $f\in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$, 证明: f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上取到最小值.

11. 设 $f\in C[a,b]$, 且 $f(x)>0\ \forall\, x\in[a,b]$, 证明: $\dfrac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

12. 下列各函数在指定区间上哪些是一致连续的:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 区间 $(-\infty,+\infty)$;

(2) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, 区间 $(0,1)$;

(3) $f(x)=\sin x^2$, 区间 $(0,1)$;

(4) $f(x)=\sin x^2$, 区间 $(-\infty,+\infty)$.

13. (1) 若 f 是 (a,b) 上的连续有界函数, 问 f 在 (a,b) 上是否一致连续?

(2) 若 f 是 (a,b) 上的单调连续有界函数, 问 f 在 (a,b) 上是否一致连续?

14. 设 f 为多项式, 问 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否一致连续?

15. 若对每个充分小的 $\varepsilon > 0$, 函数 f 在 $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 上一致连续, 问 f 在 (a,b) 是否一致连续?

16. 试从 Cantor 定理推出连续函数的有界性定理.

17. 设对于在区间 I 上定义的函数 f 存在一个正常数 L, 使得对于任意的 $x', x'' \in L$, 满足不等式 $|f(x')-f(x'')| \leqslant L|x'-x''|$, 证明 f 在区间 I 上一致连续.

    (具有题中所说性质的函数称为满足 Lipschitz 条件的函数.)

18. 若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, $\{x_n\}$ 是基本数列, 证明: $\{f(x_n)\}$ 也是基本数列.

§5.3 练 习 题

1. 设 $f \in C[a,b]$, 且存在反函数, 证明: f 一定是严格单调函数.

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调增加, $x_1, \cdots, x_n \in (a,b)$ 是 f 的不连续点, 证明:
$$\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^+)-f(x_k^-)] \leqslant f(b)-f(a).$$

B 组 习 题

1. (1) 若在 x_0 处函数 f 连续, 函数 g 间断, 或两个函数都间断, 讨论 $f+g$ 在该点的连续性;

   (2) 对 fg 讨论同样的问题.

2. 若余弦多项式 $C_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kx$ 的系数满足条件 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k| \leqslant a_n$, 证明: $C_n(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 中至少有 $2n$ 个零点.

3. 设某运动员用 30 分钟跑完 6 公里, 证明: 其中至少有一段长度为 1 公里的路程恰用 5 分钟跑完.

4. 若 $f \in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, 且于最小值点 x_0 有 $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(x_0)<x_0$, 证明: 复合函数 $f\circ f$ 至少在两个点达到最小值.

5. 设 $f \in C[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$, 对于

   (1) $g(x)=ax+b$, (2) $g(x)=\sin x$, (3) $g(x)=x^2$,

   试考虑 f 在 $[0,+\infty)$ 上的一致连续性, 并归结出一般结论.

6. (1) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立 $f(2x)\equiv f(x)$, 在 $x=0$ 处连续, 证明: f 为常值函数;

   (2) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立 $f(x^2)\equiv f(x)$, 在 $x=0,1$ 处连续, 证明: f 为常值函数.

7. 若 $f \in C(I)$, $c > 0$, 如下定义函数 g:

$$g(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & -c \leqslant f(x) \leqslant c, \\ c, & f(x) > c, \end{cases}$$

证明 $g \in C(I)$, 并阐明其几何意义.

8. (1) 举出一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处不连续的函数;

(2) 举出一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上只在点 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处连续而在所有其他点处不连续的函数.

9. 设 $f \in C[a, b]$, 对于 $a \leqslant x \leqslant b$ 定义

$$M(x) = \max\{f(t) \mid a \leqslant t \leqslant x\}, m(x) = \min\{f(t) \mid a \leqslant t \leqslant x\},$$

证明: $M, m \in C[a, b]$.

10. 设 f, g 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的一致连续函数, 问下列函数是否在该区间上一致连续:

(1) $af + bg$, 其中 a, b 为常数; (2) fg.

11. 若在区间 I 内存在两个数列 $\{x_n'\}$ 和 $\{x_n''\}$, 满足条件:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n' - x_n'') = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(f(x_n') - f(x_n'')) = A \neq 0,$$

证明: f 在 I 上不一致连续.

12. (1) 设 $f \in C[a, b)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = B$, 试问: 零点存在定理 (设 $f(a) \cdot B < 0$)、有界性定理、最值定理和 Cantor 定理是否仍然成立?

(2) 对于 $b = +\infty$ 考虑与 (1) 相同的问题, 并比较它们的结果.

C 组习题

1. 试在区间 $[0, 1]$ 上构造一个处处不连续函数, 它能取得最大值、最小值和介于其间的一切值.

2. 设 $f \in C[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 且存在某个正整数 n, 使得

$$(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = x \; \forall\, x \in [0, 1],$$

证明: $f(x) = x \; \forall\, x \in [0, 1]$.

(此题可先对于 $n = 2$ 来做, 一种方法是先证明这时 f 只能是单射.)

3. 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 且存在 $\alpha > 0$, $\forall\, x_1, x_2$, 成立 $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \alpha |x_1 - x_2|$, 证明 $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

4. 证明: f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是: 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, A > 0$, $\forall\, x_1, x_2 \in I$, 当 $\left|\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| > A$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

5. 若 $f \in C[a, b]$, 证明: 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 上的分段线性函数 $L(x)$, 使得 $|f(x) - L(x)| < \varepsilon \; \forall\, x \in [a, b]$.

6. 试用确界存在定理与 Lebesgue 方法证明连续函数的有界性定理.
7. 试用有限覆盖定理证明闭区间上连续函数的最值定理.
8. 设 f 在点 x_0 的一个邻域上有定义. 若对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\,x\in O_\delta(x_0)$:
$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon \quad (f(x)<f(x_0)+\varepsilon),$$
则称 f 在点 x_0 下半连续 (上半连续). (对于 x_0 为定义区间的端点情况可以作出类似的定义.)

证明 (只讨论上半连续情况):

(1) (局部保号性) 若 f 在点 x_0 上半连续, $f(x_0)<0$, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in O_\delta(x_0)$ 时 $f(x)<0$;

(2) (有界性) 若 f 在 $[a,b]$ 上处处上半连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上有上界;

(3) (最值性) 若 f 在 $[a,b]$ 上处处上半连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上有最大值.

第六章　导数与微分

§6.1 练习题

A 组习题

1. 设可导函数 f 的定义区间关于原点 $x=0$ 对称, 证明: 若 f 为奇函数, 则 f' 为偶函数, 反之, 若 f 为偶函数, 则 f' 为奇函数. 因此在 $x=0$ 可导的偶函数 f 满足 $f'(0)=0$.
2. 讨论由 (6.5) 定义的函数在 $x=0$ 处的导数是否存在.
3. 已知 $x \leqslant f(x) \leqslant x+x^2\ \forall x \in (-1,1)$, 求 $f'(0)$.
4. (1) 若 $f(1)=1$, $f'(1)=2$, 求 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-1}{x^2-1}$;

   (2) 若 $f(a)=0$, $f'(a)=b$, 求 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)}{h}$;
5. 函数在一点的可导性是否等价于它在该点同时具有左、右可导性? 函数在一点的连续性是否等价于它在该点同时是左、右连续?
6. 求下列函数在给定点的左、右导数 (如果存在的话):

   (1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leqslant 1, \\ \sqrt{x}, & x>1, \end{cases}$ $\quad x=1$;

   (2) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & x\leqslant 0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ $\quad x=0$.
7. 求下列曲线在给定点的切线方程与法线方程:

   (1) $y=2x^2$, $(1,2)$;　　　(2) $y=\cos x$, $(0,1)$.
8. 对数曲线 $y=\ln x$ 在什么点上的切线与直线 $y=3x-1$

   (1) 平行?　　　(2) 垂直?

B 组习题

1. 若 $f(a)\neq 0$, $f'(a)=b$, 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.
2. 试确定次数最低的多项式 $P_n(x)$, 使得下列函数 f 处处可导:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-2, & x<-1, \\ P_n(x), & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 5x+7, & x>1. \end{cases}$$

3. (1) 若 f 在点 x_0 可导, $a_n \to 0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+a_n)-f(x_0-a_n)}{2a_n} = f'(x_0);$$

(2) 若 f 在点 x_0 可导, $a_n \to x_0^-$, $b_n \to x_0^+$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(x_0).$$

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上处处可导, $f'_+(a)\cdot f'_-(b) > 0$, $f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

5. 若 f 在 $[0,1]$ 上处处可导, 且已知数集 $\{x\in[0,1] \mid f(x)=f'(x)=0\}=\varnothing$, 证明: f 在 $[0,1]$ 上至多只有有限个零点.

C 组习题

1. 证明: 由抛物线的焦点出发的射线经抛物线反射后与抛物线的对称轴平行.

2. 证明: 由椭圆的焦点出发的射线经椭圆反射后必经过椭圆的另一焦点.

3. 证明: 在双曲线 $l\colon xy=a\ (a>0)$ 上的任何一点的切线与坐标轴围成的三角形面积是一个定值.

§6.2 练习题

A 组习题

1. 当对数曲线 $l\colon y=\log_a x$ 的底 a 取何值时, 它与直线 $y=x$ 相切? 切点在哪里?

2. 证明:

(1) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (2) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. 证明:

(1) 若 f 为多项式, 则 f' 也是多项式;

(2) 若 f 为周期可导函数, 则 f' 也是周期函数.

4. 设 $f(x)$ 有导数 $f'(x)$, 求出以下函数的导数:

(1) $\sin f(x)$, $\mathrm{e}^{f(x)}$, $\ln f(x)$, 其中自变量为 x;

(2) $f(\sin t)$, $f(\mathrm{e}^t)$, $f(\ln \mathrm{e}^t)$, 其中自变量为 t.

5. 计算下列各函数的导数:

(1) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$; (2) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{a} - \boldsymbol{\pi}^2$;

(3) $y = 3^x - x^3 + \sin^2 x + \sin x^2$; (4) $y = \sin(x+1)\arccos\sqrt{x}$;

(5) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{1-\cos x}{\mathrm{e}^x}}$; (6) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(7) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; (8) $y = A\mathrm{e}^{-k^2x}\sin(\omega x + \alpha)$;

(9) $y = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{x^2}$; (10) $y = a^{x^x} + x^{a^x} + x^{x^a}$;

(11) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$; (12) $y = (x-1)(x-2)^2\cdots(x-10)^{10}$;

(13) $y = \dfrac{1}{2}(a^2\arcsin\dfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2})$; (14) $y = \sqrt[x]{(1+x)^2}$.

6. 设 f, g 可导, 求下列各函数的导数:

(1) $y = f(\sin x)$; (2) $y = \log_{f(x)} g(x)\ \ (f(x), g(x) > 0)$;

(3) $y = \sqrt[g(x)]{f(x)}\ \ (f(x) > 0, g(x) \neq 0)$; (4) $y = f(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{f(x)}$.

B 组 习 题

1. 利用 $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}\ (x \neq 1)$ 求:

(1) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;

(2) $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

2. 设 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ 满足条件 $|f(x)| \leqslant |\sin x|\ \forall x \in \mathbb{R}$, 证明:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} ka_k\right| \leqslant 1.$$

C 组 习 题

1. 若 $f_{ij}(x)$, $i, j = 1, \cdots, n$, 都是可导函数, 证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

并计算 $F'(x)$, 其中

$$F(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 2 & 3 & x+3 \end{vmatrix}.$$

§6.3 练 习 题

A 组 习 题

1. 设函数 f 无限次可导, 其定义区间关于原点 $x=0$ 对称. 证明: 若 f 为奇函数, 则在点 $x=0$ 处的所有偶数阶导数 $f^{(2n)}(0)=0$; 若 f 为偶函数, 则在点 $x=0$ 处的所有奇数阶导数 $f^{(2n-1)}(0)=0$.

2. 计算下列高阶导数:

   (1) $y=(x-1)^3$, 求 $y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}$; (2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, 求 y'';

   (3) $y=x^2\mathrm{e}^x$, 求 y'''; (4) $y=x^3\sin 2x$, 求 $y^{(100)}$.

3. 求下列各函数的 $y^{(n)}$:

   (1) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$; (2) $y=\ln(x-1)^{3x}$;

   (3) $y=\cos^2 x\sin 2x$; (4) $y=\mathrm{e}^x\cos x$;

   (5) $y=x^2\ln x$.

4. 设 f 三阶可导, 求下列各函数的三阶导数:

   (1) $y=f(x^3)$; (2) $y=f(\mathrm{e}^x)$; .

5. 设 $x=f(t)$, $y=tf'(t)-f(t)$, 且设有 $f''(t)\neq 0$, 求 y'_x 和 y''_x.

6. 对下列参数方程确定的 $y=y(x)$, 求在参数所示点的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

   (1) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=1-t^3, \end{cases}$ $t=2$; (2) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $t=\dfrac{\pi}{2}$; .

7. 求上题所表示的曲线在给定点的切线方程和法线方程.

8. 求下列各参数方程确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数:

   (1) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t). \end{cases}$ (其中 f 二阶可导)

B 组 习 题

1. 求 $y=\cos^3 x$ 的 n 阶导数, 并证明 $|y^{(n)}(x)|\leqslant \dfrac{3^n+3}{4}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. 若 f 在区间 I 上 n 阶可导, 且存在不全为零的常数 a_k, $k=0,1,\cdots,n$, 使得 $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x)=0\ \forall x\in I$, 证明 f 在 I 中有任意阶导数.

3. 已知 x'_y, x''_y, x'''_y, 求 y''_x 和 y'''_x.

4. 证明: $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \sin t \\ y = \mathrm{e}^t \cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 满足微分方程 $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

5. 证明 $y = \arcsin x$ 满足微分方程 $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$, 其中 n 为任意正整数.

C 组 习 题

1. 证明以下各函数满足所指出的常微分方程:

   (1) $y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 满足 $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$;

   (2) $y = C_1 \sin(\omega t + \varphi) + C_2 \cos(\omega t + \varphi)$ 满足 $y'' + \omega^2 y = 0$.

2. 对于 Legendre 多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)}$,

   (1) 证明它满足以下微分方程:

   $$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0;$$

   (2) 证明它满足下列等式:

   $$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x).$$

§6.4 练 习 题

A 组 习 题

1. 求 $\mathrm{d}y$:

   (1) $y = \mathrm{e}^{ax} \cos bx$;　　(2) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sin x}{x}$;　　.

C 组 习 题

1. 已知一圆柱高为 25 cm, 测得其底圆半径为 20 cm, 误差不超过 0.05 cm, 试估计用这些数据计算圆柱体积与侧面积时的绝对误差与相对误差.

2. 假设用测量球半径 R 来求得球体积. 为了使所得的球体积的相对误差不超过 1%, 问测量球半径的相对误差应满足什么上界?

3. 单摆的频率 $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, 其中 l 是摆长, g 是重力加速度, 试问: 当 l 有微小变化 Δl 时, $\dfrac{\Delta f}{f}$ 约为多少?

4. 设 f 于点 x_0 可导, 证明切线 $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 在 x_0 的某个邻域内是对于 f 的最优线性近似 (或逼近).

   (这就是说, 对于和 $l(x)$ 不同的每一个线性函数 $L(x) = ax + b$, $\exists \delta > 0$, $\forall x$ $(0 < |x - x_0| < \delta)$: $|f(x) - l(x)| < |f(x) - L(x)|$.)

第七章 微分学的基本定理

§7.1 练习题

A 组习题

1. (1) 对于 Rolle 定理的三个条件举出三个例子, 说明只要在三个条件中有一个不成立, 则 Rolle 定理的结论不成立.

   (2) 举出一个例子, 说明 Rolle 定理的三个条件都不成立时, Rolle 定理的结论却可能成立.

2. (1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,\dfrac{1}{\pi}] \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $[0,\dfrac{1}{\pi}]$ 上满足 Rolle 定理的条件吗?

   (2) $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上满足 Cauchy 定理的条件吗? 在 $[1,3]$ 上呢?

3. 有人说 Cauchy 中值定理可简证如下: 对 $f(x),g(x)$ 分别用 Lagrange 中值定理, 得到 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$, $g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$, 两式相除即可. 你的意见如何?

4. (1) 若 f' 在区间 I 上有界, 证明 f 在 I 上一致连续;

   (2) 证明: $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都是一致连续函数.

5. 讨论 f 在 $[a,b]$ 上满足下列条件之间的关系: (1) 连续, (2) 一致连续, (3) 满足 Lipschitz 条件, (4) 导函数有界.

6. 设 $0<a<b$, $f\in C[a,b]$ 且于 (a,b) 上可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得成立
$$f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}\cdot\xi f'(\xi);$$

B 组习题

1. (无界区间上的 Rolle 定理) 设 f 于 $[a,+\infty)$ 上连续, 于 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $f(+\infty)=f(a)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

2. 利用在第六章中从速度概念引入导数的方法, 试解释本节从 Fermat 定理, Rolle 定理, Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理的运动学意义.

3. 证明:

   (1) $5x^4-4x+1=0$ 在 $(0,1)$ 中有根;

   (2) 若 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$, 则 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 在 $[0,1]$ 上有根;

   (3) $x\sin x+\cos x=x^2$ 有且仅有两个实根;

   (4) 若 $2a^2\leqslant 5b$, 则 $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 不可能有 5 个相异的实根.

4. 设 f 为可微函数, 证明:

(1) 在 $f(x)=0$ 的两个根之间一定有 $f'(x)=0$ 的根;

(2) 对于任意实数 a, 在 $f(x)=0$ 的两个根之间一定有 $f'(x)-af(x)=0$ 的根.

5. 若 f 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理中的条件, 且有 $f'_+(a)f'_-(b)>0$, 证明 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个实根.

6. 若 $f\in C[a,b]$, 且于 (a,b) 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, 又在点 $c\in(a,b)$ 处 $f(c)>0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)<0$.

7. (1) 有人"证明": 若 f 于 $[a,+\infty)$ 上可微, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 如下: 由 Lagrange 定理有 $f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$, $\xi\in(x,x+1)$. 令 $x\to+\infty$, 得到

$$\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)=\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A-A=0,$$

于是得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

问: 上述证明对吗? 上述命题成立吗?

(2) 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$, 试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$.

8. 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}<\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)\ \forall\,\alpha>0$;

(2) $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x\ \forall\,x>0$;

(3) $|\sqrt{A^2+B^2}-\sqrt{A^2+C^2}|\leqslant|B-C|$;

(4) $e^x>1+x\ \forall\,x\neq0$.

C 组习题

1. 证明: 若 $c\neq0$, 则 $x^5+ax^4+bx^3+c=0$ 至少有两个根不是实根.

2. 证明: 对每个正整数 n, 方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在 $[0,1]$ 上有惟一根, 记为 ξ_n, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n$.

§7.2 练习题

A 组习题

1. 求出 $\arcsin x$ 的 Maclaurin 公式.

2. 求出 $\tan x$ 的直到 x^5 项的 Maclaurin 公式.

3. 设 f 在 $(-1,1)$ 上可微, $f(0)=1$, $f'(x)=1+f^{10}(x)$, 将 f 展开到 x^3.

4. 写出 $\sin x$ 的带 Lagrange 型余项的 Maclaurin 公式.

5. 根据 $f(x)=\cos x$ 的 Maclaurin 公式, 问需取几项才能使它与 $\cos x$ 之间的误差在 $[-1,1]$ 上不超过 0.001? 又若将 $[-1,1]$ 改为 $[-2,2]$ 呢?

6. 求下列各函数的 Maclaurin 公式, 其中 (1)~(4) 取 Lagrange 余项, (5)~(8) 取 Peano 余项:

   (1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$;　　(2) $f(x)=\ln(2+x)$;

   (3) $f(x)=\cos^2 x$;　　(4) $f(x)=\mathrm{e}^{1+\frac{x}{2}}$;

   (5) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$;　　(6) $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{1-x}$.

7. 求下列各函数的 Taylor 公式, 其中 (1)~(2) 取 Lagrange 余项, (3)~(4) 取 Peano 余项:

   (1) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1$;　　(2) $f(x)=\ln(-x^2+2x+3),\ x_0=2$;　　.

8. 用 Taylor 公式近似计算以下各数, 要求精确到 10^{-5}:

   (1) $\ln 1.01$;　　(2) $\sin 1^\circ$.

B 组 习 题

1. 取 $x_0=0$, 用求 $(x+a)^n$ 的 Taylor 多项式的方法求

$$(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n} p_k x^k,$$

从而给出二项式定理的一个新证法.

第 七 章 总 练 习 题

B 组 习 题

1. 若 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微, $f(a)=0$, $|f'(x)|\leqslant|f(x)|\ \forall x\in[a,+\infty)$, 证明 $f(x)\equiv 0$.

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得成立

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=(b-a)^2\cdot\frac{f''(\xi)}{4}.$$

3. 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶可微, $f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$, 证明: 存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

4. 设 f 在区间 I 上关于 $M>0$, $\alpha>1$ 满足条件 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha\ \forall x,y\in I$, 证明 f 在 I 上是常值函数.

   (由此可见, 在某些问题中对于函数 f 加以条件 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha\ \forall x,y\in I$ 时, 总是假设 $0<\alpha\leqslant 1$.)

5. 设 f, g 在 $[a, b]$ 上连续可微, $f(a) = f(b) = 0$, 且已知 Wronski① 行列式

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall x \in [a,b],$$

证明: $g(x)$ 在(a, b) 中有零点.

6. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上二阶可微, $f(a) = f(b)$, 且 $f'_+(a) > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) < 0$.

C 组 习 题

1. 求 $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 的两个端点处的单侧导数.
(提示: 利用导数极限定理.)

2. (1) 设 $a > 0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$;
(2) 设 f 在 $[1, +\infty)$ 上可微, $0 < f'(x) < \dfrac{1}{x^2}\ \forall x \in [1, +\infty)$, 证明: 存在 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. 设 f 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0$, $f(x) \neq 0\ \forall x \in (0, 1)$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得成立

$$\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

4. 设 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, $f(x) \neq g(x)\ \forall x \in (-\delta, \delta)$, 又 ψ 在 $(-\delta, \delta)$ 上可微, $\lim\limits_{x\to0} \psi'(x) = A$, 求

$$\lim_{x\to0} \frac{\psi(f(x)) - \psi(g(x))}{f(x) - g(x)}.$$

5. 证明 $\dfrac{x^2}{\pi} < 1 - \cos x < \dfrac{x^2}{2}\ \forall x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

6. 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上三阶可微,
(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x) = 0$, 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$;
(2) 若 f, f''' 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则 f', f'' 也在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

7. 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上任意阶可微, 且存在常数 C, 使得成立 $|f^{(n)}(x)| \leqslant C\ \forall n, x \in (-\infty, +\infty)$, 又已知 $f(\dfrac{1}{n}) = 0\ \forall n$, 证明 $f(x) \equiv 0$.

8. 证明:
(1) Legendre 多项式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ 有 n 个相异实根, 且都在开区间 $(-1, 1)$ 中;
(2) Laguerre② 多项式 $L_n(x) = \mathrm{e}^x (x^n \mathrm{e}^{-x})^{(n)}$ 有 n 个相异实根.

9. 设函数 f 在点 $x = 0$ 的某个邻域上三阶可微, 且已知有 $\lim\limits_{x\to0} \left(1 + x + \dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 和极限 $\lim\limits_{x\to0} \left(1 + \dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

---

① 朗斯基 (Joseph-Maria Höené de Wronski, 1778–1853), 波兰数学家.
② 拉盖尔 (Edmond Nicolas Laguerre, 1834–1886), 法国数学家.

10. 若 f 在 $[0,1]$ 上可微, $f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: 存在 $\xi_1,\xi_2\in[0,1]$, $\xi_1\neq\xi_2$, 使得成立
$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2.$$
11. 若 f 在 $(0,1)$ 上可微, 且 f' 有界, 证明: 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$.
12. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且 f 不是线性函数, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得成立
$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$
13. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二次可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: 对每一个 $x\in(a,b)$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-a)(x-b).$$
14. 设 f 在 $[0,1]$ 上足够次可微, 且 $f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=f(1)=f'(1)=f''(1)=0$, 证明: 对每一个 $x\in(0,1)$, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得
$$f(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)^3.$$

第八章　微分学的应用

§8.1 练习题

A 组习题

1. 有人学了 L'Hospital 法则后, 认为从前证明 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 太费事了, 现在可以非常简单地证明如下:
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1,$$
你意如何?

2. 能否用 L'Hospital 法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\ln(1+x)}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$.

3. 设函数 f 在点 a 处存在 $f''(a)$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x)-2f(a)+f(a-x)}{x^2}$.

4. 用新方法证明在第四章已经建立的下列极限: (i) $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}=0$, (ii) $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}x^\varepsilon\ln x=0$.

5. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2}{(x\ln(1+x))^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)\ln(1+x)-\ln(1-x^2)}{\sin x^4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x-x^2}{x\tan x\cdot\arctan x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-\mathrm{e}^x+x^2}{x^3}$.

6. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2\ln(1+x)}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^a}-\dfrac{b}{1-x^b}\right)$ $(ab\neq 0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos x}$; (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\right)^{\mathrm{e}^{2x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-x^4)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{3}{4}}}$; (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x^2}{\sin x+\cos x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\tan x-\arctan x}$; (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-\sin x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$ $(a>0)$; (12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}$.

B 组 习 题

1. 确定 a,b, 使得当 $x\to 0$ 时 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 是尽可能高阶的无穷小量. (此题可以用 Taylor 展开式做, 也可以用 L'Hospital 法则做.)

2. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$;

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}\right)^{\tan x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2-x}+\ln\dfrac{x+1}{2}\right)^{\csc(x-1)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt[3]{1+x}-1)^{\arcsin x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x^2}}}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^{\tan x}-1)\sin x}{\ln(1+x)\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^x-1}{(a-1)x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(0<a\neq 1)$.

§8.2 练 习 题

A 组 习 题

1. 用新方法证明例题 7.15 中已经建立的不等式:

$$\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2},\ \text{成立}\ \sin x < x < \tan x.$$

2. 举例说明: 可导的严格单调增加函数也会存在驻点.

3. 求下列各函数的单调区间:

   (1) $f(x) = \arctan x - x$;　　(2) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

4. 设 f 是区间 I 上的单调增加可微函数, 问: 导函数 f' 是否一定是单调增加函数?

5. 若 f, g 在 $[a, +\infty)$ 上 n 阶可导, $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)\ \forall k = 0, 1, \cdots, n-1$, $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)\ \forall x \in (a, +\infty)$, 证明: $f(x) > g(x)\ \forall x \in (a, +\infty)$.

6. 证明下列不等式:

   (1) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$, $(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$;

   (2) $x \ln x \geqslant x - 1$, $(x > 0)$.

7. 若 $f, g \in C[a, +\infty)$, $|f'(x)| \leqslant g'(x)\ \forall (a, +\infty)$, 证明:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant g(x) - g(a)\ \forall x \in [a, +\infty).$$

B 组 习 题

1. 证明下列不等式:

   (1) $\dfrac{\ln x}{x-1} \leqslant x^{-\frac{1}{2}}$, $(0 < x \neq 1)$;

   (2) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$;

   (3) $\mathrm{e}^x > x^{\mathrm{e}}$, $(0 < x \neq \mathrm{e})$; (由此推得一个有趣的结果 : $\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}$.)

   (4) $a^{b^c} \leqslant b^{a^c}$, $(0 < a < b \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{c}}, 0 < c)$;

   (5) $\dfrac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b}{a - b} < \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$, $(a \neq b)$;

C 组 习 题

1. 举出一个函数, 它在某点处导数大于 0, 但在该点的每一个邻域中都不是单调函数.

2. 证明：$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x$, $(0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2})$

§8.3 练 习 题

A 组 习 题

1. 求函数 $f(x)=(x-1)^2x^{\frac{2}{3}}$ 的所有极值点并判定极值的性质.
2. 举例说明: 函数的驻点和不可导点不一定是极值点.
3. (1) 若 $f\in C(I)$, $x_0\in I$ 是 f 的惟一极值点, 证明: x_0 是极大值点 (极小值点) 时, 也一定是最大值点 (最小值点).

   (2) 若 g 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数, 则 f 的极大值点 (极小值点) 也是复合函数 $g\circ f$ 的极大值点 (极小值点).
4. 求下列各函数的最大值和最小值:

   (1) $f(x)=x^2-3x+2,\ x\in(-\infty,+\infty)$; (2) $f(x)=\mathrm{e}^{-|x-1|},\ x\in[-1,1]$.
5. 测试某量 n 次, 得 $a_1,\cdots,a_n$, 试求 x, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ 最小.
6. (1) 面积一定的矩形中何者周长最小?

   (2) 周长一定的矩形中何者面积最大?
7. 在半径为 R 的球中嵌入正圆柱体, 问它的高及底圆半径各为多少时其体积最大?
8. 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上求点 P, 使过 P 所作椭圆切线与坐标轴围成的三角形面积最小.

B 组 习 题

1. 设 $a>b>c$, 求 $\min\limits_{x\neq a}\{\max\{\left|\dfrac{b-x}{a-x}\right|,\left|\dfrac{c-x}{a-x}\right|\}\}$.
2. (1) 面积一定的三角形中何者周长最小?

   (2) 周长一定的三角形中何者面积最大?
3. 盖一座地板是正方形的盒状房屋, 其容积为 $1500\ \mathrm{m}^3$. 已知地板不散热, 天花板的单位散热量是四周墙壁的单位散热量的 3 倍, 试确定房屋的尺寸, 使其散热量最小.
4. 在单位圆中求一个对称的空心十字, 使其面积最大 (见图 1).
5. 从离海岸 (直线 $\overline{PT}$) 3 公里处的小岛 Q 到小镇 T 敷设电缆, 设 $|PT|=12$ 公里, 海底与陆上的电缆敷设费分别为每公里 160 元与 80 元, 试在 $\overline{PT}$ 上求点 R, 使得沿 $\overline{QR}$, $\overline{RT}$ 敷设电缆费用最少 (见图 2).

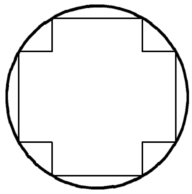

图 1: 空心十字面积最大值问题.

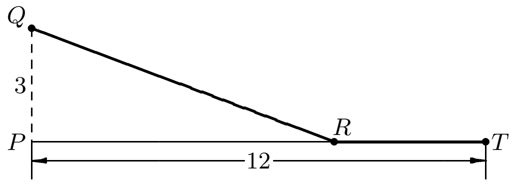

图 2: 敷设电缆费用的最小值问题.

C 组习题

1. 设 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微, 且满足微分方程
$$xy''+3xy'^2=1-\mathrm{e}^{-x},$$
证明: $y(x)$ 若有极值点则一定是极小值点.

§8.4 练习题

A 组习题

1. 对所有基本初等函数作凸性分析, 即它们是否是凸函数, 如果不是, 则确定它们的凸性区间. (参见 §3.2.5, 基本初等函数包括常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.)
2. 设 $f(u)$ 是单调增加的下凸函数, $u=g(x)$ 是下凸函数, 证明: $f(g(x))$ 也是下凸函数.
3. 证明: 区间上的下凸函数如果不是常值函数, 则不可能在区间内有极大值点.
4. 举出 $f''(x_0)=0$ 但 $(x_0,f(x_0))$ 不是拐点的例子.
5. 举出 $(x_0,f(x_0))$ 是拐点但 f 在点 x_0 不可导的例子.
6. 讨论下列各函数的凸性和拐点:
   (1) $y=x^3-5x^2+3x-5$;　　(2) $y=x+\dfrac{1}{x}$;
   (3) $y=x\mathrm{e}^{-x}$;　　(4) $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
7. 若 f,g 都是 I 上的下凸函数, 证明: $f+g$, $\max\{f,g\}$ 也是 I 上的下凸函数.
8. (1) 若 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上处处大于 0, $\ln f(x)$ 是下凸函数, 证明: f 是下凸函数.
   (2) 若 f,g 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的下凸函数, 问: $f\circ g$ 是否下凸.

B 组习题

1. 证明: 在定义 8.1 中的不等式 8.8 只可能有两种情况, 或者始终成立严格的不等号, 或者始终成立等号. (首先从几何上观察上述结论的意义.)
2. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且在此区间上处处有 $f(x)\geqslant 0$, $f''(x)\leqslant 0$, 证明: 在此区间上处处成立 $f'(x)\geqslant 0$.
3. 设 f 是开区间 (c,d) 上的凸函数, 证明: f 满足内闭 Lipschitz 条件, 即对 $\forall\,[a,b]\subset(c,d)$, $\exists\, C>0$, $\forall\, x_1,x_2\in[a,b]$, 成立 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|$.
4. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界凸函数, 证明 f 只能是常值函数.

C 组习题

1. 利用上一小节最后的分析, 用 Jensen 不等式证明 Hölder 不等式, 包括讨论其中成立等号的充分必要条件.
2. 利用上一小节中用 Hölder 不等式对 Minkowski 不等式的证明, 完成关于 Minkowski 不等式成立等号的讨论.
3. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界且二阶可微函数, 证明: 存在 ξ 使得 $f''(\xi)=0$.
4. 证明: $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于一直线上.
5. 设在区间 I 上的函数 f 对 $\forall\, x_1,x_2\in I$ 满足条件 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

   (1) 证明: 对每个 $n\in\mathbb{N}$ 和任何 $x_1,\cdots,x_n\in I$ 成立不等式
   $$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n};$$
   (提示: 用向前–向后数学归纳法.)

   (2) 若 f 还是 I 上的连续函数, 则 f 是满足定义 8.1 的下凸函数.
6. (1) 对于 $f(x)=x\ln x$ 用 Jensen 不等式能得出怎样的不等式?

   (2) 证明: 当 $p\geqslant 1$, $x_k\geqslant 0, k=1,\cdots,n$ 时, 成立不等式
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}};$$
   (3) 证明: 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上成立不等式 $(\sin x)^{1-\cos 2x}+(\cos x)^{1+\cos 2x}\geqslant\sqrt{2}$;

   (4) 证明: 在 $(1,+\infty)$ 上成立不等式
   $$1\leqslant\frac{(x-1)^{x-1}x^x}{(x-\frac{1}{2})^{2x-1}}\leqslant 2;$$
   (5) 若 $a_k>0, 0<b_k\leqslant 1, k=1,\cdots,n, \sum\limits_{k=1}^{n}a_k=1$, 证明不等式
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+b_k}\leqslant\frac{1}{(1+\prod_{k=1}^{n}b_k^{a_k})}.$$

7. 设 $p_k, q_k > 0\ \forall\, k = 1, \cdots, n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \ln q_k.$$

§8.5 练 习 题

A 组 习 题

1. 求下列各函数的渐近线:

(1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$;　　(2) $y = x \ln(\mathrm{e} + \dfrac{1}{x})$;

(3) $y = \ln x$;　　(4) $y = 2x + \arctan \dfrac{x}{2}$.

2. 作出下列各函数的图像 (要求进行凸性分析和寻找拐点):

(1) $y = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;　　(2) $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$.

3. 作出下列各函数的图像:

(1) $r = a\cos 2\theta,\ a > 0$;　　(2) $r = 2R\sin\theta,\ R > 0$;

(3) $r = a\theta$;　　(4) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$;

(5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

第 八 章 总 练 习 题

A 组 习 题

1. 将 $x \to +\infty$ 时的无穷大量 $x^x, a^x (a > 1), x^\mu (\mu > 0), \ln x$ 按阶的高低排列之.

2. 设 f 在 $[0, 1]$ 上可微, $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, 且处处成立 $f'(x) \neq 1$, 证明: f 在 $[0, 1]$ 存在惟一的不动点.

3. 设 f 是区间 I 上的严格下凸函数, 证明:

(1) 若 f 在 I 上有最小值点, 则必定惟一;

(2) 若 f 可微, 且有驻点, 则这个驻点一定是最小值点.

(这表明凸函数在最优化问题上的独特地位.)

B 组习题

1. 设 $f''\in C(-\infty,+\infty)$, $f(0)=0$, 定义 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$ 证明: g 有连续导数.

2. 设 f'' 在 $O_\delta(x_0)$ 上连续, $f'(x_0)\neq 0$, $f(x)\neq f(x_0)\ \forall\, x\in O_\delta(x_0)-\{x_0\}$, 试求:
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\right).$$

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, 且存在 g, 使得对 $\forall\, x\in[a,b]$, 成立
$$f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)\equiv 0,$$
证明: f 在 $[a,b]$ 上恒等于 0.

4. 设 g 在 $[0,1]$ 上二阶可微, $g([0,1])\subset[0,1]$, $g(0)=g(1)$, 且处处成立 $|g''(x)|\leqslant M<2$, 证明: g 在 $[0,1]$ 存在惟一的不动点.

C 组习题

1. 设给定数列 $x_n=\dfrac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}}-\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\ \forall\, n$,

   (1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\mathrm{e}$; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(x_n-\mathrm{e})$.

   (这是 1998 年的发现. 从 (2) 可见 $x_n=\mathrm{e}+O(\frac{1}{n^2})$, 这比第二章中用于定义 e 的数列 $\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$ 收敛于 e 的速度快得多.)

2. 测试某量 n 次, 得 $a_1,\cdots,a_n$, 试求 x, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{n}|x-a_k|$ 最小.

   (此题直接导致统计上的中位数概念.)

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^5\left(1+\sin^2\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 证明: 函数 f 连续二阶可微, 且有 $f''(0)=0$, 但点 $(0,0)$ 不是拐点.

4. 定义函数 $f(x)=\begin{cases}\exp(\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}), & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 求出使得 $f'(x)=0$ 的所有点, 并作出函数的草图. (注意有 $f'_+(0)=0$.)

5. 作 $y^3+x^2y^2-x^3=0$ 的图像 (参见第六章的图 6.10).

基础讲座练习题

1. 设数列 $\{x_n\}$ 发散于 $+\infty$, 证明: 在 $\{x_n\}$ 中有取最小数值的项.

2. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 证明: 在 $\{x_n\}$ 中或有取最大数值的项, 或有取最小数值的项.

3. (确界的加法性质) 设 A, B 均为非空数集, $A+B=\{x+y \mid x \in A, y \in B\}$, 证明:

   (1) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$;

   (2) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

4. (1) 设 $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, $(1-x_n)x_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}$, $\forall n \geqslant 1$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛;

5. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0<a_1<1$ 和 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$, 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=1$.

6. 设$x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x_{n+1}=\sin x_n, n=0,1,2,\cdots$. 证明：

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2=3$.

7. 设$x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明：

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=2$.

8. 通过 Euler 常数计算:

   (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;

   (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$;

9. 用压缩映射定理证明 Kepler 方程 $x-q\sin x=a \ \ (0<q<1)$ 有唯一解.

10. 设$a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

    (1) 证明$\{a_n\}$ 发散。

    (2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$.

    (3) 记$x_n=a_n-2\sqrt{n}$. 证明$\{x_n\}$ 收敛。

11. 设函数f 定义在$(-\infty,+\infty)$ 上，满足$\forall x, y \in (-\infty,+\infty)$, 有$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, 且$f$ 在$x=0$ 点可导。

    (1) 证明f 在$(-\infty,+\infty)$ 上处处可导。

    (2) 如果$f'(0)=1$, 求出$f(x)$ 的表达式。

12. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$. 证明: 对每个 $a>0$, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$.

13. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

14. 设 $-1<x_0<1$, $x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}}\ \forall n$, 求: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-x_n)$, (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}x_k$.

(此题中的迭代数列 $\{x_n\}$ 已见于 §2.3 的练习题 10(2), 其极限为 1. 这里的题 (1) 是对于无穷小量 $\{1-x_n\}$ 的进一步刻画. 又从题 (2) 的答案可见, 对于 $x_0=0$ 就得到著名的 Viète 公式:

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots=\frac{2}{\pi},$$

它也可以从上一题的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}$ 得出, 其中取 $x=\pi/2$.)

15. (1) 设 I 为区间, $[a,b]\subset I$, $f\in C[a,b]$, 是否存在 $g\in C(I)$ 使得 $g(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$? (即是否能够将 f 连续延拓到 I 上.)

(2) 对于 $f\in C(a,b)$ 考虑同样的问题.

16. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续, 证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上: (1) 有界; (2) 一致连续.

17. 设f 在$[0,+\infty)$ 上一致连续，且对每个$x\geq 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

18. 构造一个$[0,+\infty)$ 上的连续函数f, 满足对每个$x\geq 0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$. 但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在。

19. 设$h>0$, f 在$[a-h,a+h]$ 上可导。证明：存在$\theta\in(0,1)$, 使得

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h}=f'(a+\theta h)-f'(a-\theta h).$$

20. 叙述导函数的两大性质（导函数介值定理和导函数极限定理）.

21. 证明导函数没有第一类间断点.

22. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上处处可导, 导函数 $f'(x)=F(x)-G(x)$, 其中 $F(x)$, $G(x)$ 均是单调函数, 并且$f'(x)>0$, $\forall x\in[0,1]$. 证明 $\exists\, c>0$, 使 $f'(x)\geq c$, $\forall x\in[0,1]$.

23. 计算函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 的导函数, 证明 $f'(0)>0$ 但 f 在 $x=0$ 的足够小的邻域内都不是单调增加的.

24. 设f 在$(-1,1)$ 内$n+1$ 阶可导，且$f^{(n+1)}(0)\neq 0$, 其中n 为自然数。又设当$0<|x|<1$ 时，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,$$

其中$\theta=\theta(x)\in(0,1)$. 证明$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

25. 设f 在$[0,1]$ 上可导，$f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明存在$\xi_1,\ \xi_2\in[0,1],\ \xi_1\neq\xi_2$, 使得成立

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2.$$

26. 设f 在$[0,+\infty)$ 上三阶可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)$ 均存在有限。证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0,\ k=1,2,3.$

27. (1) 用凸函数方法证明 Young 不等式:

$$uv\le\frac{1}{p}u^p+\frac{1}{q}v^q,$$

其中 $u,\ v\ge 0$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$;

(2) 用 Young 不等式证明 Hölder 不等式:

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{1/q},$$

其中 $x_i,\ y_i\ge 0,\ i=1,\cdots,n$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

28. 设 f 是开区间 I 上的可微的严格凸函数.

(1) 证明对任意 $x_0,\ x\in I$, 有:

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

即函数 $y=f(x)$ 的图像在其在 x_0 的切线之上;

(2) 证明 f 在 I 上的极值点最多只有一个.