苏州大学 高等代数 期终考试试卷　（A）卷　共1页

(考试形式　在线考试　　2020年7月)

二、主观题(4个大题，每一大题有两道题，采用二选一的方式：学号末位奇数的学生做（1），学号末位偶数的学生做（2），错选不给分)

1. (计算题，10分)

(1). 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$，求一正交替换把该二次型化为标准形.

(2). 设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是3维欧氏空间 V 的一组标准正交基，$\mathcal{A}$ 是 V 上的对称变换，在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. 求一组标准正交基 η_1,η_2,η_3，使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为对角阵.

2. (计算题, 10分)

(1). 设$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求$\lambda E_3-A$的不变因子, A的最小多项式和若当标准型.

(2). 设$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$\lambda E_3-A$的不变因子, A的最小多项式和若当标准型.

3. (证明题，7分)

(1). 设σ是数域F上的n维向量空间V的一个线性变换, σ在V的一组基α_1, α_2, $\cdots$, α_n下的矩阵是A, 设A_j是A的第j 个列向量. 证明: A_{i_1}, A_{i_2}, $\cdots$, A_{i_t}是A_1, A_2, $\cdots$, A_n的极大线性无关组当且仅当$\sigma(\alpha_{i_1})$, $\sigma(\alpha_{i_2})$, $\cdots$, $\sigma(\alpha_{i_t})$是$\sigma(V)$的一组基.

(2). 设V是数域F上的一个n维向量空间, α_1, α_2, $\cdots$, α_n是V的一组基, A是一个$n\times s$矩阵, 设A_j是A 的第j 个列向量, $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$. 证明: A_{i_1}, A_{i_2}, $\cdots$, A_{i_t}是A_1, A_2, $\cdots$, A_s的极大线性无关组当且仅当β_{i_1}, β_{i_2}, $\cdots$, β_{i_t}是$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的极大线性无关组.

4. (证明题，8分)

(1). 设σ是数域F上的n维向量空间V的一个线性变换, 证明: $V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0)\Leftrightarrow$ 若α_1, α_2, $\cdots$, α_r是$\sigma(V)$的一组基, 则$\sigma(\alpha_1)$, $\sigma(\alpha_2)$, $\cdots$, $\sigma(\alpha_r)$是$\sigma^2(V)$的一组基.

(2). 设σ是数域F上的n维向量空间V的一个线性变换, 证明: $V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0)\Leftrightarrow$ $rank(\sigma^2)=rank(\sigma)$.