1. （40）令 $\{B_t, t\geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathfrak{I},P)$ 上的一维标准布朗运动，$B_0=0$。（1）令 $T=\inf\{t:B_t\notin[a,b],a<0<b\}$，求 B_T 的分布；（2）对 $r>0$，定义 $M_t=\int_0^t e^{rs}dB_s$，$t\geq 0$，求 $\{M_t\}$ 的二次变差过程 $\{<M>_t, t\geq 0\}$；（3）求 M_t 的分布；（4）求时间变换 $\tau=\tau(t)$，使 $W_t=M_{\tau(t)}$ 为标准布朗运动；（5）令 $T_0=\inf\{t:M_t\notin[a,b],a<0<b\}$，求 M_T 的分布。

(1) 定义 $T_a=\inf\{t: B_t<a\}$，$T_b=\inf\{t: B_t>b\}$. 则 $T=T_a\wedge T_b$.

易知 $B_{T\wedge t}$ 为鞅. 则有 $E[B_{T\wedge t}]=E[B_0]=0$.

$$B_T=a\cdot I_{\{T_a<T_b\}}+b\cdot I_{\{T_a>T_b\}}+B_T\cdot \underset{0}{\underbrace{I_{\{T_a=T_b\}}}}$$

$\Rightarrow E[B_T]=a\cdot P(\{T_a<T_b\})+b\cdot P(\{T_a>T_b\})=0$

又因为：$P(\{T_a<T_b\})+P(\{T_a>T_b\})=1$ $(P(\{T_a=T_b\})=0)$

$\Rightarrow P(\{T_a<T_b\})=\frac{-b}{a-b}$；$P(\{T_a>T_b\})=\frac{a}{a-b}$.

$\Rightarrow B_T$ 的分布为：
$$\begin{cases} P(\{B_T=a\})=P(\{T_a<T_b\})=\frac{b}{b-a}; \\ P(\{B_T=b\})=P(\{T_a>T_b\})=\frac{a}{a-b}; \quad a<0<b. \\ P(\{B_T\neq a, B_T\neq b\})=0 \end{cases}$$

(2) 要证 $M_t=\int_0^t e^{rs}dB_s$ 的 $\langle\ \rangle$ 为 $\int_0^t e^{rs}ds$

则先证 $M_t^2-\int_0^t e^{2rs}ds$ 为鞅，由二次变差过程的唯一性可得 $\langle M\rangle_t=\int_0^t e^{rs}ds$

即证：$E[M_t^2-M_s^2-\int_s^t e^{2rs}ds\mid I_s]=0 \quad \forall\, 0\le s\le t.$

又因为 $E[M_t^2-M_s^2-\int_s^t e^{2rs}ds\mid I_s]=E[(M_t-M_s)^2-2M_s^2+2M_tM_s-\int_s^t e^{2rs}ds\mid I_s]$

$=E[(M_t-M_s)^2-\int_s^t e^{2rs}ds\mid I_s]-E[2M_s^2\mid I_s]$

$+E[2M_tM_s\mid I_s]$

$\Rightarrow E[M_t^2-M_s^2-\int_s^t e^{2rs}ds\mid I_s]=E[(M_t-M_s)^2-\int_s^t e^{2rs}ds\mid I_s]$

不妨设时间剖分为：$\{0=t_0<t_1<\cdots<t_i<\cdots\}$，定义 $f_i=e^{rt_i}$

假设 $t_j\le t<t_{j+1}$；$t_k\le s<t_{k+1}$；由 $s\le t$ 有：$k+1\le j$

$M_t=\int_0^t e^{ru}dB_u=\sum_{i=0}^{j-1}f_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+f_j(B_t-B_{t_j})$

$M_s=\int_0^s e^{ru}dB_u=\sum_{i=0}^{k-1}f_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+f_k(B_s-B_{t_k})$.

则 $M_t-M_s=\sum_{i=k+1}^{j-1}f_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+f_j(B_t-B_{t_j})+f_k(B_{t_{k+1}}-B_s)$

$\Rightarrow (M_t-M_s)^2=\sum_{i,l=k+1}^{j-1}f_if_l(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(B_{t_{l+1}}-B_{t_l})+f_j^2(B_t-B_{t_j})^2+f_k^2(B_{t_{k+1}}-B_s)^2$

$+2f_j(B_t-B_{t_j})\sum_{i=k+1}^{j-1}f_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+2f_k(B_{t_{k+1}}-B_s)\sum_{i=k+1}^{j-1}f_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})$

$+2f_jf_k(B_t-B_{t_j})(B_{t_{k+1}}-B_s)$.

结合条件期望性质分析完成证明.

(3) 由(2)知 M_t 为正态分布的线性组合，故 M_t 服从正态分布

又 $E[M_t]=0$.

$E[M_t^2]=E[E[M_t^2\mid I_0]]=E[\int_0^t e^{2rs}ds]=\int_0^t e^{2rs}ds=\frac{1}{2r}(e^{2rt}-1)$.

$\Rightarrow M_t\sim N(0,\frac{1}{2r}(e^{2rt}-1))$.

(4) 要证 W_t 为标准B.M. 则needs证 · $W_0=0$ a.s. · 独立增量, · 平稳增量 $\sim N$ · 轨道连续.

由 $M_t\sim N(0,\frac{1}{2r}(e^{2rt}-1))$ 可知. 取 $T(t)=\frac{1}{2r}\ln(2rt+1)$ 即可有 $W_t=M_{T(t)}\sim N(0,t)$.

· $T(0)=\frac{1}{2r}\ln(2r0+1)=0 \Rightarrow W_0=M_{T(0)}=M_0=0$.

· $\forall\ 0\le t_1<t_2<t_3<t_4$, $\exists\ \tau_i=\frac{1}{2r}\ln(2rt_i+1)$; $i=1,2,3,4$.

由 $M_{t_2}-M_{t_1}$ 与 $M_{t_4}-M_{t_3}$ 独立可知, $W_{\tau_2}-W_{\tau_1}$ 与 $W_{\tau_4}-W_{\tau_3}$ 独立,

即 W_t 具有独立增量.

· $\forall\ \tau_1<\tau_2$. $\exists\ t_1, t_2$. 有 $\tau_1=T(t_1)$, $\tau_2=T(t_2)$.

有 $W_{\tau_1}-W_{\tau_2}=M_{T(t_1)}-M_{T(t_2)}\sim N(0,T(t_2)-T(t_1))$ 即 $W_{\tau_1}-W_{\tau_2}\sim N(0,\tau_2-\tau_1)$

即 W_t 具有平稳增量, 且分布为正态分布

· 由 M_t 连续 及 $T(t)$ 连续. 知 W_t 连续,

综上, $W_t=M_{T(t)}$ 为标准B.M. $(T(t)=\cdots)$

(5) 同(1)类似可证.

2.（20分）设 f,g,q,p 为有界连续函数，$v(t,x)$ 为下述初值问题的有界解：

$$v_t(t,x)=\frac{1}{2}v_{xx}(t,x)+q(x)v_x(t,x)+p(x)v(t,x)+g(x),t>0,x\in R,$$

$$v(0,x)=f(x),x\in R。$$

求 $v(t,x)$ 的 Feynman-Kac 表示式。

猜测 $v(t,x)=E\left[f(x+Z_t)e^{\int_0^t p(x+Z_s)ds}+\int_0^t g(x+Z_r)e^{\int_0^r p(x+Z_u)du}dr\right]$

证：不妨设 $dZ_t=q(Z_t)dt+dB_t$，$Z_0=0$. B_t为标准B.M.

定义：$M_s=v(t-s,x+Z_s)e^{\int_0^s p(x+Z_u)du}+\int_0^s g(x+Z_u)e^{\int_0^u p(x+Z_r)dr}du=I_1\cdot I_2+I_3$

则 $dI_1=dv(t-s,Z_s)$

$$=-v_t(t-s,x+Z_s)ds+v_x(t-s,x+Z_s)\overset{q(Z_s)ds+dB_s}{\overset{\shortparallel}{dZ_s}}+\frac{1}{2}v_{xx}(t-s,x+Z_s)d\langle Z\rangle_s$$

$$=\left[-v_t(t-s,x+Z_s)+q(Z_s)v_x(t-s,x+Z_s)+\frac{1}{2}v_{xx}(t-s,Z_s)\right]ds+v_x(t-s,x+Z_s)dB_s.$$

$dI_2=de^{\int_0^s p(x+Z_u)du}=I_2\cdot p(x+Z_s)ds.$

$dI_3=d\int_0^s g(x+Z_u)e^{\int_0^u p(x+Z_r)dr}du=g(x+Z_s)e^{\int_0^s p(x+Z_u)du}ds.$

$=g(x+Z_s)\cdot I_2ds.$

则 $dM_s=dI_1I_2=I_1dI_2+I_2dI_1+d\langle I_1,I_2\rangle+dI_3$

$$=v(t-s,x+Z_s)e^{\int_0^s p(x+Z_u)du}\cdot p(x+Z_s)ds+g(x+Z_s)I_2ds$$

$$+e^{\int_0^s p(x+Z_u)du}\left\{\left[-v_t(t-s,x+Z_s)+q(Z_s)v_x(t-s,x+Z_s)+\frac{1}{2}v_{xx}(t-s,x+Z_s)\right]ds+v_x(t-s,x+Z_s)dB_s\right\}$$

$$=I_2\Big[\underbrace{v(t-s,x+Z_s)p(x+Z_s)-v_t(t-s,x+Z_s)+q(Z_s)v_x(t-s,x+Z_s)+\frac{1}{2}v_{xx}(t-s,x+Z_s)+g(x+Z_s)}_{=0}\Big]ds$$

$$+I_2\cdot v_x(t-s,x+Z_s)dB_s$$

$=I_2\cdot v_x(t-s,x+Z_s)dB_s$ $\Rightarrow\{M_s,0\le s\le t\}$为局部鞅.

由 $g.q.p.v$ 的有界性有：$\sup\limits_{0\le s\le t}|M_s|\le\|v\|_\infty\exp\{t\cdot\|p\|_\infty\}+t\cdot\|g\|_\infty\exp\{t\|p\|_\infty\}<\infty$

$\Rightarrow\{M_s,0\le s\le t\}$为一个鞅.

$\Rightarrow E[M_0] = E[M_t]$.

而 $E[M_0] = v(t, x)$

$$E[M_t] = E\left[f(x+Z_t)e^{\int_0^t p(x+Z_u)du} + \int_0^t g(x+Z_r)e^{\int_0^r p(x+Z_u)du}dr\right].$$

$$\Rightarrow v(t,x) = E\left[f(x+Z_t)e^{\int_0^t p(x+Z_u)du} + \int_0^t g(x+Z_r)e^{\int_0^r p(x+Z_u)du}dr\right]. \#$$

3. （20 分）令 $\{B_t, t\geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一维标准布朗运动，$\mu\geq 0$ 为常数，求一与 P 等价的测度 Q 使 $W_t = B_t + \mu t$ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 上的一维标准布朗运动。若令 $M_t = \sup_{0\leq s\leq t} W_s$，求 M_t 的分布.

证：1) 根据 Girsanov 定理有：应选择 $\int_0^t \frac{1}{Z_s} d\langle B, Z\rangle_s = \mu t = \int_0^t \mu ds = \int_0^t \mu d\langle B\rangle_s$

若 Z_t 可以表示为：$Z_t = 1 + \int_0^t H_s dB_s$. 则有 $\langle Z, B\rangle_s = \int_0^t H_s ds$,

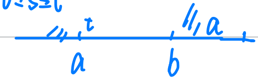
代入有：$\frac{H_s}{Z_s} = \mu$. 故有：$Z_t = 1 + \int_0^t \mu Z_s dB_s$

此方程有唯一解：$Z_s = \exp\{\mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\}$ 、

故对 $\forall A \in \mathcal{F}_t$. 所求概率 $Q(A) = E[I_A Z_t]$.

2) W_t 为 Q 下的标准 B.M. 由反射原理知：下述 $P(\cdot)$ 为 Q 下的概率.

$$P(\sup_{0\leq s\leq t} W_s \geq b, W_t \leq a) = P(\sup_{0\leq s\leq t} W_s \geq b, W_t \geq 2b-a) = P(W_t \geq 2b-a)$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2b-a}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} = 0 - (-\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}} 2)$$

对 a 和 b 取微分有：

$$P(\sup_{0\leq s\leq t} W_s \geq db, W_t \leq da) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} P(\sup_{0\leq s\leq t} W_s \geq b, W_t \leq a)\, da\, db$$

$$= \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(2b-a)^2}\right) da\, db$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(2b-a)^2} (-\frac{1}{2t})(2a-4b)\, da\, db$$

$$= \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}(2b-a)^2} da\, db.$$

其中 a, b 在 R^2 中区域 $\{(b,a): a\leq b, b\geq 0\}$ 取值.

特别地，对 $\forall b>0$.

$$P(\sup_{s\in[0,t]} W_s \geq c) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}} \iint_{\{a\leq b,\, b\leq c\}} (2b-a)e^{-\frac{1}{2t}(2b-a)^2}\,da\,db$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_{-\infty}^{c}\int_{-\infty}^{b} (2b-a)e^{-\frac{1}{2t}(2b-a)^2}\,da\,db$$

$x=2b-a$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_{-\infty}^{c}\int_{+\infty}^{b} xe^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx\,db$$

$$\int_{+\infty}^{b} xe^{-\frac{x^2}{2t}}dx = -t\int_{+\infty}^{b} de^{-\frac{x^2}{2t}} = -te^{-\frac{b^2}{2t}} + t\cdot 0$$

$$= \frac{2t}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{b^2}{2t}}\,db = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{b^2}{2t}}\,db$$

4. （20 分）令 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \Im, P)$ 上的一维标准布朗运动，$\Im = \{F_t, t \geq 0\}$ 是其自然完备化过滤。T 为其自然完备化过滤 $\Im = \{F_t, t \geq 0\}$ 的一个有界停时，令 $W_t = B_{t+T} - B_T, t \geq 0$。证明（1）$\{W_t, t \geq 0\}$ 与 T 独立；（2）$\{W_t, t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动。

证：(1) 由 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是 $(\Omega, \Im, P)$ 上的标准B.M，可知 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是一个鞅、

由 T 为 $\Im = \{F_t, t \geq 0\}$ 上的有界停时，$\{B_{t+T}, t \geq 0\}$ 仍为 $(\Omega, \Im, P)$ 上的B.M.

则由B.M.具有独立增量可知：$\{B_{t+T} - B_T, t \geq 0\}$ 与 T 独立.

(2) 即证：• $W_0 = 0$ a.s.. • W_t 具有独立增量, • W_t 具有平稳增量, 服从N. • 连续.

• $W_0 = B_{0+T} - B_T = 0$.

感觉思路不太对. 得换条路. wait.