7 习题

习题 7.1 (此题不批改). *证明在常 Gauss 曲率曲面上, 测地圆周具有常测地曲率.*

证明. 在测地极坐标 (ρ,θ) 下曲面第一基本形式为

$$\mathbf{I}(d\mathbf{r}) = d\rho^2 + G(\rho,\theta)d\theta^2.$$

由于 Gauss 曲率 K 为常数, 故由正交参数曲面 Gauss 曲率公式有

$$-\frac{1}{2\sqrt{G}}\Big(\frac{G_\rho}{\sqrt{G}}\Big)_\rho = K = \mathrm{const},$$

故而由例 13.1 知 G 仅是 ρ 的函数, 即 $G = G(\rho)$. 若 $\mathbf{c}$ 为测地圆周, i.e. $\rho = \mathrm{const}$, 则 ρ 线与 $\mathbf{c}$ 的夹角 $\theta := \pi/2$. 进而由 Liouville 公式有 $\mathbf{c}$ 的测地曲率

$$\kappa_g = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial \rho} = \frac{G'(\rho)}{2G(\rho)},$$

为常数, 这里是因为在 $\mathbf{c}$ 上 $\rho = \mathrm{const}$. □

习题 7.2. *设参数曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 的第一基本形式为 $\mathbf{I} = du^2 + G(u,v)dv^2$, 且满足 $G(0,v) = 1$, $G_u(0,v) = 0$. 证明:*

$$G(u,v) = 1 - u^2K(0,v) + o(u^2).$$

证明. 首先由正交参数曲面 Gauss 曲率公式有

$$K(0,v) = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\Big(\frac{G_u}{\sqrt{G}}\Big)_u(0,v) = -\frac{G_{uu}(0,v)}{2}.$$

故由洛必达法计算得:

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to 0}\frac{G(u,v) - 1 + u^2K(0,v)}{u^2}\\
=&\lim_{u\to 0}\frac{G_u(u,v) + 2uK(0,v)}{2u}\\
=&\lim_{u\to 0}\frac{G_{uu}(u,v) + 2K(0,v)}{2}\\
=&0,
\end{aligned}$$

因此结论成立. □

习题 7.3. 设 p 为正则曲面 $\mathbf{S}$ 上的一点，记测地圆盘 $B_p(r)$ 的面积为 $A(r)$, $K(p)$ 为 p 点处的 *Gauss* 曲率. 证明

$$K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4}.$$

证明. 在以 p 为心的测地极坐标 (ρ, θ) 下曲面得第一基本形式为

$$\mathbf{I}(d\mathbf{r}) = d\rho^2 + G(\rho, \theta) d\theta^2,$$

测地圆盘 $B_p(r)$ 的面积

$$A(r) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \sqrt{G(\rho, \theta)}\, d\rho.$$

由洛必达法计算得:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} &= \lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \sqrt{G(\rho, \theta)}\, d\rho}{r^4} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \theta)} d\theta}{r^3} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{2\pi - \int_0^{2\pi} (\sqrt{G(r, \theta)})_r d\theta}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{- \int_0^{2\pi} (\sqrt{G(r, \theta)})_{rr} d\theta}{2\pi r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{- \int_0^{2\pi} (\sqrt{G(r, \theta)})_{rrr} d\theta}{2\pi},
\end{aligned}$$

由 Gauss 曲率公式 $K(r, \theta) = -\sqrt{G}_{rr}/\sqrt{G}$, 有

$$K(p) = \lim_{r\to 0} -\left(\frac{\sqrt{G}_{rr}}{\sqrt{G}}\right) = -\lim_{r\to 0} (\sqrt{G})_{rrr}$$

因此

$$\lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} = K(p).$$

□

习题 7.4. 在测地极坐标 (ρ, θ) 下曲面 $\mathbf{S}$ 的第一基本形式为 $\mathbf{I}(d\mathbf{r}) = d\rho^2 + G(\rho, \theta) d\theta^2$. 设 $\mathbf{c}(s) = \mathbf{r}(\rho(s), \theta(s))$ 为测地线，记 $\varphi(s)$ 为 $\mathbf{r}_\rho$ 到 $\mathbf{c}'(s)$ 的夹角. 证明*:*

$$\frac{d\varphi}{ds} + (\sqrt{G})_\rho \frac{d\theta}{ds} = 0.$$

证明. 由 Liouville 公式有

$$\kappa_g = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial \rho}\sin\varphi. \tag{7.1}$$

由于 $\mathbf{c}'(s) = \mathbf{r}_\rho \rho'(s) + \mathbf{r}_\theta \theta'(s)$ 有

$$\sin\varphi = \sqrt{G}\frac{d\theta}{ds},$$

进而

$$\kappa_g = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G}{\partial \rho}\sqrt{G}\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} + (\sqrt{G})_\rho\frac{d\theta}{ds},$$

故而结论成立. □

参考文献

[dC16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. Revised & updated second edition of [MR0394451].