数值逼近

T1. 计算 $f(x) \in C_{[0,1]}$ **上的范数** $||f||_\infty, ||f||_1, ||f||_2$

(1) $f(x) = (x-1)^3$

(2) $f(x) = x^m(1-x)^n$

(1) $\boldsymbol{f(x) = (x-1)^3}$

求导可知：

$$f^{'}(x) = 3(x-1)^2 \geq 0, \quad \forall x \in [0,1]$$

故 $f(x)$ 递增，从而有:

$$\begin{aligned} ||f||_\infty &= \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \\ &= \max\{|f(0)|, |f(1)|\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$||f||_1, ||f||_2$ 可直接积分求得：

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{4}(1-x)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$||f||_2 = (\int_0^1 (f(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^1 (x-1)^6 dx)^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{7}(x-1)^7\Big|_0^1)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

(2) $\boldsymbol{f(x) = x^m(1-x)^n}$

同样求导考察其单调性：

$$f^{'}(x) = mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$$

可知 $f(x)$ 有驻点 $x = \dfrac{m}{m+n}, 0, 1$，从而：

$$\begin{aligned} ||f||_\infty &= \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \\ &= \max\{|f(0)|, |f(\frac{m}{m+n})|, |f(1)|\} \\ &= \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} \end{aligned}$$

关于 $||f||_1, ||f||_2$ 的计算我们首先回顾 Euler 积分相关知识：

$$\Gamma(s) = \int_0^{\cancel{infty}\,\infty} x^{s-1}e^{-x}dx, \quad (s>0)$$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad (p,q>0)$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

利用上述结论，容易计算 $||f||_1, ||f||_2$：

→也可以用分部积分

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = B(m+1,n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

$$||f||_2 = (\int_0^1 (f(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^1 x^{2m}(1-x)^{2n} dx)^{\frac{1}{2}} = (B(2m+1,2n+1))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{(2m)!(2n)!}{(2m+2n+1)!}}$$

T2. 对 $f(x), g(x) \in C^1_{[a,b]}$

(1) $(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$

(2) $(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a)$

问是否构成内积？

(1) $(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx$

注意到，取 $f(x) = 1$，则 $f'(x) \equiv 0$，于是：

$$(f,f) = \int_a^b 0dx = 0$$

这不符合内积性质：$(f,f) = 0$ 当且仅当 $f = 0$. 故此种定义方式不构成内积.

(2) $(f,g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a)$

内积的线性性质容易由积分与导数的线性性质验证，这里不再赘述，我们主要关注第四条性质是否成立，即：

$$(f,f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$$

我们令 $(f,f) = 0$，即：

$$\int_a^b (f'(x))^2 dx + f(a)^2 = 0$$

注意到左式两项皆为非负数，从而：

$$\Longleftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in [a,b] \quad f(a) = 0$$

这意味着：

$$f(x) \equiv f(a) = 0$$

故而第四条性质满足，综上所述，此种定义方式构成内积.

T3. 令 $T_n^*(x) = T_n(2x-1), x \in [0,1]$**，其中** $T_n(x)$ **为** n **次 Chebyshev 多项式；**
试证：$\{T_n^*(x)\}$ **是在** $[0,1]$ **上的带权** $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ **的正交多项式，并求** $T_0^*(x), T_1^*(x), T_2^*(x), T_3^*(x)$

正交性：

考查 $T_n^*(x)$ 与 $T_m^*(x)$ 的带权内积：

$$(T_n^*(x), T_m^*(x)) = \int_0^1 T_n(2x-1)T_m(2x-1)\rho(x)dx$$

利用换元法令 $2x-1=t$，试图将其还原为 Chebyshev 多项式的积分：

$$(T_n^*(x), T_m^*(x)) = \int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{\frac{t+1}{2}-(\frac{t+1}{2})^2}}\frac{1}{2}dt$$

化简得到：

$$(T_n^*(x), T_m^*(x)) = \int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

此即：

$$(T_n^*(x), T_m^*(x)) = (T_n(x), T_m(x))$$

由 Chebyshev 多项式的性质知：

$$(T_n^*(x), T_m^*(x)) = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0; \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases}$$

从而 $\{T_n^*(x)\}$ 是在 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式.

$\boldsymbol{T_0^*(x), T_1^*(x), T_2^*(x), T_3^*(x)}$**：**

首先写出 Chebyshev 多项式的前四项：

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) \\ &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) \\ &= 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

然后以 $2x-1$ 代 x, 即得：

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= 1 \\ T_1^*(x) &= 2x - 1 \\ T_2^*(x) &= 2(2x-1)^2 - 1 \\ &= 8x^2 - 8x + 1 \\ T_3^*(x) &= 4(2x-1)^3 - 3(2x-1) \\ &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1 \end{aligned}$$

T4. 对权函数 $\rho(x)=1+x^2$, 区间 $[-1,1]$, 试求首项系数为 1 的正交多项式 $\phi_n(x), n=0,1,2,3$

我们采用逐个正交化的方法，求得表达式如下：

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= 1 \\
\phi_1(x) &= x-\frac{(x,\phi_0(x))}{(\phi_0(x),\phi_0(x))}\phi_0(x) \\
&= x-\frac{\int_{-1}^{1}x(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx} \\
&= x \\
\phi_2(x) &= x^2-\frac{(x^2,\phi_0(x))}{(\phi_0(x),\phi_0(x))}\phi_0(x)-\frac{(x^2,\phi_1(x))}{(\phi_1(x),\phi_1(x))}\phi_1(x) \\
&= x^2-\frac{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}-\frac{\int_{-1}^{1}x^3(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}x \\
&= x^2-\frac{2}{5} \\
\phi_3(x) &= x^3-\frac{(x^3,\phi_0(x))}{(\phi_0(x),\phi_0(x))}\phi_0(x)-\frac{(x^3,\phi_1(x))}{(\phi_1(x),\phi_1(x))}\phi_1(x)-\frac{(x^3,\phi_2(x))}{(\phi_2(x),\phi_2(x))}\phi_2(x) \\
&= x^3-\frac{\int_{-1}^{1}x^3(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}-\frac{\int_{-1}^{1}x^4(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}x-\frac{\int_{-1}^{1}x^3(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{2}{5})^2(1+x^2)dx}(x^2-\frac{2}{5}) \\
&= x^3-0-\frac{\frac{2}{5}+\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}+\frac{2}{5}}x-0 \\
&= x^3-\frac{9}{14}x
\end{aligned}
$$

T5. 用 $T_3(x)$ 的零点做插值点，求 $f(x)=e^x$ 在区间 $[-1,1]$ 上的二次插值多项式，并估计其最大误差界

首先我们知道 $T_n(x)$ 的零点为 $x=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k=1,2,\dots n.$

因此本题所取插值节点为 $x_0=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_1=\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad x_2=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

对应函数值 $y_0=e^{\frac{\sqrt{3}}{2}},\quad y_1=1,\quad y_2=e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$

使用 Lagrange 插值的基函数:

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{2}{3}x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x \\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=-\frac{4}{3}x^2+1 \\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{2}{3}x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x
\end{aligned}
$$

得到插值多项式：

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x) \\
&= \frac{2}{3}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}-2)x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})x+1
\end{aligned}
$$

根据 Chebychev 零点插值的误差公式，估计最大误差界：

$$\max_{-1\le x\le 1}|L_2(x)-f(x)| \le \frac{1}{2^2(2+1)!}||f^{(n+1)}||_\infty$$
$$= \frac{e}{24}$$

T6. 设 $f(x) = x^2+3x+2, x\in[0,1]$, 求 $\Phi = span\{1,x\}$ 中的最佳平方逼近多项式. 若取 $\Phi = span\{1,x,x^2\}$, 最佳平方逼近多项式是什么？

1): $\Phi = span\{1,x\}$

我们设在该搜寻空间下的最佳平方逼近多项式为 $s(x) = a_0 + a_1x$, 则可以列出方程组如下：

$$\begin{bmatrix}(1,1) & (1,x)\\ (x,1) & (x,x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1,f)\\ (x,f)\end{bmatrix}$$

此即：

$$\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23/6\\ 9/4\end{bmatrix}$$

解之得: $a_0 = \frac{11}{6}$, $\quad a_1 = 4$, 即最佳平方逼近多项式为 $s(x) = \frac{11}{6}+4x$

2):$\Phi = span\{1,x,x^2\}$

同样地，我们设最佳平方逼近多项式为 $s(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$, 可以列出方程组：

$$\begin{bmatrix}(1,1) & (1,x) & (1,x^2)\\ (x,1) & (x,x) & (x,x^2)\\ (x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1,f)\\ (x,f)\\ (x^2,f)\end{bmatrix}$$

解之得：$a_0 = 2$, $\quad a_1 = 3$, $\quad a_2 = 1$, 从而最佳平方逼近多项式为 $s(x) = x^2+3x+2$, 即该多项式本身.

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0000	32.3000	49.0000	73.3000	97.8000

T7. 已知实验数据如下：用最小二乘法求形如 $y = a+bx^2$ 的经验公式

首先假设目标函数完全符合所有待拟合的数据，则有：

$$\begin{bmatrix}1 & 19^2\\ 1 & 25^2\\ 1 & 31^2\\ 1 & 38^2\\ 1 & 44^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19\\ 32.3\\ 49\\ 73.3\\ 97.8\end{bmatrix}$$

然后求出该超定方程的最小二乘解：

$$\begin{bmatrix}1 & 19^2\\1 & 25^2\\1 & 31^2\\1 & 38^2\\1 & 44^2\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}1 & 19^2\\1 & 25^2\\1 & 31^2\\1 & 38^2\\1 & 44^2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 19^2\\1 & 25^2\\1 & 31^2\\1 & 38^2\\1 & 44^2\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}19\\32.3\\49\\73.3\\97.8\end{bmatrix}$$

解之 (用 Matlab) 得 $a = 0.9725$, $b = 0.05$,
从而所求经验公式为 $y = 0.9725 + 0.05x^2$

补充题：给定 $f(x) = e^{\sin x}$, 求函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的最佳平方逼近三角多项式

$$f(x) \approx S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{4} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

编写 Matlab 代码如下：

```
f1 = @(x,l) exp(sin(x)).*cos(l*x);
f2 = @(x,l) exp(sin(x)).*sin(l*x);
f0 = @(x) exp(sin(x));
a0=integral(f0,0,2*pi)/(2*pi);
for i=1:4
    a(i)=integral(@(x)f1(x,i),0,2*pi)/(2*pi);
end
for i=1:4
    b(i)=integral(@(x)f2(x,i),0,2*pi)/(2*pi);
end
```

①

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos kx\,dx$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx$ $k=1,\cdots,4$

②

求得系数如下表所示 $(i = 0, 1, \ldots 4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos x \cdots \cos 4x & \sin x \cdots \sin 4x \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_4\\b_1\\\vdots\\b_4\end{pmatrix} = f$$

a_i	1.2611	0	−0.1357	0	0.0027
b_i	−	0.5652	0	−0.0222	0

×2

文件

MATLAB Drive > Published > trinterp.m

```
clear
n=10;N=2*n+1;       %采用三角插值计算
h=2*pi/N;           %f(x)=exp(sin(x))   x\in[0,2*pi]
j=(0:N).';x=j*h;
k=(1:4).';
A=[ones(N+1,1),cos(x*k.'),sin(x*k.')];
f=exp(sin(x));
A\f
```

```
>> trinterp

ans =

    1.2661
   -0.0000
   -0.2715
   -0.0000
    0.0055
    1.1303
   -0.0000
   -0.0443
    0.0000
```