习题参考

张亚楠*

1 第1章：绪论

略

2 第2章：插值法基本原理P48

1. 当 $x = 1, -1, 2$时，$f(x) = 0, -3, 4,$求f(x) 的二阶段多项式

1) 用单项式基地

2) Lagrange基地

3) Newton基地

解答：(1) 设

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

由插值条件得到：

$$a_0 + a_1 * 1 + a_2 * 1 = 0$$
$$a_0 + a_1 * (-1) + a_2 * 1 = -3$$
$$a_0 + a_1 * 2 + a_2 * 4 = 4$$

得到：

$$a_0 = -2.3333 \quad a_1 = 1.5000 \quad a_2 = 0.8333$$

$$L(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j * l_j(x) = -3 * \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 4 * \frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)}$$

Newton型

$$N(x) = 1.5 * (x-1) + 0.8333 * (x-1)(x+1)$$

Table 1: default

x	f(x)	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
1.0000	0	1.5000	0.8333
-1.0000	-3.0000	2.3333	
2.0000	4.0000	0	

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.510826	- 0.356675	-0.223144

;'

2. 给出f(x) = ln(x)的数值表 用线性插值和二次插值计算ln(0.54)的近似值

线性：-0.6202

二次：-0.6153 (左三点) -0.6168（右三点）

精确值：0.6162

5. 设$f(x) \in C^2[a,b]$, 且$f(a) = f(b) = 0$, 证明：

$$\max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

解：根据插值余项

$$|f(x) - [f(a) * l_0(x) + f(b) * l_1(x)]| = |\frac{1}{2} \cdot f''(\xi)(x-a)(x-b)|$$

6. 在[-4,4]上给出$f(x) = e^x$ 的等距节点函数表，若用二次插值给出 e^x的近似值，要求误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长 h 应该取多少?

解答：

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= |\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_{j-1})(x - x_j)(x - x_{j+1})| \\ &< \frac{e^4}{6}|h * h * (2h)| \quad \text{or} \quad \frac{e^4}{6}h^3 \\ &< 10^{-6} \end{aligned}$$

记

$$h < 10^{-2} * \sqrt[3]{\frac{6}{e^4}}$$

8. $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$, 求

$$f[2^0, 2^1, ..., 2^7]$$

*ynzhang@suda.edu.cn 苏州大学数学科学学院

和

$$f[2^0,2^1,...,2^8]$$

解答：利用

$$f[x_0,x_1,...,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

得到：

$$f[2^0,2^1,...,2^7]=1,\quad f[2^0,2^1,...,2^8]=0$$

14. 求次数小于等于3的多项式$P(x)$，满足：

$$P(0)=0,\quad P^{'}(0)=1,\quad P(1)=1,\quad P^{'}(1)=2$$

解答：构造差商表，注意0, 1均是重节点

x	f(x)	$f[x_j,x_{j+1}]$	$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}]$	$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3}]$
0	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
0	0	1	1	
1	1	2		
1	1			

$$\begin{aligned}P(x)&=0+1*(x-0)+0*(x-0)^2+1*(x-0)^2(x-1)\\&=x+x^2(x-1)=x-x^2+x^3\end{aligned}$$

14. 求次数小于等于4的多项式$P(x)$，满足：

$$P(0)=P^{'}(0)=0,\quad P(1)=P^{'}(1)=1,\quad P(2)=1$$

解答：构造差商表，注意0, 1均是重节点

x	f(x)	$f[x_j,x_{j+1}]$	$f[x_j,...,x_{j+2}]$	$f[x_j,...,x_{j+3}]$	$f[x_j,...,x_{j+4}]$
0	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{1/4}$
0	0	1	0	-1/2	
1	1	1	-1		
1	1	0			
2	1				

$$P(x)=x^2-x^2(x-1)+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2$$