

2021 级金融工程专业《金融随机分析》期末试卷（闭）

姓名_____学号_____成绩_____

1. （40）令 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的一维标准布朗运动， $B_0 = 0$ 。
（1）令 $T = \inf\{t: B_t \notin [a, b], a < 0 < b\}$ ，求 B_T 的分布；（2）对 $r > 0$ ，定义 $M_t = \int_0^t e^{rs} dB_s$ ， $t \geq 0$ ，求 $\{M_t\}$ 的二次变差过程 $\langle M \rangle_t, t \geq 0$ ；（3）求 M_t 的分布；（4）求时间变换 $\tau = \tau(t)$ ，使 $W_t = M_{\tau(t)}$ 为标准布朗运动；（5）令 $T_0 = \inf\{t: M_t \notin [a, b], a < 0 < b\}$ ，求 M_T 的分布。
2. （20 分）设 f, g, q, p 为有界连续函数， $v(t, x)$ 为下述初值问题的有界解：
$$v_t(t, x) = \frac{1}{2} v_{xx}(t, x) + q(x) v_x(t, x) + p(x) v(t, x) + g(x), t > 0, x \in R,$$
$$v(0, x) = f(x), x \in R.$$
求 $v(t, x)$ 的 Feynman-Kac 表示式。
3. （20 分）令 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的一维标准布朗运动， $\mu \geq 0$ 为常数，求一与 P 等价的测度 Q 使 $W_t = B_t + \mu t$ 为 $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$ 上的一维标准布朗运动。若令 $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$ ，求 M_t 的分布。
4. （20 分）令 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的一维标准布朗运动， $\mathfrak{F} = \{F_t, t \geq 0\}$ 是其自然完备化过滤。 T 为其自然完备化过滤 $\mathfrak{F} = \{F_t, t \geq 0\}$ 的一个有界停时，令 $W_t = B_{t+T} - B_T, t \geq 0$ 。证明（1） $\{W_t, t \geq 0\}$ 与 T 独立；（2） $\{W_t, t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动。