模论练习题　　(2021年4月)

1. 设M 是R-模, N_1, N_2为M的子模, 试证明: $I = \{a \in R \colon ax \in N_2, \forall x \in N_1\}$ 是R 的理想.

   提示: 先证I非空, 然后验证I是R 的理想.

2. 一个R-模M称为单模, 如果M只有$\{0\}$和M两个子模. 试证明: 如果φ是单模M到单模M'的同态, 那么$\varphi = 0$或者φ为一个模同构.

   提示: 核$\mathrm{Ker}\varphi$ 和像集合$\mathrm{Im}\ \varphi$ 分别是M和M'的子模。

3. 设M是R-模, 定义M的零化子$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in R \colon ax = 0, \forall x \in M\}$, 试证明$\mathrm{Ann}(M)$是$R$的理想, 并求出$\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Z}_3 \bigoplus \mathbb{Z}_6 \bigoplus \mathbb{Z}_8$ 的零化子.

   提示：$Ann(M) = \cap_{g \in M} Ann(g)$, 考虑$\mathbb{Z}_3 \bigoplus \mathbb{Z}_6 \bigoplus \mathbb{Z}_8$生成元$(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$的零化子.

4. 设M 是R-模, $M_1, M_2, \cdots, M_s$为M的子模, 且$M = M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus \cdots \bigoplus M_s$, 又$N$是$M$的子模, 且$N = N_1 \bigoplus N_2 \bigoplus \cdots \bigoplus N_s$, 其中$N_i \subset M_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$. 试证明: $M/N \simeq M_1/N_1 \bigoplus M_2/N_2 \bigoplus \cdots \bigoplus M_s/N_s$.

   提示：考虑M到$M_1/N_1 \bigoplus M_2/N_2 \bigoplus \cdots \bigoplus M_s/N_s$的模同态$\varphi(m_1 + \cdots + m_s) = (m_1 + N_1, \cdots, m_s + N_s)$, $m_i \in M_i$, 运用同态基本定理.

5. 设M, N 是R-模, $f : M \to N$, $g : N \to M$ 为模同态, 且满足$fg(y) = y, \forall y \in N$. 试证明$M = \ker f \bigoplus \mathrm{im}\ g$.

   提示：由$fg = id_M$知g是单射, f满射. 先证$\ker f \cap \mathrm{im}\ g = \{0\}$, 后证$x - gf(x) \in \ker f$.

6. 一个模如果不能分解成两个非零子模的直和, 则称为不可分解模. 试证明整数环$\mathbb{Z}$作为$\mathbb{Z}$-模是不可分解模, 而$\mathbb{Z}_m$-模, $m > 1$作为作为$\mathbb{Z}$-模是不可分解模当且仅当m是某个素数的幂次.

   提示：第一问用反证法, 利用结论：主理想整环$\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Z}$是秩为1的自由模，其子模为秩不超过1的自由模。第二问必要性用反证法, 假设$m = st$, $(s, t) = 1$, 则$\mathbb{Z}_m = s\mathbb{Z}_m \bigoplus t\mathbb{Z}_m$, 两个真子模直和；充分性运用结构定理, $\mathbb{Z}_{p^t}$是一个准素循环模, 不能写成两个非零子模的直和.

7. 设R是整环, 证明R作为R-模是不可分解模.

   提示：反证法

8. 设A为主理想整环D上的n阶方阵, 证明A与A^T等价.

   提示：运用理想整环D上矩阵的不变因子由行列式因子所唯一确定.

9. 设R是主理想整环, A是R上的$m\times n$ 矩阵, 定义R^n 到R^m的模同态φ为(R^n, R^m中元素写成列向量)$\varphi(\alpha)=A\alpha$, $\alpha\in R^n$. 试证明下面的条件互相等价：

   (1) φ是满同态；

   (2) A的所有m阶子式生成的理想等于R；

   (3) 存在矩阵$B\in R^{n\times m}$使得$AB=I_m$.

   提示：运用A的标准型, 在R^n, R^m分别找一组基, 使得基下矩阵为标准型矩阵.

10. 设R是交换环(含单位元), I为R的理想, 证明: 若R/I是自由R模, 则$I=\{0\}$.

    提示：反证法, 取$x\in I\setminus\{0\}$, $x(1+I)=I$.

11. 设φ是自由$\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Z}^n$到$\mathbb{Z}^m$的同态, A为φ在$\mathbb{Z}^n$和$\mathbb{Z}^m$的标准基下的矩阵, 试证明：

    (1) φ是单同态当且仅当A的秩为n;

    (2) φ是满同态当且仅当A的m阶行列式因子为1.

12. 试有理数域$\mathbb{Q}$作为$\mathbb{Z}$-模不是有限生成模.

    提示：反证法, 假设$\mathbb{Q}=(\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n})$, 则$(\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n})$中的数是分母为$lcm(b_1,\cdots,b_n)$的有理数, $\mathrm{lcm}(b_1,\cdots,b_n)$ 表示$b_1,\cdots,b_n$最小公倍数.

13. 已知$\mathbb{Z}^4$的子模N有生成元组$h_1=(1,2,1,0)$, $h_2=(2,1,-1,1)$, $h_3=(0,0,1,1)$. 试求出N的秩, 并找出$\mathbb{Z}^4$的一组基e_1,e_2,e_3,e_4及N的一组基$f_1,f_2,\cdots,f_r$使得$f_i=d_ie_i$, $i=1,2,\cdots,r$, 且有$d_i|d_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,r-1$.

14. 设$R=\mathbb{Z}[x]$, 试构造一个有限生成的R-模M, 使得M不能写成有限个循环子模的直和.

    提示：$M=(2,x)$.

15. 设$D=\mathbb{Z}[i]$为高斯整环, K是由$f_1=(1,3,6)$, $f_2=(2+3i,-3i,12-18i)$, $f_3=(2-3i,6+9i,-18i)$生成的D-模D^3的子模, 求出D-模D^3/K的不变因子和初等因子.

    提示: 运用smith标准型, 找出K的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$D^3$的基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$使得, $\alpha_j=d_j\beta_j$, D^3/K的生成元$\beta_1+K,\beta_2+K,\beta_3+K$得到$D^3/K$的循环子模分解, 从而获得$D^3/K$的不变因子和初等因子. 本题中可以做到$\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=6\beta_2$, $\alpha_3=-96+24i\beta_3$. 于是$D^3/K=D(\beta_2+K)\bigoplus D(\beta_3+K)$, $\mathrm{Ann}(\beta_2+K)=(6)$, $\mathrm{Ann}(\beta_3+K)=(-96+24i)$. 于是不变因子是6, $-96+24i$. 由不变因子求出初等因子.

16. 设D为主理想整环, M是D上有限生成的挠模, 对$a \in D$, 令$M(a) = \{x \in M : ax = 0\}$. 证明：

(1) $M(a)$是M的子模, 且若a可逆, 则$M(a) = \{0\}$;

(2) 若$a|b$, 则$M(a) \subset M(b)$;

(3) 设$a, b \in D$, 则$M(a) \cap M(b) = M((a,b))$, 其中$(a,b)$为$a,b$的一个最大公因子;

(4) 若a,b互素, 则$M(ab) = M(a) \bigoplus M(b)$.

提示: 存在$u, v \in D$使得$ua + vb = (a,b)$.

17. 设p素数, $n > 0$, G为p^n阶交换群, 证明存在G中一组生成元$g_1, g_2, \cdots, g_s$使得$ord(g_i) = \max\limits_{g \in G} ord(g)$.

提示: 运用结构定理, $\mathbb{Z}$-模G分解为准素循环子模的直和, $G = \mathbb{Z}z_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathbb{Z}z_s$, $\mathrm{Ann}(z_1) = (p^{e_1})$, $\cdots$, $\mathrm{Ann}(z_s) = (p^{e_s})$, $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_s$. 然后求出$\max\limits_{g \in G} ord(g)$和寻找生成元组.