苏州大学 实变函数 课程试卷 （ A ）卷 共 4 页

考试形式 闭 卷 2011 年 1 月

院系____________年级____________专业____________

学号____________姓名____________成绩____________

一、 判断题（每题 3 分，共 30 分,用✓, × 标在每题结尾）

1、 若$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$是集 X 的一个集族，则$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^C = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^C$

2、 外测度具有可数可加性。

3、 定义在任意集合上的连续函数是可测函数。

4、 若在集合E上，f_n几乎处处收敛于f，则对于任给$\varepsilon > o$，有E的闭子集F使得$m(E\setminus F) < \varepsilon$，且$f_n$在$F$上一致收敛于$f$

5、 有限区间$[a,b]$上的 Riemann 可积函数一定 Lebesgue 可积。

6、 可测函数列的极限（如果存在）一定是可测函数

7、 两个有界变差函数的乘积是有界变差函数。

8、 绝对连续函数不一定几乎处处可导。

9、 f是在可测集E上的可测函数，则f在E上 Lebesgue 可积等价于$|f|$在E上 Lebesgue 可积

10、 存在$[a,b]$上的严格单调递增连续函数f满足$f'(x)=0$在$[a,b]$几乎处处成立。

二、 叙述 Lebesgue 控制收敛定理和 Fubini 定理（12 分）

三、　什么是依侧度收敛，它和几乎处处收敛有何关系？（**12** 分）

四、　定义在$[0,1]$上的 **Riemann** 函数$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{当}x\text{是有理数且x=}\frac{p}{q}\\ 0 & \text{当}x\text{是无理数}\end{cases}$是否是 **Riemann** 可积的？若可积说明理由并计算此积分，若不可积，给出证明。（**10** 分）

五、　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\sin^3\sqrt{nx}\,dx$ （**10** 分）

六、　证明：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在可测集 E 上几乎处处相等，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同时为可测函数或不可测函数（**10** 分）

七、　若 $f(x)$ 在 R 上可微，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都在 R 上可积，证明 $\int\limits_R f'(x)dm = 0$（**10** 分）

八、　$\{f_n(x)\}$ 为非负函数列，证明若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm = 0$，则在 E 上 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 **0**。此时 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 **0** 吗？为什么？（**6** 分）