数学模型与数学软件

第 9 次作业

1907402030

熊　雄*

2022 年 5 月 16 日

*mrxiongx@foxmail.com　苏州大学数学科学学院本科生

Problem 1

(Page 220 Ex.4.)
某公司将 3 种不同含硫量的液体原料 (分别记为甲、乙、丙) 混合生产两种产品 (分别记为 A, B). 按照生产工艺的要求, 原料甲、乙必须首先导入混合池中混合, 混合后的液体再分别与原料丙混合生产 A, B. 已知原料甲、乙、丙的含硫量分别是 3%, 1%, 2%, 进货价格分别为 6 千元/t, 16 千元/t, 10 千元/t; 产品 A, B 的含硫量分别不能超过 2.5%, 1.5%, 售价分别为 9 千元/t, 15 千元/t. 根据市场信息, 原料甲、乙、丙的供应量都不能超过 500t; 产品 A, B 的最大市场需求量分别为 100t, 200t.

a) 应如何安排生产?

b) 如果产品 A 的最大市场需求量增长为 600t, 应如何安排生产?

c) 如果乙的进货价格下降为 13 千元/t, 应如何安排生产? 分别对 (1)、(2) 两种情况进行讨论.

Solution.

a) **对于问题 a)**

- **模型建立**

  设生产时原料甲、乙分别使用 x_1t 和 x_2t, 混合甲和乙后分别取混和后的液体 x_3t 和 x_4t, 再分别加入原料丙 x_5t 和 x_6t 生产 A 产品 (x_3+x_5)t 和 B 产品 (x_4+x_6)t. 假设总利润为 T 千元. 我们假设液体混合期间无损耗, 则由质量守恒定律知:

  $$x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

  由题目条件我们易得产品 A 和产品 B 的含硫量分别为

  $$s_1 = (x_1 \cdot 3\% + x_2 \cdot 1\%) \cdot \frac{x_3}{x_3 + x_4} + x_5 \cdot 2\%$$

  和

  $$s_2 = (x_1 \cdot 3\% + x_2 \cdot 1\%) \cdot \frac{x_4}{x_3 + x_4} + x_6 \cdot 2\%.$$

  则需满足的不等式条件如下:

  $$\begin{cases} x_1 \le 500, \\ x_2 \le 500, \\ x_5 + x_6 \le 500, \\ x_3 + x_5 \le 100, \\ x_4 + x_6 \le 200, \\ s_1 \le 2.5\% \cdot (x_3 + x_5), \\ s_2 \le 1.5\% \cdot (x_4 + x_6), \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3,4,5,6. \end{cases} \tag{1}$$

且总利润为

$$T = 9\left(x_3 + x_5\right) + 15\left(x_4 + x_6\right) - \left[6x_1 + 16x_2 + 10\left(x_5 + x_6\right)\right],$$

化简, 即得

$$T = -6x_1 - 16x_2 + 9x_3 + 15x_4 - x_5 + 5x_6.$$

- **代码实现**

  编写 lingo 程序如下:

```
max = -6 * x1 - 16 * x2 + 9 * x3 + 15 * x4 - x5 + 5 * x6;
x1 + x2 = x3 + x4;
x1 <= 500;
x2 <= 500;
x5 + x6 <= 500;
x3 + x5 <= 100;
x4 + x6 <= 200;
(x1 * 0.03 + x2 * 0.01) * x3 / (x3+x4) + x5 * 0.02 <= 0.025*(x3+x5);
(x1 * 0.03 + x2 * 0.01) * x4 / (x3+x4) + x6 * 0.02 <= 0.015*(x4+x6);
```

  运行后得到输出:

```
 Local optimal solution found.
   Objective value:                              400.0005

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        0.000000            2.000000
                             X2        99.99992            0.000000
                             X3        0.000000            7.000000
                             X4        99.99992            0.000000
                             X5        0.000000            1.000000
                             X6        100.0001            0.000000
```

- **结果分析**

  由运行结果知, 生产时原料甲、乙、丙分别使用 0, 100t, 100t 时, 可以在满足要求的同时总利润达到总利润最大, 最大利润为 40 万元.

b) **对于问题 b)**

- **模型建立**

将 a) 中需满足的不等式条件(1)修改为:

$$\begin{cases} x_1 \le 500, \\ x_2 \le 500, \\ x_5 + x_6 \le 500, \\ x_3 + x_5 \le 600, \\ x_4 + x_6 \le 200, \\ s_1 \le 2.5\% \cdot (x_3 + x_5), \\ s_2 \le 1.5\% \cdot (x_4 + x_6), \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3,4,5,6. \end{cases}$$

- **代码实现**

  编写 lingo 程序如下:

```
max = -6 * x1 - 16 * x2 + 9 * x3 + 15 * x4 - x5 + 5 * x6;
x1 + x2 = x3 + x4;
x1 <= 500;
x2 <= 500;
x5 + x6 <= 500;
x3 + x5 <= 600;
x4 + x6 <= 200;
(x1 * 0.03 + x2 * 0.01) * x3 / (x3+x4) + x5 * 0.02 <= 0.025*(x3+x5);
(x1 * 0.03 + x2 * 0.01) * x4 / (x3+x4) + x6 * 0.02 <= 0.015*(x4+x6);
```

  运行后得到输出:

```
 Local optimal solution found.
  Objective value:                              400.0005

                     Variable           Value        Reduced Cost
                           X1        0.000000            2.000000
                           X2        99.99992            0.000000
                           X3        0.000000            7.000000
                           X4        99.99992            0.000000
                           X5        0.000000            1.000000
                           X6        100.0001            0.000000
```

- **结果分析**

  故生产时原料甲、乙、丙分别使用 0, 100t, 100t 时, 可以在满足要求的同时总利润达到总利润最大, 最大利润为 40 万元.

c) **对于问题 c)**

- **模型建立**

乙的进货价格下降为 13 千元/t 时的总利润为

$$T = 9\left(x_3 + x_5\right) + 15\left(x_4 + x_6\right) - \left[6x_1 + 13x_2 + 10\left(x_5 + x_6\right)\right],$$

化简, 即

$$T = -6x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 15x_4 - x_5 + 5x_6.$$

- **代码实现**

  编写 lingo 程序如下:

```
1 max = -6 * x1 - 13 * x2 + 9 * x3 + 15 * x4 - x5 + 5 * x6;
2 x1 + x2 = x3 + x4;
3 x1 <= 500;
4 x2 <= 500;
5 x5 + x6 <= 500;
6 x3 + x5 <= 600;
7 x4 + x6 <= 200;
8 (x1 * 0.03 + x2 * 0.01) * x3 / (x3+x4) + x5 * 0.02 <= 0.025*(x3+x5);
9 (x1 * 0.03 + x2 * 0.01) * x4 / (x3+x4) + x6 * 0.02 <= 0.015*(x4+x6);
```

  - 当产品 A 的最大市场需求量为 100t 时，即代码中第 6 行为 x3 + x5 <= 100 时运行得到:

```
Local optimal solution found.
Objective value:                              749.9997

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        49.99996            0.000000
                             X2        150.0000            0.000000
                             X3        0.000000            2.250001
                             X4        200.0000            0.000000
                             X5        0.000000            1.000000
                             X6        0.000000           0.5000000
```

  - 当产品 A 的最大市场需求量为 600t 时，即代码中第 6 行为 x3 + x5 <= 600 时运行得到:

```
Local optimal solution found.
Objective value:                              749.9997

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             X1        49.99996            0.000000
                             X2        150.0000            0.000000
                             X3        0.000000            2.250001
                             X4        200.0000            0.000000
                             X5        0.000000            1.000000
                             X6        0.000000           0.5000000
```

- **结果分析**

  综上所述, 当产品 A 的最大市场需求量为 100t 和 600t 时, 原料甲、乙、丙分别使用 50t, 150t, 0 时, 可以在满足要求的同时总利润达到总利润最大, 最大利润为 75 万元. ■