模论练习题　　(2021年4月)

1. 设M 是R-模, N_1, N_2为M的子模, 试证明: $I = \{a \in R\colon ax \in N_2, \forall x \in N_1\}$ 是R 的理想.
2. 一个R-模M称为单模, 如果M只有$\{0\}$和M两个子模. 试证明: 如果φ是单模M到单模M'的同态, 那么$\varphi = 0$或者φ为一个模同构.
3. 设M是R-模, 定义M的零化子$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in R\colon ax = 0, \forall x \in M\}$, 试证明$\mathrm{Ann}(M)$是$R$的理想, 并求出$\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Z}_3 \bigoplus \mathbb{Z}_6 \bigoplus \mathbb{Z}_8$ 的零化子.
4. 设M 是R-模, $M_1, M_2, \cdots, M_s$为M的子模, 且$M = M_1 \bigoplus M_2 \bigoplus \cdots \bigoplus M_s$, 又$N$是$M$的子模, 且$N = N_1 \bigoplus N_2 \bigoplus \cdots \bigoplus N_s$, 其中$N_i \subset M_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$. 试证明: $M/N \simeq M_1/N_1 \bigoplus M_2/N_2 \bigoplus \cdots \bigoplus M_s/N_s$.
5. 设M, N 是R-模, $f : M \to N$, $g : N \to M$ 为模同态, 且满足$fg(y) = y, \forall y \in N$. 试证明$M = \ker f \bigoplus \mathrm{im}\ g$.
6. 一个模如果不能分解成两个非零子模的直和, 则称为不可分解模. 试证明整数环$\mathbb{Z}$作为$\mathbb{Z}$-模是不可分解模, 而$\mathbb{Z}_m$-模, $m > 1$作为作为$\mathbb{Z}$-模是不可分解模当且仅当m是某个素数的幂次.
7. 设R是整环, 证明R作为R-模是不可分解模.
8. 设A为主理想整环D上的n阶方阵, 证明A与A^T等价.
9. 设R是交换环(含单位元), A是R上的$m \times n$ 矩阵, 定义R^n 到R^m的模同态φ为(R^n, R^m中元素写成列向量)$\varphi(\alpha) = A\alpha$, $\alpha \in R^n$. 试证明下面的条件互相等价：

   (1) φ是满同态；

   (2) A的所有m阶子式生成的理想等于R；

   (3) 存在矩阵$B \in R^{n\times m}$使得$AB = I_m$.
10. 设R是交换环(含单位元), I为R的理想, 证明: 若R/I是自由R模, 则$I = \{0\}$.
11. 设φ是自由$\mathbb{Z}$-模$\mathbb{Z}^n$到$\mathbb{Z}^m$的同态, A为φ在$\mathbb{Z}^n$和$\mathbb{Z}^m$的标准基下的矩阵, 试证明：

    (1) φ是单同态当且仅当A的秩为n;

    (2) φ是满同态当且仅当A的m阶行列式因子为1.
12. 试有理数域$\mathbb{Q}$作为$\mathbb{Z}$-模不是有限生成模.
13. 已知$\mathbb{Z}^4$的子模N有生成元组$h_1 = (1, 2, 1, 0)$, $h_2 = (2, 1, -1, 1)$, $h_3 = (0, 0, 1, 1)$. 试求出N的秩, 并找出$\mathbb{Z}^4$的一组基e_1, e_2, e_3, e_4及N的一组基$f_1, f_2, \cdots, f_r$使得$f_i = d_i e_i$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 且有$d_i | d_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, r-1$.

14. 设$R=\mathbb{Z}[x]$, 试构造一个有限生成的R-模M, 使得M不能写成有限个循环子模的直和.

15. 设$D=\mathbb{Z}[i]$为高斯整环, K是由$f_1=(1,3,6)$, $f_2=(2+3i,-3i,12-18i)$, $f_3=(2-3i,6+9i,-18i)$生成的D^3的子模, 求出D/K的不变因子和初等因子.

16. 设D为主理想整环, M是D上有限生成的挠模, 对$a\in D$, 令$M(a)=\{x\in M\colon ax=0\}$. 证明：

    (1) $M(a)$是M的子模, 且若a可逆, 则$M(a)=\{0\}$;

    (2) 若$a|b$, 则$M(a)\subset M(b)$;

    (3) 设$a,b\in D$, 则$M(a)\cap M(b)=M((a,b))$, 其中(a,b)为a,b的一个最大公因子;

    (4) 若a,b互素, 则$M(ab)=M(a)\bigoplus M(b)$.

17. 设p素数, $n>0, G$为p^n阶交换群, 证明存在G中一组生成元$g_1,g_2,\cdots,g_s$使得$ord(g_i)=\max\limits_{g\in G} ord(g)$.