5 习题

习题 5.1 (该题不批改)**.** 设参数曲面 $\mathbf{S}$ 的参数表示为 $\mathbf{r}(u^1,u^2)$. 证明*:* 切向量场 $X=\frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{E}}$ 沿着曲线 $\mathbf{c}=\mathbf{r}(u^1(t),u^2(t))$ 平行的充要条件为

$$\Gamma^2_{1i}\frac{du^i}{dt}=0.$$

证明. 直接计算有

$$\begin{aligned}
D_{\dot{\mathbf{c}}}X=&\Big(\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}}\Big)\mathbf{r}_1+\frac{1}{\sqrt{E}}D_{\dot{\mathbf{c}}}\mathbf{r}_1\\
=&-\frac{1}{2}\frac{1}{E^{3/2}}\Big(\frac{d}{dt}\langle\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1\rangle\Big)\mathbf{r}_1+\frac{1}{E^{1/2}}D_{\frac{du^i}{dt}\mathbf{r}_i}\mathbf{r}_1\\
=&-\frac{1}{E^{3/2}}\Big(\langle\mathbf{r}_{1i},\mathbf{r}_1\rangle\frac{du^i}{dt}\Big)\mathbf{r}_1+\frac{1}{E^{1/2}}\frac{du^i}{dt}D_{\mathbf{r}_i}\mathbf{r}_1\\
=&-\frac{1}{E^{3/2}}\Gamma^j_{1i}g_{1j}\frac{du^i}{dt}\mathbf{r}_1+\frac{1}{E^{1/2}}\frac{du^i}{dt}\Gamma^j_{i1}\mathbf{r}_j\\
=&\frac{1}{E^{1/2}}\Big(-\frac{\Gamma^j_{1i}g_{1j}}{E}+\Gamma^1_{i1}\Big)\frac{du^i}{dt}\mathbf{r}_1+\frac{1}{E^{1/2}}\frac{du^i}{dt}\Gamma^2_{i1}\mathbf{r}_2\\
=&-\frac{1}{E^{3/2}}g_{12}\Gamma^2_{1i}\frac{du^i}{dt}\mathbf{r}_1+\frac{1}{E^{1/2}}\frac{du^i}{dt}\Gamma^2_{i1}\mathbf{r}_2,
\end{aligned}$$

故而 $D_{\dot{\mathbf{c}}}X=0\iff\Gamma^2_{1i}\frac{du^i}{dt}=0.$ □

习题 5.2. 设参数化单位球面 $\mathbf{S}$ 为

$$\mathbf{r}(u,v)=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u),\quad v\in(0,2\pi),\quad u\in(-\pi/2,\pi/2).$$

(1) 证明*:* 以弧长为参数的曲线 $\mathbf{c}(s)=\mathbf{r}(u(s),v(s))$ 的测地曲率公式为

$$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\sin u\frac{dv}{ds},$$

其中 θ 表示曲线与经线 *(*即 u 线*)* 的夹角.
(2) 求 $\mathbf{S}$ 上纬圆周曲线 *(*即 $u=\mathrm{const}$*)* 的测地曲率.

证明. (1) 直接计算有

$$E=1,\quad F=0,\quad \text{and}\quad G=\cos^2u$$

所以由 Liouville 公式有

$$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\tan u\sin\theta$$

又由

$$\dot{\mathbf{c}}(s)=\mathbf{r}_u\frac{du}{ds}+\mathbf{r}_v\frac{dv}{ds},\quad \dot{\mathbf{c}}(s)=\cos\theta\mathbf{r}_u+\frac{\sin\theta}{\cos u}\mathbf{r}_v$$

有 $dv/ds=\sin\theta/\cos u$, 进而

$$\kappa_g=\frac{d\theta}{ds}-\sin u\frac{dv}{ds}.$$

(2) 当 $\mathbf{c}(s)$ 是纬圆周曲线时, 即 $u=u_0$, 此时 $\mathbf{c}(s)$ 与 u 线夹角 $\theta=\pi/2$, 因此

$$\kappa_g=-\sin u_0\frac{dv}{ds}=-\sin u_0\frac{\sin(\pi/2)}{\cos u_0}=-\tan u_0.$$

□

习题 5.3 (Darboux 标架)**.** 设 $\mathbf{S}$ 是定向正则曲面, $\mathbf{c}(s)$ 是 $\mathbf{S}$ 上以弧长为参数的曲线. 记 $\{\mathbf{c}(s):\mathbf{e}_1(s),\mathbf{e}_2(s),\mathbf{e}_3(s)\}$ 为 $\mathbf{c}(s)$ 上正交活动标架满足 $\mathbf{e}_1(s)=\dot{\mathbf{c}}(s)$, $\mathbf{e}_3(s)=\mathbf{n}(s)$ 以及 $\mathbf{e}_2(s)=\mathbf{e}_3(s)\wedge\mathbf{e}_1(s)$, 其中 $\mathbf{n}(s)$ 为曲面 $\mathbf{S}$ 在 $\mathbf{c}(s)$ 处的单位法向. 证明

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}\mathbf{e}_1=\kappa_g\mathbf{e}_1+\kappa_n\mathbf{e}_3,\\ \frac{d}{ds}\mathbf{e}_2=-\kappa_g\mathbf{e}_1+\alpha\mathbf{e}_3,\\ \frac{d}{ds}\mathbf{e}_3=-\kappa_n\mathbf{e}_1-\alpha\mathbf{e}_2,\end{cases}$$

其中 $\kappa_g(s)$ 和 $\kappa_n(s)$ 分别为 $\mathbf{c}(s)$ 的测地曲率和法曲率, $\alpha(s)=-\langle\frac{d}{ds}\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2\rangle$.

证明. 由 $\{\mathbf{e}_1(s),\mathbf{e}_2(s),\mathbf{e}_3(s)\}$ 为 $\mathbf{c}(s)$ 正交标架, 故直接计算有

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbf{e}_1=&\langle\frac{d}{ds}\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2+\langle\frac{d}{ds}\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3\\ =&\langle\frac{D}{ds}\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2+\kappa_n\mathbf{e}_3\\ =&\kappa_g\mathbf{e}_1+\kappa_n\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbf{e}_2=&\langle\frac{d}{ds}\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1+\langle\frac{d}{ds}\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3\\ =&-\langle\mathbf{e}_2,\frac{d}{ds}\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1-\langle\mathbf{e}_2,\frac{d}{ds}\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3\\ =&-\kappa_g\mathbf{e}_1+\alpha\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbf{e}_3 =&\langle \frac{d}{ds}\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\rangle \mathbf{e}_1 + \langle \frac{d}{ds}\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\rangle \mathbf{e}_2 \\ =& -\langle \mathbf{e}_3, \frac{d}{ds}\mathbf{e}_1\rangle \mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{e}_2 \\ =& -\kappa_n \mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

□

习题 5.4. 设 $\mathbf{c}(s)$ $(s \in (a, b))$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中以弧长为参数的曲线且曲率不为零, 记 $\mathbf{b}(s)$ 为 $\mathbf{c}(s)$ 的从法向量. 考虑参数曲面 $\mathbf{S}$ 如下:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{c}(u) + v\mathbf{b}(u), \quad a < u < b, \quad -\varepsilon < v < \varepsilon.$$

证明 $\mathbf{c}(s)$ 是 $\mathbf{S}$ 上的一条测地线.

证明. 在曲面 $\mathbf{S}$ 上直接计算有

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{c}'(u) + v\mathbf{b}'(u), \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{b}(u),$$

以及曲线 $\mathbf{c}$ 的曲率向量

$$\mathbf{c}''(u) = \kappa \mathbf{n}_{\mathbf{c}}(u),$$

这里 $\mathbf{n}_{\mathbf{c}}(u)$ 为曲线 $\mathbf{c}(s)$ 的法向量. 故在曲线 $\mathbf{c}(s)$ (i.e. $v = 0$) 上有

$$\langle \mathbf{c}'', \mathbf{r}_u\rangle = \langle \kappa \mathbf{n}_{\mathbf{c}}(u), \mathbf{c}'(u)\rangle = 0, \quad \text{and} \quad \langle \mathbf{c}'', \mathbf{r}_v\rangle = 0.$$

因此

$$\frac{D\dot{\mathbf{c}}}{du} = 0,$$

即 $\mathbf{c}(s)$ 为测地线. □

6 习题

习题 6.1. 设环面 $\mathbf{T}^2$ 的参数化

$$\mathbf{r}(u, v) = \Big((4 + \cos u)\cos v, (4 + \cos u)\sin v, \sin u\Big)$$

其中 $u \in (0, 2\pi), v \in (0, 2\pi)$.

1. 计算 $\int_{\mathbf{T}^2} K\,dA$.

2. 求 $\mathbf{T}^2$ 的 *Euler-Poincaré* 示性数.

证明. (1) 直接计算可得 $\mathbf{T}^2$ 的第一基本形式为

$$\mathbf{I} = du^2 + (4+\cos u)^2 dv^2,$$

第二基本形式为

$$\mathbf{II} = du^2 + (4+\cos u)\cos u dv^2$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{T}^2} K\,dA &= \int_{\mathbf{T}^2} \frac{LN-M^2}{EG-F^2}\,dA \\
&= \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} \frac{LN-M^2}{EG-F^2}\sqrt{EG-F^2}\,dv \\
&= \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} \cos u\,dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) 由 Gauss-Bonnet 定理

$$0 = \int_{\mathbf{T}^2} K\,dA = 2\pi\chi(\mathbf{T}^2),$$

有 $\mathbf{T}^2$ 的 Euler-Poincaré 示性数

$$\chi(\mathbf{T}^2) = 0.$$

□

参考文献

[dC16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. Revised & updated second edition of [MR0394451].