无穷级数（一） 10 年 5 月 6 日下午

1. 证明 $\sum \frac{1}{n}$ 发散.

   (i) 用柯西收敛准则.

   (ii) 对某个趋于无穷的子列 n_k, 证明 $S_{n_k} \to +\infty$.

   (iii) 用微分中值定理作出 $\frac{1}{k}$ 的适当的下界.

   (iv) 用积分作出 $\frac{1}{k}$ 的适当的下界.

2. 证明 $\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛, $p > 1$.

3. 设正数列 $\{a_n\}$ 单调减, $\sum a_n$ 收敛, 证明 $na_n \to 0$.

4. 设 $\sum a_n$ 为正项收敛级数, 试确定 $\sum a_n^{\frac{n}{n+1}}$ 是否收敛.

苏州大学数学科学学院

5. 设 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_n < a_{2n} + a_{2n+1}$(对 $n \geq 1$), 判别 $\sum a_n$ 是否收敛.

6. 设 $\sum a_n$ 是正项收敛级数, 求证 $\sum\limits_{\substack{n \leq N \\ a_n > \frac{1}{n}}} 1 = o(N)$.

7. 设 $\{a_n\}$ 是单调增且有界的正数列, 证明 $\sum (1 - \frac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛.

8. 试求出正项收敛级数 $\sum a_n$ 满足的充分必要条件, 使得存在正数数列 $\{b_n\}$, 具有性质:

$$\sum b_n \text{收敛，且} \sum \frac{a_n}{b_n} \text{收敛.}$$

9. 设 A 是十进制表示中不含数码 0 的正整数的集合, 求证

   (1) $\sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n}$ 收敛.

   (2) 确定所有 α, 使 $\sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛.

10. 设 $\sum a_n$ 为正项发散级数, 判别下面级数的敛散性:

(1) $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$;

(2) $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$;

(3) $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$;

(4) $\sum \frac{a_n}{1+{a_n}^2}$.

苏州大学数学科学学院