2019 数学分析选讲期末

——叶心致

20190704

1. 设$f\in C\left(\mathbb{R}\right)$为周期函数且无最小正周期，证明：$f\equiv C$ 。

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_1+\cdots+\dfrac{1}{n}s_n}{\ln n}$。

3. 设$\left\{x_n\right\}$为正有界数列，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$。

4. 举出一个正项级数的例子，满足$\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$收敛，而且有无穷多项满足$a_n\geqslant\dfrac{1}{n}$。

5. a_n是正数列，对任意的满足$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$的正数列$b_n$，成立$\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b_n$收敛，证明：$\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$收敛。

6. 是一个微风变换的题，我记不得了。

7. 设$f\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$，$n=1$，$2$，$\cdots$,

（1） 证明：$f^{(n)}\left(0\right)=0$，$n=0$，1，2，$\cdots$

（2）　若对$\forall x$，$\forall n$，$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$，则$f \equiv 0$；

（3）　若（2）的条件不满足，则$f \equiv 0$不一定成立，请说明理由。

附注：题目中条件可以改写为：f在某一趋于0的数列$\left\{x_n\right\}$上取值为0

8. 设$P(x,y)$，$Q(x,y)$在全平面有连续偏导数，而且对任意的点(x_0, y_0)为中心，任意r为半径的上半圆C：$x = x_0 + r\cos\theta$，$y = y_0 + r\sin\theta (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$，恒有

$$\int_C P dx + Q dy = 0；$$

证明：$P \equiv 0$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$。

9.已知$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$，计算$\int_0^{+\infty} e^{-\left(x - \frac{t}{x}\right)^2} dx (t > 0)$。