数学分析 I　第二次测验试卷　共 4 页

（考试形式　　闭卷　　2019 年 12 月 1 日）

座　位　号

姓　名________________　学　号________________　专　业________________

题号	一	二	三	四	五	六	总成绩

一、（本题 30 分）概念题

(1) 根据定义叙述 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 以及 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq A$，并按定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2+1)}{x} = 0$.

解. ① $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, 当 $|x| > M$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

② $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall M > 0$, $\exists x_0$, $|x_0| > M$, 有 $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $M = \frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x| > M$ 时, $|f(x) - 0| = \left|\frac{\sin(x^2+1)}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} < \frac{1}{M} = \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x^2+1)}{x} = 0.$

(2) 判断函数 $y = [2x] - 2[x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的间断点并说明其类型.

解: 对 $x_0 = n$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to n^+}(2n - 2n) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-}(2n-1 - 2(n-1)) = 1$.

$\Rightarrow y = f(x)$ 在 $x = n$ 处是跳跃式间断点.

对 $x_0 = n + \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+}(2n+1 - 2n) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-}(2n - 2n) = 0$.

$\Rightarrow y = f(x)$ 在 $x = n + \frac{1}{2}$ 处是跳跃间断点.

~~f在其它点明显连续~~

(3) 叙述函数 f 在区间 I 上不一致连续的定义，并证明 $f(x) = x^3$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续.

解: $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$, $\exists x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta$, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$.

对 $f(x) = x^3$, 令 $\varepsilon_0 = 1$, 对 $\forall \delta > 0$, 令 $N = [\frac{1}{\delta}] + 1 > \frac{1}{\delta}$

$x_1 = N$, $x_2 = N + \frac{1}{N}$, 则 $|x_1 - x_2| = \frac{1}{N} < \delta$,

$\Rightarrow |x_1^3 - x_2^3| = 3(N + \frac{1}{N}) > 3N > 1 = \varepsilon_0$.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续.

例1: $\sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不一致连续

$x^2 = 2n\pi$，$y^2 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x^2 = 0$，$\sin y^2 = 1$

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，$\forall \delta > 0$, $\exists x = \sqrt{2n\pi}$, $y = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$,

$|y - x| = \left|\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi}} < \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}} < \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} < \frac{2}{\sqrt{n}} < \delta$

$\Rightarrow \frac{4}{n} < \delta^2 \Rightarrow n > \frac{4}{\delta^2}$

$\therefore$ 取 $n_1 = [\frac{4}{\delta^2}] + 1$

例2. $f(x) = x\sin x$ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续

$x = 2n\pi$

$y = 2n\pi + \frac{\pi}{n}$

$|x - y| = \frac{\pi}{n} < \delta \Rightarrow n > \frac{\pi}{\delta}$

$|f(x) - f(y)| = \left|(2n\pi + \frac{\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})\right| \geq 2n\pi \sin\frac{\pi}{n} = 2\pi^2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} > \pi^2$

$\therefore \varepsilon_0 = \pi^2$

二、(本题 18 分) 求下列各函数形如 ax^α 的等价无穷小量或无穷大量.

(1) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, $(x \to 0^+)$

解: ~~由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\frac{1}{x^{\frac14}}} = \lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac14}$~~

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{-\frac14}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{\frac14}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = \frac{1}{1} = 1.$

故 $f(x)$ 与 $x^{-\frac14}$ 为等价无穷大量.

(2) $\sqrt{1+x^2}-x, (x \to +\infty)$

解: 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\frac12\cdot x^{-1}} = 2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} = 2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1} = 1.$

故 $f(x)$ 与 $\frac12 x^{-1}$ 为等价无穷小量.

三、(本题 32 分) 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\cos x}{x}$

解: 由于 $\frac{x+1}{x} \leq \frac{x-\cos x}{x} \leq \frac{x-1}{x}$.

而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\cos x}{x} = 1.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x(e^{2x}-1)}$

解: 当 $x\to0$ 时, 有 $\ln(1+x^2) \sim x^2$

$e^{2x}-1 \sim 2x$

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x(e^{2x}-1)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x\cdot 2x} = \frac12.$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\frac1n)^{n^2}$

解: 由于 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}$

而 $\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}} = e,$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\frac12\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = -\frac12$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac12}$

由归结原则 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\frac1n)^{n^2} = e^{-\frac12}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

当 $x\to0$ 时, $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$,

$\Rightarrow \sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x} = \frac{\cos^3 x-\cos^2 x}{(\sqrt{\cos x})^5+(\sqrt{\cos x})^4(\sqrt[3]{\cos x})+\cdots+(\sqrt[3]{\cos x})^6}$

$\sim \frac{\cos^2 x(\cos x-1)}{6} \sim \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{6} \sim -\frac{x^2}{12}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{12}}{x^2} = -\frac{1}{12}.$

四、(本题 10 分)

(1) 讨论多项式方程 $p(x)=2x^3-3x^2-3x+1=0$ 实根的个数并说明理由;

(2) 证明 $p(x)=2x^{2018}-3x^2-3x-1=0$ 至少有两个实根.

(1) 在复数域上 n 次多项式有 n 个复根, 最多有 n 个实根.

故 $p(x)=0$ 最多有 3 个实根.

由于 $p(-2)=-19$, $p(0)=1$, 故有 $-2<x_1<0$, 使 $p(x_1)=0$.

由 $p(1)=-3$, 故有 $0<x_2<1$, 使 $p(x_2)=0$

由 $p(3)=19$, 故有 $1<x_3<3$, 使 $p(x_3)=0$.

所以 x_1, x_2, x_3 是 $p(x)=0$ 的三个互不相同实根.

从而 $p(x)=0$ 只有三个实根.

(2) 证: 由于 $p(0)=-1<0$,

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{2018}\left(2-\frac{3}{x^{2016}}-\frac{3}{x^{2017}}-\frac{1}{x^{2018}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2x^{2018} = +\infty.$$

故 $\exists\, x_1>0$, 使 $p(x_1)>0$.

从而 $\exists\, 0<\xi_1<x_1$, 使 $p(\xi_1)=0$.

由于 $$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} x^{2018}\left(2-\frac{3}{x^{2016}}-\frac{3}{x^{2017}}-\frac{1}{x^{2018}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x^{2018} = +\infty.$$

故 $\exists\, x_2<0$, 使 $p(x_2)>0$.

故 $\exists\, x_2<\xi_2<0$, 使 $p(\xi_2)=0$.

$\Rightarrow \xi_1, \xi_2$ 是 $p(x)=0$ 的两个互不相同实根.

$\Rightarrow p(x)=0$ 至少有两个实根.

P84 例12

五、(本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续;

(2) 设 a,b 是给定常数, 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否一致连续? 如果是请给出证明, 如果否请举出反例说明.

(1) 证: $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, 当 $|x|>M$ 时, $|f(x)-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

$f(x)$ 在 $[-M-1, M+1]$ 上连续从而一致连续. 故 $\exists\delta_1>0$, 对 $\forall x_1,x_2\in[-M-1,M+1]$, $|x_1-x_2|<\delta_1$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 令 $\delta=\min(\delta_1,\frac{1}{2})$.

现在对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, $|x_1-x_2|<\delta$, 若 $|x_1|\le M+1$, $|x_2|\le M+1$,

则有 $x_1,x_2\in[-M-1,M+1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta\le\delta_1 \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

若 $|x_1|>M+1$ 或 $|x_2|>M+1$, 不妨设 $|x_1|>M+1$, 则由 $|x_1-x_2|<\delta\le\frac{1}{2}$,

可知 $|x_2|>M \Rightarrow x_1,x_2\in(M,+\infty)$ 或 $(-\infty,-M)$.

$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-1|+|f(x_2)-1|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

(2). 是. 令 $g(x)=f(x)-ax-b+1$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=1$. 由(1)可得 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. 令 $h(x)=ax+b-1$, 不妨设 $a\neq0$, 对 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$, 则有 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, $|x_1-x_2|<\delta$ 时, $|h(x_1)-h(x_2)|=|a||x_1-x_2|<|a|\cdot\delta=\varepsilon$.

$\Rightarrow h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. $\Rightarrow f(x)=g(x)+h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

六、(附加题, 本题 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处达到最小值, 如果 $f(0)<0$, 证明: $F(x)=f(f(x))$ 至少在两点达到最小值.

证: 当 $f(\xi)=0$ 时, $F(\xi)=f(f(\xi))=f(0)$ 才能取到最小值.

由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 由于 $f(0)<0$, 故存在 $0<x_1<+\infty$, 使 $f(x_1)=0$.

同理由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 可知存在 $-\infty<x_2<0$, 使 $f(x_2)=0$.

故 $F(x)$ 至少在 $x=x_1, x_2$ 两点处达到最小值.