无穷级数（三）

1. 证明: 若一个在数集 A 上有界的函数列一致收敛, 则极限函数在 A 上也有界.

2. 设 $\{f_n\}$ 是在 $\mathbf{R}$ 上一致连续的函数列, 若这序列在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛, 则极限函数在 $\mathbf{R}$ 上一致连续.

3. 设 $\{p_n\}$ 是多项式函数列, 若它在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛, 则极限函数也是一个多项式.

4. 设 $\{f_n\}$ 是一个在 [a,b] 上单调的函数列, 且逐点收敛于 [a,b] 上的一个连续函数, 证明 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

5. 设 A 上的一个函数列 $\{f_n\}$ 满足

(1)$f_n(x) \geq 0$ 对所有 $x \in A$ 及 $n \geq 1$;

(2)$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ 对所有 $x \in A$ 及 $n \geq 1$

(3)$\sup\limits_{x\in A} f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$.

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}f_n(x)$ 在 A 上一致收敛.

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$ 在 A 上逐点收敛, 若

$$\sup_{x\in A}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)) < +\infty,$$

且 $\sum c_n^2$ 收敛, 则 $\sum c_n f_n(x)$ 在 A 上一致收敛.

7. 设 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上单调. 证明: 若 $\sum f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

8. 设 $\sum \dfrac{1}{|\, a_n \,|}$ 收敛. 则对不含 $a_n (n \geq 1)$ 的任一有界集 A, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x - a_n}$ 在 A 上绝对且一致收敛.