Chapter 4 数值积分

P135 习题

Ex.5. 推导下列三种矩形求积公式:

(1) $$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

(2) $$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

(3). $$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$$

Solve. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微

(1) 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 处作 Taylor 展开，得

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)\cdot(x-a),\quad \xi\in(a,x)$$

两边积分得:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx$$

由于 $x-a$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\,\eta\in(a,b)$, s.t.

$$\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx=f'(\eta)\cdot\int_a^b(x-a)dx=\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

从而

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2,\quad \eta\in(a,b)$$

(2). 将 $f(x)$ 在 $x=b$ 处作 Taylor 展开，得

$$f(x)=f(b)+f'(\xi)(x-b),\quad \xi\in(x,b)$$

两边积分得:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)+\int_a^b f'(\xi)(x-b)dx$$

由于 $x-b$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则 $\exists\,\eta\in(a,b)$, s.t.

$$\int_a^b f'(\xi)(x-b)\,dx = f'(\eta)\cdot\int_a^b (x-b)\,dx$$

$$= -\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

从而

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2.$$

(3). 假设 $f(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 二阶可微，在 $x=\frac{a+b}{2}$ 作 Taylor 展开可得：

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$, \xi\in(a,b).$$

由于 $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 0$. 在两边积分并利用积分中值定理,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$\overset{\text{对称}}{=} (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$\overset{\text{积分中值}}{=} (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\eta)\cdot\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}f''(\eta)\cdot(b-a)^3,$$

$$\eta\in(a,b).$$

i.e.,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}f''(\eta)\cdot(b-a)^3,\ \eta\in(a,b).$$

#

Ex.6. 若用复合梯形公式计算积分 $I=\int_0^1 e^x dx$，问区间 $[0,1]$ 应分多少等分才能使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$？若改用复合 Simpson 公式，同样的精度需要多少等分？

Solve. 设区间 $[0,1]$ n 等分，即

$$x_j = jh,\quad h=\frac{1}{n},\quad j=0,1,\cdots,n$$

则 $T_n = \frac{1+e}{2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} e^{x_j}$ 为复合梯形公式，

其余项
$$|R_n(f)| = |I(f) - T_n(f)|$$
$$= \left|\frac{b-a}{12}\cdot h^2\cdot f''(\eta)\right|$$
$$= \frac{h^2}{12}e^{\eta},\quad \eta\in(0,1)$$
$$\leq \frac{1}{12n^2}e.$$

令 $\frac{e}{12n^2} \leq \frac{1}{2}\times10^{-5}$，可解得 $n \geq 212.85$，

因此取 $n=213$ 等分时，截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$.

若用复合 Simpson 公式，设区间 $[0,1]$ $2n$ 等分，则 $h=\frac{1}{2n}$

$$|R_S(f)| = \left|-\frac{b-a}{180}\cdot f^{(4)}(\eta)\cdot h^4\right| = \frac{h^4}{180}e^{\eta} \leq \frac{e}{180\cdot(2n)^4} \leq \frac{1}{2}\times10^{-5}$$

解得：$n \geq \frac{\sqrt[4]{e}\cdot 5}{\sqrt{3}} \geq 3.71$

从而 $2n \geq 7.42$

即达到同样的精度需要 8 等分. #

Ex.7. 若 $f''(x)>0$，证明：用梯形公式计算积分

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

所得的结果比准确值大，并说明几何意义.

Pf. 插值型求积公式的余项为

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b P_n(x)dx$$

$$=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\,dx$$

$n=1$ 时对应梯形公式，i.e.,

$$I(f)-T(f)=\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\,dx$$

$$=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$$=-\frac{f''(\eta)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{6},\quad a<\eta<b.$$

$$<0.$$

从而 $I(f)=\int_a^b f(x)dx=T(f)+\big(I(f)-T(f)\big)$

$$<T(f)$$

即：用梯形公式得到的结果比准确值大.

从几何上看，$f''(x)>0$ 意味 $f(x)$ 为凸函数，曲线位于连接 $f(a)$、$f(b)$ 的弦的下方，此时梯形的面积大于曲边梯形的面积.

#

Ex.10. 构造 Gauss 型积分公式 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

Solve. 权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

令 $w(x) = (x-x_0)(x-x_1) = x^2 + bx + c$.

则 $w(x)$ 与 1, x 带权正交, 也即

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 1 \cdot w(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2+bx+c}{\sqrt{x}} dx = 0 \quad \cdots (1)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x \cdot w(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x}(x^2+bx+c) dx = 0 \quad \cdots (2)$$

(1) 式通过计算得: $\frac{2}{5} + \frac{2}{3}b + 2c = 0$

(2) 式通过计算得: $\frac{2}{7} + \frac{2}{5}b + \frac{2}{3}c = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{6}{7} \\ c = \frac{3}{35} \end{cases}$$

从而 $w(x) = x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35} = (x-x_0)(x-x_1)$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{3}{7} - \frac{2}{35}\sqrt{30}, \quad x_1 = \frac{3}{7} + \frac{2}{35}\sqrt{30}$$

利用该公式有 3 次代数精度, 对 $f(x) = 1, x$ 恒精确成立

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1 + \frac{\sqrt{30}}{18} \\ A_1 = 1 - \frac{\sqrt{30}}{18} \end{cases}$$

故综上，我们有 $x_0 = \frac{3}{7} - \frac{2}{35}\sqrt{30}$，$x_1 = \frac{3}{7} + \frac{2}{35}\sqrt{30}$

$A_0 = 1 + \frac{\sqrt{30}}{18}$，$A_1 = 1 - \frac{\sqrt{30}}{18}$.

从而积分公式为：

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx \approx \left(1 + \frac{\sqrt{30}}{18}\right) f\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{35}\sqrt{30}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{30}}{18}\right) f\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{35}\sqrt{30}\right).$$

#

附加题：给定数值积分公式 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{4} A_k f(x_k)$.

其中 $x_k = \cos(\frac{k\pi}{4})$

(1). 试确定求积系数 A_k，使求积公式有尽可能高的代数精度，并指明其代数精度的次数.

(2). 当系数 A_k 确定之后，试推导所得数值积分公式的积分余项，并给出合适的误差界.

(Hint：第(2)小题推导的积分余项中应当含有被积函数 $f(x)$ 的高阶导数)

Solve.

(1). $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_4 = -1$.

则先令 $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4$，得：

$$(*)\quad \begin{cases} 2 = \sum_{k=0}^{4} A_k = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 & \cdots ① \\ 0 = \sum_{k=0}^{4} A_k x_k = A_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 - A_4 & \cdots ② \\ \frac{2}{3} = \sum_{k=0}^{4} A_k x_k^2 = A_0 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_3 + A_4 & \cdots ③ \\ 0 = \sum_{k=0}^{4} A_k x_k^3 = A_0 + \frac{\sqrt{2}}{4} A_1 - \frac{\sqrt{2}}{4} A_3 - A_4 & \cdots ④ \\ \frac{2}{5} = \sum_{k=0}^{4} A_k x_k^4 = A_0 + \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{4} A_3 + A_4 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

由于方程组的系数矩阵行列式为 Vandermonde 行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_0^4 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le 4} (x_i - x_j) \neq 0$$

故(*)方程组有唯一解.

由②-④得：$A_1=A_3$，从而 $A_0=A_4$

从而(*)简化为

$$\begin{cases} 2A_0+2A_1+A_2=2 \\ 2A_0+A_1=\frac{2}{3} \\ 2A_0+\frac{1}{2}A_1=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0=A_4=\frac{1}{15} \\ A_1=A_3=\frac{8}{15} \\ A_2=\frac{4}{5} \end{cases}$$

且 $A_i,\ i=0,\cdots,4$ 为(*)的唯一解.

令 $f(x)=x^5$，则 $0=\sum_{k=0}^{4}A_k x_k^5$ 显然成立.

令 $f(x)=x^6$，则

$$A_0+\frac{1}{8}A_1+\frac{1}{8}A_3+A_4$$
$$=\frac{2}{15}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}$$
$$=\frac{4}{15}\neq\frac{2}{7}$$

故综上，求积系数为 $A_0=A_4=\frac{1}{15}$，$A_1=A_3=\frac{8}{15}$，$A_2=\frac{4}{5}$.

代数精度为 5 次.

(2) $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\approx\frac{1}{15}f(1)+\frac{8}{15}f(\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{4}{5}f(0)+\frac{8}{15}f(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{1}{15}f(-1)$

该积分公式有 $m=5$ 次代数精度，则积分余项满足下式

$$R[f]=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\sum_{k=0}^{4}A_k f(x_k)=\int_{-1}^{1}K_5(t)f^{(6)}(t)\,dt$$

其中

$$K_5(t)=\frac{1}{5!}\cdot\left[\int_{-1}^{1}(x-t)_+^5\,dx-\sum_{k=0}^{4}A_k(x_k-t)_+^5\right]$$
$$=\frac{1}{120}\left[\int_{t}^{1}(x-t)^5\,dx-\sum_{k=0}^{4}A_k(x_k-t)_+^5\right]$$
$$=\frac{1}{120}\left[\frac{1}{6}(1-t)^6-\sum_{k=0}^{3}A_k(x_k-t)_+^5\right],\quad -1\le t\le 1$$

于是

$$R[f] = \int_{-1}^{1} K_5(t)\cdot f^{(6)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{120}\left[\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{6}(1-t)^6 - \sum_{k=0}^{3} A_k (x_k - t)_+^5\right) f^{(6)}(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{120}\Big[\int_{-1}^{1}\frac{1}{6}(1-t)^6 f^{(6)}(t)\,dt - \int_{-1}^{1}\frac{1}{15}(1-t)^5 f^{(6)}(t)\,dt -$$

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{8}{15}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-t\right)^5 f^{(6)}(t)\,dt + \int_{-1}^{0}\frac{4}{5}t\cdot f^{(6)}(t)\,dt -$$

$$\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{8}{15}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-t\right)\cdot f^{(6)}(t)\,dt\Big]$$

$$|R[f]| = \left|\int_{-1}^{1} K_5(t)\, f^{(6)}(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |K_5(t)|\cdot|f^{(6)}(t)|\,dt$$

$$\leq f^{(6)}(\xi)\cdot\int_{-1}^{1}|K_5(t)|\,dt$$

#

Remark. x_k 为带权 $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的第二类 Chebyshev 多项式的插值节点，但题中只对 $f(x)$ 积分，没有 $\rho(x)$，故尝试后未果，改用了其他方法.