数学模型与数学软件

第 2 次作业

1907402030
熊雄

授课老师：陈中文

2022 年 3 月 12 日

Problem 1

(Page 40 Ex.3)

利用课本表 2.5 给出的 1790-2000 年的美国实际人口资料建立下列模型:

a) 分段的指数增长模型, 将时间分为若干段, 分别确定增长率 r.

b) 阻滞增长模型. 换一种方法确定固有增长率 r 和最大容量 x_m.

Solution.

a) **分段的指数增长模型.**

记美国 t 时刻的人口数目为 $x(t)$, 我们将 $x(t)$ 视为连续可微函数. 记初始时刻 $(t = 0)$ 的美国人口数目为 x_0. 假设人口增长率为 $r > 0$, 即单位时间内 $x(t)$ 的增量等于 r 乘以 $x(t)$. 考虑到 t 到 $t + \Delta t$ 时间内人口的增量, 显然有

$$x(t + \Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t.$$

令 $\Delta t \to 0$, 得到 $x(t)$ 的微分方程, 求解之, 可得美国 t 时刻的人口数目为

$$x(t) = x_0 e^{rt}.$$

为了估计 x_0 和 r, 我们将上式取对数, 得

$$y = rt + a, \quad y = \ln x, \quad a = \ln x_0.$$

以表 2.5 中的数据为例, 我们将时间分为 2 段, 分别拟合确定每一段增长率 r.

- **1790 年-1890 年**

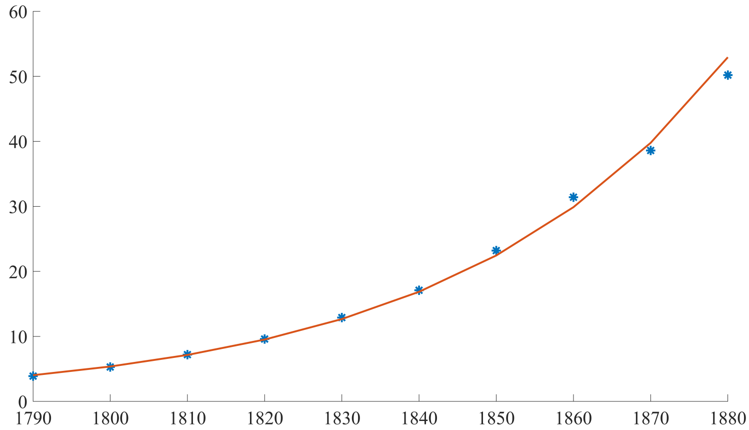
  Matlab 代码如下:

```
n = 10;
t = 1790: 10: 2000;
x = [3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76 92 106.5 123.2
          131.7 150.7 179.3 204 226.5 251.4 281.4];
y = log(x);
p = polyfit(t(1: n), y(1: n), 1);
f = polyval(p, t(1: n));
plot(t(1: n), x(1: n), '*');
hold on;
plot(t(1: n), exp(f));
hold off;
```

  计算结果如下:

$$\begin{aligned} p &= 0.0281 \quad -48.8568, \\ r &= 0.0281. \end{aligned}$$

  可以生成如下图象 (* 是实际数据, 曲线是计算结果):



- **1900 年-2000 年**

  Matlab 代码如下:

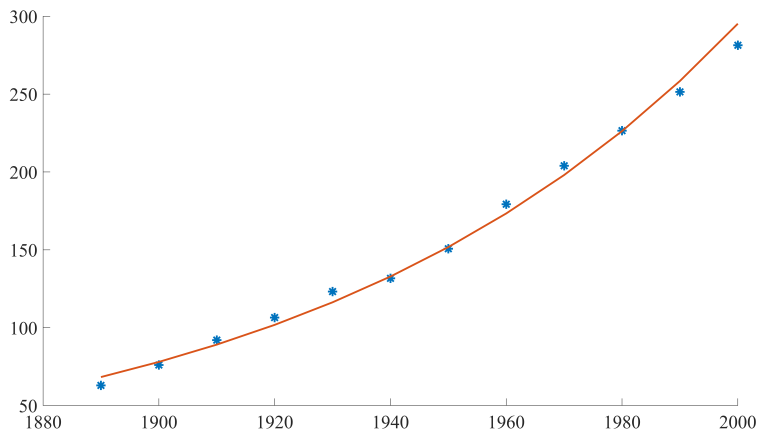
```
t = 1790: 10: 2000;
x= [3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76 92 106.5 123.2 131.7
        150.7 179.3 204 226.5 251.4 281.4];
y  = log(x);
p = polyfit(t(11:22), y(11:22), 1);
f = polyval(p, t(11:22));
plot(t(11:22), x(11:22), '*');
hold on;
plot(t(11: 22), exp(f));
hold off;
```

计算结果如下:

$$p = 0.0133 \quad -20.9308,$$

$$r = 0.0133.$$

可以生成如下图象 (* 是实际数据, 曲线是计算结果):



b) **阻滞增长模型.**

换一种方法确定固有增长率 r 和最大容量 x_m. 建立模型如下:

$$\frac{dx}{dt}\frac{1}{x} = r - sx,$$

$$s = \frac{r}{x_m}.$$

Matlab 代码如下:

```matlab
t = 1790: 10: 2000;
x= [3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76 92 106.5 123.2 131.7 150.7
    179.3 204 226.5 251.4 281.4];
for i = 1: 21
    dx(i)=(x(i + 1) - x(i)) / 10;
end
dx(22) = dx(21);
p = polyfit(x, dx ./ x, 1);
xm = -p(2) / p(1);
```

计算结果如下:

$$\begin{aligned} r &= 0.0319, \\ x_m &= 320.0850. \end{aligned}$$

即固有增长率 $r = 0.0319$ 和最大容量 $x_m = 320.0850$.

Problem 2

(Page 40 Ex.4)
说明 Logistic 模型

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right) e^{-rt}}$$

可表示为

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + e^{-r(t-t_0)}},$$

其中, t_0 是人口增长出现拐点的时刻, 并给出 t_0 与 r, x_m, x_0 的关系.

Solution.
令

$$r = \frac{1}{t_0} \ln(\frac{x_m}{x_0} - 1),$$

则我们有

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right) e^{-rt}} = \frac{x_m}{1 + e^{-rt + \ln\left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)}} = \frac{x_m}{1 + e^{-rt + rt_0}}.$$

由于在 Logistic 模型中, $\frac{dx}{dt}$ 的拐点在 $\frac{x_m}{2}$, 故 $t_0 = \frac{x_m}{2}$, 即

$$r = \frac{1}{t_0} \ln(\frac{2t_0}{x_0} - 1), \quad x_m = 2t_0.$$

Problem 3

(Page 40 Ex.5)

假定人口的增长服从这样的规律: 时刻 t 的人口为 $x(t)$, t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增量与 $x_m - x(t)$ 成正比 (其中 x_m 为最大容量). 试建立模型并求解. 作出解的图形并与指数增长模型、阻滞增长模型的结果进行比较.

Solution.

a) **建立模型并求解**

由题知, t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增量为

$$x(t+\Delta t) - x(t) = k\left(x_m - x(t)\right)\Delta t,$$

其中 $k>0$. 令 $\Delta t \to 0$, 得到 $x(t)$ 满足微分方程可建立如下方程:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = k\left(x_m - x(t)\right) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

求解该 ODE 可得

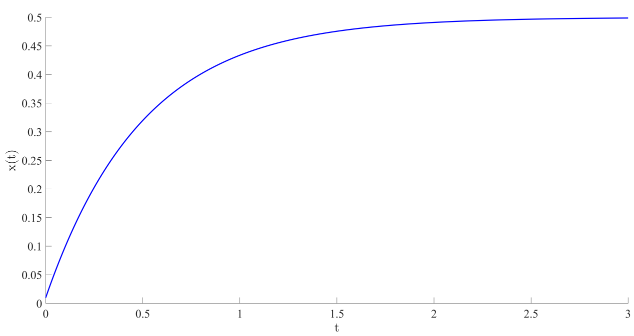
$$x(t) = x_m - (x_m - x_0)e^{-kt}.$$

b) **作图**

Matlab 代码如下:

```
t = linspace(0, 3, 1000);
x_m = 0.5 ; %最大容量
k = 2 ; %比例系数
x_0 = 0.01; %初值
x = x_m - (x_m - x_0) * exp(- k * t);
plot(t , x ,'b');
gtext('x(t)');
```

此时的参数为 $x_m = 0.5$, $k = 2$, $x_0 = 0.01$, 可以生成如下图象:



当 t 充分大时, 其与 Logistic 模型相近.

Problem 4

(Page 41 Ex.9)

对 1.2.2 节市场经济中的蛛网模型的方程

$$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0) \quad (\beta > 0) \tag{2}$$

做如下改变: 生产经营者的管理水平和素质提高, 他们决定的生产量, 即下一时段的商品数量依赖于上两个时段的平均价格, 重建方程(2), 与原来的方程

$$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0) \quad (\alpha > 0) \tag{3}$$

一起构成二阶常系数差分方程, 讨论经济趋向平稳的条件, 并将结果与原来的方法, 即(2)与(3)比较, 说明生产经营者的这一改变是否有利于经济稳定.

Solution.

重建方程(2)我们可以得到

$$x_{k+1} - x_0 = \beta\left(\frac{y_k + y_{k-1}}{2} - y_0\right) \quad (\beta > 0), \tag{4}$$

与原来的方程(3)式一起构成二阶常系数差分方程. 从(3)式与(4)式中消去 y_k, 可以得到

$$x_{k+1} - x_0 = -\frac{\alpha\beta}{2}\left((x_k - x_0)(x_{k-1} - x_0).\right)$$

记

$$A_k = x_k - x_0,\ m = -\frac{\alpha\beta}{2} < 0,$$

则有

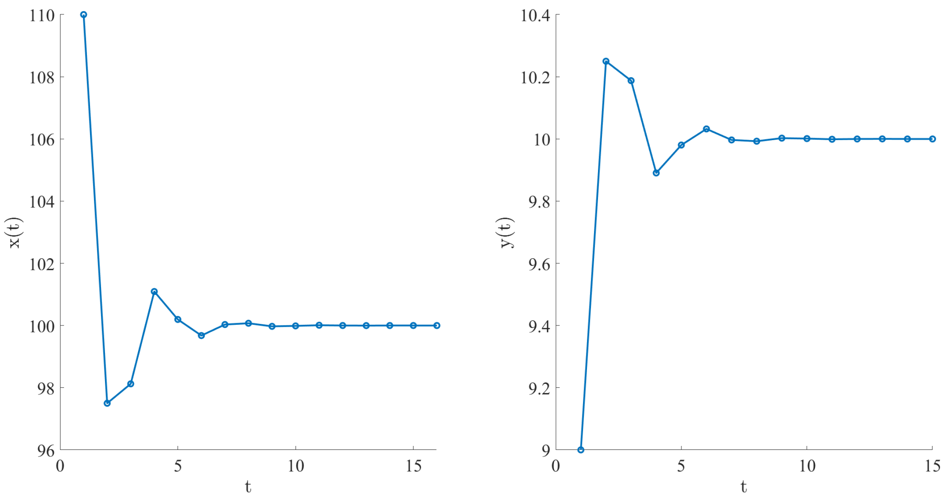
$$A_{k+1} - mA_k - mA_{k-1} = 0.$$

利用 Matlab 输入以下代码:

```
%初值参数
x0 = 100;
y0 = 10;
x(1) = 110;
alpha = 0.1;
beta = 5;
%先进行一次循环
y(1) = y0 - alpha * (x(1) - x0);
x(2) = x0 + beta * ((y(1)+y0)/2 - y0);
%循环
for k = 2: 15
 y(k) = y0 - alpha * (x(k) - x0);
 x(k+1) = x0 + beta * ((y(k)+y(k-1))/2 - y0);
end
%作图
subplot(1,2,1)
```

```
plot(x);
subplot(1,2,2)
plot(y);
```

可以生成如下图象:



由上图可以看到 x_k 与 y_k 分别趋向于 x_0 与 y_0, 则这一改变有利于经济稳定.