

(考试形式 开卷 2020 年 5 月)

院 系 数学科学学院 年 级 _____ 专 业 _____

学 号 _____ 姓 名 _____ 成 绩 _____

注意：如果答案是分数，可填写为 a/b 的形式 (不需要加括号了)，如分子、分母有多项，可写成 $(a+b)/(c+d)$ 的形式；如果答案中含有 π ，可写为 pi 。如果答案中有 ∞ ，可以用汉字‘无穷’。

1. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2020}{n(n+1) \cdots (n+2020)}$ 的和是 _____

答案： $1/2020!$

2. 设 a, b 为实数, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{e^{x^2} - 1} = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____

答案： $a = 1, b = -3/2$

3. 瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$ _____ 答案： -4

4. 确定 p 的取值范围 _____, 使得反常积分 $\int_0^1 \frac{x^p}{\tan x} dx$ 收敛的.

答案： $(0, 1)$

5.(单选) 若级数 $\sum a_n$ 收敛, 下列断言正确的是 _____

(A) $\sum |a_n|$ 收敛;(B) $\sum (-1)^n a_n$ 收敛;(C) $\sum a_n a_{n+1}$ 收敛;(D) $\sum a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 收敛.答案： D

6. (多选) 给定一个收敛的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, 下列断言正确的是_____

- (A) 若 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上非负连续函数, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
(B) 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \geq a$, 有 $|f'(x)| < M$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;
(C) 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负, 则存在 $\epsilon > 0, M > a$, 使得 $x^{1+\epsilon}f(x)$ 在 $[M, +\infty)$ 上有界;
(D) 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导且 $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

答案: B, D

7. (多选) 当 $p = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, 反常积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$ 收敛?

- (A) -1 ;
(B) 0 ;
(C) 2 ;
(D) 4 .

答案: B, C

8. (多选) 下面哪些数项级数是发散的?

- (A) $\sum \frac{n! 3^n}{n^n}$;
(B) $\sum (-1)^n \sin \frac{1}{n}$;
(C) $\sum \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$;
(D) $\sum \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$.

答案: A, D

9. (多选) 设 f 在任何有限区间上可积, 下列条件中可以推出无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的有_____

- A $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u f(x)dx$ 和 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^0 f(x)dx$ 都存在.
- B $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u f(x)dx$ 存在.
- C $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{-u}^u |f(x)|dx$ 存在.
- D f 为 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $\lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u f(x)dx$ 存在.

答案: (A,C,D)

10. (多选) 下列条件中可以推出数项级数 $\sum a_n b_n$ 收敛的有_____

- A $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都收敛.
- B $\sum a_n$ 收敛, $\{b_n\}$ 有界.
- C $\sum a_n$ 绝对收敛, $\{b_n\}$ 有界.
- D $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 都绝对收敛.
- E $\sum a_n^2$ 和 $\sum b_n^2$ 都收敛.

答案: (C,D,E)

11. (多选) 设 $a_n = \frac{1}{n}$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n = 1, 2, \cdots$. 下列级数中发散的有_____

- A $\sum \frac{S_n}{n}$.
- B $\sum (-1)^n \frac{S_n}{n}$.
- C $\sum \frac{a_n}{S_n}$.
- D $\sum [\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}]$.

答案: (A,C,D)