无穷级数（二）

1. 设 $\sum a_n$ 为正项收敛级数,

   (i) 确定 $\sum \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 是否收敛,

   (ii) 证明 $\sum \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} < e\sum a_n$.

2. 设 $\sum a_n$ 是正项发散级数, $A_n = a_1+\cdots+a_n$, 证明

$$\sum \frac{a_n}{A_n}\text{发散},\ \sum \frac{a_n}{{A_n}^{1+\varepsilon}}\text{收敛},\ \varepsilon>0.$$

3. 设 $\sum a_n$ 是正项收敛级数, $r_{n-1} = \sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i$ 是余项. 证明

$$\sum \frac{a_n}{r_{n-1}}\text{发散},\ \sum \frac{a_n}{r_{n-1}^{1-\varepsilon}}\text{收敛},\ \varepsilon>0.$$

4. 设 $\{a_n\}$ 是单调增的正数列, $a_n \to +\infty$, 证明 $\sum(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$ 发散.

5. 是否有一个正项数列 $\{a_n\}$, 使 $\sum a_n$ 与 $\sum \dfrac{1}{n^2 a_n}$ 都收敛?

6. 设 $\{a_n\}$ 单调递减, $a_n \to 0$, 研究 $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 是否收敛.

7. 证明: $\sum \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.