苏州大学 <u>抽象代数</u> 课程试卷(A)答案　共2页

(考试形式　闭卷　　2006年7月)

一.判断题

(1).　($\surd$)
(2).　($\times$)
(3).　($\times$)
(4).　($\times$)
(5).　($\surd$)
(6).　($\times$)
(7).　($\surd$)
(8).　($\surd$)
(9).　($\surd$)
(10).　($\times$)

二.　证明: 根据R是交换环及理想的定义即可证得.

三.　证明: 若n不为素数, 则$\exists n_1, n_2 \in N$且$n_1, n_2 < n$, $n = n_1 n_2$. 又由R特征为n, 则$\exists a \in R$使得$n_1 a \neq 0$且$n_2 a \neq 0$, 但$na = 0$ ，又$(n_1 a)(n_2 a) = (n_1 n_2)a^2 = (na)a = 0$, 与$R$ 是不含零因子的环矛盾, 所以n为素数.

四.　解: $\mathbb{Z}_6$ 的理想有: $\{\bar{0}\}$; $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$; $\{\bar{0}, \bar{3}\}$; $\mathbb{Z}_6$.

五.　证明: “$\Rightarrow$”由$a|b$且$b|a$ 知存在$c, d \in R$ 使$b = ac$, $a = bd$, 于是$a = acd$。若$a = 0$, 则$b = ac = 0$, 故$a = b$; 若$a \neq 0$, 则由$a = acd$ 消去a 得$cd = 1$, 所以c, d为R 的单位。因而总存在单位ε 使$a = \varepsilon b$。

“$\Leftarrow$”若有单位ε使$a = \varepsilon b$, 则$b = \varepsilon^{-1} a$, 所以$a|b$且$b|a$, 即a与b相伴。

六.　证明: “$\Rightarrow$”设$[a] \in \mathbb{Z}_n$ 是$\mathbb{Z}_n$ 的可逆元, 则$\exists$ $[r] \in \mathbb{Z}_n$ 使得$[r][a] = [1]$,

即$[ra]=[1]$, 所以$\exists s\in\mathbb{Z}$ 使得$ra+sn=1$, 从而可知$(n,a)=1$.

"$\Leftarrow$" 设$ra+sn=1$, 所以$[ra+sn]=[1]$, 即$[ra]=[r][a]=1$, 从而可知$[a]$是$\mathbb{Z}_n$的可逆元.

七.
证明: "$\Rightarrow$" 设$(a,b)=(d)$, 则$a\in(d), b\in(d)$ 得$d\mid a, d\mid b$. 又若$d'\mid a, d'\mid b$, 则$(a)\subseteq(d'), (b)\subseteq(d')$, 于是$(a,b)\subseteq(d')$, 故$(d)\subseteq(d')$, 则$d'\mid d$, 所以$d$ 是a,b 的一个最大公因子.

"$\Leftarrow$" 若d 是a,b 的最大公因子, 则$d\mid a$ 且$d\mid b$, 于是$(a)\subseteq(d)$ 且$(b)\subseteq(d)$, 从而$(a,b)\subseteq(d)$. 由于R 是主理想整环, 所以存在$d_1\in R$ 是$(a,b)=(d_1)$, 则$(a)\subseteq(d_1), (b)\subseteq(d_1)$, 即$d_1\mid a, d_1\mid b$, 而$d$ 是a,b 的最大公因子, 所以$d_1\mid d$, 于是$(d)\subseteq(d_1)$, 即$(d)\subseteq(a,b)$, 所以$(a,b)=(d)$.