第一、二次作业

5.14 设母体ξ 服从参数为λ 的泊松分布，$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是取自此母体的一个子样. 求

(1) 子样的联合概率分布列;

解: （1）子样的联合分布列：

$$P(\xi_1=x_1,\xi_2=x_2,\cdots,\xi_n=x_n)=\prod_{i=1}^n P(\xi_i=x_i)=\prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}e^{-n\lambda}\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)^{-1},$$
$$x_i=0,1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,n.$$

5.15 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是取自正态母体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的子样,求$u=\sum_{i=1}^k \xi_i$ 和$v=\sum_{i=r}^n \xi_i, 0<k<r<n$ 的联合分布.

解: 因为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立同分布，均服从$N(\mu,\sigma^2)$，且u,v都是$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的线性组合，故u,v 均服从正态分布。又

$$Eu=\sum_{i=1}^k E\xi_i=k\mu,\quad Du=\sum_{i=1}^k D\xi_i=k\sigma^2,$$

$$Ev=\sum_{i=r}^n E\xi_i=(n-r+1)\mu,\quad Dv=\sum_{i=r}^n D\xi_i=(n-r+1)\sigma^2,$$

故

$$u\sim N(k\mu,k\sigma^2),\quad v\sim N((n-r+1)\mu,(n-r+1)\sigma^2).$$

由于$0<k<r<n$，所以u,v相互独立。从而(u,v)服从二维正态分布$N(k\mu,(n-r+1)\mu,k\sigma^2,(n-r+1)\sigma^2,0)$.

5.10 设(ξ_1,ξ_2) 为取自正态母体$\xi\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个子样,试证:

(1) $\xi_1+\xi_2$ 与$\xi_1-\xi_2$ 是相互独立的;

(2) $\frac{(\xi_1+\xi_2)^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}$ 服从$F(1,1)$ 分布.

解: （1）由(ξ_1,ξ_2)为取自正态母体$\xi\sim N(0,\sigma^2)$的一个子样知，ξ_1与ξ_2独立，其联合分布的密度函数

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

令$U=\xi_1+\xi_2, V=\xi_1-\xi_2$，从而有$\xi_1=\frac{1}{2}(U+V), \xi_2=\frac{1}{2}(U-V)$，

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

故由变量变换定理知

$$\begin{aligned}f_{U,V}(u,v)&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(\frac{u+v}{2})^2+(\frac{u-v}{2})^2}{2\sigma^2}}|J|\\&=\frac{1}{4\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{4\sigma^2}}.\end{aligned}$$

因此，$(\xi_1+\xi_2,\xi_1-\xi_2)$服从二维正态分布$N(0,0,2\sigma^2,2\sigma^2,0)$。从而，由$\rho=0$知$\xi_1+\xi_2$与$\xi_1-\xi_2$独立。

（2）由（1）知$\xi_1+\xi_2$与$\xi_1-\xi_2$独立，且$\xi_1+\xi_2,\xi_1-\xi_2\sim N(0,2\sigma^2)$ 从而有

$$\frac{(\xi_1+\xi_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi(1), \frac{(\xi_1-\xi_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi(1),$$

进而

$$\frac{(\xi_1+\xi_2)^2}{(\xi_1-\xi_2)^2}\sim F(1,1).$$