苏州大学数学分析III摸底测试试题

科目名称 数学分析 满分 150分

一、计算题（共50分， 要求有过程。）

1、求极限 1） $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$； 2） $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}}$。

2、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$。

3、设 $y=x^x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求微分 dy。

4、求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{2019}x+e^x\sin x)\,dx$。

5、求函数 $f(x)=(1-x)\ln(1-x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式。

二、论述题（共30分，先判断，然后正确的给出证明，错误的给出反例。）

1、若单调数列 $\{a_n\}$ 存在收敛子列，则 $\{a_n\}$ 收敛。

2、若函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，则 f 在 $[a,+\infty)$ 上一定取到最大值或最小值。

3、若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且导函数 f' 在 $[a,b]$ 上单调，则导函数 f' 在 $[a,b]$ 上连续。

4、若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\ge c>0$，$\forall x\in[a,b]$，则 $\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

5、若 $a_n\ge0$，$\forall n\in\mathrm{N}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ 同敛散。

三、综合题（共 70 分，要求有过程。）

1、用 $\varepsilon-N$ 定义验证：若 $a_n \ge 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$。

2、设迭代数列 $\{x_n\}$ 由下式定义：

$$x_1 > 0,\quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \quad (n \ge 1),$$

求证：1）$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$；2）$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{2n}} = 1$。

3、设函数 f 为 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对任意 $\delta \ge 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n\delta) = A$. 求证：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A。$$

4、设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，$f(a)=0$，且存在常数 $M>0$，$\forall x\in[a,b]$：$|f'(x)| \le M|f(x)|$.

求证：$$f(x) \equiv 0。$$

5、设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，$1 \le f(x) \le 3$. 求证：

$$1 \le \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \le \frac{4}{3}。$$

6、设函数 f 在 $[0,1]$ 上有连续导函数. 若存在常数 A，使得下列极限存在

$$B = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - An\right),$$

求 A, B 的值。

7、设函数 f, g 在 $[a,b]$ 上连续，且存在数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$，使得

$$g(x_n) = f(x_{n+1}),\quad n \in \mathrm{N}.$$

求证：至少存在一点 $x_0 \in [a,b]$，使得 $g(x_0) = f(x_0)$。