一.

Solve. 在时刻 t 的损失 $D(t)$ 可表示为 $D(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} D_i \cdot e^{-a(t-S_i)}$，

其中 S_i 是第 i 次冲击到达的时刻，则

$$\begin{aligned}
E[D(t) \mid N(t)=n] &= E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} D_i \cdot e^{-a(t-S_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n} D_i \cdot e^{-a(t-S_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[D_i \cdot e^{-a(t-S_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E[D_i \mid N(t)=n] \cdot E\left[e^{-a(t-S_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right] \\
&= E[D] \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left[e^{-a(t-S_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right] \\
&= E[D] \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{-a(t-S_i)} \,\middle|\, N(t)=n\right] \\
&= E[D] \cdot e^{-at} \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{aS_i} \,\middle|\, N(t)=n\right].
\end{aligned}$$

现令 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 为 i.i.d. 的在 $[0,t]$ 上的均匀随机变量，则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{aS_i} \,\middle|\, N(t)=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{aU_{(i)}}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} e^{aU_i}\right] = \frac{n}{t}\int_0^t e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{n}{at}\cdot\left(e^{at}-1\right)$$

因此

$$E[D(t) \mid N(t)] = \frac{N(t)}{at}\cdot\left(1-e^{-at}\right)\cdot E[D]$$

两边对 $N(t)$ 取期望得

$$E[D(t)] = \frac{\lambda \cdot E[D]}{a}\cdot\left(1-e^{-at}\right).$$

#

二. (1). 计算得

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

则 n 步转移概率矩阵为

$$P^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & 当 n 为奇数 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, & 当 n 为偶数 \end{cases}$$

(2) 由马氏链的一步转移概率矩阵，显然有 $0 \to 1, 0 \to 2, 1 \to 0, 2 \to 0$，由可达的传递性，又有 $1 \to 2,\ 2 \to 1$.

即 $\forall i, j \in S \triangleq \{0, 1, 2\}$，有 $i \to j$，则马氏链是不可约的.

(3). 由(1)知，当 n 为奇数时，$P_{00}^n = 1$；当 n 为偶数时，$P_{00}^n = 0$，i.e.，只要 n 不能被 2 整除，则有 $P_{00}^n = 0$，这表明状态 0 的周期为 2，即 $d(0) = 2$. 又因为 $0 \leftrightarrow 1,\ 0 \leftrightarrow 2$，则有 $d(1) = d(2) = d(0) = 2$.

(4). 记 f_{ij}^n 为开始处为 i 而转移到 j 在时刻 n 首次发生的概率，于是我们有

$$f_{00}^1 = 0, \quad f_{00}^2 = 1, \quad f_{00}^k = 0, \quad k = 3, 4, \cdots$$

$$f_{11}^{2k-1} = 0, \quad f_{11}^{2k} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

$$f_{22}^{2k-1} = 0, \quad f_{22}^{2k} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

记 μ_{jj} 为回返到状态 j 的期望转移次数，则

$$\mu_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^n = 2, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{11}^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2^k} = 4,$$

于是

$$\lim_{n \to \infty} P_{i0}^{nd(0)} = \frac{d(0)}{\mu_{00}} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} P_{i1}^{nd(1)} = \frac{d(1)}{\mu_{11}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \to \infty} P_{i2}^{nd(2)} = \frac{d(2)}{\mu_{22}} = \frac{1}{2}.$$

(5). 设 $\pi = [\pi_0\ \pi_1\ \pi_2]^T$ 为马氏链的平稳分布，于是有

$$\pi^P = \pi,$$

解之，得 $\pi = [0.5\ \ 0.25\ \ 0.25]^T = [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^T$

三. (1). 记第 i 个过程中第一次事件发生的时刻为 t_{i1}, $i=1,2,\cdots,n$

则 $T=\min\{t_{i1}, i=1,2,\cdots,n\}$. 由 t_{i1} 服从指数分布，有

$$
\begin{aligned}
P(T\le t) &= 1-P(T>t)\\
&=1-P\{\min\{t_{i1}, i=1,2,\cdots,n\}>t\}\\
&=1-P\{t_{i1}>t, i=1,2,\cdots,n\}\\
&=1-\prod_{i=1}^{n}P\{t_{i1}>t\}\\
&=1-\prod_{i=1}^{n}\{1-(1-e^{-\lambda_i t})\}\\
&=1-e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot t}
\end{aligned}
$$

(2) 由 $\{N_i(t), i=1,2,\cdots,n\}$ 为相互独立的 Poisson 过程，则 $\forall s,t>0$,

$$
\begin{aligned}
P\{N(t+s)-N(t)=n\} &= P\left\{\sum_{i=1}^{n}[N_i(t+s)-N_i(t)]=n\right\}\\
&=\sum_{\sum_{i=1}^{n}n_i=n}P\left\{N_i(t+s)-N_i(t)=n_i, \sum_{i=1}^{n}n_i=n, i=1,2,\cdots,n\right\}\\
&=\sum_{\sum_{i=1}^{n}n_i=n}\left(s_i\cdot e^{-s\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!}\right)\\
&=\frac{\left(s\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^n}{n!}\cdot e^{-s\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\\
&=\frac{(s\cdot\lambda)^n}{n!}\cdot e^{-s\cdot\lambda}
\end{aligned}
$$

即: $\{N(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t), t\ge 0\}$ 服从参数为 $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 的 Poisson 过程.

(3) 由条件概率公式,

$$
\begin{aligned}
P\{N_1(t)=1 \mid N(t)=1\} &= P\{N_1(t)=1, N_i(t)=0, i=2,\cdots,n\}/P\{N(t)=1\}\\
&=\lambda_1\cdot t\cdot e^{-\lambda_1\cdot t}\cdot\prod_{i=2}^{n}e^{-\lambda_i\cdot t}\Big/ e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot t}\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot t\\
&=\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}.
\end{aligned}
$$

四.

Pf.（反证法）

记某一有限状态马氏链的状态为 $0, 1, 2, \cdots, M$，假设它们都是滑过的。那么有限时间 T_0 之后，将不会再进入状态 0。同样在一段时间 T_1 之后，将不会再进入状态 1，也在一段时间 T_2 之后，将不会再进入状态 2，以此类推。

于是在一段有限时间 $T = \max\{T_0, T_1, \cdots, T_M\}$ 之后将不再进入任何状态。但过程在时间 T 之后必须处于某个状态，矛盾。

#

五. 先讨论 $n=2$ 时的情形, $0<t_1\le t_2$

$$P(\tau_1>t_1,\ \tau_2>t_2)=P(N_1(t_1)=0,\ N_2(t_2)=0)$$

$$=P\left(\sum_{k=1}^{N}N_1^k(t_1)=0,\ \sum_{k=1}^{N}N_2^k(t_2)=0\right)$$

$$=P\left(N_1^1(t_1)=0,\cdots,N_1^N(t_1)=0,\ N_2^1(t_2)=0,\cdots,N_2^N(t_2)=0\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{N}P\left(N_1^k(t_1)=0,\ N_2^k(t_2)=0\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{+\infty}P\left(N_1^k(t_1)=0,\ N_2^k(t_2)=0\mid N^k(t_2)=\ell\right)\cdot P\left(N^k(t_2)=\ell\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{+\infty}P\left(N_1^k(t_1)=0\mid N^k(t_2)=\ell\right)\cdot P\left(N_2^k(t_2)=0\mid N^k(t_2)=\ell\right)\cdot P\left(N^k(t_2)=\ell\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{+\infty}C_\ell^0\cdot\left[1-\left(\int_0^{t_1}p_1^k(s)ds\right)/t_2\right]^\ell\cdot C_\ell^0\cdot\left[1-\left(\int_0^{t_2}p_2^k(s)ds\right)/t_2\right]^\ell\cdot\frac{e^{-\lambda_k t_2}\cdot(\lambda_k t_2)^\ell}{\ell!}$$

$$=\prod_{k=1}^{N}e^{\left[1-\frac{\int_0^{t_1}p_1^k(s)ds}{t_2}\right]^\ell\cdot\left[1-\frac{\int_0^{t_2}p_2^k(s)ds}{t_2}\right]^\ell\cdot\lambda_k t_2-\lambda_k t_2}$$

$$=\exp\left[\sum_{k=1}^{N}\left[\left(1-\frac{\int_0^{t_1}p_1^k(s)ds}{t_2}\right)\left(1-\frac{\int_0^{t_2}p_2^k(s)ds}{t_2}\right)-1\right]\cdot\lambda_2 t_2\right]$$

下面考虑 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$, 则推广之, 我们有

$$P(\tau_1>t_1,\ \tau_2>t_2,\cdots,\tau_n>t_n\mid \mathcal{G}_{t_n})$$

$$=\exp\left[-\sum_{k=1}^{N}\left(\Lambda_{t_n}^k-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{\Lambda_{j t_j}^k}{\Lambda_{t_n}^k}\right)\Lambda_{t_n}^k\right)\right],\quad 其中\ \Lambda_t=\int_0^t\lambda(s)ds$$

因此,

$$P(T_1^1>t,\cdots,T_n^1>t)=\exp\left[-\sum_{k=1}^{N}\left(1-\prod_{j=1}^{n}(1-p_j^k)\right)\cdot\lambda_{jk}\cdot t\right],$$

其中 $p_j^k\triangleq q_{jk}$.