第一部分　极限与连续

第一讲、　实数系与 $\mathbb{R}^n$ 的基础拓扑

基本内容:　实数系的构造（具有最小上界性质的有序域）; 七个实数基本定理; $\mathbb{R}^n$ 的基础拓扑（度量空间、极限点（聚点）、开集、紧集、稠密、完全集）; Cantor 集.

§1.1　实数系

一、数的发展

正整数集 $\mathbb{N}$ $\xrightarrow{\text{减法运算封闭}}$ 整数集 $\mathbb{Z}$ $\xrightarrow{\text{除法运算封闭}}$ 有理数域 $\mathbb{Q}$ $\xrightarrow{\text{完备化}}$ 实数域 $\mathbb{R}$.

实数域 $\mathbb{R}$ 是具有最小上界性质的有序域.

例 1.　设 $L = \{\, p \in \mathbb{Q} \ : \ p^2 < 2 \,\}$, 证明 L 在 $\mathbb{Q}$ 中没有最小上界.

二、实数域的描述: 七个等价的基本定理

确界存在定理、单调有界定理、闭区间套定理、凝聚定理（有界数列一定有收敛子列）、聚点定理、Cauchy 收敛准则、有限覆盖定理.

基本定理间的互推是分析基础的一个基本训练. 但更重要的是我们能熟练地应用这些基本定理讨论数学分析的具体问题.

例 2.　设 f 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数, 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 证明存在 $a > 0$ 和单调增加函数 $g(x)$, 使当 $x \geq a$ 时 $f(x) \geq g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. 进一步考虑是否可要求 $g(x)$ 连续.

§1.2　$\mathbb{R}^n$ 的基础拓扑

在 $\mathbb{R}$ 的等价描述中确界存在定理和单调有界定理都依赖于 $\mathbb{R}$ 的“序”. 多维问题的讨论就要避免这种依赖. 为此我们要建立 $\mathbb{R}^n$ 的基础拓扑. 在这个基础上, 上述实数基本定理的后五个可以推广到 $\mathbb{R}^n$.

一、度量空间、距离与邻域

$\mathbb{R}^n$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的 Euclid 距离为

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = [\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2]^{1/2}.$$

定义了距离的空间称为度量空间. 与距离有关的最重要的不等式是三角不等式:

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leqslant |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|.$$

在分析中可通过距离定义 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域. 设 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, 称

$$O_\delta(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ \big| \ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta\}$$

是点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 邻域（圆邻域）,

二、内点、外点、边界点与极限点（聚点）

在 $\mathbb{R}^n$ 中给定一个集合 E, 按照点与集合 E 的位置关系可将 $\mathbb{R}^n$ 中的点分为三类: E 的内点、外点、边界点. 具体地说, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的某一点$\boldsymbol{x}$, 若存在它的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset E$, 则

称 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的内点; 若存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})\cap E=\varnothing$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的外点; 若在 $\boldsymbol{x}$ 的任一邻域中既有属于 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的边界点.

E 的全体内点组成的集合称为 E 的内部, 记为 $\mathrm{int}E$ 或 E°.

E 的全体边界点组成的集合称为 E 的边界, 记为 ∂E .

按照点与 E 的凝聚关系可将 $\mathbb{R}^n$ 中的点分为 E 的极限点与非极限点（聚点与非聚点）两大类. 确切地说, 对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 如果在 $\boldsymbol{x}$ 的任一去心邻域中总有 E 的点（iff 在 $\boldsymbol{x}$ 的任一邻域中总有 E 的无穷多个点）, 则称 $\boldsymbol{x}$ 为 E 的聚点. E 的全体聚点组成的集合记为 E^{d} , 称为 E 的导集. 显然内点一定是聚点, 外点一定不是聚点.

三、开集与闭集

如果 $\mathrm{int}E=E$ （每个点均是内点）, 则称 E 为开集. 开集有如下重要性质:

(1) 任意多个开集的并集是开集;

(2) 有限多个开集的交集是开集;

(3) 全空间 $\mathbb{R}^n$ 和空集 $\varnothing$ 都是开集.

开集的余集定义为闭集. 又定义 E 的闭包 $\overline{E}$ 为 $\overline{E}=E\cup E^{\mathrm{d}}$. 易证 $\overline{E}$ 为闭集, 且 $\overline{E}=E\cup\partial E$. 关于闭集, 下列叙述等价:

(1) E 是闭集;

(2) $E^{\mathrm{d}}\subset E$（即$E=\overline{E}$）;

(3) $\partial E\subset E$ （即$E=\overline{E}$）.

例 3. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则 ∂E 为闭集.

集合运算的 De Morgan 法则 设 A_α $(\alpha\in I)$ 为一族集合, 则有

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,\quad \Big(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$$

由 De Morgan 法则易证下述结论: 任意多个闭集的交集仍是闭集; 有限多个闭集的并集仍是闭集.

四、紧集

先给出开覆盖的定义. 设 $\{G_\alpha\}$ 是一族开集, 如果 $K\subset\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$, 则称 $\{G_\alpha\}$ 是 K 的一个开覆盖.

如果 K 有“有限覆盖性质”, 即任给 K 的开覆盖 $\{G_\alpha\}$, 能找到 $\{G_\alpha\}$ 中有限个开集 $G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\cdots,G_{\alpha_k}$, 使 $K\subset\bigcup\limits_{j=1}^{k}G_{\alpha_j}$, 则称 K 是紧集.

紧集是数学中一个非常重要的概念. 粗略地讲, 紧集是具有某种“有限性”的集合.

例 4. 证明连续函数 f 一定在紧集 E 上一致连续.

例 5. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则 E 为紧集当且仅当 E 是有界闭集.

例 6. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集, $\{F_\alpha,\ \alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族闭集. 并且 K 与 $\{F_\alpha,\ \alpha\in I\}$ 中任何有限个的交非空. 则 $K\cap(\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha)\neq\varnothing$.

五、稠密、完全集与 Cantor 集

稠密与完全集也是基础拓扑中的重要概念.

如果 $\overline{E}=X$, 则称 E 在 X 中稠密. 如, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

例 7. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上连续且在 $(-\infty,\ +\infty)$ 的一个稠集合 E 上恒为常数, 则 $f(x)$ 是常值函数.

例 8. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 连续且无最小正周期. 证明 $f(x)$ 是常值函数.

例 9. 设 α 是正无理数. 证明 $\overline{\{\, n+m\alpha \ :\ n,m\in\mathbb{Z}\,\}}=\mathbb{R}$（这个结论被用于构造动力系统中环面上无理流的例子）.

例 10. 设 $\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$, 这里 F_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集. 证明至少有一个 F_i 有非空的内部（等价的表述：如果 G_i 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠密开子集, $i=1,2,\cdots$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$ 不空. 这是 Baire 定理的特例）.

E 称为完全集, 如果 E 是闭集, 且 $E^{\mathrm{d}}=E$（即 E 的每点都是 E 的极限点）.

完全集有如下的重要性质.

例 11. 设 P 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空完全集, 则 P 不可数.

比较: $\mathbb{Q}$ 是可数集, 且 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$. 故似乎 P 的闭包（就是 P ）应该至少包含了一个小区间. 下面 Cantor 集的例子说明这种粗略的想法并不可靠. Cantor 集是非空的完全集, 但没有内点（从而不包含任何区间）. 而且 Cantor 集的“长度”是零（测度为零）.

Cantor 集不仅能说明很多问题（比如它也是测度为零的不可数集的例子）, 而且它的构造方法–“三分法”, 也是很有启发性的.

例 12. Cantor 集.

第一讲练习题

1. 给出一个闭而不是完全集的无限点集的例子.
2. $\mathbb{R}$ 中是否存在不含有理数的非空完全集?
3. 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数, $f(0)>0,\ f(1)<0$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$, 且 $f(x)>0,\ x\in[0,\xi)$.
4. 作一个实数的紧集, 使它的极限点集是一个可数集.
5. 证明$\mathbb{R}^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交, 每个开集可表为可列个闭集的并.
6. 证明 $\mathbb{R}$ 的每个非空开集是至多可数个不相交的开区间的并.
7. (a) 设 $F_1,\ F_2$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中不相交的闭集, 其中一个有界. 证明: 存在开集 O_1,O_2 满足 $F_i\subset O_i$, $i=1,2$, 且 $O_1\cap O_2=\varnothing$.
   (b) （$\mathbb{R}^n$ 的正规性）设 S_1,S_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中不相交的闭集（不一定有界）. 证明存在开集 O_1,O_2 满足 $S_i\subset O_i, i=1,2$, 且 $O_1\cap O_2=\varnothing$.