苏州大学 <u>数学分析 (III)</u> 课程试卷(A) 卷参考答案 (2006.1)

1(12 分). 计算 $\iint_D (x+y)sin(x-y)dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x+y\le \pi,\ 0\le x-y\le \pi\}$.

解: 作变换:$x+y=u, x-y=v$, $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|=\frac{1}{2}$, $(u,v)\in[0,\pi]\times[0,\pi]$, 于是 $I=\frac{1}{2}\int_0^\pi udu\int_0^\pi sinvdv=\frac{\pi^2}{2}$.

2(12 分). 求 $I=\iiint_\Omega sin\ ydxdydz$, 其中 Ω 为由平面 $z=0$, 平面 $z=1$, 和曲面 $z^2+1=a^{-2}x^2+b^{-2}y^2(a\ge b>0)$ 所围成.

解: 固定 z, 得积分区域 $D_z: a^{-2}x^2+b^{-2}y^2\le z^2+1$, 显然 D_z 关于 y 是对称的, 而被积函数 $siny$ 关于 y 是奇函数, 因此 $\iint_{D_z} sinydxdy=0$, 从而

$$I=\int_0^1 dz\iint_{D_z} sinydxdy=0.$$

3(12 分). 求 $I=\iiint_\Omega zdxdydz$, 其中 Ω 为由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 与 $z\ge 0$ 所围的区域.

解: 作广义球变换:$x=arsin\varphi cos\theta, y=brsin\varphi sin\theta, z=crcos\varphi$, 于是 $J=abcr^2sin\varphi$. 从而 $I=abc^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^3sin\varphi cos\varphi dr=\frac{\pi abc^2}{4}$.

4(12 分). 计算 $I=\int_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2siny)dy$, L 沿 $y=x^2$ 从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$.

解: 由 Green 公式,$I=\iint_D(-4x-2y)dxdy+\int_{-1}^1(x+1)^2dx=\frac{16}{15}$, 其中 D 由 $y=x^2, y=1$ 所围区域.

5(12 分). 计算线积分 $I=\oint_L xdy-ydx$, 其中 L 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1(z\ge 0)$ 与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线, 从 z 轴正向往下看, L 取逆时针方向.

解: 用 stokes 公式,$S+$ 表示上半球面在柱面 $x^2+y^2=x$ 内的部分之上侧, 于是 $I=\iint_{S+}2dxdy=2\iint_{x^2+y^2\le x}dxdy=\frac{\pi}{2}$.

6(10 分). 计算 $I=\iint_D e^{max\{x^2,y^2\}}dxdy,\quad D=[0,1]\times[0,1].$

解: $I=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=e-1$

7(10 分). 设 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2x$ 割下的部分, 求

$$I=\iint_S zdS.$$

解: $I=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2cos\theta}r^2dr=\frac{32}{9}\sqrt{2}$

8(10 分). 计算

$$I=\iint_S xdydz+(z+1)^2dxdy,$$

S 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解: 补一有向曲面 $\Sigma: x^2+y^2\leq 1(z=0)$, 方向与 z 轴反向, 则 $I=\iint_{S+\Sigma}-\iint_\Sigma=\iint_{x^2+y^2\leq 1}dxdy-\iiint_V(3+2z)dV=-\pi-2\iiint_V zdV=-\frac{\pi}{2}.$

9(10 分) 问: xoy 平面上的力场

$$\mathbf{F}=\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

是不是一个保守场? 如果是, 求出原 (势) 函数; 否则, 给出不是的理由.

解: 是保守场, 其原函数为 $g(x,y)=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$.