第三次作业

1907402030 熊雄

2021 年 10 月 19 日

题目 1. **(P50 d2.8)** 验证三种检验的关系

1. $t = \frac{\hat{\beta}_1 \sqrt{L_{xx}}}{\hat{\sigma}} = \frac{\sqrt{n-2}r}{\sqrt{1-r^2}}$

2. $F = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)} = \frac{\hat{\beta}_1{}^2 L_{xx}}{\hat{\sigma}^2} = t^2$

解答.

1. **证明:**

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\hat{\beta}_1 \sqrt{L_{xx}}}{\hat{\sigma}} \\
&= \frac{\frac{L_{xy}}{L_{xx}} \sqrt{L_{xx}}}{\sqrt{\frac{1}{n-2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y})^2}} \\
&= \sqrt{n-2}r \frac{1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2}}} \\
&= \sqrt{n-2}r \frac{1}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2}}} \\
&= \sqrt{n-2}r \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{n-2}r}{1 - r^2}.
\end{aligned}
$$

2. **证明：**

$$F = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)} = \frac{r^2 SST}{\sigma^2} = \frac{(r)^2 L_{yy}}{\sigma^2} = \frac{\left(\frac{L_{xy}}{L_{xx}}\right)^2 L_{xx}}{\sigma^2} = \frac{\hat{\beta}_1^{\ 2} L_{xx}}{\hat{\sigma}^2} = t^2.$$

题目 2. **(P50 d2.11)** 验证决定系数 r^2 与 F 值之间的关系式

$$r^2 = \frac{F}{F+n-2},$$

以上表达式说明 r^2 与 F 值是等价的，那么我们为什么要分别引入这两个统计量，而不是只使用其中的一个？

解答.

1. 先验证关系式：

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{SSR}{SST} \\ &= \frac{SSR}{SSR+SSE} \\ &= \frac{1}{1+\frac{SSE}{SSR}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{n-2}{F}} \\ &= \frac{F}{F+n-2}. \end{aligned}$$

2. 引入这两个统计量的原因是这两个统计量研究的对象和目的都不同：

   (a) 决定系数 r^2 是一个反映回归直线与样本观测值拟合优度的相对指标，如果决定系数 r^2 接近 1，说明因变量不确定性的绝大部分能由回归方程解释，回归方程拟合优度好；反之，如果 r^2 不大，说明回归方程的效果不好，应进行修改，可以考虑增加新的自变量或者使用曲线回归。r^2 的数值在 0 和 1 之间；

   (b) 统计量 F 是对线性回归方程显著性的一种检验，其研究的是引起总平方和 SST 的两个因素 SSR 和 SSE 所占比重的多少，也就是如果回归平方和 SSR 越大回归的效果越好，回归方程便更显著。F 的数值大于 1.

题目 3. **(P51 d2.14)** 为了调查某广告对销售收入的影响，某商店记录了 5 个月的销售收入 y（万元）和广告费用 x（万元），数据如表 1 所示。请回答下面的问题：

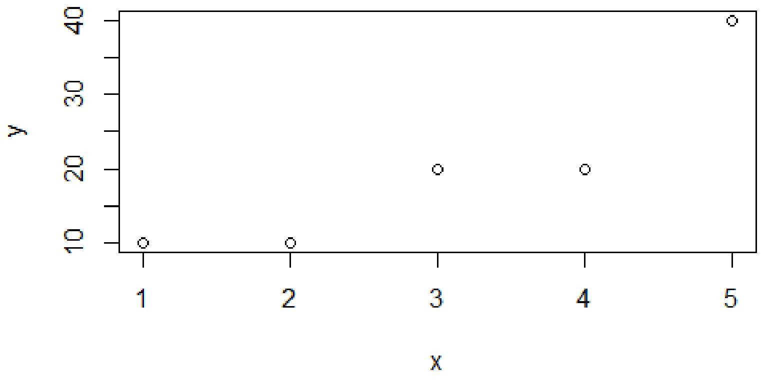
1. 画散点图；
2. x 与 y 之间是否大致呈线性关系？
3. 用最小二乘估计求出回归方程；
4. 求回归标准误差 $\hat{\sigma}$；
5. 给出 β_0 与 β_1 的置信度为 95% 的区间估计；
6. 计算 x 与 y 的决定系数；
7. 对回归方程做方差分析；
8. 做回归系数 β_1 的显著性检验；
9. 做相关系数的显著性检验；
10. 对回归方程作残差图并做相应的分析；
11. 求当广告费用为 4.2 万元时，销售收入将达到多少，并给出置信度为 95% 的置信区间。

表 1: 销售收入 y（万元）和广告费用 x（万元）

月份	1	2	3	4	5
x	1	2	3	4	5
y	10	10	20	20	40

解答.

1. **绘制散点图如下：**



2. **答：** 由散点图可以看出 x 与 y 之间大致呈线性关系。

3. **解：** 由表 1 可以计算得到：

$$\bar{x} = 3, \bar{y} = 20, L_{xy} = 70, L_{xx} = 10$$

从而

$$\hat{\beta}_1 = \frac{L_{xy}}{L_{xx}} = 7$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = -1$$

因此, 用最小二乘估计求出的回归方程为:

$$\hat{y} = -1 + 7x.$$

4. **解：** 计算得到回归标准误差:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)^2 \right] = \frac{110}{3} \approx 36.67.$$

5. **解：**

(a) 由于 $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \frac{\hat{\sigma}^2}{L_{xx}})$, 故构造枢轴量

$$t = \frac{\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) \sqrt{L_{xx}}}{\hat{\sigma}} \sim t(n-2).$$

因此

$$P\left(\left|\frac{\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)\sqrt{L_{xx}}}{\hat{\sigma}}\right|<t_{\alpha/2}(n-2)\right)=1-\alpha.$$

从而可以得到 β_1 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left(\hat{\beta}_1-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\frac{\hat{\sigma}}{L_{xx}},\hat{\beta}_1+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\frac{\hat{\sigma}}{L_{xx}}\right).$$

本题中我们令 $\alpha=0.05$, 查表得 $t_{0.025}(3)=3.1824$, 从而计算得到 β_1 的置信度为 95% 的置信区间为:

$$U_1=(5.0729,8.9271).$$

(b) 由于 $\hat{\beta}_0\sim N\left(\beta_0,\left(\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x})^2}{L_{xx}}\right)\sigma^2\right)$, 故构造枢轴量

$$t=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x})^2}{L_{xx}}\right)\sigma^2}}\sim t(n-2).$$

因此

$$P\left(\left|\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x})^2}{L_{xx}}\right)\sigma^2}}\right|<t_{\alpha/2}(n-2)\right)=1-\alpha.$$

从而可以得到 β_0 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left(\hat{\beta}_0-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x})^2}{L_{xx}}\right)\sigma^2},\hat{\beta}_0+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{(\bar{x})^2}{L_{xx}}\right)\sigma^2}\right).$$

本题中我们令 $\alpha=0.05$, 查表得 $t_{0.025}(3)=3.1824$, 从而计算得到 β_0 的置信度为 95% 的置信区间为:

$$U_2=(-21.2119,19.2119).$$

6. **解：** x 与 y 的决定系数为:

$$r^2=\frac{L_{xy}^2}{L_{xx}L_{yy}}=\frac{49}{60}\approx 0.82.$$

7. **解：** 原假设:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

对立假设:

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

构造 F 检验统计量如下:

$$F = \frac{SSR/1}{SSE/3},$$

在正态假设下,当原假设 H_0 成立时,$F \sim F(1,3)$。查表得:$F_{1-0.05}(1,3) = 10.13$, 故拒绝域为: $W_1 = \{F > 10.13\}$. 计算得到:

$$SSR = \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}} = 490, SSE = l_{yy} - SSR = 110,$$

从而

$$F = \frac{147}{11} \approx 13.3636 > 10.13.$$

即在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时, 拒绝 H_0 , 即回归效果是显著的。

8. **解：** 原假设:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

对立假设:

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

构造 t 检验统计量如下:

$$t = \frac{\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)\sqrt{L_{xx}}}{\hat{\sigma}}.$$

原假设 H_0 成立时,

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 L_{xx}}{\sigma^2} \sim t(n-2)$$

9. **解：** 原假设:

$$H_0 : r \neq 0$$

由 **P50 d2.8**, 我们可以构造检验统计量

$$t = \frac{\sqrt{n-2}r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

在正态假设下，当原假设 H_0 成立时,$t \sim t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$. 拒绝域为:

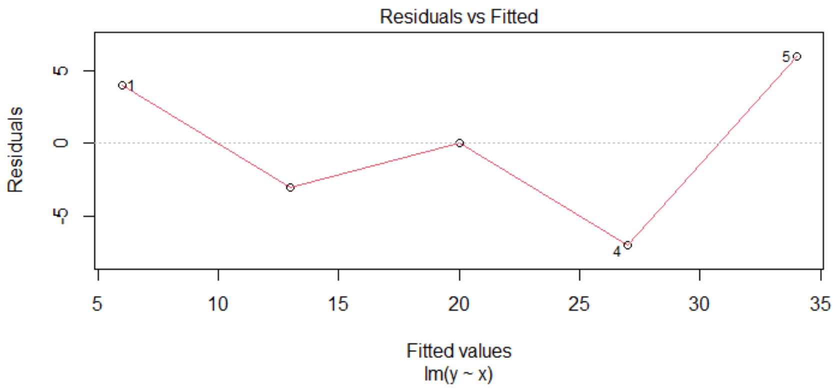
$$W_2 = \{|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\}.$$

计算得到

$$t = 3.6968 < 5.8409 = t_{0.005}(3).$$

从而在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 时, 接受 H_0, 即相关系数的效果是显著的。

10. **解： 绘制残差图如下：**



从上图可以看出，残差的分布是比较均匀的，这样就代表误差分布模型的假设是满足的。

11. **解：** 在回归方程中，令 $x_0 = 4.2$, 则 $y_0 = 28.4$。即当广告费用为 4.2 万元时，销售收入将达到 28.4 万元。

由于

$$\hat{y_0} \sim \left(\beta_0 + \beta_1, \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{L_{xx}}\right)\hat{\sigma}^2\right),$$

记

$$h_{00} = \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{L_{xx}},$$

则 y_0 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left(\hat{y_0} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\sqrt{1+h_{00}}\hat{\sigma}, , \hat{y_0} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\sqrt{1+h_{00}}\hat{\sigma}\right)$$

通过计算可以得到 y_0 的置信度为 95% 的置信区间为:

$$U_3 = (6.0586, 50.7414).$$

题目 3 的注记. 本题的样本量很小，因此区间估计的误差较大。