第六次作业 6.21，6.28，6.33，6.34

6.21　若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是取自正态母体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的一个子样，试适当选 c，使 $S^2 = c\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

解. 由于

$$
\begin{aligned}
E(\xi_{i+1}-\xi_i)^2 &= E\left[(\xi_{i+1}-\mu)-(\xi_i-\mu)\right]^2 \\
&= E(\xi_{i+1}-\mu)^2 - 2E(\xi_{i+1}-\mu)(\xi_i-\mu) + E(\xi_i-\mu)^2 \\
&= D\xi_{i+1} - 2\,\mathrm{Cov}(\xi_{i+1}, \xi_i) + D\xi_i \\
&= \sigma^2 + 0 + \sigma^2 = 2\sigma^2.
\end{aligned}
$$

从而，$ES^2 = c(n-1)\times\left(2\sigma^2\right) = 2(n-1)c\sigma^2$. 由此可知为使 S^2 为 σ^2 的无偏估计，当且仅当 $2(n-1)c = 1$，即 $c = \frac{1}{2(n-1)}$. □

6.28　若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是取自均匀分布母体 $U(\alpha, \beta)$ 的一个子样，若把

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha} &= \min\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\} \\
\hat{\beta} &= \max\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}
\end{aligned}
$$

分别取作 α, β 的估计量，问 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 是否分别为 α, β 的无偏估计量？如何修正才能获得 α, β 的无偏估计.

解. 设 $\xi \sim U(\alpha, \beta)$，$\xi$ 的分布函数为

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha, \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x < \beta, \\ 1, & x \ge \beta. \end{cases}
$$

$\hat{\alpha}$ 的密度函数为

$$
f_1(x) = \begin{cases} n\left[\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right]^{n-1}\frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha < x < \beta, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}
$$

$\hat{\beta}$ 的密度函数为

$$
f_n(x) = \begin{cases} n\left[\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right]^{n-1}\frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha < x < \beta, \\ 0, \ \text{else}. \end{cases}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
E\hat{\alpha} &= \int_\alpha^\beta x f_1(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta n\left[\frac{\beta - x}{\beta-\alpha}\right]^{n-1}\frac{x}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= -\int_\alpha^\beta n\left[\frac{\beta - x}{\beta-\alpha}\right]^{n-1}\frac{\beta - x}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta n\left[\frac{\beta - x}{\beta-\alpha}\right]^{n-1}\frac{\beta}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{n(\beta-\alpha)}{n+1}\int_\alpha^\beta (n+1)\left[\frac{\beta - x}{\beta-\alpha}\right]^{n}\frac{1}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x + \beta\int_\alpha^\beta n\left[\frac{\beta - x}{\beta-\alpha}\right]^{n-1}\frac{1}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{n(\beta-\alpha)}{n+1} + \beta \\
&= \alpha + \frac{1}{n+1}(\beta-\alpha),
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
E\hat{\beta} &= \int_\alpha^\beta n\left[\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right]^{n-1}\frac{x}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n(\beta-\alpha)}{n+1}\int_\alpha^\beta (n+1)\left[\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right]^{n}\frac{1}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x + \alpha\int_\alpha^\beta n\left[\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right]^{n-1}\frac{1}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n(\beta-\alpha)}{n+1} + \alpha \\
&= \beta - \frac{1}{n+1}(\beta-\alpha).
\end{aligned}
$$

故 $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ 不是 α,β 的无偏估计量. 注意到

$$
E(\hat{\beta}-\hat{\alpha}) = (\beta-\alpha) - \frac{2}{n+1}(\beta-\alpha) = \frac{n-1}{n+1}(\beta-\alpha),
$$

即

$$
E\frac{1}{n-1}(\hat{\beta}-\hat{\alpha}) = \frac{1}{n+1}(\beta-\alpha).
$$

从而

$$
E\left[\hat{\alpha} - \frac{1}{n-1}(\hat{\beta}-\hat{\alpha})\right] = \alpha,
$$

$$
E\left[\hat{\beta} + \frac{1}{n-1}(\hat{\beta}-\hat{\alpha})\right] = \beta,
$$

即 $\hat{\alpha} - \frac{1}{n-1}(\hat{\beta}-\hat{\alpha})$，$\hat{\beta} + \frac{1}{n-1}(\hat{\beta}-\hat{\alpha})$ 分别为 α,β 的无偏估计.

6.33 设 ξ_1,ξ_2 是取自正态母体 $N(\mu,1)$ 的一个容量为 2 的子样. 试证下列三个估计量都是 μ 的无偏估计量

$$
\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2
$$

$$
\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}\xi_1 + \frac{3}{4}\xi_2
$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2$$

并指出其中哪一个方差较小.

解: 由于 ξ_1, ξ_2 是取自正态母体 $N(\mu, 1)$ 的一个容量为 2 的子样, 所以 ξ_1, ξ_2 相互独立, 都服从 $N(\mu, 1)$. 因此对任意的 a, b,

$$E(a\xi_1 + b\xi_2) = aE\xi_1 + bE\xi_2 = (a+b)\mu,$$

由此可知只要 $a + b = 1$, 就有 $E(a\xi_1 + b\xi_2) = \mu$, 即 $a\xi_1 + b\xi_2$ 是 μ 的无偏估计. 因为

$$2/3 + 1/3 = 1/4 + 3/4 = 1/2 + 1/2 = 1,$$

故 $\hat{\mu}_i, i = 1, 2, 3$ 都是 μ 的无偏估计. 又

$$D(a\xi_1 + b\xi_2) = a^2 D\xi_1 + b^2 D\xi_2 = a^2 + b^2 = a^2 + (1-a)^2,$$

它在 $a = \frac{1}{2}$ 出取最小值, 因此 $\hat{\mu}_3$ 的方差最小.

6.34 设随机变量 ξ 均匀分布在 $(0, \theta)$ 上, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为取自这一母体的一个子样. 试证

$$\hat{\theta}_1 = \frac{4}{3}\max_{1\le i\le 3}\xi_i, \quad \hat{\theta}_2 = 4\min_{1\le i\le 3}\xi_i,$$

都是 θ 的无偏估计, 并指出哪一个方差较小.

解: $\xi \sim U(0, \theta)$, ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{\theta}, & 0 \le x < \theta, \\ 1, & x \ge \theta. \end{cases}$$

$\xi_{(1)}$ 的密度函数为

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{\theta^3}(\theta - x)^2, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

$\xi_{(3)}$ 的密度函数为

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{3}{\theta^3}x^2, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

根据 6.33 的计算过程 (在这里 $\alpha = 0, \beta = \theta, n = 3$) 可知:

$$E\hat{\theta}_1 = \frac{4}{3}E\max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \frac{4}{3}\left(\theta - \frac{1}{4}\theta\right) = \theta.$$

$$E\hat{\theta}_2 = 4E\min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 4\left(0 + \frac{1}{4}\theta\right) = \theta.$$