

## 无穷级数（四）

1. 对怎样的常数  $c$ , 有  $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{cx^2}$  对所有  $x$  成立.

2. 证明:  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$ .

3. 求  $\int_0^1 x^{-x} dx$ .

4. 设  $a+b+c=0$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ ). 求证:  $6(a^5+b^5+c^5) = 5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$ .

5. 半轴为  $a, b$  的椭圆, 周长有两个近似值  $\pi(a+b)$  与  $2\pi\sqrt{ab}$ . 当  $\frac{b}{a} \rightarrow 1$  时, 问哪个近似值更接近真值?

6. 设  $n_k$  是单调增的正整数,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{n_1 \cdots n_{k-1}} = +\infty$ .

证明:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$  是一个无理数.

7. 求证:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n!}$  是一个无理数, 这里  $\sigma(n)$  表示  $n$  的正约数之和.