2019 级金融工程专业《随机分析》期末试卷（闭）

姓名＿＿＿＿＿＿学号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿成绩＿＿＿＿＿＿

1. （35 分）令 $\{B_t, t\ge 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\Im,P)$ 上的一维标准布朗运动， $B_0=0$ 。

（1）证明 $\{B_t, t\ge 0\}$ 和 $\{B_t^2-t, t\ge 0\}$ 均为鞅；

（2）令 $T=\inf\{t: B_t\notin[a,b], a<0<b\}$ ，求 B_T 的分布；

（3）对 $r>0$，定义 $M_t=\int_0^t e^{rs}dB_s$，$t\ge 0$，求 $\{M_t\}$ 的二次变差过程 $\{<M>_t, t\ge 0\}$；

（4）求 M_t 的分布；

（5）求时间变换 $\tau=\tau(t)$，使 $W_t=M_{\tau(t)}$ 为标准布朗运动。

2. （20 分）设 f,g,q 为有界函数， $v(t,x)$ 为下述初值问题的有界解：

$$v_t(t,x)=\frac{1}{2}v_{xx}(t,x)+q(x)v_x(t,x)+g(x), t>0, x\in R,$$

$$v(0,x)=f(x), x\in R 。$$

则 $v(t,x)$ 可以表示为

$$v(t,x)=E\left[f(x+B_t)e^{-\int_0^t q(x+B_s)ds}+\int_0^t g(x+B_s)e^{-\int_0^s q(x+B_r)dr}ds\right]$$

其中 $\{B_t, t\ge 0\}$ 为一维标准布朗运动。

3. （20 分）令 $\{B_t, t\ge 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\Im,P)$ 上的一维标准布朗运动，$\mu\ge 0$ 为常数，求一与 P 等价的测度 Q 使 $W_t=B_t+\mu t$ 为 $(\Omega,\Im,Q)$ 上的一维标准布朗运动。若令 $M_t=\sup W_s$，求 M_t 的分布.

4. （25 分）令 $\{B_t, t\ge 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\Im,P)$ 上的一维标准布朗运动，$\Im=\{F_t, t\ge 0\}$ 是其自然完备化过滤。证明：对任意 $t>s$，任意有界 Borel 可测函数 f 有

$$E[f(B_t)\,|\,F_s]=P_{t-s}f(B_s)$$

其中 $\{P_t, t\ge 0\}$ 为热半群。特别有

$$E[f(B_t)\,|\,F_s]=E[f(B_t)\,|\,B_s]=G(B_s),$$

其中

$$G(x)=P_{t-s}f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_R f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}dy 。$$