第二部分　　微分学

第一讲、 中值定理及其应用

基本内容: 中值定理、导函数性质、 L'Hospital 法则、偏导数、全微分

Fermat **定理**　若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 且存在导数 $f'(x_0)$, 则一定有 $f'(x_0)=0$.

Rolle **定理**　设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且有 $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

Lagrange **中值定理**　设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在(a,b) 上可微, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

Cauchy **中值定理**　设函数 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, 在(a,b) 上可微, 且满足条件

$$g(b)-g(a)\neq 0,\ \text{和}\ {f'}^2(x)+{g'}^2(x)\neq 0\,,\ \forall x\in(a,b),$$

则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Darboux **定理**　设函数 f 在区间 I 上可微, 则导函数 f' 具有介值性质.

单侧导数极限定理　设 f 在 (a,b) 可微, 又在点 a 右连续. 若导函数 $f'(x)$ 在点 a 存在右侧极限 $f'(a+)=A$, 则 f 在点 a 也一定存在右侧导数 $f'_+(a)$, 且成立

$$f'_+(a)=f'(a+)=A$$

推论　设 f 在区间 (a,b) 上可微, 则导函数 $f'(x)$ 不会有第一类间断点.

L'Hospital **法则**　设极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (其中 a 为有限或 ∞), 满足：(1) 这个极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的不定式；(2) 极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (其中 A 为有限或 $\pm\infty$). 则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

有限增量公式

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta x|+|\Delta y|).$$

可微的意义: 在 (x_0,y_0) 附近函数 $z=f(x,y)$ 可用一个 Δx 与 Δy 的线性函数近似代替.

多元函数的连续性、偏导数存在性、可微性之间有下列关系

$$\begin{tikzcd}
\text{偏导数存在} \arrow[rr, "\text{在某个邻域内偏导数有界}"] \arrow[dr, shift right, "\text{偏导数连续}"'] & & \text{连续} \\
& \text{可微} \arrow[ul, shift right] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

混合偏导数与次序无关的条件　若 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在, 且 $f_{xy}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 则 $f_{yx}(x_0,y_0)$ 存在, 且 $f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$.

§1.1　Rolle 定理、 Cauchy 中值定理、导函数性质、 L'Hospital 法则

例 1　用 Rolle 定理证明 Cauchy 中值定理、导函数性质和 L'Hospital 法则. 以较少的篇幅回顾一下这些重要定理的证明，从中体会导数的妙用(见附录).

例 2　证明函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \sqrt{x}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

例 3　设 f 在 $(a,+\infty)$ 可微且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=A$, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例 4　设 g 是有界变差函数，若 g 又是某个函数的导函数, 则 g 必定是连续函数.

例 5　设 $f''(0)$ 存在,证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-2f(0)+f(-2h)}{4h^2}=f''(0)$$

例 6　设 f在 $\mathbb{R}$ 上有界且二次可导, 证明 f'' 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有零点.

§1.2　归零法和待定系数法–辅助函数的构造

例 1　设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二次可导.　$f(a)=f(b)=0$. 则 $\forall x\in(a,b)$, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.

例 2　设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二次可导, $|f(x)|\leqslant 1$, $(f(0))^2+(f'(0))^2=4$. 证明存在 ξ , 使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

例 3　设 f 在 $[a,b]$ 上三次可导, $f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=-\frac{f'''(\xi)}{12}(a-b)^3.$$

§1.3　高维的讨论

例 1　高维的 Fermat 定理: 若 (x_0,y_0) 是函数 $z=f(x,y)$ 的极值点, 且在 (x_0,y_0) 处 f 的偏导数存在, 则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. (高维的 Rolle 定理又如何？)

例 2　设 $f(x,y)$ 在单位圆盘 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ 上具有连续的一阶偏导数, 且满足 $|f(x,y)|\leqslant 1,\quad\forall(x,y)\in D$. 证明: 存在点 $(x_0,y_0)\in \mathrm{Int}D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, 使得$(f_x(x_0,y_0))^2+(f_y(x_0,y_0))^2\leqslant 16$.

例 3　高维映射不一定成立中值定理，但有中值不等式.

例 4　(多元函数的连续、偏导和可微的讨论)　讨论非负参数 α 分别取何值时函数

$$f(x)=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续, 可导, 导函数连续?

第一讲练习题

1. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且$\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 试证: $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$.
2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 $n+1$ 阶导数, 且满足$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$, $k=0,1,\cdots,n$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使$f(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$.
3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 又$f(a)=0$, $f(x)>0, x\in(a,b)$. 证明: 不存在常数$M>0$, 使$\left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right|\leq M$, $x\in(a,b)$.
4. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$. 证明:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A.$$
5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 又 $f(x)$ 不是线性函数, 且 $f(b)>f(a)$. 试证: $\exists\xi\in(a,b)$, 使
$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 并设存在 $A>0$, 使 $|f'(x)|\leq A|f(x)|$, $x\in[0,+\infty)$. 证明 $f(x)\equiv 0$, $x\in[0,+\infty)$.
7. 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近连续, 且 $f_x((x_0,y_0)$, $f_y((x_0,y_0)$ 存在, 问 $f(x,y)$ 是否在 (x_0,y_0) 处可微?

8. 给出满足 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数和方向导数均存在但不连续的例子.
9. 举例说明
   (1) $f(x,y)$ 在某一点的邻域内存在偏导数, 但在该点不一定连续, 从而不一定可微.
   (2) $f(x,y)$ 在某一点连续, 但在该点偏导数不一定存在, 从而不一定可微.
   (3) $f(x,y)$ 在某一点可微, 但在该点偏导数不一定连续.
10. 设 $z=f(x,y)$ 在开集 $D=(a,b)\times(c,d)$ 上可微, 且全微分 $\mathrm{d}z$ 恒为零. 问 $f(x,y)$ 在 D 内是否应取常数值? 证明你的结论.
11. 设
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$
证明: (1) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都存在; (2) $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 在 $(0,0)$ 点不连续; (3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微. (本习题也说明从可微不能推出偏导数连续.)