第三次作业 5.1，5.3，5.14（2），5.22

5.1 设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 为两组子样观测值, 它们有如下关系

$$u_i = \frac{x_i - a}{b} \quad (b \neq 0, a\text{都为常数})$$

求子样平均值$\bar{u}$ 与$\bar{x}$, 子样方差S_u^2 与S_x^2 之间的关系.

解:

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - a}{b} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right) = \frac{1}{b}(\bar{x} - a)$$

$$S_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - a}{b} - \frac{\bar{x} - a}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{b^2}S_x^2.$$

5.3 利用切比雪夫不等式求钱币需要抛多少次才能使子样均值$\bar{\xi}$落在0.4到0.6之间的概率至少为0.9? 如何才能更精确地计算使概率接近0.9所抛的次数是多少?

解. 设需抛钱币为n 次。又设第i 次抛钱币时,

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{第}i\text{ 次抛出正面,} \\ 0 & \text{第}i\text{ 次抛出反面,} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

则ξ_i 独立同分布, 且有分布$P(\xi_1 = 1) = P\{\xi_1 = 0\} = \frac{1}{2}$. 计算得

$$E\xi_i = \frac{1}{2}, \quad D\xi_i = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由于$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, 易知$E\bar{\xi} = \frac{1}{2}$, $D\bar{\xi} = \frac{1}{4n}$. 那么依据题意, 我们有

$$\begin{aligned} P\left(0.4 \leq \bar{\xi} \leq 0.6\right) &= P\left(|\bar{\xi} - E\bar{\xi}| \leq 0.1\right) \\ &\geq 1 - \frac{E|\bar{\xi} - E\bar{\xi}|^2}{0.01} \geq 0.9 \end{aligned}$$

解得$n \geq 250$, 所以至少需要抛250 次.

另一方面, 利用中心极限定理, 我们有

$$\begin{aligned} P\left(0.4 \leq \bar{\xi} \leq 0.6\right) &= P\left(-0.2\sqrt{n} \leq \frac{\bar{\xi} - E\bar{\xi}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} \leq 0.2\sqrt{n}\right) \\ &\approx 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \geq 0.9 \end{aligned}$$

解得$n \geq 68.0625$, 所以至少需要抛69次.(68问题也不大) □

5.14 设母体ξ 服从参数为λ 的泊松分布，$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是取自此母体的一个子样. 求

(1) 子样的联合概率分布列;

(2) 子样均值$\bar{\xi}$ 的分布列、$\mathrm{E}\,\bar{\xi}, D\bar{\xi}$ 和ES_n^2.

解:（1）子样的联合分布列：

$$P(\xi_1=x_1,\xi_2=x_2,\cdots,\xi_n=x_n)=\prod_{i=1}^n P(\xi_i=x_i)=\prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}e^{-n\lambda}\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)^{-1},$$
$$x_i=0,1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,n.$$

(2) 设母体ξ服从参数为λ的泊松分布, $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$是取自此母体的一个子样. 求子样均值$\bar{\xi}$的分布列,$E\bar{\xi}$,$D\bar{\xi}$和$ES_n^2$.

解. 由题意, $n\bar{\xi}\sim P(n\lambda)$, 所以

$$P\left(\bar{\xi}=\frac{k}{n}\right)=e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^k}{k!}\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$E\bar{\xi}=\frac{1}{n}E[n\bar{\xi}]\lambda,$$
$$D\bar{\xi}=\frac{D[n\bar{\xi}]}{n^2}=\frac{\lambda}{n},$$
$$ES_n^2=\frac{n-1}{n}D\xi=\frac{n-1}{n}\lambda$$

□

5.22 设母体ξ 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,$\bar{\xi}$和S_n^2分别为容量为n 的子样均值和子样方差,又设$\xi_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且与$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$独立. 试求统计量

$$\frac{\xi_{n+1}-\bar{\xi}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

的抽样分布.

解. 由题可得

$$\frac{\xi_{n+1}-\bar{\xi}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}=\frac{\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(\xi_{n+1}-\bar{\xi}\right)}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}}}$$

而

$$\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(\xi_{n+1}-\bar{\xi}\right)\sim N(0,1),$$

$$\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

所以$\frac{\xi_{n+1}-\bar{\xi}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t(n-1)$. □