第五讲、 极值问题

§5.1 基本极值与最值

极值的必要和充分条件

考虑定义在一个开区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的 n 元二次连续可微函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$. 设 $\boldsymbol{p}_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in D$ 是 f 的一个极值点，那么其必要条件是： $\boldsymbol{p}_0$ 处的梯度向量 $\nabla f(\boldsymbol{p}_0) = \mathbf{0}$.

由二阶 Taylor 展式

$$f(\boldsymbol{p}_0 + \Delta \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}_0) + \frac{1}{2!} \Delta \boldsymbol{x} \cdot Q \cdot \Delta \boldsymbol{x}^T + \circ(r^2),$$

可以根据二次型 $\Delta \boldsymbol{x} \cdot Q \cdot \Delta \boldsymbol{x}^T$ 的符号来确定 $f(\boldsymbol{x})$ 能否在 $\boldsymbol{p}_0$ 处取到极值（其中 $Q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} (\boldsymbol{p}_0)$），即有如下的极值的充分条件:

设函数 f 在驻点 $\boldsymbol{p}_0$ 的某邻域内有二阶连续偏导数, 则
(1) 若 Q 是正定的, 则 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是极小值;
(2) 若 Q 是负定的, 则 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 是极大值;
(3) 若 Q 是不定的(即既有正的特征值, 也有负的特征值), 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点不是极值点;
(4) 若 Q 是半定的(即所有特征值同号, 但有零特征值), 则需进一步判别.

注 Hesse 矩阵 Q 是否是正定、负定可以根据高代中学到的 Sylvester 准则来判断，即考虑 Q 的各阶主子式的符号. 特别当 f 是二元函数 $f(x, y)$ 时有

如 $f(x, y)$ 在驻点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有二阶连续偏导数, 并设 $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$ 以及 $\Delta = AC - B^2$, 则

(1) 若 $\Delta > 0, A > 0$ 则 f 在 (x_0, y_0) 点有极小值;
(2) 若 $\Delta > 0, A < 0$, 则 f 在 (x_0, y_0) 点有极大值;
(3) 若 $\Delta < 0$, 则 f 在 (x_0, y_0) 点没有极值;
(4) 若 $\Delta = 0$, 则需进一步判别.

求多元函数 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的极值的步骤可归结如下:

1. 通过解方程组 $f_{x_i} = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 求出驻点 $\boldsymbol{p}_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$;
2. 如果函数 f 在驻点 $\boldsymbol{p}_0$ 的某邻域内有二阶连续偏导数, 则考查 Hesse 矩阵 $Q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} (\boldsymbol{p}_0)$, 利用上述的充分条件;
3. 考查 f_{x_i} 不存在的点是否为极值点;
4. 考查没有二阶连续偏导数的驻点是否为极值点.

最大、最小值的判定

以二元函数为例叙述如下:

1. 如果 $f(x, y)$ 定义在有界闭区域 D上, 则先求出 D 内部的全部驻点, 不可导点及相应的函数值, 然后求出 f 在 ∂D 上的最值(可将边界曲线代入 $f(x, y)$, 化为求一元函数的最值问题), 最后取所有这些函数值的最大者为最大值, 最小者为最小值.
2. 如果 $f(x, y)$ 定义在有界开区域 U上, 有时需要先将 $f(x, y)$ 的定义域连续延拓到 $\overline{U}$ 上, 然后求有界闭区域上的最大最小值, 最后进行比较.
3. 如果 $f(x, y)$ 定义在无界区域上, 则去掉明显取不到最值的边界部分, 使之成为有界区域上的最值问题.

4. 也可利用

$$\max f=\max_x\max_y f \text{ 或 } \max_y\max_x f,$$

对 x,y 累次求最值.

例 1 求 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最大值与最小值.

例 2 证明: 当 $t\geqslant 1$, $s\geqslant 0$ 时, 成立不等式

$$ts\leqslant t\ln t-t+\mathrm{e}^s.$$

§5.2 条件极值与条件最值

目标函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在限制条件 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ i=1,\cdots,m(m<n)$ 下的极值问题, 可归结为对 Lagrange 函数

$$L(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_n) \tag{5}$$

求普通极值的问题, 其中 $\lambda_i,\ i=1,\cdots,m$ 为参数因子. 这种方法称为 Lagrange 乘子法.

Lagrange 乘子法的具体步骤是:

1. 作出Lagrange 函数 (5),

2. 由 $L_{x_i}=0,\ i=1,\cdots,n$ 与 $\varphi_i=0,\ i=1,\cdots,m$ 联立解出 L 的全部驻点与 $\lambda_i,\ i=1,\cdots,m$ 的具体值, 并要求驻点处矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{6}$$

的秩为 m.

3. 对每个驻点 $\boldsymbol{p}_0$, 算出 Hesse 矩阵 $H(\boldsymbol{p}_0)=\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}(\boldsymbol{p}_0)$.

(1) 若 $H(\boldsymbol{p}_0)$ 正定, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为(条件) 极小值点.

(2) 若 $H(\boldsymbol{p}_0)$ 负定, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为(条件) 极大值点.

(3) 若 $H(\boldsymbol{p}_0)$ 既不是正定, 也不是负定, 则由

$$\mathrm{d}\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=0,\quad i=1,\cdots,m$$

以及矩阵 (6) 的秩为 m, 解出 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 中的 m 个, 不妨设可解出 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\ \mathrm{d}x_m$, 将其代入 n 元二次型

$$(\mathrm{d}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\mathrm{d}x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^2L(\boldsymbol{p}_0)$$

中, 化为 $(n-m)$ 元二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n-m}a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j.$$

令 $A=(a_{ij})_{(n-m)\times(n-m)}$. 若 A 是正定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为(条件) 极小值点. 若 A 是负定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 点为(条件) 极大值点. 若 A 是不定的, 则 $\boldsymbol{p}_0$ 不是(条件) 极值点. 若 A 是半定的, 则需进一步判定.

如此看来, 若出现 $H(\boldsymbol{p}_0)$ 既不正定, 也不负定的情况下, 计算将相当复杂.

在实际问题中, 更多的是条件最值问题. 我们往往用一些比较灵活又方便的判断方法替代上述讨论（不必考虑 Hesse 矩阵 ）. 在《数学分析习题课讲义（下）》中有系统的总结.

例 1　求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y + z = 1$ 的交线 L 上的点到原点的最大与最小距离.

例 2　椭球面 $\dfrac{x^2}{3} + y^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1$ 被通过原点的平面 $2x + y + z = 0$ 截成一个椭圆 Π. 求此椭圆的面积.

例 3　证明二次型 $f(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$ 在单位球面 $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上的最大值与最小值恰为矩阵

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

的最大特征值与最小特征值.

例 4　在 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$ 条件下求 $\max u,\ u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$，其中 $\alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

例 5　设函数 $F(x,y)$ 连续可偏导, $F(x,y) = 0$ 是不自交的封闭曲线, 记为 Γ . 设 $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$ 在 Γ 上处处成立. 证明：若 AB 是 Γ 的极大弦，则 Γ 在 A, B 处的两条切线平行.

例 6　求函数 $z = x^2 + xy - y^2$ 在圆盘 $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大、最小值.

例 7　求由方程

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$$

所确定的函数 $z = z(x,y)$ 的极值.

第五讲练习题

1. 求 $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ 满足条件 $x - y = \dfrac{\pi}{4}$ 时的极值.
2. 求曲面 $z = xy - 1$ 上与原点最近的点的坐标.
3. 过椭圆 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 上任意点作此椭圆的切线, 求切线与两坐标轴围成的三角形面积最小者.
4. 在抛物线 $y = x^2$ 的所有与法线重合的弦中求长度最短的弦.
5. 设函数 $F(x,y)$ 连续可偏导, Γ 是由 $F(x,y) = 0$ 确定的不自交的封闭曲线. 设 $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$ 在 Γ 上处处成立. 若 (x_0, y_0) 是 Γ 外的一定点, (x_1, y_1) 是 Γ 上到 (x_0, y_0) 最近的点. 求 Γ 在 (x_1, y_1) 处的法线方程.
6. 设函数 $F(x,y,z)$ 连续可偏导, S 是由 $F(x,y,z) = 0$ 确定的不自交的光滑封闭曲面. 设 $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ 在 S 上处处成立. 证明：若 A, B 是 S 的两点, 且使 A 和 B 的距离是 S 任两点间距离的最大值. 证明 S 在 A, B 处的两个切平面平行, 且均垂直于 A 和 B 的连线.

7. 用条件极值的方法证明 Hőlder 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{1/q},$$

其中 $a_i \geqslant 0, x_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, n;\ p, q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

8. 求 $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ 在 $D = \{(x, y)|x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant \pi\}$ 上的最大、最小值.
9. 求 $z = x^2 - xy + y^2$ 在 $|x| + |y| \leqslant 1$ 中的最大、最小值.
10. 求函数 $z = 2x^2 + 12xy + y^2$ 在椭圆盘 $\{\ (x, y):\ x^2 + 4y^2 \leq 25\ \}$ 上的最小值.
11. 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，且设 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{ij})^2 = H_j, j = 1, 2, \cdots, n$, 其中 $H_1, \cdots, H_n$ 是 n 个确定的非负实数.

   (a) 证明：如果矩阵 A 的行向量是 $\mathbf{R}^n$ 中两两正交的向量，则 $(\det A)^2$ 取到极值;

   (b) 根据等式 $(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^*$, 其中 A^* 是矩阵 A 的转置矩阵, 证明：

   $$\max_A \det{}^2 A = \prod_{j=1}^{n} H_j;$$

   (c) 证明：对任意的矩阵 $B = (b_{ij})$ 有 Hadamard 不等式

   $$(\det B)^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}(b_{ij})^2\Big);$$

   (d) 给 Hadamard 不等式以直观的几何解释.

讨论专题（可阅读《数学分析习题课讲义》）

一、 多元函数和高维映射的中值定理.

二、 多元函数增长最快的方向.

三、 整体隐函数的存在性.

四、 条件极值的充分性判据.