苏州大学 <u>抽象代数</u> 课程试卷(A)　共4页

(考试形式　闭卷　　2007年7月)

院系____________年级____________专业____________

学号____________姓名____________成绩____________

一.　写出S_3的所有子群和正规子群. (15分)

二.　设$G=\langle a\rangle$是n 阶循环群，对$\forall r\in Z$ 证明：a^r 的阶$\frac{n}{(r,n)}$. (15分)

三. 设R 是含有单位元1 的环。M 是R 上的一个2 阶方阵构成的集合, 即:

$$M = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} | a_{ij} \in R, i, j = 1, 2\}$$

证明: M关于如下定义的加法和纯量乘法

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{pmatrix} \quad \forall \ r \in R$$

构成一个自由R-模, 并找出一组基. (15分)

四.　设H 是群G 的一个正规子群，假设$[G : H] = n$，证明：对$\forall\ a \in G$都有$a^n \in H$. (15分)

五.　设F是域, L 是F 的扩域, K 是L 的扩域，假设$[K : F]$ 有限，证明: $[K : F] = [K : L][L : F]$. (15分)

六. 设R 是交换环，I 是R 的理想，令$rad(I) = \{a \in R : 存在n \geq 1$ 使得$a^n \in I\}$，证明：$rad(I)$ 也是R 的一个理想。（15分）

七. 设F 是域，$n > 0$ 为整数，$F^{n\times n}$ 是F 上的所有n 阶方阵构成的集合。证明：

(1) 关于矩阵的加法和乘法，$F^{n\times n}$ 构成一个环。

(2) $F^{n\times n}$ 的每个最小的左理想都是主理想.