Lecture notes on differential geometry

Kui Wang

2021 年 11 月 9 日

摘要

该讲义列出了上课时的主要内容。注意该讲义仅仅是一个初稿，在后续的备课过程中我会再修改以及补充更多的内容和细节。

建议参考书目：

1. 《Differential Geometry of Curves and Surfaces》by Do Carmo [dC16];
2. 《微分几何》彭家贵, 陈卿编著.

课程主要内容：

- 曲线的局部理论
- 曲面的局部理论
- 活动标架
- 曲面的内蕴几何
- 曲线曲面的整体性质

目录

0.1 习题 (本次作业 11 月 9 日提交)

习题 0.1. *证明在参数曲面上的任何一点, 任何两个相互正交的切向的法曲率之和为常数.*

证明. 设 $p \in \mathbf{S}$, $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 分别为 p 处的正交单位主方向, 主曲率为 κ_1 和 κ_2. 对于任意的 $\alpha \in [0.2\pi)$, 由 Euler 公式有

$$\kappa_n(\cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2) = \kappa_1\cos^2\alpha + \kappa_2\sin^2\alpha,$$
$$\kappa_n(-\sin\alpha\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\mathbf{e}_2) = \kappa_1\sin^2\alpha + \kappa_2\cos^2\alpha$$

故而

$$\kappa_n(\cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2) + \kappa_n(-\sin\alpha\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\mathbf{e}_2) = \kappa_1 + \kappa_2 = 2H.$$

□

习题 0.2. *考虑 Enneper 曲面*

$$\mathbf{r}(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2).$$

(1) 求它的第一、第二基本形式以及主曲率.
(2) 证明曲率线为坐标曲线.
(3) 证明渐近线为 $u + v =$ 常数和 $u - v =$ 常数.

解. 直接计算可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= \Big(1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u\Big)\\
\mathbf{r}_v &= \Big(2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v\Big)\\
\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}\Big(-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2\Big)\\
\mathbf{r}_{uu} &= \Big(-2u, 2v, 2\Big)\\
\mathbf{r}_{uv} &= \Big(2v, 2u, 0\Big)\\
\mathbf{r}_{vv} &= \Big(2u, -2v, -2\Big).
\end{aligned}$$

(1) 由

$$
\begin{aligned}
E =& \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = (1+u^2+v^2)^2 \\
F =& \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0 \\
G =& \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = (1+u^2+v^2)^2
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
L =& \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 2 \\
M =& \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = 0 \\
N =& \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = -2
\end{aligned}
$$

有

$$
\mathbf{I} = (1+u^2+v^2)^2(du^2+dv^2), \qquad \mathbf{II} = 2du^2 - 2dv^2.
$$

设 $-\mathcal{W}$ 在 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ 下的系数矩阵为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 则由命题 7.4 有

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =& \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \\
=& \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

所以主曲率为

$$
\kappa_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}, \qquad \kappa_2 = -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}.
$$

(2) 由于坐标曲线切向量 $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ 为主方向, 因此坐标曲线为曲率线.
(3) 设 $\mathbf{r}(u(s), v(s))$ 为渐近线, 则

$$
0 = \kappa_n(u'(s)\mathbf{r}_u + v'(s)\mathbf{r}_v)
$$

故而 $(u')^2 = (v')^2$, 故而渐近线为 $u(s)+v(s) = C$ 以及 $u(s)-v(s) = C$. □

习题 0.3. *设 $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3$ 为一正则曲面, $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为一个相似映射, 定义为:*

$$
F(p) = 2p, \quad p \in \mathbb{R}^3.
$$

(1) 证明 $F(\mathbf{S})$ 是正则曲面;

(2) 记 $\mathbf{S}$ 的平均曲率为 H, Gauss 曲率为 K. 求 $F(\mathbf{S})$ 的平均曲率和 Gauss 曲率.

证明. (1) 设 $\mathbf{S}$ 的一个曲面片为 $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in U\subset\mathbb{R}^2$, 则 $F(\mathbf{S})$ 的对应的曲面片为 $\bar{\mathbf{r}}(u,v)=2\mathbf{r}(u,v)$, 显然有

$$\bar{\mathbf{r}}_u = 2\mathbf{r}_u \quad \text{以及} \quad \bar{\mathbf{r}}_v = 2\mathbf{r}_v,$$

线性无关, 故而 $F(\mathbf{S})$ 正则.
(2) 直接计算有

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n}, \quad \bar{\mathbf{r}}_{uu} = 2\mathbf{r}_{uu}, \quad \bar{\mathbf{r}}_{uv} = 2\mathbf{r}_{uv}, \quad \bar{\mathbf{r}}_{vv} = 2\mathbf{r}_{vv}.$$

所以

$$\bar{E} = 4E, \quad \bar{F} = 4F, \quad \bar{G} = 4G$$

以及

$$\bar{L} = 2L, \quad \bar{M} = 2M, \quad \bar{N} = 2N.$$

进而

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\frac{\bar{E}\bar{N} - 2\bar{F}\bar{M} + \bar{G}\bar{L}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \frac{1}{4}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} = \frac{1}{2}H$$

以及

$$\bar{K} = \frac{\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \frac{1}{4}\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{4}K.$$

□

参考文献

[dC16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. Revised & updated second edition of [MR0394451].