第二讲、 极限

基本内容: **数列极限和函数极限的定义; 归结原理;** Cauchy **收敛准则; 求极限的各种方法（单调有界定理、夹逼定理、拟合法与Cauchy命题、**Stolz **定理、无穷小量的使用、不定式与** L'Hospital **法则、运用带** Peano **余项的** Taylor **展式、化为积分和）; 上、下极限及其性质;** Wallis **公式与** Stirling **公式.**

§2.1 极限的存在性和 Cauchy 收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a （ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ）的 $\varepsilon - N$ 定义是:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N\text{ , 使得 } n \geq N \text{ 时有 } |a_n - a| < \varepsilon\ .$$

函数 $f(x)$ 在 x_0 处收敛到 A （ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ）的 $\varepsilon - \delta$ 定义是:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0\text{ , 使得 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时有 } |f(x) - A| < \varepsilon\ .$$

归结原理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff$

对于任意数列 $x_n \to x_0\ (n\to\infty),\ x_n \neq x_0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Cauchy **收敛准则（数列）** 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\iff$

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N$, 使得 $n,\ m \geq N$ 时有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

单调有界定理 单调有界数列必有（有限）极限.

例 1. 设对每个 n 成立 $0 < x_n < 1$ 和 $(1 - x_n)x_{n+1} \geq \dfrac{1}{4}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

例 2. (1) 证明数列 $\{c_n\}$ 收敛, 其中 $c_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$（极限称为 Euler 常数 γ ）.

(2) 求级数 $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3n-2} + \dfrac{1}{3n-1} - \dfrac{2}{3n} + \cdots$ 的和.

例 3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n^2})(1 + \dfrac{2}{n^2})\cdots(1 + \dfrac{n}{n^2})$.

例 4. 证明 $n\to\infty$ 时, (1) $\sin n$ 不存在极限; (2) $\sin n^2$ 不存在极限.

§2.2 求极限的基本方法

一、运用夹逼定理

推广的夹逼定理 对任意 $\epsilon > 0$, 存在$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 使 $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant M - \epsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant M + \epsilon$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$.

例 5. 给定 p 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n}$.

例 6. 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p(n)}{n} = 0$.

二、拟合法与 Cauchy 命题、Stolz 定理

Cauchy **命题** 设 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 则它的前 n 项的算术平均值(所成的数列) 也收敛于 a, 即有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

$\dfrac{0}{0}$ **型的** Stolz **定理** 设数列$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 还是严格单调减少数列, 又存在

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

其中 l 为有限或 $\pm\infty$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

$\dfrac{*}{\infty}$ **型的 Stolz 定理**　设数列$\{a_n\}$ 是严格单调增加的无穷大量, 又存在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

其中 l 为有限或$\pm\infty$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

例 7.　求数列 $\{a_n\}$ 的极限, 其中 $a_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}, n\in\mathbb{N}$.

例 8.　设 $a_1>0$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$, 证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

例 9.　设已知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=a$.

例 10.　已知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\{p_n\}$ 为严格单增正序列, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=+\infty$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0.$$

例 11.　设 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=s$. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+\frac{s_2}{2}+\cdots+\frac{s_n}{n}}{\ln n}$.

例 12.　设 $x_1\in(0,\frac{\pi}{2})$, $x_{n+1}=\sin x_n$, $n\in\mathbf{N}$. 证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$.

三、无穷小量的使用

例, 当 $x\to0$ 时, 有:　$\sin x\sim x$;　$\tan x\sim x$;　$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;
$\ln(1+x)\sim x$;　$e^x\sim x$;　$(1+x)^\alpha\sim\alpha x$.

例 13.　设存在极限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$, 又有 $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)=o(x)\ (x\to0)$, 证明 $f(x)=o(x)\ (x\to0)$.

例 14.　证明 $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时极限为 0, 并分析它作为无穷小量的阶数.

例 15.　求 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a>0, a\neq1$.

例 16.　设函数 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin2x+\cdots+a_n\sin nx$, 且对所有 x 成立 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$. 证明成立不等式 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$.

四、不定式与 L'Hospital 法则

有 $\dfrac{0}{0}$ 型、1^∞ 型和 $\dfrac{*}{\infty}$ 等型的不定式, 可用 L'Hospital 法则和下面的 Taylor 展式等方法求极限.

例 17.　求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

注: 有时对 1^∞ 型的不定式可用

$\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right)^{f(x)\cdot g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))}$，其中 f, g 大于 0 . 对 $x\to\infty$ 也对.

例 18. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$.

例 19. 证明函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x\sqrt{x}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

五、运用带 Peano 余项的 Taylor 展式

要熟记 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ 的带 Peano 余项的 Taylor 展式至少至 $4-5$ 项.

例 20. 设 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在. 定义数列

$$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right),\quad n\in\mathbb{N},$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 并求下列极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]$.

例 21. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^4(\cos\dfrac{1}{n}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^2}})$.

六、化为积分和

例 22. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}})$.

例 23. 设 $f\in C([0,1])$, $f(x)>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\dfrac{1}{n})f(\dfrac{2}{n})\cdots f(\dfrac{n-1}{n})f(1)}$.

例 24. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

七、多元函数的极限

例 25. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

直观上看分子的次数高于分母的次数, 极限应该是 0. 这种题目一般用极坐标代换后可化为一个有界量与无穷小量的乘积.

例 26. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

有时需要放不等式.

例 27. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}$.

例 28. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

证明函数的重极限不存在的常用方法:

(1) 找两种特殊的趋近方式, 使得在这两种方式下函数的极限值不相同. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x^2\leqslant|y| \text{ 或 } y=0,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 (x,y) 沿任何过原点的任何直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 点时, 有

$$\lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

但 (x,y) 沿曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 趋于 $(0,0)$ 点时

$$\lim_{(x,y=\frac{1}{2}x^2)\to(0,0)} f(x,y)=1,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的重极限不存在.

(2) 证明两个累次极限存在但不相等, 例如

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

由于

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=1,\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=-1,$$

于是重极限不存在. 因为如果重极限存在, 两个累次极限又存在, 由重极限与累次极限的关系, 则三个极限值应该相等.

§2.3 上、下极限

上、下极限有如下重要性质:

1. 不等式

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n,\\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) &\geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n.\end{aligned}$$

   在右边有意义时成立

2. 不等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)$$

   在中间的和式有意义时成立.

3. 若在两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中已知 $\{y_n\}$ 收敛(或广义收敛), 则成立

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\lim_{n\to\infty}y_n,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\lim_{n\to\infty}y_n,$$

   (在$\{y_n\}$ 广义收敛时要求所出现的和式有意义).

例 29. 设 $\{x_n\}$ 有界, 且已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}+2x_n)=A$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

例 30. 设 $\{x_n\}$ 为正有界数列. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$.

例 31. 设正数数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$, 证明 $\{a_n\}$ 无界.

例 32. 设数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1=1$ 和 $b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ $(n\in\mathbb{N})$ 生成. 讨论数列 $\{b_n\}$ 的敛散性, 若收敛则求出其极限.

例 33. 设 $y_n=x_n+2x_{n+1}, n\in\mathbb{N}$. 证明在数列 $\{y_n\}$ 收敛时, 数列 $\{x_n\}$ 也收敛.

例 34. 设 $\{x_n\}$ 为正数数列, 证明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geqslant 1$.

§2.4 Wallis **公式与** Stirling **公式**

Wallis **公式**: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$.

证明 在 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时有 $0<\sin x<1$, 因此就有 $\sin^{2n+2}x<\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x$. 这样就成立(积分) 不等式 $I_{2n+2}<I_{2n+1}<I_{2n}$. 其中

$$I_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & m=2n,\\ \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, & m=2n+1,\end{cases}$$

于是

$$I_{2n+2}=\frac{2n+1}{2n+2}\cdot I_{2n}<I_{2n+1}<I_{2n}.$$

两边除以 I_{2n}, 并取极限(即夹逼), 可见确实有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1.$$

再代入 I_{2n} 与 I_{2n+1} 的表达式, 就得到所要的结果:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{2}{\pi}=1. \quad \square$$

在应用中 Wallis 公式的几个等价形式有时更为方便. 例如:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n},\quad \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\sim\sqrt{\pi n}.$$

从上可见, Wallis 公式的实质就是刻画了双阶乘 $(2n)!!$ 与 $(2n-1)!!$ 之比的渐近性态.

Stirling **公式**: 关于阶乘 $n!$ 有渐近公式:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\ (n\to\infty)$$

及

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}},\ \theta\in(0,1).$$

证明见《数学分析习题课讲义》（上册）364-365 页.

例 35. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{n!}{n^n\sqrt{n}}$.

第二讲练习题

1. 设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $n\in\mathbf{N}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.
2. 设 $\{a_n\}$ 为正数数列, 并且已知它收敛于 $a>0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.
3. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0<a_1<1$ 和 $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$ $(n\geqslant 1)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$
4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\alpha\beta$.
5. 设 $f(x),\ g(x)>0,\ f,g\in C([0,1])$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 g(x)(f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x).$$

6. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)(f(x)-1)=\alpha$. 证明:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{\alpha}.$$

7. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛， b_n 单调趋于零，证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n=0$$

8. 设 $\{a_{2k-1}\}$, $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 都收敛, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.
9. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$, $n\in\mathbf{N}$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.
10. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 是 $p+1$ 个给定的数, 且满足条件 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})$.
11. 证明当 $0<k<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^k-n^k]=0$.
12. 设正数数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=0$, 证明 $\{a_n\}$ 是正无穷大量.
13. 设 $a_1=b$, $a_2=c$, 在 $n\geqslant 3$ 时 a_n 由递推公式 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ 定义. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.
14. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\mathrm{e}-(1+\dfrac{1}{n})^n)$.
15. 设 $a_n>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$.
16. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}}$.
17. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n})$.

18. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)}$.

19. 设 $0<\lambda<1$, $\{a_n\}$ 是收敛于 a 的正数数列. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\frac{a}{1-\lambda}.$$

20. 设 $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, $n\in\mathbf{N}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

21. 对一般的自然数 n 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx-n\sin x}{x^3}$.

22. 设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$. 证明: 对每个 $a>0$, 成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$.

23. 设成立 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)=o(x)\ (x\to 0)$. 证明: $f(x)=o(x)\ (x\to 0)$.