数学模型与数学软件

第 6 次作业

1907402030

熊　雄[*]

2022 年 4 月 11 日

[*]mrxiongx@foxmail.com　苏州大学数学科学学院本科生

Problem 1

(Page 137 Ex.1.)

分别用 fzero 和 fsolve 命令求方程 $\sin x - \frac{x^2}{2} = 0$ 的所有根, 准确到 10^{-10}, 取不同的初值计算, 输出初值、根的近似值和迭代次数, 分析不同根的收敛域; 自己构造某个迭代公式 (如 $x = (2\sin x)^{\frac{1}{2}}$ 等) 用迭代法求解, 并自己编写牛顿法程序进行求解和比较.

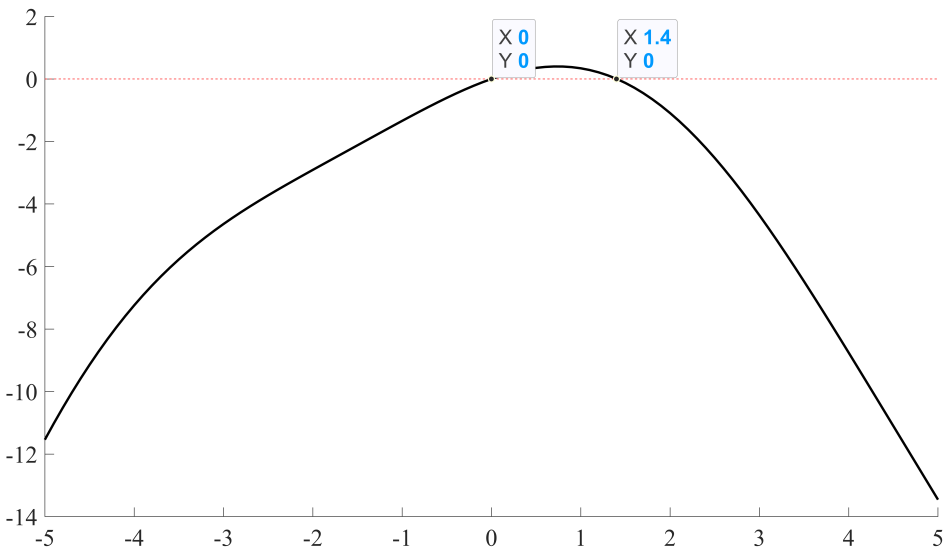
Solution.

a) **先找到 $y = \sin x - \frac{x^2}{2}$ 零点的大致范围**

输入 Matlab 代码如下:

```
x = -5 : 0.1 : 5;
y = sin(x) - x .^ 2 ./ 2;
z = 0 * x;
plot(x , y , 'k')
hold on
plot(x , z , 'r')
```

运行后输出图像



故易知 $y = \sin x - \frac{x^2}{2}$ 的一个零点为 0, 另一个零点在 1.4 附近.

b) **利用 fzero 和 fsolve 函数, 以 1.4 为初值, 求第二个零点**

- **fzero**

  输入 Matlab 代码如下:

```
y = sin(x) - x .^ 2 ./ 2;
t = 1.4;
[x, fv, ef, out] = fzero(inline('sin(x) - x ^ 2 / 2'), t);
fprintf("%.10f", x);
```

运行输出为:

```
>> ex1_2
1.4044148241>>
```

即利用 fzero 计算时, **根的近似值为 1.4044148241**, **迭代次数为 5 次**.

- **fsolve**

  输入 Matlab 代码如下:

```
y = sin(x) - x .^ 2 ./ 2;
t = 1.4;
[x, fv, ef, out, jac] = fsolve(inline('sin(x) - x ^ 2 / 2'), t);
fprintf("%.10f", x);
```

运行输出为:

```
>> ex1_4

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is near zero
as measured by the value of the function tolerance, and
the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>
1.4044148243>>
```

即利用 fsolve 计算时, **根的近似值为 1.4044148243**, **迭代次数为 6 次**.

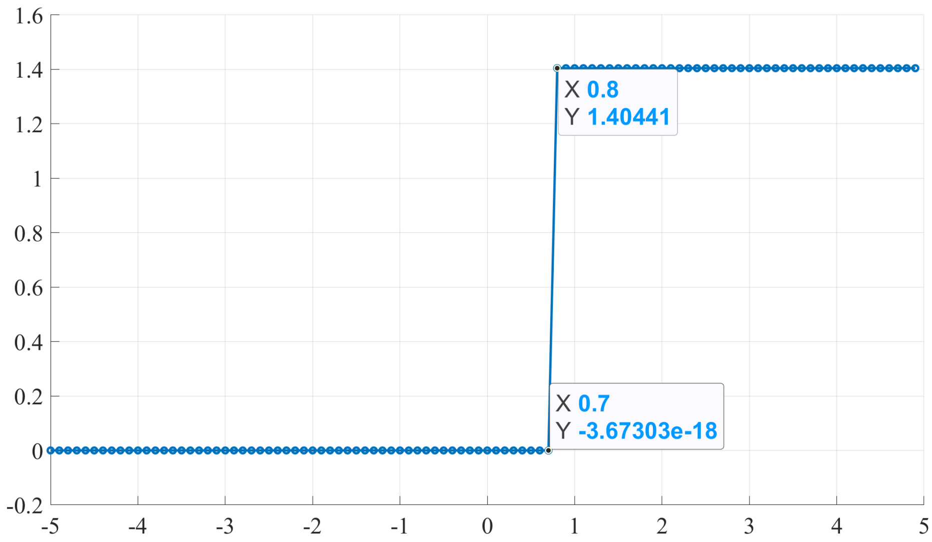
c) **寻找利用 fzero 函数的收敛域**

输入 Matlab 代码如下:

```
y = sin(x) - x .^ 2 ./ 2;
start = -5; % 起始位置
step = 0.1; % 步长
sub = 5; %终止位置
count = start : step : sub;
sum = (sub - start) / step;
result = zeros(2, sum); % 结果
for i = 1 : sum % 循环
```

```
    result(1, i) = count(i);
    [x, fv, ef, out] = fzero(inline('sin(x) - x ^ 2 / 2'), count(i));
    result(2, i) = x;
end
plot(result(1, : ) , result(2 , : )); % 绘图
grid % 网格
```

运行输出图像:



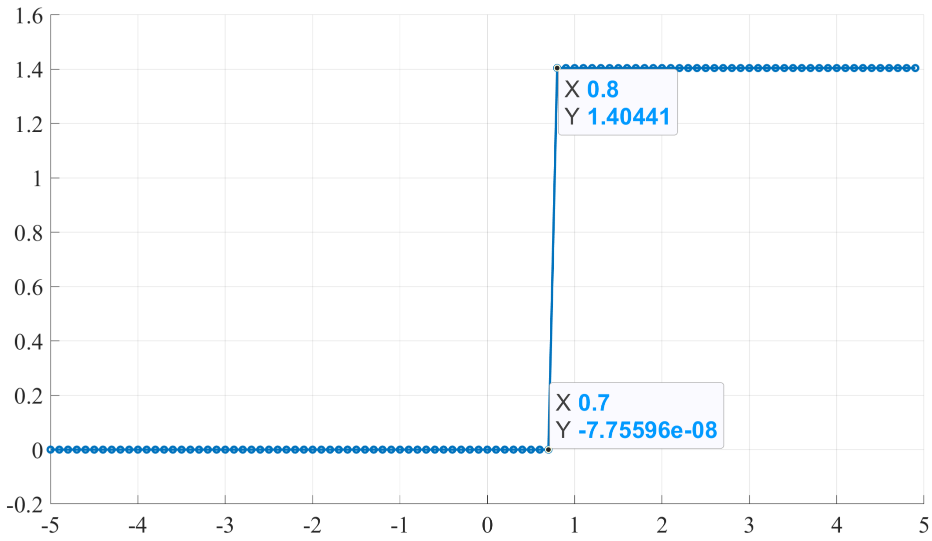
观察图像易知, 第一个零点 (即 0) 的收敛域大致为 [−5.0, 0.7], 第二个零点的收敛域大致为 [0.8, 5].

d) **寻找利用 fsolve 函数的收敛域**

输入 Matlab 代码如下:

```
y = sin(x) - x .^ 2 ./ 2;
start = -5; % 起始位置
step = 0.1; % 步长
sub = 5; %终止位置
count = start : step : sub;
sum = (sub - start) / step;
result = zeros(2 , sum); % 结果
for i = 1 : sum % 循环
    result(1, i) = count(i);
    [x, fv, ef, out, jac] = fsolve(inline('sin(x) - x ^ 2 / 2'), count(i));
    result(2, i) = x;
end
plot(result(1, : ) , result(2 , : )); % 绘图
grid % 网格
```

运行输出图像:



观察图像易知, 第一个零点 (即 0) 的收敛域大致为 [−5.0, 0.7], 第二个零点的收敛域大致为 [0.8, 5].

e) **构造迭代公式 $x_{k+1} = (2\sin x_k)^{\frac{1}{2}}$ 用迭代法求解**

- **第一个零点**

  输入 Matlab 代码如下:

```
format long;
wucha = 1e−10; % 误差
x0 = 0;
xPre = x0;
x = sqrt(2 ∗ sin(xPre));
while abs(x − xPre) >= wucha
 xPre = x;
 x = sqrt(2 ∗ sin(xPre));
end
x
```

  输出为:

```
>> ex1_8

x =

      0
```

  即用迭代法求得第一个零点的计算结果为 $x = 0$.

- **第二个零点**

  输入 Matlab 代码如下:

```
format long;
wucha = 1e−10; % 误差
x0 = 1.4;
xPre = x0;
x = sqrt(2 * sin(xPre));
while abs(x − xPre) >= wucha
 xPre = x;
 x = sqrt(2 * sin(xPre));
end
x
```

  输出为:

```
>> ex1_10

x =

      1.404414824090104
```

  即用迭代法求得第二个零点的计算结果为 $x = 1.40441482409010$.

f) **编写牛顿法的程序进行求解和比较**

输入 Matlab 代码如下:

```
format long;
wucha= 1e−10; % 误差
x0 = 1;
xPre = x0;
x = sqrt(2 * sin(xPre));
while abs(x − xPre) >= wucha
 xPre = x;
 x = x − (sin(x) − x ^ 2 / 2) / (cos(x) − x);
end
x
```

输出为:

```
>> ex1_12

x =

   1.404414824092434
```

此时用牛顿法求出的第二个零点为 $x = 1.404414824092434$, 且收敛速度更快. ■

Problem 2

(Page 137 Ex.2.)

a) 小张夫妇以按揭方式贷款买了一套价值 20 万元的房子, 首付了 5 万元, 每月还款 1000 元, 15 年还清, 问贷款利率是多少?

b) 某人欲贷款 50 万元购房, 他咨询了两家银行, 第一家银行开出的条件是每月还 4500 元, 15 年还清; 第二家银行开出的条件是每年还 45000 元, 20 年还清. 从利率方面看, 哪家银行较优惠 (简单地假设年利率 $=$ 月利率 $\times 12$)?

Solution.

a) 因为

$$\text{年还款额} = \text{贷款本金} \times \frac{\text{年利率} \times (1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}}}{(1 + \text{年利率})^{\text{还款年数}} - 1}, \tag{1}$$

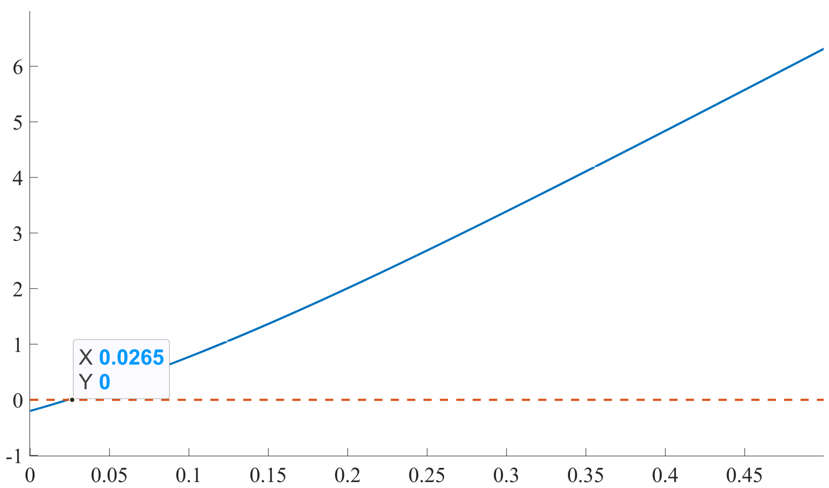
故设年利率为 x, 即求

$$f(x) = \frac{15 \cdot x(1+x)^{15}}{(1+x)^{15} - 1} - 1.2 \tag{2}$$

的零点. 利用 Matlab 作图观察函数零点, 代码如下:

```
x = 0 : 0.0001 : 0.5; % x 的范围
y = (15 .* x .* (1+ x) .^ 15) ./ ((1 + x) .^ 15 - 1) - 1.2; % f(x)
z = 0 * x; % x 轴
hold on
plot(x , y)
plot(x , z)
```

运行后输出图像



观察图像知: 函数零点在 0.0237 附近. 然后运行这段代码:

```
[x, fv, ef, out] = fzero(inline('(15 .* x .* (1+x) .^ 15) ./ ((1 + x) .^
        15 - 1) - 1.2'), 0.0237);
fprintf("%.10f" , x);
```

得到输出为:

```
>> ex2_2
0.0237066310>>
```

从而**年利率大致为 2.37066310%**.

b) 分别求出两家银行的年利率并进行比较.

- **对于第一家银行**
  设第一家银行的年利率为 a, 先求出

$$g_1(a) = \frac{50 \cdot a(1+a)^{15}}{(1+a)^{15} - 1} - 5.4$$

  的零点, 具体代码与 a) 类似, 求得函数零点在 0.0668 附近, 用 fzero 函数易求得 $a_0 \approx 6.74022322\%$

- **对于第二家银行**
  设第二家银行的年利率为 b, 先求出

$$g_2(b) = \frac{50 \cdot b(1+b)^{20}}{(1+b)^{20} - 1} - 4.5$$

  的零点, 具体代码与第 (1) 问类似, 求得函数零点在 0.0636 附近, 用 fzero 函数易求得 $b_0 \approx 6.39487771\%$

由于 $a_0 > b_0$, 故综上所述, **选择第二家银行比较优惠**. ■