2013年实变函数 期末B卷

熊雄

1 判断题（每题3分，共30分）

1.1 有理数集不是可数集。

错误，显然。

1.2 Cantor集为闭的零测集。

正确，课本P34 Sect2.7。

1.3 两个几乎处处相等的函数有相同的可测性。

正确，课本P65 Thm4.1.6。

1.4 若在集合E上，f_n依测度收敛于f，则f_n几乎处处收敛于f。

错误，显然。

1.5 可测函数列的极限（如果存在）不一定是可测函数。

错误，课本P66 推论4.1.8，若可测函数列$\{f_k(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，则$f(x)$为E上的可测函数。

1.6 有界变差函数可能不连续，而可导函数也可能不是有界变差函数。

1.7 连续的有界变差函数一定是绝对连续函数。

错误，课本P133 注6.5。绝对连续函数一定是连续函数，绝对连续函数一定是有界变差函数，连续的有界变差函数不一定是绝对连续函数。

1.8 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，则$f(x)$在$[a,b]$上Lebesgue可积与Riemann可积等价。

正确，显然。

1.9 若$f(x)$在$[a,b]$上**Lebesgue**可积，则$F(x)=\int_{[a,x]}f(t)dt\ (a\le x\le b)$在$[a,b]$上绝对连续。

正确，课本P127 Lemma6.4.3。

1.10 $f(x)$是在可测集E上的可测函数，则f在E上**Lebesgue**可积等价于$|f|$在E上**Lebesgue**可积

正确，显然。

2 叙述Lebesgue控制收敛定理和Fubini定理（10分）

略

3 作一几乎处处收敛但不依测度收敛的函数列。

课本P71 eg4.3.2

4 $f(x)$是$[a,b]$上的可微函数，证明$f'(x)$是$[a,b]$上的可测函数（10分）

课本P77 eg4.5.10

当$x>b$时补充定义$f(x)=f(b)$. 对每个k，令$g_k(x)=k\left[f\left(x+\frac{1}{k}\right)-f(x)\right]$，则在$[a,b)$上有$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=f'(x)$，且每个$g_k(x)$在$[a,b)$上为连续函数，所以$f'(x)$是$[a,b]$上的可测函数.

5 设$f(x),f_k(x)$是E上的非负可测函数，若$\{f_k\}$依测度收敛于$f(x)$，证明：$\varliminf\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx\ge\int_E f(x)dx$。（10分）

课本P104 eg5.8.8

（反证法）假设$\varliminf\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx<\int_E f(x)dx$，设$g_k=f_k(x)-f(x)$，即$\varliminf\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx<0$，则可以在中取出子列$\{g_{k_i}(x)\}$，使得$\lim\limits_{i\to\infty}\int_E g_{k_i}(x)dx<0$.

因为$\{g_{k_i}(x)\}$依测度收敛到0，由Riesz Thm知其存在子列$\{g_{k_{i_j}}\}$几乎处处收敛于0，即$\lim\limits_{j\to\infty}\int_E g_{k_{i_j}}(x)dx = 0\ \ a.e.$这与$\lim\limits_{i\to\infty}\int_E g_{k_i}(x)dx < 0$矛盾，故结论得证。

6 设$f(x)$是E上几乎处处大于零的可测函数，且$\int_E f(x)dx = 0$，证明：$m(E) = 0$。（10分）

课本P110 d1

设$E_0 = \{x : f(x) \le 0\}$，则$m(E_0) = 0$.

$$\begin{aligned} Then\ \ 0 &= \int_E f(x)dx \\ &= \int_{E\setminus E_0} f(x)dx + \int_{E_0} f(x)dx \\ &= \int_{E\setminus E_0} f(x)dx \\ &\ge \int_{\{x:f(x)\ge\frac{1}{n}\}} f(x)dx \\ &\ge \frac{1}{n} m\left(\{x : f(x) \ge \frac{1}{n}\}\right) \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

因此$m\left(\{x : f(x) \ge \frac{1}{n}\}\right) = 0$，而$E = E_0 \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) \ge \frac{1}{n}\}\right)$，故$m(E) = 0$.

7 若存在$M > 0$使得f在$[a, b]$上满足$|f(x) - f(y)| \le M\,|x - y|$，$\forall x, y \in [a, b]$成立，则$f$为绝对连续函数。（10分）

课本P131 eg6.5.7

8 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{2x^2},\ 0<x\le 1; \\ 0,\ x=0. \end{cases}$和

$g(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{2x},\ 0<x\le 1; \\ 0,\ x=0. \end{cases}$哪个是有界变差函数？哪个不是？并证明你的结论。（**10**分）

课本P122 eg6.2.2改编

$g(x)$是有界变差函数，$f(x)$不是有界变差函数，证明如下：

1. 首先说明$g(x)$是有界变差函数：

   当$x\neq 0$时，$|g'(x)|=\left|2x\cos\dfrac{\pi}{x}-\sin\dfrac{\pi}{x}\right|\le\sqrt{4x^2+1}\le\sqrt{5}.$

   当$x=0$时，限制$0<h\le 1$，$|g'(0)|=\left|\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h-0}\right|=|h\cos\dfrac{\pi}{h}|\le 1.$

   因此，$|g'(x)|\le\sqrt{5}$，则$g(x)$必为有界变差函数.

2. 下面说明$f(x)$不是有界变差函数：

   $\forall n\in\mathbb{N}$，作分割τ_n：
   $x_0=0<\dfrac{1}{\sqrt{2n}}<\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}<\cdots<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1=x_n.$

   对于此分割我们有变差：

$$\begin{aligned} T_{\tau_n}(f)&=\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)-f(0)\right|+\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right|+\cdots \\ &+\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|+\left|f(1)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \\ &=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ &=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots\frac{1}{2}+1 \end{aligned}$$

   由此可知：$T_a^b(f)=\infty$. 即$f(x)$不是有界变差函数.