1 部分习题答案

习题 1.1. *若曲面* $z = f(x) + g(y)$ *是极小曲面, 证明: 除相差一个常数外, 它可以写成*

$$z = \frac{1}{a} \ln \frac{\cos ay}{\cos ax}$$

这个曲面称为 Scherk 曲面.

证明. 当 $H = 0$ 时, 我们有

$$(1 + z_x^2) z_{yy} - 2 z_x z_y z_{xy} + (1 + z_y^2) z_{xx} = 0,$$

即

$$\frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} = -\frac{g''(y)}{1 + (g'(y))^2} := a$$

其中 a 为常数. 故而由

$$f''(x) = a\Big(1 + (f'(x))^2\Big)$$

解得

$$f(x) = -\frac{1}{a} \ln(\cos a(x - c_1)) + c_2,$$

类似可得

$$g(y) = \frac{1}{a} \ln(\cos a(y - c_3)) + c_4,$$

故除相差常数外,

$$z = \frac{1}{a} \ln \frac{\cos ay}{\cos ax}.$$

□

习题 1.2. *设* $\mathbf{S} : \mathbf{r}(u, v)$ *是正则的参数曲面,* H *和* K *为* $\mathbf{S}$ *的平均曲率和 Gauss 曲率. 记*

$$\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{n}(u, v)$$

为 $\mathbf{S}$ *的平行曲面.*

(1) 记 $d\bar{A}$ *和* dA *分别为* $\bar{\mathbf{S}}$ *和* $\mathbf{S}$ *上的面积元. 证明*

$$d\bar{A} = |1 - 2H + K| dA.$$

(2) 计算 $\bar{S}$ 的平均曲率和 Gauss 曲率.

(3) 如曲面 $\mathbf{S}$ 的平均曲率恒为常数 1/2. 证明 $\bar{\mathbf{S}}$ 的 Gauss 曲率为常数.

解. (1) 直接计算有

$$\bar{\mathbf{r}}_u = \mathbf{r}_u + \mathbf{n}_u, \quad \bar{\mathbf{r}}_v = \mathbf{r}_v + \mathbf{n}_v.$$

记 $A := (a_{ij})$ 为 $-\mathcal{W}$ 在 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v\}$ 下的系数矩阵, 则

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}_u \wedge \bar{\mathbf{r}}_v =& \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v + \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{n}_v + \mathbf{n}_u \wedge \mathbf{r}_v + \mathbf{n}_u \wedge \mathbf{n}_v \\ =& (1 - a_{22} - a_{11} + \det(A))\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v \\ =& (1 - 2H + K)\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{bmatrix}\mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{W}(\mathbf{r}_u) \\ \mathcal{W}(\mathbf{r}_v)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix}\mathbf{r}_u + \mathbf{n}_u \\ \mathbf{r}_v + \mathbf{n}_v\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}\mathcal{W}(\bar{\mathbf{r}}_u) \\ \mathcal{W}(\bar{\mathbf{r}}_v)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{r}}_u \\ \bar{\mathbf{r}}_v\end{bmatrix}.$$

所以 $-\mathcal{W}$ 在 $\{\bar{\mathbf{r}}_u, \bar{\mathbf{r}}_v\}$ 下的系数矩阵为

$$-\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1\end{bmatrix}^{-1}$$

所以

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - 2H + K}, \quad \bar{H} = \frac{H - K}{1 - 2H + K}$$

(3) 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, 由 (2) 有

$$\bar{K} = 1.$$

□

习题 1.3. 证明 $\mathbb{R}^3$ 中不存在闭 *(即紧致无边)* 的极小曲面.

证明. 若 $\mathbf{S}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中闭曲面, 则存在 $p_0 \in \mathbf{S}$ 使得

$$|p_0| = \max_{p \in \mathbf{S}} |p| = r_0.$$

取 $\mathbf{S}$ 在 p_0 附近的一个参数化 $\mathbf{r}(u,v)$ 使得 $\mathbf{r}(0,0) = p_0$, 故而函数

$$f(u,v) := |\mathbf{r}(u,v)|^2$$

在 $(0,0)$ 处取得极大值, 进而在 $(0,0)$ 处

$$\nabla f = 0, \quad \nabla^2 f \leq 0$$

即

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} + r_0 \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \leq 0$$

因此

$$\mathbf{I} + r_0 \mathbf{II} \leq 0$$

即对任意的 $X \in T_{p_0}\mathbf{S}$ 有

$$\kappa_n(X) \leq -\frac{1}{r_0}$$

所以 p_0 为椭圆点, 进而 $\mathbf{S}$ 不可能是极小曲面. $\square$

参考文献

[dC16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. Revised & updated second edition of [MR0394451].