2022 年《复变函数》期中考试答题纸

学号：1907402030　姓名：熊雄

100

一、

(1) 解：$f(z)=e^{z}\cdot\cos z$ 在 $|z|\le 1$ 内解析

故由 Cauchy 积分定理，$\int_{|z|=1} f(z)dz=0$

而 $\int_{|z|=1}|z|dz=\int_{|z|=1}1\,dz=0$

故综上，我们有

$$\int_{|z|=1}(|z|-e^{z}\cos z)dz=\int_{|z|=1}|z|dz-\int_{|z|=1}f(z)dz$$
$$=0-0$$
$$=0$$

(2) 解 设 $f(z)=2z^2-z+1$，则 $f(z)$ 在 $|z|\le 2$ 内解析，

$z_0=1$ 在 $|z|<2$ 内，故由高阶 Cauchy 积分公式：

$$\int_{|z|=2}\frac{f(z)}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}f'(z)\Big|_{z=1}=2\pi i(4z-1)\Big|_{z=1}=6\pi i$$

(3) 解. $|z|=1$ 时，$I(z)=0$

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{\xi-z}-\frac{1}{\xi}\right)d\xi \quad |z|\ne 1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\left(\int_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi-z}d\xi-\int_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi}d\xi\right)\ \text{---}\ (*)$$

而 $\int_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi}d\xi=2\pi i$ （课本 P86 例3.11）

对于 $\int_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi-z}d\xi$，对 $|z|\ne 1$ 进行讨论.

① 当 $|z|>1$ 时，$f(\xi)=\frac{1}{\xi-z}$ 在 $|\xi|\le 1$ 内解析，

故此时 $\int_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi-z}d\xi=0$.

② 当 $|z|<1$ 时，由 Cauchy 积分公式知，

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$$

因此，$$\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 0, & |z|>1 \\ 2\pi i, & |z|<1 \end{cases}$$

综上，(*) 式可化简为

$$I(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |z| < 1 \\ -\frac{1}{z}, & |z|>1 \end{cases}$$

(4). 解：由 $C: |z|=1$，故在 C 上 $1=|z|^2 = z\cdot\bar{z}$，从而

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin \bar{z}}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z} dz \quad (*)$$

令 $t=\frac{1}{z}$，则 (*) 式为

$$\int_{|t|=1} t \cdot \sin t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{|t|=1} -\frac{\sin t}{t} dt$$

$$= -\int_{|t|=1} \frac{\sin t}{t} dt$$

而 $\sin t$ 在 z 平面解析，故由 Cauchy 积分定理.

$$原式 = -\int_{|t|=1} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$= -2\pi i \cdot \sin t \Big|_{t=0}$$

$$=0$$

#

二、

解：$v_x = e^x\cdot(y\cos y + x\sin y + \sin y)$

$v_{xx} = e^x\cdot(y\cos y + x\sin y + 2\sin y)$

$v_y = e^x\cdot(\cos y - y\sin y + x\cos y)$

$v_{yy} = e^x(-2\sin y - y\cos y - x\sin y)$

从而 $v_{xx} + v_{yy} = 0 \Rightarrow v(x,y)$ 为调和函数，

故存在满足C.-R.方程的 $u(x,y)$，使得

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 解析.

故由C.-R.方程知：$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$，而 $v = e^x\cdot(y\cos y + x\sin y)$

从而 $u_x = v_y = e^x\cdot(\cos y - y\sin y + x\cos y)$

从而 $u(x,y) = \int e^x\cdot(\cos y - y\sin y + x\cos y)\,dx$

$= e^x\cdot(\cos y - y\sin y) + (x-1)e^x\cos y + \varphi(y)$

则 $u_y = e^x(\cos y - y\sin y - 2\sin y - y\cos y) - (x-1)e^x\sin y + \varphi'(y)$

而 $u_y = -v_x = -e^x\cdot(y\cos y + x\sin y + \sin y)$

从而 $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

且 $u(x,y) = e^x\cdot(x\cos y - y\sin y) + C$

$\Rightarrow f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$= e^x\cdot(x\cos y - y\sin y) + C + i\,e^x(y\cos y + x\sin y)$

又 $f(0) = 0$，故代入得 $C = 0 \Rightarrow u = e^x\cdot(x\cos y - y\sin y)$

从而

$f(z) = e^x\cdot(x\cos y - y\sin y) + i\,e^x\cdot(y\cos y + x\sin y)$

$= z\cdot e^z$

#

三.

Pf. 因为$f'(z)$在D内解析，故

$$|f(b)-f(a)| = \left|\int_a^b f'(z)dz\right| \le \int_a^b |f'(z)|\cdot|dz| \quad (*)$$

又$|f'(z)|$在有界闭集C上连续

故 $\exists\, \xi\in C$，s.t. $|f'(z)| \le |f'(\xi)|$，从而$(*)$式

$$|f(b)-f(a)| \le \int_a^b |f'(z)||dz| \le (b-a)|f'(\xi)|$$

① 若$\forall z\in C$，都有 $f'(z)=0$，设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

则 $0 = f'(z) = u_x + i v_x \xlongequal{C\text{-}R.方程} v_y - i u_y$，从而

$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$，故实函数 u、v均为常数.

则沿C，$f(z)$恒为常数，从而$\forall\, \xi\in C$，均有

$$f(b)-f(a) = 0 = \lambda\cdot f'(\xi)(b-a)$$

② 若$\exists\, z\in C$，s.t. $f'(z)\ne 0$，而使$|f'(\xi)|$是$|f'(z)|$在C上的最大值，于是$|f'(\xi)|\ne 0$，令

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{f'(\xi)\cdot(b-a)},$$

则使得 $f(b)-f(a) = \lambda\cdot f'(\xi)(b-a)$

并且由 $|f(b)-f(a)| \le |f'(\xi)|\cdot|b-a|$ 得：$|\lambda|\le 1$.

综上，$\exists\,\lambda$ 且 $|\lambda|\le 1$ 及 $\xi\in C$，s.t.

$$f(b)-f(a) = \lambda(b-a)f'(\xi).$$

#

四、

解：不存在这样的函数 $f(z)$，下面给出证明：

假设存在这样的 $f(z)$ 满足题意。

由于 $f(z)$ 无零点，故设 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$

从而 $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{f(z)}=0$

从而 $\forall \varepsilon>0$，$\exists R>0$，s.t. 只要 $|z|>R$，就有

$$|g(z)-0|<\varepsilon$$

即：$|g(z)|<\varepsilon$，$\forall |z|>R$ ------ ①

在闭圆 $\{z: |z|\le R\}$ 内，由定理1.7，因为 $f(z)$ 连续，从而 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 也连续，从而 $\exists M_1>0$，s.t. $|g(z)|\le M$，$\forall |z|\le R$. ------ ②

因此，取 $M=\max\{\varepsilon, M_1\}$，则 $|g(z)|\le M$

即：$g(z)$ 为有界整函数，

由 Liouville 定理，$g(z)$ 恒为常数，从而 $f(z)$ 为常数

这与 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ 相矛盾，

从而不存在这样的 $f(z)$ 满足题意。 #.

五.

Pf. 因为$u(x,y)$调和，故存在满足C.-R.方程的$v(x,y)$，使得$f=u(x,y)+iv(x,y)$解析.

设$F(z)=e^{-f(z)}$，则$F(z)$也为解析函数

且
$$|F(z)|=|e^{-f(z)}| = e^{Re\{-f(z)\}} = e^{-u} \le e^{-\alpha}$$

即：$F(z)$为有界整函数，

从而由Liouville定理，$F(z)=e^{-f(z)}$为常数，

从而$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$也为常数，

故$u(x,y)$为常数.

#.