《金融随机分析》补充作业

2023-2024 学年第二学期　　年级: **2023 级金融工程**

姓名: **熊雄**　学号: **20234213001**　成绩: ______

Problem. 设 $Z_t,\ t \geq 0$ 为连续时间不可约马尔科夫链, 状态空间为 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$, 其中

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\text{第}i\text{个}}{1}, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^N.$$

$Z(t)$ 的转移强度矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

定义 $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_i > 0,\ i = 1, \ldots, N$.

1. 证明:
$$\mathbb{E}\left[e^{i\int_0^T \langle \vec{\theta}, Z_t \rangle dt}\right] = \left\langle e^{\left(A^T + i\,\mathrm{diag}\,\vec{\theta}\right)T} Z_0, \mathbf{1} \right\rangle,$$
其中 $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$.
2. $\lambda(t)$ 是 *Cox* 过程 N_t 的强度过程, $\lambda(t) = \left\langle \vec{\theta}, Z_t \right\rangle$. 令 T_1 是过程 N_t 的首次跳时刻, 求 $P(T_1 > t)$.
3. 计算 $\mathbb{E}\left[Z_T e^{i\int_0^T \langle \vec{\theta}, Z_t \rangle dt}\right]$.

---

1. ***Proof.*** 首先我们证明
$$Z_t = Z_0 + \int_0^t A^T Z_u du + \mathcal{M}_t, \tag{1}$$
其中 $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t, t \geq 0\}$ 是 $(\mathcal{F}_t, P)$-鞅. 考虑矩阵指数 $e^{A^T(t-s)}$, 由 Z_t 的 Markov 性知
$$\mathbb{E}(Z_t | Z_s) = e^{A^T(t-s)} Z_s, \quad \forall t \geq s. \tag{2}$$

于是对于 $\forall t \geq s$, 设 I 是 $N \times N$ 的单位矩阵, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathcal{M}_t - \mathcal{M}_s \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(Z_t - Z_s \mid \mathcal{F}_s\right) - \mathbb{E}\left(\int_s^t A^T Z_u du \Big| \mathcal{F}_s\right) \\
&= e^{A^T(t-s)} Z_s - Z_s - \int_s^t A e^{A(u-s)} Z_s du \\
&= \left(e^{A^T(t-s)} - I - \int_s^t A^T e^{A(u-s)} du\right) Z_s \\
&= \left(e^{A^T(t-s)} - I - \left[e^{A^T(u-s)}\right]_s^t\right) Z_s \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

因此(1)成立.

下面考虑过程

$$
X_t := e^{i\int_0^t \left\langle \vec{\theta}, Z_t \right\rangle dt} Z_t. \tag{4}
$$

我们通过计算可以得到

$$
\begin{aligned}
dX_t &= e^{i\int_0^t \left\langle \vec{\theta}, Z_u \right\rangle du} \cdot dZ_t + e^{i\int_0^t \left\langle \vec{\theta}, Z_u \right\rangle du} \cdot i \left\langle \vec{\theta}, Z_t \right\rangle Z_t dt \\
&= \left(A^T + i \operatorname{diag} \vec{\theta}\right) X_u du + e^{i\int_0^t \left\langle \vec{\theta}, Z_u \right\rangle du} d\mathcal{M}_t.
\end{aligned}
$$

因此

$$
X_t = Z_0 + \int_0^t \left(A^T + i \operatorname{diag} \vec{\theta}\right) X_u du + \int_0^t e^{i\int_0^u \left\langle \vec{\theta}, Z_u \right\rangle du} d\mathcal{M}_u, \tag{5}
$$

其中积分 $\int_0^t e^{i\int_0^u \left\langle \vec{\theta}, Z_u \right\rangle du} d\mathcal{M}_u$ 是一个鞅, 因此对(5)取期望有

$$
\mathbb{E}\left[X_t\right] = Z_0 + \int_0^t \left(A^T + i \operatorname{diag} \vec{\theta}\right) \mathbb{E}\left[X_u\right] du.
$$

这是一个积分方程, 易解得

$$
\mathbb{E}\left[X_t\right] = e^{\left(A^T + i \operatorname{diag} \vec{\theta}\right) t} \cdot Z_0. \tag{6}
$$

$\mathbb{E}\left[X_t\right]$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的期望过程, 特征函数

$$
\mathbb{E}\left[e^{i\int_0^T \left\langle \vec{\theta}, Z_t \right\rangle dt}\right]
$$

可以通过对其分量求和可以得到. 因此

$$
\mathbb{E}\left[e^{i\int_0^T \left\langle \vec{\theta}, Z_t \right\rangle dt}\right] = \mathbb{E}\left[\left\langle e^{i\int_0^T \left\langle \vec{\theta}, Z_u \right\rangle du} Z_T, \mathbf{1} \right\rangle\right] = \left\langle e^{\left(A^T + i \operatorname{diag} \vec{\theta}\right) T} Z_0, \mathbf{1} \right\rangle. \tag{7}
$$

证毕. □

2. ***Solution.*** Cox 过程是一种非齐次泊松过程, 其强度过程为 $\lambda(t)$. 对于 N_t 过程的首次跳时刻 T_1, 其分布函数满足

$$
P(T_1 > t) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}\right], \tag{8}
$$

这里 $\lambda(t)=\left\langle\vec{\theta},Z_t\right\rangle$, 所以我们有

$$P(T_1>t)=\mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t\left\langle\vec{\theta},Z_s\right\rangle ds}\right]. \tag{9}$$

利用第 1 问中我们得到的结果, 我们有

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t\left\langle\vec{\theta},Z_s\right\rangle ds}\right]=\left\langle e^{\left(A^T-\operatorname{diag}\vec{\theta}\right)t}Z_0,\mathbf{1}\right\rangle. \tag{10}$$

因此可以得到

$$P(T_1>t)=\left\langle e^{\left(A^T-\operatorname{diag}\vec{\theta}\right)t}Z_0,\mathbf{1}\right\rangle. \tag{11}$$

3. ***Solution.*** 考虑过程

$$X_t:=e^{i\int_0^t\left\langle\vec{\theta},Z_t\right\rangle dt}Z_t.$$

由第 1 问证明过程中的式(6)知

$$\mathbb{E}\left[X_T\right]=e^{\left(A^T+i\operatorname{diag}\vec{\theta}\right)T}\cdot Z_0, \tag{12}$$

即

$$\mathbb{E}\left[Z_Te^{i\int_0^T\left\langle\vec{\theta},Z_t\right\rangle dt}\right]=e^{\left(A^T+i\operatorname{diag}\vec{\theta}\right)T}\cdot Z_0. \tag{13}$$