第四部分　　积分学

第二讲　含参量积分

基本内容: 含参量常义积分(积分与极限交换次序、积分与积分交换次序、积分与导数交换次序)、含参量广义积分（一致收敛、积分与极限交换次序、积分与积分交换次序、积分与导数交换次序）、Euler 积分（Γ 函数与 B 函数）.

§2.1 含参量常义积分

设 $D \subseteq \mathbb{R}$, 二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,b]\times D$ 上, $\forall t \in D$, 设 $f(x,t)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上有界可积, 记

$$\varphi(t) \equiv \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x,\ t \in D$$

则 $\varphi(t)$ 具有下列性质:

(1) 积分与极限交换:

$$\left\{\begin{array}{l} t_0 \in D', f(x,t) \text{ 在} \\ [a,b] \text{ 上一致收敛} \\ \text{于 } \psi(x)\ (t \to t_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \psi(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上有界可积, 且} \\ \lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = \lim\limits_{t\to t_0}\displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{t\to t_0} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x. \end{array}\right.$$

特别: $\left\{\begin{array}{l} \text{① 当 } D=[c,d] \text{ 且 } f(x,t) \text{ 在 } [a,b]\times[c,d] \text{ 上连续时, } \varphi(t) \text{ 在 } [c,d] \text{上 连续.} \\ \text{② 若函数列 } f_n(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续且在 } [a,b] \text{ 上一致收敛于 } f(x), \text{ 则} \\ \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \end{array}\right.$

(2) 积分与积分交换

$$\left\{\begin{array}{l} D=[c,d], f(x,t) \text{ 在} \\ [a,b]\times[c,d] \text{上连续} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi(t) \text{ 在 } [c,d] \text{ 上有界可积, 且} \\ \displaystyle\int_c^d \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_c^d \mathrm{d}t \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t. \end{array}\right.$$

(3) 求导与积分交换

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,t) \text{ 和 } f_t(x,t) \text{ 均在} \\ [a,b]\times[c,d] \text{ 上连续} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi(t) \text{ 也在 } [c,d] \text{ 上有连续导数, 且} \\ \varphi'(t) \equiv \dfrac{d}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b f_t(x,t)\mathrm{d}x. \end{array}\right.$$

(4) 变动上、下限的含参变量正常积分的性质:

设 $f(x,t)$ 定义在 $[a,b]\times[c,d]$ 上, $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 定义在 $[c,d]$上, $a \leqslant \alpha(t), \beta(t) \leqslant b$, $\forall t \in [c,d]$. 令 $\varphi(t) \equiv \displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\mathrm{d}x$, 则

$$f(x,t) \text{ 在 } [a,b]\times[c,d] \text{ 上连续, } \alpha(t) \text{ 和 } \beta(t) \text{ 都在 } [c,d] \text{ 上连续}$$
$$\Longrightarrow \quad \varphi(t) \text{ 在 } [c,d] \text{ 上连续;}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,t),\ f_t(x,y) \text{ 都在 } [a,b]\times[c,d] \text{ 上连续,} \\ \alpha(t),\ \beta(t) \text{ 都在 } [c,d] \text{ 上连续, 且 } \alpha(t),\ \beta(t) \text{ 都在 } [c,d] \text{ 上可导,} \end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi(t) \text{ 在 } [c,d] \text{ 上可导、且} \\ \varphi'(t) = f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(x,t)\mathrm{d}x. \end{array}\right.$$

例1 设 $F(t) = \int_0^{t^2} \mathrm{d}x \int_{x-t}^{x+t} \sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y$, 求 $F'(t)$.

例2 求极限 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

例3 证明 Osgood 定理：设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的等度连续函数列 (即，$\forall\, x_0 \in [a,b], \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ 使得当 $|x-x_0| < \delta$ 时，对 $\forall\, n \in \mathbb{N}$ 成立 $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$), 且存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 使得当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x) \to f(x)$ $(\forall\, x \in [a,b])$. 证明
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例4 研究函数 $F(y) = \int_0^1 \dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$ 的连续性，其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续.

例5 证明：$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$.

例6 计算积分 $\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x + r^2)\,\mathrm{d}x$, $|r| < 1$.

例7 计算积分 $\int_0^1 \sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$, $0 < a < b$.

例8 计算积分 $I = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

§2.2 含参量广义积分

一、含参量广义积分的一致收敛性

设 $\forall t \in T$, $f(x,t)$ 和 $g(x,t)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上有定义且在 $[a,+\infty)$ 上的任何有限区间上有界.

(1) 一致收敛的定义及其等价条件

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 在 } t\in T \text{ 上一致收敛}$$
$$\equiv \left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists A_0 = A_0(\varepsilon), \text{使得当 } A > A_0 \text{ 时, 对一切 } t \in T, \text{ 成立} \\ \left|\displaystyle\int_A^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ A_0 > a, \text{ 使得当 } A,\ A' > A_0 \text{ 时, 对一切 } t \in T, \text{ 成立} \\ \left|\displaystyle\int_A^{A'} f(x,t)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon. \quad \text{（Cauchy收敛准则）} \end{array}\right.$$

(2) 一致收敛判别法.

① Weierstrass 判别法(或称, M 判别法, 优函数判别法):

$$\left\{\begin{array}{l} |f(x,t)| \leqslant F(x),\ a \leqslant x < +\infty, t \in T, \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛}, \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t \in T \text{ 一致收敛}.$$

② Abel 判别法:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t \in T \text{ 一致收敛} \\ g(x,t) \text{ 关于 } x \text{ 单调, 且作为二元函数在 } [a,+\infty) \times T \text{ 上是有界的} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x,t)\ g(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t \in T \text{ 一致收敛}.$$

③ Dirichlet 判别法:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^{A} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 对 } \forall A \geqslant a \text{ 和 } t \in T \text{ 是一致有界的} \\ g(x,t) \text{ 关于 } x \text{ 单调, 且 } \displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x,t) = 0 \text{ 关于 } t \in T \text{ 是一致的} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x,t)\ g(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t \in T \text{ 一致收敛}.$$

④ Dini定理

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,t) \text{ 在 } [a,+\infty) \times [\alpha,\beta] \text{ 上连续且不变号}, \\ \varphi(t) \equiv \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 在 } [\alpha,\beta] \text{ 上连续} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于} \\ t \in [\alpha,\beta] \text{ 一致收敛}. \end{array}\right.$$

对于在有限区间上含参变量无界函数的广义积分, 其定义、Cauchy 收敛原理以及判别法(包括 4 个判别法)均是完全类似的.

二、含参量广义积分的性质

(1) 积分与极限交换:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,t) \text{ 在 } [a,+\infty) \times I \text{ 上有定义 } I \subset I\!R^1,\ t_0 \in I', (t_0 \text{ 可以为}\infty); \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t \in I \text{ 一致收敛}; \\ \text{当 } t \to t_0 \text{ 时},\ f(x,t) \text{ 在 } [a,+\infty) \text{ 的任何有界区间上一致收敛于 } \psi(x). \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^{+\infty} \psi(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛} \\ \displaystyle\lim_{t \to t_0} \int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \lim_{t \to t_0} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \psi(x)\mathrm{d}x. \end{array}\right.$$

特别有:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x,t) \text{ 在 } [a,+\infty) \times [\alpha,\beta] \text{ 上连续(二元连续)} \\ \varphi(t) \equiv \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t \in [\alpha,\beta] \text{ 一致收敛} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi(t) \text{ 在 } [\alpha,\beta] \text{ 上连续, 即 } \forall t_0 \in [\alpha,\beta], \\ \displaystyle\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \lim_{t \to t_0} \int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \lim_{t \to t_0} f(x,t)\mathrm{d}x = \varphi(t_0). \end{array}\right.$$

如果 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续且非负, 则上述逆定理成立（即上段一致收敛判别法中的 Dini 定理）.

(2) 积分与积分交换

①广义积分与正常积分的交换

$$\begin{cases} f(x,t) \text{ 在 } [a,+\infty)\times[\alpha,\beta] \text{ 上连续} \\ \varphi(t)\equiv\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t\in[\alpha,\beta] \text{ 一致收敛} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \left\{ \int_\alpha^\beta \varphi(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,t)\mathrm{d}t. \right.$$

②广义积分与广义积分的交换

$$\begin{cases} f(x,t) \text{ 在 } [a,+\infty)\times[\alpha,+\infty) \text{ 上连续;} \\ \int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t \text{ 在}[\alpha,+\infty) \text{ 的任一有界区间上一致收敛,} \\ \int_\alpha^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t \text{ 关于 } x \text{ 在}[a,+\infty) \text{ 的任一有界区间上一致收敛;} \\ \int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}t\int_a^{+\infty}|f(x,t)|\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_a^{+\infty}\mathrm{d}t\int_\alpha^{+\infty}|f(x,t)|\mathrm{d}x \text{ 至少有一个存在.} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}t\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\mathrm{d}t\int_\alpha^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ （存在并相等）.}$$

注 若用 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上非负来代替上面的最后一个条件, 则结论仍然成立, 只是这两个积分都可以为 $+\infty$.

(3) 求导与积分交换

$$\begin{cases} f(x,t) \text{ 和 } f_t(x,t) \text{ 均在 } [a,+\infty)\times[\alpha,\beta] \text{ 上连续;} \\ \varphi(t)\equiv\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x \text{ 对某个 } t_0\in[\alpha,\beta] \text{ 收敛,} \\ \int_a^{+\infty} f_t(x,t)\mathrm{d}x \text{ 关于 } t\in[\alpha,\beta] \text{ 一致收敛;} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \varphi(t) \text{ 在 } [\alpha,\beta] \text{ 上有连续导数, 且} \\ \varphi'(t)\equiv\dfrac{d}{\mathrm{d}t}\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f_t(x,t)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

对于在有限区间上含参变量无界函数的广义积分或一元函数列的广义积分有类似的性质.

例1 讨论 $I(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2\cos tx}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ 在 $t\in(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性.

例2 设 $f(x,y)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$、$c\leqslant y\leqslant d$ 上连续, 且对 $\forall y\in[c,d)$, $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $y=d$ 时积分发散. 求证: $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in[c,d)$ 上非一致收敛. (该题的结论很重要: 如果含参量积分关于参量在一个开区间上一致收敛, 则该积分当参量趋于区间的有限端点时必存在有限的极限.)

例3 证明：$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在 $0<\alpha<+\infty$ 内闭一致收敛而非一致收敛.

例4 证明：$\int_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 在 $0<\alpha<2$ 上非一致收敛.

例5 证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 在 $|p|\leqslant p_0<1$ 上一致收敛.

例6 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数序列，且满足

(1) 在 $[0,+\infty]$ 上 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 在任何有限区间 $[0,A]$ 上 $(A>0)$, 序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

证明：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$.

例7 若 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 存在，证明函数 $\displaystyle g(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

例8 求 $g_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$, 其中 $\displaystyle g(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

例9 试利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\overset{\text{令 }u=\alpha x}{=}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x$ $(\forall\alpha>0)$ 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

例10 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-1)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha\geqslant 0$.

例11 已知 $g(0)=\sqrt{\pi}/2$，求 $\displaystyle g(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,\mathrm{d}x$.

例12 (1) 证明当 $b\neq 0$ 时，函数 $\displaystyle F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(1-e^{-at})\cos bt\,\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 在 $(0,+\infty)$ 上可导;

(2) 求 $F(a)$.

例13 计算 Dirichlet 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,\mathrm{d}x$.

例14 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在下述两种情形下分别计算积分 (G. Froullani)

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\quad(a,b>0)$$

(1) $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z$ 存在，其中 A 为任意常数;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=k$.

例15 求 $\displaystyle I=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^u\iint\limits_D\frac{\sin(z\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

§2.3 Euler 积分：Γ 函数和 B 函数

一、定义及变形

Γ 函数: 第二型Euler积分

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)&\equiv\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (\alpha>0)\\&=2\int_0^{\infty}t^{2\alpha-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\ (\alpha>0)\\&=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\ (\alpha>0)\end{aligned}$$

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}\quad(\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots.)$$

定义域 α 不等于0和负整数.

B 函数: 第一型Euler积分

$$\begin{aligned}B(p,q)&\equiv\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\quad(p,q>0)\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t.\\&=\int_0^1\frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

定义域 $p>0,\ q>0$.

二、基本性质

Γ 函数

在定义域内具有各阶连续偏导数, 且

$\Gamma^{(n)}(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n dx \ (\alpha > 0)$;

递推公式 $\quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$;

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(n+1) = n!$,

$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\ (n \in N)$;

余元公式 $\quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \ (0 < \alpha < 1)$;

倍元公式 $\quad \Gamma(2\alpha) = \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \ (\alpha > 0)$.

B 函数

在定义域内具有各阶连续偏导数;

对称性 $\quad B(p,q) = B(q,p)$;

递推公式 $\quad B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$;

$B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!},\ (n,m \in N)$;

余元公式 $\quad B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \ (0 < p < 1)$;

$B(p,p) = 2^{1-2p}B(p,\frac{1}{2}),\quad B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$.

三、Γ函数与B函数的关系

Dirichlet公式 $\qquad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

例1 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x = 1$.

例2 证明：$B(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{\sqrt[3]{2}}$.

例3 化积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,\mathrm{d}x \ (p,q,m>0)$ 为 Euler 积分，并证明

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

例4 证明 Riemann 的 zeta 函数的积分形式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^{s-1}}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x, \quad s > 1.$$

例5 计算积分 $I = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,\mathrm{d}x,\ (0<p,q<1)$.

例6 求曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4 = y$ 所围立体的体积.

第二讲练习题

1. 设 $f(s,t)$ 为可微函数, $F(x) = \int_0^x \mathrm{d}t\int_{t^2}^{x^3} f(t,s)\,\mathrm{d}s$. 求 $F'(t)$.
2. 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上连续，证明

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]\,\mathrm{d}t = f(x)-f(a), \quad x\in[a,A].$$

4. 计算 $I(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2\theta + x^2\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta, \quad 0<x<+\infty.$

5. 计算 $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+\alpha\sin x}{1-\alpha\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad 0<\alpha<1.$

6. 设 $F(t)=\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a f(x+y+t)\,\mathrm{d}y$, 其中 f 为连续函数, 证明：

$$F''(t)=f(t+2a)-2f(t+a)+f(t).$$

7. 设 $f(t) = \left(\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$, $g(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 证明 $f(t)+g(t)\equiv\dfrac{\pi}{4}$, 并由此计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

8. 讨论 $I(\alpha)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ 在 (1) $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$, 其中 $\alpha_0>0$; (2) $\alpha\in(0,+\infty)$ 中的一致收敛性.

9. 讨论 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\mathrm{d}x$ 在 $p>0$ 中的内闭一致收敛性和一致收敛性.

10. 讨论 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

11. 证明：$I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛

12. 计算

$$(1)\ \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln(1/x)}}; \qquad (2)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

13. 试将下列积分表示为 Γ 函数或 B 函数：

$$(1)\ \int_0^{\pi/2}\tan^\alpha x\,\mathrm{d}x, \quad (|\alpha|<1); \qquad (2)\ \int_0^{-1}(1+x)^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x, \quad (a,b>0).$$

14. n 为正整数，$p>0$，证明

$$\mathrm{B}(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}.$$

15. 证明 $\ln\Gamma(s)$ 是下凸函数.

16. 设平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 与$x+y+z=1$ 围成四面体 V，证明

$$\iiint\limits_V x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{(a+b+c)\Gamma(a+b+c)} \ \ (a,b,c>0).$$

17. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

18. 求积分 $\displaystyle\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n\mathrm{d}x$.