第15次作业：8.12，8.17

8.12 某厂生产白水泥, 需对每窑生产的水泥测定其抗压强度以确定水泥的编号, 一般以水泥出窑后做成的试块养护28 天所测得的数据为准, 但水泥不可能在工厂推放28 天, 所以考虑用7 天的抗压强度x 去预测28 天的抗压强度y. 现记录了1 个月26 窑的生产数据, 且已算得如下结果:

$$\sum_{i=1}^{26} x_i = 628.3, \quad \sum_{i=1}^{26} y_i = 788.4,$$

$$\sum_{i=1}^{26} x_i^2 = 15225.05, \quad \sum_{i=1}^{26} x_i y_i = 19088.54, \quad \sum_{i=1}^{26} y_i^2 = 23972.40$$

(1)建立y 关于x 的一元线性回归方程$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$;

(2) 在$\alpha = 0.05$ 水平下对回归方程的显著性进行检验.

解: (1) $\hat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{26} x_i y_i - 26\bar{x}\ \bar{y}}{\sum_{i=1}^{26} x_i^2 - 26\bar{x}^2} = \frac{19088.54-628.3\times 788.4/26}{15225.05-628.3\times 628.3/26} = \frac{36.55}{41.94} = 0.87$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \frac{788.4}{26} - 0.87 \times \frac{628.3}{26} = 9.30$$

回归方程为

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = 9.3 + 0.87x.$$

(2) 要检验假设：$H_0 : \beta_1 = 0$.

若H_0为真，则

$$F = \frac{S_R/1}{S_e/(n-1-1)} \sim F(1, n-2).$$

$F_{0.95}(1, 24) = 4.26$,故拒绝域为$[4.26, \infty)$.

计算$S_T = l_{yy} = \sum_{i=1}^{26} y_i^2 - n\bar{y}^2 = 23972.40 - 788.4 \times 788.4/26 = 65.69$.

$$S_R = \hat{\beta}_1 l_{xy} = 0.87 \times 36.55 = 31.80$$

$$S_e = S_T - S_R = 65.69 - 31.80 = 33.89$$

$$f = \frac{S_R/1}{S_e/(n-1-1)} = \frac{31.8/1}{33.89/24} = 22.52 > 4.26,$$

故认为y 与x 线性关系显著.

8. 17 某医院用光色比色计检验尿贡时, 得尿贡含量与肖光系数读数的结果如下:

尿贡含量x	2	4	6	8	10
肖光系数y	64	138	205	285	360

已知它们之间有下述关系式:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

各ε_i 相互独立, 均服从$N\left(0, \sigma^2\right)$ 分布, 试求β_0, β_1 的最小二乘估计, 并给出检验假设

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

的拒绝域。

解: $n = 5$,由数据可以求得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{5} x_i = 30, \bar{x} = 6 \\
&\sum_{i=1}^{5} y_i = 1052, \bar{y} = 210.4 \\
&\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 220, \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 7790, \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 275990 \\
&l_{xx} = 40, l_{xy} = 1478, l_{yy} = 54649.2
\end{aligned}$$

则最小二乘估计为:

$$\hat{\beta}_0 = -11.3, \hat{\beta}_1 = 36.95$$

取$\alpha = 0.01, F_{1-\alpha}(1, 3) = 34.1$, 故检验假设$H_0 : \beta_1 = 0$的拒绝域为$[34.1, \infty)$.

进一步，由

$$f = \frac{\hat{\beta}_1 l_{xy}}{\left(l_{yy} - \hat{\beta}_1 l_{xy}\right)/(n-2)} = 4416 > 34.1.$$

因此, 拒绝原假设。