# 数学模型与数学软件

## 第 5 次作业

**1907402030**

熊　雄*

2022 年 4 月 5 日

*mrxiongx@foxmail.com　苏州大学数学科学学院本科生

**Problem 1**

**(Page 111 Ex.5.)**

设国民经济由农业、制造业和服务业三个部门组成, 已知某年它们之间的投入产出关系、外部需求、初始投入等如表 5.6 所示 (单位: 亿元).

表5.6　国民经济三个部门之间的投入产出表

| | 农业 | 制造业 | 服务业 | 外部需求 | 总产出 |
|---|---|---|---|---|---|
| 农业 | 15 | 20 | 30 | 35 | 100 |
| 制造业 | 30 | 10 | 45 | 115 | 200 |
| 服务业 | 20 | 60 | 0 | 70 | 150 |
| 初始投入 | 35 | 110 | 75 | | |
| 总投入 | 100 | 200 | 150 | | |

根据表 5.6 回答下列问题:

a) 如果今年对农业、制造业和服务业的外部需求分别为 50, 150, 100 亿元, 问这三个部门的总产出分别为多少?

b) 如果三个部门的外部需求分别增加 1 个单位, 问它们的总产出分别增加多少?

**Solution.**

- **建立模型**

设一共有 $n$ 个部门, 记一定时期内第 $i$ 个部门的总产出为 $x_i$, 其中对第 $j$ 个部门的投入为 $x_{ij}$, 外部需求为 $d_i$, 则

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

表格 5.6 的每一行都满足(1)式. 根据直接消耗系数 $a_{ij}$ 的定义有

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

注意到每个部门的总产出等于总投入, 所以可以将(2)式中的 $x_j$ 视为第 $j$ 列的总投入. 由(1)式, (2)式得

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + d_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

记直接消耗系数矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 产出向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 需求向量 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^{\mathrm{T}}$, 则(3)式可以写为

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d} \quad \text{or} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{d}. \tag{4}$$

其中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵.

当直接消耗系数 $\mathbf{A}$ 和外部需求 $\mathbf{d}$ 给定后, 求解线性方程组(4)即得各部门的总产出 $\mathbf{x}$.

- **模型求解**

  输入以下 Matlab 代码

```
%初值
n = 3;
M = [15 20 30; 30 10 45; 20 60 0]; %投入产出矩阵
x = [100; 200; 150]; %产出向量

%计算直接消耗系数矩阵 A
A = zeros(n, n); %消耗系数矩阵
for i = 1 : n
    for j = 1 : n
        A(i , j) = M(i , j) / x(j);
    end
end

%求解问题 a)
d = [50; 150; 100]; %需求向量
B = eye(n) - A; %I - A
x1 = B \ d %解方程组 (4)

%求解问题 b)
dx = inv(B)
```

  可得到输出结果如下

```
x1 =

  139.2801
  267.6056
  208.1377


dx =

    1.3459    0.2504    0.3443
    0.5634    1.2676    0.4930
    0.4382    0.4304    1.2167
```

- **结果分析**

  由上述输出结果可知

  a) 若外部需求分别为 50, 150, 100 亿, 这三个部门的总产出分别为 139.2801, 267.6056, 208.1377 亿元.

  b) 由输出的 dx, 我们可以知道当农业的需求增加 1 个单位时, 农业、制造业、服务业的总产出应分别增加 1.3459, 0.2504, 0.3443 单位, 其余类似.(这些数字称为**部门相关系数**) ■

**Problem 2**

**(Page 113 Ex.9.)**

种群的繁殖与稳定收获: 种群的数量因繁殖而增加, 因自然死亡而减少, 对于人工饲养的种群 (比如家畜) 而言, 为了保证稳定的收获, 各个年龄的种群数量应维持不变. 种群因雌性个体的繁殖而改变, 为方便起见, 以下种群数量均指其中的雌性.

种群年龄记作 $k=1,2,\dots,n$, 当年年龄 $k$ 的种群数量记作 $x_k$, 繁殖率记作 $b_k$(每个雌性个体 1 年繁殖的数量), 自然存活率记作 $s_k$ ($s_k=1-d_k$, $d_k$ 为 1 年的死亡率), 收获量记作 $h_k$, 则来年年龄 $k$ 的种群数量 $\tilde{x}_k$ 应为

$$\tilde{x}_1=\sum_{k=1}^{n} b_k x_k,\quad \tilde{x}_{k+1}=s_k x_k-h_k,\quad k=1,2,\dots,n-1. \tag{5}$$

要求各个年龄的种群数量每年维持不变就是要使 $\tilde{x}_k=x_k,\quad (k=1,2,\dots,n)$.

a) 若 $b_k$, $s_k$ 已知, 给定收获量 $h_k$, 建立求各年龄的稳定种群数量 $x_k$ 的模型 (用矩阵、向量表示).

b) 设 $n=5$, $b_1=b_2=b_5=0$, $b_3=5$, $b_4=3$, $s_1=s_4=0.4$, $s_2=s_3=0.6$, 如要求 $h_1\sim h_5$ 为 500, 400, 200, 100, 100, 求 $x_1\sim x_5$.

c) 要使 $h_1\sim h_5$ 均为 500, 如何达到?

**Solution.**

- **建立模型**

  只需当年年龄 $k$ 的种群数目与来年相同即可, 即 $\tilde{x}_k=x_k,\quad (k=1,2,\dots,n)$, 写成线性方程组的形式为

$$\begin{cases}\tilde{x}_k=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k=x_1,\\ \tilde{x}_{k+1}=s_k x_k-h_k=x_{k+1}.\end{cases} \tag{6}$$

  令 $\mathbf{L}=\begin{bmatrix} b_1-1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n\\ s_1 & -1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{X}=[x_1,x_2,\dots,x_n]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{H}=[0,h_1,\dots,h_{n-1}]$, 则(6)式可以转化为

$$\mathbf{LX}=\mathbf{B}. \tag{7}$$

- **问题 b) 求解**

  输入以下 Matlab 代码

```
n =5; %种群年龄
b = [0, 0, 5, 3, 0];
s = [0.4, 0.6, 0.6, 0.4];
h =[0, 500, 400, 200, 100]';
```

```
L=[b(1)−1, b(2), b(3), b(4), b(5);
    s(1), −1, 0, 0, 0;
    0, s(2), −1, 0, 0;
    0, 0, s(3), −1, 0;
    0, 0, 0, s(4), −1];
x = L \ h %求解线性方程组 (7)
```

运行后输出为

```
x =

  1.0e+03 *

    8.4810
    2.8924
    1.3354
    0.6013
    0.1405
```

即 $x_1 \sim x_5$ 分别为 8481，2892，1335，601，141.

- **问题 c) 求解**

  先使用**问题 b)** 中的各 $s_k$ 的值，用同样的方法计算对应的 $x$. 令 $\mathbf{H} = [0, 500, \ldots, 500]$, 即输入以下 Matlab 代码

```
n =5; %种群年龄
b = [0, 0, 5, 3, 0];
s = [0.4, 0.6, 0.6, 0.4];
h =[0, 500, 500, 500, 500]';
L=[b(1)−1, b(2), b(3), b(4), b(5);
    s(1), −1, 0, 0, 0;
    0, s(2), −1, 0, 0;
    0, 0, s(3), −1, 0;
    0, 0, 0, s(4), −1];
x = L \ h %求解线性方程组 (7)
```

运行后输出为

```
x =

  1.0e+04 *

    1.0981
    0.3892
    0.1835
    0.0601
  −0.0259 %出现负数，不合理
```

从运行结果可以看出，是此种情况下计算出的结果是不合客观实际的，因为出现了 $x_k < 0$ 的情况，显然不合理. 因此需要对**问题 b)** 中给出的参数进行改变，即改变 $s$ 与 $b$ 的给定值.

根据我们的生活经验，物种的繁殖率很难得到改变，因而改变 $s_k$ 的值更可行. 那么就需要判断 $x$ 分别对 $s_1$，$s_2$，$s_3$，$s_4$ 的敏感度，进一步确定合理的 $s$ 的值来求解. 输入以下 Matlab 代码

```
1  %初值
2  b = [0, 0, 5, 3, 0];
3  h =[0, 500, 500, 500, 500]';
4  %编写程序测试 x 对 s 的敏感度
5  for i = 0 : 0.01: 1
6      k = fix(100 * i +1);
7      s = [i, 0.6, 0.6, 0.4]; %此处对 i 的位置进行轮换四次
8      L=[b(1)-1, b(2), b(3), b(4), b(5);
9          s(1), -1, 0, 0, 0;
10         0, s(2), -1, 0, 0;
11         0, 0, s(3), -1, 0;
12         0, 0, 0, s(4), -1];
13     x = L \ h; %求解线性方程组
14     x1(1, k)=x(1);
15     x1(2, k)=x(2);
16     x1(3, k)=x(3);
17     x1(4, k)=x(4);
18     x1(5, k)=x(5);
19 end
20
21 %作图
22 i = 0 : 0.01: 1;
23 figure;
24 hold on;
25 plot(i, x1(1, :), 'g');
26 plot(i, x1(2, :), 'y');
27 plot(i, x1(3, :), 'r');
28 plot(i, x1(4, :), 'b');
29 plot(i, x1(5, :), 'm');
30 grid;
```

运行上述代码, 可得到图像 (a), 描述的是种群数目对第 1 年存活率, 改变代码第 7 行的 i 的位置, 依次可得到图像 (b), 图像 (c), 图像 (d). 记上述四幅图合并为图 1, 见第7页.

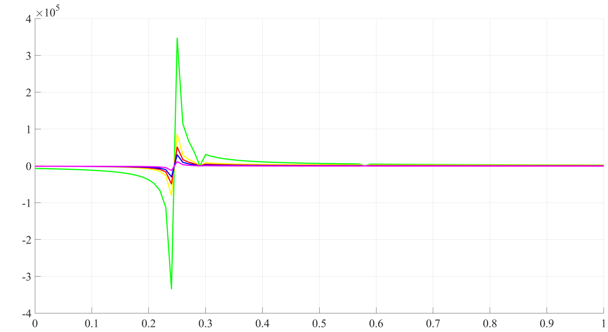
观察图 1 四幅图的走势, 令存活率为 $s_1 = 0.4$, $s_2 = 0.6$, $s_3 = s_4 = 0.95$, 在 Matlab 中输入以下代码

```
n =5; %种群年龄
b = [0, 0, 5, 3, 0];
s = [0.4, 0.6, 0.95, 0.95];
h =[0, 500, 400, 200, 100]';
L=[b(1)-1, b(2), b(3), b(4), b(5);
    s(1), -1, 0, 0, 0;
    0, s(2), -1, 0, 0;
    0, 0, s(3), -1, 0;
    0, 0, 0, s(4), -1];
x = L \ h %求解线性方程组 (7)
```

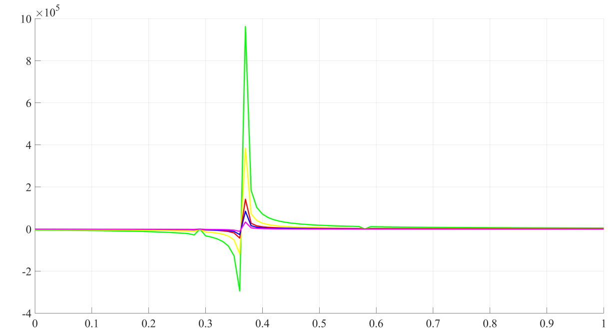
运行后输出为

```
x =

   1.0e+03 *

    6.8948
    2.2579
    0.9548
    0.7070
    0.5717
```

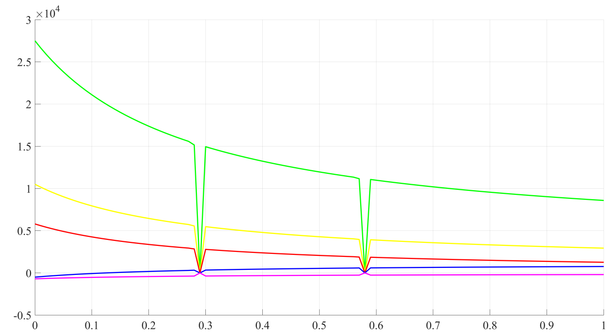
即当存活率为 $s_1 = 0.4$, $s_2 = 0.6$, $s_3 = s_4 = 0.95$ 时, 可达到 $h_1 \sim h_5$ 均为 500. ■



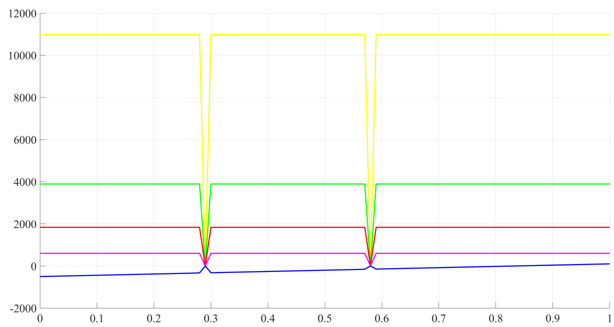

(a) $k$=1




(b) $k$=2




(c) $k$=3




(d) $k$=4

图 1: 种群数目对第 $k$ 年存活率的敏感度