苏州大学 <u>抽象代数</u> 课程试卷(B)答案　共2页

(考试形式　闭卷　　2007年7月)

一．因为H 中恰好S_3 中的所有一阶元和三阶元, 而H 中每个元素的共轭元素的阶数不变, 即均还在H 中，所以H 是S_3 的正规子群.
商群S_3/H 是二阶元群, S_2 也是二阶元群, 而所有二阶元群均是循环的，进而得到同构.

二．设$G =< a >$ 是一个循环群, H 是G 的任意一个子群。

如果$H = \{e\}$, 则显然$H =< e >$ 是循环群。下面假设$H \neq \{e\}$，则有整数n使$a^n \neq e$ 且$a^n \in H$。由于H 是子群, 所以$a^{-n} \in H$, 于是，总存在正整数m使$a^m \neq e$ 且$a^m \in H$。令

$$r = \min\{m > 0 | a^m \in H\}.$$

下证: $H =< a^r >$。对$\forall u \in H$, 则有整数s使$u = a^s$。设$s = qr + t$, $0 \leq t < r$。如果$t \neq 0$, 则$0 < t < r$。但是

$$a^t = a^{s-qr} = a^s(a^r)^{-q} \in H,$$

这与r 的极小性矛盾。所以必有$t = 0$, 从而$u = a^s = (a^r)^q \in< a^r >$。因而$H =< a^r >$, 故$H$ 也是循环的。

三．　可验证：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为M 的一组基。

四．不妨设该子群为H, 由于H 的任一共轭子群与H 的阶数相同, 而G中只一个阶为n 的子群, 即H 的任一共轭子群等于H, 从而H 是G 的正规子群.

五．假设I 是R 的素理想, 设J 是R 的一个理想使$I \subsetneq J$。由于R 是主理想整环, 所以存在$a, b \in R$ 使$I = (a)$, $J = (b)$, 于是$(a) \subseteq (b)$, 故有$c \in R$ 使$a = bc$, 因I 是R 的素理想, 而$I \neq \{0\}$, $I \neq R$，所以$a \neq 0$ 且a 不是单位，I 是R 的素理想, 所以，a 是素元, 故由$a|bc$ 得$a|b$ 或$a|c$。若$a|b$ 则$(a) = (b)$, 矛盾, 所以$a|c$。从而存

在$c_1 \in R$ 使$c = ac_1$, 则$a = bc = bac_1$, 而$a \neq 0$, 所以$bc_1 = 1$, 因而b 是单位。所以$J = (b) = R$, 因而I 是R 的极大理想。

六. 证明: 作$E_1 = F[x]/\langle p(x)\rangle$, E_1 是域.
作映射: $\sigma : F \longrightarrow E_1$ 定义为$a \longrightarrow a + p(x) = \bar{a}$.
则σ 是一个单射, $\sigma(F) \subseteq E_1$.
且$F \cong \sigma(F)$, 由挖补定理可以认为$E_1 \supseteqq F$.
令$p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$.
定义$F[x] \longrightarrow E_1$ 为$f(x) \longrightarrow f(x) + \langle p(x)\rangle$
从而$p(\bar{x}) = \bar{a_n}\bar{x^n} + \cdots + \bar{a_1}\bar{x} + a_0 + \langle p(x)\rangle = p(x) + \langle p(x)\rangle = \bar{0}$
说明$\bar{x}$ 即为$p(x)$ 的根, E_1 含有$p(x)$ 的一个根.
令$E = E_1$ 即可证得,

七. (1)根据环的定义直接验证.
(2)设N 是$F^{n\times n}$ 的非零理想, 即存在$A \in N$且$A \neq 0$, 则可在A 的左边乘以可逆矩阵: 将A 化为E_{11} 或$E_{22}, E_{33}, \cdots E_{nn}$的形式, (即只有(i,i)位置为1, 其它元素均为零的矩阵), 从而A 是主理想.