2021 数理方程.

一、填空 $4\times5'$

1. $u_{tt}-4u_{xx}=0$ 的特征线

2. $f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$ 的Fourier变换

3. 三维 Laplace 方程的基本解

4. $u_{xx}+\sqrt{1+x^2}\,u_{yy}+xyu_y=0$ 的类型.

二. $15'$
$$\begin{cases} u_t+u_x=u, & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=x, & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

三. $15'$
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\cos x, & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u|_{t=0}=x^2,\quad u_t|_{t=0}=\cos x, & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

四. $15'$ 设 $\phi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续有界函数，求解下列边值问题的有界解：
$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<+\infty,\ y>0 \\ u(x,0)=\phi(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

五. $20'$ 分离变量
$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0)=x(1-x), & 0\le x\le 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t>0 \end{cases}$$

六. $15'$ $Q=\{0<x<L,\ 0<t\le T\}$, $u(x,t)\in C^{2,1}(\bar{Q})\cap C^{\infty}(Q)$

满足
$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & 0<x<L,\ 0<t\le T \\ u|_{t=0}=0, & 0\le x\le L \\ u|_{x=0}=t^2, & 0\le t\le T \\ u|_{x=L}=0, & 0\le t\le T \end{cases}$$

(1) 证：在 Q 内有 $u(x,t)\ge 0$，$u_x(x,t)\le 0$

(2) 给出上述结论的物理解释