苏州大学 实变函数 课程试卷 （A）卷 共5页

考试形式 闭 卷 2012 年1 月

一、 判断题（每题3分，共30分,用√,×标在每题结尾）

1、 若$m(E)=0$，则E一定是可数集

2、 实数集的任何有界子集合外测度一定有限。

3、 定义在任意集合上的简单函数是可测函数。

4、 若在集合E上，f_n几乎处处收敛于f，则对于任给$\varepsilon>o$，有E的闭子集F使得$m(E\setminus F)<\varepsilon$，且$f_n$在$F$上一致收敛于$f$

5、 一簇互不相交的开区间至多是可数的。

6、 可测函数列的极限（如果存在）一定是可测函数

7、 有界变差函数可能不连续，而连续函数也可能不是有界变差函数。

8、 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，尽管$f(x)$的不连续点是至多可数集，但$f(x)$不一定Riemann可积。

9、 f是在可测集E上的可测函数，则f在E上Lebesgue可积等价于$|f|$在E上Lebesgue可积

10、 存在$[a,b]$上的严格单调递增连续函数f满足$f'(x)=0$在$[a,b]$几乎处处成立。

二、 叙述Fatou引理和Lusin定理（10分）

三、是否存在闭集$F\subset[a,b]$且$F\neq[a,b]$，而$m(F)\neq b-a$？证明你的结论（10分）

四、 A、B 是 R^n 中的可测集，证明 $m(A\bigcup B)+m(A\bigcap B)=m(A)+m(B)$：（10 分）

五、 $f(x)$ 定义在可测集 E 上。若 $f^2(x)$ 在 E 上可测，且 $\{x\in E\mid f(x)>0\}$ 是可测集，则 $f(x)$ 在 E 上可测（10 分）

六、 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数，记 $E_k=\{x\in E\mid f(x)>k\}\ (k=1,2,\cdots)$，

证明：若 $f\in L(E)$，则 $\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)<\infty$；若 $m(E)<\infty$，则反之亦然。（10 分）

七、 若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $|f(x)|$ 也为 $[a,b]$ 上的有界变差函数。反之成立吗？若成立给出证明，若不成立，给出反例（**10 分**）

八、 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上 **Lebesgue** 可积，定义 $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{x+t}dt$

（1） 证明 $g(x)$ **在** $(0,+\infty)$ **上连续；**

（2） **求** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **（10 分）**