

## 苏州大学 复变函数 课程试卷 (A)卷

(考试形式 线上限时开卷 2020 年 6 月)

院系 数学科学学院 年级 \_\_\_\_\_ 专业 \_\_\_\_\_

学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 成绩 \_\_\_\_\_

注意事项:

(1) 对计算题和证明题, 都必须写出完整的过程, 并对每一步说明理由. 计算题只有答案将不给分. 答题纸每页都要书写学号+姓名, 右上角书写答题纸页码.

(2) 考试结束后10分钟内在QQ群(作业)完成答卷提交, 不允许修改后重复提交. 同时, 务必将答卷通过电子邮件打包发送到邮箱ylshen@suda.edu.cn 文件以学号+姓名命名.

务必同时提交到QQ群(作业)和电子邮箱, 不按要求提交将以零分处理.

一. (10分) 写出函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 $D$ 内解析的五个充分必要条件(除定义外).

二. (32分) 计算下列积分.

1)  $I = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+9z+20} dz$ . (本小题6分)

2)  $I = \int_{|z|=1} \frac{1}{z \sin z} dz$ . (本小题8分)

3)  $I = \int_{|z|=4} \frac{z^{28}}{(z^2+1)^2(z^3+2)^3(z^4+3)^4} dz$ . (本小题8分)

4)  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+5x^2+4} dx$ . (本小题10分)

三. (12分) 指出函数 $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$ 在扩充复平面上的所有奇点, 并确定其类型, 若是极点, 要指出相应的阶.

四. (14分) 求出将上半单位圆 $D = \{z = x + iy : |z| < 1, y > 0\}$ 变为垂直带形区域 $\Omega = \{w = u + iv : 0 < u < \frac{5\pi}{2}\}$ 的一个共形变换.

五. (10分) 假设 $u(x, y)$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上调和函数. 如果存在常数 $\alpha$ 使得 $u(x, y) \geq \alpha$ , 试证明 $u(x, y)$ 为常数.

六. (14分) 设 $f(z)$ 是整函数. 证明以下各题:

(1)  $\overline{f(\bar{z})}$ 是整函数; (本小题6分)

(2) 假设 $f(\frac{1}{n})$ 是实数,  $n = 1, 2, \dots$ . 试证 $f$ 在实轴上取实值. (本小题8分)

七. (8分) 函数 $f$ 在区域 $D = \{z : 0 < |z| < 1\}$ 内解析, 且 $|f(z)| \leq \log \frac{1}{|z|}$ . 试证 $f \equiv 0$ .

附加题(计入总分). (10分) 设函数 $f$ 在 $\overline{D} = \{z : |z| \leq 1\}$ 上除点 $z_0$  ( $|z_0| < 1$ )外处处解析, 且满足

(1) 在 $\overline{D}$ 中无零点, 且对任意的 $|z| = 1$ ,  $|f(z)| = 1$ ;

(2)  $z_0$ 是 $f$ 的一阶极点.

试写出 $f$ 的一般表达式, 并证明你的结论.