金融工程原理

熊雄

1. 金融工程：金融（理论）和工程（应用）的交叉学科

金融工具：股票、债券、衍生品（期货、远期、互换、期权）

主要内容：定价问题、风险管理问题

2. 金融市场的参与者：①对冲者（消除风险）②投机者（赌博性）③套利者（锁定盈利）

交易方式：①场内：交易所 ②OTC：场外交易

3.

远期合约	期货合约	相同点：
交易双方私下合约	场内交易	在将来某个时刻买入或卖出
没有标准化	标准化	某一产品的合约
无保证金制度	有保证金制度	两种合约的风险差异体现在：
通常指明一个交易日	有一系列交易日	期货有保证金制度，把[0,T]的
在合约到期时结算	每日结算	合约分散成每日结算的小合约，
有信用风险	几乎无信用风险	能够消除信用风险

4. 保证金制度的运作过程

投资者在最初开仓交易时必须存入初始保证金，在每天交易结束时，保证金账户的金额数量将进行调整，即每日结算。投资者有权提走保证金账户中超过初始保证金的部分，同时交易所也设置了维持保证金制度，当保证金账户的余额低于维持保证金（通常为初始保证金的75%），投资者须提供追加保证金，否则将强行平仓。

$b = S - F$

5. 基差 = 被对冲资产的即期价格 − 用于对冲的期货合约价格

基差风险是指：基差可能导致投资者在套利过程中出现损失

引起基差风险的原因：

①. 需要对冲风险的资产与期货合约的标的资产可能并不完全一样

② 无法确定买入或卖出资产的准确时间

③. 可能需要在期货到期日之前将期货平仓

应对：①. 选择到期日接近的. ② 选择标的资产相关性高的

6. 利率的期限结构：利率和时间期限之间的关系.

利率的期限结构呈上升趋势：流动性偏好理论造成了远期利率高于预期将来零息利率的情形.

7. 久期：指投资者收到所有现金流所需等待的平均时间

债券的定价公式：$B=\sum_{i=1}^{n} e^{-y\cdot t_i}\cdot c_i$，其中 y 为收益率，$c_i$ 为 t_i 时刻的息票。

当收益率 y 有微小变化时，由 Taylor 公式：$B(y+\Delta y)-B(y)=B'(y)\cdot\Delta y$

$\Rightarrow \Delta B = B'(y)\cdot\Delta y = \Delta y\cdot\sum_{i=1}^{n} -c_i t_i e^{-y\cdot t_i} = -BD\cdot\Delta y$，其中 $D\triangleq\sum_{i=1}^{n} t_i\left[\frac{c_i\cdot e^{-y t_i}}{B}\right]$

$\Rightarrow \frac{\Delta B}{B} = -D\cdot\Delta y$

i.e.，债券的价格变化百分比 = − 久期 × 债券收益率的变化

修正久期：若 y 一年复利 m 次，则有修正久期：$\hat{D}\triangleq -\frac{D}{1+\frac{y}{m}}$

(P117) 基于久期的期货对冲策略

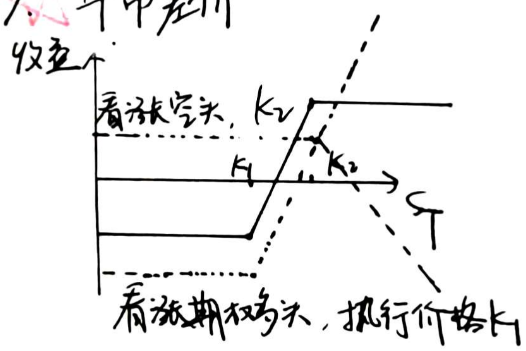
8. 利率互换：固定利率 ⇌ 浮动利率

货币互换：(例) 美元利息 ⇌ 英镑利息

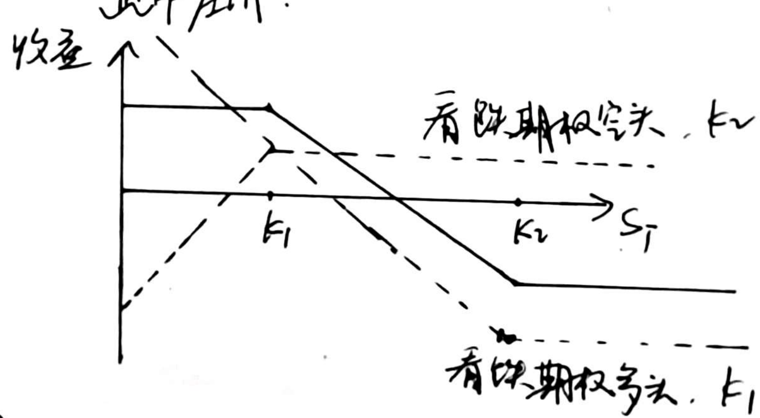
区别：互换类型不同，定价时货币互换有更简便的方法，利率互换只互换利息，货币互换还需换本金

广受欢迎的原因：可以发挥交易双方的相对优势

9. 牛市差价



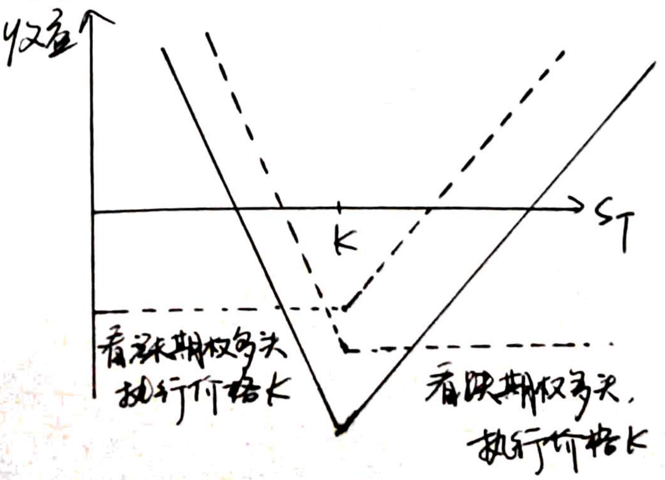
熊市差价



投资者拥有一份执行价格为 K_1 的看涨期权，同时卖出执行价格为 K_2 $(K_2>K_1)$ 的看涨期权

10. 组合

跨式组合



11. 希腊值 Delta，Gamma、Theta、Vega 和 Rho.

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S},\quad \theta = \frac{\partial f}{\partial t},\quad \Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2},\quad \nu = \frac{\partial f}{\partial \sigma},\quad \rho = \frac{\partial f}{\partial r}$$

计算：假设一个投资组合以及两个期权的希腊字母如下表：

	Delta	Gamma	Vega
投资组合	0	-5000	-8000
期权1	0.6	0.5	2.0
期权2	0.5	0.8	1.2

(a) 如何设计一个新的投资组合使 Delta 和 Gamma 中性？

(b) — — — — — — — — — — Delta 和 Vega 中性？

(c) — — — — — — — — — — Delta、Gamma 和 Vega 中性？

Solve. (a). $\tilde{\pi} = \pi + x f_1 + y f_2$

令 $\begin{cases} \Delta\tilde{\pi} = \Delta\pi + x\cdot\Delta f_1 + y\Delta f_2 \\ \Gamma\tilde{\pi} = \Gamma\pi + x\cdot\Gamma f_1 + y\cdot\Gamma f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0.6x + 0.5y = 0 \\ -5000 + 0.5x + 0.8y = 0 \end{cases}$

(b) $\tilde{\pi} = \pi + x f_1 + y f_2$

令 $\begin{cases} \Delta\tilde{\pi} = \Delta\pi + x\cdot\Delta f_1 + y\Delta f_2 \\ \nu\tilde{\pi} = \nu\pi + x\cdot\nu f_1 + y\nu f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0.6x + 0.5y = 0 \\ -8000 + 2x + 1.2y = 0 \end{cases}$

(c)

$\begin{cases} -5000 + 0.5w_1 + 0.8w_2 = 0 \\ -8000 + 2.0w_1 + 1.2w_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 400 \\ w_2 = 6000 \end{cases}$

因此分别加入400份期权1和6000份期权2会使交易组合gamma和vega中性. 加入这两种期权后，交易组合的delta变为

$400\times 0.6 + 6000\times 0.5 = 3240$.

因此必须卖出3240份标的资产才能保持交易组合为delta中性. #

12. 期权市场机制

以欧式看涨期权为例，设S为股价，K为执行价格.

当 $S>K$ 时为实值期权，当 $S=K$ 时为平值期权. 当 $S<K$ 时为虚值期权

只有在期权为实值期权时才会被行使.

13. 隐含波动率：由期权的市场价格所隐含的波动率（向前预测）

隐含波动率对于看涨和看跌期权的计算结果是一样的，why？

当 c 和 p 具有同样的执行价格和期限时，欧式看涨、看跌期权具有平价公式：$p + S_0 \cdot e^{-qT} = c + K \cdot e^{-rT}$ （由无套利原理易证）

假定对于某个给定的波动率，p_{BS} 和 c_{BC} 是由 B-S 公式得到的欧式看涨和看跌期权的价格，再假定 p_{mkt} 和 c_{mkt} 为这些期权的市场价格，因此我们有 $p_{BS} + S_0 \cdot e^{-qT} = c_{BS} + K \cdot e^{-rT}$

在无套利前提下，看跌－看涨平价关系式也对市场价格成立：

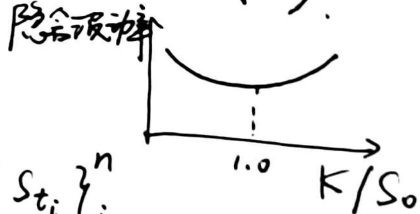
$$p_{mkt} + S_0 \cdot e^{-qT} = c_{mkt} + K \cdot e^{-rT}$$

$$\Rightarrow \quad p_{BS} - p_{mkt} = c_{BS} - c_{mkt}$$

因此，当采用 B-S 模型对具有相同期限与执行价格的看跌及看涨期权定价时，公式所产生的误差应完全相同，因此，隐含波动率对看涨和看跌期权是一样的。

波动率微笑：描述期权隐含波动率与执行价格关系的图形。

外汇市场，波动率倾斜 → 股票市场



14. 历史波动率 （利用 u_i 在最近 m 天的观测数据）

假设有某一标的资产价格的 $n+1$ 个历史数据 $\{S_{t_i}\}_{i=0}^{n}$

令 $u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$，$i = 1, 2, \dots, n$，$\bar{u}$ 为 u_i 的均值

计算 $\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2$ 　常假设为 0

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t \Rightarrow \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \mu\Delta t + \sigma\,dZ_t = \mu\Delta t + \sigma\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta t} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$$

15. EWMA 模型：$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$

GARCH(1,1) 模型：$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$

计算：假定资产价格在昨天收盘时为 $\$600$ (S_{n-1})，日波动率为 1.3%，今天收盘价为 $\$596$ (S_n).

(a) 采用 EWMA 估计，$\lambda = 0.94$. 　(b) 采用 GARCH(1,1) 估计，$\omega = 0.000002$，$\alpha = 0.04$，$\beta = 0.94$

$u_{n-1} = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \ln\frac{596}{600} = -0.669\%$

EWMA：$\sigma_n^2 = 0.94 \times (1.3\%)^2 + (1-0.94) \times (-0.669\%)^2 = 1.25\%$

GARCH(1,1)：$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.04 \times (-0.669)^2 + 0.94 \times (1.3\%)^2 = 1.26\%$.

16. Monte Carlo 模拟法定价欧式期权的步骤

(1). 在风险中性世界里对 S 的随机路径进行抽样

(2). 计算衍生品的收益

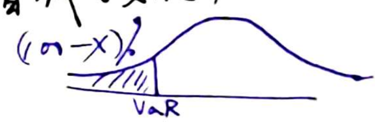
(3). 重复步骤(1)和(2)，以获取许多在风险中性世界里收益的样本

(4) 计算收益的平均值

(5) 以无风险利率对期望收益值贴现，所得结果即为估计值

基本的 Monte Carlo 模拟效率低，因此产生了多种方差缩减技术：

(1). 对偶变量技巧 (2) 矩匹配法



17. 金融风险计算

VaR: 我有 X% 的把握，在今后 N 天内损失不超过 V

ES: 今后 N 天内，在亏损高过 VaR 的条件下的预期亏损

考虑一个投资组合包含300000美金的股票A和500000美金的股票B，假设这两只股票的日波动率为1.8%和1.2%，以及回报率服从正态分布且相关系数为0.6，那么这个投资组合10天97.5%的VaR和ES分别是多少？分散投资降低了多少VaR？($N^{-1}(90\%)=1.282$, $N^{-1}(95\%)=1.645$, $N^{-1}(97.5\%)=1.96$, $N^{-1}(99\%)=2.326$)

$$\sigma_p^2 = 30^2\times(1.8\%)^2 + 50^2\times(1.2\%)^2 + 2\times30\times50\times0.6\times1.8\%\times1.2\%$$
$$=1.0404$$

$\sigma_p = 1.02$ 万

1 天的 VaR: $1.02\times1.96\approx1.999$ 万

10 天的 VaR: $\sqrt{10}\times1.999\approx6.322$ 万

10 天的 ES:

$$ES=\sqrt{10}\times\sigma\cdot\frac{e^{-\frac{Y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot(1-X)} = \sqrt{10}\times1.02\times\frac{e^{-\frac{1.96^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\times0.025}\approx4.2543$$

其中 $X=0.975$，Y 是 $N(0,1)$ 的第 X 个百分位数

$Y=-N^{-1}(0.025)$
$=N^{-1}(97.5\%)$

黄金投资的10天持有期的97.5% VaR_1 为：

$\sigma_{P_1}=30\times1.8\%=0.54$, $VaR_1=\sqrt{10}\times0.54\times1.96\approx3.3470$ 万

白银 — — — — — — —:

$\sigma_{P_2}=50\times1.2\%=0.60$, $VaR_2=\sqrt{10}\times0.60\times1.96\approx3.7188$ 万

因此投资分散降低了：$33470+37188-63220=7438$ 美元.

18. B-S-M 方程

股票价格：$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dZ_t$，无风险利率：$r$

到期收益：$G(S_t)$ Itô Lemma：$dF(S_t,t)=F_t dt+F_s dS_t+\frac{1}{2}F_{ss}(dS_t)^2$

$$dF(S_t,t)=F_t dt+F_s\cdot(\mu S_t dt+\sigma S_t dZ_t)+\frac{1}{2}F_{ss}\cdot\sigma^2 S_t^2\,dt$$
$$=\left(F_t+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{ss}+\mu S_t\cdot F_s\right)dt+\sigma\cdot S_t\cdot F_s\,dZ_t$$

构造投资组合 $\pi=-F(S_t,t)+\Delta\cdot S_t$

则 $d\pi=-dF(S_t,t)+\Delta\cdot dS_t$
$$=-\left(F_t+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot S_t^2\cdot F_{ss}+\mu S_t\cdot F_s\right)dt+\Delta\cdot(\mu S_t dt+\sigma S_t dZ_t)$$
$$-\sigma\cdot S_t\cdot F_s\,dZ_t$$
$$=-\left(F_t+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\cdot F_{ss}+[F_s-\Delta]\cdot\mu\cdot S_t\right)dt-\sigma S_t\cdot(F_s-\Delta)dZ_t$$

要使组合 π 无风险，令 $\Delta=\frac{\partial F(S_t,t)}{\partial S_t}$，则有
$$d\pi=-\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)dt$$

又因为 π 无风险，故 $d\pi=r\pi\,dt$
$$\Rightarrow\ -\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\right)dt=r\cdot\left(-F+\frac{\partial F}{\partial S}\cdot S\right)dt$$
$$\Rightarrow\ \frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}+rS\frac{\partial F}{\partial S}=r\cdot F$$

衍生品在风险中性世界里之预期收益为无风险利率

$$\Rightarrow\ \begin{cases}\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}+rS\cdot\frac{\partial F}{\partial S}=r\cdot F\\[2ex] F(S_T,T)=G(S_T)\end{cases}$$

19. 欧式看涨看跌期权的平价公式

平价公式：$c + K \cdot e^{-rT} = p + S_0$

Pf. 组合A：一份欧式看涨期权 + 在时间T收益为K的零息债券

组合B：一份欧式看跌期权 + 1股股票

① $t=T$，$S_T > K$，组合A的价值为 $(S_T - K) + K = S_T$

B ⋯⋯ S_T

② $t=T$，$S_T < K$，组合A的价值为 K

B ⋯⋯ K

这说明在时间T，两个组合的价值均为 $\max\{S_T, K\}$

由无套利原理，A和B在今天价值相同，故

$$c + K \cdot e^{-rT} = p + S_0$$

#

20. 假设一个金融机构进入一个名义金额为1亿元的互换合约：每半年支付年化利率为3%的固定利息，同时获得利率为SHIBOR的浮动利息。该互换合约还有1.25年到期，且距离支付日的时间分别为0.25、0.75、1.25年。假设，3个月前确定的远期SHIBOR（半年复利一次）利率是2.9%，以及今天确定的3~9月和9~15月的远期SHIBOR利率（半年复一次）分别为3.429%和3.734%，而到期为3，9，15个月的OIS利率（连续复利）分别为2.8%，3.2%和3.4%，求该互换的现值

0.25年：支付150万，收到145万 $(10000 \times 2.9\% \div 2 = 145万)$，净现金流 -5万，现值：$-5 \times e^{-\frac{0.028}{4}} \approx -4.97$万

0.75年：支付150万，收到 $10000 \times 3.429\% \div 2 = 171.45$万，净现金流：21.45万

现值：$21.45 \times e^{-0.032 \times \frac{3}{4}} \approx 20.94$万

1.25年：支付150万，收到 $10000 \times 3.734\% \div 2 = 186.7$万，净现金流：36.7万

现值：$36.7 \times e^{-0.034 \times 1.25} \approx 35.17$万

现值 $= -4.97 + 20.94 + 35.17 = 51.14$万。