数学模型与数学软件

第 4 次作业

1907402030

熊　雄*

2022 年 3 月 24 日

*mrxiongx@foxmail.com　苏州大学数学科学学院本科生

Problem 1

(Page 85-87 Ex.6.)

一只小船渡过宽为 d 的河流, 目标是起点 A, 正对着的另一岸 B 点. 已知河水流速 v_1 与船在静水中的速度 v_2 之比为 k.

a) 建立描述小船航线的数学模型, 求其解析解;

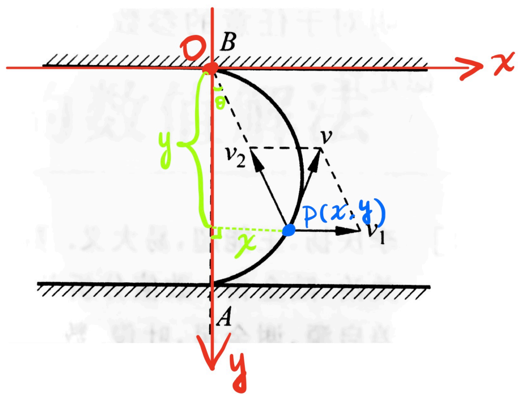
b) 设 $d = 100\text{m}$, $v_1 = 1\text{m/s}$, $v_2 = 2\text{m/s}$, 用数值解法求渡河所需时间, 任意时刻小船的位置及航线曲线, 作图, 并与解析解比较;

c) 若流速 $v_1 = 0,\ 0.5,\ 1.5,\ 2\,(\text{m/s})$, 结果如何?

Solution.

- **建立模型**

  建立平面直角坐标系如下图, 注意 A 点为起点, 虽然这样做看起来使得初始值有些复杂, 但这样有利于直接用坐标表示长度:



设小船的位置为点 P, 过 P 点作 y 轴的垂线, 设图中 $\angle yBP = \theta$, 则有微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_1 - v_2 \sin\theta, \\ \frac{dy}{dt} = -v_2 \cos\theta, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = d. \end{cases} \tag{1}$$

在 $\angle BQP$ 中, $\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v_1 = kv_2$, 则方程组(1)可化为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_2\left(k - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \\ \frac{dy}{dt} = -v_2 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = d. \end{cases} \tag{2}$$

- **模型的解析解**

  将方程组(2)的两式相除, 得:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{k\sqrt{x^2+y^2}-x}.$$

  令 $y = wx$, 且分离变量可得

$$\left(\frac{1}{kw\sqrt{1+w^2}} - \frac{1}{w}\right) dw = \frac{dx}{x}.$$

  积分之, 得

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\ln\left|\sqrt{w^2+1}-1\right| - \ln\left(\sqrt{w^2+1}+1\right)}{2} - \ln|w| = \ln x + \ln C_1 \quad (C_1 > 0\text{为常数}).$$

  化简, 得

$$\frac{\sqrt{w^2+1}-1}{w^{k+1}} = Cx^k \quad (C > 0\text{为常数}).$$

  将 $w = \frac{y}{x}$ 回代, 我们可以得到

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^{k+1}} = Cx^k \quad (C > 0\text{为常数}). \tag{3}$$

  解方程可得

$$x = \frac{1-C^2y^{2k}}{2Cy^{k-1}} \quad (C > 0\text{为常数}). \tag{4}$$

  将初值代入, 可得 $C = d^{-k}$, 于是(4)可以化简为:

$$x = \frac{d^{2k}-y^{2k}}{2d^k y^{k-1}}. \tag{5}$$

- **模型的数值解法**

  我们将 $d = 100$, $k = 0.5$ 代入, 可以得到解析解为

$$x = \frac{100-y}{20y^{0.5}}. \tag{6}$$

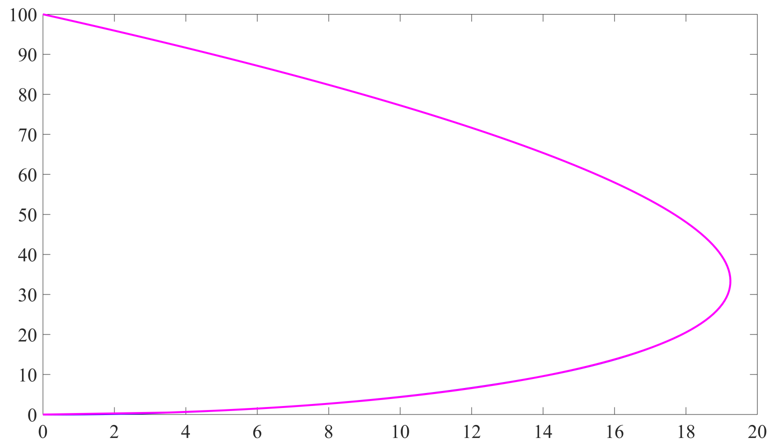
  先建立函数 M 文件:

```
%ship.m
function dx = ship(t , x);
d = 100; %河流宽度
v1 = 1; %河水流速
v2 = 2; %船在静水中的速度
k = v1 / v2;
s = sqrt(x(1) ^ 2 + x(2) ^ 2);
dx = [v1 - v2 * x(1) / s ; -v2 * x(2) / s];
```

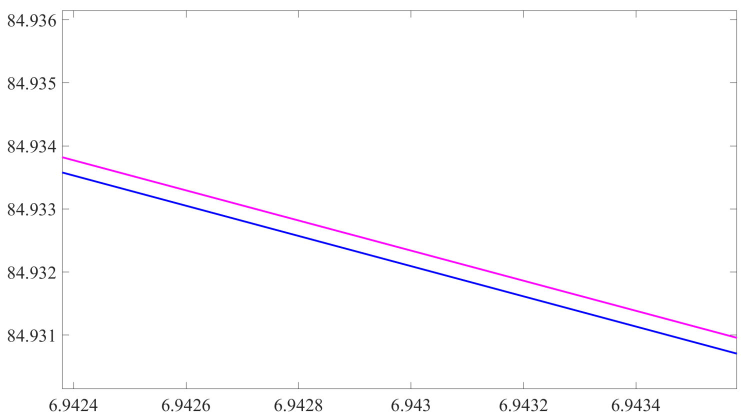
  然后新建脚本, 输入以下代码:

```
%数值解
ts = 0 : 0.5 : 100;
x0 = [0 , d]; %x, y 的初始值
[t , x] = ode45(@ship, ts, x0); %调用 ode45 计算
[t , x]
%解析解
y = 0 : 0.5 : 100;
m = (d ^ (2 .* k) - y .^ (2 * k)) ./ (2 * (d^k) .* (y.^ (k-1)) );
%作图
plot(x(: , 1), x(: , 2), 'b', 'linewidth', 2), %蓝色为数值解
hold on,
plot(m, y, 'm' ,'linewidth', 2); %紫色为解析解
set(gca, 'xlim', [0, 20], 'ylim', [0, 100]);
```

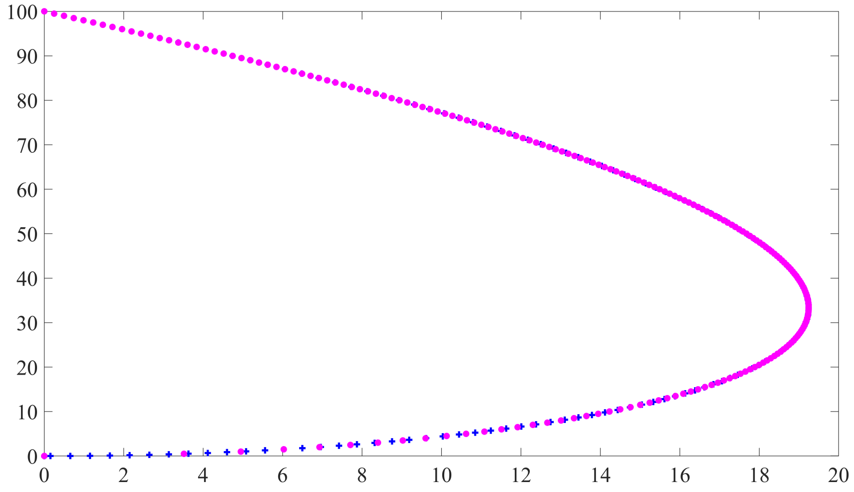
运行可以知道渡河时间约 54 秒, 并且可以得到如下图像, 其中蓝色线条为数值解, 紫色线条为解析解:



由于数值解比较精确, 图像上看起来较为贴合, 将图像放大后可以清晰看到两条曲线是有一些误差的, 但是误差很小:



我们尝试加入一些线形用于区分, 其中蓝色 + 线形为数值解, 紫色 * 线形为解析解:



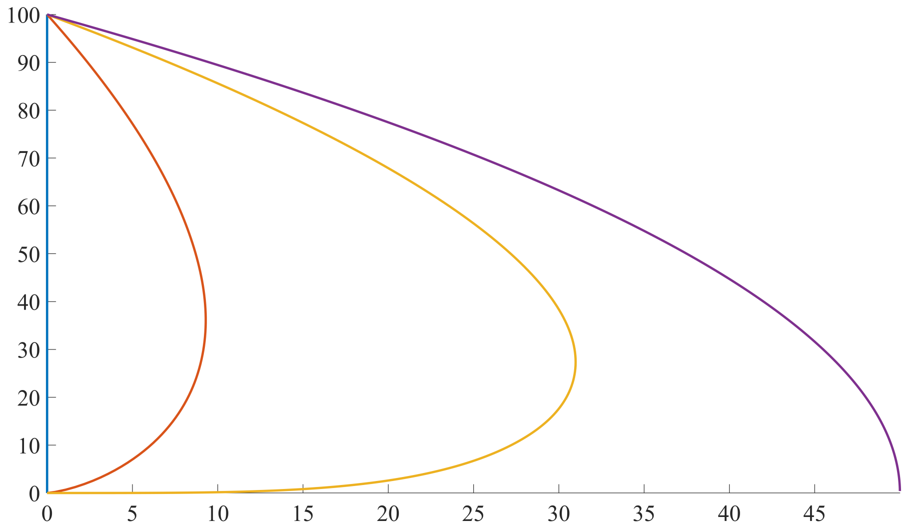
- **流速为 $v_1 = 0,\ 0.5,\ 1.5,\ 2\,(\mathbf{m/s})$ 的结果**

  我们先建立 ship1, ship2, ship3, ship4 的 M 文件, 这四个文件只修改 ship.m 文件里 $v1$ 的值, 例如 ship1.m:

```
%ship1.m
function dx = ship1(t , x);
d = 100; %河流宽度
v1 = 0; %河水流速
v2 = 2; %船在静水中的速度
k = v1 / v2;
s = sqrt(x(1) ^ 2 + x(2) ^ 2);
dx = [v1 - v2 * x(1) / s ; -v2 * x(2) / s];
```

  然后新建脚本如下:

```
ts = 0: 0.5: 150;
hold on;
x0 = [0 , d]; %x, y 的初始值
[t, x] = ode45(@ship1,ts,x0); %调用 ode45 计算
plot(x(: , 1), x(: , 2), 'linewidth', 1.5);
x0 = [0, d];
[t, x] = ode45(@ship2,ts,x0); %调用 ode45 计算
plot(x(: , 1), x(: , 2), 'linewidth', 1.5);
x0 = [0 , d];
[t, x] = ode45(@ship3,ts,x0); %调用 ode45 计算
plot(x(: , 1), x(: , 2), 'linewidth', 1.5);
x0=[0 , d];
[t, x] = ode45(@ship4,ts,x0); %调用 ode45 计算
plot(x(: , 1), x(: , 2), 'linewidth', 1.5);
set(gca,'xlim', [0, 15], 'ylim', [0, 100]);
```



可以得到如下图像:

- **结果分析**
  - 当 $v_1 = 0$, 显然小船将沿直线行驶到终点;
  - 数值解解法和解析解解法所运行出的航行曲线相似, 说明了解法的合理性;
  - 随着 v_1 增大, 小船航行到终点所需要的时间会越来越长, 直到无论怎么航行都无法到达终点;
  - $v_1 < v_2$ 时, 小船总能够到达终点; 否则永远无法到达终点. ■