

考试形式 开 卷 2013 年 6 月

院系_____ 年级_____ 专业_____

学号_____ 姓名_____ 成绩_____

1. (15 分) 铸铁厂要生产一种规格的铸件共 10 吨, 其成分要求为: 锰含量至少达到 0.45%, 硅含量允许在 3.25%~5.5%, 市场有充分的锰和三种不同型号的生铁可供作铸件的炉料使用, 它们的价格是: 锰: 75 元/千克, A 种生铁: 1700 元/吨, B 种生铁: 1900 元/吨, C 种生铁: 1400 元/吨。这三种生铁含锰和硅的成分百分比(%)如下表所示:

	A	B	C
锰	0.4	0.5	0.35
硅	4	1	0.5

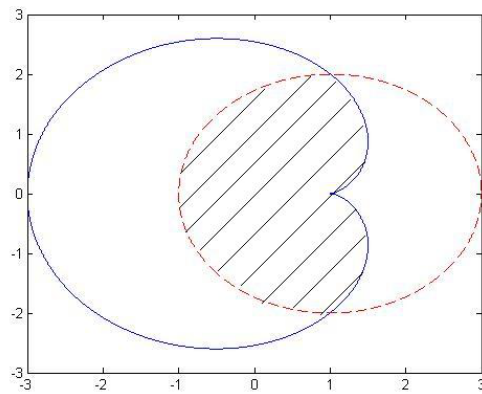
若不计冶炼铸造过程中的损耗, 问工厂怎样选择炉料能使成本最低?

(要求建立模型, 并写出 MATLAB 或 LINDO 程序, 不需求出数值解)

2. (15 分) 如下图, 心形线和圆方程分别为

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases} \text{ 其中 } t \in [0, 2\pi] \text{ 和 } \begin{cases} x = 1 + 2\cos(t) \\ y = 2\sin(t) \end{cases} \text{ 其中 } t \in [0, 2\pi]$$

采用适当的数值方法利用 **Matlab** 程序计算这两个图形相交部分(阴影部分)的面积(不要求出最终结果)。



3. (15 分) 种群的数量(为方便起见以下指雌性)因繁殖而增加, 因自然死亡和人工捕获而减少。记 $x_k(t)$ 为第 t 年初 k 岁(指满 $k-1$ 岁, 未满 k 岁, 下同)的种群数量, b_k 为 k 岁种群的繁殖率(1 年内每个个体繁殖的数量), d_k 为 k 岁种群的死亡率(1 年内死亡数量占总量的比例), h_k 为 k 岁种群的捕获量(1 年内的捕获量)。今设某种群最高年龄为 4 岁(不妨认为在年初将 4 岁个体全部捕获), $b_1 = b_4 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.6$, $d_3 = 0.2$, $h_1 = 308$, $h_2 = 194$, $h_3 = 14$ 。

(1) 建立 $x_k(t+1)$ 与 $x_k(t)$ 的关系($k=1,2,3,4; t=0,1,\dots$), 如 $x_2(t+1) = x_1(t) - d_1 x_1(t) - h_1$ 。

为简单起见, 繁殖量都按年初的种群数量 $x_k(t)$ 计算, 不考虑死亡率。

(2) 用向量 $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ 表示 t 年初的种群数量, 用 b_k 和 d_k 定义适当的矩阵 L , 用 h_k 定义适当的向量 \vec{h} , 将上述关系表成 $\vec{x}(t+1) = L\vec{x}(t) - \vec{h}$ 的形式。

(3) 设 $t=0$ 种群各年龄的数量均为 1000, 求 $t=1$ 种群各年龄的数量。又问设定的捕获量能持续几年。

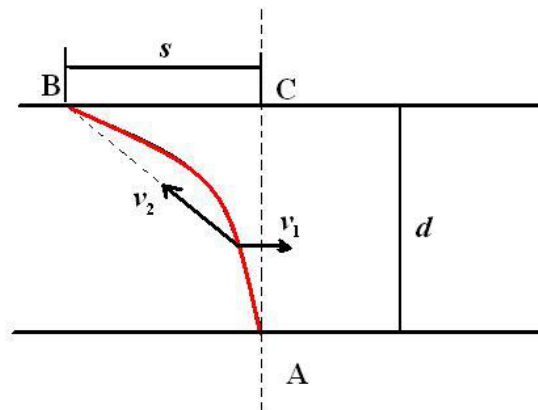
(4) 已知当 $\vec{x}(t) = \vec{x}^* = (1240, 560, 30, 10)^T$ 时, 种群数量将不随时间 t 的改变而改变。

现给 \vec{x}^* 以小的扰动作为 $\vec{x}(0)$, 发现随着 t 的增加, $\vec{x}(t)$ 不趋于 \vec{x}^* 。由此你能得出什么样的结论? 你可以采用哪一个 Matlab 命令来验证你的结论?

4. (15 分) 道路上安装某品牌灯泡 K 只, 假定灯泡寿命服从均值为 4000 小时的指数分布, 每个灯泡的更换和安装价格为 80 元, 管理部门对每个不亮的灯泡制定的惩罚费用为 0.02 元 / 小时, 另外, 对于更换时依然可用的灯泡, 假定可按照 10 元/个的价格卖给回收站, 求最佳更换周期 T 。(建立一个数学模型, 并写出数值求解时的 Matlab 命令。)

提示: 指数分布的概率密度函数为:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

5. (15 分) 一只小船从 A 点出发要渡过宽为 d 的河流(见下图)。最终目标是 B, A 的正对岸记作 C, B 与 C 的距离为 s 。已知河水流速 v_1 及船在静水中的速度 v_2 。试建立描述小船航线的数学模型, 并利用数值解法求任意时刻小船的位置(写出 Matlab 命令)。



6. (15 分) 某企业要为其产品制定价格。设单位产品的成本为常数 q 。产品销售期为 T ，设 T 均分成前后两个半期。设在销售的前后半期的单位产品价格分别取定为 p_1 和 p_2 ($p_1 > p_2$)。在销售前半期，产品的单位时间销售量 x_1 是价格 p_1 的线性减函数，且单位价格的下降所引起的产品单位时间销售量的上升量为 b ，(设 $x_1 = a - bp_1$ ，其中，按成本价卖时，市场是有正的需求量的： $a - bq > 0$)。在销售后半期，如果仍然采用价格 p_1 将不能卖出产品，单位时间销售量 x_2 ，且单位价格的下降所引起的产品单位时间销售量的上升量仍为 b ($x_2 = b(p_1 - p_2)$)。求使利润达到最大的价格 p_1 和 p_2 。

7. (10 分) 假设工厂生产的产品重量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 规定产品合格的标准是重量不低于 120 克。现从该厂随机抽得 5 件产品, 测量其重量分别为 119, 120, 119.2, 119.7, 119.6 试判断产品是否符合规定要求。
(写出模型, Matlab 程序, 并写出如何根据程序结果进行判断)