第四讲、 凸函数与不等式

凸函数在数学的众多领域中都很重要. 本讲将介绍凸函数性质和用凸函数为工具来证明不等式. 与积分相关的不等式放到 “积分学” 部分.

§4.1 凸函数的定义和基本性质

定义 设函数 f 在区间 I 上定义. 若对每一对点 x_1, $x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, 和每一个数 $\lambda \in (0,1)$, 成立不等式

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 f 为区间 I 上的下凸函数. 又若在上式中成立严格不等号, 则称 f 为区间 I 上的严格下凸函数. 若函数 $-f$ 为下凸函数(严格下凸函数), 则称 f 为上凸函数(严格上凸函数). 有时简称下凸函数为凸函数.

性质

1. 函数 f 在区间 I 上为下凸的充分必要条件是对于区间 I 中的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 成立不等式
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
又如在不等式中的不等号 “$\leqslant$” 都改为严格的不等号 “$<$”, 则就是严格下凸的充分必要条件.
2. 开区间上的凸函数必是连续函数.
3. 若 f 为开区间 I 上的下凸函数, 则 (1) f 处处存在有限的两个单侧导数, 而且成立不等式 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x), x \in I$; (2) 若 $x, y \in I$, 且 $x < y$, 则成立不等式 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(y)$.
4. 设 f 在区间 I 上可微, 则 (1) f 在 I 上为下凸函数的充分必要条件是 f' 在 I 上为单调增加函数; (2) f 在 I 上为严格下凸函数的充分必要条件是 f' 在 I 上严格单调增加.
5. 若 f 是区间 I 上的可微下凸函数, 则过任意点 $(x_0, f(x_0)), x_0 \in I$ 的切线一定在曲线 $y = f(x)$ 的下方, 即成立不等式
$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I.$$
又若 f 严格下凸, 则上述不等式成立等号的充分必要条件是 $x = x_0$.
6. 设函数 f 于区间 I 上二阶可微, 则 (1) f 在 I 上为下凸函数的充分必要条件是在 I 上处处有 $f''(x) \geqslant 0$; (2) f 在 I 上为严格下凸函数的充分必要条件是在 I 上处处有 $f''(x) \geqslant 0$, 而且在任一正长度的子区间上 $f''(x)$ 不恒等于零.
7. **下凸函数的 Jensen 不等式** 如 f 为区间 I 上的下凸函数, 则对任何 x_1, x_2, $\cdots$, $x_n \in I$ 与满足条件 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ 的 n 个正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 成立不等式
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$
又若 f 严格下凸, 则上述不等式成立等号的充分必要条件是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

例 1 设 f, g 是 (a,b) 上的下凸函数. 证明: $\max\{f(x),g(x)\}$ 也是 (a,b) 上的下凸函数.

例 2 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为凸函数, 并且有界. 试证极限 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 存在.

例 3 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且处处有 $f''(x)\geqslant 0$. 证明: f 为常值函数.

例 4 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为凸区域, 若对 $\forall\,(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)\in D$, $\forall\lambda\in(0,1)$, $f(x,y)$ 满足

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\leqslant\lambda f(x_1,y_1)+(1-\lambda)f(x_2,y_2),$$

则称 f 为区域 D 上的凸函数. 证明（开）区域上的凸函数连续.

§4.2 一些经典不等式

例 1 利用 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的严格凸性, 证明 Young 不等式

$$ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q,$$

其中 a, $b\ge 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 当且仅当 $a^p=b^q$ 时取等号.

例 2 (广义的算术–几何平均值不等式) 设有 n 个非负数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 n 个正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 则成立不等式

$$\prod_{k=1}^{n}x_k^{\lambda_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$$

其中当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立等号.

例 3 (Hölder 不等式) 设有 2 个非负数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$, 又有 $p>1$, $q>1$, 且满足条件 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则成立不等式

$$\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}y^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中当且仅当数组 $x_1^p,x_2^p,\cdots,x_n^p$ 和 $y_1^q,y_2^q,\cdots,y_n^q$ 成比例时成立等号.

例 4 (Minkowski 不等式) 设有 2 个非负数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$, 又有 $p>1$, 则成立不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中当且仅当数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 成比例时成立等号.

§4.3 其它的一些不等式

例 1 证明 Jordan 不等式: 当 $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\dfrac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$.

例 2 证明: $\dfrac{1-x}{1+x} < \mathrm{e}^{-2x} \quad (0 < x < 1)$.

例 3 证明: $x > 0, \quad t \leqslant x$ 时, $\mathrm{e}^{-t} - (1 - \frac{t}{x})^x \geqslant 0$.

例 4 设函数 $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$. 证明: 当 $\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 于 $x > 0$ 时严格单调减少; 而当 $\alpha < \dfrac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 于 x 充分大时严格单调增加.

例 5 求出最大的 α 和最小的 β, 使得

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

第四讲练习题

1. 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为下凸函数, 又有 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. 证明: f 是常值函数.
2. 设 f 是 $[a, b]$ 上的凸函数, 且有 $c \in (a, b)$ 使得 $f(a) = f(c) = f(b)$. 证明: $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的常值函数.
3. 证明: 在 $(-\infty + \infty)$ 上定义的有界凸函数必是常数.
4. 证明: $\dfrac{\tan x}{x} > \dfrac{x}{\sin x}, \quad \forall x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.
5. 设 $a > \ln 2 - 1$ 为任一常数. 试证 $x^2 - 2ax + 1 < \mathrm{e}^x \quad (x > 0)$.
6. 证明: $\dfrac{1}{x(1+x)} > \ln^2(1 + \dfrac{1}{x}) \quad (x > 0)$.
7. 设 $0 < x < 1$, 试证: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i (1-x)^{2i} \le \frac{4}{23}$.
8. 证明: 当 $0 < x < 1$ 时成立不等式 $\pi < \dfrac{\sin \pi x}{x(1-x)} \le 4$.
9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 二阶可微, 且 $f(x) \ge 0, \ f''(x) \le 0, \quad \forall x \ge a$. 证明: $f'(x) \ge 0, \quad \forall x \ge a$.
10. 证明: 在 $x > 0, \quad x \ne 1$ 时, 成立 Karamata 不等式

$$\frac{\ln x}{x - 1} \le x^{-\frac{1}{2}}.$$

11. 证明: 当 $x > 0, \ y > 0$ 时成立不等式 $x^y + y^x > 1$.