苏州大学数学专业课讲义

一般拓扑及其应用

General topology and its applications

编　　者　史恩慧　周丽珍

研究方向　拓扑动力系统

工作单位　苏州大学数学科学学院

本书使用说明

$\mathbb{N}$: 非负整数集

$\mathbb{Z}_+$: 正整数集

$\mathbb{Z}$: 整数集

$\mathbb{Q}$: 有理数集

$\mathbb{R}$: 实数集

$\mathbb{R}^n$: n维实线性空间

“A:=B”: 将B记作A, 或用A标记B

$A \subset B$ ($A \supset B$): 集合A含于集合B (集合A包含集合B)

$A \subsetneq B$ ($A \supsetneq B$): 集合A真含于集合B (集合A真包含集合B)

我们总是用$n \times 1$矩阵表示$\mathbb{R}^n$中的元素

“一一映射”、“单满映射”、“双射”三者意义相同

书中没有给出证明的命题和例子自动作为习题

目录中标记星号“$*$”的章节属于应用部分内容

分号“;”对句意的分割功能介于逗号“,”和句号“.”之间

数学中的“概念”指的是“定义”和“命题”

“引理”是指一些辅助性的命题, 而“定理”是指一些较重要的命题

绪论

“一般拓扑学”(或称“点集拓扑学”)是一门很成熟的学问, 市面上已有很多非常优秀的教材, 实在没有必要再写一本内容相当的了. 可是为了完成学校的考核任务, 也只能打起精神来写它一本了. 既然要写, 就得好好写, 还要写出自己的特色.

1. 本书在内容安排上有两条主线: 一条讲述点集拓扑的基础理论, 另一条主要讲述这些理论在拓扑动力学中的应用, 也附带讲述一些在加法组合和奇异拓扑等领域的应用. 这些应用内容既可以帮助读者更好地学习和掌握基础理论知识, 又可以使读者摆脱基础理论学习时引起的乏味感. 事实上, 拓扑动力学经过上百年的发展, 已是一门很成熟的学问, 理应在大学数学专业的传统教学内容中占据一席之地; 另外, 它与微分方程、组合学、数论、人工智能等领域的深刻联系也凸显了学习这门学问的必要性.

2. 本书在内容的具体组织上遵循了以下一些原则.

(2.1) 即引即用的原则. 每个定义和命题的引入, 都要立即见到它的应用. 这样, 读者不会在学了一个新概念后, 不知到它的用处在哪里; 也不会在很久以后见到它的初次应用时, 却发现原来的概念已经陌生, 还要回头重新学习. 例如, “乘积空间(2.2节)”之后安排“符号空间和转移映射(2.3节)”; “等价关系(2.4节)”安排在“商空间(2.5节)”之前, “因子和共轭(2.6节)”安排在“商空间(2.5节)”之后; 紧性和分离性安排在同一章(第三章)讲述——这样读者可以很快体会到紧性在提升分离性时起到的作用; “可数性”的定义在“可数性公理和度量化定理(第五章)”一章中引入, “可数性公理”和“度量化定理”安排在同一章; “局部紧性”的定义在“单点紧化”一节(6.1节)中引入; 6.2节后安排Stone-Čeck紧化在加法数论中的应用(6.3-6.5节); 7.2节之后安排Ascoli定理在等度连续系统结构研究中的应用(7.3节); 基数和序数的概念在Furstenberg 结构定理之前引入(7.5节); Biare纲定理与混沌性质安排在同一章讨论(第八章).

(2.2) 抽象与具体相对照的原则. 拓扑空间这一概念可以看作是对度量空间概念的进一步抽象和拓展, 而度量空间也是拓扑空间的最重要实例. 因为人是难以完全脱离具体事物而单纯思考抽象概念的, 所以我们在引入的每个拓扑学定义和命题之后, 都尽可能

同时给出度量空间时的相应形式. 例如, 我们安排了如下内容: 度量空间中用点列极限刻画集合的闭包(1.4节); 度量空间中映射连续性的刻画(1.5节); 可数个度量空间乘积上相容度量的存在性(2.2节); 度量空间紧性的刻画(3.3节); 度量空间的正规性(3.3节); 等等. 第五章的度量化定理(5.3节)、网收敛(5.5节)、一致结构(5.6节)等内容则有助于读者更好地比较一般拓扑空间与度量空间之间的异同.

(2.3) 趣味性原则. 一般拓扑学的经典教学内容很难说有多么的美妙, 这好比单独看一个美人的眼睛、鼻子、嘴巴等器官也难以看出多么美一样, 只有将这些器官很好地组合到一起才会引起强烈的美感. 所以, 我们补充了组合数论中的vander Waerden定理(3.8节)、Hilbert定理和Schur定理(6.5节)、Bing的"狗追兔子方法"(4.7节)、Sharkovskii定理(4.8节)、Furstenberg结构定理(7.6节)、和黄-叶定理(8.5节)等内容. 这些优美的定理和方法理解起来并不困难, 不过是一般拓扑学基础理论知识的巧妙组合而已, 希望读者能够通过学习和欣赏她们, 不再对一般拓扑学产生枯燥乏味的感受.

(2.4) 开放性原则. 一本教材不应是一个论题的结束, 而应是若干论题的起点. 该教材除了涵盖一般拓扑学的经典教学内容之外, 还涉及动力系统的混沌理论、极小系统的结构理论、不动点理论、奇异拓扑学、加法组合学等研究领域的初步知识, 感兴趣的读者可以通过所提供的参考文献顺藤摸瓜, 进一步钻研相关内容. 另外, 我们还会提及几个等至今仍未完全解决的重要问题(如Borsuk猜测和Erdos猜测), 有雄心壮志的读者可以试着用这些问题挑战一下自己.

3. 本书对某些易于混淆或疏忽的概念做了特别强调

(3.1) 对道路连通、弧连通、局部连通、局部道路连通、局部弧连通、弱局部连通等概念做了细致的区分. 经常有学生甚至是教师问我道路连通和弧连通的关系. 首先, 一般的点集拓扑教材中不大会讲弧连通性, 但一定会讲道路连通性. 读者在初次学习时, 会很自然地把道路连通的空间想象成任何不同的两点之间有一段弧(闭区间的同胚像)连接. 这对Hausdorff空间确实是对的, 但证明并不容易. 所以一般的点集拓扑教材中干脆

就不提弧连通性了, 其它像局部连通性与弱局部连通性的关系也不会提及. 我们觉得尽管难以在书中给出这些概念之间强弱关系的严格证明, 但还是有必要做出澄清, 已解除读者心中的疑虑.

(3.2) 对拓扑的奇异性做了强调. 由于学生们平时接触到的拓扑空间都比较“好”(如欧氏空间或微分流形), 就容易对一般拓扑空间的复杂性认识不足, 甚至有可能在今后的理论研究中犯“想当然”的错误. 为此, 我们特别补充了不可分解连续统的内容(4.6节), 这种奇异的空间会自然出现在微分方程、动力系统、或几何学的研究中, 而其结构却与我们的直觉相背. 学生们接触了这些奇异的空间后, 就会对空间拓扑的复杂性有所认识——这就起到了提示和警醒的作用.

4. 本书特别增加了中国人的工作. 我们一直在讲文化自信, 但如果一本教材从头到尾都看不到中国人的名字, 那学生们可能要对文化自信的提法产生疑惑了. 因为历史的原因, 我们很少有人参与到一般拓扑学早期经典理论的建造中, 而一般拓扑学后期的发展虽然有很多中国人的工作, 但因为过于专门又不适合在本科生教材中讲述. 拓扑动力学的情况则要好得多了, 因为其理论的系统发展要在点集拓扑学成熟以后, 所以距离我们不算太遥远, 这样中国人就有机会参与到这门学问的一些基础理论的建造过程中. 第8章中, 我们将介绍叶向东教授和黄文教授在混沌理论中的一个基础性工作(黄-叶定理), 这一工作对两类广为人知的混沌系统的蕴含关系做出了澄清, 其方法也引发了许多后续的重要研究. 另外, 我们还会给出麦结华教授对这个定理的一个构造性的证明.

目录

第 1 章　拓扑空间和连续映射

1.1　拓扑空间的定义

定义1.1. *设X是一集合, $\mathcal{T}$是X的一个子集族. 若 $\mathcal{T}$ 满足以下三条:*

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(2) $\mathcal{T}$中任意个元的并仍在$\mathcal{T}$中(任意并封闭),

(3) $\mathcal{T}$中任意有限个元的交仍在$\mathcal{T}$中(有限交封闭),

则称$\mathcal{T}$是集合X上的一个拓扑. 我们称带有一个拓扑$\mathcal{T}$的集合X为一个拓扑空间; 记作$(X, \mathcal{T})$.

例子1.1. *设X是一集合, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. 则$\mathcal{T}$成为一个拓扑; 称作$X$ 上的平凡拓扑.*

例子1.2. *设$\mathcal{T}$是集合X的全体子集构成的族. 则$\mathcal{T}$构成一个拓扑; 称作X 上的离散拓扑.*

从例1.1和1.2可见一个集合上总是有拓扑的.

例子1.3. *设X是一集合, $\mathcal{T} = \{A : X \setminus A \text{ 是有限的}\} \cup \{\emptyset\}$. 则$\mathcal{T}$成为一个拓扑; 称作$X$上的余有限拓扑.*

定义1.2. *设X是一集合. 若映射$d : X \times X \to \mathbb{R}$满足以下三条:*

(1)非负性: $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$, 并且$d(x, y) = 0$当且仅当$x = y$,

(2)对称性: $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$,

(3)三角不等式: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z), \forall x, y, z \in X$,

则称d是集合X上的一个度量. 称带有度量d的集合X为一个度量空间; 记作(X, d).

例子1.4. *设$\mathbb{R}^n$为n-维线性空间$(n \geq 1)$. 定义映射$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为*

$$d(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2)^{1/2}, \quad \forall x = (x_i), y = (y_i) \in \mathbb{R}^n.$$

则d是$\mathbb{R}^n$上的一个度量; 称为$\mathbb{R}^n$上的欧氏度量. 称带有欧式度量的线性空间$\mathbb{R}^n$为n-维欧氏空间; 记作$\mathbb{E}^n$.

例子1.5. 设X是一集合. 定义映射$d: X \times X \to \mathbb{R}$为

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

则d是X上一个度量; 称为X上的离散度量.

设(X,d)为度量空间. 对$x \in X$及$r > 0$, 我们用$B(x,r)$表示以x为中心, r为半径的开球; 即$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.

定义1.3. 设(X,d)为度量空间, $U \subset X$. 如果对每一$x \in U$, 都存在$\epsilon > 0$, 使得$B(x,\epsilon) \subset U$, 则称U是开集.

命题1.4. 设(X,d)为度量空间, $\mathcal{T}$是X上的开集全体. 则$\mathcal{T}$为X上的一个拓扑.

证明. 显然$\emptyset, X \in \mathcal{T}$. 任意给定$U, V \in \mathcal{T}$及$x \in U \cap V$; 则存在$r_1, r_2 > 0$, 使得$B(x,r_1) \subset U$且$B(x,r_2) \subset V$. 令$r = \min\{r_1, r_2\}$; 则$B(x,r) \subset U \cap V$. 这蕴含$\mathcal{T}$对有限交封闭. 为证$\mathcal{T}$对任意并封闭, 设$\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$. 若$x \in \cup\,\mathcal{U}$, 则对某个$U \in \mathcal{U}$, 有$x \in U$. 于是, 存在$r > 0$, 使得$B(x,r) \subset U \subset \cup\,\mathcal{U}$. □

命题1.4表明度量空间中的开集全体构成拓扑, 我们称其为由度量d 所诱导的拓扑. 今后, 除非特别说明, 我们总是在这个意义下视一个度量空间为拓扑空间.

问题1.5. 设d为X上的离散度量. 那么由d所诱导的拓扑是什么拓扑?

下面定义将开集概念从度量空间拓展到一般拓扑空间.

定义1.6. 设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间. 称$\mathcal{T}$中的元为X的开集.

如果x是拓扑空间X中的点并且$\{x\}$是开集, 则称x是X的孤立点.

习题1. 证明: 一个拓扑空间X是离散的当且仅当它是点点孤立的.

下面命题在判断一个集合是否为开集时经常用到.

命题1.7. 设A是拓扑空间$(X,\mathcal{T})$的子集. 如果对每个$x\in A$, 都存在$U\in\mathcal{T}$使得$x\in U\subset A$, 则A是开集.

证明. 对每个$x\in X$, 取开集U_x, 使得$x\in U_x\subset A$; 则$A=\cup_{x\in X}U_x$. 根据拓扑的"任意并封闭"性质, 我们知A是开集. □

定义1.8. 设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间, 且$x\in A\subset X$. 如果存在开集U使得$x\in U\subset A$, 则称A是x的邻域; 若A本身是开集, 则称A是x的开邻域.

习题2. 证明: 设Y是拓扑空间$(X,\mathcal{T})$的子集. 如果对每个$x\in Y$, 都存在x的邻域A使得$x\in A\subset Y$, 则Y是X的开集.

1.2 拓扑的基和子基

定义1.9. 设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间, $\mathcal{B}$是$\mathcal{T}$的一个子族. 如果$\mathcal{T}$中每个元都是$\mathcal{B}$中元的并, 则称$\mathcal{B}$ 是拓扑$\mathcal{T}$的一个拓扑基.

例子1.6. 设(X,d)是一度量空间, $\mathcal{T}$为度量d所诱导的拓扑, $\mathcal{B}=\{B(x,r):x\in X,r>0\}$, 则$\mathcal{B}$为$\mathcal{T}$ 的一个拓扑基.

下面命题的证明留作习题.

命题1.10. 设X为一个集合, $\mathcal{A}$为X的一个子集族, $\mathcal{T}$是X上包含$\mathcal{A}$的所有拓扑的交, 则$\mathcal{T}$为X上一个拓扑(称为由$\mathcal{A}$生成的拓扑).

若$\mathcal{A}$为集合X的一个子集族. 一个自然的问题是何时$\mathcal{A}$是它所生成拓扑的拓扑基? 下面命题给出了该问题的一个回答.

命题1.11. 设X为一个集合, $\mathcal{A}$为X的一个子集族. 若$\mathcal{A}$满足以下两条:

(1)足够多: 对任意$x\in X$, 都存在$U\in\mathcal{A}$ 使得$x\in U$;

(2)足够细: 对任意$U,V\in\mathcal{A}$及$x\in U\cap V$, 都存在$W\in\mathcal{A}$使得$x\in W\subset U\cap V$;

则$\mathcal{A}$是它所生成拓扑的拓扑基.

证明. 设$\mathcal{T}=\{T: T$是$\mathcal{A}$中若干元素的并$\}$. 则$\mathcal{T}$必含于$\mathcal{A}$ 所生成的拓扑之中. 下面只要证$\mathcal{T}$ 是一个拓扑, 则$\mathcal{T}$必是$\mathcal{A}$所生成的拓扑, 从而$\mathcal{A}$是其所生成拓扑的拓扑基. 显然, $\emptyset\in\mathcal{T}$; 由条件(1)知$X\in\mathcal{T}$. 设$T,S\in\mathcal{T}$, 则存在$\mathcal{A}$的子族$\mathcal{P}$和$\mathcal{Q}$, 使得$T=\cup\mathcal{P}$ 且$S=\cup\mathcal{Q}$. 这样, $T\cap S=\cup_{U\in\mathcal{P},V\in\mathcal{Q}}(U\cap V)$; 由条件(2)知, $U\cap V$仍是$\mathcal{A}$中元的并, 从而$T\cap S$是$\mathcal{A}$ 中元的并. 所以, $\mathcal{T}$满足有限交封闭的性质. 从$\mathcal{T}$定义立知其满足任意并封闭的性质. □

定义1.12. *设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间, $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$. 如果$\mathcal{S}$中元的有限交全体构成$\mathcal{T}$的拓扑基, 则称$\mathcal{S}$ 为拓扑$\mathcal{T}$的拓扑子基.*

例子1.7. *设$\mathbb{E}^1$为一维欧氏空间, $\mathcal{T}$为欧式度量所诱导的拓扑, $\mathcal{S}=\{(-\infty,a): a\in\mathbb{R}\}\cup\{(b,+\infty): b\in\mathbb{R}\}$, 则$\mathcal{S}$是$\mathcal{T}$的拓扑子基.*

1.3 拓扑的粗细比较

定义1.13. *设$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是集合X上两个拓扑. 如果$\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$, 则称$\mathcal{T}_1$比$\mathcal{T}_2$粗(或$\mathcal{T}_2$比$\mathcal{T}_1$细); 记作$\mathcal{T}_1\prec\mathcal{T}_2$.*

例子1.8. *集合X上的平凡拓扑比其上的任何拓扑都粗, 而X上的离散拓扑比其上的任何拓扑都细.*

下面例子表明一个集合上的两个拓扑并非总可以比较粗细.

例子1.9. *设集合$X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{T}_1=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},X\}$, $\mathcal{T}_2=\{\emptyset,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$, 则$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是集合$X$上两个拓扑但不能比较粗细.*

例子1.10. *设$\mathcal{A}$是集合X的一个子集族, 则由$\mathcal{A}$生成的拓扑是所有包含$\mathcal{A}$的拓扑里最粗的拓扑.*

命题1.14. *设$\mathcal{T}_1$和$\mathcal{T}_2$是集合X上两个拓扑, $\mathcal{B}_1$和$\mathcal{B}_2$分别是它们的拓扑基. 如果对任意$U\in\mathcal{B}_1$及任意$x\in U$, 都存在$V\in\mathcal{B}_2$ 使得$x\in V\subset U$, 则$\mathcal{T}_1\prec\mathcal{T}_2$.*

证明. 设$W\in\mathcal{T}_1$及$x\in W$. 取$U_x\in\mathcal{B}_1$, 使得$x\in U_x\subset W$. 于是, 存在$V_x\in\mathcal{B}_2$使得$x\in V_x\subset U_x$. 这样, $W=\cup_{x\in U}V_x\in\mathcal{T}_2$. 所以, $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$, 即$\mathcal{T}_1\prec\mathcal{T}_2$. □

1.4 闭包和内部

定义1.15. 设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间, $A\subset X$. 若$X\setminus A$是开集, 则称A是X的闭集.

命题1.16. 设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间, $\mathcal{F}$是X的闭集全体, 则$\mathcal{F}$中的元满足以下三条:

(1) $\emptyset, X\in\mathcal{F}$;

(2) $\mathcal{F}$中任意个元的交仍在$\mathcal{F}$中(任意交封闭);

(3) $\mathcal{F}$中任意有限个元的并仍在$\mathcal{F}$中(有限并封闭).

定义1.17. 设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间, $A\subset X$. 我们将包含A的所有闭集的交称作A的闭包, 并记作$\overline{A}$.

由命题1.16和闭包的定义立见, $\overline{A}$是在集合包含关系下包含A 的最小闭集.

命题1.18. 设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间, $A\subset X$, $x\in X$. 则$x\in\overline{A}$当且仅当x 的每个开邻域与A都有非空的交.

证明. $(\Longrightarrow)$假设存在x的开邻域U, 使得$U\cap A=\emptyset$. 则$A\subset X\setminus U$但$x\notin X\setminus U$. 而$X\setminus U$是闭集, 这与$x\in\overline{A}$相矛盾.

$(\Longleftarrow)$假设$x\notin\overline{A}$; 则存在闭集$B\supset A$使得$x\notin B$. 于是, x含于开集$X\setminus B$. 这导致矛盾. □

习题3. 证明: (1) $\overline{\cup_{i=1}^k A_i}=\cup_{i=1}^k\overline{A_i}$. (2) $\overline{\cup_{i=1}^\infty A_i}\supset\cup_{i=1}^\infty\overline{A_i}$; 举例说明该包含关系可以是真的. (3) $\overline{\cap_{i=1}^k A_i}\subset\cap_{i=1}^k\overline{A_i}$; 举例说明该包含关系可以是真的.

定义1.19. 设A是拓扑空间$(X,\mathcal{T})$的子集. 若$\overline{A}=X$, 则称A在X中稠密.

由命题1.18立即得到:

例子1.11. 有理数集$\mathbb{Q}$在实数集$\mathbb{R}$中稠密.

定义1.20. 设A是拓扑空间$(X,\mathcal{T})$的子集. 称集合$\overset{\circ}{A}\equiv\{x\in A:$存在开集$U$使得$x\in U\subset A\}$为$A$的内部.

例子1.12. 设$A=[0,1)\subset\mathbb{R}$, 则$\overline{A}=[0,1]$, $\mathring{A}=(0,1)$.

问题1.21. 设$A=\{(x,y):y=\sin\frac{1}{x},0<x\le 1\}\subset\mathbb{R}^2$. 问: $\overline{A}$是什么?

习题4. 证明: 集合A的内部是含于A的集合包含关系下的最大开集.

习题5. 证明: $\mathring{A}=X\setminus\overline{X\setminus A}$.

定义1.22. 集合X中的一个点列是指一个映射$\phi:\mathbb{Z}_+\to X,n\mapsto x_n$; 记作$(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 或简记为$(x_n)$.

定义1.23. 设(x_n)是度量空间(X,d)中的点列, $z\in X$. 如果对任意$\epsilon>0$ 都存在$N>0$, 使得当$n>N$ 时, 成立$d(x_n,z)<\epsilon$, 则称点列(x_n)收敛到z, 或z是(x_n)的极限点; 记作$\lim x_n=z$ 或$x_n\to z$.

为表达的简洁, 我们经常把“存在$N>0$, 使得当$n>N$ 时, ...” 表述为“当n充分大时, ...”; 或, “对充分大的n,...”.

命题1.24. 设(X,d)是度量空间, $A\subset X$, $x\in X$. 则$x\in\overline{A}$当且仅当x是A中某个点列的极限点.

证明. ($\Longrightarrow$) 设$x\in\overline{A}$; 则对每个正整数n, 有$B(x,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$; 取$x_n\in B(x,\frac{1}{n})\cap A$. 易见, $x_n\to x$.

($\Longleftarrow$) 设(x_n)是A中点列且$x_n\to x$. 设U是x的开邻域, 则存在$r>0$, 使得$B(x,r)\subset U$. 于是, 当n充分大时, 有$x_n\in B(x,r)\subset U$; 特别地, $A\cap U\neq\emptyset$. 由命题1.18, 知$x\in\overline{A}$. □

1.5 连续映射和同胚

定义1.25. 设$f:X\to Y$是拓扑空间X到拓扑空间Y的映射. 如果对Y中每个开集V, $f^{-1}(V)$ 都是X中开集, 则称f是连续的.

命题1.26. 设$f:X\to Y$是拓扑空间X到拓扑空间Y的映射, $\mathcal{B}$是Y的拓扑基或拓扑子基. 如果对每个$V\in\mathcal{B}$, $f^{-1}(V)$都是X 中开集, 则f是连续的.

命题1.27. *设$f: X \to Y$是拓扑空间X到拓扑空间Y的映射, 则下列条件等价:*

(1)f连续;

(2)对X的任一子集A, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(3)对Y的任一闭集B, $f^{-1}(B)$是X的闭集;

(4)对每个$x \in X$和$f(x)$的每个邻域V, 存在x的开邻域U, 使得$f(U) \subset V$.

证明. $(1) \Longrightarrow (2)$. 设$x \in \overline{A}$. 设V是$f(x)$的开邻域, 则$f^{-1}(V)$为x的开邻域. 于是, $f^{-1}(V)\cap A \neq \emptyset$. 取$a \in f^{-1}(V)\cap A$; 则$f(a) \in V\cap f(A) \neq \emptyset$. 所以, $f(x) \in \overline{f(A)}$. 这样, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$(2) \Longrightarrow (3)$. 由$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B} = B$, 得$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$. 显然, $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$. 所以, $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$; 即, $f^{-1}(B)$是闭集.

$(3) \Longrightarrow (1)$. 设V是Y的开集; 则$Y \setminus V$是闭集. 于是, $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$是$X$的闭集. 所以, $f^{-1}(V)$是X的开集. 这样, f连续.

$(1) \Longrightarrow (4)$. 因f连续, 所以$f^{-1}(V)$是x的开邻域. 令$U = f^{-1}(V)$; 则$f(U) = V$.

$(4) \Longrightarrow (1)$. 设V是Y的开集. 设$x \in f^{-1}(V)$; 则$f(x) \in V$. 于是, 存在x的开邻域U_x, 使得$f(U_x) \subset V$; 即$U_x \subset f^{-1}(V)$. 这样, $f^{-1}(V)$是X的开集. 所以, f连续. □

对X中的点x, 若命题1.27中(4)成立, 则称f在点x 处连续. 这样, $f: X \to Y$连续当且仅当f 在X的每一点处连续.

命题1.28. *设(X, d)和(Y, ρ)为度量空间, $f: X \to Y$为一个映射, $x \in X$. 则下面条件等价:*

(1)f在点x处连续;

(2)对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得当$d(x, y) < \delta$时, 有$\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$;

(3)对任意收敛到x的序列(x_n), 都有$(f(x_n))$收敛到$f(x)$.

下面命题在学习《数学分析》时便已熟知.

命题1.29. *初等函数在有定义的点处都是连续的.*

例子1.13. *设A是$n \times n$实系数矩阵, 则$f: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, v \mapsto Av$是连续的.*

命题1.30. 设$f: X \to Y$及$g: Y \to Z$是连续映射, 则$g \circ f: X \to Z$是连续的.

定义1.31. 如果$f: X \to Y$是一一的连续映射, 并且f^{-1}也连续, 则称f是同胚. 如果存在从X 到Y的同胚, 则称拓扑空间X和Y是同胚的; 记作$X \cong Y$.

命题1.32. 若$\mathrm{Id}_X : X \to X$为恒同映射, 则Id_X为同胚. 若$f : X \to X$为同胚, 则f^{-1} : $X \to X$为同胚. 若$f: X \to Y$及$g: Y \to Z$为同胚, 则$g \circ f: X \to Z$为同胚.

命题1.33. 设X, Y, Z是拓扑空间, 则

(1) $X \cong X$;

(2) 若$X \cong Y$, 则$Y \cong X$;

(3) 若$X \cong Y$且$Y \cong Z$, 则$X \cong Z$.

定义1.34. 设$f: X \to Y$是一映射. 如果f将开集映为开集, 则称f是开映射; 若f将闭集映为闭集, 则称f是闭映射.

命题1.35. 设$f: X \to Y$是连续的一一映射. 如果f是开映射或闭映射, 则f为同胚.

例子1.14. 映射$f: (-1, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$是同胚.

例子1.15. 设$\mathbb{S}^1$为复平面内的单位圆周, 即$\mathbb{S}^1 = \{e^{2\pi \mathrm{i} x} : x \in \mathbb{R}\}$. 设$f : [0, 1) \to \mathbb{S}^1, x \mapsto e^{2\pi \mathrm{i} x}$; 则$f$是连续双射但不是同胚.

例子1.16. 设A是$n \times n$实系数可逆矩阵, 则$T_A : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, v \mapsto Av$ 是同胚.

1.6 周期点和回复点*

设X是一拓扑空间, $C(X)$为X到自身的所有连续映射全体. 由命题1.30知$C(X)$在映射符合下成为一个半群. 设S是一个半群. 我们称一个半群同态$\phi : S \to C(X)$为半群S在X上的一个连续作用.

设$f \in C(X)$. 我们规定: $f^0 = Id_X$; 对正整数n, f^n为n个f的复合. 则映射$\phi : \mathbb{N} \to C(X), n \mapsto f^n$ 定义了自然数半群$\mathbb{N}$在X上的一个连续作用; 我们称该作用为一个动力系统, 记作(X, f). 对$x \in X$, 称集合$\mathcal{O}(x, f) \equiv \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$为点$x$的轨道.

例子1.17. 设$\mathbb{S}^1 \equiv \{e^{2\pi \mathrm{i} t} : t \in \mathbb{R}\}$为复平面内单位圆周. 对$\alpha \in \mathbb{R}$, 设$R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, e^{2\pi \mathrm{i} t} \mapsto e^{2\pi \mathrm{i}(t+\alpha)}$为圆周旋转. 则$(\mathbb{S}^1, R_\alpha)$为一动力系统.

例子1.18. 设$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$; 则$(\mathbb{S}^1, f)$为一动力系统.

例子1.19. 定义映射$f : [0,1] \to [0,1]$为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2-2x, & 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

则$([0,1], f)$为一动力系统. 该映射f称为帐篷映射.

定义1.36. 设(X, f)是动力系统, $x \in X$. 若存在正整数n使得$f^n(x) = x$, 则称x为周期点; 最小的这样的正整数n称为x的周期, 这时x也称为n-周期点. 若x是周期为1的点, 即$f(x) = x$, 则称x是不动点.

习题6. 若(X, f)是动力系统且f是同胚, 则x是n-周期点当且仅当$\mathcal{O}(x, f)$恰含n个点.

命题1.37. 设x是动力系统(X, f)的n-周期点. 若$f^m(x) = x$, 则$n|m$.

定义1.38. 设(X, f)是动力系统, $x \in X$. 若对x的任意邻域U, 都存在正整数n, 使得$f^n(x) \in U$, 则称x是回复点.

命题1.39. 周期点是回复点.

命题1.40. 设(X, f)是动力系统, 其中X是度量空间. 则x是回复的当且仅当存在正整数序列$n_1 < n_2 < \cdots$使得$f^{n_i}(x) \to x$.

习题7. 例*1.17*中, 若α是有理数, 则每个点都是周期的且所有点具有相同的周期.

定义1.41. 设(X, f)是动力系统. 如果存在一个点$x \in X$使得轨道$\mathcal{O}(x, f)$在X中稠密, 则称x是拓扑传递点或简称为传递点, 称系统(X, f) 是点传递的.

命题1.42. 设(X, f)是动力系统, $x \in X$. 如果X是度量空间且x是非孤立的传递点, 则x是回复的.

习题8. 请举例说明命题*1.42*中“非孤立”这一条件是必要的.

习题9. 例*1.17*中, 若α是无理数, 则每个点都是传递点; 特别地, 也是回复点.

习题10. 例*1.18*中, $(\mathbb{S}^1, f)$的周期点集稠密. 问该系统是否是点传递的?

习题11. 例*1.19*中, $([0,1], f)$的周期点集稠密. 问该系统是否是点传递的?

习题12. 请举一个没有回复点的动力系统的例子.

第 2 章　从已有空间构造新空间

2.1　子空间

命题2.1. 设$(X,\mathcal{T})$是一拓扑空间, $Y\subset X$, $\mathcal{T}_Y=\{Y\cap U:U\in\mathcal{T}\}$. 则$\mathcal{T}_Y$是$Y$ 上一个拓扑.

定义2.2. 我们称命题*2.1*中的$\mathcal{T}_Y$为Y的子空间拓扑; $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 称为$(X,\mathcal{T})$的子空间.

习题13. 证明若$\mathcal{B}$为$\mathcal{T}$的拓扑基, 则$\{Y\cap U:U\in\mathcal{B}\}$为$\mathcal{T}_Y$的拓扑基.

习题14. 证明: $\mathbb{R}$上欧氏度量所诱导的拓扑与$\mathbb{R}$作为$\mathbb{R}^2$的子空间拓扑是一致的.

命题2.3. 设Y是度量空间(X,d)的子集, d_Y是d在Y上的限制度量; 则Y的子空间拓扑与d_Y所诱导拓扑是一致的.

命题2.4. 设Y是拓扑空间$(X,\mathcal{T})$的子集, $\imath:Y\to X,x\mapsto x$为含入映射. 则$\mathcal{T}_Y$ 是使$\imath$连续的Y上最粗的拓扑.

证明. 设$U\in\mathcal{T}$; 则$\imath^{-1}(U)=U\cap Y\in\mathcal{T}_Y$. 所以$\imath$连续. 设$\mathcal{A}$是$Y$上使得$\imath$为连续的任一拓扑; 则对每个$U\in\mathcal{T}$, 有$U\cap Y=\imath^{-1}(U)\in\mathcal{A}$. 所以$\mathcal{T}_Y\prec\mathcal{A}$. □

定义2.5. 设$f:X\to Y$是连续单射. 如果关于$f(X)$的子空间拓扑, 映射$\tilde{f}:X\to f(X),x\mapsto f(x)$ 是同胚, 则称f是嵌入.

命题2.6. 设X,Y是度量空间, $f:X\to Y$是连续单射; 则f是嵌入当且仅当对每个$z\in f(X)$及收敛到z的$f(X)$中点列(y_n), 成立$(f^{-1}(y_n))$收敛到$f^{-1}(z)$.

例子2.1. 设$f:(-1,1)\to\mathbb{R}^2,x\mapsto(x,\frac{x}{1-x^2})$. 则$f$是一个嵌入.

例子2.2. 设$f:[0,1)\to\mathbb{R}^2,x\mapsto(\cos(2\pi x),\sin(2\pi x))$. 则$f$是连续单射而非嵌入.

2.2 乘积空间

定义2.7. 设A为一个指标集合. 对每个$a \in A$, 设X_a为一个集合. 称映射的集合$\{x : A \to \cup_{a\in A} X_a \mid x(a) \in X_a\}$为集族$\{X_a\}_{a\in A}$的乘积; 记作$\Pi_{a\in A} X_a$. 设$b \in A$; 称映射$p_b : \Pi_{a\in A} X_a \to X_b$, $f \mapsto f(b)$, 为$\Pi_{a\in A} X_a$到分量b的投影.

对乘积空间$\Pi_{a\in A} X_a$中的元素x及$a \in A$, 记$x_a = x(a)$; 这样x可记作$(x_a)_{a\in A}$, 或简记作(x_a). 若对每个a有$X_a = X$, 则$\Pi_{a\in A} X_a$也记作X^A. 若$A = \{1, ..., n\}$, 则也将$\Pi_{a\in A} X_a$记作$\Pi_{i=1}^n X_i$, 将X^A也记作X^n. 我们经常把$\Pi_{i\in\mathbb{Z}_+} X_i$记作$\Pi_{i=1}^\infty X_i$, 或$X_1 \times X_2 \times \cdots$; 把$\Pi_{i\in\mathbb{Z}} X_i$记作$\Pi_{i=-\infty}^\infty X_i$, 或$\cdots \times X_{-1} \times X_0 \times X_1 \cdots$.

定义2.8. 设A为一指标集. 对每个$a \in A$, 设$(X_a, \mathcal{T}_a)$为一拓扑空间. 设$\mathcal{B} = \{\Pi_{a\in A} U_a : U_a \in \mathcal{T}_a$, 且除有限个$a$外$U_a = X_a\}$. 称由$\mathcal{B}$生成的拓扑为集合$\Pi_{a\in A} X_a$上的乘积拓扑; 称带有乘积拓扑的集合$\Pi_{a\in A} X_a$为乘积空间.

命题2.9. $\Pi_{a\in A} X_a$上的乘积拓扑是使得每个投影$p_b (b \in A)$为连续的最粗的拓扑.

习题15. 设$\mathcal{A}_a$是定义*2.8*中$\mathcal{T}_a$的拓扑基. 验证$\mathcal{B} = \{\Pi_{a\in A} U_a : U_a \in \mathcal{A}_a$, 且除有限个$a$外$U_a = X_a\}$是$\prod_{i=1}^n X_i$上乘积拓扑的拓扑基; $\mathcal{S} = \{\Pi_{a\in A} U_a : U_a \in \mathcal{A}_a$, 且除一个$a$外$U_a = X_a\}$ 是其拓扑子基.

习题16. 证明$\mathbb{R}^2$上欧氏度量所诱导的拓扑与$\mathbb{R}^2$作为两个$\mathbb{R}$乘积的乘积拓扑是一致的.

定义2.10. 设$(X, \mathcal{T})$是一个拓扑空间. 如果X上存在一个度量d, 使得d所诱导的拓扑与$\mathcal{T}$一致, 则称d是拓扑空间$(X, \mathcal{T})$ 上的一个相容度量, 称拓扑空间$(X, \mathcal{T})$是可度量化的.

习题17. 证明离散拓扑空间是可度量化的. 请举一个不可度量化的拓扑空间的例子.

命题2.11. 设$(X_i, d_i), i = 1, ..., n$, 是$n$个度量空间, $Y = \prod_{i=1}^n X_i$. 定义$\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}$为$\rho((x_i), (y_i)) = \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, ..., n\}$. 则$\rho$是乘积空间$\prod_{i=1}^n X_i$上的一个相容度量.

问题2.12. 你能定义$\prod_{i=1}^n X_i$上的其它相容度量吗?

命题2.13. 设$(X_i)_{i=-\infty}^{\infty}$是一列可度量化空间, $Y=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$或$\prod_{i=-\infty}^{\infty}X_i$. 则$Y$是可度量化的.

命题2.14. 映射$\phi:Y\to\prod_{a\in A}X_a$ 是连续的当且仅当对每个a, $p_a\circ\phi$都是连续的.

证明. ($\Longrightarrow$) 因每个p_a都是连续的, 所以符合映射$p_a\circ\phi$是连续的.

($\Longleftarrow$) 设$a\in A$, U为X_a中开集. 则由$p_a\circ\phi$的连续性, 有$\phi^{-1}(p_a^{-1}(U))=(p_a\circ\phi)^{-1}(U)$为$Y$的开集. 而$\{p_a^{-1}(U):a\in A,U\in\mathcal{T}_a\}$ 构成了$\prod_{a\in A}X_a$的拓扑子基, 所以ϕ连续. □

习题18. 证明投影$p_j:\prod_{i=1}^{n}X_i\to X_j$是开映射. 它是否一定是闭映射?

2.3 符号空间和转移映射*

考虑由k个元素构成的离散空间$\{1,...,k\}$. 我们称乘积空间$\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}$和$\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}}$为为$k$个符号的符号空间; 其中的元素称作符号序列.

习题19. 证明映射$d:\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}\times\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}\to\mathbb{R},((x_i),(y_i))\mapsto\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i}$, 是$\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}$上一个相容度量.

习题20. 设$x=(x_i),y=(y_i)\in\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}$. 若$x\neq y$, 定义$d(x,y)=(\min\{i:x_i\neq y_i\})^{-1}$; 若$x=y$, 定义$d(x,y)=0$. 证明$d$是$\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}$上一个相容度量.

定义2.15. 定义映射$\sigma:\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}\to\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}$ 为$(\sigma(x))_i=x_{i+1}$, 其中$x=(x_i)\in\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}$. 称映射$\sigma$为符号空间$\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}$上的转移映射.

习题21. 证明转移映射$\sigma:\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}\to\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}$是连续的. 这样$(\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+},\sigma)$构成一个动力系统.

习题22. 证明系统$(\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+},\sigma)$是周期点稠密的和点传递的.

习题23. 请构造系统$(\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+},\sigma)$中一个非周期的回复点.

定义2.16. 定义映射$\sigma : \{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}} \to \{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}}$为$(\sigma(x))_i = x_{i+1}$, 其中$x = (x_i) \in \{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}}$. 称映射$\sigma$为符号空间$\{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}}$上的转移映射.

习题24. 证明转移映射$\sigma : \{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}} \to \{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}}$是同胚. 这样$(\{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$构成一个动力系统.

请读者对空间$\{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}}$和系统$(\{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$讨论类似于以上各个习题中所涉及的性质.

2.4 等价关系

定义2.17. 设X是一个集合, R是$X \times X$的一个子集. 称R是X上一个等价关系, 如果下面*3*条成立:

(1) (自反性) 对任意$x \in X$, 有$(x, x) \in R$;

(2) (对称性) 若$(x, y) \in R$, 则$(y, x) \in R$;

(3) (传递性) 若$(x, y) \in R$且$(y, z) \in R$, 则$(x, z) \in R$.

定义2.18. 设X是一个集合, R是X上的等价关系. 对$x \in X$, 称集合$[x] \equiv \{y : (x, y) \in R\}$为$x$ 关于关系R的等价类.

定义2.19. 设X是一个集合, $\eta = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$是$X$的一个子集族. 称$\eta$是$X$ 的一个划分, 如果$X = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 并且对任意$s, t \in \Lambda$: 或者$A_s \cap A_t = \emptyset$, 或者$A_s = A_t$.

命题2.20. 设R是集合X上的一个等价关系; 则等价类全体$X/R \equiv \{[x] : x \in X\}$构成了集合$X$的一个划分.

证明. 由等价关系的定义知, 对每个$x \in X$, 有$x \in [x]$; 所以$X = \cup_{x \in X}[x]$. 设$x, y \in X$使得$[x] \cap [y] \neq \emptyset$. 任取$z \in [x] \cap [y]$; 则$(x, z) \in R$且$(y, z) \in R$. 再由等价关系的定义知$(z, y) \in R$, 进而$(x, y) \in R$. 于是, 对每个$y' \in [y]$有$(x, y') \in R$. 这样, $[y] \subset [x]$. 对称地, $[x] \subset [y]$. 所以, $[x] = [y]$. □

命题2.21. 设X是一个集合, $\eta = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$是集合$X$的一个划分. 设$R = \{(x, y) \in X \times X : \{x, y\} \subset A_\lambda$,对某个$\lambda \in \Lambda\}$; 则$R$是$X$上的一个等价关系.

证明. 由划分的定义易见, R的自反性和对称性成立. 设$(x, y) \in R$且$(y, z) \in R$; 则存在$\alpha, \beta \in \Lambda$, 使得$\{x, y\} \subset A_\alpha$且$\{y, z\} \subset A_\beta$. 因$y \in A_\alpha \cap A_\beta$, 由划分的定义知$A_\alpha = A_\beta$; 于是, $\{x, z\} \subset A_\alpha$, 即$(x, z) \in R$. 所以, R的传递性成立. □

从命题2.20和命题2.24, 我们容易看出一个集合上的等价关系和划分之间是一一对应的.

2.5 商空间

若R是集合X上的等价关系, 则我们自然有映射$\pi : X \to X/R, x \mapsto [x]$.

命题2.22. 设X是一拓扑空间, R是X上的一个等价关系, $\mathcal{T} = \{U \subset X/R : \pi^{-1}(U)$是$X$的开集$\}$. 则$\mathcal{T}$构成$X/R$上的一个拓扑.

定义2.23. 我们称命题*2.22*中的$\mathcal{T}$为X/R上的商拓扑; 称带有商拓扑的集合X/R为X的商空间.

命题2.24. X/R上的商拓扑是使$\pi : X \to X/R, x \mapsto [x]$为连续的最细的拓扑.

命题2.25. 设X是一拓扑空间, R是X上的一个等价关系. 若$f : X \to Y$是连续映射并且f在每个等价类$[x]$上取常值, 则存在唯一的连续映射$\tilde{f} : X/R \to Y$使得$f = \tilde{f} \circ \pi$.

证明. 因f在每个$[x] \in X/R$上取常值, 所以映射$\tilde{f} : X/R \to Y, [x] \mapsto f(x)$是良定义的. 显然, $f = \tilde{f} \circ \pi$. 设U是Y的开集; 则$\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$为$X$的开集. 由商拓扑的定义, 知$\tilde{f}^{-1}(U))$为$X/R$的开集. 所以$\tilde{f}$连续. 映射$\tilde{f}$ 的唯一性由条件$f = \tilde{f} \circ \pi$决定. □

定义2.26. 设$f : X \to Y$是连续的满射. 若对任意$A \subset Y$, $f^{-1}(A)$是开集蕴含A是开集, 则称f是商映射.

命题2.27. 关于X/R的商拓扑, $\pi : X \to X/R$是商映射.

命题2.28. 设$f : X \to Y$是连续满射. 若f是开映射或闭映射, 则f是商映射.

习题25. 请举出一个不是商映射的连续满射的例子.

命题2.29. 设$f : X \to Y$是商映射, $R = \{(x, y) \in X \times X : f(x) = f(y)\}$; 则$R$是等价关系, 并且$Y \cong X/R$.

证明. 容易验证R是等价关系. 设$\pi : X \to X/R$为自然的商映射. 由R的定义可见, f在每个$[x] \in X/R$上取常值. 根据命题2.25, 存在唯一的连续映射$\tilde{f} : X/R \to Y$使得$\tilde{f} \circ \pi = f$. 显然$\tilde{f}$是既单且满的. 为证$\tilde{f}$为同胚, 只要证$\tilde{f}$是开映射. 为此, 设U是X/R的开集; 则$f^{-1}(\tilde{f}(U)) = \pi^{-1}(U)$为$X$的开集. 而$f$是商映射, 所以$\tilde{f}(U)$为$Y$的开集. □

例子2.3. 设$X = \mathbb{R}$是实数集并赋予欧氏度量所诱导的拓扑; $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$存在整数$n$使得$x = y + n\}$, $\mathbb{S}^1$是复平面内的单位圆周并赋予平面的子空间拓扑. 则R是等价关系, 且$X/R \cong \mathbb{S}^1$.

证明. 考虑映射$f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$. 容易验证$f$是连续开映射, 进而是商映射. 应用命题2.29即可完成证明. □

我们将例2.3中的X/R记作$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

习题26. 设$\alpha \in \mathbb{R}$, 定义$T_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}, [x] \mapsto [x + \alpha]$. 证明$T_\alpha$是一个同胚(首先要证明$T_\alpha$是良定义的).

习题27. 设$X = [0, 1]$, $R = \{(x, y) : x = y;$或$x = 0, y = 1;$或$x = 1, y = 0\}$; 则R是X上一等价关系. 证明$X/R \cong \mathbb{S}^1$.

习题28. 设R是由划分$\mathcal{A} = \{\{x, -x\} : x \in \mathbb{S}^1\}$所决定的等价关系. 证明$\mathbb{S}^1/R \cong \mathbb{S}^1$.

习题29. 设$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $R = \{(x, y) \in X \times X\} :$存在实数$c$使得$x = cy\}$; 则$R$是$X$ 上的一个等价关系. 证明$X/R \cong \mathbb{S}^1$.

2.6 因子和共轭*

定义2.30. 设(X, f)和(Y, g)是动力系统. 如果存在连续满射$\phi : X \to Y$使得对每个$x \in X$成立$\phi(f(x)) = g(\phi(x))$, 则称ϕ是从(X, f)到(Y, g)的拓扑半共轭; 称(Y, g)是(X, f)的因子, (X, f)是(Y, g)的扩张. 如果半共轭ϕ是同胚, 则称ϕ是从(X, f)到(Y, g)的拓扑共轭; 称(X, f)与(Y, g)是拓扑共轭的, 记作$(X, f) \cong (Y, g)$.

命题2.31. 设$(X, f), (Y, g), (Z, h)$是动力系统; 则

(1) $(X, f) \cong (X, f)$,

(2) 若$(X, f) \cong (Y, g)$, 则$(Y, g) \cong (X, f)$,

(3) 若$(X, f) \cong (Y, g)$且$(Y, g) \cong (Z, h)$, 则$(X, f) \cong (Z, h)$.

习题30. 设α为一实数, R_α定义见例*1.17*. 证明系统$(\mathbb{S}^1, R_\alpha)$与习题*26*中的系统$(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T_\alpha)$是拓扑共轭的.

习题31. 设$\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^2$; $\alpha \in \mathbb{R}$. 证明ϕ是从$(\mathbb{S}^1, R_\alpha)$到$(\mathbb{S}^1, R_{2\alpha})$的拓扑半共轭.

命题2.32. 设ϕ是从(X, f)到(Y, g)的半共轭. 若x是(X, f)周期点(相应地, 回复点), 则$\phi(x)$为(Y, g)的周期点(相应地, 回复点).

命题2.33. 设ϕ是从(X, f)到(Y, g)的半共轭. 若x是(X, f)传递点, 则$\phi(x)$为(Y, g)的传递点.

第 3 章 紧性和分离性

3.1 紧空间

定义3.1. 设$\mathcal{A}$是集合X的一个子集族. 若$\mathcal{A}$中元的并等于X, 则称$\mathcal{A}$是X的一个覆盖. 若$\mathcal{B}$是$\mathcal{A}$的子族并且仍覆盖X, 则称$\mathcal{B}$是$\mathcal{A}$的子覆盖. 若覆盖$\mathcal{A}$中元素个数有限, 则称$\mathcal{A}$是X的有限覆盖. 若X是拓扑空间并且覆盖$\mathcal{A}$中元都是开集, 则称$\mathcal{A}$是X的一个开覆盖. 若$Y \subset X$并且集族$\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$是$Y$的覆盖, 则也称$\mathcal{A}$覆盖$Y$.

定义3.2. 若拓扑空间X的任意开覆盖都存在有限子覆盖, 则称X是紧的.

例子3.1. 有限点集在任何拓扑下都是紧的.

例子3.2. $\mathbb{R}$的子空间$\{0\} \cup \{1/n : n = 1, 2, 3, ...\}$是紧的.

例子3.3. 闭区间$[0, 1]$是紧的(关于$\mathbb{R}$的子空间拓扑或欧氏距离所诱导拓扑; 见命题2.3).

证明. 设$\mathcal{A}$是$[0, 1]$的开覆盖. 考虑集合$B = \{t : t \in [0, 1]$且$[0, t]$能被$\mathcal{A}$中有限个元覆盖$\}$. 令$s = \sup B$; 显然$s > 0$. 若$s \in (0, 1)$, 则存在$U \in \mathcal{A}$使得$s \in U$. 于是, 存在开区间(α, β)使得$s \in (\alpha, \beta) \subset U$. 设$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$是$[0, (s + \alpha)/2]$的一个有限覆盖且令$\delta = (\beta - s)/2$. 则$\mathcal{B} \cup \{U\}$构成$[0, s + \delta]$的有限覆盖. 这与$s$的定义相矛盾. 所以, $s = 1$. 取$V \in \mathcal{A}$及$\delta' > 0$, 使得$[1 - \delta', 1] \subset V$. 设$\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$为$[0, 1 - \delta']$的一个有限覆盖. 则$\mathcal{C} \cup \{V\}$构成$[0, 1]$的有限覆盖. 所以, $[0, 1]$是紧的. □

例子3.4. 半开区间$[0, 1)$不是紧的.

证明. 考虑$[0, 1)$的开覆盖$\mathcal{A} = \{[0, 1 - \frac{1}{n}) : n = 2, 3, \cdots\}$. 易见$\mathcal{A}$没有有限子覆盖. □

例子3.5. 关于欧氏度量所诱导的拓扑, $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$不是紧的.

引理3.3. 设Y是拓扑空间X的子空间. 如果对Y的由X中开集构成的任意覆盖$\mathcal{A}$, 都存在覆盖Y的有限子族$\mathcal{B}$, 则Y是紧的.

证明. 设$\mathcal{U}$是Y的任一开覆盖. 对每个$U \in \mathcal{U}$, 令$\widetilde{U}$为X的开集且满足$\widetilde{U} \cap Y = U$. 则X的开集族$\mathcal{A} := \{\widetilde{U} : U \in \mathcal{U}\}$覆盖了$Y$. 于是, 存在$\mathcal{A}$的覆盖$Y$的一个有限子族$\mathcal{B}$. 令$\mathcal{C} = \{V \cap Y : V \in \mathcal{B}\}$. 则$\mathcal{C}$构成$\mathcal{U}$的一个有限子覆盖. 所以, Y是紧的. □

命题3.4. *紧空间的闭子空间是紧的.*

证明. 设X是紧空间, Y是X的闭子空间. 设$\mathcal{A}$是X的开集族且覆盖了Y; 则$\mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$构成$X$的开覆盖. 而$X$是紧的, 所以存在$\mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$的有限子族$\mathcal{B}$覆盖了$X$. 特别地, 有限族$\mathcal{B} \setminus \{X \setminus Y\} \subset \mathcal{A}$ 构成Y的覆盖. 由引理3.3知Y是紧的. □

下面我们将证明两个紧空间的乘积空间还是紧的. 为此, 我们先证明一个引理.

引理3.5 (管状邻域引理)**.** *设X是拓扑空间, Y是紧空间, $\mathcal{A}$是$X \times Y$的开覆盖. 则对每个$x \in X$, 都存在x的开邻域Z_x使得$Z_x \times Y$能被$\mathcal{A}$的某个有限子族所覆盖.*

证明. 设$x \in X$. 因$\{x\} \times Y$与Y同胚, 所以$\{x\} \times Y$是紧的. 对每个$y \in Y$, 取$W_y \in \mathcal{A}$使得$(x, y) \in W_y$. 于是, 存在X的开集U_y和Y的开集V_y, 使得$(x, y) \in U_y \times V_y \subset W_y$. 由$\{x\} \times Y$的紧性, 存在有限个$y_1, \cdots, y_n \in Y$ 使得$\{U_{y_1} \times V_{y_1}, \cdots, U_{y_n} \times V_{y_n}\}$覆盖了$\{x\} \times Y$. 令$Z_x = \cap_{i=1}^n U_{y_i}$. 则$Z_x$即为所求. □

命题3.6. *若X和Y是紧空间, 则$X \times Y$是紧的.*

证明. 设$\mathcal{A}$是$X \times Y$的开覆盖. 由引理3.5, 对每个$x \in X$, 存在开邻域Z_x使得$Z_x \times Y$能被$\mathcal{A}$ 中有限个元所覆盖. 这样, $\{Z_x : x \in X\}$构成X的开覆盖. 而X是紧的, 所以存在有限个$x_1, \cdots, x_m \in X$使得$\{Z_{x_i} : i = 1, \cdots, m\}$覆盖了$X$. 于是, $\{Z_{x_i} \times Y : i = 1, \cdots, m\}$覆盖了$X \times Y$. 因此, $X \times Y$ 是紧的. □

应用归纳法, 可见命题3.6对有限个紧空间的乘积仍然成立. 事实上, 我们将在本章第5节证明任意个紧空间的乘积仍是紧的, 但证明较为复杂.

命题3.7. *设$f : X \to Y$是连续的. 若X是紧的, 则$f(X)$作为Y的子空间是紧的; 特别地, 若f是满射, 则Y是紧的.*

证明. 设$\mathcal{A}$是Y的覆盖$f(X)$的开集族. 则$\{f^{-1}(U):U\in\mathcal{A}\}$构成$X$的开覆盖. 由$X$的紧性, 存在有限个$U_1,\cdots,U_n\in\mathcal{A}$使得$\{f^{-1}(U_i):i=1,\cdots,n\}$覆盖了$X$. 于是, $\{U_i:i=1,\cdots,n\}$ 覆盖了$f(X)$. 根据命题3.3, 我们知道$f(X)$是紧的. □

定义3.8. 设$\mathcal{F}$是集合X的一个子集族. 如果对$\mathcal{F}$的任一有限子族$\{F_1,...,F_n\}$, 都有$\cap_{i=1}^n F_i\neq\emptyset$, 则称$\mathcal{F}$具有有限交性质.

命题3.9. 拓扑空间X是紧的当且仅当X的每个具有有限交性质的闭集族$\mathcal{F}$, 其所有元的交$\cap_{A\in\mathcal{F}}A\neq\emptyset$.

证明. ($\Longrightarrow$) 设X是紧的, $\mathcal{F}$是X的有有限交性质的闭集族. 假设$\cap_{A\in\mathcal{F}}A=\emptyset$; 则$\cup_{A\in\mathcal{F}}(X\setminus A)=X$, 即$\{X\setminus A:A\in\mathcal{F}\}$构成$X$的开覆盖. 由$X$的紧性, 存在有限个$A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$使得$\cup_{i=1}^n A_i=X$. 这样, $\cap_{i=1}^n A_i=\emptyset$. 这与$\mathcal{F}$的有限交性质相矛盾.

($\Longrightarrow$) 假设X非紧. 则存在X的一个开覆盖$\mathcal{U}$, 其没有有限子覆盖. 这样, $\mathcal{F}:=\{X\setminus U:U\in\mathcal{U}\}$ 是具有有限交性质的闭集族. 所以, $\cap_{A\in\mathcal{F}}A\neq\emptyset$. 但这与$\mathcal{U}$是开覆盖相矛盾. □

3.2 紧空间中的分离性

定义3.10. 若对空间X的任意两点$x\neq y$都存在不交的开集U,V使得$x\in U,y\in V$, 则称X是Hausdorff空间.

例子3.6. 度量空间是Hausdorff的.

例子3.7. 任何无限集关于其上的余有限拓扑都不是Hausdorff的.

命题3.11. Hausdorff空间的子空间和乘积空间都是Hausdorff的.

命题3.12. Hausdorff空间中单点集是闭的.

引理3.13. 设X是Hausdorff空间, A是X的紧集, $x\notin A$. 则存在不交的开集U,V使得$x\in U,A\subset V$.

证明. 因X是Hausdorff的, 所以对每个$y \in A$, 存在不交的开集U_y和V_y使得$x \in U_y$且$y \in V_y$. 这样, $\{V_y : y \in A\}$构成A的开覆盖. 由A的紧性, 存在有限个$y_1, \cdots, y_n \in Y$使得$A \subset \cup_{i=1}^n V_{y_i}$. 令$U = \cap_{i=1}^n U_{y_i}$及$V = \cup_{i=1}^n V_{y_i}$, 则$x \in U$, $A \subset V$, 且$U \cap V = \emptyset$. □

引理3.13引出下面定义:

定义3.14. *设X是单点闭空间. 如果对于X中任意的点x以及任意的不包含x的闭集A, 都存在不交开集U和V使得$x \in U$且$A \subset V$, 则称X是正则空间.*

下面命题是引理3.13的直接推论.

命题3.15. *Hausdorff空间中的紧集是闭的.*

定义3.16. *设X是单点闭空间. 若对X的任意两个不交闭集A, B都存在不交的开集U, V使得$A \subset U, B \subset V$, 则称X是正规空间.*

显然, 正规空间是正则的.

命题3.17. *紧Hausdorff空间是正规的.*

证明. 设A和B是X的两个不交闭集. 由引理3.4知A和B是紧集. 由引理3.13, 对每个$x \in A$, 存在不交开集U_x和V_x使得$x \in U_x$且$B \subset V_x$. 这样, $\{U_x : x \in A\}$构成A的开覆盖. 由A的紧性, 存在有限个$x_1, \cdots, x_n \in A$使得$A \subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. 令$V = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$. 则$A \subset U$, $B \subset V$, 且$U \cap V = \emptyset$. □

引理3.18. *设$f : X \to Y$是一一的连续映射. 若f是开映射或闭映射, 则f是同胚.*

命题3.19. *设X是紧的, Y是紧Hausdorff的, $f : X \to Y$是一一的连续映射. 则f是同胚.*

证明. 由引理3.18, 只要证明f是闭映射. 设A是X的闭集; 因X是紧的, 所以A是紧的. 这样由f的连续性知$f(A)$是Y的闭子集. 而Y是Hausdorff的, 所以$f(A)$是Y的闭集. □

3.3 度量空间中的紧性和分离性

定义3.20. 设(x_n)是度量空间(X,d)中的点列. 若$n_1 < n_2 < n_3 < ...$为单调增加的正整数列, 则由$y_i = x_{n_i}$所定义的的序列(y_i)称为(x_n)的一个子列; 记作(x_{n_i}).

定义3.21. 设(X,d)是度量空间. 若X中每个点列都存在收敛的子列, 则称X是列紧的.

命题3.22 (勒贝格数引理)**.** 设(X,d)是列紧的度量空间, $\mathcal{A}$是X的一个开覆盖. 则存在$\delta > 0$, 使得X的每个直径小于δ的子集都含于$\mathcal{A}$的某个元中.

证明. 假设结论不成立; 则对每个正整数n, 都存在X的直径小于$1/n$的子集A_n, 使得A_n不含于$\mathcal{A}$的任何元中. 任取$x_n \in A_n$. 由X的列紧性, 存在(x_n)的子列(x_{n_i})及$z \in X$使得$x_{n_i} \to z$. 因$\mathcal{A}$是X的开覆盖, 所以存在开集$U \in \mathcal{A}$使得$z \in U$. 取$\epsilon > 0$使得$B(z,\epsilon) \subset U$. 则当i充分大以后, 有$d(x_{n_i}, z) < \epsilon/2$且$\mathrm{diam}(A_{n_i}) < \epsilon/2$; 于是, $A_{n_i} \subset B(z,\epsilon) \subset U$. 这与假设矛盾. □

我们称命题3.22中的δ为X关于覆盖$\mathcal{A}$的勒贝格数.

命题3.23. 设(X,d)是度量空间. 则X是紧的, 当且仅当X是列紧的.

证明. $(\Longrightarrow)$ 设X是紧的且(x_n)为X的点列. 我们将归纳地构造(x_n)的一个收敛子列. 设$X_1 = X$; 考虑X_1的开覆盖$\mathcal{A}_1 \equiv \{B(x,1) : x \in X_1\}$. 由$X_1$的紧性, 存在有限个$X_1$中的点$x_{1,1}, \cdots, x_{1,n_1}$使得$X_1 = \cup_{i=1}^{n_1} B(x_{1,i}, 1)$. 这样, 一定有某个指标$k_1 \in \{1, \cdots, n_1\}$ 使得对无限个指标n成立: $x_n \in B(x_{1,k_1}, 1)$; 任取$x_{n_1} \in B(x_{1,k_1}, 1)$.

假设对正整数m及所有$1 \le i \le m$, x_{n_i}及x_{i,k_i}已定义并且满足$n_1 < n_2 < \cdots < n_m$. 令$X_{m+1} = \overline{B(x_{m,k_m}, 1/m)}$. 考虑$X_{m+1}$的开覆盖$\mathcal{A}_2 \equiv \{B(x, 1/(m+1)) : x \in X_{m+1}\}$. 由$X_{m+1}$的紧性, 存在$x_{m+1,1}, \cdots, x_{m+1,n_{m+1}} \in X_{m+1}$, 使得集族$\{B(x_{m+1,i}, 1/(m+1)) : 1 = 1, \cdots, n_{m+1}\}$ 覆盖了X_{m+1}. 于是, 存在某个指标$k_{m+1} \in \{1, \cdots, n_{m+1}\}$使得对无限个指标$n$成立: $x_n \in B(x_{m+1,k_{m+1}}, 1/(m+1))$. 任取$n_{m+1} > n_m$使得$x_{n_{m+1}} \in B(x_{m+1,k_{m+1}}, 1/(m+1))$.

这样我们便得到(x_n)的子列(x_{n_i}). 从上面的构造过程可见$X_1 \supset X_2 \supset \cdots$且$\mathrm{diam}(X_i) \to 0$. 根据有限交性质, 存在$z \in X$ 使得$\{z\} = \cap_{i=1}^{\infty} X_i$. 再根据上述构造过程, 得$x_{n_i} \to z$.

($\Longleftarrow$) 假设X是列紧的但不是紧的; 则存在X的开覆盖$\mathcal{A}$, 其无有限子覆盖. 设δ为X关于覆盖$\mathcal{A}$的勒贝格数. 考虑X的开覆盖$\mathcal{B} \equiv \{B(x, \delta/3) : x \in X\}$. 根据勒贝格数引理, 可知$\mathcal{B}$也没有有限子覆盖. 我们归纳地定义一个点列$(x_n)$: 任取$x_1 \in X$. 因$\mathcal{B}$没有有限子覆盖, 所以存在$x_2 \notin B(x_1, \delta/3)$. 假设对正整数$m \geq 2$ 及$1 \leq i \leq m$, x_i已定义. 再根据$\mathcal{B}$没有有限子覆盖这个条件, 知存在$x_{m+1} \notin \cup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta/3)$. 容易验证这样定义的点列$(x_n)$没有收敛子列. □

定义3.24. 设(X, d)是度量空间. 若对每个$\epsilon > 0$, 都存在有限个ϵ为半径的开球覆盖X, 则称X是完全有界的.

定义3.25. 设(x_n)是度量空间(X, d)中的点列. 如果对每个$\epsilon > 0$, 都存在$N > 0$, 使得当$n, m > N$ 时, $d(x_n, x_m) < \epsilon$, 则称(x_n)是柯西列.

定义3.26. 如果度量空间(X, d)中每个柯西列都收敛, 则称X是完备的.

命题3.27. 设(X, d)是度量空间. 则X是紧的, 当且仅当它是完备的和完全有界的.

证明. ($\Longrightarrow$) 设X是紧的, (x_n)为X中一个柯西列. 由命题3.23知, 存在$z \in X$及(x_n) 的子列(x_{n_i})使得$x_{n_i} \to z$. 再由柯西列的定义, 可以证明$x_n \to z$. 所以, X是完备的. 从X的紧性可直接得到X的完全有界性.

($\Longleftarrow$) 设X是完备的和完全有界的. 由命题3.23, 为证X是紧的, 只需要证其为列紧的. 为此, 设(x_n)是X中任一点列. 从X的完全有界性出发, 类似于命题3.23 中"$\Longrightarrow$"部分的证明过程, 我们可以构造(x_n)的一个子列(x_{n_i}); 从构造过程可见(x_{n_i})是柯西列. 而X是完备的, 故(x_{n_i})收敛. 这样, X的列紧性得证. □

命题3.28. 欧氏空间的一个子集是紧的当且仅当它是有界闭的.

证明. ($\Longrightarrow$)设K是n维欧氏空间$\mathbb{E}^n$中的一个紧集. 由命题3.13知K是闭集; 由命题3.27知K是完全有界的, 从而是有界的.

($\Longleftarrow$) 设K是$\mathbb{E}^n$中的有界闭集. 则存在$r > 0$使得$K \subset [-r, r]^n$. 而$[-r, r]^n$是紧的, 由命题3.4 知K是紧的. □

习题32. 设X是Hilbert空间; 则X是有限维的当且仅当X的单位闭球是紧的.

命题3.29. 紧空间上的实值连续函数必能取到最大值和最小值.

证明. 设X是紧空间, $f : X \to \mathbb{R}$是连续函数; 则$f(X)$是$\mathbb{R}$的紧子集. 由命题3.29知$f(X)$是有界闭集. 令$m = \sup(f(X))$; 则$m < \infty$且$m \in \overline{f(X)} = f(X)$. 于是, 存在$x \in X$使得$f(x) = m$. 所以, f能够取到最大值m. 同理可证f能够取到最小值. □

定义3.30. 设(X, d), (Y, ρ)是度量空间, $f : X \to Y$是一映射. 如果对每个$\epsilon > 0$都存在$\delta > 0$, 使得当$d(x, y) < \delta$时, 成立$\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$, 则称映射$f$是一致连续的.

命题3.31. 设$f : X \to Y$是从度量空间(X, d)到度量空间(Y, ρ)的连续映射. 若X是紧的, 则f是一致连续的.

证明. 设$\epsilon > 0$. 由f的连续性知, 对每个$x \in X$, 存在$r_x > 0$使得$f(B(x, r_x)) \subset B(f(x), \epsilon/2)$. 考虑$X$的开覆盖$\mathcal{A} = \{B(x, r_x) : x \in X\}$. 设$\delta$为$\mathcal{A}$的勒贝格数; 则当$d(x, y) < \delta$时, 必存在$z \in X$使得$\{x, y\} \subset B(z, r_z)$. 于是, $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(z)) + \rho(f(z), f(y)) < \epsilon$. □

为证下面命题, 我们引进一个定义. 设(X, d)是一度量空间, $x \in X$, 且$A \subset X$. 令$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. 我们称$d(x, A)$为点$x$与集合$A$的距离.

习题33. $d(x, A) = 0$当且仅当$x \in \overline{A}$.

命题3.32. 度量空间是正规的.

证明. 设(X,d)是度量空间, A和B是X的两不交闭集. 首先, X的单点闭性是显然的. 对每个$x \in A$, 令$r_x = d(x,B)/2$; 因B是闭集且$x \notin B$, 我们知$r_x > 0$. 对每个$y \in B$, 令$s_y = d(y,A)/2$; 同样, 我们有$s_y > 0$. 设$U = \cup_{x\in X} B(x,r_x)$, $V = \cup_{y\in Y} B(y,s_y)$; 则$U,V$ 是开集且$A \subset U, B \subset V$. 下证$U \cap V = \emptyset$. 否则, 存在$a \in X$及$b \in Y$使得$B(a,r_a) \cap B(b,s_b) \neq \emptyset$; 任取$c \in B(a,r_a) \cap B(b,s_b)$. 不妨假设$r_a \geq s_b$; 则$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < 2r_a = d(a,B)$. 这导致矛盾. $\square$

3.4 Zorn引理

定义3.33. *设X是一集合, R是$X \times X$的一个子集. 如果R满足以下条件:*

(1) 对每个$x \in X$, 有$(x, x) \in R$,

(2) $(x, y) \in R$且$(y, x) \in R$蕴含$x = y$,

(3) $(x, y) \in R$且$(y, z) \in R$蕴含$(x, z) \in R$,

则称R是集合X上的一个偏序关系, 称X为(带有偏序关系R的)偏序集.

习惯上, 我们用符号 $\preceq$ 表示一个偏序关系, 用 $x \preceq y$ 表示 $(x, y) \in \preceq$. 今后, 我们也将$x \preceq y$记作$y \succeq x$.

例子3.8. *设$\mathcal{B}$是集合X的一个子集族. 对任意$\mathcal{B}$中的元C和D, 定义$C \preceq D$当且仅当$C \subset D$. 则$\preceq$为$\mathcal{B}$上的一个偏序关系.*

定义3.34. *设$\preceq$是集合X上一个偏序关系. 如果对任意$x, y \in X$都有$x \preceq y$或$y \preceq x$, 则称$\preceq$是X上的全序关系, 称X为(带有全序关系$\preceq$的)全序集.*

例子3.9. *对任意$x, y \in \mathbb{R}$, 定义$x \preceq y$当且仅当$x \leq y$; 则$\preceq$为$\mathbb{R}$上的一个全序关系.*

若$\preceq$是集合X上的一个偏序关系且$Y \subset X$, 则$\preceq$自然可视作Y上的一个偏序关系. 若Y 关于$\preceq$构成全序集, 则称Y是X的全序子集.

定义3.35. *设$\preceq$是集合X上一个偏序关系, $Y \subset X$. 若存在$z \in X$使得对每个$x \in Y$有$x \preceq z$, 则称z是集合Y的一个上界.*

定义3.36. *设$\preceq$是集合X上一个偏序关系, $z \in X$. 如果对每个$x \in X$, $z \preceq x$都蕴含$z = x$, 则称z是X中的一个极大元.*

公理1 (Zorn 引理)**.** *设X是一非空偏序集. 若X的每个全序子集都有上界, 则X存在极大元.*

今后, Zorn引理要当作公理使用——虽然它的论断看上去不那么显然, 但可以证明它与下面“非常显然的”选择公理等价.

公理2 (选择公理)**.** *设$\mathcal{A}$为非空集合构成的一个集族. 则存在映射$c:\mathcal{A}\to\cup_{A\in\mathcal{A}}A$使得对每个$A\in\mathcal{A}$有$c(A)\in A$.*

3.5 Tychonoff定理

引理3.37. *设X是一个集合, $\mathcal{A}$是X的具有有限交性质的子集族. 则一定存在一个集合包含关系下极大的包含$\mathcal{A}$ 的具有有限交性质的X的子集族.*

证明. 考虑$\mathbb{P}\equiv\{\mathcal{B}\subset 2^X:\mathcal{A}\subset\mathcal{B},$且$\mathcal{B}$具有有限交性质$\}$; 则$\mathbb{P}$在集族包含关系下成为偏序集. 因$\mathcal{A}\in\mathbb{P}$, 故$\mathbb{P}\neq\emptyset$. 设$\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为$\mathbb{P}$的任一全序子集. 令$\mathcal{C}=\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda$. 显然, $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}$. 任取$\mathcal{C}$中有限个元$C_1,\cdots,C_n$; 设$C_i\in\mathcal{B}_{\lambda_i}, i=1,\cdots,n$. 由$\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的全序性, 我们不妨假设$\mathcal{B}_{\lambda_1}\subset\cdots\subset\mathcal{B}_{\lambda_n}$; 这样$\{C_1,\cdots,C_n\}\subset\mathcal{B}_{\lambda_n}$. 而$\mathcal{B}_{\lambda_n}$有有限交性质, 故$\cap_{i=1}^n C_i\neq\emptyset$. 所以$\mathcal{C}$具有有限交性质. 于是$\mathcal{C}\in\mathbb{P}$. 从$\mathcal{C}$ 定义可见其为$\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的一个上界. 根据Zorn引理, $\mathbb{P}$有极大元. □

引理3.38. *设X是一个集合. 若$\mathcal{D}$是X的具有有限交性质的集族包含关系下的极大子集族, 则*

(1) $\mathcal{D}$中元素的任意有限交仍属于$\mathcal{D}$;

(2) 若A是X的一个子集并且与$\mathcal{D}$中每个元都相交, 则A属于$\mathcal{D}$.

证明. (1) 设$\mathcal{A}=\{A:A$是$\mathcal{D}$中有限个元素的交$\}$. 因$\mathcal{D}$有有限交性质, 易见$\mathcal{A}$也有有限交性质. 再由$\mathcal{D}$的极大性, 得$\mathcal{A}=\mathcal{D}$.

(2) 考虑集族$\mathcal{D}\cup\{A\}$. 任取$\mathcal{D}$中有限个元$B_1,\cdots,B_n$. 由(1)得$\cap_{i=1}^n B_i\in\mathcal{D}$. 因$A$与$\mathcal{D}$中每个元都相交, 故$\cap_{i=1}^n B_i\cap A\neq\emptyset$. 所以$\mathcal{D}\cup\{A\}$有有限交性质. 根据$\mathcal{D}$的极大性, 有$\mathcal{D}\cup\{A\}=\mathcal{D}$. 所以, $A\in\mathcal{D}$. □

定理3.39 (Tychonoff 定理)**.** *任意个紧空间的乘积仍是紧的.*

证明. 设$X=\prod_{a\in J}X_a$, 其中每个X_a都是紧的. 设$\mathcal{A}$为X的具有有限交性质的闭集族. 下证$\cap\mathcal{A}\neq\emptyset$. 由引理3.37, 可取$X$的包含$\mathcal{A}$的具有有限交性质的极大子集族$\mathcal{D}$. 对$a\in J$,

令$p_a : X \to X_a$ 为自然的投射; 则集族$\{p_a(D) : D \in \mathcal{D}\}$具有有限交性质. 由$X_a$的紧性, $\cap_{D\in\mathcal{D}}\overline{p_a(D)} \neq \emptyset$. 取$x_a \in \cap_{D\in\mathcal{D}}\overline{p_a(D)}$; 则对$x_a$的每个开邻域$U_a$和每个$D \in \mathcal{D}$, 有$U_a \cap p_a(D) \neq \emptyset$, 即$p_a^{-1}(U_a) \cap D \neq \emptyset$. 根据命题3.38(2), 得$p_a^{-1}(U_a) \in \mathcal{D}$. 再由命题3.38(1)知, 对任意有限个$a_1, \cdots, a_n \in J$有$\cap_{i=1}^n p_{a_i}^{-1}(U_{a_i}) \in \mathcal{D}$, 其中$U_{a_i}$是$X_{a_i}$的任意开集. 而$\mathcal{D}$具有有限交性质, 所以对每个$D \in \mathcal{D}$有$\cap_{i=1}^n p_{a_i}^{-1}(U_{a_i}) \cap D \neq \emptyset$; 这蕴含$(x_a) \in \overline{D}$. 于是, $(x_a) \in \cap_{D\in\mathcal{D}}\overline{D} \neq \emptyset$; 特别地, $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$. □

例子3.10. *章节3.3中的符号空间*$\{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}_+}$*和*$\{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}}$*都是紧的.*

3.6 极小集和Birkhoff回复定理*

定义3.40. *设*(X, f)*是一动力系统,* $A \subset X$*. 如果*$f(A) \subset A$*, 则称*A*是*f*-不变的; 如果*X*没有非空*f*-不变真闭子集, 则称*(X, f) *是极小的.*

命题3.41. *对每个*$x \in X$*, 轨道闭包*$\overline{\mathcal{O}(x, f)}$*都是闭不变集.*

证明. 由f的连续性, 我们有$f(\overline{\mathcal{O}(x, f)}) \subset \overline{f(\mathcal{O}(x, f))} \subset \overline{\mathcal{O}(x, f)}$. □

命题3.42. *动力系统*(X, f)*是极小的当且仅当对每个点*$x \in X$*都有*$\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$*.*

证明. ($\Longrightarrow$) 设$x \in X$. 由命题3.41和极小性的定义, 知$\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$.

($\Longleftarrow$) 假设(X, f)不是极小的; 则存在X的非空f-不变真闭子集A. 任取$x \in A$; 则$\mathcal{O}(x, f) \subset A$, 进而$\overline{\mathcal{O}(x, f)} \subset A$. 这与$\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$相矛盾. □

例子3.11. *例1.17中, 若*α*是无理数, 则*$(\mathbb{S}^1, R_\alpha)$*是极小的.*

设K是X的非空f-不变闭子集. 考虑限制映射$f|_K : K \to K, x \mapsto f(x)$. 易见$f|_K : K \to K$是连续的. 我们称动力系统$(K, f|_K)$为$(X, f)$的*子系统*. 如果子系统$(K, f|_K)$本身是极小的, 则称$K$为$(X, f)$的*极小集*.

命题3.43. *若*X*是紧的, 则*(X, f)*一定有极小集.*

证明. 设$\mathcal{A} = \{A \subset X : A$是$f$-不变闭集$\}$. 因$X \in \mathcal{A}$, 故$\mathcal{A} \neq \emptyset$. 定义$\mathcal{A}$上的偏序关系$\preceq$: $A \preceq B$当且仅当$A \supset B$. 若$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是$\mathcal{A}$的任一全序子集, 则它满足有限交性质; 而X是紧的, 故$\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda \neq \emptyset$. 又$f(\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda) \subset \cap_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda) \subset \cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, 故$\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$是非空$f$-不变闭集. 这样, $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$是$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的一个上界. 根据Zorn引理, $\mathcal{A}$含一个极大元M; 则M为一个极小集. □

例子3.12. *设(X, f)为一动力系统, 其中X是单点闭的. 若$x \in X$是周期点, 则$\mathcal{O}(x, f)$是极小集.*

命题3.44. *设(X, f)为一动力系统, M是一个极小集. 若M含一个孤立点x(相对于子空间拓扑), 则x是周期的.*

证明. 若$M = \{x\}$, 则x是不动点; 否则, 存在$y \neq x \in M$. 由x的孤立性和命题3.42, 存在正整数n使得$f^n(y) = x$. 再由f的连续性和x的孤立性, 存在y的开邻域V(相对于子空间拓扑), 使得$f^n(V) = \{x\}$. 取非负整数m使得$f^m(x) \in V$. 于是, $f^{n+m}(x) = x$, 即x是周期点. □

定理3.45 (Birkhoff回复定理). *设X是紧的且是单点闭的, $f : X \to X$是连续映射; 则(X, f)中一定存在回复点.*

证明. 设M是(X, f)的一个极小集. 取定$x \in M$. 若x是周期点, 则它必是回复点. 所以, 我们假设x不是周期的. 根据命题3.44, x不是M中的孤立点. 于是, 对x的任意开邻域U, 必有$y \in (M \cap U) \setminus \{x\}$. 而$\{x\}$是闭的, 故$(M \cap U) \setminus \{x\}$是$y$的开邻域. 这样, 由命题3.42, 必有某个正整数n使得$f^n(x) \in (M \cap U) \setminus \{x\} \subset U$. □

3.7 几乎周期点*

定义3.46. *设A是正整数集合的一个子集. 如果存在正整数l使得对任意正整数n成立$A \cap \{n, n+1, ..., n+l\} \neq \emptyset$, 则称$A$是syndetic集.*

定义3.47. *设(X,f)是一动力系统, $x \in X$. 如果对x的每个邻域U, 回复时间集$\{n : f^n(x) \in U\}$ 都是syndetic的, 则称x是几乎周期点.*

命题3.48. *设(X,f)是一动力系统且X是紧度量空间. 则$x \in X$是几乎周期的当且仅当$\overline{\mathcal{O}(x,f)}$是极小集.*

证明. ($\Longrightarrow$) 假设$\overline{\mathcal{O}(x,f)}$不是极小的, 则$\overline{\mathcal{O}(x,f)}$真包含一非空闭不变集$M$. 由$X$的正规性, 存在不交开集$U,V$使得$x \in U$且$M \subset V$. 由$f$的连续性, 可知存在正整数列$n_1 < n_2 < \cdots$及$1_1 < 1_2 < \cdots$使得对每个$i$成立: $\{f^{n_i}(x), f^{n_i+1}(x), \cdots, f^{n_i+l_i}(x)\} \subset V$. 而$x$是几乎周期的, 故$\{n : f^n(x) \in U\}$是syndetic的. 于是, $U \cap V \neq \emptyset$. 这与假设矛盾.

($\Longleftarrow$) 假设x不是几乎周期的. 则存在x的开邻域U及正整数列$n_1 < n_2 < \cdots$及$1_1 < 1_2 < \cdots$使得对每个i成立$\{f^{n_i}(x), f^{n_i+1}(x), \cdots, f^{n_i+l_i}(x)\} \subset X \setminus U$. 通过选取子列, 不妨设$f^{n_i}(x) \to z \in X \setminus U$. 这样, $\overline{\mathcal{O}(z,f)} \subset \overline{\mathcal{O}(x,f)} \setminus U$. 这与$\overline{\mathcal{O}(x,f)}$的极小性相矛盾. □

习题34. *请构造习题24中动力系统$(\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+}, \sigma)$的一个非周期的几乎周期点.*

3.8 多重Birkhoff回复定理和vander Waerden定理*

定理3.49 (多重Birkhoff回复定理)**.** *设X是紧度量空间, $f_1,...,f_n$是X 上两两交换的连续自映射; 则存在点$x \in X$及正整数序列$n_k \to \infty$使得对所有$i = 1,...,n$同时成立$f_i^{n_k}x \to x$.*

定理3.50 (van der Waerden定理)**.** *设$\mathbb{Z}_+ = B_1 \cup ... \cup B_m$是$\mathbb{Z}_+$一个划分, 则必有某个$B_i$包含任意长的算术级数.*

证明. 考虑符号空间$X = \{1,2,...,m\}^{\mathbb{Z}_+}$和转移映射$\sigma : X \to X, (\sigma(x))_i = x_{i+1}$. 设$d$是习题20中所定义的$X$上的相容度量; 那么$d(x,y) < 1$当且仅当$x_1 = y_1$. 定义$X$中的元$w : w(i) = k$当且仅当$i \in B_k$. 设$Y = \overline{\mathcal{O}(w,\sigma)}$; 则$Y$是$\sigma$-不变紧集. 任意给定正整数$l$; 对$1 \leq i \leq l$, 设$f_i = \sigma^i$; 则$f_1,...,f_l$两两交换. 根据定理3.49, 存在$y \in Y$和序列$n_k \to \infty$使得对所有$i = 1,...,l$同时成立$f_i^{n_k}y \to y$; 特别地, 对某一固定的$n$及每个$i$, 有$d(f_i^n y, y) <$

$1/2$. 这蕴含$y_1 = f_1^n(y)_1 = f_2^n(y)_1 = ... = f_l^n(y)_1$; 即$y_1 = y_{1+n} = y_{1+2n} = ... = y_{1+ln}$. 取正整数$p$使得$d(\sigma^p(w), y) < 1/(1+nl)$. 这样$\sigma^p(w)_1 = \sigma^p(w)_{1+n} = ... = \sigma^p(w)_{1+ln}$; 即$w_{1+p} = w_{1+p+n} = ... = w_{1+p+ln}$. 这蕴含算术级数$\{1+p, 1+p+n, ..., 1+p+ln\}$属于同一个$B_i$. $\square$

第 4 章 连通性

4.1 连通空间

设X是拓扑空间. 如果U和V是X的两个不交的非空开集并且$X = U \cup V$, 则称$\{U, V\}$构成X的一个分割; 易见, 这时U和V也是不交的闭集.

定义4.1. *如果拓扑空间X不存在分割, 则称X是连通的.*

下面命题在判断一个拓扑空间是否连通时经常用到.

命题4.2. *拓扑空间X是连通的当且仅当X中既开又闭的子集只有$\emptyset$和X.*

证明. ($\Longrightarrow$) 显然, $\emptyset$和X是即开且闭的. 假设$A \subset X$是即开且闭的非空真子集, 则$X \setminus A$也是即开且闭的非空真子集. 这样$\{A, X \setminus A\}$构成X的一个分割. 这与X的连通性矛盾.

($\Longleftarrow$) 假设X不连通. 设$\{U, V\}$是X的一个分割. 则U是X的既开且闭的非空真子集. 这导致矛盾. □

命题4.3. *设Y是拓扑空间X的子空间; 则Y是连通的当且仅当Y中不存在这样的不交非空集合A和B使得$Y = A \cup B$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$, 且$B \cap \overline{A} = \emptyset$.*

证明. ($\Longrightarrow$) 设Y是连通. 假设存在不交非空集合A和B使得$Y = A \cup B$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$, 且$B \cap \overline{A} = \emptyset$. 则$A = (X \setminus \overline{B}) \cap Y$, 且$B = (X \setminus \overline{A}) \cap Y$. 于是, $\{A, B\}$构成Y的一个分割. 这导致矛盾.

($\Longleftarrow$) 假设Y不连通; 则存在Y的分割$\{A, B\}$. 取X的开集U, V使得$A = U \cap Y$, $B = V \cap Y$. 则$\overline{B} \subset X \setminus U$, $\overline{A} \subset X \setminus V$. 于是, $A \cap \overline{B} = \emptyset$ 且$B \cap \overline{A} = \emptyset$. 这导致矛盾. □

例子4.1. *$\mathbb{R}$是连通的.*

证明. 假设$\mathbb{R}$不连通; 则存在分割$\{U, V\}$. 取$x \in U$, $y \in V$. 不妨设$x < y$. 令$z = \sup([x, y] \cap U)$. 若$z \in U$, 则存在$\delta > 0$使得$[z, z + \delta] \subset U$; 这与$z$ 的定义相矛盾. 所以, $z \in V$. 这样, 存在$\delta' > 0$使得$[z - \delta', z] \subset V$; 这又与$z$的定义相矛盾. 所以, $\mathbb{R}$连通. □

例子4.2. $\mathbb{R}$的子空间$[0,1)\cup(1,2]$是不连通的.

例子4.3. 有理数集$\mathbb{Q}$是不连通的.

例子4.4. 平面$\mathbb{R}^2$的子集$\{(x,y):y=0\}\cup\{(x,y):xy=1$且$x>0\}$是不连通的.

命题4.4. 含有一个公共点的X的连通子空间族的并是连通的.

证明. 设$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$X$的一族连通子空间且$z\in\cap_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$. 假设$\cup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$不是连通的; 则存在$\cup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 的一个分割$\{U,V\}$. 不妨设$z\in U$. 对每个λ, 由X_λ的连通性, 有$X_\lambda\subset U$. 这样, $\cup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\subset U$. 这与假设矛盾. 所以, $\cup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$连通. □

命题4.5. 设A是X的连通子空间. 若$A\subset B\subset\overline{A}$, 则$B$是连通的. 特别地, 连通集的闭包是连通的.

证明. 假设$\{U,V\}$是B的一个分割. 因A连通, 故不妨设$A\subset U$. 而U是B的闭子集, 所以$\overline{A}\cap B\subset U$. 又$B\subset\overline{A}$, 故$B\subset U$. 这与假设矛盾. □

例子4.5. $(0,1),[0,1),(0,1],[0,1]$都是连通的.

命题4.6. 连通空间的连续像是连通的.

证明. 设X是连通的, $f:X\to Y$连续. 假设$f(X)$不连通, 则存在$f(X)$的分割$\{U,V\}$. 于是, 存在Y的开集$\widetilde{U},\widetilde{V}$ 使得$\widetilde{U}\cap f(X)=U$, $\widetilde{V}\cap f(X)=V$. 这样$\{f^{-1}(\widetilde{U}),f^{-1}(\widetilde{V})\}$构成$X$的一个分割. 这与$X$的连通性矛盾. □

例子4.6. 平面的子集$S=\{(x,\sin(1/x)):0<x\leq 1\}\cup\{(0,y):-1\leq y\leq 1\}$是连通的(该空间称作拓扑学家的正弦曲线).

命题4.7. 任意个连通空间的乘积空间是连通的.

证明. 设$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是一族连通空间. 假设$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$上存在一个分割$\{U,V\}$. 取$(a_\lambda)\in U$. 我们归纳地证明下面断言: 如果$(b_\lambda)$ 与(a_λ)只在有限个指标处取值不同, 则$(b_\lambda)\in U$.

假设对某个$\alpha \in \Lambda$有$b_\alpha \neq a_\alpha$; 但对每个$\lambda \neq \alpha$ 有$b_\lambda = a_\lambda$. 考虑$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$的子集$A \equiv \{(x_\lambda) : 对每个\lambda \neq \alpha, x_\lambda = a_\lambda\}$. 因$A$与$X_\alpha$同胚, 所以$A$是连通的. 而$(a_\lambda) \in A$, 故$A \subset U$. 又$(b_\lambda) \in A$, 故$(b_\lambda) \in U$. 假设对正整数$n$, 我们已证: 如果$(b_\lambda)$与$(a_\lambda)$ 只在n个指标处取值不同, 则$(b_\lambda) \in U$. 现在假设对$n+1$个指标$\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$有$b_{\lambda_i} \neq a_{\lambda_i}$; 对其余指标$\lambda$有$b_\lambda = a_\lambda$. 定义$(c_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : c_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}(1 \leq i \leq n); c_{\lambda_{n+1}} = b_{\lambda_{n+1}}; c_\lambda = a_\lambda(\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}\})$. 则$(c_\lambda)$与$(a_\lambda)$只有一个指标处取值不同, 与$(b_\lambda)$有$n$个指标处取值不同. 由归纳假设得$(b_\lambda) \in U$. 这样断言成立. 而所有与$(a_\lambda)$只在有限个指标处取值不同的点在$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$中稠密, 又$U$是$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$的闭集, 故$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subset U$. 这是一个矛盾. □

例子4.7. $\mathbb{R}^n$是连通的.

定义4.8. *设A是X的连通子空间. 如果不存在真包含A的X的连通子空间, 则称A是X的一个连通分支.*

命题4.9. *连通分支是闭集; 任何两个连通分支或者重合或者不交.*

证明. 设A是拓扑空间X的一个连通分支. 由命题4.5知$\overline{A}$连通. 再根据连通分支的定义, 得$A = \overline{A}$. 所以, A是闭集. 若B是X的一个连通分支且$A \cap B \neq \emptyset$, 则由命题4.4知$A \cup B$是连通的. 再根据连通分支的定义, 得$A = A \cup B = B$. □

定义4.10. *若拓扑空间X的每个单点集都是一个连通分支, 则称X是完全不连通的.*

例子4.8. 有理数集是完全不连通的.

例子4.9. Cantor三分集是完全不连通的.

4.2 Cantor集的刻画*

定义4.11. *设$(x_i)_{i=1}^n$是度量空间(X, d)中的一个点列. 如果对某个$\epsilon > 0$和每个$1 \leq i \leq n-1$有$d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$, 则称$(x_i)_{i=1}^n$是一个$\epsilon$-链.*

引理4.12. *设(X,d)是一个紧度量空间. 对每个正整数k, 设$(x_i^{(k)})_{i=1}^{n(k)}$是一个ϵ_k-链. 设$K = \{x \in X : 存在k_j \to \infty及i_j \in \{1,...,n(k_j)\}使得x_{i_j}^{(k_j)} \to x\}$. 如果$(x_1^{(k)})_{k=1}^{\infty}$收敛且$\epsilon_k \to 0$, 则$K$是连通的非空闭集.*

证明. 因X是紧度量空间, 故$K \neq \emptyset$. 由K的定义, 易见K是闭集. 假设$\{A,B\}$是K的一个分割; 则A,B是X的非空不交闭集. 设$c = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$. 由$X$的紧性知$c > 0$. 设$U = B(A,c/3), V = B(B,c/3)$; 则$U,V$是$X$的不交开集. 设$x_1^{(k)} \to z \in A$. 通过选取子列, 我们不妨设: 对每个$k$有$x_1^{(k)} \in U$及$\{x_1^{(k)},...,x_{n(k)}^{(k)}\} \cap V \neq \emptyset$. 设$i_k$满足: 对$i \leq i_k$有$x_i^{(k)} \in U$, 但$x_{i_k+1}^{(k)} \notin U$. 这样, 由$\epsilon$-链的定义, 当$\epsilon_k < c/3$时, 我们有$x_{i_k+1}^{(k)} \in X \setminus (U \cup V)$. 设$z$为点列$(x_{i_k+1}^{(k)})$的任一极限点; 则$z \in X \setminus (U \cup V)$. 但由$K$的定义, 有$z \in K$. 这导致矛盾. 所以$K$连通. □

设A,B是度量空间X的两个子集. 如果一个ϵ-链$(x_i)_{i=1}^n$满足$x_1 \in A$且$x_n \in B$, 则称其是从A到B的.

引理4.13. *设(X,d)是一个紧完全不连通的度量空间. 若A和B是X的两个不交的非空闭集, 则存在$\epsilon > 0$使得: 不存在从A到B的ϵ-链.*

证明. 假设对每个正整数k, 存在从A到B的$1/k$-链$(x_i^{(k)})_{i=1}^{n(k)}$. 通过选取子列, 不妨设$x_1^{(k)} \to x \in A$且$x_{n(k)}^{(k)} \to y \in B$. 因$A$与$B$不交, 故$x \neq y$. 由引理4.12, 存在一个连通闭集$K$使得$x, y \in K$. 这与$X$的完全不连通性相矛盾. □

下面引理可以直接从ϵ-链的定义得出.

引理4.14. *设(X,d)是一个紧度量空间, $A \subset X$. 则对每个$\epsilon > 0$, 集合$C_\epsilon(A) := \{x \in X : 存在从A到\{x\}的\epsilon-链\}$是既开且闭的.*

命题4.15. *设(X,d)是完全不连通的紧度量空间. 则对每个$x \in X$和每个$\epsilon > 0$, 都存在x的既开且闭的邻域U满足$\mathrm{diam}(U) \leq \epsilon$.*

证明. 设$A = \overline{B(x, \epsilon/3)}$, $B = X \setminus B(x, \epsilon)$; 则$A, B$是$X$的不交闭集. 我们假设$B \neq \emptyset$, 否则$B(x, \epsilon) = X$满足要求. 由引理4.13, 设$c > 0$满足: 不存在从$A$到$B$的$c$-链. 由引理4.14, $C_c(A)$是A的既开且闭的邻域. 而$C_c(A) \subset B(x, \epsilon)$, 故$\mathrm{diam}(C_c(A)) \leq \epsilon$. 令$U = C_c(A)$即可. □

引理4.16. *设(X, d)是完全不连通的紧度量空间. 则对每个$\epsilon > 0$, 都存在由既开且闭集构成的X的有限划分$\{A_i : i = 1, ..., n\}$, 使得对每个i有$\mathrm{diam}(A_i) < \epsilon$.*

证明. 由命题4.15, 对每个$x \in X$都存在既开且闭的邻域U_x, 使得$\mathrm{diam}(U_x) < \epsilon$. 这样$\{U_x : x \in X\}$构成$X$的开覆盖. 而$X$是紧的, 故存在有限个$x_1, ..., x_k \in X$使得$X = \cup_{i=1}^k U_{x_i}$. 对$1 \leq i \leq k$, 令$A_i = U_{x_i} \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} U_{x_j})$. 则$\{A_i : i = 1, ..., k\}$满足要求. □

定义4.17. *若拓扑空间X不含孤立点, 则称X是完全的.*

引理4.18. *设(X, d)是完全不连通的、完全的、紧度量空间. 则对每个正整数n, 都存在X的由n个既开且闭集构成的划分$\{A_1, ..., A_n\}$.*

证明. 我们归纳地证明. 当$n = 1$时, 取$A_1 = X$即可. 假设对$n = k$, X存在由k个既开且闭集构成的划分$\{A_1, ..., A_k\}$. 因X不含孤立点, 所以A_1包含至少两个点a, b. 对子空间A_1应用命题4.15, 知存在a的一个既开且闭的邻域$B \subset A_1$使得$b \notin B$. 于是$B, A \setminus B, A_2, ..., A_k$构成$X$的由$k + 1$个既开且闭集构成的划分. 这样, 结论对$n = k + 1$成立. □

定理4.19. *设(X, d)是完全不连通的、完全的、紧度量空间. 则$X \cong \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$.*

证明. 对每个正整数n和每个$(i_1, ..., i_n) \in \{0, 1\}^n$, 我们将定义$X$的满足以下条件的既开且闭集$U_{i_1 \ldots i_n}$:

(1) $\{U_{i_1 \ldots i_n} : (i_1, ..., i_n) \in \{0, 1\}^n\}$构成$X$的一个划分,

(2) 对每个$j \in \{0, 1\}$, $U_{i_1 \ldots i_n} \supset U_{i_1 \ldots i_n j}$,

(3) $\mathrm{diam}(U_{i_1 \ldots i_n}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

固定一列正数$(\epsilon_i)_{i=1}^{\infty}$使得$\epsilon_i \to 0$. 对$\epsilon_1$, 由引理4.16, 存在$X$的既开且闭的划分$\mathcal{B}_1 := \{B_1, ..., B_{k_1}\}$ 使得对给个i有$\mathrm{diam}(B_i) < \epsilon_1$. 取正整数$m_1$使得$2^{m_1 - 1} \leq k_1 < 2^{m_1}$. 对

子空间B_1及正整数$2^{m_1}-k_1+1$ 应用引理4.18, 存在B_1的由既开且闭集构成的划分$\mathcal{C}_1:=\{C_1,...,C_{2^{m_1}-k_1+1}\}$. 这样$\mathcal{D}_1:=\mathcal{C}_1\cup(\mathcal{B}_1\setminus B_1)$是$X$的恰由$2^{m_1}$个既开且闭集构成的划分, 并且其中每个元的直径小于ϵ_1. 我们将$\mathcal{D}_1$中的元重新记作$\{U_{i_1...i_{m_1}}:(i_1,...,i_{m_1})\in\{0,1\}^{m_1}\}$. 对$1\le j<m_1$及$(i_1,...,i_j)\in\{0,1\}^j$, 我们归纳地定义$U_{i_1...i_j}=U_{i_1...i_j0}\cup U_{i_1...i_j1}$.

假设对ϵ_k, 我们已定义正整数m_k和满足以下条件的既开且闭集的族$\cup_{j=1}^{m_k}\{U_{i_1...i_j}:(i_1,...,i_j)\in\{0,1\}^j\}$: $\mathrm{diam}(U_{i_1...i_k})<\epsilon_k$; $U_{i_1...i_j}=U_{i_1...i_j0}\cup U_{i_1...i_j1}$; $\{U_{i_1...i_{m_k}}:(i_1,...,i_{m_k})\in\{0,1\}^{m_k}\}$ 构成X的划分. 对ϵ_{k+1}, 类似于对ϵ_1时的讨论, 我们不难得到正整数$m_{k+1}>m_k$和既开且闭的集族$\{U_{i_1...i_{m_{k+1}}}:(i_1,...,i_{m_{k+1}})\in\{0,1\}^{m_{k+1}}\}$, 使得: 对每个$(i_1,...,i_{m_k})$, 集族$\{U_{i_1...i_{m_k}j_1...j_{l_k}}:(j_1,...,j_{l_k})\in\{0,1\}^{l_k}\}$构成$U_{i_1...i_{m_k}}$的划分, 其中$l_k=m_{k+1}-m_k$; $\mathrm{diam}(U_{i_1...i_{m_{k+1}}})<\epsilon_{k+1}$. 对$1\le s<l_k$及$(j_1,...,j_s)\in\{0,1\}^s$, 我们归纳地定义$U_{i_1...i_{m_k}j_1...j_s}=U_{i_1...i_{m_k}j_1...j_s0}\cup U_{i_1...i_{m_k}j_1...j_s1}$.

通过以上的归纳定义过程, 我们最终得到满足条件(1)-(3)的$U_{i_1...i_n}$. 于是, 对每个$x\in X$, 都存在唯一的下降序列$U_{i_1}\supset U_{i_1i_2}\supset U_{i_1i_2i_3}\supset\cdots$, 使得$\{x\}=\cap_{j=1}^{\infty}U_{i_1...i_j}$. 我们定义$\phi(x)=(i_1,i_2,...)\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$. 容易验证这样定义的$\phi:X\to\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$是一个同胚. □

推论4.20. 每个完全不连通的、完全的、紧度量空间都同胚于Cantor三分集.

4.3 道路连通和弧连通

定义4.21. 设x,y是拓扑空间X中两点. 如果连续映射$\gamma:[0,1]\to X$满足$\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$, 则称γ是从x到y的一条道路.

定义4.22. 如果对拓扑空间X中任意两点x,y都存在从x到y的道路,则称X是道路连通的.

命题4.23. 道路连通空间是连通的.

证明. 设X是道路连通的. 假设$\{U,V\}$是X的一个分割. 取$x\in U,y\in V$. 由道路连通性, 存在连续映射$\gamma:[0,1]\to X$ 使得$\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$. 这样$\gamma([0,1])$为X的连通子集. 但$\{U\cap\gamma([0,1]),V\cap\gamma([0,1])\}$ 构成$\gamma([0,1])$的一个分割. 这导致矛盾. 所以, X连通. □

例子4.10. 例*4.6*中拓扑学家的正弦曲线是连通的但非道路连通的.

定义4.24. 设A是拓扑空间X的一个子空间. 如果A与$[0,1]$同胚, 则称A是X中的一段弧; 对于一个取定的同胚$f:[0,1]\to A$, 我们也将A记作$[a,b]$, 其中$a=f(0), b=f(1)$; 这时称A是以a,b为端点的弧, 或弧A连接a和b.

习题35. 证明定义*4.24*中弧A的端点集合$\{a,b\}$不依赖于同胚f的选取.

定义4.25. 如果对拓扑空间X中任意两点$x\neq y$, 都存在X中连接x和y的弧$[x,y]$, 则称拓扑空间X为弧连通的.

从定义可知弧连通空间是道路连通的. 反过来, 我们有下面定理.

定理4.26. 若X是道路连通的Hausdorff空间, 则X是弧连通.

问题4.27. 命题*4.26*中的Hausdorff条件是否必需?

定义4.28 (华沙圈)**.** 设S是例*4.6*中拓扑学家的正弦曲线, $A=\{(0,y):-2\leq y\leq -1\}\cup\{(x,-2):0\leq x\leq 1\}\cup\{(1,y):-2\leq y\leq \sin(1)\}$. 我们称与$S\cup A$同胚的空间为华沙圈.

习题36. 华沙圈是弧连通的.

注记4.29. 一条道路的像可能与我们想象的样子相差甚远. 例如, 平面内的单位闭圆盘可以是闭区间在连续映射下的像集.

4.4 局部连通和局部弧连通

定义4.30. 设x是拓扑空间X中的点. 如果对x的每个邻域U, 都存在包含x的连通开集V使得$V\subset U$, 则称X在x处是局部连通的. 若X在每个点处都是局部连通的, 则称X是局部连通的.

例子4.11. $\mathbb{R}^n$是局部连通的.

例子4.12. 拓扑学家的正弦曲线不是局部连通的.

命题4.31. 若X是局部连通的, 则X的每个连通分支都是即开且闭集.

证明. 设A是X的连通分支. 由命题4.9知A是闭的. 对每个$x \in A$, 由局部连通性, 存在x的一个连通开邻域U_x. 这样$A \cup U_x$是包含A的连通集. 由连通分支的定义, 我们得到$U_x \subset A$. 所以, A是开集. □

命题4.32. 若$\{X_{\lambda\in\Lambda}\}$是一族局部连通空间且除了有限个$\lambda$外$X_\lambda$都是连通的, 则乘积空间$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$是局部连通的.

证明. 设有限集$F \subset \Lambda$满足: 对每个$\lambda \in \Lambda \setminus F$, X_λ都是连通的. 对$(x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$及$(x_\lambda)$的开邻域$V := \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$, 设有限集$S \subset \Lambda$满足: 对每个$\lambda \in \Lambda \setminus S$, $V_\lambda = X_\lambda$. 由局部连通性, 对每个$\lambda \in F \cup S$, 都存在x_λ的连通开邻域$U_\lambda \subset V_\lambda$. 设$W = \prod_{\lambda\in F\cup S} U_\lambda \times \prod_{\lambda\in\Lambda\setminus(F\cup S)} X_\lambda$. 由命题4.7, W是(x_λ)的连通开邻域且$W \subset V$. □

习题37. 请举一个例子说明局部连通空间的乘积可以不是局部连通的.

我们称一个紧连通度量空间称为一个连续统, 称局部连通的连续统为*Peano*连续统.

定义4.33. 如果对空间X中每一点x以及x的每个邻域U, 都存在包含x的弧连通开集V使得$V \subset U$, 则称X为局部弧连通的.

显然, 局部弧连通空间是局部连通的. 反过来, 我们有下面定理.

定理4.34. 设X是一个Peano连续统. 则X中每个连通开集都是弧连通的. 特别地, X本身是弧连通并且局部弧连通的.

习题38. 请请构造半开区间$[0,1)$到华沙圈的连续满射.

习题38表明局部连通性在连续映射下一般不再保持, 但我们有下面的命题.

命题4.35. 设X是一Peano连续统, Y是紧度量空间. 若Y是X的连续像, 则Y是局部连通的.

定义4.36. 设x是拓扑空间X中的点. 如果对x的每个邻域U, 都存在包含x的连通邻域V使得$V \subset U$, 则称X在x处是弱局部连通的. 若X在每个点处都是弱局部连通的, 则称X是弱局部连通的.

注意, 在上面的定义中不要求V是开集. 这样, 局部连通性自然蕴含弱局部连通性.

命题4.37. 设X是一连续统. 则X是局部连通的当且仅当其是弱局部连通的.

习题39. 请构造一个连续统X, 其在某个点处是弱局部连通但不局部连通的.

4.5 逆极限与自然扩充*

设$(X_n)_{n=-\infty}^{\infty}$是一列紧度量空间; 对每个整数$n$, 设$f_n : X_{n+1} \to X_n$是连续满射. 我们称$(X_n)$和$(f_n)$一起构成逆系统, 并记作$(X_n, f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$; f_n称为键映射. 考虑集合

$$\varprojlim(X_n, f_n) := \{(x_n) \in \prod X_n : f(x_n) = x_{n-1}, \forall n\}.$$

命题4.38. $\varprojlim(X_n, f_n)$是非空、紧、可度量化空间.

命题4.39. 设$(X_n, f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$是一逆系统且每个$X_n$都是连通的. 则$\varprojlim(X_n, f_n)$是连续统.

设X是紧度量空间, $f : X \to X$是连续满射. 对每个正整数n, 设$X_n = X$及$f_n = f$. 记$\varprojlim(X, f) = \varprojlim(X_n, f_n)$. 对$\mathbf{x} = (x_n) \in \varprojlim(X, f)$, 定义$\tilde{f}(\mathbf{x}) \in \varprojlim(X, f)$为

$$(\tilde{f}(\mathbf{x}))_n = x_{n+1}.$$

命题4.40. $\tilde{f} : \varprojlim(X, f) \to \varprojlim(X, f)$是同胚.

对每个正整数i, 定义映射$\pi_i : \varprojlim(X, f) \to X, (x_n) \mapsto x_i$.

命题4.41. $\pi_0 : \varprojlim(X, f) \to X, (x_n) \mapsto x_0$是连续满射且满足$\pi_0 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_0$.

动力系统$(\varprojlim(X, f), \tilde{f})$称为$(X, f)$的自然扩充.

4.6 不可分解连续统*

定义4.42. 若X是非退化连续统且不能写成两个真子连续统的并, 则称X是不可分解的; 否则, 称X是可分解的.

命题4.43. 非退化Peano连续统都是可分解的.

定义4.44. 设$(X_n, f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$是一逆系统. 假设对每个$n$, X_n都是连续统并且满足: 若A_{n+1}, B_{n+1}是X_{n+1}的两个子连续统且$X_{n+1} = A_{n+1} \cup B_{n+1}$, 则必有$f_n(A_{n+1}) = X_n$或$f_n(B_{n+1}) = X_n$. 那么我们称逆系统$(X_n, f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$是不可分解的.

命题4.45. 设$(X_n, f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$是一不可分解逆系统. 则$\varprojlim(X_n, f_n)$是不可分解连续统.

设$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$. 我们称连续统$\varprojlim(\mathbb{S}^1, f)$为2-进螺线管.

推论4.46. 2-进螺线管是不可分解连续统.

设$f : [0,1] \to [0,1]$是帐篷映射(见例子1.19). 我们称连续统$\varprojlim([0,1], f)$为桶柄连续统.

推论4.47. 桶柄连续统是不可分解的.

4.7 不动点性质*

定义4.48. 设X是拓扑空间. 如果X上每个连续自映射都有不动点, 则称X具有不动点性质.

命题4.49. 闭区间$[0, 1]$有不动点性质.

命题4.50. 平面内单位圆周$\mathbb{S}^1$没有不动点性质.

命题4.51. 例*4.6*中拓扑学家的正弦曲线有不动点性质.

命题4.52. 定义*4.28*中的Warsaw圈有不动点性质.

4.8 Sharkovskii定理*

我们在正整数集$\mathbb{Z}_+$上引入下面的序(称作Sharkovskii序):

$3 \prec 5 \prec 7 \prec ... \prec 2m+1 \prec ...$

$... \prec 6 \prec 10 \prec 14 \prec ... \prec 2(2m+1) \prec ...$

$... \prec 12 \prec 20 \prec 28 \prec ... \prec 4(2m+1) \prec ...$

$... \quad ... \quad ...$

$... \prec 2^k 3 \prec 2^k 5 \prec 2^k 7 \prec ... \prec 2^k(2m+1) \prec ...$

$... \quad ... \quad ...$

$... \prec 2^{k+1} \prec 2^k \prec 2^{k-1} \prec ... \prec 16 \prec 8 \prec 4 \prec 2 \prec 1.$

定理4.53 (Sharkovskii定理)**.** *若连续映射$f : [0,1] \to [0,1]$有一个n周期点, 则对每个$n \prec m$, f都有m周期点.*

推论4.54. *若连续映射$f : [0,1] \to [0,1]$有一个3周期点, 则它有任意周期的周期点.*

第 5 章 可数性公理和度量化定理

5.1 可数性

定义5.1. 一个集合称为可数的, 如果它或是有限的, 或是与正整数集存在一一对应. 若一个集合不是可数的, 则称为是不可数的.

例子5.1. 有理数集合是可数的, 实数集合是不可数的.

命题5.2. 可数个可数集合的并还是可数的.

命题5.3. 可数集合的有限乘积还是可数的.

例子5.2. 符号空间$\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$是不可数的.

例子5.3. 康托三分集是不可数的.

命题5.4. 可数集的像集是可数的.

命题5.5. 设A是一个集合, 则不存在满射$f : A \to 2^A$.

推论5.6. 若A是可数无限集, 则2^A是不可数的.

命题5.7. 设X是非空紧Hausdorff空间. 若X不含孤立点, 则X是不可数的.

5.2 可数性公理

定义5.8. 设X是一拓扑空间, $x \in X$, $\mathcal{B}$是x的一个开邻域族. 如果对每个x的邻域U都存在$V \in \mathcal{B}$ 使得$V \subset U$, 则称$\mathcal{B}$是x的一个邻域基; 若$\mathcal{B}$进一步是可数族, 则称其为x的可数邻域基.

定义5.9. 拓扑空间X称为第一可数的, 如果X中每个点都具有可数邻域基.

命题5.10. 度量空间是第一可数的.

命题5.11. 设X是第一可数的. *(a)* 对X的任意子集A, $x \in \overline{A}$当且仅当存在A中的点列(x_n)使得$x_n \to x$. *(b)*$f : X \to Y$是连续的, 当且仅当对每个收敛到x的点列(x_n)有$f(x_n)$收敛到$f(x)$.

定义5.12. 拓扑空间X称为第二可数的, 如果X有可数拓扑基.

显然

命题5.13. 第二可数空间是第一可数的.

例子5.4. 欧氏空间是第二可数的.

例子5.5. 任何不可数集合在离散拓扑下都不是第二可数的. 特别地, 不可数集合关于离散度量不是第二可数的.

命题5.14. 紧度量空间是第二可数的.

定义5.15. 拓扑空间X称为是可分的, 如果X中存在可数稠子集.

命题5.16. 第二可数空间是可分的.

命题5.17. 若X是可度量化的, 则它是第二可数的当且仅当它是可分的.

例子5.6. 实数集在余有限拓扑下是可分的, 但不是第二可数的.

5.3 Urysohn度量化定理

定理5.18 (Urysohn引理)**.** 设X是正规空间, A和B是X中两个不交的闭集. 则存在连续函数$f : X \to [0,1]$使得$A \subset f^{-1}(0)$且$B \subset f^{-1}(1)$.

定义5.19. 拓扑空间X称为是完全正则的, 如果X单点闭且对任意$x \in X$及不含x的闭集A, 都存在连续函数$f : X \to [0,1]$使得$f(x) = 0$且$f(A) = 1$.

命题5.20. 第二可数的正则空间是正规的.

定理5.21 (Urysohn度量化定理)**.** 第二可数的正则空间是可度量化的.

命题5.22. 设X是紧度量空间, Y是Hausdorff空间. 若Y是X的连续像, 则Y是可度量化的.

5.4 Tietze扩张定理

定理5.23 (Tietze扩张定理). 设X是正规空间, A是X的闭子集. 则从A到$[0,1]$的任何连续映射f都可以扩张到X到$[0,1]$的连续映射, 也即存在连续映射$g: X \to [0,1]$ 使得对任意$x \in A$有$g(x) = f(x)$.

5.5 网和网收敛*

从命题5.11我们看到, 当空间满足第一可数公理时, 集合的闭包及函数的连续性都可以用序列收敛刻画. 然而, 下面的例子表明, 对一般的拓扑空间而言, 这样的刻画已不再可行.

例子5.7. 设$X = (-1,1)^{\mathbb{Z}_+}$, $\mathcal{A} = \{\prod_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) : -1 < a_i < b_i < 1\}$, $O = (0,0,0,...)$. 设$\mathcal{T}$为$\mathcal{A}$生成的X上的拓扑; 则$\mathcal{A}$为$\mathcal{T}$的拓扑基. 设$\mathcal{N} = \{\prod_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) : -1 < a_i < 0 < b_i < 1\}$; 则$\mathcal{N}$为$O$的(不可数)邻域基. 对每个$U \in \mathcal{N}$, 取$x_U \in U$使得: 对每个$i$, $(x_U)_i \neq 0$. 令$A = \{x_U : U \in \mathcal{N}\}$; 则$O \in \overline{A}$. 设$z^{(n)} = (z_i^{(n)})$, $n = 1,2,3,...$, 为A中任一序列. 对每个i, 取$-1 < \alpha_i < 0 < \beta_i < 1$, 使得$(z_i^{(i)}) \notin (\alpha_i, \beta_i)$; 则对任意$n$, 有$z^{(n)} \notin \prod_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$. 所以$O$不是序列$z^{(n)}$的极限点.

下面我们将对一般拓扑空间引入“网”和“网收敛”的定义, 他们分别是“序列”和“序列收敛”的推广. 使用网收敛, 我们仍可以像在第一可数空间时使用序列收敛那样, 对任意拓扑空间刻画集合的闭包和函数的连续性.

定义5.24. 设D是带有偏序关系$\preceq$的偏序集. 如果对任意$x, y \in D$, 都存在$z \in D$满足$z \succeq x$且$z \succeq y$, 则称D是一个定向集.

例子5.8. 实数集在$\leq$关系下成为定向集.

例子5.9. 设x是拓扑空间X中的点, $\mathcal{N}$是x的所有邻域全体. 定义$\mathcal{N}$上的关系$\preceq$: 对$U, V \in \mathcal{N}$, $U \preceq V$当且仅当$U \supset V$; 则$\mathcal{N}$在$\preceq$下成为定向集.

定义5.25. 我们称从定向集D到集合X的映射$x : D \to X, i \mapsto x_i$为$X$中一个网; 记作$(x_i)_{i \in D}$; 有时简记为$(x_i)$.

定义5.26. 设$(x_i)_{i \in D}$是集合X中的网, $A \subset X$. 如果存在某个$n \in D$使得, 当$i \succeq n$ 时, $x_i \in A$, 则称网(x_i)终于A; 如果对每个$m \in D$都存在$i \succeq m$使得$x_i \in A$, 则称(x_i)常于A.

定义5.27. 设F是定向集D的子集. 如果对每个$i \in D$都存在$j \in F$使得$j \succeq i$, 则称F是D的共尾子集.

下面命题显然.

命题5.28. 设D在偏序关系$\preceq$下为定向集, F是D的共尾子集; 则F在$\preceq$下也为定向集.

命题5.29. 设$(x_i)_{i\in D}$是集合X中的网, $A \subset X$; 则$(x_i)_{i\in D}$常于A当且仅当存在D 的某个共尾子集F使得: 对每个$i \in F$, 有$x_i \in A$.

定义5.30. 设$(x_i)_{i\in D}$是拓扑空间X中的网, $x \in X$. 如果对x的每个邻域U, 有(x_i)终于U; 即, 存在$n \in D$使得: 对每个$i \succeq n$, 有$x_i \in U$; 则称(x_i)收敛到x; 记作$\lim x_i = x$或$x_i \to x$.

例子5.10. 设X是拓扑空间, $x \in X$, $\mathcal{N}$是由x的邻域系构成的定向集(见例5.9). 对每个$U \in \mathcal{N}$, 取$x_U \in U$; 则(x_U)为一个网且$x_U \to x$.

命题5.31. 设A是拓扑空间X中的子集, $x \in X$; 则$x \in \overline{A}$当且仅当存在A中的网(x_i)使得$x_i \to x$.

命题5.32. 拓扑空间X是Hausdorff的当且仅当X中每个收敛网的极限是唯一的.

命题5.33. 设$f : X \to Y$是拓扑空间X到Y的映射, $x \in X$; 则f在x处连续当且仅当对每个收敛到x的网(x_i), 有网$(f(x_i))$收敛到$f(x)$.

定义5.34. 设D和E是两个定向集, $N : E \to D, j \mapsto N_j$为一映射. 如果对每个$n \in D$, 都存在$m \in E$, 使得当$j \succeq m$时, 有$N_j \succeq n$, 则称$N$是共尾映射.

定义5.35. 设$(x_i)_{i\in D}$和$(y_j)_{j\in E}$是集合X中的网. 如果存在共尾映射$N : E \to D, j \mapsto N_j$使得$x_{N_j} = y_j$, 则称$(y_j)_{j\in E}$是$(x_i)_{i\in D}$ 的子网.

命题5.36. 设(x_i)是拓扑空间X中的网, $x \in X$. 若$x_i \to x$, 则(x_i)的每个子网都收敛到x.

命题5.37. 设$(x_i)_{i\in D}$是拓扑空间X中的网; 则x是集合$\{x_i : i \in D\}$的一个聚点当且仅当存在(x_i)的子网收敛到x.

命题5.38. 拓扑空间X是紧的当且仅当X中每个网都有收敛子网.

5.6 一致结构*

第 6 章 空间的紧化

6.1 局部紧性和单点紧化

定义6.1. *若拓扑空间X的每一点都存在一个紧邻域, 则称X是局部紧的.*

显然, 紧空间是局部紧的.

例子6.1. *欧氏空间$\mathbb{R}^n$是局部紧的.*

例子6.2. *有理数集$\mathbb{Q}$不是局部紧的.*

定义6.2. *若Y是紧Hausdorff空间, X是Y的真子空间并且其闭包等于Y, 则称Y为X的一个紧化. 若$Y \setminus X$是单点集, 则称Y为X的单点紧化.*

例子6.3. *$[0,1]$是$(0,1)$的紧化, 是$[0,1)$的单点紧化.*

命题6.3. *设X是局部紧Hausdorff空间, 则X存在唯一的单点紧化. (这里唯一性是指若Y_1, Y_2都是X的单点紧化, 则一定存在同胚$h: Y_1 \to Y_2$满足$h|_X = Id_X$.)*

命题6.4. *局部紧空间的开子集和闭子集仍是局部紧的.*

推论6.5. *Hausdorff空间X是局部紧的当且仅当它同胚与一个紧Hausdorff空间的开子集.*

例子6.4. *实直线$\mathbb{R}$的单点紧化同胚于圆周.*

6.2 Stone-Čech紧化

定义6.6. *设X是完全正则空间,Y是X的一个紧化. 如果每个从X到紧Hausdorff空间C的连续映射都能唯一地扩张成从Y到C的连续映射,则称Y是X的Stone-Čech紧化(下面将证明这样的扩张是存在且唯一的), 并记作$\beta(X)$.*

引理6.7. *设X是完全正则空间; 则存在X的紧化Y满足: 每个X上的有界连续函数$f: X \to \mathbb{R}$都能唯一地扩张到Y上.*

定理6.8. *引理6.7中的紧化Y满足定义6.6中的性质.*

定理6.9. *引理6.7中的紧化Y是唯一的, 即: 如果Y_1, Y_2是两个这样的紧化, 则一定存在同胚$h: Y_1 \to Y_2$满足$h|_X = Id_X$.*

6.3 离散空间的Stone-Čech紧化*

定义6.10. *设D是一个非空集合, $\mathcal{U}$是D的某些子集构成的一个非空集族. 如果$\mathcal{U}$满足以下性质: (1) 若$A, B \in \mathcal{U}$, 则$A \cap B \in \mathcal{U}$; (2) 若$A \in \mathcal{U}$且$A \subset B \subset D$, 则$B \in \mathcal{U}$; (3) $\emptyset \notin \mathcal{U}$; 则称$\mathcal{U}$是$D$上的一个*滤子*.*

例子6.5. *设X是一拓扑空间且$x \in X$; 则x的邻域全体构成一个滤子.*

定义6.11. *若$\mathcal{U}$是集合D上的一个滤子并且$\mathcal{U}$不真包含于其它滤子之中, 则称$\mathcal{U}$为一个*超滤子*.*

定理6.12. *设$\mathcal{U}$是集合D上的一个子集族; 则$\mathcal{U}$是D上的超滤子当且仅当$\mathcal{U}$是D上一个滤子并且对任意$A \subset D$, 或者$A \in \mathcal{U}$, 或者$D \setminus A \in \mathcal{U}$.*

Proof. ($\Rightarrow$) 假设存在$A \subset D$, 使得: $A \notin \mathcal{U}$且$D \setminus A \notin \mathcal{U}$; 则对任意$B \in \mathcal{U}$, 有$A \cap B \neq \emptyset$ (否则, 将有$B \subset D \setminus A \in \mathcal{U}$). 设$\mathcal{V} = \{C \subset D : \text{存在}B \in \mathcal{U}, \text{满足 } C \supset A \cap B\}$. 容易检验$\mathcal{V}$是滤子且真包含$\mathcal{U}$. 这导致矛盾.

($\Leftarrow$) 假设$\mathcal{U}$不是超滤子, 则存在真包含$\mathcal{U}$的滤子$\mathcal{V}$. 任取$A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. 若$D \setminus A \in \mathcal{U}$, 则$D \setminus A \in \mathcal{V}$; 这与$\mathcal{V}$的滤子性矛盾. 所以必有$D \setminus A \notin \mathcal{U}$; 这又与题设矛盾. □

定理6.13. *设$\mathcal{U}$是集合D上具有有限交性质的子集族; 则必存在D上的一个超滤子p使得$\mathcal{U} \subset p$.*

Proof. 利用Zorn引理, 我们可以得到一个同时满足以下两点的在集族包含关系的极大元$\mathcal{A}$: (1) $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$; (2) $\mathcal{A}$具有有限交性质. 若存在$A \in \mathcal{U}$及$B \subset D$使得$A \subset B$, 则易见$\mathcal{A} \cup \{B\}$仍具有有限交性质; 由$\mathcal{A}$的极大性, 有$B \in \mathcal{A}$; 这样$\mathcal{A}$是滤子. 再由$\mathcal{A}$的极大性知, 其为超滤子; 令$p = \mathcal{A}$即可. □

下面命题的证明留作习题.

命题6.14. *设D是离散空间且$A, B \subset D$. 则: (1) $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$; (2) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$; (3) $\widehat{D \setminus A} = \beta(D) \setminus \widehat{A}$; (4) $\widehat{A} = \emptyset$当且仅当$A = \emptyset$; (5) $\widehat{A} = \beta(D)$ 当且仅当$A = D$; (6) $\widehat{A} = \widehat{B}$当且仅当$A = B$.*

定义6.15. *若a是集合D中一点, 则称集族$\mathcal{U} = \{A \subset D : a \in A\}$为由$a$定义的***主超滤子***(容易检验$\mathcal{U}$是超滤子).*

设D是离散空间, $A \subset D$, $a \in D$. 我们用符号$\beta(D)$表示集合D上的超滤子全体; 用$\widehat{A}$表示包含A的超滤子全体, 即$\widehat{A} = \{p \in \beta(D) : A \in p\}$; 用$e(a)$表示$a$所定义的主超滤子.

下面我们总是赋予$\beta(D)$以集族$\{\widehat{A} : A \subset D\}$所生成的拓扑; 由命题6.14-(1)知: $\{\widehat{A} : A \subset D\}$是其所生成拓扑的拓扑基.

定理6.16. *设D是离散空间且$A \subset D$. 则: (1) $\widehat{A}$是既开且闭集; (2) $\beta(D)$是紧Hausdorff空间; (3) $\widehat{A} = \overline{e(A)}$, 即$p \in \overline{e(A)}$当且仅当$A \in p$; (4) $e : D \to \beta(D)$是嵌入; (5) $e(D)$在$\beta(D)$中稠密.*

Proof. (1) 由$\beta(D)$上拓扑的定义以及命题6.14-(3)知$\widehat{A}$是既开且闭的.

(2) 设$p \neq q \in \beta(D)$. 若$A \in p \setminus q$, 则$D \setminus A \in q$. 于是, $\widehat{A}$和$\widehat{D \setminus A}$是分别包含p和q的不交开集. 所以, $\beta(D)$是Hausdorff的.

由命题6.14-(3)可见$\beta(D)$中每个闭集都是形如$\widehat{A}$这样的闭集的交. 因此, 为了证明$\beta(D)$的紧性, 我们只要对由形如$\widehat{A}$的集合组成的具有有限交性质的闭集族$\mathcal{A}$, 证

明$\cap\mathcal{A}\neq\emptyset$即可. 为此, 考虑$\mathcal{B}=\{A:\widehat{A}\in\mathcal{A}\}$. 由6.14-(1)立见$\mathcal{B}$是$D$的具有有限交性质的子集族. 于是, 根据定理6.13, 存在$p\in\beta(D)$使得$\mathcal{B}\subset p$. 这样, $p\in\cap\mathcal{A}$.

(3) 显然, 对每个$a\in A$, 有$e(a)\in A$; 由(1), 得$\overline{e(A)}\subset\widehat{A}$. 为证反方向, 设$p\in\widehat{A}$. 若$p\in\widehat{B}$, 其中$B\subset D$, 则$B\in p$. 于是, $\emptyset\neq A\cap B\in p$. 任取$a\in A\cap B$; 则$e(a)\in e(A)\cap B$. 由$B$的任意性, 得$p\in\overline{e(A)}$.

(4) 因D是离散的, 为证e是嵌入, 只要证e是单设. 事实上, 若$a\neq b\in D$, 则$D\setminus\{a\}\in e(b)\setminus e(a)$; 于是$e(a)\neq e(b)$.

(5) 由(3), 有$\overline{e(D)}=\widehat{D}$. 由滤子定义, 知$\beta(D)\subset\widehat{D}$. 显然, 总有$\widehat{D}\subset\beta(D)$. 这样, $\overline{e(D)}=\beta(D)$.

□

定理6.17. *设D是离散空间, 则$(e,\beta(D))$是D的Stone-Čech紧化.*

Proof. 由定理6.16知, $(e,\beta(D))$是D的一个紧化. 设Y是紧Hausdorff空间, $f:D\to Y$. 对每个$p\in\beta(D)$, 设$\mathcal{A}_p=\{\overline{f(A)}:A\in p\}$; 则$\mathcal{A}_p$ 是Y的具有有限交性质的闭集族. 这样, $\cap\mathcal{A}\neq\emptyset$. 任取$y\in\cap\mathcal{A}$, 并规定$g(p)=y$. 下证: $f=g\circ e$且g连续.

设$x\in D$; 则$\{x\}\in e(x)$. 于是, $g(e(x))\in\overline{\{f(x)\}}=\{f(x)\}$; 即$g(e(x))=f(x)$. 这样, $f=g\circ e$成立. 为证g的连续性, 设$p\in\beta(D)$且U是$g(p)$在Y中的开邻域. 由Y的正则性, 存在$g(p)$的开邻域V, 使得$\overline{V}\subset U$. 设$A=f^{-1}(V)$. 我们断定$A\in p$; 否者$D\setminus A\in p$, 进而$g(p)\in\overline{f(D\setminus A)}$. 因$V$是$g(p)$的开邻域, 故$V\cap f(D\setminus A)\neq\emptyset$; 这与$A=f^{-1}(V)$相矛盾. 所以, 断言成立, 即$\widehat{A}$是$p$的开邻域. 我们进一步断定: $g(\widehat{A})\subset U$. 否则, 设$q\in\widehat{A}$, 但$g(q)\notin U$. 这样, $Y\setminus\overline{V}$是$g(q)$的开邻域; 而$g(q)\in\overline{f(A)}$, 故$(Y\setminus\overline{V})\cap f(A)\neq\emptyset$; 这又与$A=f^{-1}(V)$相矛盾. 这样, g的连续性得证. 由定义6.6知: $(e,\beta(D))$是D的Stone-Čech紧化. □

注. 上面定理证明中$y\in\cap\mathcal{A}$的选取虽然是任意的, 但事实上可以证明$\cap\mathcal{A}$只能是单点集(证明留作习题), 这样y的选取事实上是唯一的.

6.4 离散半群的Stone-Čech紧化*

若$(S,\cdot)$是一半群并且S为一离散空间, 则称$(S,\cdot)$为一离散半群.

定理6.18. *设$(S,\cdot)$是一离散半群, 则$\beta(S)$上存在唯一的二元运算$*$满足以下几条:*

(1) 对任意$s,t\in S$, 成立$s*t=s\cdot t$;

(2) 对每个$q\in\beta(S)$, 映射$\rho_q:\beta(S)\to\beta(S), p\mapsto p*q$连续;

(3) 对每个$s\in S$, 映射$\lambda_s:\beta(S)\to\beta(S), q\mapsto s*q$ 连续;

(4) $(\beta(S),*)$为一半群.

Proof. 对$s\in S$, 定义$l_s:S\to S, t\mapsto s\cdot t$. 由定理6.17, 存在连续映射$\lambda_s:\beta(S)\to\beta(S)$使得$\lambda_s|_S=l_s$. 对$q\in\beta(S)$, 定义$r_q:S\to S, s\mapsto r_s(q)$. 再由定理6.17, 存在连续映射$\rho_q:\beta(S)\to\beta(S)$, 使得$\rho_q|_S=r_q|_S$. 定义运算 $*:\beta(S)\times\beta(S)\to\beta(S), (p,q)\mapsto\rho_q(p)$. 由以上定义过程立见: $*$ 满足(1), (2), (3)及唯一性.

下证 $*$ 满足结合律. 设$p,q,r\in\beta(S)$; 则由(1), (2), 和(3), 我们有:

$$(p\cdot q)\cdot r=\lim_{a\to p}(a\cdot q)\cdot r=\lim_{a\to p}\lim_{b\to q}(a\cdot b)\cdot r=\lim_{a\to p}\lim_{b\to q}\lim_{c\to r}(a\cdot b)\cdot c$$

及

$$p\cdot(q\cdot r)=\lim_{a\to p}a\cdot(q\cdot r)=\lim_{a\to p}\lim_{b\to q}a\cdot(b\cdot r)=\lim_{a\to p}\lim_{b\to q}\lim_{c\to r}a\cdot(b\cdot c).$$

所以, $(p\cdot q)\cdot r=p\cdot(q\cdot r)$; 运算 $*$ 的结合性成立.

□

下面为了记号上的简便, 我们把上述定理中定义的运算“ $*$ ”也记作“ $\cdot$ ”. 对$s\in S$及$A\subset S$, 我们记$s^{-1}A=\{t\in S:s\cdot t\in A\}$.

定理6.19. *设$(S,\cdot)$是一离散半群且$A\subset S$. 则*

(1) 对每个$s\in S$及$q\in\beta(S)$, $A\in s\cdot q$当且仅当$s^{-1}A\in q$.

(2) 对任意$p,q\in\beta(S)$, $A\in p\cdot q$当且仅当$\{s\in S:s^{-1}A\in q\}\in p$.

Proof. (1) ($\Rightarrow$) 设$A \in s \cdot q$; 则$\widehat{A}$是$s \cdot q$的邻域. 由λ_s的连续性, 存在$B \in q$, 成立$\widehat{\lambda_s(B)} = \lambda_s(\widehat{B}) \subset \widehat{A}$. 这样, 我们有$\lambda_s(B) \subset A$; 即$B \subset s^{-1}A$. 因$B \in q$, 故由滤子性得$s^{-1}A \in q$.

($\Leftarrow$) 假设$s^{-1}A \in q$, 但$A \notin s \cdot q$; 则$S \setminus A \in s \cdot q$. 类似于上一步的讨论, 得$S \setminus s^{-1}A = s^{-1}(S \setminus A) \in q$. 这样, 由滤子性得$\emptyset = s^{-1}A \cap (S \setminus s^{-1}A) \subset S$. 这导致矛盾.

(2) ($\Rightarrow$) 设$A \in p \cdot q$; 即$p \cdot q \in \widehat{A}$. 由$\rho_q$的连续性, 存在$B \in p$使得$\widehat{\rho_q(B)} = \rho_q(\widehat{B}) \subset \widehat{A}$. 这样, 对每个$s \in B$, 有$s \cdot q \in \widehat{A}$; 即$A \in s \cdot q$. 于是, 由(1)得$B \subset \{s : s^{-1}A \in q\}$. 再根据滤子性, 我们得到$\{s \in S : s^{-1}A \in q\} \in p$.

($\Leftarrow$) 假设$A \notin p \cdot q$; 则$S \setminus A \in p \cdot q$. 类似上一步的讨论, 得$\{s \in S : S \setminus s^{-1}A \in q\} = \{s \in S : s^{-1}(S \setminus A) \in q\} \in p$. 这与$\emptyset \notin p$相矛盾. □

设$(S, \cdot)$为一半群, $e \in S$. 如果$e \cdot e = e$, 则称e是幂等元.

定理6.20. $(\beta(S), \cdot)$中一定含幂等元.

Proof. 设$\mathcal{A} = \{A \subset S : A$是非空紧的且$A \cdot A \subset A\}$. 利用Zorn引理可得: $\mathcal{A}$含有集合包含关系下的一个极小元M. 任取$x \in M$. 由M的极小性以及ρ_x的连续性, 我们有$M \cdot x = M$; 于是, 集合$Y \equiv \{y \in M : y \cdot x = x\}$是非空闭集. 易见, $Y \cdot Y \subset Y$. 再由M的极小性, 得$Y = M$. 这样, $x = x \cdot x$为幂等元. □

6.5 Hilbert定理和Schur定理*

定理6.21. 设S是离散半群, p是$\beta(S)$中幂等元. 若$A \in p$, 则必存在S中的某个序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 使得: $\mathrm{FP}((x_n)) \subset A$.

Proof. 我们归纳地定义S中序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$. 设$A_1 = A, B_1 = \{x \in S : x^{-1}A_1 \in p\}$. 由$A_1 \in p = p^2$及定理6.19, 知$B_1 \in p$. 任取$x_1 \in A_1 \cap B_1$, 且设$A_2 = A_1 \cap (x_1^{-1}A_1)$; 则$A_2 \in p$. 假设对$n \geq 1$, 我们已定义$x_n$和$A_{n+1} \in p$. 设$B_{n+1} = \{x \in S : x^{-1}A_{n+1} \in p\}$. 再由$A_{n+1} \in p = p^2$及定理6.19, 知$B_{n+1} \in p$. 任取$x_{n+1} \in B_{n+1} \cap A_{n+1}$, 并设$A_{n+2} = A_{n+1} \cap (x_{n+1}^{-1}A_{n+1})$; 则$A_{n+2} \in p$. 容易验证这样得到的$(x_n)_{n=1}^{\infty}$满足要求. □

引理6.22. 设D是离散空间, $\mathcal{U}$是其上的超滤子, $A_1, ..., A_n$是D的n个子集($n \in \mathbb{N}$). 若$\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}$, 则必有某个$i \in \{1, ..., n\}$ 使得: $A_i \in \mathcal{U}$.

Proof. 假设对每个$i \in \{1, ..., n\}$, 都有$A_i \notin \mathcal{U}$; 由定理6.12知, 对每个i成立: $S \setminus A_i \in \mathcal{U}$. 因$\mathcal{U}$是滤子, 所以$\cap_{i=1}^{n}(D \setminus A_i) \in \mathcal{U}$; 于是, $\cup_{i=1}^{n} A_i = D \setminus \cap_{i=1}^{n}(D \setminus A_i) \notin \mathcal{U}$. 这导致矛盾. □

定理6.20, 定理6.21, 和引理6.22一起蕴含下面定理.

定理6.23. 设S是一半群, 且$S = \cup_{i=1}^{m} A_i$, 其中$m \in \mathbb{N}$. 则存在某个$i \in \{1, ..., m\}$及S中的某个序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 使得: $\mathrm{FP}((x_n)) \subset A_i$.

下面两个推论是直接的.

推论6.24 (Hilbert定理)**.** 设$\mathbb{N} = \cup_{i=1}^{m} A_i$, 其中$m \in \mathbb{N}$. 则对每个$k \in \mathbb{N}$, 都存在$i \in \{1, ..., m\}$, $\mathbb{N}$中序列$(x_n)_{n=1}^{k}$, 以及$\mathbb{N}$中无限集B, 使得: 对每个$b \in B$, 成立$b + \mathrm{FS}((x_n)_{n=1}^{m}) \subset A_i$.

推论6.25 (Schur定理)**.** 设$\mathbb{N} = \cup_{i=1}^{m} A_i$, 其中$m \in \mathbb{N}$. 则存在$i \in \{1, ..., m\}$及$x, y \in \mathbb{N}$, 使得: $\{x, y, x + y\} \subset A_i$.

第 7 章　映射空间的拓扑

7.1 映射空间的几种拓扑

7.2 Ascoli定理

7.3 等度连续系统和Halmos定理*

7.4 Distal系统和Ellis 半群*

7.5 基数和序数*

7.6 Furstenberg结构定理*

第 8 章 Baire纲性质

8.1 Baire纲定理

8.2 拓扑传递性*

下面定义与点传递性密切相关.

定义8.1. 设(X, f)是拓扑动力系统. 若对X中任意两个非空开集U和V, 都存在正整数n使得$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, 则称$(X, f)$或$f$是拓扑传递的.

8.3 Devaney混沌*

8.4 Li-Yorke混沌*

8.5 黄-叶定理*

8.6 麦的构造性证明*

参考文献

[1] V. Arnold, Small denominators I. On the mapping of the circle into itself. *Izv. Akad. Nauk. Math.* Series 25,21-86, (1961). Trans. A.M.S. Serie 2, 46, (1965).

[2] B. Bekka, Bachir and P. de la Harpe and A. Valette. *Kazhdan's property (T)*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.