1. 已知 $\frac{\arctan x}{x}$ 是可微函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\,dx$ 等于______.

(a) $\frac{1}{1+x^2}-\frac{\arctan x}{x}+C$

(b) $\frac{1}{1+x^2}-\frac{2\arctan x}{x}+C$

(c) $\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{1+x^2}+C$

(d) $\frac{2\arctan x}{x}-\frac{1}{1+x^2}+C$

答案：(b)

$$f(x)=\left(\frac{\arctan x}{x}\right)'=\frac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}=\frac{1}{x(1+x^2)}-\frac{\arctan x}{x^2}$$

$$\begin{aligned}\int xf'(x)\,dx=\int xd[f(x)]=xf(x)-\int f(x)dx &= x\left[\frac{1}{x(1+x^2)}-\frac{\arctan x}{x^2}\right]-\frac{\arctan x}{x}+C\\ &=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2\arctan x}{x}+C.\end{aligned}$$

2. 下面哪个命题是正确的：

(a) 若 f 在 $[a,b]$ 上有跳跃间断点, 则 f 在 $[a,b]$ 上一定没有原函数;

(b) 若 f 在 $[a,b]$ 上有可去间断点, 则 f 在 $[a,b]$ 上一定没有原函数;

(c) 若 f 在 $[a,b]$ 上有定义, 且 f 在 a 的右极限不存在，则 f 在 $[a,b]$ 上一定没有原函数;

(d) 黎曼函数在 $[0,1]$ 上有原函数.

答案：(a)(b)

由 Darboux 定理，存在原函数的函数必须满足介值性，则有第一类间断点的函数一定没有原函数，所以 (a)(b) 正确. 黎曼函数不满足介值性，故没有原函数，所以 (d) 错误.

函数 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 满足选项 (c) 的条件，但它有原函数

$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 故 (c) 错误.

3. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$, 则下列断言正确的是________________

(A) 一定存在 $a\in(0,1)$, 使得 $\int_0^a f(x)\,dx=a$

(B) 一定存在 $a\in[0,1]$, 使得 $f(a)=1$

(C) 对任意 $c\in(0,\frac{1}{2})$, 一定存在 $a\in[0,1]$ 使得 $\int_0^a f(x)\,dx=c$

(D) 一定存在 $a\in(0,1)$, 使得 $f(a)=\frac{1}{2}$

(E) 一定存在 $a \in (0,1)$, 使得 $f(a) = a$

答案： $(C),(D),(E)$

有可能 $f(x) \equiv \frac{1}{2}$, 则 (A)(B) 不对;

考虑变上限积分函数 $F(a) = \int_0^a f(x)\,dx$, 我们知道 $F(a)$ 连续可微， $F(0) = 0$ 且 $F(1) = \frac{1}{2}$. 对连续函数 $F(a)$ 运用介值定理，可得 (C);

对连续函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上应用积分第一中值定理，可得 (D);

对连续函数 $g(x) = f(x) - x$ 在区间 $[0,1]$ 上应用积分第一中值定理，可得 (E).

4. 设 f 在 $[0,1]$ 上可积，则下列断言正确的是________________

(A) 若对于无理点 $x \in [0,1]$, 有 $f(x) = 0$, 则 $\int_0^1 f(x) = 0$;

(B) 若 $f(x)$ 非负，且有无穷多个 $x \in [0,1]$, 使得 $f(x) > 0$, 则 $\int_0^1 f(x)dx > 0$;

(C) 若 $\int_0^1 f(x)dx > 0$，则存在一个子区间 $[a,b] \subset [0,1]$, 使得 $f(x) > 0$ 对所有的 $x \in [a,b]$ 成立;

(D) 若 $f(x)$ 非负，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$，则有无穷多个 $x \in [0,1]$, 使得 $f(x) = 0$.

答案： $(A),(C),(D)$

(A) 若对于无理点 $x \in [0,1]$, 有 $f(x) = 0$, 则对于任意分割，取 ξ_i 为无理点，得到的黎曼和总是 0，取极限得到 $\int_0^1 f(x) = 0$;

(B) 黎曼函数非负，且在无穷多个点，即 $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ 上都大于 0，但它的积分等于 0;

(C) 反证法: 如若不然, 对于任意分割，其任意子区间内都可以找到一点 ξ_i 使得 $f(\xi_i) \leq 0$，对应的黎曼和小于等于 0，取极限得到 $\int_0^1 f(x) \leq 0$，与 $\int_0^1 f(x)dx > 0$, 矛盾;

(D) 反证法: 若至多有有限多个 $x \in [0,1]$ 使得 $f(x) = 0$，则可将 $[0,1]$ 区间分成有限段区间 $[a_i, b_i]$, 在每一段区间内部，有 $f(x) > 0$, 则 $\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx > 0$, 则有积分可加性， $\int_0^1 f(x)dx > 0$，矛盾.

5. 下列陈述正确的是________________

(A) f 在区间 $[a,b]$ 上可积蕴含 f^2 在区间 $[a,b]$ 上可积

(B) f^2 在区间 $[a,b]$ 上可积蕴含 f 在区间 $[a,b]$ 上可积

(C) f 在区间 $[a,b]$ 上可积蕴含 f^3 在区间 $[a,b]$ 上可积

(D) f^3 在区间 $[a,b]$ 上可积蕴含 f 在区间 $[a,b]$ 上可积

答案： $(A)(C)(D)$

由乘积函数可积性，即：若 f, g 在区间 $[a, b]$ 上可积，则 fg 在区间 $[a, b]$ 上也可积. 所以当 f 在区间 $[a, b]$ 上可积时， $f^2 = f \cdot f$, $f^3 = f \cdot f \cdot f$ 在区间 $[a, b]$ 上可积. 故 (A) (C) 正确.

取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 则该函数类似于 Dirichlet 函数，是不可积的. 但是 $f^2 \equiv 1$ 可积，所以 (B) 错误.

应用习题里的结论: 连续 $\circ$ 可积是可积的，这里 $\circ$ 表示复合函数. 注意到函数 $g(x) = \sqrt[3]{x}$ 是定义在整个实数 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，所以如果 f^3 可积， $f = \sqrt[3]{f^3} = g \circ f$ 也可积. 所以 (D) 正确. 注意：这个结果不能应用到选项 (B)，因为 $h(x) = \sqrt{x}$ 虽然在 $[0, \infty)$ 上连续，但它的定义域不包含 $(-\infty, 0)$, 所以如果函数 f 可以取负值，则不能用此结论.

6. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n})$=________________ .

答案：2

取函数 $f(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, 对 $[0, 1]$ 区间做 n 等分割，= 则 $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. 取每个子区间的右端点 $\xi_k = \frac{k}{n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_0^1 f(x)dx = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 = 2.$$

7. 计算 $\int_0^2 \frac{e^x}{e^{x-1} + e^{1-x}}\, dx$=________________ .

答案： e

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{e^x dx}{e^{x-1} + e^{1-x}} \xlongequal[du=e^{-1}e^x dx]{u=e^{x-1}} \int_{e^{-1}}^{e} \frac{e\ du}{u + \frac{1}{u}} = \frac{e}{2}\int_{e^{-1}}^{e} \frac{2u\ du}{1+u^2} &= \frac{e}{2}\ln\left(1+u^2\right)\Big|_{e^{-1}}^{e} \\
&= \frac{e}{2}\left[\ln\left(1+e^2\right) - \ln\left(1+e^{-2}\right)\right] \\
&= \frac{e}{2}\ln\left(\frac{1+e^2}{1+e^{-2}}\right) \\
&= \frac{e}{2}\ln(e^2) = e
\end{aligned}$$

8. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n \sin x}{1 + e^{x^2}}\, dx =$________________

答案： 0

利用放缩：在 $[0, 1]$ 上有

$$0 \le \frac{x^n \sin x}{1+e^{x^2}} \le \frac{x^n}{1+e^{x^2}} \le x^n$$

故可得

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n \sin x}{1+e^{x^2}}\, dx \le \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

9. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x \frac{e^{-(tx)^2}-1}{x^5}\,dt =$________________

(A) $-\frac{1}{6}$

(B) $-\frac{1}{5}$

(C) $-\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{1}{3}$

答案：(D)

应用微积分基本定理，即

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

一定要求里面的函数与 x 无关，否则不能直接用，需要先变形.

$$\lim_{x\to0}\int_0^x \frac{e^{-(tx)^2}-1}{x^5}\,dt = \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \left[e^{-(tx)^2}-1\right]dt}{x^5},$$

我们先把分子上的积分变形

$$\int_0^x \left[e^{-(tx)^2}-1\right]dt \xlongequal[du=xdt]{u=tx} \int_0^{x^2}\left(e^{-u^2}-1\right)\frac{1}{x}\,du = \frac{1}{x}\int_0^{x^2}\left(e^{-u^2}-1\right)du,$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\int_0^x \frac{e^{-(tx)^2}-1}{x^5}\,dt = \lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\left(e^{-u^2}-1\right)du}{x^6} &\xlongequal{z=x^2} \lim_{z\to0}\frac{\int_0^{z}\left(e^{-u^2}-1\right)du}{z^3}\\ &\xlongequal{洛必达} \lim_{z\to0}\frac{e^{-z^2}-1}{3z^2}\\ &\xlongequal{w=z^2} \lim_{w\to0}\frac{e^{-w}-1}{3w}\\ &\xlongequal{洛必达} \lim_{w\to0}\frac{-e^{-w}}{3} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

10. 计算 $\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\sin\pi(x-\frac{1}{2})\,dx=$________________ .

答案： 0

$$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\sin\pi(x-\frac{1}{2})\,dx \xlongequal{u=x-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} u^2\sin(\pi u)\,du = 0,$$

因为 $f(u)=u^2\sin(\pi u)$ 是奇函数.