苏州大学 数学分析III 课程第一次考试试卷

(闭卷　　共 4 页　　2020年11月13日)

院系____________年级____________专业____________

学号____________姓名____________成绩____________

一、　(20 分) 求下列函数在点 $(0,0)$ 处的累次极限及二重极限.

(1) $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^{20}+y^{20}}{x+y}$;　　(2) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

1) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f=1$

$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f=-1$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f$ 不存在 $\begin{pmatrix} y=x \\ y=2x \end{pmatrix}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f$ 不存在. $\begin{pmatrix} x=y^2 \\ x=y \end{pmatrix}$

二、　(10分) 讨论 $f(x,y)$ 在原点的 (1) 连续性, (2) 可微性, 其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\tan xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) 连续.

2) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

$\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta f-0}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\tan xy}{\rho^2}$ 不存在, 故不可微.

三、（10分）求函数 $u=x+y+z$ 的梯度向量，并求 u 在点 $(1,1,1)$ 处沿球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 在该点处的外法线向量方向的方向导数.

1) $\nabla u=(1,1,1)$

2) $\vec{n}_{外}=2(x,y,z)=(1,1,1)$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|=\nabla u\cdot e_{\vec{n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot(1,1,1)=\sqrt{3}.$$

四、（10分）求两曲面 $x^2+y^2+z^2=50$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线在点 $(3,4,5)$ 处的切线及法平面方程.

令 $F=x^2+y^2+z^2-50$，$G=z-\sqrt{x^2+y^2}$

则 $\left.\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}\right|_{(3,4,5)}=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\tau}=(4,-3,0)}}$.

切线 $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-5}{0}$

法平面. $4x-3y=0$

五、（10分）试求：$\dfrac{x}{y}$ 在 $(1,1)$ 处的带有 Peano 型余项的二阶泰勒公式.

可用间接法.

$$\frac{x}{y}=\frac{1+(x-1)}{1+(y-1)}=(1+(x-1))(1-(y-1)+(y-1)^2+o(y-1)^2)$$

$$=1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)+(y-1)^2+o(\rho^2)$$

六、 （10分）设函数 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内二阶连续可微，

$$F(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)>0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0.$$

若 $y=y(x)$ 是由 $F(x,y)=0$ 确定的函数，试讨论上述条件下 $y=y(x)$ 在 x_0 处的极值情况.

解: $y'(x_0) = -\frac{F_x}{F_y}(x_0,y_0) = 0.$

$y''(x_0) = -\frac{F_{xx}}{F_y}(x_0,y_0) > 0.$

故 y 在 x_0 处取极小值.

七、 （15分）求函数 $f=xyz$ 在条件 $x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大与最小值.

书后 P181 ex1(3).

令 $L = \cdots$

$\nabla L = 0 \Rightarrow$ 6个驻点.

最小值点: $\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6}\right), \left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$

最大值点: $\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right), \left(\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)$

$\min f = -\frac{1}{3\sqrt6}$, $\max f = \frac{1}{3\sqrt6}$ (理由: 有界闭集上连续函数必有最大、小值, 在驻点处取得, 6个驻点处

八、　（10分）设 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 试求

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

在极坐标 r 和 θ 下的表达式.

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

九、　（5分）设 $f(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2 \le 1$ 内二阶连续可微，在 $x^2+y^2=1$ 上 $f(x,y)>0$, 且在 $x^2+y^2<1$ 内满足方程

$$f_{xx}+f_{yy}=f. \quad (*)$$

证明: 当 $x^2+y^2 \le 1$ 时，$f(x,y) \ge 0$.

反证. 假设 $\exists\,(x_0,y_0)\in D$, s.t. $f(x_0,y_0)<0$.

由 $f|_{\partial D}>0$, 且 $f\in C(D)$.

可知 $\exists\,(\xi,\eta)\in \mathrm{int}\,D$, s.t. $f(\xi,\eta)=\min f<0$.

又 $f\in C^2(D)$. $\Rightarrow$ $f_{xx}(\xi,\eta)\ge 0$, $f_{yy}(\xi,\eta)\ge 0$.

故 $(f_{xx}+f_{yy})\big|_{(\xi,\eta)}\ge 0$, 而 $f(\xi,\eta)<0$

与题矛盾.

连续函数

(强调仅对于2个函数值)