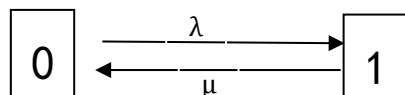

苏州大学《数学模型与数学软件》课程期末考试 A 卷

考试形式 开卷 2020.06.28 09:00—11:00

院系 数学科学学院 年级 级 专业

学号 姓名 成绩

一、(20 分) 假设有一批刚入役的战斗机，0 表示飞机处于正常状态，1 表示飞机处于失修状态， λ 和 μ 为两个正常数，分别表示失效率和修复率。设 t 时刻，飞机良好的概率为 $P_0(t)$ ，飞机失修的概率为 $P_1(t)$ ，失修的飞机需要修理且修理后如新，其状态转移如下



假设刚开始系统的初始条件为： $P_0(0) = 1$ ， $P_1(0) = 0$ ，求出任意 t 时刻下， $P_1(t)$ 和 $P_0(t)$ 关于时间 t 的微分方程组，并算出当 $t \rightarrow \infty$ 时， $P_1(t)$ 和 $P_0(t)$ 的极限概率。

二、(20 分)电影院调查电视广告费和报纸广告费对每周收入的影响，得到下面的数据

| | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 每周收入 | 97.5 | 90.0 | 95.0 | 92.0 | 93.0 | 95.5 | 94.5 | 94.0 |
| 电视广告费 | 1.5 | 2.0 | 1.5 | 2.5 | 3.3 | 2.3 | 4.2 | 2.5 |
| 报纸广告费 | 5.0 | 2.0 | 4.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 2.5 | 3.0 |

建立回归模型并进行检验,诊断异常点的存在并进行处理(要求给出程序及结果)。

三、(30 分) 草原上羊群的数量 $X(t)$ 满足 Logistic 方程 $\frac{dX}{dt} = aX^2 - bX$,

(1) 令 $B = aX^2$ 为该羊群出生的时间变化率, 且 $D = bX$ 是死亡的时间变化率, 如果开始时刻 $t = 0$ 时, 数量 $X(0) = X_0$, 有 B_0 只出生, D_0 只死亡, 证明极限数量为:

$$M = \frac{B_0 X_0}{D_0}$$

(2) 若草原上多来了一群兔子, 兔子的数量为 $Y(t)$, 羊群与兔子呈竞争关系, 当某一种群的数量增加时, 另一总群数量将会减少, 请用数学模型描述来描述一下, 并找出两种种群数量的平衡点。

(3) 若草原上又来了一群狼, 狼的数量为 $Z(t)$, 狼群、羊群和兔子三者构成多种群关系, 请用数学模型描述出其关系。

四、(30 分) 某汽车厂使用轿运车装载小型客车，轿运车是通过公路来运输小型客车整车的专用运输车，有二种类型：上下层各装载 1 列小型客车，记为 1-1 型（图 1）；下、上层分别装载 1、2 列小型客车，记为 1-2 型（图 2）。装载具体要求如下：



图 1、1-1 型轿运车



图 2、1-2 型轿运车

求如下：每种轿运车上、下层装载区域均可等价看成长方形，各列小型客车均纵向摆放，相邻小型客车之间纵向及横向的安全车距均至少为 0.1 米，下层力争装满，上层两列力求对称，以保证轿运车行驶平稳。轿运车与小型客车规格如下：

表 1 轿运车规格

| 轿运车类型 | 上下层长度(米) | 上层宽度(米) | 下层宽度(米) |
|-------|----------|---------|---------|
| 1-1 | 19 | 2.7 | 2.7 |
| 1-2 | 24.3 | 3.5 | 2.7 |

表 2 小型客车规格

| 小型客车型号 | 长度(米) | 宽度(米) | 高度(米) |
|--------|-------|-------|-------|
| I | 4.61 | 1.7 | 1.51 |
| II | 3.615 | 1.605 | 1.394 |

(1) 通过填写下表(表 3)的方式，分别写出 1-1 型和 1-2 型轿运车的合理装载模式(剩余长度无法摆放任何小型客车)，注意：表 3 针对 1-1 型轿运车且仅考虑一层，因此，合理装载方案(u, v)表示可以摆放 u 辆 I 型客车和 v 辆 II 型客车， 第一种合理装载方案是 (8, 0)；

表 3 1-1 型轿运车装载 I 型客车和 II 型客车的合理装载模式

| 合理摆放方案 | I 型客车 | II 型客车 | 余量(米) |
|--------|-------|--------|-------|
| 1 | 4 | 0 | 0.26 |
| 2 | 3 | 1 | 1.255 |
| ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... |

(2) 该汽车厂要运输小型客车 I 型车 100 辆及 II 型车 68 辆，并要求 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，请问：应如何装载使得所需的两种轿运车的总数量最少？

- (i) 建立数学模型；
- (ii) 编写 Lingo 程序求解；
- (iii) 根据计算结果，给出最优装载方案(两类轿运车的数量、每辆轿运车的小型客车装载方案)。如果尽可能优先使用 1-1 型轿运车，那么，最优装载方案是否改变？如果改变，给出改变后的最优装载方案。