第三讲、　连续

基本内容:　连续性概念; 一些重要例子（ Dirichlet 函数、 Riemann 函数、多元函数的例子）; 一元连续与多元连续的关系; 用集合语言刻画连续性; 连续函数的保号性; 零点定理（介值定理）; 有界性定理; 最大（小）值定理; 一致连续性; 连续函数延拓.

§3.1　连续性概念

一、 Dirichlet 函数与 Riemann 函数

1. Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数},\\ 0, & x \text{ 是无理数},\end{cases}$$

在每一点都没有极限. 所以是处处不连续.

2. Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, \text{ 其中 } p,q \text{ 为互素整数}, q>0,\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

在所有无理点处连续, 而在所有有理点处不连续, 且为可去间断点. 事实上可以证明对每个 $x_0\in\mathbb{R}$ 成立

$$\lim_{x\to x_0} R(x)=0. \tag{1}$$

取定 x_0. 由于在证明(1)时不必考虑 $R(x_0)$, 因此不需要知道 x_0 是有理点或无理点.

对给定的 $\varepsilon>0$, 我们的目的是: 证明有 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 成立 $(0\leqslant)R(x)<\varepsilon$. 考虑使这个不等式的反面(即 $R(x)\geqslant\varepsilon$) 成立的 x 是什么? 当然 x 只能是有理数. 将它写成$x=\dfrac{p}{q}$, 其中 p, q 互素, 则就是

$$R\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon.$$

这等价于

$$q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}, \text{ 即} q\in\left\{1,2,\cdots,\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

由以上分析可见, 可以先取 $\delta_1=1$, 然后在去心邻域

$$(x_0-1)\cup(x_0+1)$$

中将分母 q 在集合 $\left\{1,2,\cdots,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$ 中的所有有理数 $\dfrac{p}{q}$ 都避开即可. 由于这样的有理数至多只有有限个, 记为

$$x_1,x_2,\cdots,x_k,$$

然后令

$$\delta=\min\{1,|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\cdots,|x_k-x_0|\},$$

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时就成立 $0\leqslant R(x)<\varepsilon$. 因此 (1) 成立.　□

例 1.　构造一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义的函数, 使得它在 $x=1$ 处连续, 但在所有其他点处都不连续.

二、多元连续函数

首先注意: 一个多元函数如果对每个变元都连续, 仍不能推出它是一个多元连续函数. 例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在全平面上对 x,y 都分别连续. 在原点分别对 x, y 连续, 但作为二元函数在原点不连续.

例 2. 用极坐标表示的函数 $f(x,y)$ 定义为: 当 $r=\theta$, $\theta\in(0,2\pi)$ 时取 1 ，其余取 0 . 证明在过原点的每一条直线上 $f(x,y)$ 都趋于 $f(0,0)=0$. 但 $f(x,y)$ 在原点不连续.

例 3（多元函数连续的若干充分条件） 设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续. 证明当下列条件之一满足时 $f(x,y)$ 是 D 上的二元连续函数.

(1) $f(x,y)$ 在 D上对 x 连续且关于 y 一致, 即 $\forall x_0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$（与 y 无关）, 使 $|x-x_0|<\delta$ 时, 对 $\forall y$, (x,y), $(x_0,y)\in D$ 恒有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon.$$

(2) $f(x,y)$ 在 D 上对 x 满足局部 Lipschitz 条件且关于 y 一致, 即：$\forall p_0=(x_0,y_0)\in D$, $\exists r>0$ 及$L>0$, 使得对$\forall(x_1,y)$、$(x_2,y)\in D\cap O_r(p_0)$, 恒有

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<L|x_1-x_2|.$$

(3) $f(x,y)$ 关于变量 y 是单调的.

证 (1) 由定义，并用拆项补项的方法.

(2) 逐点连续是局部性质，再由定义并用拆项补项的方法来证。

(3) 为证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，可找 (x_0,y_0) 的一个矩形邻域$D=[x_0-\delta_1,x_0+\delta_1]\times[y_0-\delta_2,y_0+\delta_2]$. 先利用 $f(x_0,y)$ 在直线 $x=x_0$上的连续性，可选取 δ_2 足够小，使 f 在 D 的上下边中点 $(x_0,y_0\pm\delta_2)$ 的值与 $f(x_0,y_0)$ 的误差不超过 $\dfrac{1}{2}\varepsilon$；然后再由 $f(x,y_0\pm\delta_2)$ 在直线 $y=y_0\pm\delta_2$ 上的连续性, 可取δ_1足够小, 使 f 在 D 的上下边上的值与 $f(x_0,y_0)$ 的误差不超过 ε. 最后利用 f 关于 y 的单调性, 即可得 f 在 D 上的值与 $f(x_0,y_0)$ 的误差不超过 ε. □

连续性除了可以用极限语言刻画之外, 也可以用集合语言来刻画. 下面的例题说明它们是等价的.

例 4 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 则下述命题等价:

(1) $f(x)$ 连续;

(2) 任何开集的原象是开集;

(3) 任何闭集的原象是闭集;

(4) 对 $\mathbb{R}$ 中的任意子集 E , 有 $f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$.

证 我们采用循环证明的方法.

(1) $\Rightarrow$ (2) : 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, A 是 $\mathbb{R}$ 中的任一开集, 如果 $f^{-1}(A)$ 是空集, 结论自然成立; 若 $f^{-1}(A)$ 非空, $\forall x_0\in f^{-1}(A)$, 则 $f(x_0)\in A$, 而 A 是 $\mathbb{R}$ 中开集, 于是存在 $\varepsilon>0$, 使得 x_0 的开邻域 $(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)\subset A$, 由于 $f(x)$ 在 x_0 点连续知 $\exists\delta>0$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$, 于是 $O_\delta(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n,|x-x_0|<\delta\}\subset f^{-1}(A)$, 从而 $f^{-1}(A)$ 为开集.

(2) $\Rightarrow$ (3) : 设 S 是 $\mathbb{R}$ 中的任一集合, 则

$$f^{-1}(S^c)=[f^{-1}(S)]^c. \tag{2}$$

事实上, 由于 $x\in f^{-1}(S^c)\Longleftrightarrow f(x)\in S^c$, 而 $x\in[f^{-1}(S)]^c\Longleftrightarrow x\notin f^{-1}(S)\Longleftrightarrow f(x)\notin S$, 由此可以看出(2) 成立.

设 F 是 $\mathbb{R}$ 中的任一闭集, 由(2) 得

$$f^{-1}(F)=f^{-1}((F^c)^c)=[f^{-1}(F^c)]^c.$$

由条件(2) 及 F^c 为开集知 $f^{-1}(F)$ 为闭集.

(3) $\Rightarrow$ (4) : 要证 $f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$, 只要证

$$\overline{E}\subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

事实上, 下面的包含关系显然成立,

$$E\subset f^{-1}(f(E))\subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

又由条件(3) 及 $\overline{f(E)}$ 是闭集知

$$\overline{E}\subset f^{-1}(\overline{f(E)}).$$

(4) $\Rightarrow$ (1) : 反证法, 若不然, $\exists x_0\in\mathbb{R}^n, f(x)$ 在 x_0 点不连续, 由 Heine 归结原则知, $\exists\varepsilon_0>0$ 及点列 $\{x_n,\ n=1,2,\cdots\}, x_n\to x_0$ 但

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0. \tag{3}$$

取 $E=\{x_n\}, n=1,2,\cdots$, 则 $x_0\in\overline{E}, f(E)=\{f(x_n)\}, n=1,2,\cdots$. 由条件(4) 知 $f(x_0)\in\overline{f(E)}=\overline{\{f(x_n)\}}$, 与(3) 矛盾. □

§3.2 **连续函数的局部性质（保号性等）**

例 5 设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，且 $f(x)\int_a^x f(t)dt\equiv 0,\ x\in[a,\ b]$. 证明 $f(x)\equiv 0,,\ x\in[a,\ b]$.

§3.3 **零点定理（介值定理）、闭区间上连续函数的性质**

例 6 设 $f\in C[a,b]$, 且有 $f([a,b])\subset[a,b]$ 或 $f([a,b])\supset[a,b]$. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=\xi$ （即 f 在区间 $[a,b]$ 中有不动点）.

例 7 设 $f\in C[0,1]$, $f(0)=f(1)$. 证明: 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 存在 ξ, 使得 $f(\xi+\dfrac{1}{n})=f(\xi)$.

例 8 设数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上收敛于 $s(x)$, 如果 $u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的非负连续函数, $n=1,2,\cdots$. (1). 证明 $s(x)$ 必在 $[a,b]$ 上取到最小值; (2). 问 $s(x)$ 是否能取到最大值?

§3.4 **一致连续**

例 9 证明: 函数 $\sqrt{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

例 10 在无界区间上的有界函数也可能是不一致连续的. （ $\sin x^2$ ）.

例 11 设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件, 其中 $a>0$. 证明: $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

例 12 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对任何 $x\in[0,1]$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

例 13　设 $f(x,y,z)$ 于 $a \leqslant x,y,z \leqslant b$ 上连续, 令

$$\varphi(x) = \max_{a \leqslant y \leqslant x} \min_{a \leqslant z \leqslant b} f(x,y,z),$$

则 $\varphi(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续.

例 14　设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 它的行列式 $\det A \neq 0$. 证明存在 $\alpha > 0$, 使对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 都有 $|A\boldsymbol{x}| \geqslant \alpha |\boldsymbol{x}|$.

例 15　设函数 $f(x,y)$ 在非空有界闭区域 D 上连续. 证明 D 中存在无限多点 (ξ,η), 满足

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\cdot \mathrm{mes}(D), \quad \text{其中 } \mathrm{mes}(D) \text{ 表示 } D \text{ 的面积.}$$

最后讨论一点连续函数延拓的问题.

例　(1) 设 f 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 证明 f 可以连续地延拓到 $\mathbb{R}$ 上, 即存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 F , 使 $x \in [a,b]$ 时, 有 $F(x) = f(x)$.

(2) 设二元函数 $f(x,y)$ 在闭圆盘 $B = \{\ (x,y):\ x^2+y^2 \le 1\ \}$ 上连续, 证明存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $F(x,y)$, 使 $(x,y) \in B$ 时, 有 $F(x,y) = f(x,y)$.

(3) 设 f 在有限开区间 (a,b) 上连续, 是否有 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 F , 使 $x \in (a,b)$ 时有 $F(x) = f(x)$? 分别考虑 f 为无界、有界函数的情况.

对 (1), 有直观的解答.

(2) 的解答可以仿照 (1) 的解答来做.

(3) 要根据 f 的不同情况讨论. 可连续延拓的一个充要条件是 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 存在且有限.

进一步考虑把有限开区间 (a,b) 弯曲成圆周去掉一点的集合 Γ , f 定义在 Γ 上, 端点的“左”、“右”极限存在但不相等. 那么 f 是不能连续延拓到 $\mathbb{R}^2$ 上的.

问题　定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续函数 f 在 E 符合什么条件时可以连续延拓到 $\mathbb{R}^n$ 上？回答是非常著名的 Tietze 扩张定理(f 有界, E 为闭集. 见《数学分析习题课讲义》（下册）第 18 章参考题）.

第三讲练习题

1. 求出 Dirichlet 函数和 Riemann 函数的所有极值点和最值点.
2. 设函数 f 在区间 I 上满足带指数的Lipschitz 条件, 即存在 $M>0, \alpha>0$, 使得当 $x,y \in I$ 时, 成立 $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}$. 证明: 若 $\alpha > 1$, 则 f 在 I 上是常值函数.

   [因此在文献中若提到带指数的Lipschitz 条件时, 总假定其中的指数不大于 1.]
3. 举出一个函数 f, 它的定义域为 $[0,1]$, 处处不连续, 但它的值域为区间.
4. 作一个在有界区间$(0,1)$上连续、有界但非一致连续的函数 $f(x)$.
5. 若 $f \in C[a,b]$, 证明: 对每个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在区间 $[a,b]$ 上的分段线性函数 $L(x)$ 使得 $|f(x)-L(x)| < \varepsilon$ 在区间 $[a,b]$ 上处处成立.

   [本题有重要的意义, 即可以用简单的分段线性函数来一致逼近任何连续函数.]
6. 设 $f \in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x)) = \infty$, 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

7. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 证明: 存在非负常数 a 和 b, 使得成立 $|f(x)| \leqslant a\,|x| + b$.

   [由此知道在 $(\infty,+\infty)$ 上的一致连续函数 f 满足一个必要条件: $f(x) = O(x)\ \ (x \to \infty)$.]
8. 设函数 f 在区间 $[0,n]$ 上连续, 且有 $f(0) = f(n)$, 其中 n 是一个自然数. 证明: 至少有 n 对不同的 (x,y), 使得 $f(x) = f(y)$, 同时 $x - y$ 为非零整数.

   [本题只需要连续函数的零点存在定理. 试从 $n = 2,3$ 做起, 看什么时候你会有个飞跃.]
9. 是否存在定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 f, 使对于任何 $c \in \mathbb{R}$,

   (a) 方程 $f(x) = c$ 都恰有两个解?

   (b) 方程 $f(x) = c$ 都恰有三个解?

   [第一小题的答案是不存在. 请证明; 第二小题的答案是存在. 需要举出例子.]
10. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增加, $f(a) > a,\ f(b) < b$. 证明: f 在 (a,b) 内必有不动点.
11. 设 f_1, f_2 是分别以 T_1, T_2 为周期的连续函数, 且均非常值函数. 证明: 若周期 T_1, T_2 不可公约, 则 $f_1 + f_2$ 不是周期函数.
12. 设 f, g 是周期函数, 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)] = 0$, 证明: $f(x) \equiv g(x)$. (注意: 本题并不需要 f 和 g 为连续函数的条件.)
13. 设 f 在开区间 I 上连续, 且于每点 $x \in I$ 取到极大值. 证明: f 为 I 上的常值函数.
14. (上一题要求 f 在区间 I 的每一点上同时取极大值或同时取极小值. 但实际上这个要求可以去掉.) 设 f 在开区间 I 上连续, 且于每点 $x \in I$ 取到极值. 证明: f 为 I 上的常值函数.
15. 设 $f(x,y)$ 定义在 $[a,b] \times [c,d]$ 上且关于 x 连续, 关于 y 单调. 又对任意的 x , $f(x,y)$ 当 $y \to d$ 时收敛到 $f(x,d)$. 证明 $f(x,y)$ 的收敛关于 $x \in [a,b]$ 一致.
16. 设 $f(x,y)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续. 且 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调的. 证明$f(x,y)$ 是 D 上的二元连续函数.
17. 证明: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一致连续.
18. 如果 f 把 $\mathbb{R}$ 中的任意开集映为开集，问 f 是否是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.
19. $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且 $\lim\limits_{|x|+|y|\to\infty} f(x,y)$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有界, 且一致连续.
20. 证明: 若 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界闭域, f 为 D 上连续函数, 则 $f(D)$ 是一个有界闭区间.
21. $f(x,y)$ 在 $[a,b] \times [a,b]$ 上连续, 定义

    $$\varphi(x) = \max_{a\leqslant\xi\leqslant x}\ \max_{a\leqslant y\leqslant\xi} f(\xi,y),$$

    则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
22. 设 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 称 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上线性相关, 若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得

    $$\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) \equiv 0,\ x \in [0,1].$$

    证明: $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上线性相关的充要条件是

    $$\det\left(\left(\int_0^1 f_i(x) f_j(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\times n}\right) = 0,$$

    其中 $\det(A)$ 是 A 的行列式.

23. 设 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2, \cdots$，$\boldsymbol{p}_k$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 k 个相异的点，证明存在一个最小半径的圆盘 B, 把这 k 个点覆盖. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的点，也有类似的命题.

24. 设 A, B 是两个 n 阶的实对称方阵, 其中 B 是正定矩阵. 设函数 $G(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x})^{-1}(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})$ 定义在 $E = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上. 证明:

    (1) $G(\boldsymbol{x})$ 可以在 E 上取到最大值;

    (2) $G(\boldsymbol{x})$ 的最大值点是与 A, B 有关的某个矩阵的特征向量. 请写出这个矩阵.