第八次作业 6.42，6.43

6.42　设$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$是独立同分布的随机变量, 都服从几何分布

$$f(x;\theta)=\theta(1-\theta)^x,\quad x=0,1,2,\ldots,\quad 0<\theta<1$$

则$T_n=\sum_{i=1}^n\xi_i$是θ的充分统计量.

解. 由题意可知

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)&=\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}\\&=K_1(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)K_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\end{aligned}$$

其中

$$K_1(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i},$$

$$K_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1$$

都是非负函数并且当$\sum_{i=1}^n x_i$取定时K_2不依赖于θ. 根据内曼因子分解定理,T_n是充分统计量. □

6.43　设$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$是独立同分布的随机变量, 都服从参数为λ的泊松分布,则$T_n=\sum_{i=1}^n\xi_i$是关于λ的充分统计量.

解. 由题意得,对任意的$i=1,2,\ldots,n$,

$$P(\xi_i=x_i)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!},x_i=0,1,2,\ldots,$$

所以

$$\prod_{i=1}^n P(\xi_i=x_i)=e^{-\lambda n}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}/\prod_{i=1}^n x_i!.$$

令$K_1=e^{-\lambda n}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}$,$K_2=1/\prod_{i=1}^n x_i!$.由内曼因子分解定理得$T_n$是充分统计量. □