数学分析选讲-微分学

Kui Wang

2021 年 4 月 9 日

摘要

本学期《数学分析选讲》课程的微分学内容共三次线下课，两次线上自学课.

(1) 线下课程的计划安排：

Lecture 1. 微分中值定理及其高维推广 (Apr. 12);

Lecture 2. Taylor 公式及其应用 (Apr. 19);

Lecture 3. 隐函数及导数的坐标变换公式 (Apr. 26).

(2) 线上自学课程的计划安排：

Lecture 4. 凸函数与不等式;

Lecture 5. 极值.

在线课程链接 (百度网盘, 提取码:suda):

https://pan.baidu.com/s/1t1NmWeltggQLMWCrTKmysA

特别说明: 由于这学期课时所限，原本 5 次课的内容需要压缩到 3 次课，故微分学中凸函数与不等式、极值这两个章节需要大家自学 (考试不涉及这两个专题中的内容, 同时这两部分的作业也无需完成).

作业提交: 三次作业提交的截止日期分别时 Apr. 19、Apr. 26、May 5 中午 12:00 前, 不接受任何迟交作业的理由. 每次作业将随机挑 2 到 3 个题目来评分, 所得的成绩将折算为微分学部分的平时分. 提交方式: 拍照并合并成一个 PDF 发送至邮箱: 489300413@qq.com, 同时要在文件中体现学号信息.

目录

1 微分中值定理及其高维推广

1.1 微分中值定理

定理 1.1 (Fermat 定理). 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0)=0$.

定理 1.2 (Rolle 定理). 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 可导, 且 $f(a)=f(b)$. 则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

定理 1.3 (Lagrange 定理). 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 可导, 则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

定理 1.4 (Cauchy 定理). 若函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 可导, 则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)\Big(g(b)-g(a)\Big)=g'(\xi)\Big(f(b)-f(a)\Big)$$

注 1.1. *(1) Rolle 定理、Lagrange 定理及 Cauchy 定理等价.*
(2) Lagrange 定理的结果可表示为

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{1.1}$$

即可将函数值的增量写成函数在某点的导数值乘以自变量差的形式, 该公式是处理函数值增量时常用的技巧.
(3) 微分中值定理: Rolle 定理、Lagrange 定理以及 Cauchy 定理可用来证明类似“存在 ξ, 使得等式成立”的题目. 除此之外, 还有连续函数介值定理、Fermat 定理以及积分中值定理.

例 1.1. *用 Rolle 定理证明 Cauchy 中值定理.*

例 1.2 (无穷区间上的 Rolle 定理). 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, $(a,+\infty)$ 上可导. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$, 则存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

例 1.3 (Darboux 定理). 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导, $a<x_1<x_2<b$. 若 C 为介于 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 之间的任意一个数, 则存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f'(\xi)=C$.

例 1.4 (单侧导数极限定理)**.** 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 且 $f(x)$ 在 a 处右连续. 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右导数 $f'(a^+)$ 存在, 且

$$f'(a^+)=\lim_{x\to a^+} f'(x).$$

例 1.5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上二次可导, $f(a)=f(b)=0$. 则对 $\forall c\in(a,b)$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

例 1.6. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, $f(0)=0$. 若存在常数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\leq A|f(x)|$. 证明 $f(x)\equiv 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

例 1.7. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二次可导, $|f(x)|\leq 1$, $f^2(0)+\big(f'(0)\big)^2=4$. 证明: 存在 $\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

1.2 L'Hospital 法则

定理 1.5 (L'Hospital 法则)**.** 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 a 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x)\neq 0$. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$(*i.e.* $\frac{0}{0}$ 型), $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷大. 则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注 1.2. 如将 $x\to a$ 换成半侧极限或者趋于无穷大, *L'Hospital* 法则仍成立; 极限为 $\frac{*}{\infty}$ 型, *L'Hospital* 法则也成立.

例 1.8. 证明 *L'Hospital* 法则对 $\frac{*}{\infty}$ 型极限也成立. 即若 $f(x),g(x)$ 在 a 的某去心邻域内可导, $g'(x)\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷大, 则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 1.9. 设 $f''(0)$ 存在. 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-2f(0)+f(-2h)}{4h^2}=f''(0).$$

1.3 多元函数驻点与可微

定理 1.6 (高维 Fermat 定理)**.** 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值且在该点处偏导数存在, 则 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的驻点, 即 $\nabla f(x_0,y_0)=\overrightarrow{0}$.

定理 1.7 (高维 Rolle 定理)**.** *若 $z = f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 且在 D 内部 $\operatorname{Int} D$ 偏导存在. 若 $f(x,y)$ 在 ∂D 上取得常数, 则 $f(x,y)$ 在 $\operatorname{Int} D$ 中存在一个驻点 (x_0, y_0).*

例 1.10. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个开区域. 若函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 在 D 上连续且偏导存在. 若满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad u^2 + v^2 = c$$

其中 c 为常数. 证明 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 D 上恒为常数.

例 1.11. 设 $z = f(x,y)$ 在单位圆盘 $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ 上连续且一阶偏导存在. 若 $\forall (x,y) \in D$ 有 $|f(x,y)| \le 1$, 证明*: 存在 $(x_0, y_0) \in \operatorname{Int} D$ 使得 $|\nabla f(x_0, y_0)| < 4$.*

定义 1.1. 设 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 某邻域内有定义, 若存在常数 A, B 使得

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta\rho)$$

则称 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 且 $dz := A\Delta x + B\Delta y$ 称为 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处的全微分. 其中

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad \text{及} \quad \Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

定理 1.8. *若 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微，则 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处偏导存在, 且*

$$dz(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

注 1.3. 上述定理说明多元函数可微，则偏导存在；而反之则不一定成立，即偏导存在不一定有函数可微. 若偏导存在且连续，则函数可微.

例 1.12. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \ne 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明*: (1) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 都存在; (2) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续; (3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.*

1.4 作业

作业 1.1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界且二次可导. 证明 $f''(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有零点.

作业 1.2. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导. 若有

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = a > 0 \quad \text{以及} \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = b < 0.$$

证明: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

作业 1.3. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上可导, $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$, 且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷. 证明

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

作业 1.4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 次可导, 且 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$($k = 0, 1, \cdots, n$). 证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$.

作业 1.5. 证明函数 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x \sqrt{x} e^{x^2} \sin x \, dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

作业 1.6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三次可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$f(a) - f(b) = \frac{f'''(\xi)}{12}(a-b)^3.$$

作业 1.7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上连续, $(0,4)$ 上可导, 且在 $(0,4)$ 上满足 $|f(x)| < 1$. 证明存在 $\xi \in (0,4)$ 使得

$$\left(f'(\xi)\right)^2 + f^2(\xi) < 1.$$

作业 1.8. 举例说明 *(以二元为例)*

1. $f(x,y)$ 在一点处偏导存在, 但不连续;
2. $f(x,y)$ 在一点处连续但偏导不存在.

作业 1.9. 设 $f(x,y) = |x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的一个邻域上有定义. 问 $\varphi(x,y)$ 满足什么样的条件时有:

1. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续?
2. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导存在?
3. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微?

2 Taylor 公式及其应用

2.1 Taylor 公式

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，定义以 x_0 为中心的 n 次多项式

$$\begin{aligned}P_n(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ =& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.\end{aligned}$$

由 $P_n(x)$ 的定义显然有

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n'(x_0) = f'(x_0), \cdots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

记

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x)$$

即有

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(x) + R_n(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \qquad (2.1)\end{aligned}$$

称公式 (2.1) 为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 展开, $R_n(x)$ 称为 n 阶余项. 公式 (2.1) 在 $f(x)$ 的定义域内成立.

定理 2.1 (带有 Peano 余项的 Taylor 公式)**.** *若 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则有*

$$R_n(x) = o\Big((x-x_0)^n\Big),$$

即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\Big((x-x_0)^n\Big). \quad (2.2)$$

注 2.1. *称公式 (2.2) 为 $f(x)$ 在 x_0 处带有 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展开式. 注意到余项 $R_n(x) = o\Big((x-x_0)^n\Big)$, 仅在 x_0 的某个小邻域内才有意义, 故而带有 Peano 余项的 Taylor 展开式适用于 x_0 附近。*

定理 2.2 (带有 Lagrange 余项的 Taylor 公式)**.** 若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有 $n+1$ 次导数，则对于 $\forall x \in O(x_0)$, $\exists\xi$(介于 x_0 与 x 之间) 使得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

即

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{2.3}$$

令 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, 上式可写为：存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

注 2.2. *称公式 (2.3) 为 $f(x)$ 在 x_0 处带有 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 展开式. 注意到带有 Lagrange 余项的 Taylor 展开式成立的条件是 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有 $n+1$ 次导数, 以及对任意的 $x \in U(x_0)$ 都成立.*

若在公式 (2.2),(2.3) 中取 $x_0 = 0$ 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \tag{2.4}$$

以及存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{2.5}$$

其中 (2.4) 和 (2.5) 分别称为带有 Peano 余项和 Lagrange 余项的 n 阶 Maclaurin 展开式.

例 2.1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微，且对任意的正整数 n 有 $f(\frac{1}{n}) = 0$.

1. 证明对 $\forall n$ 有 $f^{(n)}(0) = 0$.
2. 若对 $\forall n$, $x \in \mathbb{R}$ 都有 $|f^{(n)}(x)| \le M$, 证明 $f(x) \equiv 0$.

注 2.3. *上例中若导数有界的条件去掉, 则结论不一定成立, 如:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\frac{\pi}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

例 2.2. 证明 $\sin 1$ 是无理数.

注 2.4 (基本初等函数 Maclaurin 展开式)**.**

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+\cdots+x^n+o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})\\
\frac{1}{1+x^2} &= 1-x^2+\cdots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n})\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+C_\alpha^nx^n+o(x^n)
\end{aligned}$$

其中 $C_\alpha^n := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

2.2 Taylor 展开的应用

注 2.5. *Taylor* 公式是关于函数 $f(x)$ 及其导数 $f^{(n)}(x)$ 关系的**等式**, 故在处理函数及其导数的问题时,*Taylor* 展开式是常用的工具. 利用 *Taylor* 公式的关键是: 在何点展开及展开到第几项, 这一般可以从题干中看出来. 事实上微分中值定理也是 *Taylor* 公式的特殊情形.

例 2.3. 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}.$$

例 2.4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导, 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3.$$

例 2.5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 上二阶可导且满足 $|f''(x)|\geq 1$. 若 $f(0)=f(1)=0$. 证明

$$\max_{[0,1]}|f(x)|\geq\frac{1}{8}.$$

例 2.6. *设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二次可导, 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界. 证明 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$.*

2.3 多元 Taylor 展开及其应用

设 $u(x)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 元函数, $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个固定点. 记

$$\Delta x := x-x^0=(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,\cdots,x_n-x_n^0)$$

及定义一元函数

$$g(t):=u(x^0+t\Delta x),$$

则有 $g(0)=u(x^0)$ 及 $g(1)=u(x)$. 故由一元函数 $g(t)$ 在 0 处的 Taylor 公式可得到 $u(x)$ 的 Taylor 展开

$$u(x)=g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{g''(0)}{2!}+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}+\frac{g^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}. \tag{2.6}$$

直接计算可得

$$g'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i}(x_i-x_i^0)=\nabla u(x_0)\cdot(\Delta x)^T,$$

以及

$$g''(0)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\Big(\nabla u(x_0+t\Delta x)\cdot(\Delta x)^T\Big)=(\Delta x)\cdot\nabla^2 u(x_0)\cdot(\Delta x)^T$$

其中 $\nabla^2 u:=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)$ 为函数 u 的 Hessian 矩阵.

特别地在公式 (2.6) 中取 $n=2$, 我们就得到多元函数的 2 阶 Taylor 展开公式

$$u(x)=u(x_0)+\nabla u(x_0)\cdot(\Delta x)^T+\frac{1}{2}(\Delta x)\cdot\nabla^2 u(x_0)\cdot(\Delta x)^T+o(|\Delta x|^2). \tag{2.7}$$

例 2.7. *求函数 $u=xy+yz$ 在 $(0,0,0)$ 处增长最快的方向.*

例 2.8. *设 $f(x,y)$ 在 $D: x^2+y^2\le 1$ 上有连续偏导数.*

1. *求 $f(x,y)$ 在 ∂D 上关于外法向 $\mathbf{n}$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$.*
2. *若 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\partial D}<0$, 证明 $f(x,y)$ 在 $\operatorname{Int} D$ 内取到最大值.*

例 2.9. 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中有界光滑闭区域，$u(x,y)$ 是 D 上的连续函数，且在 $\operatorname{Int} D$ 上有二阶连续偏导数且满足如下的偏微分方程

$$\Delta u = u$$

其中 Δ 是 *Laplace* 算子，定义为 $\Delta u := u_{xx} + u_{yy}$.

1. 当 $u|_{\partial D} \geq 0$ 时，证明 $u|_D \geq 0$;(椭圆偏微分方程的极值原理)
2. 当 $u|_{\partial D} > 0$ 时，证明 $u|_D > 0$.(椭圆偏微分方程的强极值原理)

2.4 作业

作业 2.1. 求下列函数极限

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left((1+x)^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\arcsin x}$.

作业 2.2. 确定 a, b 使得当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$ 是尽可能高阶的无穷小.

作业 2.3. 求 $f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ 在 $(0,0)$ 处的二阶 *Taylor* 展开.

作业 2.4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微, 且任意的正整数 n 有 $f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2}{n^2+1}$. 求 $f^{(n)}(0)$.

作业 2.5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

作业 2.6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且满足有 $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| < 2$. 证明当 $x \in [0,1]$ 时有 $|f'(x)| \leq 3$.

作业 2.7. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有 $|f(x)| \leq M_0$，$|f''(x)| \leq M_2$. 证明 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有 $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

作业 2.8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, $f(0) = f(1) = 0$, 且 $\max\limits_{0\leq x\leq 1} f(x) = 2$. 证明: $\inf\limits_{0\leq x\leq 1} f''(x) \leq -16$.

作业 2.9. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微, 且

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = a > 0.$$

证明：$f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上取到最小值.

3 隐函数存在定理

3.1 隐函数存在定理

定理 3.1 (隐函数存在定理)**.** *若函数 $F(x,y,u,v)$, $G(x,y,u,v)$ 满足如下条件:*

1. *$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;*
2. *F 和 G 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某邻域内有连续的偏导数;*
3. *F、G 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 处关于变量 u,v 的 Jacobi 行列式*

$$J:=\det\begin{pmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{pmatrix}\Big|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0.$$

则存在 $p_0:=(x_0,y_0)$ 的一个邻域 $U(p_0)$, 使得

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0,\end{cases}$$

在 $U(p_0)$ 内可唯一确定隐函数组

$$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases},$$

满足 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 且 $u(x,y),v(x,y)$ 在 $U(p_0)$ 具有一阶连续偏导数, 满足

$$\begin{cases}F_x+F_uu_x+F_vv_x=0\\ G_x+G_uu_x+G_vv_x=0\end{cases}\quad \text{且}\quad \begin{cases}F_y+F_uu_y+F_vv_y=0\\ G_y+G_uu_y+G_vv_y=0\end{cases}.$$

注 3.1. *隐函数求导方法:*

Step 1. *由题目确定因变量与自变量: 因变量的个数就是方程的个数, 同时由隐函数组及所求的 (偏) 导数确定因变量及自变量.*

Step 2. *方程 (组) 两边同时对自变量求导数得到关于所求导数的方程组. 求导过程中, 其他自变量的导数为零, 因变量的导数要保留.*

Step 3. 解方程组得到所求 (偏) 导数.

例 3.1 (反函数存在定理)**.** 设 $u = f(x, y)m$, $v = g(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 某邻域内连续且有一阶偏导, 且满足

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} := \det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Big|_{(x_0,y_0)} \neq 0.$$

证明方程组 $\begin{cases} u = f(x,y) \\ v = g(x,y) \end{cases}$ 在 (x_0, y_0) 对应点 (u_0, v_0) 的某个邻域内确定一组反函数 $x = x(u, v), y = y(u, v)$, 并求反函数的偏导数.

例 3.2. 设 $u = f(x - ut, y - ut, z - ut)$, $g(x, y, z) = 0$. 求 u_x, u_y.

例 3.3. 设 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. 证明 $f(x, y) = 1$ 为一直线的充要条件是:

$$f_y^2 f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_{yy} f_x^2 = 0.$$

3.2 坐标变换下求导公式

定理 3.2. 设 $z = f(x, y)$ 有一阶连续偏导, 作变量代换 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$. 则 f 的偏导数在坐标 u, v 下有如下的公式

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 u_x, y_y, v_x, v_y 是函数组 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 所确定的反函数组 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ 的偏导数.

证明. 公式 (3.1) 本质上是复合函数 $f(x, y) = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 的求导公式, 即

$$f_x = z_u u_x + z_v v_x \quad 且 \quad f_y = z_u u_y + z_v v_y.$$

□

注 3.2. 一阶导数再求导数可得高阶导数坐标变换公式, 如

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) \\ &= (z_u u_x + z_v v_x)_x \\ &= (z_{uu} u_x + z_{uv} v_x) u_x + z_u u_{xx} + (z_{vu} u_x + z_{vv} v_x) v_x + z_v v_{xx} \\ &= z_{uu} u_x^2 + 2 z_{uv} u_x v_x + z_{vv} v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx},\end{aligned}$$

类似地

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z_{uu} u_y^2 + 2 z_{uv} u_y v_y + z_{vv} v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy},$$

以及

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z_{uu} u_y u_x + z_{uv}(u_x v_y + u_y v_x) + z_{vv} v_y v_x + z_u u_{xy} + z_v v_{xy}.$$

例 3.4. 设 $f(x,y)$ 满足方程

$$(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

若作变换 $x = uv, y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, 求 $z = f(x,y)$ 在 u, v 坐标下所满足的方程.

例 3.5. 设 $z = f(x,y)$ 满足 $x^2 f_x + y^2 f_y = f^2$. 若有

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{1+tu} \\ z = \frac{t}{1+tv} \end{cases}.$$

试求 $v = v(t,u)$ 所满足的微分方程.

例 3.6. 设函数 $z = f(x,y)$ 有二阶连续偏导数且满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(1) 用变量代换 $\begin{cases} u = x - y \\ u = x + y \end{cases}$ 将上述方程化为以 u, v 为自变量的方程;

(2) 已知 $f(x,2x) = x, f_x(x,2x) = x^2$, 求 $f(x,y)$.

例 3.7. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有一阶连续偏导. 已知 $f(x,y)=0$ 为 8 字形的曲线, 问 $f(x,y)$ 至少有几个驻点？

例 3.8. 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上具有一阶连续偏导的函数, 且满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\neq 0.$$

设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭区域. 试证在 D 中满足方程组 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ 的点至多有限个.

3.3 作业

作业 3.1. 设方程组

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3xyz \\ x+y+z=a \end{cases}$$

确定的隐函数组 $y=y(x), z=z(x)$. 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

作业 3.2. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正交矩阵, $f(y)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的二次可微函数. 记 $F(x)=f(Ax)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial y_i})^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i})^2 \quad \text{以及} \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}.$$

作业 3.3. 设函数 $z=f(x,y)$ 可微. 证明:

1. 若有 $xf_x+yf_y=0$. 证明在极坐标下函数 $z=z(\theta)$, 即只与 θ 有关.
2. 若有 $yf_x-xf_y=0$. 证明在极坐标下函数 $z=z(r)$, 即只与 r 有关.

作业 3.4. 证明 *2* 维 *Laplace* 算子 $\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 在极坐标下为:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

作业 3.5. 设 $f(x,y)$ 满足方程

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

其中 $b^2-ac=0, c\neq 0$. 若作变换 $\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y\end{cases}$. 问如何选择 α,β 才能使方程有简单的形式?

作业 3.6. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 有连续的偏导数. 证明存在连续的单射 $g:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ 使得 $f\circ g$ 为常数.

作业 3.7. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2\neq 0$. 证明变换

$$\begin{cases}u=f_x(x,y)\\ v=f_y(x,y)\\ w=-z+xf_x(x,y)+yf_y(x,y)\end{cases}$$

存在唯一的逆变换

$$\begin{cases}x=g_u(u,v)\\ y=g_v(u,v)\\ z=-w+ug_u(u,v)+vg_v(u,v)\end{cases}.$$

作业 3.8. 已知函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 算子 A 定义为

$$\mathrm{A}(f):=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(1) 求 $\mathrm{A}(f-\mathrm{A}(f))$.

(2) 求 $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=0$ 在坐标变换 $\begin{cases}u=y/x\\ v=x-y\end{cases}$ 下的方程.

4 凸函数与不等式

4.1 凸函数

定义 4.1. 设 $f(x)$ 为区间 I 上的函数. 若 $\forall x_1,x_2\in I$, $\forall\alpha\in(0,1)$ 都有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的凸函数 *(*称函数 $f(x)$ 在区间 I 上的图像是凹的*)*. 若上式中是严格小于, 则称 $f(x)$ 为区间 I 上的严格凸函数*;* 若上式中不等号反向, 则称 $f(x)$ 为区间 I 上的凹函数.

命题 4.1. 下列条件等价.
(1). $f(x)$ 为区间 I 上的凸函数.
(2). 对于 I 中任意的 $x_1 < x_2 < x_3$ 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

进一步，对于任意的 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}.$$

(3). 若函数 f 在 I 上可微, 则 $f'(x)$ 在 I 上单调递增.
(4). 若函数 f 在 I 上可微, $\forall x_0 \in I$ 都有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(5). 若函数 f 在 I 上二次可微, 则 $\forall x \in I$

$$f''(x) \geq 0.$$

例 4.1. 设 $f(x)$,$g(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数. 证明函数

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

为 (a,b) 上的凸函数.

例 4.2. 若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数, 则

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\};$$

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凹函数, 则

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

例 4.3. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的凸函数, 证明函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

例 4.4. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界凸函数, 证明函数 $f(x)$ 为常函数.

4.2 几类不等式

例 4.5 (Jensen Inequality)**.** 设 $f(x)$ 为区间 I 上的凸函数, 对于任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. 证明:

$$f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

注 4.1 (积分形式 Jensen Inequality 不等式)**.** 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上凸函数, $g(x)$ 为 $[a,b]$ 上非负函数满足 $\int_a^b g(x)\,dx = 1$. 则

$$f\Big(\int_a^b xg(x)\,dx\Big) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

例 4.6 (Generalized Arithmetic-Geometric Mean Inequality)**.** 对于 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. 证明

$$\prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k} \le \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

并且等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

例 4.7 (Young Inequality)**.** 对于 $\forall a, b > 0$, $\forall p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

并且等号成立当且仅当 $a^p = b^q$.

例 4.8 (Hölder Inequality)**.** $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, $\forall y_1, y_2, \cdots, y_n > 0$. $p, q > 1$ 为任意的常数满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 证明:

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \le \Big(\sum_{k=1}^n x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^n y_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

并且等号成立当且仅当 x_k^p, y_k^q 成比例.

例 4.9 (Minkowski Inequality)**.** $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, $\forall y_1, y_2, \cdots, y_n > 0$. $\forall p > 1$. 证明:

$$\Big(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{k=1}^n x_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^n y_k^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

并且等号成立当且仅当 x_k, y_k 成比例.

注 4.2. 对于可积函数空间 *(以区间 $[a,b]$ 上的积分为例)*, 可定义函数 $f(x)$,$g(x)$ 的内积:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 L^p 范数定义为:

$$||f||_{L^p} := \Big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

则有如下积分形式的不等式:

- *Hölder Inequality.* $|\langle f,g\rangle| \le ||f||_{L^p}\cdot ||g||_{L^q}$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p,q>1)$. 等号成立当且仅当 $|f|^p = c|g|^q$ 在 $[a,b]$ 几乎处处成立.
- *Minkowski Inequality.* $||f+g||_{L^p} \le ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$ $(p>1)$. 等号成立当且仅当 $f=cg$ 在 $[a,b]$ 几乎处处成立.

例 4.10 (Jordan Inequality)**.** 证明 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 有

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x.$$

例 4.11. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格凸函数, 且 $f(0^+)=0$. 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加.

例 4.12. 设函数 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+\alpha}$. 证明当 $\alpha\ge\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减; 当 $\alpha<\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 x 充分大时严格单调递增.

4.3 作业

作业 4.1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为凸函数, 且 $f(0)=0$. 证明对任意的正数 x_1,x_2 有

$$f(x_1+x_2)\ge f(x_1)+f(x_2).$$

作业 4.2. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上凸函数满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明 $f(x)$ 为常值函数.

作业 4.3. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上凸函数, $c\in(a,b)$. 若有 $f(a)=f(c)=f(b)$. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常值函数.

作业 4.4. 设 $f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 上非负的可微函数, 且 $f(x)$ 为凹函数. 证明: 对于任意的 $x\ge a$ 有 $f'(x)\ge 0$.

作业 4.5. 证明 $\forall x>0$ 有

$$\frac{1}{x(1+x)} > \ln^2(1+\frac{1}{x}).$$

作业 4.6 (Karamata Inequality)**.** 证明对于 $x>0$ 且 $x\ne 1$ 有

$$\frac{\ln x}{x-1}\le x^{-\frac{1}{2}}.$$

作业 4.7. 证明对于 $\forall x>0, y>0$ 有

$$x^y+y^x>1.$$

5 极值

5.1 无条件极值

设 $f(x)$ 为开区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的一个 n 元函数，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

定理 5.1 (必要条件)**.** *设 $f(x)$ 在 x^0 处偏导存在. 若 f 在 x^0 处取得极值, 则 x^0 为 $f(x)$ 的驻点, 即 $\nabla f(x^0) = \vec{0}$.*

若 x^0 为 $f(x)$ 的驻点, 则 $f(x)$ 在 x^0 处的二阶 Taylor 展开

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2}(x - x^0) \cdot \nabla^2 f(x^0) \cdot (x - x^0)^T + o(|x - x^0|^2).$$

记 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ 为矩阵 $\nabla^2 f(x^0)$ 的 n 个特征值, 则有

定理 5.2 (充分条件)**.** *若 x^0 为 $f(x)$ 的驻点, $\nabla^2 f(x^0)$ 存在, λ_i 如上. 则*

1 当 $\lambda_1\lambda_n > 0$ 时, $f(x)$ 在 x^0 处取极值. 并且当 $\lambda_1 > 0$ 时取极小值；当 $\lambda_n < 0$ 时取极大值;

2 当 $\lambda_1\lambda_n < 0$ 时, $f(x)$ 在 x^0 处不取极值;

3 当 $\lambda_1\lambda_n = 0$ 时, 无法直接由二阶导数判断 x^0 是否为极值.(如 $\lambda_1 = 0$, 则应看函数在对应的特征方向 $\vec{V_1}$ 上是否为极值, 此时是一元函数, 用高阶导数判断即可).

例 5.1. *求函数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的驻点，并判断其是否为极值点。*

注 5.1 (最值的方法)**.**

1. 求出所求区域内部的可能的极值点 (驻点及导数不存在的点);

2. 求出函数在区域边界上可能的极值点 (条件极值). 如果是无界区域, 则应考虑函数在无穷边界上函数值的性质 (如比较在无穷的边界上的函数值与内部函数值大小);

3. 比较 1 和 2 中所求点的函数值大小.

注 5.2. *多元函数最值也可转化成对各个变量累次求最值, 如:*

$$\max_{(x,y)} f(x,y) = \max_x \max_y f(x,y) = \max_y \max_x f(x,y)$$

例 5.2. 当 $x \geq 1, y \geq 0$ 时, 证明:

$$xy \leq x \ln x - x + e^y.$$

例 5.3. 求由方程 $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

5.2 条件极值

目标函数:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

约束条件:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

其中 $1 \leq i \leq m$ $(m < n)$.

注 5.3 (Lagrange 乘子法)**.**

1. *根据目标函数以及约束条件构造 Lagrange 函数 ($n + m$ 元):*

$$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) := f(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \cdots, x_n)$$

2. *求 Lagrange 函数的驻点, 即原问题可能的极值点;*

3. *利用定理 1.2 中的充分条件判断第 2 步中的驻点是否是极值点 (方法: 需要将 m 个约束条件看成隐函数组, 从而得到 $x_i = x_i(x_{m+1}, \cdots, x_n)$, $1 \leq i \leq m$, 带入目标函数后, 得到 $n - m$ 元的无条件极值, 再根据定理 1.2 的充分条件判断是否是极值点), 或者比较 2 中所求点的函数值, 求出目标函数的最值.*

例 5.4. *用 Lagrange 乘子法求解例 5.3.*

例 5.5. 求函数 $z = x^2 + \sqrt{2}xy + 2y^2$ 在 $D : x^2 + 2y^2 \leq 4$ 上的最大值与最小值.

例 5.6. 求椭球面 $\frac{x^2}{3} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ 被过原点平面 $2x + y + z = 0$ 所截椭圆的面积.

5.3 极值与不等式

例 5.7. 在 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $x_i > 0$ $(1 \le i \le n)$ 条件下求函数 $u = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ 的最大值. 其中 α_i 为正常数.

例 5.8. 设函数 $F(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的偏导数,$F(x,y)=0$ 是不自相交的封闭曲线 Γ. 设 $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$ 在 Γ 上处处不成立. 证明: 若 AB 是 Γ 的极大弦, 则 Γ 在 A, B 处的两条切线平行.

例 5.9. 证明对于任何正数 a, b, c 都有

$$ab^2c^3 \le 108\Big(\frac{a+b+c}{6}\Big)^6.$$

例 5.10 (Hadamard Inequality)**.** 设 $A := (a_{ij})$ 为 n 阶可逆方阵. 证明:

$$(\det A)^2 \le \prod_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2),$$

并且等号成立当且仅当 AA^T 为对角阵.

5.4 作业

作业 5.1. 求函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在 $D : |x| + |y| \le 1$ 上的最值.

作业 5.2. 过椭圆 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 上任一点作此椭圆的切线, 求切线与两坐标轴所围成三角形面积的最小值.

作业 5.3. 求曲面 $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$ 与平面 $x + y - z = 0$ 的交线在 xOy 面上的投影所围区域的面积.

作业 5.4. 用条件极值的方法证明 *Hölder* 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

其中 $a_k, b_k > 0$, $p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

作业 5.5. 设函数 $F(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一阶连续偏导数,S 是由 $F(x,y,z) = 0$ 确定的不自交的光滑封闭曲面. 设 $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ 在 S 上处处成立. 若 A, B 是 S 上使得 S 上任两点距离的最大值点. 证明 S 在 A, B 处的两个切平面平行, 且均垂直于 A 和 B 的连线.