2 习题

习题 2.1. 求旋转曲面

$$\mathbf{S}:\mathbf{r}(u,v)=\Big(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\Big)$$

在自然标架下的运动方程.

解. 由旋转曲面方程直接计算有曲面的第一、第二基本形式为

$$\mathbf{I}=f^2du^2+\big((f')^2+(g')^2\big)dv^2$$

以及

$$\mathbf{II}=(-fg')du^2+\frac{f''g'-f'g''}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}dv^2,$$

这里我们用 f' 及 g' 表示函数 $f(v)$, $g(v)$ 对 v 求导.

记 u 为 1 号变量, v 为 2 变量, 则 $\mathbf{S}$ 的 Christoffel 记号为

$$\Gamma_{11}^1=0,\quad \Gamma_{11}^2=-\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2},\quad \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=0,$$
$$\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\frac{f'}{f},\quad \Gamma_{22}^1=0,\quad \Gamma_{22}^2=\frac{f''f+g''g'}{(f')^2+(g')^2}.$$

因此自然标架 $\{\mathbf{r};\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n}\}$ 的运动方程为

$$\begin{cases}\mathbf{r}_{11}=-\frac{ff'}{(f')^2+(g')^2}\mathbf{r}_2-\frac{fg'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\mathbf{n},\\ \mathbf{r}_{12}=\frac{f'}{f}\mathbf{r}_1,\\ \mathbf{r}_{22}=\frac{f''f+g''g'}{(f')^2+(g')^2}\mathbf{r}_2+\frac{f''g'-f'g''}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\mathbf{n},\\ \mathbf{n}_1=\frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\mathbf{r}_1,\\ \mathbf{n}_2=-\frac{f''g'-f'g''}{((f')^2+(g')^2)^{3/2}}\mathbf{r}_2.\end{cases}$$

□

习题 2.2. 设曲面 $\mathbf{S}$ 的第一基本形式为

$$\mathbf{I}=du^2+2\cos\big(\theta(u,v)\big)dudv+dv^2,$$

其中 $\theta(u,v)$ 为光滑函数且 $\theta(u,v)\in(0,\pi)$. 求 $\mathbf{S}$ 的 *Gauss* 曲率.

解: 由曲面的第一基本形式直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^1=\theta_1\cot\theta,\quad \Gamma_{11}^2=-\frac{\theta_1}{\sin\theta},\quad \Gamma_{22}^1=-\frac{\theta_2}{\sin\theta},\\
&\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=0,\quad \Gamma_{22}^2=\theta_2\cot\theta,
\end{aligned}
$$

这里我们记 u 和 v 分别为 1 号变量和 2 号变量. 进一步我们有

$$
R_{1221}=g_{1k}(\partial_1\Gamma_{22}^k-\partial_2\Gamma_{12}^k+\Gamma_{22}^j\Gamma_{1j}^k-\Gamma_{12}^j\Gamma_{2j}^k)=-\theta_{12}\sin\theta,
$$

所以曲面 $\mathbf{S}$ 的 Gauss 曲率为

$$
K=\frac{R_{1221}}{g}=-\frac{\theta_{12}}{\sin\theta}=-\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}.
$$

□

习题 2.3. *已知两个微分式*

$$
\varphi=E(u,v)du^2+G(u,v)dv^2,\qquad \phi=\lambda(u,v)\varphi.
$$

其中 E,G,λ 为光滑函数且 $E,G>0$.

(1) E,G,λ 满足什么条件时, φ,ϕ 可以作为曲面的第一、二基本形式?

(2) 若 $E=G$ 并且 φ,ϕ 可以作为曲面的第一、二基本形式, 求 E,G,λ.

解. (1) 记 u 和 v 分别为 1 号变量和 2 号变量, 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^1=\frac{E_1}{2E},\quad \Gamma_{11}^2=-\frac{E_2}{2G},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{G_2}{2G},\\
&\Gamma_{22}^1=-\frac{G_1}{2E},\quad \Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\frac{E_2}{2E},\quad \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{G_1}{2G},
\end{aligned}
$$

进而

$$
\begin{aligned}
R_{1221}=&E(\partial_1\Gamma_{22}^1-\partial_2\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^j\Gamma_{1j}^1-\Gamma_{12}^j\Gamma_{2j}^1)\\
=&-\frac{1}{2}\Big(G_{11}+E_{22}-\frac{1}{2}\frac{G_1E_1}{E}-\frac{1}{2}\frac{E_2G_2}{G}-\frac{1}{2}\frac{E_2^2}{E}-\frac{1}{2}\frac{G_1^2}{G}\Big).
\end{aligned}
$$

所以曲面的 Gauss 方程为

$$
\lambda^2(u,v)=-\frac{G_{11}+E_{22}-\frac{1}{2}\frac{G_1E_1}{E}-\frac{1}{2}\frac{E_2G_2}{G}-\frac{1}{2}\frac{E_2^2}{E}-\frac{1}{2}\frac{G_1^2}{G}}{2EG},\qquad (2.1)
$$

Codazzi 方程为

$$\begin{cases} \partial_1(\lambda G) = \lambda\partial_1 G, \\ \partial_2(\lambda E) = \lambda\partial_2 E. \end{cases} \tag{2.2}$$

因此由曲面的存在唯一性定理有当方程 (2.1) 以及方程组 (2.2) 成立时, 存在曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 使得其第一、二基本形式分别为 φ 和 ϕ.

(2) 当 $E = G$ 时, 由方程 (2.2) 知 $\nabla(\lambda E) = \lambda\nabla E$, 故而 $\lambda = \mathrm{const} := \lambda_0$. 由方程 (2.1) 有

$$\lambda_0^2 = -\frac{\Delta \log E}{2E},$$

因此

$$E(u,v) = (u^2 + v^2 + \frac{\lambda_0^2}{4})^{-2}.$$

□

参考文献

[dC16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. Revised & updated second edition of [MR0394451].