《期权定价的数学模型和方法》期末考试

2021-2022学年第二学期　年级-: ____________

姓名: ____________　学号: ____________　成绩: ____________

所有问题中市场假设无套利, 源生资产价格过程记为S_t, 美式看涨$C_t(t,S_t;K,T)$, 美式看跌$P_t(t,S_t;K,T)$, 欧式看涨$c_t(t,S_t;K,T)$, 欧式看跌$p_t(t,S_t;K,T)$, 无风险利率$r>0$, 红利率$q>0$, W_t为布朗运动。

1. 试证明, 在敲定价格$K_1>K_2$的情况下

   (a) 对于任意$0\le\lambda\le 1$, $K_\lambda=\lambda K_1+(1-\lambda)K_2$, 有

   $$P_t(K_\lambda)\le\lambda P_t(K_1)+(1-\lambda)P_t(K_2),\ t\le\tau_1\le T,\ a.s.\text{（10 分）}$$

   (b) $0<P_t(K_1)-P_t(K_2)<K_1-K_2,\ t\le\tau_1\le T,\ a.s.$（10 分）

2. 市场上源生资产S_t以二叉树模型运行，考虑单时段问题，时间间隔为Δt. 基本看涨证券$\bar{c}_t$收益为市场上涨时价格为1, 市场下降时价格为0；基本看跌证券$\bar{p}_t$收益反过来。

   (a) 试用Δ-对冲来定价基本看跌证券$\bar{p}_t$.（8分）

   (b) 试用$\bar{c}_t$和$\bar{p}_t$ 复制源生资产S_t.（7分）

3. 若$S_i(t)(i=1,2.\cdots,n)$满足

   $$dS_i(t)/S_i=\mu_i dt+\sigma_i dW_i(t),$$

   其中$W_i(t)$是标准Brown运动且满足$Cov(dW_i,dW_j)=\rho_{ij}dt,\ (i\ne j)$. 试建立Itô公式，即若$V=V(S_1,\cdots,S_n)$, 求$dV$.(15分)

4. 标的资产在风险中性测度下以几何-布朗运动运行$\frac{dS_t}{S_t}=(r-q)dt+\sigma dW_t$，考虑一个具有双障碍的极端期权，障碍$K_1,K_2$满足$K_1<K<K_2$，标的资产上升超出$K_2$ 时敲入一个以K为敲定价格的看涨期权，下降超出K_1时敲入一个以K为敲定价格的看跌期权，如果标的资产一直在两障碍间运行，到期收益为0。试分别建立这个期权定价的概率模型和偏微分方程模型。（15 分）

5. 给出带红利的美式看涨封顶期权（即$S>L(>K)$时必须执行）的数学模型，并设计一个差分离散格式。(15分)

6. 一个两资产期权的BS模型为:

   $$V_t+\frac{1}{2}(\sigma_1^2V_{xx}+\rho\sigma_1\sigma_2V_{xy}+\sigma_2^2V_{yy})+(r-\sigma_1^2/2)V_x+(r-\sigma_2^2/2)V_y-rV=0,(x,y)\in R^2,t\le T,$$
   $$V(x,y,T)=max(e^x,e^y).$$

   试对区域进行截断，给出适当的人工边界条件，建立此方程的显式差分格式，并讨论格式保正性需要的条件。(20分)