第五次作业 6.2, 6.5, 6.7, 6.8

6.2 设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$是来自二点分布的一个子样,试求成功概率$p$ 的矩法估计量。

解. 母体ξ的分布律为:

ξ	0	1
P	$1-p$	p

由于$E\xi = p$,令$E\xi = p = \overline{\xi}$, 得$p$的矩法估计量是

$$\hat{p} = \overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

□

6.5 对容量为n 的子样,求密度函数

$$f(x;a) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}(a-x), & 0 < x < a \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

中参数a的矩法估计量.

解.

$$E\xi = \int_0^a \frac{2}{a^2}(a-x)xdx = \frac{a}{3}$$

令$E\xi = \overline{\xi}$, 得

$$\frac{a}{3} = \bar{\xi}$$

所以a的矩法估计量为$\hat{a} = 3\bar{\xi}$. □

6.7 用极大似然估计几何分布

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \cdots$$

中的未知参数p.

解. 似然函数及其对数分别为

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1} = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n},$$

和

$$\ln L(p) = n\ln p + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)\ln(1-p),$$

$$x_i = 1, 2, \cdots, i = 1, 2, \cdots, n.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p} = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} = 0,$$

解方程，得

$$\hat{p} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

又

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2}\right|_{p=\hat{p}} = -\frac{n\bar{x}^3}{\bar{x}-1} < 0.$$

故p的极大似然估计值为

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

其相应的极大似然估计量为

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{\xi}}.$$

□

6.8　设随机变量ξ的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, \quad -\infty < x < \infty, \sigma > 0$$

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是ξ的容量为n的子样。试求σ的极大似然估计。

解. 似然函数及其对数分别为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}} = (2\sigma)^{-n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}|x_i|/\sigma\right\}$$

和

$$\ln L(\sigma) = -n\ln 2 - n\ln\sigma - \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2} = 0,$$

解方程，得

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

又

$$\left.\frac{d^2 \ln L(\sigma)}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=\hat{\sigma}} = -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} < 0.$$

故σ的极大似然估计值为

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

其相应的极大似然估计量

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|.$$

□