2014年实变函数 期末A卷

熊雄

1 判断题（每题3分，共30分）

1.1 存在定义在零测集上的不可测函数。

错误，见课本P63 eg4.1.2，定义在零测集上的函数一定是可测函数。

1.2 可测函数列的极限（如果存在）一定是可测函数。

正确，课本P66 推论4.1.8，若可测函数列$\{f_k(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，则$f(x)$为E上的可测函数。

1.3 可测函数可以表示为简单可测函数列一致极限。

错误，课本P67 Thm4.1.9，$f(x)$还需满足有界。

1.4 若在集合E上，f_n依测度收敛于f，则f_n几乎处处收敛于f。

错误，课本P71 Thm4.3.3(Riesz Thm)。

1.5 f_n在E上近一致收敛于f，则f_n几乎处处收敛于f。

错误，无论是Egoroff Thm还是Egoroff Thm的逆定理均需要满足大前提：$f(x), f_k(x)$是E上几乎处处有限的可测函数。Egoroff Thm还需加上$m(E) < \infty$。

1.6 有界变差函数可能不连续，但连续函数一定是有界变差函数。

1.7 连续的有界变差函数一定是绝对连续函数。

错误，课本P133 注6.5。绝对连续函数一定是连续函数，绝对连续函数一定是有界变差函数，连续的有界变差函数不一定是绝对连续函数。

1.8 若$f(x)$在$[a,b]$上Lebesgue可积，则$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)dt \ (a < x < b)$在$[a,b]$上绝对连续。

正确，课本P127 Lemma6.4.3。

1.9 f是在可测集E上的可测函数，则f在E上Lebesgue可积等价于$|f|$在E上Lebesgue可积。

正确，课本P87 Prop5.3.1。

1.10 若$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，则$f(x)$在$[a,b]$上的Lebesgue积分等于$f(x)$在$[a,b]$上Riemann积分。

正确，课本P94 Thm5.6.2。

2 叙述Fatou引理和Tonelli定理（12分）

设$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列，则$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx \le \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$

设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$上的非负可测函数，则:

(A) 对几乎处处的$x\in\mathbb{R}^p$，$f(x,y)$作为y的函数是$\mathbb{R}^q$上的非负可测函数;

(B) $F(x)=\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy$是$\mathbb{R}^p$上的非负可测函数;

(C) $\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}_q} f(x,y)dy\right)dx.$

3 $f(x)$是可测集E上的实值函数，若对任意的实数t，$\{x|f(x)=t\}$是可测集，则$f(x)$是E上的可测函数吗？并论证你的结论（10分）

不一定. 例如，在$\mathbb{R}^+$中取一个不可测集E，令$f(x)=\begin{cases} x,\ x\in E; \\ -x,\ x\in\mathbb{R}^+\setminus E. \end{cases}$

此时$\forall t\in\mathbb{R}$, $\{x\in\mathbb{R}^+|f(x)=t\}$为可测集满足题目条件。当$t>0$时，$\{x\in\mathbb{R}^+|f(x)>t\}$包含于$E$，即为不可测集，因此$f(x)$不是$E$上的可测函数。

4　若在E上有$\{f_k\}$几乎处处收敛于f，$\{f_k\}$依测度收敛于g。则$f=g$在E上几乎处处成立（10分）

由于$\{f_k\}$依测度收敛于g，由Riezs Thm，存在n_k，使得$\{f_{n_k}\}$几乎处处收敛于g。

又由于$\{f_k\}$几乎处处收敛于f，故$\{f_{n_k}\}$几乎处处收敛于f，从而$f=g$几乎处处成立。

5　计算$\int_{[0,1]} f(x)dx$，其中$f(x)=\begin{cases} e^{\sin x}, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}, \\ \sqrt{x}, & x\in\ [0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$（10分）

计算可得：$\int_0^1 f(x)dx=(L)\int_0^1\sqrt{x}dx=(R)\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$

这里第一个等号是由于$m([0,1]\cap\mathbb{Q})=0$，而(L)积分与被积函数在零测集上的取值无关。

6　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos nxdx=0$。（10分）

设$f_n(x)=\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos nx$，则$f_n(x)\to 0, n\to\infty, 0\le x<+\infty.$

因为我们有$(x\ge 0)$：$\frac{\ln(x+n)}{n}<\frac{x+n}{n}\le 1+x$，故

$|f_n(x)|<F(x):=\begin{cases} 2xe^{-x}, x\ge 1 \\ 2e^{-x}, 0<x<1 \end{cases}$，所以由控制收敛定理知：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos nxdx=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x}\cos nxdx=0$$

7　证明若$f(x)$为上$[a,b]$的有界变差函数，则$|f(x)|$为$[a,b]$上的有界变差函数，反之成立吗？为什么？（10分）

一方面，对于$[a,b]$的任一分划：$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$，易见

$\sum_{i=1}^n ||f(x_i)|-|f(x_{i-1})||\le\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le T_a^b(f)<+\infty$. 故$T_a^b(|f|)\le T_a^b(f)<+\infty$，即$|f(x)|$为$[a,b]$上的有界变差函数.

另一方面，举反例如下：设$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[a,b]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q});\\ 1, & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}.\end{cases}$，则$|f(x)|=1$，当然是$[a,b]$的有界变差函数，但$f(x)$显然不是$[a,b]$上的有界变差函数.

8　$f(x)$在$[0,1]$上Lebesgue可积，且对任意的$c(0<c<1)$有$\displaystyle\int_{(0,c)}f(x)dx=0$. 证明：$f=0$在$[0,1]$上几乎处处成立。（8分）

令$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. 由假设条件知$F(x)\equiv 0$，故$F'(x)\equiv 0$. 由Thm6.3.4知：在$[0,1]$上几乎处处有$F'(x)=f(x)$. 即$f(x)=0$几乎处处成立.