第四部分　　积分学

第三讲　曲线面积分的基本计算

基本内容：第一、二型曲线积分、两类曲线积分的关系、Green 公式、积分与路径无关、第一、二型曲面积分、两类曲面积分的关系、Gauss 公式、Stokes 公式.

§3.1 曲线积分与 Green 公式

一、曲线积分的性质和计算

①第一型曲线积分
$$\begin{cases} L:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t),\ [a,b]\to\mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}):\ L\to\mathbb{R}. \\ \displaystyle\int_L f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s=\int_a^b f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}'|\mathrm{d}t. \\ \mathrm{d}s=|\boldsymbol{x}'|\mathrm{d}t\equiv\sqrt{|x_1'(t)|^2+\cdots+|x_n'(t)|^2}\mathrm{d}t,\ (\text{弧长微分}) \\ \text{物理意义: 曲线的质量.} \end{cases}$$

②第二型曲线积分
$$\begin{cases} L:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t),\ [a,b]\to\mathbb{R}^n;\ \text{方向: } t \text{ 从 } A\text{到 } B \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x})):\ L\to\mathbb{R}^n. \\ \displaystyle\int_L \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L f_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x+\cdots+f_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n \\ \displaystyle\int_L f_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i=\int_A^B f_i(\boldsymbol{x})x_i'(t)\mathrm{d}t,\ i=1,\cdots,n. \\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}\boldsymbol{x}\equiv(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n) \\ \text{物理意义: 力 } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \text{ 沿 } L \text{ 所作的功.} \end{cases}$$

③两类曲线积分的关系
$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s,\ \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) \text{ 是 } L \text{ 上点 } \boldsymbol{x} \text{ 的单位切向量, 其方向与} \\ L \text{ 的方向一致, 三维时可用方向余弦}\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma). \\ \displaystyle\int\limits_L \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int\limits_L \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s \end{cases}$$

计算曲线积分关键是要给曲线选取适当的参数方程, 对于有向曲线还要确定参数的起点和终点.

二、Green 公式的应用

$$\left\{\begin{array}{l} D\subset\mathbb{R}^2 \text{ 是有界闭区域, } \partial D \text{ 由光滑曲线或逐段光滑曲线组成, 取正向,} \\ P(x,y),\ Q(x,y):\ D\to\mathbb{R},\ \text{在 } D \text{ 内有关于自变量 } x \text{ 和 } y \text{ 的连续偏导数,} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} \displaystyle\iint\limits_D\left(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}(P,Q)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\partial D}(Q,-P)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s, \\ \text{或, } \displaystyle\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}Pn_y\mathrm{d}s,\ \ \iint\limits_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}Qn_x\mathrm{d}s,\ (\text{分部积分公式}) \\ \quad\text{其中 } \boldsymbol{n}=(n_x,n_y)\equiv(\cos(\boldsymbol{n},x),\ \cos(\boldsymbol{n},y)) \text{ 是 } \partial D \text{ 相对于 } D \text{ 的单位外法向量,} \\ \text{单位切向量 } \boldsymbol{\tau}=(\cos(\boldsymbol{\tau},x),\ \cos(\boldsymbol{\tau},y))=(-\cos(\boldsymbol{n},y),\ \cos(\boldsymbol{n},x)). \end{cases}$$

当 P、Q 在 D 中有不满足条件的点（称为奇点）时, 为利用 Green 公式, 常采用“挖洞”的方法, 即: 在挖去奇点的小邻域的区域上应用 Green 公式, 然后令这些小领域收缩到奇点.

三、积分与路径无关

设 D 是平面上的单连通区域（即在 D 中无洞）, $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 为定义在 D 上的函数且都在 D 内有连续的偏导数, 则下列结论等价:

① 对 D 内的任意一条分段光滑闭曲线 C 有:$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$.

② 对 D 内的任一分段光滑曲线 L, 积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}x$ 仅与 L 的起点和终点有关, 而与所沿的路径无关.

③ 存在函数 $\varphi(x,y)$, 使得在 D 内处处成立 $d\varphi(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ (φ 称为 $P\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}y$ 的原函数).

④ 在 D 内处处成立 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

当 D 不是单连通时, 下述关系仍然成立: ① $\Longleftrightarrow$ ② $\Longleftrightarrow$ ③ $\Longrightarrow$ ④,

③ $\Longrightarrow \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\varphi(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}=\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_0,y_0)$,

(这里 (x_0,y_0)和 (x_1,y_1) 分别是 L 的起点和终点.)

④ $\Longrightarrow$ 设 C_1、C_2 是 D 中两条分段光滑封闭有向曲线, 其方向均相对于所包围的区域 D_1、D_2 为正向. 如果D_1、D_2 都只含有D 的同一个“洞” H, 则, $\displaystyle\int_{C_1} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{C_2} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 该积分值称为洞 H 的循环常数.

$\{D$ 的所有洞的循环常数均等于 $0\}\Longrightarrow$ ②.

当 D 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面单连通区域时, 类似的结论也成立. （学生自己复习）

例1 计算曲线积分 $\int_\Gamma xy\,\mathrm{d}s$, 其中, Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线的圆周.

例2 求曲线 $\mathit{\Gamma}$:

$$\begin{cases}(x-y)^2=a(x+y),\\ x^2-y^2=\dfrac{9}{8}z^2\end{cases}$$

从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长, 其中 $a>0$, $x_0>0$.

例3 计算曲线积分 $I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$, 其中 L 是有向曲线：

$$L:\quad\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0.\\ (a,0,0)\to(0,0,c)\ (a>0,b>0,c>0 \text{ 为常数}).\end{cases}$$

例4 设 P,Q,R 在 L 上连续, L 为光滑弧段, 弧长为 l. 证明: $\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\right|\leqslant Ml$, 其中 $M=\max\limits_{(x,y,z)\in L}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$.

例5 证明：若 L 为平面上的封闭曲线, $\boldsymbol{l}$ 为任意方向向量, 则 $\oint_L \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s=0$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 是 L 上的单位外法向量.

例6 计算曲线积分 $I=\oint_C \dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$, 其中 C 为以 $(1,0)$ 为圆心 R 为半径的圆周 $(R\neq 1)$, 取逆时针方向.

例7 计算曲线积分 $I=\oint_C \dfrac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为逐段光滑的简单闭曲线, $\boldsymbol{r}=(x,y), r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\boldsymbol{n}$ 是 C 上的单位外法向量.

例8 计算曲线积分 $I=\oint_C \dfrac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\big[(x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\big]$, 其中 $C:x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

例9 计算曲线积分 $I=\int_{AmB}(\varphi(y)e^x-ky)\,\mathrm{d}x+(\varphi'(y)e^x-k)\,\mathrm{d}y$, 其中 $\varphi(x)$ 和 $\varphi'(y)$ 连续, AmB 为连接 $A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$ 的任何路径, 但它与直线段 $\overline{AB}$ 围成的图形 $AmBA$ 的面积为定值 S.

例10 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在全平面上有连续偏导数, 而且对任意的点 (x_0,y_0) 为中心, 以任意正数 r 为半径的上半园 $C:x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta\ (0\leqslant\theta<\pi)$ 恒有

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$$

求证：$P(x,y)\equiv 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}\equiv 0$.

例11 计算曲线积分 $I=\int_L x\ln(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是被积函数的定义区域内从点 $(2,0)$ 至点 $(0,2)$ 的逐段光滑曲线.

例12 计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{(1+\sqrt{x^2+y^2})(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$, 其中 L 为不通过原点, 从点 $A(1,0)$ 至点 $B(0,2)$ 的分段光滑曲线.

§3.2 曲面积分与 Gauss 公式

（学生自己复习 Stokes 公式）

一、曲面积分的性质和计算

①第一型曲面积分
$$\begin{cases} S:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v),\ (u,v)\in D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbb{R}^3;\ f(\boldsymbol{x}):\ S\to\mathbb{R}.\\ \iint\limits_S f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\\ \mathrm{d}S=|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\equiv\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\ (\text{面积微分})\\ \quad\text{其中},\ E\equiv|\boldsymbol{x}_u|^2,\ G\equiv|\boldsymbol{x}_v|^2,\ F\equiv\boldsymbol{x}_u\cdot\boldsymbol{x}_v.\\ \text{物理意义: 曲面的质量.}\end{cases}$$

②第二型曲面积分

$$
\begin{cases}
S:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v),\ (u,v)\in D\subset \mathbf{R}^2\to\mathbb{R}^3;\ \text{方向: 取定其一侧.}\\
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),f_3(\boldsymbol{x})):\ S\to\mathbb{R}^3.\\
\displaystyle\iint\limits_S \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\equiv\iint\limits_S f_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+f_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+f_3(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\displaystyle\qquad\qquad=\pm\iint\limits_D \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\\
\mathrm{d}\boldsymbol{S}\equiv(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y)=\pm(\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\\
\qquad\text{取}\pm\text{号使 }\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\text{与 }S\text{ 的定向 }\boldsymbol{n}\text{ 一致.}\\
\text{特别: }\displaystyle\iint\limits_S f_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_D f_1[\boldsymbol{x}(u,v)]\left|\tfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
\displaystyle\quad\iint\limits_S f_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_D f_2[\boldsymbol{x}(u,v)]\left|\tfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
\displaystyle\quad\iint\limits_S f_3(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_D f_3[\boldsymbol{x}(u,v)]\left|\tfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
\text{其中“}\pm\text{”可由下法定出: 在}\mathbb{R}^3\text{中按常规方式画出}S\text{, 则}\\
\qquad\text{当 }S\text{ 为上侧、 右侧和前侧时取“}+\text{”;}\\
\qquad\text{当 }S\text{ 为下侧、左侧和后侧时取“}-\text{”.}\\
\text{物理意义: 单位时间内流速为 }\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\text{ 的流体沿曲面法向量方向}\\
\qquad\qquad\text{穿过曲面到 }S\text{ 这一侧的流量.}
\end{cases}
$$

③两类曲面积分的关系

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S,\ \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\text{ 是 }S\text{ 上点 }\boldsymbol{x}\text{ 的单位法向量指向 }S\text{ 给定一侧;}\\
\boldsymbol{n}=\pm\dfrac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v|}\\
\displaystyle\iint\limits_S \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_S \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S\\
\text{或 }\displaystyle\iint\limits_S P(\boldsymbol{x})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(\boldsymbol{x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S(Pn_x+Qn_y+Rn_z)\mathrm{d}S.
\end{cases}
$$

二、Gauss公式的应用

$$
\left\{
\begin{array}{l}
V\subset\mathbb{R}^3\text{ 是有界闭区域, }\partial V\text{ 由光滑曲面或逐片光滑曲面组成, 取外侧方向,}\\
P(x,y,z),\ Q(x,y,z)\ R(x,y,z):\ V\to\mathbb{R},\text{ 在 }V\text{ 内有关于各变量的连续偏导数,}
\end{array}
\right\}
$$

$$
\Longrightarrow
\begin{cases}
\displaystyle\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
\displaystyle=\iint\limits_{\partial V}(P,Q,R)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\partial V}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\\
\text{或, }\displaystyle\iiint\limits_V\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial V}Pn_x\mathrm{d}S,\ \ \iiint\limits_V\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial V}Qn_y\mathrm{d}S,\\
\displaystyle\quad\iiint\limits_V\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial V}Rn_z\mathrm{d}S\ \ \text{(分部积分公式);}\\
\quad\text{其中 }\boldsymbol{n}=(n_x,n_y,n_z)\equiv(\cos(\boldsymbol{n},x),\ \cos(\boldsymbol{n},y),\ \cos(\boldsymbol{n},z))\\
\quad\text{是 }\partial V\text{ 相对于 }V\text{ 的单位外法向量.}
\end{cases}
$$

例1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

例2 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$, 其中 Σ 是以原点为心 R 为半径的球面 $(R\neq a)$.

例3 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 介于 $z=0, z=1$ 两平面之间的部分.

例4 计算曲面积分 $F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, 其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & \text{当 } x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

例5 设 $f(x)$ 连续, 证明 Poisson 公式：

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f(z\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}z.$$

例6 计算曲面积分 $\iint\limits_{S}$ [illegible] $\mathrm{d}y\mathrm{d}z+$ [illegible] $\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$, 定向为上侧.

例7 计算曲面积分 $\iint\limits_{S^+} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-a)yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S^+ 为曲面

$$z-c=\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$$

的上侧.

例8 计算曲面积分 $\iint\limits_{S} yz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $4-y=x^2+z^2$ 上 $y\geqslant 0$ 的部分取右侧.

例9 计算曲面积分

$$\iint\limits_{S^+}\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

其中 S^+ 为曲面 $1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{27}+\dfrac{(y-1)^2}{16}$ $(z\geqslant 0)$ 的上侧.

例10 试证：若 S 为封闭的光滑曲面, $\boldsymbol{l}$ 为任意方向向量, 则 $\oiint\limits_{S}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\,\mathrm{d}S=0$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法线向量.

例11 计算 Gauss 曲面积分

$$I = \oiint\limits_{S} \frac{\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})}{r^2}\, \mathrm{d}S,$$

其中 S 为光滑封闭曲面，原点不在 S 上，$\boldsymbol{r} = (x, y, z), r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 是动点至原点的距离，$\boldsymbol{n}$ 是动点处外法线方向.

例12 设 V 为三维空间的区域，其内任何封闭曲面都可不通过 V 外的点连续收缩至一点. 又设函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 V 上有连续偏导数. S 表示 V 内任一不自交的光滑封闭曲面. $\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法向量. 试证明：任意 S 恒有

$$I = \oiint\limits_{S} [P\cos(\boldsymbol{n}, x) + Q\cos(\boldsymbol{n}, y) + R\cos(\boldsymbol{n}, z)]\, \mathrm{d}S = 0$$

的充要条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$ 在 V 中处处成立.

§3.3 场论初步

一、三类重要的场

梯度场：由 $\mathbb{R}^3$ 中区域 V 上的数量函数 $u(x, y, z)$ 可以定义梯度

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

由梯度给出的向量场，称为梯度场.

散度场：由 $\mathbb{R}^3$ 中区域 V 上的向量函数 $\boldsymbol{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 可以定义散度

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

相应地，由散度给出的数量场称为散度场.

旋度场：由 $\mathbb{R}^3$ 中区域 V 上的向量函数 $\boldsymbol{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 可以定义旋度

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{A} &= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \\
&= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

相应地，由旋度给出的向量场称为旋度场.

梯度、散度、旋度的 Hamilton 算符表示： 引入 Hamilton 算符

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

这是一个向量算符，它本身没有实际意义，只有作用在它后面的量（数量或向量）上，才有实际意义. 它的运算遵从向量的运算法则.

利用 Hamilton 算符，梯度、散度、旋度的定义可以改写为

$$\operatorname{grad} u = \nabla u,$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

梯度、散度、旋度的基本运算公式同学自己复习，这里特别指出一种运算: 若 $u(x, y, z)$ 是一数量函数，则

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Hamilton 算符 ∇ 的内积 $\nabla \cdot \nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为 Laplace 算符，记为 Δ, 于是有

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u.$$

二、借助场论符号表示积分公式

利用场论符号，Gauss 公式，Stokes 公式可以写的非常简单.

设 $\mathbb{R}^3$ 上有界闭区域 V 的边界 ∂V 由光滑曲面或逐片光滑曲面组成, 取外侧方向. 记$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 ∂V 的单位外法向量, $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$, $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$, 则前面叙述的 **Gauss 公式**

$$\iiint\limits_V \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial V} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可以写成

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

这个公式有时称为散度定理，它包含了二维空间上的 Green 公式，同时也非常容易推广到 n 维空间的情形. 上等式中的积分 $\iint\limits_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ 的物理意义表示为向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过封闭曲面 ∂V 上的流量.

若 $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ 在 $V + \partial V$ 有连续的二阶偏导数，将 $\boldsymbol{A} = \nabla u$ 和 $\boldsymbol{A} = v\nabla u$ 分别代入到上式，并注意到 $\nabla u \cdot \boldsymbol{n} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ (u 沿曲面 ∂V 的外法向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数)，可得

$$\iiint\limits_V \Delta u\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial V} \nabla u \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S,$$

$$\iiint\limits_V v\Delta u\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla v \cdot \nabla u\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S, \qquad \textbf{(Green 第一公式)}$$

这里 $\nabla v \cdot \nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z}$.

交换 Green 第一公式中的 u, v 后得到的等式与 Green 第一公式相减可得，

$$\iiint\limits_V (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial V} (v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}})\,\mathrm{d}S. \qquad \textbf{(Green 第二公式)}$$

设 $\mathbb{R}^3$ 上光滑（或分片光滑）曲面 Σ 的边界 $\partial\Sigma$ 是有限条逐段光滑的封闭曲线组成，函数 P, Q, R 在 Σ 及其边界 $\partial\sigma$ 上连续且有连续的偏导数，则 **Stokes 公式**描述为

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 的侧与 $\partial\Sigma$ 的方向按右手法则.

记 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, 那么 Stokes 可以写成

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint\limits_{\Sigma}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

三、例题

例1 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$, 其中 $\boldsymbol{F} = (x-z, x^3-yz, -3xy^2)$, Σ 为半球面 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 上侧的单位向量.

例2 设 V 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域，其边界 ∂V 为光滑曲面，证明：

$$\iiint\limits_{V}\frac{\mathrm{d}V}{r} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\nabla r\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量.

例3 设 $f(x,y)$ 是 $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le 1\}$ 上的二阶连续函数，满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2y^2$ $(\Delta f = x^2y^2)$. 计算

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

第三讲练习题

1. 计算曲线积分 $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为由曲线 $r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 所界的凸围线.

2. 计算曲线积分 $\int_C |y|\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为双纽线$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

3. 求 $I = \int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2, \\ x^2+y^2 = ax \end{cases}$ 上 $z \geqslant 0$ 的部分, 这里 $a > 0$,且从 x 轴正向看 Γ 是逆时针方向.

4. 应用 Green 公式求下列曲线积分：

   (1) $I = \oint_C \ln\frac{2+y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x(y+1)}{2+y}\,\mathrm{d}y$, C 为由 $x = \pm 1, y = \pm 1$ 围成的正方形，取正向.

(2) $I = \oint_C \dfrac{e^y}{x^2+y^2}[(x\sin x + y\cos x)\,\mathrm{d}x + (y\sin x - x\cos x)\,\mathrm{d}y]$, 其中 $C: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向.

(3) $\int_C \dfrac{1}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$, 其中 C 是: (a) 旋轮线 $x = a(t-\sin t) - a\pi$, $y = a(1-\cos t)$ 对应于 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一拱; (b) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 从 $(2,1)$ 经上半圆到 $(0,1)$ 的一段弧.

5. 设$f(x)$ 连续可微, L 为逐段光滑闭曲线, 证明:

(1) $\oint_L f(xy)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = 0$;

(2) $\oint_L f(x^2+y^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = 0$.

6. 求 $\oint_C \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s$, 其中 $u = x^2+y^2$, C 为 $x^2+y^2=6x$, $\boldsymbol{n}$ 为 C 上的单位外法向量.

7. 设 C 为逐段光滑的简单闭曲线, $\boldsymbol{l}$ 为给定方向, 证明:

$$\oint_C \cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 C 上的单位外法向量.

8. 设 L 是单位圆周 $x^2+y^2=1$, 方向为逆时针, 求积分

$$\oint_L \frac{(x-y)\,\mathrm{d}x + (x+4y)\,\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}.$$

9. 设 S 为 $z = \sqrt{x^2+y^2+}$[illegible] 被 $x^2+y^2=2ax$ 截下的部分，求

$$I = \iint_S (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\,\mathrm{d}S.$$

10. 求 $\iint_S (x+y+z)^2\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

11. 设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取内侧，求

$$I = \iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

12. 求

$$I = \iint_\Sigma (y-z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由 $x^2+y^2=1$, $z=1$ 及三个坐标平面围成的立体在第一卦限的部分的表面，取外侧.

13. 计算曲面积分

$$I = \iint_S \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}},$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 取外侧 $(a>0, b>0, c>0)$.

14. 先添加辅助面, 再用 Gauss 公式计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant h$ 的一段, $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 上的单位法向量, 其方向为下方.

(2) $\iint\limits_{\Sigma}x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之上半部分, 取上侧.

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(\dfrac{x^3}{a^3}+y^3z^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(\dfrac{y^3}{b^3}+z^3x^3)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(\dfrac{z^3}{c^3}+x^3y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $x\geqslant 0$, 取后侧.

15. 证明重积分的分部积分公式

$$\iiint\limits_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial\Omega}uv\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\partial\Omega$ 分片光滑，取外侧，u,v 在 $\overline{\Omega}$ 上连续可微.

16. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上具有二阶连续的偏导数，证明: $f(x,y,z)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的调和函数（即 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$）的充要条件是对 $\mathbb{R}^3$ 内的任意光滑简单闭曲面 S, 总有 $\iint\limits_{\partial S}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=0$.

17. 设 $f(x,y,z)$ 表示从原点到椭球面 $\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上的点 $P(x,y,z)$ 的切平面的距离，计算：

(1) $\iint\limits_{\partial\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{f(x,y,z)}$;　　　　(2) $\iint\limits_{\partial\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.