苏州大学 实变函数 课程试卷 （B）卷 共 4 页

考试形式 闭 卷 2011 年 1 月

院系____________年级____________专业____________

学号____________姓名____________成绩____________

一、 判断题（每题 3 分，共 30 分）

1、 若$\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是集 X 的一个集族，则$(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^C=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^C$

2、 Lebesgue 测度不一定有可数可加性。

3、 定义在可测集合上的连续函数是可测函数。

4、 若$m(E)<\infty$，且在E上，f_n几乎处处收敛于f，则对于任给$\varepsilon>o$，有E的闭子集F使得$m(E\setminus F)<\varepsilon$，且$f_n$在$F$上一致收敛于$f$

5、 有限区间$[a,b]$上的 Lebesgue 可积函数一定 Riemann 可积。

6、 可测函数列的极限（如果存在）不一定是可测函数

7、 两个有界变差函数的和是有界变差函数。

8、 有界变差函数不一定几乎处处可导。

9、 f是在可测集E上的可测函数，则f在E上 Lebesgue 可积等价于$|f|$在E上 Lebesgue 可积

10、 存在$[a,b]$上的严格单调递增连续函数f在$[a,b]$的某个零测集E上满足$f'(x)=\infty$成立。

二、 叙述 Levi 单调收敛定理和 Fatou 定理（12 分）

三、　什么是有界变差函数，它和单调递增函数有何关系？（**12** 分）

四、　定义在$[0,1]$上的 **Dirichlet** 函数$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{是}[0,1]\text{中有理数}\\ 0 & \text{当}x\text{是}[0,1]\text{中无理数}\end{cases}$是否是 **Lebesgue** 可积的？若可积说明理由并计算存在的积分，若不可积，给出证明。（**10** 分）

五、　求$\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\cos^3\sqrt{nx}\,dx$（**10** 分）

六、　证明：若$f(x)$在$[0,1]$的每个可测集E上的 **Lebesgue** 积分为0，则$f(x)$在$[0,1]$上乎处处等于0。（**10** 分）

七、　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x_1)-f(x_2)|\le 1$ 对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$ 成立，证明 $f(x)$ 绝对连续，且 $|f'(x)|\le 1$（**10** 分）

八、　$f_n(x)$ 为 E 上可测函数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 在 E 上几乎处处成立证明若 $\int_E |f_n(x)|\,dm<M$，则 $f(x)$ 在 E 上可积（**6** 分）