

苏州大学《数学模型与数学软件》课程期中考试卷

考试形式 开卷 2022.04.21 13:30—15:30

院系 数学科学学院 年级 2019 级 专业 数学与应用数学（基地）

学号 1907402030 姓名 熊雄 成绩_____

一、(25 分) 在一个画面上建立四个坐标系，在每个坐标系下分别作出

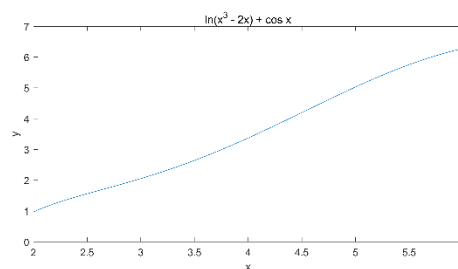
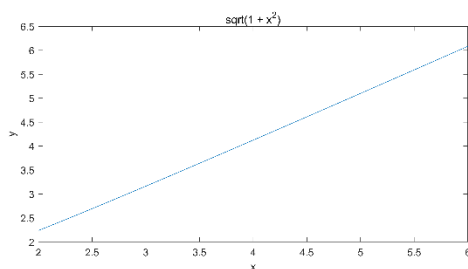
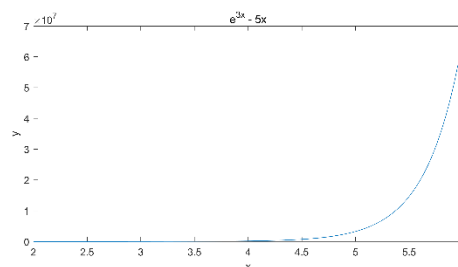
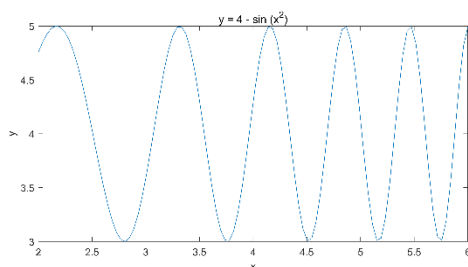
$$4 - \sin x^2, e^{3x} - 5x, \sqrt{1 + x^2}, \ln(x^3 - 2x) + \cos x$$

的图形，并添加 x, y 轴和每个图形的小标题（请展示 *Matlab* 代码和最终画出的图形）。

解：在 *Matlab* 中输入以下代码

```
%%自变量与函数
x = linspace(2, 6, 100);
y1 = 4 - sin(x.^2);
y2 = exp(3.*x) - 5.*x;
y3 = sqrt(1 + x.^2);
y4 = log(x.^3 - 2.*x) + cos(x);
%%作图
subplot(2, 2, 1), plot(x, y1), title('y = 4 - sin (x^2)'),
xlabel('x'), ylabel('y'); %小标题与坐标轴
subplot(2, 2, 2), plot(x, y2), title('e^{3x} - 5x'), xlabel('x'),
ylabel('y'); %小标题与坐标轴
subplot(2, 2, 3), plot(x, y3), title('sqrt(1 + x^2)'), xlabel('x'),
ylabel('y'); %小标题与坐标轴
subplot(2, 2, 4), plot(x, y4), title('ln(x^3 - 2x) + cos x'),
xlabel('x'), ylabel('y'); %小标题与坐标轴
```

运行后可以得到



二、(25 分) (1) 某人贷款买了一套价值 20 万的车，首付了 5 万元，每月还款 1000 元，15 年还清，请问贷款利率是多少？

(2) 小刘打算贷款 50 万装修，他咨询了两家银行，交通银行开出的条件是每月还 4500 元，15 年还清；建设银行开出的条件是每年还 45000 元，20 年还清。简单的假设年利率=月利率*12，请问从利率方面来看，哪家银行较优惠？（请建立数学模型进行分析，展示 matlab 代码并给出答案）。

解：

1) 求买车贷款月利率

◆ 建立模型

设月利率为 x ，第 n 个月还完款后，剩余所需还款为 a_n 。那么有如下递推关系

$$a_n = a_{n-1}(1+x) - 0.1,$$

故可推出

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}(1+x) - 0.1 \\ &= a_{n-2}(1+x)^2 - 0.1(1+x) - 0.1 \\ &= \dots \\ &= a_0(1+x)^{180} - 0.1(1+x)^{179} - \dots - 0.1(1+x) - 0.1 \\ &= a_0(1+x)^{180} + \frac{1 - (1+x)^{180}}{10x}. \end{aligned}$$

代入题中条件 $a_0 = 15$, $a_{180} = 0$ ，我们可以得到方程

$$(1+x)^{180} - 1 = 150x(1+x)^{180}.$$

对这个方程使用 *Matlab* 进行求解即得贷款月利率。

◆ 代码实现

在 *Matlab* 中输入以下代码

```
%设置输出格式
format long;
%利用 fzero 求解方程
[x, fv, ef, out] = fzero(inline('150 * x * (1 + x) ^ 180 - (1 + x) ^ 180 + 1'), 0.002)
```

运行后可以得到

```
x =  
  
0.002081163889459  
  
fv =  
  
-4.440892098500626e-15  
  
ef =  
  
1  
  
out =  
  
包含以下字段的 struct:  
  
    intervaliterations: 3  
      iterations: 5  
      funcCount: 12  
      algorithm: 'bisection, interpolation'  
      message: '在区间 [0.00188686, 0.00211314] 中发现零'
```

◆ 结果分析

由上述程序运行结果，贷款买车的月利率为0.2081%。

2) 分别求出两家银行的年利率并进行比较.

◆ 建立模型

需要注意的是建设银行是年利率而交通银行是月利率.

➤ 对于交通银行，采用上述相同的分析方法，得

$$a_n = a_0(1+x)^{180} + 0.45 \frac{1-(1+x)^{180}}{x}.$$

➤ 类似的，对建设银行，我们有

$$b_n = b_0(1+x)^{20} + 4.5 \frac{1-(1+x)^{20}}{x}.$$

◆ 代码实现

在 *Matlab* 中输入以下代码

```
%%交通银行
[x, fv, ef, out] = fzero(inline('50 * x * (1 + x) ^ 180 - 0.45 * (1 + x) ^ 180 + 0.45'), 0.005);
jiaotong = x * 12 %交通银行年利率

%%建设银行
[y, fv, ef, out] = fzero(inline('50 * x * (1 + x) ^ 20 - 4.5 * (1 + x) ^ 20 + 4.5'), 0.06);
jianshe = y; %建设银行年利率
```

运行后可以得到

```
jiaotong =

    0.070209510994143

jianshe =

    0.063948777092386
```

◆ 结果分析

由输出的结果可以看到,交通银行的年利率为7.02%,建设银行的年利率为6.39%,由于 $6.39\% < 7.02\%$,因此建设银行的利率较低,其较为优惠. ■

三、(50 分) 小型火箭初始质量为 900kg, 其中包括 600kg 燃料, 火箭竖直向上发射时燃料以 15kg/s 的速率燃烧掉, 由此产生 30000 牛顿的恒定推力。当燃料用尽时引擎关闭。设火箭上升时空气阻力正比于速度的平方, 比例系数为 0.4kg/m。重力加速度取 9.8m/s^2 。

(1). 建立火箭升空过程的数学模型;

(2). 求引擎关闭瞬间火箭的高度, 速度和加速度, 及火箭到达最高点的时间和高度, 并画出高度, 速度和加速度与时间的关系图(请展示 *Matlab* 代码并给出运行后的结果)。

解:

◆ 问题分析

火箭在竖直向上发射中, 根据有燃料和燃料已用尽, 可以分为以下两个阶段:

- 第一阶段是燃料产生推力的过程。此时燃料燃烧产生的推力是恒定的, 但随着燃料的不断消耗, 火箭的质量是变化的, 因此火箭的速度以及加速度是变化的, 由牛顿第二定律, 根据速度与时间关系建立微分方程组。
- 第二阶段是燃料全部消耗之后的上升过程。此时燃料已经完全消耗, 因此火箭的质量恒定。引擎关闭即第一阶段终止第二阶段开始的时刻。由于火箭运动受到阻力的作用, 火箭先加速后减速。在此阶段中, 火箭将达到最高高度。通过建立微分方程组我们可以求解出引擎关闭瞬间火箭到达最高点的时间和高度。

◆ 建立模型

➤ 第一阶段: 燃料产生推力的过程

记时刻 t (单位: 秒) 时火箭高度为 $h(t)$ (单位: 米), 火箭向上推力 $F = 30000\text{N}$, 火箭重力 $G = (900 - 15t)g$, 火箭受到的阻力 $f = 0.4v(t)^2$ 。根据牛顿运动定律, 我们可以得到如下的微分方程组

$$\begin{cases} (900 - 15t) \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = F - G - f, \\ h(0) = 0, \\ \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

➤ 第二阶段: 燃料全部消耗之后的上升过程

第二阶段火箭的燃料消耗完, 火箭此时的质量为 $m = 900 - 600 = 300\text{kg}$ 。根据牛顿运动定律, 我们可以得到如下的微分方程

$$m \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = -G - f,$$

其中 h 和 $\frac{dh(t)}{dt}$ 的初值由第一阶段的结果给出.

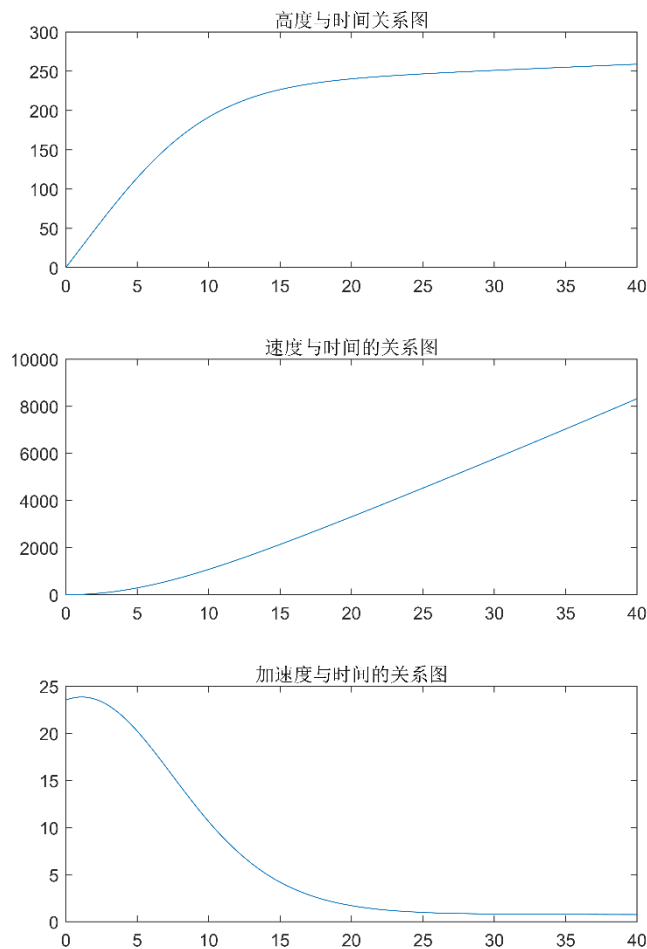
◆ 代码实现

先建立函数文件 huojian.m:

```
function d = huojian(t, v)
d = [(30000 - 0.4 * v(1) ^ 2) / (900 - 15 * t) - 9.8 ; v(1)];
```

根据第一问数学模型可以算出火箭在 $t = 40s$ 时关闭引擎, 在 *Matlab* 中新建文件, 输入以下代码

```
t = 0 : 0.1 : 40; %时间
g = 9.8;
v0 = [0, 0];
[t, v] = ode45(@huojian, t, v0);
n = length(t);
m = 900; %火箭初始质量
F = 30000; %恒定推力
k = 0.4; %比例系数
a = zeros(n, 1); %加速度
for i=1 : n
    a(i)=(F - k * v(i, 1)^2) / (m - 15 * t(i)) - g;
end
subplot(3, 1, 1), plot(t, v(:, 1));
subplot(3, 1, 2), plot(t, v(:, 2));
subplot(3, 1, 3), plot(t, a);
```



即关闭引擎时候,高度为8323m,速度为259m/s,加速度为 $0.7709m/s^2$ 。在关闭引擎之后先建立函数文件:

```
function d = huojian5(t,v)
d = [-0.4*v(1)^2/(300)-9.8;v(1)];
```

在 *Matlab* 中新建文件, 输入以下代码

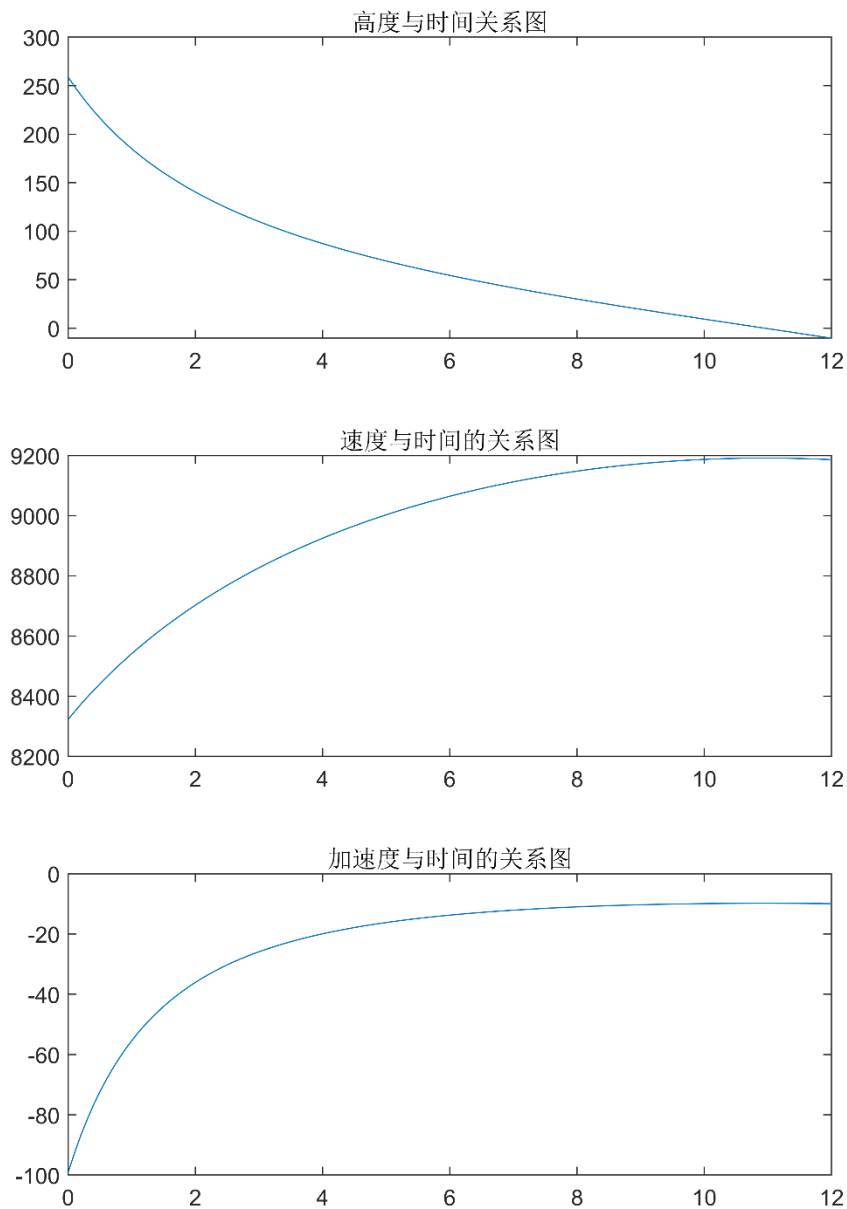
```
t=0: 0.1: 12;
v0=[259, 8323];
[t,v] = ode45(@huojian5,t,v0);
n=length(t);
a=zeros(n,1);
for i=1:n
    a(i) = -0.4 * v(i,1) ^2 / (300) - 9.8;
```

```

end
subplot(3, 1, 1), plot(t, v(:, 1)), title('高度与时间关系图');
subplot(3, 1, 2), plot(t, v(:, 2)), title('速度与时间的关系图');
subplot(3, 1, 3), plot(t, a), title('加速度与时间的关系图');

```

得到图像：



即在关闭引擎第 11 秒左右到达最高点，也就是发射 51s 后，高度 9192m. ■

◆ 结果分析

关闭引擎时,高度为 8323m,速度为 259m/s,加速度为 $0.7709m/s^2$. 关闭引擎第 11 秒左右到达最高点，也就是发射 51s 后，高度 9192m.