Chapter 6 解线性方程组的迭代法

Ex1 设线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

(1). 考察用 Jacobi 迭代，G-S 迭代解此方程组的收敛性

(2). 用 Jacobi 迭代，G-S 迭代解方程组，要求当 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-4}$ 停止.

Solve.

(1). 系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

则 A 中的元素满足

$$|a_{11}| = 5 > 3 = |a_{11}| + |a_{13}|$$

$$|a_{22}| = 4 > 3 = |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$|a_{33}| = 10 > 5 = |a_{31}| + |a_{33}|$$

从而 A 为严格对角占优矩阵.

因此，由 Thm 9 可知，Jacobi 迭代与 G-S 迭代均收敛.

(2). Jacobi 迭代格式为：$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$

即：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{3}{10}x_2^{(k)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

No.

Date

取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，通过 Matlab 计算知，当 $k=17$ 时，

$$x^{(17)}=(-4.000019,2.999992,2.000001)^T$$

此时恰好满足精度要求.

G-S 的迭代格式为：$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$，

即：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{5}x_3^{(k)}-\frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\frac{1}{2}x_3^{(k)}+5 \\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{5}x_1^{(k+1)}+\frac{3}{10}x_2^{(k+1)}+\frac{3}{10} \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，通过 Matlab 计算知，当 $k=8$ 时，

$$x^{(8)}=(-4.000019,2.999992,2.000001)^T$$

此时恰好满足精度要求 #

No.

Date

Ex8. 对上述方程(Ex1)采用 SOR 迭代, 取 $\omega = 0.9$.

Solve.

取 $x^{(0)} = 0$, 迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \omega\left(-\frac{12}{5} - x_1^{(k)} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)}\right). \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \omega\left(5 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)}\right). \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \omega\left(\frac{3}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right). \end{cases}$$

取 $\omega = 0.9$, 要求当 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < 10^{-4}$ 时停止

利用 Matlab 进行计算, $k=7$ 时有

$$x^{(7)} = (-4.0000424, 3.0000314, 2.0000122)^T.$$

$k=8$ 时有

$$x^{(8)} = (-4.0000177, 2.9999937, 2.0000027)^T$$

$\|x^{(8)} - x^{(7)}\|_\infty = 0.0000377 < 10^{-4}$, 故采用 SOR 迭代, 取 $\omega = 0.9$ 时的近似解取为

$$x^{(8)} = (-4.0000177, 2.9999937, 2.0000027)^T.$$

#

Campus

No.

Date

Ex 9. 设 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 对称正定，且 $0<\alpha\leq\lambda(A)\leq\beta$，考察如下迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+w(b-Ax^{(k)})$$

证明：当 $0<w<\frac{2}{\beta}$ 时上述迭代收敛.

Pf.

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+w(b-Ax^{(k)})$$
$$=(I-wA)x^{(k)}+wb$$

则迭代矩阵为 $B\triangleq I-wA$，特征值为：$\lambda(B)=1-w\lambda(A)$.

由 $0<\alpha\leq\lambda(A)\leq\beta$ 知，当 $0<w<\frac{2}{\beta}$ 时.

$$-1<\lambda(B)<1$$

i.e., $|\lambda(B)|<1$.

从而综上所述，当 $0<w<\frac{2}{\beta}$ 时，上述迭代收敛. #