苏州大学 抽象代数 课程(期末)试卷答案　共2页

(考试形式　闭卷　　2008年7月)

院系______________年级______________专业______________

学号______________姓名______________成绩______________

一. 在括号中填写正确答案

1.　$\alpha^{-1} = (53412)$.

2.　$(r, n) = 1$.

3.　$\bar{1}; \bar{3}$.

4.　4.

5.　$-a_0^{-1}(\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1)$.

二.回答下列问题
1.　不同构, 证明: Z_4 中有四阶元，而$Z_2 \bigoplus Z_2$ 中没有四阶元.
2.　相同. 设a 的阶为n，则可知bab^{-1} 阶小于等于n，反之可知a 的阶小于等于bab^{-1} 的阶，从而可知bab^{-1} 与a 的阶相同.

3.　解: (1) 整环中的素元一定是既约元: 因为设p 是素元, 则$p \neq 0$ 而且p 不是单位. 设a 是p 的一个因子, 则有$b \in R$ 使得$p = ab$,则$p|ab$，于是$p|a$ 或者$p|b$, 因而$a = pa_1$ 或者$b = pb_1$,其中$a_1, b_1 \in R$,于是$p = pa_1b$ 或者$p = pab_1$, 从而$a_1b = 1$ 或者$ab_1 = 1$. 因而b 为单位或者a 为单位, 所以p 为既约元.
而既约元不一定是素元. 反例: 设$R = \{a + b\sqrt{-3}|a, b \in Z\}$ 可以验证: 整环R 中$1 + \sqrt{-3}$ 是R 的既约元, 但不是R 的素元.

4.　首先$1 - 2i$ 非零且不是单位. 设$1 - 2i = (a + bi)(c + di), a + bi, c + di \in Z[i]$. 则$|1 - 2i|^2 = |a + bi|^2|c + di|^2$, 即$5 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. 而$a^2 + b^2, c^2 + d^2$ 都是正整数, 所以$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$. 于是$a + bi$ 或者$c + di$ 为单位. $1 - 2i$ 是$Z[i]$ 的既约元.

5.　不能。因为四元域的元素的个数为2^2, 八元域的元素个数为2^3.
由于$2 \nmid 3$,故四元域不能同构于八元域的子域.

三.　不妨设该子群为H, 由于H 的任一共轭子群与H 的阶数相同, 而G中只一个阶为n 的子群, 即H 的任一共轭子群等于H, 从而H 是G 的正规子群.

四. 因为对于任意的$a \in N_1, b \in N_2$ 及N_1, N_2 是G 的正规子群, 则$aba^{-1}b^{-1} \in N_1 \bigcap N_2$, 从而结合题意得: $aba^{-1}b^{-1} = e$, 进而$ab = ba$.

五.
(1) 根据R 是交换环及理想的定义很容易验证.
(2) 若R/N 中有非零的幂零元, 即存在$a \in R, n \in N^+$ 但$a \notin N$, 使得$a^n \in N$, 又因为N 是R 中幂零元组成的集合, 所以存在$m \in N^+$, 使得$(a^n)^m = a^{nm} = 0$, 从而这与$a \notin N$ 矛盾,原命题得证.

六. 证明: 由题意, $a^{p^n} - a = 0$, 从而$a = a^{p^n} = (a^{p^{n-1}})^p = b_1^p$, 即证得存在性. 若$b_1^p = b_2^p$, 即$(b_1 - b_2)^p = 0$, 从而可知$b_1 = b_2$. 即证得唯一性.

七.
证明: (1) 因为$(1-f)^2 = 1 - 2f + f^2 = 1 - f$, 所以$1 - f$ 是幂等元.
(2) 因为$\forall\ a \in M$ 均有$a = (a - f(a)) + f(a)$, 且$f(a - f(a)) = f(a) - f^2(a) = 0$, 即$a - f(a) \in kerf$, 从而可得$M = kerf + Imf$.又因为对于$\forall b \in kerf \bigcap Imf$. 则存在$c \in M$ 使得$f(c) = b$, 从而$b = f(c) = f^2(c) = f(b) = 0$, 即$kerf \bigcap Imf = \{0\}$, 综上可得$M = kerf \oplus Imf$.