2014年实变函数 期末B卷

熊雄

1 判断题（每题3分，共30分）

1.1 存在定义在可测集上的不可测函数。

错误，课本P63 eg4.1.2。可数集是零测集，由例子知，定义在零测集上的函数一定是可测函数。

1.2 可测函数列的上极限一定是可测函数。

正确，课本P66 Thm4.1.7：可测函数列的上极限、下极限、上确界、下确界均为可测函数。。

1.3 可测函数可以由简单可测函数列逼近。

正确，课本P67 Thm4.1.9。

1.4 若在集合E上，f_n几乎处处收敛于f，则f_n依测度收敛于f。

错误，课本P70 Thm4.3.1（Lebesgue Thm），还需要满足$m(E) < \infty$。

1.5 若f_n在E上几乎处处收敛于f，则f_n在E上近一致收敛于f。

错误，课本P69 Thm4.2.1（Egoroff Thm），还需要满足$m(E) < \infty$。

1.6 绝对连续函数一定是有界变差函数。

正确，课本P127 引理6.4.1。

1.7 连续的有界变差函数不一定是绝对连续函数。

正确，课本P119 eg6.1.1 Cantor函数。

1.8 若$f(x)$在$[a,b]$上Lebesgue可积，则$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)dt \ (a \leq x \leq b)$在$[a,b]$上可导。

错误，由课本P127 Lemma6.4.3知，F在$[a,b]$为绝对连续函数，因此f在$[a,b]$必为有界变差的，由推论6.2.5知，F在$[a,b]$上几乎处处可微。

1.9 f是在可测集E上的可测函数，则f在E上Lebesgue可积不一定有$|f|$在E上Lebesgue可积。

错误。

1.10 若$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，则$f(x)$在$[a,b]$上的Lebesgue可积。

正确，课本P94 Thm5.6.2。

2 叙述Levi单调收敛定理和Lebesgue积分的定义（10分）

略。

3 $f(x)$是可测集E上的实值函数，若对任意的实数t，$\{x|f(x)=t\}$是可测集，则$f(x)$是E上的可测函数吗？并论证你的结论（10分）

不一定. 例如，在$\mathbb{R}^+$中取一个不可测集E，令$f(x)=\begin{cases} x, & x\in E; \\ -x, & x\in\mathbb{R}^+\setminus E. \end{cases}$

此时$\forall t\in\mathbb{R}$, $\{x\in\mathbb{R}^+|f(x)=t\}$为可测集满足题目条件。当$t>0$时，$\{x\in\mathbb{R}^+|f(x)>t\}$包含于$E$，即为不可测集，因此$f(x)$不是$E$上的可测函数。

4 $f(x)$是可测集E_k $(k=1,2,\ldots)$上的可测函数，证明$f(x)$在$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$上可测（10分）

$\forall t\in\mathbb{R}$，$\{x\in E:f(x)>t\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x\in E_k:f(x)>t\}$为可测集，故$f(x)$在$E$上可测。

5　计算$\int_{[0,1]} f(x)dx$，其中$f(x) = \begin{cases} e^{\cos x+\sin x}, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}; \\ \sin x+\cos x, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$。（10分）

计算可得:

$$\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 (\sin x+\cos x)dx = (R)\int_0^1 (\sin x+\cos x)dx = 1+\sin 1-\cos 1$$

这里第一个等号是由于$m([0,1]\cap\mathbb{Q})=0$，而(L)积分与被积函数在零测集上的取值无关。

6　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x^2}\sin nxdx = 0$。（10分）

设$f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x^2}\sin nx$，则$f_n(x)\to 0, n\to\infty$.

由$|f_n(x)| = \left|\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x^2}\sin nx\right| \le \frac{x+n}{n}e^{-x^2} := F(x)\ \ (n=1,2,\dots)$ 以及$(R)\int_0^{+\infty}F(x)dx$绝对收敛，故$F\in L[0,+\infty)$，所以由控制收敛定理知:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x^2}\sin nxdx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}e^{-x^2}\sin nxdx = 0$$

7　$f(x)$为$[a,b]$上的有界函数，则$f(x)$在$[a,b]$上满足Lipschitz条件，当且仅当$f(x)$可以表示为某个可积函数的变上限积分。（10分）

8　$f(x)$在$[0,1]$上Lebesgue可积，且对任意的$c\ (0<c<1)$有$\int_{(0,c)} f(x)dx = 0$。证明：$f=0$在$[0,1]$上几乎处处成立。（10分）

令$F(x) = \int_0^x f(t)dt$. 由假设条件知$F(x)\equiv 0$，故$F'(x)\equiv 0$. 由Thm6.3.4知：在$[0,1]$上几乎处处有$F'(x)=f(x)$. 即$f(x)=0$几乎处处成立.