数学模型与数学软件

第 1 次作业

1907402030
熊雄

授课老师：陈中文

2022 年 3 月 4 日

Problem 1

(Page 19 Ex.3)

写出任意两个数的算术平均数与几何平均数序列的迭代公式, 用 Matlab 软件编写程序, 任给初值, 观察序列的收敛情形.

Solution.

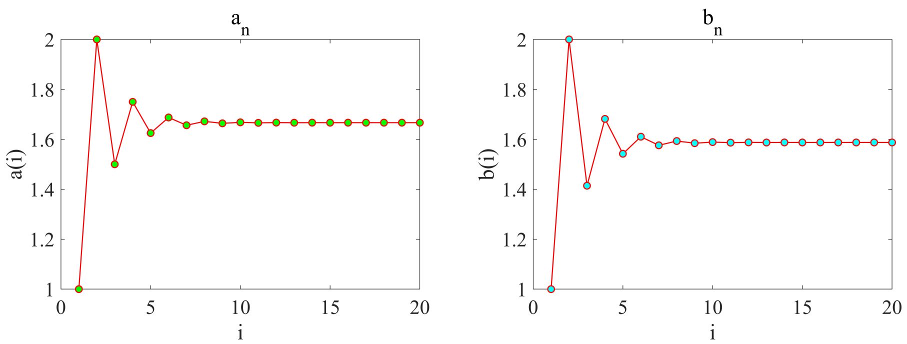
设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$, 且有初值 $a_1 = b_1 = p > 0$, $a_2 = b_2 = q > 0$. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的迭代公式为

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{b_{n-2}b_{n-1}}.$$

利用 Matlab 软件, 输入如下代码:

```
n = input("n = ");  %The total numbers we calculated
p = input("p = ");
q = input("q = ");
a = zeros(1, n);
b = zeros(1, n);
a(1) = p;
b(1) = p;
a(2) = q;
b(2) = q;
for i = 3 : n
    a(i) = (a(i - 1) + a(i - 2)) / 2;
    b(i) = sqrt(b(i - 1) * b(i - 2));
end
subplot(1, 2, 1), plot(a, '-*r'), title("a_n"), xlabel("i"), ylabel("a(i)")
subplot(1, 2, 2), plot(b, '-*r'), title("b_n"), xlabel("i"), ylabel("b(i)")
```

我们依次输入 20, 1, 2, 代表 $n = 20$, $p = 1$, $q = 2$, 可以得到以下图像:



这与我们在数学分析中得到的结论是一致的, 即数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均收敛.

Problem 2

(Page 20 Ex.8)

请用 Matlab 编写函数 M 文件计算

$$f(a,n)=\underbrace{\left(\left(\underbrace{(\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{a}}}}_{n次}\right)^2\right)^2\cdots\right)^2}_{n次}.$$

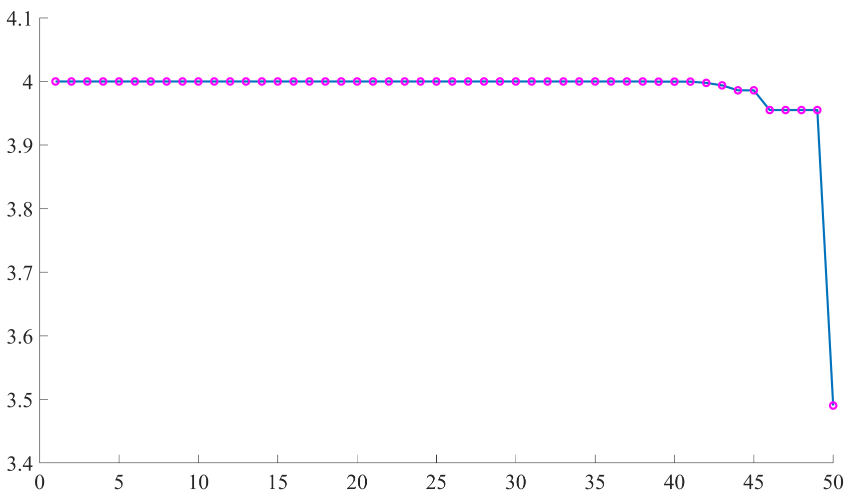
固定 a, 当 n 变大时, 如 $a=4$, $n=1,2,3,\ldots$, 观察计算结果是否永远是 a.

Solution.

用 Matlab 编写函数 M 文件, 代码如下:

```
n = input("n = ");
a = input("a = ");
result = zeros(1, n);
for k = 1 : n;
    s = a;
    for j = 1 : k
        s = sqrt(s);
    end
    for i = 1 : k
        s = s * s;
    end
   result(k) = s;
end
plot(result);
```

输入 $n=50$, $a=4$, 可以得到输出的图像为



通过查看 result 向量的值与上图, 可以发现计算结果不是永远为 a.

Problem 3

(Page 21 Ex.14)

对于

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

证明如下递推公式:

$$I_0 = 1 - e^{-1}, \quad I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

用递推公式计算 $I_1, I_2, \cdots, I_n$, 观察 n 多大时结果就不对了 (考虑一个简单的判断结果错误的标准), 为什么会出现这种情况. 如果将递推公式反过来, 即

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n},$$

从 I_n 倒过来计算 $I_{n-1}, \cdots, I_1, I_0$, 而 I_n 由下式估计

$$\left(\min_{0 \le x \le 1} e^{x-1}\right) \frac{1}{n+1} = I_n^{(1)} < I_n < I_n^{(2)} = \left(\max_{0 \le x \le 1} e^{x-1}\right) \frac{1}{n+1}.$$

不妨取 $I_n = \frac{(I_n^{(1)} + I_n^{(2)})}{2}$, 将计算结果与前面的进行比较, 得到什么启发 (你认为是什么原因造成的)?

Solution.

a) 先证明递推公式:

首先我们易求得当 $n = 0$ 时,

$$I_0 = \int_0^1 e^{x-1} dx = e^{x-1}|_0^1 = 1 - e^{-1}.$$

以下讨论当 $n \neq 0$ 时的情况:

$$I_{n-1} = \int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 e^{x-1} dx^n = \frac{1}{n} \left(x^n e^{x-1}|_0^1 - I_n\right) = \frac{1}{n} \left(1 - I_n\right),$$

从而

$$I_n = 1 - nI_{n-1}.$$

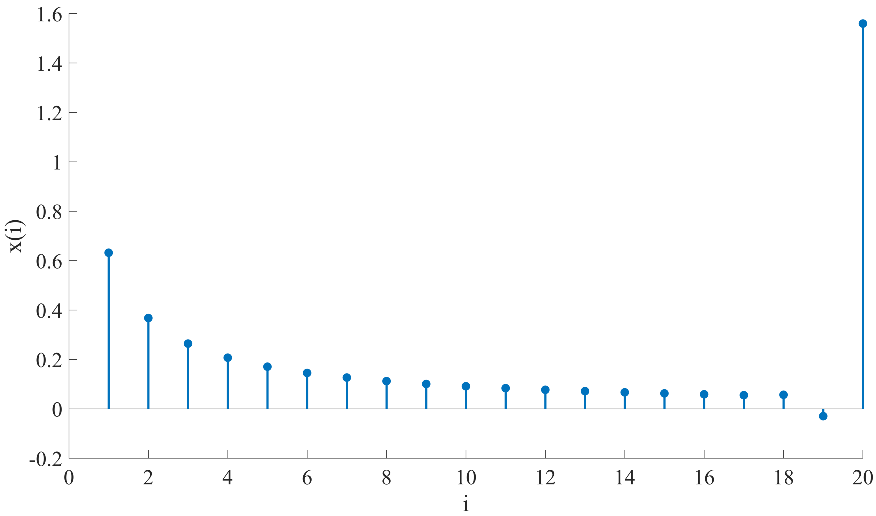
故递推公式得证.

b) 递推公式计算 $I_1, I_2, \cdots, I_n$, 代码如下:

```
n = input("n = ");
x = zeros(1, n);
x(1) = 1 − exp(−1);
for i = 2 : n
x(i) = 1 − (i − 1) ∗ x(i − 1);
fprintf("%f ", x(i));
end
```

```
stem(x , 'fill');
xlabel('i')
ylabel('x(i)')
```

输入 20, 可以生成如下图象:



当 $n = 17$ 时, $I_{17} = 0.057192$; 当 $n = 18$ 时, $I_{18} = -0.029454$. 显然 $n = 18$ 时结果不对.

c) 将递推公式反过来计算

由题目易知:

$$I_n^{(1)} = \left(\min_{0\le x\le 1} e^{x-1}\right)\frac{1}{n+1} = \frac{e^{-1}}{n+1}, I_n^{(2)} = \left(\max_{0\le x\le 1} e^{x-1}\right)\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

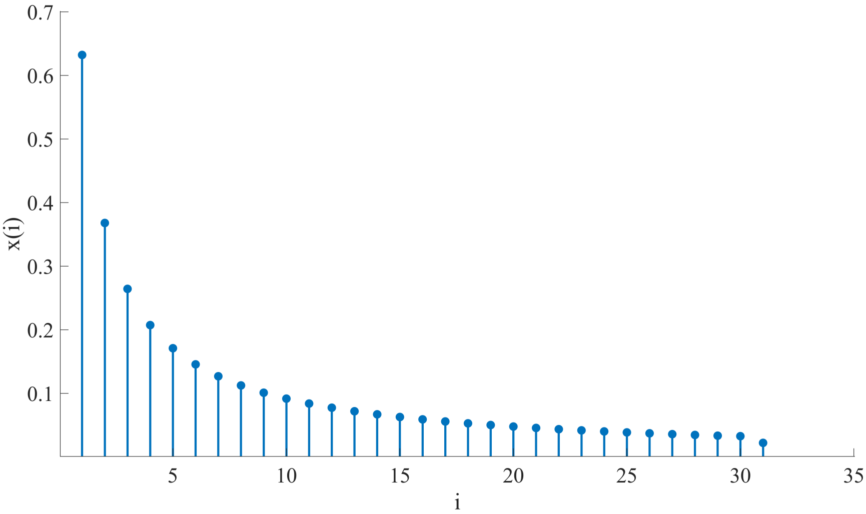
故

$$I_n = \frac{\left(I_n^{(1)} + I_n^{(2)}\right)}{2} = \frac{\frac{e^{-1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}}{2} = \frac{e^{-1}+1}{2\,(n+1)}.$$

从 I_n 倒过来计算 $I_{n-1}, \ldots, I_1, I_0$, 代码如下:

```
n = input("n = ");
x = zeros(1, n + 1);
x(n + 1) = (exp(-1) + 1) / (2 * (n + 1));
for i = n : -1 : 1
    x(i) = ( 1 - x(i + 1)) / i ;
end
for i = 1 : n+1
fprintf("%f ", x(i));
end
stem(x , 'fill');
xlabel('i')
ylabel('x(i)')
```

输入 30, 可以生成如下图象:



我们可以发现倒过来计算的结果更准确.