Chapter 8 矩阵特征值计算

Ex2、计算如下矩阵的特征值与特征向量，它们是否相似于对角阵？

(1). $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ (2). $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (3). $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Solve.

(1).

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$，其特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 & 6 \\ 0 & \lambda-3 & 4 \\ 0 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$

令 $|\lambda I - A| = 0$，得 $(\lambda-2)(\lambda^2-9) + 8(\lambda-2) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$

A有三个互异的实特征值，因此相似于对角阵。

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow Ax = \lambda_1 x \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow Ax = \lambda_2 x \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -1 \Rightarrow Ax = \lambda_3 x \Rightarrow x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2).

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\1&0&2\end{bmatrix},\quad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$$

A有三个互异的实特征值，因此相似于对角阵

$$\lambda_1=1 \Rightarrow Ax=\lambda_1 x \Rightarrow x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2 \Rightarrow Ax=\lambda_2 x \Rightarrow x^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=3 \Rightarrow Ax=\lambda_3 x \Rightarrow x^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(3).

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\-1&-1&2\end{bmatrix},\quad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\1&\lambda&-1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+\lambda-1=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)^3=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$$

将$\lambda_1=1$代入特征方程 $Ax=\lambda_1 x$，得两个线性无关的特征向量：

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad x^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

故A不相似于对角阵 #

No.

Date

Ex3 用幂法计算下列矩阵的主特征值和特征向量

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solve.

计算公式为 $\begin{cases} v_0 = u_0 \neq 0 \\ v_k = A u_{k-1} \qquad\qquad k=1,2,\cdots \\ u_k = \dfrac{v_k}{\max(v_k)} \end{cases}$

取 $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$，将 A 代入公式，计算结果如下

k	u_k^T	$\max(v_k)$
1	(1, 0.75, 0)	8
2	(1, 0.648648649, -0.297297297)	9.25
4	(1, 0.608798347, -0.388839681)	9.594900850
6	(1, 0.605776832, -0.394120752)	9.605429002
7	(1, 0.605609752, -0.394368924)	9.605572002

即：A 的主特征值 $\lambda_1 \approx 9.605572$，特征向量

$$x_1 \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0.605610 \\ -0.394369 \end{pmatrix}.$$

#

Campus

Ex4 利用反幂法求矩阵 $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的最接近 6 的特征值及对应的特征向量.

Solve. 取 $p=6$，将矩阵 $B = A - pI = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ 进行三角分解，得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{27}{5} \end{bmatrix}$$

记为 $PB = LU$

解 $U v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (1.618518518,\ 0.807407407,\ 0.185185185)^T \\ u_1 = \dfrac{v_1}{\max(v_1)} = (1,\ 0.498855835,\ 0.114416475)^T \end{cases}$

依迭代公式

$$\begin{cases} L y_k = P u_{k-1}, \\ U v_k = y_k, \\ \mu_k = \max(v_k), \\ u_k = \dfrac{v_k}{\mu_k}, \\ \lambda = p + \dfrac{1}{\mu_k}. \end{cases}$$

编程计算可得 $\lambda \approx 7.288$，特征向量

$$x \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5229 \\ 0.2433 \end{pmatrix}.$$

#

No.

Date

Ex5 求矩阵 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 与特征值4对应的特征向量.

Solve.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow (\lambda-4)\cdot\left[(\lambda-3)^2-1\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 2$$

因此可以用幂法求与特征值4对应的特征向量.

取 $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，用幂法计算得、

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此与特征值4对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. #