苏州大学 抽象代数 课程期末(A卷)试卷答案　共2页

(考试形式　闭卷　　2008年7月)

一.在括号中填写正确答案

1.　(65)(3412).

2.　n.

3.　$\bar{1};\bar{3};\bar{5};\bar{7}$.

4.　6.

5.　$-a_0^{-1}(\alpha^{n-1}+a_{n-1}\alpha^{n-2}+\cdots+a_1)$.

二.回答下列问题

1.　不同构, 证明: Z_4 中有四阶元，而$Z_2\bigoplus Z_2$ 中没有四阶元.

2.　是的。证明: 因为对$\forall b\in G$, 均有bab^{-1} 是二阶元, 由题意得: $bab^{-1}=a$, 即$ba=ab$, 所以a 在G 的中心里.

3.　解: (1) 整环中的素元一定是既约元: 因为设p 是素元, 则$p\neq 0$ 而且p 不是单位. 设a 是p 的一个因子, 则有$b\in R$ 使得$p=ab$,则$p|ab$，于是$p|a$ 或者$p|b$, 因而$a=pa_1$ 或者$b=pb_1$,其中$a_1,b_1\in R$,于是$p=pa_1b$ 或者$p=pab_1$, 从而$a_1b=1$ 或者$ab_1=1$. 因而b 为单位或者a 为单位, 所以p 为既约元.
而既约元不一定是素元. 反例: 设$R=\{a+b\sqrt{-3}|a,b\in Z\}$ 可以验证: 整环R 中$1+\sqrt{-3}$ 是R 的既约元, 但不是R 的素元.

4.　是的。证明: 设$(R,+)$ 构成的群为$R=\langle a\rangle$.
从而对于$\forall$, $ra,sa\in R$, 其中$r,s\in Z$,
则$(ra)\cdot(sa)=(rs)\cdot a^2=(sr)\cdot a^2=(sa)\cdot(ra)$, 故$R$ 是交换环.

5.　不能。因为四元域的元素的个数为2^2, 八元域的元素个数为2^3.
由于$2\nmid 3$,故四元域不能同构于八元域的子域.

三.　证明: 设$HK=KH$, 则任取$x\in HK$, 令$x=hk(h\in H,k\in K)$, 由于H,K 都是G 的子群, 所以$h^{-1}\in H,k^{-1}\in K$, 从而$k^{-1}h^{-1}\in KH$,
即$x^{-1}\in HK$
又由于$HH=H,KK=K$, 故
$HKHK=H(KH)K=H(HK)K=(HH)(KK)=HK$, 即$HK$ 的任两个元素的乘积仍在HK 中, 综上$HK\leq G$,
反之, 由$HK\leq G$, 任取$x\in HK$, 令$x=hk$, 则$x^{-1}\in HK$.
于是$x=(hk)^{-1}=k^{-1}h^{-1}\in KH$, 从而$HK\subseteq KH$
同理可证: $KH\subseteq HK$, 所以$KH=HK$.

四. 证明: 因为群中元素的阶与它对应的逆元的阶相等, 且当阶大于3 时, 该元与其逆元不相等, 即该元与其逆元在群中成对出现, 若该群中没有2阶元, 则加个单位元, 该群元的个数应为奇数个, 与题意矛盾, 从而原命题得证.

五. 证明: 根据R 是交换环及理想的定义即可证得.

六. 证明: 由题意, $a^{p^n}-a=0$, 从而$a=a^{p^n}=(a^{p^{n-1}})^p=b_1^p$, 即证得存在性. 若$b_1^p=b_2^p$, 即$(b_1-b_2)^p=0$, 从而可知$b_1=b_2$. 即证得唯一性.

七.
证明: (1) 因为$(1-f)^2=1-2f+f^2=1-f$, 所以$1-f$ 是幂等元.
(2) 因为$\forall\ a\in M$ 均有$a=(a-f(a))+f(a)$, 且$f(a-f(a))=f(a)-f^2(a)=0$, 即$a-f(a)\in kerf$, 从而可得$M=kerf+Imf$.又因为对于$\forall b\in kerf\bigcap Imf$. 则存在$c\in M$ 使得$f(c)=b$, 从而$b=f(c)=f^2(c)=f(b)=0$, 即$kerf\bigcap Imf=\{0\}$, 综上可得$M=kerf\oplus Imf$.