2021年实变函数 期末A卷

熊雄

1 判断题（每题3分，共30分）

1.1 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，若$\{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\}$可测，则$f(x)$在$E$上可测。

正确，课本P76 eg4.5.9。

1.2 若在集合E上，f_n几乎处处收敛于f，则f_n依测度收敛于f。

错误，课本P70 Thm4.3.1（Lebesgue Thm），还需要满足$m(E) < \infty$。

2 叙述Fatou引理和Lebesgue积分的定义（14分）

课本P86 Thm5.2.8(Fatou Thm)

设$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列，则$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.$

3 证明：若f在$[a, b]$上可导，则f'在$[a, b]$上可测（10分）

课本P76 eg4.5.10

当$x > b$时补充定义$f(x) = f(b)$.

令$g_k(x) = \dfrac{f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x)}{\frac{1}{k}}$，则在$[a, b)$上有$\lim\limits_{k\to+\infty} g_k(x) = f'(x)$，且每个$g_k(x)$在$[a, b)$上为连续函数，从而也是可测函数，故$f'(x)$是$[a, b)$上的可测函数，所以$f'(x)$是$[a, b]$上的可测函数.

4 若在E上有$\{f_k\}$几乎处处收敛于f，$\{f_k\}$依测度收敛于g。则$f = g$几乎处处成立。（10分）

课本P79 d12

5 **计算$\int_{[0,1]} f(x)dx$，其中$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^2\right),\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}; \\ \sin x,\ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$。（10分）**

计算可得：$\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_0^1 \sin x dx = (R)\int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1.$

这里第一个等号是由于$m([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$，而$(L)$积分与被积函数在零测集上的取值无关。

6 **证明$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{[0,+\infty)} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^k t^{\frac{1}{k}}}dt = 1$。（10分）**

周民强实变函数解题指南P246 eg17(3)

令$f_k(t) = \frac{1}{(1+\frac{t}{k})^k t^{\frac{1}{k}}}$，则$f_k(t) \to e^{-t}\ \ (k \to \infty)$.

(i) 对$t \in (0,1)$，我们有$t^{\frac{1}{k}} \geq t^{\frac{1}{2}}$，$\left(1+\frac{t}{k}\right)^k \geq 1$，故$f_k(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$.

(ii) 对$t \in [1,\infty)$，我们有$t^{-\frac{1}{k}} \leq 1$，故$f_k(t) \leq \left(1+\frac{t}{k}\right)^{-k}$. 又由$\left(1+\frac{t}{k}\right)^k = 1 + t + \frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2 + \ldots \geq t^2\frac{k-1}{2k} \geq \frac{t^2}{4}\ \ (k \geq 2)$，可知$f_k(t) \leq \frac{t^2}{4}$. 从而由控制收敛定理可得$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{[0,+\infty)} \frac{1}{(1+\frac{t}{k})^k t^{\frac{1}{k}}}dt = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$

7 **设$f(x)$在$[a,b]$上递增，且有$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$，试证明：$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续。（10分）**

课本P137 d13

8 　若$\{f_k(x)\}$是$[a,b]$上的连续函数列，f_k处处收敛于$f \in L[a,b]$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{[a,b]} f_k(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$（**6分**）

闭区间上连续函数必有界，由有界控制收敛定理即证毕。