# 苏州大学 概率论与数理统计（二）期末考试 答题模板

共 3 页

考试形式　线上闭卷限时考试　　2022 年 6 月

院系 数学科学学院 年级 2019级 专业 数学与应用数学(其他)
学号 1907402030 姓名 熊雄 序号 02

**答题要求：必须用 A4 白纸打印本文档，用黑色签字笔撰写，字迹清楚，无需抄写题目。**

一、

Solve. 设企业的研究经费所占比例为 X，则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

构造枢轴量 $\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot S_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

则方差置信区间为 $\left[\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

其中 $n=10$

计算 $S_n^{*2} = 6.4$，$\alpha = 0.05$，

$\chi^2_{0.975}(9) = 19.023$，$\chi^2_{0.025}(9) = 2.700$

从而方差的置信水平为 95% 的置信区间为 $[3.0279, 21.3333]$。 #

二、

Solve. (1). 先检验方差齐性

① 检验假设：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

② 在 $H_0$ 成立的条件下，构造统计量 $F = \frac{S_x^{*2}}{S_y^{*2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

③ 给定 $\alpha = 0.1$，则拒绝域为 $W_1 = (-\infty, F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)] \cup [F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1), +\infty)$

$F_{0.05}(8,9) = 0.295$．　$F_{0.95}(8,9) = 3.230 \Rightarrow W_1 = (-\infty, 0.295] \cup [3.230, +\infty)$

④ 计算 $f = \frac{26.7}{21.1} \approx 1.265 \notin W_1$，因此在 $\alpha = 0.1$ 水平下，接受原假设，可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

(2). 检验期望齐性

① 检验假设：$H_0: \mu_x = \mu_y \longleftrightarrow H_1: \mu_x \neq \mu_y$

② 在 $H_0$ 成立的条件下，统计量 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

其中 $S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_x^2 + (n_2-1)S_y^2}{n_1+n_2-2}}$

③ 由 $P(|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(17)) = \alpha = 0.05$，$t_{0.975}(17) = 2.110$

拒绝域 $W_2 = (-\infty, 2.110] \cup [2.110, +\infty)$

④ 计算 $t = \frac{30.97 - 21.79}{4.8719 \times 0.4595} = 4.1007 \in W$，因此在 $\alpha = 0.05$ 时拒绝原假设，即这两个品种有显著差异 $(\alpha = 0.05)$。 #

院系 数学科学学院 年级 2019级 专业 数学与应用数学(基地)
学号 1907402030 姓名 熊雄 序号 02

三、

Solve. 检验假设 $H_0$: $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,3$

由于Poisson分布参数$\lambda$的极大似然估计为$\hat{\lambda}=\bar{\xi}$，故我们用$\hat{\lambda}$代替$\lambda$

$\hat{\lambda}=\bar{\xi}\approx 0.7$

因此 $H_0'=P(\xi=k)=\frac{\hat{\lambda}^k}{k!}e^{-\hat{\lambda}}$, $k=0,1,2,3$

在$H_0'$成立的条件下, $\hat{p}_k=\frac{\hat{\lambda}^k}{k!}e^{-\hat{\lambda}}$ 计算得

$\hat{p}_0=e^{-0.7}=0.5$, $\hat{p}_1=0.7\times e^{-0.7}=0.35$, $\hat{p}_2=\frac{0.7^2}{2}\times e^{-0.7}=0.1225$, $\hat{p}_3=\frac{0.7^3}{3!}e^{-0.7}=0.0286$

计算 $n\cdot\hat{p}_0=105$, $n\hat{p}_1=73.5$, $n_2\cdot\hat{p}_2=25.725$, $n_3\cdot\hat{p}_3=6.006$

每个$n\cdot\hat{p}_i$均大于等于5.

| 事故数 | $n_i$ | $n\hat{p}_i$ | $\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 109 | 105 | 0.1524 |
| 1 | 65 | 73.5 | 0.9830 |
| 2 | 22 | 25.725 | 0.5394 |
| 3 | 14 | 6.006 | 10.6400 |

在$H_0$为真的条件下,

$$\chi^2=\sum_{i=0}^{3}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}\sim\chi^2(4-1-1)$$

给定$\alpha=0.05$, 拒绝域$W=[\chi^2_{1-\alpha}(2),+\infty)$

$=5.991$

计算 $\chi^2=12.3148\in W$

因此拒绝$H_0$, 即在$\alpha=5\%$的条件下, 不可以认为事故数服从泊松分布. #

四、

Solve. 设甲、乙、丙为因子A, 甲为$A_1$, 乙为$A_2$, 丙为$A_3$, 强度结果为$y_{ij}$

$i=1,2,3$, $j=1,2,\cdots,t_i$, $\mu_i$表示$A_i$的均值.

$r=3$, $t_1=5$, $t_2=6$, $t_3=5$, $n=16$

①. 检验假设: $H_0$: $\mu_1=\mu_2=\mu_3 \longleftrightarrow H_1$: $\mu_1,\mu_2,\mu_3$不全相等.

② 在$H_0$成立时, 选取统计量 $F=\frac{S_A/(r-1)}{S_e/(n-r)}\sim F(r-1,n-r)$

③ 给定$\alpha=0.05$, $F_{1-\alpha}(r-1,n-r)=F_{0.95}(2,13)=3.806$

拒绝域为 $W=[3.806,+\infty)$

④. $S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t_i}y_{ij}^2-n\bar{y}^2=16634.9766-16\times32.234^2=10.4845$

$S_A=\sum_{i=1}^{r}\frac{y_{i\cdot}^2}{t_i}-n\bar{y}^2=4983.3245+7541.1745+5360.1928-16\times32.234^2$

$=1260.1997$

$S_e=S_T-S_A=-1249.7152$, $f=\frac{S_A/(r-1)}{S_e/(n-r)}=6.5545\in W$

方差分析表为

| 来源 | 平方和 | 自由度 | 均方 | F比 |
|---|---|---|---|---|
| A | $S_A=1260.1997$ | 2 | 630.0999 | $f=6.5545$ |
| e | $S_e=-1249.7152$ | 13 | -96.132 | |
| 总和 | $S_T=10.4845$ | 15 | | |

因此拒绝$H_0$, 即在$\alpha=0.05$的条件下, 可以认为机器不同会对强度产生显著影响.

#

院系 数学科学学院 年级 2019级 专业 数学与应用数学(基地)
学号 190740203 0 姓名 熊杨 序号 02

五、

Solve. $n=8$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.08$, $\bar{x} = 0.135$

$\sum_{i=1}^{n} y_i = 369$, $\bar{y} = 46.125$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.15$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 50.38$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 17107$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 4.2\times 10^{-3}$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 0.565$$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\cdot\bar{y}^2 = 86.875$$

因此 $\hat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = 134.524$, $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\cdot\bar{x} = 27.964$

(1). $y$ 关于 $x$ 的一元线性回归方程模型为 $\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \ i=1,2,\cdots \\ \text{各 } \varepsilon_i \text{ 相互独立且 } \varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2) \end{cases}$

(2). 该线性回归统计模型中各参数的最小二乘估计为 $\hat{\beta}_1 = 134.524$, $\hat{\beta}_0 = 27.964$.

即: $\hat{y} = 134.524\cdot x + 27.964$.

(3). ①. 检验假设: $H_0: \beta_0 = 0 \longleftrightarrow H: \beta_0 \neq 0$.

②. 在 $H_0$ 成立的条件下, 构造统计量 $F = \frac{S_R/p}{S_e/(n-p-1)} \sim F(p, n-p-1)$.

③ 给定 $\alpha = 0.05$, 拒绝域为

$$W = [F_{1-\alpha}(p, n-p-1), +\infty)$$

由于 $F_{0.95}(1, 8-2) = 5.987 \Rightarrow W = [5.987, +\infty)$

④. 计算

$$S_R = \hat{\beta}_1 \cdot l_{xy} = 76.006$$

$$S_T = l_{yy} = 86.875$$

$$S_e = S_T - S_R = 10.869$$

则 $f = \frac{76.006}{10.869/6} = 41.957 \in W$

因此拒绝 $H_0$, 即在 $\alpha = 0.05$ 时, $y$ 与 $x$ 线性关系显著. #