1. 设φ 是集合A到集合B的一个映射， S与S' 为A的任二个非空子集. 证明：

1）$\varphi(A\cup B)=\varphi(A)\cup\varphi(B)$；

2）$\varphi(A\cap B)\subseteq\varphi(A)\cap\varphi(B)$ （可能会出现 “真包含”的情况）

2. 设φ 是集合A到集合B的一个映射， S与S' 分别为A与B的非空子集. 证明：

1）$\varphi^{-1}(\varphi(S))\supseteq S$且当$\varphi$为单射时等号成立；

2）$\varphi(\varphi^{-1}(S'))\subseteq S'$且当$\varphi$为满射时等号成立.

3. 设G是有限群， A与B是G的两个非空子集. 证明：若$|A|+|\mathrm{B}|>|G|$，则$G=AB$.

4. 证明：在任意群中，下列各组中的元素有相同的阶

（1） a与a^{-1}；

（2） a与$cac^{-1},\forall c\in G$

（3） ab与ba

（4） abc与cab

5. 证明： 若群G中有唯一的 2 阶元，则这个 2 阶元必是G的一个中心元.
举例：其中一个是交换群，另一个是非交换群，它们都有唯一的 2 阶元.

6. 设G是群，$a\in G$且$|a|=n$. 证明： $\left|a^m\right|=\dfrac{n}{(m,n)}$.

特别地，1） 若$|a|=st$, 则$\left|a^s\right|=t$. 2）若$|a|=n$，则$\left|a^m\right|=n\Leftrightarrow(m,n)=1$.

7. 设群G中的元素a的阶为n， b的阶为m. 证明：若$ab=ba$且$(m,n)=1,$，则

$$|ab|=mn.$$

8. 设G是一个元素阶都有限的交换群群,证明：如果群G中元素有最大阶数n，则中每个元素的阶都整除n.

9. 证明：在一个有限群中，阶数大于 2 的元素的个数一定是偶数.

10. 设G是一个偶数阶有限群. 证明：G中阶等于 2 的元素的个数是奇数个.

11. 设a， b是群G中的元素，且$|a|=s,|b|=t,ab=ba$. 证明：1） $|ab|\,\big|\,[s,t]$；

2）对$[s,t]$的任意正因数h， G中有阶为h的元素.