域论练习

1. 证明：$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间是同构的，但作为域则不同构.

2. 确定域 $\mathbb{Q}$ 的自同构群.

3. 证明：$\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$.

4. 求实数 $\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 在下述域上的极小多项式:

   (i) $\mathbb{Q}$;　(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;　(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

5. 设 E 是域 F 的扩张，$\alpha \in E$ 在 F 上的极小多项式是 $x^n - a$，对于正整数 $m \mid n$，求 α^m 在 F 上的极小多项式.

6. 设 E 是域 F 的扩张，$\alpha \in E$, 且 $\alpha \in F(\alpha^m)$, $m > 1$. 证明：α 是 F 上的代数元.

7. 设 α 是多项式 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$ 的一个根. 证明：$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$, 并且将 $\alpha^4, \alpha^{-1}, (1+\alpha)^{-1}$ 表示成 $1, \alpha, \alpha^2$ 的线性组合.

8. 设 E 是域 F 的扩张，$\alpha \in E$, 证明下述三个条件等价：

   (1) α 是 F 上的代数元；

   (2) $F[\alpha]$ 是 E 的子域；

   (3) $F[\alpha]$ 是 F 上的有限维向量空间.

9. 设 $F(\alpha)$ 和 $F(\beta)$ 是 F 上的两个单代数扩张.

   (i) 如果 α 和 β 在 F 上有相同的极小多项式，那么 $F(\alpha) \cong F(\beta)$;

   (ii) 当 $F(\alpha) \cong F(\beta)$ 时，α 和 β 在 F 上有相同的极小多项式是否相同？

10. 证明:

    (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$;

    (2) 若 p 为一个素数，则 $\mathbb{Q}(\sqrt{p}+\mathrm{i}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \mathrm{i})$.

11. 设 $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \mathrm{i})$, 求 $[E : \mathbb{Q}]$, 并写出 E 在 $\mathbb{Q}$ 上的一组基.

12. 求 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} : \mathbb{Q}]$.

13. 设域扩张链 $F \subset L \subset E$, $[L : F] = m$, $\alpha \in E$, $[F(\alpha) : F] = n$. 证明：如果 m, n 互素，那么 α 也是 L 上的 n 次代数元.

14. 设 E 是域 F 的扩张，$\alpha \in E$ 是 F 上的奇数次代数元. 证明：α^2 也是 F 上的奇数次代数元，且 $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.

15. 设 E 是域 F 的代数扩张，$F \subset D \subset E$，其中 D 是环. 证明: D 是域.

16. 设 p 是一个素数，证明：$\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt[3]{p}, \sqrt[4]{p}, \cdots)/\mathbb{Q}$ 是无限次代数扩张.

17. 设 α, β 分别是 F 上的 m, n 次代数元. 证明：

    (1) $[F(\alpha, \beta) : F] \leq mn$;

    (2) 如果 m, n 互素，那么 $[F(\alpha, \beta) : F] = mn$.

18. 设 E 是域 F 的 m 次扩张，设 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中的 n 次不可约多项式，且 m, n 互素. 试问 $f(x)$ 是 $E[x]$ 中的不可约多项式吗？

19. 设 $f(x) = x^3 - b$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式, α 是其一个根，证明：$\mathbb{Q}(\alpha)$ 不是 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域.

20. 求多项式 $f(x) = x^4 - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域 E 并求 $[E : \mathbb{Q}]$.

21. 求下述多项式分别在 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的分裂域：

    (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$,　　(2) $g(x) = x^3 - 5x^2 + 10x - 12$.

22. 求 $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ 的所有子域.

23. 设 $f(x) \in F[x]$, $a \in F$. 证明: $f(x)$ 和 $f(x - a)$ 在 F 上有相同的分裂域.

24. 求 $\sqrt{1 + \sqrt{5}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式 $m(x)$，以及 $m(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域 E, 并求 $[E : \mathbb{Q}]$.

25. 找出域 $\mathbb{Z}_2$ 上全部三次不可约多项式.

26. 称有限域 F_q 上不可约多项式 $f(x)$ 为 $F_q[x]$ 中的本原多项式，如果 $f(x)$ 的一个根 α 是域 $F_q(\alpha)$ 的乘法循环群的生成元.

    (1) 证明: $x^2 + 1$ 为 $\mathbb{Z}_3[x]$ 中不可约多项式但不是本原多项式;

    (2) 设 α 为 $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ 的一个根, 试问 $F_9 = \mathbb{Z}_3(\alpha)$ 中哪些元是 F_9 的本原元.

27. 证明：对正整数 k, $a \in F_q \backslash \{0\}$ 是 F_q 中某个元素的 k 次方幂当且仅当 $a^{(q-1)/d} - 1$, 其中 $d = (q - 1, k)$.

28. 证明：有限域不是代数闭域.

29. 设 p 是素数, $E = \mathbb{Z}_p(\alpha)$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 上的超越扩张，证明：多项式 $f(x) = x^p - \alpha$ 在 $E[x]$ 中不可约，且 $f(x)$ 只有一个 p 重根.

30. 设 p 是素数, 证明：$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{p^n}$ 是代数闭域.

31. 证明：尺规可以三等分 $45°$ 角.