苏州大学金融工程研究中心
2023–2024 学年第二学期期末考试复习提纲

最后一次更新于 2024 年 7 月 1 日

课程名称: **金融随机分析**　　　作者: 熊雄

Problem 1. *令 $\{B_t, t \ge 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \Im, P)$ 上的一维标准布朗运动, $B_0 = 0$.*

(1) 证明 $\{B_t, t \ge 0\}$ 和 $\{B_t^2 - t, t \ge 0\}$ 均为鞅;

(2) 令 $T = \inf\{t : B_t \notin [a, b], a < 0 < b\}$, 求 B_T 的分布;

(3) 对 $r > 0$, 定义 $M_t := \int_0^t e^{rs} dB_s, t \ge 0,$, 求 $\{M_t\}$ 的二次变差过程 $\{\langle M \rangle_t, t \ge 0\}$;

(4) 求 M_t 的分布;

(5) 求时间变换 $\tau = \tau(t)$, 使 $W_t = M_{\tau(t)}$ 为标准布朗运动;

(6) 令 $T_0 = \inf\{t : M_t \notin [a, b], a < 0 < b\}$, 求 M_T 的分布;

(1) ***Proof.*** $\forall 0 \le s \le t$, 我们有

$$\mathbb{E}\left[B_t | \Im_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s + B_s | \Im_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s | \Im_s\right] + \mathbb{E}\left[B_s | \Im_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s\right] + B_s = B_s,$$

和

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_t^2 - t | \Im_s\right] &= \mathbb{E}\left[B_t^2 - B_s^2 + B_s^2 \middle| \Im_s\right] - t \\
&= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 + 2B_t B_s - B_s^2 \middle| \Im_s\right] - t \\
&= \mathbb{E}\left[(B_t - B_s)^2 \middle| \Im_s\right] + 2\mathbb{E}\left[B_t B_s | \Im_s\right] - \mathbb{E}\left[B_s^2 \middle| \Im_s\right] - t \\
&= (t - s) + 2B_s^2 - B_s^2 - t \\
&= B_s^2 - s,
\end{aligned}$$

故 $\{B_t, t \ge 0\}$ 和 $\{B_t^2 - t, t \ge 0\}$ 均为鞅. □

(2) ***Solution.*** 由 B.M. 的常返性知, T 为有界停时, 从而 $\mathbb{E}[B_T] = \mathbb{E}[B_0] = 0$. 令

$$T_a := \inf\{t : B_t = a\}, \quad T_b := \inf\{t : B_t = b\}, \quad T = \min\{T_a, T_b\},$$

故

$$P(B_T = a) = P(T_a < T_b), \quad P(B_T = b) = P(T_a \ge T_b).$$

从而有

$$\begin{cases} \mathbb{E}(B_T) = a \cdot P(T_a < T_b) + b \cdot P(T_a \geqslant T_b) = 0 \\ P(T_a < T_b) + P(T_a \geqslant T_b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a} \\ P(T_a \geqslant T_b) = -\frac{a}{b-a} \end{cases}$$

则 B_T 的分布为

$$P(B_T = a) = \frac{b}{b-a}, \quad P(B_T = b) = -\frac{a}{b-a}.$$

(3) ***Solution.*** 由于 M_t 是一个 Itô 积分, 故由 Itô 积分的二次变差性质知

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \left(e^{rs}\right)^2 d\langle B \rangle_t = \int_0^t e^{2rs} ds = \frac{1}{2r}\left(e^{2rt} - 1\right), \quad t \ge 0.$$

(4) ***Solution.*** 由 Itô 积分的 Itô 等距性质知

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_t\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{rs} dB_s\right] = 0, \\
\mathbb{E}\left[M_t^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(e^{rs}\right)^2 ds\right] = \frac{1}{2r}\left(e^{2rt} - 1\right),
\end{aligned}$$

则

$$M_t \sim N\left(0, \frac{1}{2r}\left(e^{2rt}-1\right)\right).$$

(5) ***Solution.*** 取

$$\tau(t)=\inf\{s:\langle M\rangle_s>t\}=\inf\left\{s:\frac{1}{2r}\left(e^{2rs}-1\right)>t\right\}=\frac{1}{2r}\ln(2rt+1),$$

则 $W_t=M_{\tau(t)}=M_{\frac{1}{2r}\ln(2rt+1)}$, 又因为 $\langle M\rangle_t\to\infty,\quad t\to\infty$, 且 $M_0=0$, 故由 Dambis-Dubins-Schwarz 定理知, $W_t=M_{\tau_t}$ 为一维标准布朗运动.

(6) ***Solution.*** 由 (5) 知, 在时间变换 $\tau(t)=\frac{1}{2r}\ln(2rt+1)$ 下, $W_t=M_{\tau(t)}$ 为一维标准布朗运动. 从而

$$\tau(T_0)=\inf\left\{\tau(t):M_{\tau(t)}\notin[a,b],a<0<b\right\}=\inf\left\{\tau(t):W_t\notin[a,b],a<0<b\right\},$$

所以令 $\tau(T_0)=T$, $M_T=M_{\tau(T_0)}=W_{T_0}=B_{T_0}$, 故

$$P\left(B_T=a\right)=P\left(W_{T_0}=a\right)=P\left(M_T=a\right)=\frac{b}{b-a},$$
$$P\left(B_T=b\right)=P\left(W_{T_0}=b\right)=P\left(M_T=b\right)=-\frac{a}{b-a}.$$

Problem 2. *设 f,g,q 为有界函数, $v(t,x)$ 为下述初值问题的有界解:*

$$v_t(t,x)=\frac{1}{2}v_{xx}(t,x)+q(x)v_x(t,x)+g(x),\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R},$$
$$v(0,x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

则 $v(t,x)$ 可以表示为

$$v(t,x)=\mathbb{E}\left[f\left(x+B_t\right)e^{\int_0^t q(x+B_s)ds}+\int_0^t g\left(x+B_s\right)e^{\int_0^s q(x+B_r)dr}ds\right],$$

其中 $\{B_t,t\geq 0\}$ 为一维标准布朗运动.

Proof. 定义

$$M_s:=v(t-s,x+B_s)e^{\int_0^s q(x+B_v)dv}+\int_0^s g(x+B_v)e^{\int_0^s q(x+B_r)dr}dv,$$

则

$$\begin{aligned}
dM_s &= e^{\int_0^s q(x+B_v)dv}\left[dv(t-s,x+B_s)+q(x+B_s)vds\right]+g(x+B_s)e^{\int_0^s q(x+B_r)dr}ds\\
&= e^{\int_0^s q(x+B_v)dv}\left[-v_sds+v_xdB_s+\frac{1}{2}v_{xx}ds+q(x+B_s)vds\right]+g(x+B_s)e^{\int_0^s q(x+B_r)dr}ds\\
&= e^{\int_0^s q(x+B_v)dv}\left[\left(-v_s+\frac{1}{2}v_{xx}+q(x+B_s)v+g(x+B_s)\right)ds+v_xdB_s\right]\\
&= e^{\int_0^s q(x+B_v)dv}v_xdB_s,
\end{aligned}$$

因此 M_s 为一个局部鞅, 由于 f,g,q 为有界函数, 故

$$\sup_{0\leq s\leq t}|M_s|\leq e^{\|q\|_\infty t}\left[\|v\|_\infty+t\|g\|_\infty\right]<\infty,$$

有界局部鞅是鞅, 因此 M_s 为一个鞅, 从而 $\mathbb{E}\left[M_0\right]=\mathbb{E}\left[M_t\right]$, 而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_0\right] &= v(t,x),\\
\mathbb{E}\left[M_t\right] &= \mathbb{E}\left[f\left(x+B_t\right)e^{-\int_0^t q(x+B_s)ds}+\int_0^t g\left(x+B_s\right)e^{-\int_0^s q(x+B_r)dr}ds\right],
\end{aligned}$$

故得证. □

Problem 3. *设 f,g,q,p 为有界连续函数, $v(t,x)$ 为下述初值问题的有界解:*

$$v_t(t,x)=\frac{1}{2}v_{xx}(t,x)+q(x)v_x(t,x)+p(x)v(t,x)+g(x),\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R},$$
$$v(0,x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

求 $v(t,x)$ 的 *Feynman-Kac* 表示式.

Solution. 猜测

$$v(t,x)=\mathbb{E}\left[f\left(x+Z_t\right)e^{\int_0^t p(x+Z_s)ds}+\int_0^t g\left(x+Z_r\right)e^{\int_0^r p(x+Z_u)du}dr\right],$$

设 $dZ_t=q(Z_t)dt+dB_t$, $Z_0=0$, 其中 B_t 为标准布朗运动. 定义

$$I_1=v(t-s,x+Z_s),\quad I_2=e^{\int_0^s p(x+Z_u)du},\quad I_3=\int_0^s g\left(x+Z_u\right)e^{\int_0^u p(x+Z_r)dr}du,$$

定义 $M_s:=I_1I_2+I_3$. 则

$$\begin{aligned}
dI_1&=dv(t-s,x+Z_s)=-v_tds+v_xdZ_s+\frac{1}{2}v_{xx}d\langle Z\rangle_s,=\left[-v_t+q(Z_s)v_x+\frac{1}{2}v_{xx}\right]ds+v_xdB_s\\
dI_2&=I_2p\left(x+Z_s\right)ds,\\
dI_3&=g\left(x+Z_s\right)e^{\int_0^s p(x+Z_u)du}ds=g\left(x+Z_s\right)I_2ds.
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
dM_s&=d\left(I_1I_2+I_3\right)\\
&=I_1dI_2+I_2dI_1+d\langle I_1,I_2\rangle+dI_3\\
&=vp\left(x+Z_s\right)I_2ds+g\left(x+Z_s\right)I_2ds+I_2\left\{\left[-v_t+q(Z_s)v_x+\frac{1}{2}v_{xx}\right]ds+v_xdB_s\right\}\\
&=I_2\left[\frac{1}{2}v_{xx}+qv_x+pv+g-v_t\right]ds+I_2v_xdB_s\\
&=I_2v_xdB_s,
\end{aligned}$$

因此 M_s 为一个局部鞅, 由于 f,p,q,v 为有界函数, 故

$$\sup_{0\le s\le t}|M_s|\le e^{\|p\|_\infty t}\left[\|v\|_\infty+t\|g\|_\infty\right]<\infty,$$

有界局部鞅是鞅，因此 M_s 为一个鞅，从而 $\mathbb{E}\left[M_0\right]=\mathbb{E}\left[M_t\right]$, 而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_0\right]&=v(t,x),\\
\mathbb{E}\left[M_t\right]&=\mathbb{E}\left[f\left(x+Z_t\right)e^{\int_0^t p(x+Z_s)ds}+\int_0^t g\left(x+Z_r\right)e^{\int_0^r p(x+Z_u)du}dr\right],
\end{aligned}$$

故猜测正确.

Problem 4. 令 $\{B_t,t\ge 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\Im,P)$ 上的一维标准布朗运动, $\mu\ge 0$ 为常数, 求一与 P 等价的测度 Q 使 $W_t=B_t+\mu t$ 为 $(\Omega,\Im,Q)$ 上的一维标准布朗运动. 若令 $M_t=\sup_{0\le s\le t}W_s$, 求 M_t 的分布.

Solution.

根据 Girsonov 定理, 应选择

$$\int_0^t\frac{1}{Z_s}d\langle B,Z\rangle_s=-\mu t=\int_0^t-\mu ds=\int_0^t-\mu d\langle B\rangle_s.$$

Z_t 可表示为 $Z_t=1+\int_0^t H_sdB_s$, 则有 $\langle B,Z\rangle_s=\int_0^t H_sds$, 代入有

$$\frac{H_s}{Z_s}=-\mu\Longrightarrow Z_t=1+\int_0^t\left(-\mu Z_s\right)dB_s,$$

该方程有唯一解

$$Z_s=e^{-\mu B_t-\frac{1}{2}\mu^2t},$$

故对 $\forall A\in\Im$, 所求概率 $Q(A)=\mathbb{E}\left[I_AZ_t\right]$.

W_t 为测度 Q 下的标准布朗运动, 下述 $P(\cdot)$ 为 Q 下的概率. 由反射原理知

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0\le s\le t} W_s \ge b, W_t \le a\right) &= P\left(\sup_{0\le s\le t} W_s \ge b, W_t \ge 2b-a\right) \\ &= P\left(W_t \ge 2b-a\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{2b-a}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}}dx. \end{aligned}$$

对上式关于 a 和 b 分别求微分, 可得到 $\sup_{0\le s\le t} W_s$ 和 W_t 的联合密度函数

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0\le s\le t} W_s \ge db, W_t \le da\right) &= \frac{\partial^2}{\partial a\partial b}P\left(\sup_{0\le s\le t} W_s \ge b, W_t \le a\right)dadb \\ &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}}\right)dadb \\ &= \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}}dadb, \end{aligned}$$

其中 $a, b \in \{(b,a) : a \le b, b \ge 0\} \subset \mathbb{R}^2$, 对 $\forall b > 0$, 令 $x := 2c-a$,

$$\begin{aligned} P\left(M_t \ge b\right) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}}\iint_{\{a\le c, c\ge b\}}(2c-a)e^{-\frac{(2c-a)^2}{2t}}dadc \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}}\int_b^{+\infty}\int_{-\infty}^{c}(2c-a)e^{-\frac{(2c-a)^2}{2t}}dadc \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}}\int_b^{+\infty}\int_c^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2t}}dxdc \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_b^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx, \end{aligned}$$

则 M_t 的分布函数为 $F(x,t) := \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2t}}ds$.

Problem 5. 令 $\{B_t, t \ge 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \Im, P)$ 上的一维标准布朗运动, $\Im = \{F_t, t \ge 0\}$ 是其自然完备化过滤. 证明: 对任意 $t > s$, 任意有界 *Borel* 可测函数 f 有

$$\mathbb{E}\left[f(B_t)|F_s\right] = P_{t-s}f(B_s),$$

其中 $\{P_t, t \ge 0\}$ 为热半群. 特别有

$$\mathbb{E}\left[f(B_t)|F_s\right] = \mathbb{E}\left[f(B_t)|B_s\right] = G(B_s),$$

其中

$$G(x) = P_{t-s}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}dy.$$

Proof. 欲证明 B.M. 的马尔可夫性，即

$$\mathbb{E}\left[f(B_t)|F_t\right] = \mathbb{E}\left[f(B_t)|B_s\right]. \tag{1}$$

先证比(1)更一般的结论：对 $s, t \ge 0$ 且 $g = g(x,y)$ 有界可测，有

$$\mathbb{E}\left[g(B_s, B_{t+s}-B_s)|F_s\right] = \mathbb{E}\left[g(B_s, B_{t+s}-B_s)|B_s\right]. \tag{2}$$

设 $g(x,y) = g_1(x)g_2(y)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g(B_s, B_{t+s}-B_s)|F_s\right] &= \mathbb{E}\left[g_1(B_s)g_2(B_{t+s}-B_s)|F_s\right] \\ &= g_1(B_s)\mathbb{E}\left[g_2(B_{t+s}-B_s)|F_s\right] \\ &= g_1(B_s)\mathbb{E}\left[g_2(B_{t+s}-B_s)\right] \\ &= g_1(B_s)\mathbb{E}\left[g_2(B_{t+s}-B_s)|B_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[g(B_s, B_{t+s}-B_s)|B_s\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

现在令 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 中的矩形所形成的集合, 即 $\mathcal{A} = \{A_0 \times B_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), A_0, B_0 \in$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. $\mathcal{H}$ 是所有使(1)成立的有界函数 g 所组成的向量空间. 显然 $\mathcal{A}$ 是一个 π-系. 对 $\forall A \in \mathcal{A}, \exists A_0, B_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), s.t. A = A_0 \times B_0$. 取 $g_1 = I_{A_0}, g_2 = I_{B_0}$, 则(2)对 $g = I_A = I_{A_0 \times B_0}$ 成立, 从而 $I_A \in \mathcal{H}$. 由(2)(3), 单调类收敛定理和单调类定理知(2)对 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上所有有界可测函数成立. 特别取 $g(x,y) = f(x+y)$, 知(1)对任一 $\mathbb{R}^d$ 中有界可测函数成立.

因此,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[I_A(B_s)f(B_t)\right] &= \iint I_A(x)f(y)p(s,x)p(t-s,y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int I_A(x)P_{t-s}p(s,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathbb{E}\left[I_A(B_s)P_{t-s}f(B_s)\right].\end{aligned}$$

于是有

$$\mathbb{E}\left[f(B_t)|B_s\right] = P_{t-s}f(B_s),$$

则

$$\mathbb{E}\left[f(B_t)|F_s\right] = P_{t-s}f(B_s).$$

得证. □

***Problem* 6.** *令 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是概率空间 $(\Omega, \Im, P)$ 上的一维标准布朗运动, $\Im = \{F_t, t \geq 0\}$ 是其自然完备化过滤. T 为其自然完备化过滤 $\Im = \{F_t, t \geq 0\}$ 的一个有界停时, 令 $W_t = B_{t+T} - B_T, t \geq 0$. 证明:*

(1) $\{W_t, t \geq 0\}$ 与 T 独立;

(2) $\{W_t, t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动.

Proof. (1) 因为 T 是 $\Im$ 上的一个有界停时, 故存在 $K > 0$, 使得 $T < K$. 因为布朗运动具有独立增量, 故 $W_t = B_{t+T} - B_T$ 与 B_T 独立, 故 $\{W_t, t \geq 0\}$ 与 T 独立.

(2) 因为

$$W_t - W_s = B_{t+T} - B_T - (B_{s+T} - B_T) = B_{t+T} - B_{s+T} = B_{t-s} = B_t - B_s,$$

则对 $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{T\langle\xi, W_t - W_s\rangle\right\}\middle| F_s\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{T\langle\xi, B_t - B_s\rangle\right\}\middle| F_s\right] = \exp\left\{-\frac{(t-s)\left|\xi\right|^2}{2}\right\},$$

故 $\{W_t, t \geq 0\}$ 为一维标准布朗运动。

得证. □