数学模型与数学软件

第 3 次作业

1907402030

熊　雄*

2022 年 3 月 21 日

*mrxiongx@foxmail.com　苏州大学数学科学学院本科生

Problem 1

(Page 64-66 Ex.1.)

在 n 个节点上 (n 不要太大, 如 $5-11$) 用拉格朗日、分段线性、三次样条三种插值方法, 计算 m 个插值点的函数值 (m 要适中, 如 $50-100$). 通过数值和图形输出, 将三种插值结果与精确值进行比较. 适当增加 n, 再对结果作比较分析. 函数选择为

$$y=\cos^{10}x,\quad -2\le x\le 2.$$

Solution.

一、代码实现

先编写 Lagrange 插值的函数:

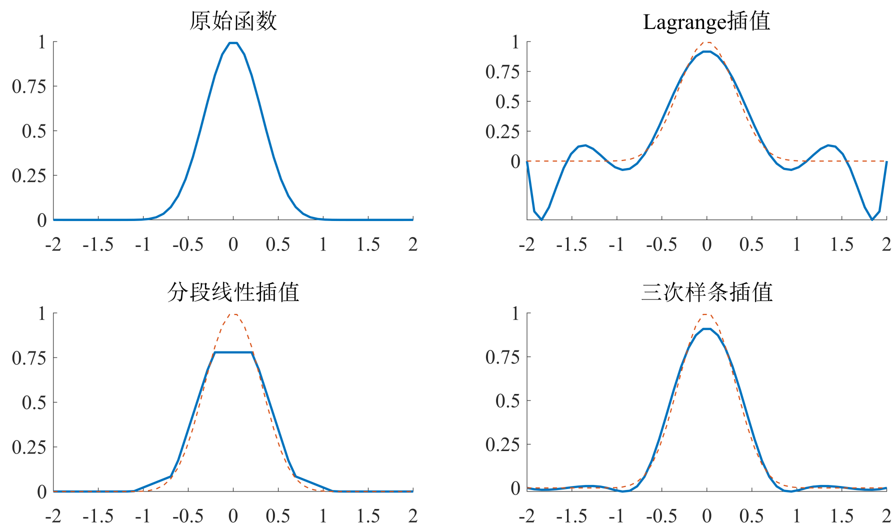
```
% 拉格朗日插值
% 注意程序中用 n 个节点, 而不是 n+1 个节点
% n 个节点以数组 x0, y0 输入, m 个插值点以数组 x 输入, 输出数组 y 为 m 个插值
function y = lagr(x0, y0, x)
n = length(x0);
m = length(x);
for i = 1 : m
    z = x(i);
    s = 0;
    for k = 1 : n
        p = 1;
        for j = 1 : n
            if j ~= k
                p = p * (z - x0(j)) / (x0(k) - x0(j));
            end
        end
        s = p * y0(k) + s;
    end
    y(i) = s;
end
```

我们在 n 个节点上用拉格朗日、分段线性、三次样条三种插值方法, 计算 m 个插值点的函数值. Matlab 代码如下:

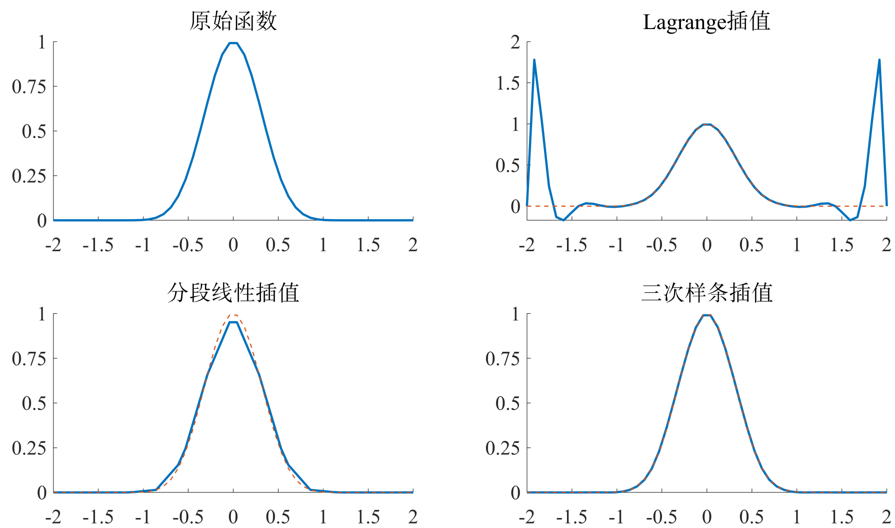
```
n = 10;
m = 50;
x = linspace(-2,2,m); %m 个插值点
x0 = linspace(-2,2,n); %n 个节点
y0 = (cos(x0)).^10; %插值条件
y_truth = (cos(x)).^10;
y_lagr = lagr(x0, y0, x); %Lagrange 插值
y_interp = interp1(x0, y0, x); %分段线性插值
y_spline =  interp1(x0, y0, x, 'spline'); %三次样条插值
subplot(2,2,1), plot(x, y_truth), title('原始函数')
subplot(2,2,2), plot(x, y_lagr), hold on, plot(x, y_truth,'--'), title('Lagrange插值')
subplot(2,2,3), plot(x, y_interp),hold on, plot(x, y_truth,'--'), title('分段线性插值')
subplot(2,2,4), plot(x, y_spline),hold on, plot(x, y_truth,'--'), title('三次样条插值')
```

二、图像输出

我们先令 $n = 10$，$m = 50$，可以生成如下图象：



适当增加 n，令 $n = 15$，$m = 50$，可以生成如下图象：



三、结果分析

- 通过对数值解输出与所作图像，可以看出上述插值方法中，使用三次样条插值法结果最为精确，而拉格朗日插值法结果相对最不精确；
- 分段插值法在 n 的两种取值下精确度都相对高；
- $n = 5$ 时三种插值方法所求得的结果与真实值相比都不甚准确，因此要获得更精确的结果，n 应考虑选取较多的节点. ■

Problem 2

(Page 64-66 Ex.4.)

用梯形方法、辛普森方法和 Gauss-Lobatto 方法三种方法计算积分. 改变步长 (对梯形方法), 改变精度 (对辛普森方法和 Gauss-Lobatto 方法), 对计算结果进行比较、分析. 函数选择为:

$$y = \frac{e^{-0.5x^2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad -2 \le x \le 2.$$

Solution.

一、代码实现

先建立一个函数 M 文件:

```
function y = ex2_hanshu(x)
    y = exp ( - 0.5 * x .^ 2) / sqrt (2 * pi ) ;
end
```

计算积分的 Matlab 代码如下:

```
%梯形公式
format long;
n = 100;  %将 [-2,2]n 等分
x = -2 : 4 / n : 2;
y = ex2_hanshu(x);
z1 = trapz(y) * 4 / n
%辛普森公式
z2 = quad(@ex2_hanshu ,-2 , 2)
%Gauss-Lobatto 公式
z3 = quadl(@ex2_hanshu , -2 , 2)
```

二、计算结果

上述代码输出为

$$z1 = 0.954470941689636,$$

$$z2 = 0.954499794857669,$$

$$z3 = 0.954499736102396.$$

我们可以通过改变精度, 令梯形公式中的 n 适当增大到 500, 在辛普森公式和 Gauss-Lobatto 公式增加一个绝对误差 $\mathrm{tol} = 10^{-8}$ 的参数, 代码如下:

```
%梯形公式
format long;
n = 500;  %将 [-2,2]n 等分
x = -2 : 4 / n : 2;
y = ex2_hanshu(x);
z1 = trapz(y) * 4 / n
```

```
%辛普森公式
z2 = quad(@ex2_hanshu ,−2 , 2, 10^(−8))
%Gauss−Lobatto 公式
z3 = quadl(@ex2_hanshu , −2 , 2 , 10^(−8))
```

可以得到如下提高精度后的输出结果

$$z1 = 0.954498584297585,$$

$$z2 = 0.954499736171375,$$

$$z3 = 0.954499736102396.$$

三、结果分析

- Gauss-Lobatto 公式的计算结果与真实值最接近, Simpson 公式次之, 梯形公式精确度最低;
- 将上述代码中梯形公式的 n 值增大, 辛普森公式和 Gauss-Lobatto 公式的 tol 值减小, 可以提高数值积分计算的精度.
- 上述三种数值积分计算方式都能够达到保证小数点后五位数的精度. ■

Problem 3

(Page 64-66 Ex.10.)

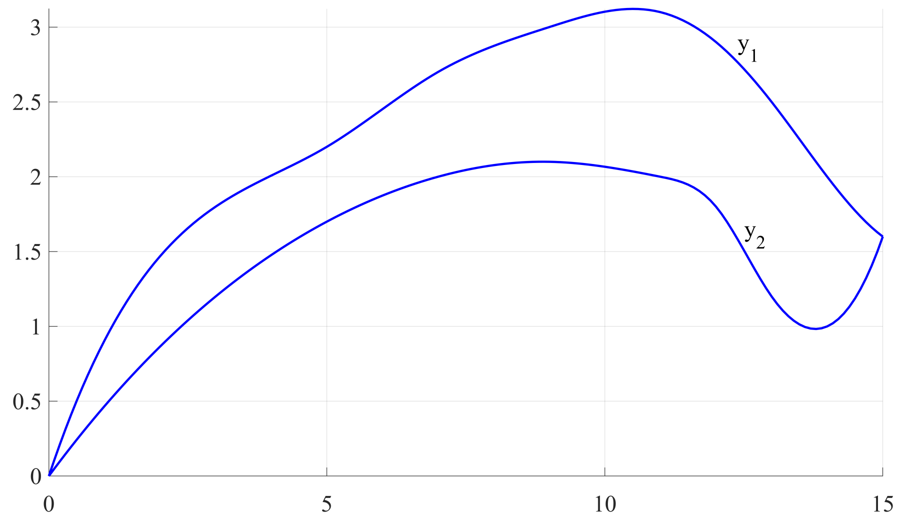
表 3.7 给出的 x, y 数据位于机翼剖面的轮廓线上, y_1 和 y_2 分别对应轮廓的上下线. 假设需要得到 x 坐标每改变 0.1 时的 y 坐标. 试完成加工所需数据, 画出曲线, 求机翼剖面的面积.

Solution.

Matlab 代码如下:

```
x0 = [0 3 5 7 9 11 12 13 14 15];
y1 = [0 1.8 2.2 2.7 3.0 3.1 2.9 2.5 2.0  1.6]; %上线
y2 = [0 1.2 1.7 2.0 2.1 2.0 1.8 1.2 1.0  1.6]; %下线
x = 0 : 0.1 : 15;
y3 = spline(x0, y1, x); %上线插值
y4 = spline(x0, y2, x); %下线插值
plot(x, y3,'b'), hold on, plot(x, y4,'b'); %作图
gtext('y_1');
gtext('y_2');
s = trapz(x, y3 - y4) %计算积分
```

可以输出图像如下:



输出 s 的结果为 11.3444, 即, **机翼剖面的面积为 11.3444.** ■

Problem 4

(Page 64-66 Ex.12.)

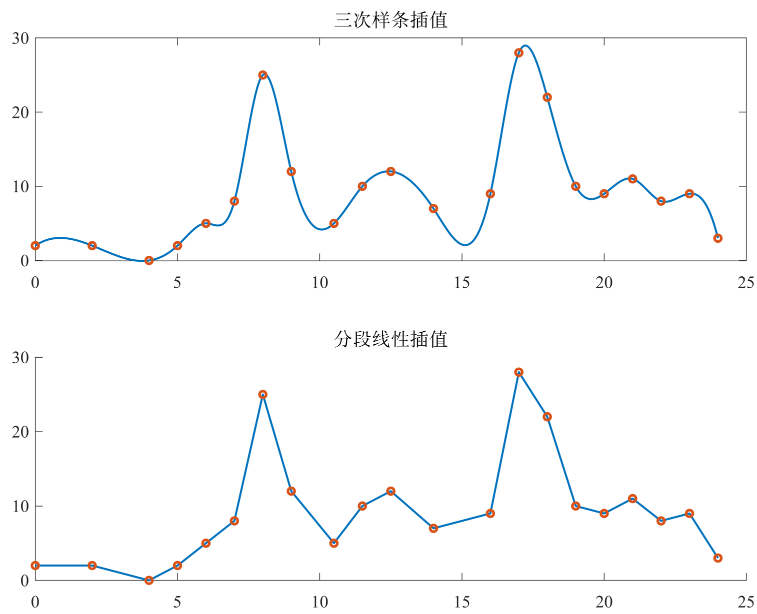
在桥梁的一端每隔一段时间记录 1min 有几辆车过桥, 得到表 3.9 的过桥车辆数据. 试估计一天通过桥梁的车流量 (分别采用三次样条和分段线性插值计算).

Solution.

Matlab 代码如下:

```
t = [0, 2, 4, 5:9, 10.5:12.5, 14, 16:24];
h = [2, 2, 0, 2, 5, 8, 25, 12, 5, 10, 12, 7, 9, 28, 22, 10, 9, 11, 8, 9, 3];
t0 = 0: 1/60: 24;
h0 = spline(t, h, t0); %三次样条插值
h1 = interp1(t, h, t0); %分段线性插值
num_spline = sum(h0) %利用三次样条插值得到的结果
num_interp1 = sum(h1) %利用分段线性插值插值得到的结果
 %三次样条插值作图
subplot(2,1,1), plot(t0,h0), hold on, plot(t,h,'.'), title('三次样条插值');
%分段线性插值作图
subplot(2,1,2), plot(t0,h1), hold on, plot(t,h,'.'), title('分段线性插值');
```

可以得到如下图像:



输出的数值结果为

$$\text{num\_spline} = 1.2671e + 04,$$

$$\text{num\_interp1} = 1.2993e + 04.$$

即, **利用三次样条插值和分段线性插值估计得到的车流量分别为 12671 辆和 12993 辆.** ■