苏州大学数学模型与数学软件课程试卷　期中考试卷 共 6 页

考试形式 闭 卷 2017.05.15

院系数学科学学院　　年级＿＿＿＿级　　专业＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿　　成绩＿＿＿＿＿＿

一、(15 分) 在一个画面上建立四个坐标系, 并作出$x^4, x^5, e^x-2x, ln(x^2+1)+x$ 的图形, 要求选择适当的比例并添加x, y 轴和每个图形的小标题（只要求写出Matlab 程序）.

二、(15 分) 试确定求积节点x_0 和x_1 , 使得求积公式

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx 2(f(x_0)+2f(x_1))$$

具有尽可能高的代数精度, 并指出该求积公式的代数精度的次数.

解: 根据代数精度的定义, 如果

$$\int_{-2}^{2} x^k dx = 2(f(x_0)+2f(x_1)),\ k=0,1,2,\cdots,m.$$

而

$$\int_{-2}^{2} x^{m+1} dx \neq 2(f(x_0)+2f(x_1)).$$

那么, 该求积公式的代数精度为m.

因为当$f(x)=1$ 时, 左边$=\int_{-2}^{2} 1dx = 4$, 右边$=6$, 所以, 无论x_0, x_1 如何选取, 该求积公式都没有代数精度;

三、(20 分) 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

考虑下述迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(5-x_2^{(k)})/3, \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega(-6-x_1^{(k)})/3, \end{cases}$$

其中ω 为实数. 试分析ω 在何范围内取值时, 迭代格式对于任意初始点$x^{(0)} \in R^2$ 均收敛.

解: 迭代格式写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\omega & -\frac{\omega}{3} \\ -\frac{\omega}{3} & 1-\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5\omega}{3} \\ -2\omega \end{pmatrix}.$$

迭代矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1-\omega & -\frac{\omega}{3} \\ -\frac{\omega}{3} & 1-\omega \end{pmatrix}.$$

矩阵B 的特征方程为

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= \begin{vmatrix} \lambda-(1-\omega) & \frac{\omega}{3} \\ \frac{\omega}{3} & \lambda-(1-\omega) \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-(1-\omega))^2 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\lambda_1(\omega) = 1-\frac{2\omega}{3},\ \lambda_2(\omega) = 1-\frac{4\omega}{3}.$$

迭代收敛的充分必要条件为

$$\rho(B) = \max\{|\lambda_1(\omega)|, |\lambda_2(\omega)|\} < 1,$$

即

$$\left|1-\frac{2\omega}{3}\right| < 1,\ \left|1-\frac{4\omega}{3}\right| < 1.$$

解得$0<\omega<1.5$.

四、(15 分) 小型火箭初始质量为1400kg, 其中包括1080kg 燃料. 火箭竖直向上发射时燃料燃烧率为18kg/s, 由此产生32000 牛顿的推力，火箭引擎在燃料用尽时关闭，设火箭上升时空气阻力正比于速度的平方，比例系数为0.4kg/m. 要求: (1) 建立合适的数学模型，分析从初始时刻到引擎关闭瞬间火箭的高度与时间的关系; (2) 编写Matlab 程序求解该数学模型, 并作出火箭高度对于时间关系的图像(无需考虑火箭水平方向上的位置偏移) .

解: 记时刻t (单位: 秒) 时火箭高度为$h(t)$, 火箭向上推力$F=32000$ 牛, 火箭重力$G=(1400-18t)g$, 火箭受到的阻力$f=0.4v(t)^2$, 根据牛顿运动定律,

$$\begin{cases} (1400-18t)\dfrac{d^2h(t)}{dt^2} = F-G-f, \\ h(0)=0,\ \left.\dfrac{dh(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

五、(20 分) 试分析非线性方程$x-\ln x=2$ 在$(2,+\infty)$ 内的根的个数, 并分别采用迭代公式

$$x_{k+1} = \ln x_k + 2, \qquad x_{k+1} = \frac{x_k + x_k \ln x_k}{x_k - 1}$$

进行数值求解, 试分析这两种方法的计算效果(取初始点$x_0 = 3.5$). 如果已知两个初始点x_0, x_1, 试建立一个新的收敛的迭代公式.

解: 记$f(x) = x - \ln x - 2$, 则$f'(x) = 1 - 1/x$, 当$x > 2$ 时, $f'(x) > 0$. 又

$$f(3) = 3 - \ln 3 - 2 = 1 - \ln 3 < 0,\ f(4) = 4 - \ln 4 - 2 = 2 - \ln 4 > 0.$$

故方程$f(x) = 0$ 在$(2, +\infty)$ 内存在唯一解$x^* \in [3, 4]$.

第一个迭代公式的迭代函数$\varphi_1(x) = \ln x + 2$, 则$\varphi_1'(x) = 1/x$, 当$x \in [3, 4]$ 时, $|\varphi_1'(x)| \le 1/3 < 1$. $\varphi_1(x) \in [\varphi_1(3), \varphi_1(4) \subseteq [3, 4]$, 第一个迭代公式对任意$x_0 \in [3, 4]$ 都收敛, 由于$\varphi_1'(x^*) \neq 0$, 所以是一阶收敛的.

第二个迭代公式的迭代函数

$$\varphi_2(x) = \frac{x + x\ln x}{x - 1}.$$

所以,

$$\begin{aligned}\varphi_2'(x) &= \frac{(1 + \ln x + x \cdot \frac{1}{x})(x-1) - (x + x\ln x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x - \ln x - 2}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2'(x) &= \frac{(1 - \frac{1}{x})(x-1)^2 - (x - \ln x - 2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{x})(x-1) - 2(x - \ln x - 2)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)^2 - 2xf(x)}{x(x-1)^3}.\end{aligned}$$

设x^* 是$f(x) = 0$ 的解, 则$\varphi_2'(x^*) = 0$,

$$\varphi_2''(x^*) = \frac{(x^* - 1)^2 - 2x^* f(x^*)}{x^*(x^{-}1)^3} = \frac{(x^* - 1)^2}{x^*(x^{-}1)^3} = \frac{1}{x^*(x^* - 1)} \neq 0.$$

所以, 第二个迭代公式是二阶收敛的.

新的迭代公式采用割线法, 这个方法是收敛的, 收敛速度介于一阶与二阶之间(称为超线性收敛).

注: 因为$f'(x)=1-1/x$, 所以, 牛顿迭代公式为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k-\frac{x_k-\ln x_k-2}{1-1/x_k} \\ &= x_k-\frac{x_k(x_k-\ln x_k-2)}{x_k-1} \\ &= =\frac{x_k^2-x_k-x_k(x_k-\ln x_k-2)}{x_k-1} \\ &= \frac{x_k+x_k\ln x_k}{x_k-1}. \end{aligned}$$

六、(15 分) 假定一个植物园要培育某种植物, 这种植物由三种可能基因型AA, Aa 及aa 的某种分布组成, 植物园的管理者要求采用的育种方案是: 子代总体中的每种作物总是用基因型AA 的作物来授粉, 子代的基因型的分布如下表

		亲代的基因型					
		AA-AA	AA-Aa	AA-aa	Aa-Aa	Aa-aa	aa-aa
子代的基因型	AA	1	1/2	0	1/4	0	0
	Aa	0	1/2	1	1/2	1/2	0
	aa	0	0	0	1/4	1/2	1

问: 在任何一个子代总体中这三种可能基因型的分布表达式如何表示? 根据此表达式指出时间充分长以后这三种基因型作物在总体中所占的比例. (注: 记a_n, b_n, c_n 分别为第n 代中AA, Aa 及aa 基因型作物在总体中所占的比例, 写出递推关系并进行分析).

解: 根据题意, 递推关系为

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+0.5b_{n-1}, \\ b_n=c_{n-1}+0.5b_{n-1}, \\ c_n=0,\ (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

矩阵形式$x^{(n+1)}=Mx^{(n)}, n=1,2,\cdots$, 其中,

$$x^{(n+1)}=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix},\ x^{(n)}=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然有$x^{(n)} = M^n x^{(0)} =$. 经过分析, 矩阵M 可对角化, 经计算有$M = PDP^{-1}$, 其中,

$$D = diag(0, 0.5, 1),\ P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以,

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= PD^nP^{-1}x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} diag(0, 0.5^n, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 - 0.5^n & 1 - 0.5^{n-1} \\ 0 & 0.5^n & 0.5^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{cases} a_n = 1 - 0.5^n b_0 - 0.5^{n-1} c_0, \\ b_n = 0.5^n b_0 + 0.5^{n-1} c_0, \\ c_n = 0,\ (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

显然, $a_n \to 1$, $b_n \to 0$, $c_n = 0$.