2015年实变函数 期末A卷

熊雄

1 判断题（每题3分，共30分）

1.1 存在定义在可数集上的不可测函数。

错误，课本P63 eg4.1.2。可数集是零测集，由例子知，定义在零测集上的函数一定是可测函数。

1.2 可测函数列的上极限一定是可测函数。

正确，课本P66 Thm4.1.7：可测函数列的上极限、下极限、上确界、下确界均为可测函数。。

1.3 可测函数可以表示为简单可测函数列的极限。

正确，课本P67 Thm4.1.9。

1.4 若在集合E上，f_n几乎处处收敛于f，则f_n依测度收敛于f。

错误，课本P70 Thm4.3.1（Lebesgue Thm），还需要满足$m(E) < \infty$。

1.5 f_n在E上几乎处处收敛于f，则f_n近一致收敛于f。

错误，课本P69 Thm4.2.1（Egoroff Thm），还需要满足$m(E) < \infty$。

1.6 绝对连续函数一定是有界变差函数。

正确，课本P127 引理6.4.1。

1.7 连续的有界变差函数一定是绝对连续函数。

错误，课本P119 eg6.1.1 Cantor函数。

1.8 若$f(x)$在$[a,b]$上Lebesgue可积，则$F(x) = \displaystyle\int_{[a,x]} f(t)dt \ (a \leq x \leq b)$在$[a,b]$上几乎处处可导。

正确，由课本P127 Lemma6.4.3知，F在$[a,b]$为绝对连续函数，因此f在$[a,b]$必为有界变差的，由推论6.2.5知，F在$[a,b]$上几乎处处可微。

1.9 存在$[a,b]$上的严格单调递增连续函数f满足$f'(x)=0$在$[a,b]$几乎处处成立。

1.10 若$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，则$f(x)$在$[a,b]$上的Lebesgue可积且积分相等。

正确，课本P94 Thm5.6.2。

2 叙述Fatou引理和Lebesgue积分的定义（12分）

课本P86 Thm5.2.8(Fatou Thm)

设$\{f_k(x)\}$是E上的非负可测函数列，则$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx \le \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$

3 $f(x)$是可测集E上的实值函数，若对任意的实数t，$\{x|f(x)=t\}$是可测集，则$f(x)$是E上的可测函数吗？并论证你的结论（10分）

课本P74 eg4.5.2

不一定. 例如，在R^+中取一个不可测集E，令$f(x)=\begin{cases} x, & x\in E; \\ -x, & x\in \mathbb{R}^+\setminus E. \end{cases}$

4 若在E上有$\{f_k\}$依测度收敛于f，$\{g_k\}$依测度收敛于g。则f_k+g_k依测度收敛于$f+g$（10分）

解法一（课本P80 d13 利用定义）：

$\forall\varepsilon>0$，有$\{x||f_k+g_k-f-g|>\varepsilon\}\subset\{x||f_k-f|>\dfrac{\varepsilon}{2}\}\cup\{x||g_k-g|>\dfrac{\varepsilon}{2}\}$

所以

$$m\left(\{x||f_k+g_k-f-g|>\varepsilon\}\right)\le m(\{x||f_k-f|>\frac{\varepsilon}{2}\})+m(\{x||g_k-g|>\frac{\varepsilon}{2}\})\to 0$$

i.e. f_k+g_k依测度收敛于$f+g$.

解法二（课本P77 eg4.5.13 利用Risze Thm）：略

5　设$f(x), f_k(x)$是E上可测函数，若$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx=0$，试证明 $\{f_k\}$依测度收敛到f。（**10**分）

课本P104 eg5.8.12

$\forall\varepsilon>0$，we have

$$\begin{aligned}\varepsilon\cdot m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}) &\leq \int_{\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}}|f_k(x)-f(x)|dx\\ &\leq\int_E|f_k(x)-f(x)|dx\to 0\ \ (k\to\infty)\end{aligned}$$

So，$\lim\limits_{k\to\infty} m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0$

i.e. $\{f_k\}$依测度收敛到f.

6　求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx$的值。（**10**分）

课本P109 eg5.8.23

令$f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=e^{-x}:=f(x)$.

7　试证明$T_a^b(f)=0$当且仅当$f(x)=const$.（**10**分）

课本P136 d2

一方面，若$f(x)=C$，则$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=0$，因此$T_a^b(f)=0$;

另一方面，若$T_a^b(f)=0$，则$\forall x\in[a,b]$，有$|f(x)-f(a)|\leq T_a^b(f)=0$，所以得到$f(x)=f(a)\ \ (a\leq x\leq b)$。

8　证明：$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{x},\ x\neq 0; \\ 0,\ x=0. \end{cases}$为$[0,1]$上有界变差函数。（8分）

课本P122 eg6.2.2 & eg6.2.3 改编

当$x\neq 0$时，$|f'(x)|=\left|2x\cos\frac{\pi}{x}-\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq\sqrt{4x^2+1}\leq\sqrt{5}$.

当$x=0$时，限制$0<h\leq 1$，$|f'(0)|=\left|\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\right|=|h\cos\frac{\pi}{h}|\leq 1$.

因此，$|f'(x)|\leq\sqrt{5}$，则$f(x)$必为有界变差函数.