

苏州大学 复变函数 课程试卷 (A)卷

(考试形式 线上限时开卷 2022 年 6 月)

注意事项:

- (1) 禁止上网搜索答题.
- (2) 对计算题和证明题, 都必须写出完整的过程, 并对每一步说明理由. 计算题只有答案将不给分. 答题纸每页都要书写学号+姓名, 右上角书写答题纸页码.
- (3) 考试结束后15分钟内完成答卷提交. 将答卷通过电子邮件打包并以PDF格式发送到以下邮箱, 文件以学号+姓名命名. 同时将答卷提交到QQ教学群.

梁兵兵老师 bbliang@suda.edu.cn

沈玉良老师 ylshen@suda.edu.cn

- (4) 务必将答卷同时提交到QQ教学群和电子邮箱, 不允许修改后重复提交.

一. (30分) 计算下列积分.

1) $I = \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+9z+20} dz$. (本小题6分)

2) $I = \int_C \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} dz$, 其中 C 是不经过1的周线. (本小题8分)

3) $I = \int_{|z|=10} \frac{z^{34}}{(z+1)(z^3+3)^3(z^5+5)^5} dz$. (本小题8分)

4) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+5x^2+4} dx$. (本小题8分)

二. (15分) 指出函数 $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$ 在扩充复平面上的所有奇点, 并确定其类型, 若是极点, 要指出相应的阶.

三. (15分) 求出将下半单位圆 $D = \{z = x + iy : |z| < 1, y < 0\}$ 变为垂直带形区域 $\Omega = \{w = u + iv : 0 < u < \frac{3\pi}{2}\}$ 的一个共形变换.

四. (10分) 假设 $f(z)$, $g(z)$ 在区域 D 内解析. 若对一切 $z \in D$ 有 $|f(z)| = |g(z)|$, 则 $f(z)$ 与 $g(z)$ 有何关系? 试对你的断言加以证明.

五. (8分) 设 $f(z)$ 在有界区域 G 内解析, 且在 G 中存在无穷多个零点, 那么 $f(z)$ 在 G 中恒等于零吗? 如果正确, 请证明; 如果错误, 请举出反例.

六. (12分) 设 G 为一有界区域. 利用鲁歇定理证明当 n 充分大时, 多项式 $1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n$ 在 G 中没有零点.

七. (10分) 设 γ 为复平面中以 a 为圆心, 以 R 为半径的圆周. z_1, z_2, z_3 是 γ 上的任意三点, 而 z, z^* 为复平面中关于 γ 的对称点. 利用分式线性变换的保交比性证明

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

附加题(计入总分). (10分) 设函数 f 和 g 是区域 D 上的非常数解析函数. 证明 $|f| + |g|$ 在 D 内不能取到最大值.