

第十次作业 7.16, 7.19, 7.21 +3道补充习题

7.16 随机地从一批钉子中抽取16枚,测得其长度为(单位:cm):

2.14 2.10 2.13 2.15 2.13 2.12 2.13 2.10 2.15 2.12

2.14 2.10 2.13 2.11 2.14 2.11

设钉长的分布为正态分布,分别对下列两种情况求出总体均值 μ 的90%置信度的置信区间.

(i)已知 $\sigma = 0.01\text{cm}$. (ii) σ 未知.

解. (i) σ 已知.

根据题意

$$\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 2.125, u_{0.95} = 1.645.$$

故

$$\bar{x} - u_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

即所求区间为(2.1209, 2.1291).

(ii) 在 σ 未知时, μ 的90%置信度的置信区间为

$$\left(\bar{\xi} - \frac{t_{0.95}(15)S_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + \frac{t_{0.95}(15)S_n^*}{\sqrt{n}} \right).$$

代入数据得(2.1175, 2.1325).

□

7.19 随机地取某种炮弹9发做试验, 得炮口速度的方差的无偏估计 $s_n^{*2} = (11\text{m/s})^2$. 设炮口速度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 分别求出这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 和方差 σ^2 的置信水平为90%的置信区间.

解. σ^2 和 σ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间分别为

$$\left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \right)$$

及

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S_n^*}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}S_n^*}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}} \right).$$

由题意得, $n = 9$, $\alpha = 0.1$, $s_9^{*2} = 121$. 查表得

$$\chi_{0.95}^2(8) = 15.507, \chi_{0.05}^2(8) = 2.733.$$

代入公式,得 σ^2 的置信水平为90% 的置信区间为

$$\left(\frac{8 \times 121}{15.507}, \frac{8 \times 121}{2.733} \right) = (62.42, 354.19).$$

σ 的置信水平为90% 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{8 \times 121}{15.507}}, \sqrt{\frac{8 \times 121}{2.733}} \right) = (7.9, 18.8).$$

□

7.21 有两位化验员A,B, 他们独立地对某种聚合物的含氯量用相同的方法各作了10次测量, 其测量定值的方差无偏估计 s_n^{*2} 依次为0.5419和0.6065. 设 σ_A^2 和 σ_B^2 分别为A,B的测量的数据的母体的方差, 母体服从正态分布, 求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为90%的置信区间.

解. σ_A^2/σ_B^2 的一个置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_A^{*2}}{S_B^{*2}} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_A^{*2}}{S_B^{*2}} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right).$$

由题意得, $n_1 = n_2 = 10$, $\alpha = 0.1$, $s_A^{*2} = 0.5419$, $s_B^{*2} = 0.6065$.

$$F_{0.95}(9, 9) = 3.18, F_{0.05}(9, 9) = \frac{1}{F_{0.95}(9, 9)} = \frac{1}{3.18}.$$

故所求区间为

$$\left(\frac{0.5419}{0.6065} \times \frac{1}{3.18}, \frac{0.5419}{0.6065} \times 3.18 \right) = (0.2810, 2.8413).$$

□

□

补充题:

1. 设某种清漆的9个样品, 其干燥时间(以小时记)分别为

6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求 μ 的置信水平为0.95 的一个单侧置信上限:

(1) 若由以往经验知 $\sigma = 0.6$ (小时);

(2) 若 σ 未知.

2. 设某厂生产的电阻的阻值 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现从该总体中随机抽取9个, 测得阻值如下(单位: Ω):

9.9, 10.1, 10.2, 9.7, 9.9, 9.9, 10, 10.5, 10.2

求 σ^2 的一个置信水平为0.95 的单侧置信上限.

3. 设总体 $X \sim N(\mu_1, 16)$, $Y \sim N(\mu_2, 9)$, X_1, \dots, X_{15} 是来自总体 X 的样本, Y_1, \dots, Y_{20} 是来自总体 Y 的样本, 且两样本相互独立, 测得他们的样本均值分别为 $\bar{x} = 14.5$, $\bar{y} = 13.4$, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为0.95 的单侧置信下限.

1. 设某种油漆的9个样品, 其干燥时间(以小时记)分别为

6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求 μ 的置信水平为 0.95 的一个单侧置信上限:

- (1) 若由以往经验知 $\sigma = 0.6$ (小时);
(2) 若 σ 未知.

解: $n=9$, $\alpha=0.05$, $\bar{x}=6$.

(1) $\sigma=0.6$ 已知,

$u_{0.95} = 1.645$, 故 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信上限为

$$\bar{\mu} = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{0.95} = 6 + \frac{0.6}{3} \times 1.645 = 6.129.$$

(2) σ 未知, $t_{0.95}(8) = 1.8595$, $s_n^2 = 0.33$,

$$\bar{\mu} = \bar{x} + \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{0.95}(8) = 6 + \frac{\sqrt{0.33}}{3} \times 1.8595 \approx 6.3561.$$

2. 设某厂生产的电阻的阻值 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 现从该总体中随机抽取 9 个, 测得阻值如下(单位: Ω):

9.9, 10.1, 10.2, 9.7, 9.9, 9.9, 10, 10.5, 10.2

求 σ^2 的一个置信水平为 0.95 的单侧置信上限.

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{0.95}^2(8)} = \frac{8 \times 0.0553}{2.733} \approx 0.162$$

$$\chi_{0.05}^2(8)$$

3. 设总体 $X \sim N(\mu_1, 16)$, $Y \sim N(\mu_2, 9)$, X_1, \dots, X_{15} 是来自总体 X 的样本, Y_1, \dots, Y_{20} 是来自总体 Y 的样本, 且两样本相互独立, 测得他们的样本均值分别为 $\bar{x} = 14.5$, $\bar{y} = 13.4$, 求 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 &= \bar{x} - \bar{y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} u_{0.95} = 14.5 - 13.4 - \sqrt{\frac{16}{15} + \frac{9}{20}} \times 1.645 \\ &\approx -0.9259 \end{aligned}$$