第九次作业 6.30

6.30 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为取自正态母体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个子样, 在下列三个统计量

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)^2,$$
$$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)^2,$$
$$S_3^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)^2$$

中, 哪一个是σ^2 的无偏估计, 哪一个对σ^2 的均方误差$E\left(S_i^2-\sigma^2\right)^2$ 最小, $i=1,2,3.$
解: 由定理5.4可知, $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$. 设随机变量$\eta\sim\chi^2(m)$, 则

$$E\eta=m,D\eta=2m.\tag{1}$$

因此可知

$$E\left[\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S_1^2\right]=E\left[\frac{1}{\sigma^2}nS_2^2\right]=E\left[\frac{1}{\sigma^2}(n+1)S_3^2\right]=n-1,$$

即

$$ES_1^2=\sigma^2,ES_2^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2,ES_3^2=\frac{n-1}{n+1}\sigma^2,$$

故S_1^2 是σ^2 的无偏估计. 下面再考虑S_i^2 的均方误差. 由(7) 可得

$$D\left(\frac{1}{\sigma^2}(n-1)S_1^2\right)=2(n-1)\Rightarrow D\left(S_1^2\right)=\frac{2(n-1)\sigma^4}{(n-1)^2}=$$
$$D\left(\frac{1}{\sigma^2}nS_2^2\right)=2(n-1)\Rightarrow D\left(S_2^2\right)=\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$$
$$D\left(\frac{1}{\sigma^2}(n+1)S_3^2\right)=2(n-1)\Rightarrow D\left(S_2^2\right)=\frac{2(n-1)\sigma^4}{(n+1)^2}$$

14 因为$E\left(S_i^2-\sigma^2\right)^2=E\left[\left(S_i^2-ES_i^2\right)+\left(ES_i^2-\sigma^2\right)\right]^2=DS_i^2+2\left[E\left(S_i^2-ES_i^2\right)\right]\cdot\left(ES_i^2-\sigma^2\right)+\left(ES_i^2-\sigma^2\right)^2=DS_i^2+\left(ES_i^2-\sigma^2\right)^2$, 所以

$$E\left(S_1^2-\sigma^2\right)^2=D\left(S_1^2\right)+\left(ES_1^2-\sigma^2\right)^2=\frac{2\sigma^4}{n-1},$$
$$E\left(S_2^2-\sigma^2\right)^2=D\left(S_2^2\right)+\left(ES_2^2-\sigma^2\right)^2=\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}+\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2-\sigma^2\right)^2=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4,$$
$$E\left(S_3^2-\sigma^2\right)^2=D\left(S_3^2\right)+\left(ES_3^2-\sigma^2\right)^2=\frac{2\sigma^4}{n-1}=\frac{2(n-1)\sigma^4}{(n+1)^2}+\left(\frac{n-1}{n+1}\sigma^2-\sigma^2\right)^2=\frac{2}{n+1}\sigma^4.$$

比较可知$\frac{2}{n-1}>\frac{2n-1}{n^2}\geq\frac{2}{n+1}$, 且当$n\geq 2$ 时后一个不等式严格成立, 即S_3^2 的均方误差最小.