# 2013年实变函数 期末A卷

熊雄

## 1 判断题（每题3分，共30分）

### 1.1 可数个可数集的并不一定是可数集。

正确，课本P8 Thm1.4.3。

### 1.2 Cantor集为闭的零测集。

正确，课本P34 Sect2.7。

### 1.3 定义在零测集上的函数一定是可测函数。

正确，课本P63 eg4.1.2。

### 1.4 若在集合$E$上，$f_n$几乎处处收敛于$f$，则$f_n$在$E$上依测度收敛于$f$。

错误，还需要满足$m(E) < +\infty$。

### 1.5 可测函数列的极限（如果存在）不一定是可测函数。

错误，课本P66 推论4.1.8，若可测函数列$\{f_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$，则$f(x)$为$E$上的可测函数。

### 1.6 有界变差函数可能不连续，而连续函数也可能不是有界变差函数。

### 1.7 连续的有界变差函数一定是绝对连续函数。

错误，课本P133 注6.5。绝对连续函数一定是连续函数，绝对连续函数一定是有界变差函数，连续的有界变差函数不一定是绝对连续函数。

### 1.8 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，尽管$f(x)$的不连续点是零测集，但$f(x)$不一定Riemann可积。

错误，课本P93 Thm5.6.1。满足题目条件的$f(x)$一定Riemann可积。

**1.9　若$f(x)$在$[a,b]$上Lebesgue可积，则$F(x)=\displaystyle\int_{[a,x]} f(t)dt\ (a\le x\le b)$在$[a,b]$上绝对连续。**

正确，课本P127 Lemma6.4.3。

**1.10　$f(x)$是在可测集$E$上的可测函数，则$f$在$E$上Lebesgue可积等价于$|f|$在$E$上Lebesgue可积**

正确，显然。

## 2　叙述Fatou引理和Levi单调收敛定理（10分）

**课本P86 Thm5.2.8(Fatou Thm)**

设$\{f_k(x)\}$是$E$上的非负可测函数列，则$\displaystyle\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx \le \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$

**课本P83 Thm5.2.2(Levi单调收敛定理)**

设有定义在$E$上的非负可测函数渐升列：$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le\ldots\le f_k(x)\le\ldots$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)\ \ (x\in E)$，则$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx.$

## 3　$f(x)$是可测集$E$上的实值函数，若对任意的实数$t$，$\{x|f(x)=t\}$是可测集，则$f(x)$是$E$上的可测函数吗？并论证你的结论（10分）

**课本P74 eg4.5.2**

不一定. 例如，在$\mathbb{R}^+$中取一个不可测集$E$，令$f(x)=\begin{cases} x,\ \ x\in E; \\ -x,\ x\in\mathbb{R}^+\setminus E. \end{cases}$

此时$\forall t\in\mathbb{R}$, $\{x\in\mathbb{R}^+|f(x)=t\}$为可测集满足题目条件。当$t>0$时，$\{x\in\mathbb{R}^+|f(x)>t\}$包含于$E$，即为不可测集，因此$f(x)$不是$E$上的可测函数。

**4** 若在$E$上有$\{f_k\}$几乎处处收敛于$f$，$\{g_k\}$依测度收敛于$g$。则$f_k g_k$依测度收敛于$fg$（**10分**）

**课本P77 eg4.5.13**

**5** 设$f(x), f_k(x)(k=1,2,\ldots)$是$E$上的非负可测函数，若$\{f_k\}$几乎处处收敛于$f(x)$，且$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx$，试证明$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx=0$。（**10分**）

**课本P104 eg5.8.7**

对每个$k$，有$g(x):=f(x)+f_k(x)-|f(x)-f_k(x)|\geq 0$，对非负可测函数$g(x)$使用Fatou引理，我们有：

$$\begin{aligned}\int_E \varliminf_{k\to\infty} g(x)dx &\leq \varliminf_{k\to\infty}\left(\int_E g(x)dx\right)\\ &= \varliminf_{k\to\infty}\left(\int_E f(x)dx+\int_E f_k(x)dx-\int_E |f(x)-f_k(x)|dx\right)\\ &= 2\int_E f(x)dx-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|dx\end{aligned}$$

i.e. $2\int_E f(x)dx \leq 2\int_E f(x)dx-\varlimsup\limits_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|dx$

因为$f\in L(E)$，故$\int_E f(x)dx$积分确定，从而$\varlimsup\limits_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|dx\leq 0$

所以$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx=0.$

**6** 设$m(E)<+\infty$，$f^3(x)$是$E$上的非负可积函数，证明：$f^2(x)$在$E$上可积（**10分**）

**课本P110 d5**

记$E_1=\{x: f(x)>1\}$，$E_2=\{x: 0\leq f(x)\leq 1\}$，则$E=E_1\cup E_2$.

在$E_1$上，$f^3(x)\geq f^2(x)$，因此$f^2(x)$在$E_1$上可积.

在$E_2$上，$\int_{E_2} f^2(x)dx\leq m(E_2)\leq m(E)<+\infty$，因此$f^2(x)$在$E_2$上可积.

**7** 证明：$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续当且仅当$T_a^x(f)$绝对连续.（**10**分）

**课本P135 eg6.5.14**

**8** $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{2x^2},\ 0<x\le 1; \\ 0,\ x=0. \end{cases}$和
$g(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{2x},\ 0<x\le 1; \\ 0,\ x=0. \end{cases}$哪个是有界变差函数？哪个不是？并证明你的结论。（**10**分）

**课本P122 eg6.2.2改编**

$g(x)$是有界变差函数，$f(x)$不是有界变差函数，证明如下：

1. 首先说明$g(x)$是有界变差函数：

   当$x\neq 0$时，$|g'(x)|=\left|2x\cos\dfrac{\pi}{x}-\sin\dfrac{\pi}{x}\right|\le\sqrt{4x^2+1}\le\sqrt{5}$.

   当$x=0$时，限制$0<h\le 1$，$|g'(0)|=\left|\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)-g(0)}{h-0}\right|=|h\cos\dfrac{\pi}{h}|\le 1$.

   因此，$|g'(x)|\le\sqrt{5}$，则$g(x)$必为有界变差函数.

2. 下面说明$f(x)$不是有界变差函数：

   $\forall n\in\mathbb{N}$，作分割$\tau_n$：
   $x_0=0<\dfrac{1}{\sqrt{2n}}<\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}<\cdots<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1=x_n$.

   对于此分割我们有变差：

$$\begin{aligned}T_{\tau_n}(f)&=\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)-f(0)\right|+\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right|+\cdots\\&+\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|+\left|f(1)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\\&=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots\frac{1}{2}+1\end{aligned}$$

   由此可知：$T_a^b(f)=\infty$. 即$f(x)$不是有界变差函数.