苏州大学 数学分析III 课程 第二次测验　　共 6 页

(考试形式　闭卷　　2020 年 12 月 11 日)

院系______________年级______________专业______________

学号______________姓名______________成绩______________

一、　（10分）设 $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} xe^{xy^2}\,dy$. 求 $F'(x)$, 请说明理由.

解: 因为 $\sin x$, $\cos x$, xe^{xy^2} 连续可微, 所以 $F(x)$ 可微, 且

$$F'(x)=-x(e^{x\cos^2 x}\sin x+e^{x\sin^2 x}\cos x)+\int_{\sin x}^{\cos x} e^{xy^2}(1+xy^2)\,dy.$$

二、　（10分）计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-x}dx$, 请说明运算的合理性.

解: $$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\alpha}e^{-x}\sin xy\,dy$$

$$=\int_0^{\alpha}dy\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xy\,dx=\int_0^{\alpha}\frac{y}{1+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2).$$

验证: $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xy\,dx$ 在 $[0,\alpha]$ 上一致收敛.

三、（10分）求二重积分 $I=\iint\limits_D xy^2\cos y\,dxdy$, 其中 D 是由直线 $x=0$, $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y=\pi$ 及曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 围成的区域.

解: $$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dy\int_0^{\frac{1}{y}}xy^2\cos y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos y\,dy=-\frac{1}{2}.$$

四、（15分）设 D 是由直线 $x=0$, $y=1$, $y=2$ 和 $y=x$ 围成的梯形区域, $f(x,y)$ 是区域 D 上的连续函数. 试将二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化为:

(1) 先对 x 后对 y 的累次积分;　(2) 先对 y 后对 x 的累次积分;

(3) 极坐标下先对 r 后对 θ 的累次积分.

解: (1) $I=\displaystyle\int_1^2 dy\int_0^y f(x,y)\,dx.$

(2) $I=\displaystyle\int_0^1 dx\int_1^2 f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)\,dy.$

(3) $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr.$

五、 （15分）试用二重积分计算曲线 $(x-y)^2+x^2=1$ 所围成的椭圆的面积.

解: 令 $u=x-y$, $v=x$. 则 $x=v$, $y=v-u$. $J(u,v)=1$.
从而所求面积 $S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{u^2+v^2\le 1}|J(u,v)|\,dudv=\pi$.

六、 （15分）求三重积分 $I=\iiint\limits_V (2xy+z^2)\,dxdydz$, 其中 V 是椭球体 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2\le 1$.

解: 由对称性得 $\iiint\limits_V 2xy\,dxdydz=0$. 再利用截面法,

$$I=\iiint\limits_V z^2\,dxdydz=\int_{-1}^{1} z^2\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 4(1-z^2)} dxdy$$
$$=\int_{-1}^{1} 4\pi z^2(1-z^2)dxdy$$
$$=\frac{16}{15}\pi.$$

七、（15分）求曲面 $z=x^2+3y^2$ 与 $z=8-x^2-y^2$ 所围立体区域的体积.

解:　投影法. $V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_{x^2+2y^2\le 4} dxdy\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz$

$$=8\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\le 1}(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2})\,dxdy$$

$$=8\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)2\sqrt{2}r\,dr=8\sqrt{2}\pi.$$

或者　$V=2\iint\limits_{x^2+2y^2\le 4}(4-x^2-2y^2)\,dxdy=8\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}(4-x^2-2y^2)\,dy$

$$=8\int_0^2\frac{4}{3}(\frac{4-x^2}{2})^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=8\sqrt{2}\pi.$$

八、（10分）设 $F(y)=\int_0^1\frac{y^2}{f(x)(x^2+y^2)}\,dx$, 其中 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上正的连续函数.

(1) 证明: $F(y)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

(2) 问 $F(y)$ 在 $y=0$ 处是否连续? 请说明理由.

解:　(1) 略.

(2) 当 $y\ne 0$ 时,

$F(y)=\frac{y^2}{f(\xi)}\int_0^1\frac{1}{x^2+y^2}\,dx=\frac{y}{f(\xi)}\arctan\frac{1}{y}\le M|y|\to 0,\ y\to 0.$

所以, $\lim\limits_{y\to 0}F(y)=F(0)=0$. 函数 $F(y)$ 在 $y=0$ 处连续.