苏州大学 抽象代数 课程试卷(B)答案　共2页

(考试形式　闭卷　　2006年7月)

一.判断题.

(1). ($\surd$)
(2). ($\times$)
(3). ($\times$)
(4). ($\times$)
(5). ($\times$)
(6). ($\times$)
(7). ($\times$)
(8). ($\surd$)
(9). ($\times$)
(10). ($\times$)

二.证明:　根据R 是可交换环及理想的定义即可证得.

三.　证明: 若R 的所有非零元的阶都无限, 则结论显然成立。下面假设R 中存在阶有限的非零元。

设$a \in R$ 且$a \neq 0$, a 的阶有限, 令$|a| = n$。设b 是R 中的任意一个非零元, 则有$(nb)a = b(na) = b0 = 0$, 而R 中没有零因子, 所以$nb = 0$。于是b 的阶也有限且$|b| \leq n = |a|$。对称地有$|a| \leq |b|$, 所以$|a| = |b|$, 从而R 的所有非零元的阶都为n。

四.　因为整数环$\mathbb{Z}$ 为主理想整环.
"$\Rightarrow$" 若p 不是素数,则存在正整数n, m 满足$1 < n, m < p$, 使得$p = nm$. 所以$(p) \subsetneqq (n) \subsetneqq \mathbb{Z}$ 从而与(p) 是极大理想矛盾.

"$\Leftarrow$" 利用整数环$\mathbb{Z}$ 为主理想整环及p 是素数, 若(p) 不是整数环$\mathbb{Z}$ 的极大理想, 则存在R 的真理想N 使得$(p) \subsetneqq N \subsetneqq R$, 即$\exists q \in N$ 但$q \notin (p)$, 从而可知$(p, q) = 1$, 即$\exists r, s \in \mathbb{Z}$ 使得$rp + sq = 1$, 从而可得$N = R$ 矛盾, 所以(p) 是整数环$\mathbb{Z}$ 的极大理想.

五. 证明: “$\Rightarrow$”由$a|b$且$b|a$ 知存在$c,d\in R$ 使$b=ac$, $a=bd$, 于是$a=acd$。若$a=0$, 则$b=ac=0$, 故$a=b$; 若$a\neq 0$, 则由$a=acd$ 消去a 得$cd=1$, 所以c,d为R 的单位。因而总存在单位ε 使$a=\varepsilon b$。

“$\Leftarrow$”若有单位ε使$a=\varepsilon b$, 则$b=\varepsilon^{-1}a$, 所以$a|b$且$b|a$, 即a与b相伴。

六. 证明:“$\Rightarrow$”因为设$(a,b)=(d)$, 则$a\in(d), b\in(d)$ 得$d\mid a, d\mid b$, 即d 是a,b 的公因子, 又由于$(a,b)\subseteq(a)+(b)$ 得到$d\in(a)+(b)$, 从而可知$s,t\in R$ 使得$d=sa+tb$.

“$\Leftarrow$”由d 是a,b 的公因子可知则$d\mid a$ 且$d\mid b$, 于是$(a)\subseteq(d)$ 且$(b)\subseteq(d)$, 从而$(a,b)\subseteq(d)$. 再由$d=sa+tb$ 得到$(d)\subseteq(a,b)$, 从而综上可得$(a,b)=(d)$.

七. 证明: 设N 是$\mathbb{Z}$ 的理想, 若$N=0$, 则显然N 是主理想,下面假设$N\neq 0$. 则N中N 中含有非零整数, 令a 是N 中非零正整数中最小者, 则对于$\forall b\in N$ 均$\exists q,r\in Z$使得$b=qa+r$ 其中$r=0$ 或$0<r<a$, 于是$r=b-qa\in N$. 由a 的极小性可知$r=0$, 所以$b=qa\in(a)$, 从而$N=(a)$ 是主理想, 即命题得证.