第四部分　　积分学

第一讲　定积分和重积分的基本计算

基本内容: 分部积分、变量代换、有理分式积分、无理函数积分、万能代换、用对称性求定积分、用递推公式求积分；重积分化为累次积分、柱变换、球变换、微元法.

§4.1　一元积分的基本计算

分部积分法　设 $u(x)$ 与 $v(x)$可微, 则 $\int u\,dv=uv-\int v du$.

"反对幂三指"的经验公式, 这儿"反"、"对"、"幂"、"三"与"指"依次是反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数与指数函数, 积分时, 一般应将排列次序在后面的函数优先与 dx 结合成为 dv.

无理函数积分　一般来说, 无理函数的不定积分并不总是积得出来的, 例如, 即使不太复杂的二项式微分式的积分$\int x^m(a+bx^n)^p dx$, 其中 a,b为常数, m,n,p 为有理数, 也仅仅在 $p,\dfrac{m+1}{n}$或 $\dfrac{m+1}{n}+p$为整数这样三种特殊情况下才能积得出来, 其余情况下, 二项式微分式都积不出来.

对于形如 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ $(n>1$ $ad-bc\neq 0)$ 的不定积分, 一般只要令 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, 就可以将其化为有理函数积分.

对于形如 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx, a\neq 0$(其中 R为有理分式) 的不定积分, 可以利用Euler变换或三角变换化为有理函数进行积分. 当　ax^2+bx+c 化为$|a|(u^2+k^2)$, $|a|(u^2-k^2)$, $|a|(k^2-u^2)$　三种类型时，　分别用$u=k\tan t$, $u=k\sec t$, $u=k\sin t$　转化为三角有理式。

Euler 变换　$\sqrt{ax^2+bx+c}=\begin{cases} t\pm\sqrt{a}, & a>0;\\ tx\pm\sqrt{c}, & c>0;\\ t(x-\alpha), & ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta). \end{cases}$

倒代换　$x+a=\dfrac{1}{t}$.

定积分第一中值定理　设 $f(x)\in R[a,b]$, $g(x)\in R[a,b]$且不变号, 记

$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x),\ m=\inf_{x\in[a,b]}f(x),$$

则存在 $\eta\in[m,M]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\eta\int_a^b g(x)dx.$$

如果 $f(x)\in C[a,b]$, $g(x)\in R[a,b]$ 且不变号, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

特别, 如果 $f(x)\in C[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

定积分第二中值定理　设 $f(x)\in R[a,b]$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)d(x).$$

特别, 如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升且 $g(x)\geqslant 0$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\xi^b f(x)d(x);$$

如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少且 $g(x)\geqslant 0$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

（定积分第二中值定理的条件在不同的教科书中要求是不同的, 这儿叙述的是条件最弱的一种, 其证明可见通常的教科书. 在实际应用定积分第二中值定理解决具体问题时, 往往不需要这么强的形式, 最常见的条件是“ $f(x)\in C[a,b]$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且 $g'(x)\leqslant 0$(或 $\geqslant 0$) $(x\in(a,b)$”. 对这种形式的第二积分中值定理, 我们将在例题中给出其证明.）

对称性在定积分计算中的应用

设积分区间关于原点对称, 例如为$[-a,a]$ $(a>0)$. 则容易知道, 当被积函数f 是奇函数, 即其图像关于原点为中心对称时, 就有$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$; 而当$f$ 为偶函数, 即其图像关于y 轴为对称时, 就有$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

推广1 设函数f 在区间$[a,b]$ 上可积, 则成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x,$$

特别当积分区间为$[0,a]$ 时则有 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$.

推广2 设函数f 在区间$[0,a]$ 上可积, 且有$f(x)=f(a-x)$, 即关于区间的中点为偶函数(也就是关于直线$x=a/2$ 为偶函数), 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

推广3 设函数f 在区间$[0,a]$ 上可积, 且有$f(x)=-f(a-x)$, 即关于区间的中点为奇函数, 则成立

$$I=\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

例 1.　计算 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

例 2.　计算 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

例 3.　计算 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

例 4.　计算 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ (类似计算$I_m=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x}$ $(m\geqslant 2,\, m\in\mathbb{N})$).

例 5. 计算 $I=\int \min\{|x|,\ x^2\}\mathrm{d}x$.

例 6. 计算 $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

例 7. 证明 $I=\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x>0$.

例 8. 计算 $I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x$ (比较$I=\int_1^{e}\sin\ln x\mathrm{d}x$).

例 9. 计算 $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{\alpha}x},\quad \alpha>0$.

例 10. 计算 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

§4.2 重积分的基本计算

中心思想是化为累次积分.

二重积分的计算

1. 分区域积分: 当被积函数在积分区域的不同部分有不同的表达式时, 应分区域进行积分, 然后再相加.

2. 变量替换: 设$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad (u,v)\in D$ 满足:

① 建立了D与$\tilde{D}$之间的一一对应;

② x,y在D内具有关于各个变元的连续偏导数, 并且其逆变换$u=u(x,y), v=v(x,y)$ 在$\tilde{D}$内也具有关于各个变元的连续偏导数;

③ 替换的Jacobi行列式$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$在$D$内不为零点, 则

$$\iint\limits_{\tilde{D}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

通过选取适当的变量替换, 可以简化被积函数或积分区域. 为使积分简化可设法找出适当的坐标曲线网进行变量变换.

3. 利用对称性: 函数的奇偶性和积分区域的对称性常可用来简化积分的计算, 如

1. 积分区域D 关于x 轴对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(x,-y)$, 则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(x,-y)$, 则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D\cap\{y\geqslant 0\}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 积分区域D 关于y 轴对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(-x,y)$, 则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(-x,y$, 则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D\cap\{x\geqslant 0\}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. 若D 关于原点对称, 且有: (1) $f(x,y)=-f(-x,-y)$, 则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$; (2) $f(x,y)=f(-x,-y)$, 则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D_1$ 是D 关于原点对称的一半区域.

三重积分的计算

1. 将三重积分化为累次积分

① 先二重后单重: 对一般的积分区域V, 总可以写成

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\big|a\leqslant z\leqslant b,(x,y)\in D(z)\ \},$$

此时积分可以化为先二重积分后定积分:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

② 先单重后二重: 当积分区域为曲顶柱体时, 化为先单重后二重较为简单.

$$\begin{aligned}&V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big|\ (x,y)\in D,\ z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\},\\ &\Longrightarrow\iiint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

在确定积分区域中各变量的变化范围时, 一般应先画出积分区域的草图, 在比较简单的情况下, 也可从表达式中直接得出.

2. 三重积分的换元法

(1) 换元公式

设变换$x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w),\ (u,v,w)\in V'$满足条件:

① 建立了V与V'之间的一一对应;

② x,y,z在V内具有关于各个变元的连续偏导数, 并且其逆变换$u=u(x,y,z),\ v=v(x,y,z)$, $w=w(x,y,z)$在Ω内也具有关于各个变元的连续偏导数;

③ 变换的Jacobi行列式变$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ 在Ω' 内没有零点, 则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{v'}f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\Big|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\Big|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

(2) 广义柱坐标变换和广义球坐标变换

$$①柱坐标:\quad\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\\ z=z\end{cases}\qquad J=abr$$

$$②球坐标:\quad\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\end{cases}\qquad J=abcr^2\sin\varphi.$$

曲面面积的计算公式

我们用微分法给出一些曲面面积的计算公式. 假定曲面面积是存在的.

先设曲面S 由方程

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

表示, 其中D 是平面上可求面积的有界区域, $f(x,y)$ 是连续可微函数. 给定平面上一个小的可求面积区域ΔD , 我们用“以平代曲”的方法计算其对应的曲面微元ΔS, 即计算S 对应于ΔD 那部分的切平面面积, 以之取作ΔS 的近似值. 为此取$(\xi,\eta)\in\Delta D$. 设S 在$(\xi,\eta,f(\xi,\eta))$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

再记对应于ΔD 那部分的切平面面积为$\Delta\sigma$, 则由投影定理

$$\Delta\sigma=\frac{\Delta D}{|\cos\gamma|}.$$

根据法向量的表达, 有

$$\boldsymbol{n}=(f_x(\xi,\eta),f_y(\xi,\eta),\pm1).$$

因此

$$\cos\gamma=\frac{\pm1}{\sqrt{1+f_x^2(\xi,\eta)+f_y^2(\xi,\eta)}}.$$

即

$$\Delta S\approx\Delta\sigma=\sqrt{1+f_x^2(\xi,\eta)+f_y^2(\xi,\eta)}\Delta D.$$

这样我们就得到了面积微分

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x^2(\xi,\eta)+f_y^2(\xi,\eta)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

曲面面积即为

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(\xi,\eta)+f_y^2(\xi,\eta)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

如果曲面S 由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

表示, 其中D 是参数平面上可求面积的区域, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ 在D 上有连续偏导数, 则

$$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中

$$\begin{aligned}E&=x_u^2+y_u^2+z_u^2,\\F&=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,\\G&=x_v^2+y_v^2+z_v^2.\end{aligned}$$

因而

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例 1.　计算积分

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 5} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 2.　计算积分

$$I = \iint\limits_{D} \frac{3x}{y^2 + xy^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为平面曲线 $xy = 1$ 、 $xy = 3$ 、 $y^2 = x$ 和 $y^2 = 3x$ 所围成的有界闭区域.

例 3.　假设函数 $f(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 试将二重积分

$$I = \iint\limits_{\frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant x} f(\frac{y}{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为定积分.

例 4.　设坐标平面上有一周长为 $2\pi l$ 的椭圆 Γ , 在其上选定一点作为计算弧长 s 的起点, 以逆时针方向作为计算弧长的方向, 这时 Γ 有参数方程

$$\begin{cases} x = f(s), \\ y = \varphi(s), \end{cases} \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi l.$$

x 轴的正半轴绕原点作逆时针旋转, 首次转到与点 $(f(s),\ \varphi(s))$ 处切线正向一致时的倾角为 $\theta(s)$. 现记 D 为 Γ 的外部区域内与 Γ 的距离小于 l 的点所构成的区域.

(1) 如果用 t 表示 D 内一点 (x, y) 到 Γ 的距离, 试将 x 、 y 表成 s 、 t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(s,t), \\ y = y(s,t), \end{cases} \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi l,\ 0 < t < l.$$

(2) 用计算验证区域 D 的面积为 $3\pi l^2$.

例 5.　设

$$V = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \\ z \geqslant 0, \\ y^2 \geqslant 2zx. \end{array} \right\}$$

求积分: $I = \iiint\limits_V |y|\mathrm{d}V.$

例 6.　求曲面 $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$ 所围立体的体积.

例 7.　计算积分

$$I = \iiint\limits_V (y - z)\arctan z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由曲面 $x^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 = R^2,\ \ z = 0,$ 及 $z = h$ 所围之立体.

例 8.　计算积分

$$I = \iiint\limits_V \cos(ax + by + cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中，a, b, c 是不全为 0 的常数，V : $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

例 9. 设连续曲线 $z=\varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ 绕 z 轴旋转所得曲面为 Σ . 求 Σ 的面积 S .

例 10. 设 Σ 为圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 夹在平面 $x+y+2z=1$ 与 $z=0$ 的部分. 求 Σ 的面积 S .

第一讲练习题

1. 试把累次积分

$$I=\int_0^{R/\sqrt{1+R^2}} \mathrm{d}x \int_0^{Rx} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{R/\sqrt{1+R^2}}^{R} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

交换为先 x 后 y 的累次积分形式.

2. 将累次积分

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} \mathrm{d}y \int_0^x f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

化为在柱坐标系下的累次积分.

3. 求 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2 \leqslant 4$ 的公共部分, 且 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

4. 计算由下列曲面围成的立体体积:

   (a) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$, 其中 $a>0$;

   (b) $(x^2+y^2)^2+z^4=z$.

5. 计算积分

$$H=\iint\limits_{\substack{x,y,z \geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2}} \frac{xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}, \quad \text{其中 } a>b>c>0.$$

6. 计算下列曲面的面积:

   (a) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2-y^2$;

   (b) 连续曲线 $y=f(x)\ (\geqslant 0)$, $x \in [a,b]$ 绕 x 轴旋转所得曲面.

7. 计算抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 截下部分的面积.

8. 设 $H(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$, 其中 $A=(a_{ij})$ 是3 阶正定对称方阵. 求

$$I=\iiint\limits_{H(x) \leqslant 1} \mathrm{e}^{\sqrt{H(x)}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

9. 设

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 f 为连续函数，$f(1)=1$. 证明 $F'(1)=4\pi$.

10. 证明

$$1.96<\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<2.$$

11. 设 f 是连续函数, 证明

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(ku)\mathrm{d}u,$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

12. 设

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-z)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

其中 $A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>R>0$, 则

$$\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{A+R}\leqslant I\leqslant\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{A-R}.$$