一.(30')计算.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}$

(4) $y=x^{\cos x}$. 求 dy

(5) 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 确定

求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 和 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$

二.(10') 设 $f(x)=\begin{cases}x+\sin x^2, & x\le 0\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$，求 $f'(x)$

三.(10') 证明 $x>0$ 时 $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$

四.(20') 讨论函数 $y=xe^{-x}$ 的极值点与极值.
单调区间、凹凸区间.拐点及渐近线
并作出其图像.

五.(10') 求 $e^{\sin x}$ 的带有 $o(x^5)$ 余项的 Maclaurin 展开式

六.(10') 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$.
证明：存在 $x_0\in(a,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$.

七.(10') 设 $f_n(x)=x^n+x-1$，$n\in N_+$

(1) 证明：对任何 $n>1$，方程 $f_n(x)=0$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上有且仅有一个实根.

(2) 设 $a_n\in[\frac{1}{2},1]$ 是 $f_n(x)=0$ 的根，证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限.

$$a_n^n+a_n=a_{n+1}^{n+1}+a_{n+1}$$

$$a_n^n-a_{n+1}^{n+1}=a_{n+1}-a_n>0 \quad <0$$

$$=a_n^n\left[1-\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n\cdot a_{n+1}\right] \quad <1 \quad <1$$

一

(1).

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1 \qquad \therefore 原式=1$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2^x+3^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{2^x+3^x-2}\cdot\frac{2^x+3^x-2}{2x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{2x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln 2\cdot 2^x+\ln 3\cdot 3^x}{2}}$$

$$= e^{\frac{\ln 6}{2}}$$

$$= 6 - \sqrt{e}$$

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

(4). $y = x^{\cos x}$

$$\ln y = \cos x\cdot\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x\cdot\ln x + \frac{\cos x}{x}$$

$$\therefore\quad y' = \left(\frac{\cos x}{x} - \ln x\cdot\sin x\right)\cdot x^{\cos x}$$

$$\therefore\quad dy = \left(\frac{\cos x}{x} - \ln x\cdot\sin x\right)\cdot x^{\cos x}\,dx$$

(5) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\begin{cases} x = t \sin t \\ y' = \frac{\sin t}{1-\cos t} \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{1-\cos t}$$

$$= \frac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^3}$$

$$= -\frac{1}{(1-\cos t)^2}$$

$$\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = -1$$

二. $f(x) = \begin{cases} x + \sin x^2, & x \le 0 \\ \ln(1+x), & x > 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \cos x^2 \cdot 2x, & x \le 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$$

三. 证明: 设 $f(x) = \frac{\arctan x}{1+x} - \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1+x}{1+x^2} - \arctan x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{\frac{1+x}{1+x^2} - \arctan x - (1+x)}{(1+x)^2}$$

$$g(x)=\frac{1+x}{1+x^2}-\arctan x-(1+x)$$

$$g'(x)=\frac{1+x^2-(1+x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$=\frac{1+x^2-2x-2x^2-(1+x^2)-(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{-(x^4+4x^2+2x+1)}{(1+x^2)^2}<0$$

$g(x)\downarrow$　　$g(x)$在$x=0$点连续

$\therefore\ g(x)<g(0)=1-0-1=0$

$\therefore\ f'(x)<0$　　$f(x)$在$x=0$连续

$\therefore\ f(x)<f(0)=0$　　$\therefore$得证

(四). $f(x)=x\cdot e^{-x}$

$$f'(x)=e^{-x}+x\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$

$$=(1-x)e^{-x}$$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$\therefore\ f(x)$有极大值点$x=1$，极大值为$\frac{1}{e}$

$$f''(x)=-e^{-x}+(1-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$

$$=e^{-x}[-1+x-1]=(x-2)\cdot e^{-x}$$

$x\in(-\infty,2)$ 凹

$x\in(2,+\infty)$ 凸

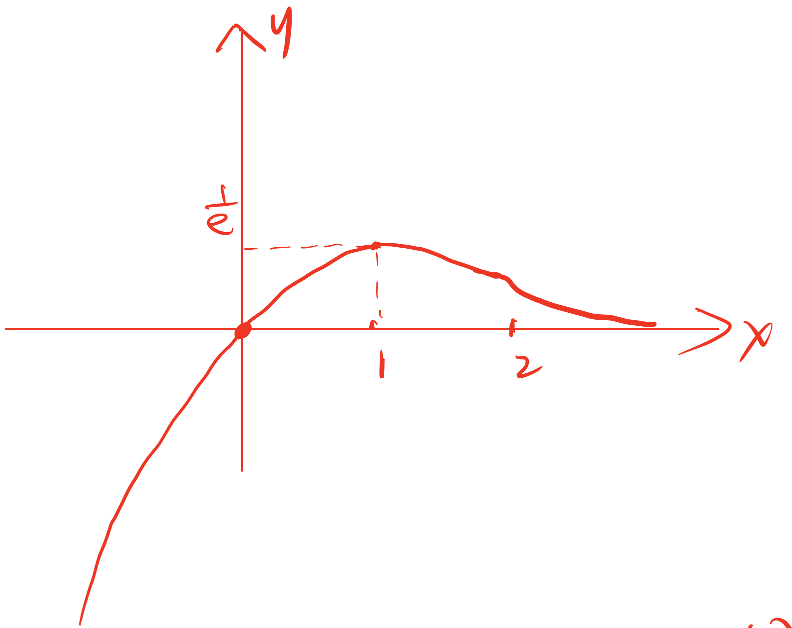
$f(2)=\frac{2}{e^2}$

拐点 $(2,\frac{2}{e^2})$

无垂直渐近线

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{-x}=0$$ 水平渐近线 $y=0$



$$1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

五、$y=e^{\sin x}$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$u=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$u^2=x^2+o(x^3)$ $u^3=x^3+o(x^3)$

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+o(x^3)$$

$$=1+x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)+\frac{x^2+o(x^3)}{2}+\frac{x^3+o(x^3)}{6}+o(x^3)$$

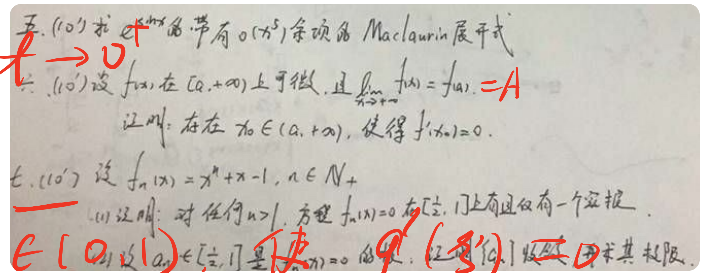
$$=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

六、 作变量替换 $x=\frac{1}{t}+a-1=\varphi(t)$

则 $\varphi(1)=a$ $\quad \varphi(t)\to+\infty \quad t\to 0^+$

$g(t)=f(\varphi(t))$ 在 $(0,1)$ 可导

$g(t)\to g(1)$. $\quad t\to 0^+$



五.(10′) 求 $e^{\sin x}$ 的带有 $o(x^5)$ 余项的 Maclaurin 展开式

六.(10′) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$ $=A$

证明: 存在 $x_0\in(a,+\infty)$, 使得 $f'(x_0)=0$.

七.(10′) 设 $f_n(x)=x^n+x-1$, $n\in N_+$

(1) 证明: 对任何 $n>1$, 方程 $f_n(x)=0$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上有且仅有一个实根.

(2) 设 $a_n\in[\frac{1}{2},1]$ 是 $f_n(x)=0$ 的根, 证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

令 $g(0)=g(1)$

∴由Rolle定理: 存在 $\xi'\in(0,1)$ 使 $g'(\xi')=0$

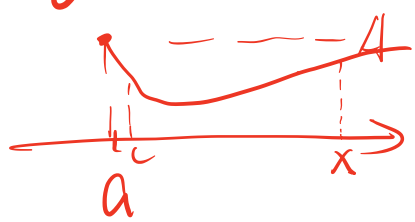
令 $\xi=\varphi(\xi')$

则 $f'(\xi)\cdot\varphi'(\xi')=0$ $\qquad \varphi'(\xi')=-\frac{1}{\xi'^2}\neq 0$

∴ $f'(\xi)=0$

或 必可取到一点 c, 使 $f(c)\neq A$.

否则 $f(x)\equiv A$, $\forall\xi$, $f'(\xi)=0$



不妨设 $f(c)<A$

取 $\varepsilon=\frac{A-f(c)}{2}>0$

$\exists X>c$, $\forall x>X$, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow \quad f(x)>A-\varepsilon=\frac{A+f(c)}{2}>f(c)$

$\forall b>X$, 则 $b>c$, $\quad f(b)>f(c)$

∵ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(x)$ 有最小值点 ξ,

又∵ $x=a$ 与 $x=c$ 不是 $f(x)$ 的最小值

∴ $\xi\in(a,c)$.

∴由 Format: $f'(\xi)=0$

七. (1). 略

(2). $a_n^n + a_n - 1 = 0$ $a_n \in [\frac{1}{2}, 1]$