数学模型与数学软件

第 11 次作业

1907402030

熊　雄*

2022 年 5 月 30 日

*mrxiongx@foxmail.com　苏州大学数学科学学院本科生

Problem 1

(Page 273 Ex.7.)

对于报童问题，如果报纸的需求量服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，且批发价为 $a = A\left(1-\frac{n}{K}\right)$，其中 n 为购进报纸的数量，K 为一个给定的常数．建立报童为获得最大利润的数学模型．当已知 $\mu = 2000$, $\sigma = 50$, $A = 0.5$, $K = 50000$, $b = 0.5$, $c = 0.35$ 时，为了获得最大的利润，求解报童每天购进的报纸数量 n.

Solution.

- **模型建立**

  设报童每天需求量为 r 的概率为 $f\left(r\right)$, 考虑 $r \to +\infty$.

  记报童每天购进报纸的份数为 n , 当 $r < n$ 时报童售出 r 份, 退回 $n-r$ 份, 而每售出一份赚 $b-a$, 退回一份赔 $a-c$, 所以报童的利润为 $\left(b-a\right)r-\left(a-c\right)\left(n-r\right)$; 当 $r \geq n$ 时, 报童将购进的 n 份全部售出, 利润为 $n\left(b-a\right)$. 在这两种情况下将利润与需求概率 $f\left(r\right)$ 相乘并求和, 就得到报童每天的平均利润 $V\left(n\right)$, 即

$$V\left(n\right) = \sum_{r=0}^{n-1}\left[\left(b-a\right)r-\left(a-c\right)\left(n-r\right)\right]f\left(r\right)+\sum_{r=n}^{\infty}\left[\left(b-a\right)n\right]f\left(n\right). \tag{1}$$

  问题则变为求 n 使 $V\left(n\right)$ 最大.

  由于报纸的需求量服从正态分布, 于是有

$$V\left(n\right) = \int_0^n\left[\left(b-a\right)r-\left(a-c\right)\left(n-r\right)\right]p\left(x\right)dx+\int_n^{\infty}\left[\left(b-a\right)n\right]p\left(x\right)dx$$

  其中 $p\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

  将题目中的数据代入可得

$$\begin{aligned}
V\left(n\right) &= \int_0^n\left[\left(b-a\right)r-\left(a-c\right)\left(n-r\right)\right]p\left(x\right)dx+\int_n^{\infty}\left[\left(b-a\right)n\right]p\left(x\right)dx\\
&= \int_0^n\left[nx\times10^{-5}-\left(0.15-n\times10^{-5}\right)\left(n-x\right)\right]p\left(x\right)dx+\int_n^{\infty}n^2\times10^{-5}p\left(x\right)dx\\
&= \int_0^n\left(n^2\times10^{-5}-0.15\left(n-x\right)\right)p\left(x\right)dx+\int_n^{\infty}n^2\times10^{-5}p\left(x\right)dx.
\end{aligned}$$

  再对 $V(n)$ 求导得

$$\begin{aligned}
V'\left(n\right) &= \int_0^n\left(2n\times10^{-5}-0.15\right)p\left(x\right)dx+n^2\times10^{-5}p\left(n\right)+\int_n^{\infty}2n\times10^{-5}p\left(x\right)dx-n^2p\left(n\right)\times10^{-5}\\
&= \int_0^n\left(2n\times10^{-5}-0.15\right)p\left(x\right)dx+\int_n^{\infty}2n\times10^{-5}p\left(x\right)dx
\end{aligned}$$

令 $V'(n)=0$ 得

$$\int_0^n \left(2n\times 10^{-5}-0.15\right) p(x)\,dx + \int_n^{\infty} 2n\times 10^{-5} p(x)\,dx = 0.$$

即

$$\frac{\int_n^{\infty} p(x)\,dx}{\int_0^n p(x)\,dx} = -\frac{2n\times 10^{-5}-0.15}{2n\times 10^{-5}}.$$

因为 $\mu=2000 \gg 50=\sigma$, 故可认为 $\int_0^n p(x)\,dx = \int_{-\infty}^n p(x)\,dx = 1-\int_n^{+\infty} p(x)\,dx$, 从而

$$\frac{\int_n^{\infty} p(x)\,dx}{1-\int_n^{\infty} p(x)\,dx} = -\frac{2n\times 10^{-5}-0.15}{2n\times 10^{-5}}.$$

即

$$\int_{-\infty}^n p(x)\,dx = \frac{2n\times 10^{-5}}{0.15} = \frac{n}{7500},$$

即

$$\int_{-\infty}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{n}{7500}. \tag{2}$$

- **代码求解**

已知 $\mu=2000$, $\sigma=50$, 利用 *Matlab* 输入以下代码:

```
for i = 1000 : 1 : 2000
    syms a x real;
    f = 1 / ((2 * pi) ^ (0.5) * 50) * exp(-((x - 2000) ^ 2) / (2 * 50 * 50));
    A = int(f, -inf, i);
    B = i / 7500;
    if(abs(double(A - B)) <= 0.0014)
    i
    end
end
```

得到输出为

$$i = 1968.$$

- **结果分析**

综上所述, 报童每天购进的报纸数量 $n=1968$ 时, 可以获得最大的利润. ■

Problem 2

(Page 273 Ex.8.)

在路灯更换问题中, 考虑没有坏的灯泡还有一定的回收价值 (常数), 建立相应的数学模型并求出更换周期的表达式. 当已知某品牌灯泡的平均寿命为 4000h, 服从 $N(4000, 100^2)$, 每个灯泡的安装价格为 70 元, 管理部门对每个不亮的灯泡制定的惩罚费用为 0.02 元/h, 每个未坏灯泡的回收价格为 5 元, 计算最佳更换周期.

Solution.

- **模型建立**

  假设每个灯泡更换的价格为 a, 不亮的灯泡单位时间 (h) 内罚款数额为 b, 未坏灯泡的回收价格为 c 元/个, 灯泡总数为 K, 更换周期为 T. 根据经验合理地假设灯泡寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}100} e^{-\frac{(x-4000)^2}{2\times 100^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

  则单位时间内所需的费用期望可表示为:

$$P(T) = \frac{Ka - Kc\int_{-\infty}^{T} Tf(x)dx + Kb\int_{-\infty}^{T}(T-x)f(x)dx}{T}. \tag{3}$$

  求导得

$$P'(T) = cTf(T) - a + c + b\int_{-\infty}^{T} xf(x)dx - c\int_{-\infty}^{T} f(x)dx.$$

  又有关系式

$$\int_{-\infty}^{T} xf(x)dx = \mu F(T) - \sigma^2 f(T), \quad \int_{-\infty}^{T} f(x)dx = F(T).$$

  代入上式令 $P'(T) = 0$, 得

$$(b\mu - c)F(T) + \left(cT - b\sigma^2\right)f(T) = a - c. \tag{4}$$

- **代码求解**

  在 *Matlab* 中输入以下代码

```
a = 70;
b = 0.02;
c = 5;
mu = 4000;
sigma = 100;
t = mu;
step = 0.1;
```

```
v = 0.01;
p = (b * mu - c ) * normcdf(t, mu, sigma) + (c * t - b * sigma ^ 2) *
        normpdf(t , mu, sigma);
if p > (a - c)
    while (p - (a - c)) > v
        t  = t - step ;
        p = (b * mu - c) * normcdf(t, mu, sigma) + (c * t - b * sigma ^ 2) *
         normpdf(t , mu, sigma);
    end
end
if p < (a - c)
    while ((a - c) - p) > v
        t  = t + step ;
        p = (b * mu - c ) * normcdf(t, mu, sigma)+(c * t - b * sigma ^ 2 ) *
         normpdf(t, mu, sigma);
    end
end
t
```

得到输出为

$$t = 3.9096e + 03.$$

- **结果分析**

  综上所述, 最佳的路灯更换周期为 $3909.6h$. ■