数值分析书面作业

张亚楠*

1 第1章：绪论（略）

2 第2章：插值法基本原理P48

1. 当 $x = 1, -1, 2$时，$f(x) = 0, -3, 4$,求f(x) 的二阶插值多项式

1) 用单项式基

2) Lagrange插值基函数

3) Newton插值基函数

2. 给出$f(x) = \ln(x)$ 的数值表 用线性插值和二次插值计算 $\ln(0.54)$ 的近似值

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.510826	- 0.356675	-0.223144

5. 设$f(x) \in C^2[a, b]$, 且$f(a) = f(b) = 0$, 证明：

$$\max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

6. 在[-4,4]上给出$f(x) = e^x$ 的等距节点函数表，若用二次插值给出 e^x的近似值，要求误差不超过10^{-6} , 问使用函数表的步长 h 应该取多少?

8. $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$, 求差商 $f[2^0, 2^1, ..., 2^7]$ 和 $f[2^0, 2^1, ..., 2^8]$

14. 求次数小于等于3的多项式$P(x)$，满足：

$$P(0) = 0, \quad P'(0) = 1, \quad P(1) = 1, \quad P'(1) = 2$$

15. 求次数小于等于4的多项式$P(x)$，满足：

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = P'(1) = 1, \quad P(2) = 1$$

*ynzhang@suda.edu.cn 苏州大学数学科学学院

3 第3章：数值逼近

4. 计算$f(x) \in C_{[0,1]}$上的范数 $\|f\|_\infty, \|f\|_1$，$\|f\|_2$

$$(1) \quad f(x) = (x-1)^3,$$

$$(3) \quad f(x) = x^m(1-x)^n$$

6. 对$f(x), g(x) \in C^1[a,b]$, 定义

$$(1) \quad \big(f, g\big) = \int_a^b f^{'}(x)g^{'}(x)dx$$

$$(2) \quad \big(f, g\big) = \int_a^b f^{'}(x)g^{'}(x)dx + f(a)g(a)$$

7. 令$T_n^*(x) = T_n(2x-1)$, $x \in [0,1]$, 其中$T_n(x)$为n 次Chebyshev多项式； 试证$\{T_n^*(x)\}$是在$[0,1]$上的带权 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式，并求$T_0^*(x), T_1^*(x), T_2^*(x), T_3^*(x)$.

8. 对权函数$\rho(x) = 1 + x^2$, 区间$[-1,1]$, 试求首项系数为1的正交多项式

$$\phi_n(x), \ n = 0, 1, 2, 3$$

11. 用$T_3(x)$的零点做插值点，求$f(x) = e^x$在区间$[-1,1]$上的二次插值多项式，并估计其最大误差界。

12. 设$f(x) = x^2 + 3x + 2, \ x \in [0,1]$, 求$\Phi = span\{1, \ x\}$ 中的最佳平方逼近多项式. 若取 $\Phi = span\{1, \ x\}$ ，最佳平方逼近多项式 是什么?

17. 已知实验数据如下： 用最小二乘法求形如$y = a + bx^2$的经验公式。

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0000	32.3000	49.0000	73.3000	97.8000

补充题目： 给定$f(x) = e^{\sin x}$, 求函数$f(x)$在 $[0, 2\pi]$上的最佳平方逼近三角多项式

$$f(x) \approx S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{4} \Big[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big]$$

（可上机编程计算结果, 系数a_k, b_k 可采用三角插值方法给出，也可利用Matlab求积命令integral计算积分。）

4 第4章：数值积分

5. 推导下列矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\zeta)}{2}(b-a)^2$$
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{b+a}{2}) - \frac{f''(\zeta)}{24}(b-a)^2$$

6. 若用复合梯形公式计算积分 $\int_0^1 e^x dx,$ 问区间[0,1] 等分才能使截断误差不超过 0.5×10^{-5}? 若改用复合simpson 公式，同样精度需要等分多少?

7. 如果$f''(x)>0$, 证明用梯形公式计算积分$I=\int_a^b f(x)dx$ 所得的结果比准确值大，并说明几何意义。

10. 构造gauss型积分公式

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

给定数值积分公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} A_k f(x_k)$$

其中 $x_k = \cos(\frac{k\pi}{m}),\ k = 0, 1, ..., m.$

1) 对给定的m, 试确定求积系数A_k, 使求积公式有尽可能高的代数精度

2) 当系数A_k确定之后, 试推导所得数值积分公式的积分余项，并给出合适的误差界.

3) 利用得到的数值积分公式编写Matlab程序计算积分

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2} dx$$

分别取$m = 10, 20, 40, 80, 100$, 并计算数值积分结果与精确解的误差；给出误差随m变换的表格

提示:

1. 第(1)小题只需要推导出系数A_k满足的线性方程组即可，不必寻找A_k的精确表达式

2. 第(2)小题推导的积分余项中应当含有被积函数$f(x)$的高阶导数.

3. $I(f)$ 的精确值可通过调用matlab 函数 integral 得到

5 第5章：线性方程组的直接方法

7. 用列主元消去法解线性方程组

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

并求系数矩阵的行列式。

9. 用追赶法求解三对角方程组

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10. 用改进的平方根法求解Ax = b

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

6 第6章：Ax = b迭代法

1. 设线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

(1) 考查用Jacobi迭代，GS迭代解此方程组的收敛性

8. 对上述方程组采用SOR迭代，取$w = 0.9$.

9. 设 Ax = b的系数矩阵A对阵正定， 且$0 < \alpha \leq \lambda(A) \leq \beta$, 考查如下迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + w(b - Ax^{(k)})$$

证明：当$0 < w < \dfrac{2}{\beta}$时上述迭代法收敛。

7 第7章：非线性方程求根

1. 用二分法求方程$x^2 - x - 1 = 0$ 的正根，要求误差小于0.05

2. 求方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$在 $x_0 = 1.5$ 附近的根，根据 如下等价形式构建迭代格式，并分析每一种迭代格式的收敛性

1. $x = 1 + 1/x^2$
2. $x = (1 + x^2)^{1/3}$
3. $x = 1/\sqrt{x-1}$

4. 给定函数$f(x)$, 设对所有x, $0 < m \leq f^{'}(x) \leq M$, 证明： 对于$0 < \lambda < 2/M$, 迭代格式 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 均收敛。

8. 分别用二分法和牛顿法求 $x - \tan x = 0$的最小正根

9. 研究求$\sqrt{a}$ 的Newton 公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}), \quad x_0 > 0$$

证明对一切k, 迭代序列单调递减。

18. 用牛顿法解

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \qquad X^{(0)} = (1.6, 1.2)$$

8 第8章：矩阵特征值计算

2. 计算特征值与特征向量，是否相似于对角阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

3. 用幂法计算下列矩阵的主特征值和特征向量

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. 利用反幂法求矩阵

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

接近于6的特征值和特征向量

5. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

对应特征值4的特征向量.

9 第9章：ODE初值问题数值解

2. 用改进的Euler法和梯形法解

$$\begin{cases} y' = x^2 + x - y, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

取步长$h = 0.1$, 计算到 x = 0.5, 并与精确解

$$y = -e^{-x} + x^2 - x + 1$$

相比较

4. 利用Euler公式计算积分

$$\int_0^x e^{t^2} dt$$

在点$x = 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2$ 的近似值

7. 证明中点公式：

$$y_{n+1} = y_n + h * f\big(x_n + h/2,\ y_n + h/2 f(x_n,\ y_n)\big)$$

是二阶的.

提示：Taylor公式推导LTE，能量方法推导误差估计。

8. 求隐式中点公式

$$y_{n+1} = y_n + h * f\Big(x_n + h/2,\ \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\Big)$$

的绝对稳定区间.