第四章　模　论

§1　模的概念

1. 设 M 是一个 $R-$ 模，R_1 是 R 的子环，证明：把 R 在 M 上的纯量乘法限制在 R_1 上，M 构成一个 R_1- 模；设 $\eta: S \to R$ 是一个环同态，对任意的 $a \in S$，$m \in M$，令 $a \cdot m = \eta(a)m$，证明：关于这样的纯量乘法，M 构成一个 $S-$ 模.

证明　注意到 M 是一个 $R-$ 模，并且 R_1 是 R 的子环，我们可以断言，$(M,+)$ 是一个交换群，并且，对于任意的 $r, s \in R_1$ 和 $m, m' \in M$，我们有

$$r(m+m') = rm + rm',\ (r+s)m = rm + sm,\ r(sm) = (rs)m.$$

所以，把 R 在 M 上的纯量乘法限制在 R_1 上，M 构成一个 R_1- 模.

注意到 M 是一个 $R-$ 模，并且 $\eta: S \to R$ 是一个环同态，我们可以断言，$(M,+)$ 是一个交换群，并且，对于任意的 $r, s \in S$ 和 $m, m' \in M$，我们有

$$r\cdot(m+m') = \eta(r)(m+m') = \eta(r)m + \eta(r)m' = r\cdot m + r\cdot m',$$

$$(r+s)\cdot m = \eta(r+s)m = (\eta(r)+\eta(s))m = \eta(r)m + \eta(s)m = r\cdot m + s\cdot m,$$

$$r\cdot(s\cdot m) = \eta(r)(\eta(s)m) = (\eta(r)\eta(s))m = \eta(rs)m = (rs)\cdot m.$$

所以关于纯量乘法“ · ”，M 构成一个 $S-$ 模.

2. 设 M 是一个 $R-$ 模，I 是 R 的一个理想. 假设对任意的 $a \in I$，$m \in M$，都有 $am = 0$，令 $(a+I)m = am$，证明：M 构成一个 $R/I-$ 模.

证明　由于 M 是一个 $R-$ 模，因此 $(M,+)$ 是一个交换群. 此外，由于 I 是 R 的一个理想，并且对任意的 $a \in I$，$m \in M$，都有 $am = 0$，因此，任意的 $r, s \in R$ 和 $m \in M$，我们有

$$r + I = s + I \Rightarrow r - s \in I \Rightarrow (r-s)m = 0 \Rightarrow rm = sm.$$

所以下式的确确定了 R/I，M 到 M 的一个代数运算——纯量乘法：

$$(a+I)m = am,\ \forall a \in R,\ \forall m \in M.$$

并且，对于任意的 $r, s \in R$ 和 $m, m' \in M$，我们有

$$(r+I)(m+m') = r(m+m') = rm + rm' = (r+I)m + (r+I)m',$$

$$((r+I)+(s+I))m = ((r+s)+I)m = (r+s)m = rm + sm = (r+I)m + (s+I)m,$$

$$(r+I)((s+I)m) = r(sm) = (rs)m = (rs+I)m = ((r+I)(s+I))m.$$

所以 M 构成一个 $R/I-$ 模.

§2　子模与商模

1. 设 N 是 $R-$ 模 M 的一个子模，令 $M:N = \{a \in R \mid aN \subseteq M\}$，证明 $M:N$ 是 R 的一个理想.

注　本题应为“设 N 是 $R-$ 模 M 的一个子模，令 $M:N = \{a \in R \mid aM \subseteq N\}$，证

明: $M:N$ 是 R 的一个理想.”

证明 显然, 对于 R 的零元 0, 我们有 $0M=\{0\}\subseteq N$, 从而, $0\in M:N$. 其次, 设 $a,b\in M:N$, $r\in R$. 于是, 我们有 $am,bm\in N$, $\forall m\in M$. 由于 N 是群 $(M,+)$ 的子群, 因此,

$$(a-b)n=an-bn\in N,\ \forall n\in N,$$

从而, $(a-b)N\subseteq M$. 所以 $a-b\in M:N$. 另外, 由于 N 是 M 的子模且 $a\in M:N$, 因此 $aM\subseteq N$, 从而, $(ra)M=r(aM)\subseteq rN\subseteq N$; $(ar)M=a(rM)\subseteq aM\subseteq N$. 这就表明, $ra,ar\in M:N$. 所以 $M:N$ 是 R 的一个理想.

2. 设 $\{N_i\}_{i\in I}$ 是模 M 的一族子模, 证明 $\bigcap_{i\in I}N_i$ 也是 M 的子模.

证明 显然 $0\in\bigcap_{i\in I}N_i$. 其次, 设 M 是 $R-$模. 对于任意的 $n,n'\in\bigcap_{i\in I}N_i$ 和 $r\in R$, 我们有 $n,n'\in N_i$, $\forall i\in I$, 从而, $n-n',rn\in N_i$, 因此 $n-n',rn\in\bigcap_{i\in I}N_i$. 这样一来, 根据命题 2. 2, $\bigcap_{i\in I}N_i$ 是 M 的子模.

3. 设 $M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots\subseteq M_n\subseteq\cdots$ 是模 M 的一个子模升链, 证明: $\bigcup_{n\ge1}M_n$ 是 M 的子模.

证明 显然 $\bigcup_{n\ge1}M_n\ne\varnothing$. 其次, 设 M 是 $R-$模. 对于任意的 $m,m'\in\bigcup_{n\ge1}M_n$ 和 $r\in R$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得 $m,m'\in M_{n_0}$, 从而, $m-m',rm\in M_{n_0}$, 因此 $m-m',rm\in\bigcup_{n\ge1}M_n$. 这样一来, 根据命题 2. 2, $\bigcup_{n\ge1}M_n$ 是 M 的子模.

4. 设 A,B,C 是 M 的子模, $C\subseteq A$, 证明: $A\bigcap(B+C)=(A\bigcap B)+C$.

证明 设 $m\in A\bigcap(B+C)$. 于是, $m\in A$ 且存在 $n\in B$ 和 $n'\in C$ 使得 $m=n+n'$. 由于 $C\subseteq A$, 因此 $n'\in A$, 从而, $n=m-n'\in A$, 因此 $n\in A\bigcap B$. 这样一来, 由 $m=n+n'$ 可知 $m\in(A\bigcap B)+C$. 所以 $A\bigcap(B+C)\subseteq(A\bigcap B)+C$. 反之, 设 $m\in(A\bigcap B)+C$. 于是, 存在 $n\in A\bigcap B$ 和 $n'\in C$, 使得 $m=n+n'$, 从而, $m\in B+C$. 由于 $C\subseteq A$, 因此 $n'\in A$, 从而, $m=n+n'\in A$. 这样一来, $m\in A\bigcap(B+C)$. 所以 $(A\bigcap B)+C\subseteq A\bigcap(B+C)$.

综上所述, 我们有 $A\bigcap(B+C)=(A\bigcap B)+C$.

5. 设 R 是有单位元的环, M 是 $R-$模, N 是 M 的子模, 证明: 若 N 和 M/N 都是有限生成的, 则 M 也是有限生成的.

证明 假设 N 和 M/N 都是有限生成的. 不妨设

$$N=(n_1,n_2,\cdots,n_q),\ M/N=(m_1+N,m_2+N,\cdots,m_p+N).$$

设 $m\in M$. 由 $M/N=(m_1+N,m_2+N,\cdots,m_p+N)$ 可知, 存在 $r_1,r_2,\cdots,r_p\in R$, 使得

$$\begin{aligned}m+N&=r_1(m_1+N)+r_2(m_2+N)+\cdots+r_p(m_p+N)\\&=(r_1m_1+N)+(r_2m_2+N)+\cdots+(r_pm_p+N)\\&=(r_1m_1+r_2m_2++\cdots+r_pm_p)+N\end{aligned}$$

因此存在 $n\in N$, 使得 $m=(r_1m_1+r_2m_2++\cdots+r_pm_p)+n$. 由 $n\in N=(n_1,n_2,\cdots,n_p)$ 可知, 存在 $s_1,s_2,\cdots,s_q\in R$, 使得 $n=s_1n_1+s_2n_2+\cdots,+s_qn_q$, 从而,

$$m = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_p m_p + s_1 n_1 + s_2 n_2 + \cdots + s_q n_q .$$

所以

$$M = (m_1, m_2, \cdots, m_p, n_1, n_2, \cdots, n_q) .$$

§3　模的同态

1. 证明定理 3. 3.

注　定理 3. 3 的内容如下:**设 M 是一个 $R-$模.**

(1)若 N 和 L 都是 M 的子模,并且 $N \subseteq L$,则 $(M/N)/(L/N) \cong M/L$;

(2)若 K 和 N 都是 M 的子模,则 $(K+N)/N \cong K/(K \cap N)$.

(这里对课本中的定理 3. 3 作了文字上的校正.)

证明　(1) 设 N 和 L 都是 M 的子模, 并且 $N \subseteq L$. 由于 $N \subseteq L$, 因此, 对于任意的 $m, m' \in M$, 我们有

$$m + N = m' + N \Rightarrow m - m' \in N \Rightarrow m - m' \in L \Rightarrow m + L = m' + L .$$

这样一来, 我们可以定义 M/N 到 M/L 的映射 f 如下:

$$f(m+N) = m + L ,\ \forall m \in M .$$

显而易见, f 是 M/N 到 M/L 的满射. 其次, 对于任意的 $m, m' \in M$ 和任意的 $r \in R$, 我们有

$$f((m+N)+(m'+N)) = f((m+m')+N) = (m+m')+L$$
$$= (m+L)+(m'+L) = f(m+L) + f(m'+L),$$
$$f(r(m+N)) = f(rm+N) = rm + L = r(m+L) = rf(m+N) .$$

因此 f 是模 M/N 到模 M/L 的满同态. 最后 对于任意的 $m \in M$, 我们有

$$m + N \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow m + L = L \Leftrightarrow m \in L \Leftrightarrow m + N \in L/N .$$

因此 $\mathrm{Ker}(f) = L/N$ 这样一来, 根据模的同态基本定理, $(M/N)/(L/N) \cong M/L$.

(2) 设 K 和 N 都是 M 的子模. 定义 K 到 $(K+N)/N$ 的映射 f 如下:

$$f(k) = k + N ,\ \forall k \in K .$$

考察 f: 对于任意的 $k \in K$ 和 $n \in N$, 我们有 $(k+n)+N = k+N$, 从而, $f(k) = (k+n)+N$. 因此 f 是 K 到 $(K+N)/N$ 的满射. 其次, 对于任意的 $k, k' \in K$ 和任意的 $r \in R$, 我们有

$$f(k+k') = (k+k')+N = (k+N)+(k'+N) = f(k) + f(k'),$$
$$f(rk) = rk + N = r(k+N) = rf(k) .$$

因此 f 是模 K M/N 到模 $(K+N)/N$ 的满同态. 最后 对于任意的 $k \in K$, 我们有

$$k \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow k + N = N \Leftrightarrow k \in N \Leftrightarrow k \in K \cap N .$$

因此 $\mathrm{Ker}(f) = \cancel{0}$. 这样一来, 根据模的同态基本定理, $(K+N)/N \cong K/(K \cap N)$.

$K \cap N$

2. 设 $M = M_1 \oplus M_2$, 证明: $M_1 \cong M/M_2$, $M_2 \cong M/M_1$.

证明 定义 M 到 M_1 的映射 f 如下: 对于任意的 $m \in M$

$$f(m) = m_1, \text{若 } m = m_1 + m_2, \text{其中 } m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2.$$

显然 f 是满射. 此外, 不妨设 M_1 和 M_2 是 $R-$ 模. 于是, 对于任意的 $m_1 + m_2, n_1 + n_2 \in M$ (其中 $m_1, n_1 \in M_1$, $m_2, n_2 \in N_2$) 和任意的 $r \in R$, 我们有

$$f((m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)) = f((m_1 + n_1) + (m_2 + n_2)) = m_1 + n_1 = f(m_1 + m_2) + f(n_1 + n_2),$$

$$f(r(m_1 + m_2)) = f(rm_1 + rm_2) = rm_1 = rf(m_1, +m_2).$$

因此 f 是 M 到 M_1 的满同态. 最后, 对于任意的 $m_1 + m_2 \in M$ (其中 $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$), 我们有

$$m_1 + m_2 \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow m_1 = f(m_1 + m_2) = 0_1 \Leftrightarrow m_1 + m_2 \in M_2,$$

其中 0_1 表示 M_1 的零元. 这样一来, 根据模的同态基本定理, $M_1 \cong M/M_2$.

同理可证, $M_2 \cong M/M_1$.

3. 设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 维向量空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 证明:

$$V \cong \mathbb{P}\alpha_1 \oplus \mathbb{P}\alpha_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{P}\alpha_n.$$

证明 定义 V 到 $\mathbb{P}\alpha_1 \times \mathbb{P}\alpha_2 \times \cdots \times \mathbb{P}\alpha_n$ 的映射 f 如下:

$$f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) = (k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \cdots, k_n\alpha_n),\ \forall k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n \in V.$$

显然 f 是 V 到 $\mathbb{P}\alpha_1 \times \mathbb{P}\alpha_2 \times \cdots \times \mathbb{P}\alpha_n$ 的双射. 其次, 对于任意的 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n, k_1'\alpha_1, k_2'\alpha_2, \cdots, k_n'\alpha_n \in V$ 和任意的 $k \in \mathbb{P}$, 我们有

$$\begin{aligned} & f((k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) + (k_1'\alpha_1 + k_2'\alpha_2 + \cdots + k_n'\alpha_n)) \\ = & f((k_1 + k_1')\alpha_1 + (k_2 + k_2')\alpha_2 + \cdots + (k_n + k_n')\alpha_n) \\ = & ((k_1 + k_1')\alpha_1, (k_2 + k_2')\alpha_2, \cdots, (k_n + k_n')\alpha_n) \\ = & (k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, \cdots, k_n\alpha_n) + (k_1'\alpha_1, k_2'\alpha_1, \cdots, k_n'\alpha_n) \\ = & f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n) + f(k_1'\alpha_1, k_2'\alpha_2, \cdots, k_n'\alpha_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f(k(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n)) = f(kk_1'\alpha_1 + kk_2'\alpha_2 + \cdots + kk_n'\alpha_n) \\ = & (kk_1\alpha_1, kk_2\alpha_2, \cdots, kk_n\alpha_n)) = k(k_1'\alpha_1, k_2'\alpha_2, \cdots, \cdots k_n'\alpha_n) \\ = & kf(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n). \end{aligned}$$

所以 $V \cong \mathbb{P}\alpha_1 \oplus \mathbb{P}\alpha_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{P}\alpha_n$.

§4 自由模

1. 设 M 是一个自由 $R-$ 模, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 M 的一组基, $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是 M 的一组元素, 则有 R 上的 n 阶方阵 P 使得

$$(m_1, m_2, \cdots, m_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P.$$

证明: $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是 M 的一组基的充要条件是 P 可逆.

设 f 是 M 的一个自同态, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 M 的两组基, 则有 R 上的 n 阶方阵 A 和 B, 使得

$$(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \cdots, f(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A,$$
$$(f(\eta_1), f(\eta_2), \cdots, f(\eta_n)) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)B.$$

称 A（B）为 f **在基** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$（$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$）**下的矩阵**. 设

$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P.$$

证明: $A = PBP^{-1}$. 此时称 A **和** B **是相似的**.

证明 假设 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是 M 的一组基. 则有 R 上的 n 阶方阵 Q 使得

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (m_1, m_2, \cdots, m_n)Q.$$

于是,

$$(m_1, m_2, \cdots, m_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P = (m_1, m_2, \cdots, m_n)QP,$$
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (m_1, m_2, \cdots, m_n)Q = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)PQ.$$

由此可见, $PQ = QP = E$, 其中 E 表示 R 上的 n 阶单位方阵. 所以 P 可逆. 反之, 假设 P 可逆. 则由 $(m_1, m_2, \cdots, m_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P$ 可得

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (m_1, m_2, \cdots, m_n)P^{-1}.$$

由于 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 M 的一组基, 因此 M 的维数为 n ， 并且由上式可知, M 中的每一个元素都是 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的线性组合. 所以 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是 M 的一组基.

由于

$$(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \cdots, f(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A,$$
$$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P,$$

我们有

$$\begin{aligned}(f(\eta_1), f(\eta_2), \cdots, f(\eta_n)) &= (f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \cdots, f(\varepsilon_n))P \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)AP\end{aligned}$$

另一方面, 由于 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)P$, 我们有

$$\begin{aligned}(f(\eta_1), f(\eta_2), \cdots, f(\eta_n)) &= (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)B \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)PB.\end{aligned}$$

所以 $AP = PB$, 从而, $A = PBP^{-1}$.

§5 主理想整环上的有限生成挠模

1. 证明引理 5.9(2).

注 引理 5.9 的原文如下:

设 $M = Rm$ **是一个阶为** r **的循环模,** $s \in R$ **.则**

（1）$M[s]=R\left(\frac{r}{(r,s)}m\right)\cong R/((r,s))$，

（2）$sM=R(r,s)m\cong R/\left(\frac{r}{(r,s)}\right)$.

因而$M[s]$是阶为(r,s)的循环模,sM 是阶为$\frac{r}{(r,s)}$的循环模.

显然, 引理中应加上“r与s不全为0”这个前提.

引理 5.9(2)的证明如下:

证明 由于$M=Rm$,因此$sM=\{usm\mid u\in R\}=Rsm$. 显然$Rsm\subseteq R(r,s)m$. 另一方面, 我们知道, 存在$u,v\in R$, 使得$ur+rs=(r,s)$. 由于$|m|=r$, 因此

$$(r,s)m=urm+vsm=vsm\in Rsm,$$

从而, $R(r,s)m\subseteq Rsm$. 所以$sM=R(r,s)m$.

现在定义R到sM 的映射φ如下：

$$\varphi(u)=u(r,s)m,\ \forall u\in R.$$

显然φ是R到sM 的满射, 并且

$$\varphi(u+v)=(u+v)(r,s)m=u(r,s)m+v(r,s)m=\varphi(u)+\varphi(v),$$
$$\varphi(uv)=(uv)(r,s)m=u\varphi(v),\forall u,v\in R.$$

所以φ是模R到模sM 的满同态. 此外, 对于任意的$u\in R$, 我们有

$$u\in \mathrm{Ker}(\varphi)\Leftrightarrow u(r,s)m=\varphi(u)=0$$
$$\Leftrightarrow r\mid u(r,s)\Leftrightarrow \frac{r}{(r,s)}\,\bigg|\, u\Leftrightarrow u\in\left(\frac{r}{(r,s)}\right).$$

所以$\mathrm{Ker}(\varphi)=\left(\frac{r}{(r,s)}\right)$. 这样一来, 根据群的同态基本定理$sM\cong R/\left(\frac{r}{(r,s)}\right)$. 由此可见, sM 是阶为$\frac{r}{(r,s)}$的循环模.