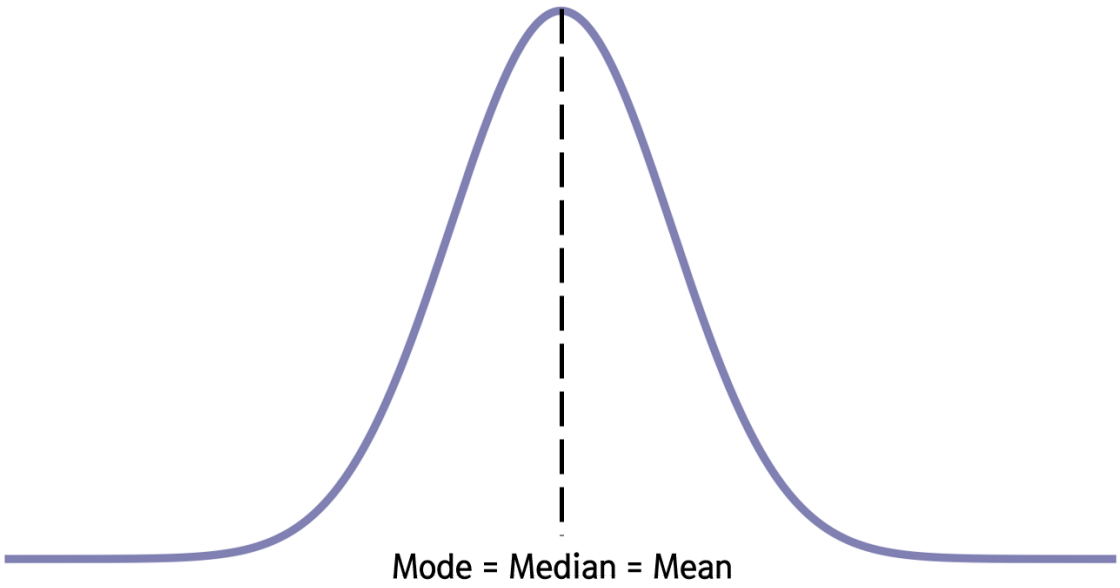
이번 포스트의 주제는 **정규 분포(Normal Distribution)**입니다. 정규 분포의, 기대값, 분산, 적률생성함수를 구해 보고, **중심극한정리(Central Limit Theorem)**에 대해 이해해보고자 합니다.

정규 분포(Normal Distribution)

정규 분포, 또는 **가우시안 분포(Gaussian Distribution)**라고도 불리는 이 분포는 아마 가장 유명한 연속형 확률분포일 것입니다. 가장 쓰임새도 많고, 특히 우리 실생활의 정말 많은 현상이 정규분포를 따르고 있다고 합니다. 예를 들어, 남성의 키, 여성의 키 정규분포를 따르고 있다고 하는데요. 정규분포를 따른다는 건 어떤 의미일까요? 아래 그림과 같이 정규 분포는 가운데 봉우리 하나가 치솟은, 대칭적인 형태를 띄고 있습니다.



봉우리의 해당하는 부분은 자명하게 최빈값(Mode)일 것이고, 대칭적인 형태이므로 중앙값(Median)에 해당할 것입니다. 한편, 정규분포에서는 이 부분이 바로 평균(Mean)입니다. 즉, 정규분포는 `최빈값, 중앙값, 평균이 모두 같다` 는 특징을 가지고 있습니다. 우리나라 여성들의 키 중 그 빈도가 가장 많은 것이 우리나라 여성 키의 평균이자 중간값이라는 것을 의미할 것입니다. 정확하게 최빈값, 평균, 중간값이 항상 일치하는건 모르겠지만, 비슷한 경우는 뭔가 직관적으로도 우리 실생활에서 많이 볼 수 있을 같다라는 생각이 듭니다.

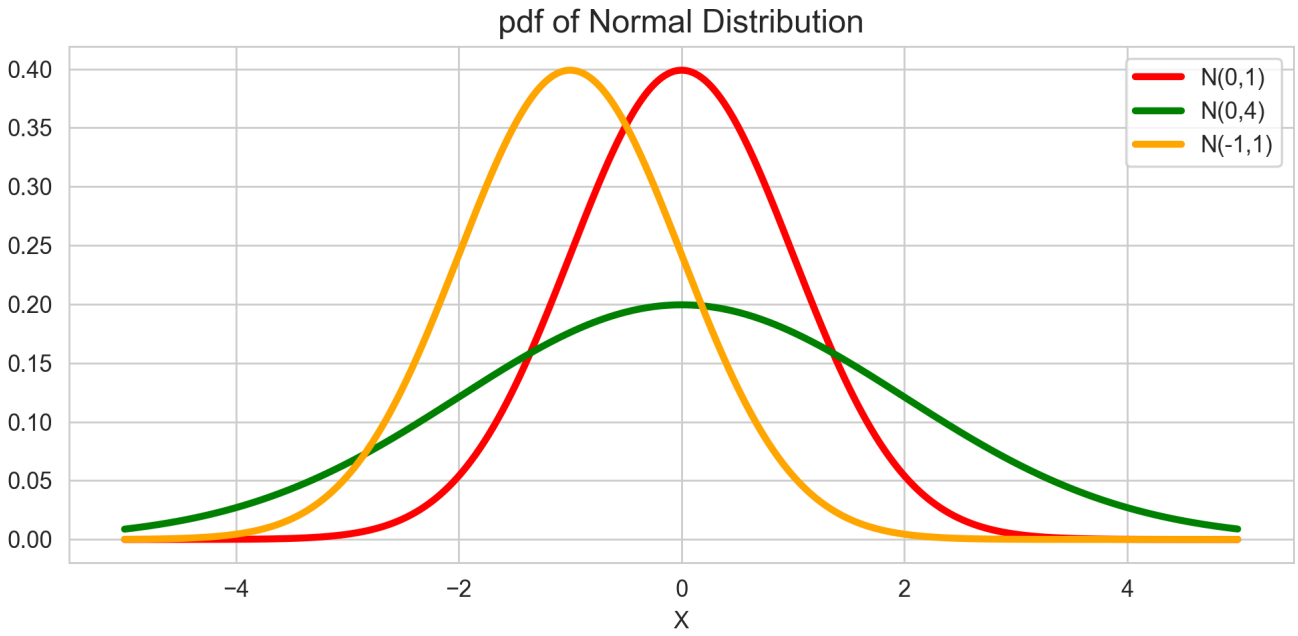
이제 정규분포의 확률밀도함수를 살펴보겠습니다!

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_X(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

$$(-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0)$$

여기서 모수는 평균(μ)과 분산(σ^2)입니다. 평균과 분산이 달라짐에 따라 분포의 형태도 달라지게 됩니다. 이 때, 평균이 0, 분산이 1인 정규분포를 **표준 정규분포**라고 합니다.



그러면 이제 정규분포의 **기대값, 분산, 적률생성함수**를 구해보겠습니다. 이 때, 계산의 편리함을 위해 표준 정규분포를 가정하고 값을 구해보고자 합니다. 표준 정규분포의 확률변수를 Z라고 할 때, 평균이 μ이고, 분산이 σ^2인 정규분포의 확률변수 X는 다음과 같이 표현할 수 있고, 이걸 이용해서 기대값과 분산 및 적률생성함수도 쉽게 구할 수 있기 때문입니다.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),\ Z \sim N(0,1)$$
$$X = \sigma Z + \mu$$

Z의 적률생성함수, 기대값, 분산을 먼저 구해보겠습니다.

$$\begin{aligned} M_Z(t) = E(e^{tz}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}\, dz \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}\, dw \\ &= e^{\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= M_Z^{(1)}(0) = te^{\frac{1}{2}t^2}|_{t=0} = 0 \\ E(Z^2) &= M_Z^{(2)}(0) = e^{\frac{1}{2}t^2} + t^2 e^{\frac{1}{2}t^2}\ |_{t=0} = 1 \\ Var(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 \end{aligned}$$

이걸 이용해서 X의 적률생성함수와 기대값, 분산을 구하면 다음과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) = E[e^{t(\sigma Z+\mu)}] \\
&= e^{\mu t}E[e^{t\sigma Z}] = e^{\mu t}e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\
&= e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\
E(X) &= E(\sigma Z+\mu) = \sigma E(Z)+\mu = \mu \\
Var(X) &= Var(\sigma Z+\mu) = \sigma^2 Var(X) = \sigma^2
\end{aligned}
$$

중심극한정리(Central Limit Theorem)

중심극한정리는 제 기억으로 고등학교 수학에서도 배웠던 것 같은데요. 정말 중요하고 유명한 정리인 만큼 중심극한정리에 대해서는 많은 분들이 잘 알고 계실것 같습니다! 중심극한정리는 다음과 같습니다.

> **Thm. (CLT)**
> $X_1, \cdots, X_n$을 평균이 μ, 분산이 $\sigma^2 (0 < \sigma^2 < \infty)$인 정규분포에서 추출한 확률 표본이라고 하자. 이 때, $\bar{X}$를 표본 평균이라고 할 때, n이 커질수록, $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$는 표준 정규분포로 수렴한다.
>
> $$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \ \rightarrow \ N(0,1)$$

결국 확률변수 $\bar{X}$는 평균이 μ이고, 분산이 $\frac{\sigma^2}{n}$인 정규분포에 근사하게 된다는 것을 의미합니다. 어떤 모집단에서 샘플을 뽑고, 그 샘플의 표본 평균을 구하는 것을 반복했을 때, 특히 그 샘플 수를 크게 할수록, 구한 표본 평균들은 정규분포를 따른다는 것입니다! 여기서 중요한 것은,
모집단에 대해 특정 분포를 가정할 필요가 없다 는 것입니다. 즉, 모집단이 어떠한 분포이든지 간에, 샘플 사이즈가 크다면 표본 평균의 분포는 정규분포에 근사하게 됩니다. 자, 이 정리의 의미를 조금 더 이해해보겠습니다. 우리나라 여성의 키의 분포를 알고싶다고 합시다. 우리나라 전체 여성의 키를 한명도 빼놓지 않고 수집하기는 현실적으로 어려울 것입니다. 그렇다면 전체를 조사할 수는 없어도, 전체를 대표할 수 있는 표본을 충분히 잘 뽑아서 조사하면 그 분포를 추정할 수 있지 않을까요? 이 때, 각 지역별로 여성을 백 명씩 뽑아서 평균을 내고, 평균을 내는 것을 반복해서 많은 평균들을 얻었을 때, 이 평균들은 어떤 분포를 띄게 될 것이고, 위 중심극한정리에 의하면 이 분포가 바로 정규분포에 가깝다는 것입니다! 이 때, 이 표본 평균들의 분포를 **표본 분포(Sampling Distirbution)**라고 하고, 우리나라 여성의 키의 분포를 **모분포(Population Distribution)**라고 합니다. 그런데, 위 중심극한정리에서 확인할 수 있듯이, 표본 분포는 모분포의 모수를 기반으로 하는 정규분포$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$에 근사하게 됩니다. 그렇다면 우리가 구한 표본분포를 이용해서, 알 수가 없었던 모분포의 모수(parameter)를 추정할 수 있게 됩니다! 다시 말해서, 중심극한정리는 표본을 이용해서 모수를 추정하는 근거 가 됩니다. 데이터, 즉 우리가 수집한 표본을 이용해서 우리가 알고 싶은 바로 그 "진짜"를 추정하는 통계학에서 왜 중심극한정리가 그 근간이 되는지 알 수 있는 대목입니다.

한편, 모분포가 정규분포가 아니어도 된다고 했었는데요. 이에 대한 대표적인 예로, 이항분포가 있습니다. 이항분포는 샘플 사이즈가 충분히 클 때, 정규분포에 근사하는 것을 이용해서 계산을 더욱 간편하게 하곤 하는데요. 샘플 사이즈가 n, 성공 확률이 p인 이항 분포는 평균이 np, 분산이 $np(1-p)$인 정규분포에 근사하게 됩니다.

$$Y_n \sim B(n,p)$$
$$\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightarrow N(0,1)$$

이 식을 위의 중심극한정리에서 했던 식과 좀 더 유사하게 바꿔볼까요? 확률변수 $X_1, \cdots, X_n$이 성공 확률이 p인 베르누이 분포, 다른 말로 $n=1$인 이항 분포 $B(1,p)$를 따른다고 하겠습니다. 그러면 평균은 p, 분산은 $p(1-p)$가 될 것입니다. 이 때, Y_n을 X_i들의 합이라고 한다면, Y_n이 바로 $B(n,p)$를 따르게 될 것입니다. 즉, 이들의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있게 됩니다.

$$X_1, \cdots, X_n \sim B(1,p)$$
$$Y_n = X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$$
$$\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \rightarrow N(0,1)$$

동전을 반복적으로 던져서 앞면이 나오는 개수를 셀 때, 앞면이 나오는 개수는 전체 개수의 절반을 평균으로 하는 정규분포에 근사하게 된다는 것이고, 무한번 던지게 되면 아예 정규분포를 따른다고 말할 수 있게 되는 것입니다. 한편, 아래 그림에서 왼쪽은 $n=8$인 경우이고, 오른쪽은 $n=60$인 경우입니다. 확실히 샘플 사이즈가 커질수록 이항분포가 정규분포에 더 잘 근사하게 되는 것을 볼 수 있습니다.