Universitat
de les Illes Balears

Métodos del Álgebra Lineal

Practica final - Problema 4.1 (Grupo 5)

Pérez Ancín, Alberto

Ramis Vivancos, Juan Ginés

Riera Morales, Iván
Ruiz Ruiz, Antonio

Professorado: Antonio Esteban Teruel Aguilar y Marc Munar Covas

Índice general

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Informática gráfica

La potencia de cálculo ha aumentado considerablemente en las últimas dos décadas, permitiendo aplicar su poder de cálculo en ámbitos tan dispares como son la minería de criptomonedas y la renderización de gráficos tridimensionales con alto nivel de detalle. Respecto este último tema, la última generación de videoconsolas (PlayStation 5, Xbox Series X) ha introducido conceptos como ray tracing que permiten reproducir digitalmente escenas realistas: sombras, reflejos y adaptación cromática automática. Para describir la generación de sombras, en este bloque se llevará a cabo la exposición del modelo matemático basado en geometría euclídea tridimensional; concretamente, expresando una sombra como la proyección de un punto sobre un plano respecto un punto de luz o, equivalentemente, como la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

CAPÍTULO 2

PROBLEMA 4.1

2.1 Enunciado

Dada la espiral de Fermat $\alpha(t) = (4\sqrt{t}cos(t), 4\sqrt{t}sin(t), 10), con\ t \in [0, 8\pi]$, el plano 0,1x + 0,1y + z = 1, y K = 200, generar las sombras respecto los puntos de luz L_1 = (5, 0, 20) y L_2 = (5, 0, 15). ¿Cómo varían las sombras de L_2 respecto las de L_1?

2.2 Generación de sombras como proyecciones de puntos

Al observar una sombra en el mundo real, ésta se ha generado debido a un emisor de fotones (sol, lámpara, etc) cuyos rayos de luz impactan sobre un objeto no translúcido, dibujando en una superficie su silueta.

Por tanto, sea L = $(l_1, l_2, l_3) \in$ R^3 un punto de luz fijo, y sea P_i = (P$_i$1, P_i2, P_i3)$_{i=1}^{k}$ una familia de puntos que representa un cierto objeto en el espacio. Para poder considerar el rayo de luz que va de L a cada Pi , podemos considerar la recta que une ambos puntos: si $\vec{v}$ = L$\vec{P}_i$ es el vector director de la recta e imponemos que pase por el punto L, en forma continua su expresión es

$$\frac{x - l_1}{l_1 - p_{i1}} = \frac{y - l_2}{l_2 - p_{i2}} = \frac{z - l_3}{l_3 - p_{i3}} \tag{2.1}$$

Esta última expresión la podemos reescribir como la intersección de dos planos como

$$\begin{cases} (x - l_1) \cdot (l_2 - p_{i2}) = (y - l_2)(l_1 - p_{i1}) \\ (y - l_2) \cdot (l_3 - p_{i3}) = (z - l_3)(l_2 - p_{i2}) \end{cases} \tag{2.2}$$

Reordenando términos, estos dos planos pueden expresarse en su ecuación general:

$$\begin{cases} (l_2 - p_{i2})x - (l_1 - p_{i1})y = l_1(l_2 - p_{i2}) - l_2(l_1 - p_{i1}) \\ (l_3 - p_{i3})y - (l_2 - p_{i2})z = l_2(l_3 - p_{i3}) - l_3(l_2 - p_{i2}) \end{cases} \tag{2.3}$$

Ahora, dado un plano ax + by + cz = d, la proyección del punto P_i sobre este plano respecto del punto de luz L viene dada por la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} l_2 - p_{i2} & -l_1 + p_{i1} & 0 \\ 0 & l_3 - p_i 3 & -l_2 + p_{i2} \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1(l_2 - p_{i2}) - l_2(l_1 - p_{i1}) \\ l_2(l_3 - p_{i3}) - l_3(l_2 - p_{i2}) \\ d \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

En este caso, diremos que S = (s_1, s_2, s_3) es el punto de sombra asociado a P_i.

2.3 ¿Cómo varían las sombras de L_2 respecto las de L_1?

Una vez realizada la ejecución del metodo tanto para el punto de luz L_1(5,0,20) y el punto de luz L_2(5,0,15) obtenemos las siguientes imágenes. Como se puede observar en la imágen con el punto de luz L_1 la sombra proyectada sobre el plano es mas pequeña que en el caso L_2 ya que el punto de luz esta más alejado de la espiral de Fermat.

2.4 Primer caso: L_1(5,0,20)

Al observar una sombra en el mundo real, ésta se ha generado debido a un emisor de fotones (sol, lámpara, etc) cuyos rayos de luz impactan sobre un objeto no translúcido, dibujando en una superficie su silueta.

Por tanto, sea L = (5, 0, 20) ∈ R^3 un punto de luz fijo, y sea $P_i = (P_i1, P_i2, P_i3)_{i=1}^k$ una familia de puntos que representa un cierto objeto en el espacio. Para poder considerar el rayo de luz que va de L a cada Pi , podemos considerar la recta que une ambos puntos: si $\vec{v} = L\vec{P_i}$ es el vector director de la recta e imponemos que pase por el punto L, en forma continua su expresión es

$$\frac{x-5}{5-p_{i1}} = \frac{y-0}{0-p_{i2}} = \frac{z-20}{20-p_{i3}} \tag{2.5}$$

Esta última expresión la podemos reescribir como la intersección de dos planos como

$$\begin{cases} (x-5)\cdot(0-p_{i2}) = (y-0)(5-p_{i1}) \\ (y-0)\cdot(20-p_{i3}) = (z-20)(0-p_{i2}) \end{cases} \tag{2.6}$$

Reordenando términos, estos dos planos pueden expresarse en su ecuación general:

$$\begin{cases} (0-p_{i2})x - (5-p_{i1})y = 5(0-p_{i2}) - 0(5-p_{i1}) \\ (20-p_{i3})y - (0-p_{i2})z = 0(20-p_{i3}) - 20(0-p_{i2}) \end{cases} \tag{2.7}$$

Ahora, dado un plano ax + by + cz = d, la proyección del punto P_i sobre este plano respecto del punto de luz L viene dada por la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0-p_{i2} & -5+p_{i1} & 0 \\ 0 & 20-p_i 3 & -0+p_{i2} \\ 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(0-p_{i2}) - 0(5-p_{i1}) \\ 0(20-p_{i3}) - 20(0-p_{i2}) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

En este caso, diremos que S = (s_1, s_2, s_3) es el punto de sombra asociado a P_i.

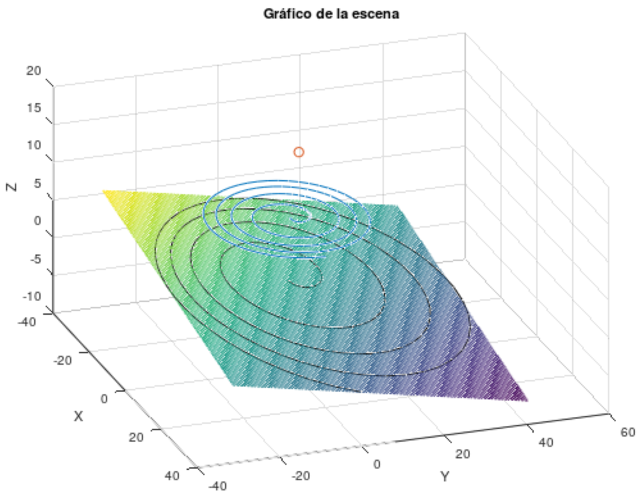

Figura 2.1: Punto de luz (5,0,20)

2.5 Segundo caso: L_1(5,0,15)

Al observar una sombra en el mundo real, ésta se ha generado debido a un emisor de fotones (sol, lámpara, etc) cuyos rayos de luz impactan sobre un objeto no translúcido, dibujando en una superficie su silueta.

Por tanto, sea L = (5, 0, 15) ∈ R^3 un punto de luz fijo, y sea P_i = (P_i1, P_i2, P_i3)$_{i=1}^{k}$ una familia de puntos que representa un cierto objeto en el espacio. Para poder considerar el rayo de luz que va de L a cada Pi , podemos considerar la recta que une ambos puntos: si $\vec{v} = L\vec{P}_i$ es el vector director de la recta e imponemos que pase por el punto L, en forma continua su expresión es

$$\frac{x-5}{5-p_{i1}} = \frac{y-0}{0-p_{i2}} = \frac{z-15}{15-p_{i3}} \tag{2.9}$$

Esta última expresión la podemos reescribir como la intersección de dos planos como

$$\begin{cases} (x-5)\cdot(0-p_{i2}) = (y-0)(5-p_{i1}) \\ (y-0)\cdot(15-p_{i3}) = (z-15)(0-p_{i2}) \end{cases} \tag{2.10}$$

Reordenando términos, estos dos planos pueden expresarse en su ecuación general:

$$\begin{cases} (0-p_{i2})x-(5-p_{i1})y = 5(0-p_{i2})-0(5-p_{i1}) \\ (15-p_{i3})y-(0-p_{i2})z = 0(15-p_{i3})-15(0-p_{i2}) \end{cases} \tag{2.11}$$

Ahora, dado un plano ax + by + cz = d, la proyección del punto P_i sobre este plano respecto del punto de luz L viene dada por la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0-p_{i2} & -5+p_{i1} & 0 \\ 0 & 15-p_i3 & -0+p_{i2} \\ 0,1 & 0,1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(0-p_{i2})-0(5-p_{i1}) \\ 0(15-p_{i3})-15(0-p_{i2}) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

En este caso, diremos que S = (s_1, s_2, s_3) es el punto de sombra asociado a P_i.

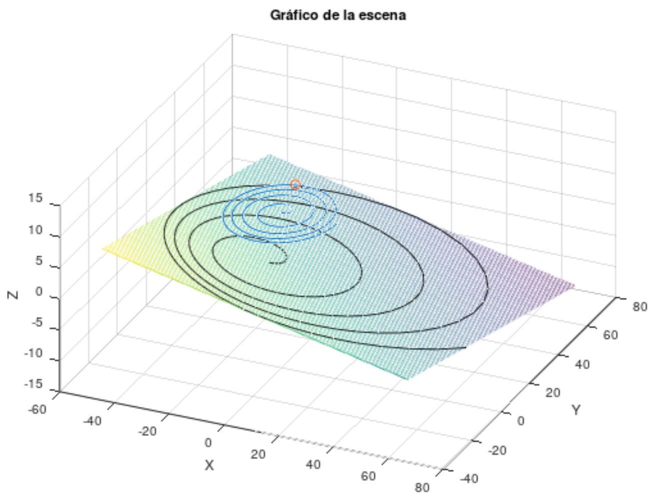

Figura 2.2: Punto de luz (5,0,15)

CAPÍTULO 3

IMPLEMENTACIÓN DEL PROBLEMA 4.1 EN OCTAVE

- **main_shadows.m** ⇒ Es el método que se encarga de inicializar los parámetros del problema y llamar a los métodos necesarios para calcular la sombra de la espiral de Fermat.
- **generate_curve.m** ⇒ Es el método que se encarga de generar la espiral de Fermat en el dominio que se le pasa por parámetros.
- **generate_shadows.m** ⇒ Es el método que se encarga de generar la sombra sobre el plano previamente pasado por parámetro el punto de luz y la espiral de Fermat. introducidos.
- **plot_scene.m** ⇒ Se encarga de renderizar la escena provocada por la espiral de Fermat, punto de luz, sombras y coeficientes del plano pasados por parámetros.
- **upper_triangular_solver.m** ⇒ Se encarga de devolver el vector solución de la matriz triangular superior y vector de términos independientes pasados por parámetros.
- **lower_triangular_solver.m** ⇒Se encarga de devolver el vector solución de la matriz triangular inferior y vector de términos independientes pasados por parámetros.
- **LUFactPM.m** ⇒ Proporciona la factorización PAQ = LU de una matriz siendo tanto P como Q una matriz invertible.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIÓN

En conclusión pensamos que esta práctica nos ha ayudado a entender el conjunto de la asignatura así como ver un ejemplo real de para qué se puede aplicar el conocimiento aprendido durante estos meses. Por otro lado, hemos hecho uso de Overleaf (un editor de LaTeX colaborativo en la nube) para documentar toda la memoria, ya que encontramos que era la opción que más posibilidades nos daba.

Adicionalmente, nos ha ayudado a consolidar lo aprendido con octave, ya que era imprescindible para la realización de la práctica. De hecho la mayor parte de los problemas que hemos ido teniendo a lo largo de la práctica provenían de errores de programación de octave que fuimos cometiendo.

También nos ha ayudado a mejorar nuestras habilidades de trabajo en equipo, ya que desde el principio todos los integrantes del grupo cooperamos entre nosotros y pusimos en común nuestros puntos fuertes individuales para delegar las diferentes subtareas del proyecto con el fin de obtener el mejor resultado posible.