Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność teoretyczna

Bartosz Sójka

Równoważność przez cięcia w przestrzeni dwuwymiarowej

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jana Dymary

Wrocław Rok 2019

Contents

Abstract

W roku 1990 wegierski matematyk Miklós Laczkovich rozwiązał problem kwadratury koła Tarskiego - udowodnił on, że koło da się podzielić na skończoną liczbę części, z których można ułożyć kwadrat. Twierdzenie to może wydawać się nieintuicyjne i istotnie, części na które zostało podzielone koło w dowodzie były zbiorami niemieżalnymi, a sam dowód był niekonstruktywny. Co więcej, nie jest ono prawdziwe, gdy ograniczymy się do podziałów koła na zbiory, których brzegi są krzywymi Jordana. Punktem wyjścia pracy jest przypadek powyższego zagadnienia, gdzie brzegi są krzywymi Jordana kawałkami C^∞. Można traktować je jako dobry model dla fizycznie realizowalnych cięć. Dalej będzie rozwinięta i omówiona teoria klasyfikacji figur w przestrzeni dwuwymiarowej ze względu na ich równoważność przez cięcia.

1 Koło i kwadrat

Praca będzie miała stopniowo rosnący poziom formalności. Początek jest gawędą o moich rozmyślaniach i motywacjach skąd wzięły się przedstawione problemy. Mniej więcej między drugim a trzecim rozdziałem całość nabiera formalizmu. Przez całą pracę rozważane krzywe są krzywymi kawałkami C^∞, gdzie kolejne C^∞ fragmenty krzywych nigdy nie tworzą kąta $0 stopni$ (tutaj

formalniej). Będą one dalej nazywane po prostu krzywymi.
łuk - spójny fragment okręgu

Intuicja podwpowiada, że biorąc koło i tnąc je na skończenie wiele części nie dostaniemy takich, z których da się ułożyć kwadrat. Co stoi za tą intuicją? Widać, że ewidentnym problemem jest brzeg koła, który jest zaokraglony. Kwadrat żadnych zaokrągleń nie ma. Czy jednak aby na pewno to przeszkadza? Z pewnością, gdy tniemy koło i dostaniemy kawałek, którego fragment brzegu jest fragmentem okręgu, to nie da się za pomocą translacji i obrotów tego fragmentu odwzorować na fragment brzegu kwadratu. Jedno jest obłe, drugie jest płaskie. Pojawia się jednak wątpliwość, czy jeśli potnie się koło na masę kawałków i część z tych kawałków będzie miała odcinki jako krawędzie, które zostaną odwzorowane na brzeg kwadratu, to na przykłąd nie da się tak wyciąćtych części, by "upchnąć" gdzieś również obłość okręgu. Przeciwko takiej możliwości świadczy następujące rozumawanie.
Kiedy tnę figurę krzywą tak, żeby wprowadzić wklesłość, pojawia mi się również komplementarna do niej obłość.

Brakujący rysunek

Można spodziewać się więc, że próbując wyprodukować dla okręgu nadmiarową wklęsłość, starania te zawiodą, gdyż za każdym razem powstanie tyle samo obłości. Tylko co to w tym wypadku znaczy "tyle samo"? Nie wiedząc tego dalej pozostaje pewna wątpliwość, czy nie da się pociąć tak, by obłość zniknęła. widać, że przy cięciach generujących wklęsłość obłość się pojawia, ale może pojawia się jej "mniej". Powinniśmy w takim razie wprowadzić aparat pojęciowy pozwalający nam mierzyć "ilość" wklęsłości i obłości, tak by zobaczyć, czy przy jakimkolwiek cięciu, ta się wyprodukować jedno, nie produkujac jednakowej "ilości" drugiego.

Przystąpimy do szukania satysfakcjonującej definicji obłości figury, która pozwoli nam rozróżnić koło i kwadrat i sformalizować nasze intuicje. Obłość ma oddawać fakt, że coś jest zaokrąglone, więc dla bardziej zaokrąglonych obiektów chcielibyśmy, żeby była większa, a dla mniej, żeby była mniejsza. Ponadto o obłości figury ma świadczyć sam kształt brzegu danej figury. Zdefiniujmy zatem obłość dla krzywych. Powiemy, że obłością figury z definicji jest tak zdefiniowana obłość jej brzegu.
Niech dowolnego odcinka jego obłość wynosi zero. Niech dla dowolnego okręgu

jego obłość wynosi 2π. Niech dla spójnego fragmentu okregu jego obłość do obłości całego okręgu ma się tak jak jego długość do długości całego okregu. Dzięki temu dla rodziny krzywych o tej samej długości l - odcinka i fragmentów okręgów wszystkich możliwych promieni ($[l/2\pi, \infty)$ faktycznie obłość jest tym większa im bardziej zakrzywiona jest krzywa.

Brakujący rysunek

Zdefiniujmy teraz obłość dla krzywych C^2.

Brakujący rysunek - podział krzywej, okręgi

Definiujemy ją jako granicę przybliżeń obłości.
Przybliżamy obłość dzieląc krzywą na fragmenty i opisując okręgi tak jak na rysunku. Przybliżona obłość fragmentu, to obłość odpowiadającego fragmentu okręgu.
Chcemy jednak rozróżniać "wklęsłość" od "wypukłości". Dlatego wybieramy stronę krzywej, która ma być "wnętrzem" i sumujemy przyczynki z odpowiednimi znakami.

Granicą promieni okregów z kolejnych przybliżeń w pojedynczym punkcie jest promień krzywej w danym punkcie. Obłość dla łuku wyraża się jako długość przez promień. Skąd obłość krzywej jest całką po krzywej z odwrotności promienia ze znakiem. Jest to więc całka po krzywej z jej krzywizny ze znakiem.
Zauważmy teraz, że cięcie figury nie zmienia jej obłości. Istotnie każda krzywa cięcia generuje dwie krzywe brzegów fragmentów, które są identyczne z wnętrzmi po przeciwnych stronach.
Zatem całki ze znakowanej krzywizny (obłość) po nich są identyczne co do wartości i przeciwne co do znaku. Zatem ich suma wynosi zero.
Stąd po poccięciu figura ma identyczną obłość, co przed.
Przesuwanie fragmentów i obracanie oczywiście nie zmienia obłości. Również klejenie fragmentóœ ze sobą nie może jej zmienić, gdyż klejone fragmenty muszą być przystające i mieć wnętrze po przeciwnch stronach. Suma ich obłości musi wynosić zatem zero.

Stąd operacja pocięcia na skończenie wiele fragmentów krzywymi i ponownego sklejenia nie zmienia obłości. Koło ma jednak obłość rózną 2π, a kwadrat równą 0, zatem pocięcie w ten sposób jednego i sklejenie drugiego jest niemożliwe.

2 Pierścień i kwadrat

Powyższe rozumowanie rozwiązuje problem dla koła i kwadratu, nie jest pomocne jednak w innym naturalnym przykładzie, stworzonym wręcz po to (to prawda), żeby wykazać jego ograniczenia.
Weźmy pierścień i kwadrat.

Brakujący rysunek

Intuicja, tak jak poprzednio, podpowiada nam, że nie powinno się dać jednego przekształcić na drugie przy pomocy cięć i klejeń. Jednak obłość obydwu wynosi 0. Pierścień ma i wypukłości i wklęsłości, ale nie pasują one do siebie, więc spodziewamy się, że się nawzajem nie "zniosą", jednak niezmiennik jakim jest obłość tego nie widzi.
Wyruszymy teraz na poszukiwania subtelniejszego niezmiennika, który wychwyci różnicę. Bedzie to znakowana miara obłości. Ponownie zdefiniujemy ją dla krzywych z wyróżnioną stroną, a następnie dla figur jako dziedziczoną z ich brzegu.
Jak widać problem leży w tym, że obłość wynosi zero, ale dodatnie i ujemne przyczynki pochadzą od okręgów o różnych promieniach, które i tak do siebie nie pasują. Dlatego w dokładniejszym podejściu, rozróżniamy od fragmentów krzywej o jakim proieniu pochodzi obłość. W tym celu definiujemy miarę, na przedziale $\mathbb{R}$, równym $[0, K_{\mathrm{MAX}}]$, gdzie K_{MAX} jest maksymalną krzywizną występującą na krzywej. Określamy ją jak następuje:

$$\mu_O([k_1, k_2]) = \int\limits_{\{t\ :\ k(t) \in [k_1, k_2]\}} k \,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Tak zdefiniowana miara znowu jest niezmiennicza na cięcia (krzywe są identyczne, różnią się wyłącznie co do strony wnętrza) jak i na izometrie i sklejenia. Miara ta ma w każdym punkcie albo gęstość (gdy jakiś promień nie ma żadnego łuku), lub masę, gdy dany promień ma swój łuk.
W przypadku pierścienia ZMO wynosi tyle:

Brakujący rysunek

W przypadku kwadratu wszędzie wynosi zero.
Zatem faktycznie nie da się rozciać pierścienia i złożyć z niego kwadratu.

Znakowana miara obłości pokrywa wszystkie naturalne przykłady (tzn. takie, które wymyśliłem, zanim starałem się wymysleć takie, które ją obalą). W szczególności potrafi nie tylko rozróżnić, ale i sklasyfikować wszystkie figury o brzegach składających się z odcinków i łuków (co pokażemy w następnym rozdziale).
I tutaj zbliżamy się do prolemu - idealny niezmiennik pozwalałby nie tylko na określenie czy dla danych dwóch figur nie da się ich przerzucić. Wynikało by też z niego, że jeśli jest równy dla obu figur, to przerzucić się je da. Przy definiowaniu niezmienników jako własności brzegu wymaga to jednak chociażby faktu, że jeśli brzegi są sobie (w pewnym sensie jaki ściśle za niedługo podamy) równoważne przez cięcia, to figury także. Na szczęście okaże się, że tak jest.
W kolejnych rozdziałach zajmiemy się własnie szukaniem takiego twierdzenia odwrotnego (czy właściwie działającego w obie strony) i związanego z nim niezmiennika. Zakończy się to dyskusją, czy wyniki nas satysfakcjonują.
Pokażemy też w międzyczasie, że znakowana miara obłości takim niezmiennikiem nie jest (chociaż jest nim dla figur o brzegach składających się z odcinków i łuków).

3 Twierdzenie odwrotne

Najpierw sformalizujmy nieco nasze pojęcia.
Zajmujemy się figurami w $\mathbb{R}^2$, których brzegi są skończonymi zbiorami rozłącznych obrazów prostych krzywych zamkniętych, kawałkami C^∞, takimi, że, żadne dwa sąsiednie C^∞ kawałki obrazów jednej krzywej nie tworzą ze sobą kąta $180 stopni$. Co to znaczy, że nie tworzą kąta $180 stopni$? O to:

Brakujący rysunek

i wyjaśnienie

Wszędzie dalej kiedy będzie użyte słowo figura, będzie to oznaczało właśnie taki podzbiór $\mathbb{R}^2$.

3.0.1 Krzywa z wyróżnioną stroną

Krzywa z wyróżnioną stroną będzie to krzywa wraz z wybraną jedną z dwóch klas ciągłych cięć pewnej wybranej podwiązki wiązki stycznej $\mathbb{R}^2$ zawieszonej nad tą krzywą.
Dla krzywej $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ patrzymy się na podwiązkę wiązki stycznej do $\mathbb{R}^2$ złożoną z dowolnych podprzestrzeni dopełniczych do podprzestrzeni rozpinanych przez wektor styczny do krzywej w danym punkcie. (na rogach wybieramy tak, by przestrzeń była dopełnicza dla obu wektorów stycznych).
Wybieramy teraz nieznikające cięcia tych wiązek, takich, aby w punktach nieróżniczkowalności wyznacznik macierzy złożonej z wybranego wektora i z wektora stycznego miał taki sam znak dla obydwu wektorów stycznych.

Brakujący rysunek

To do: Może ująć to w lemat:
Dzielą się one na dwie klasy:
-cięcia, gdzie w każdym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wektor z cięcia] jest dodatni oraz
-cięcia, gdzie w każdym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wektor z cięcia] jest ujemny
Jest tak, ponieważ cięcia te są ciągłymi cięciami jednowymiarowej wiązki, wyznacznik jest ciągły oraz zależność wektora stycznego od parametru jest ciągła poza punktami nieróżniczkowalności, ale na nich, z wyboru wiązek, wyznacznik nie zmiania znaku. Stąd wyznacznik musiałby zmieniać znak we wnętrzu różniczkowalnej krzywej, ale wtedy w pewnym momencie zerowałby się, co oznaczałoby, że cięcie znika. Sprzeczność.
Wybór jednej z klas takich cięć nazywamy wyborem strony krzywej. Ma to oddawać fakt czegoś takiego:

Brakujący rysunek

Zauważmy, że dla figury rozpatrywanej jako dwuwymiarowa rozmaitość oraz komponenty jej brzegu jedna z tych klas jest złożona z wektorów leżacych w wiązce stycznej do tej rozmaitości, a jedna z wektorów do niej nienależących. Ponieważ dla każdej komponenty parametryzację możemy wybrać niezależnie, więc da się je wybrać tak, by jedna z tych klas odpowiadała dla wszsystkich komponent wnętrzu rozmaitości. Od tej pory będziemy zakładali taki właśnie wybór parametryzacji. Co więcej taki, by strona z ujemnym wyznaczniekiem była we wnętrzu. (Czyli obiegamy figury przeciwnie do ruchu wskazówek zegra).

Od tej pory o wszystkich krzywych zakładamy, że mają wyróżnioną stronę.

3.1 Równoważność z problemem na brzegach

Najpierw dowiedziemy, że zagadnienie równoważności takich figur przez cięcia jest równoważne równoważności przez cięcia ich brzegów w następujacym sensie:
Powiemy, że dwie krzywe są równoważne przez cięcia, jeżeli obraz jednej z nich można pociąć i za pomocą izometrii przekształcić na obraz drugiej (zachowując wyróżnioną stronę), przy czym dopuszczamy cięcia pustej przestrzeni na dwie odpowiadające sobie krzywe oraz sklejanie takich krzywych:

Brakujący rysunek **słynne rysunki rozcinania pustej przestrzeni oraz klejenia dwóch odpowiadających krzywych dopiski - kreacja, anihilacja**

W jedną stronę:
jeśli da się przerzucić brzegi na siebie, a figury mają równe pola, to da się również figury.
Weźmy dwie figury A oraz B o równych polach, takie, że brzegi są równoważne przez cięcia. Niech cięcie to będzie realizowane poprzez podział brzegu A i przekształcenie jego fragmentów przez izometrie oraz, jeśli konieczny, podział "pustej przestrzeni" na krzywe i anihilację pasujących krzywych tak jak opisane wyżej. Niech ta operacja świadcząca o równoważności dwóch brzegóœ przez cięcia nazywa się ϕ
Skonstruujemy teraz redukcję problemu podziału tych figur do problemu

podziału wielokątów, który, jak wiadomo z Wallace–Bolyai–Gerwien theorem, zawsze ma rozwiązanie.
Rozpatrzmy fragmenty na które podzielony jest brzeg A. Każdy z nich jest zbiorem zwartym, więc (za wyjątkiem sąsiadujących) jest on w niezerowej odległości od pozostałych fragmentów. Dla tych, których obraz przez ϕ jest w B (to znaczy, że fragment nie został zanihilowany z mu odpowiadającym) jest on również w niezerowej odległości od wszystkich fragmentów (za wyjątkiem tych z którymi ma wspólne końce) z których został ułożony brzg B przy użyciu ϕ.
Fragmentów jest skończenie wiele, niech więc ε będzie dodatanią liczbą rzeczywistą mniejszą od wszystkich tych odległości dla wszystkich par niesąsiadujących fragmentów.
rozpatrzmy $\frac{\varepsilon}{4}$-owe otoczki wszystkich fragmentów krzywej. W każdym z tych fragmentów prowadzimy łamaną prostą o początku i końcu w końcach fragmentu taką, że piersza i ostatnia krawędź łamanej spełnia następujący warunek na kąty względem wektorów stycznych (zarówno w A, jak i w B:

Brakujący rysunek **początek i koniec łamanej, dwusieczna kąta z wektorów stycznych**

Wtedy wszystkie obszary ograniczone przez fragmenty krzywej oraz łamane w odpowiadających im otoczkach oraz ich obrazy prze ϕ są parami rozłączne za wyjątkiem końców fragmentów dla sąsiadujących fragmentów.
Możemy odciąć je z A i przerzucić w odpowiednie miejsca na B.
Fragmenty brzegu A, które się z sobą zanihilują, odcinamy po jednym z pary wraz z jego łamaną i anihilujemy.

Brakujący rysunek **anihilecja**

Niech A' oznacza tak powstałą z A figurę. Brzeg B dzieli się na dwa obszary - fragmenty pochodzące z fragmentów brzegu A oraz fragmenty pochodzące z rozcięć przestrzeni. Pozostaje "obsłużyć" fragmety brzegu B pochadzące z kreacji krzywych z przestrzeni.
Potrzebny będzie następujący lemat:

Lemma 3.1.1. *Dla dowolnej krzywej* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ *takiej jak tu przyjmujemy* *i dowolnego okręgu $\mathcal{O}$ zawartego w $\mathbb{R}^2$ da się znaleźć taki podział γ, by poprzez izometrie dało się go odwzorować we wnętrze $\mathcal{O}$ tak, że obrazy fragmentów są parami rozłączne.*

Proof. Konstuujemy ciąg podziałów γ tak, by dla każdego n w n-tym podziale długość każdego fragmentu była mniejsza niż $d(\mathcal{O})/(2n+1)$ ale (poza, być może, ostatnim) większa niż $d(\mathcal{O})/(2n+3)$.

To do: dać lepsze oznaczenia

Fragmentów tych będzie co najwyżej część całkowita z $\frac{d(\gamma)}{d(\mathcal{O})/(2n+3)}$. czyli $(2n+3)\frac{d(\gamma)}{d(\mathcal{O})}$. Każdy z tych fragmentów zmieści się w kole o średnicy $d(\mathcal{O})/(2n+1)$. Kół o średnicach $d(\mathcal{O})/(2n+1)$ w kole $\mathcal{O}$ da się na pewno zmieścić co najmniej $6\frac{n(n+1)}{2}+1$.

Brakujący rysunek sześciokąty

Dla n takiego że $3\frac{n(n+1)+1}{2n+3} > \frac{d(\gamma)}{d(\mathcal{O})}$, krzywa zmieści się rozłącznie w okręgu dla podziału odpowiadającego n. □

Bierzemy wszystkie krzywe (bez wyróżnionej strony) z których powstały te fragmenty brzegu B, łączymy je w jedną długą krzywą prostą (jeśli trzeba to łamiemy je, żeby zachować warunek "prostości"). Tak skonstruowaną krzywą umieszczamy w kole tak małym, by było zawarte we wnętrzu A' tak jak mówi lemat 3.1.1. Przy czym zagęszczamy podział tak mocno by obłość każdego fragmentu nie przekraczała $\pi/8$ oraz by dlugość żadnego fragmentu nie była większa niż $\varepsilon/8$. Należy teraz wykonać następujące cięcia w A':

Brakujący rysunek jak ciąć

Brakujący rysunek jak ciąć w środku kulki

Z powyższych fragmentów układamy odpowiednie fragmenty brzegu B. Tak powstała figura A'' jest wielokątem. Niepokryta część B rówież jest wielokątem, nazwijmy ją B''. A oraz B miały równe pola, więc A'' i B'' również mają równe pola. Są więc równoważne przez cięcia, więc A i B również są.

W drugą stronę:
Jeśli figury są równoważne, to brzegi też.
Podział figur zadaje równoważność brzegu jednej z sumą brzegów fragmentów na jakie została pocięta oraz równoważność tej sumy brzegów z brzeiem drugiej. Stąd dla równoważnych figur ich brzegi również są równoważne. □
Uwaga. To właśnie w tym dowodzie potrzebne jest założenie, że fragmety krzywych nie mogą tworzyć kątu 180 stopni. Konkretnie w tym. W przypadku 180 stopni nie dałoby się skonstruować odpowiednich łamanych.
Przykładem figury której brzeg jest równoważny przez cięcia z brzegiem innej, o równym polu, a które nie spełniają jedynie tego założenia i nie są równoważne przez cięcia są następujące figury:

Brakujący rysunek **posklejane kółka ze szpicami**

. Dowód nierównoważności:

TO DO: jakiś niezmiennik na szpice, to powinno wyjść

3.2 Kiedy ZMO zawodzi

4 Wielka grupa abelowa

5 Równoważność elementu w wielkiej grupie abelowej z klasą figur równoważnych ze sobą przez cięcia

6 Dyskusja, że to niewiele daje

7 a co, jeśli, krzywe są zamknięte i (nie kawałkami!) głądkie?