

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność teoretyczna

Bartosz Sójka

**Równoważność przez cięcia w przestrzeni
dwuwymiarowej**

Praca mam nadzieję magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jana Dymary

Wrocław Rok 2019

Contents

1	Koło i kwadrat	4
2	Pierścień i kwadrat	7
3	Twierdzenie odwrotne	9
3.0.1	Krzywa z wyróżnioną stroną	9
3.1	Równoważność z problemem na brzegach	11
3.2	Kiedy ZMO zawodzi	19
3.2.1	Jak wygląda znakowana miara obłosci	19
3.3	No i co z tego?	20
4	Wielka grupa abelowa	22
4.0.1	Kreacja/anihilacja	22
4.0.2	Cięcia/klejenie	22
4.0.3	Izometrie zachowujące orientacje	22
5	Równoważność elementu w wielkiej grupie abelowej z klasą figur równoważnych ze sobą przez cięcia	23
6	Dyskusja, że to niewiele daje	23
7	a co, jeśli, krzywe są zamknięte i (nie kawałkami!) gładkie?	25
8	Uwaga o topologii	25

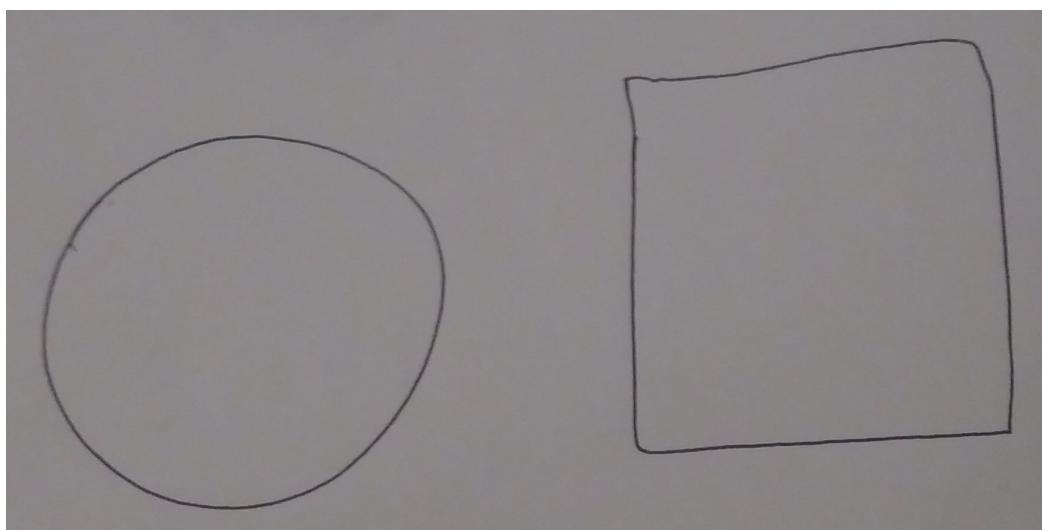
Abstract

W roku 1990 wegielski matematyk Miklós Laczkovich rozwiązał problem kwadratury koła Tarskiego - udowodnił on, że koło da się podzielić na skończoną liczbę części, z których można ułożyć kwadrat. Twierdzenie to może wydawać się nieintuicyjne i istotnie, części na które zostało podzielone koło w dowodzie były zbiorami niemierzalnymi, a sam dowód był niekonstruktywny. Co więcej, nie jest ono prawdziwe, gdy ograniczymy się do podziałów koła na zbiory, których brzegi są krzywymi Jordana. Punktem wyjścia pracy jest przypadek powyższego zagadnienia, gdzie brzegi są krzywymi Jordana kawałkami C^∞ . Można traktować je jako dobry model dla fizycznie realizowalnych cięć. Dalej będzie rozwinięta i omówiona teoria klasyfikacji figur w przestrzeni dwuwymiarowej ze względu na ich równoważność przez cięcia.

1 Koło i kwadrat

Praca będzie miała stopniowo rosnący poziom formalności. Początek jest gawędą o moich rozmyślaniach i motywacjach skąd wzięły się przedstawione problemy. Mniej więcej między drugim a trzecim rozdziałem całość nabiera formalizmu. Przez całą pracę rozważane krzywe są krzywymi sparametryzowanymi długością, kawałkami C^∞ , gdzie kolejne C^∞ fragmenty krzywych nigdy nie tworzą kąta 180 stopni (tutaj formalniej). Będą one dalej nazywane po prostu krzywymi.

Łuk - spójny fragment okręgu



Intuicja podpowiada, że biorąc koło i tnąc je na skończenie wiele części nie dostaniemy takich, z których da się ułożyć kwadrat. Co stoi za tą intuicją? Widać, że evidentnym problemem jest brzeg koła, który jest zaokrąglony. Kwadrat żadnych zaokrągleń nie ma. Czy jednak aby na pewno to przeszkaź? Z pewnością, gdy tnemy koło i dostaniemy kawałek, którego fragment brzegu jest fragmentem okręgu, to nie da się za pomocą translacji i obrotów tego fragmentu odwzorować na fragment brzegu kwadratu. Jedno jest obłe, drugie jest płaskie. Pojawia się jednak wątpliwość, czy jeśli potnie się koło na masę kawałków i część z tych kawałków będzie miała odcinki jako krawędzie, które zostaną odwzorowane na brzeg kwadratu, to na przykład nie da się tak wyciąć części, by "upchnąć" gdzieś również obłość okręgu. Przeciwko takiej możliwości świadczy następujące rozumawianie.

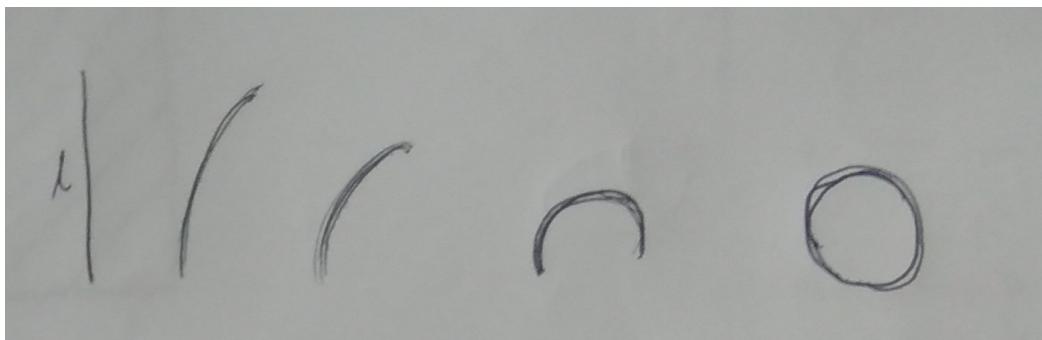
Kiedy tnę figurę krzywą tak, żeby wprowadzić wklesłość, pojawia mi się również komplementarna do niej wypukłość.



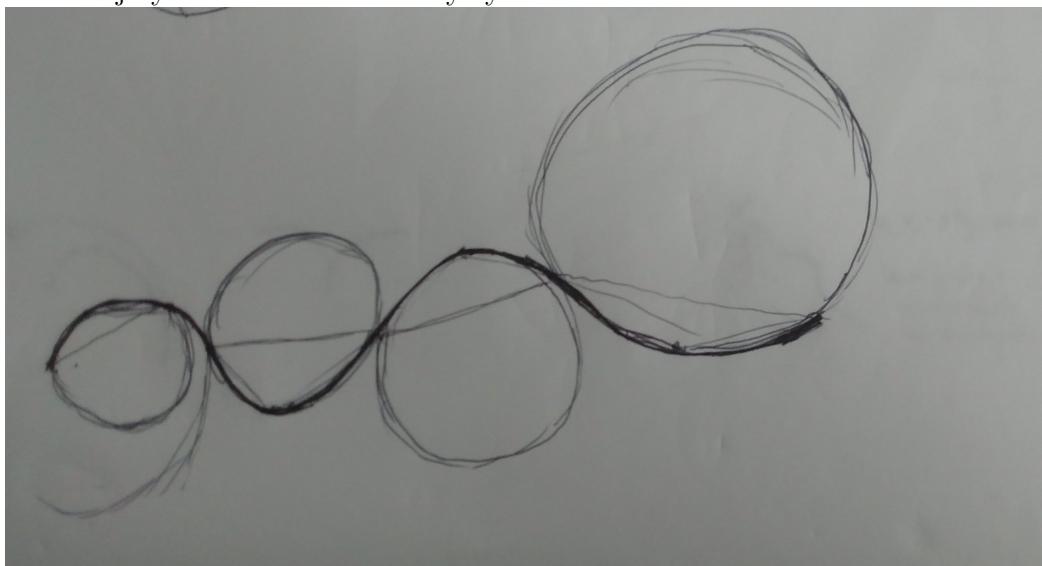
Można spodziewać się więc, że próbując wyprodukować dla okręgu nadmiarową wklęsłość, starania te zawiodą, gdyż za każdym razem powstanie tyle samo wypukłości. Tylko co to w tym wypadku znaczy "tyle samo"? Nie wiedząc tego dalej pozostaje pewna wątpliwość, czy nie da się pociąć tak, by obłość zniknęła. widać, że przy cięciach generujących wklęsłość obłość się pojawia, ale może pojawia się jej "mniej". Powinniśmy w takim razie wprowadzić aparat pojęciowy pozwalający nam mierzyć "ilość" wklęsłości i obłosci, tak by zobaczyć, czy przy jakimkolwiek cięciu, da się wyprodukować jedno, nie produkując jednakowej "ilości" drugiego.

Przystąpimy do szukania satysfakcjonującej definicji obłosci figury, która pozwoli nam rozróżnić koło i kwadrat i sformalizować nasze intuicje. Obłość ma oddawać fakt, że coś jest zaokrąglone, więc dla bardziej zaokrąglonych obiektów chcielibyśmy, żeby była większa, a dla mniejszej, żeby była mniejsza. Ponadto o obłosci figury ma świadczyć sam kształt brzegu danej figury. Zdefiniujmy zatem obłość dla krzywych. Powiemy, że oblossenią figury z definicji jest tak zdefiniowana obłość jej brzegu.

Niech dowolnego odcinka jego obłość wynosi零. Niech dla dowolnego okręgu jego obłość wynosi 2π . Niech dla spójnego fragmentu okregu jego obłość do obłosci całego okręgu ma się tak jak jego długość do długości całego okregu. Dzięki temu dla rodziny krzywych o tej samej długości l - odcinka i fragmentów okręgów wszystkich możliwych promieni $([l/2\pi, \infty)$ faktycznie obłość jest tym większa im bardziej zakrzywiona jest krzywa.



Zdefiniujmy teraz obłość dla krzywych C^2 .



Definiujemy ją jako granicę przybliżeń obłości.

Przybliżamy obłość dzieląc krzywą na fragmenty i opisując okręgi tak jak na rysunku. Przybliżona obłość fragmentu, to obłość odpowiadającego fragmentu okręgu.

Chcemy jednak rozróżnić "wklesłość" od "wypukłości". Dlatego wybieramy stronę krzywej, która ma być "wnętrzem" i sumujemy przyczynki z odpowiednimi znakami.

Granicą promieni okregów z kolejnych przybliżeń w pojedynczym punkcie jest promień krzywej w danym punkcie. Obłość dla łuku wyraża się jako długość przez promień. Skąd obłość krzywej jest całką po krzywej z odwrotnością promienia ze znakiem. Jest to więc całka po krzywej z jej krzywizny ze znakiem (oznaczanej tutaj jako k^\pm).

Zauważmy teraz, że cięcie figury nie zmienia jej obłości. Istotnie każda krzywa cięcia generuje dwie krzywe brzegów fragmentów, które są identyczne z wnętrzmi po przeciwnych stronach.

Zatem całki ze znakowanej krzywizny (obłość) po nich są identyczne co do wartości i przeciwe co do znaku. Zatem ich suma wynosi zero.

Stąd po pocięciu figura ma identyczną obłość, co przed.

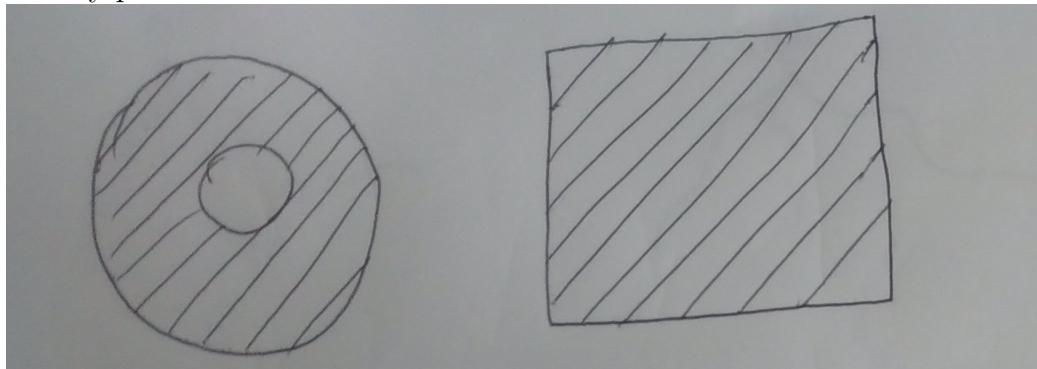
Przesuwanie fragmentów i obracanie oczywiście nie zmienia obłosci. Również klejenie fragmentów ze sobą nie może jej zmienić, gdyż klejone fragmenty muszą być przystające i mieć wnętrze po przeciwnych stronach. Suma ich obłosci musi wynosić zatem zero.

Stąd operacja pocięcia na skończenie wiele fragmentów krzywymi i ponownego sklejenia nie zmienia obłosci. Koło ma jednak obłość różną 2π , a kwadrat równą 0, zatem pocięcie w ten sposób jednego i sklejenie drugiego jest niemożliwe.

2 Pierścień i kwadrat

Powyzsze rozumowanie rozwiązuje problem dla koła i kwadratu, nie jest pomocne jednak w innym naturalnym przykładzie, stworzonym wręcz po to (to prawda), żeby wykazać jego ograniczenia.

Weźmy pierścień i kwadrat.



Intuicja, tak jak poprzednio, podpowiada nam, że nie powinno się dać jednego przekształcić na drugie przy pomocy cięć i klejeni. Jednak obłość obydwu wynosi 0. Pierścień ma i wypukłości i wklęsłości, ale nie pasują one do siebie, więc spodziewamy się, że się nawzajem nie "zniosą", jednak niezmiennik jakim jest obłość tego nie widzi.

Wyruszmy teraz na poszukiwania subtelniejszego niezmiennika, który wychwyci różnicę. Bedzie to znakowana miara obłosci. Ponownie zdefiniujemy ją dla krzywych z wyróżnioną stroną, a następnie dla figur jako dziedziczoną z ich brzegu.

Jak widać problem leży w tym, że obłość wynosi zero, ale dodatnie i ujemne przyczynki pochodzą od okręgów o różnych promieniach, które i tak do siebie nie pasują. Dlatego w dokładniejszym podejściu, rozróżniamy od fragmentów krzywej o jakim proieniu pochodzi obłość. W tym celu definiujemy mi-

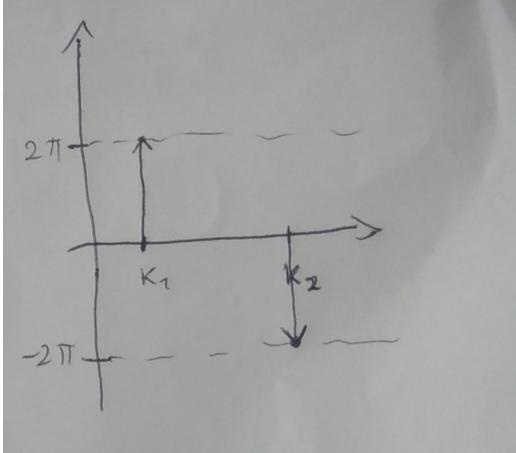
arę, na przedziale \mathbb{R} , równym $[0, K_{\text{MAX}}]$, gdzie K_{MAX} jest maksymalną krzywizną występującą na krzywej. Dla krzywej sparametryzowanej długością określamy ją jak następuje:

$$\mu_O([k_1, k_2]) = \int_{\{t : k(t) \in [k_1, k_2]\}} k^\pm dt. \quad (1)$$

Tak zdefiniowana miara znowu jest niezmiennicza na cięcia (krzywe są identyczne, różnią się wyłącznie co do strony wnętrza) jak i na izometrie zachowujące orientację i sklejenia.

Miara ta ma w każdym punkcie albo gęstość (gdy jakiś promień nie ma żadnego łuku), lub masę, gdy dany promień ma swój łuk.

W przypadku pierścienia ZMO wynosi tyle:



W przypadku kwadratu wszędzie wynosi zero.

Zatem faktycznie nie da się rozciąć pierścienia i złożyć z niego kwadratu.

Znakowana miara obłości pokrywa wszystkie naturalne przykłady (tzn. takie, które wymyśliłem, zanim starałem się wymyślić takie, które ją obala). W szczególności potrafi nie tylko rozróżnić, ale i sklasyfikować wszystkie figury o brzegach składających się z odcinków i łuków (co pokażemy w następnym rozdziale).

I tutaj zbliżamy się do problemu - idealny niezmiennik pozwalałby nie tylko na określenie czy dla danych dwóch figur nie da się ich przerzucić. Wynikało by też z niego, że jeśli jest równy dla obu figur, to przerzucić się je da. Przy definiowaniu niezmienników jako własności brzegu wymaga to jednak chociażby faktu, że jeśli brzegi są sobie (w pewnym sensie jaki ściśle za niedługo podamy) równoważne przez cięcia, to figury także. Na szczęście okaże się, że tak jest.

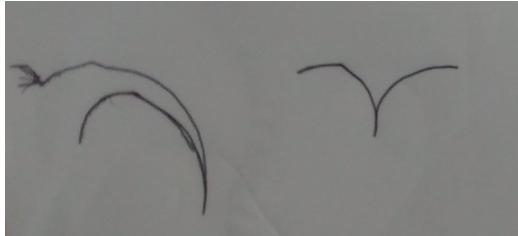
W kolejnych rozdziałach zajmiemy się właśnie szukaniem takiego twierdzenia

odwrotnego (czy właściwie działającego w obie strony) i związanego z nim niezmiennika. Zakończy się to dyskusją, czy wyniki nas satysfakcjonują. Pokażemy też w międzyczasie, że znakowana miara obłości takim niezmiennikiem nie jest (choć jest nim dla figur o brzegach składających się z odcinków i łuków).

3 Twierdzenie odwrotne

Najpierw sformalizujmy nieco nasze pojęcia.

Zajmujemy się zwartymi figurami w \mathbb{R}^2 , których brzegi są skończonymi zbiorami rozłącznych obrazów prostych krzywych zamkniętych, kawałkami C^∞ , takimi, że, żadne dwa sąsiednie C^∞ kawałki obrazów jednej krzywej nie tworzą ze sobą kąta 180stopni . Co to znaczy, że nie tworzą kąta 180stopni ? O to:



i wyjaśnienie

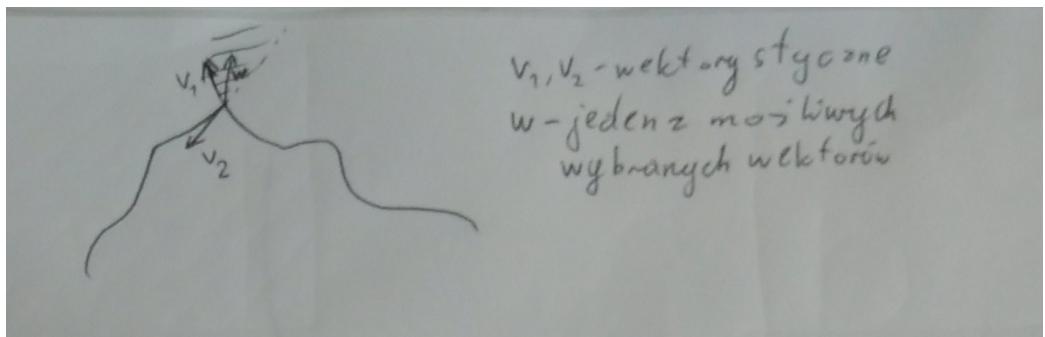
Wszędzie dalej kiedy będzie użyte słowo figura, będzie to oznaczało właśnie taki podzbiór \mathbb{R}^2 .

Ponadto wszystkie krzywe parametryzujemy ich długością.

3.0.1 Krzywa z wyróżnioną stroną

Krzywa z wyróżnioną stroną będzie to krzywa wraz z wybraną jedną z dwóch klas ciągłych cięć pewnej wybranej podwiązką wiązki stycznej \mathbb{R}^2 zawieszonej nad tą krzywą.

Dla krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ patrzymy się na podwiązkę wiązki stycznej do \mathbb{R}^2 złożoną z dowolnych podprzestrzeni dopełniczych do podprzestrzeni rozpinanych przez wektor styczny do krzywej w danym punkcie. (na rogach wybieramy tak, by przestrzeń była dopełniczą dla obu wektorów stycznych). Wybieramy teraz ciągłe, nieznikające cięcia tych wiązek, takich, aby w punktach nieróżniczkowalności wyznacznik macierzy złożonej z wybranego wektora i z wektora stycznego miał taki sam znak dla obydwu wektorów stycznych.



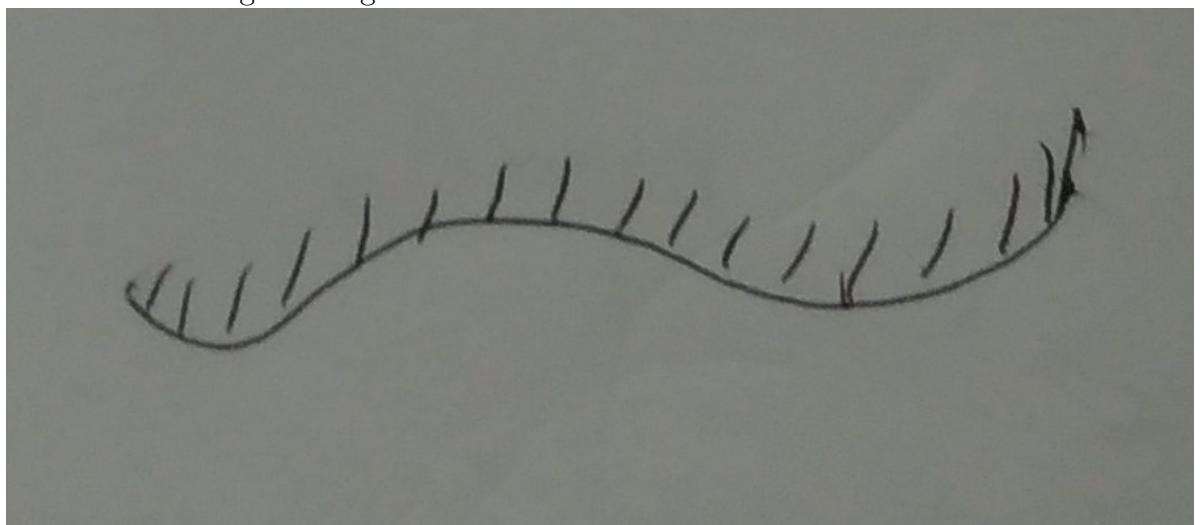
To do: Może ująć to w lemat:

Dzieli się one na dwie klasy:

- cięcia, gdzie w każdym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wektor z cięcia] jest dodatni oraz
- cięcia, gdzie w każdym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wektor z cięcia] jest ujemny

Jest tak, ponieważ cięcia te są ciągłymi cięciami jednowymiarowej wiązki, wyznacznik jest ciągły oraz zależność wektora stycznego od parametru jest ciągła poza punktami nieróżniczkowalności, ale na nich, z wyboru wiązek, wyznacznik nie zmienia znaku. Stąd wyznacznik musiałby zmieniać znak we wnętrzu różniczkowalnej krzywej, ale wtedy w pewnym momencie zerowałby się, co oznaczałoby, że cięcie znika. Sprzeczność.

Wybór jednej z klas takich cięć nazywamy wyborem strony krzywej. Ma to oddawać fakt czegoś takiego:



Zauważmy, że dla figury rozpatrywanej jako dwuwymiarowa rozmaitość oraz komponenty jej brzegu jedna z tych klas jest złożona z wektorów leżących w wiązce stycznej do tej rozmaistości, a jedna z wektorów do niej nien-

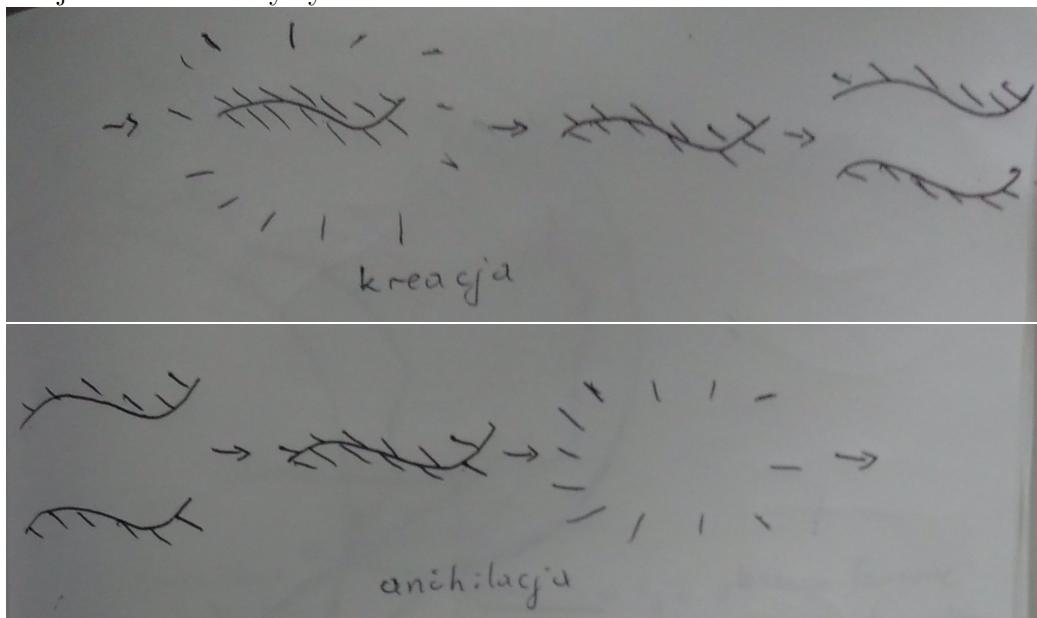
ależących. Ponieważ dla każdej komponenty parametryzację możemy wybrać niezależnie, więc da się je wybrać tak, by jedna z tych klas odpowiadała dla wszyskich komponent wewnętrz rozmaitości. Od tej pory będziemy zakładali taki właśnie wybór parametryzacji. Co więcej taki, by strona z ujemnym wyznacznikiem była we wnętrzu.

Od tej pory o wszystkich krzywych zakładamy, że mają wyróżnioną stronę. Krzywiznę ze znakiem k^\pm określamy tak, że jeśli para: wektor styczny, wektor drugiej pochodnej ma ten sam znak co wybrana klasa, to $k^\pm = k$, w przeciwnym wypadku $k^\pm = -k$.

3.1 Równoważność z problemem na brzegach

Najpierw dowiedziemy, że zagadnienie równoważności takich figur przez cięcia jest równoważne równoważności przez cięcia ich brzegów w następującym sensie:

Powiemy, że dwie krzywe są równoważne przez cięcia, jeżeli obraz jednej z nich można pociąć i za pomocą izometrii zachowujących orientację przekształcić na obraz drugiej (zachowując wyróżnioną stronę), przy czym dopuszcamy cięcia pustej przestrzeni na dwie odpowiadające sobie krzywe oraz sklejanie takich krzywych:



W jedną stronę:

jeśli da się przerzucić brzegi na siebie, a figury mają równe pola, to da się również figury.

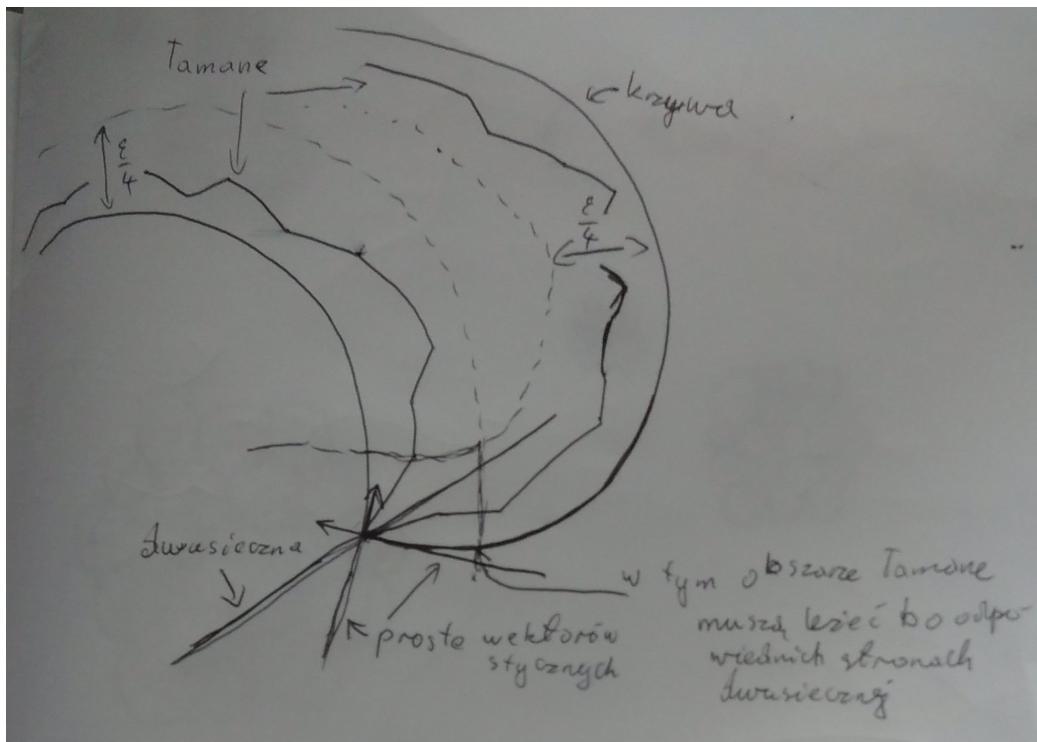
Weźmy dwie figury A oraz B o równych polach, takie, że brzegi są równoważne przez cięcia. Niech cięcie to będzie realizowane poprzez podział brzegu A i przekształcenie jego fragmentów przez przesunięcia i obroty oraz, jeśli konieczny, podział "pustej przestrzeni" na krzywe i anihilację pasujących krzywych tak jak opisane wyżej. Niech ta operacja świadcząca o równoważności dwóch brzegów przez cięcia nazywa się ϕ

Skonstruujemy teraz redukcję problemu podziału tych figur do problemu podziału wielokątów, który, jak wiadomo z Wallace–Bolyai–Gerwien theorem, zawsze ma rozwiązanie.

Rozpatrzmy fragmenty na które podzielony jest brzeg A . Każdy z nich jest zbiorem zwartym, więc (za wyjątkiem sąsiadujących) jest on w niezerowej odległości od pozostałych fragmentów. Dla tych, których obraz przez ϕ jest w B (to znaczy, że fragment nie został zanikowy z mu odpowiadającym) jest on również w niezerowej odległości od wszystkich fragmentów (za wyjątkiem tych z którymi ma wspólne końce) z których został ułożony brzeg B przy użyciu ϕ .

Fragmentów jest skończenie wiele, niech więc ε będzie dodatnią liczbą rzeczywistą mniejszą od wszystkich tych odległości dla wszystkich par niesąsiadujących fragmentów.

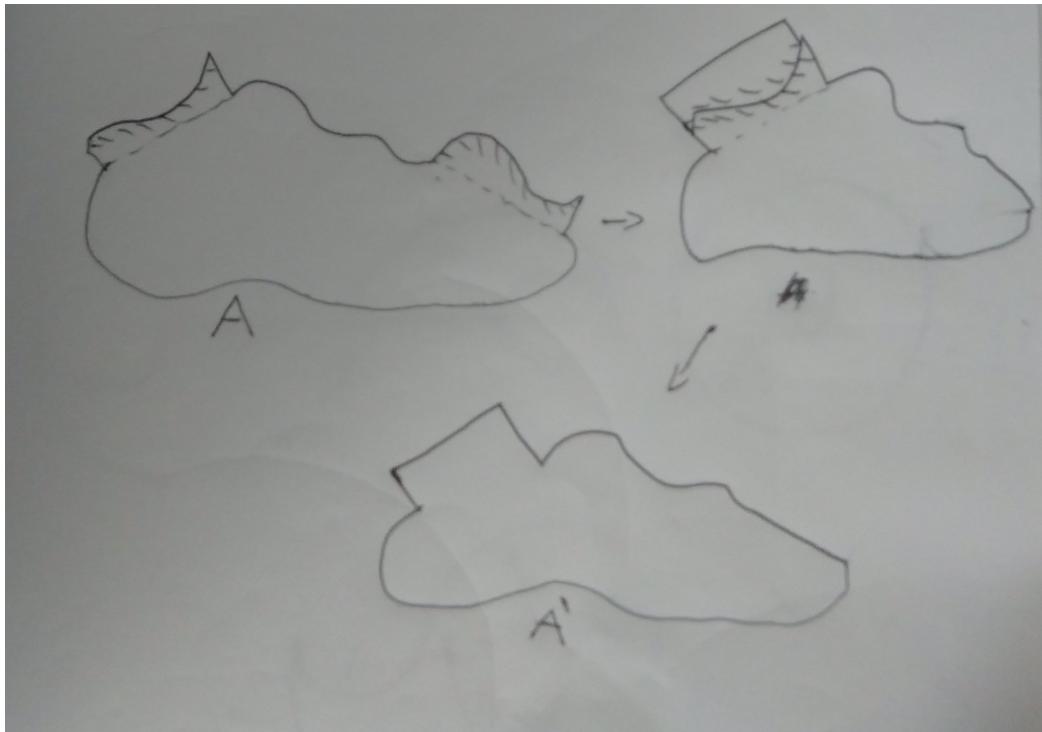
rozpatrzmy $\frac{\varepsilon}{4}$ -owe otoczki wszystkich fragmentów krzywej. W każdym z tych fragmentów prowadzimy lamaną prostą o początku i końcu w końcach fragmentu taką, że piersza i ostatnia krawędź lamanej spełnia następujący warunek na kąty względem wektorów stycznych (zarówno w A , jak i w B :



Wtedy wszystkie obszary ograniczone przez fragmenty krzywej oraz łamane w odpowiadających im otoczkach oraz ich obrazy prze ϕ są parami rozłączne za wyjątkiem końców fragmentów dla sąsiadujących fragmentów.

Mögemy odcięć je z A i przerzucić w odpowiednie miejsca na B .

Fragmenty brzegu A , które się z sobą zanihilują, odcinamy po jednym z pary wraz z jego łamaną i anihilujemy.



Niech A' oznacza tak powstałą z A figurę. Brzeg B dzieli się na dwa obszary - fragmenty pochodzące z fragmentów brzegu A oraz fragmenty pochodzące z rocień przestrzeni. Pozostaje "obsłużyć" fragmety brzegu B pochodzące z kreacji krzywych z przestrzeni.

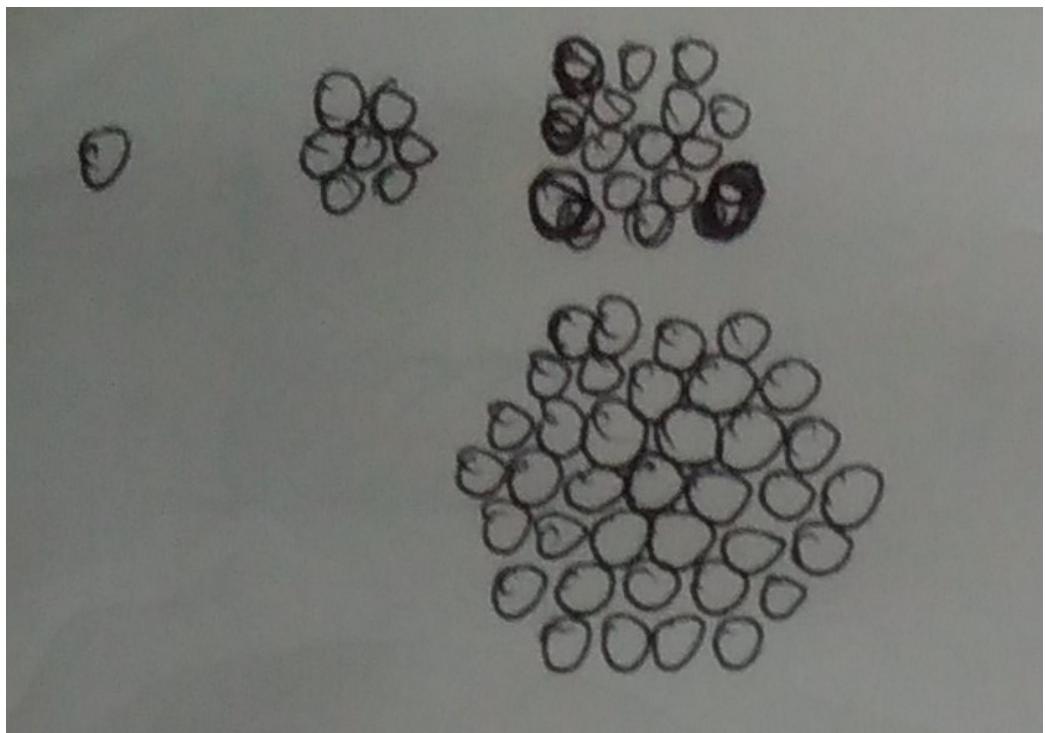
Potrzebny będzie następujący lemat:

Lemma 3.1.1. *Dla dowolnej krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takiej jak tu przyjmujemy i dowolnego okręgu \mathcal{O} zawartego w \mathbb{R}^2 da się znaleźć taki podział γ , by poprzez przesunięcia i obroty dało się go odwzorować we wnętrzu \mathcal{O} tak, że obrazy fragmentów są parami rozłączne.*

Proof. Konstruujemy ciąg podziałów γ tak, by dla każdego n w n -tym podziale długość każdego fragmentu była mniejsza niż $d(\mathcal{O})/(2n+1)$ ale (poza, być może, ostatnim) większa niż $d(\mathcal{O})/(2n+3)$.

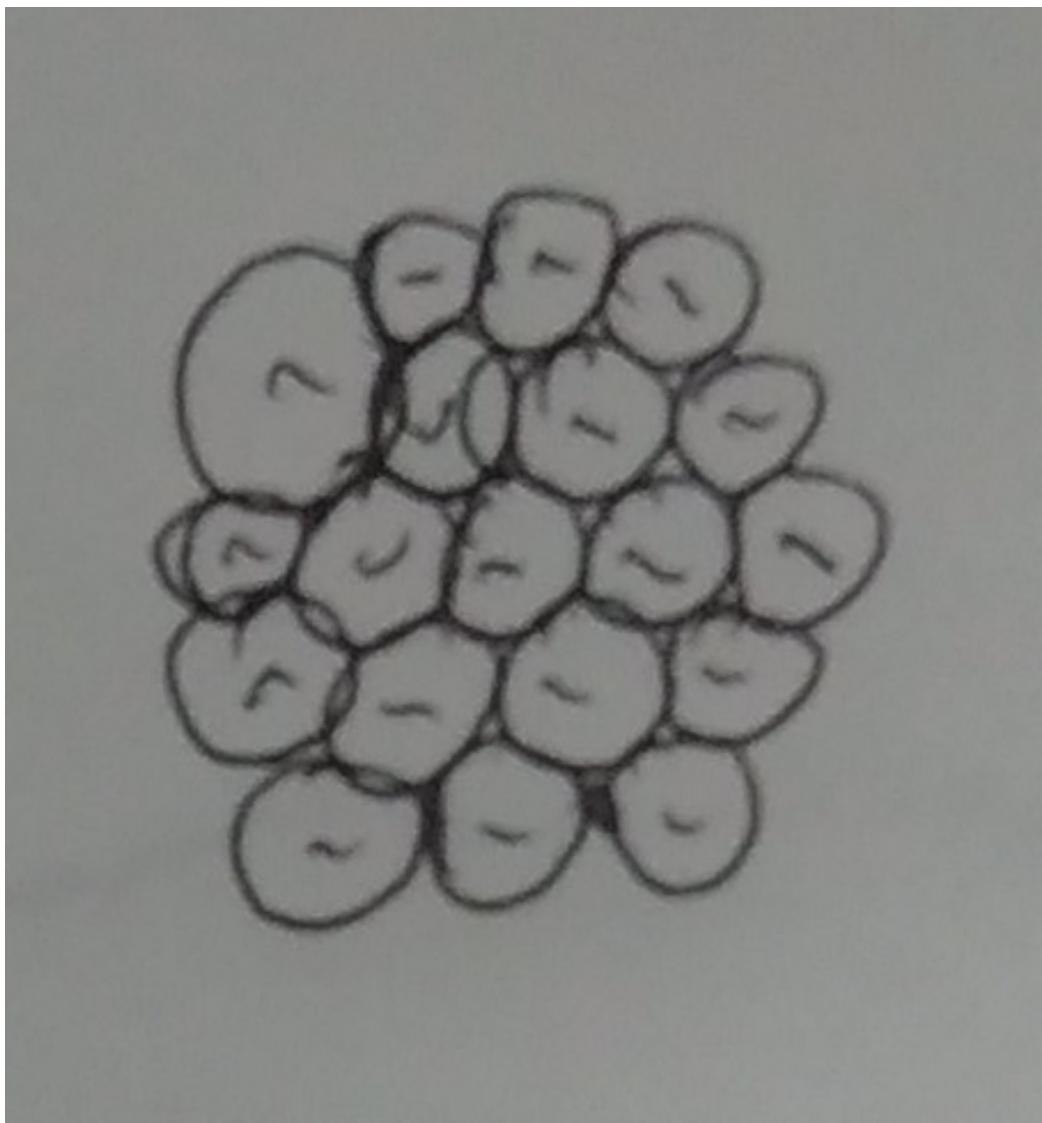
To do: dać lepsze oznaczenia

Fragmentów tych będzie co najwyżej część całkowita z $\frac{d(\gamma)}{d(\mathcal{O})/(2n+3)}$, czyli $(2n+3)\frac{d(\gamma)}{d(\mathcal{O})}$. Każdy z tych fragmentów zmieści się w kole o średnicy $d(\mathcal{O})/(2n+1)$. Kół o średnicach $d(\mathcal{O})/(2n+1)$ w kole \mathcal{O} da się na pewno zmieścić co najmniej $6\frac{n(n+1)}{2} + 1$.



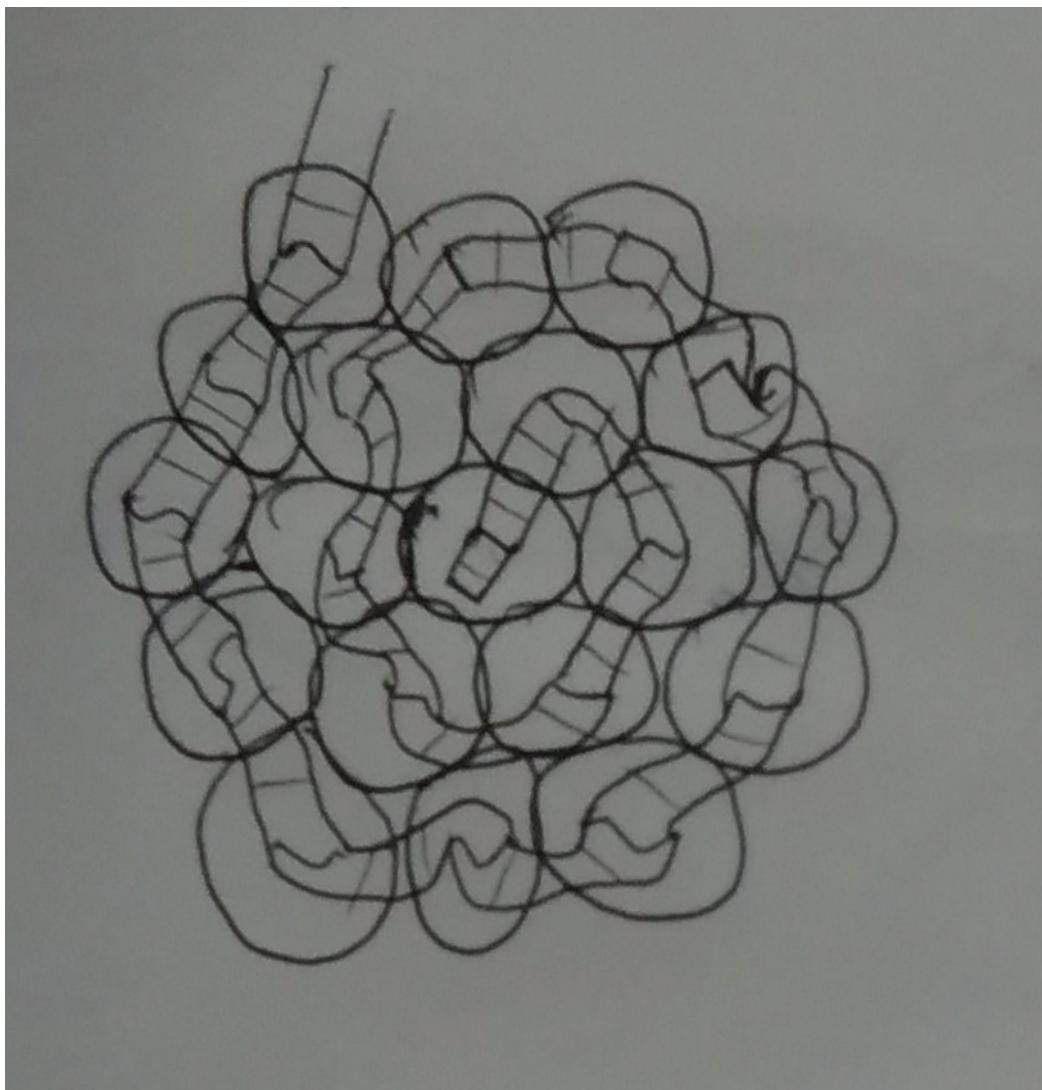
Dla n takiego że $3 \frac{n(n+1)+1}{2n+3} > \frac{d(\gamma)}{d(O)}$, krzywa zmieści się rozłącznie w okręgu dla podziału odpowiadającego n . \square

Bierzemy wszystkie krzywe (bez wyróżnionej strony) z których powstały te fragmenty brzegu B , łączymy je w jedną długą krzywą prostą (jeśli trzeba to łamiemy je, żeby zachować warunek "prostości"). Tak skonstruowaną krzywą umieszczamy w kole tak małym, by było zawarte we wnętrzu A' tak jak mówi lemat 3.1.1.



Przy czym zagęszczamy podział tak mocno by obłość każdego fragmentu nie przekraczała $\pi/8$ oraz by długość żadnego fragmentu nie była większa niż $\varepsilon/8$.

Należy teraz wykonać następujące cięcia w A' :



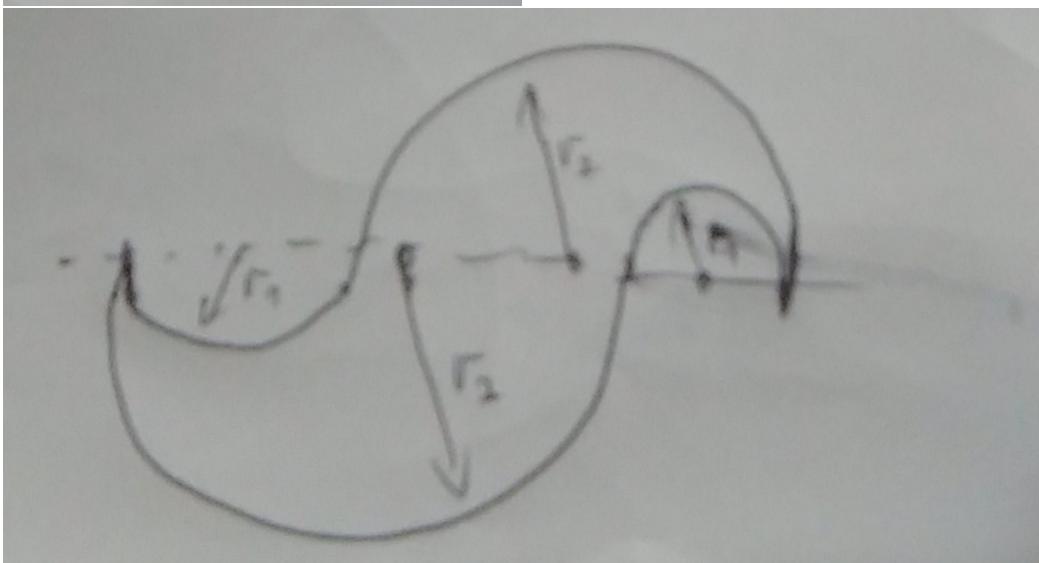
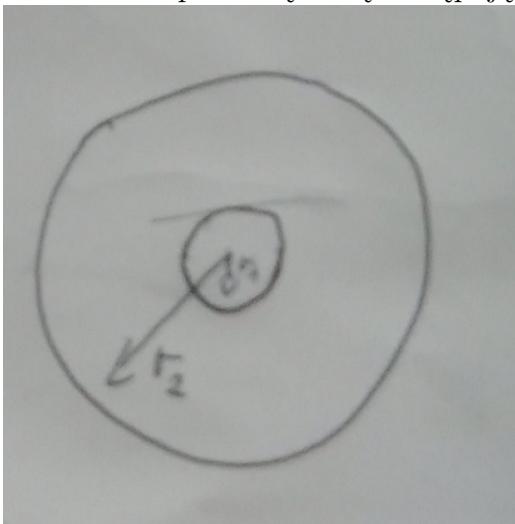
Z powyższych fragmentów układamy odpowiednie fragmenty brzegu B . Tak powstała figura A'' jest wielokątem. Niepokryta część B rówież jest wielokątem, nazwijmy ją B'' . A oraz B miały równe pola, więc A'' i B'' również mają równe pola. Są więc równoważne przez cięcia, więc A i B również są.

W drugą stronę:

Jeśli figury są równoważne, to brzegi też.

Podział figur zadaje równoważność brzegu jednej z sumą brzegów fragmentów na jakie została pocięta oraz równoważność tej sumy brzegów z brzeiem drugiej. Stąd dla równoważnych figur ich brzegi również są równoważne. \square

Uwaga. To właśnie w tym dowodzie potrzebne jest założenie, że fragmety krzywych nie mogą tworzyć kątu 180 stopni. Konkretnie w tym. W przypadku 180 stopni nie dałoby się skonstruować odpowiednich łamanych. Przykładem figury której brzeg jest równoważny przez cięcia z brzegiem innej, o równym polu, a które nie spełniają jedynie tego założenia i nie są równoważne przez cięcia są następujące figury:



Dowód nierównoważności:

**TO DO: jakiś niezmienik na szpice,
to powinno wyjść**

3.2 Kiedy ZMO zawodzi

Pokazaliśmy, że rozstrzygając równoważność przez podział figur o tym samym polu wystarczy rozstrzygnąć równoważność przez podział ich brzegów. Zastanówmy się, czy znakowana miara obłości jest wystarczającym kryterium do klasyfikacji krzywych - tzn. czy dowolne dwie nierównoważne mają różną oraz czy dowolne dwie równoważne mają taką samą.

W 2 odpowiedzieliśmy sobie twierdząco na drugie pytanie. Odpowiedź na pierwsze pytanie jest twierdząca dla krzywych złożonych wyłącznie z łuków i odcinków. Mając tą samą znakowaną miarę obłości mają tą samą sumaryczną długość łuków okręgów o odpowiednich promieniach z wyróżnioną stroną z odpowiedniej strony. Fragmenty te można kleić ze sobą i ciąć, tak by z jednej krzywej otrzymać drugą. Fragmenty o krzywiźnie 0 można dowolnie kreować i anihilować.

Znakowana miara obłości nie potrafi jednak rozróżnić wszystkich nieprzystających do siebie przez cięcia krzywych. Skonstruujemy tego przykład. Najpierw jednak przeprowadzimy analizę czym jest wprowadzona tutaj znakowana miara obłości i jak ma się do krzywizny krzywej.

3.2.1 Jak wygląda znakowana miara obłości

Rozpatrzmy krzywą o ścisłe monotonicznej krzywiźnie. Dla takich krzywych znak znakowanej krzywizny jest stały. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdzie $k^\pm = k$.

Niech $k(t)$ będzie funkcją krzywizny od czasu jakim jest sparametryzowana. Ze ścisłej monotoniczności istnieje funkcja odwrotna $t(k) : [k_{\text{MIN}}, k_{\text{MAX}}] \rightarrow \mathbb{R}$, która mówi w jakiej chwili czasu uzyskana była dana wartość krzywizny. Wyrazimy teraz znakowaną miarę obłości takiej krzywej poprzez jej krzywiznę oraz na odwrót - jej krzywiznę poprzez jej znakowaną miarę obłości.

Lemma 3.2.1. *Dla krzywej o ścisłe rosnącej krzywiźnie jej ZMO ma gęstość.*

Proof. Z definicji znakowanej miary obłości, dla dowolnego przedziału $[k_1, k_2]$ jest ona równa:

$$\mu_K([k_1, k_2]) = \int_{t(k_1)}^{t(k_2)} k(t) \, dt \quad (2)$$

Co przez zamianę zmiennych jest równe:

$$\int_{t(k_1)}^{t(k_2)} k(t) \, dt = \int_{k_1}^{k_2} \frac{k}{k'(t(k))} \, dk \quad (3)$$

$\varrho_K(k) = \frac{k}{k'(t(k))}$ jest szukaną gęstością miary μ_K . □

W ten sposób dla takiej klasy krzywych wyraziliśmy gęstość ich ZMO poprzez ich krzywiznę. Dla krzywych bez łuków μ_K również ma gęstość, jest ona wtedy sumą gęstości jej składowych o ścisłe monotonicznej krzywiźnie. Jest tak ponieważ definiujemy tę miarę poprzez całkę, która jest operatorem liniowym.

To do: określić jakie trzeba przyjąć warunki początkowe

Możemy wyrazić krzywiznę krzywej o ścisłe monotonicznej krzywiźnie na podstawie jej ZMO rozwiązuając równanie różniczkowe:

$$\varrho_K(t) = \frac{k(t)}{k'(t)} \quad (4)$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$k(t) = k_0 e^{\int_{t(k_0)}^t \frac{1}{\varrho_K(w)} dw} \quad (5)$$

Gdzie k_0 to odpowiednio najmniejsza bądź największa krzywizna.

Dla przypadku, gdzie $k^\pm = -k$ otrzymane zależności to:

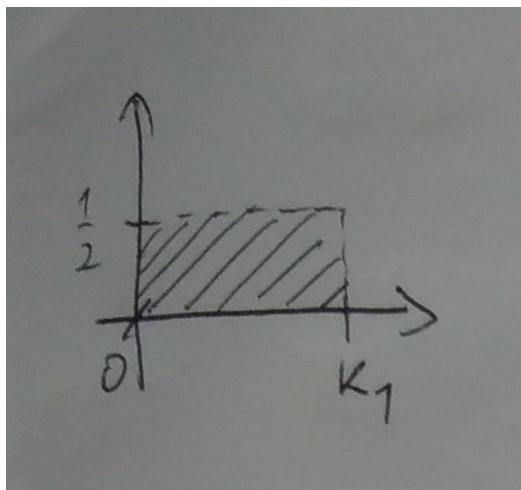
$$\varrho_K(k) = -\frac{k}{k'(t(k))} \quad \text{oraz} \quad (6)$$

$$k(t) = k_0 e^{\int_{t(k_0)}^t -\frac{1}{\varrho_K(w)} dw}. \quad (7)$$

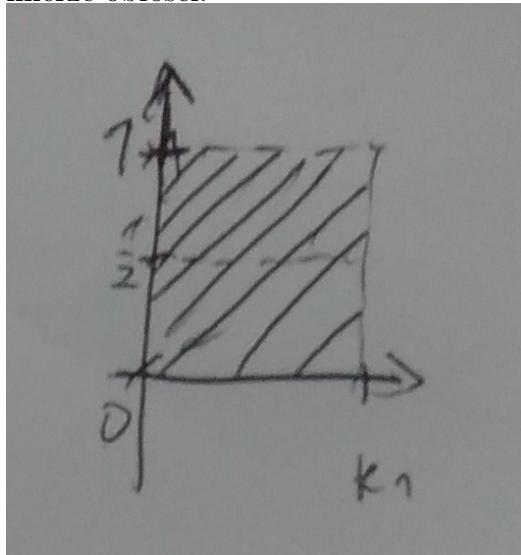
Jako, że w obydwu przypadkach znakowana krzywizna ma stały znak, możemy odtworzyć również wyróżnioną stronę krzywej - w pierwszym przypadku jest to strona której reprezentantem są wektory II pochodnej. W drugim przypadku - wektory do nich przeciwe.

3.3 No i co z tego?

Krzywa będąca konkatenacją dwóch krzywych o ścisłe rosnącej krzywiźnie o mierze obłości:



każda. Ma tą samą miarę obłości co krzywa o ścisłe rosnącej krzywiźnie i mierze obłości:



Nie są one jednak równoważne przez cięcia. Dla dowolnej ustalonej wartości krzywizny mają one bowiem różne wartości pochodnej tej krzywizny.

To do: napisać dokładniej czemu

. By potrafić odróżnić od siebie istotnie różne krzywe potrzebujemy niezmiennika zawierającego w sobie informacje o parametryzacji. Należały zawszeć jakoś informacje jak krzywa rozkłada się na krzywe o ścisłe monotonicznej krzywiźnie, które już są wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do przesunięć i obrotów) przez ich ZMO. Wtedy znalibyśmy rodzinę krzywych z dokładnością do ich cięć i przesunięć oraz obrotów. W kolejnym rozdziale przedstawimy niezmiennik, który faktycznie jest zachowywany przy cięciach przesunięciach oraz obrotach i sklejeniach oraz jest różny dla krzywych (a

stąd dla figur) które równoważne nie są.

4 Wielka grupa abelowa

Niech \mathcal{A} będzie rodziną wszystkich prostych krzywych zamkniętych, kawałkami C^∞ , takimi, że, żadne dwa sąsiednie C^∞ kawałki obrazów jednej krzywej nie tworzą ze sobą kąta 180stopni , sparametryzowanych długością z wyróżnioną stroną (zapisywana jako $\mathcal{S}(\gamma) = 1$ bądź $\mathcal{S}(\gamma) = -1$.

Rozepnijmy wolna grupę abelową na \mathcal{A} .

Określmy teraz relacje w tej grupie:

-kreacji/anihilacji

-cięcia/klejenia

-izometrii zachowujących orientację

4.0.1 Kreacja/anihilacja

Dla $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\left(\gamma_1[[a, b]] = \gamma_2[[c, d]] \right) \quad (8)$$

$$\wedge \quad (9)$$

$$\left((\gamma_1(a) = \gamma_2(c) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2)) \right) \quad (10)$$

$$\vee \quad (11)$$

$$\left((\gamma_1(a) = \gamma_2(d) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) \neq \mathcal{S}(\gamma_2)) \right) \quad (12)$$

$$\implies \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (13)$$

4.0.2 Cięcia/klejenie

Dla $\gamma_0 : [a_1, a_n] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1 : [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \dots, \gamma_n : [a_{n-1}, a_n] \rightarrow \mathbb{R}^2$, takich że $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$

$$\left((\forall t \in [a_i, a_{i+1}]) (\gamma_0(t) = \gamma_i(t)) \wedge (\forall i) \mathcal{S}(\gamma_0) = \mathcal{S}(\gamma_i) \right) \quad (14)$$

$$\implies \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n = 0 \quad (15)$$

4.0.3 Izometrie zachowujące orientacje

Dla $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(k^\pm(\gamma_1) \equiv k^\pm(\gamma_2) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2)) \implies \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \quad (16)$$

Odpowiada to odwzorowaniom przez izometrie zachowujące orientację \mathbb{R}^2 .

$$(\exists \Lambda_{\text{-izometria}} \gamma_1 \equiv \Lambda \circ \gamma_2 \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2)) \implies \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \quad (17)$$

ponieważ funkcja znakowanej krzywizny określa jednoznacznie krzywą (bez wyróżnionej strony) z dokładnością do jej początku i wektora stycznego w początku.

To do: napisać równanie różniczkowe

Druga pochodna równa się wektor prostopadły do pierwszej dodatnio zorientowany razy znakowana krzywizna.

$$(\gamma''_x, \gamma''_y)(t) = k^\pm(t)(-\gamma'_y, \gamma'_x)(t) \quad (18)$$

To do: napisać coś o rozwiązaniu tego równania

Zauważmy, że trzecia relacja utożsamia również krzywe o tym samym obrazie, a różnej parametryzacji ze względu na przedział którym są sparametryzowane.

5 Równoważność elementu w wielkiej grupie abelowej z klasą figur równoważnych ze sobą przez cięcia

Widać

W jedną stronę - weźmy element z WGA, pokażemy, że odpowiadają dokładnie jedna klasa równoważności krzywych.

Jeśli odpowiadająby dwie, to biorę po reprezentancie każdej z nich i patrzę na ich elementy w niewydzielonej grupie, są tym samym w wydzielonej, więc te relacje jakoś je zwiążają.

To generuje cięcia.

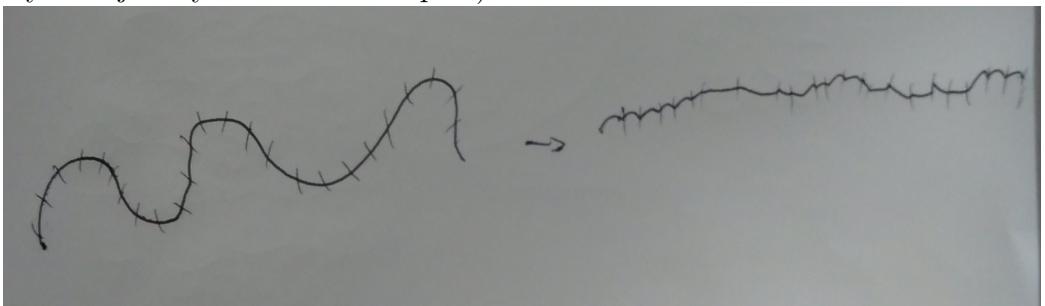
Jeśli dwie figury są w tej samej klasie, to są te transformacje, które o tym świadczą, przenosząc się one na grupę.

6 Dyskusja, że to niewiele daje

Niezmiennik jakim jest element w WGA faktycznie daje charakteryzację. Jednak jego wyznaczenie (bądź w ogóle opisanie) nie wydaje się łatwiejsze niż rozstrzygnięcie problemu dla danych figur bez tego aparatu pojęciowego.

Wiedza o możliwości przedstawienia tego problemu w postaci WGA nie dała mi żadnej odpowiedzi na żadne pytanie postaci ”opisuję jakoś dwie figury, chcę rozstrzygnąć, czy są równoważne przez cięcia”, którego nie potrafiłbym rozstrzygnąć w iinny sposób. Opis ten daje jednak inne rzeczy.

Odwziewierciliśmy bowiem problem w strukturę grupową. Zrobiliśmy to również w taki sposób, że każdej klasie figur równoważnych przez cięcia odpowiada jeden element w grupie abelowej oraz liczba rzeczywista (pole) oraz każdemu elementowi z grupy wraz z liczbą z zakresu $(0, \infty)$ (możliwe pola, bo tnąc zawsze można zejść dowolnie blisko zera ”redukując kąt zataczany przez krzywe i zbliżając powstałe krawędzie”, a kreując krzywe można uzyskać dla wybranej klasy dowolnie duże pole).



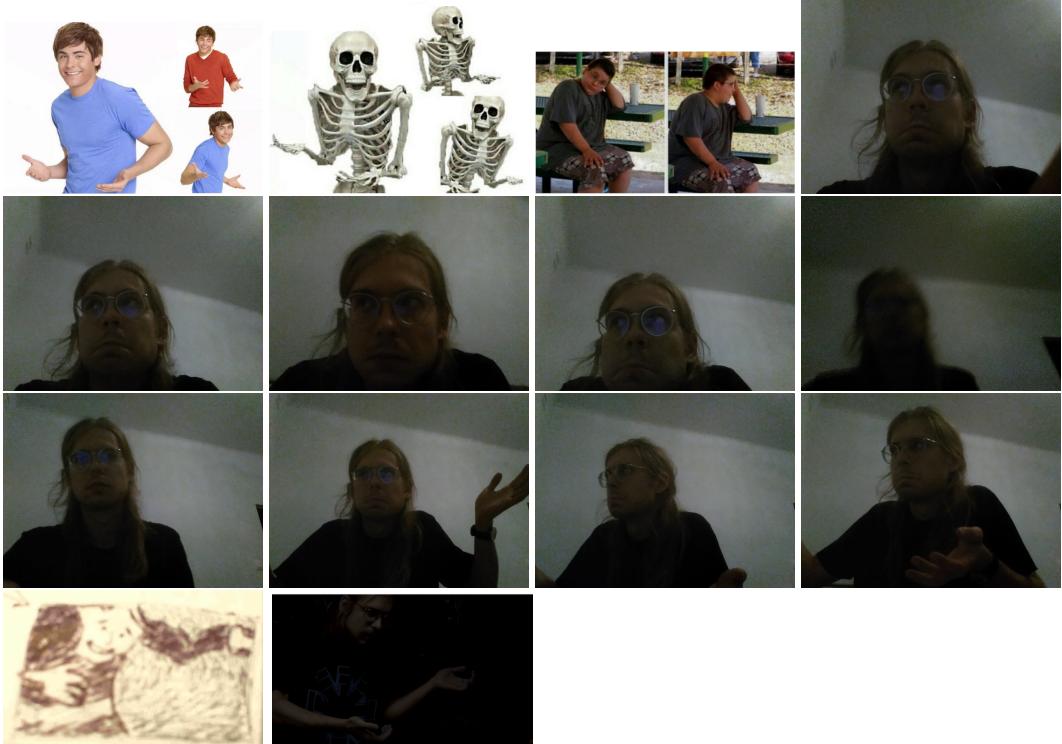
odpowiada jedna klasa figur równoważnych przez podział.

Załóżmy teraz, że chcemy określić pewien niezmiennik, prostszy w wyliczeniu, ale taki, że jego możliwe wyniki nadal będą w bijekcji z klasami podziału. Założymy ponadto, że przeciwdziedzina tego niezmiennika będzie miała strukturę grupową. Jest to dość naturalne założenie, pierwsze dwa naturalne niezmienniki jakie wprowadziliśmy, mianowicie obłość i znakowana miara obłości, miały tę strukturę, a niezmienniki były homomorfizmami, gdzie po jednej stronie działaniem było wzięcie na raz dwóch krzywych (albo, można myśleć ich konkatenacja), a po drugiej stronie - suma ich niezmienników.

Wydaje się, że jeśli niezmiennik wyrażony w czymś o strukturze grupowej miałby się zachowywać ”przyzwoicie” powinien mieć tę własność. Mając jednak naszą WGA widzimy, że każdy taki niezmiennik pozwalający na rozróżnianie dwóch dowolnych klas oraz nie mający będzie miał zanurzoną w sobie WGA, w tym sensie będzie nieprostszy.

Oczywiście nie wykluczam, że nie spostrzegłem jaki metod rozróżniania klas figur przy użyciu innego typu niezmienników bądź bez określania niezmienników wgl. Może też istnieje efektywna metoda określania jednakowości elementów w WGA. Jednak na ten moment żadne z powyższych nie zostało przeze mnie znalezione.

7 a co, jeśli, krzywe są zamknięte i (nie kawałkami!) gładkie?



8 Uwaga o topologii

Na zbiorze figur takich jak omawiane w tej pracy, branych z dokładnością do przesunięć i obrotów na płaszczyźnie można określić odległość między nimi jako infimum pola sumy rozłącznej brane po wszystkich reprezentantach klas (czyli po wszystkich obrazach izometrii na płaszczyźnie).

Czy to jest rzeczywiście matryka?

Tak, jest.

Proof. 1. $d(f, g) = 0 \iff f \cong g$. Implikacja w lewą stronę jest oczywista. Implikacja w prawą stronę, wynika z tego, że ze zwartości jeśli punkt należy do sumy rozłącznej, to należy wraz ze swoim otoczeniem, więc pole sumy rozłącznej jest > 0 . (Gdyby nie należał wraz z żdnym otoczeniem, to dowolnie blisko mógłbym podejść punktami z drugiej figury i z domkniętości tenże punkt też by należał).

2. $d(f, g) = d(g, f)$. Jest tak, bo różnicasymetryczna jest symetryczna.
3. warunek trójkąta. Jest tak, bo odległość zdefiniowaliśmy przez infimum.
(Serio wyszło

To do: napisać to

.

□

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{P}(f)$ to pole figury f , to

$$|\mathcal{P}(f) - \mathcal{P}(g)| \leq d(f, g) \quad (19)$$

Wynika stąd, że dla dowolnej liczby rzeczywistej r , zbiór figur o polu r jest zbiorem domkniętym. (Nazwijmy ten zbiór R . Weźmy punkt s spoza tego zbioru, niech ma on pole m . Stąd s jest w odległości co najmniej $|m - r|$ od każdego punktu z R .

Otoczenie będące kulą wokół s o promieniu ostro mniejszym niż $|m - r|$ zawiera się więc w dopełnieniu R . Stąd dopełnienie R jest otwarte, stąd R jest domknięty. □)

Można teraz zauważyć, że w tak zdefiniowanej topologii na figurach każda klasa wyznaczona przez jeden z elementów WGA (czyli klasa równoważności przez cięcia z zaniedbaniem zachowywania pola) jest zbiorem gęstym.

Można też zauważyć, że skoro każdą figurę jestem w stanie dowolnie przybliżyć wielokątami o wierzchołkach w punktach wymiernych, to powstała przestrzeń jest przestrzenią ośrodkową.

Przestrzeń ta nie jest jednak zupełna. Jeżeli brzegi figur z ciągu zbiegając punktowo do jakieś ustalonej figury, być może szerszej klasy (na przykład o brzegach będących krzywymi Jordana), to figury te tworzą ciąg Cauchyego w opisanej wyżej przestrzeni. Granica ciągu krzywych takich jak tu rozważanych nie musi być jednak gładką krzywą.