

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność teoretyczna

Bartosz Sójka

Równoważność przez cięcia w przestrzeni
dwuwymiarowej

Praca mam nadzieję magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jana Dymary

Wrocław Rok 2019

Contents

1	Koło i kwadrat	4
2	Pierścień i kwadrat	6
3	Twierdzenie odwrotne	8
3.0.1	Krzywa z wyróżnioną stroną	8
3.1	Równoważność z problemem na brzegach	9
3.2	Kiedy ZMO zawodzi	13
3.2.1	Jak wygląda znakowana miara obłości	13
3.3	No i co z tego?	15
4	Wielka grupa abelowa	15
4.0.1	Kreacja/anihilacja	16
4.0.2	Cięcia/klejenie	16
4.0.3	Izometrie zachowujące orientacje	16
5	Równoważność elementu w wielkiej grupie abelowej z klasą figur równoważnych ze sobą przez cięcia	17
6	Dyskusja, że to niewiele daje	17
7	a co, jeśli, krzywe są zamknięte i (nie kawałkami!) gładkie?	18
8	Jakaś mało odkrywczą uwagę o topologii	18

Abstract

W roku 1990 węgierski matematyk Miklós Laczkovich rozwiązał problem kwadratury koła Tarskiego - udowodnił on, że koło da się podzielić na skończoną liczbę części, z których można ułożyć kwadrat. Twierdzenie to może wydawać się nieintuicyjne i istotnie, części na które zostało podzielone koło w dowodzie były zbiorami niemierzalnymi, a sam dowód był niekonstruktywny. Co więcej, nie jest ono prawdziwe, gdy ograniczymy się do podziałów koła na zbiory, których brzegi są krzywymi Jordana. Punktem wyjścia pracy jest przypadek powyższego zagadnienia, gdzie brzegi są krzywymi Jordana kawałkami C^∞ . Można traktować je jako dobry model dla fizycznie realizowanych cięć. Dalej będzie rozwinięta i omówiona teoria klasyfikacji figur w przestrzeni dwuwymiarowej ze względu na ich równoważność przez cięcia.

1 Koło i kwadrat

Praca będzie miała stopniowo rosnący poziom formalności. Początek jest gawędą o moich rozmyślaniach i motywacjach skąd wzięły się przedstawione problemy. Mniej więcej między drugim a trzecim rozdziałem całość nabiera formalizmu. Przez całą pracę rozważane krzywe są krzywymi sparametryzowanymi długością, kawałkami C^∞ , gdzie kolejne C^∞ fragmenty krzywych nigdy nie tworzą kąta 180stopni (tutaj formalniej). Będą one dalej nazywane po prostu krzywymi.

Łuk - spójny fragment okręgu

Intuicja podpowiada, że biorąc koło i tnąc je na skończenie wiele części nie dostaniemy takich, z których da się ułożyć kwadrat. Co stoi za tą intuicją? Widać, że ewidentnym problemem jest brzeg koła, który jest zaokrąglony. Kwadrat żadnych zaokrągleń nie ma. Czy jednak aby na pewno to przeszkadza? Z pewnością, gdy tniemy koło i dostaniemy kawałek, którego fragment brzegu jest fragmentem okręgu, to nie da się za pomocą translacji i obrotów tego fragmentu odwzorować na fragment brzegu kwadratu. Jedno jest obłe, drugie jest płaskie. Pojawia się jednak wątpliwość, czy jeśli potnie się koło na masę kawałków i część z tych kawałków będzie miała odcinki jako krawędzie, które zostaną odwzorowane na brzeg kwadratu, to na przykład nie da się tak wyciąć części, by "upchnąć" gdzieś również obłość okręgu. Przeciwno takiej możliwości świadczy następujące rozumowanie.

Kiedy tnę figurę krzywą tak, żeby wprowadzić wklesłość, pojawia mi się również komplementarna do niej wypukłość.

Brakujący rysunek

Można spodziewać się więc, że próbując wyprodukować dla okręgu nadmiarową wklesłość, starania te zawiodą, gdyż za każdym razem powstanie tyle samo wypukłości. Tylko co to w tym wypadku znaczy "tyle samo"? Nie wiedząc tego dalej pozostaje pewna wątpliwość, czy nie da się pociąć tak, by obłość zniknęła. Widać, że przy cięciach generujących wklesłość obłość się pojawia, ale może pojawia się jej "mniej". Powinniśmy w takim razie wprowadzić aparat pojęciowy pozwalający nam mierzyć "ilość" wklesłości i obłości, tak by zobaczyć, czy przy jakimkolwiek cięciu, da się wyprodukować jedno, nie produkując jednakowej "ilości" drugiego.

Przystąpimy do szukania satysfakcjonującej definicji obłości figury, która pozwoli nam rozróżnić koło i kwadrat i sformalizować nasze intuicje. Obłość ma oddawać fakt, że coś jest zaokrąglone, więc dla bardziej zaokrąglonych obiektów chcielibyśmy, żeby była większa, a dla mniej, żeby była mniejsza. Ponadto o obłości figury ma świadczyć sam kształt brzegu danej figury. Zdefiniujemy zatem obłość dla krzywych. Powiemy, że obłością figury z definicji jest tak zdefiniowana obłość jej brzegu.

Niech dowolnego odcinka jego obłość wynosi zero. Niech dla dowolnego okręgu jego obłość wynosi 2π . Niech dla spójnego fragmentu okręgu jego obłość do obłości całego okręgu ma się tak jak jego długość do długości całego okręgu. Dzięki temu dla rodziny krzywych o tej samej długości l - odcinka i fragmentów okręgów wszystkich możliwych promieni $([l/2\pi, \infty)$ faktycznie obłość jest tym większa im bardziej zakrzywiona jest krzywa.

Brakujący rysunek

Zdefiniujemy teraz obłość dla krzywych C^2 .

Brakujący rysunek - podział krzywej, okręgi

Definiujemy ją jako granicę przybliżeń obłości.

Przybliżamy obłość dzieląc krzywą na fragmenty i opisując okręgi tak jak na rysunku. Przybliżona obłość fragmentu, to obłość odpowiadającego fragmentu okręgu.

Chcemy jednak rozróżniać "wkłęsłość" od "wypukłości". Dlatego wybieramy stronę krzywej, która ma być "wnętrzem" i sumujemy przyczynki z odpowiednimi znakami.

Granica promieni okręgów z kolejnych przybliżeń w pojedynczym punkcie jest promień krzywej w danym punkcie. Obłość dla łuku wyraża się jako długość przez promień. Skąd obłość krzywej jest całką po krzywej z odwrotności promienia ze znakiem. Jest to więc całka po krzywej z jej krzywizny ze znakiem (oznaczanej tutaj jako k^\pm).

Zauważmy teraz, że cięcie figury nie zmienia jej obłości. Istotnie każda krzywa cięcia generuje dwie krzywe brzegów fragmentów, które są identyczne z wnętrzem

po przeciwnych stronach.

Zatem całki ze znakowanej krzywizny (obłóść) po nich są identyczne co do wartości i przeciwne co do znaku. Zatem ich suma wynosi zero.

Stąd po pocięciu figura ma identyczną obłóść, co przed.

Przesuwanie fragmentów i obracanie oczywiście nie zmienia obłóści. Również klejenie fragmentów ze sobą nie może jej zmienić, gdyż klejone fragmenty muszą być przystające i mieć wewnątrz po przeciwnych stronach. Suma ich obłóści musi wynosić zatem zero.

Stąd operacja pocięcia na skończenie wiele fragmentów krzywymi i ponownego sklejenia nie zmienia obłóści. Koło ma jednak obłóść różną 2π , a kwadrat równą 0, zatem pocięcie w ten sposób jednego i sklejenie drugiego jest niemożliwe.

2 Pierścień i kwadrat

Powyższe rozumowanie rozwiązuje problem dla koła i kwadratu, nie jest pomocne jednak w innym naturalnym przykładzie, stworzonym wręcz po to (to prawda), żeby wykazać jego ograniczenia.

Weźmy pierścień i kwadrat.

Brakujący rysunek

Intuicja, tak jak poprzednio, podpowiada nam, że nie powinno się dać jednego przekształcić na drugie przy pomocy cięć i klejeń. Jednak obłóść obydwu wynosi 0. Pierścień ma i wypukłości i wklęsłości, ale nie pasują one do siebie, więc spodziewamy się, że się nawzajem nie "zniosą", jednak niezmiennik jakim jest obłóść tego nie widzi.

Wyruszymy teraz na poszukiwania subtelniejszego niezmiennika, który wychwyci różnicę. Będzie to znakowana miara obłóści. Ponownie zdefiniujemy ją dla krzywych z wyróżnioną stroną, a następnie dla figur jako dziedziczną z ich brzegu.

Jak widać problem leży w tym, że obłóść wynosi zero, ale dodatnie i ujemne przyczynki pochodzą od okręgów o różnych promieniach, które i tak do siebie nie pasują. Dlatego w dokładniejszym podejściu, rozróżniamy od fragmentów krzywej o jakim proieniu pochodzi obłóść. W tym celu definiujemy miarę, na przedziale \mathbb{R} , równym $[0, K_{\text{MAX}}]$, gdzie K_{MAX} jest maksymalną krzywizną występującą na krzywej. Dla krzywej sparametryzowanej długością

określamy ją jak następuje:

$$\mu_O([k_1, k_2]) = \int_{\{t : k(t) \in [k_1, k_2]\}} k^\pm dt. \quad (1)$$

Tak zdefiniowana miara znowu jest niezmiennicza na cięcia (krzywe są identyczne, różnią się wyłącznie co do strony wnętrza) jak i na izometrie zachowujące orientację i sklejenia.

Miara ta ma w każdym punkcie albo gęstość (gdy jakiś promień nie ma żadnego łuku), lub masę, gdy dany promień ma swój łuk.

W przypadku pierścienia ZMO wynosi tyle:

Brakujący rysunek

W przypadku kwadratu wszędzie wynosi zero.

Zatem faktycznie nie da się rozciąć pierścienia i złożyć z niego kwadratu.

Znakowana miara obłości pokrywa wszystkie naturalne przykłady (tzn. takie, które wymyśliłem, zanim starałem się wymyśleć takie, które ją obalą). W szczególności potrafi nie tylko rozróżnić, ale i sklasyfikować wszystkie figury o brzegach składających się z odcinków i łuków (co pokażemy w następnym rozdziale).

I tutaj zbliżamy się do prolemu - idealny niezmiennik pozwalałby nie tylko na określenie czy dla danych dwóch figur nie da się ich przerzucić. Wynikało by też z niego, że jeśli jest równy dla obu figur, to przerzucić się je da. Przy definiowaniu niezmienników jako własności brzegu wymaga to jednak chociażby faktu, że jeśli brzegi są sobie (w pewnym sensie jaki ściśle za niedługo podamy) równoważne przez cięcia, to figury także. Na szczęście okaże się, że tak jest.

W kolejnych rozdziałach zajmiemy się właśnie szukaniem takiego twierdzenia odwrotnego (czy właściwie działającego w obie strony) i związanego z nim niezmiennika. Zakończy się to dyskusją, czy wyniki nas satysfakcjonują.

Pokażemy też w międzyczasie, że znakowana miara obłości takim niezmiennikiem nie jest (choć jest nim dla figur o brzegach składających się z odcinków i łuków).

3 Twierdzenie odwrotne

Najpierw sformalizujmy nieco nasze pojęcia.

Zajmujemy się figurami w \mathbb{R}^2 , których brzegi są skończonymi zbiorami rozłącznych obrazów prostych krzywych zamkniętych, kawałkami C^∞ , takimi, że, żadne dwa sąsiednie C^∞ kawałki obrazów jednej krzywej nie tworzą ze sobą kąta 180stopni . Co to znaczy, że nie tworzą kąta 180stopni ? O to:

Brakujący rysunek

i wyjaśnienie

Wszędzie dalej kiedy będzie użyte słowo figura, będzie to oznaczało właśnie taki podzbiór \mathbb{R}^2 .

Ponadto wszystkie krzywe parametryzujemy ich długością.

3.0.1 Krzywa z wyróżnioną stroną

Krzywa z wyróżnioną stroną będzie to krzywa wraz z wybraną jedną z dwóch klas ciągłych cięć pewnej wybranej podwiązki wiązki stycznej \mathbb{R}^2 zawieszanej nad tą krzywą.

Dla krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ patrzemy się na podwiązkę wiązki stycznej do \mathbb{R}^2 złożoną z dowolnych podprzestrzeni dopełniczych do podprzestrzeni rozpinanych przez wektor styczny do krzywej w danym punkcie. (na rogach wybieramy tak, by przestrzeń była dopełnicza dla obu wektorów stycznych). Wybieramy teraz ciągle, nieznikające cięcia tych wiązek, takich, aby w punktach nieróżniczkowości wyznacznik macierzy złożonej z wybranego wektora i z wektora stycznego miał taki sam znak dla obydwu wektorów stycznych.

Brakujący rysunek

To do: Może ująć to w lemat:

Dzieli się one na dwie klasy:

-cięcia, gdzie w każdym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wek-

tor z cięcia] jest dodatni oraz
 -cięcia, gdzie w każdym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wektor z cięcia] jest ujemny
 Jest tak, ponieważ cięcia te są ciągłymi cięciami jednowymiarowej wiązki, wyznacznik jest ciągły oraz zależność wektora stycznego od parametru jest ciągła poza punktami nieróżniczkowalności, ale na nich, z wyboru wiązek, wyznacznik nie zmienia znaku. Stąd wyznacznik musiałby zmieniać znak we wnętrzu różniczkowalnej krzywej, ale wtedy w pewnym momencie zerowałby się, co oznaczałoby, że cięcie znika. Sprzeczność.
 Wybór jednej z klas takich cięć nazywamy wyborem strony krzywej. Ma to oddawać fakt czegoś takiego:

Brakujący rysunek

Zauważmy, że dla figury rozpatrywanej jako dwuwymiarowa rozmaitość oraz komponenty jej brzegu jedna z tych klas jest złożona z wektorów leżących w wiązce stycznej do tej rozmaitości, a jedna z wektorów do niej nienależących. Ponieważ dla każdej komponenty parametryzację możemy wybrać niezależnie, więc da się je wybrać tak, by jedna z tych klas odpowiadała dla wszystkich komponent wnętrza rozmaitości. Od tej pory będziemy zakładali taki właśnie wybór parametryzacji. Co więcej taki, by strona z ujemnym wyznacznikiem była we wnętrzu.

Od tej pory o wszystkich krzywych zakładamy, że mają wyróżnioną stronę. Krzywiznę ze znakiem k^\pm określamy tak, że jeśli para: wektor styczny, wektor drugiej pochodnej ma ten sam znak co wybrana klasa, to $k^\pm = k$, w przeciwnym wypadku $k^\pm = -k$.

3.1 Równoważność z problemem na brzegach

Najpierw dowiedzimy, że zagadnienie równoważności takich figur przez cięcia jest równoważne równoważności przez cięcia ich brzegów w następującym sensie:

Powiemy, że dwie krzywe są równoważne przez cięcia, jeżeli obraz jednej z nich można pociąć i za pomocą izometrii zachowujących orientację przekształcić na obraz drugiej (zachowując wyróżnioną stronę), przy czym dopuszczamy cięcia pustej przestrzeni na dwie odpowiadające sobie krzywe oraz

sklejanie takich krzywych:

Brakujący rysunek słynne rysunki rozcinania pustej przestrzeni oraz klejenia dwóch odpowiadających krzywych dopiski - kreacja, anihilacja

W jedną stronę:

jeśli da się przetrzucić brzegi na siebie, a figury mają równe pola, to da się również figury.

Weźmy dwie figury A oraz B o równych polach, takie, że brzegi są równoważne przez cięcia. Niech cięcie to będzie realizowane poprzez podział brzegu A i przekształcenie jego fragmentów przez przesunięcia i obroty oraz, jeśli konieczny, podział "pustej przestrzeni" na krzywe i anihilację pasujących krzywych tak jak opisane wyżej. Niech ta operacja świadcząca o równoważności dwóch brzegów przez cięcia nazywa się ϕ

Skonstruujemy teraz redukcję problemu podziału tych figur do problemu podziału wielokątów, który, jak wiadomo z Wallace–Bolyai–Gerwien theorem, zawsze ma rozwiązanie.

Rozpatrzmy fragmenty na które podzielony jest brzeg A . Każdy z nich jest zbiorem zwartym, więc (za wyjątkiem sąsiadujących) jest on w niezerowej odległości od pozostałych fragmentów. Dla tych, których obraz przez ϕ jest w B (to znaczy, że fragment nie został zanihilowany z mu odpowiadającym) jest on również w niezerowej odległości od wszystkich fragmentów (za wyjątkiem tych z którymi ma wspólne końce) z których został ułożony brzeg B przy użyciu ϕ .

Fragmentów jest skończenie wiele, niech więc ε będzie dodatnią liczbą rzeczywistą mniejszą od wszystkich tych odległości dla wszystkich par niesąsiadujących fragmentów.

rozpatrzmy $\frac{\varepsilon}{4}$ -owe otoczki wszystkich fragmentów krzywej. W każdym z tych fragmentów prowadzimy łamaną prostą o początku i końcu w końcach fragmentu taką, że pierwsza i ostatnia krawędź łamanej spełnia następujący warunek na kąty względem wektorów stycznych (zarówno w A , jak i w B :

Brakujący rysunek początek i koniec łamanej, dwusieczna kąta z wektorów stycznych

Wtedy wszystkie obszary ograniczone przez fragmenty krzywej oraz łamane w odpowiadających im otoczkach oraz ich obrazy przez ϕ są parami rozłączne za wyjątkiem końców fragmentów dla sąsiadujących fragmentów. Możemy odciąć je z A i przerzucić w odpowiednie miejsca na B . Fragmenty brzegu A , które się z sobą zanihilują, odcinamy po jednym z pary wraz z jego łamaną i anihilujemy.

Brakujący rysunek anihilacja

Niech A' oznacza tak powstałą z A figurę. Brzeg B dzieli się na dwa obszary - fragmenty pochodzące z fragmentów brzegu A oraz fragmenty pochodzące z rozcięć przestrzeni. Pozostaje "obsłużyć" fragmenty brzegu B pochodzące z kreacji krzywych z przestrzeni.

Potrzebny będzie następujący lemat:

Lemma 3.1.1. *Dla dowolnej krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ takiej jak tu przyjmujemy i dowolnego okręgu \mathcal{O} zawartego w \mathbb{R}^2 da się znaleźć taki podział γ , by poprzez przesunięcia i obroty dało się go odwzorować we wnętrze \mathcal{O} tak, że obrazy fragmentów są parami rozłączne.*

Proof. Konstuuujemy ciąg podziałów γ tak, by dla każdego n w n -tym podziale długość każdego fragmentu była mniejsza niż $d(\mathcal{O})/(2n+1)$ ale (poza, być może, ostatnim) większa niż $d(\mathcal{O})/(2n+3)$.

To do: dać lepsze oznaczenia

Fragmentów tych będzie co najwyżej część całkowita z $\frac{d(\gamma)}{d(\mathcal{O})/(2n+3)}$, czyli $(2n+3) \frac{d(\gamma)}{d(\mathcal{O})}$. Każdy z tych fragmentów zmieści się w kole o średnicy $d(\mathcal{O})/(2n+1)$. Kół o średnicach $d(\mathcal{O})/(2n+1)$ w kole \mathcal{O} da się na pewno zmieścić co najmniej $6 \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Brakujący rysunek sześciokąty

Dla n takiego że $3 \frac{n(n+1)+1}{2n+3} > \frac{d(\gamma)}{d(\mathcal{O})}$, krzywa zmieści się rozłącznie w okręgu dla podziału odpowiadającego n . \square

Bierzemy wszystkie krzywe (bez wyróżnionej strony) z których powstały

te fragmenty brzegu B , łączymy je w jedną długą krzywą prostą (jeśli trzeba to łamiemy je, żeby zachować warunek "prostości"). Tak skonstruowaną krzywą umieszczamy w kole tak małym, by było zawarte we wnętrzu A' tak jak mówi lemat 3.1.1. Przy czym zagęszczamy podział tak mocno by obłóć każdego fragmentu nie przekraczała $\pi/8$ oraz by długość żadnego fragmentu nie była większa niż $\varepsilon/8$. Należy teraz wykonać następujące cięcia w A' :

Brakujący rysunek jak ciąć

Brakujący rysunek jak ciąć w środku kulki

Z powyższych fragmentów układamy odpowiednie fragmenty brzegu B . Tak powstała figura A'' jest wielokątem. Niepokryta część B również jest wielokątem, nazwijmy ją B'' . A oraz B miały równe pola, więc A'' i B'' również mają równe pola. Są więc równoważne przez cięcia, więc A i B również są.

W drugą stronę:

Jeśli figury są równoważne, to brzegi też.

Podział figur zadaje równoważność brzegu jednej z sumą brzegów fragmentów na jakie została pocięta oraz równoważność tej sumy brzegów z brzeiem drugiej. Stąd dla równoważnych figur ich brzegi również są równoważne. \square

Uwaga. To właśnie w tym dowodzie potrzebne jest założenie, że fragmenty krzywych nie mogą tworzyć kąta 180 stopni. Konkretnie w tym. W przypadku 180 stopni nie dałoby się skonstruować odpowiednich łamanych.

Przykładem figury której brzeg jest równoważny przez cięcia z brzeiem innej, o równym polu, a które nie spełniają jedynie tego założenia i nie są równoważne przez cięcia są następujące figury:

Brakujący rysunek posklejane kółka ze szpicami

. Dowód nierównoważności:

TO DO: jakiś niezmiennik na szpice, to powinno wyjść

3.2 Kiedy ZMO zawodzi

Pokazaliśmy, że rozstrzygając równoważność przez podział figur o tym samym polu wystarczy rozstrzygnąć równoważność przez podział ich brzegów. Zastanówmy się, czy znakowana miara obłości jest wystarczającym kryterium do klasyfikacji krzywych - tzn. czy dowolne dwie nierównoważne mają różną oraz czy dowolne dwie równoważne mają taką samą.

W 2 odpowiedzieliśmy sobie twierdząco na drugie pytanie. Odpowiedź na pierwsze pytanie jest twierdząca dla krzywych złożonych wyłącznie z łuków i odcinków. Mając tę samą znakowaną miarę obłości mają tę samą sumaryczną długość łuków okręgów o odpowiednich promieniach z wyróżnioną stroną z odpowiedniej strony. Fragmenty te można kleić ze sobą i ciąć, tak by z jednej krzywej otrzymać drugą. Fragmenty o krzywiznie 0 można dowolnie kreować i anihilować.

Znakowana miara obłości nie potrafi jednak rozróżnić wszystkich nieprzystających do siebie przez cięcia krzywych. Skonstruujemy tego przykład. Najpierw jednak przeprowadzimy analizę czym jest wprowadzona tutaj znakowana miara obłości i jak ma się do krzywizny krzywej.

3.2.1 Jak wygląda znakowana miara obłości

Rozpatrzmy krzywą o ściśle monotonicznej krzywiznie. Dla takich krzywych znak znakowanej krzywizny jest stały. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdzie $k^\pm = k$.

Niech $k(t)$ będzie funkcją krzywizny od czasu jakim jest sparametryzowana. Ze ściśle monotoniczności istnieje funkcja odwrotna $t(k) : [k_{\min}, k_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$, która mówi w jakiej chwili czasu uzyskana była dana wartość krzywizny.

Wyrazimy teraz znakowaną miarę obłości takiej krzywej poprzez jej krzywiznę oraz na odwrót - jej krzywiznę poprzez jej znakowaną miarę obłości.

Lemma 3.2.1. *Dla krzywej o ściśle rosnącej krzywiznie jej ZMO ma gęstość.*

Proof. Z definicji znakowanej miary obłości, dla dowolnego przedziału $[k_1, k_2]$ jest ona równa:

$$\mu_K([k_1, k_2]) = \int_{t(k_1)}^{t(k_2)} k(t) \, dt \quad (2)$$

Co przez zamianę zmiennych jest równe:

$$\int_{t(k_1)}^{t(k_2)} k(t) \, dt = \int_{k_1}^{k_2} \frac{k}{k'(t(k))} \, dk \quad (3)$$

$\varrho_K(k) = \frac{k}{k'(t(k))}$ jest szukaną gęstością miary μ_K . \square

W ten sposób dla takiej klasy krzywych wyraziliśmy gęstość ich ZMO poprzez ich krzywiznę. Dla krzywych bez łuków μ_K również ma gęstość, jest ona wtedy sumą gęstości jej składowych o ściśle monotonicznej krzywiznie. Jest tak ponieważ definiujemy tę miarę poprzez całkę, która jest operatorem liniowym.

To do: określić jakie trzeba przyjąć warunki początkowe

Możemy wyrazić krzywiznę krzywej o ściśle monotonicznej krzywiznie na podstawie jej ZMO rozwiązując równanie różniczkowe:

$$\varrho_K(t) = \frac{k(t)}{k'(t)} \quad (4)$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$k(t) = k_0 e^{\int_{t(k_0)}^t \frac{1}{\varrho_K(w)} dw} \quad (5)$$

Gdzie k_0 to odpowiednio najmniejsza bądź największa krzywizna.

Dla przypadku, gdzie $k^\pm = -k$ otrzymane zależności to:

$$\varrho_K(k) = -\frac{k}{k'(t(k))} \quad \text{oraz} \quad (6)$$

$$k(t) = k_0 e^{\int_{t(k_0)}^t -\frac{1}{\varrho_K(w)} dw}. \quad (7)$$

Jako, że w obydwu przypadkach znakowana krzywizna ma stały znak, możemy odtworzyć również wyróżnioną stronę krzywej - w pierwszym przypadku jest to strona której reprezentantem są wektory II pochodnej. W drugim przypadku - wektory do nich przeciwne.

3.3 No i co z tego?

Krzywa będąca konkatenażą dwóch krzywych o ściśle rosnącej krzywiznie o mierze obłości:

Brakujący rysunek

każda. Ma tą samą miarę obłości co krzywa o ściśle rosnącej krzywiznie i mierze obłości:

Brakujący rysunek

Nie są one jednak równoważne przez cięcia. Dla dowolnej ustalonej wartości krzywizny mają one bowiem różne wartości pochodnej tej krzywizny.

To do: napisać dokładnie czemu

. By potrafić odróżnić od siebie istotnie różne krzywe potrzebujemy niezmiennika zawierającego w sobie informacje o parametryzacji. Należałoby zawrzeć jakoś informacje jak krzywa rozkłada się na krzywe o ściśle monotonicznej krzywiznie, które już są wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do przesunięć i obrotów) przez ich ZMO. Wtedy znalazłbyśmy rodzinę krzywych z dokładnością do ich cięć i przesunięć oraz obrotów. W następnym rozdziale przedstawimy niezmiennik, który faktycznie jest zachowywany przy cięciach przesunięciach oraz obrotach i sklejeniach oraz jest różny dla krzywych (a stąd dla figur) które równoważne nie są.

4 Wielka grupa abelowa

Niech \mathcal{A} będzie rodziną wszystkich prostych krzywych zamkniętych, kawałkami C^∞ , takimi, że, żadne dwa sąsiednie C^∞ kawałki obrazów jednej krzywej nie tworzą ze sobą kąta 180stopni , sparametryzowanych długością z wyróżnioną stroną (zapisywaną jako $\mathcal{S}(\gamma) = 1$ bądź $\mathcal{S}(\gamma) = -1$).

Rozepnijmy wolną grupę abelową na \mathcal{A} .

Określmy teraz relacje w tej grupie:

- kreacji/anihilacji
- cięcia/klejenia
- izometrii zachowujących orientację

4.0.1 Kreacja/anihilacja

Dla $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\left(\gamma_1[[a, b]] = \gamma_2[[c, d]] \right) \quad (8)$$

$$\wedge \quad (9)$$

$$\left((\gamma_1(a) = \gamma_2(c) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2)) \right) \quad (10)$$

$$\vee \quad (11)$$

$$\left(\gamma_1(a) = \gamma_2(d) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) \neq \mathcal{S}(\gamma_2) \right) \quad (12)$$

$$\implies \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (13)$$

4.0.2 Cięcia/klejenie

Dla $\gamma_0 : [a_1, a_n] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1 : [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \dots, \gamma_n : [a_{n-1}, a_n] \rightarrow \mathbb{R}^2$, takich że $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$

$$\left((\forall t \in [a_i, a_{i+1}]) (\gamma_0(t) = \gamma_i(t)) \wedge (\forall i) \mathcal{S}(\gamma_0) = \mathcal{S}(\gamma_i) \right) \quad (14)$$

$$\implies \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n = 0 \quad (15)$$

4.0.3 Izometrie zachowujące orientacje

Dla $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(k^\pm(\gamma_1) \equiv k^\pm(\gamma_2) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2)) \implies \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \quad (16)$$

Odpowiada to odwzorowaniom przez izometrie zachowujące orientację \mathbb{R}^2 .

$$(\exists \Lambda_{\text{-izometria}} \gamma_1 \equiv \Lambda \circ \gamma_2 \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2)) \implies \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \quad (17)$$

ponieważ funkcja znakowanej krzywizny określa jednoznacznie krzywą (bez wyróżnionej strony) z dokładnością do jej początku i wektora stycznego w początku.

To do: napisać równanie różniczkowe

Druga pochodna równa się wektor prostopadły do pierwszej dodatnio zorientowany razy znakowana krzywizna.

$$(\gamma''_x, \gamma''_y)(t) = k^\pm(t)(-\gamma'_y, \gamma'_x)(t) \quad (18)$$

To do: napisać coś o rozwiązaniu tego równania

Zauważmy, że trzecia relacja utożsamia również krzywe o tym samym obrazie, a różnej parametryzacji ze względu na przedział którym są sparyzowane.

5 Równoważność elementu w wielkiej grupie abelowej z klasą figur równoważnych ze sobą przez cięcia

Widać

W jedną stronę - weźmy element z WGA, pokażemy, że odpowiadamy dokładnie jedna klasa równoważności krzywych.

Jeśli odpowiadałyby dwie, to biorę po reprezentancie każdej z nich i patrzę na ich elementy w niewydzielonej grupie, są tym samym w wydzielonej, więc te relacje jakoś je związają.

To generuje cięcia.

Jeśli dwie figury są w tej samej klasie, to są te transformacje, które o tym świadczą, przenoszą się one na grupę.

6 Dyskusja, że to niewiele daje

Niezmiennik jakim jest element w WGA faktycznie daje charakteryzując. Jednak jego wyznaczenie (bądź w ogóle opisanie) nie wydaje się łatwiejsze niż rozstrzygnięcie problemu dla danych figur bez tego aparatu pojęciowego. Wiedza o możliwości przedstawienia tego problemu w postaci WGA nie dała mi żadnej odpowiedzi na żadne pytanie postaci "opisuję jakoś dwie figury, chcę rozstrzygnąć, czy są równoważne przez cięcia", którego nie potrafiłbym rozstrzygnąć w inny sposób. Opis ten daje jednak inne rzeczy.

Odzwierciedliliśmy bowiem problem w strukturę grupową. Zrobiliśmy to również w taki sposób, że każdej klasie figur równoważnych przez cięcia odpowiada jeden element w grupie abelowej oraz liczba rzeczywista (pole) oraz każdemu elementowi z grupy wraz z liczbą z zakresu $(0, \infty)$ (możliwe pola, bo tnąc zawsze można zejść dowolnie blisko zera "redukując kąt zataczany przez krzywe i zbliżając powstałe krawędzie", a kreując krzywe można uzyskać dla wybranej klasy dowolnie duże pole).

Brakujący rysunek redukcja krzywizny

odpowiada jedna klasa figur równoważnych przez podział.

Założmy teraz, że chcemy określić pewien niezmiennik, prostszy w wyliczeniu, ale taki, że jego możliwe wyniki nadal będą w bijekcji z klasami podziału. Założmy ponadto, że przeciwdziedzina tego niezmiennika będzie miała strukturę grupową. Jest to dość naturalne założenie, pierwsze dwa naturalne niezmienniki jakie wprowadziliśmy, mianowicie obłóść i znakowana miara obłóści, miały tę strukturę, a niezmienniki były homomorfizmami, gdzie po jednej stronie działaniem było wzięcie na raz dwóch krzywych (albo, można myśleć ich konkatenacja), a po drugiej stronie - suma ich niezmienników.

Wydaje się, że jeśli niezmiennik wyrażony w czymś o strukturze grupowej miałby się zachowywać "przyzwoicie" powinien mieć tę własność. Mając jednak naszą WGA widzimy, że każdy taki niezmiennik pozwalający na rozróżnianie dwóch dowolnych klas oraz nie mający będzie miał zanurzoną w sobie WGA, w tym sensie będzie nieprostszy.

Oczywiście nie wykluczam, że nie spostrzegłem jaki metod rozróżniania klas figur przy użyciu innego typu niezmienników bądź bez określania niezmienników wgl. Może też istnieje efektywna metoda określania jednakowości elementów w WGA. Jednak na ten moment żadne z powyższych nie zostało przeze mnie znalezione.

7 a co, jeśli, krzywe są zamknięte i (nie kawałkami!) gładkie?

8 Jakaś mało odkrywczą uwagę o topologii

Na zbiorze figur takich jak omawiane w tej pracy, branych z dokładnością do przesunięć i obrotów na płaszczyźnie można określić odległość między nimi jako infimum pola sumy rozłącznej brane po wszystkich reprezentantach klas (czyli po wszystkich obrazach izometrii na płaszczyźnie).

Czy to jest rzeczywiście matryka?

Tak, jest.

Proof. 1. $d(f, g) = 0 \iff f \cong g$. Implikacja w lewą stronę jest oczywista.

Implikacja w prawą stronę, że

