Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność teoretyczna

Bartosz Sójka

Równoważność przez cięcia w przestrzeni dwuwymiarowej

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jana Dymary

Wrocław Rok 2019

Contents

Abstract

W roku 1990 wegierski matematyk Miklós Laczkovich rozwiązał problem kwadratury koła Tarskiego - udowodnił on, że koło da się podzielić na skończoną liczbę części, z których można ułożyć kwadrat. Twierdzenie to może wydawać się nieintuicyjne i istotnie, części na które zostało podzielone koło w dowodzie były zbiorami niemieżalnymi, a sam dowód był niekonstruktywny. Co więcej, nie jest ono prawdziwe, gdy ograniczymy się do podziałów koła na zbiory, których brzegi są krzywymi Jordana. Punktem wyjścia pracy jest przypadek powyższego zagadnienia, gdzie brzegi są krzywymi Jordana kawałkami C^∞. Można traktować je jako dobry model dla fizycznie realizowalnych cięć. Dalej będzie rozwinięta i omówiona teoria klasyfikacji figur w przestrzeni dwuwymiarowej ze względu na ich równoważność przez cięcia.

1 Koło i kwadrat

Praca będzie miała stopniowo rosnący poziom formalności. Początek jest gawędą o moich rozmyślaniach i motywacjach skąd wzięły się przedstawione problemy. Mniej więcej między drugim a trzecim rozdziałem całość nabiera formalizmu. Przez całą pracę rozważane krzywe są krzywymi kawałkami C^∞, gdzie kolejne C^∞ fragmenty krzywych nigdy nie tworzą kąta $0 stopni$ (tutaj formalniej). Będą one dalej nazywane po prostu krzywymi.

łuk - spójny fragment okręgu

Intuicja podwpowiada, że biorąc koło i tnąc je na skończenie wiele części nie dostaniemy takich, z których da się ułożyć kwadrat. Co stoi za tą intuicją? Widać, że ewidentnym problemem jest brzeg koła, który jest zaokraglony. Kwadrat żadnych zaokrągleń nie ma. Czy jednak aby na pewno to przeszkadza? Z pewnością, gdy tniemy koło i dostaniemy kawałek, którego fragment brzegu jest fragmentem okręgu, to nie da się za pomocą translacji i obrotów tego fragmentu odwzorować na fragment brzegu kwadratu. Jedno jest obłe, drugie jest płaskie. Pojawia się jednak wątpliwość, czy jeśli potnie się koło na masę kawałków i część z tych kawałków będzie miała odcinki jako krawędzie, które zostaną odwzorowane na brzeg kwadratu, to na przykłąd nie da się tak wyciąćtych części, by "upchnąć" gdzieś również obłość okręgu. Przeciwko takiej możliwości świadczy następujące rozumawanie.
Kiedy tnę figurę krzywą tak, żeby wprowadzić wklesłość, pojawia mi się również komplementarna do niej obłość.
rysunek
Można spodziewać się więc, że próbując wyprodukować dla okręgu nadmiarową wklęsłość, starania te zawiodą, gdyż za każdym razem powstanie tyle samo obłości. Tylko co to w tym wypadku znaczy "tyle samo"? Nie wiedząc tego dalej pozostaje pewna wątpliwość, czy nie da się pociąć tak, by obłość zniknęła. widać, że przy cięciach generujących wklęsłość obłość się pojawia, ale może pojawia się jej "mniej". Powinniśmy w takim razie wprowadzić aparat pojęciowy pozwalający nam mierzyć "ilość" wklęsłości i obłości, tak by zobaczyć, czy przy jakimkolwiek cięciu, ta się wyprodukować jedno, nie produkujac jednakowej "ilości" drugiego.

Przystąpimy do szukania satysfakcjonującej definicji obłości figury, która pozwoli nam rozróżnić koło i kwadrat i sformalizować nasze intuicje. Obłość ma oddawać fakt, że coś jest zaokrąglone, więc dla bardziej zaokrąglonych obiektów chcielibyśmy, żeby była większa, a dla mniej, żeby była mniejsza. Ponadto o obłości figury ma świadczyć sam kształt brzegu danej figury. Zdefiniujmy zatem obłość dla krzywych. Powiemy, że obłością figury z definicji jest tak zdefiniowana obłość jej brzegu.
Niech dowolnego odcinka jego obłość wynosi zero. Niech dla dowolnego okręgu jego obłość wynosi 2π. Niech dla spójnego fragmentu okregu jego obłość do obłości całego okręgu ma się tak jak jego długość do długości całego okregu. Dzięki temu dla rodziny krzywych o tej samej długości l - odcinka i fragmentów okręgów wszystkich możliwych promieni ($[l/2\pi, \infty)$ faktycznie obłość jest tym większa im bardziej zakrzywiona jest krzywa.

rysunek
Zdefiniujmy teraz obłość dla krzywych C^2.
rysunek - podział krzywej, okręgi
Definiujemy ją jako granicę przybliżeń obłości.
Przybliżamy obłość dzieląc krzywą na fragmenty i opisując okręgi tak jak na rysunku. Przybliżona obłość fragmentu, to obłość odpowiadającego fragmentu okręgu.
Chcemy jednak rozróżniać "wklęsłość" od "wypukłości". Dlatego wybieramy stronę krzywej, która ma być "wnętrzem" i sumujemy przyczynki z odpowiednimi znakami.

Granicą promieni okregów z kolejnyh przybliżeń w pojedynczym punkcie jest promień krzywej w danym punkcie. Obłość dla łuku wyraża się jako długość przez promień. Skąd obłość krzywej jest całką po krzywej z odwrotności promienia ze znakiem. Jest to więc całka po krzywej z jej krzywizny ze znakiem.
Zauważmy teraz, że cięcie figury nie zmienia jej obłości. Istotnie każda krzywa cięcia generuje dwie krzywe brzegów fragmentów, które są identyczne z wnętrzmi po przeciwnych stronach.
Zatem całki ze znakowanej krzywizny (obłość) po nich są identyczne co do wartości i przeciwne co do znaku. Zatem ich suma wynosi zero.
Stąd po poccięciu figura ma identyczną obłość, co przed.
Przesuwanie fragmentów i obracanie oczywiście nie zmienia obłości. Również klejenie fragmentóœ ze sobą nie może jej zmienić, gdyż klejone fragmenty muszą być przystające i mieć wnętrze po przeciwnch stronach. Suma ich obłości musi wynosić zatem zero.

2 Pierścień i kwadrat

3 Twierdzenie odwrotne

3.1 Równoważność z problemem na brzegach

3.2 Kiedy ZMO zawodzi

4 Wielka grupa abelowa

5 Równoważność elementu w wielkiej grupie abelowej z klasą figur równoważnych ze sobą przez cięcia

6 Dyskusja, że to niewiele daje

7 a co, jeśli, krzywe są zamknięte i (nie kawałkami!) głądkie?