

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność teoretyczna

Bartosz Sójka

**Równoważność przez cięcia w przestrzeni
dwuwymiarowej**

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dr. hab. Jana Dymary

Wrocław Rok 2021

dla Babci

Spis treści

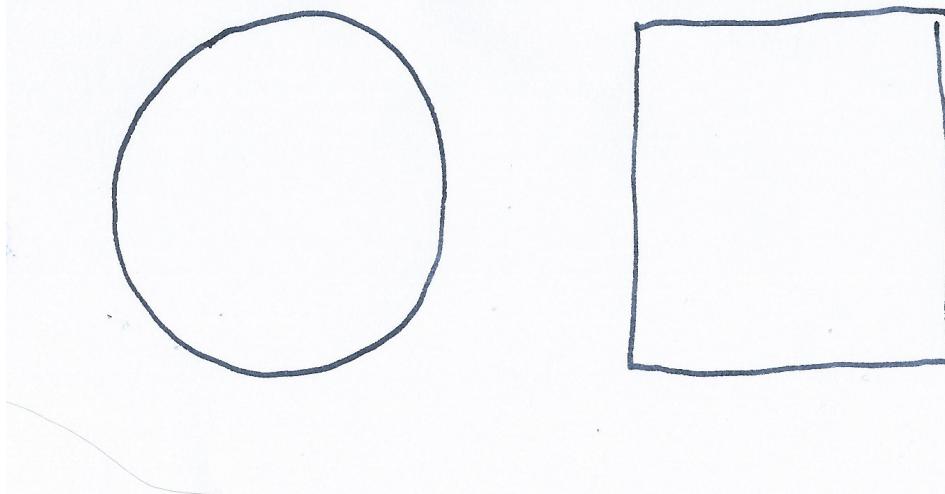
1 Koło i kwadrat	6
2 Pierścień i kwadrat	9
3 Formalizacja pojęć	10
3.1 Krzywa z wyróżnioną stroną	11
4 Poszukiwanie twierdzenia odwrotnego	12
4.1 Równoważność z problemem na brzegach	12
4.1.1 Redukcja przypadku ze szpicami	19
4.2 Kiedy ZMO zawodzi	19
4.2.1 Jak wygląda znakowana miara obłosci	20
4.2.2 Wnioski płynące z jawnej postaci znakowanej miary obłosci	21
4.3 Wielka grupa abelowa	22
4.3.1 Kreacja/anihilacja	23
4.3.2 Cięcia/klejenie	23
4.3.3 Izometrie	23
4.3.4 Równoważność elementu w wielkiej grupie abelowej z klasą krzywych równoważnych ze sobą przez cięcia	25
4.3.5 Dyskusja, że to niewiele daje	25
5 Uwaga o topologii	26

Streszczenie

W roku 1990 Miklós Laczkovich rozwiązał problem kwadratury koła Tarskiego – udowodnił on, że koło da się podzielić na skończoną liczbę części, z których można ułożyć kwadrat [3]. Wynik ten został wzmacniony w pracy autorstwa Łukasza Grabowskiego, Andrása Máthé'a i Olega Pikhurki, w której pokazali oni, że części na które dzielone są figury mogą być zbiorami Baira mierzalnymi w sensie Lebesgue'a [1]. Twierdzenia te mogą wydawać się nieintuicyjne i istotnie, na przykład części na które zostało podzielone koło w dowodach były zbiorami niehomeomorficznymi z D^2 , a same dowody były niekostruktywne. Co więcej, twierdzenia te nie są prawdziwe, w przypadku gdy ograniczymy się do podziałów koła na zbiory, których brzegi są krzywymi Jordana, co pokazali Lester Dubins, Morris W. Hirsch i Jack Karush w [2]. Punktem wyjścia pracy jest przypadek powyższego zagadnienia, gdzie brzegi są krzywymi Jordana kawałkami C^∞ . Można traktować je jako dobry model dla fizycznie realizowalnych cięć. Użyte argumenty oraz sposób rozumowania są w swojej naturze podobne do tych z [2]. Dalej będzie rozwinięta i omówiona teoria klasyfikacji figur w przestrzeni dwuwymiarowej ze względu na ich równoważność przez cięcia.

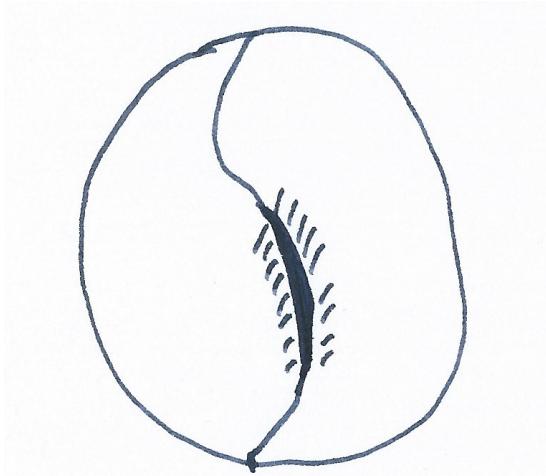
1 Koło i kwadrat

Praca będzie miała stopniowo rosnący poziom formalności. Początek jest przedstawieniem motywacji skąd wzięły się przedstawione problemy. W trzecim rozdziale całość nabiera formalizmu. Przez całą pracę rozważane krzywe są prostymi krzywymi sparametryzowanymi długością, kawałkami C^∞ . Będą one dalej nazywane po prostu krzywymi. Łukiem będzie nazywany spójny fragment okręgu.



Intuicja podpowiada, że biorąc koło i tnąc je na skończenie wiele części nie dostaniemy takich, z których da się ułożyć kwadrat. Co stoi za tą intuicją? Widać, że ewidentnym problemem jest brzeg koła, który jest zaokrąglony. Kwadrat żadnych zaokrągleń nie ma. Czy jednak aby na pewno to przeszkadza? Z pewnością, gdy tniemy koło i dostaniemy kawałek, którego fragment brzegu jest fragmentem okręgu, to nie da się za pomocą izometrii płaszczyzny tego fragmentu odwzorować na fragment brzegu kwadratu. Jedno jest obłe, drugie jest płaskie. Pojawia się jednak wątpliwość, czy jeśli potnie się koło na masę kawałków i część z tych kawałków będzie miała odcinki jako krawędzie, które zostaną odwzorowane na brzeg kwadratu, to czy na przykład nie da się tak wyciąć tych części, by „upchnąć” gdzieś również obłość okręgu. Przeciwko takiej możliwości świadczy następujące rozumowanie:

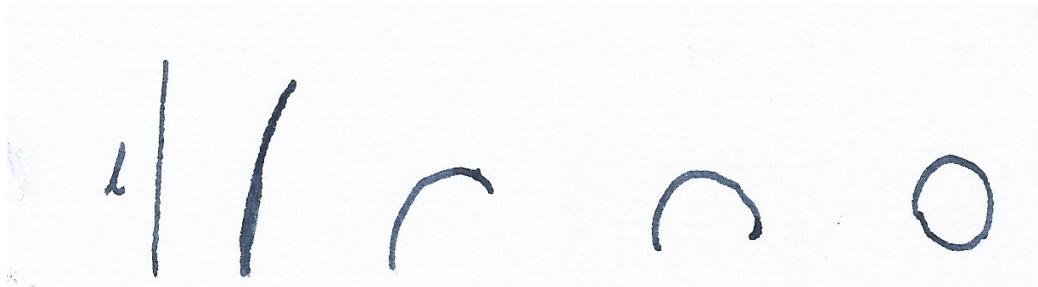
Kiedy tniemy figurę krzywą tak, żeby wprowadzić wklęsłość, pojawia nam się również komplementarna do niej wypukłość.



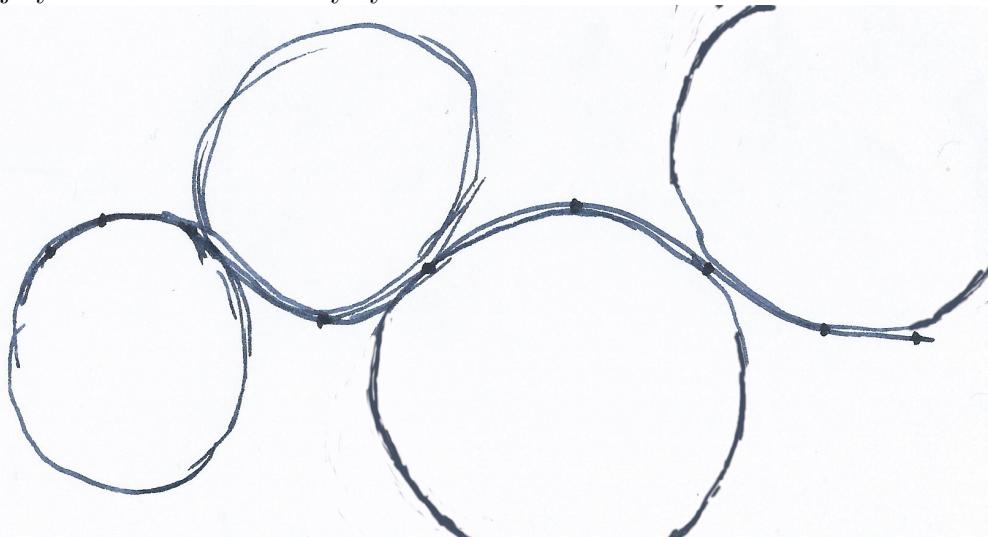
Można spodziewać się więc, że próbując wyprodukować dla okręgu nadmiarową wklęsłość, starania te zawiodą, gdyż za każdym razem powstanie tyle samo wypukłości. Tylko co to w tym wypadku znaczy „tyle samo”? Nie wiedząc tego dalej pozostaje pewna wątpliwość, czy nie da się pociać tak, by obłość zniknęła. Widać, że przy cięciach generujących wklęsłość, wypukłość się pojawia, ale może pojawia się jej „mniej”. Powinniśmy w takim razie wprowadzić aparat pojęciowy pozwalający nam mierzyć „ilość” wklęsłości i wypukłości, tak by zobaczyć, czy przy jakimkolwiek cięciu, da się wyprodukować jedno, nie produkując jednakowej „ilości” drugiego.

Przystąpimy do szukania satysfakcyjającej definicji obłosci figury, która pozwoli nam rozróżnić koło i kwadrat i sformalizować nasze intuicje. Obłość ma oddawać fakt, że coś jest zaokrąglone, więc dla bardziej zaokrąglonych obiektów chcielibyśmy, żeby była większa, a dla mniejszej, żeby była mniejsza. Ponadto o obłosci figury ma świadczyć sam kształt brzegu danej figury. Zdefiniujmy zatem obłość dla krzywych. Powiemy, że obością figury z definicji jest tak zdefiniowana obłość jej brzegu.

Niech obłość dowolnego odcinka wynosi零. Niech dla dowolnego okręgu jego obłość wynosi 2π . Niech dla spójnego fragmentu okręgu jego obłość do obłosci całego okręgu ma się tak jak jego długość do długości całego okręgu. Dzięki temu dla rodziny krzywych o tej samej długości l - odcinka i fragmentów okręgów wszystkich możliwych promieni $[l/2\pi, \infty)$, faktycznie obłość jest tym większa im bardziej zakrzywiona jest krzywa.



Zdefiniujmy teraz obłość dla krzywych C^2 .



Definiujemy ją jako granicę przybliżeń obłosci.

Przybliżamy obłość dzieląc krzywą na fragmenty i opisując okręgi tak jak na rysunku. Przybliżona obłość fragmentu, to obłość odpowiadającego fragmentu okręgu.

Chcemy jednak rozróżnić „wklesłość” od „wypukłości”. Dlatego wybieramy stronę krzywej, która ma być „wnętrzem” i sumujemy przyczynki z odpowiednimi znakami.

Granicą promieni okręgów z kolejnych przybliżeń w pojedynczym punkcie jest promień krzywizny krzywej w danym punkcie [4]. Obłość dla łuku wyraża się jako długość przez promień. Skąd obłość krzywej jest całką po krzywej z odwrotnością promienia ze znakiem. Jest to więc całka po krzywej z jej krzywizny ze znakiem (oznaczanej tutaj jako k^\pm).

Zauważmy teraz, że cięcie figury nie zmienia jej obłosci. Istotnie każda krzywa cięcia generuje dwie krzywe brzegów fragmentów, które są identyczne z wnętrzami po przeciwnych stronach.

Zatem całki ze znakowanej krzywizny (obłosci) po nich są identyczne co do wartości i przeciwnie co do znaku. Zatem ich suma wynosi zero.

Stąd po pocięciu figura ma identyczną obłość, co przed.

Przesuwanie fragmentów i obracanie oczywiście nie zmienia obłosci. Również

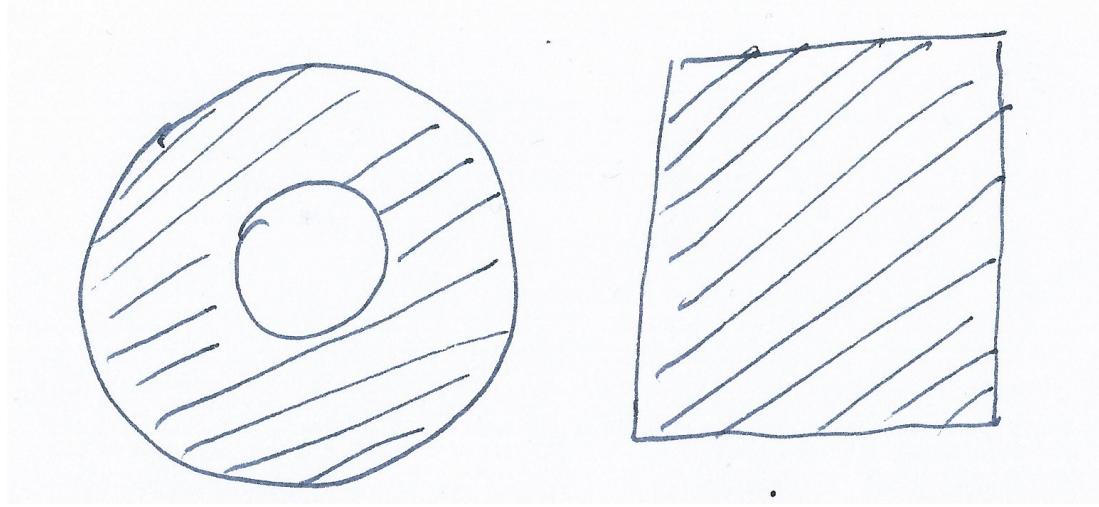
klejenie fragmentów ze sobą nie może jej zmienić, gdyż klejone fragmenty muszą mieć przystające fragmenty brzegu wzduż których są klejone i mieć wewnętrze po przeciwnych stronach tych fragmentów. Suma obłości klejonych fragmentów brzegów musi wynosić zatem zero.

Stąd operacja pocięcia na skończenie wiele fragmentów krzywymi i ponownego sklejenia nie zmienia obłości. Koło ma jednak obłość równą 2π , a kwadrat równą 0, zatem pocięcie w ten sposób jednego i sklejenie drugiego jest niemożliwe.

2 Pierścień i kwadrat

Powyższe rozumowanie rozwiązuje problem dla koła i kwadratu, nie jest pomocne jednak w innym naturalnym przykładzie, stworzonym wręcz po to (to prawda), żeby wykazać jego ograniczenia.

Weźmy pierścień i kwadrat.



Intuicja, tak jak poprzednio, podpowiada nam, że nie powinno się dać jednego przekształcić na drugie przy pomocy cięć i klejeń. Jednak obłość obydwu wynosi 0. Pierścień ma i wypukłości i wklęsłości, ale nie pasują one do siebie, więc spodziewamy się, że się nawzajem nie „zniosą”, jednak niezmiennik jakim jest obłość tego nie widzi.

Wyruszmy teraz na poszukiwania subtelniejszego niezmiennika, który wychwyci różnicę. Będzie to znakowana miara obłości. Ponownie zdefiniujemy ją dla krzywych z wyróżnioną stroną, a następnie dla figur jako dziedziczoną z ich brzegu.

Jak widać problem leży w tym, że obłość wynosi zero, ale dodatnie i ujemne przyczynki pochodzą od okręgów o różnych promieniach, które i tak do siebie nie pasują. Dlatego w dokładniejszym podejściu, rozróżniamy od fragmentów krzywej o jakim promieniu pochodzi obłość. W tym celu definiujemy miarę, na przedziale $[0, K_{\text{MAX}}] \subseteq \mathbb{R}$, gdzie K_{MAX} jest maksymalną krzywizną występującą na krzywej.

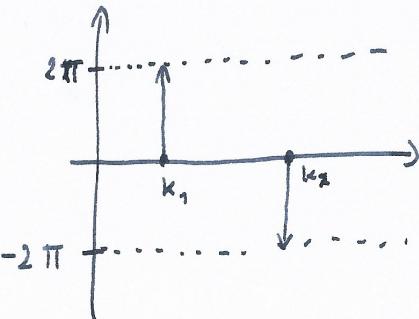
Dla krzywej sparametryzowanej długością określamy ją jak następuje:

$$\mu_O([k_1, k_2]) = \int_{\{t : k(t) \in [k_1, k_2]\}} k^\pm dt. \quad (1)$$

Tak zdefiniowana miara znowu jest niezmiennicza na cięcia (powstałe podczas cięcia krzywe są identyczne, różnią się wyłącznie co do strony wnętrza) jak i na izometrie i sklejenia.

Miara ta ma w każdym punkcie albo gęstość (gdy krzywa nie ma żadnego łuku o takim promieniu), lub masę, gdy krzywa ma łuk o takim promieniu.

W przypadku pierścienia ZMO wynosi tyle:



W przypadku kwadratu wszędzie wynosi zero.

Zatem faktycznie nie da się rozciąć pierścienia i złożyć z niego kwadratu.

Znakowana miara obłości pokrywa wszystkie naturalne przykłady (tzn. takie, które wymyśliłem, zanim starałem się wymyśleć takie, które ją obalą). W szczególności potrafi nie tylko rozróżnić, ale i sklasyfikować wszystkie figury o brzegach składających się z odcinków i łuków (co pokażemy w następnym rozdziale).

I tutaj zbliżamy się do problemu - idealny niezmiennik pozwalałby nie tylko na określenie czy dane dwie figury nie są równoważne przez cięcia. Wynikało by też z niego, że jeśli jest równy dla obu figur, to są one równoważne. Przy definiowaniu niezmienników jako własności brzegu wymaga to jednak chociażby faktu, że jeśli brzegi są sobie (w pewnym sensie jaki ściśle za niedługo podamy) równoważne przez cięcia, to figury także. Na szczęście okaże się, że tak jest.

W kolejnych rozdziałach zajmiemy się właśnie szukaniem takiego twierdzenia odwrotnego (czy właściwie działającego w obie strony) i związanego z nim niezmiennika. Zakończy się to dyskusją, czy wyniki nas satysfakcyjną.

Pokażemy też w międzyczasie, że znakowana miara obłości takim niezmiennikiem nie jest (choć jest nim dla figur o brzegach składających się z odcinków i łuków).

3 Formalizacja pojęć

Zajmujemy się zwartymi figurami w \mathbb{R}^2 , których brzegi są skończonymi zbiorami rozłącznych obrazów prostych krzywych zamkniętych, kawałkami C^∞ . Wszędzie

dalej kiedy będzie użyte słowo figura, będzie to oznaczało właśnie taki podzbiór \mathbb{R}^2 .

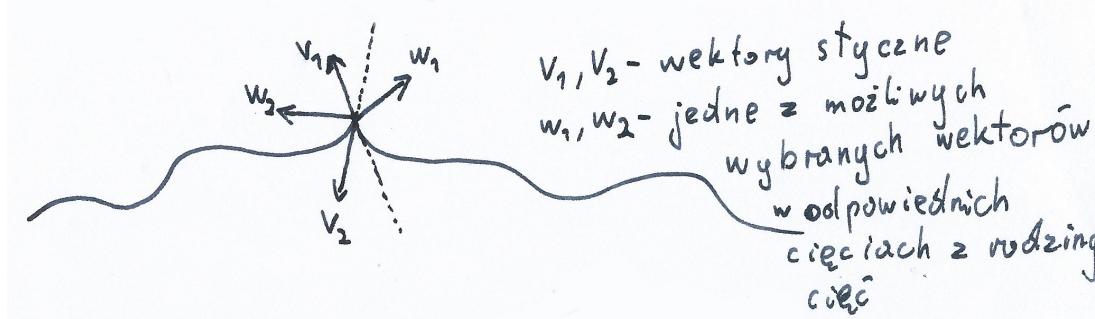
Ponadto wszystkie krzywe parametryzujemy ich długością.

3.1 Krzywa z wyróżnioną stroną

Krzywa z wyróżnioną stroną będzie to krzywa wraz z wybraną jedną z dwóch klas rodzin ciągłych cięć pewnych wybranych podwiązek wiązki stycznej \mathbb{R}^2 zawieszonej nad C^∞ fragmentami tej krzywej.

Dla krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ patrzymy się na rodzinę podwiązek wiązki stycznej \mathbb{R}^2 złożoną z podwiązek zawieszonych nad kolejnymi C^∞ fragmentami krzywej, złożonych z dowolnych podprzestrzeni dopełniczych do podprzestrzeni rozpinanych przez wektory styczne.

Dla takiej rodziny podwiązek wybieramy teraz ciągłe, nieznikające cięcia tych wiązek, takie, aby w punktach nieróżniczkowalności wyznacznik macierzy złożonej z wybranego wektora i z wektora stycznego miał taki sam znak dla obydwu C^∞ fragmentów.



Lemat. Takie rodziny cięć dzielą się na dwie klasy:

- rodziny cięć, gdzie w każdym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wektor z odpowiedniego cięcia] jest dodatni oraz
- rodziny cięć, gdzie w każdym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wektor z odpowiedniego cięcia] jest ujemny.

Dowód. Rodziny cięć są rodzinami ciągłych cięć jednowymiarowych wiązek, wyznacznik jest ciągły oraz zależność wektora stycznego od parametru jest ciągła. Z wyboru cięć, w punktach nieróżniczkowalności, wyznacznik nie zmienia znaku. Stąd jeżeli wyznacznik zmieniałby znak w obrębie rodziny cięć, musiałby zmieniać znak we wnętrzu różniczkowalnej krzywej, ale wtedy w pewnym momencie zerowałby się, co oznaczałoby, że cięcie znika. Sprzeczność. Stąd wyznacznik nie zmienia znaku w obrębie rodziny cięć. \square

Wybór jednej z rodzin klas takich cięć nazywamy wyborem strony krzywej. Ma to oddawać koncept oznaczany graficznie zazwyczaj w taki sposób:



Zauważmy, że dla figury rozpatrywanej jako dwuwymiarowa rozmaitość oraz komponenty jej brzegu jedna z tych klas jest złożona z rodzin złożonych z cięć złożonych z wektorów leżących w wiązce stycznej do tej rozmaistości, a druga, z rodzin złożonych z cięć złożonych z wektorów do niej nienależących. Ponieważ dla każdej komponenty parametryzację możemy wybrać niezależnie, więc da się je wybrać tak, by jedna z tych klas odpowiadała dla wszystkich komponent wewnętrz rozmaistości. Od tej pory będziemy zakładali taki właśnie wybór parametryzacji. Co więcej taki, by strona z dodatnim wyznacznikiem była we wewnętrzu.

Od tej pory o wszystkich krzywych zakładamy, że mają wyróżnioną stronę. Przyjmijmy, że dla wszystkich figur omawianych w pracy wyróżniona strona brzegu figury odpowiada wewnętrz figury.

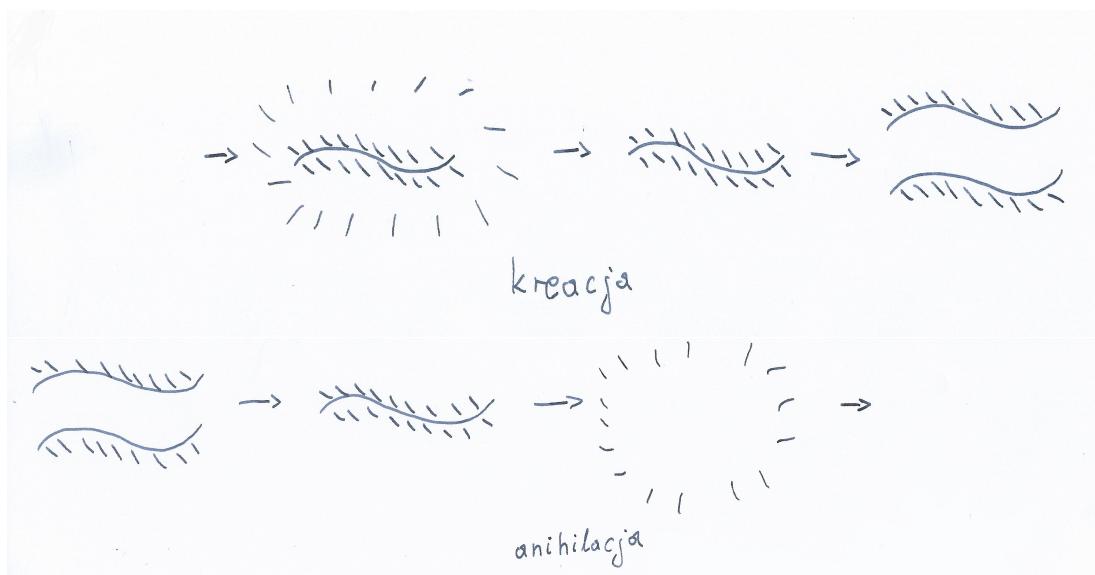
Funkcję krzywizny ze znakiem k^\pm określamy na podstawie funkcji krzywizny krzywej k tak, że jeśli w danym punkcie wyznacznik macierzy [wektor styczny, wektor drugiej pochodnej] ma ten sam znak co wybrana klasa, to $k^\pm = k$, w przeciwnym wypadku $k^\pm = -k$.

4 Poszukiwanie twierdzenia odwrotnego

4.1 Równoważność z problemem na brzegach

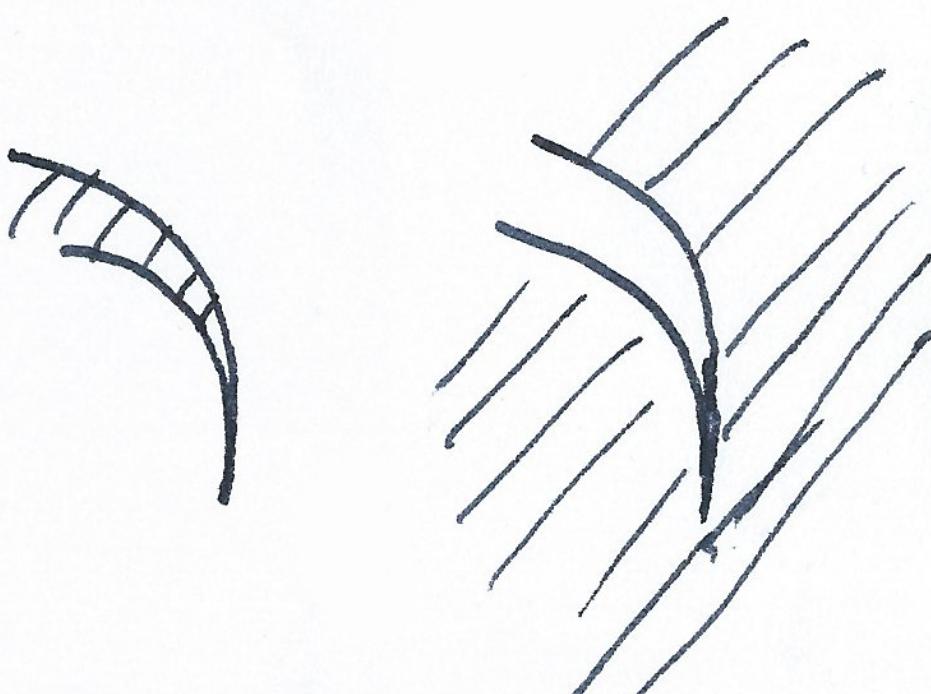
Najpierw dowiedziemy, że zagadnienie równoważności takich figur przez cięcia jest równoważne równoważności przez cięcia ich brzegów w następującym sensie:

Powiemy, że dwie krzywe są równoważne przez cięcia, jeżeli obraz jednej z nich można pociąć i za pomocą izometrii przekształcić na obraz drugiej (zachowując wyróżnioną stronę), przy czym dopuszczać cięcia pustej przestrzeni na dwie odpowiadające sobie krzywe oraz sklejanie takich krzywych:



Uwaga techniczna

Teraz zostanie omówiony przypadek, kiedy żadne dwa sąsiednie C^∞ fragmenty krzywych nie spotykając się pod kątem 180° . Oznacza to, że nie tworzą następujących konfiguracji (nazywanych dalej szpicami, odpowiednio, wypukłym i wklęsłym):



Następnie (4.1.1) zostanie omówiona redukcja przypadku ze szpicami do przypadku bez szpiców.

Implikacja w jedną stronę:

„Jeśli brzegi figur są równoważne, a figury mają równe pola, to figury również są

równoważne."

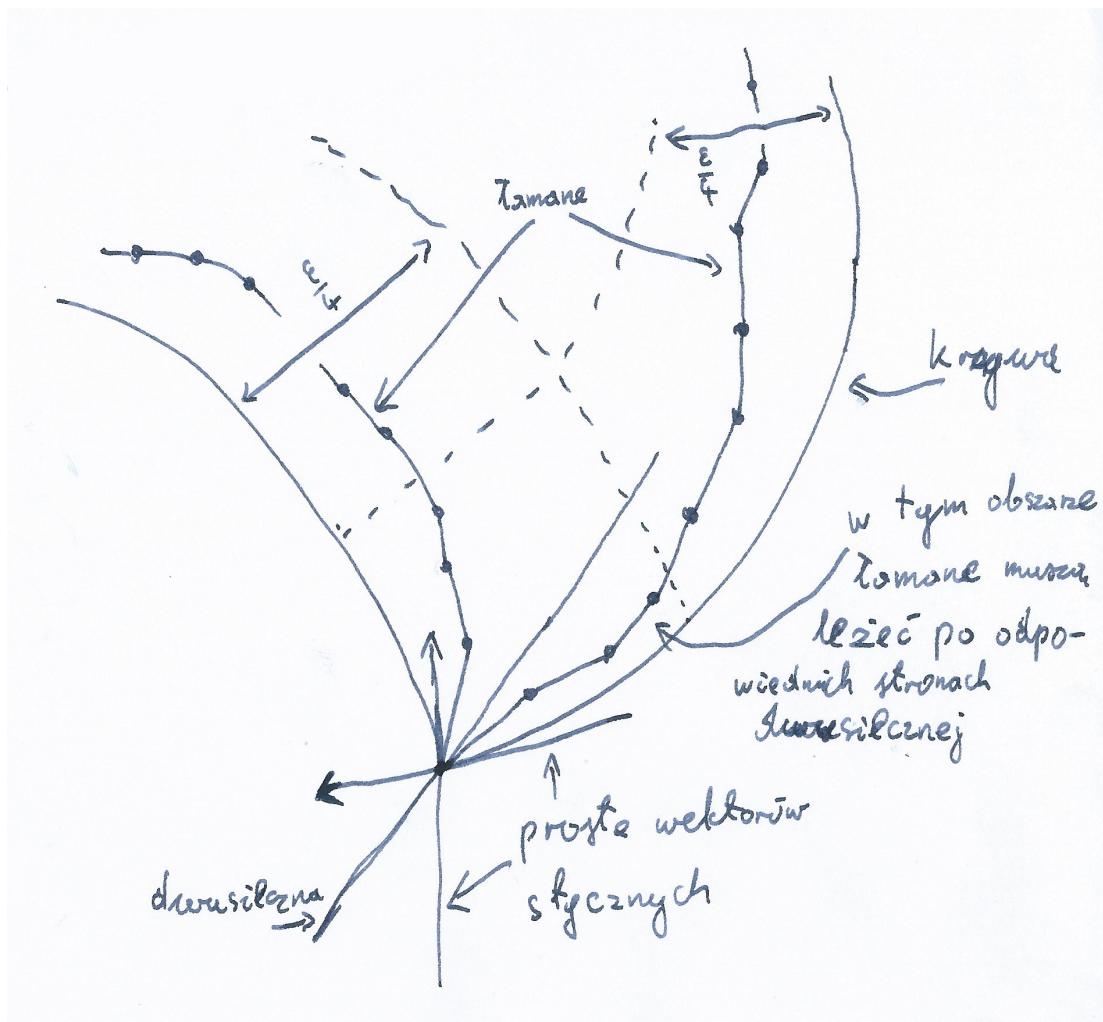
Weźmy dwie figury A oraz B o równych polach, takie, że brzegi są równoważne przez cięcia. Niech cięcie to będzie realizowane poprzez podział brzegu A i przekształcenie jego fragmentów przez izometrię płaszczyzny oraz, jeśli konieczny, podział „pustej przestrzeni” na krzywe i anihilację pasujących krzywych tak jak opisane wyżej. Niech ta operacja świadcząca o równoważności dwóch brzegów przez cięcia nazywa się ϕ .

Skonstruujemy teraz redukcję problemu podziału tych figur do problemu podziału wielokątów, który, jak wiadomo z twierdzenia Wallace–Bolyai–Gerwien'a [5], zawsze ma rozwiązanie.

Rozpatrzmy fragmenty na które podzielony jest brzeg A . Każdy z nich jest zbiorem zwartym, więc (za wyjątkiem sąsiadujących) jest on w niezerowej odległości od pozostałych fragmentów. Dla tych, których obraz przez ϕ jest w B (to znaczy, że fragment nie został zanikowyty z mu odpowiadającym) jest on również w niezerowej odległości od wszystkich fragmentów (za wyjątkiem tych z którymi ma wspólne końce) z których został ułożony brzeg B przy użyciu ϕ .

Fragmentów jest skończenie wiele, niech więc ε będzie dodatnią liczbą rzeczywistą mniejszą od wszystkich tych odległości dla wszystkich par niesąsiadujących fragmentów.

rozpatrzmy $\frac{\varepsilon}{4}$ -owe otoczki wszystkich fragmentów krzywej. W każdym z tych fragmentów prowadzimy łamaną prostą o początku i końcu w końcach fragmentu taką, że pierwsza i ostatnia krawędź łamanej spełnia następujący warunek na kąty względem wektorów stycznych (zarówno w A , jak i w B):

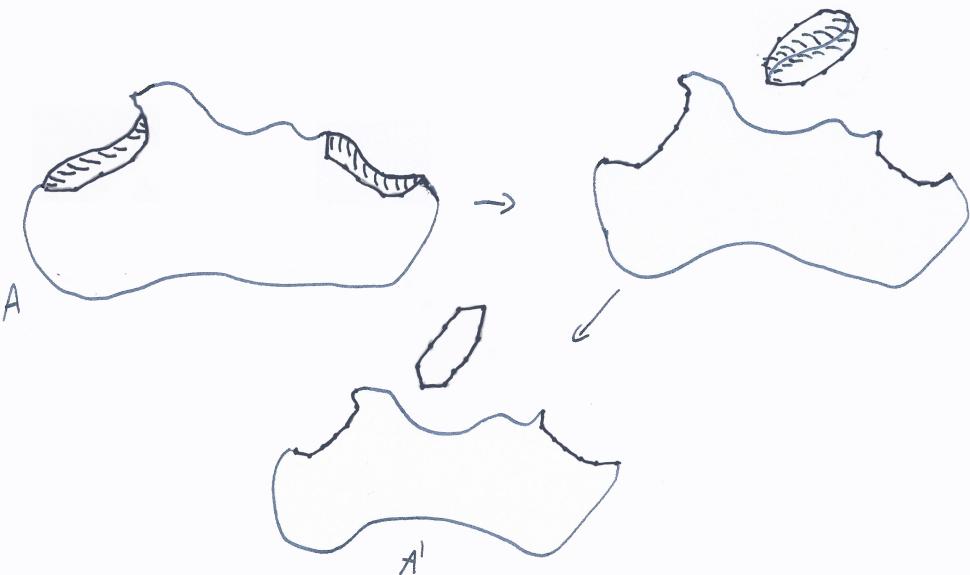


Tutaj właśnie korzystamy z chwilowego założenia, że żadne dwa sąsiednie C^∞ fragmenty krzywej nie spotykają się pod kątem 180° .

Wtedy wszystkie obszary ograniczone przez fragmenty krzywej oraz łamane w odpowiadających im otoczkach oraz ich obrazy przez ϕ są parami rozłączne za wyjątkiem końców fragmentów dla sąsiadujących fragmentów.

Mögemy odciąć je z A i przerzucić w odpowiednie miejsca na B .

Fragmenty brzegu A , które się z sobą zanihilują, odcinamy parami wraz z ich łamanimi i anihilujemy.



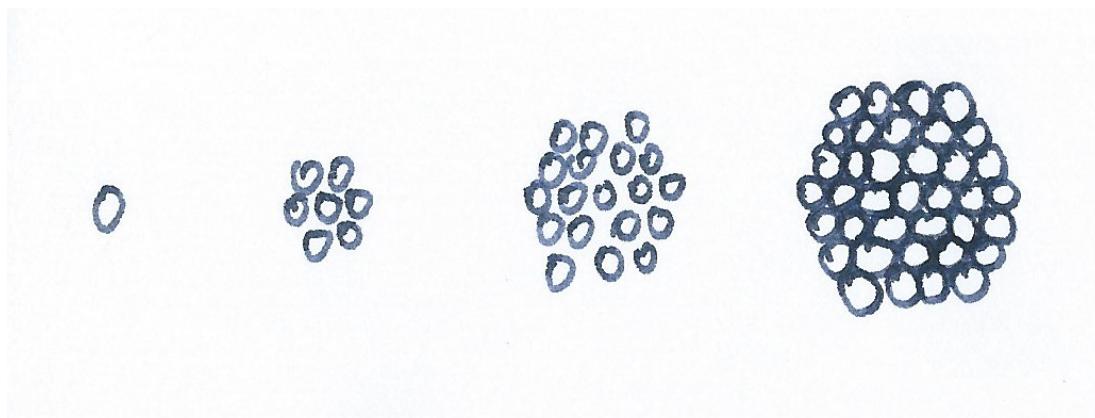
Niech A' oznacza tak powstałą z A figurę (jak widać na rysunku niekoniecznie spójną). Brzeg B dzieli się na dwa obszary - fragmenty pochodzące z fragmentów brzegu A oraz fragmenty pochodzące z rozcięć przestrzeni. Pozostaje „obsłużyć” fragmenty brzegu B pochodzące z kreacji krzywych z przestrzeni.

Potrzebny będzie następujący lemat:

Lemat 4.1.1. *Dla dowolnej krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ takiej jak tu przyjmujemy i dowolnego dysku \mathcal{O} zawartego w \mathbb{R}^2 da się znaleźć taki podział γ , by poprzez izometrię płaszczyzny dało się go odwzorować we wnętrzu \mathcal{O} tak, że obrazy fragmentów będą parami rozłączne.*

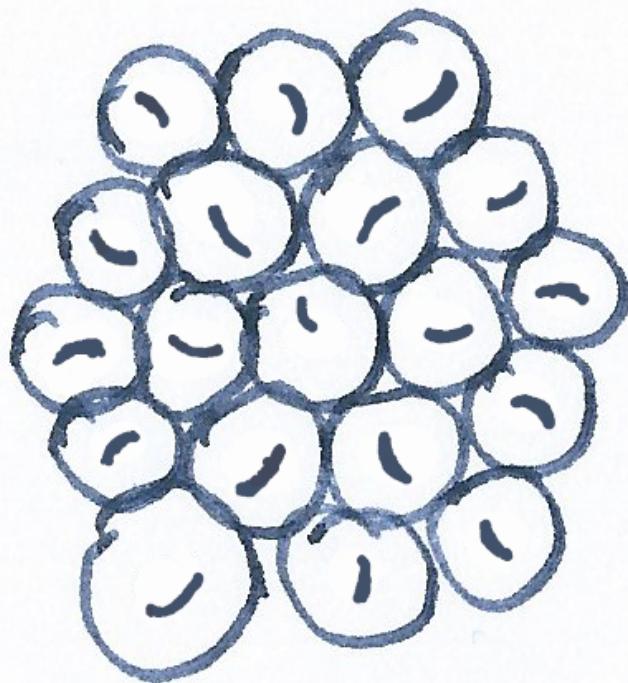
Dowód. Dla dysku \mathcal{O} przez $d(\mathcal{O})$ oznaczamy średnicę dysku. Dla krzywej γ przez $l(\gamma)$ oznaczamy długość krzywej. Konstruujemy ciąg podziałów γ tak, by dla każdego n w n -tym podziale długość każdego fragmentu była mniejsza niż $d(\mathcal{O})/(2n+1)$ ale (poza, być może, ostatnim) większa niż $d(\mathcal{O})/(2n+3)$.

Fragmentów tych będzie co najwyżej część całkowita z $\frac{l(\gamma)}{d(\mathcal{O})/(2n+3)}$, czyli część całkowita z $(2n+3)\frac{l(\gamma)}{d(\mathcal{O})}$. Każdy z tych fragmentów zmieści się w dysku o średnicy $d(\mathcal{O})/(2n+1)$. Kół o średnicach $d(\mathcal{O})/(2n+1)$ w kole \mathcal{O} da się na pewno zmieścić co najmniej $6\frac{n(n+1)}{2} + 1$.



Dla n takiego że $3 \frac{n(n+1)+1}{2n+3} > \frac{l(\gamma)}{d(\mathcal{O})}$, krzywa zmieści się rozłącznie w okręgu dla podziału odpowiadającego n . \square

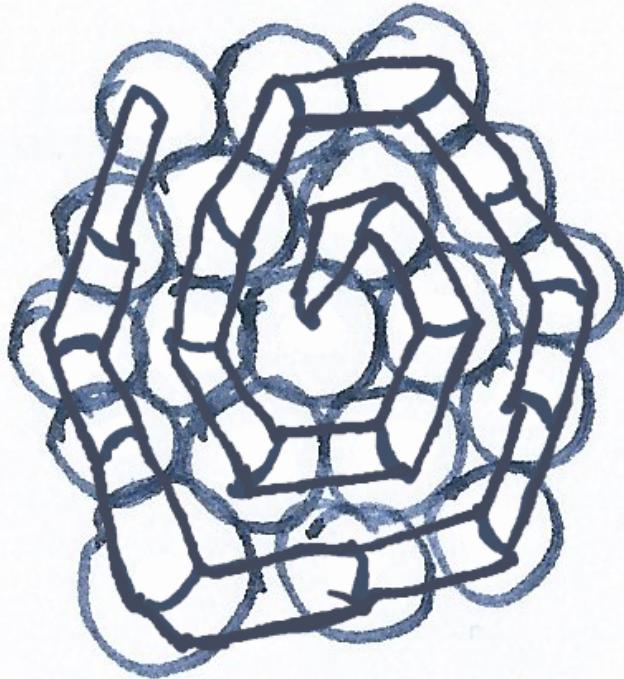
Bierzemy wszystkie krzywe (bez wyróżnionej strony) z których powstały te fragmenty brzegu B poprzez kreację, łączymy je w jedną długą krzywą prostą (jeśli trzeba to łamiemy je, żeby zachować warunek "prostości"). Tak skonstruowaną krzywą umieszczamy (dokonując cięć również we wszystkich miejscach uprzednich łączeń) w kole tak małym, by było zawarte we wnętrzu A' tak jak mówi lemat 4.1.1.



Przy czym zagęszczamy podział tak mocno by obłość każdego fragmentu nie przekraczała $\pi/8$ długość żadnego fragmentu nie była większa niż $\varepsilon/8$ oraz by żaden fragment (o ile nie jest odcinkiem) nie miał w żadnym punkcie zerowej wartości krzywizny (w celu spełnienia ostatniego warunku dodajemy punkty cięć

na końcach fragmentów będących odcinkami oraz w punktach izolowanych zbioru punktów gdzie krzywizna ma wartość 0).

Należy teraz wykonać następujące cięcia w A' (okręgi narysowane są tylko w celach pomocniczych i nie przedstawiają cięć):



Dyski rozmieszczamy tak, by tworzyły koncentryczne sześciokąty. Wyróżnijmy punkt o , który jest środkiem symetrii powstałej figury. Kiedy będziemy mówili „radialnie”, bądź „wzdłuż promienia” będziemy mieli na myśli kierunki radialne względem tego punktu.

Wszystkie fragmenty krzywej umieszczamy w dyskach (poza centralnym) tak, by wektory do nich styczne na końcach tworzyły kąt co do modułu mniejszy niż $\frac{\pi}{8}$ z promieniem przechodzącym przez środek dysku w którym się znajdują. Fragment znajdujący się w centralnym dysku umieszczamy dowolnie, ale tak, by jeden jego koniec był bliżej o niż drugi. Z warunku ograniczającego obłość fragmentów do $\frac{\pi}{8}$ otrzymujemy, że dla każdego fragmentu jeden jego koniec leży bliżej o niż drugi. Niech B oznacza zbiór końców kawałków krzywych bliższych o , za to D zbiór końców kawałków krzywych dalszych od o . Łączymy teraz elementy z B oraz elementy z D łamanyymi według schematu pokazanego na powyższym rysunku. Te łamane oraz fragmenty krzywych są liniami cięć.

Z powyższych fragmentów układamy odpowiednie fragmenty brzegu B .

Tak powstała figura A'' jest sumą rozłączną wielokątów. Niepokryta część B jest wielokątem, nazwijmy ją B'' . A oraz B miały równe pola, więc A'' i B'' również mają równe pola. Są więc równoważne przez cięcia, więc A i B również są.

Implikacja w drugą stronę:

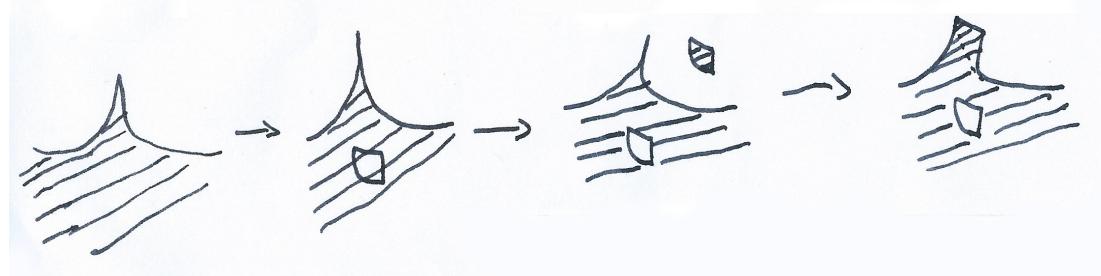
„Jeśli figury są równoważne, to ich brzegi również są równoważne”.

Podział figur A , B zadaje równoważność brzegu A z sumą brzegów fragmentów na jakie została pocięta A oraz równoważność tej sumy brzegów z brzegiem B . Stąd dla równoważnych figur ich brzegi również są równoważne. \square

4.1.1 Redukcja przypadku ze szpicami

Szpic wypukły

Zaczynamy od znalezienia dysku o małym promieniu zawartego w figurze. Wycinamy z niego fragment zawierający jako brzeg krzywą identyczną z początkiem jednej z krzywych tworzących szpic, ale o przeciwnie wyróżnionej stronie i przyklejamy go do szpicu. Proces ten schematycznie ilustruje rysunek:



Szpic wklęsły

W przypadku szpicu wklęsłego wycinamy fragment figury zawierający jako brzeg początek jednej z krzywych tworzących szpic i przenosimy go w inne miejsce płaszczyzny (poza figurę). Proces ten schematycznie ilustruje rysunek:



4.2 Kiedy ZMO zawodzi

Pokazaliśmy, że rozstrzygając równoważność przez podział figur o tym samym polu wystarczy rozstrzygnąć równoważność przez podział ich brzegów. Zastanówmy się, czy znakowana miara obłości jest wystarczającym kryterium do klasyfikacji krzywych - tzn. czy dowolne dwie nierównoważne mają różną oraz czy dowolne dwie równoważne mają taką samą.

W 2 odpowiedzieliśmy sobie twierdząco na drugie pytanie. Odpowiedź na pierwsze pytanie jest twierdząca dla krzywych złożonych wyłącznie z łuków i odcinków. Mając tą samą znakowaną miarę obłości mają tą samą sumaryczną długość łuków okręgów o odpowiednich promieniach z wyróżnioną stroną z odpowiedniej strony.

Fragmenty te można kleić ze sobą i ciąć, tak by z jednej krzywej otrzymać drugą. Fragmenty o krzywiźnie 0 można dowolnie kreować i anihilować. Znakowana miara obłości nie potrafi jednak rozróżnić wszystkich nieprzystających do siebie przez cięcia krzywych. Skonstruujemy tego przykład. Najpierw jednak przeprowadzimy analizę czym jest wprowadzona tutaj znakowana miara obłości i jak ma się do krzywizny krzywej.

4.2.1 Jak wygląda znakowana miara obłości

Niech $k(t)$ będzie funkcją krzywizny od czasu jakim jest sparametryzowana. Rozpatrzmy krzywą o ścisłe monotonicznej krzywiźnie ($\forall_t k'(t) \neq 0$) dla których znak znakowanej krzywizny jest stały. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdzie $k^\pm = k$. Ze ścisłej monotoniczności istnieje funkcja odwrotna $t(k) : [k_{\text{MIN}}, k_{\text{MAX}}] \rightarrow \mathbb{R}$, która mówi w jakiej chwili czasu uzyskana była dana wartość krzywizny.

Wyrazimy teraz znakowaną miarę obłości takiej krzywej poprzez jej krzywiznę oraz na odwrót - jej krzywiznę poprzez jej znakowaną miarę obłości.

Lemat 4.2.1. *Dla krzywej z wyróżnioną stroną o ścisłe rosnącej krzywiźnie takiej, że $k^\pm = k$ jej ZMO ma gęstość.*

Dowód. Z definicji znakowanej miary obłości (1) oraz założenia, że $k^\pm = k$, dla dowolnego przedziału $[k_1, k_2]$ jest ona równa:

$$\mu_O([k_1, k_2]) = \int_{t(k_1)}^{t(k_2)} k(t) \, dt \quad (2)$$

Co przez zamianę zmiennych jest równe:

$$\int_{t(k_1)}^{t(k_2)} k(t) \, dt = \int_{k_1}^{k_2} \frac{k}{k'(t(k))} \, dk \quad (3)$$

Stąd

$$\varrho_O(k) = \frac{k}{k'(t(k))} \quad (4)$$

jest szukaną gęstością miary μ_K . \square

W ten sposób dla takiej klasy krzywych wyraziliśmy gęstość ich ZMO poprzez ich krzywiznę. Dla krzywych bez łuków, takiej że $\forall_t k'(t) \neq 0$, również mamy, że μ_K ma gęstość, jest ona wtedy sumą gęstości jej składowych o ścisłe monotonicznej krzywiźnie. Jest tak ponieważ definiujemy tę miarę poprzez całkę, która jest operatorem liniowym.

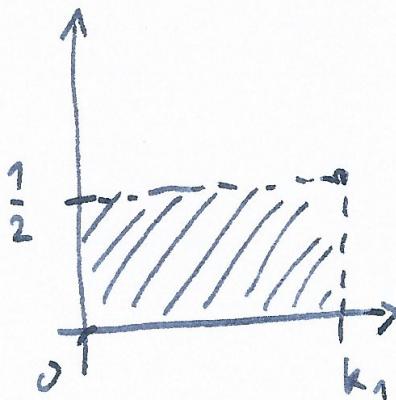
rozwiązuając Dla przypadku, gdzie $k^\pm = -k$ otrzymana zależność to:

$$\varrho_O(k) = -\frac{k}{k'(t(k))}. \quad (5)$$

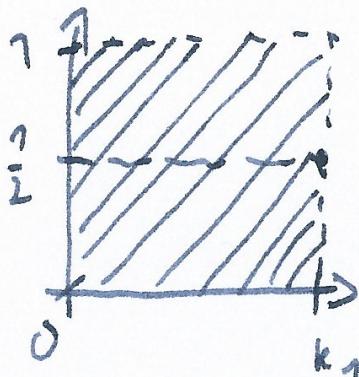
wyróżnioną

4.2.2 Wnioski płynące z jawnej postaci znakowanej miary obłości

Krzywa będąca konkatenią dwóch krzywych o ścisłe rosnącej krzywiźnie o mierze obłości:



każda, ma tą samą miarę obłości co krzywa o ścisłe rosnącej krzywiźnie i mierze obłości:



Nie są one jednak równoważne przez cięcia.

Możemy to zaobserwować wprowadzając następujący niezmiennik:

Lemat. *Dla danej wartości krzywizny k , jeżeli podczas transformacji danej krzywej γ przez cięcia, klejenia, izometrie, kreacje oraz anihilacje żadne cięcie ani klejenie nie było prowadzone przez punkt o krzywiźnie k , to stała jest wartość:*

$$\#\gamma(k) = \#\text{punktów o krzywiźnie } k, \text{ gdzie wyróżniona strona jest wypukła} - \#\text{punktów o krzywiźnie } k, \text{ gdzie wyróżniona strona jest wklęsła} . \quad (6)$$

#punktów o krzywiźnie k , gdzie wyróżniona strona jest wklęsła .

Dowód. Jest tak ponieważ, cięcia oraz klejenia nie zmieniają liczby punktów z założenia, że żadne cięcie ani klejenie nie było w punkcie o krzywiźnie k , izometrie nie zmieniają tej liczby, a kreacje i anihilacje krzywych, odpowiednio dodają jeden

zarówno do odjemnej jak i do odjemnika, odejmując jeden zarówno od odjemnej jak i od odjemnika, jeżeli wykreowany/zanihilowany fragment krzywej zawiera punkt o krzywiźnie k bądź też nie zmieniają tej liczby punktów. W każdym przypadku różnica pozostaje niezmieniona. \square

Zauważmy jeszcze następującą zależność:

Ponieważ wszystkich operacji przy przekształcaniu jednej krzywej na drugą jest skończenie wiele, to przy każdym sposobie przekształcenia istnieje wartość krzywizny z krzywej, dla której żadne cięcie ani klejenie nie jest prowadzone przez punkt o takiej krzywiźnie. Stąd jeżeli dwie krzywe γ_1, γ_2 mają dla każdej wartości krzywizny (występującej na co najmniej jednej z nich) różne wartości $\#_{\gamma_1}(k), \#_{\gamma_2}(k)$, to nie są one równoważne przez cięcia.

To prowadzi nas do szukanego wniosku:

Powyższe, rozważane przez nas krzywe, dla każdej wartości krzywizny k występującej na tych krzywych mają wartości wprowadzonego tu niezmiennika równe, odpowiednio, 2 i 1. Nie są więc równoważne przez cięcia.

By potrafić odróżnić od siebie istotnie różne krzywe potrzebujemy niezmiennika zawierającego w sobie informacje o parametryzacji. Należały zatrzymać jakość informacje jak krzywa rozkłada się na krzywe o ścisłe monotonicznej krzywiźnie, które już są wyznaczone jednoznacznie (z dokładnością do izometrii płaszczyzny) przez ich ZMO. Wtedy znalibyśmy rodzinę krzywych z dokładnością do ich cięć i izometrii płaszczyzny. W kolejnym rozdziale przedstawimy niezmiennik, który faktycznie jest zachowywany przy cięciach, izometriach płaszczyzny i sklejeniach oraz jest różny dla krzywych (a stąd dla figur) które równoważne nie są.

4.3 Wielka grupa abelowa

Niech \mathcal{A} będzie rodziną wszystkich prostych krzywych, kawałkami C^∞ , sparametryzowanych długością z wyróżnioną stroną (zapisywana jako $\mathcal{S}(\gamma) = 1$ dla dodatniego wyznacznika oraz $\mathcal{S}(\gamma) = -1$ dla ujemnego wyznacznika).

Rozepnijmy wolną grupę abelową na \mathcal{A} .

Określmy teraz relacje w tej grupie:

- kreacji/anihilacji
- cięcia/klejenia
- izometrii

4.3.1 Kreacja/anihilacja

Dla $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \gamma_1[[a, b]] &= \gamma_2[[c, d]] \\ &\wedge \\ \left((\gamma_1(a) = \gamma_2(c) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = -\mathcal{S}(\gamma_2)) \right. \\ &\quad \vee \\ \left. (\gamma_1(a) = \gamma_2(d) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2)) \right) \\ \implies \gamma_1 + \gamma_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

4.3.2 Cięcia/klejenie

Dla $\gamma_0 : [a_1, a_n] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1 : [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \dots, \gamma_{n-1} : [a_{n-1}, a_n] \rightarrow \mathbb{R}^2$, takich że $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$

$$\begin{aligned} \left((\forall t \in [a_i, a_{i+1}]) \gamma_0(t) = \gamma_i(t) \wedge (\forall i) \mathcal{S}(\gamma_0) = \mathcal{S}(\gamma_i) \right) \\ \implies \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

4.3.3 Izometrie

Dla $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$|b - a| = |c - d| \tag{9}$$

$$\wedge \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \left(\left(\forall_{t \in [0, b-a]} k_{\gamma_1}^\pm(a+t) = k_{\gamma_2}^\pm(c+t) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2) \right) \right. \\ \vee \\ \left. \left(\forall_{t \in [0, b-a]} k_{\gamma_1}^\pm(a+t) = k_{\gamma_2}^\pm(d-t) \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = -\mathcal{S}(\gamma_2) \right) \right) \\ \implies \gamma_1 - \gamma_2 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Odpowiada to odwzorowaniom przez izometrie \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} \exists \Lambda_{\text{-izometria}} \gamma_1 &\equiv \Lambda \circ \gamma_2 \\ &\wedge \\ \left(\left(\det \Lambda = 1 \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = \mathcal{S}(\gamma_2) \right) \right. \\ &\quad \vee \\ \left. \left(\det \Lambda = -1 \wedge \mathcal{S}(\gamma_1) = -\mathcal{S}(\gamma_2) \right) \right) \\ \implies \gamma_1 - \gamma_2 &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

ponieważ funkcja znakowanej krzywizny określa jednoznacznie krzywą (bez wyróżnionej strony) z dokładnością do jej początku i wektora stycznego w początku [4]. Dzieje się tak, ponieważ znając funkcję znakowanej krzywizny danej krzywej jesteśmy w stanie napisać równanie różniczkowe wiążące pierwszą i drugą pochodną krzywej.

Druga pochodna równa się wektor prostopadły do pierwszej dodatnio zorientowany razy znakowana krzywizna:

$$\begin{pmatrix} \gamma''_x(t) \\ \gamma''_y(t) \end{pmatrix} = k^\pm(t) \begin{pmatrix} -\gamma'_y(t) \\ \gamma'_x(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Równanie różniczkowe to można przedstawić również jako:

$$\gamma''(t) = \begin{bmatrix} 0 & -k^\pm(t) \\ k^\pm(t) & 0 \end{bmatrix} \gamma'(t) \quad (14)$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe pierwszego stopnia (ze względu na pochodną krzywej).

Dla krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dla warunku początkowego $\gamma'(t_0) = \gamma'_0 = \begin{pmatrix} \gamma'_{0x} \\ \gamma'_{0y} \end{pmatrix}$ jego rozwiązaniem jest wtedy:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \\ &- \begin{pmatrix} \cos \left(\int_a^t k^\pm(w) dw \right) & \sin \left(\int_a^t k^\pm(w) dw \right) \\ -\sin \left(\int_a^t k^\pm(w) dw \right) & \cos \left(\int_a^t k^\pm(w) dw \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_{0x} \\ \gamma'_{0y} \end{pmatrix} \quad (15) \\ &= - \begin{pmatrix} \gamma'_{0x} \cos \left(\int_a^t k^\pm(w) dw \right) + \gamma'_{0y} \sin \left(\int_a^t k^\pm(w) dw \right) \\ \gamma'_{0y} \cos \left(\int_a^t k^\pm(w) dw \right) - \gamma'_{0x} \sin \left(\int_a^t k^\pm(w) dw \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dla warunku początkowego $\gamma(0) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_{0x} \\ \gamma_{0y} \end{pmatrix}$, krzywa gamma jest to

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int_a^t \gamma'(w) dw \quad (16)$$

Zauważmy również, że trzecia relacja utożsamia również krzywe o tym samym obrazie, a różnej parametryzacji ze względu na przedział którym są sparametryzowane.

Przez wielką grupę abelową (nazywaną dalej WGA) rozumiemy grupę ilorazową powstałą przez wydzielenie wolnej grupy abelowej rozpiętej na \mathcal{A} przez relacje kreacji/anihilacji, cięcia/klejenia oraz izometrii.

4.3.4 Równoważność elementu w wielkiej grupie abelowej z klasą krzywych równoważnych ze sobą przez cięcia

Twierdzenie.

Dwie kawałkami C^∞ , proste krzywe sparametryzowane długością z wyróżnioną stroną są ze sobą równoważne przez cięcia wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiada im ten sam element w WGA.

Dowód.

Implikacja w jedną stronę:

Weźmy element z WGA. Pokażemy, że odpowiada mu dokładnie jedna klasa równoważności przez cięcia krzywych.

Jeśli odpowiadałyby dwie, to biorę po reprezentancie każdej z nich i patrzę na ich elementy w niewydzielonej grupie. Elementy te z założenia przechodzą na ten sam element przez odwzorowanie ilorazowe. Stąd istnieje ciąg relacji ψ z grupy ilorazowej pozwalający przekształcić wyrażenie odpowiadające pierwszej krzywej w wyrażenie odpowiadające drugiej krzywej. Ciąg przekształceń złożony z przekształceń odpowiadających kolejnym relacjom z ψ stanowi o równoważności krzywych.

Implikacja w drugą stronę:

Analogicznie:

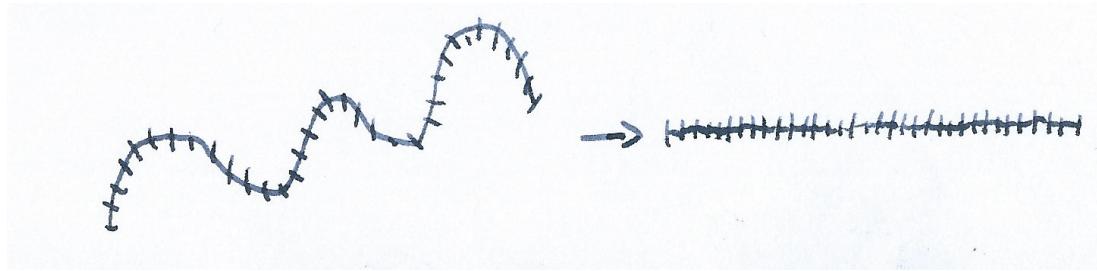
Jeśli dwie krzywe γ_1, γ_2 są równoważne, to istnieje ciąg transformacji ϕ przez izometrie oraz kreacje/ anihilacje przekształcający jedną krzywą na drugą.

Ciąg relacji złożony z relacji odpowiadających transformacjom z ϕ pozwala przekształcić element w niewydzielonej grupie odpowiadający γ_1 w element odpowiadający γ_2 . Stąd te elementy mają jednakowy obraz przez odwzorowanie ilorazowe. Obu krzywym odpowiada, więc ten sam element WGA. \square

4.3.5 Dyskusja, że to niewiele daje

Niezmiennik jakim jest element w WGA faktycznie daje charakteryzację. Jednak jego wyznaczenie (bądź w ogóle opisanie) nie wydaje się łatwiejsze niż rozstrzygnięcie problemu dla danych figur bez tego aparatu pojęciowego. Wiedza o możliwości przedstawienia tego problemu w postaci WGA nie dała mi żadnej odpowiedzi na żadne pytanie postaci „opisuję jakoś dwie figury, chcę rozstrzygnąć, czy są równoważne przez cięcia”, którego nie potrafiłbym rozstrzygnąć w inny sposób. Opis ten daje jednak inne rzeczy.

Odwziewciedliśmy bowiem problem w strukturę grupową. Zrobiliśmy to również w taki sposób, że każdej klasie figur równoważnych przez cięcia odpowiada jeden element w grupie abelowej oraz liczba rzeczywista (pole) oraz każdemu elementowi z grupy wraz z liczbą z zakresu $(0, \infty)$ (możliwe pola, bo tnąc zawsze można zejść dowolnie blisko zera „redukując kąt zataczany przez krzywe i zbliżając powstałe krawędzie”, a kreując krzywe można uzyskać dla wybranej klasy dowolnie duże pole)



odpowiada jedna klasa figur równoważnych przez podział.

Załóżmy teraz, że chcemy określić pewien niezmiennik, prostszy w wyliczeniu, ale taki, że jego możliwe wyniki nadal będą w bijekcji z klasami podziału. Założymy ponadto, że przeciwdziedzina tego niezmiennika będzie miała strukturę grupową. Jest to dość naturalne założenie, pierwsze dwa naturalne niezmienniki jakie wprowadziliśmy, mianowicie obłość i znakowana miara obłości, miały tę strukturę, a niezmienniki były homomorfizmami, gdzie po jednej stronie działaniem było wzięcie na raz dwóch krzywych (albo, można myśleć, ich konkatenacja), a po drugiej stronie - suma ich niezmienników.

Wydaje się, że jeśli niezmiennik wyrażony w czymś o strukturze grupowej miałby się zachowywać „przyzwoicie” powinien mieć tę własność. Mając jednak naszą WGA widzimy, że każdy taki niezmiennik pozwalający na rozróżnianie dwóch dowolnych klas będzie miał zanurzoną w sobie WGA, w tym sensie będzie nieprostszy.

Oczywiście nie wykluczam, że nie spostrzegłem jakiś metod rozróżniania klas figur przy użyciu innego typu niezmienników bądź bez określania niezmienników w ogóle. Może też istnieje efektywna metoda określania jednakości elementów w WGA. Podejrzewam też, że przy innym spojrzeniu możliwe byłoby napisanie niezmiennika, który lepiej charakteryzowałby krzywe (lub nawet charakteryzował je w pełni) i był w jakiś sposób (przynajmniej dla pewnej klasy krzywych) wyliczalny. Być może byłby on nawet równoważny WGA, ale dzięki innemu podejściu do problemu może sytuacja byłaby jaśniejsza. Możliwe, że powiedziało by to też coś wtedy o strukturze samej WGA. Jednak na ten moment żadne z powyższych nie zostało przeze mnie znalezione.

5 Uwaga o topologii

Na zbiorze figur takich jak omawiane w tej pracy, branych z dokładnością do izometrii na płaszczyźnie można określić odległość między nimi jako infimum pola różnicy symetrycznej brane po wszystkich reprezentantach klas (czyli po wszystkich obrazach izometrii na płaszczyźnie).

Różnicę symetryczną zbiorów A i B będziemy oznaczać przez $A \Delta B$.

Pole figury f będziemy oznaczać przez $\mathcal{P}(f)$.

Zauważmy, że mając daną figurę A , przestrzeń położen innej figury B względem A zawierającą wszystkie położenia o różnicy symetrycznej o polu mniejszym niż

$\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$ da się sparametryzować zbiorem zwartym $D^2 \times S^1 \times S^0$.

W tym celu wyróżniamy punkt $b \in B$. Kiedy b leży poza dyskiem (o odpowiednio dużym promieniu) pole powierzchni różnicy symetrycznej $A \Delta B$ tak położonych figur A i B jest równe $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$. Parametryzujemy ten dysk dyskiem D^2 . Dla każdego położenia punktu b położenie figury jest zdeterminowane przez jej obrót (co parametryzujemy przez S^1) i symetryczne odbicie (co parametryzujemy przez S^0). Parametryzująca przestrzeń jest zwarta jako iloczyn przestrzeni zwartych, stąd pole różnicy symetrycznej, które jest funkcją ciągłą na tym zbiorze przyjmuje swoje kresy. Więc infimum będące odległością jest w istocie realizowane dla dowolnego położenia A przez pewne odpowiednie położenie B . Czy to jest metryka?

Twierdzenie. Tak, jest to metryka.

Dowód. 1. Niezdegenerowanie, $\forall_{f,g} d(f,g) = 0 \iff f \cong g$

Implikacja w lewą stronę jest oczywista. Implikacja w prawą stronę, wynika z tego, że ze wartości jeśli punkt należy do różnicy symetrycznej, to należy wraz ze swoim otoczeniem, więc dla nieprzystających figur pole różnicy symetrycznej jest > 0 dla dowolnego ich wzajemnego położenia. (Gdyby nie należał wraz z żadnym otoczeniem, to dowolnie blisko mógłbym podejść punktami z drugiej figury i z domkniętości tenże punkt też by należał).

2. Symetryczność, $\forall_{f,g} d(f,g) = d(g,f)$

Jest tak, bo różnica symetryczna jest symetryczna.

3. Warunek trójkąta, $\forall_{f,g,h} d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$

Weźmy figury A, B, C . Dla danego położenia A weźmy położenie B realizujące odległość $d(A,B)$. Dla tego położenia B weźmy położenie C realizujące odległość $d(B,C)$.

Od tego momentu pisząc „ $A \Delta B$ ”, „ $B \Delta C$ ” oraz „ $A \Delta C$ ” będziemy mieć na myśli różnice symetryczne tych położen figur A, B, C .

Ponieważ, z definicji, $d(A,C) \leq \mathcal{P}(A \Delta C)$ oraz ponieważ $\mathcal{P}((A \Delta B) \cup (B \Delta C)) \leq \mathcal{P}(A \Delta B) + \mathcal{P}(B \Delta C) = d(A,B) + d(B,C)$, wystarczy pokazać, że $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$.

Jest tak istotnie. Jeżeli $p \in A \Delta C$, to $p \in A$ albo $p \in C$.

Rozważamy przypadki.

Jeżeli $p \in A$ i $p \in B$, to $p \in B \Delta C$.

Jeżeli $p \in A$ i $p \notin B$ to $p \in A \Delta B$.

Jeżeli $p \in C$ i $p \in B$, to $p \in A \Delta B$.

Jeżeli $p \in C$ i $p \notin B$, to $p \in B \Delta C$.

We wszystkich czterech przypadkach $p \in (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$ □

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{P}(f)$ to pole figury f , to

$$|\mathcal{P}(f) - \mathcal{P}(g)| \leq d(f,g) \quad (17)$$

Wynika stąd, że dla dowolnej liczby rzeczywistej r , zbiór figur o polu r jest zbiorem domkniętym.

Dowód: Nazwijmy ten zbiór R . Weźmy punkt s spoza tego zbioru, niech ma on pole m . Stąd s jest w odległości co najmniej $|m - r|$ od każdego punktu z R . Otoczenie będące kulą wokół s o promieniu ostro mniejszym niż $|m - r|$ zawiera się więc w dopełnieniu R . Stąd dopełnienie R jest otwarte, stąd R jest domknięty.

□

Można teraz zauważyc ze w tak zdefiniowanej topologii na figurach każda klasa wyznaczona przez jeden z elementów WGA (czyli klasa równoważności przez cięcia z zaniedaniem zachowywania pola) jest zbiorem gęstym.

Można też zauważyc, że skoro każdą figurę jestem w stanie dowolnie przybliżyć wielokątami o wierzchołkach w punktach wymiernych, to powstała przestrzeń jest przestrzenią ośrodkową.

Przestrzeń ta nie jest jednak zupełna. Jeżeli brzegi figur z ciągu zbiegając punktowo do jakieś ustalonej figury, być może szerszej klasy (na przykład o brzegach będących krzywymi Jordana), to figury te tworzą ciąg Cauchy'ego w opisanej wyżej przestrzeni. Stąd granica ciągu krzywych takich jak tu rozważanych nie musi być gładką krzywą, tym samym, granica ciągu krzywych z rozważanej tu przestrzeni nie musi należeć do tej przestrzeni.

Literatura

- [1] Łukasz Grabowski, András Máthé, and Oleg Pikhurko. Measurable circle squaring. *Annals of Mathematics*, 185(2):671–710, March 2017.
- [2] J. Karush L. Dubins, M.W. Hirsch. Scissor congruence. *Israel J. Math.*, 1:239–247, 1963.
- [3] Miklós Laczkovich. Equidecomposability and discrepancy; a solution of tarski's circle-squaring problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 404:77–117, 1990.
- [4] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2, 3rd Edition*. Publish or Perish, 3rd edition, 1999.
- [5] MathWorld-A Wolfram Web Resource. Weisstein, Eric W. Wallace-bolyai-gerwien theorem. <https://mathworld.wolfram.com/Wallace-Bolyai-GerwienTheorem.html>.