2.1.5 Integración por sustitución de variables

Si en una integral cambiamos completamente la variable x por alguna otra, la forma de la respuesta de la integral se conserva, por ejemplo:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

$$\int 2z\,dz = z^2 + c$$

$$\int 2u\,du = u^2 + c$$

Esto nos permite realizar integrales, haciendo un cambio de variable, por ejemplo, para integrar:

$$\int 2\sin x \cos x\,dx$$

Podemos ver que se parece a la integral

$$\int 2u\,du = u^2 + c$$

Si elegimos $u = \sin x$

$$\int 2\sin x \cos x\,dx = \int 2u\,du = u^2 + c = (\sin x)^2 + c = \sin^2 x + c$$

Sustitución por realizar:

$u = \sin x$

$du = \cos x\,dx$

$$\int 2\sin x \cos x\,dx = \sin^2 x + c$$

Pero no es la única opción también podemos elegir $u = \cos x$

$$\int 2\sin x \cos x\,dx = -\int 2\cos x\,(-\sin x\;\,dx) = -\int 2u du = -u^2 + c = -(\cos x)^2 + c$$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$\int 2\sin x \cos x\,dx = -\cos^2 x + c$$

Si observamos ambos resultados, no parecen iguales, pero sí lo son, podemos aplicar las identidades trigonométricas (en este caso las pitagóricas) que aprendieron en tercer semestre y veremos que la diferencia radica en las constantes.

Hablando de identidades, seguro recordaran la identidad de ángulo doble, también es algo que podemos utilizar:

$$2\sin x\cos x = \sin 2x$$

$$\int \sin u\, du = -\cos u + c$$

$$\int 2\sin x\cos x\, dx = \int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, 2dx = \frac{1}{2}\int \sin u\, du = \frac{1}{2}(-\cos u + c)$$

$u = 2x$

$du = 2dx$

$$\int 2\sin x\cos x\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

En este caso la sustitución fue por el ángulo de la función, y tuvimos que completar el diferencial, el resultado también es igual a las anteriores, se tendría que utilizar la identidad de ángulo doble para el coseno, para poder comprobarlo. Cualquiera de las tres opciones es válida, no siempre hay un solo proceso, a fin de cuentas, cada uno utilizará lo que más se le facilite... y con eso no me refiero a PhotoMath u otro programa. Antes del trabajo en clase, quiero ver un ejemplo en el que no hay que completar el diferencial, sino despejar la variable a partir de la propuesta de sustitución.

Ejemplo:

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int (u+1)\sqrt{u}\, du = \int (u+1)u^{1/2}\, du = \int \left(u^{3/2} + u^{1/2}\right) du = \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c$$

$u = x - 1$

$du = dx$

$x = u + 1$

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + c$$

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + c$$

Muchas veces en una sustitución con raíces o potencias, se elige lo que se encuentra dentro de la raíz o potencia, pero sin la potencia o raíz, aunque en ocasiones se puede tomar completa y funcionar, vamos a resolver el ejemplo anterior, pero cambiando la propuesta para u.

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (u^2+1)u2udu = \int (2u^4 + 2u^2)du = \frac{2u^5}{5} + \frac{2u^3}{3} + c$$

$u = \sqrt{x-1}$

$u^2 = x - 1$

$x = u^2 + 1$

$dx = 2udu$

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2(\sqrt{x-1})^5}{5} + \frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} + c$$

Que fácilmente podemos observar, es el mismo resultado que teníamos anteriormente.

Trabajo en Clase 4

Integra:

1. $\int \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx$

2. $\int \frac{2x-1}{2x^2-2x}\,dx$

3. $\int (2x-1)\sqrt{2x^2-2x}\,dx$

4. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2-2x}}\,dx$

5. $\int 2(3x^2-x+1)dx$

6. $\int (x+1)(x-1)^{10}\,dx$

7. $\int 9\, e^{\sin 3x} \cos 3x\,dx$

8. $\int \sin 7x\,dx$

9. $\int \frac{2\ln^2 x^2}{x}\,dx$

10. $\int \frac{4\arctan^3 x}{x^2+1}\,dx$

Tarea 4

Integra:

1. $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

2. $\int \frac{x}{(3x^2-2)^2}\,dx$

3. $\int x\sqrt{3x^2-2}\,dx$

4. $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-2}}dx$

5. $\int (3x^2-6x+3)dx$

6. $\int \tan^2 x \ \sec^2 x \, dx$

7. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

8. $\int \cos 5x \, dx$

9. $\int 3x^2 e^{x^3} dx$

10. $\int \frac{2\arctan x}{x^2+1}dx$