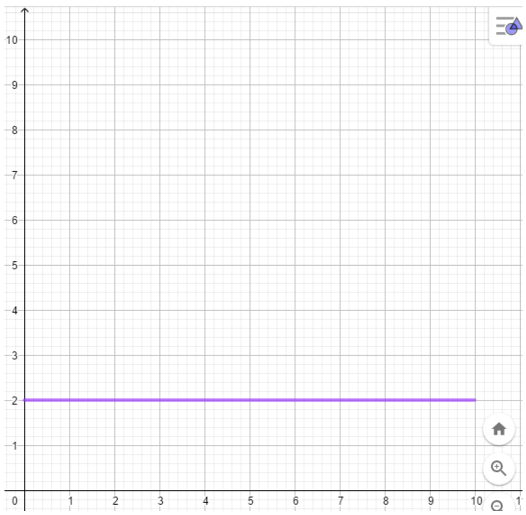
4. Aproximación y cálculo del "área bajo la curva" por métodos elementales (método de los rectángulos y método de los trapecios)

4.1 Área bajo la curva

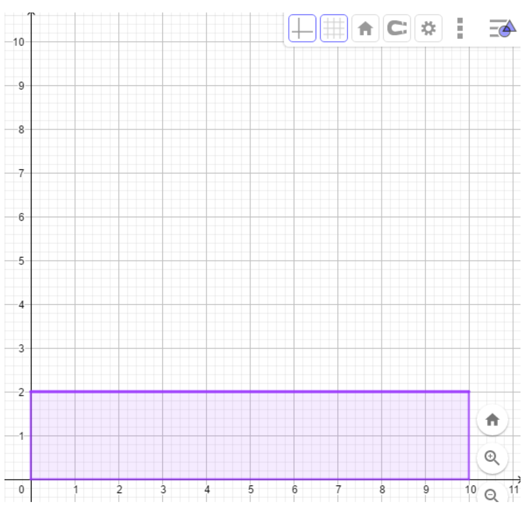
4.1.1 Descripción del cambio de forma gráfica

Muchas cosas cambian a nuestro alrededor, me voy a enfocar en un problema de velocidad, supongamos que cierta persona corre a velocidad constante de $v(t) = 2\ m/s$ durante 10 segundos, esto lo podemos representar en una gráfica de la siguiente forma:



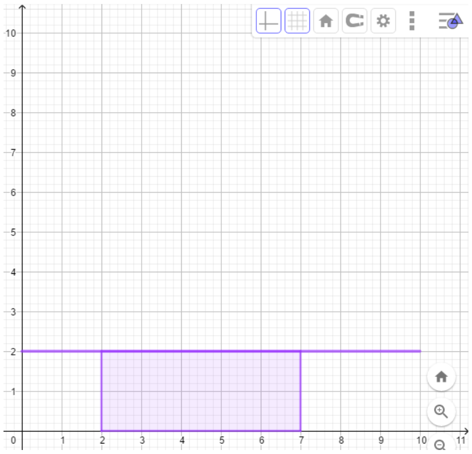
Donde el eje x corresponde al tiempo y el eje y a la velocidad.

Si deseamos conocer la distancia que recorrió en total, basta con multiplicar 2(10) con lo que obtenemos una distancia total de 20 metros.

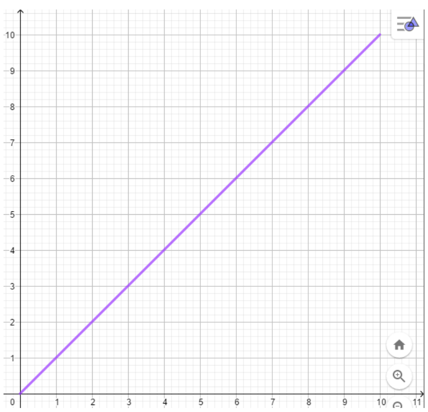


Si deseamos saber cuánta distancia recorrió entre los dos y los siete segundos, vemos aquí que el tiempo es de 5 segundos, multiplicado por la velocidad da un total de 10 metros.

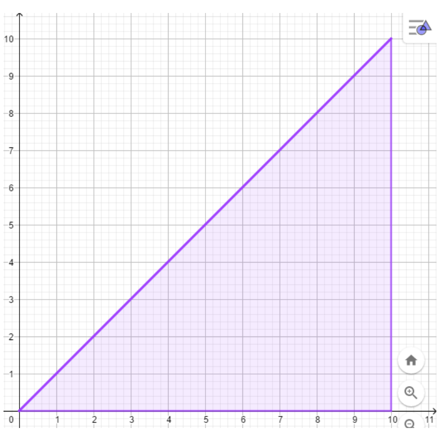
Veamos la gráfica y el área entre la recta y el eje x, podemos observar que el área entre estas corresponde a la distancia que se ha recorrido.



Ahora bien, si en lugar de tener a una velocidad constante, se moviera a una velocidad variable, por ejemplo $v(t) = t$, vemos la gráfica:



Si queremos calcular la distancia que recorrió durante 10 segundos, tendríamos algo ya no tan sencillo como en el primer ejemplo, pero podemos calcular el área bajo la curva y se corresponderá con la distancia, calculamos el área del triángulo: $\frac{(10)(10)}{2} = 50$, vemos que, al correr diez segundos, con esta velocidad, habría recorrido 50 metros.



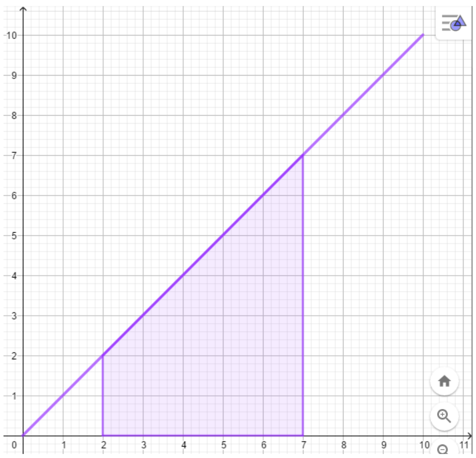
¿Y entre los 2 y los 7 segundos?

Para calcular el área podemos ver la figura como un trapecio $\frac{(2+7)5}{2}=\frac{9(5)}{2}=\frac{45}{2}$

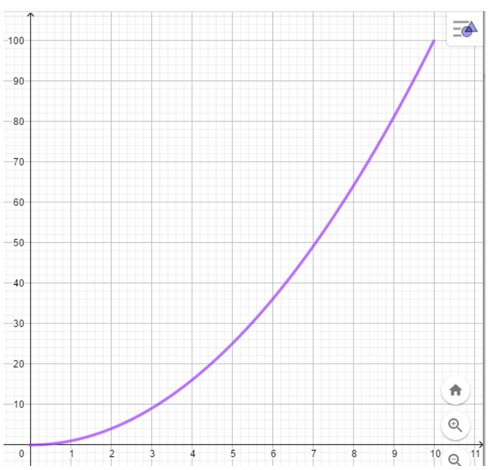
O bien la diferencia entre dos triángulos:

$$\frac{7(7)}{2}-\frac{2(2)}{2}=\frac{49}{2}-\frac{4}{2}=\frac{45}{2}$$

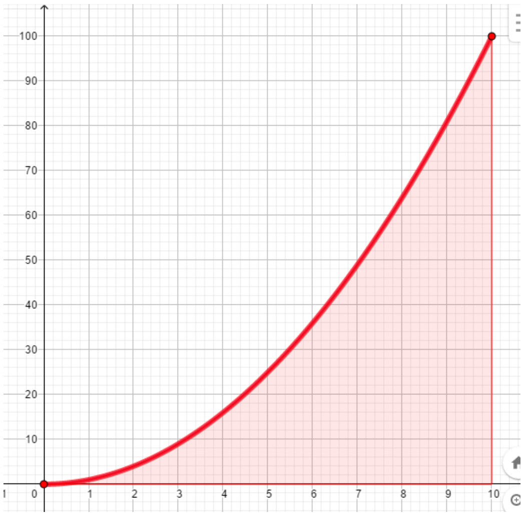
Vemos la gráfica:



Ahora bien, si la función de la velocidad fuera $v(t)=t^2$, la gráfica sale mucho del espacio. Por lo que haré un cambio en la escala, en lugar de 1:1, 1:10:

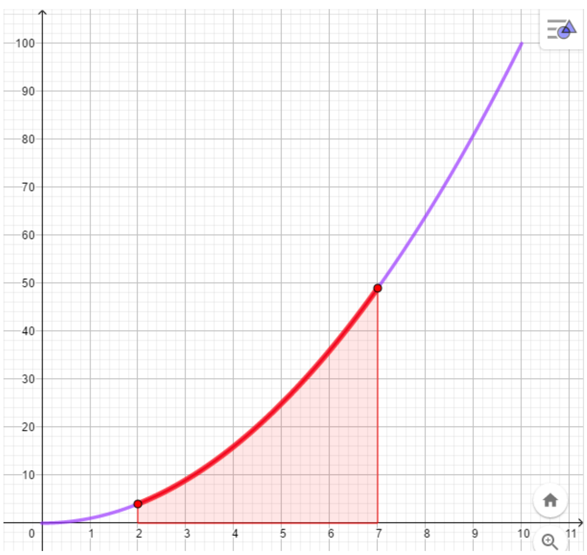


Si deseo calcular la distancia recorrida durante los diez segundos



¿Qué área tengo bajo la curva?

¿O bien de dos a siete segundos?



4.1.2 Aproximación del área bajo la curva, rectángulos y trapecios

Uso de GeoGebra.

4.1.3 Tablas de integración

Uso de GeoGebra:

Número de particiones	Rectángulos superiores	Rectángulos inferiores	Rectángulos medios	Trapecios
4	468.75	218.75	328.13	343.75
8	398.44	273.44	332.03	335.94
16	365.23	302.73	333.01	333.98

32	349.12	317.87	333.25	333.5
64	341.19	325.56	333.31	333.37
128	337.25	329.44	333.33	333.34

4.1.4 Reconocimiento de patrones

Tarea 9

a) Aproxima con ayuda de GeoGebra el área bajo la curva $y = x^3$ en los siguientes intervalos:

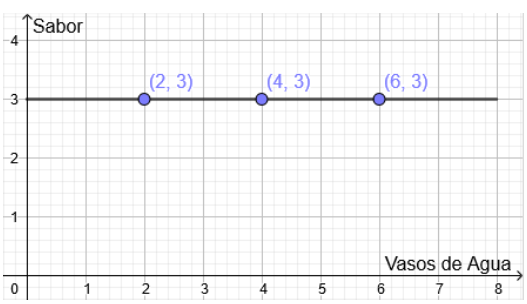
Intervalo $[0, b]$	Área
$[0,1]$	
$[0,2]$	
$[0,3]$	
$[0,4]$	
$[0,5]$	

Una vez realizado esto, trata de reconocer el patrón e indica cuál es la fórmula para calcular el área en el intervalo $[0, b]$

4.1.5 Uso de medidas de acumulación (aplicaciones en cinemática, llenado de recipientes, etc.)

b) Lee y contesta lo que se te pide:

Si la gráfica siguiente representa el sabor:



Donde el sabor se puede interpretar como:

$$sabor = \frac{cantidad\ de\ unidades\ concentrado}{cantidad\ de\ vasos\ de\ agua}$$

Para tener una notación más sencilla tomaremos:

$$sabor = s$$

$$cantidad\ de\ unidades\ concentrado = u$$

$$cantidad\ de\ vasos\ de\ agua = v$$

Con lo que tenemos:

$$s = \frac{u}{v}$$

Para distintas cantidades de agua en un vitrolero, contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál sería la expresión analítica de la función que está representada en la gráfica?

2. En términos de la situación planteada, ¿qué interpretación le darían al producto entre sabor y cantidad de vasos de agua?

3. Si consideramos el área bajo la gráfica de la función para diferentes intervalos, ¿cómo la interpretarías respecto a la situación de los vitroleros de la mezcla?

Selecciona todas las opciones que consideres correctas.

4. Bosqueja en una gráfica el valor del área bajo la gráfica de la función anterior, para cada cantidad de vasos de agua.

5. ¿El comportamiento de la gráfica que acabas de hacer, corresponde a un comportamiento lineal o no lineal? ¿El comportamiento es proporcional o no proporcional?