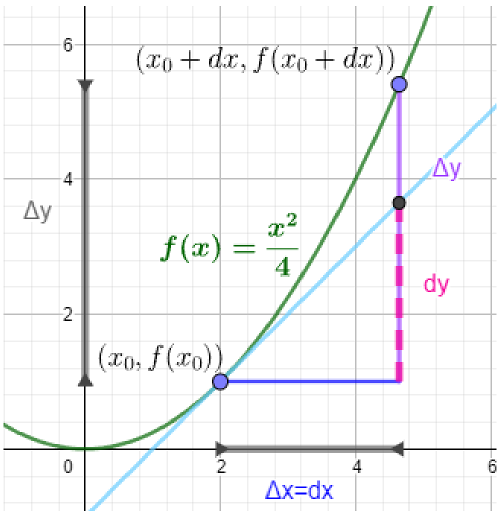
1. Resolución de problemas de aproximaciones y estimación de errores, utilizando el diferencial de una función

1.1 Concepto de Diferencial

1.1.1 Interpretación geométrica

Para ver la interpretación geométrica de un/una diferencial, utilizaré un archivo de GeoGebra, lo subiré a la plataforma, el nombre es Diferencial.ggb



La recta que se ha dibujado, la tangente a la curva en el punto x_0, se conoce como recta de linealización, de la recta conocemos un punto por donde pasa y conocemos la pendiente, entonces podemos calcular fácilmente la ecuación de la recta.

La recta pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y tiene una pendiente de $f'(x_0)$. Utilizando la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Entonces tenemos la recta de linealización:

$$L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Como expliqué en la clase, el diferencial dy es el incremento que hay en la recta de linealización, cuando se toma un incremento dx a partir de un punto dado.

Para calcular dy:

$$dy = L(x_0 + dx) - f(x_0)$$

Tenemos que $L(x_0 + dx)$ es:

$$L(x_0 + dx) = f'(x_0)(x_0 + \mathbf{dx} - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)dx + f(x_0)$$

Entonces:

$$dy = f'(x_0)dx + f(x_0) - f(x_0)$$

$$dy = f'(x_0)dx$$

Ejemplo:

Determinar el diferencial para la función $f(x) = \frac{x^2}{4}$, con $x_0 = 1$ y $dx = 2$

Primero derivamos la función

$$f'(x) = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$$

Luego evaluamos, para obtener $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2}$$

Ahora podemos calcular el diferencial:

$$dy = f'(x_0)dx$$

$$dy = \frac{1}{2}(2)$$

$$dy = 1$$

1.1.2 Interpretación analítica

Sea $y = f(x)$ una función derivable, tenemos que el diferencial dx es una variable independiente, el diferencial dy se define como:

$$dy = f'(x)dx$$

1.1.3 Diferenciales de funciones algebraicas y trascendentes

No importa si se tiene una función algebraica o una trascendente, como saben derivar, ahora ya saben calcular el diferencial.

Ejemplo:

Calcular el diferencial dy para la función $y = x^4 + 1$

Sabemos que la derivada es:

$$y' = 4x^3$$

Entonces el diferencial será:

$$dy = 4x^3dx$$

Ejemplo:

Calcular el diferencial dy para la función $y = e^{2x}$

Conocemos la derivada:

$$y' = 2e^{2x}$$

Entonces el diferencial será:

$$dy = 2e^{2x}dx$$

Trabajo en Clase 1

a) Calcula el valor numérico del diferencial dy con los valores dados:

1. $y = e^{2x}$, $x_0 = 0$, $dx = 3$

2. $y = x^5 + 2x + 1$, $x_0 = 1$, $dx = 2$

b) Calcula el diferencial dy de las funciones dadas:

1. $y = \ln(\sin x)$

2. $y = \dfrac{5}{(x+1)^4}$

3. $y = \sqrt{x+1}$

4. $\sin(y+1) = x^3 - y$

5. $y = e^{x^3} + x^3$

Tarea 1

a) Calcula el diferencial dy de las funciones dadas:

1. $y = \sin(x^2 + 1)$

2. $y = \dfrac{2}{x+3}$

3. $y = \sqrt[3]{(x^3 - 7)^2}$

4. $3xy - y^2 + 2x = 7$

5. $y = e^{\cos(x^2+x)}$

b) Calcula el valor numérico del diferencial:

1. $y = x^2 + 5x - 1$, $x_0 = 2$, $dx = 0.5$

2. $y = x^5 - 100$, $x_0 = 1$, $dx = 2$