5.2 Aplicación Inmediata

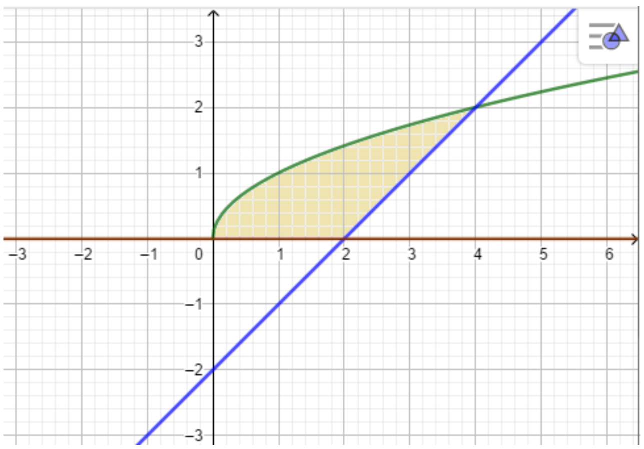
5.2.1 Áreas

Las integrales definidas se pueden utilizar para calcular áreas, esto ya lo sabían, se enteraron de esto cuando vimos sumas de Riemann, pero no lo habíamos ejercitado como aplicación, veamos un par de ejemplos.

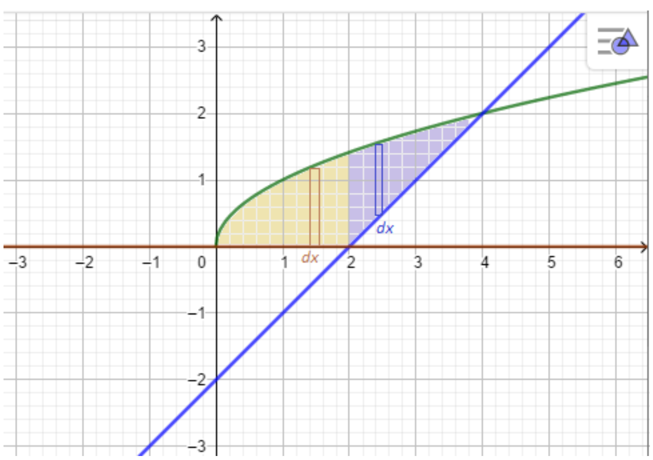
Determinemos el área de la región encerrada entre las funciones:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x - 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Lo primero que deben hacer es graficar y determinar cuál es la región de la cual debemos calcular el área.



Recordando las sumas de Riemann, dibujemos un rectángulo representativo, para calcular su área, como podrán observar, se deben dibujar dos ya que, aunque en los dos rectángulos la base es dx, la altura cambia en cada una de las partes, por lo que hay que calcular dos áreas por separado y después sumar ambas áreas para obtener el área que estamos buscando.



Para el área que marqué con color café, llamémosle A_1, la altura es $\sqrt{x}$ por lo que, si queremos calcular el área, multiplicamos la base por la altura y hacemos la suma de esas áreas desde $x = 0$ hasta $x = 2$, lo que es lo mismo:

$$A_1 = \int_0^2 \sqrt{x}dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

En el caso del área A_1 era fácil ver que debía ser de cero a dos, pero si lo deseáramos calcular de forma analítica, tendríamos que haber resuelto, para el primer punto el sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Con lo que tendríamos que $x = 0$ es el límite inferior de la integral, mientras que para el segundo punto, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Con lo que tendríamos que $x = 2$ es el límite superior de la integral para calcular el área.

Ahora, para calcular el área morada, llamémosle A_2, tenemos que la altura es $\sqrt{x} - (x - 2)$

O bien $\sqrt{x} - x + 2$, esta área va desde $x = 2$ hasta qué punto, auxiliados de que la gráfica está hecha en GeoGebra, podríamos fácilmente ver el punto de intersección de la curva y la recta, pero como no siempre se tiene una gráfica tan precisa, mejor calcularlo, para ello, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Resolvemos:

$$x - 2 = \sqrt{x}$$

$$(x - 2)^2 = x$$

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

Luego

$$x = 4$$

$$x = 1$$

Pero cuál de los dos debemos utilizar, creo que, en este caso la lógica nos dice que, si el otro punto fue dos y este es posterior, debe ser el cuatro, además de esto, el uno es una raíz falsa de la ecuación original, que se generó al momento de elevar a cuadrado para quitar la raíz, esto lo viste en los primeros semestres. Pero bueno, con esto tenemos que $x = 4$ es el límite superior de la integral para calcular el área.

$$A_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)dx = \int_2^4 (x^{1/2} - x + 2)dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_2^4 =$$

$$A_2 = \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{(4)^2}{2} + 2(4)\right] - \left[\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{(2)^2}{2} + 2(2)\right]$$

$$A_2 = \frac{16}{3} - 8 + 8 - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 2 - 4 = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$A_2 = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

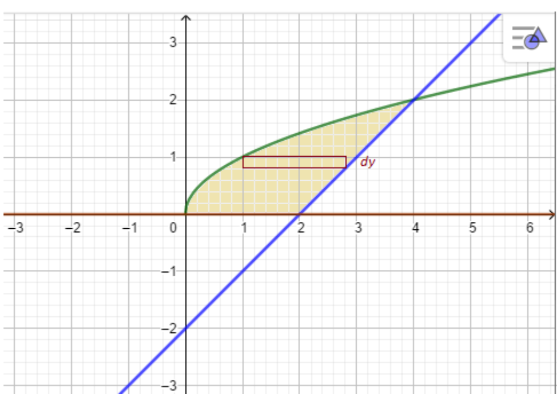
Ahora bien, para calcular el área total solicitada, debemos sumar A_1 con A_2

$$A_1 + A_2 = \left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right) + \left(\frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{10}{3}$$

Por lo que el área solicitada es de $\frac{10}{3}$

En el libro de Thomas no se agregan unidades, por lo que yo no se las solicitaré. En tal caso que las quisieras agregar, tendríamos que saber si se está midiendo centímetros, milímetros, para tener como unidades centímetros cuadrados, milímetros cuadrados, etc. En este caso que no se me den las unidades, puedo escribir unidades cuadradas $\frac{10}{3}u^2$.

Está área también se puede calcular haciendo un rectángulo representativo horizontal, en lugar de vertical.



Como podemos observar, si lo hacemos de forma horizontal, no es necesario separar en dos áreas, ya que no importa el lugar en el que se dibuje el rectángulo, siempre tendrá la misma altura, que vemos que es dy y la misma base, que corresponde a la diferencia entre la recta y la curva.

Como vamos a trabajar con dy, nuestras funciones deben estar con respecto a y.

Entonces, en lugar de trabajar con:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x - 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Lo haremos con:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Para saber de dónde a dónde va nuestra suma, sabemos que el límite inferior es $y = 0$, ese lo tenemos dado, para el límite superior, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y + 2 \end{cases}$$

Sistema que resolvemos con el método de igualación:

$$y^2 = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0$$

Luego

$$y = 2$$

$$y = -1$$

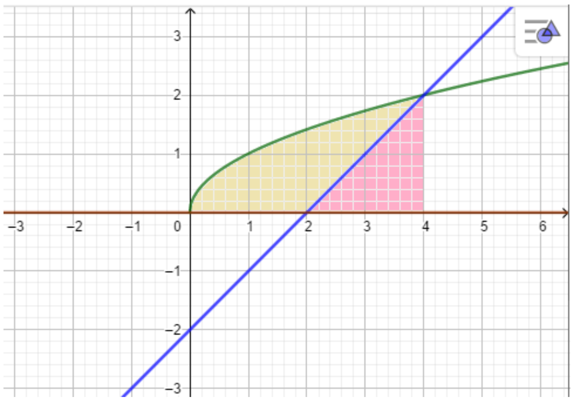
En este caso obtenemos dos soluciones para el sistema, la que utilizaremos será $y = 2$, el valor de $y = -1$ (y el de $x = 1$ que obtuvimos anteriormente) se obtienen del cruce entre la recta y la parábola $x = y^2$, recordemos que $y = \sqrt{x}$ es la mitad de tal parábola.

Bueno, entonces tenemos los límites de cero a dos, la altura dy y la base $y + 2 - y^2$, entonces el área será:

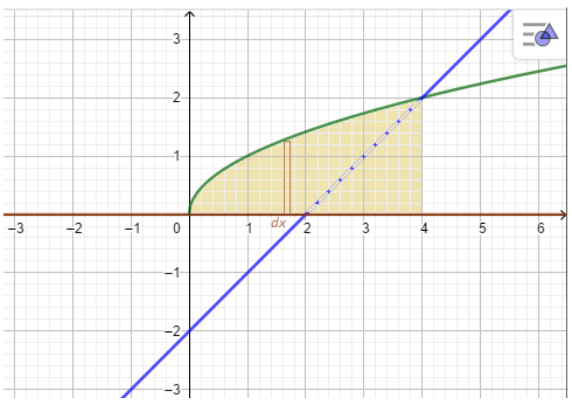
$$A = \int_0^2 (y + 2 - y^2)dy = \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{2^2}{2} + 2(2) - \frac{2^3}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

Por lo que el área solicitada es de $\frac{10}{3}$, mismo valor obtenido anteriormente, pero con un método diferente.

Para calcular áreas, podemos utilizar distintas opciones, descomponer en diferentes figuras y suma o restar según sea necesario, por ejemplo, si para la misma área de los ejemplos anteriores, calculamos el área bajo la media parábola hasta $x = 4$ y le restamos el área del triángulo que queda en la parte inferior, obtendremos el valor del área solicitada



Calculemos entonces el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$



Con un rectángulo de base dx y altura $\sqrt{x}$, podemos calcular el área bajo está curva, llamémosle A_c:

$$A_c = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{2}{3}(4)^{3/2} = \frac{16}{3}$$

Ahora calculamos el área del triángulo, para esta no es necesario hacer una integral, ya que tenemos un triángulo con base dos y altura dos, por lo que el área del triángulo, llamémosleA_t

$$A_t = \frac{(2)(2)}{2} = 2$$

El área que estamos buscando es la resta de estas dos:

$$A = A_c - A_t = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

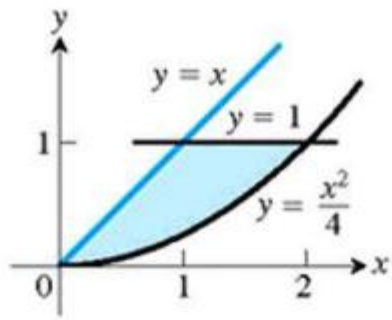
Trabajo en Clase 11

Determina el área indicada, recuerda realizar el bosquejo de la gráfica en cada uno de los ejercicios.

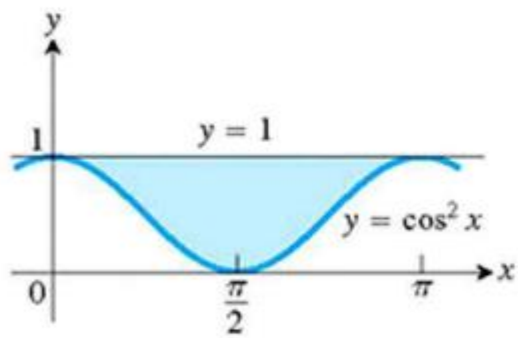
1. Determina el área de la región encerrada entre la función $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 2 - x$, en el intervalo $-2 \le x \le 3$

2. Determina el área encerrada entre las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$

3. Determina la región del área sombreada:



4. Determina el área de la región sombreada:



5. Determina el área de la región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la recta $x = 4y$, arriba a la izquierda por la curva $y = \sqrt{x} + 1$ y arriba a la derecha por $y = 2/\sqrt{x}$

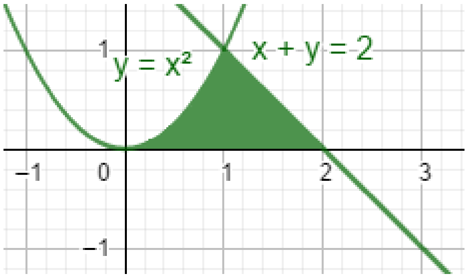
Tarea 11

Determina el área indicada, recuerda realizar el bosquejo de la gráfica en cada uno de los ejercicios.

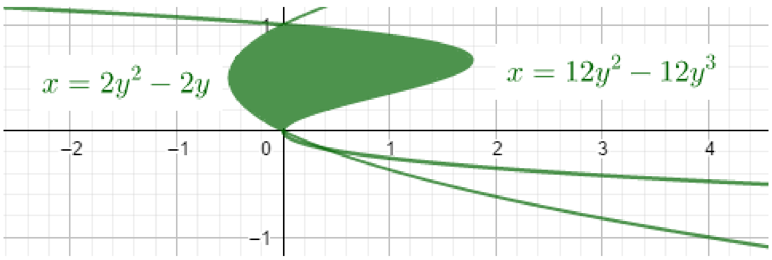
1. Determina el área de la región encerrada entre la función $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje x, en el intervalo $-1 \le x \le 2$

2. Determina el área encerrada entre las funciones $y = x^4$ y $y = 8x$

3. Determina la región del área sombreada:



4. Determina el área de la región sombreada:



5. Determina el área de la región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por la recta $x = 0$, abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, arriba a la izquierda por la curva $y = \sqrt{x} + 1$ y arriba a la derecha por $x = 3 - y$