1.2 Aplicaciones

1.2.1 Aproximaciones

Si deseo calcular $f(x_1)$, podemos utilizar la recta de linealización:

$$f(x_1) \approx L(x_1) = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$$

Recordemos que $x_1 - x_0 = dx$, entonces tenemos:

$$f(x_1) \approx f'(x_0)dx + f(x_0)$$

Otra forma de verlo es que:

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta y$$

Para valores cercanos al punto, el diferencial es una buena aproximación del incremento, esto es $\Delta y \approx dy$, entonces:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + dy$$

Sabemos que $dy = f'(x_0)dx$, luego:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$$

Ejemplo:

Calcular en valor de $e^{0.1}$

Primero definimos la función a utilizar:

$$f(x) = e^x$$

Elegimos el valor de x_0, este debe ser un valor entero fácil de evaluar en la función original y lo más cercano posible.

$$x_0 = 0$$

Calculamos el valor de $dx = x_1 - x_0$ (la diferencia entre el valor que queremos calcular y el valor que utilizaremos para aproximar, la diferencia puede ser negativa)

$$dx = 0.1 - 0 = 0.1$$

Ahora derivamos la función y luego evaluamos tanto la función como la derivada en el punto x_0 elegido.

$f(x) = e^x$	$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(x_0) = f'(0) = e^0 = 1$

Luego sustituimos en la fórmula para la aproximación:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$$

$$f(0.1) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$$

$$e^{0.1} \approx 1 + 1(0.1) = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$e^{0.1} \approx 1.1$$

Si comparamos con el valor que se obtiene en la calculadora, vemos que es una buena aproximación.

$$e^{0.1} = 1.105$$

Ejemplo:

Calcular $\sqrt[3]{70}$

Definimos la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Se elije x_0

$$x_0 = 64$$

Se calcula dx

$$dx = x_1 - x_0 = 70 - 64 = 6$$

Se deriva la función y se evalúa tanto la función como la derivada

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$	$f(x_0) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$
$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$	$f'(x_0) = f'(64) = \frac{1}{3(64)^{2/3}} = \frac{1}{3(16)} = \frac{1}{48}$

Sustituimos los valores:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$$

$$\sqrt[3]{70} \approx 4 + \frac{1}{48}(6) = 4 + \frac{6}{48} = 4 + \frac{1}{8} = 4 + 0.125$$

$$\sqrt[3]{70} \approx 4.125$$

De nueva cuenta, comparamos con el valor que se obtiene en la calculadora y vemos que es una buena aproximación.

$$\sqrt[3]{70} = 4.121$$

Trabajo en Clase 2

Aproxima el valor solicitado utilizando diferenciales, utiliza mínimo cuatro decimales.

1. $\arctan 1.1$
2. $\arctan 0.6$
3. $\sqrt[4]{80}$
4. $\sqrt[4]{82}$

5. $\sqrt[3]{8.6}$

Tarea 2

Aproxima el valor solicitado utilizando diferenciales, utiliza mínimo cuatro decimales.

1. $\ln 1.1$

2. $\ln 0.001$

3. $\sqrt[3]{30}$

4. $\sqrt[4]{17}$

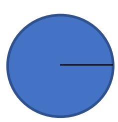
5. $\sqrt[4]{15}$

1.2.2 Estimación de errores

En ocasiones los instrumentos de medición no son lo precisos que quisiéramos y si calculamos algo a partir de dicha medida, esto genera un error conocido como error de propagación, este error tiene un valor de Δy, por lo que, para aproximarlo, se puede utilizar dy. En ocasiones en física o en distintas áreas de Ingeniería se utilizan indistintamente, pero recuerda que uno es aproximación del otro.

Ejemplo:

Se midió el radio de una circunferencia, obteniendo un valor de 10 centímetros, al realizar la medición se pudo observar que hay un error aproximado de máximo 1 milímetro (0.1 centímetros) por encima del valor de 10. Aproxima el error que se genera al calcular el área.



El área se calcula con la fórmula:

$$A = \pi r^2$$

Para estimar el error que se puede generar, calculamos el diferencial

$$dA = 2\pi r\, dr$$

Evaluamos:

$$dA = 2(\pi)(10)(0.1) = 2\pi$$

Entonces tenemos que, al calcular el área, tendremos un error de aproximadamente 6.2831 cm^2