**5. Tratamiento Analítico de las integrales definidas y uso intuitivo de los procesos infinitos y las situaciones límite**

**5.1 Integral Definida**

**5.1.1 Sumas de Riemann**

Una suma de Riemann es una suma de la forma:

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Antes de empezar con un ejemplo, voy a hacer una anotación sobre la notación sigma para sumatorias. Veamos primero algunos ejemplos de sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{6} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

$$\sum_{k=1}^{11} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11 = 66$$

$$\sum_{k=1}^{5} (k+1) = 2+3+4+5+6 = 20$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 1+4+9+16+25 = 55$$

Tenemos algunas fórmulas para sumatorias que utilizaremos más adelante:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Podemos ver cómo funcionan para calcular dos de las sumas anteriores, pero sin necesidad de desarrollar la sumatoria.

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5(6)(11)}{6} = 5(11) = 55$$

$$\sum_{k=1}^{11} k = \frac{11(12)}{2} = 66$$

Las sumatorias tienen las propiedades de linealidad, podemos separar sumas y sacar constantes, igual que en derivadas e integrales.

Regresando a las sumas de Riemann, hagamos un ejemplo con la siguiente función:

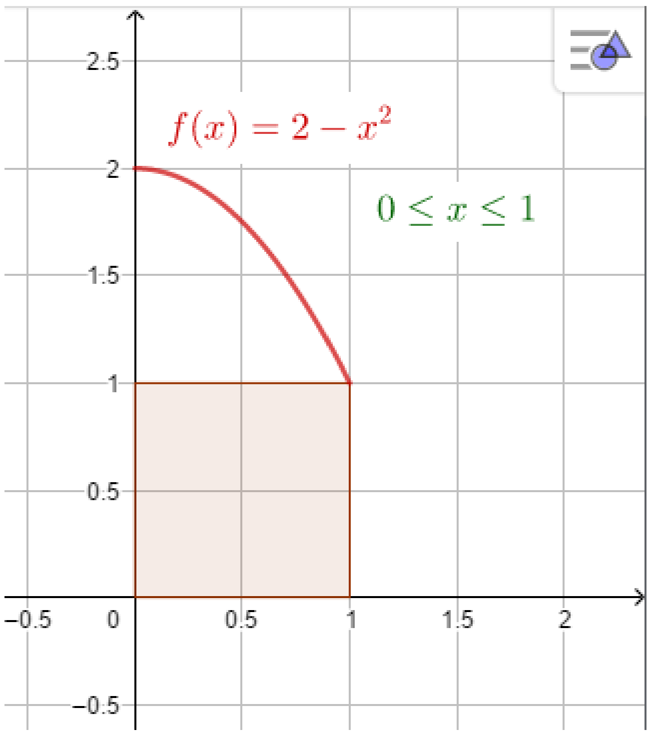
$$f(x) = 2 - x^2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Empecemos con $S_1$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{1} f(c_k)\Delta x_k = f(c_1)\Delta x_1 = f(1)1 = 2 - 1^2 = 1$$

Esto equivale al área del siguiente rectángulo:

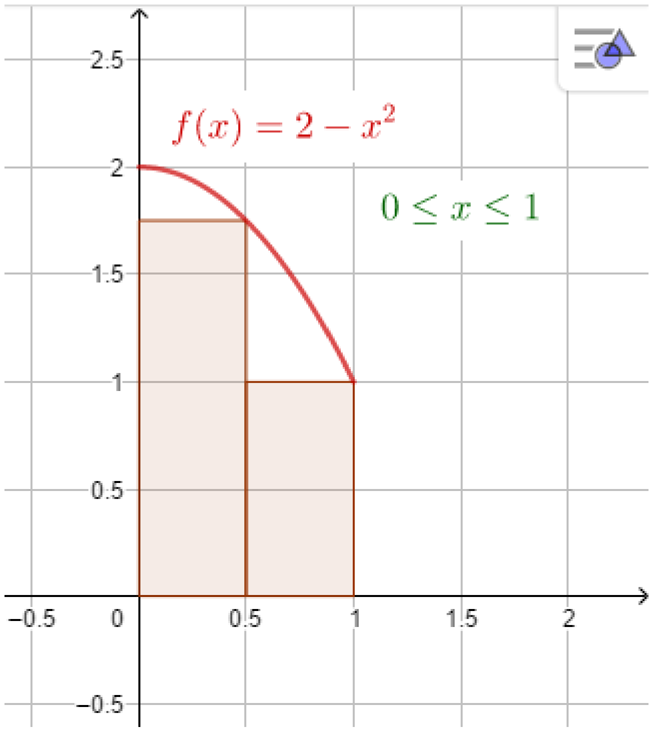



Ahora con $S_2$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} f(c_k)\Delta x_k = f(0.5)0.5 + f(1)0.5 = (2 - 0.5^2)0.5 + (2 - 1^2)0.5 = (1.75)0.5 + (1)0.5$$

$$S_2 = 0.875 + 0.5 = 1.375$$

Este valor equivale al área de los dos rectángulos:




Calculemos $S_4$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + f(c_4)\Delta x_4$$

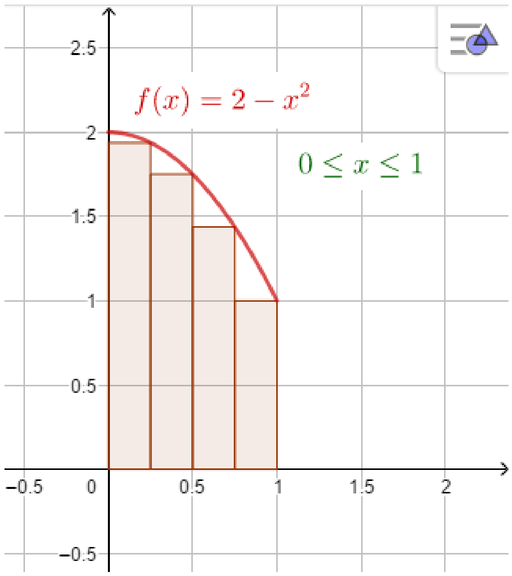
$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k = f(0.25)0.25 + f(0.5)0.25 + f(0.75)0.25 + f(1)0.25$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k = (2 - 0.25^2)0.25 + (1.75)0.25 + (2 - 0.75^2)0.25 + (1)0.25$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k = (1.9375)0.25 + (1.75)0.25 + (1.4375)0.25 + (1)0.25$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k = 0.484375 + 0.4375 + 0.359375 + 0.25 = 1.53125$$

Esto equivale al área de los cuatro rectángulos:

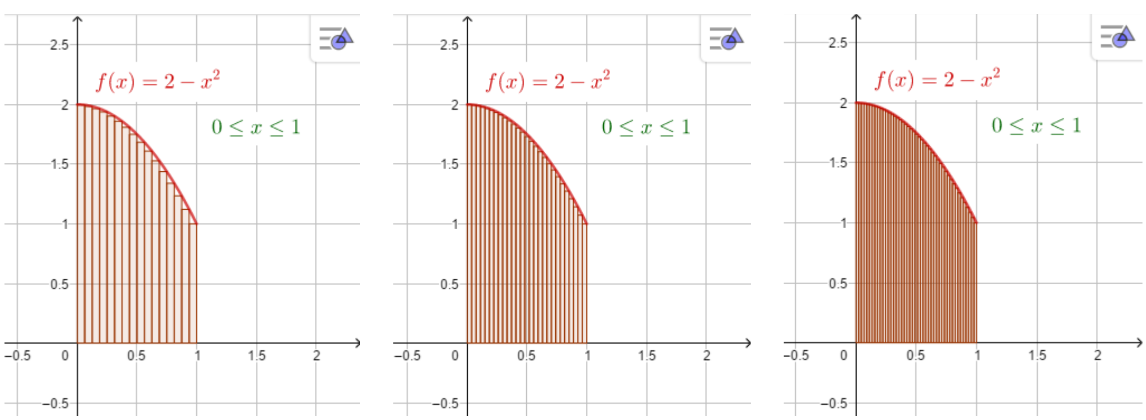



**5.1.2 Interpretación Geométrica**

La integral definida de la función $f(x)$ de $a$ a $b$ es el límite de las sumas de Riemann, cuando $n$ tiende a infinito:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Vemos que entre más rectángulos tengamos, la suma de las áreas se acerca más al área de la región entre la curva y el eje $x$, cuando calculemos el límite, tendremos el área exacta.




Calculemos la integral del ejemplo inicial:

$$\int_0^1 (2 - x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$c_k = a + k\Delta x_k = 0 + k\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}$$

$$\int_0^1 (2 - x^2)\, dx =$$

$$\int_0^1 (2 - x^2)\, dx =$$

$$\int_0^1 (2 - x^2)\, dx =$$

$$\int_0^1 (2 - x^2)\, dx =$$

$$\int_0^1 (2 - x^2)\, dx =$$

$$\int_0^1 (2 - x^2)\, dx =$$

Tenemos que la integral definida es:

$$\int_0^1 (2 - x^2)\, dx =$$

Esto implica que el área bajo la curva es de

**5.1.3 Teorema Fundamental del Cálculo**

El Teorema consta de dos partes, la primera tiene que ver con la derivada de una integral, la segunda es la que nos interesa en este momento, que se utiliza para integrales definidas.

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y sea $F(x)$ cualquier antiderivada de $f(x)$ en $[a, b]$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 (2 - x^2)\, dx = (\quad)\Big|_0^1 =$$

**5.1.4 Interpretación Analítica**

Tenemos entonces que la integra definida la podemos calcular a partir de evaluar la integral indefinida, calculemos un ejemplo

$$\int_{0}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{0}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) =$$

Este valor salió cero, ¿esto significa que el área bajo la curva es de cero? ¿Hay algún error? No hay ningún error y el área bajo la curva no es cero, la integral es equivalente al área si la función es mayor o igual a cero, si la función está por debajo del eje y sólo integramos, obtendremos un valor negativo, si la función está es en algunas partes positiva y en otras es negativa, entonces obtendremos la diferencia de las áreas y la integral definida sigue estando bien, más adelante veremos cómo calcular áreas cuando tenemos estas variantes.

**5.1.5 Propiedades**

Sea:

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Entonces:

$$\int_{b}^{a} f(x) \, dx = F(a) - F(b) = -[-F(a) + F(b)] = -[F(b) - F(a)] = -\int_{a}^{b} f(x) \, dx$$

$$\int_{a}^{a} f(x) \, dx = F(a) - F(a) = 0$$

Sea $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_{a}^{c} f(x) \, dx + \int_{c}^{b} f(x) \, dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x) \, dx$$

Tenemos una propiedad importante para cuando tenemos una integral que se debe resolver por sustitución:

Si $g'$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f$ es continua en el rango de $g(x) = u$, entonces:

$$\int_{a}^{b} f(g(x)) \, g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du$$

Veamos esto en un ejemplo:

$$\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx =$$

$u = x^3 + 1$

$du = 3x^2 dx$

También podemos omitir provisionalmente los límites, luego regresar a la función original y evaluar, obtendremos el mismo resultado.

**Trabajo en Clase 10**

Integra:

1. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \, dx$

2. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin^5 x \cos^3 x \, dx$

3. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

4. $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^4 - 5x^2 + 3}{x^5 - x^3} dx$

5. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

**Trabajo en Clase 10**

Integra:

1. $\displaystyle\int_1^2 (6x^2 + 6x - 6) \, dx$

2. $\displaystyle\int_2^1 (6x^2 + 6x - 6) \, dx$

3. $\displaystyle\int_{-11}^{-9} (10 - x)(10 + x)^3 dx$

4. $\displaystyle\int_3^3 \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} dx$

5. $\int_{0}^{\pi/4} \sin x \cos^3 x \, dx$

6. $\int_{0}^{\ln 2} x^2 e^x \, dx$

7. $\int_{-1}^{1} x^2 \, dx$

8. $\int_{-1}^{1} x^3 \, dx$

9. $\int_{0}^{2} \frac{3}{x^2 - 9} \, dx$

10. $\int_{-1}^{1} |x| \, dx$