6.1.2 Problemas con Ecuaciones diferenciales

Ahora que saben resolver ecuaciones diferenciales, fácilmente podrán resolver problemas que se resuelven con el uso de estas. Todo debe iniciar con la "traducción" del lenguaje cotidiano propio del problema a un lenguaje matemático reflejado en una ecuación.

Veamos un ejemplo:

Supongamos que se tienen 10,000 casos de cierta enfermedad y se está haciendo una campaña para erradicarla, con la campaña se espera que, en un año, se logre reducir en un 20% el número de casos, para este modelo se parte del supuesto de que la tasa de cambio del número de enfermos con respecto al tiempo es proporcional al número de enfermos. ¿Cuántos casos se espera tener en 5 años? ¿En cuántos años, aproximadamente, el número de enfermos será de 1,000?

Lo primero es plantear la ecuación, veamos, lo primero que me dice es la tasa de cambio del número de enfermos con respecto al tiempo, bueno, sea y el número de enfermos y $t$el tiempo, entonces la tasa de cambio de uno respecto al otro se escribe como $\frac{dy}{dt}$, luego dice que esta es proporcional al número de enfermos que se traduce a un igual a y, pero multiplicado por una constante de proporcionalidad, por lo que tenemos:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Tenemos además dos condiciones iniciales, la primera es el número inicial de enfermos, esto es $y(0) = 10{,}000$, luego la segunda con los enfermos que se tendrán en un año $y(1) = 8{,}000$.

Entonces resolvemos nuestra ecuación, separamos las variables:

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

Integramos

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt$$

$$\ln y = kt + c$$

Despejamos y

$$y = e^{kt+c}$$

Simplificamos

$$y = e^{kt}e^{c} = ce^{kt}$$

Ya tenemos la función que modela el número de enfermos con respecto al tiempo:

$$y = ce^{kt}$$

Pero no está completamente definida, ya que depende de dos constantes, para determinarlas, debemos aplicar las condiciones iniciales.

Primero aplicamos la condición $y(0) = 10{,}000$

$$ce^{k(0)} = 10{,}000$$

$$c(1) = 10{,}000$$

$$c = 10{,}000$$

Ahora nuestra ecuación es:

$$y = 10{,}000e^{kt}$$

Debemos determinar el valor de la constante faltante, aplicando la segunda condición inicial $y(1) = 8{,}000$.

$$10{,}000e^{k(1)} = 8{,}000$$

Despejamos k

$$e^k = \frac{8{,}000}{10{,}000}$$

$$e^k = \frac{4}{5}$$

$$k = \ln\frac{4}{5}$$

Con lo que nuestra función quedaría como:

$$y = 10{,}000e^{t\ln\frac{4}{5}}$$

Con esto podemos contestar las dos preguntas que nos hicieron al inicio.

¿Cuántos casos se espera tener en 5 años?

Para resolver esta pregunta, cambiamos el valor de t por cinco.

$$y(5) = 10{,}000e^{(5)\left(\ln\frac{4}{5}\right)} = 10{,}000e^{5\ln\frac{4}{5}} = 3{,}276.8$$

No podemos tener 0.8 pacientes enfermos, ya que son personas y ese es un valor discreto (sabemos que estamos utilizando una función continua para valores discretos), por lo que, en cinco años, se tendrán 3,277 pacientes enfermos. No porque se redondee, es porque los casos están disminuyendo.

¿En cuántos años, aproximadamente, el número de enfermos será de 1,000?

Para resolver esta pregunta, tenemos que sustituir el número de enfermos por 1,000 y despejar t

$$10{,}000e^{t\ln\frac{4}{5}} = 1{,}000$$

$$e^{t\ln\frac{4}{5}} = \frac{1,000}{10,000}$$

$$e^{t\ln\frac{4}{5}} = \frac{1}{10}$$

$$t\ln\frac{4}{5} = \ln\frac{1}{10}$$

$$t = \frac{\ln\frac{1}{10}}{\ln\frac{4}{5}}$$

$$t = \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} = 10.31$$

Por lo que aproximadamente en 10 años el número de casos se reducirá a 1,000.

Existe un problema que es un poco distinto a lo anterior, pero no creo que tengan problema para entenderlo, se llama trayectorias ortogonales, este tipo de problemas consiste en dada una familia de curvas, encontrar otra familia de curvas tal que estas sean ortogonales a las primeras.

Imagen del libro de Thomas:

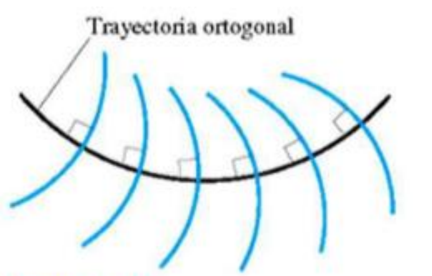

FIGURA 9.11 Una trayectoria ortogonal interseca a la familia de curvas en ángulo recto, esto es, ortogonalmente.

¿Cómo van a medir el ángulo recto entre dos curvas? Para medir el ángulo lo que se utiliza son las rectas tangentes a las curvas, que pasan por el punto de intersección. Bueno, esto es algo nuevo, pero utiliza puros conceptos que ya conocen.

Ejemplo:

Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2 + y^2 = r^2$

Para obtener las pendientes de las tangentes, lo que hacemos es derivar:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejamos $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Ahora bien, está es la pendiente de la primera familia de curvas, la segunda familia, tendrá pendientes perpendiculares a esta, recuerdas en Matemáticas III, la relación entre dos pendientes perpendiculares $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, recordando esto, tenemos que las pendientes de la segunda familia de curvas serán:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Resolvemos está ecuación para encontrar la segunda familia:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$$y = e^{\ln|x|+c}$$

$$y = e^{\ln|x|}e^{c}$$

$$y = ce^{\ln|x|}$$

$$y = cx$$

Esta segunda es la familia que es ortogonal a la primera, agregaré la gráfica que viene en el libro de Thomas:

Imagen del libro de Thomas:

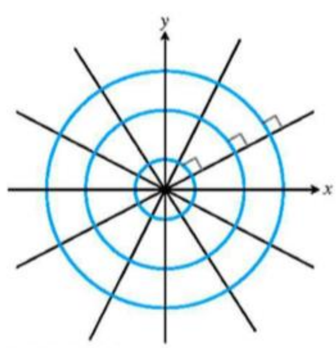

FIGURA 9.12 Cada recta que pasa por el origen es ortogonal a la familia de circunferencias con centro en el origen.

*Cuando resuelven problemas de trayectorias ortogonales, no es necesaria la gráfica.

Notas Matemáticas V
Lourdes Gándara Cantú

Trabajo en clase 13

1. Determina las trayectorias ortogonales de $kx^2 + y^2 = 1$

2. Demuestre que las curvas $2x^2 + 3y^2 = 5$ y $y^2 = x^3$ son ortogonales.

3. Suponga que se tienen 10,000 casos de cierta enfermedad y se está haciendo una campaña para erradicarla, con la campaña se espera que, en un año, se logre reducir en un 25% el número de casos, para este modelo se parte del supuesto de que la tasa de cambio del número de enfermos con respecto al tiempo es proporcional al número de enfermos. ¿En cuántos años, aproximadamente, el número de enfermos será de 1,000?

4. Inversión de azúcar. El procesamiento de azúcar sin refinar incluye un paso denominado "inversión", que modifica la estructura molecular del azúcar. Una vez que el proceso inicia, la tasa de cambio de la cantidad de azúcar sin refinar es proporcional a la cantidad de azúcar que queda sin refinar. Si durante las primeras diez horas, 1,000 kg de azúcar sin refinar se reducen a 800 kg, ¿qué cantidad de azúcar sin refinar quedará después de otras 14 horas?

5. En ocasiones el decaimiento de elementos radioactivos puede utilizarse para datar hechos del pasado de la Tierra. En un organismo vivo, la razón de carbono radiactivo, carbono 14, a carbono ordinario permanece constante durante la vida del organismo, que es aproximadamente igual a la razón del entorno del organismo en su época. Sin embargo, al morir el organismo ya no ingiere carbono 14, por lo que la proporción de carbono 14 en los restos del organismo disminuye conforme el carbono 14 decae.

Para el fechado con carbono 14, los científicos parten de que la tasa de cambio del número de núcleos con respecto al tiempo es proporcional al número de núcleos presentes, además emplean la cifra de 5,700 años para la vida media. Determina la edad de una muestra en la que el 10% del núcleo radiactivo original se ha desintegrado.

Nota: La vida media de un elemento radiactivo es el tiempo que se requiere para que la mitad de los núcleos en una muestra se desintegren. Es un hecho interesante que la vida media es constante y no depende del número de núcleos radiactivos iniciales en la muestra, sino solo de la sustancia radiactiva.

Tarea 13

Resuelve los problemas.

1. Determina las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = e^{kx}$

2. La ley de enfriamiento de Newton dice que si H es la temperatura del objeto en el instante t, y H_s es la temperatura constante del ambiente, entonces la tasa de cambio de la temperatura del objeto con respecto al tiempo es proporcional a la diferencia de la temperatura del objeto y la temperatura constante del ambiente. Esto se puede traducir en la ecuación diferencial:

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_s)$$

Como nota, se suele utilizar $-k$ para la constante, por ser enfriamiento, pero igual se puede usar k positiva.

Se tiene un huevo cocido a una temperatura de $98°C$, este se sumerge en un recipiente que mantiene el agua a $18°C$, después de 5 minutos sumergido, el huevo tiene una temperatura de $38°C$, ¿Cuánto tiempo más pasará para que el huevo llegue a una temperatura de $20°C$?

¿Cuánto tiempo más pasará para que el huevo llegue a una temperatura de $20°C$?

3. En algunos elementos se tiene un decaimiento radiactivo, un proceso mediante el cual al destruirse algunos de sus núcleos emiten radiación. La vida media de un elemento radiactivo es el tiempo que tarda en que la mitad de los núcleos de la muestra se desintegren. Se sabe que, para un elemento de este tipo, la tasa de cambio del número de núcleos con respecto al tiempo es proporcional al número de núcleos presentes. Si la vida media del plutonio es de 24,360 años y se liberan a la atmósfera 10 gramos de plutonio ¿cuánto tiempo pasará para que decaiga el 80% de los isótopos?

4. La tasa de cambio a la que cambia la intensidad de la luz con respecto a la distancia a la superficie, es proporcional a la luminosidad que hay en la superficie. Si en el mar Caribe se tiene que la intensidad de la luz se reduce a la mitad a una profundidad de 18 pies y no se puede trabajar si se tiene una intensidad menor a un décimo del valor en superficie. ¿Hasta que profundidad se espera trabajar sin luz artificial?

5. En algunas reacciones químicas, la tasa a la cual la cantidad de una sustancia cambia con el tiempo es proporcional a la cantidad presente. Por ejemplo, para la transformación de δ-glucono lactona en ácido glucónico tenemos $\frac{dy}{dt} = -0.6y$ cuando t se mide en horas. Si cuando $t = 0$ hay 100 gramos de δ -glucono lactona ¿Cuántos gramos quedarán después de la primera hora?