2.3.4 Por Fracciones Parciales

¿Recuerdan la suma de fracciones?

Por ejemplo, sumar las fracciones algebraicas $\frac{2}{x+1}$ más $\frac{3}{x-2}$

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{2(x-2)+3(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{2x-4+3x+3}{x^2-x-2}=\frac{5x-1}{x^2-x-2}$$

Si tuviéramos que integrar

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx$$

Como sabemos que

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$$

Podemos sustituir y separar en dos integrales:

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx=\int \left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}\right)dx=\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{3}{x-2}dx$$

Haciendo un cambio de variable, podemos integrar como $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c$

Con lo que tenemos

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx=2\ln|x+1|+3\ln|x-2|+c$$

Pero este procedimiento fue realizado por que al inicio hicimos la suma. El método de fracciones parciales nos permite separar una fracción algebraica en la suma de fracciones algebraicas más sencillas, lo cual utilizaremos para poder integrar.

Método de fracciones Parciales:

Para separar una fracción algebraica propia de la forma $\frac{f(x)}{g(x)}$ mediante fracciones parciales, debemos factorizar $g(x)$ de tal forma que quede descompuesta en factores lineales o cuadráticos irreducibles (En teoría todo polinomio puede factorizarse de esta forma)

Una vez factorizado $g(x)$, por cada factor distinto, debemos asignar un término a la suma de fracciones parciales, esto según la forma del factor:

1) Si $x-r$ es un factor lineal de $g(x)$ y $(x-r)^n$ es la potencia más grande de $x-r$ que divide a $g(x)$, sumemos los términos:

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\frac{A_3}{(x-r)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(x-r)^n}$$

2) Si x^2+px+q es un factor cuadrático irreducible de $g(x)$ y $(x^2+px+q)^m$ es la potencia más grande de x^2+px+q que divide a $g(x)$, sumemos los términos:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \frac{B_3x + C_3}{(x^2 + px + q)^3} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + px + q)^m}$$

Igualamos $\frac{f(x)}{g(x)}$ a la suma de los términos asignados según la forma de los factores de $g(x)$

Luego debemos encontrar el valor de los coeficientes.

Como primer ejemplo, resolvamos la integral que teníamos al inicio de la clase:

$$\int \frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} dx$$

Escribimos la fracción y nos olvidamos momentáneamente de la integral

$$\frac{5x - 1}{x^2 - x - 2}$$

La fracción es propia, por lo que podemos aplicar el método, factorizamos el denominador

$$\frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 2)}$$

El primer factor del denominador es $x + 1$, la máxima potencia que divide a $g(x)$ es $(x + 1)^1$

Por lo que tendremos el término $\frac{A}{x+1}$, el segundo factor es $x - 2$ y al igual que el otro factor la máxima potencia es uno, por lo que se agregará el término $\frac{B}{x-2}$

Entonces tenemos:

$$\frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}$$

Para no utilizar fracciones, simplificamos la igualdad multiplicando por $(x + 1)(x - 2)$

$$\left[\frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}\right](x + 1)(x - 2)$$

Obtenemos:

$$5x - 1 = A(x - 2) + B(x + 1)$$

Desarrollamos:

$$5x - 1 = Ax - 2A + Bx + B$$

Factorizamos los términos con x y los términos independientes

$$5x - 1 = (A + B)x + (-2A + B)$$

Realizamos la comparación de coeficientes, esto es, como la expresión debe ser la misma, tenemos que el coeficiente de x de un lado, debe ser igual al del otro lado y el término independiente, también debe ser el mismo de cada parte, por lo que:

$$A + B = 5$$

$$-2A + B = -1$$

Este es un sistema de ecuaciones que podemos resolver de forma sencilla, por ejemplo, suma y resta, multiplicamos la segunda ecuación por menos uno y sumamos:

$$A + B = 5$$

$$\underline{2A - B = 1}$$

$$3A \qquad = 6$$

Resolvemos:

$$3A = 6$$

$$A = \frac{6}{3}$$

$$A = 2$$

Luego sustituimos el resultado en la primera ecuación para obtener B

$$A + B = 5$$

$$2 + B = 5$$

$$B = 5 - 2$$

$$B = 3$$

Una vez obtenidos nuestros coeficientes los sustituimos:

$$\frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}$$

$$\frac{5x - 1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2}$$

Con lo que podemos regresar a la integral inicial y descomponerla en integrales más sencillas:

$$\int \frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{2}{x + 1} dx + \int \frac{3}{x - 2} dx = 2 \ln|x + 1| + 3 \ln|x - 2| + c$$

Veamos otro ejemplo:

$$\int \frac{6x + 7}{x^2 + 4x + 4} dx$$

La fracción es propia, por lo que podemos aplicar el método, nos olvidamos de la integral y nos enfocamos en la fracción, factorizamos el denominador

$$\frac{6x + 7}{x^2 + 4x + 4} = \frac{6x + 7}{(x + 2)^2}$$

Observamos que el factor $x+2$ es lineal y la máxima potencia que divide a $g(x)$ es $(x+2)^2$, por lo que tendremos que sumar los términos

$$\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}$$

Ya no hay más factores de $g(x)$, así que igualamos:

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}$$

Quitamos denominadores multiplicando por $(x+2)^2$

$$\left[\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}\right](x+2)^2$$

Desarrollamos:

$$6x+7=A_1(x+2)+A_2$$

Factorizamos:

$$6x+7=(A_1)x+(2A_1+A_2)$$

Igualamos los coeficientes:

$$A_1=6$$

$$2A_1+A_2=7$$

Ya tenemos el valor de A_1, sustituimos en la segunda ecuación y obtenemos el valor de A_2

$$2(6)+A_2=7$$

$$12+A_2=7$$

$$A_2=7-12$$

$$A_2=-5$$

Como ya tenemos los valores de los coeficientes los sustituimos:

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{6}{x+2}+\frac{-5}{(x+2)^2}$$

Regresamos a nuestra integral:

$$\int\frac{6x+7}{x^2+4x+4}dx=\int\left[\frac{6}{x+2}+\frac{-5}{(x+2)^2}\right]dx=6\int\frac{dx}{x+2}-5\int\frac{dx}{(x+2)^2}$$

Hacemos $u=x+2$, tenemos que $du=dx$

Con lo que:

$$\int\frac{6x+7}{x^2+4x+4}dx=6\int\frac{dx}{x+2}-5\int\frac{dx}{(x+2)^2}=6\int\frac{du}{u}-5\int\frac{du}{u^2}=6\int\frac{du}{u}-5\int u^{-2}du$$

$$\int \frac{6x+7}{x^2+4x+4}dx = 6\ln|u| - \frac{5u^{-1}}{-1} + c = 6\ln|u| + 5u^{-1} + c$$

$$\int \frac{6x+7}{x^2+4x+4}dx = 6\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + c$$

O bien:

$$\int \frac{6x+7}{x^2+4x+4}dx = 6\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + c$$

Veamos otro ejemplo:

$$\int \frac{x^4-2x^3+2x^2-4x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx$$

Como la fracción no es propia, no podemos aplicar el método, para hacerlo, debemos dividir primero:

$$\begin{array}{r|l} & \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \\ \hline x^4-2x^3+2x^2-2x+1 & x^4-2x^3+2x^2-4x+5 \\ & \underline{-x^4+2x^3-2x^2+2x-1} \\ & \qquad\qquad\qquad -2x+4 \end{array}$$

Entonces sabemos que

$$\frac{x^4-2x^3+2x^2-4x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = 1 + \frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

Por lo que:

$$\int \frac{x^4-2x^3+2x^2-4x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = \int 1dx + \int \frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx$$

La primera integral se hace de forma directa, mientras que la segunda se hace con fracciones parciales, olvidémonos de la integral y apliquemos el método de fracciones parciales a la fracción propia.

$$\frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$$

Factorizamos:

$$x^4-2x^3+x^2+x^2-2x+1$$

$$x^2(x^2-2x+1)+1(x^2-2x+1)$$

$$(x^2-2x+1)(x^2+1)$$

$$(x-1)^2(x^2+1)$$

$$\frac{-2x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

El primer factor de $g(x)$ es lineal y la mayor potencia que divide a $g(x)$ es $(x-1)^2$ por lo que la suma asignada a este factor será de la forma:

$$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}$$

Por comodidad, en lugar de utilizar A_1 y A_2, utilizaré A y B

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$

El segundo factor es x^2+1 que es cuadrático irreducible y la mayor potencia que divide a $g(x)$ es (x^2+1)

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}$$

Por lo que la suma asignada, siguiendo la continuidad de las letras, será

$$\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Entonces

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Quitamos denominadores:

$$\left[\frac{-2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\right](x-1)^2(x^2+1)$$

$$-2x+4=A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2$$

Desarrollamos:

$$-2x+4=Ax^3-Ax^2+Ax-A+Bx^2+B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D$$

Factorizamos:

$$-2x+4=(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x+(-A+B+D)$$

Haciendo una comparación de coeficientes, tenemos:

$$A+C=0$$

$$-A+B-2C+D=0$$

$$A\quad+C-2D=-2$$

$$-A+B+D=4$$

Resolvemos el sistema, por el método que deseen, si aplicamos suma y resta, podemos ver que al sumar las 4 ecuaciones obtenemos:

$$2B = 2$$

$$B = \frac{2}{2}$$

$$B = 1$$

Podemos sustituir la primera ecuación en la tercera:

$$(A \quad + C) - 2D = -2$$

$$(0) - 2D = -2$$

$$-2D = -2$$

$$D = \frac{-2}{-2}$$

$$D = 1$$

Sustituyendo B y D en la cuarta ecuación, tenemos:

$$-A + B + D = 4$$

$$-A + 1 + 1 = 4$$

$$-A + 2 = 4$$

$$-A = 4 - 2$$

$$-A = 2$$

$$A = -2$$

Luego sustituimos A en la primera ecuación:

$$A + C = 0$$

$$-2 + C = 0$$

$$C = 2$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\frac{-2x + 4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

Regresando a nuestra integral, tenemos que:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx = \int 1dx + \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx$$

O bien:

$$\int \frac{x^4-2x^3+2x^2-4x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = \int 1dx + \int \frac{-2dx}{x-1} + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{1dx}{x^2+1}$$

Integramos y obtenemos:

$$\int \frac{x^4-2x^3+2x^2-4x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = x - 2\ln|x-1| - (x-1)^{-1} + \ln(x^2+1) + \arctan x + c$$

Si desean simplificar:

$$\int \frac{x^4-2x^3+2x^2-4x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = x - \frac{1}{x-1} + \ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2} + \arctan x + c$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}dx$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}$$

$$x^3-6x^2+5x+6x-6 = x(x^2-6x+5)+6(x-1) = x(x-5)(x-1)+6(x-1)$$

$$x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)[x(x-5)+6] = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Nos olvidamos de la integral y nos enfocamos en la fracción, factorizamos

$$\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Como los factores son lineales y para cada uno la máxima potencia que divide a $g(x)$ es el mismo factor, tenemos que:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Eliminamos denominadores:

$$\left[\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\right](x-1)(x-2)(x-3)$$

$$x^2+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

No vamos a desarrollar, sino a analizar, para el término $\frac{A}{x-1}$, tenemos que x no puede ser igual a uno, pero en la segunda ecuación, esto es posible, veamos que sucede si x toma el valor de uno.

Si $x = 1$

$$1^2+1 = A(1-2)(1-3) + B(1-1)(1-3) + C(1-1)(1-2)$$

Simplificamos

$$2 = A(-1)(-2)$$

Por lo que:

$$2A = 2$$

$$A = \frac{2}{2}$$

$$A = 1$$

Hacemos el mismo análisis para obtener el valor de las otras constantes:

Si $x = 2$

$$2^2 + 1 = A(2-2)(2-3) + B(2-1)(2-3) + C(2-1)(2-2)$$

Simplificamos

$$5 = B(1)(-1)$$

Por lo que:

$$-B = 5$$

$$B = -5$$

Si $x = 3$

$$3^2 + 1 = A(3-2)(3-3) + B(3-1)(3-3) + C(3-1)(3-2)$$

Simplificamos

$$10 = C(2)(1)$$

Por lo que:

$$2C = 10$$

$$C = \frac{10}{2}$$

$$C = 5$$

Volviendo a nuestra integral, tenemos:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-5}{x-2}dx + \int \frac{5}{x-3}dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \ln|x-1| - 5\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + c$$

Si los factores son lineales, pero la mayor potencia que divide a $g(x)$ no es uno, podemos iniciar sustituyendo y luego aplicar derivadas.

Ejemplo:

$$\int \frac{2x^2+4}{x^3+3x^2+3x+1}dx$$

$$x^3+3x^2+3x+1 = x^3+2x^2+x^2+2x+x+1$$

$$x^3+3x^2+3x+1 = x^3+2x^2+x+x^2+2x+1 = x(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)$$

$$x^3+3x^2+3x+1 = (x^2+2x+1)(x+1) = (x+1)^2(x+1) = (x+1)^3$$

Nos enfocamos en la fracción y factorizamos:

$$\frac{2x^2+4}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{2x^2+4}{(x+1)^3}$$

Como la mayor potencia del factor $x+1$ que divide a $g(x)$, es $(x+1)^3$ tenemos que:

$$\frac{2x^2+4}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}$$

Quitamos fracciones:

$$\left[\frac{2x^2+4}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}\right](x+1)^3$$

$$2x^2+4 = A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3$$

Si $x=-1$, tenemos:

$$2(-1)^2+4 = A_1(-1+1)^2 + A_2(-1+1) + A_3$$

Luego:

$$6 = A_3$$

No se puede volver a utilizar la misma sustitución, para obtener otra de las constantes, antes de volver a sustituir, derivamos la expresión con respecto a x

$$D_x[2x^2+4 = A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3]$$

$$4x = 2A_1(x+1) + A_2$$

En esta nueva expresión, sustituimos, si $x=-1$, tenemos:

$$4(-1) = 2A_1(-1+1) + A_2$$

Luego:

$$-4 = A_2$$

Para la última constante, volvemos a derivar:

$$D_x[4x = 2A_1(x+1) + A_2]$$

$$4 = 2A_1$$

$$A_1 = \frac{4}{2}$$

$$A_1 = 2$$

Uno vez obtenidos los valores de las constantes, regresamos a la integral

$$\int \frac{2x^2+4}{x^3+3x^2+3x+1}dx = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{-4}{(x+1)^2}dx + \int \frac{6}{(x+1)^3}dx$$

$$u = x+1, du = dx$$

$$\int \frac{2x^2+4}{x^3+3x^2+3x+1}dx = 2\ln|x+1| + 4(x+1)^{-1} - 3(x+1)^{-2} + c$$

Trabajo en Clase 8

Integra:

1. $\displaystyle\int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}dt$
2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
4. $\displaystyle\int \frac{x^4-81}{x^5+18x^3+81x}dx$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$

Opcional:

6. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^{1/3}-1)x^{1/2}}dx$

Tarea 8

Integra:

1. $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{y^4+2y^2+1}dy$
3. $\displaystyle\int \frac{2x^4}{x^3-x^2+x-1}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}\,d\theta$