

### 3. Tratamiento analítico de las integrales Indefinidas

#### 3.1 Técnicas de Integración

##### 3.1.1 Integración por partes

La integración por partes se utiliza cuando tenemos una multiplicación de funciones, como, por ejemplo:

$$\int x \cos x \, dx$$

Para obtener la fórmula nos basamos en la regla de la multiplicación, la recuerdas con derivadas:

$$D(uv) = uD(v) + vD(u)$$

La podemos expresar con diferenciales:

$$d(uv) = u dv + v du$$

Despejemos  $u dv$

$$u dv = d(uv) - v du$$

Integramos:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

Con esto obtenemos la fórmula para integrar por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Apliquemos la integración por partes en un ejemplo:

$$\int x \cos x \, dx = uv - \int v du = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + c$$

$u = x$	$v = \sin x$
$du = dx$	$dv = \cos x \, dx$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c$$

La elección de  $u$  es muy importante, ya que elegir incorrectamente, puede complicar la integral en lugar de hacerla más sencilla:

$$\int x \cos x \, dx = uv - \int v du = \cos x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} (-\sin x) dx = \frac{x^2 \cos x}{2} + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x \, dx$$

$u = \cos x$	$v = \frac{x^2}{2}$
$du = -\sin x \, dx$	$dv = x \, dx$

Acrónimos útiles para la elección de  $u$ :

Log

Inv. trig

Alg

Trig

Exp

(LIATE) o bien (ILATE)

Arc

Log

Pol

Exp

Seno

(ALPES)

También puede utilizarse la integración por partes para funciones que no sabemos integrar, pero sí derivar:

$$\int \ln x \, dx = uv - \int v \, du = \ln x \, x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$u = \ln x$	$v = x$
$du = \frac{1}{x} \, dx$	$dv = dx$

Generalizando para  $u$  podemos agregar esta fórmula a nuestro formulario:

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + c$$

En ocasiones al integrar por partes obtenemos una integral cíclica:

$$\int e^x \sin x \, dx = uv - \int v \, du = \sin x \, e^x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \left( uv - \int v \, du \right)$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \left[ \cos x \, e^x - \int e^x (-\sin x \, dx) \right]$$

$u_1 = \sin x$	$v_1 = e^x$
$du_1 = \cos x \, dx$	$dv_1 = e^x \, dx$

$u_2 = \cos x$	$v_2 = e^x$
$du_2 = -\sin x \, dx$	$dv_2 = e^x \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx + \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c$$

Hagamos un ejemplo en el que apliquemos integración por partes varias veces:

$$\int x^3 \cos x \, dx = uv - \int v du = x^3 \sin x - \int \sin x \, 3x^2 \, dx = x^3 \sin x - \int 3x^2 \sin x \, dx$$

$u_1 = x^3$	$v_1 = \sin x$
$du_1 = 3x^2 \, dx$	$dv_1 = \cos x \, dx$

$$\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x - \left[ 3x^2 (-\cos x) - \int -\cos x \, 6x \, dx \right]$$

$u_2 = 3x^2$	$v_2 = -\cos x$
$du_2 = 6x \, dx$	$dv_2 = \sin x \, dx$

$$\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - \int 6x \cos x \, dx$$

$$\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - \left( 6x \sin x - \int \sin x \, 6 \, dx \right)$$

$u_3 = 6x$	$v_3 = \sin x$
$du_3 = 6 \, dx$	$dv_3 = \cos x \, dx$

$$\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x + 6 \int \sin x \, dx$$

$$\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c$$

Integración por partes Tabular:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$u = f(x)$$

$$dv = g(x) \, dx$$

$$\int u \, dv = \int f(x) g(x) \, dx$$

Ejemplo:

$$\int x^3 \cos x \, dx$$

$f(x)$ y sus derivadas		Signo		$g(x)$ y sus integrales
$x^3$	$\longrightarrow$	+	$\searrow$	$\cos x$
$3x^2$	$\longrightarrow$	-	$\searrow$	$\sin x$
$6x$	$\longrightarrow$	+	$\searrow$	$-\cos x$
$6$	$\longrightarrow$	-	$\searrow$	$-\sin x$
$0$		+	$\searrow$	$\cos x$

$$\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c$$

Cuando tenemos una integral cíclica:

$$\int e^x \sin x \, dx$$

$f(x)$ y sus derivadas		Signo		$g(x)$ y sus integrales
$\sin x$	$\longrightarrow$	+	$\searrow$	$e^x$
$\cos x$	$\longrightarrow$	-	$\searrow$	$e^x$
$-\sin x$	$\longrightarrow$	+	$\searrow$	$e^x$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

## Trabajo en Clase 5

Integra:

1.  $\int (x^3 - 2)e^x \, dx =$

2.  $\int e^{\sqrt{3s+9}} \, ds =$

3.  $\int \sin(\ln x) \, dx =$

4.  $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx =$

5.  $\int t \operatorname{arcsec} t \, dt =$

Opcional:

Notas Matemáticas V  
Lourdes Gándara Cantú

$$6. \int z \ln^2 z \, dz$$

### **Tarea 5**

Integra:

$$1. \int p^5 e^{-p} \, dp =$$

$$2. \int \ln(x^2 + x) \, dx =$$

$$3. \int x^5 e^{x^3} \, dx =$$

$$4. \int \frac{\cos \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{x}} =$$

$$5. \int 2x \arcsin x^2 \, dx =$$