6. Aplicaciones del cálculo integral, problemas de las ciencias naturales, exactas y sociales

6.1. Aplicaciones de la Integral Indefinida

6.1.1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden con Variables Separables

En tu trayecto escolar en el CETI has conocido diferentes tipos de ecuaciones, por ejemplo:

Ecuaciones de primer grado (o lineales), que son aquellas en las que el grado de la variable es uno, como en $x+1=2$, $3a-2=4$, $\frac{x}{2}-1=7$, etc.

Ecuaciones de segundo grado (o cuadráticas) que son aquellas en las que el grado de la variable es dos, como en $x^2=9$, $x^2+5x-6=0$, $4x^2+2x=6$, etc.

Ecuaciones fraccionarias (o racionales), en las que tienes fracciones algebraicas (o expresiones racionales) como en $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=3$, $\frac{1}{x}=\frac{2}{x+2}$, etc.

Ecuaciones radicales, en las que tienes raíces como en $\sqrt{24+x}=5$, $\sqrt[3]{x+1}=x-6$, etc.

Ecuaciones logarítmicas, en las que tienes logaritmos como en $\log_2 x=3$, $\ln x=\ln x^2+1$, etc.

Pues bien, ahora vamos a trabajar con ecuaciones diferenciales, ¿qué características supones que deben de tener?

De forma burda, podemos decir que una ecuación diferencial es una ecuación que tiene diferenciales (o derivadas) por ejemplo, son ecuaciones diferenciales:

$$xdx+ydy=0$$

$$y'+y''=1$$

$$x^2dx-ydy=dx$$

$$3xd^3y=2x^3dx^3$$

$$y'=2x$$

De manera más formal, una ecuación diferencial es una ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada $y=f(x)$ y sus derivadas y', y'', … , $y^{(n)}$.

Se puede escribir simbólicamente como:

$$F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=0$$

O bien:

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Si la función buscada $y=f(x)$ tiene una sola variable independiente, la ecuación se llama ordinaria.

El orden de la derivada superior que interviene en la ecuación se denomina orden de la ecuación diferencial, por ejemplo, la ecuación:

$$y'' + 7(y')^4 - 5x^5y^3 = 0$$

Es una ecuación de segundo orden.

Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación de la forma:

$$F(x, y, y') = 0$$

Si esta ecuación es resoluble respecto a y', se puede escribir en la forma conocida como normal:

$$y' = f(x, y)$$

Esto quizá les suene un poco complejo, hay mucha teoría para un curso de "Ecuaciones Diferenciales", pero para nuestro curso, solo vamos a ver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, con variables separables, que son las ecuaciones diferenciales más sencillas que hay y trataré de no agregar mucha teoría.

Una ecuación diferencial de primer orden es de variables separables si se puede escribir de la forma:

$$y' = M(x)N(y)$$

Esto es, si la derivada se puede escribir como la multiplicación de dos funciones, una que depende exclusivamente de x, por otra función que depende exclusivamente de y.

Veamos, de las siguientes ecuaciones, ¿cuál es de variables separables?

$$y' = x + y$$

$$y' = 2xy$$

$$y' = \frac{2}{x} - \frac{y}{x}$$

Es claro que la primera no es de variables separables, ya que $x + y$ no se puede expresar como una multiplicación de la forma descrita, mientras que la segunda y la tercera sí, ya que la segunda se puede escribir como $y' = (2x)(y)$ o bien $y' = (x)(2y)$ y la tercera también es de variables separables, ya que se puede escribir como $y' = \left(\frac{1}{x}\right)(2 - y)$

Cuando tenemos una ecuación diferencial ordinaria, con variables separables, podemos resolverla, haciendo lo que el nombre nos dice, separando las variables, por ejemplo, tomemos la segunda ecuación:

$$y' = 2xy$$

Cambiamos primero y' por su notación en diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Ahora separamos las variables, como se dice coloquialmente y de un lado y x del otro:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

Una vez separadas las variables, integramos ambas partes:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Ahora acomodamos la solución, para esto, tenemos dos opciones, de forma implícita y de forma explícita.

Implícita, dejamos la expresión igualada a la constante:

$$\ln|y| - x^2 = c$$

La solución también se puede escribir de forma explícita, para ello es necesario despejar la variable y

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Para despejar el logaritmo, utilizamos la función exponencial:

$$y = e^{x^2+c}$$

Luego:

$$y = e^{x^2}e^{c}$$

O bien:

$$y = ce^{x^2}$$

Nota: ¿Por qué no se escribió e^c? Porque c es una constante cualquiera que se obtiene del proceso de integración y e es un constante, por lo que escribir c o e^c es lo mismo, un valor constante elevado a una constante desconocida, sigue siendo a fin de cuentas un valor constante desconocido.

Lo que obtenemos al resolver una ecuación diferencial no es una única solución, en realidad es una familia de soluciones, esto es, un conjunto de soluciones que dependen del valor de la contante c.

Veamos un segundo ejemplo, resolver:

$$y' = \frac{-x}{y}$$

Primero escribimos y' con la notación de Leibniz (con diferenciales):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

Separamos las variables:

$$ydy = -xdx$$

Integramos:

$$\int ydy = \int -xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = -x^2 + c$$

Voy a escribir la solución en su forma implícita:

$$x^2 + y^2 = c$$

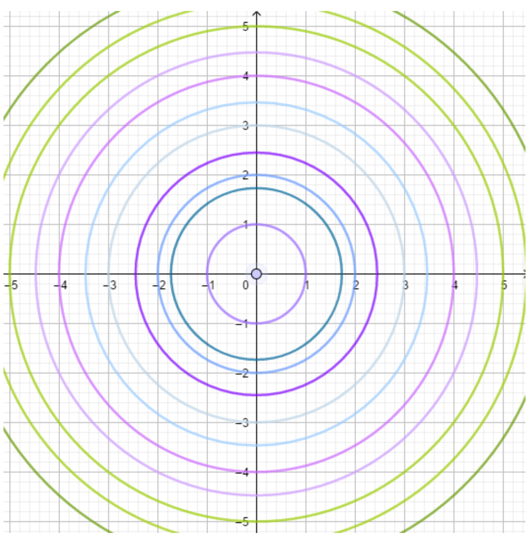
Voy a escribir de la siguiente forma, para ver si puedes identificar a qué corresponde la ecuación:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Creo que así, recordando de Geometría Analítica (antes Matemáticas III), la ecuación canónica de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

puedes identificar que la familia de soluciones, son circunferencias concéntricas, que tienen su centro en el origen y radio c, veamos esto gráficamente, dando a c algunos valores.



Ahora bien, no siempre se solicita una solución general, en ocasiones se necesita una solución particular, en este caso, en lugar de todas las soluciones, lo que se requiere es la solución que pasa por un punto en específico, por ejemplo:

$$y' = \frac{-x}{y}, \qquad y(3) = 4$$

Es la misma ecuación que acabamos de resolver, pero se agrega la condición inicial $y(3) = 4$, lo que se requiere es la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto (3,4).

La ecuación se resuelve como lo habíamos marcado antes, con lo que teníamos la solución implícita:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Sustituimos en la solución las condiciones iniciales:

$$(3)^2 + (4)^2 = c^2$$

Por lo que

$$9 + 16 = c^2$$

Luego

$$25 = c^2$$

Entonces

$$c = 5$$

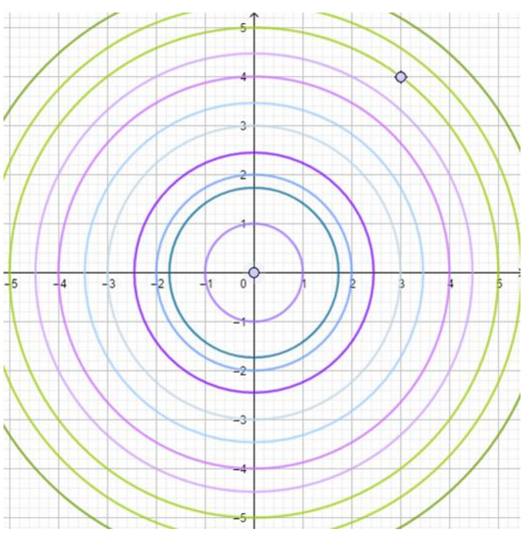
Por lo que la solución que tendríamos sería

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

O bien:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Podemos observar en la gráfica que, de la familia de soluciones, la que pasa por el punto $(3,4)$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, esto es, la circunferencia con centro en el origen y radio 5.



Nota: Podríamos haber utilizado la solución $x^2 + y^2 = c$, como podrás observar, el resultado de c no sería 5, sino 25, pero al final la solución quedaría exactamente igual $x^2 + y^2 = 25$

Trabajo en clase 12

Resuelve las ecuaciones diferenciales, expresa la solución en la forma indicada:

1. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$

Escribir la solución en forma explícita.

2. $y^2 \dfrac{dy}{dx} = 3x^2y^3 - 6x^2, y(0) = 2$

Escribir la solución en forma explícita.

3. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}, y(\ln 2) = \ln 3$

Escribir la solución en forma implícita.

4. $y' = \dfrac{2}{x} - \dfrac{y}{x}$

Escribir la solución en forma explícita.

5. $\sqrt{x}dy = e^{y+\sqrt{x}}dx$

Escribir la solución en forma implícita.

Tarea 12

Resuelve las ecuaciones diferenciales, expresa la solución en la forma indicada:

1. $y' = 2xy^2e^{x^2}, y(0) = 1$

Escribir la solución en forma explícita.

2. $2x^2dx - 3\sqrt{y}\csc x\, dy = 0$

Escribir la solución en forma explícita.

3. $y' = x\, e^{x-y}\csc y$

Escribir la solución en forma implícita.

4. $y' = \dfrac{y^2}{x} - \dfrac{1}{x}, \qquad y(1) = 1$

Escribir la solución en forma explícita.

5. $y' = xy + x - y - 1$

Escribir la solución en forma implícita.