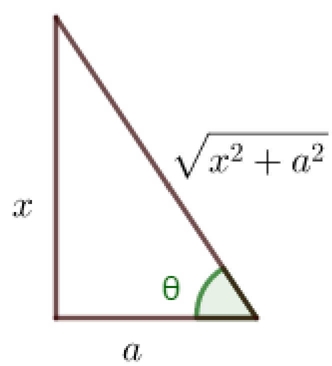
3.1.3 Por Sustitución Trigonométrica

En ocasiones se tenemos una integral en la que se tiene una suma o diferencia de cuadrados, en este caso podemos relacionar esa suma o diferencia, con los lados de un triángulo rectángulo y realizar una sustitución de la variable mediante funciones trigonométricas.

Tenemos tres casos posibles:

Caso 1. $\sqrt{x^2 + a^2}$

Si tenemos que $\sqrt{x^2 + a^2}$, x y a son lados de un triángulo rectángulo, tendríamos que x y a serían catetos y la hipotenusa estaría dada por $\sqrt{x^2 + a^2}$



Los lados x y a están relacionados mediante la función tangente, tenemos que:

$$\tan\theta = \frac{x}{a}$$

Si despejamos x, tenemos que:

$$x = a\tan\theta$$

Calculamos el diferencial

$$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$$

Sustituimos el valor de x en la raíz $\sqrt{x^2 + a^2}$ y tenemos que:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{(a\tan\theta)^2 + a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2\theta + 1)} = \sqrt{a^2\sec^2\theta} = a\sqrt{\sec^2\theta}$$

Tenemos que $\sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta|$ (No sucede los mismo con a ya que es positiva)

Por lo que $\sqrt{*\, x^2 + a^2} = a|\sec\theta|$

Para obtener a cuanto es igual $\sqrt{x^2 + a^2}$, podemos utilizar la función trigonométrica que relaciona la hipotenusa con el cateto adyacente:

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$$

Despejando la raíz, tenemos que:

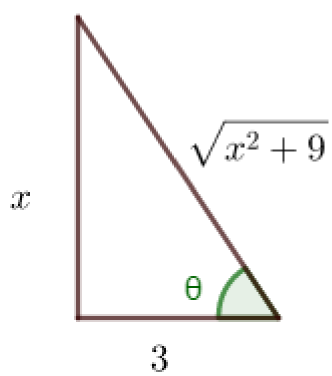
$$\sqrt{x^2+a^2} = a\sec\theta$$

Para efectos prácticos, utilizaremos esta última identidad para resolver las integrales indefinidas, pero si la función es definida, deberemos analizar si la función es positiva o negativa en el intervalo y aplicar el valor absoluto al evaluar.

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3^2}}\,dx$$

Dibujamos nuestro triángulo correspondiente:



Tenemos que:

$$x = 3\tan\theta$$

$$dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{x^2+9} = 3\sec\theta$$

Por lo que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{3\sec\theta} 3\sec^2\theta\,d\theta = \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

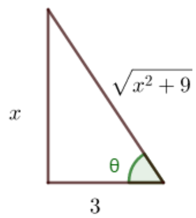
$$\int \sec\theta\,d\theta = \int \sec\theta\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta = \int\frac{(\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta)d\theta}{\sec\theta+\tan\theta} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$\int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

$$u = \sec\theta + \tan\theta$$

$$du = (\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta)d\theta$$

Hemos integrado fácilmente usando la sustitución, ya solo falta regresar a la variable original, por lo que tenemos:



Sabemos, que $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ y $\tan\theta = \frac{x}{3}$, por lo que

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right| + c$$

Si deseamos, podemos simplificar esta expresión utilizando propiedades de los logaritmos tenemos que:

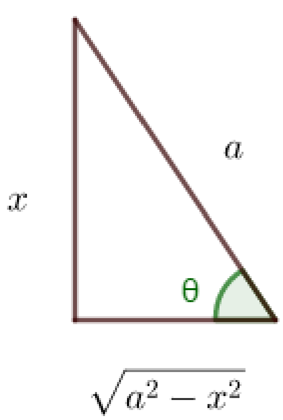
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{3}\right| + c = \ln\left|\sqrt{x^2+9}+x\right| - \ln 3 + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx = \ln\left(\sqrt{x^2+9}+x\right) + c$$

Pero esto es algo opcional.

Caso 2. $\sqrt{a^2-x^2}$

Si tenemos que $\sqrt{a^2-x^2}$, x y a son lados de un triángulo rectángulo, tendríamos que x y $\sqrt{a^2-x^2}$ serían catetos y la hipotenusa estaría dada por a



Los lados x y a están relacionados mediante la función seno, tenemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a}$$

Si despejamos x, tenemos que:

$$x = a \operatorname{sen}\theta$$

Calculamos el diferencial

$$dx = a\cos\theta\, d\theta$$

Para obtener a cuanto es igual $\sqrt{a^2 - x^2}$, podemos utilizar la función trigonométrica que relaciona la hipotenusa con el cateto adyacente:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

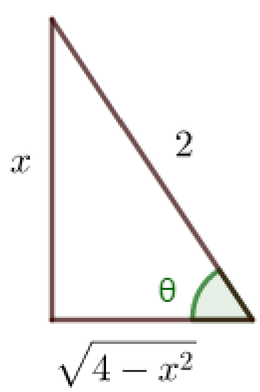
Despejando la raíz, tenemos que:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

Dibujamos nuestro triángulo correspondiente:



Tenemos que:

$$x = 2\sin\theta$$

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{4 - x^2} = 2\cos\theta$$

Por lo que:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \int \frac{(2\sin\theta)^2}{2\cos\theta} 2\cos\theta\, d\theta = \int 4\sin^2\theta\, d\theta$$

Para esta integral, recordemos que en el último trabajo en clase resolvieron la integral:

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + c$$

Para lo cual utilizamos la identidad

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Para calcular la integral

$$\int \sin^2 x\, dx$$

Utilizaríamos la identidad

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Como vemos, solo cambia el signo, por lo que:

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + c$$

De forma general, puedes agregar a tu formulario estas fórmulas:

$\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sin u \cos u + c$
$\int \sin^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\sin u \cos u + c$

Regresando a nuestra integral tenemos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int 4\sin^2\theta\, d\theta = 4\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right) + c = 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + c$$

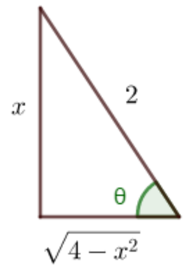
Una vez que integramos regresamos a la variable original, tenemos que

$$x = 2\sin\theta$$

$$\frac{x}{2} = \sin\theta$$

$$\arcsin\frac{x}{2} = \theta$$

$$\theta = \arcsin\frac{x}{2}$$



$$\sin\theta = \frac{x}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Recuerda que para obtener las funciones trigonométricas debes utilizar el triángulo rectángulo que se dibujó al inicio, pero para obtener el valor de θ, debes despejarlo de alguna función trigonométrica, desde mi punto de vista la sustitución que siempre queda más sencilla es de la sustitución de x que se propone al principio de la sustitución y así lo voy a pedir en los ejercicios y exámenes.

Entonces, tenemos que:

$$\theta = \arcsin\frac{x}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

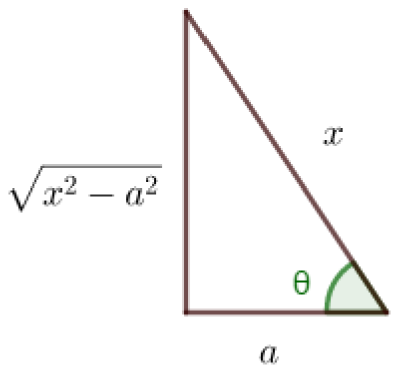
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + c = 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

Simplificamos y obtenemos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

Caso 3. $\sqrt{x^2-a^2}$

Si tenemos que $\sqrt{x^2-a^2}$, x y a son lados de un triángulo rectángulo, tendríamos que a y $\sqrt{x^2-a^2}$ serían catetos y la hipotenusa estaría dada por x



Los lados x y a están relacionados mediante la función coseno, tenemos que:

$$\cos\theta = \frac{a}{x}$$

Si despejamos x, tenemos que:

$$x = \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta$$

Calculamos el diferencial

$$dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

Para obtener a cuanto es igual $\sqrt{x^2 - a^2}$, podemos utilizar la función trigonométrica que relaciona el cateto opuesto con el cateto adyacente:

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

Despejando la raíz, tenemos que:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$$

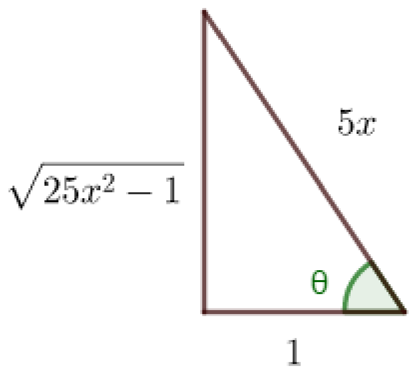
Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 1}} = \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{\sqrt{(5x)^2 - 1^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1^2}} = \frac{1}{5}\ln\left|5x + \sqrt{25x^2 - 1}\right| + c$$

$$u = 5x$$

$$du = 5dx$$

Dibujamos nuestro triángulo correspondiente:



Tenemos que:

$$5x = \sec\theta$$

Notar que la hipotenusa no es x, si no que tiene un coeficiente, es mejor si despejamos x

$$x = \frac{1}{5}\sec\theta$$

$$dx = \frac{1}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

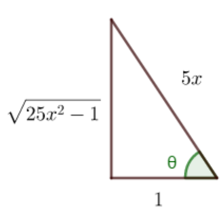
$$\sqrt{25x^2-1} = \tan\theta$$

Observar que el coeficiente de x no afecta el resultado de la raíz.

Por lo que:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-1}} = \int \frac{\frac{1}{5}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\tan\theta} = \frac{1}{5}\int \sec\theta\ \,d\,\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

Sabemos que



$$\sec\theta = 5x$$

$$\tan\theta = \sqrt{25x^2-1}$$

Por lo que:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-1}} = \frac{1}{5}\ln\left|5x + \sqrt{25x^2-1}\right| + c$$

Trabajo en Clase 7

Notas Matemáticas V
Lourdes Gándara Cantú

Integra:

1. $\int \sqrt{25 - t^2}dt$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 49}}dx$

3. $\int \frac{8dx}{(x^2 + 1)^2}$

4. $\int \frac{e^t dt}{\sqrt{e^{2t} - 9}}$

5. $\int \frac{2x}{1 + x^2}dx$

Opcional

6. $\int \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 1}}dx$

Trabajo en Clase 7

Integra:

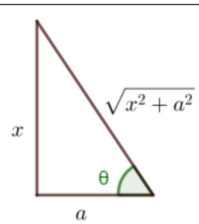
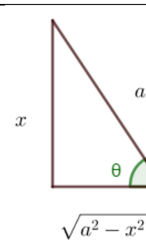
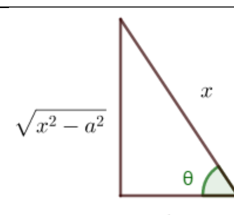
1. $\int \frac{100}{25x^2 + 36}dx$

2. $\int \frac{\sqrt{9 - w^2}}{w^2}dw =$

3. $\int x\sqrt{x^2 - 4}dx =$

4. $\int \frac{e^t}{(e^{2t} + 1)^{3/2}}dt =$

5. $\int \frac{5}{\sqrt{25x^2 - 9}}dx =$

Caso 1	Caso 2	Caso 3
 $x = a \tan \theta$ $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$	 $x = a \sin \theta$	 $x = a \sec \theta$ $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$

$\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec\theta$	$dx = a\cos\theta\, d\theta$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$