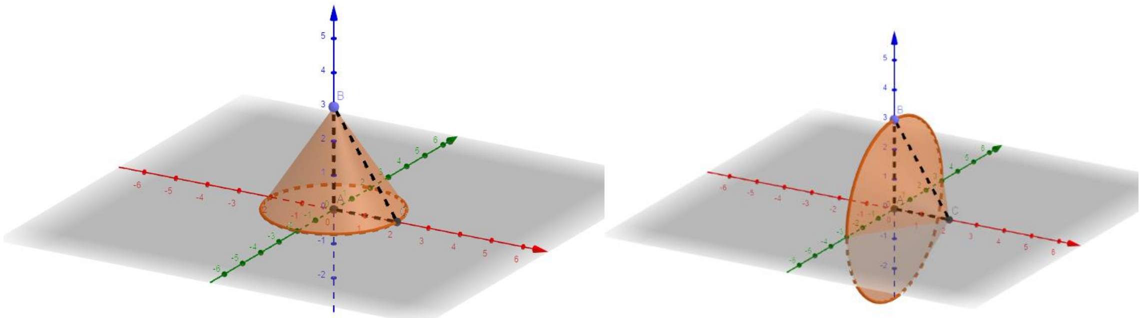
6.2.1 Volúmenes de Revolución

Un volumen de revolución es un volumen generado al rotar una región plana alrededor de un eje, por ejemplo, sabemos que un triángulo rectángulo al rotarlo utilizando como eje alguno de sus catetos, genera un cono.

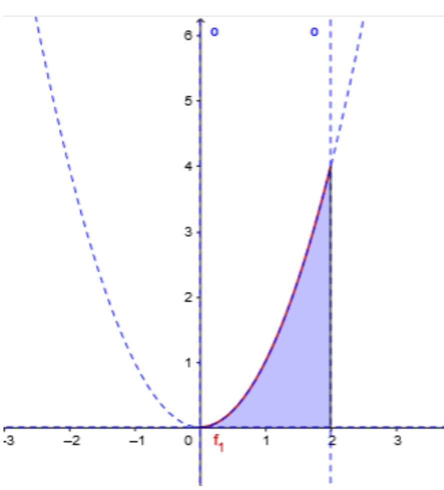


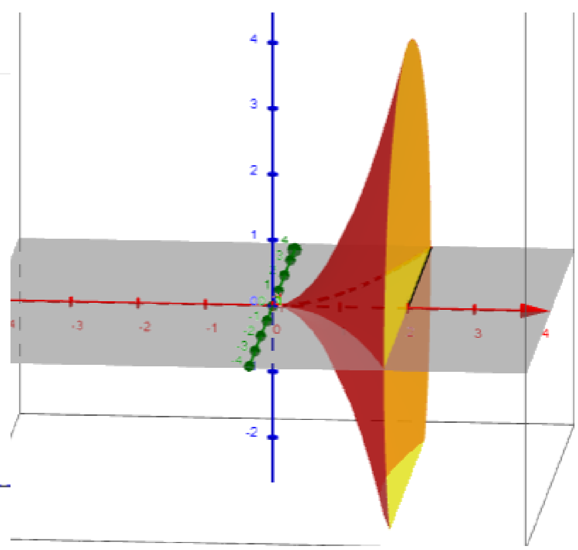
Nótese que, aunque es el mismo triángulo los conos generados tienen distinta forma y distinto volumen.

Método de los discos

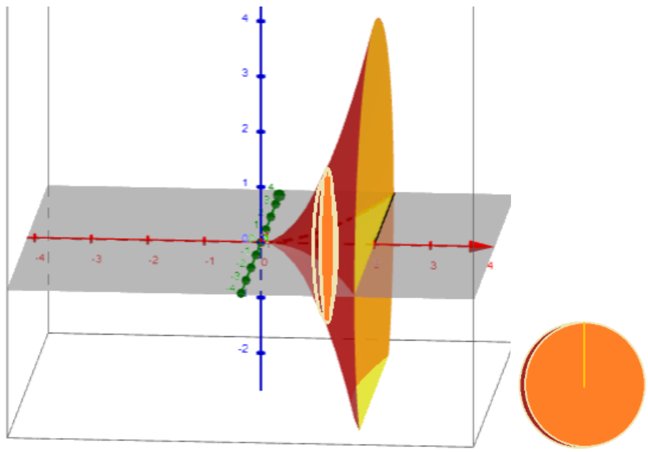
La idea de este método es realizar cortes transversales al eje de rotación, al hacer esto generamos discos, calculamos el área del disco y realizamos la suma, la idea es similar a querer calcular el volumen de una zanahoria, imagina que, para hacerlo, cortas la zanahoria en rodajas, calculas el volumen de cada rodaja y luego haces la suma.

Imaginemos la región siguiente y hagámosla rotar alrededor del eje x.





Si Realizamos dos cortes transversales, para cortar una rebanada, tenemos:

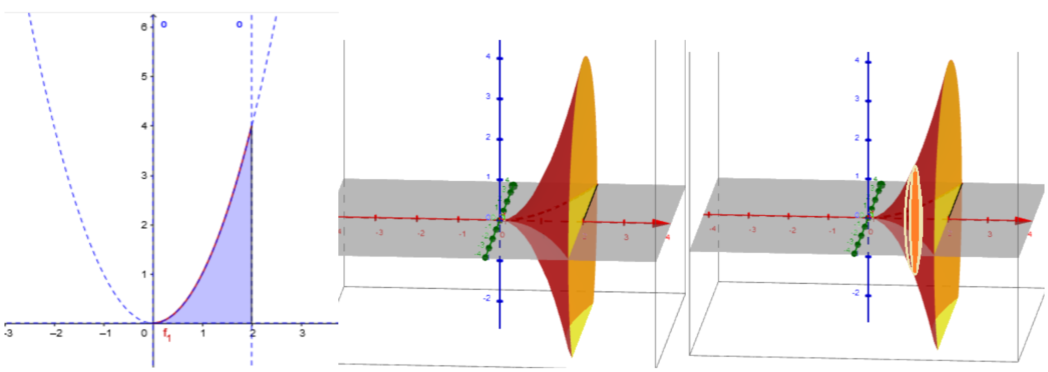


Separamos este disco, para calcular su volumen, tenemos que la cara es una circunferencia, por lo que el área de la circunferencia es π por radio al cuadrado $\pi[R(x)]^2$, para calcular el volumen del disco, tenemos que multiplicar por el grosor del disco, que es dx, luego realizar la suma desde el inicio (punto a), hasta el final de la figura (punto b), por lo que el volumen será:

$$V = \int_a^b \pi\,[R(x)]^2 dx$$

Hay que recordar que $R(x)$ es notación de función, no es que esté multiplicando el radio R por x, si no que tengo que el radio está en función de x.

Veamos el ejemplo, calcular el volumen de la región encerrada entre $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$ alrededor del eje x, como verán, convenientemente, es justo la figura que teníamos de ejemplo.

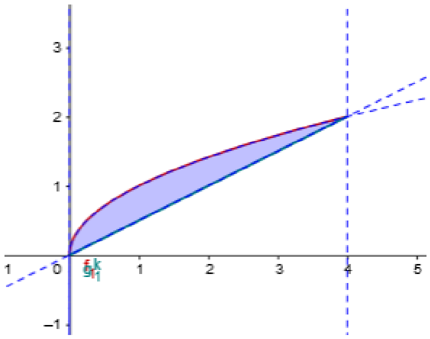


Al hacer el corte, tenemos en la figura, el radio es $R(x) = x^2$ y nuestra figura empieza en 0 y termina en 2, por lo que el volumen será:

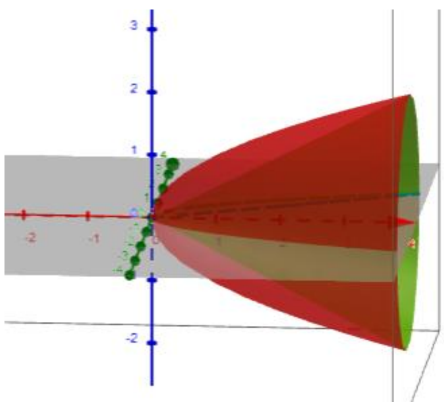
$$V = \int_0^2 \pi\,[x^2]^2 dx = \int_0^2 \pi\,x^4 dx = \frac{x^5}{5}\pi \Big|_0^2 = \frac{32}{5}\,\pi$$

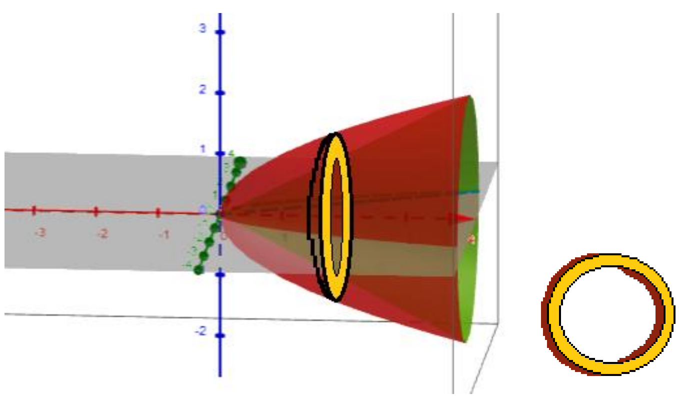
Método de las arandelas

El método de las arandelas es prácticamente igual al de los discos, la idea es igual, tener cortes transversales, pero en las arandelas las figuras tienen un hueco, por lo que al cortar no tenemos discos, si no arandelas.



Por ejemplo, al rotar esta región alrededor del eje x, se tiene la figura:

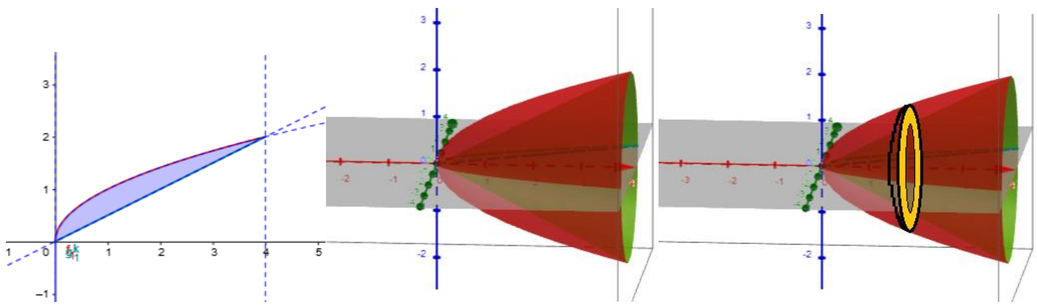




Vemos que al cortar tenemos una arandela, por lo que la cara que tenemos no es la de una circunferencia, si no de una corona circula, por lo que el área de la cara es la diferencia entre el área de las dos circunferencias $\pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2$ o lo que es lo mismo, factorizando $\pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2\ )$, para calcular el volumen, multiplicamos por dx, luego hacemos la suma de todos las arandelas y tenemos que:

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)dx$$

Veamos el ejemplo con la figura anterior, que es la región encerrada entre $y = \sqrt{x}$ y $y = \frac{x}{2}$ rotada alrededor del eje x:



Tenemos en este caso que $R(x) = \sqrt{x}$, mientras que $r(x) = \frac{x}{2}$, luego tenemos que ve dónde empieza y donde termina, estos puntos se pueden observar en la primera gráfica, sería conveniente verificarlos, aunque sea de forma mental en las funciones, pero si su gráfica no tiene suficiente precisión, se pueden determinar los puntos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Sistema que se resuelve fácilmente por igualación:

$$\frac{x}{2} = \sqrt{x}$$

$$\frac{x^2}{4} = x$$

$$x^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

Luego:

$$x = 0, x = 4$$

Entonces los límites de nuestra integral serán 0 y 4.

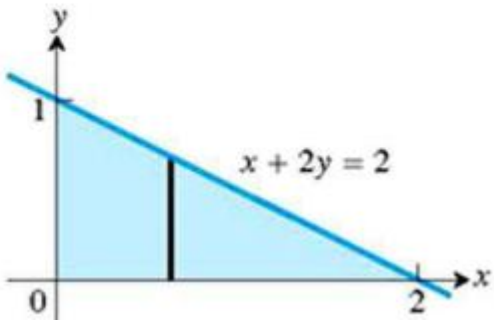
$$V = \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{x}\right]^2 - \left[\frac{x}{2}\right]^2\right)dx = \int_0^4 \pi\left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^4 = \pi\left(\frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{12}\right)$$

$$V = \pi\left(8 - \frac{64}{12}\right) = \pi\left(8 - \frac{16}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi$$

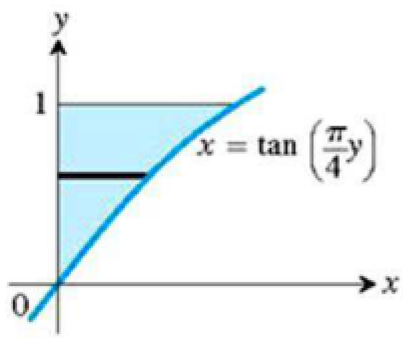
Trabajo en Clase 14

Determina el volumen indicado, ya sea con el método de las arandelas o con el método de los discos.

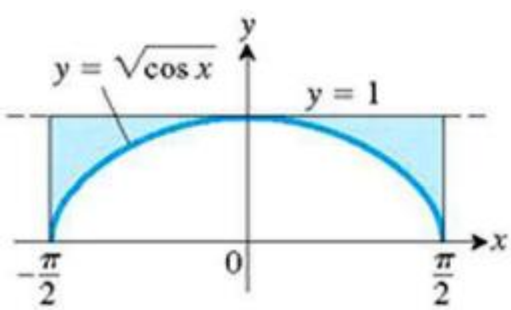
1. El volumen generado al rotar la región sombreada alrededor del eje x



2. El volumen generado al rotar la región sombreada alrededor del eje y



3. El volumen generado al rotar la región sombreada alrededor del eje x



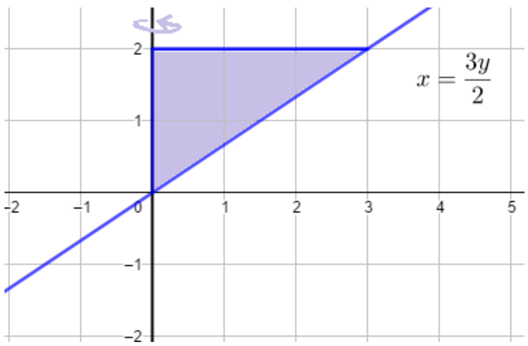
4. El volumen generado al hacer rotar la región acotada por $x = \frac{2}{y}$, $y = 1$ y $y = 4$ y el eje y alrededor del eje y.

5. El volumen generado al hacer rotar la región acotada por $y = x^2 + 1$ y $y = -x + 3$ alrededor del eje x.

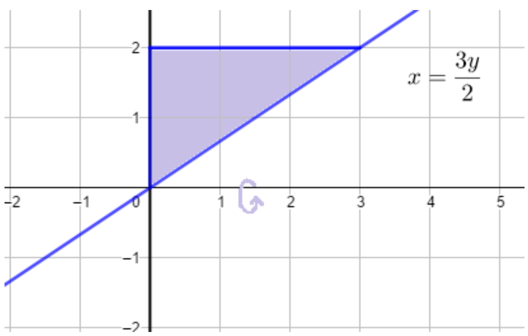
Tarea 14

Determina el volumen indicado, ya sea con el método de las arandelas o con el método de los discos.

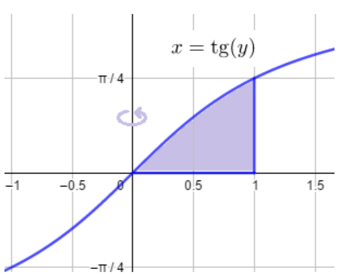
1. El volumen generado al rotar la región sombreada alrededor del eje y



2. El volumen generado al rotar la región sombreada alrededor del eje x



3. El volumen generado al rotar la región sombreada alrededor del eje y



4. El volumen generado al hacer rotar la región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ y $x = 4$ alrededor de la recta $y = 1$.

5. El volumen generado al hacer rotar la región acotada por $y = x$, $x = 0$ y $y = 1$ alrededor del eje x.