Unidad 2

Antiderivada de las funciones elementales (algebraicas y trascendentes)

2.1 Integral Indefinida

2.1.1 Antiderivada

Una antiderivada de cierta función $f(x)$, es una función $F(x)$ tal que:

$$D[F(x)] = f(x)$$

Ejemplo:

Escribir algunas antiderivadas de la función $f(x) = 2x$

$$F(x) = x^2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

$$F(x) = x^2 - 1{,}524.78$$

$$F(x) = x^2 - \frac{\pi}{2}$$

$$F(x) = x^2 + 0.00001$$

$$F(x) = x^2 + 3$$

Una integral indefinida es el conjunto de todas las antiderivadas de la función a integrar.

Ejemplo:

$$\int 2x \; dx = x^2 + c$$

Ejemplo:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

2.1.2 Propiedades

Propiedades de linealidad

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones y k un número real.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int kf(x) \; dx = k \int f(x)\,dx$$

Ejemplo:

$$\int (2x + \cos x)\,dx = \int 2x\,dx + \int \cos x\,dx = x^2 + \sin x + c$$

$$\int 6\cos x\,dx = 6\int \cos x\,dx = 6\sin x + c$$

2.1.3 Patrones para x, x^2, x^3

Si deseamos calcular:

$$\int x dx =$$

Podemos partir de que conocemos la integral:

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

Entonces tenemos:

$$2\int x dx = x^2 + c$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

Ahora veamos, qué hacer para

$$\int x^2 dx =$$

$$D(x^3) = 3x^2$$

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$

$$3\int x^2 dx = x^3 + c$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Analicemos la integral:

$$\int x^3 dx =$$

$$D(x^4) = 4x^3$$

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c$$

$$4\int x^3 dx = x^4 + c$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Parece que tenemos el patrón:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

2.1.4 Integración directa

Ahora que has entendido el concepto de la integral, como ya sabes derivar, puedes integrar todo aquello que sabes que es el resultado de derivar algo.

Sabes que:

$D(e^x) = e^x$

Por lo tanto:

$\int e^x \, dx = e^x + c$

Sabes que:

$D(\ln x) = \frac{1}{x}$

Por lo tanto:

$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

O bien:

$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$

Sabes que:

$D(\sin x) = \cos x$

Por lo tanto:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

Sabes que:

$D(\cos x) = -\sin x$

Por lo tanto:

$$\int -\sin x\, dx = \cos x + c$$

Pero está fórmula no es tan cómoda, por que debes asegurar el negativo, así que aplicando propiedades:

$$-\int \sin x\, dx = \cos x + c$$

Multiplicamos la expresión por -1 y obtenemos:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

También conoces la fórmula para derivar potencias:

$D(x^m) = mx^{m-1}$ (Utilizare m en lugar de n solo por comodidad)

Por lo tanto

$$\int mx^{m-1}dx = x^m + c$$

Ahora bien, está fórmula depende de tener un coeficiente que sea exactamente una unidad mayor que el exponente, lo cual no es muy práctico, apliquemos propiedades para la constante:

$$m\int x^{m-1}dx = x^m + c$$

Dividimos toda la expresión anterior entre m

$$\int x^{m-1}dx = \frac{x^m}{m} + c$$

Ahora realicemos la siguiente sustitución:

$m - 1 = n$

También requeriremos el despeje de m

$m = n + 1$

Con lo que obtenemos la fórmula para las potencias:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Esta fórmula sirve para cualquier valor de n, excepto -1

{

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

Apliquemos está fórmula en dos ejemplos:

Ejemplo:

$$\int 2x dx = \frac{2x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{2x^2}{2} + c = x^2 + c$$

Ejemplo:

$$\int 4x^7 dx = \frac{4x^8}{8} + c = \frac{x^8}{2} + c = \frac{1}{2}x^8 + c$$

Trabajo en Clase 3

Integra:

1. $\int (x+1)dx$

2. $\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right) dt$

3. $\int (2x^3 - 5x + 7)dx$

4. $\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$

5. $\int x^{-1/3} dx$

6. $\int 2x(1 - x^{-3})\, dx$

7. $\int (4 \sec x \tan x - 2 \sec^2 x)\, dx$

8. $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt$

9. $\int \cot^2 x\, dx$

10. $\int \cos\theta\,(\tan\theta + \sec\theta) d\theta$

Tarea 3

Integra:

1. $\int (7x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 4x - 10)dx$

2. $\int \frac{2x+4}{x} dx$

3. $\int (x+1)(x-1)dx$

4. $\int -\csc^2 x \, dx$

5. $\int \frac{6}{x^3} dx$

6. $\int \sqrt[3]{x^4} \, dx$

7. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

8. $\int 2 \sec x \tan x \, dx$

9. $\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} dx$

10. $\int \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} + \frac{10x^2}{3}\right) dx$