Introducción a Desigualdades

Emmanuel Buenrostro, David López

5 August 2025

§1 Teoría

Comenzaremos con una desigualdad básica: Sea x cualquier número real, entonces se cumple que

$$x^2 \geq 0.$$

A partir de este resultado es posible construir varios teoremas.

§1.1 AM-GM

Theorem 1.1 (AM-GM para dos variables)
Para a, b reales no negativos se tiene que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

donde la igualdad ocurre si y solo si $a = b$.

Proof. Para demostrarlo tenemos que

$$\begin{aligned} a+b &\geq 2\sqrt{ab} \\ \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Lo cual es cierto, (Note que la condición a, b no negativos es necesaria para evitar números imaginarios en $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$). $\square$

Example 1.2
Sean a, b, c, reales positivos tales que: $a + b + c = 6$ y $abc = 3$, demuestra que:

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(a+c)} + \frac{1}{c(a+b)} \leq 1$$

y encuentra cuándo se da la igualdad.

Este ejemplo ilustra claramente dónde es posible utilizar AM-GM, además de presentar ideas muy útiles para resolver desigualdades. Para este caso, vemos que es posible multiplicar por abc (este movimiento es frecuente cuando se restringe $abc = 1$, aunque en este caso también resulta útil), y llegamos a una expresión más manejable.

Solution. Multiplicamos por abc y se convierte en

$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\leq 3.$$

Ahora es momento de aplicar AM-GM. La intuición detrás de esto proviene de que ”arriba” (numerador) tenemos la parte menor de AM-GM (la multiplicicación), y ”abajo” (denominador) tenemos la parte mayor (la suma), por lo que será posible simplificar términos.

Entonces, por AM-GM:

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} \\ \Leftrightarrow ab &\leq \frac{(a+b)^2}{4}. \end{aligned}$$

Análogamente para bc y ac. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b} &\leq \frac{\frac{(b+c)^2}{4}}{b+c}+\frac{\frac{(a+c)^2}{4}}{a+c}+\frac{\frac{(a+b)^2}{4}}{a+b} \\ &= \frac{b+c}{4}+\frac{a+c}{4}+\frac{a+b}{4} \\ &= \frac{2(a+b+c)}{4} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Concluyendo el ejemplo. □

Ahora bien, es posible generalizar AM-GM para n variables.

Theorem 1.3 (AM-GM)

Para $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales no negativos se tiene que

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

Con la igualdad si y solo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Esta desigualdad nos da la oportunidad de jugar con que valores insertar en la multiplicación para que te quede lo que necesites.

Example 1.4

Sean a, b, c reales positivos con $a+b+c=1$. Demuestra lo siguiente

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+b\sqrt[3]{\frac{c}{b}}+c\sqrt[3]{\frac{a}{c}}\leq ab+bc+ca+\frac{2}{3}.$$

Solution. Reescribiendo el lado izquierdo nos queda que queremos demostrar esto:

$$\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2c}+\sqrt[3]{c^2a}\leq ab+bc+ca+\frac{2}{3}$$

Y eso nos da el indicio de que queremos jugar con como repartir un AM-GM con $\sqrt[3]{a^2b}$ para obtener algo que te convenga del lado derecho.
Una manera muy común de repartir ese producto es la siguiente:

$$\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{ab \cdot a \cdot 1} \leq \frac{ab + a + 1}{3}$$

Pero al juntar las 3 raices podemos notar que no te queda lo que necesitas, ya que el $(ab + bc + ca)$ termina dividido entre 3. Entonces suena óptimo poner $3ab$ en lugar de ab en el AM-GM, pero ese 3 lo tenemos que quitar de algun lado, en este caso vamos a cambiar el 1 por $\frac{1}{3}$, quedando:

$$\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{3ab \cdot a \cdot \frac{1}{3}} \leq \frac{3ab + a + \frac{1}{3}}{3}$$

Entonces cuando sumas las 3 raices cubicas te queda

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} &\leq \frac{3ab + 3bc + 3ca + a + b + c + 1}{3} \\ &= ab + bc + ca + \frac{a + b + c + 1}{3} \\ &= ab + bc + ca + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\square$

§1.2 QM-AM-GM-HM

Existen al menos 4 medias que son fundamentales para la resolución de diversos problemas. Se resumen en el siguiente teorema:

Theorem 1.5 (QM-AM-GM-HM)
Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales positivos, entonces:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Con la igualdad si y solo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Estas medias se conocen como cuádratica, aritmética, geométrica y armónica, respectivamente. Note que al tenerlas todas ordenas podemos utilizarlas por parejas gracias a la transitividad de las desigualdades. Veamos un ejemplo de cómo utilizar QM-AM para atacar un problema.

Example 1.6
Se tienen 27 puntos con coordenadas y distancias entre cualesquiera dos de ellos enteras. Demuestra que al menos 27 de esas distancias son divisibles entre 3.

Si bien éste problema podría pensarse en términos de combinatoria por su parecido a problemas cásicos del Principio de Casillas, existe una solución más directa utilizando QM-AM.

Solution. Vamos a iniciar con la idea que se suele usar en estos problemas con casillas. Estudiamos los posibles valores mod 3 de cada coordenada. Esto nos deja 9 posibles tipos de puntos $(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)$.

Ahora, la distancia entre dos puntos $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ es $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Estamos interesados en que eso sea múltiplo de 3, entonces, como $1^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \bmod 3$, vemos que si $x_1 \not\equiv x_2 \bmod 3$ y/o $y_1 \not\equiv y_2 \bmod 3$, la distancia sería 1 o 2 mod 3 (tendríamos $0+1, 1+0$, o $1+1$ porque al menos una diferencia no es 0).
Entonces queremos que $x_1 \equiv x_2 \bmod 3$ y $y_1 \equiv y_2 \bmod 3$, por lo que son dos puntos del mismo tipo.

Entonces si definimos que para cada tipo de punto tenemos a_i puntos, la cantidad de distancias que cumplen la condición tomando puntos de ese tipo es

$$\sum_{i=1}^{9} \binom{a_i}{2}$$

esto es, las formas de tomar cualesquiera dos puntos de ese tipo. Aquí es donde a terminado la parte de combi del problema y es donde empezamos con QM-AM.

Para esto vamos a expandir.

$$\sum_{i=1}^{9} \binom{a_i}{2} = \sum_{i=1}^{9} \frac{a_i^2 - a_i}{2}.$$

Y podemos separar en dos sumas.

$$\sum_{i=1}^{9} \frac{a_i^2 - a_i}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{9} a_i^2 - \sum_{i=1}^{9} a_i}{2}.$$

Note que ya conocemos el valor de la suma de los a_i que es la cantidad de puntos, 27.
Entonces ahora queremos probar que

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} a_i^2 - 27}{2} \geq 27 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{9} a_i^2 \geq 81.$$

Entonces solo basta probar que una desigualdad con la suma de los cuadrados es mayor o igual a una constante. Como ya conocemos el valor de la suma, podemos usar QM-AM.

Entonces por QM-AM

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9} a_i^2}{9}} &\geq \frac{\sum_{i=1}^{9} a_i}{9} = \frac{27}{9} = 3 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{9} a_i^2 &\geq 3^2 \cdot 9 = 81. \end{aligned}$$

Concluyendo el ejemplo. $\square$

§1.3 Reacomodo

En esta sección estudiaremos otro tipo de desigualdad que resulta muy práctica en la Olimpiada. Consideremos que tenemos dos conjuntos ordenados A, B con tres números de la siguiente forma:

$$a_3 \geq a_2 \geq a_1 \in A$$
$$b_3 \geq b_2 \geq b_1 \in B.$$

Supongamos que debemos emparejar cada elemento del conjunto A con uno del conjunto B. Luego, para cada pareja podemos calcular el producto de sus elementos; y para cada arreglo de parejas podemos obtener la suma S los productos por parejas.

$$\begin{aligned}
P_6 &= \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\} \implies S_6 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\
P_5 &= \{(a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_3, b_2)\} \implies S_5 = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 \\
P_4 &= \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_3)\} \implies S_4 = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3 \\
P_3 &= \{(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1)\} \implies S_3 = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 \\
P_2 &= \{(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_2)\} \implies S_2 = a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 \\
P_1 &= \{(a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1)\} \implies S_1 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1
\end{aligned}$$

Una pregunta interesante sería que podemos decir de estas sumas sabiendo que los elementos en los conjuntos están ordenados. Resulta que es posible mostrar que:

$$S_6 \geq S_k \geq S_1 \text{ con } 6 \geq k \geq 1.$$

Es posible demostrar el lado izquierdo considerando alguno de los S_k con $k \neq 6$ y aplicando de forma análoga para los otros casos. Veamos el caso $k = 5$

$$\begin{aligned}
S_6 \geq S_5 \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &\geq a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 \\
\iff a_1b_1 + a_3b_3 &\geq a_1b_3 + a_3b_1 \\
\iff a_1(b_1 - b_3) + a_3(b_3 - b_1) &\geq 0 \\
\iff a_3(b_3 - b_1) - a_1(b_3 - b_1) &\geq 0 \\
\iff (a_3 - a_1)(b_3 - b_1) &\geq 0, \text{ como } a_3 \geq a_1, b_3 \geq b_1, \text{ se cumple.}
\end{aligned}$$

Aplicando para el resto algo similar, es posible convencerse de que la desigualdad se sostiente. Lo aprendido puede generalizarse para cualquier par de conjuntos ordenados con n elementos.

Theorem 1.7 (Reacomodo)

Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ dos sucesiones de números reales. Si $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ es cualquier permutuación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j} \leq \sum_{j=1}^{n} a'_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j b_j.$$

La desdigualdad del reacomodo puede utilizarse para resolver una infinidad de problemas y demostrar muchas otras desigualdades incluyendo la ya explorada QM-AM-GM-HM y la desigualdad de Cauchy que se revisará más adelante. A manera de ejercicio, la utilizaremos para mostrar la desigualdad de Tchebyshev:

Theorem 1.8 (Tchebyshev)
Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ dos sucesiones de números reales. Entonces,

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right)$$

Proof. Para demostrarlo tenemos que aplicar varias la desigualdad del reacomodo:

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots a_nb_1 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots a_nb_2 \\
&\vdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \ldots a_nb_{n-1}
\end{aligned}$$

Sumando estas desiguladades:

$$n\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n\right) = \left(a_1 + a_2 + \ldots a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \ldots b_n\right)$$

Y dividiendo ambos lados por n^2:

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n}{n} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots b_n}{n}\right)$$

□

Example 1.9
Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Solution. Como el lado izquierdo de la desigualdad es simétrico, podemos asumir, sin pérdida de la generalidad, $a \geq b \geq c$. Sean $x = 1/a, y = 1/b, z = 1/c$ (esto solo para reducir trabajo de escritura). Note además que como $abc = 1 \implies xyz = 1$. Reescribiendo la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{x^3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} + \frac{y^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}} + \frac{z^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \\
&= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}
\end{aligned}$$

Ahora, cómo $c \leq b \leq a$, se sigue que $x \leq y \leq z$, y esto implica que $\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{x+z} \leq \frac{z}{x+y}$ (esto se puede demostrar estableciendo las desigualdades por parejas y reduciendo al producto de números positivos es mayor que cero). Aplicando la desiguldad del reacomodo con las últimas dos desigualdades dos veces:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{x+z} + \frac{xz}{y+z}$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y} \quad \geq \quad \frac{xz}{y+z}+\frac{xy}{x+z}+\frac{yz}{y+z}$$

Sumando ambas desigualdades:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{a^3\left(b+c\right)}+\frac{1}{b^3\left(a+c\right)}+\frac{1}{c^3\left(a+b\right)}\right) &= 2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right) \\ &\geq \frac{xy}{y+z}+\frac{yz}{x+z}+\frac{xz}{y+z}+\frac{xz}{y+z}+\frac{xy}{x+z}+\frac{yz}{y+z} \\ &\geq \frac{x\left(y+z\right)}{y+z}+\frac{y\left(x+z\right)}{x+z}+\frac{z\left(x+y\right)}{x+y}=x+y+z \\ &\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3 \text{ (Note el uso de AM-GM)} \end{aligned}$$

Dividiendo entre dos ambos lados concluímos la demostración. □

§1.4 Cauchy

Theorem 1.10 (Desigualdad de Cauchy)

Para cualquiera números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ la siguiente desigualdad se cumple

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Y la igualdad se da si y solo si existe una $\lambda \in \mathbb{R}$ con $x_i = \lambda y_i$ para todo i.

Proof. Si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ o $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ ambos lados son 0 y se cumple.

Ahora, sean $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, T = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ y sean $a_i = \frac{x_i}{S}$ para i entre 1 y n, $a_i = \frac{y_{n-i}}{T}$ para i entre $n+1$ y $2n$.

Por reacomodo tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} a_{n+i} a_i \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2}{S^2}+\frac{y_i^2}{T^2}\right) \\ &= \quad 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2 \quad &\geq \quad \sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} a_{n+i} a_i \\ &= \quad 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{ST} \end{aligned}$$

Entonces

$$ST \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

y elevar al cuadrado obtenemos el resultado buscado. □

También existe otra versión de esta desigualdad, la cuál es conocida popularmente como ”Útil”, o como Cauchy en forma de Engel o Lema de Titu.

Theorem 1.11 (Útil)
Para cualquiera números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ con $b_i \geq 0$ para todo i. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

Con igualdad si y solo si

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

Proof. Por Cauchy con $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ (note que ahí viene la necesidad de $b_i > 0$), $y_i = \sqrt{b_i}$. Obtenemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

Y al dividir entre la suma de los b_i obtenemos lo que estábamos buscando. □

Example 1.12
Sean a, b, c, d reales positivos con $(a+c)(b+d) = 1$, demuestra que

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

Solution. Primero el primer factor lo multiplicamos por a, el segundo por b, y así para tener cuadrados en los númeradores. Y usando Titu

$$\frac{a^4}{ab+ac+ad} + \frac{b^4}{bc+bd+ba} + \frac{c^4}{cd+ca+cb} + \frac{d^4}{da+db+dc}$$
$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{ab+ac+ad+ba+bc+bd+ca+cb+cd+da+db+dc}$$

Por reacomodo

$$ab+ac+ad+ba+bc+bd+ca+cb+cd+da+db+dc \leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Entonces

$$\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{ab+ac+ad+ba+bc+bd+ca+cb+cd+da+db+dc} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}$$

Y por QM-AM-GM

$$\begin{aligned} a^2+c^2+b^2+d^2 &\geq \frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{2} \\ &\geq (a+c)(b+d) \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3} \geq \frac{1}{3}$$

Terminando el problema. □

§2 Problemas

§2.1 Introductorios

Exercise 2.1. Muestra que para cualquier real positivo x se cumple que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercise 2.2. Demuestra que para cualesquiera reales positivos x, y se tiene que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Exercise 2.3. Si x, y son reales, demuestra que $x^2 + y^2 + xy \geq 0$

Exercise 2.4. Para a, b, c reales positivos demuestra que

$$\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{c+2a} \geq \frac{3}{a+b+c}$$

Exercise 2.5. Para reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ demuestra que

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Exercise 2.6. Demuestra que para reales positivos a, b, c se tiene que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Exercise 2.7. Demuestra que para a, b reales positivos se tiene que $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + b^3a^2$

Exercise 2.8. Muestra que para cualquier permutación $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, se tiene que:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1a_1' + a_2a_2' + \cdots + a_na_n'.$$

Exercise 2.9. Probar que si para reales positivos a, b, c con $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ entonces

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

Exercise 2.10. Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

§2.2 No tan introductorios

Problem 2.11. Para reales positivos a, b, c con suma 1. Demuestra que

$$\frac{b^2+c^2}{1+a} + \frac{c^2+a^2}{1+b} + \frac{a^2+b^2}{1+c} \geq \frac{1}{2}$$

Problem 2.12. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ enteros postivos distintos. Muestre que:

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Problem 2.13. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un entero positivo y sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ números reales tales que $x_1 x_2 \cdots x_k = 1$. Demuestre que

$$P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_k) \geq kP(1)$$

Problem 2.14. Sean reales $a, b, c > 0$. Probar que

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(a + b + c)$$

Problem 2.15. Prueba que

$$\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} \geq (n!)^{\frac{2}{n}}$$

para n un entero positivo, y encuentra el caso donde se da la igualdad.

Problem 2.16. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

y determina para qué números a, b y c se alcanza la igualdad.

Problem 2.17. Sea $n \geq 3$ un número entero y $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales positivos tales que m es el menor y M el mayor de estos números. Se sabe que para cualesquiera enteros distintos $1 \leq i, j, k \leq n$, si $a_i \leq a_j \leq a_k$ entonces $a_i a_k \leq a_j^2$. Demostrar que

$$a_1 a_2 \cdots a_n \geq m^2 M^{n-2}$$

y determinar cuando la igualdad se mantiene.

Problem 2.18. Demuestra que para reales positivos a, b, c con $abc = 1$ se tiene que

$$\frac{ab}{ab + a^5 + b^5} + \frac{bc}{bc + b^5 + c^5} + \frac{ca}{ca + c^5 + a^5} \leq 1.$$

Problem 2.19. Sean a, b y c números reales positivos tales que $ab + bc + ca = 1$. Demostrar que

$$\frac{a^3}{a^2 + 3b^2 + 3ab + 2bc} + \frac{b^3}{b^2 + 3c^2 + 3bc + 2ca} + \frac{c^3}{c^2 + 3a^2 + 3ca + 2ab} > \frac{1}{6\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2}.$$

Problem 2.20. Sean a, b, c números reales positivos. Muestre que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

§3 Fuentes

- 1.2 BC TST 2015/5
- 1.4 JBMO SL 2022/A3

- 1.6 Jalisco TST 2023/Acm 1.3
- 1.9 IMO 1995/2
- 1.12 IMO SL 1990/24
- 2.1 Ejercicio 1.19. Libro de desigualdades de la OMM
- 2.2 Ejercicio 1.24. Libro de desigualdades de la OMM
- 2.7 Caso particular Muirhead
- 2.1 Ejercicio 1.36. Libro de desigualdades de la OMM
- 2.8 Corolario 1.4.1. Libro de desigualdades de la OMM
- 2.9 MEX TST 2024 8.3
- 2.10 Desigualdad de Nesbitt
- 2.12 IMO 1978/P5 Refraseado
- 2.13 OMCC 2020/5
- 2.15 IMO LL 1967/Bulgaria 2
- 2.16 OMM 2014/3
- 2.17 OMCC 2021/5
- 2.18 IMO SL 1996/A1
- 2.19 OMCC 2023/3
- 2.20 APMO 1998/3