Angle Chasing

Emmanuel Buenrostro

4 August 2025

§1 Herramientas

El Angle Chasing (Cazar ángulos) busca obtener la mayor información posible de una configuración gracias a los ángulos, una gran cantidad de problemas con esto obtienes la información suficiente para terminarlos, y si no una gran parte de lo que ocupas.
Cazar los ángulos muchas veces no es tan facil y puede ser lo unico necesario para resolver problemas muy complejos, todo si sabes como encontrarlos.
Como tal no hay mucha teoría como para un primer acercamiento a Angle Chasing, entonces quiero pensarlo más como una caja de herramientas que puedes usar para encontrar/usar los ángulos.

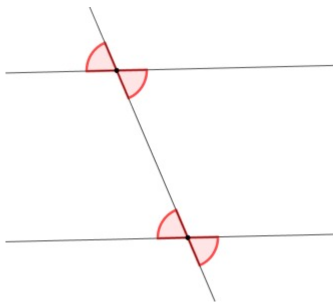
§1.1 Triangulos, poligonos

- Los ángulos interiores de un triángulo suman $180°$.
- Un ángulo externo de un triángulo es la suma de los dos ángulos interiores opuestos.
- En general, la suma de los ángulos internos de un poligono de n lados es
$$180(n-2)$$
- En un triángulo no degenerado ABC se tiene que
$$AB = AC \iff \angle ABC = \angle ACB$$

§1.2 Paralelas y opuestos por el vertice

Estas son igualdades de ángulos muy conocidas, no tengo mucho que agregar.

- En esta imagen hay dos rectas paralelas y una recta que las intersecta, entonces los ángulos rojos son iguales.

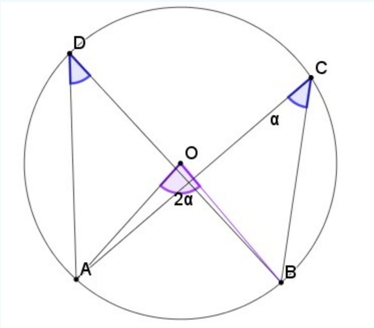


A traves de un punto es opuestos por el vertice, a traves de las dos rectas paralelas es entre paralelas.

§1.3 Circulos

Los circulos nos ayudan a mover muchos ángulos, principalmente con lo siguiente.

Theorem 1.1 (Ángulos inscritos)
Si el ángulo $\angle ACB$ esta inscrito en el circulo (los 3 puntos estan en el circulo), entonces abre un arco de $2\angle ACB$.



Particularmente

Theorem 1.2
Sea M el punto medio del arco AB que abre el ángulo $\angle ACB$, entonces CM es bisectriz de $\angle ACB$.

Esto sale aprovechando el isosceles que te da y moviendo los ángulos con los arcos. Ahora, estos ángulos se suelen aprovechar mayormente con cierto tipo de cuadrilateros, los cuadrilateros ciclicos.

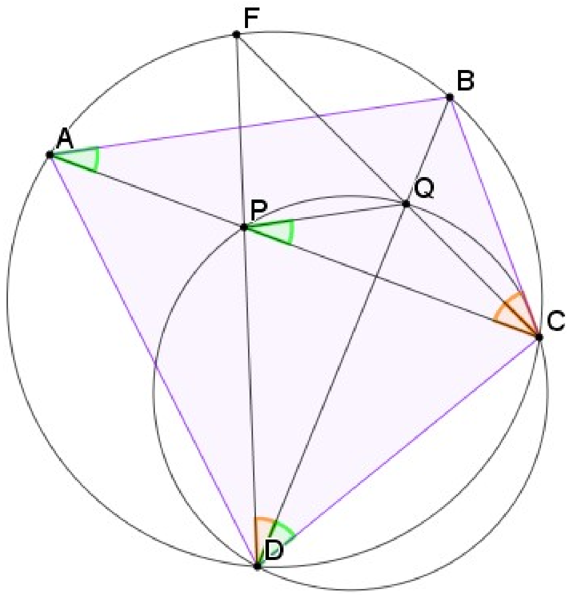
Definition 1.3. Se dice que un cuadrilatero $ABCD$ es ciclico si y solo si A, B, C, D estan en una misma circunferencia.

Y entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes en un cuadrilatero $ABCD$ (es decir, si una se cumple se cumplen todas y si una no se cumple ninguna se cumple).

- $ABCD$ es ciclico
- $\angle ABC + \angle CDA = 180$
- $\angle ABD = \angle ACD$

En particular quiero enfatizar el uso de los ángulos inscritos en los cuadrilateros ciclicos, ya que tienes muchos ángulos que abren los mismos arcos y por lo tanto son iguales (En esto se usa el 3er punto).

Example 1.4
Sea $ABCD$ un cuadrilatero ciclico. Sea F el punto medio del arco AB que no contiene a C ni a D. Las lineas DF y AC se intersecan en P y las lineas CF y BD se intersecan en Q. Demuestra que PQ y AB son paralelas.



Solution.
Como F es el punto medio del arco AB entonces $\angle BCF = \angle FCA$ y por lo tanto

$$\angle QDP = \angle BDF = \angle BCF = \angle FCA = \angle QCP$$

Por lo que $QPCD$ es ciclico y entonces

$$\angle CPQ = \angle CDQ = \angle CDB = \angle CAB$$

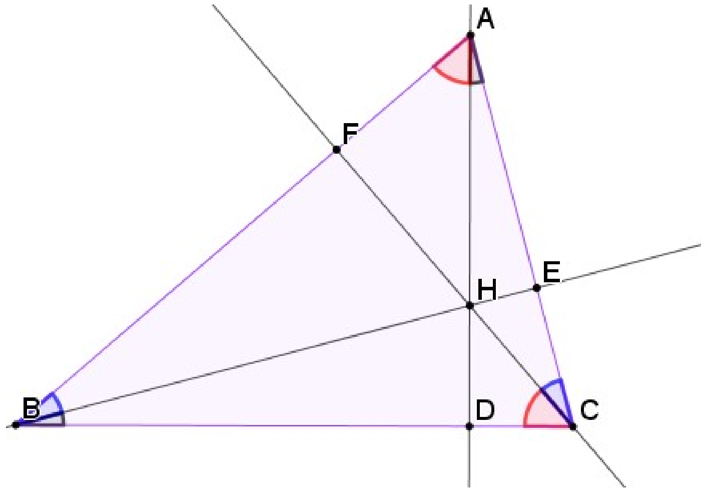
Por lo que son paralelas. □

Theorem 1.5
Si tienes un triangulo ABC inscrito en un circulo ω con centro O y un punto P entonces estos 3 son equivalentes:

- PA es tangente a ω
- $OA \perp PA$
- $\angle PAB = \angle ACB$

§1.4 H y 0

Si trazamos las alturas AD, BE, CF y el ortocentro H nos quedan los siguientes ángulos (Mismo color es que son iguales).



Esto por los distintos ciclicos que se forman por los ángulos de 90 (Además dos angulos de 90 suman 180).
Estos ciclicos son:

$$AEHF, CDHE, BFHD, AEDB, CDFA, BFEC$$

Además estos nos dan que H es el incentro de DEF.

Definition 1.6. En un triangulo dos rectas se llaman isogonales si pasan por un vertice y son reflejadas respecto a la bisectriz de ese vertice.

Theorem 1.7
En un triangulo ABC, se cumple que AH, AO son isogonales.

Proof. Se tiene que $\angle BAH = 90 - \angle B$ y además $\angle AOC = 2\angle B$ y como $OA = OC$ entonces $\angle CAO = \frac{180-2\angle B}{2} = 90 - \angle B$, entonces como el ángulo es el mismo son isogonales. □

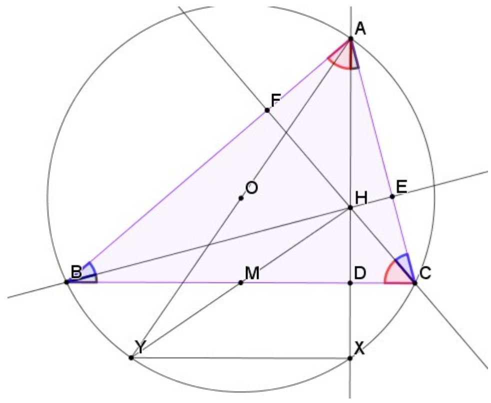
§1.5 Reflejar

Podemos reflejar principalmente sobre un punto o sobre una recta.
Reflejar sobre un punto P es agarrar todos los punto X del plano y mandarlos al punto X' tal que P es el punto medio de XX' (en otras palabras, tomas la distancia de XP y usas la misma distancia pero en el lado contrario).
Reflejar sobre una recta l es agarrar todos los puntos X del plano y mandarlos al punto X' tales que l es la mediatriz de XX' (en otras palabras tomar la distancia a la recta y usarla pero en el lado contrario)
Reflejar cumple que si reflejas dos veces es como si no hubieras hecho nada.
Hacer reflexiones puede ser muy util en Angle Chasing para dos cosas, poder igualar ángulos sabiendo que cierta parte del dibujo es el reflejo de otra parte del dibujo, o para crear puntos/trazos auxiliares con ciertas propiedades y que te pueden dar ciclicos, paralelas, u otro tipo de información.

Theorem 1.8

En un triangulo ABC con ortocentro H, punto medio de BC M, X la reflexión de H sobre BC, Y la reflexión de H sobre M. Se cumple que AY es diametro de el circuncirculo y que X esta en el circuncirculo.

Proof. .

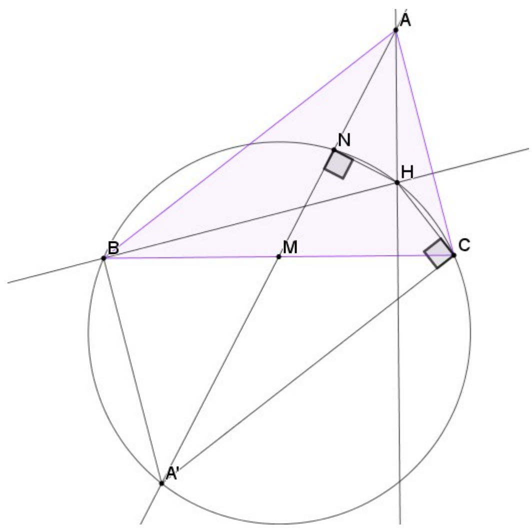


Se puede calcular que $\angle BHC = 180 - \angle A$ entonces $\angle BXC = 180 - \angle A$, asi que $BXCA$ es ciclico.
Y como $MH = MY$ y $MB = MC$ entonces $HBYC$ es un paralelogramo y $\angle BYC = 180 - \angle A$ asi que $BYCA$ tambien es ciclico.
Y como $MD || YX$ por tales, entonces $\angle YXA = \angle MDH = 90$, entonces AY es diametro. □

Como se acaba de mostrar una reflexión muy util es reflejar sobre algun punto medio para obtener paralelogramos, otro ejemplo es:

Example 1.9

Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90^o$.



Solution.

Sea A' la reflexión de A sobre M, en particular $BACA'$ es un paralelogramo porque $MB = MC$ y $MA = MA'$. Entonces $\angle BA'C = \angle A$ y

$$\angle BHC = 180 - \angle HBC - \angle HCB = 180 - 90 + \angle C - 90 + \angle B = 180 - \angle A$$

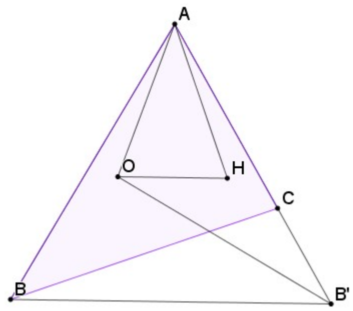
Por lo que $BHCA'$ es ciclico. Y como $\angle(HC, CA') = (HC, AB) = 90$ por las paralelas, entonces el ciclico $NHCA'$ tiene diametro $A'H$ y $\angle A'NH = 90$ y $\angle ANH = 90$ $\square$

Otra reflexión muy util en triangulos es reflejar sobre alguna bisectriz.

Example 1.10

Sea ABC un triangulo con circuncentro O y ortocentro H. Prueba que $AO = AH$ si y solo si $\angle BAC = 60$

Solution. .



Si $AO = AH$ sucede que:
Como $\angle BAO = \angle CAH$, entonces al reflejar O sobre la bisectriz de $\angle BAC$ nos queda H, y digamos que al reflejar B nos queda B'. Entonces

$$\angle(B'O, AB) = \angle(BH, AB') = 90$$

Asi que B' esta en la mediatriz de AB y entonces $AB = AB' = BB'$ generando un triangulo equilatero y el ángulo de 60 necesario. (El regreso es practicamente analogo.) $\square$

§1.6 Incentro-Excentro

§2 Problemas

" i'm not ready at all but it's now august 2 and THE SHOW MUST GO ON"

Evan Chen

Problem 2.1. Sea ABC un triangulo. El incirculo de ABC es tangente a AB, AC en D, E. Sea O el circuncentro de BCI. Demuestra que $\angle ODB = \angle OEC$

Problem 2.2. Sea t una tangente por el vertice C al circuncirculo de un triangulo ABC. Una recta p paralela a t intersecta BC, AC en los puntos D, E. Demuestra que A, B, D, E son conciclicos.

Problem 2.3. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea Y un punto dentro de la diagonal AC distinto del punto medio de AC. La recta perpendicular al segmento BY que pasa por Y corta a la recta AD en X y a la recta CD en Z. Muestra que $AX = CZ$.

Problem 2.4 (Recta de Simson)**.** Sea ABC un triangulo y sea P cualquier punto en su circuncirculo. Sea X, Y, Z los pies de altura desde P hasta BC, CA y AB. Prueba que los puntos X, Y, Z son colineales.

Problem 2.5. Sea I el incentro de un triangulo ABC con $AB < AC$. La linea AI intersecta el circuncirculo de ABC en D. El circuncirculo de CDI intersecta BI de nuevo en K. Prueba que $BK = CK$.

Problem 2.6. En un triangulo rectangulo ABC con $\angle A = 90, \angle C = 30$. Sea ω el circulo que pasa por A y es tangente a BC en el punto medio. ω intersecta AC en N y al circuncirculo de ABC en M. Prueba que $MN \perp BC$.

Problem 2.7. Sea ABC un triángulo acutángulo con vértices sobre una circunferencia Γ. Sea ℓ la recta tangente a Γ en A. Sean D y E los puntos de intersección de la recta ℓ y del segmento AC con la circunferencia de centro B y radio BA, respectivamente. Muestra que DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problem 2.8. Sea ABC un triángulo acutángulo escálelo con $\angle BAC = 60°$ y ortocentro H. Sean ω_b la circunferencia que pasa por H y es tangente a AB en B, y ω_c la circunferencia que pasa por H y es tangente a AC en C. Prueba que ω_b y ω_c solamente tienen a H como punto común. Prueba que la recta que pasa por H y el circuncentro O del triángulo ABC es una tangente común a ω_b y ω_c.

Problem 2.9. En un triangulo acutangulo ABC, sea M el punto medio de BC. Sea P el pie de altura de C hacia AM. Supon que el circuncirculo de el triangulo ABP intersecta la linea BC en B y Q.Sea N el punto medio de AQ. Muestra que $NB = NC$.

Problem 2.10 (★)**.** Sea ABC un triangulo con gravicentro G. Los puntos R y S estan en los rayos GB y GC, tal que

$$\angle ABS = \angle ACR = 180 - \angle BGC$$

Prueba que $\angle RAS + \angle BAC = \angle BGC$

Problem 2.11. Sea ABC un triangulo acutangulo, sea D el pie de altura desde C. La bisectriz de $\angle ABC$ intersecta CD en E e intersecta al circuncirculo ω de ADE en F. Si $\angle ADF = 45$ muestra que CF es tangente a ω.

Problem 2.12. Sea $ABCD$ un cuadrilatero inscrito en el circulo ω con $AC \perp BD$. Sean E, F las reflexiones de D sobre BA y BC, respectivamente, sea P la intersección de las lineas BD y EF. El circuncirculo de EPD intersecta ω en D y Q y el circuncirculo de FPD intersecta ω en D y R. Demuestra que $EQ = FR$.