P2 Emmanuel B. Hoja 4 5

- Resolveremos para $a \leq 5$

- Si $a=1 \Rightarrow 1 \mid b+1$ (Todo b cumple)

y $b \mid 1^3+1 = 2 \Rightarrow b = 1, 2$ y todos cumplen

$\boxed{(1,2) , (1,1)}$

- Si $a=2 \Rightarrow 2 \mid b+1$

y $b \mid 2^3+1 = 9 \Rightarrow b = 1, 3, 9$ todos cumplen

$b+1 = 2, 4, 10$

$\boxed{(2,1) \quad (2,3) \quad (2,9)}$

- Si $a=3 \Rightarrow 3 \mid b+1$

y $b \mid 3^3+1 = 28 \Rightarrow b = 1, 2, 4, 7, 14, 28$

$b+1 = 2, 3, 5, 8, 15, 29$

$\Rightarrow \boxed{(3,2) \text{ y } (3,14)}$

- Si $a=4 \Rightarrow 4 \mid b+1$

y $b \mid 4^3+1 = 65 \Rightarrow b = 1, 5, 13, 65$

$b+1 = 2, 6, 14, 66$

$\boxed{\text{Ninguno}}$

P2 Emmanuel B. Hoja 2/5

- Si $a=5 \Rightarrow 5 \mid b+1$

$b \mid 5^3+1=126 \Rightarrow b=1, 2, 7, 14, 3, 6, 21, 42, 9, 18, 63, 126$

$b+1 = 2, 3, 8, 15, 4, 7, 22, 43, 10, 19, 64, 127$

$\Rightarrow \boxed{(5, 14) \text{ y } (5, 9)}$

- Ahora si $a > 5$

- como $a \mid b+1 \Rightarrow \boxed{b = ak-1}$ para algun entero positivo k (a, $b+1$ pos.)

- Como $b \mid a^3+1$ entonces

$a^3+1 = bx = (ak-1)x = \boxed{akx - x}$

para algun entero pos. x.

- Entonces analizando mod a.

$1 \equiv -x \mod a \Rightarrow \boxed{x = ay-1}$

para algun entero pos y.

P2 Emmanuel B. Hoja 3/5

Entonces

$$a^3 \cancel{x} = ak(ay-1) - (ay-1)$$
$$= a^2ky - ak - ay + \cancel{x}$$

$\Rightarrow$ $a^3 = a^2ky - ak - ay$

(como $a \neq 0$)

$\Rightarrow$ $\boxed{a^2 = aky - k - y}$

Si $k=1$

$$a^2 = ay - y - 1 = y(a-1) - 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{a^2+1}{a-1} = y}$ como y es entero pos.

$a \neq 1$ porque $a > 5$

$$a-1 \mid a^2+1 \Rightarrow a-1 \mid a^2+1 - a^2+1 = 2$$

$\Rightarrow$ $a-1 = 1, 2$ $\Rightarrow$ $a = 2, 3$ pero $a > 5$ ¡!

Si $y = 1$ es analogo

$a^2 = ak - k - 1$ $\Rightarrow$ $a = 2, 3$ ¡!

P2 Emmanuel B. Hoja 4/5

⊙ Si $k \geq 2$, $y \geq 2$

entonces

$$\boxed{ky \geq k+y}$$

$\Leftrightarrow$ $ky - k - y \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(k-1)(y-1) \geq 1$

~~entonces~~ $k-1, y-1 \geq 1$ ó $\cancel{k-1, y-1 \leq -1}$

$\Leftarrow$ $k, y \geq 2$

y como $k, y \geq 2$ $\Rightarrow (k-1)(y-1) \geq 1 \cdot 1 = 1$ ✓

⊙ Entonces $-k-y \geq -ky$

$$a^2 = aky - k - y \geq ky(a-1)$$

$$\Rightarrow ky \leq \frac{a^2}{a-1} = a+1 + \frac{a^2-a^2+1}{a-1} = a+1+\frac{1}{a-1} < a+2$$

porque $a > 5$

y como ky enteros

$$\Rightarrow \boxed{ky \leq a+1}$$

Y como $2a > a+1 \geq ky \geq k+y$ ($a>5$) y al

ver mod a

$$a^2 = aky - k - y \Rightarrow \boxed{k+y \equiv 0 \mod a}$$

P2 Emmanuel B. Hoja 5) 5

⊙ Entonces $0 < k+y < 2a \Rightarrow \boxed{k+y = a}$

$\Rightarrow$ $a^2 = aky - a$

$a = ky - 1$

$$\boxed{\begin{aligned} ky &= a+1 \\ k+y &= a \end{aligned}}$$

$\Rightarrow ky = k+y+1$

$\Rightarrow (k-1)(y-1) = 2$

$\Rightarrow$ $k=3,\ y=2$ ó $k=2,\ y=3$ $\Rightarrow a = k+y = 5$ ¡!

(porque enteros pos ≥ 2)

pero $a < 5$ contradicción

⊙ Entonces $a \leq 5$ y ya vimos que solo se puede

$(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (2,9), (3,2), (3,14), (5,9), (5,14)$ ∎

P2 Emmanuel Sucio 1/7

$a \mid b+1$ $b \mid a^3+1$

$b = ak-1 \mid a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$

$a^3+1 = akx - x$

$\boxed{x \equiv -1 \bmod a}$

$a^3 - akx = -x-1$

$a(a^2-kx) = -x-1$

$a=1$ $1 \mid b+1$ $b \mid 2$

$b = 1, 2$ $\boxed{(1,1), (1,2)}$

$a=2$ $2 \mid b+1$

$b \mid 9$ $b=1$ ✓, 3 ✓, 9 ✓

$\boxed{(2,1)\ (2,3)\ (2,9)}$

$a=4$ $4 \mid b+1$

$b \mid 65 = 5 \cdot 13$

1 ✗
5 ✗
13 ✗
65 ✗

$a=3$ $3 \mid b+1$

$b \mid 28$ $b=1$ ✗, 2 ✓, 4 ✗, 7 ✗, 14 ✓, 28 ✗

$\boxed{(3,2)\ (3,14)}$

$a=5$ $5 \mid b+1$

$b \mid 126$

$2 \cdot 7 \cdot 9$

1	2	7	14
3	6	21	42
9	18	63	126

1
2
3
7
~~6~~ 6

$\boxed{(5,9)\ (5,14)}$

P2 Emmanuel B Serie 2/7

$a-1$

$2a-1$

$3a-1$

$\vdots$

$a^2 \cdot a - 1$ $\quad$ a^3+1 ?

↑ alguno divide

$b = a-1$

$\dfrac{a^3+1}{a-1}$

$$\begin{array}{c|ccc} & a^3 & a & 1 \\ \hline a & a^3 & a^2 & a \\ -1 & -a^2 & -a & -1 \end{array}$$

$\dfrac{2}{a-1}$ → divisores de 2 $\quad 1, 2$

$a-1 = 1, 2$

$a = 2, 3$

$\boxed{\begin{array}{c}(2,1)\\(3,2)\end{array}}$

$b = 2a-1$

$\dfrac{a^3+1}{2a-1}$

$$\begin{array}{c|c} 2a & a^3 \\ -1 & \end{array}$$

$a^3+1 - 2a^3 + a^2$

$-a^3 + a^2 + 1 - 2a^2 + a$

$-a^3 - a^2 + a + 1 - 2a + 1$

$\boxed{-a^3 - a^2 - a + 2}$

P2 From and 3, Sum 3/7

$b = ak - 1$

$a^3 + 1 = akx - x$

$x \equiv -1 \mod a$

So $x = ay - 1$

$a^3 + 1 = ak(ay - 1) - ay + 1$

$a^3 = a(kay - k - y)$

$a^2 = kay - k - y$

$(k - 1)(y - 1) + \cancel{(kyd)}$?

$ky(a - 1)$

$k + y \equiv 0 \mod a$

$y \equiv -k \mod a$

$a(a - ky) = -k - y$

$kya = a^2 + k + y$

$a(ky - a) = k + y$

$k + y > ky - a$

$a \leq ky \leq \frac{(k+y)^2}{4}$

$\cancel{k + y - ky > -a}$

$k + y \geq 2\sqrt{a}$

$\frac{k + y}{a} = ky - a$

P2 Emmanuel B. Sucio 4/7

$kya = a^2 + k + y \geq a^2 + 2\sqrt{ky}$

$\sqrt{ky} \geq a^2$

$\sqrt{ky}(a\sqrt{ky} - 2) \geq a^2$

$kya \leq \left(\frac{k+y+a}{3}\right)^3$

$aky - k - y - a^2 = 0$

$a=0 \quad -k-y$ $\qquad (a+1)^2 - a^2 = 2a+1$

$a=1 \quad ky - k - y - 1$

$a=2 \quad 2ky - k - y - 4$ $\quad \} \; ky - 2a - 1$

mod k $\qquad a^2 \equiv -y \mod k$

$a^2 \equiv -k \mod y$

$a^2 \equiv$ mod ky

P2 Emmanuel Suero 5/7

$k+y = az$

$a^2 = kay - az$

$a = ky - z$

$ky \leq \frac{z^2}{4}$

$a \leq \frac{z^2 - 4z}{4}$

$4a \leq z^2 - 4z$

$a^2 = (a-1)ky + ((k-1)(y-1)) - 1$?

$k + y > ky$

$k + y - ky > 0$

$(-k+1)(y-1) + 1 > 0$

$(-k+1)(y-1) > -1$

Si $a = 1$

$1 = ky - k - y$

$a = 2$

$4 = 2ky - k - y$

si ~~$-k+1 \leq 0$~~

$-k+1 \geq 0$ $\quad y - 1 \geq 0$

$-k \geq -1$ $\quad y \geq 1$

$k \leq 1 \Rightarrow k = 1$

$-k+1 \leq 0$ $\quad y - 1 \leq 0$

$k \geq 1$ $\quad y \leq 1 \Rightarrow y = 1$

Si $k = 1$

$a^2 = ay - y - 1$

$a^2 = y(a-1) - 1$ $\quad a \neq 1$

$\frac{a^2+1}{a-1} = y$

$\frac{a^2+1-a^2+a}{a-1} = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} \Rightarrow$ $a - 1 = 1$, $a - 1 = 2$

$a = 2, 3$

P2 Emmanuel B. Serie 6/7

Si $y=1$ (Analogo)

$a^2 = ak - k - 1$ $\Rightarrow$ $a = 2, 3$

$k, y \geq 2$ $ky \geq k + y$

$-ky \leq -k - y$

$a^2 = aky - k - y \leq (a-1)ky$

$\frac{a^2}{a-1} \leq ky$

$\frac{a^2-(a^2-1)}{a-1} + a + 1 \leq ky$

$a+1 \leq a + 1 + \frac{1}{a-1} \leq ky$ ← pero ky es entero !

$ky \geq a + 2$

$a^2 = aky - k - y \geq a^2 + 2a - ky$

$ky \geq k + y \geq 2a$

$a^2 = aky - k - y \geq ky(a-1)$

(si $a > 2$ y ky entero

$a + 1 + \cancel{\frac{1}{a-1}} \geq ky \geq k + y$ $\Rightarrow$ $k + y = 0$!

ó $k + y = a$

P2 Emmanuel D. Socio 7 / 17

$a^2 = aky - a$

$a = ky - 1$

$ky = a + 1$

$k + y = a$

$ky = k + y + 1$

$(k-1)(y-1) = 2$

2 1

1 2

$\cancel{k=2}, y = 1$ $a = 3$

$k = 1, y = 2$

$k = 3, y = 2$ $a = 5$

$k = 2, y = 3$

$a = 5$ $y = 4$

$k = 2$

$x = 14$ $y = 3$

$a \overline{)126}$ 14

36

Entonces

$a = 5$ y ya

resolvimos eso :)