

Angle Chasing

EMMANUEL BUENROSTRO

6 August 2025

§1 Herramientas

El Angle Chasing (Cazar ángulos) busca obtener la mayor información posible de una configuración gracias a los ángulos, una gran cantidad de problemas con esto obtienes la información suficiente para terminarlos, y si no una gran parte de lo que ocupas.

Cazar los ángulos muchas veces no es tan facil y puede ser lo unico necesario para resolver problemas muy complejos, todo si sabes como encontrarlos.

Como tal no hay mucha teoría como para un primer acercamiento a Angle Chasing, entonces quiero pensarlo más como una caja de herramientas que puedes usar para encontrar/usar los ángulos.

§1.1 Triangulos, poligonos

Proposition 1.1

Los ángulos interiores de un triángulo suman 180° .

Theorem 1.2

Un ángulo externo de un triángulo es la suma de los dos ángulos interiores opuestos.

Por ejemplo, si queremos saber el ángulo externo en el vertice C de un triangulo ABC sabemos que es igual a

$$180 - \angle C = 180 - (180 - \angle A - \angle B) = \angle A + \angle B$$

La función principal de esto es ahorrarte tiempo al momento de hacer cuentas (o tambien sirve para notar que puedes hacer cierta cuenta)

Theorem 1.3

En general, la suma de los ángulos internos de un poligono de n lados es

$$180(n - 2)$$

La demostración se deja como ejercicio al lector (esta como un problema más adelante).

Muchas veces ocupamos convertir información de lados a ángulos o viceversa, una manera de hacer esto es con semejanza, ya que justo con información de relaciones entre lados obtienes ángulos iguales.

Pero otra manera de hacerlo es con triangulos isosceles.

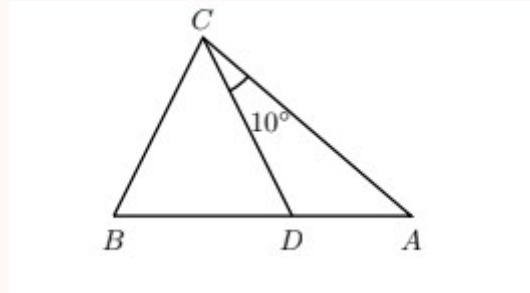
Theorem 1.4

En un triángulo no degenerado ABC se tiene que

$$AB = AC \iff \angle ABC = \angle ACB$$

Example 1.5

En el triángulo ABC con $\angle CAB + \angle ABC = 110^\circ$ y D es un punto en el segmento AB tal que $CD = CB$ y $\angle DCA = 10^\circ$. Calcula $\angle CAB$.



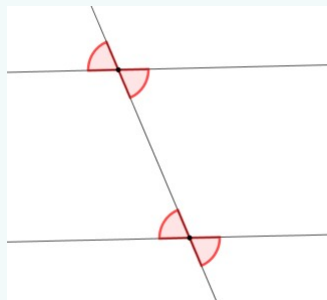
Solution. Como $\angle BCA = 180 - \angle CAB - \angle ABC = 180 - 110 = 70^\circ$. Entonces $\angle BCD = \angle BCA - \angle DCA = 60^\circ$, y como $DC = DB$ entonces $\angle DBC = \angle DCB = 60^\circ$, así que $\angle DCA = \angle DCB + \angle DBC = 120$ y $\angle CAB = 180 - \angle ACD + \angle ADC = 180 - 10 - 120 = 50^\circ$ \square

§1.2 Paralelas y opuestos por el vertice

Estas son igualdades de ángulos muy conocidas, no tengo mucho que agregar.

Proposition 1.6

En esta imagen hay dos rectas paralelas y una recta que las intersecta, entonces los ángulos rojos son iguales.



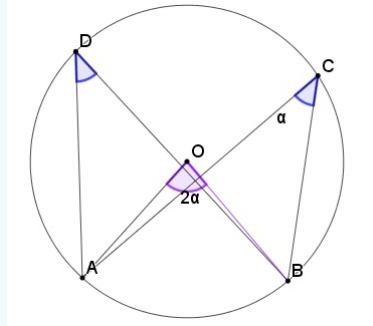
A través de un punto es opuestos por el vertice, a través de las dos rectas paralelas es entre paralelas.

§1.3 Círculos

Los círculos nos ayudan a mover muchos ángulos, principalmente con lo siguiente.

Theorem 1.7 (Ángulos inscritos)

Si el ángulo $\angle ACB$ está inscrito en el círculo (los 3 puntos están en el círculo), entonces abre un arco de $2\angle ACB$.



Particularmente

Theorem 1.8

Sea M el punto medio del arco AB que abre el ángulo $\angle ACB$, entonces CM es bisectriz de $\angle ACB$.

Esto sale aprovechando el isosceles que te da y moviendo los ángulos con los arcos. Ahora, estos ángulos se suelen aprovechar mayormente con cierto tipo de cuadrilateros, los cuadrilateros ciclicos.

Definition 1.9. Se dice que un cuadrilatero $ABCD$ es ciclico si y solo si A, B, C, D están en una misma circunferencia.

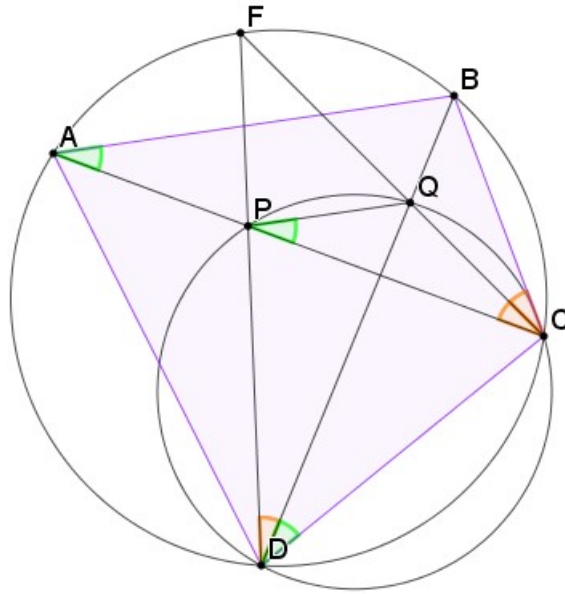
Y entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes en un cuadrilatero $ABCD$ (es decir, si una se cumple se cumplen todas y si una no se cumple ninguna se cumple).

- $ABCD$ es ciclico
- $\angle ABC + \angle CDA = 180$
- $\angle ABD = \angle ACD$

En particular quiero enfatizar el uso de los ángulos inscritos en los cuadrilateros ciclicos, ya que tienes muchos ángulos que abren los mismos arcos y por lo tanto son iguales (En esto se usa el 3er punto).

Example 1.10

Sea $ABCD$ un cuadrilatero ciclico. Sea F el punto medio del arco AB que no contiene a C ni a D . Las líneas DF y AC se intersectan en P y las líneas CF y BD se intersectan en Q . Demuestra que PQ y AB son paralelas.



Solution.

Como F es el punto medio del arco AB entonces $\angle BCF = \angle FCA$ y por lo tanto

$$\angle QDP = \angle BDF = \angle BCF = \angle FCA = \angle QCP$$

Por lo que $QPCD$ es ciclico y entonces

$$\angle CPQ = \angle CDQ = \angle CDB = \angle CAB$$

Por lo que son paralelas. □

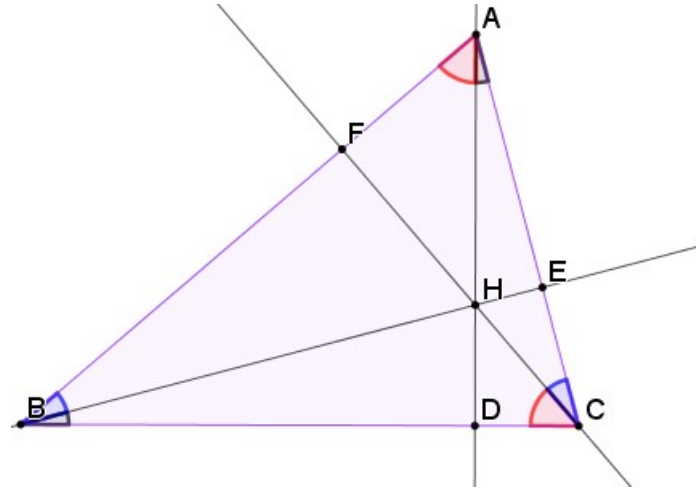
Theorem 1.11

Si tienes un triángulo ABC inscrito en un círculo ω con centro O y un punto P entonces estos 3 son equivalentes:

- PA es tangente a ω
- $OA \perp PA$
- $\angle PAB = \angle ACB$

§1.4 H y O

Si trazamos las alturas AD, BE, CF y el ortocentro H nos quedan los siguientes ángulos (Mismo color es que son iguales).



Esto por los distintos ciclicos que se forman por los ángulos de 90 (Además dos angulos de 90 suman 180).

Estos ciclicos son:

$$AEHF, CDHE, BFHD, AEDB, CDFA, BFEC$$

Además estos nos dan que H es el incentro de DEF .

Definition 1.12. En un triángulo dos rectas se llaman isogonales si pasan por un vértice y son reflejadas respecto a la bisectriz de ese vértice.

Theorem 1.13

En un triángulo ABC , se cumple que AH, AO son isogonales.

Proof. Se tiene que $\angle BAH = 90 - \angle B$ y además $\angle AOC = 2\angle B$ y como $OA = OC$ entonces $\angle CAO = \frac{180-2\angle B}{2} = 90 - \angle B$, entonces como el ángulo es el mismo son isogonales. \square

§1.5 Bisectrices

Si estamos pensando en ángulos las bisectrices tienen sentido que aparezcan, ya que estas te dan igualdades en ángulos.

Ahora pensando mas en incentros y excentros ya que estos en base a dos bisectrices (ya sean internas o externas) te dan una tercera la cual puede ser de mucha ayuda.

Example 1.14

Sea ABC un triángulo acutángulo, sea D el pie de altura desde C . La bisectriz de $\angle ABC$ intersecta CD en E e intersecta al circuncírculo ω de ADE en F . Si $\angle ADF = 45$ muestra que CF es tangente a ω .

§1.6 Reflejar

Podemos reflejar principalmente sobre un punto o sobre una recta.

Reflejar sobre un punto P es agarrar todos los punto X del plano y mandarlos al punto X' tal que P es el punto medio de XX' (en otras palabras, tomas la distancia de XP y

usas la misma distancia pero en el lado contrario).

Reflejar sobre una recta l es agarrar todos los puntos X del plano y mandarlos al punto X' tales que l es la mediatriz de XX' (en otras palabras tomar la distancia a la recta y usarla pero en el lado contrario)

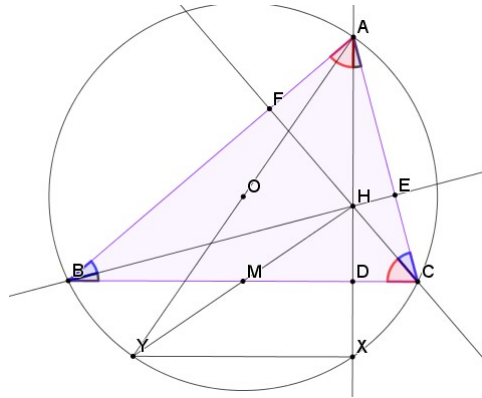
Reflejar cumple que si reflejas dos veces es como si no hubieras hecho nada.

Hacer reflexiones puede ser muy util en Angle Chasing para dos cosas, poder igualar ángulos sabiendo que cierta parte del dibujo es el reflejo de otra parte del dibujo, o para crear puntos/trazos auxiliares con ciertas propiedades y que te pueden dar ciclicos, paralelas, u otro tipo de información.

Theorem 1.15

En un triángulo ABC con ortocentro H , punto medio de BC M , X la reflexión de H sobre BC , Y la reflexión de H sobre M . Se cumple que AY es diametro de el circuncirculo y que X esta en el circuncirculo.

Proof. .



Se puede calcular que $\angle BHC = 180 - \angle A$ entonces $\angle BXC = 180 - \angle A$, asi que $BXCA$ es ciclico.

Y como $MH = MY$ y $MB = MC$ entonces $HBYC$ es un paralelogramo y $\angle BYC = 180 - \angle A$ asi que $BYCA$ tambien es ciclico.

Y como $MD \parallel YX$ por tales, entonces $\angle YXA = \angle MDH = 90$, entonces AY es diametro. \square

Como se acaba de mostrar una reflexión muy util es reflejar sobre algun punto medio para obtener paralelogramos, otro ejemplo es:

Example 1.16

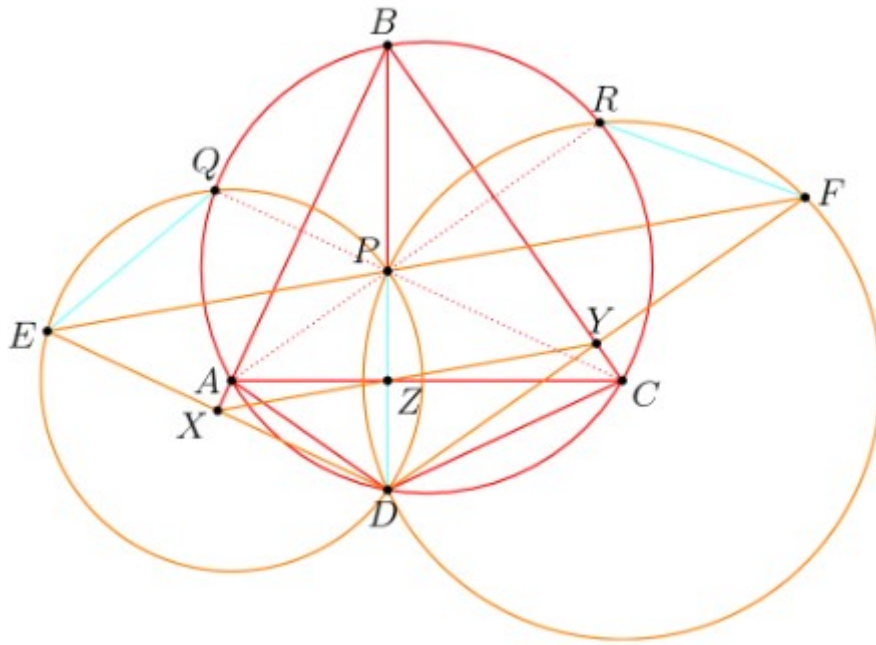
Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC . La circunferencia que pasa por B , H y C corta a la mediana AM en N . Muestra que $\angle ANH = 90^\circ$.

§1.7 El ejemplo god

Example 1.18

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en el círculo ω con $AC \perp BD$. Sean E, F las reflexiones de D sobre BA y BC , respectivamente, sea P la intersección de las líneas BD y EF . El circuncírculo de EPD interseca ω en D y Q y el circuncírculo de FPD interseca ω en D y R . Demuestra que $EQ = FR$.

Solution. (Creditos a Evan Chen)



Sean X, Y los pies de altura desde D hacia AB, AC , y Z la intersección de BD y AC . Por el Teorema de Simson X, Y, Z son colineales.

Entonces por Tales P es la reflexión de D sobre Z , en particular P es el ortocentro de ABC .

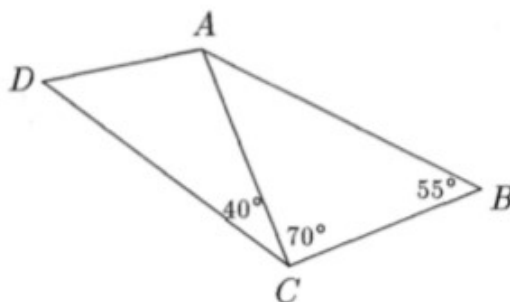
Ahora vamos a usar un punto falso Q' que va a ser la segunda intersección de CP con ω .

Como P es el ortocentro entonces Q' es el reflejado de P sobre AB , entonces BA es la mediatriz de PQ' y como D y E son reflejados, entonces AB también es mediatriz de DE y por lo tanto $Q'PDE$ es un trapecio isósceles ($QE = PD$ por la reflexión sobre AB), entonces es cíclico y $Q' = Q$. Y ocurre análogo para saber que $PRFD$ es un trapecio isósceles. Entonces $QE = PD = RF$.

□

§2 Problemas

Problem 2.1. En la siguiente figura $AD = BC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle DAC$?



Problem 2.2. Demuestra que la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es $180(n - 2)$

Problem 2.3. En la configuración del ortocentro demuestra que $\triangle AEF, BFD, CDE, ABC$ son semejantes entre sí.

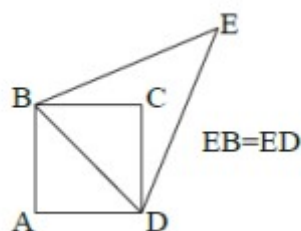
Problem 2.4. En la configuración del ortocentro demuestra que H es el incentro de DEF .

Problem 2.5. Sea P un punto dentro del círculo ω , considera todas las cuerdas que contienen a P . Demuestra que todos sus puntos medios están en un círculo.

Problem 2.6. En un triángulo ABC se tiene la bisectriz AD con D en BC . Si se tiene que $AC = BC = AD$, determina el valor de 7 veces el ángulo $\angle ACB$.

Problem 2.7. Sea ABC un triángulo con circuncírculo ω . Prueba que $AC \perp CB$ si y solo si AB es diámetro de ω .

Problem 2.8. Sea $ABCD$ y sea BED un triángulo isósceles. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BCE$?



Problem 2.9. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y OBC es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle OAC$?

Problem 2.20. Sea I el incentro de un triángulo ABC con $AB < AC$. La línea AI intersecta el circuncírculo de ABC en D . El circuncírculo de CDI intersecta BI de nuevo en K . Prueba que $BK = CK$.

Problem 2.21. Sea ABC un triángulo acutángulo escáleo con $\angle BAC = 60^\circ$ y ortocentro H . Sean ω_b la circunferencia que pasa por H y es tangente a AB en B , y ω_c la circunferencia que pasa por H y es tangente a AC en C . Prueba que ω_b y ω_c solamente tienen a H como punto común. Prueba que la recta que pasa por H y el circuncentro O del triángulo ABC es una tangente común a ω_b y ω_c .

Problem 2.22. En un triángulo acutángulo ABC , sea M el punto medio de BC . Sea P el pie de altura de C hacia AB . Supon que el circuncírculo de el triángulo ABP intersecta la línea BC en B y Q . Sea N el punto medio de AQ . Muestra que $NB = NC$.

Problem 2.23. Sea ABC un triángulo acutángulo con vértices sobre una circunferencia Γ . Sea ℓ la recta tangente a Γ en A . Sean D y E los puntos de intersección de la recta ℓ y del segmento AC con la circunferencia de centro B y radio BA , respectivamente. Muestra que DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC .

Problem 2.24. Tienes dos cuadrados $ABCD, AEFJ$ tal que BE y DJ están fuera de los dos cuadrados, sean M, N los puntos medios de BE, DJ . Demuestra que $AM = DN = NJ$ y $AN = BM = ME$

Problem 2.25. Sea ABC un triángulo con gravicentro G . Los puntos R y S están en los rayos GB y GC , tal que

$$\angle ABS = \angle ACR = 180 - \angle BGC$$

Prueba que $\angle RAS + \angle BAC = \angle BGC$