Problemas que he hecho

Emmanuel Buenrostro

23 January 2025

Contents

I Álgebra 5

1 Manipulación Algebraica 7
1.1 Problemas de Nivel 1 7
1.2 Problemas de Nivel 2 7
1.3 Problemas de Nivel 3 7

2 Formulas de Vieta 9
2.1 Problemas de Nivel 1 9
2.2 Problemas de Nivel 3 9

II Combinatoria 11

3 Principio de Casillas 13
3.1 Problemas de Nivel 2 13
3.2 Problemas de Nivel 3 13
3.3 Problemas de Nivel 4 13

4 Coloraciones 15
4.1 Problemas de Nivel 2 15
4.2 Problemas de Nivel 3 15
4.3 Problemas de Nivel 4 15

5 Grafos 17
5.1 Problemas de Nivel 1 17
5.2 Problemas de Nivel 2 17

6 Algoritmos 19
6.1 Problemas de Nivel 2 19
6.2 Problemas de Nivel 3 19
6.3 Problemas de Nivel 4 19

III Geometría 21

7 Humpty 23
7.1 Problemas de Nivel 2 23

IV Teoría de Números 25

8 Módulos 27
8.1 Problemas de Nivel 2 27
8.2 Problemas de Nivel 3 27

9 Dígitos 29
9.1 Problemas de Nivel 1 29

10 Ordenes **31**
10.1 Problemas de Nivel 1 31
10.2 Problemas de Nivel 2 31
10.3 Problemas de Nivel 3 31

11 Raices Primitivas **33**
11.1 Problemas del Nivel 2 33

12 Convoluciones **35**
12.1 Problemas de Nivel 3 35

 4

I

Álgebra

1 Manipulación Algebraica

§1.1 Problemas de Nivel 1

Problem 1.1.1 (Girs in Math at Yale 2022/ Mixer Round 6 ★). Suppose that x and y are positive real numbers such that $\log_2 x = \log_x y = \log_y 256$. Find xy.

§1.2 Problemas de Nivel 2

Problem 1.2.1 ([AAF06]/ 3.3). Most positive integers can be expressed as a sum of two or more consecutive positive integers. For example, $24 = 7 + 8 + 9$ and $51 = 25 + 26$. A positive integer that cannot be expressed as a sum of two or more consecutive integers is therefore interesting. What are all interesting integers?

§1.3 Problemas de Nivel 3

Problem 1.3.1 (IMO 1968/1). Find all triangles whose side lengths are consecutive integers, and one of whose angles is twice another.

Problem 1.3.2 (APMO 2020/2). Show that $r = 2$ is the largest real number r which satisfies the following condition:

If a sequence $a_1, a_2, \ldots$ of positive integers fulfills the inequalities

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + ra_{n+1}}$$

for every positive integer n, then there exists a positive integer M such that $a_{n+2} = a_n$ for every $n \geq M$.

2 Formulas de Vieta

§2.1 Problemas de Nivel 1

Problem 2.1.1 (Jalisco TST 2024 / Ac3.1)**.** Considere la siguiente ecuacion de cuarto grado:

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

Si se sabe que sus solcuiones son todas números primos distintos entre si, determine el máximo valor que puede tomar $\frac{c}{d}$

§2.2 Problemas de Nivel 3

Problem 2.2.1 (México Ibero TST 2024/B1)**.** Encuentre todos los polinomios con raices reales

$$P(x) = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \cdots + a_0$$

tal que $a_{2023} = 1, a_{2022} = 2023$ y $a_{2021} = \frac{2022 \cdot 2023}{2}$

II

Combinatoria

3 Principio de Casillas

§3.1 Problemas de Nivel 2

Problem 3.1.1 (India 2015/6)**.** Show that from a set of 11 square integers one can select six numbers $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ such that $a^2 + b^2 + c^2 \equiv d^2 + e^2 + f^2 \pmod{12}$.

§3.2 Problemas de Nivel 3

Problem 3.2.1 ([AAF06]/ 3.4)**.** Set $S = \{105, 106, \ldots, 210\}$. Determine the minimum value of n such that any n-element subset T of S contains at least two non-relatively prime elements.

§3.3 Problemas de Nivel 4

Problem 3.3.1 ([Cheb] ★)**.** Each point of a three-dimensional space is colored with one of two colors such that whenever an isosceles triangle ABC with $AB = AC$ has vertices of the same color c it follows that the midpoint of BC also is colored with c. Prove that there exists a perpendicular square prism with all vertices of equal color.

4 Coloraciones

§4.1 Problemas de Nivel 2

Problem 4.1.1 (Taiwan 2023/1)**.** Let n and m be positive integers. The daycare nanny uses $n \times m$ square floor mats to construct an $n \times m$ rectangular area, with a baby on each of the mats. Each baby initially faces toward one side of the rectangle. When the nanny claps, all babies crawl one mat forward in the direction it is facing at, and then turn 90 degrees clockwise. If a baby crawls outside of the rectangle, it cries. If two babies simultaneously crawl onto the same mat, they bump into each other and cry.

Suppose that it is possible for the nanny to arrange the initial direction of each baby so that, no matter how many times she claps, no baby would cry. Find all possible values of n and m.

Problem 4.1.2 (Jalisco TST 2024/F.4)**.** Un tablero de $n \times (n+1)$ se cubre con piezas de domino de 2×1 o 1×2. Se quiere trazar una de las diagonales de cada domino sin que ningún par de diagonales trazadas compartan ningun punto. Demuestra que para todo n, existe un acomo de los dominos donde pueden trazarse las diagonales de dichos dominos de manera deseada.

Problem 4.1.3 (ORO 2024/3 ★)**.** En cada casilla de un tablero de 9×9 se escribe un entero positivo, de manera que entre cualesquiera dos casillas en la misma fila o columna que tengan el mismo número n escrito, haya al menos n casillas intermedias. ¿Cuál es la minima suma posible para los números del tablero?

§4.2 Problemas de Nivel 3

Problem 4.2.1 (IMOSL 1989/19 ★)**.** A natural number is written in each square of an $m \times n$ chess board. The allowed move is to add an integer k to each of two adjacent numbers in such a way that non-negative numbers are obtained. (Two squares are adjacent if they have a common side.) Find a necessary and sufficient condition for it to be possible for all the numbers to be zero after finitely many operations.

Problem 4.2.2 (Rusia 2004/9.1)**.** Each grid point of a cartesian plane is colored with one of three colors, whereby all three colors are used. Show that one can always find a right-angled triangle, whose three vertices have pairwise different colors.

§4.3 Problemas de Nivel 4

Problem 4.3.1 (México Ibero TST 2024/A2)**.** El diamante de orden n es la figura formada por todas las casillas unitarias de una cuadricula cuyos centros (x, y) satisfacen $|x| + |y| \leq n$.
Cubrimos el diamate de orden n con fichas de domino (fichas de tamaño 1×2 o 2×1) de modo que las fichas no se solapan ni se salen del diamante. Un cuadrado de tamaño 2×2 es llamado completo, si esta cubierto por exactamente 2 dominos. Demuestre que hay al menos n cuadrados completos.

Problem 4.3.2 (Argentina TST 2018/3)**.** In a 100×100 board, each square is colored either white or black, with all the squares on the border of the board being black. Additionally, no 2×2 square within the board has all four squares of the same color. Prove that the board contains a 2×2 square colored like a chessboard.

5 Grafos

§5.1 Problemas de Nivel 1

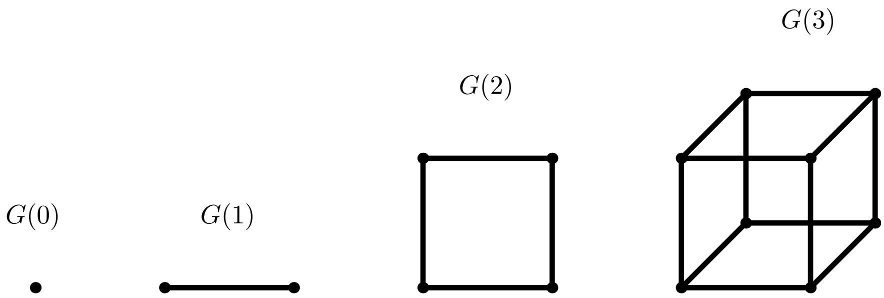
Problem 5.1.1 ([Vil] 1)**.** En un grafo G con n vertices, no hay vertice con grado mayor que δ. Prueba que se pueden colorear los vertices con a lo mas $\delta + 1$ colores tales que no hay dos vértices vecinos con el mismo color.

§5.2 Problemas de Nivel 2

Problem 5.2.1 (Jalisco TST 2024/Ac3.2)**.** Daniel dibuja algunos grafos en una pizarra. Comienza con el grafo $G(0)$, que consiste en un solo vertice sin ninguna arista. Para dibujar al grafo $G(n+1)$ Daniel realiza lo siguiente:

1. Numera todos los vertices del grafo $G(n)$.
2. Hace una copia del grafo $G(n)$, y a las copias de los vertices numerados les agrega un apostrofe.
3. Agrega una arista que une a los vertices originales con sus copias por parejas (1 con 1', 2 con 2', . . .)

A continuación se muestran los primeros grafos:



Para el grafo $G(n)$ con $n > 0$, Daniel decide colorear todos los vertices con n colores de tal forma que cada vertice esta conectado por medio de aristas con al menos un vertice de cada color. Muestre que solo podria hacer esto si $n = 2^k$ con k un entero positivo. Nota: No es necesario encontrar la estrategia para colorear los vertices.

Problem 5.2.2 (IG Reels)**.** Tienes 8 baterías, 4 buenas y 4 malas, no sabes si una bateria es buena o mala. Tienes una linterna que ocupa dos pilas buenas para funcionar. En un movimiento colocas dos pilas en la linterna y checas si funciona. ¿Cuál es la menor cantidad de movimientos en la que puedes garantizar que la linterna prende?

6 Algoritmos

§6.1 Problemas de Nivel 2

Problem 6.1.1 (Entrenamiento IMO Nueva Zelanda 2011)**.** Hay $2n$ personas en una mesa circular, y m galletas distribuidas entre ellos. Las galletas pueden ser pasadas según las siguientes reglas:

1. Cada persona solo puede pasar galletas a sus vecinos, y

2. Cada vez que alguien pase una galleta, esta persona debe comerse una también.

Sea A una de estas personas. Encuentra el menor m tal que sin importar como se distribuyan m galletas, hay una manera de pasarlas de tal forma que A termine con al menos una.

§6.2 Problemas de Nivel 3

Problem 6.2.1 ([Vil] 4)**.** En una grafica con V vertices y A aristas, prueba que hay una subgrafica tal que cada vertice tiene grado al menos $\frac{A}{V}$.

§6.3 Problemas de Nivel 4

Problem 6.3.1 (Rusia 2005/10.2)**.** In a $2 \times n$ array we have positive reals s.t. the sum of the numbers in each of the n columns is 1. Show that we can select a number in each column s.t. the sum of the selected numbers in each row is at most $\frac{n+1}{4}$.

III

Geometría

7 Humpty

§7.1 Problemas de Nivel 2

Problem 7.1.1 (Jalisco TST 2024/Ac3.3)**.** Sea ABC un triángulo con ortocentro H. La circunferencia que pasa por BHC corta a la mediana AM en R. Sea D la intersección de BH con AC. Muestre que M, R, D y C son concíclicos.

IV

Teoría de Números

8 Módulos

§8.1 Problemas de Nivel 2

Problem 8.1.1 (PUMaC 2012 N A3). Let the sequence $\{x_n\}$ be defined by $x_1 \in \{5, 7\}$ and, for $k \geq 1, x_{k+1} \in \{5^{x_k}, 7^{x_k}\}$. For example, the possible values of x_3 are $5^{5^5}, 5^{5^7}, 5^{7^5}, 5^{7^7}, 7^{5^5}, 7^{5^7}, 7^{7^5}$, and 7^{7^7}. Determine the sum of all possible values for the last two digits of x_{2012}.

Problem 8.1.2 (IMOSL 2000 N1). Determine all positive integers $n \geq 2$ that satisfy the following condition: for all a and b relatively prime to n we have

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{if and only if} \qquad ab \equiv 1 \pmod{n}.$$

§8.2 Problemas de Nivel 3

Problem 8.2.1 (México Ibero TST 2024/C2). Sean a y m enteros positivos y sea $f(n) = an^2 + n$ una función de los enteros positivos a los enteros positivos. Demuestra que el conjunto de residuos que deja $f(n)$ al dividir por m es completo (es decir, contiene a todos los residuos de 0 a $m-1$), si y solo si m tiene la forma $p_1^{a_1} p_2^{a_k} \cdots p_k^{a_k}$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son los divisores primos de a y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números enteros no negativos.

9 Dígitos

§9.1 Problemas de Nivel 1

Problem 9.1.1 ([AAF06]/ 3.2)**.** Let $S(x)$ be the sum of the digits of the positive integer x in its decimal representation.

- Prove that for every positive integer x, $\frac{S(x)}{S(2x)} \leq 5$. Can this bound be improved?
- Prove that $\frac{S(x)}{S(3x)}$ is not bounded.

10 Ordenes

§10.1 Problemas de Nivel 1

Problem 10.1.1 (AIME 2019/14)**.** Find the least odd prime factor of $2019^8 + 1$.

Problem 10.1.2 ([Chea])**.** Let p be a prime. How many nonzero elements modulo p have order $p-1$ (i.e. are primitive roots)?

§10.2 Problemas de Nivel 2

Problem 10.2.1 (IZhO 2020/1)**.** Given natural number n such that, for any natural a, b number $2^a 3^b + 1$ is not divisible by n.Prove that $2^c + 3^d$ is not divisible by n for any natural c and d

Problem 10.2.2 (Japan 1996/2)**.** Let m, n be positive integers with $(m, n) = 1$. Find $(5^m + 7^m, 5^n + 7^n)$.

Problem 10.2.3 (St. Petersburg ★)**.** For integers $a, n > 2$, prove that $n \mid \phi(a^n - 1)$.

§10.3 Problemas de Nivel 3

Problem 10.3.1 (IMO 2005/4 ★)**.** Determine all positive integers relatively prime to all the terms of the infinite sequence

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \ n \geq 1.$$

Problem 10.3.2 (Suiza TST 2022/6)**.** Prueba que si

$$\frac{n^2 + 4^n + 7^n}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n^2 + 4^n + 7^n}{11n} \in \mathbb{N} \forall n \geq 2.$$

Problem 10.3.3 (PUMaC 2016 N A7 ★)**.** Compute the number of positive integers n between 2017 and 2017^2 such that $n^n \equiv 1 \pmod{2017}$.

11 Raices Primitivas

§11.1 Problemas del Nivel 2

Problem 11.1.1 ([Chea]). Let p be a prime and n a positive integer. Determine the remainder when $1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$ is divided by p, as a function of n and p.

12 Convoluciones

§12.1 Problemas de Nivel 3

Problem 12.1.1 (PUMaC 2016 N A7 ★). Compute the number of positive integers n between 2017 and 2017^2 such that $n^n \equiv 1 \pmod{2017}$.

Bibliografía

[AAF06] Titu Andreescu, Dorin Andrica, and Zuming Feng. *104 Number Theory Problems*. Birkhauser Boston, 2006.

[Chea] Evan Chen. *Orders and Exponents*.

[Cheb] Evan Chen. *Russian Combinatorics*.

[Vil] Diego Villareal. *Problemas de Algoritmos*.