Problemas que he hecho

Emmanuel Buenrostro

26 July 2025

Contents

I

Álgebra

1 Manipulación Algebraica

§1.1 Problemas de Nivel 1

Problem 1.1.1 (Girs in Math at Yale 2022/ Mixer Round 6 ★). Suppose that x and y are positive real numbers such that $\log_2 x = \log_x y = \log_y 256$. Find xy.

§1.2 Problemas de Nivel 2

Problem 1.2.1 ([AAF06]/ 3.3). Most positive integers can be expressed as a sum of two or more consecutive positive integers. For example, $24 = 7 + 8 + 9$ and $51 = 25 + 26$. A positive integer that cannot be expressed as a sum of two or more consecutive integers is therefore interesting. What are all interesting integers?

§1.3 Problemas de Nivel 3

Problem 1.3.1 (IMO 1968/1). Find all triangles whose side lengths are consecutive integers, and one of whose angles is twice another.

Problem 1.3.2 (IMOSL 2013/A1). Let n be a positive integer and let $a_1, \ldots, a_{n-1}$ be arbitrary real numbers. Define the sequences $u_0, \ldots, u_n$ and $v_0, \ldots, v_n$ inductively by $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$, and $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$, $v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ for $k = 1, \ldots, n-1$.

Prove that $u_n = v_n$.

Problem 1.3.3 (IMO 2014/1). Let $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ be an infinite sequence of positive integers. Prove that there exists a unique integer $n \geq 1$ such that

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problem 1.3.4 (APMO 2020/2). Show that $r = 2$ is the largest real number r which satisfies the following condition:

If a sequence $a_1, a_2, \ldots$ of positive integers fulfills the inequalities

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

for every positive integer n, then there exists a positive integer M such that $a_{n+2} = a_n$ for every $n \geq M$.

Problem 1.3.5 (IMOSL 2014/A2). Define the function $f : (0, 1) \to (0, 1)$ by

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{if } x < \frac{1}{2} \\ x^2 & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Let a and b be two real numbers such that $0 < a < b < 1$. We define the sequences a_n and b_n by $a_0 = a, b_0 = b$, and $a_n = f(a_{n-1})$, $b_n = f(b_{n-1})$ for $n > 0$. Show that there exists a positive integer n such that

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

2 Desigualdades

§2.1 Desigualdades+Igualdades

§2.1.1 Problemas de Nivel 1

Problem 2.1.1 (OMM 2021/1)**.** Los números reales positivos a_1, a_2, a_3 son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, y análogamente, b_1, b_2, b_3 son números reales positivos distintos y términos consecutivos de una progresión aritmética. ¿Es posible utilizar tres segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3 como bases, y otros tres segmentos de longitudes b_1, b_2, b_3 como alturas, para construir tres rectángulos de igual área?

§2.1.2 Problemas de Nivel 2

Problem 2.1.2 (EGMO 2023/1)**.** Se tienen $n \geq 3$ números reales positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Para cada $1 \leq i \leq n$ se define $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$, donde $a_0 = a_n$ y $a_{n+1} = a_1$. Suponga que para cada $1 \leq i \leq n$ cada $i \leq j \leq n$ se tiene que $a_i \leq a_j$ si y sólo si $b_i \leq b_j$.

Demuestre que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

§2.1.3 Problemas de Nivel 4

Problem 2.1.3 (OMM 2020/6)**.** Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales no nulos que satisfacen la ecuación

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\ldots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

Encuentra todos los valores posibles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3 Formulas de Vieta

§3.1 Problemas de Nivel 1

Problem 3.1.1 (Jalisco TST 2024 / Ac3.1)**.** Considere la siguiente ecuacion de cuarto grado:

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

Si se sabe que sus solcuiones son todas números primos distintos entre si, determine el máximo valor que puede tomar $\frac{c}{d}$

§3.2 Problemas de Nivel 3

Problem 3.2.1 (México Ibero TST 2024/B1)**.** Encuentre todos los polinomios con raices reales

$$P(x) = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \cdots + a_0$$

tal que $a_{2023} = 1, a_{2022} = 2023$ y $a_{2021} = \frac{2022 \cdot 2023}{2}$

II

Combinatoria

4 Invarianza

§4.1 Problemas de Nivel 2

Problem 4.1.1 (PEMNAS 2023/S1). On the board are written the numbers 2, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$. Pepem will perform a game, where each step follows the following step:

(1). Pepem selects two numbers on the board, say a and b that satisfy the condition $ab > 1$. (2). The two selected numbers are deleted, then two new numbers are written on the board, namely $a - \frac{1}{b}$ and $b + \frac{1}{a}$.

If the above steps cannot be performed at some point, then the game is stopped. Is it possible for the game to stop with the numbers written on the board being 1, 1, 1, 1?

Problem 4.1.2 ([Cheb] ★). You're given an $n \times n$ matrix of real numbers. In an operation, you may negate the entries of any row or column. Prove that in a finite number of operations, you can ensure every row and every column of the matrix has nonnegative sum.

Problem 4.1.3 ([Cheb] ★). There are three boxes of stones. Each hour, Sisyphus moves a stone from one box to another. For each transfer of a stone, he receives from Zeus a number of coins equal to the number of stones in the box from which the stone is drawn minus the number of stones in the recipient box, with the stone Sisyphus just carried not counted. If this number is negative, Sisyphus pays the corresponding amount (and can pay later if he is broke).

After hours, all the stones lie in their initial boxes. What is the greatest possible earning of Sisyphus at that moment, in terms of the initial quantities in the three boxes?

§4.2 Problemas de Nivel 3

Problem 4.2.1 (México Ibero TST 2024/C1). Gregorio escribe en un pizarron 2023 enteros no negativos. Luego cada minuto Santiago puede escoger algún número del pizarron, restarle 1 y sumarle 1 a todos los demás números. Determinar el menor entero k para el que Gregorio puede escribir números con suma k y además es posible que Santiago pueda lograr mediante finitas operaciones que los números escritos en el pizarron sean 2023 enteros positivos consecutivos.

5 Principio de Casillas

§5.1 Problemas de Nivel 1

Problem 5.1.1 ([MR16]). Considera cinco puntos en un cuadrado de 2×2. Prueba que al menos dos puntos estan a distancia menor o igual a $\sqrt{2}$.

Problem 5.1.2 ([MR16]). Prueba que entre 51 números tomados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$ existe una pareja que son primos relativos

Problem 5.1.3 ([MR16]). Muestra que existe una sucesión de cuatro digitos que ocurre una infinidad de veces como los primeros cuatro dígitos de una potencia de 2

Problem 5.1.4 ([MR16] ★). Suponga que hay n personas en una conferencia y algunas de estas parejas de estas personas se saludan de mano. Prueba que hay al menos dos personas que saludaron al mismo número de personas.

Problem 5.1.5 ([MR16]). Dado 5 puntos en la superficie de una esfera, prueba que existe un hemisferio cerrado que contiene al menos 4 de estos puntos

Problem 5.1.6 ([MR16] ★). Prueba que en algun subconjunto de 51 números tomados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$ existe una pareja tal que alguno divide al otro.

Problem 5.1.7 ([MR16]). Sea $n \geq 1$ un entero positivo. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos prueba que es posible pintar algunos de estos números de verde de manera que la suma de los números verdes sea divisible por n

§5.2 Problemas de Nivel 2

Problem 5.2.1 (India 2015/6). Show that from a set of 11 square integers one can select six numbers $a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, f^2$ such that $a^2 + b^2 + c^2 \equiv d^2 + e^2 + f^2 \pmod{12}$.

Problem 5.2.2 (Erdos-Szekeres Theorem). given r, s , any sequence of distinct real numbers with length at least $(r-1)(s-1)+1$ contains a increasing subsequence of length r or a decreasing subsequence of length s.

§5.3 Problemas de Nivel 3

Problem 5.3.1 ([AAF06]/ 3.4). Set $S = \{105, 106, \ldots, 210\}$. Determine the minimum value of n such that any n-element subset T of S contains at least two non-relatively prime elements.

§5.4 Problemas de Nivel 4

Problem 5.4.1 ([Cheb] ★). Each point of a three-dimensional space is colored with one of two colors such that whenever an isosceles triangle ABC with $AB = AC$ has vertices of the same color c it follows that the midpoint of BC also is colored with c. Prove that there exists a perpendicular square prism with all vertices of equal color.

6 Coloraciones

§6.1 Problemas de Nivel 2

Problem 6.1.1 (Taiwan 2023/1)**.** Let n and m be positive integers. The daycare nanny uses $n \times m$ square floor mats to construct an $n \times m$ rectangular area, with a baby on each of the mats. Each baby initially faces toward one side of the rectangle. When the nanny claps, all babies crawl one mat forward in the direction it is facing at, and then turn 90 degrees clockwise. If a baby crawls outside of the rectangle, it cries. If two babies simultaneously crawl onto the same mat, they bump into each other and cry.

Suppose that it is possible for the nanny to arrange the initial direction of each baby so that, no matter how many times she claps, no baby would cry. Find all possible values of n and m.

Problem 6.1.2 (Jalisco TST 2024/F.4)**.** Un tablero de $n \times (n+1)$ se cubre con piezas de domino de 2×1 o 1×2. Se quiere trazar una de las diagonales de cada domino sin que ningún par de diagonales trazadas compartan ningun punto. Demuestra que para todo n, existe un acomo de los dominos donde pueden trazarse las diagonales de dichos dominos de manera deseada.

Problem 6.1.3 (ORO 2024/3 ★)**.** En cada casilla de un tablero de 9×9 se escribe un entero positivo, de manera que entre cualesquiera dos casillas en la misma fila o columna que tengan el mismo número n escrito, haya al menos n casillas intermedias. ¿Cuál es la minima suma posible para los números del tablero?

§6.2 Problemas de Nivel 3

Problem 6.2.1 (IMOSL 1989/19 ★)**.** A natural number is written in each square of an $m \times n$ chess board. The allowed move is to add an integer k to each of two adjacent numbers in such a way that non-negative numbers are obtained. (Two squares are adjacent if they have a common side.) Find a necessary and sufficient condition for it to be possible for all the numbers to be zero after finitely many operations.

Problem 6.2.2 (Rusia 2004/9.1)**.** Each grid point of a cartesian plane is colored with one of three colors, whereby all three colors are used. Show that one can always find a right-angled triangle, whose three vertices have pairwise different colors.

§6.3 Problemas de Nivel 4

Problem 6.3.1 (México Ibero TST 2024/A2)**.** El diamante de orden n es la figura formada por todas las casillas unitarias de una cuadricula cuyos centros (x, y) satisfacen $|x| + |y| \leq n$.
Cubrimos el diamate de orden n con fichas de domino (fichas de tamaño 1×2 o 2×1) de modo que las fichas no se solapan ni se salen del diamante. Un cuadrado de tamaño 2×2 es llamado completo, si esta cubierto por exactamente 2 dominos. Demuestre que hay al menos n cuadrados completos.

Problem 6.3.2 (Argentina TST 2018/3)**.** In a 100×100 board, each square is colored either white or black, with all the squares on the border of the board being black. Additionally, no 2×2 square within the board has all four squares of the same color. Prove that the board contains a 2×2 square colored like a chessboard.

20

7 Grafos

§7.1 Problemas de Nivel 1

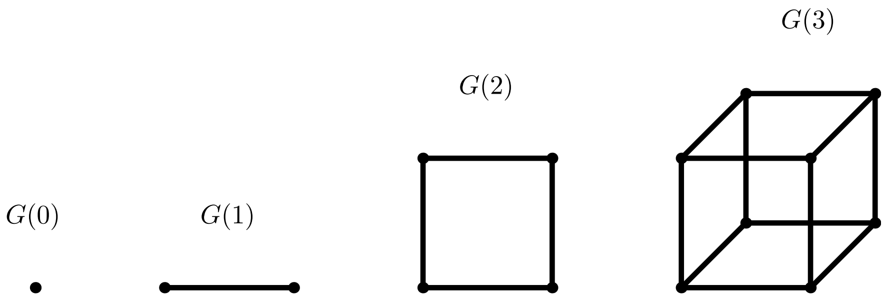
Problem 7.1.1 ([Vil] 1)**.** En un grafo G con n vertices, no hay vertice con grado mayor que δ. Prueba que se pueden colorear los vertices con a lo mas $\delta + 1$ colores tales que no hay dos vértices vecinos con el mismo color.

§7.2 Problemas de Nivel 2

Problem 7.2.1 (Jalisco TST 2024/Ac3.2)**.** Daniel dibuja algunos grafos en una pizarra. Comienza con el grafo $G(0)$, que consiste en un solo vertice sin ninguna arista. Para dibujar al grafo $G(n+1)$ Daniel realiza lo siguiente:

1. Numera todos los vertices del grafo $G(n)$.
2. Hace una copia del grafo $G(n)$, y a las copias de los vertices numerados les agrega un apostrofe.
3. Agrega una arista que une a los vertices originales con sus copias por parejas (1 con $1'$, 2 con $2'$, ...)

A continuación se muestran los primeros grafos:



Para el grafo $G(n)$ con $n > 0$, Daniel decide colorear todos los vertices con n colores de tal forma que cada vertice esta conectado por medio de aristas con al menos un vertice de cada color. Muestre que solo podria hacer esto si $n = 2^k$ con k un entero positivo. Nota: No es necesario encontrar la estrategia para colorear los vertices.

Problem 7.2.2 (IG Reels)**.** Tienes 8 baterías, 4 buenas y 4 malas, no sabes si una bateria es buena o mala. Tienes una linterna que ocupa dos pilas buenas para funcionar. En un movimiento colocas dos pilas en la linterna y checas si funciona. ¿Cuál es la menor cantidad de movimientos en la que puedes garantizar que la linterna prende?

8 Algoritmos

§8.1 Problemas de Nivel 1

Problem 8.1.1 (ORO 2024/1)**.** Inicialmente, los números $1, 3, 4$ están escritos en un pizarrón. Realizamos el siguiente proceso repetidamente. Consideramos todos los números que pueden obtenerse como suma de tres números distintos escritos en el pizarrón y que no han sido escritos todavÍnicialment, y los escribimos en el pizarrón. Repetimos este proceso hasta que en algún paso, todos los números que escribimos en ese paso son mayores a 2024. Determina todos los enteros $1 \leq k \leq 2024$ que no fueron escritos en el pizarrón.

§8.2 Problemas de Nivel 2

Problem 8.2.1 (Entrenamiento IMO Nueva Zelanda 2011)**.** Hay $2n$ personas en una mesa circular, y m galletas distribuidas entre ellos. Las galletas pueden ser pasadas según las siguientes reglas:

1. Cada persona solo puede pasar galletas a sus vecinos, y
2. Cada vez que alguien pase una galleta, esta persona debe comerse una también.

Sea A una de estas personas. Encuentra el menor m tal que sin importar como se distribuyan m galletas, hay una manera de pasarlas de tal forma que A termine con al menos una.

§8.3 Problemas de Nivel 3

Problem 8.3.1 ([Vil])**.** En una gráfica con V vértices y A aristas, prueba que hay una subgrafica tal que cada vértice tiene grado al menos $\frac{A}{V}$.

Problem 8.3.2 (CF 1854 A2)**.** Tienes un arreglo de enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (pueden ser positivos, negativos o 0). Puedes realizar una operación varias veces en el arreglo (posiblemente 0).

En una operación escoges i, j (pueden ser iguales) y sumarle a_j a a_i.

Haz que el arreglo sea no decreciente en a lo más 31 operaciones.

Problem 8.3.3 (China 2010/5)**.** There is a deck of cards placed at every points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ and O, where $n \geq 3$. We can do one of the following two operations at each step: 1) If there are more than 2 cards at some points A_i, we can withdraw three cards from that deck and place one each at A_{i-1}, A_{i+1} and O. (Here $A_0 = A_n$ and $A_{n+1} = A_1$); 2) If there are more than or equal to n cards at point O, we can withdraw n cards from that deck and place one each at $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Show that if the total number of cards is more than or equal to $n^2 + 3n + 1$, we can make the number of cards at every points more than or equal to $n + 1$ after finitely many steps.

§8.4 Problemas de Nivel 4

Problem 8.4.1 (Rusia 2005/10.2)**.** In a $2 \times n$ array we have positive reals s.t. the sum of the numbers in each of the n columns is 1. Show that we can select a number in each column s.t. the sum of the selected numbers in each row is at most $\frac{n+1}{4}$.

 24

III

Geometría

9 Homotecia

§9.1 Problemas de Nivel 3

Problem 9.1.1 (Mexico Ibero TST 2024/B2)**.** Sea ABC un triángulo fijo. Decimos que una recta ℓ es balanceada si corta el interior de los segmentos AC y AB en puntos P y Q respectivamente, de manera que el área del triángulo APQ sea igual al área del cuadrilátero $BQPC$. Sea X la intersección de BP y CQ y sea Y el punto medio de PQ. Demuestre que la recta XY pasa por un punto fijo a medida que variamos ℓ sobre todas las rectas balanceadas.

10 Construirte cosas

§10.1 Problemas de Nivel 3

Problem 10.1.1 (OMM 2007/6). Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Muestra que $BD = AC$ si y sólo si $\angle BAC = 2\angle ABM$.

11 Trigo

§11.1 Problemas de Nivel 3

Problem 11.1.1 (IMO 1968/1)**.** Find all triangles whose side lengths are consecutive integers, and one of whose angles is twice another.

12 Cazar Longitudes

§12.1 Problemas de Nivel 2

Problem 12.1.1 (IGO 2024/Adv1)**.** An equilateral triangle $\triangle ABC$ is split into 4 triangles with equal area; three congruent triangles $\triangle ABX, \triangle BCY, \triangle CAZ$, and a smaller equilateral triangle $\triangle XYZ$, as shown. Prove that the points X, Y, Z lie on the incircle of triangle $\triangle ABC$.

13 Humpty

§13.1 Problemas de Nivel 2

Problem 13.1.1 (Jalisco TST 2024/Ac3.3)**.** Sea ABC un triángulo con ortocentro H. La circunferencia que pasa por BHC corta a la mediana AM en R. Sea D la intersección de BH con AC. Muestre que M, R, D y C son concíclicos.

14 Geo Elemental ★

§14.1 Problemas de Nivel 2

Problem 14.1.1 (Mexico Ibero TST 2024/A1)**.** Sea ABC un triángulo, Γ su circuncírculo y O su circuncentro. Sea D el punto diametralmente opuesto a C en Γ Sea X un punto sobre Γ tal que $AX \parallel CD$. Sea Y un punto sobre la recta BC tal que $\angle CDY = 90$. Si los puntos X, O, Y son colineales, demostrar que las rectas YD, AB y CX concurren.

§14.2 Problemas de Nivel 3

Problem 14.2.1 (ELMO 2020/4 ★)**.** Let acute scalene triangle ABC have orthocenter H and altitude AD with D on side BC. Let M be the midpoint of side BC, and let D' be the reflection of D over M. Let P be a point on line $D'H$ such that lines AP and BC are parallel, and let the circumcircles of $\triangle AHP$ and $\triangle BHC$ meet again at $G \neq H$. Prove that $\angle MHG = 90°$.

Problem 14.2.2 (ISL 2022/G4)**.** Let ABC be an acute-angled triangle with $AC > AB$, let O be its circumcentre, and let D be a point on the segment BC. The line through D perpendicular to BC intersects the lines AO, AC, and AB at W, X, and Y, respectively. The circumcircles of triangles AXY and ABC intersect again at $Z \neq A$. Prove that if $W \neq D$ and $OW = OD$, then DZ is tangent to the circle AXY.

Problem 14.2.3 (IGO 2024/Adv2)**.** Point P lies on the side CD of the cyclic quadrilateral $ABCD$ such that $\angle CBP = 90°$. Let K be the intersection of AC, BP such that $AK = AP = AD$. H is the projection of B onto the line AC. Prove that $\angle APH = 90°$.

§14.3 Problemas de Nivel 4

Problem 14.3.1 (Taiwan TST 2024/R2.1)**.** Given triangle ABC. Let $BPCQ$ be a parallelogram (P is not on BC). Let U be the intersection of CA and BP, V be the intersection of AB and CP, X be the intersection of CA and the circumcircle of triangle ABQ distinct from A, and Y be the intersection of AB and the circumcircle of triangle ACQ distinct from A. Prove that $\overline{BU} = \overline{CV}$ if and only if the lines AQ, BX, and CY are concurrent.

IV

Teoría de Números

15 Módulos

§15.1 Problemas de Nivel 2

Problem 15.1.1 (PUMaC 2012 N A3)**.** Let the sequence $\{x_n\}$ be defined by $x_1 \in \{5, 7\}$ and, for $k \geq 1, x_{k+1} \in \{5^{x_k}, 7^{x_k}\}$. For example, the possible values of x_3 are $5^{5^5}, 5^{5^7}, 5^{7^5}, 5^{7^7}, 7^{5^5}, 7^{5^7}, 7^{7^5}$, and 7^{7^7}. Determine the sum of all possible values for the last two digits of x_{2012}.

Problem 15.1.2 (IMOSL 2000 N1)**.** Determine all positive integers $n \geq 2$ that satisfy the following condition: for all a and b relatively prime to n we have

$$a \equiv b \pmod{n} \qquad \text{if and only if} \qquad ab \equiv 1 \pmod{n}.$$

§15.2 Problemas de Nivel 3

Problem 15.2.1 (PUTNAM 2023/B2)**.** For each positive integer n, let $k(n)$ be the number of ones in the binary representation of $2023 \cdot n$. What is the minimum value of $k(n)$?

Problem 15.2.2 (México Ibero TST 2024/C2)**.** Sean a y m enteros positivos y sea $f(n) = an^2 + n$ una función de los enteros positivos a los enteros positivos. Demuestra que el conjunto de residuos que deja $f(n)$ al dividir por m es completo (es decir, contiene a todos los residuos de 0 a $m - 1$), si y solo si m tiene la forma $p_1^{a_1} p_2^{a_k} \cdots p_k^{a_k}$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son los divisores primos de a y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números enteros no negativos.

16 Bezout

§16.1 Problemas de Nivel 2

Problem 16.1.1 (Japan 1996/2). Let m, n be positive integers with $(m, n) = 1$. Find $(5^m + 7^m, 5^n + 7^n)$.

17 Dígitos

§17.1 Problemas de Nivel 1

Problem 17.1.1 ([AAF06]/ 3.2)**.** Let $S(x)$ be the sum of the digits of the positive integer x in its decimal representation.

- Prove that for every positive integer x, $\frac{S(x)}{S(2x)} \leq 5$. Can this bound be improved?
- Prove that $\frac{S(x)}{S(3x)}$ is not bounded.

18 Ordenes

§18.1 Problemas de Nivel 1

Problem 18.1.1 (AIME 2019/14)**.** Find the least odd prime factor of $2019^8 + 1$.

Problem 18.1.2 ([Chea])**.** Let p be a prime. How many nonzero elements modulo p have order $p - 1$ (i.e. are primitive roots)?

§18.2 Problemas de Nivel 2

Problem 18.2.1 (Fermat's Christmas theorem (Caso particular) ★)**.** Sea p un primo. Demuestra que si existe un entero n tal que $p \mid n^2 + 1$ entonces $4 \mid p - 1$.

Problem 18.2.2 ([Can])**.** Demuestra que todo divisor primo de $11\ldots1$ (con 2027 unos) es de la forma $2027k + 1$.

Problem 18.2.3 ([Can])**.** Sea p un primo que no es $1 \pmod 8$. Demuestra que si $p \mid x^4 + y^4$ entonces $p \mid x$ y $p \mid y$.

Problem 18.2.4 ([Can] ★)**.** Sea $n > 1$ un entero positivo. Demuestra que n no divide a $2^n - 1$.

Problem 18.2.5 (IZhO 2020/1)**.** Given natural number n such that, for any natural a, b number $2^a 3^b + 1$ is not divisible by n.Prove that $2^c + 3^d$ is not divisible by n for any natural c and d

Problem 18.2.6 (Japan 1996/2)**.** Let m, n be positive integers with $(m, n) = 1$. Find $(5^m + 7^m, 5^n + 7^n)$.

Problem 18.2.7 (St. Petersburg ★)**.** For integers $a, n > 2$, prove that $n \mid \phi(a^n - 1)$.

Problem 18.2.8 ([Can])**.** Encuentra todos los enteros positivos $n < 10^{100}$ tales que $n \mid 2^n, n - 1 \mid 2^n - 1$ y $n - 2 \mid 2^n - 2$.

§18.3 Problemas de Nivel 3

Problem 18.3.1 (IMO 2005/4 ★)**.** Determine all positive integers relatively prime to all the terms of the infinite sequence

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \ n \geq 1.$$

Problem 18.3.2 (Suiza TST 2022/6)**.** Prueba que si

$$\frac{n^2 + 4^n + 7^n}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n^2 + 4^n + 7^n}{11n} \in \mathbb{N} \forall n \geq 2.$$

Problem 18.3.3 (PUMaC 2016 N A7 ★)**.** Compute the number of positive integers n between 2017 and 2017^2 such that $n^n \equiv 1 \pmod{2017}$.

19 Raices Primitivas

§19.1 Problemas del Nivel 2

Problem 19.1.1 ([Can]). Si n tiene al menos una raiz primitiva, entonces tiene exactamente $\varphi(\varphi(n))$.

Problem 19.1.2 ([Can] ★). Demuestra que $a^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{a}{p}\right)$ donde $\left(\frac{a}{p}\right)$ es el simbolo de Legendre, y es igual a 0 si $p \mid a$, 1 si a es residuo cuadratico $\pmod p$ y -1 si no.

Problem 19.1.3 ([Chea]). Let p be a prime and n a positive integer. Determine the remainder when $1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$ is divided by p, as a function of n and p.

20 Residuos Cuadraticos

§20.1 Problemas de Nivel 2

Problem 20.1.1 ([Chea]). Show that there are no primitive roots modulo 2^n for $n \geq 3$. That is, show there is no integer g such that g, g^2, g^3, $\ldots$covers every odd residue modulo 2^n.

21 Convoluciones

§21.1 Problemas de Nivel 3

Problem 21.1.1 (PUMaC 2016 N A7 ★). Compute the number of positive integers n between 2017 and 2017^2 such that $n^n \equiv 1 \pmod{2017}$.

Bibliografía

[AAF06] Titu Andreescu, Dorin Andrica, and Zuming Feng. *104 Number Theory Problems*. Birkhauser Boston, 2006.

[MR16] V. Matei and E. Reiland. *112 Combinatorial Problems from the AwesomeMath Summer Program*. XYZ Press, 2016. ISBN: 9780996874526. URL: https://books.google.com.mx/books?id=EMrBjwEACAAJ.

[Can] Tomás Cantú. *Orden, Ciclos y Raíces primitivas*.

[Chea] Evan Chen. *Orders and Exponents*.

[Cheb] Evan Chen. *Russian Combinatorics*.

[Dom] Victor Domínguez. *Sucesiones y seriés*.

[Vil] Diego Villareal. *Problemas de Algoritmos*.