P4 Emmanuel B. Hoja 1/

⊡ un triangulo con vertices enteros (a,b), (c,d), (e,f) tiene area entera

$$\Longleftrightarrow$$

$$2 \mid ad + cf + eb - bc - dc - af$$

Prueba
El área del triangulo es

$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ a & b \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left| \underbrace{ad + cf + eb - bc - de - af}_{a\ adentro} \right|$$

Si es entera lo de adentro es par y si adentro es par el area es entera □

⊡ Si un triangulo tiene vertices enteros y área entera, entonces dos de sus vertices son iguales mod 2.

Prueba: Sean (a,b), (c,d), (e,f)

⊙ Por casillas dos de $\{a,c,e\}$ y dos de $\{b,d,f\}$ son iguales mod 2.

⊙ SPG $a \equiv c \not\equiv e$, $b \not\equiv d \equiv f$ (En otros casos ya se cumple eso ~~problema~~ porque $a \equiv c$, $b \equiv d$ ó $c \equiv e$, $d \equiv f$.)

P4 Emmanuel B. Hoja 2/

$ad + cf + eb - bc - de - af$

$\equiv ad + a\cancel{d} + eb - ab - de - a\cancel{d}$

$\equiv a(d-b) - e(d-b)$

$\equiv (d-b)(a-e) \equiv 0$

Como 2 es primo entonces

$a \equiv e$ ó $b \equiv d$ ó

$\square$

$\boxed{\cdot}$ Existe un punto $P=(x,y)$ entero dentro del ~~ABC~~ triangulo ABC con area ≥ 1 (entero) con ABP, BPC, CPA con área entera y $P \neq A, B, C$.

Prueba

Que los triangulos ABP, BPC, CPA tengan área entera es $\Leftrightarrow$

$x(b-d) + y(c-a) + ad - bc \equiv 0 \mod 2$

$x(b-f) + y(e-a) + af - be \equiv 0 \mod 2$

$x(d-f) + y(e-c) + cf - de \equiv 0 \mod 2$

pn Emmanuel B. Hoja 3/

⊙ SPG podemos asumir ~~$a \equiv b$~~,

$$a \equiv c \mod 2$$
$$b \equiv d \mod 2$$

(Por lo que probamos antes)

Caso: (todo es mod 2)

⊙ $a \equiv 0$, $b \equiv 0$, $e \equiv 0$, $f \equiv 0$

Cualquier (x, y) cumple porque se vuelve $0 \equiv 0$, y existe el punto medio de (a, b), (c, d) verdadero

⊙ $a \equiv 0$, $b \equiv 0$, $e \equiv 0$, $f \equiv 1$

$0 \equiv 0$

$-x + 1 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 1$ sirve

$-x + 1 \equiv 0$

En general $(x, y) \equiv (a, b)$ funciona

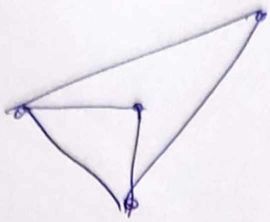
$a(b-b) + b(a-a) + ab - ab \equiv 0 \equiv 0$ ✓

$a(b-f) + b(e-a) + af - be \equiv ab - af + be - ab + af - be \equiv 0$ ✓

$a(b-f) + b(e-a) + af - be \equiv$ Lo de arriba.

P4 Emmanuel [illegible]/ Sueño 21

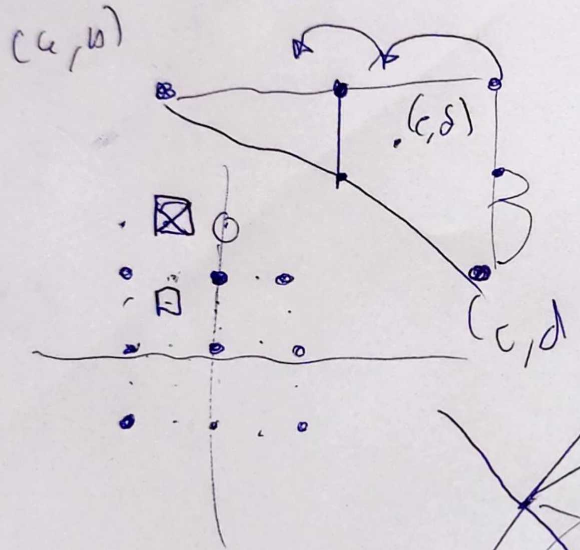
Existen dos vertices que al trazar perpendiculares a los ejes estén dentro del ABC



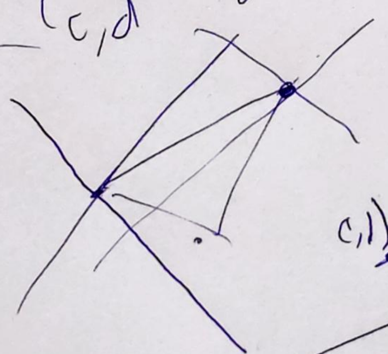
Si es Area par tomas el punto medio $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

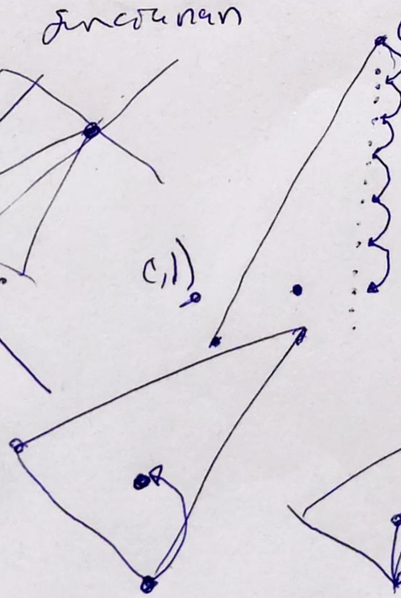
$x = a \qquad y = b$

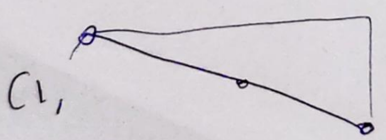
si $f = b$

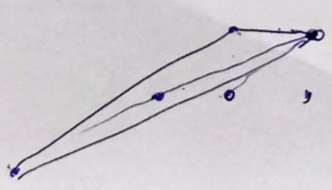


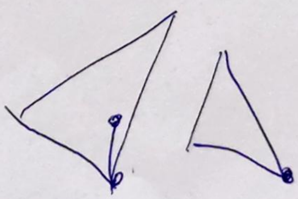
(a,b) y (c,d) encuentran





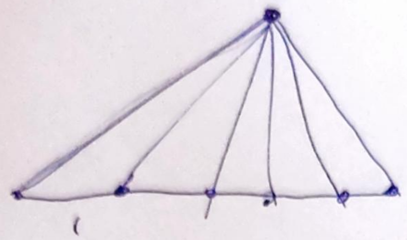


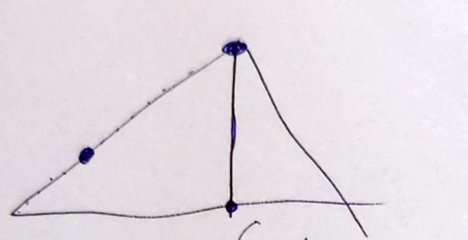


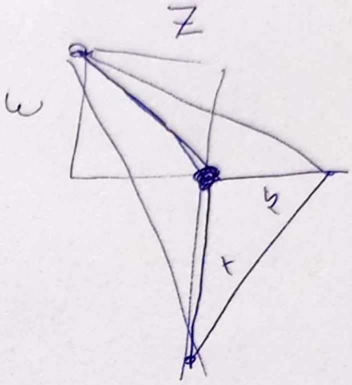


pu Emmanuel Sep 11

Triangulos Area 1

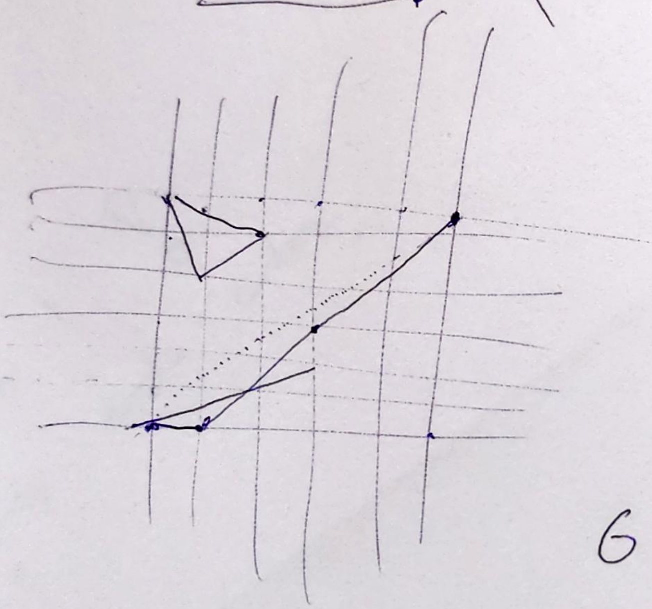




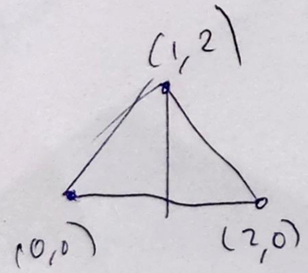


$xy, \; xw, \; yz$

alguna impar
digamos y z.



G gravicentro



$(a,b)\ (c,d)\ (e,f)$

$$\left(\frac{a+c+e}{3}, \frac{b+d+f}{3}\right)$$

Las medianas $(a,b)(c,d)(e,f)$ si $a \not\equiv c \mod 2$

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

P4 Emmanuel Sucio 21

(a,b) (c,d) (e,f)

$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ $\left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right)$, $\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right)$

si ninguna es entera entera

como hay dos con la misma paridad entre (a,c,e) y (b,d,f) (casillas) esos dos tienen que ser de distintos puntos, SPG

$a \equiv c \not\equiv e$ $d \equiv f \not\equiv b$

Area

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ a & b \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\,|ad+cf+eb-bc-de-af|\,\right]$$

es par

$\equiv ad + \cancel{ad} + eb - ab - de - \cancel{ad}$

$\equiv a(d-b) - e(d-b)$

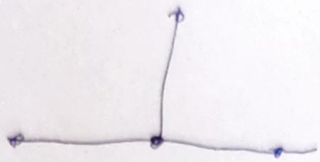
$\equiv (d-b)(a-e) \equiv 1$ ¡!

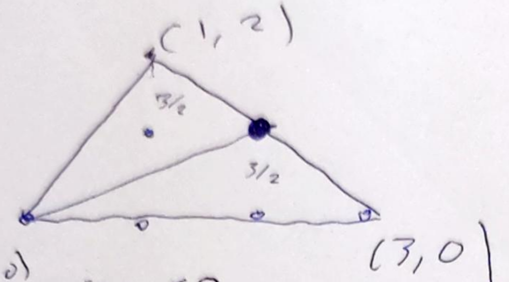
Entonces si existe algun punto medio entero,

divides en la mediana?

en Emmanuel Sierio 3)

Si el area es par mediana e inducción



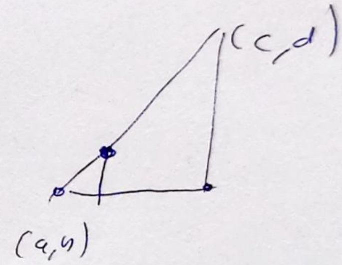


Si es impar

Si $p \mid A$ primo $\neq 2$ consideramos

(a,b) (c,d) (e,f)

$$\left(\frac{c+a(p-1)}{2p}, \frac{d+b(p-1)}{2p}\right)$$ ← análogos



$c \equiv a \mod p$

$d \equiv b \mod p$

$ad + cf + eb - bc - de - af \equiv 0 \mod p$

$\frac{c-a}{p}$, $a =$

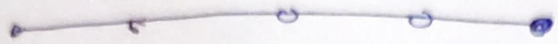
$$\frac{c+a(p-1)}{2p}$$

~~f(2a)~~

si todos a, c, e distintos.

P4 Emmanuel Barroso 3, Suelo 4/

[illegible] consistencia.



$a + \frac{c-a}{p} = \frac{c+a(p-1)}{p}$

$a + \frac{2c-2a}{p} = \frac{2c+a(p-2)}{p}$

$\vdots$

$(p-1)c + a$

$ax + cy$ con $x+y \equiv p$ [illegible]

$x, y \geq 1$

$ax \equiv -cy$ si a y c ambos múltiplos de p cualquiera funciona :)

$a \not\equiv 0 \mod p$

$x \equiv -\frac{c}{a} \cdot y$ Tomo $y \equiv a$

y $x \equiv c$ ~~lo que sigue~~

Si $p \mid c$

pr Emmanuel B. Sec.: 5)

Queremos dos idénticos mod p entre a, c, e

$ad + cf + eb - bc - de - af \equiv 0$

$\cancel{d(a-e)} + cf$

$b(e-c) + d(a-e) + f(c-a) \equiv 0$

¿Si ninguna de las diferencias es 0 mod p qué pasa?

$p < 5$

Ejemplo: $a \equiv 1$ $c \equiv 2$ $e \equiv 3$

$b - 2d + f \equiv 0$

$b + f \equiv 2d \mod 5$

$b = 1$ $f = 5$ $d = 3$

$ad + cf + eb - bc - de - af$

$= 3 + 10 + 3 - 2 - 9 - 5 = 0$

Área 0 ?

no :(

$f \equiv 10$

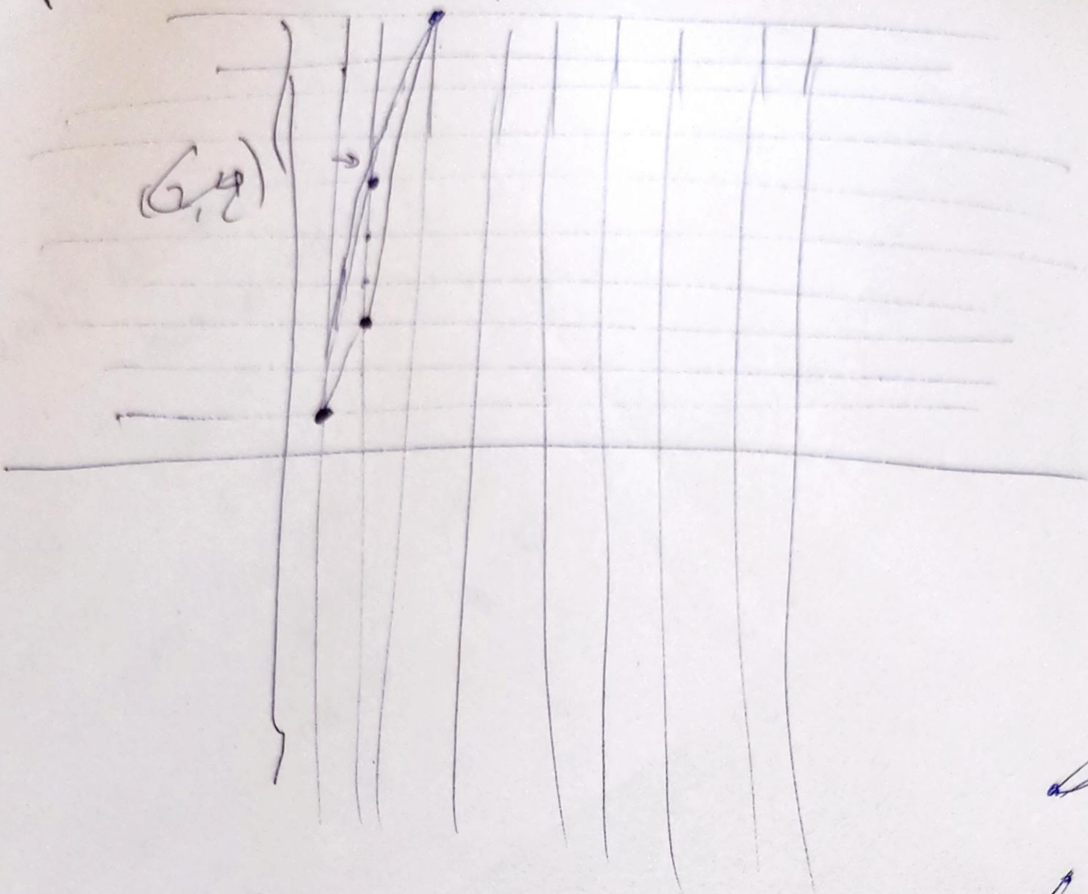
$3 + 20 + 3 - 2 - 9 - 10 = 5$?

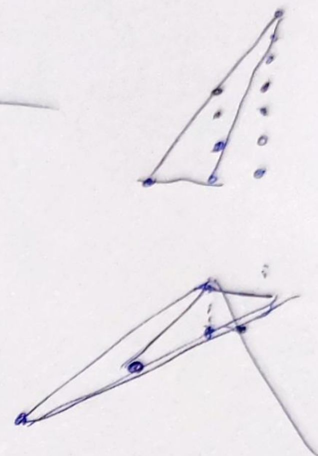
No entra

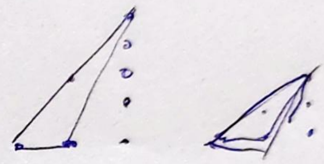
+10 -5

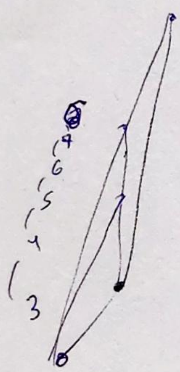
10

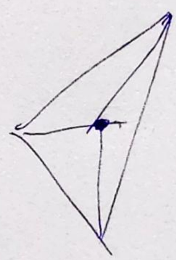
pu Euremul Seis 61



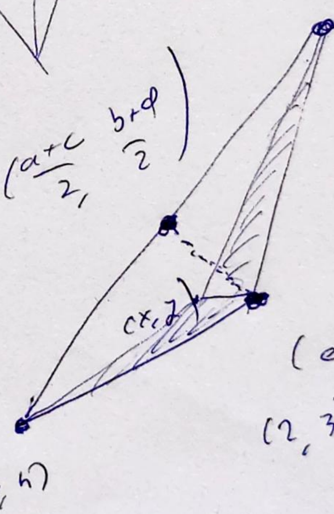








(3,7)



p4 Enunciado Sueño 8/

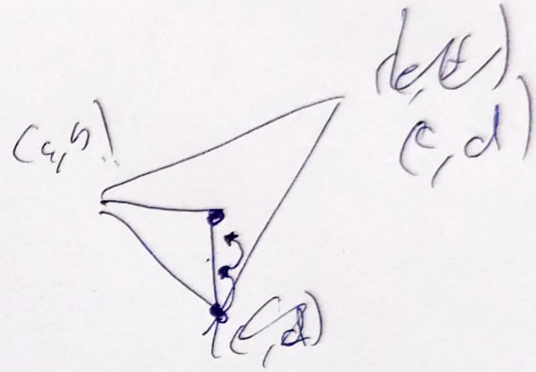
$x \equiv a \qquad y = f$

$a(b-f) + f(e-a) + af - bc$

$= ab - ad + ef - \cancel{af} + \cancel{af} - bc$

$= (a-e)(b-f) \qquad$ si $a \equiv e$ ó $b \equiv f$

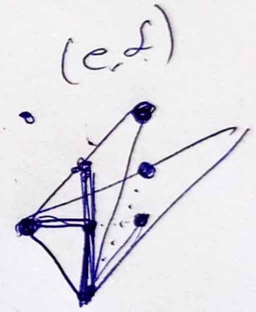
si $a \equiv f \equiv 0$ distintos
$b \equiv c \equiv 1$



$x(1) + y(1) + 0 - 1$

$x + y \equiv 1$

$x \equiv e \quad y \equiv f$



$e(b-f) + f(e-a) + af - bc$

$= \cancel{eb} - \cancel{ef} + \cancel{ef} - \cancel{af} + \cancel{af} - \cancel{bc} \equiv 0$

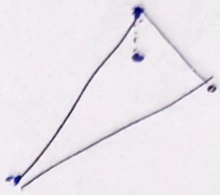
$(x,y) \equiv (e,f)$

P 4 Emmanuel B. Sueño 8/

y siempre esta

$a = 0 \quad b = 0$

$e = 1 \quad f = 1$



$-x \ -y = 0$

$x+y$ par

entonces dividimos el triangulo con ese $P = (x, y)$ e inductivamente acabamos :)

$a = 1 \quad b = 1$

$e = 0 \quad f = 0$

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$a = 1 \quad b = 1$

$e = 0 \quad f = 1$

$\cancel{y} \ 2 =$

$y + 1 = 0 \quad y = 1$

$x = 1$

cualquiera,

pu Gurumd Sucio (0)

$(e+1, f+1)$?

$(e+1)(b-f) + (f+1)(e-a) + af - be$

$\cancel{eb} - \cancel{ef} + b - f + \cancel{ef} - \cancel{af} + e - a + \cancel{af} - \cancel{be}$

$b - f + e - a$

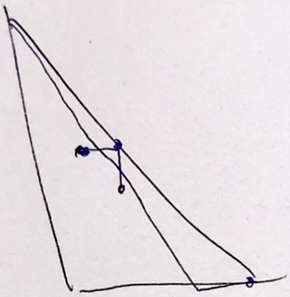
Si hay k puntos dentro

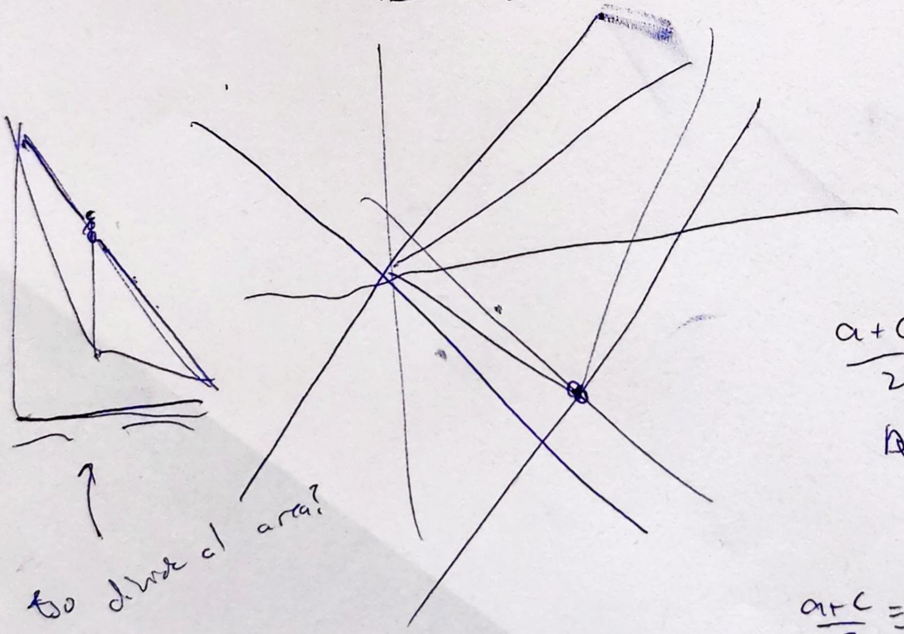
u cajas

ny

$(0,0)$ $(0,1)$

$(1,0)$ $(1,1)$





to divide el area?

$\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+d}{2}$

$\frac{a+c}{2} \equiv a$

$a+c \equiv 2a \mod 4$