Fase 1

Sophia Michelle Herrera Zaragoza A01748644

viernes, 4 de noviembre de 2022 01:59 p. m.

Fase 1 – Actividad 1 – Puntos de equilibrio

Puntos de equilibrio

Considerando la variable que describe el número de presas en el tiempo *p(t)* y de depredadores en el tiempo *d(t)*, los puntos de equilibrio son las soluciones constantes, soluciones del sistema:

$$\begin{cases} p'(t) = 0 \\ d'(t) = 0 \end{cases}$$

Valor de las constantes:

Considerados los datos históricos:

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1920	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1921	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1922	-	-

Considerando las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} p'(t) = \alpha_1 p(t) - \alpha_2 p(t) d(t) \\ d'(t) = -\beta_1 d(t) + \beta_2 p(t) d(t) \end{cases}$$

Para modelar los datos es necesario encontrar el valor de las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{1,}\ \beta_2$.

Podemos considerar los valores iniciales p(0)=30 y d(0)=4 que son el primer dato de la tabla.

Para calcular las constantes se debe tomar en cuenta que:

$\bar{p} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\ \bar{d} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

$p(t) = p(0) * exp(\alpha_1 t)$ (cuando la población de depredadores es muy baja)

$d(t) = d(0) * exp(-\beta_1 t)$ (cuando la población de presas es muy baja)

PASO 1.- Encontrar los puntos de equilibrio del sistema

$p'(t) = \alpha_1 p(t) - \alpha_2 p(t) d(t)$

$d'(t) = -\beta_1 d(t) + \beta_2 p(t) d(t)$

$a_1 p - a_2 p d = 0$

$d = \frac{a_1 p}{a_2 p} \therefore d = \frac{a_1}{a_2}$ 1

$-\beta_1 \left(\frac{a_1}{a_2}\right) + \beta_2 p \left(\frac{a_1}{a_2}\right) = 0$

$p = \frac{B_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{\beta_2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} \therefore p = \frac{B_1}{B_2}$ 2

$p = 0 \quad d = 0$

Paso 2.- Encontrar el promedio con los datos numéricos de tabla

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1920	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1921	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1922	-	-

$\bar{d} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow \frac{915.9}{21} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow 39.08 = \frac{a_1}{a_2}$

$\bar{p} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow \frac{423}{21} = \frac{B_1}{B_2} \Rightarrow 20.16 = \frac{B_1}{B_2}$

PASO 3.- Con las ecuaciones

Año antes $p(0)$ y $d(0)$

Año después $p(t)$ y $d(t)$

$p(t) = p(0) * exp(\alpha_1 t)$ (cuando la población de depredadores es muy baja)

$d(t) = d(0) * exp(-\beta_1 t)$ (cuando la población de presas es muy baja)

Sustituir valores y despejar $\alpha_1\ \ y\ \beta_1$

Después encontrar las otras dos constantes de las siguientes ecuaciones $\bar{p} = \frac{\beta_1}{\beta_2}\ \bar{d} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

$p(t) = p(0)\, e^{a_1 t}$ — $p(1908) = 21.4\, e^{a_1(1)}$

$d(t) = d(0)\, e^{-B_1 t}$ — $d(1908) = 13\, e^{-B_1(1)}$

$22 = 21.4 e^{a_1(1)} \rightarrow \frac{22}{21.4} = \frac{21.4 e^{a_1}}{21.4}$

$\rightarrow 1.028 = e^{a_1} \Rightarrow \ln(1.028) = \ln(e^{a_1})$

$\ln(1.028) = a_1 \rightarrow a_1 = 0.02761$

$8.3 = 13 e^{-B_1(1)} \rightarrow \left(8.3 = 13 e^{-B_1}\right)\frac{1}{13}$

$0.6384 = e^{-B_1} \rightarrow \ln(0.6384) = \ln(e^{-B_1})$

$-\ln(0.6384) = B_1 = 0.4486$

$20.16 = \frac{0.4486}{\beta_2} \quad \therefore \beta_2 = 0.02225$

$39.08 = \frac{0.02761}{a_2} \quad \therefore a_2 = 0.000722$