Devoir 1 — Corrigé

Date de remise : mardi le 25 septembre 2018

Moment d'inertie et accélération angulaire

Le problème consiste à étudier le comportement de l'avion CRJ-200 de Bombardier illustré à la figure 1 (voir site web Bombardier CRJ-200). Cet avion sera simulé en utilisant des cônes, des cylindres et des parallélipipèdes comme illustré à la figure 2. L'origine du système de coordonnées du laboratoire correspond à la position z d'un point situé sous les ailes, à la position y correspondant au centre du fuselage et à une position x à l'arrière de l'avion.

Figure 1: Bombardier CRJ-200.

Les dimensions et masses des différentes composantes du CRJ-200 que nous considèrerons sont les suivantes :

- Cabine de pilotage : elle peut être représentée par un cône plein horizontal de longueur $h_c = 3.82$ m ayant un rayon à la base de $r_c = 1.345$ m. La masse volumique de la cabine est uniforme, la masse totale au décollage étant de $m_c = 0.7$ tonnes.
- Fuselage : il est représenté par un cylindre plein horizontal de longueur $h_f = 22.95$ m et de rayon $r_f = r_c$. La masse volumique du fuselage est uniforme, la masse totale au décollage étant de $m_f = 15.1$ tonnes.

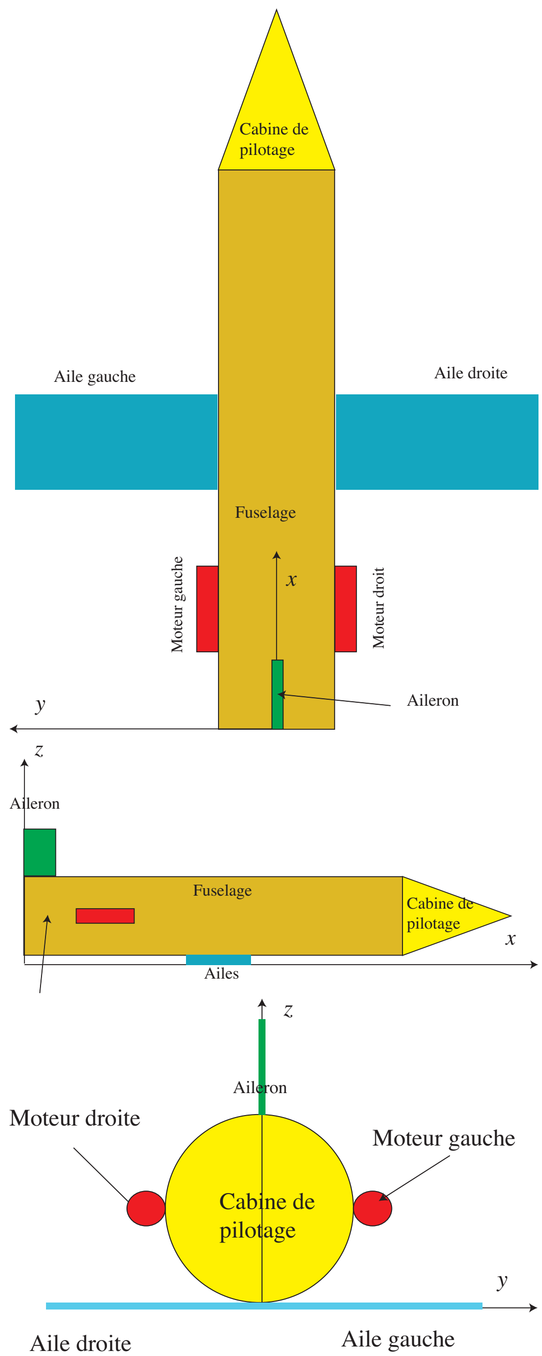

Figure 2: Modèle de l'avion Bombardier CRJ-200 vu du dessus (haut), du côté droit (centre) et de face (bas). Sur ces figures, la droite et la gauche sont définies par rapport au pilote regardant vers l'avant de l'avion.

- Ailes : elles seront représentées par des parallélipipèdes de longueur $L_A = 10.6$ m, de largeur $l_A = 1.14$ m et d'épaisseur $e_A = 0.25$ m. La masse volumique est supposée uniforme, la masse totale de chaque aile au décollage étant de $m_A = 3.25$ tonnes. Elles sont reliées ensemble au point $y_A = 0$ m et attachées sous le fuselage (le dessous de l'aile est localisé à $z_A = 0$ m et son centre à $z = e_A/2$). Le centre de l'aile dans la direction x est localisé au point $x_A = 10.54$ m.

- Aileron : c'est un des parallélipipèdes de hauteur $h_a = 2.1$ m, de largeur $l_a = 1.28$ m et d'épaisseur $e_a = 7$ cm. Sa masse volumique est supposée uniforme, la masse totale au décollage étant de $m_a = 0.5$ tonnes. Il est attaché au haut du fuselage ($z_a = 2r_f + e_A$) et centré au point $(x_{a,c}, y_{a,c}) = (l_a/2, 0\text{ m})$.

- Moteurs : ils sont représentés par des cylindres pleins horizontaux de longueur $L_m = 3.68$ m et de rayon $r_m = 0.724$ m. Leur masse volumique est uniforme, la masse totale au décollage de chaque moteur étant de $m_m = 1.7$ tonnes. Ils sont attachés sur les côtés du fuselage et centrés à $(x_{m,c}, y_{m,c}, z_{m,c}) = (5\text{ m}, \pm(r_f + r_m), r_f + e_A)$.

But du devoir

Le but de ce devoir est de programmer une fonction Matlab qui permet de calculer la position du centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire du CRJ-200 pour différentes conditions initiales. La fonction demandée doit pouvoir être appelée comme suit :

```
[pcm MI aa]=Devoir1(posA,ar,va,Forces)
```

Les données d'entrée pour cette fonction sont :

- `posA=[posA_x;posA_y;posA_z]` est le vecteur $\vec{r}_n$ indiquant la position dans l'espace du nez de l'avion (pointe de la cabine de pilotage) en m.

- `ar` représente l'angle de rotation (en rad) du CRJ-200 autour de l'axe des y. Cet angle correspond à $-\theta$ avec θ l'inclinaison de l'avion par rapport au sol comme indiqué à la figure 3.

- `va=[va_x;va_y;va_z]` est le vecteur $\vec{\omega}$ décrivant la vitesse angulaire (en rad/s) du CRJ-200 autour de son centre de masse.

- `Forces=[Force_md Force_mg Force_p]` est un vecteur de trois composantes indiquant les forces (Newton) exercées par les moteurs et la portée.
  - `Force_md` est la force exercée par le moteur de droite du CRJ-200. Cette force est dans la direction de l'axe du moteur et est exercée à l'arrière du moteur en son centre ;

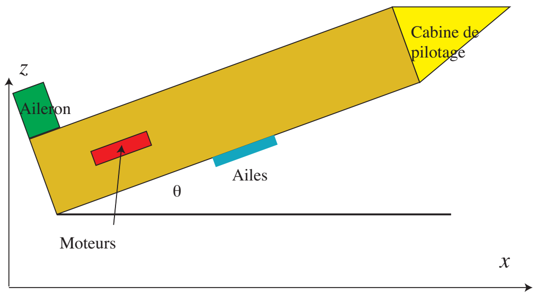

Figure 3: Avion incliné de θ par rapport au sol.

- `Force_mg` est la force exercée par le moteur de gauche du CRJ-200. Cette force est dans la direction de l'axe du moteur et est exercée à l'arrière du moteur en son centre ;
- `Force_p` est la force de portée. Cette force est dans la direction verticale, quelle que soit l'orientation de l'appareil, et est appliquée sous les ailes au centre de la surface de contact entre les ailes. Pour l'avion au sol, ce point correspond à $(x_A, y_A, 0)$.

Les résultats produits par cette fonction Matlab sont :

- `pcm=[pcm_x;pcm_y;pcm_z]`, le vecteur $\vec{r}_{c,n}$ indiquant la position du centre de masse du CRJ-200 en m ;
- `MI`, la matrice de moment d'inertie $\boldsymbol{I}$ du CRJ-200 par rapport à son centre de masse dans un système de référence aligné avec celui du laboratoire (kg$\times$m^2) ;
- `aa=[aa_x;aa_y;aa_z]`, le vecteur $\vec{\alpha}_{c,n}$ indiquant l'accélération angulaire du CRJ-200 autour de son centre de masse en rad/s.

Simulations requises

Vous devez ensuite utiliser cette fonction pour analyser deux différentes situations :

- Cas 1.

  L'avion est au sol (position indiquée à la figure 2) et sa vitesse angulaire est nulle. La force appliquée par chaque moteur est de 11 MN et la force de portée est de 260 MN. Ces forces sont dans les directions décrites ci-dessus.

- Cas 2.

  Le pilote décide de réduire la force appliquée par le moteur de droite après 90 secondes (les forces exercées par la portée et par le moteur de gauche demeurent les mêmes, mais la force exercée par le moteur droit est réduite à 8 MN). Après 100 secondes de vol la position du nez de l'avion est `posA`=[4198;0;618] m, son inclinaison est de $\theta = 0.15$ rad et sa vitesse angulaire est `va`=[0.0; -0.003; -0.01] rad/s.

Instructions pour le devoir

Le devoir sera noté sur 15. Cette note sera divisée en deux parties : 10 points seront alloués au rapport et 5 points à la fonction `Devoir1.m` que vous devez rendre avec le rapport.

- Évaluation du rapport (10 points)

  1. Mise en page (0,5 point).
     Ces points sont accordés pour la qualité globale du rapport.
  2. Orthographe et syntaxe (0,5 point)
     Le rapport devrait, si possible, être exempt d'erreurs de syntaxe.
  3. Introduction (0.5 point)
     Le rapport doit inclure une brève description du devoir.
  4. Théorie et équations(4 points)
     Vous devez fournir les équations utilisées par le logiciel.
  5. Présentation et analyse des résultats (4 points)
     Vous devez présenter et discuter les résultats obtenus pour les deux simulations requises.
  6. Conclusion (0,5 point)
     Vous devez inclure une discussion des problèmes rencontrés lors de la programmation et des simulations.

- Évaluation de la fonction requise pour les simulations (5 points)

  1. L'interface utilisateur est conforme aux instructions du devoir (1,5 point).
  2. Le logiciel peut être exécuté (2,0 points).
  3. Le logiciel possède toutes les fonctions demandées (1,5 point).

Moment d'inertie et centre de masse d'un cône plein de masse volumique uniforme

Le cône plein de direction z décrit à la figure 4 a un rayon r, une hauteur h et une masse m. Son axe est centré au point $x = 0$ et $y = 0$. Son volume est

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} ,$$

son centre de masse est $\vec{r}_c = (0, 0, h/4)^T$ et son moment d'inertie par rapport au centre de masse est

$$\boldsymbol{I} = m \begin{pmatrix} \frac{12r^2+3h^2}{80} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12r^2+3h^2}{80} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3r^2}{10} \end{pmatrix}$$

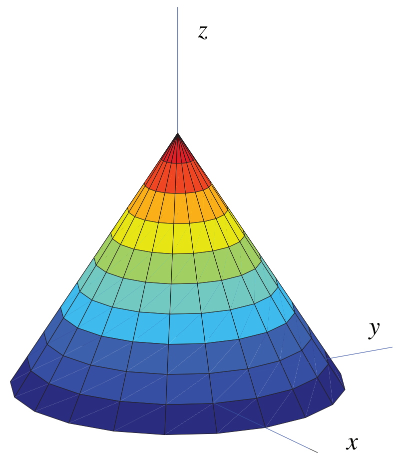

Figure 4: Géométrie d'un cône plein.

Solution

(a) Position du centre de masse du système de l'avion

La position $\vec{r}_{A,c}$ du centre de masse de l'avion est donnée par la relation

$$\vec{r}_{\text{CRJ-200},c} = \frac{1}{m_{\text{CRJ-200}}} \sum_{i=1}^{7} \vec{r}_{i,c} m_i \tag{1}$$

avec

$$m_{\text{CRJ-200}} = \sum_{i=1}^{7} m_i \tag{2}$$

où i identifie chacune des sept composantes de l'avion.

Pour l'avion au sol (Cas 1) les centres de masse sont situés à la position

1. *Cabine de pilotage. Le centre de la cabine de pilotage de masse $m_1 = 700$ kg et de moment d'inertie*

$$\boldsymbol{I}_1 = \begin{pmatrix} 380 & 0 & 0 \\ 0 & 573 & 0 \\ 0 & 0 & 573 \end{pmatrix} \text{ kg}\times\text{m}^2$$

   est localisé à $\vec{r}_{1,c} = (23.905, 0.0, 1.595)^T$ m.

2. *Fuselage*

   Le centre de masse du fuselage de masse $m_2 = 15100$ kg et de moment d'inertie

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 13658 & 0 & 0 \\ 0 & 669596 & 0 \\ 0 & 0 & 669596 \end{pmatrix} \text{ kg}\times\text{m}^2$$

   est localisé à $\vec{r}_{2,c} = (11.475, 0.0, 1.595)^T$ m.

3. *Aile droite.*

   Le centre de masse de l'aile droite de masse $m_3 = 3250$ kg et de moment d'inertie

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 30448 & 0 & 0 \\ 0 & 369 & 0 \\ 0 & 0 & 30783 \end{pmatrix} \text{ kg}\times\text{m}^2$$

   est localisé à $\vec{r}_{3,c} = (10.54, -5.3, 0.12)^T$ m.

4. *Aile gauche.*

   Le centre de masse de l'aile gauche de masse $m_4 = 3250$ *kg et de moment d'inertie*

$$\boldsymbol{I}_4 = \begin{pmatrix} 30448 & 0 & 0 \\ 0 & 369 & 0 \\ 0 & 0 & 30783 \end{pmatrix} \; kg{\times}m^2$$

   est localisé à $\vec{r}_{4,c} = (10.54, 5.3, 0.125)^T$ *m.*

5. *Aileron*

   Le centre de masse de l'aileron de masse $m_5 = 500$ *kg et de moment d'inertie*

$$\boldsymbol{I}_5 = \begin{pmatrix} 184 & 0 & 0 \\ 0 & 252 & 0 \\ 0 & 0 & 68 \end{pmatrix} \; kg{\times}m^2$$

   est localisé à $\vec{r}_{5,c} = (0.64, 0.0, 3.99)^T$ *m.*

6. *Moteur de droite*

   Le centre de masse du moteur de droite de masse $m_6 = 1700$ *kg et de moment d'inertie*

$$\boldsymbol{I}_6 = \begin{pmatrix} 446 & 0 & 0 \\ 0 & 2141 & 0 \\ 0 & 0 & 2141 \end{pmatrix} \; kg{\times}m^2$$

   est localisé à $\vec{r}_{6,c} = (5.0, -2.069, 1.59)^T$ *m.*

7. *Moteur de gauche*

   Le centre de masse du moteur de gauche de masse $m_7 = 700$ *kg et de moment d'inertie*

$$\boldsymbol{I}_7 = \begin{pmatrix} 446 & 0 & 0 \\ 0 & 2141 & 0 \\ 0 & 0 & 2141 \end{pmatrix} \; kg{\times}m^2$$

   est localisé à $\vec{r}_{7,c} = (5.0, 2.069, 1.59)^T$ *m.*

En utilisant les équations 1 et 2 on obtient

$$m_{\textit{CRJ-200}} = 26200 \; kg$$
$$\vec{r}_{\textit{CRJ-200},c} = (10.52809, 0.0, 1.27601)^T \; m$$

Pour déterminer le moment d'inertie total, il faut premièrement déplacer le moment d'inertie de chacune des composantes i *du système navette-lanceur de son centre de masse* $\vec{r}_{i,c}$ *au centre de masse de l'avion* $\vec{r}_{\text{CRJ-200},c}$. *Pour ce faire, on utilise*

$$\boldsymbol{I}_{i,d} = \boldsymbol{I}_i + m_i \begin{pmatrix} (d_{i,y}^2 + d_{i,z}^2) & -d_{i,x}d_{i,y} & -d_{i,x}d_{i,z} \\ -d_{i,y}d_{i,x} & (d_{i,x}^2 + d_{i,z}^2) & -d_{i,y}d_{i,z} \\ -d_{i,z}d_{i,x} & -d_{i,z}d_{i,y} & (d_{i,x}^2 + d_{i,y}^2) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} d_{i,x} &= x_{i,c} - x_{\text{CRJ-200},c} \\ d_{i,y} &= y_{i,c} - y_{\text{CRJ-200},c} \\ d_{i,z} &= z_{i,c} - z_{\text{CRJ-200},c} \end{aligned}$$

Le moment d'inertie final du CRJ-200 est

$$\boldsymbol{I}_{\text{CRJ-200}} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{I}_{i,d} = \begin{pmatrix} 287396 & 0 & 11955 \\ 0 & 981279 & 0 \\ 11955 & 0 & 1224815 \end{pmatrix} \text{ kg}\times\text{m}^2$$

L'accélération angulaire est donnée par

$$\vec{\alpha} = (\boldsymbol{I}_{\text{CRJ-200}})^{-1} \left(\vec{\tau}_{\text{CRJ-200}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{I}_{\text{CRJ-200}} \vec{\omega}\right)$$

Pour le Cas 1, $\vec{\omega} = (0, 0, 0)$ *rad/s et* $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ *est une matrice nulle. Le moment de force* $\vec{\tau}_{\text{CRJ-200}}$ *est donné par*

$$\vec{\tau}_{\text{CRJ-200}} = \sum_{j=1}^{3} (\vec{r}_j - \vec{r}_{\text{CRJ-200},c}) \times \vec{F}_j^1$$

où $\vec{r}_j$ *est le point où la force* $\vec{F}_j$ *est appliquée. Ici, nous avons trois forces qui contribuent au moment de force*

1. *Force du moteur droit :* $\vec{F}_1 = (11, 0, 0)^T$ *MN appliquée au point* $\vec{r}_1 = (3.16, -2.069, 1.595)^T$ *m.*

2. *Force du moteur gauche :* $\vec{F}_2 = (11, 0, 0)^T$ *MN appliquée au point* $\vec{r}_2 = (3.16, 2.069, 1.595)^T$ *m.*

3. *Force de portée :* $\vec{F}_3 = (0, 0, 260)^T$ *MN appliquée au point* $\vec{r}_3 = (10.54, 0.0, 0.0)^T$ *m.*

Le moment de force total est donc $\vec{\tau}_{\textit{CRJ-200}} = (0.0, 3921565, 0.0)^T$ *MN×m et l'accélération angulaire est* $\vec{\alpha}_{\textit{CRJ-200}} = (0, 3.99638, 0)^T$ *rad/s*^{2}.

Pour le Cas 2, où la navette est inclinée, le problème est un peu plus complexe, tout en demeurant relativement simple. La première étape consiste à définir la matrice de transformation pour une rotation de $\mu = -0.15$ *r autour de l'axe des* y*. Cette matrice est*

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos(\mu) & 0 & \sin(\mu) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\mu) & 0 & \cos(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.988771 & 0 & -0.149438 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.149438 & 0 & 0.988771 \end{pmatrix}$$

Le moment d'inertie de l'avion incliné est alors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}^{\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200}} &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_{\textit{CRJ-200}}(\boldsymbol{R})^T \\ &= \begin{pmatrix} 304797 & 0 & -127092 \\ 0 & 981279 & 0 \\ -127092 & 0 & 1207414 \end{pmatrix} \textit{kg×m}^2 \end{aligned}$$

Pour le moment de force total, on utilise

$$\vec{\tau}^{\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200}} = \sum_{j=1}^{3} \left(\boldsymbol{R}(\vec{r}_j - \vec{r}_{\textit{CRJ-200},c})\right) \times \vec{F}^2_j$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \boldsymbol{R}(8, 0, 0)^T \textit{ MN} \\ \vec{F}_2 &= \boldsymbol{R}(11, 0, 0)^T \textit{ MN} \\ \vec{F}_3 &= (0, 0, 260)^T \textit{ MN} \end{aligned}$$

car l'inclinaison de l'avion affecte la direction de la force des moteurs alors que la portée est dans une direction fixe (z*). De plus, la position d'application de chacune des trois forces est affectée par l'inclinaison. On obtient alors*

$$\vec{\tau}^{\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200}} = (927562, -46578674, -6137302)^T \textit{ N×m}$$

Pour l'accélération angulaire, on doit utiliser

$$\vec{\alpha}^{\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200}} = (\boldsymbol{I}^{\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200}})^{-1}\left(\vec{\tau}^{\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200}} - \vec{\omega} \times (\boldsymbol{I}^{\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200}}\vec{\omega})\right)$$

avec $\vec{\omega} = (0, -0.003, -0.01)^T$ *rad/s. On obtient alors*

$$\vec{\alpha}^{\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200}} = (0.96611, -47.46727, -4.98132)^T \textit{ rad/s}^2$$

La dernière étape consiste à déterminer la position du centre de masse de l'avion. Pour ce faire, il faut premièrement effectuer une rotation du vecteur $\vec{r}_{\textit{nez},c}$ *donnant la position du nez de l'avion par rapport au centre de masse de celui-ci dans le système initial*

$$\vec{r}_{\textit{nez},c} = \vec{r}_{\textit{nez}} - \vec{r}_c$$
$$\vec{r}^{\,\textit{Incliné}}_{\textit{nez},c} = R\vec{r}_{\textit{nez},c}$$

Ensuite, on détermine la position du nouveau centre de masse en utilisant

$$\vec{r}^{\,\textit{Incliné}}_{\textit{CRJ-200},c} = \vec{r}^{\,\textit{Incliné}}_{\textit{nez}} - \vec{r}^{\,\textit{Incliné}}_{\textit{nez},c} = (4181.96, 0, 615.44)^T \textit{ m}$$